# Bài 1. MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Mệnh đề toán học

***Ví dụ 1.*** Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề toán học?
a) Hà Nội là Thủ đô của Việt Nam;
b) Số $\pi$ là một số hữu tỉ;
c) $x=1$ có phải là nghiệm của phương trình $x^2-1=0$ không?
***Giải***
Câu a) không phải là một mệnh đề toán học.
Câu b) là một mệnh đề toán học.
Câu c) là một câu hỏi nên không phải là một mệnh đề toán học.
Mỗi mệnh đề toán học phải hoặc đúng hoặc sai. Một mệnh đề toán học không thể vừa đúng, vừa sai.
Khi mệnh đề toán học là đúng, ta gọi mệnh đề đó là một mệnh đề đúng.
Khi mệnh đề toán học là sai, ta gọi mệnh đề đó là một mệnh đề sai.
***Ví dụ 2.*** Tìm mệnh đề đúng trong những mệnh đề sau:
A: "Tam giác có ba cạnh";
B: "1 là số nguyên tố".
***Giải***
Mệnh đề $A$ là mệnh đề đúng; mệnh đề $B$ là mệnh đề sai vì 1 không là số nguyên tố.

### II. Mệnh đề chứa biến

Câu " n chia hết cho 3" là một *mệnh đề chứa biến*
Ta thường kí hiệu mệnh đề chứa biến $n$ là $P(n)$; mệnh đề chứa biến $x,y$ là $P(x,y)$;...
***Ví dụ 3.*** Trong những câu sau, câu nào là mệnh đề chứa biến?
a) 18 chia hết cho 9 ;
b) $3n$ chia hết cho 9 .
***Giải***
a) Câu " 18 chia hết cho 9 " là một mệnh đề nhưng không phải là mệnh đề chứa biến.
b) Câu "$3n$ chia hết cho 9" là một mệnh đề chứa biến, kí hiệu là $P(n)$:"$3n$ chia hết cho 9"

### III. Phủ định của một mệnh đề

Cho mệnh đề $P$. Mệnh đề " không phải $P$" được gọi là *mệnh đề phủ định* của mệnh đề $P$ và kí hiệu là $\overline{P}$.
Mệnh đề $\overline{P}$ *đúng* khi $P$ sai. Mệnh đề $\overline{P}$ *sai* khi $P$ đúng.
***Ví dụ 4.*** Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó:
A: "16 là bình phương của một số nguyên";
B: "Số 25 không chia hết cho 5".
***Giải***
Mệnh đề $\overline{A}$:"16 không phải là bình phương của một số nguyên" và $\overline{A}$ sai.
Mệnh đề $\overline{B}$:" Số 25 chia hết cho 5" và $\overline{B}$ đúng.
*Chú ý:* Để phủ định một mệnh đề (có dạng phát biểu như trên), ta chỉ cần thêm (hoặc bớt) từ "không" (hoặc "không phải") vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

### IV. Mệnh đề kéo theo

Cho hai mệnh đề $P$ và $Q$. Mệnh đề "Nếu $P$ thì $Q$ " được gọi là *mệnh đề kéo theo* và kí hiệu là $P\Rightarrow Q$.
Mệnh đề $P\Rightarrow Q$ sai khi $P$ đúng, $Q$ sai và đúng trong các trường hợp còn lại.
Nhận xét: Tuỳ theo nội dung cụ thể, đôi khi người ta còn phát biểu mệnh đề $P\Rightarrow Q$ là " $P$ kéo theo $Q$ " hay " $P$ suy ra $Q$ " hay "Vì $P$ nên $Q$"
***Ví dụ 5.*** Cho tam giác $ABC$. Xét hai mệnh đề:

$P$:"Tam giác $ABC$ có hai góc bằng $60^\circ$"; $Q$:"Tam giác $ABC$ đều".
Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

***Giải***

$P \Rightarrow Q$:"Nếu tam giác $ABC$ có hai góc bằng $60^\circ$ thì tam giác $ABC$ đều".
Mệnh đề trên là đúng.

*Nhận xét:* Các định lí toán học là những mệnh đề đúng và thường phát biểu ở dạng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$.
Khi đó ta nói
$P$ là *giả thiết*, $Q$ là *kết luận* của định lí, hay
$P$ là *điều kiện đủ* để có $Q$, hoặc $Q$ là *điều kiện cần* để có $P$.

## V. Mệnh đề đảo. Hai mệnh đề tương đương

- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói $P$ và $Q$ là hai *mệnh đề tương đương*, kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.

*Nhận xét:* Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ có thể phát biểu ở những dạng như sau:
- " $P$ tương đương $Q$ ";
- " $P$ là điều kiện cần và đủ để có $Q$ ";
- " $P$ khi và chỉ khi $Q$ ";
- " $P$ nếu và chỉ nếu $Q$ ".

***Ví dụ 6.*** Cho tam giác $ABC$. Xét mệnh đề dạng $P \Rightarrow Q$ như sau:
"Nếu tam giác $ABC$ vuông tại $A$ thì tam giác $ABC$ có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".
Phát biểu mệnh đề $Q \Rightarrow P$ và xác định tính đúng sai của hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$.

***Giải***

Mệnh đề $P$:"Tam giác $ABC$ vuông tại $A$"
Mệnh đề $Q$:"Tam giác $ABC$ có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".
Theo định lí Pythagore, hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng. Do đó, hai mệnh đề $P$ và $Q$ là tương đương và có thể phát biểu như sau: "Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ khi và chỉ khi tam giác $ABC$ có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ".

*Chú ý*: Trong toán học, những câu khẳng định đúng phát biểu ở dạng " $P \Leftrightarrow Q$ " cũng được coi là một mệnh đề toán học, gọi là *mệnh đề tương đương.*

## VI. Kí hiệu $\forall, \exists$

***Ví dụ 7.*** Sử dụng kí hiệu " $\forall$ " để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

a) $P$:"Với mọi số thực $x, x^2 + 1 > 0$".

b) $Q$:"Với mọi số tự nhiên $n, n^2 + n$ chia hết cho 6".

***Giải***

a) Mệnh đề được viết là $P$:"$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$". Để chứng minh mệnh đề $P$ là đúng, ta làm như sau:
Xét một số thực $x$ tuỳ ý, ta phải chứng tỏ rằng $x^2 + 1 > 0$. Thật vậy, ta có: $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Vậy mệnh đề $P$ là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề được viết là $Q$:"$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n^2 + n\right) : 6$".
Để chứng minh mệnh đề $Q$ là sai, ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể của $n$ để nhận được mệnh đề sai.
Thật vậy, chọn $n = 1$, ta thấy $n^2 + n = 2$ không chia hết cho 6. Vậy mệnh đề $Q$ là mệnh đề sai.

***Ví dụ 8.*** Sử dụng kí hiệu " $\exists$ " để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

a) $M$:"Tồn tại số thực $x$ sao cho $x^3 = -8$".

b) $N$:"Tồn tại số nguyên $x$ sao cho $2x + 1 = 0$".

***Giải***

a) Mệnh đề được viết là $M$:"$\exists x \in \mathbb{R}, x^3 = -8$".

Để chứng tỏ mệnh đề $M$ là đúng, ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể của $x$ để nhận được mệnh đề đúng. Thật vậy, chọn $x=-2$, ta thấy $(-2)^3=-8$. Vậy mệnh đề $M$ là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề đượcc viết là $N:"\exists x\in\mathbb{Z}, 2x+1=0"$.

Để chứng minh mệnh đề $N$ là sai, ta phải chứng tỏ rằng vối số nguyên $x$ tuỳ ý thì $2x+1\neq 0$. Thật vậy, xét một số nguyên $x$ tuỳ ý, ta có $2x+1$ không chia hết cho 2 nên $2x+1\neq 0$. Vì thế mệnh đề $N$ là mệnh đề sai.

*Chú ý:* Cách làm ở Ví dụ 7, Ví dụ 8 lần lượt cho chúng ta phương pháp chứng minh một mệnh đề có kí hiệu "$\forall$", có kí hiệu "$\exists$", là đúng hoặc sai.

Cho mệnh đề "$P(x), x\in X$".

- Phủ định của mệnh đề "$\forall x\in X, P(x)$" là mệnh đề "$\exists x\in X, \overline{P(x)}$".
- Phủ định của mệnh đề "$\exists x\in X, P(x)$" là mệnh đề "$\forall x\in X, \overline{P(x)}$".

***Ví dụ 9.*** Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

a) $\forall x\in\mathbb{R}, |x|\geq x$

b) $\exists x\in\mathbb{R}, x^2+1=0$

***Giải***

a) Phủ định của mệnh đề "$\forall x\in\mathbb{R}, |x|\geq x$" là mệnh đề "$\exists x\in\mathbb{R}, |x|<x$".

b) Phủ định của mệnh đề "$\exists x\in\mathbb{R}, x^2+1=0$" là mệnh đề "$\forall x\in\mathbb{R}, x^2+1\neq 0$".

## ►PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Mệnh đề toán học, mệnh đề chứa biến

**Câu 1.** Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề toán học. Nếu là mệnh đề toán học, xét tính đúng, sai của mệnh đề:

a. $1+2+4=10$
b. Năm 1997 là năm nhuận.
c. Hôm nay trời đẹp quá!
d. $x+1=4$.

**Câu 2.** Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề toán học, câu nào là mệnh đề chứa biến?

a) Số 11 là số chẵn.
b) Bạn có chăm học không?
c) Huế là một thành phố của Việt Nam.
d) $2x+3$ là một số nguyên dương.
e) $2-\sqrt{5}<0$.
f) $4+x=3$.
g) Hãy trả lời câu hỏi này!
h) Paris là thủ đô nước Ý.
i) Phương trình $x^2-x+1=0$ có nghiệm.
k) 13 là một số nguyên tố.

**Câu 3.** Trong các mệnh đề toán học sau, mệnh đề nào đúng? Giải thích?

a) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.
b) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau.
c) Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi chúng có một góc bằng tổng của hai góc còn lại.
d) Đường tròn có một tâm đối xứng và một trục đối xứng.
e) Hình chữ nhật có hai trục đối xứng.
f) Một tứ giác là hình thoi khi và chỉ khi nó có hai đường chéo vuông góc với nhau.
g) Một tứ giác nội tiếp được đường tròn khi và chỉ khi nó có hai góc vuông.

### Dạng 2. Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$. Xét hai mệnh đề sau:

$(P)$: "tam giác $ABC$ vuông"; $(Q)$: "$AB^2+AC^2=BC^2$"

Hãy phát biểu thành lời văn mệnh đề sau, và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai:

a. $(P)\Rightarrow(Q)$

b. $(Q) \Rightarrow (P)$.

**Câu 5.** Cho tứ giác $ABCD$. Xét hai mệnh đề:

$(P)$ : "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông"

$(Q)$: "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc".

Phát biểu $(P) \Rightarrow (Q)$ bằng hai cách, mệnh đề này đúng hay sai?.

**Câu 6.** Cho tam giác $ABC$. Lập mệnh đề $(P) \Rightarrow (Q)$ và mệnh đề đảo của nó, rồi xét tính đúng sai của chúng khi :

a. $(P)$: "Góc $A$ bằng $90^0$" $(Q)$: "Cạnh $BC$ lớn nhất"

b. $(P)$: "$\widehat{A} = \widehat{B}$" $(Q)$: "Tam giác $ABC$ cân".

**Câu 7.** Mệnh đề sau đúng, sai?

a) Điều kiện cần và đủ để $a = 0$ là $\frac{5}{a} = \frac{5}{b}$.

b) Điều kiện đủ để $x > y$ là $\sqrt{x} > \sqrt{y}$.

c) Điều kiện cần để tam giác ABC vuông là $AB^2 = BC^2 - AC^2$.

d) Điều kiện đủ để $\sqrt{x^2} = |x|$ là $x \geq 0$.

**Dạng 3. Mệnh đề tương đương**

**Câu 8.** Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a. Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.

b. Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau.

c. Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng của hai góc còn lại.

d. Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi nó có hai phân giác bằng nhau và một góc bằng $60^0$.

**Câu 9.** Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu:

a) Một tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi tổng hai góc đối diện của nó bằng $180^0$.

b) $x \geq y$ nếu và chỉ nếu $\sqrt[3]{x} \geq \sqrt[3]{y}$.

c) Tam giác cân khi và chỉ khi có trung tuyến bằng nhau.

**Câu 10.** Hãy sửa lại( nếu cần) các mệnh đề sau đây để được mệnh đề đúng:

a) Điều kiện cần và đủ để tứ giác T là một hình vuông là nó có bốn cạnh bằng nhau.

b) Điều kiện cần và đủ để tổng hai số tự nhiên chia hết cho 7 là mỗi số đó chia hết cho 7.

c) Điều kiện cần để $ab > 0$ là cả hai số $a$ và $b$ đều dương.

d) Điều kiện đủ để một số nguyên dương chia hết cho 3 là nó chia hết cho 3.

**Dạng 4. Mệnh đề phủ định. Mệnh đề chứa kí hiệu $\forall, \exists$**

**Câu 11.** Xét tính đúng, sai của các mệnh đề:

a. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 0$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 = x$

c. $\exists x \in \mathbb{Q}, 9x^2 - 4 = 0$

d. $\forall x \in \mathbb{Q}, 3x^2 - 5 = 0$.

**Câu 12.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng? Giải thích? Phát biểu các mệnh đề đó thành lời:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.

b) $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$.

c) $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$.

e) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 1 > 0$.

f) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$..

**Câu 13.** Các mệnh đề sau đây đúng hay sai, giải thích :

a. $\forall \in \mathbb{R}, x > -2 \Rightarrow x^2 > 4$

b. $\forall \in \mathbb{R}, x > -2 \Rightarrow x^2 < 4$

c. $\forall \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$

d. $\forall \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

**Câu 14.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng? Giải thích? Phát biểu các mệnh đề đó thành lời:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 5 \Rightarrow x < \sqrt{5}$.

c) $\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \le 1$.

d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 5$ là hợp số.

e) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3.

f) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)$ là số lẻ.

g) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6..

**Câu 15.** Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow \dfrac{2x}{x+1} < 1$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow \dfrac{2x}{x+1} > 1$.

c. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$ chia hết cho $6 \Rightarrow x$ chia hết cho 6.

d. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$ chia hết cho $9 \Rightarrow x$ chia hết cho 9.

**Câu 16.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$, với $x \in \mathbb{R}$. Tìm $x$ để $P(x)$ là mệnh đề đúng?

a) $P(x)$:"$x^2 - 5x + 4 = 0$".

b) $P(x)$:"$x^2 - 5x + 6 = 0$".

c) $P(x)$:"$x^2 - 3x > 0$".

d) $P(x)$:"$\sqrt{x} > x$".

e) $P(x)$:"$2x + 3 < 7$".

f) $P(x)$:"$x^2 + x + 1 > 0$".

**Câu 17.** Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau. Cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định

a. $P$: "Mọi hình thoi là hình vuông".

b. $P$: "Số chính phương có thể có chữ số tận cùng là $0,1,4,5,6,9$".

c. $P$: "Đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng cho trước là duy nhất".

**Câu 18.** Nêu mệnh đề phủ định của mệnh đề: "$\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ không chia hết cho 3".

**Câu 19.** Hãy phủ định của mệnh đề sau $P$:"$\forall x \in \mathbb{Q} : 3x^2 - 10x + 3 = 0$".

**Câu 20.** Cho mệnh đề $A$:"$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 3n$ chia hết cho 3". Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề $A$ và xét tính đúng sai của nó.

**Câu 21.** Phủ định các mệnh đề:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $x + y > 0$. b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.

c) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $x + y > 0$. d) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$, $x + y > 0$.

**Câu 22.** Xem xét các mệnh đề sau đúng hay sai và lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề:

a) $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$. b) $\exists x \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 4.

c) $\exists x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \ne x - 1$. d) $\forall x \in \mathbb{N}, n^2 > n$.

e) $\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ là một số chính phương.

**Câu 23.** Xét xem các mệnh đề sau đúng hay sai, lập mệnh đề phủ định của mệnh đề:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$. b) $\exists n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1) = 0$.

c) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 3$. d) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n + 2$.

## ►PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Mệnh đề toán học, mệnh đề chứa biến

**Câu 1.** Mệnh đề toán học là một khẳng định

**A.** Hoặc đúng hoặc sai. **B.** Đúng. **C.** Vừa đúng vừa sai. **D.** Sai.

**Câu 2.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề toán học?

**A.** An học lớp mấy? **B.** Các bạn hãy đọc đi!

**C.** $x - 3 = 5$ **D.** 2 là số lẻ.

**Câu 3.** Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề chứa biến?

**A.** 5 là số nguyên tố **B.** $x + 3 = 1$

**C.** Bạn có đi học không? **D.** Đề thi môn Toán khó quá!

**Câu 4.** Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề toán học?

a) Mấy giờ rồi ?

b) Buôn Mê Thuột là thành phố của Đắk Lắk.

c) 2023 là số nguyên tố.

d) Tổng các góc của một tam giác là $180°$

**A.** 4 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

**Câu 5.** Trong các câu sau, câu nào không phải mệnh đề toán học?

**A.** 8 là số chính phương.

**B.** Hình bình hành có hai cạnh đối song song và bằng nhau.

**C.** Việt Nam là nước thuộc Đông Nam Á

**D.** Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau.

**Câu 6.** Trong số các câu sau, câu nào là mệnh đề toán học?

**A.** Thời tiết hôm nay thật đẹp!

**B.** Các bạn có làm được bài kiểm tra này không?

**C.** Số 15 chia hết cho 2.

**D.** Chúc các bạn đạt điểm như mong đợi!

**Câu 7.** Trong các câu sau có bao nhiêu câu là mệnh đề toán học?

a) Huế là một thành phố của Việt Nam.

b) Sông Hương làm thành phố Huế thêm thơ mộng.

c) Hãy trả lời câu hỏi này!

d) $5 + 9 - 24$.

e) $6 + 81 = 25$.

f) Bạn có rỗi tối nay không?

g) $x + 2 = 11$.

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

**Câu 8.** Trong các câu sau có bao nhiêu câu là mệnh đề toán học:

(1): Số 3 là một số chẵn.

(2): $2x + 1 = 3$.

(3): Các em hãy cố gắng làm bài thi cho tốt.

(4): Tam giác vuông là tam giác có 1 góc vuông

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4

**Câu 9.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề chứa biến?

**A.** Người miền Trung khổ quá! **B.** Sài Gòn là thủ đô của nước Việt Nam.

**C.** 5 là số lẻ. **D.** Phương trình $x-1=0$ vô nghiệm.

**Câu 10.** Trong các câu sau, câu nào không phải là một mệnh đề toán học

**A.** Đăk Lak là 1 tỉnh thuộc Tây nguyên **B.** $8-4=4$.

**C.** Số 18 chia hết cho 6. **D.** $2+8=6$.

**Câu 11.** Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề toán học?

a) Hãy học thật tốt!

b) Số 32 chia hết cho 2.

c) Số 7 là số nguyên tố.

d) Số thực $x$ là số chẵn.

**A.** 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 12.** Chọn phát biểu ***không phải*** là mệnh đề toán học.

**A.** Số 19 chia hết cho 2. **B.** Hình thoi có hai đường chéo vuông góc.

**C.** Hôm nay trời không mưa. **D.** Tam giác đều có 3 góc bằng nhau.

**Câu 13.** Trong các câu sau đây, câu nào là mệnh đề toán học?

**A.** Hình vuông là hình có 4 góc vuông. **B.** Các bạn hãy làm bài đi!

**C.** Việt Nam là một nước thuộc châu **Á.** **D.** Anh học lớp mấy?

**Câu 14.** Câu nào trong các câu sau **không** phải là mệnh đề toán học?

**A.** $\frac{4}{2}=2.$ **B.** $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ.

**C.** $2+2=5.$ **D.** $\pi$ có phải là một số hữu tỷ không?

**Câu 15.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề toán học?

**A.** Tiết trời mùa thu thật dễ chịu! **B.** Số 15 không chia hết cho 2.

**C.** Bạn An có đi học không? **D.** Chúc các bạn học sinh thi đạt kết quả tốt!

**Câu 16.** Khẳng định nào sau đây là mệnh đề toán học?

**A.** 8 là một số chẵn **B.** Số $x$ nhỏ hơn 1.

**C.** TP.HCM ở miền nào của nước Việt Nam. **D.** Học hành tiến bộ nhé !

**Câu 17.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề toán học?

**A.** Số $n$ là một số chẵn. **B.** Hãy cố gắng học thật tốt!.

**C.** Số 24 chia hết cho 6. **D.** Bạn đã đội mũ bảo hiểm chưa?

**Câu 18.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề toán học?

**A.** Nha Trang là một thành phố ven biển ở Việt Nam.

**B.** 9 là bội của 3

**C.** Bài hát này hay thật!.

**D.** $4-3x$ chia hết cho 2.

**Câu 19.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề toán học **đúng**?

**A.** Tổng của hai cạnh một tam giác lớn hơn cạnh thứ ba.

**B.** 2 **chia hết cho** 3

**C.** Quảng Ngãi là một tỉnh ở miền trung

**D.** Tam giác $ABC$ cân tại $A$ thì $BC = AB$.

**Câu 20.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề toán học **đúng**?

**A.** $2+6=8$.

**B.** $x^2-1>0, \forall x \in \mathbb{R}$.

**C.** 14 là số nguyên tố.

**D.** Nếu một tam giác có một góc bằng $60^\circ$ thì tam giác đó là đều.

**Câu 21.** Trong các câu sau, câu nào là một **mệnh đề toán học đúng**?

**A.** "$\sqrt{9}>3$". **B.** "$\sqrt{9}\geq 3$". **C.** "$\sqrt{9}<3$". **D.** "$\sqrt{9}=81$".

**Câu 22.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là mệnh đề toán họcđúng?

**A.** Không có số chẵn nào là số nguyên tố. **B.** $-x^2<0.$

**C.** $2x^2-8=0.$ **D.** Phương trình $3x^2-6=0$ có nghiệm hữu tỷ.

**Câu 23.** Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề toán học?

(I) Hãy mở cửa ra! (II) Số $25$ chia hết cho $8$.

(III) Số $17$ là số nguyên tố. (IV) Bạn thích ăn phở không?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 24.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$:"$x+10\geq x^2$" với $x$ là số tự nhiên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $P(1)$. **B.** $P(2)$. **C.** $P(3)$. **D.** $P(4)$.

**Câu 25.** Tìm tất cả các giá trị thực của $x$ để mệnh đề $P$: "$2x-1\geq 0$" là mệnh đề **sai**?

**A.** $x\leq \frac{1}{2}$. **B.** $x\geq \frac{1}{2}$. **C.** $x>\frac{1}{2}$. **D.** $x<\frac{1}{2}$.

**Câu 26.** Với giá trị nào của $x\in\mathbb{R}$ thì mệnh đề chứa biến $P(x)$:"$x+1<x^2$" là đúng?

**A.** $x=0$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

**Câu 27.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$:"$x^2=4$", $x\in\mathbb{R}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

**A.** $P(4)$. **B.** $P(-3)$. **C.** $P(-2)$. **D.** $P(-1)$.

**Câu 28.** Với giá trị nào của $x$ mệnh đề chứa biến $P(x): 2x^2-1<0$ là mệnh đề đúng:

**A.** 1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** $\frac{4}{5}$.

**Câu 29.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***đúng***?

**A.** Nếu em chăm chỉ thì em thành công.

**B.** Nếu $a$ chia hết cho $9$ thì $a$ chia hết cho $3$.

**C.** Nếu một tam giác có một góc bằng $60°$ thì tam giác đó đều.

**D.** Nếu $a\geq b$ thì $a^2\geq b^2$.

**Câu 30.** Hãy chọn mệnh đề toán học **sai**.

**A.** $2+\sqrt{3}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$. **B.** 1 là số nguyên tố.

**C.** $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=2\sqrt{24}$. **D.** $-2\in\mathbb{Z}$.

**Câu 31.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x):"x+15\le x^2"$ với $x$ là số thực. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng ?

**A.** $P(2)$. **B.** $P(3)$. **C.** $P(-4)$. **D.** $P(0)$.

**Câu 32.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x)=\left\{x\in\mathbb{Z}:\left|x^2-2x-3\right|=x^2+\left|2x+3\right|\right\}$. Trong đoạn $[-2020;2021]$ có bao nhiêu giá trị của $x$ để mệnh đề chứa biến $P(x)$ là mệnh đề đúng?

**A.** 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

**Dạng 2. Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo**

**Câu 33.** Cho hai mệnh đề P và Q. Tìm điều kiện để mệnh đề $P\Rightarrow Q$ **sai**.

**A.** P đúng và Q đúng. **B.** P sai và Q đúng.

**C.** P đúng và Q sai. **D.** P sai và Q sai.

**Câu 34.** Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào là mệnh đề kéo theo?

**A.** "Nếu $x>1$ thì $x^2>1$". **B.** "$x^3>1$ khi và chỉ khi $x>1$".

**C.** "1 là một số lẻ". **D.** "$x^2>1\Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$".

**Câu 35.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

**A.** $-\pi<-2\Leftrightarrow\pi^2<4$. **B.** $\pi<4\Leftrightarrow\pi^2<16$.

**C.** $\sqrt{23}<5\Rightarrow 2\sqrt{23}<2.5$. **D.** $\sqrt{23}<5\Rightarrow -2\sqrt{23}>-2.5$.

**Câu 36.** Cách phát biểu nào sau đây không thể dùng để phát biểu mệnh đề: $A\Rightarrow B$.

**A.** Nếu $A$ thì $B$. **B.** $A$ kéo theo $B$.

**C.** $A$ là điều kiện cần để có $B$. **D.** $A$ là điều kiện đủ để có $B$.

**Câu 37.** Cho mệnh đề $P\Rightarrow Q$:" Nếu $3^2+1$ là số chẵn thì 3 là số lẻ ''. Chọn mệnh đề đúng:

**A.** Mệnh đề $Q\Rightarrow P$ là mệnh đề sai.

**B.** Cả mệnh đề $P\Rightarrow Q$ và $Q\Rightarrow P$ đều sai.

**C.** Mệnh đề $P\Rightarrow Q$ là mệnh đề sai.

**D.** Cả mệnh đề $P\Rightarrow Q$ và $Q\Rightarrow P$ đều đúng.

**Câu 38.** Mệnh đề: " Nếu một tứ giác là hình bình hành thì nó là hình thang" có thể được phát biểu lại là

**A.** Tứ giác $T$ là hình thang là điều kiện đủ để $T$ là hình bình hành.

**B.** Tứ giác $T$ là hình bình hành là điều kiện cần để $T$ là hình thang.

**C.** Tứ giác $T$ là hình thang là điều kiện cần để $T$ là hình bình hành.

**D.** Tứ giác $T$ là hình thang là điều kiện cần và đủ để $T$ là hình bình hành.

**Câu 39.** Tìm mệnh đề **sai**.

**A.** Hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)\Leftrightarrow ABCD$ là hình thang cân.

**B.** 63 chia hết cho 7 $\Rightarrow$ Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc.

**C.** Tam giác $ABC$ vuông tại $C\Leftrightarrow AB^2=CA^2+CB^2$.

**D.** 10 chia hết cho 5 $\Leftrightarrow$ Hình vuông có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc nhau.

**Câu 40.** Cho định lí $"\forall x\in X,P(x)\Rightarrow Q(x)"$. Chọn khẳng định ***không*** đúng.

**A.** $P(x)$ là điều kiện đủ để có $Q(x)$. **B.** $Q(x)$ là điều kiện cần để có $P(x)$.

**C.** $P(x)$ là giả thiết và $Q(x)$ là kết luận. **D.** $P(x)$ là điều kiện cần để có $Q(x)$.

**Câu 41.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

**A.** Nếu số nguyên $n$ có chữ số tận cùng là $0$ thì số nguyên $n$ chia hết cho 5.

**B.** Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thoi thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau.

**C.** Nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật

**D.** Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau.

**Câu 42.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để diện tích của chúng bằng nhau.

**B.** Số tự nhiên chia hết cho 5 là điều kiện đủ để nó có tận cùng bằng 5.

**C.** Điều kiện đủ để hình bình hành $ABCD$ là hình thoi.

**D.** Tứ giác $ABCD$ là hình thoi là điều kiện cần và đủ để tứ giác đó là hình bình hành và có hai đường chéo vuông góc với nhau.

**Câu 43.** Phát biểu nào sau đây là **sai**?

**A.** Điều kiện cần và đủ để tập $A$ có $n$ phần tử là tập $A$ có $2^n$ tập con.

**B.** Tập $A$ có $2^n$ tập con là điều kiện cần để tập $A$ có $n$ phần tử.

**C.** Không thể phát biểu mệnh đề : "Nếu tập $A$ có $n$ phần tử thì tập $A$ có $2^n$ tập con" dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.

**D.** Tập $A$ có $n$ phần tử là điều kiện đủ để tập $A$ có $2^n$ tập con.

**Câu 44.** Cho mệnh đề: "Một số là số chính phương khi và chỉ khi chữ số tận cùng của nó là: $0;1;4;5;6;9$. Xét các khẳng định sau.

(1) Không thể phát biểu mệnh đề trên bằng thuật ngữ điều kiện cần và đủ.

(2) Điều kiện cần để một số là số chính phương là chữ số tận cùng của nó là một trong các số $0;1;4;5;6;9$.

(3) Một số là số chính phương là điều kiện đủ để chữ số tận cùng của nó là $0;1;4;5;6;9$.

(4) Điều kiện cần để một số có chữ số tận cùng $0;1;4;5;6;9$ là số đó là số chính phương.

Hãy cho biết có bao nhiêu phát biểu đúng?

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Câu 45.** Cho mệnh đề: "Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều". Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Điều kiện đủ để một tam giác là tam giác đều là tam giác đó có hai góc bằng nhau.

**B.** Một tam giác là tam giác đều là điều kiện cần để tam giác đó có hai góc bằng nhau.

**C.** Không thể phát biểu mệnh đề trên dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.

**D.** Điều kiện cần và đủ để tam giác đều là tam giác đó có hai góc bằng nhau.

**Câu 46.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

**A.** Hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau là điều kiện cần và đủ để $ABCD$ là hình chữ nhật.

**B.** Tam giác $ABC$ có một góc $60^0$ là điều kiện đủ để tam giác $ABC$ đều.

**C.** Số nguyên $a$ chia hết cho 3 là điều kiện cần để $a$ chia hết cho 6.

**D.** Số $3n-5\left(n\in\mathbb{N}\right)$ là số lẻ là điều kiện đủ để số $6n\left(n\in\mathbb{N}\right)$ là số chẵn.

**Câu 47.** Cách phát biểu nào sau đây **không thể** đúng để phát biểu mệnh đề: $A\Rightarrow B$

**A.** $A$ là điều kiện đủ để có $B$. **B.** Nếu $A$ thì $B$.

**C.** $A$ kéo theo $B$. **D.** $A$ là điều kiện cần để có $B$.

**Câu 48.** Mệnh đề nào sau đây có mệnh đề đảo đúng?

**A.** Nếu $a=b$ thì $a^2=b^2$.

**B.** Nếu một phương trình bậc hai có $\Delta < 0$ thì phương trình đó vô nghiệm.

**C.** Nếu một số chia hết cho $6$ thì cũng chia hết cho $3$.

**D.** Nếu hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

**Dạng 3. Mệnh đề tương đương**

**Câu 49.** Cho mệnh đề E:"Nếu số nguyên có chữ số tận cùng bằng $0$ thì chia hết cho $5$". Mệnh đề nào sau đây tương đương với mệnh đề E?

**A.** Nếu số nguyên chia hết cho $5$ thì có chữ số tận cùng bằng $0$.

**B.** Nếu số nguyên không chia hết cho $5$ thì không có tận cùng bằng 0.

**C.** Nếu số nguyên không có chữ số tận cùng bằng $0$ thì chia hết cho $5$.

**D.** Nếu số nguyên không có chữ số tận cùng bằng $0$ thì không chia hết cho $5$.

**Câu 50.** Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ chỉ đúng khi nào? (*Hãy chọn đáp án chính xác nhất*)

**A.** Cả $P$ và $Q$ đều đúng.

**B.** Cả $P$ và $Q$ đều sai.

**C.** Cả $P$ và $Q$ đều cùng đúng hoặc cùng sai.

**D.** Cả $P$ và $Q$ đều vừa đúng vừa sai.

**Câu 51.** Cho mệnh đề $P$:" Nếu $a+b<2$ thì một trong hai số $a$ và $b$ nhỏ hơn 1''. Mệnh đề nào sau đây tương đương với mệnh đề đã cho?

**A.** Điều kiện đủ để một trong hai số $a$ và $b$ nhỏ hơn 1 là $a+b<2$.

**B.** Điều kiện cần để một trong hai số $a$ và $b$ nhỏ hơn 1 là $a+b<2$.

**C.** Điều kiện đủ để $a+b<2$ là một trong hai số $a$ và $b$ nhỏ hơn 1.

**D.** Cả B và **C.**

**Câu 52.** Cho mệnh đề kéo theo: " Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau". Hãy phát biểu lại mệnh đề trên bằng cách sử dụng " điều kiện cần" hoặc " điều kiện đủ".

**A.** Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để hai tam giác có diện tích bằng nhau.

**B.** Điều kiện cần và đủ để hai tam giác có diện tích bằng nhau là hai tam giác bằng nhau.

**C.** Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để hai tam giác có diện tích bằng nhau.

**D.** Điều kiện đủ để hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có diện tích bằng nhau.

**Câu 53.** Cho $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề đúng. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

**A.** $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$ đúng. **B.** $\overline{Q} \Leftrightarrow P$ sai. **C.** $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$ sai. **D.** $\overline{P} \Leftrightarrow Q$ sai.

**Câu 54.** Cho hai tập hợp $A$ và $B$. Mệnh đề $"\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B"$ tương đương với mệnh đề nào sau đây?

**A.** $A \neq B$. **B.** $A = B$. **C.** $A \subset B$. **D.** $B \subset A$.

**Câu 55.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai?

**A.** Một tam giác là đều khi và chỉ khi chúng có hai đường trung tuyến bằng nhau và có một góc bằng $60°$.

**B.** Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một cạnh bình phương bằng tổng bình phương hai cạnh còn lại.

**C.** Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi chúng có 3 góc vuông.

**D.** Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một góc bằng nhau.

**Câu 56.** Cho hai mệnh đề toán học

$A$: " $3<2$";

$B$: " Tứ giác có 4 cạnh bằng nhau là hình vuông ";

Hãy cho biết trong các mệnh đề $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $B \Leftrightarrow A$ có bao nhiêu mệnh đề **sai**

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 57.** Cho mệnh đề: "Nếu $n$ là một số nguyên tố lớn 3 thì $n^2+20$ là một hợp số". Mệnh đề nào sau đây tương đương với mệnh đề đã cho?

**A.** Điều kiện cần và đủ để $n^2+20$ là một hợp số là $n$ là một số nguyên tố lớn 3.

**B.** Điều kiện đủ để $n^2+20$ là một hợp số là $n$ là một số nguyên tố lớn 3.

**C.** Điều kiện cần để $n^2+20$ là một hợp số là $n$ là một số nguyên tố lớn 3.

**D.** $n^2+20$ là một hợp số là điều kiện đủ để $n$ là một số nguyên tố lớn 3.

**Dạng 4. Mệnh đề phủ định. Mệnh đề chứa kí hiệu ∀, ∃**

**Câu 58.** Cho mệnh đề $A$:"2 là số nguyên tố". Mệnh đề phủ định của mệnh đề $A$ là

**A.** 2 không phải là số hữu tỷ. **B.** 2 là số nguyên.

**C.** 2 không phải là số nguyên tố. **D.** 2 là hợp số.

**Câu 59.** Phủ định của mệnh đề "$n>9$" là

**A.** "$-n>9$". **B.** "$-n>-9$".

**C.** "$n<9$". **D.** "$n\le 9$".

**Câu 60.** Cho mệnh đề $A=$"$\exists n\in\mathbb{N}:3n+1$ là số lẻ", mệnh đề phủ định của mệnh đề $A$ và tính đúng, sai của mệnh đề phủ định là:

**A.** $\overline{A}=$"$\forall n\in\mathbb{N}:3n+1$ là số chẵn". Đây là mệnh đề đúng.

**B.** $\overline{A}=$"$\forall n\in\mathbb{N}:3n+1$ là số chẵn". Đây là mệnh đề sai.

**C.** $\overline{A}=$"$\exists n\in\mathbb{N}:3n+1$ là số chẵn". Đây là mệnh đề sai.

**D.** $\overline{A}=$"$\exists n\in\mathbb{N}:3n+1$ là số chẵn". Đây là mệnh đề đúng.

**Câu 61.** Mệnh đề $P(x)$:"$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2-x+3<0$". Phủ định của mệnh đề $P(x)$ là:

**A.** $\exists x\in\mathbb{R},\ x^2-x+3>0$. **B.** $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2-x+3>0$.

**C.** $\forall x\notin\mathbb{R},\ x^2-x+3\ge 0$. **D.** $\exists x\in\mathbb{R},\ x^2-x+3\ge 0$.

**Câu 62.** Mệnh đề "$\exists x\in\mathbb{R},x^2=3$" khẳng định rằng:

**A.** Bình phương của mỗi số thực bằng 3.

**B.** Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 3.

**C.** Chỉ có một số thực có bình phương bằng 3.

**D.** Nếu $x$ là số thực thì $x^2=3$.

**Câu 63.** Mệnh đề $P(x)$:"$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2-x+7<0$". Phủ định của mệnh đề $P$ là

**A.** $\exists x\in\mathbb{R},\ x^2-x+7>0$. **B.** $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2-x+7>0$.

**C.** $\forall x\notin\mathbb{R},\ x^2-x+7\ge 0$. **D.** $\exists x\in\mathbb{R},\ x^2-x+7\ge 0$.

**Câu 64.** Mệnh đề phụ định của mệnh đề $P(x)$:"$\exists x\in\mathbb{R}:x^2+2x+5$ là số nguyên số" là

**A.** $\forall x\notin\mathbb{R}:x^2+2x+5$ không là số nguyên tố. **B.** $\exists x\in\mathbb{R}:x^2+2x+5$ không là số nguyên tố.

**C.** $\forall x\in\mathbb{R}:x^2+2x+5$ không là số nguyên tố. **D.** $\exists x\in\mathbb{R}:x^2+2x+5$ là số thực.

**Câu 65.** Cho mệnh đề $A=$"$\forall x\in\mathbb{R}:x^2<x$". Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là phủ định của mệnh đề $A$?

**A.** "$\exists x\in\mathbb{R}:x^2<x$". **B.** "$\exists x\in\mathbb{R}:x^2\ge x$". **C.** "$\exists x\in\mathbb{R}:x^2<x$". **D.** "$\exists x\in\mathbb{R}:x^2\le x$".

**Câu 66.** Cho mệnh đề $\mathrm{P}(x)=$"$\exists x\in\mathbb{R}:x+1\ge 0$". Phát biểu nào sau đây là mệnh đề phủ định của mệnh đề $\mathrm{P}(x)$?

**A.** $\overline{\mathrm{P}(x)}=\text{"}\exists x\in\mathbb{R}:x+1<0\text{"}$.  **B.** $\overline{\mathrm{P}(x)}=\text{"}\forall x\in\mathbb{R}:x+1<0\text{"}$.

**C.** $\overline{\mathrm{P}(x)}=\text{"}\forall x\in\mathbb{R}:x+1\le 0\text{"}$.  **D.** $\overline{\mathrm{P}(x)}=\text{"}\exists x\in\mathbb{R}:x+1\le 0\text{"}$.

**Câu 67.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P=$ "$\forall x\in\mathbb{N}:x^2+x-1>0$" là:

**A.** $\overline{P}=$ "$\exists x\in\mathbb{N}:x^2+x-1>0$".  **B.** $\overline{P}=$ "$\exists x\in\mathbb{N}:x^2+x-1<0$".

**C.** $\overline{P}=$ "$\exists x\in\mathbb{N}:x^2+x-1\le 0$".  **D.** $\overline{P}=$ "$\forall x\in\mathbb{N}:x^2+x-1\le 0$".

**Câu 68.** Mệnh đề nào sau là mệnh đề **sai**?

**A.** $\forall n\in\mathbb{N}:n\le 2n$.  **B.** $\exists n\in\mathbb{N}:n^2=n$.  **C.** $\forall x\in\mathbb{R}:x^2>0$.  **D.** $\exists x\in\mathbb{R}:x>x^2$.

**Câu 69.** Mệnh đề "$\exists x\in\mathbb{R},x^2=8$" Khẳng định rằng:

**A.** Bình Phương của tất cả các số thực bằng 8.

**B.** Có duy nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 8.

**C.** Nếu $x$ là số thực thì $x^2=8$.

**D.** Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 8.

**Câu 70.** Phủ định của mệnh đề $P(x):\text{"}\exists x\in\mathbb{R},\ x^2+2x=3\text{"}$ là:

**A.** $\text{"}\exists x\in\mathbb{R},x^2+2x=3\text{"}$.  **B.** $\text{"}\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+2x=3\text{"}$..

**C.** $\text{"}\exists x\in\mathbb{R},\ x^2+2x\ne 3\text{"}$.  **D.** $\text{"}\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+2x\ne 3\text{"}$.

**Câu 71.** Trong các mệnh đề sau tìm mệnh đề **sai**?

**A.** $\forall n\in\mathbb{N}:n\le 2n$.  **B.** $\exists n\in\mathbb{N}:n+1>n$.  **C.** $\forall n\in\mathbb{R}:n^2>0$.  **D.** $\exists n\in\mathbb{R}:n^2\le n$.

**Câu 72.** Viết mệnh đề sau bằng cách sử dụng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$: "Có một số nguyên bằng bình phương của chính nó".

**A.** $\forall x\in\mathbb{R},x=x^2$.  **B.** $\forall x\in\mathbb{Z},x^2=x$.  **C.** $\exists x\in\mathbb{Z},x=x^2$.  **D.** $\exists x\in\mathbb{R},x^2-x=0$.

**Câu 73.** Cho mệnh đề $\text{"}\forall x\in\mathbb{R},x^2-72x+7<0\text{"}$. Phủ định của mệnh đề trên là

**A.** $\forall x\in\mathbb{R},x^2-72x+7\ge 0$.  **B.** $\exists x\in\mathbb{R},x^2-72x+7\ge 0$.

**C.** $\exists x\in\mathbb{R},x^2-72x+7>0$.  **D.** $\forall x\in\mathbb{R},x^2-72x+7>0$.

**Câu 74.** Cho mệnh đề: $\text{"}\exists x\in\mathbb{R},x^2+x+1=0\text{"}$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là:

**A.** $\text{"}\forall x\in\mathbb{R},x^2+x+1=1\text{"}$.  **B.** $\text{"}\forall x\in\mathbb{R},x^2+x+1\ne 0\text{"}$.

**C.** $\text{"}\forall x\in\mathbb{R},x^2+x+1=0\text{"}$.  **D.** $\text{"}\exists x\in\mathbb{R},x^2+x+1\ne 0\text{"}$.

**Câu 75.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** "$\exists n\in\mathbb{N},n(n+1)(n+2)$ là số lẻ".  **B.** "$\forall x\in\mathbb{R},x^2<4\Leftrightarrow -2<x<2$".

**C.** "$\exists n\in\mathbb{N},n^2+1$ chia hết cho 3".  **D.** "$\forall x\in\mathbb{R},x^2\ge 9\Leftrightarrow x\ge\pm 3$".

**Câu 76.** Cho mệnh đề $P:\text{"}\forall x\in Z,(2x+1)^2$ không chia hết cho $4\text{"}$. Mệnh đề $\overline{P}$ là:

**A.** $\text{"}\exists x\in Z,(2x+1)^2$ chia hết cho $4\text{"}$.  **B.** $\text{"}\exists x\in Z,(2x+1)^2$ không chia hết cho $4\text{"}$.

**C.** $\text{"}\forall x\in Z,(2x+1)^2$ không chia hết cho $4\text{"}$.  **D.** $\text{"}\forall x\in Z,(2x+1)^2$ chia hết cho $4\text{"}$.

**Câu 77.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

**A.** $\exists x\in\mathbb{R}:x^2-3x+2=0$.  **B.** $\forall x\in\mathbb{R}:x^2\ge 0$.

**C.** $\exists n\in\mathbb{N}:n^2=n$.  **D.** $\forall n\in\mathbb{N}$ thì $n<2n$.

**Câu 78.** Phủ định của mệnh đề: "$\exists x \in \mathbb{N} : x^2 - 4x - 5 > 0$" là

**A.** "$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 - 4x - 5 < 0$".

**B.** "$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 - 4x - 5 \le 0$".

**C.** "$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 - 4x - 5 \ge 0$".

**D.** "$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 - 4x - 5 > 0$".

**Câu 79.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề chứa biến $P : "\exists x \in \mathbb{R} : 2x + 1 > 0"$ là

**A.** $\overline{P} : "\forall x \in \mathbb{R} : 2x + 1 \le 0"$.

**B.** $\overline{P} : "\forall x \in \mathbb{R} : 2x + 1 < 0"$.

**C.** $\overline{P} : "\forall x \in \mathbb{R} : 2x + 1 > 0"$.

**D.** $\overline{P} : "\exists x \in \mathbb{R} : 2x + 1 \le 0"$.

**Câu 80.** Cho mệnh đề $P : "\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 < 0"$. Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề $P$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

**A.** $\overline{P} : "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 \ge 0"$ và đây là mệnh đề sai.

**B.** $\overline{P} : "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 > 0"$ và đây là mệnh đề sai.

**C.** $\overline{P} : "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 \ge 0"$ và đây là mệnh đề đúng.

**D.** $\overline{P} : "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 > 0"$ và đây là mệnh đề đúng.

**Câu 81.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P :$ " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$" là

**A.** $\overline{P} : "\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \le 0"$.

**B.** $\overline{P} : "\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 0"$.

**C.** $\overline{P} : "\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \le 0"$.

**D.** $\overline{P} : "\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 0"$.

**Câu 82.** Cho mệnh đề $A : "\forall x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 \le 0"$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $A$ là

**A.** $\overline{A} : "\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 \le 0"$.

**B.** $\overline{A} : "\forall x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 \ge 0"$.

**C.** $A : "\forall x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 > 0"$.

**D.** $A : "\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 > 0"$.

**Câu 83.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P : "\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 2x"$ là

**A.** $\overline{P} : "\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 2x"$.

**B.** $\overline{P} : "\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \le 2x"$.

**C.** $\overline{P} : "\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 2x"$.

**D.** $\overline{P} : "\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \le 2x"$.

**Câu 84.** Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$" là

**A.** $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \le 0$.

**B.** $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \le 0$.

**C.** $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$.

**D.** $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \ge 0$.

**Câu 85.** Cho mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{Z}, 4x^2 - 1 = 0$". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là

**A.** "$\forall x \in \mathbb{Z}, 4x^2 - 1 = 0$".

**B.** "$\forall x \in \mathbb{Z}, 4x^2 - 1 \ne 0$".

**C.** "$\forall x \in \mathbb{Z}, 4x^2 - 1 > 0$".

**D.** "$\exists x \in \mathbb{Z}, 4x^2 - 1 \ne 0$".

**Câu 86.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

**A.** $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = 3$.

**B.** $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n \ge 0$.

**C.** $\forall x \in \mathbb{N}, (x-2)^2 < x^2$.

**D.** $\exists n \in \mathbb{N}, 3^n < n + 3$.

**Câu 87.** Mệnh đề nào sau đây có mệnh đề **phủ định đúng**:

**A.** "$\forall n \in \mathbb{N} : 2n \ge n$".

**B.** "$\forall x \in \mathbb{R} : x < x + 1$".

**C.** "$\exists x \in \mathbb{R} : 3x = x^2 + 1$".

**D.** "$\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$".

**Câu 88.** Tìm mệnh đề **đúng?**

**A.** "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 3 = 0$".

**B.** "$\forall x \in \mathbb{Z} : x^5 > x^2$".

**C.** "$\forall x \in \mathbb{N} : (2x+1)^2 - 1$ chia hết cho $4$".

**D.** "$\exists x \in \mathbb{R} : x^4 + 3x^2 + 2 = 0$".

**Câu 89.** Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề: $P : "\exists x \in \mathbb{R} : 2x - 1 < 0"$

**A.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R}:2x-1\geq 0"$. **B.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R}:2x-1>0"$.

**C.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R}:2x-1\leq 0"$. **D.** $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R}:2x-1>0"$.

**Câu 90.** Mệnh đề phủ định của $P:"\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>0"$ là

**A.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\leq 0"$ **B.** $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R},\ x^2\leq 0"$.

**C.** $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R},\ x^2<0"$. **D.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R},\ x^2<0"$

**Câu 91.** Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

**A.** $\exists x\in\mathbb{R},|x|<0$. **B.** $|x|<2\Leftrightarrow x<2$. **C.** $\forall x\in\mathbb{R},x^2>0$. **D.** $\exists x\in\mathbb{R},x^2\leq x$.

**Câu 92.** Phủ định của mệnh đề $P(x):"\exists x\in\mathbb{R}:2x-3x^2=1"$ là:

**A.** $"\forall x\in\mathbb{R},2x-3x^2\neq 1"$. **B.** $"\exists x\in\mathbb{R},2x-3x^2\neq 1"$.

**C.** $"\forall x\in\mathbb{R},2x-3x^2=1"$. **D.** $"\forall x\in\mathbb{R},2x-3x^2\geq 1"$.

**Câu 93.** Cho mệnh đề $A:$ "$\forall x\in R,\ x^2-x+2<0$". Mệnh đề phủ định của $A$ là:

**A.** $\forall x\in R,\ x^2-x+2>0$. **B.** $\exists x\in R,\ x^2-x+2\geq 0$.

**C.** $\not\exists x\in R,\ x^2-x+2<0$. **D.** $\forall x\in R,\ x^2-x+2\geq 0$.

**Câu 94.** Mệnh đề phủ định $\overline{P}$ của mệnh đề $P=\{\forall x\in\mathbb{N}\mid x^2-1=0\}$ là

**A.** $\overline{P}=\{\forall x\in\mathbb{N}\mid x^2-1>0\}$. **B.** $\overline{P}=\{\exists x\in\mathbb{N}\mid x^2-1\neq 0\}$.

**C.** $\overline{P}=\{\forall x\in\mathbb{N}\mid x^2-1\geq 0\}$. **D.** $\overline{P}=\{\exists x\in\mathbb{N}\mid x^2-1<0\}$.

**Câu 95.** Mệnh đề $"\exists x\in\mathbb{R},\ x^2=3"$ khẳng định rằng:

**A.** Bình phương của mỗi số thực bằng $3$.

**B.** Nếu $x$ là số thực thì $x^2=3$.

**C.** Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng $3$.

**D.** Chỉ có một số thực có bình phương bằng $3$.

**Câu 96.** Viết mệnh đề sau bằng cách sử dụng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$: "Cho hai số thực khác nhau bất kì, luôn tồn tại một số hữu tỉ nằm giữa hai số thực đã cho"

**A.** $\forall a,b\in\mathbb{R},\forall r\in\mathbb{Q}:a<r<b$. **B.** $\forall a,b\in\mathbb{R},a<b,\exists r\in\mathbb{Q}:a<r<b$.

**C.** $\forall a,b\in\mathbb{R},a<b,\forall r\in\mathbb{Q}:a<r<b$. **D.** $\exists a,b\in\mathbb{R},\exists r\in\mathbb{Q}:a<r<b$.

**Câu 97.** Cho $A:"\forall x\in\mathbb{A}:x^2+2x+1>0"$ thì phủ định của A là:

**A.** $"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+2x+1\neq 0"$. **B.** $"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+2x+1<0"$.

**C.** $"\forall x\in\mathbb{R}:x^2+1\leq 0"$. **D.** $"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+2x+1\leq 0"$.

**Câu 98.** Cho mệnh đề: $"\forall x\in R,\frac{2}{x^2-x+1}>0"$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là:

**A.** Không tồn tại $x\in R$ mà $\frac{2}{x^2-x+1}>0$. **B.** $\forall x\in R,\frac{2}{x^2-x+1}\leq 0$.

**C.** $\exists x\in R,\frac{2}{x^2-x+1}\leq 0$. **D.** $\forall x\in R,\frac{2}{x^2-x+1}<0$.

**Câu 99.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** $\exists n\in\mathbb{N},(n+1)(n-2)$ chia hết cho $7$. **B.** $\exists n\in\mathbb{N},n^2+1$ chia hết cho $4$.

**C.** $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq x-1$.

**D.** $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 3 \Leftrightarrow x < 3$.

**Câu 100.** Mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 3$" khẳng định rằng:

**A.** Bình phương của mỗi số thực bằng $3$.

**B.** Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng $3$.

**C.** Chỉ có một số thực mà bình phương của nó bằng $3$.

**D.** Nếu $x$ là số thực thì $x^2 = 3$.

**Câu 101.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

**A.** "$\exists x \in \mathbb{Q}, x$ chia hết cho $5$".

**B.** "$\forall x \in \mathbb{R} : 5.x = x.5$".

**C.** "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 2 > 0$".

**D.** "$\exists x \in \mathbb{Z} : 2x + 3 = 6$".

**Câu 102.** Cho mệnh đề: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 > 0$". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là

**A.** $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 \leq 0$.

**B.** $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 > 0$.

**C.** $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 < 0$.

**D.** $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 \leq 0$.

**Câu 103.** Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

**A.** $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 > n$.

**B.** $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 < 2$.

**C.** $\forall x \in \mathbb{Z} : 2x > 1$.

**D.** $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > x$.

**Câu 104.** Cho mệnh đề $P$: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 1 < 0$". Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P$ là

**A.** $\overline{P}$: "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 1 \geq 0$".

**B.** $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 1 \geq 0$".

**C.** $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 1 > 0$".

**D.** $\overline{P}$: "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 1 < 0$".

**Câu 105.** Mệnh đề nào sau đây phủ định mệnh đề *P*: '' tích 3 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 6''

**A.** $\overline{P}$: "$\forall n \in N, n(n+1)(n+2) \vdots 6$".

**B.** $\overline{P}$: "$\exists n \in N, n(n+1)(n+2) \not\vdots 6$".

**C.** $\overline{P}$: "$\exists n \in N, n(n+1)(n+2) \vdots 6$".

**D.** $\overline{P}$: "$\forall n \in N, n(n+1)(n+2) \not\vdots 6$".

**Câu 106.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

**A.** $\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 11n + 2$ chia hết cho $11$.

**B.** $\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ chia hết cho $4$.

**C.** Tồn tại số nguyên tố chia hết cho $5$.

**D.** $\exists n \in \mathbb{Z}$, $2n^2 - 8 = 0$.

**Câu 107.** Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.**" $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ là số chính phương".

**B.**" $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ là số lẻ".

**C.**" $\exists n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)$ là số lẻ".

**D.**" $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6".

**Câu 108.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ không chia hết cho $3$.

**B.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < 3 \Leftrightarrow x < 3$.

**C.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^2 \neq x - 1$.

**D.** $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho $4$.

**Câu 109.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

**A.** $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x^2 - 8 = 0$.

**B.** $\exists n \in \mathbb{N}, (n^2 + 11n + 2)$ chia hết cho $11$.

**C.** Tồn tại số nguyên tố chia hết cho $5$.

**D.** $\exists n \in \mathbb{N}, (n^2 + 1)$ chia hết cho $4$.

**Câu 110.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

**A.** $\exists n \in \mathbb{N}, (n^2 + 17n + 1)$ chia hết cho 17.

**B.** $\exists n \in \mathbb{N}, (n^2 + 1)$ chia hết cho 4.

**C.** Tồn tại số nguyên tố chia hết cho 13. **D.** $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 - 4 = 0$.

**Câu 111.** Cho $n$ là số tự nhiên,mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\forall n, n(n+1)$ là số lẻ.

**B.** $\forall n, n(n+1)$ là số chính phương.

**C.** $\forall n, n(n+1)(n+2)$ là số chia hết cho 24.

**D.** $\exists n, n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 8.

# Bài 1. MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Mệnh đề toán học

***Ví dụ 1.*** Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề toán học?
a) Hà Nội là Thủ đô của Việt Nam;
b) Số $\pi$ là một số hữu tỉ;
c) $x=1$ có phải là nghiệm của phương trình $x^2-1=0$ không?
***Giải***
Câu a) không phải là một mệnh đề toán học.
Câu b) là một mệnh đề toán học.
Câu c) là một câu hỏi nên không phải là một mệnh đề toán học.
Mỗi mệnh đề toán học phải hoặc đúng hoặc sai. Một mệnh đề toán học không thể vừa đúng, vừa sai.
Khi mệnh đề toán học là đúng, ta gọi mệnh đề đó là một mệnh đề đúng.
Khi mệnh đề toán học là sai, ta gọi mệnh đề đó là một mệnh đề sai.
***Ví dụ 2.*** Tìm mệnh đề đúng trong những mệnh đề sau:
A: "Tam giác có ba cạnh";
B: "1 là số nguyên tố".
***Giải***
Mệnh đề $A$ là mệnh đề đúng; mệnh đề $B$ là mệnh đề sai vì 1 không là số nguyên tố.

### II. Mệnh đề chứa biến

Câu " n chia hết cho 3" là một *mệnh đề chứa biến*
Ta thường kí hiệu mệnh đề chứa biến $n$ là $P(n)$; mệnh đề chứa biến $x,y$ là $P(x,y)$;...
***Ví dụ 3.*** Trong những câu sau, câu nào là mệnh đề chứa biến?
a) 18 chia hết cho 9 ;
b) $3n$ chia hết cho 9 .
***Giải***
a) Câu " 18 chia hết cho 9 " là một mệnh đề nhưng không phải là mệnh đề chứa biến.
b) Câu "$3n$ chia hết cho 9" là một mệnh đề chứa biến, kí hiệu là $P(n)$:"$3n$ chia hết cho 9"

### III. Phủ định của một mệnh đề

Cho mệnh đề $P$. Mệnh đề " không phải $P$" được gọi là *mệnh đề phủ định* của mệnh đề $P$ và kí hiệu là $\overline{P}$.
Mệnh đề $\overline{P}$ *đúng* khi $P$ sai. Mệnh đề $\overline{P}$ *sai* khi $P$ đúng.
***Ví dụ 4.*** Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó:
A: "16 là bình phương của một số nguyên";
B: "Số 25 không chia hết cho 5".
***Giải***
Mệnh đề $\overline{A}$:"16 không phải là bình phương của một số nguyên" và $\overline{A}$ sai.
Mệnh đề $\overline{B}$:" Số 25 chia hết cho 5" và $\overline{B}$ đúng.
*Chú ý:* Để phủ định một mệnh đề (có dạng phát biểu như trên), ta chỉ cần thêm (hoặc bớt) từ "không" (hoặc "không phải") vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

### IV. Mệnh đề kéo theo

Cho hai mệnh đề $P$ và $Q$. Mệnh đề "Nếu $P$ thì $Q$ " được gọi là *mệnh đề kéo theo* và kí hiệu là $P\Rightarrow Q$.
Mệnh đề $P\Rightarrow Q$ sai khi $P$ đúng, $Q$ sai và đúng trong các trường hợp còn lại.
Nhận xét: Tuỳ theo nội dung cụ thể, đôi khi người ta còn phát biểu mệnh đề $P\Rightarrow Q$ là " $P$ kéo theo $Q$ " hay " $P$ suy ra $Q$ " hay "Vì $P$ nên $Q$"
***Ví dụ 5.*** Cho tam giác $ABC$. Xét hai mệnh đề:

$P$:"Tam giác $ABC$ có hai góc bằng $60^\circ$"; $Q$:"Tam giác $ABC$ đều".
Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

***Giải***

$P \Rightarrow Q$:"Nếu tam giác $ABC$ có hai góc bằng $60^\circ$ thì tam giác $ABC$ đều".
Mệnh đề trên là đúng.

*Nhận xét:* Các định lí toán học là những mệnh đề đúng và thường phát biểu ở dạng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$.
Khi đó ta nói
$P$ là *giả thiết*, $Q$ là *kết luận* của định lí, hay
$P$ là *điều kiện đủ* để có $Q$, hoặc $Q$ là *điều kiện cần* để có $P$.

## V. Mệnh đề đảo. Hai mệnh đề tương đương

- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói $P$ và $Q$ là hai *mệnh đề tương đương*, kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.

*Nhận xét:* Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ có thể phát biểu ở những dạng như sau:
- " $P$ tương đương $Q$ ";
- " $P$ là điều kiện cần và đủ để có $Q$ ";
- " $P$ khi và chỉ khi $Q$ ";
- " $P$ nếu và chỉ nếu $Q$ ".

***Ví dụ 6.*** Cho tam giác $ABC$. Xét mệnh đề dạng $P \Rightarrow Q$ như sau:
"Nếu tam giác $ABC$ vuông tại $A$ thì tam giác $ABC$ có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".
Phát biểu mệnh đề $Q \Rightarrow P$ và xác định tính đúng sai của hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$.

***Giải***

Mệnh đề $P$:"Tam giác $ABC$ vuông tại $A$"
Mệnh đề $Q$:"Tam giác $ABC$ có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".
Theo định lí Pythagore, hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng. Do đó, hai mệnh đề $P$ và $Q$ là tương đương và có thể phát biểu như sau: "Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ khi và chỉ khi tam giác $ABC$ có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ".

*Chú ý*: Trong toán học, những câu khẳng định đúng phát biểu ở dạng " $P \Leftrightarrow Q$ " cũng được coi là một mệnh đề toán học, gọi là *mệnh đề tương đương.*

## VI. Kí hiệu $\forall, \exists$

***Ví dụ 7.*** Sử dụng kí hiệu " $\forall$ " để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

a) $P$:"Với mọi số thực $x, x^2 + 1 > 0$".

b) $Q$:"Với mọi số tự nhiên $n, n^2 + n$ chia hết cho 6".

***Giải***

a) Mệnh đề được viết là $P$:"$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$". Để chứng minh mệnh đề $P$ là đúng, ta làm như sau:
Xét một số thực $x$ tuỳ ý, ta phải chứng tỏ rằng $x^2 + 1 > 0$. Thật vậy, ta có: $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Vậy mệnh đề $P$ là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề được viết là $Q$:"$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n^2 + n\right) : 6$".
Để chứng minh mệnh đề $Q$ là sai, ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể của $n$ để nhận được mệnh đề sai.
Thật vậy, chọn $n = 1$, ta thấy $n^2 + n = 2$ không chia hết cho 6. Vậy mệnh đề $Q$ là mệnh đề sai.

***Ví dụ 8.*** Sử dụng kí hiệu " $\exists$ " để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

a) $M$:"Tồn tại số thực $x$ sao cho $x^3 = -8$".

b) $N$:"Tồn tại số nguyên $x$ sao cho $2x + 1 = 0$".

***Giải***

a) Mệnh đề được viết là $M$:"$\exists x \in \mathbb{R}, x^3 = -8$".

Để chứng tỏ mệnh đề $M$ là đúng, ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể của $x$ để nhận được mệnh đề đúng. Thật vậy, chọn $x=-2$, ta thấy $(-2)^3=-8$. Vậy mệnh đề $M$ là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề đượcc viết là $N:"\exists x\in\mathbb{Z}, 2x+1=0"$.

Để chứng minh mệnh đề $N$ là sai, ta phải chứng tỏ rằng vối số nguyên $x$ tuỳ ý thì $2x+1\neq 0$. Thật vậy, xét một số nguyên $x$ tuỳ ý, ta có $2x+1$ không chia hết cho 2 nên $2x+1\neq 0$. Vì thế mệnh đề $N$ là mệnh đề sai.

*Chú ý:* Cách làm ở Ví dụ 7, Ví dụ 8 lần lượt cho chúng ta phương pháp chứng minh một mệnh đề có kí hiệu "$\forall$", có kí hiệu "$\exists$", là đúng hoặc sai.

Cho mệnh đề "$P(x), x\in X$".

- Phủ định của mệnh đề "$\forall x\in X, P(x)$" là mệnh đề "$\exists x\in X, \overline{P(x)}$".
- Phủ định của mệnh đề "$\exists x\in X, P(x)$" là mệnh đề "$\forall x\in X, \overline{P(x)}$".

***Ví dụ 9.*** Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

a) $\forall x\in\mathbb{R}, |x|\geq x$

b) $\exists x\in\mathbb{R}, x^2+1=0$

***Giải***

a) Phủ định của mệnh đề "$\forall x\in\mathbb{R}, |x|\geq x$" là mệnh đề "$\exists x\in\mathbb{R}, |x|<x$".

b) Phủ định của mệnh đề "$\exists x\in\mathbb{R}, x^2+1=0$" là mệnh đề "$\forall x\in\mathbb{R}, x^2+1\neq 0$".

## ►PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Mệnh đề toán học, mệnh đề chứa biến

**Câu 1.** Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề toán học. Nếu là mệnh đề toán học, xét tính đúng, sai của mệnh đề:

a. $1+2+4=10$

b. Năm 1997 là năm nhuận.

c. Hôm nay trời đẹp quá!

d. $x+1=4$.

**Lời giải**

a. Là mệnh đề toán học. Mệnh đề sai, vì $1+2+4=7$.

b. Không phải là mệnh đề toán học

c. Không phải là mệnh đề toán học, đây là một câu cảm thán.

d. Không phải là mệnh đề toán học, vì tính chân trị của mệnh đề có thể thay đổi được.

**Câu 2.** Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề toán học, câu nào là mệnh đề chứa biến?

a) Số 11 là số chẵn.

b) Bạn có chăm học không?

c) Huế là một thành phố của Việt Nam.

d) $2x+3$ là một số nguyên dương.

e) $2-\sqrt{5}<0$.

f) $4+x=3$.

g) Hãy trả lời câu hỏi này!

h) Paris là thủ đô nước Ý.

i) Phương trình $x^2-x+1=0$ có nghiệm.

k) 13 là một số nguyên tố.

**Lời giải**

Các câu a, e, k là các mệnh đề toán học .

Các mệnh đề d, f, i là các mệnh đề chứa biến.

**Câu 3.** Trong các mệnh đề toán học sau, mệnh đề nào đúng? Giải thích?

a) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.

b) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau.

c) Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi chúng có một góc bằng tổng của hai góc còn lại.

d) Đường tròn có một tâm đối xứng và một trục đối xứng.

e) Hình chữ nhật có hai trục đối xứng.

f) Một tứ giác là hình thoi khi và chỉ khi nó có hai đường chéo vuông góc với nhau.

g) Một tứ giác nội tiếp được đường tròn khi và chỉ khi nó có hai góc vuông.

**Lời giải**

a) Sai, không nằm trong các trường hợp hai tam giác bằng nhau.
b) Sai vì 2 cạnh bằng nhau chưa chắc đã tương ứng trong hai tam giác đồng dạng.
c) Đúng vì $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0 \Leftrightarrow 2\widehat{A}=180^0 \Leftrightarrow \widehat{A}=90^0$.
d) Sai, vì đường tròn có vô số trục đối xứng.
e) Đúng.
f) Sai, giả sử có hai đường chéo độ dài khác nhau.
g) Sai, lấy tứ giác bất kỳ nội tiếp đường tròn.

**Dạng 2. Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo**

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$. Xét hai mệnh đề sau:

$(P)$: "tam giác $ABC$ vuông"; $(Q)$: "$AB^2+AC^2=BC^2$"

Hãy phát biểu thành lời văn mệnh đề sau, và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai:

a. $(P)\Rightarrow(Q)$

b. $(Q)\Rightarrow(P)$.

**Lời giải**

a. $(P)\Rightarrow(Q)$: Nếu tam giác $ABC$ vuông thì $AB^2+AC^2=BC^2$. Mệnhd đề này sai vì chưa chắc $ABC$ vuông tại $A$.

b. $(Q)\Rightarrow(P)$: Nếu $AB^2+AC^2=BC^2$ thì tam giác $ABC$ vuông. Mệnh đề này đúng theo định lí Pitago đảo.

**Câu 5.** Cho tứ giác $ABCD$. Xét hai mệnh đề:

$(P)$ : "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông"

$(Q)$: "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc".

Phát biểu $(P)\Rightarrow(Q)$ bằng hai cách, mệnh đề này đúng hay sai?.

**Lời giải**

Mệnh đề $(P)\Rightarrow(Q)$: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nếu và chỉ nếu tứ giác đó là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc" và "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông khi và chỉ khi tứ giác đó là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc". Mệnh đề này đúng.

**Câu 6.** Cho tam giác $ABC$. Lập mệnh đề $(P)\Rightarrow(Q)$ và mệnh đề đảo của nó, rồi xét tính đúng sai của chúng khi :

a. $(P)$: "Góc $A$ bằng $90^0$" $(Q)$: "Cạnh $BC$ lớn nhất"

b. $(P)$: "$\widehat{A}=\widehat{B}$" $(Q)$: "Tam giác $ABC$ cân".

**Lời giải**

Với tam giác $ABC$ đã cho, ta có:

a. $(P)\Rightarrow(Q)$: "Nếu góc $A$ bằng $90^0$ thì cạnh $BC$ lớn nhất" là mệnh đề đúng.

$(Q)\Rightarrow(P)$: "Nếu cạnh $BC$ lớn nhất thì góc $A$ bằng $90^0$".

b. $(P)\Rightarrow(Q)$: "Nếu $\widehat{A}=\widehat{B}$ thì tam giác $ABC$ cân" là mệnh đề đúng.

$(Q)\Rightarrow(P)$: "Nếu tam giác $ABC$ cân thì $\widehat{A}=\widehat{B}$" là mệnh đề sai, vì tam giác $ABC$ chưa chắc cân tại $C$.

**Câu 7.** Mệnh đề sau đúng, sai?

a) Điều kiện cần và đủ để $a=0$ là $\frac{5}{a}=\frac{5}{b}$.

b) Điều kiện đủ để $x>y$ là $\sqrt{x}>\sqrt{y}$.

c) Điều kiện cần để tam giác ABC vuông là $AB^2=BC^2-AC^2$.

d) Điều kiện đủ để $\sqrt{x^2}=|x|$ là $x\ge 0$.

**Lời giải**:

a) Nếu $a=b$ thì $\frac{5}{a}=\frac{5}{b}$: Mệnh đề sai.

b) Nếu $\sqrt{x}>\sqrt{y}$ thì $x>y$: Mệnh đề đúng.

c) Nếu tam giác ABC vuông thì $AB^2=BC^2-AC^2$: Mệnh đề sai.

d) Nếu $x\ge 0$ thì $\sqrt{x^2}=|x|$: Mệnh đề đúng.

**Dạng 3. Mệnh đề tương đương**

**Câu 8.** Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a. Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.

b. Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau.

c. Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng của hai góc còn lại.

d. Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi nó có hai phân giác bằng nhau và một góc bằng $60^0$.

**Lời giải**

a. Đây là mệnh đề sai.

Gọi $A$:"Hai tam giác bằng nhau" B : "Hai tam giác có diện tích bằng nhau"

Mệnh đề $A\Rightarrow B$ đúng, mệnh đề $B\Rightarrow A$ sai, do đó mệnh đề đã cho sai.

b. Mệnh đề sai, vì 2 cạnh bằng nhau chưa chắc đã tương ứng trong hai tam giác đồng dạng.

c. Mệnh đề đúng, vì góc bằng tổng hai góc còn lại vuông.

d. Mệnh đề đúng, vì 2 phân giác bằng nhau là tam giác cân.

**Câu 9.** Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu:

a) Một tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi tổng hai góc đối diện của nó bằng $180^0$.

b) $x\ge y$ nếu và chỉ nếu $\sqrt[3]{x}\ge\sqrt[3]{y}$.

c) Tam giác cân khi và chỉ khi có trung tuyến bằng nhau.

**Lời giải**:

a) Điều kiện cần và đủ để một tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn là tổng hai góc đối diện của nó bằng $180^0$.

b) Điều kiện cần và đủ để $x\ge y$ là $\sqrt[3]{x}\ge\sqrt[3]{y}$.

c) Điều kiện cần và đủ để tam giác cân là hai trung tuyến của nó bằng nhau.

**Câu 10.** Hãy sửa lại( nếu cần) các mệnh đề sau đây để được mệnh đề đúng:

a) Điều kiện cần và đủ để tứ giác T là một hình vuông là nó có bốn cạnh bằng nhau.

b) Điều kiện cần và đủ để tổng hai số tự nhiên chia hết cho 7 là mỗi số đó chia hết cho 7.

c) Điều kiện cần để $ab>0$ là cả hai số $a$ và $b$ đều dương.

d) Điều kiện đủ để một số nguyên dương chia hết cho 3 là nó chia hết cho 3.

**Lời giải**:

a) Mệnh đề sai. Sửa lại là: Điều kiện cần để tứ giác T là một hình vuông là nó có bốn cạnh bằng nhau.

b) Mệnh đề sai. Sửa lại là: Điều kiện đủ để tổng hai số tự nhiên chia hết cho 7 là mỗi số đó chia hết cho 7.

c) Mệnh đề sai. Sửa lại là: Điều kiện đủ để $ab>0$ là cả hai số $a$ và $b$ đều dương.

d) Mệnh đề đúng.

**Dạng 4. Mệnh đề phủ định. Mệnh đề chứa kí hiệu $\forall,\exists$**

**Câu 11.** Xét tính đúng, sai của các mệnh đề:

a. $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+1\ge 0$

b. $\forall x\in\mathbb{R}, x+2=x$

c. $\exists x\in\mathbb{Q}, 9x^2-4=0$

d. $\forall x\in\mathbb{Q}, 3x^2-5=0$.

**Lời giải**

a. Mệnh đề đúng vì $x^2+1\ge 1>0$.

b. Mệnh đề sai, vì chọn $x=-2$ nguyên thì $(-2)+2=(-2)$ là sai.

c. Mệnh đề đúng, vì chọn $x=\frac{2}{3}$ là số hữu tỉ thì $9x^2-4=0$.

d. Mệnh đề sai, vì $3x^2-5=0\Leftrightarrow x^2=\frac{5}{3}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\notin\mathbb{Q}$.

**Câu 12.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng? Giải thích? Phát biểu các mệnh đề đó thành lời:

a) $\forall x\in\mathbb{R},x^2>0$.

b) $\exists x\in\mathbb{R},x>x^2$.

c) $\exists x\in\mathbb{Q},4x^2-1=0.$

d) $\forall n\in\mathbb{N},n^2>n.$

e) $\forall x\in\mathbb{R},x^2-x-1>0.$

f) $\forall x\in\mathbb{R},x^2>9\Rightarrow x>3.$.

**Lời giải**

a) Sai, vì $x=0\Rightarrow x^2=0$.

b) Đúng khi $0<x<1$. Phát biểu: "Tồn tại số thực lớn hơn bình phương của nó".

c) Đúng, giải phương trình $4x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$.

d) Sai, chẳng hạn với $n=1$.

e) Sai, chẳng hạn với $x=1\Rightarrow x^2-x-1=-1<0$.

f) Sai, chẳng hạn $x=-4$.

**Câu 13.** Các mệnh đề sau đây đúng hay sai, giải thích :

a. $\forall\in\mathbb{R},x>-2\Rightarrow x^2>4$

b. $\forall\in\mathbb{R},x>-2\Rightarrow x^2<4$

c. $\forall\in\mathbb{R},x>2\Rightarrow x^2>4$

d. $\forall\in\mathbb{R},x^2>4\Rightarrow x>2$.

**Lời giải**

a. Mệnh đề sai, vì mệnh đề $x>-2\Rightarrow x^2>4$ sai khi $x=1$.

b. Mệnh đề sai, vì mệnh đề $x>-2\Rightarrow x^2<4$ sai khi $x=5$.

c. Mệnh đề đúng, thật vậy, ta có: $x>2\Rightarrow x-2>0$ và $x+2>0$ nên $\Rightarrow(x-2)(x+2)=x^2-4>0\Rightarrow x^2>4$.

d. Mệnh đề sai, vì $x^2>4\Rightarrow x>2$ sai khi $x=-3$.

**Câu 14.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng? Giải thích? Phát biểu các mệnh đề đó thành lời:

a) $\forall x\in\mathbb{R},x>3\Rightarrow x^2>9.$

b) $\forall x\in\mathbb{R},x^2<5\Rightarrow x<\sqrt{5}.$

c) $\exists x\in\mathbb{R},5x-3x^2\le1$.

d) $\exists x\in\mathbb{R},x^2+2x+5$ là hợp số.

e) $\forall n\in\mathbb{N},n^2+1$ không chia hết cho 3.

f) $\forall n\in\mathbb{N}^*,n(n+1)$ là số lẻ.

g) $\forall n\in\mathbb{N}^*,n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6..

**Lời giải**

a) Đúng. Phát biểu: "Với mọi số thực $x$, nếu $x>3$ thì $x^2>9$".

b) Đúng, vì $x^2<5\Leftrightarrow-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ .Phát biểu: "Với mọi số thực $x$, nếu $x^2<5$ thì $x<\sqrt{5}$".

c) Đúng, vì bất phương trình đó có nghiệm. Phát biểu: "Tồn tại số thực $x$ sao cho $5x-3x^2\le1$ ".

d) Đúng, chẳng hạn $x=1\Rightarrow x^2+2x+5=8$ là hợp số.

e) Đúng, vì $n\equiv0(\mathrm{mod}3)\Rightarrow n^2\equiv1;2(\mathrm{mod}3)$ nên $n^2+1$ không chia hết cho 3.

f) Sai, trong 2 số tự nhiên liên tiếp luôn có 1 số chẵn nên tích của chúng là số chẵn.

g) Đúng, vì 3 số tự nhiên liên tiếp có ít nhất 1 số chẵn nên $n(n+1)(n+2)\vdots2$

Nếu $n=3k \Rightarrow n(n+1)(n+2)=3k(3k+1)(3k+2) \vdots 3$

Nếu $n=3k+1 \Rightarrow n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3) \vdots 3$

Nếu $n=3k+2 \Rightarrow n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+3)(3k+4) \vdots 3$

Vì $(2,3)=1$ nên $n(n+1)(n+2) \vdots 6$.

Phát biểu: "Tích 3 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 6".

**Câu 15.** Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a. $\forall x \in \mathbb{R}, x>1 \Rightarrow \dfrac{2x}{x+1}<1$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, x>1 \Rightarrow \dfrac{2x}{x+1}>1$.

c. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$ chia hết cho $6 \Rightarrow x$ chia hết cho 6.

d. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$ chia hết cho $9 \Rightarrow x$ chia hết cho 9.

**Lời giải**

a. Mệnh đề sai, vì chẳng hạn với $x=2$ thì $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{4}{3}>1$.

b. Mệnh đề đúng, vì với $x>1$ thì $2x>x+1$ do đó $\dfrac{2x}{x+1}>\dfrac{x+1}{x+1}=1$.

c. Mệnh đề đúng. Thật vậy, nếu $x^2$ chia hết cho 6 thì:
$\Rightarrow x^2$ chia hết cho 2 và $x^2$ chia hết cho 3.
$\Rightarrow x$ chia hết cho 2 và $x$ chia hết cho 3.
$\Rightarrow x$ chia hết cho 6.

d. Mệnh đề sai vì mệnh đề "$x^2$ chia hết cho $9 \Rightarrow x$ chia hết cho 9" sai khi $x=3$.

**Câu 16.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$, với $x \in \mathbb{R}$. Tìm $x$ để $P(x)$ là mệnh đề đúng?

a) $P(x):"x^2-5x+4=0"$.

b) $P(x):"x^2-5x+6=0"$.

c) $P(x):"x^2-3x>0"$.

d) $P(x):"\sqrt{x}>x"$.

e) $P(x):"2x+3<7"$.

f) $P(x):"x^2+x+1>0"$.

**Lời giải**

a) $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$. Vậy khi $x \in \{1;4\}$ thì $P(x)$ đúng.

b) $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \end{array}\right.$. Vậy khi $x \in \{2;3\}$ thì $P(x)$ đúng.

c) $x^2-3x>0 \Leftrightarrow x(x-3)>0 \Leftrightarrow x<0 \vee x>3$

d) $\sqrt{x}>x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x>x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x(x-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1$

e) $2x+3<7 \Leftrightarrow x<2$

f) $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0, \forall x \in \mathbb{R}$. $P(x)$ đúng với mọi số thực.

**Câu 17.** Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau. Cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định

a. $P$: "Mọi hình thoi là hình vuông".

b. $P$: "Số chính phương có thể có chữ số tận cùng là $0,1,4,5,6,9$".

c. $P$: "Đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng cho trước là duy nhất".

**Lời giải**

a. $\overline{P}$: **"**Tồn tại hình thoi không là hình vuông". Là mệnh đề đúng.

b. $\overline{P}$: "Số chính phương không thể có chữ số tận cùng là $0,1,4,5,6,9$". Là mệnh đề sai.

c. $\overline{P}$: "Đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng cho trước không là duy nhất". Là mệnh đề sai.

**Câu 18.** Nêu mệnh đề phủ định của mệnh đề: "$\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2+1$ không chia hết cho $3$".

**Lời giải**

Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2+1$ không chia hết cho $3$" là

$\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2+1$ chia hết cho $3$.

**Câu 19.** Hãy phủ định của mệnh đề sau $P:"\forall x \in \mathbb{Q}: 3x^2-10x+3=0"$.

**Lời giải**

Ta có mệnh đề $P:"\forall x \in \mathbb{Q}: 3x^2-10x+3=0"$.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P$ là $\overline{P}:"\exists x \in \mathbb{Q}: 3x^2-10x+3 \neq 0"$.

**Câu 20.** Cho mệnh đề $A:"\exists n \in \mathbb{N}: n^2+3n$ chia hết cho $3"$. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề $A$ và xét tính đúng sai của nó.

**Lời giải**

$A:"\exists n \in \mathbb{N}: n^2+3n$ chia hết cho $3" \Rightarrow \overline{A}:"\forall n \in \mathbb{N}: n^2+3n$ không chia hết cho $3"$

Xét $n=3k+r\left(k \in \mathbb{Z}, r=0,1,2\right)$

$\Rightarrow n^2+3n=\left(9k^2+6kr+3k\right)+\left(r^2+r\right)$

Với $r=0$ hoặc $r=2$ thì $n^2+3n$ chia hết cho $3$ và $\overline{A}$ sai.

**Câu 21.** Phủ định các mệnh đề:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $x+y>0$. b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y>0$.

c) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $x+y>0$. d) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$, $x+y>0$.

**Lời giải**:

a) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$, $x+y \leq 0$.

b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $x+y \leq 0$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$, $x+y \leq 0$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $x+y \leq 0$.

**Câu 22.** Xem xét các mệnh đề sau đúng hay sai và lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề:

a) $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2-1=0$. b) $\exists x \in \mathbb{N}, n^2+1$ chia hết cho 4.

c) $\exists x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq x-1$. d) $\forall x \in \mathbb{N}, n^2>n$.

e) $\exists n \in \mathbb{N}, n\left(n+1\right)$ là một số chính phương.

**Lời giải**:

a) Mệnh đề đúng. Phủ định là: $\forall x \in \mathbb{Q}, 4x^2-1 \neq 0$.

b) Mệnh đề sai. Ta chứng minh mệnh đề phủ định sau là đúng.

$\forall x \in \mathbb{N}, n^2+1$ không chia hết cho 4.

Xét $n=2k$ thì $n^2+1=4k^2+1$ không chia hết cho 4.

Xét $n=2k+1$ thì $n^2+1=\left(4k+1\right)^2+1=4k^2+4k+2$: không chia hết cho 4.

c) Mệnh đề sai, chẳng hạn với $x=1$:

$\exists x \in \mathbb{R}, (x-1)^2=x-1$.

d) Mệnh đề sai, chẳng hạn với $n=0$. Phủ định là $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \leq n$.

e) Mệnh đề đúng, chẳng hạn với $n=0$. Phủ định là $\exists n \in \mathbb{N}, n\left(n+1\right)$ không là số chính phương.

**Câu 23.** Xét xem các mệnh đề sau đúng hay sai, lập mệnh đề phủ định của mệnh đề:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2-x+1>0$. b) $\exists n \in \mathbb{N}, \left(n+2\right)\left(n+1\right)=0$.

c) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2=3$. d) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n+2$.

**Lời giải**:

a) Mệnh đề đúng, vì $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall x$

Mệnh đề phủ định là $\exists x\in\mathbb{R},x^2-x+1\le 0$.

b) Mệnh đề sai, vì $(n+2)(n+1)=0\Rightarrow n=-2$ hoặc $n=-1$ đều không thuộc $\mathbb{N}$.

Mệnh đề phủ định là $\forall n\in\mathbb{N},(n+2)(n+1)\ne 0$.

c) mệnh đề sai, vì $x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$.

Mệnh đề phủ định là $\forall x\in\mathbb{Q},x^2\ne 3$.

d) Mệnh đề sai, vì chọn $n=1:2\ge 3$.

Mệnh đề phủ định là: $\exists n\in\mathbb{N},2^n<n+2$.

## ►PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Mệnh đề toán học, mệnh đề chứa biến

**Câu 1.** Mệnh đề toán học là một khẳng định

**A.** Hoặc đúng hoặc sai. **B.** Đúng. **C.** Vừa đúng vừa sai. **D.** Sai.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 2.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề toán học?

**A.** An học lớp mấy? **B.** Các bạn hãy đọc đi!

**C.** $x-3=5$ **D.** 2 là số lẻ.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 3.** Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề chứa biến?

**A.** 5 là số nguyên tố **B.** $x+3=1$

**C.** Bạn có đi học không? **D.** Đề thi môn Toán khó quá!

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 4.** Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề toán học?

a) Mấy giờ rồi ?

b) Buôn Mê Thuột là thành phố của Đắk Lắk.

c) 2023 là số nguyên tố.

d) Tổng các góc của một tam giác là $180°$

**A.** 4 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn B**

c) và d) là mệnh đề toán học

**Câu 5.** Trong các câu sau, câu nào không phải mệnh đề toán học?

**A.** 8 là số chính phương.

**B.** Hình bình hành có hai cạnh đối song song và bằng nhau.

**C.** Việt Nam là nước thuộc Đông Nam Á

**D.** Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 6.** Trong số các câu sau, câu nào là mệnh đề toán học?

**A.** Thời tiết hôm nay thật đẹp!

**B.** Các bạn có làm được bài kiểm tra này không?

**C.** Số 15 chia hết cho 2.

**D.** Chúc các bạn đạt điểm như mong đợi!

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 7.** Trong các câu sau có bao nhiêu câu là mệnh đề toán học?

a) Huế là một thành phố của Việt Nam.

b) Sông Hương làm thành phố Huế thêm thơ mộng.

c) Hãy trả lời câu hỏi này!

d) $5+9-24$.

e) $6+81=25$.

f) Bạn có rỗi tối nay không?

g) $x+2=11$.

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 8.** Trong các câu sau có bao nhiêu câu là mệnh đề toán học:

(1): Số 3 là một số chẵn.

(2): $2x+1=3$.

(3): Các em hãy cố gắng làm bài thi cho tốt.

(4): Tam giác vuông là tam giác có 1 góc vuông

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn A**

Mệnh đề toán học là câu (1) và (4).

**Câu 9.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề chứa biến?

**A.** Người miền Trung khổ quá! **B.** Sài Gòn là thủ đô của nước Việt Nam.

**C.** 5 là số lẻ. **D.** Phương trình $x-1=0$ vô nghiệm.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 10.** Trong các câu sau, câu nào không phải là một mệnh đề toán học

**A.** Đăk Lak là 1 tỉnh thuộc Tây nguyên **B.** $8-4=4$.

**C.** Số 18 chia hết cho 6. **D.** $2+8=6$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 11.** Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề toán học?

a) Hãy học thật tốt!

b) Số 32 chia hết cho 2.

c) Số 7 là số nguyên tố.

d) Số thực $x$ là số chẵn.

**A.** 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 12.** Chọn phát biểu ***không phải*** là mệnh đề toán học.

**A.** Số 19 chia hết cho 2. **B.** Hình thoi có hai đường chéo vuông góc.

**C.** Hôm nay trời không mưa. **D.** Tam giác đều có 3 góc bằng nhau.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 13.** Trong các câu sau đây, câu nào là mệnh đề toán học?

**A.** Hình vuông là hình có 4 góc vuông. **B.** Các bạn hãy làm bài đi!

**C.** Việt Nam là một nước thuộc châu **Á.** **D.** Anh học lớp mấy?

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 14.** Câu nào trong các câu sau **không** phải là mệnh đề toán học?

**A.** $\frac{4}{2}=2.$ **B.** $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ.

**C.** $2+2=5.$ **D.** $\pi$ có phải là một số hữu tỷ không?

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 15.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề toán học?

**A.** Tiết trời mùa thu thật dễ chịu! **B.** Số 15 không chia hết cho 2.

**C.** Bạn An có đi học không? **D.** Chúc các bạn học sinh thi đạt kết quả tốt!

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 16.** Khẳng định nào sau đây là mệnh đề toán học?

**A.** 8 là một số chẵn **B.** Số $x$ nhỏ hơn 1.

**C.** TP.HCM ở miền nào của nước Việt Nam. **D.** Học hành tiến bộ nhé !

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 17.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề toán học?

**A.** Số $n$ là một số chẵn. **B.** Hãy cố gắng học thật tốt!.

**C.** Số 24 chia hết cho 6. **D.** Bạn đã đội mũ bảo hiểm chưa?

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 18.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề toán học?

**A.** Nha Trang là một thành phố ven biển ở Việt Nam.

**B.** 9 là bội của 3

**C.** Bài hát này hay thật!.

**D.** $4-3x$ chia hết cho 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 19.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề toán học **đúng**?

**A.** Tổng của hai cạnh một tam giác lớn hơn cạnh thứ ba.

**B.** 2 **chia hết cho** 3

**C.** Quảng Ngãi là một tỉnh ở miền trung

**D.** Tam giác $ABC$ cân tại $A$ thì $BC=AB$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 20.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề toán học **đúng**?

**A.** $2+6=8$.

**B.** $x^2-1>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

**C.** 14 là số nguyên tố.

**D.** Nếu một tam giác có một góc bằng $60^\circ$ thì tam giác đó là đều.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 21.** Trong các câu sau, câu nào là một **mệnh đề toán học đúng**?

**A.** "$\sqrt{9}>3$". **B.** "$\sqrt{9}\ge 3$". **C.** "$\sqrt{9}<3$". **D.** "$\sqrt{9}=81$".

**Lời giải**

**Chọn B**

+ Ta có: $\sqrt{9}=3$ nên "$\sqrt{9}\ge 3$" là một mệnh đề đúng.

**Câu 22.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là mệnh đề toán họcđúng?

**A.** Không có số chẵn nào là số nguyên tố. **B.** $-x^2<0.$

**C.** $2x^2-8=0.$ **D.** Phương trình $3x^2-6=0$ có nghiệm hữu tỷ.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 23.** Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề toán học?

(I) Hãy mở cửa ra! (II) Số $25$ chia hết cho $8$.

(III) Số $17$ là số nguyên tố. (IV) Bạn thích ăn phở không?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Lời giải**

Các câu (III) và (II) là mệnh đề toán học.

**Câu 24.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$:"$x+10\ge x^2$" với $x$ là số tự nhiên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $P(1)$. **B.** $P(2)$. **C.** $P(3)$. **D.** $P(4)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

+) $P(1)=11\ge 1^2\Rightarrow A$ đúng.

+) $P(2)=12\ge 2^2\Rightarrow B$ đúng.

+) $P(3)=13\ge 3^2=9\Rightarrow C$ đúng.

+) $P(4)=14\ge 4^2=16\Rightarrow D$ sai.

**Câu 25.** Tìm tất cả các giá trị thực của $x$ để mệnh đề $P$: "$2x-1\ge 0$" là mệnh đề **sai**?

**A.** $x\le\frac{1}{2}$. **B.** $x\ge\frac{1}{2}$. **C.** $x>\frac{1}{2}$. **D.** $x<\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $P$: "$2x-1\ge 0$" là mệnh đề **sai** khi $2x-1<0\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$.

**Câu 26.** Với giá trị nào của $x\in\mathbb{R}$ thì mệnh đề chứa biến $P(x)$:"$x+1<x^2$" là đúng?

**A.** $x=0$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

Với $x=0$ ta có $P(0)$:"$0+1<0^2$" (Sai).

Với $x=2$ ta có $P(2)$:"$2+1<2^2$" (Đúng).

Với $x=1$ ta có $P(1)$:"$1+1<1^2$" (Sai).

Với $x=\frac{1}{2}$ ta có $P\left(\frac{1}{2}\right)$:"$\frac{1}{2}+1<\left(\frac{1}{2}\right)^2$" (Sai).

**Câu 27.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$:"$x^2=4$",$x\in\mathbb{R}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

**A.** $P(4)$. **B.** $P(-3)$. **C.** $P(-2)$. **D.** $P(-1)$.

**Lời giải**

Ta có: $P(-2):"(-2)^2=4"$ là đúng nên chọn đáp án **C.**

**Câu 28.** Với giá trị nào của $x$ mệnh đề chứa biến $P(x):2x^2-1<0$ là mệnh đề đúng:

**A.** $1$. **B.** $5$. **C.** $0$. **D.** $\frac{4}{5}$.

**Lời giải**

Ta có: $P(x):2x^2-1<0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $0\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ nên chọn câu **C.**

**Câu 29.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***đúng***?

**A.** Nếu em chăm chỉ thì em thành công.

**B.** Nếu $a$ chia hết cho $9$ thì $a$ chia hết cho $3$.

**C.** Nếu một tam giác có một góc bằng $60°$ thì tam giác đó đều.

**D.** Nếu $a\geq b$ thì $a^2\geq b^2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $a$ chia hết cho $9$ nên $a=9k$. Do đó $a$ chia hết cho $3$.

**Câu 30.** Hãy chọn mệnh đề toán học **sai**.

**A.** $2+\sqrt{3}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$. **B.** 1 là số nguyên tố.

**C.** $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=2\sqrt{24}$. **D.** $-2\in\mathbb{Z}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đáp án **A** đúng vì $2+\sqrt{3}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{3}}=\frac{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

Đáp án **C** đúng vì $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=5+2\sqrt{6}-5+2\sqrt{6}=4\sqrt{6}=2\sqrt{24}$.

Đáp án **D** đúng.

Đáp án **B** sai vì số nguyên tố là số lớn hơn 1.

**Câu 31.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x):"x+15\leq x^2"$ với $x$ là số thực. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng ?

**A.** $P(2)$. **B.** $P(3)$. **C.** $P(-4)$. **D.** $P(0)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Với $x=-4$ ta có $-4+15\leq(-4)^2\Leftrightarrow 11\leq 16$ (luôn đúng)

Vậy $P(-4)$ là mệnh đề đúng.

**Câu 32.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x)=\left\{x\in\mathbb{Z}:\left|x^2-2x-3\right|=x^2+\left|2x+3\right|\right\}$. Trong đoạn $[-2020;2021]$ có bao nhiêu giá trị của $x$ để mệnh đề chứa biến $P(x)$ là mệnh đề đúng?

**A.** $2020$. **B.** $2021$. **C.** $2022$. **D.** $2023$.

**Lời giải**

Số giá trị nguyên để mệnh đề $P(x)$ là mệnh đề đúng chính là số nghiệm nguyên của phương trình $|x^2-2x-3|=x^2+|2x+3|\ (1)$

+ Nếu $x\ge -\frac{3}{2}$ thì ta có

$$(1)\Leftrightarrow |x^2-2x-3|=x^2+2x+3\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2-2x-3=x^2+2x+3 \\ -x^2+2x+3=x^2+2x+3 \end{bmatrix}\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-\frac{3}{2} \\ x=0 \end{bmatrix}.$$

+ Nếu $x<-\frac{3}{2}$ thì ta có $(1)\Leftrightarrow |x^2-2x-3|=x^2-2x-3$. Sử dụng định nghĩa giá trị tuyệt đối, kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm của (1) trong trường hợp này:

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3\ge 0 \\ x<-\frac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x\ge 3 \end{array}\right. \\ x<-\frac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow x<-\frac{3}{2}$$

Phương trình đã cho có tập nghiệm nguyên trên đoạn $[-2020;2021]$ là $S=\{0;-2;-3;...;-2020\}$.

Vậy có $2020$ số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Dạng 2. Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo**

**Câu 33.** Cho hai mệnh đề P và Q. Tìm điều kiện để mệnh đề $P\Rightarrow Q$ **sai**.

**A.** P đúng và Q đúng. **B.** P sai và Q đúng.

**C.** P đúng và Q sai. **D.** P sai và Q sai.

**Lời giải**

**Chọn C**

Mệnh đề $P\Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai nên chịn đáp án C

**Câu 34.** Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào là mệnh đề kéo theo?

**A.** "Nếu $x>1$ thì $x^2>1$". **B.** "$x^3>1$ khi và chỉ khi $x>1$".

**C.** "1 là một số lẻ". **D.** "$x^2>1\Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$".

**Lời giải**

**Chọn A**

Mệnh đề kéo theo là mệnh đề có dạng nếu P thì Q.

**Câu 35.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

**A.** $-\pi<-2\Leftrightarrow \pi^2<4$. **B.** $\pi<4\Leftrightarrow \pi^2<16$.

**C.** $\sqrt{23}<5\Rightarrow 2\sqrt{23}<2.5$. **D.** $\sqrt{23}<5\Rightarrow -2\sqrt{23}>-2.5$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Mệnh đề kéo theo chỉ sai khi P đúng Q sai.

Vậy mệnh đề ở đáp án A sai.

**Câu 36.** Cách phát biểu nào sau đây không thể dùng để phát biểu mệnh đề: $A\Rightarrow B$.

**A.** Nếu $A$ thì $B$. **B.** $A$ kéo theo $B$.

**C.** $A$ là điều kiện cần để có $B$. **D.** $A$ là điều kiện đủ để có $B$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**" Trước đủ sau cần ".**

Đáp án C sai vì $B$ mới là điều kiện cần để có $A$.

**Câu 37.** Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$:" Nếu $3^2+1$ là số chẵn thì 3 là số lẻ ''. Chọn mệnh đề đúng:

**A.** Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề sai.

**B.** Cả mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều sai.

**C.** Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề sai.

**D.** Cả mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

**Lời giải**

**Chọn D**

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ có $P$ đúng và $Q$ đúng nên $P \Rightarrow Q$ đúng. Loại đáp án B và **C.**

Mệnh đề đảo $Q \Rightarrow P$ có $P$ đúng và $Q$ đúng nên $Q \Rightarrow P$ đúng. Loại đáp án#A.

**Câu 38.** Mệnh đề: " Nếu một tứ giác là hình bình hành thì nó là hình thang" có thể được phát biểu lại là

**A.** Tứ giác $T$ là hình thang là điều kiện đủ để $T$ là hình bình hành.

**B.** Tứ giác $T$ là hình bình hành là điều kiện cần để $T$ là hình thang.

**C.** Tứ giác $T$ là hình thang là điều kiện cần để $T$ là hình bình hành.

**D.** Tứ giác $T$ là hình thang là điều kiện cần và đủ để $T$ là hình bình hành.

**Lời giải**

Mệnh đề: " Nếu một tứ giác là hình bình hành thì nó là hình thang" có thể được phát biểu lại là " Một tứ giác là hình thang là điều kiện cần để nó là hình bình hành".

**Câu 39.** Tìm mệnh đề **sai**.

**A.** Hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O) \Leftrightarrow ABCD$ là hình thang cân.

**B.** 63 chia hết cho 7 $\Rightarrow$ Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc.

**C.** Tam giác $ABC$ vuông tại $C \Leftrightarrow AB^2 = CA^2 + CB^2$.

**D.** 10 chia hết cho 5 $\Leftrightarrow$ Hình vuông có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc nhau.

**Lời giải**

Mệnh đề A; C; D: Đúng.

Mệnh đề: "63 chia hết cho 7": Đúng.

Mệnh đề: "Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc": Sai.

Do đó: "63 chia hết cho 7 $\Rightarrow$ Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc": Sai

**Câu 40.** Cho định lí "$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$". Chọn khẳng định ***không*** đúng.

**A.** $P(x)$ là điều kiện đủ để có $Q(x)$. **B.** $Q(x)$ là điều kiện cần để có $P(x)$.

**C.** $P(x)$ là giả thiết và $Q(x)$ là kết luận. **D.** $P(x)$ là điều kiện cần để có $Q(x)$.

**Lời giải**

Định lí "$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$" có thể phát biểu bằng một trong các cách sau:

Nếu $P(x)$ thì $Q(x)$

$P(x)$ là điều kiện đủ để có $Q(x)$

$Q(x)$ là điều kiện cần (ắt có) để có $P(x)$

$P(x)$ là giả thiết, $Q(x)$ là kết luận.

**Câu 41.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

**A.** Nếu số nguyên $n$ có chữ số tận cùng là $0$ thì số nguyên $n$ chia hết cho 5.

**B.** Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thoi thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau.

**C.** Nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật

**D.** Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 42.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để diện tích của chúng bằng nhau.

**B.** Số tự nhiên chia hết cho 5 là điều kiện đủ để nó có tận cùng bằng 5.

**C.** Điều kiện đủ để hình bình hành $ABCD$ là hình thoi.

**D.** Tứ giác $ABCD$ là hình thoi là điều kiện cần và đủ để tứ giác đó là hình bình hành và có hai đường chéo vuông góc với nhau.

**Lời giải**

**Chọn D**

Mệnh đề A sai vì : giả sử có hai tam giác diện tích đều bằng 6 nhưng một hình có chiều cao là 3, đáy là 4. Một hình có chiều cao là 2, đáy là 6. Hai tam giác đó không bằng nhau.

Mệnh đề B sai vì : Số tự nhiên chia hết cho 5 thì nó có tận cùng là 0 hoặc 5.

Mệnh đề C sai vì : thiếu một vế.

**Câu 43.** Phát biểu nào sau đây là **sai**?

**A.** Điều kiện cần và đủ để tập $A$ có $n$ phần tử là tập $A$ có $2^n$ tập con.

**B.** Tập $A$ có $2^n$ tập con là điều kiện cần để tập $A$ có $n$ phần tử.

**C.** Không thể phát biểu mệnh đề : "Nếu tập $A$ có $n$ phần tử thì tập $A$ có $2^n$ tập con" dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.

**D.** Tập $A$ có $n$ phần tử là điều kiện đủ để tập $A$ có $2^n$ tập con.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 44.** Cho mệnh đề: "Một số là số chính phương khi và chỉ khi chữ số tận cùng của nó là: $0;\ 1;\ 4;\ 5;6;\ 9$. Xét các khẳng định sau.

(1) Không thể phát biểu mệnh đề trên bằng thuật ngữ điều kiện cần và đủ.

(2) Điều kiện cần để một số là số chính phương là chữ số tận cùng của nó là một trong các số $0;\ 1;\ 4;\ 5;\ 6;\ 9$.

(3) Một số là số chính phương là điều kiện đủ để chữ số tận cùng của nó là $0;\ 1;\ 4;\ 5;6;\ 9$.

(4) Điều kiện cần để một số có chữ số tận cùng $0;\ 1;\ 4;\ 5;6;\ 9$ là số đó là số chính phương.

Hãy cho biết có bao nhiêu phát biểu đúng?

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số 11 có chữ số tận cùng là 1 và 11 không là số chính phương nên mệnh đề đã cho và phát biểu $(4)$ là các phát biểu sai và $(1)$ là phát biểu đúng.

Mọi số chính phương thì có chữ số tận cùng của nó là một trong các số $0;\ 1;\ 4;\ 5;\ 6;\ 9$.

Nên $(2)$, $(3)$ là các phát biểu đúng.

Vậy $(1)$, $(2)$, $(3)$ là các phát biểu đúng.

**Câu 45.** Cho mệnh đề: "Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều". Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Điều kiện đủ để một tam giác là tam giác đều là tam giác đó có hai góc bằng nhau.

**B.** Một tam giác là tam giác đều là điều kiện cần để tam giác đó có hai góc bằng nhau.

**C.** Không thể phát biểu mệnh đề trên dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.

**D.** Điều kiện cần và đủ để tam giác đều là tam giác đó có hai góc bằng nhau.

**Lời giải**

**Chọn C**

Khái niệm "điều kiện cần", "điều kiện đủ" chỉ dùng để phát biểu những mệnh đề đúng.

Mệnh đề đã cho là một mệnh đề sai, vì thế không thể phát biểu mệnh đề đó dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.

**Câu 46.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

**A.** Hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau là điều kiện cần và đủ để $ABCD$ là hình chữ nhật.

**B.** Tam giác $ABC$ có một góc $60^0$ là điều kiện đủ để tam giác $ABC$ đều.

**C.** Số nguyên $a$ chia hết cho 3 là điều kiện cần để $a$ chia hết cho 6.

**D.** Số $3n-5(n\in\mathbb{N})$ là số lẻ là điều kiện đủ để số $6n(n\in\mathbb{N})$ là số chẵn.

**Lời giải**

**Chọn B**

Tam giác $ABC$ có một góc $60^0$ là điều kiện cần để tam giác $ABC$ đều.

**Câu 47.** Cách phát biểu nào sau đây **không thể** đúng để phát biểu mệnh đề: $A\Rightarrow B$

**A.** $A$ là điều kiện đủ để có $B$.  **B.** Nếu $A$ thì $B$.

**C.** $A$ kéo theo $B$.  **D.** $A$ là điều kiện cần để có $B$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 48.** Mệnh đề nào sau đây có mệnh đề đảo đúng?

**A.** Nếu $a=b$ thì $a^2=b^2$.

**B.** Nếu một phương trình bậc hai có $\Delta<0$ thì phương trình đó vô nghiệm.

**C.** Nếu một số chia hết cho 6 thì cũng chia hết cho 3.

**D.** Nếu hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Dạng 3. Mệnh đề tương đương**

**Câu 49.** Cho mệnh đề E:"Nếu số nguyên có chữ số tận cùng bằng 0 thì chia hết cho 5". Mệnh đề nào sau đây tương đương với mệnh đề E?

**A.** Nếu số nguyên chia hết cho 5 thì có chữ số tận cùng bằng 0.

**B.** Nếu số nguyên không chia hết cho 5 thì không có tận cùng bằng 0.

**C.** Nếu số nguyên không có chữ số tận cùng bằng 0 thì chia hết cho 5.

**D.** Nếu số nguyên không có chữ số tận cùng bằng 0 thì không chia hết cho 5.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Mệnh đề phản đảo:** Mệnh đề $P\Rightarrow Q$ tương đương

**Câu 50.** Mệnh đề $P\Leftrightarrow Q$ chỉ đúng khi nào? (*Hãy chọn đáp án chính xác nhất*)

**A.** Cả $P$ và $Q$ đều đúng.

**B.** Cả $P$ và $Q$ đều sai.

**C.** Cả $P$ và $Q$ đều cùng đúng hoặc cùng sai.

**D.** Cả $P$ và $Q$ đều vừa đúng vừa sai.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 51.** Cho mệnh đề $P$:" Nếu $a+b<2$ thì một trong hai số $a$ và $b$ nhỏ hơn 1"". Mệnh đề nào sau đây tương đương với mệnh đề đã cho?

**A.** Điều kiện đủ để một trong hai số $a$ và $b$ nhỏ hơn 1 là $a+b<2$.

**B.** Điều kiện cần để một trong hai số $a$ và $b$ nhỏ hơn 1 là $a+b<2$.

**C.** Điều kiện đủ để $a+b<2$ là một trong hai số $a$ và $b$ nhỏ hơn 1.

**D.** Cả B và **C.**

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta dựa trên lý thuyết: Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề kéo theo. Khi đó, $P$ là điều kiện đủ để có $Q$ hoặc $Q$ là điều kiện cần để có $P$. Ta dễ dàng chọn được đáp án đúng.

**Câu 52.** Cho mệnh đề kéo theo: " Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau". Hãy phát biểu lại mệnh đề trên bằng cách sử dụng " điều kiện cần" hoặc " điều kiện đủ".

**A.** Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để hai tam giác có diện tích bằng nhau.

**B.** Điều kiện cần và đủ để hai tam giác có diện tích bằng nhau là hai tam giác bằng nhau.

**C.** Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để hai tam giác có diện tích bằng nhau.

**D.** Điều kiện đủ để hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có diện tích bằng nhau.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 53.** Cho $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề đúng. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

**A.** $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$ đúng. **B.** $\overline{Q} \Leftrightarrow P$ sai. **C.** $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$ sai. **D.** $\overline{P} \Leftrightarrow Q$ sai.

**Lời giải**

**Chọn C**

◆ Ta có $P \Leftrightarrow Q$ khi và chỉ khi $P \Rightarrow Q$ đúng và $Q \Rightarrow P$ đúng.

◆ Khi đó $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$ đúng và $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ đúng suy ra $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$ đúng

Phương án trả lời là $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$ sai.

**Câu 54.** Cho hai tập hợp $A$ và $B$. Mệnh đề "$\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$" tương đương với mệnh đề nào sau đây?

**A.** $A \neq B$. **B.** $A = B$. **C.** $A \subset B$. **D.** $B \subset A$.

**Lời giải**

Theo định nghĩa tập con ta có đáp án C thỏa mãn.

**Câu 55.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai?

**A.** Một tam giác là đều khi và chỉ khi chúng có hai đường trung tuyến bằng nhau và có một góc bằng $60°$.

**B.** Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một cạnh bình phương bằng tổng bình phương hai cạnh còn lại.

**C.** Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi chúng có 3 góc vuông.

**D.** Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một góc bằng nhau.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét mệnh đề A đúng vì: khi hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân, có một góc bằng $60°$ nên tam giác đó là tam giác đều. Ngược lại thì hiển nhiên tam giác đều suy ra được hai đường trung tuyến bằng nhau và có một góc bằng $60°$.

Xét mệnh đề B đúng theo định lý Pytago.

Xét mệnh đề C đúng.

Mệnh đề D sai vì khi hai tam giác đồng dạng thì ba góc của hai tam giác đó bằng nhau, các cạnh tương ứng tỉ lệ với nhau, nên điều kiện để hai tam giác bằng nhau phải có thêm cặp cạnh bằng nhau.

**Câu 56.** Cho hai mệnh đề toán học

$A$ **:** " $3<2$ ";

$B$ **:** **"** Tứ giác có 4 cạnh bằng nhau là hình vuông ";

Hãy cho biết trong các mệnh đề $A \Rightarrow B$ , $B \Rightarrow A$ , $B \Leftrightarrow A$ có bao nhiêu mệnh đề **sai**

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

**ChọnA**

Ta có $A$ sai, $B$ sai nên $A \Rightarrow B$ đúng và $B \Rightarrow A$ đúng;

Ta có $A \Rightarrow B$ đúng và $B \Rightarrow A$ đúng nên $B \Leftrightarrow A$ đúng;

Vậy trong các mệnh đề $A \Rightarrow B$ , $B \Rightarrow A$ , $B \Leftrightarrow A$ có 0 mệnh sai.

**Câu 57.** Cho mệnh đề: "Nếu $n$ là một số nguyên tố lớn 3 thì $n^2+20$ là một hợp số". Mệnh đề nào sau đây tương đương với mệnh đề đã cho?

**A.** Điều kiện cần và đủ để $n^2+20$ là một hợp số là $n$ là một số nguyên tố lớn 3.

**B.** Điều kiện đủ để $n^2+20$ là một hợp số là $n$ là một số nguyên tố lớn 3.

**C.** Điều kiện cần để $n^2+20$ là một hợp số là $n$ là một số nguyên tố lớn 3.

**D.** $n^2+20$ là một hợp số là điều kiện đủ để $n$ là một số nguyên tố lớn 3.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét mệnh đề đúng "Nếu P thì Q". Khi đó: P là điều kiện đủ để có Q hay **điều kiên đủ để có Q là P** hay để có Q điều kiện đủ là P.

Nên chọn B

**Dạng 4. Mệnh đề phủ định. Mệnh đề chứa kí hiệu $\forall, \exists$**

**Câu 58.** Cho mệnh đề $A$:"2 là số nguyên tố". Mệnh đề phủ định của mệnh đề $A$ là

**A.** 2 không phải là số hữu tỷ. **B.** 2 là số nguyên.

**C.** 2 không phải là số nguyên tố. **D.** 2 là hợp số.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 59.** Phủ định của mệnh đề " $n>9$ " là

**A.** " $-n>9$ ". **B.** " $-n>-9$ ".

**C.** " $n<9$ ". **D.** " $n \le 9$ ".

**Lời giải**

Phủ định của mệnh đề " $n>9$ " là " $n \le 9$ ".

Chọn đáp án $D$ .

**Câu 60.** Cho mệnh đề $A=$"$\exists n \in \mathbb{N}: 3n+1$ là số lẻ", mệnh đề phủ định của mệnh đề $A$ và tính đúng, sai của mệnh đề phủ định là:

**A.** $\overline{A}=$"$\forall n \in \mathbb{N}: 3n+1$ là số chẵn". Đây là mệnh đề đúng.

**B.** $\overline{A}=$"$\forall n \in \mathbb{N}: 3n+1$ là số chẵn". Đây là mệnh đề sai.

**C.** $\overline{A}=$"$\exists n \in \mathbb{N}: 3n+1$ là số chẵn". Đây là mệnh đề sai.

**D.** $\overline{A}=$"$\exists n \in \mathbb{N}: 3n+1$ là số chẵn". Đây là mệnh đề đúng.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phủ định của $\exists$ là $\forall$.

Phủ định của "số lẻ" là "số chẵn". Mặt khác, mệnh đề phủ định sai do $\exists 6 \in \mathbb{N} : 3.6+1$ là số lẻ.

**Câu 61.** Mệnh đề $P(x):"\forall x \in \mathbb{R},\ x^2-x+3<0"$. Phủ định của mệnh đề $P(x)$ là:

**A.** $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2-x+3>0$. **B.** $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2-x+3>0$.

**C.** $\forall x \notin \mathbb{R},\ x^2-x+3 \geq 0$. **D.** $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2-x+3 \geq 0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phủ định của $P(x):"\forall x \in \mathbb{R},\ x^2-x+3<0"$ là $\overline{P(x)}:"\forall x \in \mathbb{R},\ x^2-x+3 \geq 0"$

**Câu 62.** Mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2=3$ " khẳng định rằng:

**A.** Bình phương của mỗi số thực bằng $3$.

**B.** Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng $3$.

**C.** Chỉ có một số thực có bình phương bằng $3$.

**D.** Nếu $x$ là số thực thì $x^2=3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 63.** Mệnh đề $P(x):"\forall x \in \mathbb{R},\ x^2-x+7<0"$. Phủ định của mệnh đề $P$ là

**A.** $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2-x+7>0$. **B.** $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2-x+7>0$.

**C.** $\forall x \notin \mathbb{R},\ x^2-x+7 \geq 0$. **D.** $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2-x+7 \geq 0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$P(x):"\forall x \in \mathbb{R},\ x^2-x+7<0" \Rightarrow \overline{P}(x):"\exists x \in \mathbb{R},\ x^2-x+7 \geq 0"$.

**Câu 64.** Mệnh đề phụ định của mệnh đề $P(x):"\exists x \in \mathbb{R} : x^2+2x+5$ là số nguyên số" là

**A.** $\forall x \notin \mathbb{R} : x^2+2x+5$ không là số nguyên tố. **B.** $\exists x \in \mathbb{R} : x^2+2x+5$ không là số nguyên tố.

**C.** $\forall x \in \mathbb{R} : x^2+2x+5$ không là số nguyên tố. **D.** $\exists x \in \mathbb{R} : x^2+2x+5$ là số thực.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phủ định của mệnh đề $P(x)$ là $\overline{P(x)}:"\forall x \in \mathbb{R} : x^2+2x+5$ không là số nguyên tố".

**Câu 65.** Cho mệnh đề $A =$ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 < x$". Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là phủ định của mệnh đề $A$?

**A.** "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$". **B.** "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$". **C.** "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$". **D.** "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x$".

**Lời giải**

**Chọn B**

Phủ định của $\forall$ là $\exists$.

Phủ định của $<$ là $\geq$.

**Câu 66.** Cho mệnh đề $\mathrm{P}(x) =$ "$\exists x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0$". Phát biểu nào sau đây là mệnh đề phủ định của mệnh đề $\mathrm{P}(x)$?

**A.** $\overline{\mathrm{P}(x)} =$ "$\exists x \in \mathbb{R} : x+1<0$". **B.** $\overline{\mathrm{P}(x)} =$ "$\forall x \in \mathbb{R} : x+1<0$".

**C.** $\overline{\mathrm{P}(x)} =$ "$\forall x \in \mathbb{R} : x+1 \leq 0$". **D.** $\overline{\mathrm{P}(x)} =$ "$\exists x \in \mathbb{R} : x+1 \leq 0$".

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 67.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P =$ "$\forall x \in \mathbb{N} : x^2+x-1>0$" là:

**A.** $\overline{P} =$ "$\exists x \in \mathbb{N} : x^2+x-1>0$". **B.** $\overline{P} =$ "$\exists x \in \mathbb{N} : x^2+x-1<0$".

**C.** $\overline{P}=$ "$\exists x\in\mathbb{N}: x^2+x-1\le 0$". **D.** $\overline{P}=$ "$\forall x\in\mathbb{N}: x^2+x-1\le 0$".

**Lời giải**

$\overline{P}=$ "$\exists x\in\mathbb{N}: x^2+x-1\le 0$".

**Câu 68.** Mệnh đề nào sau là mệnh đề **sai**?

**A.** $\forall n\in\mathbb{N}: n\le 2n$. **B.** $\exists n\in\mathbb{N}: n^2=n$. **C.** $\forall x\in\mathbb{R}: x^2>0$. **D.** $\exists x\in\mathbb{R}: x>x^2$.

**Lời giải**

Mệnh đề C sai vì tồn tại số $0\in\mathbb{R}$ và ta có $0^2=0$.

**Câu 69.** Mệnh đề "$\exists x\in\mathbb{R}, x^2=8$" Khẳng định rằng:

**A.** Bình Phương của tất cả các số thực bằng 8.

**B.** Có duy nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 8.

**C.** Nếu $x$ là số thực thì $x^2=8$.

**D.** Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 8.

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo lý thuyết

**Câu 70.** Phủ định của mệnh đề $P(x)$:"$\exists x\in\mathbb{R},\ x^2+2x=3$" là:

**A.** "$\exists x\in\mathbb{R}, x^2+2x=3$". **B.** "$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+2x=3$"..

**C.** "$\exists x\in\mathbb{R},\ x^2+2x\ne 3$". **D.** "$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+2x\ne 3$".

**Lời giải**

**Chọn D**

Phủ định của mệnh đề $P(x)$ là $\overline{P(x)}$:"$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+2x\ne 3$".

**Câu 71.** Trong các mệnh đề sau tìm mệnh đề **sai**?

**A.** $\forall n\in\mathbb{N}: n\le 2n$. **B.** $\exists n\in\mathbb{N}: n+1>n$. **C.** $\forall n\in\mathbb{R}: n^2>0$. **D.** $\exists n\in\mathbb{R}: n^2\le n$.

**Lời giải**

**Chọn C**

◆ Mệnh đề **C** sai khi $n=0$.

**Câu 72.** Viết mệnh đề sau bằng cách sử dụng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$: "Có một số nguyên bằng bình phương của chính nó".

**A.** $\forall x\in\mathbb{R}, x=x^2$. **B.** $\forall x\in\mathbb{Z}, x^2=x$. **C.** $\exists x\in\mathbb{Z}, x=x^2$. **D.** $\exists x\in\mathbb{R}, x^2-x=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

◆ $\exists x\in\mathbb{Z}, x=x^2$.

**Câu 73.** Cho mệnh đề "$\forall x\in\mathbb{R}, x^2-72x+7<0$". Phủ định của mệnh đề trên là

**A.** $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-72x+7\ge 0$. **B.** $\exists x\in\mathbb{R}, x^2-72x+7\ge 0$.

**C.** $\exists x\in\mathbb{R}, x^2-72x+7>0$. **D.** $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-72x+7>0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

◆ Phủ định của mệnh đề trên là: $\exists x\in\mathbb{R}, x^2-72x+7\ge 0$.

**Câu 74.** Cho mệnh đề: "$\exists x\in\mathbb{R}, x^2+x+1=0$". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là:

**A.** "$\forall x\in\mathbb{R}, x^2+x+1=1$". **B.** "$\forall x\in\mathbb{R}, x^2+x+1\ne 0$".

**C.** "$\forall x\in\mathbb{R}, x^2+x+1=0$". **D.** "$\exists x\in\mathbb{R}, x^2+x+1\ne 0$".

**Lời giải**

**Chọn B**

Phủ định của "$\exists$" là "$\forall$" và phủ định của "$=$" là "$\neq$".

**Câu 75.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** "$\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2)$ là số lẻ".

**B.** "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$".

**C.** "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2+1$ chia hết cho 3".

**D.** "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x \geq \pm 3$".

**Lời giải**

**Chọn B**

◆ Mệnh đề A sai vì số tự nhiên liên tiếp $n, n+1, n+2$ luôn có ít nhất 1 số chẵn nên tích của chúng là số chẵn.

◆ Mệnh đề B đúng vì $x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

◆ Mệnh đề C sai vì $n^2$ luôn chia hết cho 3 hoặc chia 3 dư 1 nên $n^2+1$ hoặc chia 3 dư 1 hoặc chia 3 dư 2 hay $n^2+1$ không chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

◆ Mệnh đề D sai vì $x^2 \geq 9 \Leftrightarrow |x| \geq 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{array}\right.$.

**Câu 76.** Cho mệnh đề $P$: "$\forall x \in Z, (2x+1)^2$ không chia hết cho $4$". Mệnh đề $\overline{P}$ là:

**A.** "$\exists x \in Z, (2x+1)^2$ chia hết cho $4$".

**B.** "$\exists x \in Z, (2x+1)^2$ không chia hết cho $4$".

**C.** "$\forall x \in Z, (2x+1)^2$ không chia hết cho $4$".

**D.** "$\forall x \in Z, (2x+1)^2$ chia hết cho $4$".

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 77.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

**A.** $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x + 2 = 0$.

**B.** $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$.

**C.** $\exists n \in \mathbb{N}: n^2 = n$.

**D.** $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $n < 2n$.

**Lời giải**

**Chọn D**

◆ Xét mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $n < 2n$.

Chọn $n = 0 \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n = 0 \Rightarrow n = 2n$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ thì $n < 2n$ là mệnh đề sai.

**Câu 78.** Phủ định của mệnh đề: "$\exists x \in \mathbb{N}: x^2 - 4x - 5 > 0$" là

**A.** "$\forall x \in \mathbb{N}: x^2 - 4x - 5 < 0$".

**B.** "$\forall x \in \mathbb{N}: x^2 - 4x - 5 \leq 0$".

**C.** "$\forall x \in \mathbb{N}: x^2 - 4x - 5 \geq 0$".

**D.** "$\forall x \in \mathbb{N}: x^2 - 4x - 5 > 0$".

**Lời giải**

**Chọn B**

◆ Phủ định của mệnh đề: "$\exists x \in \mathbb{N}: x^2 - 4x - 5 > 0$" là "$\forall x \in \mathbb{N}: x^2 - 4x - 5 \leq 0$".

**Câu 79.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề chứa biến $P$: "$\exists x \in \mathbb{R}: 2x + 1 > 0$" là

**A.** $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}: 2x + 1 \leq 0$".

**B.** $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}: 2x + 1 < 0$".

**C.** $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}: 2x + 1 > 0$".

**D.** $\overline{P}$: "$\exists x \in \mathbb{R}: 2x + 1 \leq 0$".

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}: 2x + 1 \leq 0$".

**Câu 80.** Cho mệnh đề $P$: "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 < 0$". Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề $P$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

**A.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R},x^2+2x+1\geq 0"$ và đây là mệnh đề sai.

**B.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R},x^2+2x+1>0"$ và đây là mệnh đề sai.

**C.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R},x^2+2x+1\geq 0"$ và đây là mệnh đề đúng.

**D.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R},x^2+2x+1>0"$ và đây là mệnh đề đúng.

**Lời giải**

Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P$ là: $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R},x^2+2x+1\geq 0"$.

Mệnh đề này là mệnh đề đúng vì $x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

**Câu 81.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P:$ " $\forall x\in\mathbb{R}:x^2+1>0$" là

**A.** $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+1\leq 0"$.

**B.** $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+1<0"$.

**C.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R}:x^2+1\leq 0"$.

**D.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R}:x^2+1<0"$.

**Lời giải**

Ta có mệnh đề phủ định của mệnh đề $P:$ " $\forall x\in\mathbb{R}:x^2+1>0$" là $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+1\leq 0"$.

**Câu 82.** Cho mệnh đề $A:"\forall x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+x-1\leq 0"$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $A$ là

**A.** $\overline{A}:"\exists x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+x-1\leq 0"$.

**B.** $\overline{A}:"\forall x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+x-1\geq 0"$.

**C.** $A:"\forall x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+x-1>0"$.

**D.** $A:"\exists x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+x-1>0"$.

**Lời giải**

Cho mệnh đề $A:"\forall x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+x-1\leq 0"$.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề $A$ là $\overline{A}:"\exists x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+x-1>0"$.

**Câu 83.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P:"\forall x\in\mathbb{R}:x^2+1>2x"$ là

**A.** $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+1<2x"$.

**B.** $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+1\leq 2x"$.

**C.** $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+1>2x"$.

**D.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R}:x^2+1\leq 2x"$.

**Lời giải**

Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P:"\forall x\in\mathbb{R}:x^2+1>2x"$ là mệnh đề $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+1\leq 2x"$.

**Câu 84.** Phủ định của mệnh đề $"\exists x\in\mathbb{R}:x^2<0"$ là

**A.** $\forall x\in\mathbb{R}:x^2\leq 0$.

**B.** $\exists x\in\mathbb{R}:x^2\leq 0$.

**C.** $\forall x\in\mathbb{R}:x^2<0$.

**D.** $\forall x\in\mathbb{R}:x^2\geq 0$.

**Lời giải**

+ Phủ định của $\exists x\in\mathbb{R}$ là $\forall x\in\mathbb{R}$.

+ Phủ định của $x^2<0$ là $x^2\geq 0$.

$\Rightarrow$ Mệnh đề phủ định là "$\forall x\in\mathbb{R}:x^2\geq 0$".

**Câu 85.** Cho mệnh đề $"\exists x\in\mathbb{Z},4x^2-1=0"$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là

**A.** $"\forall x\in\mathbb{Z},4x^2-1=0"$.

**B.** $"\forall x\in\mathbb{Z},4x^2-1\neq 0"$.

**C.** $"\forall x\in\mathbb{Z},4x^2-1>0"$.

**D.** $"\exists x\in\mathbb{Z},4x^2-1\neq 0"$.

**Lời giải**

Mệnh đề $"\exists x\in\mathbb{Z},4x^2-1=0"$ có phủ định lại là $"\forall x\in\mathbb{Z},4x^2-1\neq 0"$.

**Câu 86.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

**A.** $\exists x\in\mathbb{N},x^2=3$.

**B.** $\forall n\in\mathbb{N},n^2-n\geq 0$.

**C.** $\forall x\in\mathbb{N},(x-2)^2<x^2$.

**D.** $\exists n\in\mathbb{N},3^n<n+3$.

**Lời giải**

Ta xét mệnh đề $\exists x\in\mathbb{N},x^2=3$.

Ta có: $x^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\end{array}\right.$, mà $\sqrt{3}\notin\mathbb{N},-\sqrt{3}\notin\mathbb{N}$. Do đó mệnh đề này sai.

**Câu 87.** Mệnh đề nào sau đây có mệnh đề **phủ định đúng**:

**A.** $"\forall n \in \mathbb{N}: 2n \geq n"$. **B.** $"\forall x \in \mathbb{R}: x < x+1"$.

**C.** $"\exists x \in \mathbb{R}: 3x = x^2+1"$. **D.** $"\exists x \in \mathbb{Q}: x^2 = 2"$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có

+ Mệnh đề A,B, C là những mệnh đề đúng nên mệnh đề phủ định sai

+ Mệnh đề D là mệnh đề sai nên mệnh đề phủ định đúng.

**Câu 88.** Tìm mệnh đề **đúng?**

**A.** $"\exists x \in \mathbb{R}: x^2+3=0"$. **B.** $"\forall x \in \mathbb{Z}: x^5 > x^2"$.

**C.** $"\forall x \in \mathbb{N}: (2x+1)^2 - 1$ chia hết cho $4"$. **D.** $"\exists x \in \mathbb{R}: x^4+3x^2+2=0"$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $(2x+1)^2 - 1 = 4x^2+4x+1-1 = 4x(x+1)$.

Vì $4 \vdots 4$ nên $4x(x+1) \vdots 4,\ \forall x \in \mathbb{N}$.

**Câu 89.** Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề: $P: "\exists x \in \mathbb{R}: 2x-1<0"$

**A.** $\overline{P}: "\forall x \in \mathbb{R}: 2x-1 \geq 0"$. **B.** $\overline{P}: "\forall x \in \mathbb{R}: 2x-1>0"$.

**C.** $\overline{P}: "\forall x \in \mathbb{R}: 2x-1 \leq 0"$. **D.** $\overline{P}: "\exists x \in \mathbb{R}: 2x-1>0"$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 90.** Mệnh đề phủ định của $P: "\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0"$ là

**A.** $\overline{P}: "\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0"$ **B.** $\overline{P}: "\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0"$.

**C.** $\overline{P}: "\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0"$. **D.** $\overline{P}: "\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0"$

**Lời giải**

Mệnh đề $P: "\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0"$, phủ định của mệnh đề $P$ là $\overline{P}: "\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0"$.

**Câu 91.** Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

**A.** $\exists x \in \mathbb{R}, |x| < 0$. **B.** $|x| < 2 \Leftrightarrow x < 2$. **C.** $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$. **D.** $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x$.

**Lời giải**

Theo định nghĩa và tính chất GTTĐ, đáp án A, B, C sai

Đáp án D đúng: Với $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq x$.

**Câu 92.** Phủ định của mệnh đề $P(x): "\exists x \in \mathbb{R}: 2x-3x^2=1"$ là:

**A.** $"\forall x \in \mathbb{R}, 2x-3x^2 \neq 1"$. **B.** $"\exists x \in \mathbb{R}, 2x-3x^2 \neq 1"$.

**C.** $"\forall x \in \mathbb{R}, 2x-3x^2 = 1"$. **D.** $"\forall x \in \mathbb{R}, 2x-3x^2 \geq 1"$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 93.** Cho mệnh đề $A$ : "$\forall x \in R,\ x^2-x+2<0$". Mệnh đề phủ định của $A$ là:

**A.** $\forall x \in R,\ x^2-x+2>0$. **B.** $\exists x \in R,\ x^2-x+2 \geq 0$.

**C.** $\nexists x \in R,\ x^2-x+2<0$. **D.** $\forall x \in R,\ x^2-x+2 \geq 0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta thấy mệnh đề $A$ : "$\forall x \in R,\ x^2-x+2<0$". có tính sai.

Mệnh đề: "$\exists x \in R,\ x^2-x+2 \geq 0$" có tính đúng.

Nên mệnh đề phủ định của mệnh đề đã cho là mệnh đề $\overline{A}$ : "$\exists x \in R,\ x^2-x+2 \geq 0$".

Vậy đáp án đúng là $B$.

**Câu 94.** Mệnh đề phủ định $\overline{P}$ của mệnh đề $P=\left\{\forall x\in\mathbb{N}\,|\,x^2-1=0\right\}$ là

**A.** $\overline{P}=\left\{\forall x\in\mathbb{N}\,|\,x^2-1>0\right\}$.

**B.** $\overline{P}=\left\{\exists x\in\mathbb{N}\,|\,x^2-1\neq 0\right\}$.

**C.** $\overline{P}=\left\{\forall x\in\mathbb{N}\,|\,x^2-1\geq 0\right\}$.

**D.** $\overline{P}=\left\{\exists x\in\mathbb{N}\,|\,x^2-1<0\right\}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ định nghĩa mệnh đề phủ định suy ra $\overline{P}=\left\{\exists x\in\mathbb{N}\,|\,x^2-1\neq 0\right\}$.

**Câu 95.** Mệnh đề "$\exists x\in\mathbb{R},\ x^2=3$" khẳng định rằng:

**A.** Bình phương của mỗi số thực bằng $3$.

**B.** Nếu $x$ là số thực thì $x^2=3$.

**C.** Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng $3$.

**D.** Chỉ có một số thực có bình phương bằng $3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Mệnh đề "$\exists x\in\mathbb{R},\ x^2=3$" khẳng định rằng: có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng $3$.

**Câu 96.** Viết mệnh đề sau bằng cách sử dụng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$: "Cho hai số thực khác nhau bất kì, luôn tồn tại một số hữu tỉ nằm giữa hai số thực đã cho"

**A.** $\forall a,b\in\mathbb{R},\forall r\in\mathbb{Q}:a<r<b$.

**B.** $\forall a,b\in\mathbb{R},a<b,\exists r\in\mathbb{Q}:a<r<b$.

**C.** $\forall a,b\in\mathbb{R},a<b,\forall r\in\mathbb{Q}:a<r<b$.

**D.** $\exists a,b\in\mathbb{R},\exists r\in\mathbb{Q}:a<r<b$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét đáp án A: "Cho hai số thực bất kì, mọi số hữu tỉ nằm giữa hai số thực đã cho" sai.

Xét đáp án B: đúng.

Xét đáp án C: "Cho hai số thực khác nhau bất kì, mọi số hữu tỉ nằm giữa hai số thực đã cho" sai.

Xét đáp án D: "Tồn tại hai số thực bất kì, luôn tồn tại một số hữu tỉ nằm giữa hai số thực đã cho" sai.

**Câu 97.** Cho $A:"\forall x\in\mathbb{A}:x^2+2x+1>0"$ thì phủ định của A là:

**A.** $"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+2x+1\neq 0"$.

**B.** $"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+2x+1<0"$.

**C.** $"\forall x\in\mathbb{R}:x^2+1\leq 0"$.

**D.** $"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+2x+1\leq 0"$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\overline{A}:"\exists x\in\mathbb{R}:x^2+2x+1\leq 0"$.

**Câu 98.** Cho mệnh đề: $"\forall x\in R,\frac{2}{x^2-x+1}>0"$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là:

**A.** Không tồn tại $x\in R$ mà $\frac{2}{x^2-x+1}>0$.

**B.** $\forall x\in R,\frac{2}{x^2-x+1}\leq 0$.

**C.** $\exists x\in R,\frac{2}{x^2-x+1}\leq 0$.

**D.** $\forall x\in R,\frac{2}{x^2-x+1}<0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 99.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** $\exists n \in \mathbb{N}, (n+1)(n-2)$ chia hết cho $7$.

**B.** $\exists n \in \mathbb{N}, n^2+1$ chia hết cho $4$.

**C.** $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq x-1$.

**D.** $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 3 \Leftrightarrow x < 3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\exists n \in \mathbb{N}, (n+1)(n-2)$ chia hết cho $7$ là mệnh đề đúng, ví dụ $n = 6$.

**Câu 100.** Mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 3$" khẳng định rằng:

**A.** Bình phương của mỗi số thực bằng $3$.

**B.** Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng $3$.

**C.** Chỉ có một số thực mà bình phương của nó bằng $3$.

**D.** Nếu $x$ là số thực thì $x^2 = 3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 101.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

**A.** "$\exists x \in \mathbb{Q}, x$ chia hết cho $5$".

**B.** "$\forall x \in \mathbb{R} : 5.x = x.5$".

**C.** "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 2 > 0$".

**D.** "$\exists x \in \mathbb{Z} : 2x + 3 = 6$".

**Lời giải**

**Chọn D**

A đúng. Ví dụ $5 \in \mathbb{Q}$ và $5$ chia hết cho $5$.

B đúng vì đó là tính chất giao hoán của phép nhân.

C đúng. Ví dụ $1 \in \mathbb{R}$ và $1^2 + 1 + 2 = 4 > 0$.

D sai. Vì $2x + 3 = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ mà $\dfrac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

**Câu 102.** Cho mệnh đề: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 > 0$". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là

**A.** $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 \leq 0$.

**B.** $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 > 0$.

**C.** $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 < 0$.

**D.** $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 \leq 0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Mệnh đề phủ định của mệnh đề đã cho là "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 \leq 0$"

**Câu 103.** Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

**A.** $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 > n$.

**B.** $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 < 2$.

**C.** $\forall x \in \mathbb{Z} : 2x > 1$.

**D.** $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > x$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương án A sai vì $n = 0$, $0^2 = 0$.

Phương án B sai vì $x = 2$, $2^2 > 2$.

Phương án C sai vì $x = -1$, $2.(-1) < 1$.

◆ Ta có $x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < 0 \end{array}\right.$.

Suy ra tồn tại số thực $\left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < 0 \end{array}\right.$ thỏa mãn $x^2 > x$.

**Câu 104.** Cho mệnh đề $P:"\forall x\in\mathbb{R},x^2-x-1<0"$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P$ là

**A.** $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R},x^2-x-1\geq 0"$.

**B.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R},x^2-x-1\geq 0"$.

**C.** $\overline{P}:"\forall x\in\mathbb{R},x^2-x-1>0"$.

**D.** $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R},x^2-x-1<0"$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 105.** Mệnh đề nào sau đây phủ định mệnh đề *P*: '' tích 3 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 6''

**A.** $\overline{P}:"\forall n\in N,n(n+1)(n+2)\vdots 6"$.

**B.** $\overline{P}:"\exists n\in N,n(n+1)(n+2)\not\vdots 6"$.

**C.** $\overline{P}:"\exists n\in N,n(n+1)(n+2)\vdots 6"$.

**D.** $\overline{P}:"\forall n\in N,n(n+1)(n+2)\not\vdots 6"$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Mệnh đề *P*: '' tích 3 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 6''.

$\Leftrightarrow P:"\forall n\in N,n(n+1)(n+2)\vdots 6"$.

Mệnh đề phủ định là $\overline{P}:"\exists n\in N,n(n+1)(n+2)\not\vdots 6"$.

Chọn đáp án **B.**

**Câu 106.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

**A.** $\exists n\in\mathbb{N}$, $n^2+11n+2$ chia hết cho $11$.

**B.** $\exists n\in\mathbb{N}$, $n^2+1$ chia hết cho $4$.

**C.** Tồn tại số nguyên tố chia hết cho $5$.

**D.** $\exists n\in\mathbb{Z}$, $2n^2-8=0$.

**Lời giải**

Ta có: Mệnh đề A đúng với $n=3$.

Mệnh đề C đúng với số nguyên tố là $5$.

Mệnh đề D đúng với $n=\pm 2$.

Mệnh đề B sai: Do $n\in N$ nên $\left[\begin{array}{l} n=2k \\ n=2k+1 \end{array}\right.(k\in N)\Rightarrow\left[\begin{array}{l} n^2+1=4k^2+1 \\ n^2+1=4k^2+4k+2 \end{array}\right.$ đều không chia hết cho $4$ với $\forall k\in N$.

**Câu 107.** Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.**" $\forall n\in\mathbb{N}$, $n(n+1)$là số chính phương".

**B.**" $\forall n\in\mathbb{N}$, $n(n+1)$là số lẻ".

**C.**" $\exists n\in\mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)$là số lẻ".

**D.**" $\forall n\in\mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)$chia hết cho 6".

**Lời giải**

**Chọn D**

+) với $n=1\Rightarrow n(n+1)=2$ không phải số chính phương $\Rightarrow A$ sai.

+) với $n=1\Rightarrow n(n+1)=2$ là số chẵn $\Rightarrow B$ sai.

+) đặt $P=n(n+1)(n+2)$

**TH1:** $n$ chẵn $\Rightarrow P$ chẵn

**TH2:** $n$ lẻ $\Rightarrow(n+1)$ chẵn $\Rightarrow P$ chẵn

Vậy $P$ chẵn $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow C$ sai.

+) $P\vdots 6\Leftrightarrow\begin{cases} P\vdots 2(*) \\ P\vdots 3(**) \end{cases}$

$(*)$ Ở trên ta đã chứng minh $P$ luôn chẵn $\Rightarrow P\vdots 2$

$(**)$ $P\vdots 3$

**TH1:** $n\vdots 3\Rightarrow P\vdots 3$

**TH2:** $n$ chia 3 dư 1 $\Rightarrow(n+2)\vdots 3\Rightarrow P\vdots 3$

**TH3:** $n$ chia 3 dư 2 $\Rightarrow (n+1) \vdots 3 \Rightarrow P \vdots 3$

Vậy $P \vdots 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow P \vdots 6$.

**Câu 108.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2+1$ không chia hết cho 3.

**B.** $\forall x \in \mathbb{R}, |x|<3 \Leftrightarrow x<3$.

**C.** $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq x-1$.

**D.** $\exists n \in \mathbb{N}, n^2+1$ chia hết cho 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

Với mọi số tự nhiên thì có các trường hợp sau:

$n=3k \Rightarrow n^2+1=(3k)^2+1$ chia 3 dư 1.

$n=3k+1 \Rightarrow n^2+1=(3k+1)^2+1=9k^2+6k+2$ chia 3 dư 2.

$n=3k+2 \Rightarrow n^2+1=(3k+2)^2+1=9k^2+12k+5$ chia 3 dư 2.

**Câu 109.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

**A.** $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x^2-8=0$.

**B.** $\exists n \in \mathbb{N}, (n^2+11n+2)$ chia hết cho 11.

**C.** Tồn tại số nguyên tố chia hết cho 5.

**D.** $\exists n \in \mathbb{N}, (n^2+1)$ chia hết cho 4.

**Lời giải**

**Chọn D**

Với $k \in \mathbb{N}$, ta có:

- Khi $n=4k \Rightarrow n^2+1=16k^2+1$ không chia hết cho 4.
- Khi $n=4k+1 \Rightarrow n^2+1=16k^2+8k+2$ không chia hết cho 4.
- Khi $n=4k+2 \Rightarrow n^2+1=16k^2+16k+5$ không chia hết cho 4.
- Khi $n=4k+3 \Rightarrow n^2+1=16k^2+24k+10$ không chia hết cho 4.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n^2+1$ không chia hết cho 4.

**Câu 110.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

**A.** $\exists n \in \mathbb{N}, (n^2+17n+1)$ chia hết cho 17.

**B.** $\exists n \in \mathbb{N}, (n^2+1)$ chia hết cho 4.

**C.** Tồn tại số nguyên tố chia hết cho 13.

**D.** $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2-4=0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

□ Mệnh đề **A** đúng, ví dụ với $n=4$.

□ Mệnh đề **B** **sai**, vì:

- Với $n=2k, k \in \mathbb{N},$ ta có $n^2+1=(2k)^2+1=4k^2+1$ chia cho 4 dư 1.

- Với $n=2k+1, k \in \mathbb{N},$ ta có $n^2+1=(2k+1)^2+1=4k(k+1)+2$ chia cho 4 dư 2.

□ Mệnh đề **C** đúng, số nguyên tố đó là số 13.

□ Mệnh đề **D** đúng, ví dụ với $x=2$.

**Câu 111.** Cho $n$ là số tự nhiên,mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\forall n, n(n+1)$ là số lẻ.

**B.** $\forall n, n(n+1)$ là số chính phương.

**C.** $\forall n, n(n+1)(n+2)$ là số chia hết cho 24.

**D.** $\exists n, n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 8.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đáp án $A$ sai vì hai số tự nhiên liên tiếp luôn có một số chẵn,tích của chúng là số chẵn.

Đáp án $B$ sai vì $n(n+1)$ không thể là số chính phương.

Đáp án $C$ sai xét trường hợp $n=1$ thì $1.(1+1)(1+2)=6$ không chia hết cho 24.

Đáp án $D$ đúng vì tồn tại $n=2$ thì $n(n+1)(n+2)=2.3.4=24$ chia hết cho 8.

# Bài 2. TẬP HỢP. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Tập hợp

***Ví dụ 1.*** Cho tập hợp $B$ gồm các số tự nhiên có một chữ số và chia hết cho 3 .
a) Viết tập hợp $B$ theo hai cách: liệt kê các phần tử của tập hợp; chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.
b) Minh họa tập hợp $B$ bằng biểu đồ Ven.

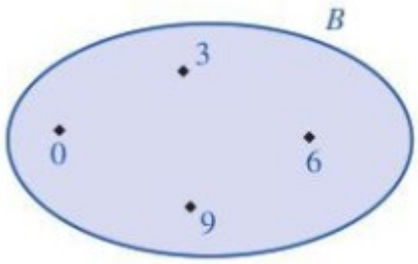
***Giải***

a) Tập hợp $B$ được viết theo cách liệt kê các phần tử là: $B=\{0;3;6;9\}$

Tập hợp $B$ được viết theo cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử là:

$B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,0\le x\le 9 \text{ và } x:3\}$.

b) Tập hợp $B$ được minh hoạ bằng biểu đồ Ven



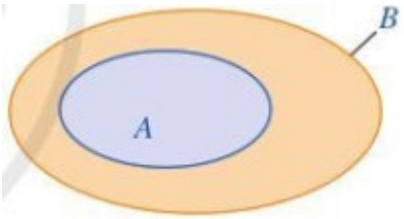

*Nhận xét*
- Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng, kí hiệu là $\varnothing$.
- Một tập hợp có thể không có phần tử nào, cũng có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử.

*Chú ý:* Khi tập hợp $C$ là tập hợp rỗng, ta viết $C=\varnothing$ và không được viết là $C=\{\varnothing\}$.

### II. Tập con và tập hợp bằng nhau

#### 1. Tập con

Nếu mọi phần tử của tập hợp $A$ đều là phần tử của tập hợp $B$ thì ta nói $A$ là một tập con của tập hợp $B$ và viết là $A\subset B$. Ta còn đọc là $A$ chứa trong $B$.




*Quy ước*: Tập hợp rỗng $\varnothing$ được coi là tập con của mọi tập hợp.

*Chú ý:* $A\subset B\Leftrightarrow(\forall x, x\in A\Rightarrow x\in B)$.

Khi $A\subset B$, ta cũng viết $B\supset A$ (đọc là $B$ chứa $A$).

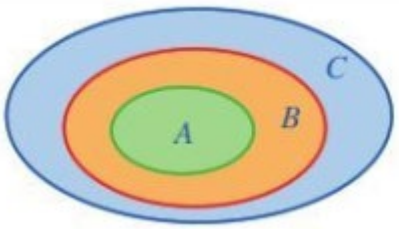
Nếu $A$ không phải là tập con của $B$, ta viết $A\not\subset B$.

***Ví dụ 2.*** Cho hai tập hợp: $E=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le 1\}, F=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<2\}$. Chứng tỏ rằng $E\subset F$.

***Giải***

Với mọi số thực $x$, ta có: $x\le 1$ thì $x<2$ nên $x\in E$ thì $x\in F$. Do đó $E\subset F$

Ta có các tính chất sau:
- $A\subset A$ với mọi tập hợp $A$;
- Nếu $A\subset B$ và $B\subset C$ thì $A\subset C$



## 2. Tập hợp bằng nhau

Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói hai tập hợp $A$ *và* $B$ *bằng nhau*, viết là $A = B$

***Ví dụ 3.*** Cho tập hợp $C$ gồm các tam giác có ba cạnh bằng nhau và tập hợp $D$ gồm các tam giác có ba góc bằng nhau. Hai tập hợp $C$ và $D$ có bằng nhau hay không?

***Giải***

Do một tam giác có ba cạnh bằng nhau khi và chỉ khi tam giác đó có ba góc bằng nhau nên hai tập hợp $C$ và $D$ là bằng nhau.

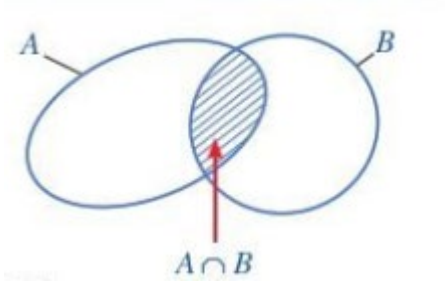
## III. Giao của hai tập hợp

Tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc $A$ vừa thuộc $B$ được gọi là *giao* của $A$ và $B$, kí hiệu $A \cap B$.

$x \in A \cap B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \in B$.

Vậy $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$

Tập hợp $A \cap B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong hình bên




***Ví dụ 4***. Tìm giao của hai tập hợp trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 16\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 20\}$.

b) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 4\}, D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 5\}$.

***Giải***

a) $A = \{1;2;4;8;16\}, B = \{1;2;4;5;10;20\}$. Vậy $A \cap B = \{1;2;4\}$.

*Chú ý:* A là tập hợp các ước tự nhiên của $16, B$ là tập hợp các ước tự nhiên của 20 nên $A \cap B$ là tập hợp các ước chung tự nhiên của 16 và 20.

b) $C \cap D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của 4 và } x \text{ là bội của } 5\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội chung của 4 và } 5\}$.

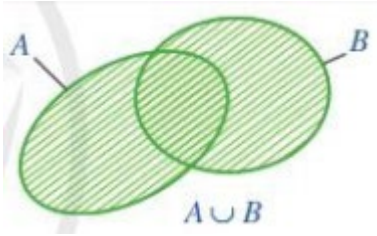
## IV. Hợp của hai tập hợp

Tập hợp gồm các phần tử thuộc $A$ hoặc thuộc $B$ được gọi là *hợp* của $A$ và $B$, kí hiệu $A \cup B$

$x \in A \cup B$ khi và chỉ khi $x \in A$ hoặc $x \in B$.

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

Tập hợp $A \cup B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong hình bên




***Ví dụ 5***. Cho tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ và tập hợp $I$ các số vô tỉ. Tìm $\mathbb{Q} \cap I, \mathbb{Q} \cup I$.

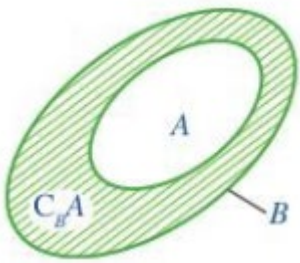
***Giải***

Ta có $\mathbb{Q} \cap I = \varnothing, \mathbb{Q} \cup I = \mathbb{R}$

## V. Phần bù. Hiệu của hai tập hợp

Cho tập hợp $A$ là tập con của tập hợp $B$. Tập hợp những phần tử của $B$ mà không phải là phần tử của $A$ được gọi là phần bù của $A$ trong $B$, kí hiệu $C_B A$.

Tập hợp $C_B A$ được mô tả bằng phần gạch chéo




***Ví dụ 6.*** Các học sinh của lớp $10A$ đăng kí đi tham quan ở một trong hai địa điểm: Hoàng thành Thăng Long và Văn Miếu - Quốc Tử Giám. Mỗi học sinh đều đăng kí đúng một địa điểm. Gọi $A$ là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long, $B$ là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Văn Miếu - Quốc Tủ Giám, $T$ là tập hợp các học sinh lốp $10A$. Tìm phần bù của tập hợp $A$ trong tập hợp $T$.

***Giải.*** Phần bù của tập hợp $A$ trong tập hợp $T$ bao gồm những học sinh trong lốp không đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long nên $C_T A = B$.

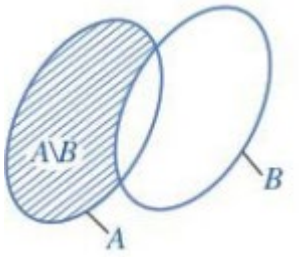
Tập hợp gồm các phần tử thuộc $A$ nhưng không thuộc $B$ được gọi là hiệu của $A$ và $B$, kí hiệu $A \setminus B$.

$x \in A \setminus B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \notin B$

Vậy $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.

Chú ý: Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B = C_A B$.

Tập hợp $A \setminus B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo.




***Ví dụ 7.*** Cho hai tập hợp: $A = \{3;6;9;12\}$, $B = \{2;4;6;8;10;12\}$.

Tìm $A \setminus B, B \setminus A$.

***Giải***

- Tập hợp $A \setminus B$ gồm những phần tử thuộc $A$ mà không thuộc $B$. Vậy $A \setminus B = \{3;9\}$.
- Tập hợp $B \setminus A$ gồm những phần tử thuộc $B$ mà không thuộc $A$. Vậy $B \setminus A = \{2;4;8;10\}$.

***Ví dụ 8.*** Cho hai tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 11 \le 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 - 14x + 11 = 0\}$.

Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

***Giải***

Ta có: $A = \{0;1;2;3\}, B = \{1\}$.

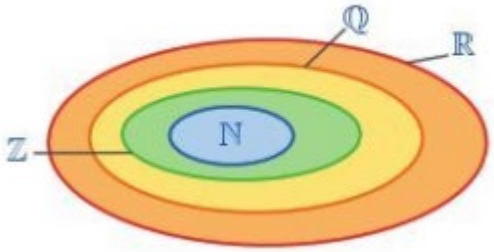
Vậy $A \cap B = \{1\}, A \cup B = \{0;1;2;3\}, A \setminus B = \{0;2;3\}, B \setminus A = \varnothing$.

## VI. Các tập hợp số

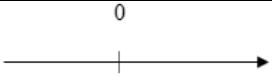
### 1. Các tập hợp số đã học

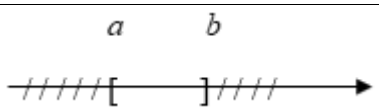
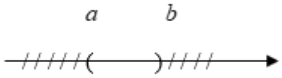
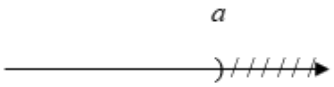
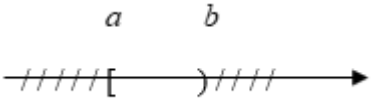
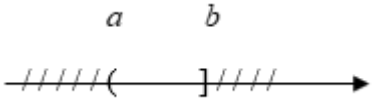
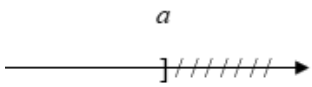
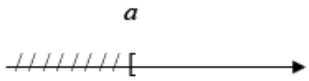
Ta đã biết $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp số tự nhiên, tập hợp số nguyên, tập hợp số hữu tỉ, tập hợp số thực.

Ta có quan hệ sau: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$




### 2. Một số tập con thường dùng của tập hợp số thực

| Tên gọi, ký hiệu | Tập hợp | Hình biểu diễn |
|---|---|---|
| Tập số thực $(-\infty;+\infty)$ | $\mathbb{R}$ |   |

| | | |
|---|---|---|
| Đoạn $[a;b]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ |  |
| Khoảng $(a;b)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ |  |
| Khoảng $(-\infty;a)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ |  |
| Khoảng $(a;+\infty)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ |  |
| Nửa khoảng $[a;b)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ |  |
| Nửa khoảng $(a;b]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ |  |
| Nửa khoảng $(-\infty;a]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$ |  |
| Nửa khoảng $[a;+\infty)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$ |  |

Kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực, kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực; $a$ và $b$ được gọi là đầu mút của các đoạn, khoảng, nửa khoảng.

Ta cũng có thể biểu diễn tập hợp trên trục số bằng cách gạch bỏ phần không thuộc tập đó, chẳng hạn đoạn $[a;b]$ có thể biểu diễn như sau:




***Ví dụ 9.*** Hãy đọc tên, kí hiệu và biểu diễn mỗi tập hợp sau trên trục số:

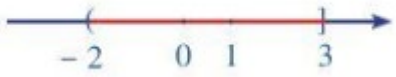
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \le 3\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 1\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 > 0\}$.

***Giải***

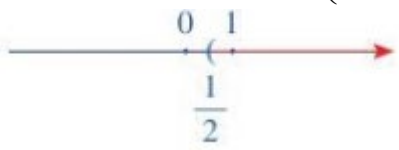
a) Tập hợp $A$ là nửa khoảng $(-2;3]$ và được biểu diễn là:




b) Tập hợp $B$ là đoạn $[-3;1]$ và được biểu diễn là:




c) Tập hợp $C$ là khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ và được biểu diễn là:



## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Xác định tập hợp

**Câu 1.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

a) $A=\left\{x\in R\,|\,(2x-x^2)(2x^2-3x-2)=0\right\}$

b) $B=\left\{n\in N\,|\,3<n^2<30\right\}$

c) $C=\left\{x\in Z\,|\,2x^2-75x-77=0\right\}$.

**Câu 2.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

a) $A=\left\{x\in R\,|\,(2x^2-5x+3)(x^2-4x+3)=0\right\}$

b) $B=\left\{x\in R\,|\,(x^2-10x+21)(x^3-x)=0\right\}$

c) $C=\left\{x\in R\,|\,(6x^2-7x+1)(x^2-5x+6)=0\right\}$

d) $D=\left\{x\in Z\,|\,2x^2-5x+3=0\right\}$

e) $E=\left\{x\in N\,|\,\begin{cases}x+3<4+2x\\5x-3<4x-1\end{cases}\right\}$

f) $F=\left\{x\in Z\,|\,|x+2|\le 1\right\}$

g) $G=\left\{x\in N\,|\,x<5\right\}$

h) $H=\left\{x\in R\,|\,x^2+x+3=0\right\}$.

**Câu 3.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

a) $A=\left\{x\in Z\,|\,2x^3-3x^2-5x=0\right\}$

b) $B=\left\{x\in Z\,|\,x<|3|\right\}$

c) $C=\left\{x=3k;x,k\in Z;-4<x<12\right\}$.

**Câu 4.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng:

a) $A=\{0;1;2;3;4\}$

b) $B=\{0;4;8;12;16\}$

c) $C=\{-3;9;-27;81\}$

d) $D=\{9;36;81;144\}$

e) $E=\{2;3;5;7;11\}$

f) $F=\{3;6;9;12;15\}$

g) $G=$ Tập hợp các điểm thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.

h) $H=$ Tập hợp các điểm thuộc đường tròn tâm I cho trước và có bán kính bằng 5.

**Câu 5.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

a) Tập hợp các số chính phương.

b) Tập hợp các ước chung của 36 và 120.

c) Tập hợp các bội chung của 8 và 15.

**Câu 6.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng:

a) $A=\{1;4;7;10\}$

b) $B=\left\{\frac{2}{3};\frac{3}{8};\frac{4}{15};\frac{5}{24};\frac{6}{35}\right\}$.

**Câu 7.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng:

a) $A=\{0;3;8;15;24;35\}$

b) $B=\{-4;1;6;11;16\}$

c) $C=\{1;-2;7\}$.

**Câu 8.** Trong các tập hợp sau tập nào là tập rỗng

a) $A=\{x\in Z\,|\,|x|<1\}$

b) $B=\{x\in R\,|\,x^2-x+1=0\}$

c) $C=\{x\in Q\,|\,x^2-4x+2=0\}$

d) $D=\{x\in Q\,|\,x^2-2=0\}$

e) $E=\{x\in N\,|\,x^2+7x+12=0\}$

f) $F=\{x\in R\,|\,x^2-4x+2=0\}$.

**Câu 9.** Viết lại các tập sau bằng cách liệt kê các phần tử của chúng)

a) $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x<7\}$

b) $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-3<x<5\}$

c) $C=\left\{x\,|\,x=\frac{1}{2^k};k\in\mathbb{N};x\le\frac{1}{16}\right\}$

d) $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^4-6x^2+8=0\}$

e) $E=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x$ là số chính phương nhỏ hơn $100\}$

f) $F=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x$ là ước chung của $64$ và $120\}$

g) $G=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x$ là bội chung của $12$ và $20\}$.

**Câu 10.** Liệt kê các phần của tập hợp dưới đây:

a) $A=\left\{\frac{3k-1}{k}\in Z:-5\le k\le 3\right\}$.

**b)** $B=\{x\in Z\,||x|<10\}$.

c) $C=\left\{x\in Z\,\middle|\,3<|x|<\frac{19}{2}\right\}$.

**Dạng 2. Tập hợp con, tập bằng nhau**

**Câu 11.** Tìm tất cả các tập con, các tập con gồm hai phần tử của các tập hợp sau:

a) $A=\{1;2\}$

b) $B=\{1;2;3\}$

c) $C=\{a;b;c\}$

d) $D=\{x\in R\,|\,2x^2-5x+2=0\}$

**Câu 12.** Tìm tất cả các tập hợp con của tập:

a) $A=\{a;b\}$ b) $B=\{1;2;3\}$ c) $C=\varnothing$ *d)* $D=\{a;b;c;d\}$.

**Câu 13.** Cho $A=\{1;2;3;4;5\}$. Viết tất cả các tập con của $A$ có ít nhất ba phần tử.

**Câu 14.** Cho $A=\{1;2;3;4\}$. Hãy viết tất cả các tập con gồm:

a) Một phần tử b) Hai phần tử c) Ba phần tử.

**Câu 15.** Trong các tập sau, tập nào là tập con của tập nào?

$A=\{1;2;3\}$ $B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x<4\}$

$C=(0;+\infty)$ $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2x^2-7x+3=0\}$.

**Câu 16.** Xác định quan hệ giữa các tập hợp sau.

a) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x-\sqrt{3-2x}=0\}$ và $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+2x-3=0\}$

b) $A=\{x\in N\,|\,x^2-2x+1\geq 10\}$ và $B=\{x\in N\,|\,x\geq 2\}$.

**Câu 17.** Tìm các tập $X$ thỏa mãn $\{1;2;3\}\subset X\subset\{1;2;3;4;5;6\}$.

**Câu 18.** Tìm tất cả các tập hợp $X$ sao cho: $\{1,2\}\subset X\subset\{1,2,3,4,5\}$.

**Câu 19.** Tìm tất cả các tập hợp $X$ sao cho: $X\subset\{1,2,3,4\}$.

**Câu 20.** Tìm tất cả các tập hợp $X$ sao cho: $\{1;2\}\subset X\subset\{1;2;3;4;5;6\}$.

**Câu 21.** Cho $A=\{2,5\}$; $B=\{5,x\}$; $C=\{x,y,5\}$. Tìm các cặp số $(x;y)$ để $A=B=C$.

**Dạng 3. (Nâng cao) Sơ đồ ven**

**Câu 22.** Cho $A$ là tập hợp các học sinh lớp 10 đang học ở trường em, $B$ là tập hợp học sinh đang học tiếng Anh ở trường em. Hãy diễn đạt bằng lời các tập:

a) $A\cap B$ b) $A\setminus B$

c) $A\cup B$ d) $B\setminus A$.

**Câu 23.** Kí hiệu $H$ là tập hợp học sinh lớp 10A1, $T$ là tập hợp các học sinh nam và $G$ là tập hợp các học sinh nữ của lớp 10A1. Hãy xác định các tập hợp sau:

a) $T\cup G$. b) $T\cap G$.

c) $H\setminus T$.d) $G\setminus T$. e) $C_T H$.

**Câu 24.** Trong một trường THPT, khối 10 có 160 em học sinh tham gia câu lạc bộ Toán, 140 em tham gia câu lạc bộ Tin, 100 em học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ. Hỏi khối 10 có bao nhiêu học sinh?.

**Câu 25.** Một lớp có 45 hs, đăng kí chơi ít nhất một trong hai môn thể thao là bóng đá và cầu lông. Có 30 em đăng kí môn bóng đá, 25 em đăng kí môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng kí cả hai môn thể thao?.

**Câu 26.** Trong 100 học sinh lớp 10 có 70 học sinh nói được tiếng Anh, 45 học sinh nói được tiếng Pháp và 23 học sinh nói được cả hai tiếng Anh và Pháp. Hỏi có bao nhiêu học sinh không nói được hai thứ tiếng?.

**Dạng 4. Biểu diễn tập hợp số**

**Câu 27.** Xác định các tập hợp $A\cup B; A\cap B$ và biểu diễn trên trục số với

**a.** $A=\{x\in R\,|\,x\geq 1\}$ và $B=\{x\in R\,|\,x\leq 3\}$.

**b.** $A=\{x\in R\,|\,x\leq 1\}$ và $B=\{x\in R\,|\,x\geq 3\}$.

**c.** $A=[1;3]$ và $B=(2;+\infty)$.

## Dạng 5. Các phép toán trên tập hợp

**Câu 28.** Cho các tập hợp: $A=\{a;b;c;d\}$ $B=\{b;d;e\}$ $C=\{a;b;e\}$

Chứng minh:

a) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

b) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

**Câu 29.** Chứng minh rằng:

a) Nếu $A\subset B$ thì $A\cap B=A$.

b) Với ba tập $A,B,C$ thì $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$.

**Câu 30.** Cho $X=\{x\in\mathbb{N}\,|\,2<x<12\}$.

Xác định $A\subset X;B\subset X$ sao cho: $\begin{cases}A\cap B=\{6;8;11\} & (1)\\ A\cup\{5;6;7\}=\{3;5;6;7;8;10;11\} & (2)\\ \{4;5;6;7;8;9;10;11\}=B\cup\{6;10\} & (3)\end{cases}$.

**Câu 31.** Cho $A=\{0;1;2;3;4\},B=\{2;3;4;5;6\}$.

a) Tìm các tập $A\setminus B,B\setminus A,A\cup B,A\cap B.$

b) Tìm các tập $(A\setminus B)\cup(B\setminus A),(A\setminus B)\cap(B\setminus A)$..

**Câu 32.** Cho hai tập hợp A và B dưới đây. Viết tập $A\cap B,A\cup B$ bằng hai cách:

a) $A=\{x\,|\,x$ là ước nguyên dương của $12\}$ $B=\{x\,|\,x$ là ước nguyên dương của $18\}$

b) $A=\{x\,|\,x$ là bội nguyên dương của $6\}$ $B=\{x\,|\,x$ là ước nguyên dương của $15\}$.

**Câu 33.** Cho các tập hợp: $A=\{1;2;3;4\}$, $C=\{3;4;5;6\}$

Tìm: $A\cup B,A\cup C,B\cup C,A\cap B,A\cap C,B\cap C,(A\cup B)\cap C,A\cup(B\cup C)$..

**Câu 34.** Cho tập hợp A các ước số tự nhiên của 18 và tập hợp B các ước số tự nhiên của 30. Xác định $A,B,A\cup B,A\cap B,A\setminus B,B\setminus A$..

**Câu 35.** Cho $A$ là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10. $B=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n\le 6\}$ $C=\{n\in\mathbb{N}\,|\,4\le n\le 10\}$

Tìm: a) $A\cap(B\cup C)$ b) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

**Câu 36.** Cho $A$ là tập hợp các số nguyên lẻ, $B$ là tập hợp các bội của 3, $C$ là tập hợp các bội của 6. Xác định $A\cap B,B\cap C,C\setminus B.$

$A\cap B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x$ lẻ và $x$ là bội của $3\}=\{3(2k-1)\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$

$B\cap C=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x$ là bội của 3 hoặc $x$ là bội của $6\}=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x$ là bội của $3\}=B.$

$C\setminus B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x$ là bội của 6 và $x$ không là bội của $3\}=\varnothing$..

**Câu 37.** Cho $A=\{2,4,7,8,9,12\},B=\{2,8,9,12\}$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Câu 38.** Cho $A=\{2,4,6,9\},B=\{1,2,3,4\}$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Câu 39.** Cho $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2x^2-3x+1=0\},B=\{x\in\mathbb{R}\,||2x-1|=1\}$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Câu 40.** Cho $A=$ tập các ước số của 12; $B=$ Tập các ước số của 18. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Câu 41.** Cho $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x+1)(x-2)\left(x^2-8x+15\right)=0\right\}, B=$ Tập các số nguyên tố có một chữ số. Tìm $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

**Câu 42.** Cho $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x^2<4\right\}, B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,|\left(5x-3x^2\right)\left(x^2-2x-3\right)=0\right\}$.

Tìm $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

**Câu 43.** Cho $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\left(x^2-9\right)\left(x^2-5x-6\right)=0\right\}, B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x$ là số nguyên tố nhỏ hơn $5\}$. Tìm $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

**Câu 44.** Tìm các tập hợp $A,\ B$ sao cho: $A\cap B=\{0,1,2,3,4\},\ A\setminus B=\{-3,-2\},\ B\setminus A=\{6,9,10\}$.

**Câu 45.** Tìm các tập hợp $A,\ B$ sao cho: $A\cap B=\{1,2,3\},\ A\setminus B=\{4,5\},\ B\setminus A=\{6,9\}$.

**Câu 46.** Cho tập hợp $A=\{a,b,c,d\}; B=\{b;d;e\};\ C=\{a;b;c\}$. Chứng minh các hệ thức:

a) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

b) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

**Câu 47.** Cho tập hợp $A=\{1,2,3,4,5\}$ và $B=\{1,3,5,7,9,11\}$. Hãy tìm tập hợp $C$ thỏa mãn:

a) $C=A\cup B$ b) $C=A\cap B$

c) $C=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ d) $C=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

**Câu 48.** Chứng minh rằng:

a)Nếu $A\subset B$ thì $A\cap B=A$.

b) Nếu $A\subset C$ và $B\subset C$ thì $A\cup B\subset C$.

c)Nếu $A\cup B=A\cap B$ thì $A=B$. d) Nếu $A\subset B$ và $A\subset C$ thì $A\subset B\cap C$.

**Câu 49.** Cho $A=\left\{x\in R: x^2-x-6=0\right\}; B=\left\{n\in N: 2n-6\le 0\right\}; C=\left\{n\in N: |n|\le 4\right\}$. Tìm

$A\cap B; A\cap C; B\cup C..$

**Câu 50.** Cho $A=\{1;2;3;4\}; B=\{2;4;6\}; C=\{1;3;5\}$. Xác định các tập hợp sau:

a) $A\cap B; A\cup B.$

b) $A\cap C; A\cup C.$

c) $B\cap C; B\cup C.$

**Câu 51.** Cho $E=\{a,b,c,d\}; F=\{b,c,e,g\}; G=\{c,d,e,f\}$. Chứng minh rằng:

$E\cap(F\cup G)=(E\cap F)\cup(E\cap G)$.

**Câu 52.** Cho $A=\{a,e,i,o\}; E=\{a,b,c,d,i,e,o,f\}$. Tính $C_E A$.

**Câu 53.** Cho $E=\{x\in N\,|\,x\le 8\}; A=\{1,3,5,7\}; B=\{1;2;3;6\}$.

a) Tính $C_E A; C_E B; C_E A\cap C_E B.$

b) Chứng minh $C_E(A\cup B)\subset C_E(A\cap B)..$

**Câu 54.** Cho các tập hợp sau:

$E=\left\{x\in Z\,\middle|\,|x|\le 5\right\}; A=\left\{x\in R\,\middle|\,x^2+3x-4=0\right\}; B=\left\{x\in Z\,\middle|\,(x-2)(x+1)\left(2x^2-x-3\right)=0\right\}.$

a) Chứng minh $A\subset E; B\subset E.$

b) Tìm $C_E(A\cap B), C_E(A\cup B)$ rồi tìm mối quan hệ của hai tập này.

c) Chứng minh $C_E\left(A\cup B\right)\subset C_E A.$.

**Câu 55.** Xác định tập hợp:

$A=(-3;5]\cup[8;10]\cup[2;8)$;

$B=[0;2]\cup(-\infty;5]\cup(1;+\infty)$;

$C=[-4;7]\cup(0;10)$;

$D=(-\infty;3]\cup(-5;+\infty)$;

$E=(3;+\infty)\setminus(-\infty;1]$;

$F=(1;3]\setminus[0;4).$

**Câu 56.** Xác định các tập hợp sau:

a) $(-3;6)\cap\mathbb{Z}$; b) $(1;2)\cap\mathbb{Z}$; c) $(1;2]\cap\mathbb{Z}$; d) $[-3;5)\cap\mathbb{N}$.

**Câu 57.** Cho $A=\left[-4;4\right], B=\left[1;7\right]$. Tìm $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

**Câu 58.** Cho $A=\left[-4;-2\right],\ B=\left(3;7\right]$. Tìm $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

**Câu 59.** Cho $A=\left[-4;-2\right],\ B=\left(3;7\right)$. Tìm $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

**Câu 60.** Cho $A=\left(-\infty;-2\right],\ B=\left[3;+\infty\right)$. Tìm $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

**Câu 61.** Cho $A=\left[3;+\infty\right),\ B=\left(0;\ 4\right)$. Tìm $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

**Câu 62.** Cho $A=\left(1;\ 4\right),\ B=\left(2;\ 6\right)$. Tìm $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

**Câu 63.** Cho $A=\left[1;\ 4\right],\ B=\left(2;\ 6\right),\ C=\left(1;\ 2\right)$. Tìm $A\cup B\cup C,\ A\cap B\cap C$.

**Câu 64.** Cho $A=\left[0;\ 4\right],\ B=\left(1;\ 5\right),\ C=\left(-3;\ 1\right]$. Tìm $A\cup B\cup C,\ A\cap B\cap C$.

**Câu 65.** Cho $A=\left(-\infty;\ 2\right],\ B=\left[2;\ +\infty\right),\ C=\left(0;\ 3\right)$. Tìm $A\cup B\cup C,\ A\cap B\cap C$.

**Câu 66.** Cho $A=\left(-5;\ 1\right],\ B=\left[3;\ +\infty\right),\ C=\left(-\infty;\ -2\right)$. Tìm $A\cup B\cup C,\ A\cap B\cap C$.

**Câu 67.** Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}/-3\le x\le 2\right\}, B=\left\{x\in\mathbb{R}/0<x<7\right\}; C=\left\{x\in\mathbb{R}/x<-1\right\}$ và $D=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus x\ge 5\right\}$.

a) Dùng kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết lại các tập hợp trên.

b) Biểu diễn các tập hợp $A,B,C$ và $D$ trên trục số. Chỉ rõ nó thuộc phần nào trên trục số.

**Câu 68.** Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|-1<x\le 5\right\}$ và $B=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|0\le x<7\right\}$. Hãy tìm tập hợp $C$ thỏa mãn:

a) $C=A\cup B$

b) $C=A\cap B$

c) $C=\left(A\cup B\right)\setminus\left(A\cap B\right)$

d) $C=\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus \mathrm{A}\right)$

**Câu 69.** Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|-3<x<3\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|-2<x\le 3\right\}$ và $C=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|0\le x\le 4\right\}$. Hãy tìm tập hợp $D$ thỏa mãn:

a) $D=\left(A\cup B\right)\cup C$

b) $D=\left(A\cup B\right)\cap C$

c) $D=\left(A\cap B\right)\cap C$

d) $D=\left(A\cap B\right)\cup C$

e) $D=\left(A\cap B\right)\setminus C$

f) $D=\left(A\setminus B\right)\cup\left(A\setminus C\right)$

g) $D=(B\setminus A)\cup(C\setminus A)$

h) $D=(B\setminus A)\setminus C$

i) $D=(B\setminus A)\cup C$

j) $D=(B\cup C)\setminus A$

**Dạng 6. (Nâng cao) Các bài toán tìm điều kiện của tham số**

**Câu 70.** Có thể kết luận gì về số $a$ biết:

a) $(-1;3)\cap(a;+\infty)=\varnothing$

b) $(5;a)\cap(2;8)=(2;8)$

c) $[3;12)\setminus(-\infty;a)=\varnothing$

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Dạng 1. Xác định tập hợp**

**Câu 1.** Ký hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề: "3 là một số tự nhiên"?

**A.** $3\subset\mathbb{N}$. **B.** $3\in\mathbb{N}$. **C.** $3<\mathbb{N}$. **D.** $3\le\mathbb{N}$.

**Câu 2.** Ký hiệu nào sau đây để chỉ $\sqrt{5}$ không phải là một số hữu tỉ?

**A.** $\sqrt{5}\ne\mathbb{Q}$. **B.** $\sqrt{5}\not\subset\mathbb{Q}$. **C.** $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$. **D.** $\sqrt{5}\subset\mathbb{Q}$.

**Câu 3.** Cho tập hợp $A=\{x+1\mid x\in\mathbb{N},x\le 5\}$. Tập hợp $A$ là:

**A.** $A=\{1;2;3;4;5\}$. **B.** $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

**C.** $A=\{0;1;2;3;4;5\}$. **D.** $A=\{1;2;3;4;5;6\}$.

**Câu 4.** Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X=\{x\in\mathbb{Z}\mid 2x^2-3x+1=0\}$.

**A.** $X=\{0\}$. **B.** $X=\{1\}$. **C.** $X=\left\{1;\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $X=\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.

**Câu 5.** Liệt kê các phần tử của phần tử tập hợp $X=\{x\in\mathbb{R}\mid 2x^2-5x+3=0\}$.

**A.** $X=\{0\}$. **B.** $X=\{1\}$. **C.** $X=\left\{\frac{3}{2}\right\}$. **D.** $X=\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.

**Câu 6.** Trong các tập sau, tập nào là tập rỗng?

**A.** $\{x\in\mathbb{Z}\mid|x|<1\}$. **B.** $\{x\in\mathbb{Z}\mid 6x^2-7x+1=0\}$.

**C.** $\{x\in\mathbb{Q}:x^2-4x+2=0\}$. **D.** $\{x\in\mathbb{R}:x^2-4x=3=0\}$.

**Câu 7.** Cho tập hợp $M=\{(x;y)\mid x;y\in\mathbb{N},x+y=1\}$. Hỏi tập $M$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 8.** Cho tập hợp $A=\{x^2+1\setminus x\in\mathbb{N},x\le 5\}$. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp#$A$.

**A.** $A=\{0;1;2;3;4;5\}$. **B.** $A=\{1;2;5;10;17;26\}$.

**C.** $A=\{2;5;10;17;26\}$. **D.** $A=\{0;1;4;9;16;25\}$.

**Câu 9.** Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp: $X=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus x^4-6x^2+8=0\right\}$.

**A.** $X=\{2;4\}$. **B.** $X=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$. **C.** $X=\left\{\sqrt{2};2\right\}$ **D.** $X=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2};-2;2\right\}$.

**Câu 10.** Cho tập hợp $M=\left\{(x;y)\setminus x,y\in\mathbb{R},x^2+y^2\le 0\right\}$. Khi đó tập hợp $M$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

**Câu 11.** Số phần tử của tập hợp: $A=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\left(x^2+x\right)^2=x^2-2x+1\right\}$ là:

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

**Câu 12.** Số phần tử của tập hợp:
$A=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\left(2x^2+x-4\right)^2=4x^2-4x+1\right\}$ là:

**A.** 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

**Câu 13.** Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2+x+1=0\right\}$:

**A.** $X=0$. **B.** $X=\{0\}$. **C.** $X=\varnothing$. **D.** $X=\{\varnothing\}$.

**Câu 14.** Số phần tử của tập hợp $A=\left\{k^2+1/k\in\mathbb{Z},|k|\le 2\right\}$ là:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

**Câu 15.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng:

**A.** $\left\{x\in\mathbb{Z}\middle||x|<1\right\}$. **B.** $\left\{x\in\mathbb{Z}\middle|6x^2-7x+1=0\right\}$.

**C.** $\left\{x\in\mathbb{Q}\middle|x^2-4x+2=0\right\}$. **D.** $\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2-4x+3=0\right\}$.

**Câu 16.** Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)=0\right\}$. Các phần tử của tập $A$ là:

**A.** $A=\{-1;1\}$. **B.** $A=\{-\sqrt{2};-1;1;\sqrt{2}\}$ .**C.** $A=\{-1\}$. **D.** $A=\{1\}$.

**Câu 17.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập rỗng?

**A.** $A=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|x^2-4=0\right\}$. **B.** $B=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2+2x+3=0\right\}$.

**C.** $C=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2-5=0\right\}$. **D.** $D=\left\{x\in\mathbb{Q}\middle|x^2+x-12=0\right\}$..

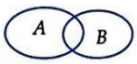
**Câu 18.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào khác rỗng?

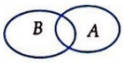
**A.** $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2+x+1=0\right\}$. **B.** $B=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|x^2-2=0\right\}$.

**C.** $C=\left\{x\in\mathbb{Z}\middle|\left(x^3-3\right)\left(x^2+1\right)=0\right\}$. **D.** $D=\left\{x\in\mathbb{Q}\middle|x\left(x^2+3\right)=0\right\}$.

**Dạng 2. Tập hợp con, tập bằng nhau**

**Câu 19.** Cho hai tập hợp $A$ và. $B$. Hình nào sau đây minh họa $A$ là tập con của $B$?

**A.** 

. **B.** 

. **C.** 

. **D.** 

.

**Câu 20.** Cho ba tập hợp $E$, $F$, $G$ thỏa mãn: $E\subset F,F\subset G$ và $G\subset K$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $G\subset F$. **B.** $K\subset G$. **C.** $E=F=G$. **D.** $E\subset K$.

**Câu 21.** Trong các tập hợp sau đây, tập hợp nào có đúng một tập hợp con?

**A.** $\varnothing$. **B.** $\{x\}$. **C.** $\{\varnothing\}$. **D.** $\{\varnothing, x\}$.

**Câu 22.** Cho tập hợp $A=\{1;2\}$ và $B=\{1;2;3;4;5\}$. Có tất cả bao nhiêu tập $X$ thỏa mãn: $A\subset X\subset B$?

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

**Câu 23.** Cho tập hợp $A=\{1;2;5;7\}$ và $B=\{1;2;3\}$. Có tất cả bao nhiêu tập $X$ thỏa mãn: $X\subset A$ và $X\subset B$?

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

**Câu 24.** Cho tập hợp $A=\{1;3\}, B=\{3;x\}, C=\{x;y;3\}$. Để $A=B=C$ thì tất cả các cặp $(x;y)$ là:

**A.** $(1;1)$. **B.** $(1;1)$ và $(1;3)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;1)$ và $(3;3)$.

**Câu 25.** Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4\}, B=\{0;2;4\}$, $C=\{0;1;2;3;4;5\}$. Quan hệ nào sau đây là đúng?

**A.** $B\subset A\subset C$. **B.** $B\subset A=C$. **C.** $\begin{cases}A\subset C\\ B\subset C\end{cases}$. **D.** $A\cup B=C$.

**Câu 26.** Cho tập hợp $A$ có 4 phần tử. Hỏi tập $A$ có bao nhiêu tập con khác rỗng?

**A.** 16. **B.** 15. **C.** 12. **D.** 7.

**Câu 27.** Số các tập hợp con gồm hai phần tử của tập hợp $B=\{a;b;c;d;e;f\}$ là:

**A.** 15. **B.** 16. **C.** 22. **D.** 25.

**Câu 28.** Số các tập hợp con có 3 phần tử có chứa $a, b$ của tập hợp $C=\{a;b;c;d;e;f;g\}$ là:

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

**Câu 29.** Cho tập hợp $A=\{1,2,3,4,x,y\}$. Xét các mệnh đề sau đây:

$(I)$: "$3\in A$".

$(II)$: "$\{3,4\}\in A$".

$(III)$: "$\{a,3,b\}\in A$".

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

**A.** $I$ đúng. **B.** $I, II$ đúng. **C.** $II, III$ đúng. **D.** $I, III$ đúng.

**Câu 30.** Cho tập hợp $X=\{1;2;3;4\}$. Câu nào sau đây đúng?

**A.** Số tập con của $X$ là $16$.

**B.** Số tập con của $X$ gồm có $2$ phần tử là $8$.

**C.** Số tập con của $X$ chứa số $1$ là $6$.

**D.** Số tập con của $X$ gồm có $3$ phần tử là $2$.

**Câu 31.** Số các tập con 3 phần tử có chứa $\alpha, \pi$ của $C=\{\alpha, \pi, \xi, \psi, \rho, \eta, \gamma, \sigma, \omega, \tau\}$ là:

**A.** $8$. **B.** $10$. **C.** $12$. **D.** $14$.

**Câu 32.** Trong các tập sau đây, tập hợp nào có đúng hai tập hợp con?

**A.** $\{x;y\}$. **B.** $\{x\}$. **C.** $\{\varnothing;x\}$. **D.** $\{\varnothing;x;y\}$.

**Câu 33.** Khẳng định nào sau đây sai? Các tập $A=B$ với $A,B$ là các tập hợp sau?

**A.** $A=\{1;3\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|(x-1)(x-3)=0\right\}$.

**B.** $A=\{1;3;5;7;9\}$, $B=\left\{n\in\mathbb{N}\middle|n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z},0\le k\le 4\right\}$.

**C.** $A=\{-1;2\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2-2x-3=0\right\}$.

**D.** $A=\varnothing$, $B=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2+x+1=0\right\}$.

**Câu 34.** Có tất cả bao nhiêu tập $X$ thỏa mãn $\{1;2;3\}\subset X\subset\{1;2;3;4;5;6\}$ ?

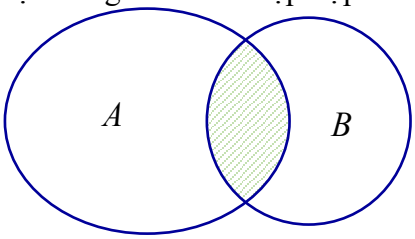
**A.** 1. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 6.

**Câu 35.** Số tập con của tập hợp: $A=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus 3\left(x^2+x\right)^2-2x^2-2x=0\right\}$ là:

**A.** 16. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 10.

**Dạng 3. (Nâng cao) Sơ đồ ven**

**Câu 36.** Cho $A$, $B$ là hai tập hợp bất kì khác tập rỗng, được biểu diễn theo biểu đồ Ven sau. Phần gạch sọc trong hình vẽ là tập hợp nào sau đây?




**A.** $A\cup B$. **B.** $B\setminus A$. **C.** $A\setminus B$. **D.** $A\cap B$.

**Câu 37.** Trong một khoảng thời gian nhất định, tại một địa phương, Đài khí tượng thủy văn đã thống kê được: Số ngày mưa: 10 ngày; Số ngày có gió: 8 ngày; Số ngày lạnh: 6 ngày; Số ngày mưa và gió: 5 ngày; Số ngày mưa và lạnh: 4 ngày; Số ngày lạnh và có gió: 3 ngày; Số ngày mưa, lạnh và có gió: 1 ngày.Vậy có bao nhiêu ngày thời tiết xấu (Có gió, mưa hay lạnh)?

**A.** 14. **B.** 13. **C.** 15. **D.** 16.

**Câu 38.** Lớp $10B_1$ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa) Số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp $10B_1$ là:

**A.** 9.. **B.** 10.. **C.** 18.. **D.** 28.

**Câu 39.** Trong lớp 10C có 45 học sinh trong đó có 25 em thích môn Văn, 20 em thích môn Toán, 18 em thích môn Sử, 6 em không thích môn nào, 5 em thích cả ba môn. Hỏi số em thích chỉ một môn trong ba môn trên.

**A.** 15. **B.** 20. **C.** 25. **D.** 30.

**Câu 40.** Lớp $10A$ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hoá, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hoá, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hoá, 1 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hoá. Số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán, Lý, Hoá) của lớp $10A$ là

**A.** 9. **B.** 18. **C.** 10. **D.** 28.

**Câu 41.** Lớp 10A có 10 học sinh giỏi Toán, 10 học sinh giỏi Lý, 11 học sinh giỏi hóa, 6 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 5 học sinh giỏi cả Hóa và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 3 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa) Số học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp 10A là

**A.** 19. **B.** 18. **C.** 31. **D.** 49.

**Câu 42.** Một nhóm học sinh giỏi các môn: Anh, Toán, Văn. Có 18 em giỏi Văn, 10 em giỏi Anh, 12 em giỏi Toán, 3 em giỏi Văn và Toán, 4 em giỏi Toán và Anh, 5 em giỏi Văn và Anh, 2 em giỏi cả ba môn. Hỏi nhóm đó có bao nhiêu em học sinh?

**A.** 25. **B.** 20. **C.** 30. **D.** Đáp án khác)

**Câu 43.** Lớp 12D có 45 học sinh, trong đó có 25 em thích môn Văn, 20 em thích môn Toán, 18 em thích môn Tiếng Anh, 6 em không thích môn nào, 5 em thích cả ba môn. Hỏi số em thích chỉ một môn trong ba môn trên là bao nhiêu?

**A. 11**. **B. 34**. **C. 1**. **D. 20**.

**Câu 44.** Cho tập $A$ là tập hợp các số tự nhiên, mà mỗi số tự nhiên trong $A$ đều chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5, hoặc chia hết cho cả 3 và 5. Trong đó có 2019 số chia hết cho 3; 2020 số chia hết cho 5, 195 số chia hết cho 15; Hỏi tập $A$ có bao nhiêu phần tử

**A.** 4234. **B.** 4039. **C.** 4235. **D.** 3844.

**Câu 45.** Hội khỏe Phù Đổng của trường Trần Phú, lớp $10A$ có 45 học sinh, trong đó có 25 học sinh thi điền kinh, 20 học sinh thi nhảy xa, 15 học sinh thi nhảy cao, 7 em không tham gia môn nào, 5 em tham gia cả 3 môn. Hỏi số em tham gia chỉ một môn trong ba môn trên là bao nhiêu?

**A.** 20. **B.** 45. **C.** 38. **D.** 21.

**Câu 46.** Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp $11B_1$ có 15 học sinh giỏi Văn, 22 học sinh giỏi Toán. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán biết lớp $11B_1$ có 40 học sinh, và có 14 học sinh không đạt học sinh giỏi.

**A.** 4. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 20.

**Câu 47.** Mỗi học sinh của lớp $10A_1$ đều học giỏi môn Toán hoặc môn Hóa, biết rằng có 30 học sinh giỏi Toán, 35 học sinh giỏi Hóa, và 20 em học giỏi cả hai môn. Hỏi lớp $10A_1$ có bao nhiêu học sinh?

**A.** 40. **B.** 45. **C.** 50. **D.** 55.

**Câu 48.** Trong một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 30 học sinh đạt học sinh giỏi môn Toán, 25 học sinh đạt học sinh giỏi môn Văn. Biết rằng chỉ có 5 học sinh không đạt danh hiệu học sinh giỏi môn nào trong cả hai môn Toán và Văn. Hỏi có bao nhiêu học sinh chỉ học giỏi một môn trong hai môn Toán hoặc Văn?

**A.** 20. **B.** 15. **C.** 5. **D.** 10.

**Câu 49.** Một lớp học có 25 học sinh giỏi môn Toán, 23 học sinh giỏi môn Lý, 14 học sinh giỏi cả môn Toán và Lý và có 6 học sinh không giỏi môn nào cả. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh?

**A.** 54. **B.** 40. **C.** 26. **D.** 68.

**Câu 50.** Lớp 10A có 45 học sinh trong đó có 25 em học giỏi môn Toán, 23 em học giỏi môn Lý, 20 em học giỏi môn Hóa, 11 em học giỏi cả môn Toán và môn Lý, 8 em học giỏi cả môn Lý và môn Hóa, 9 em học giỏi cả môn Toán và môn Hóa) Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn học giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa, biết rằng mỗi học sinh trong lớp học giỏi ít nhất một trong 3 môn Toán, Lý, Hóa?

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Câu 51.** Một lớp học có 25 học sinh chơi bóng đá, 23 học sinh chơi bóng bàn, 14 học sinh chơi cả bóng đá và bóng bàn và 6 học sinh không chơi môn nào. Số học sinh chỉ chơi 1 môn thể thao là?

**A.** 48. **B.** 20. **C.** 34. **D.** 28.

**Câu 52.** Cho $A$, $B$, $C$ là ba tập hợp được minh họa bằng biểu đồ ven như hình vẽ. Phần gạch sọc trong hình vẽ là tập hợp nào sau đây?

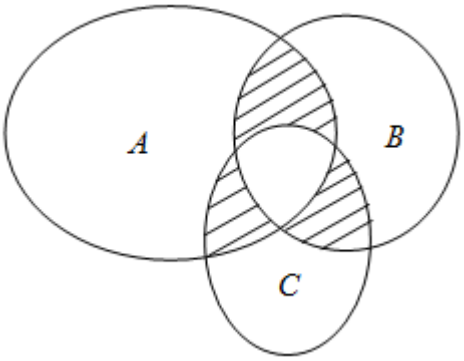
**A.** $(A\cup B)\setminus C$. **B.** $(A\cap B)\setminus C$. **C.** $(A\setminus C)\cup(A\setminus B)$. **D.** $(A\cap B)\cup C$.

**Câu 53.** Cho $A$, $B$, $C$ là các tập hợp bất kì. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. **B.** $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

**C.** $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$. **D.** $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

**Câu 54.** Cho $A$, $B$, $C$ là các tập hợp bất kì. Phần gạch sọc trong hình vẽ bên dưới là tập hợp nào sau đây?




**A.** $(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$.

**B.** $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)$.

**C.** $\left[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)\right]\setminus(A\cap B\cap C)$.

**D.** $\left[(A\cap B)\setminus C\right]\cap\left[(B\cap C)\setminus A\right]\cap\left[(C\cap B)\setminus A\right]$.

**Câu 55.** Lớp 10A có 40 học sinh trong đó có 10 bạn học sinh giỏi Toán, 15 bạn học sinh giỏi Lý, và 22 bạn không giỏi môn học nào trong hai môn Toán, Lý. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn học sinh vừa giỏi Toán vừa giỏi Lý?

**A.** 7. **B.** 25. **C.** 10. **D.** 18.

**Câu 56.** Một lớp có 45 học sinh. Mỗi em đều đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn: bóng đá và bóng chuyền. Có 35 em đăng ký môn bóng đá, 15 em đăng ký môn bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký chơi cả 2 môn?

**A.** 5. **B.** 10. **C.** 30. **D.** 25.

**Câu 57.** Mỗi học sinh lớp 10B đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có $25$ bạn chơi bóng đá, $20$ bạn chơi bóng chuyền và $10$ bạn chơi cả hai môn. Hỏi lớp 10B có bao nhiêu học sinh?

**A.** $35$. **B.** $30$. **C.** $25$. **D.** $20$.

**Câu 58.** Kí hiệu $|X|$ là số phần tử của tập hợp $X$. Cho hai tập hợp $A$, $B$ bất kì và xét các khẳng định sau:

$(I)$: nếu $A\cap B=\varnothing$ thì $|A|+|B|=|A\cup B|$.

$(II)$: nếu $A\cap B\neq\varnothing$ thì $|A|+|B|=|A\cup B|-|A\cap B|$.

$(III)$: nếu $A\cap B\neq\varnothing$ thì $|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$.

Khẳng định nào đúng?

**A.** Chỉ $(I)$. **B.** Chỉ $(I)$ và $(II)$. **C.** Chỉ $(I)$ và $(III)$. **D.** Chỉ $(III)$.

## Dạng 4. Biểu diễn tập hợp số

**Câu 59.** Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\setminus -3<x<1\}$. Tập $A$ là tập nào sau đây?

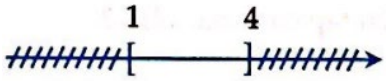
**A.** $\{-3;1\}$ **B.** $[-3;1]$ **C.** $[-3;1)$ **D.** $(-3;1)$

**Câu 60.** Hình vẽ nào sau đây (phần không bị gạch) minh họa cho tập hợp $(1;4]$?

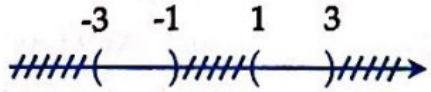
**A.** 


**B.** 

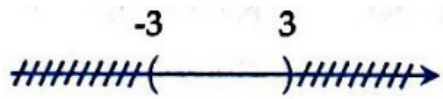

**C.** 

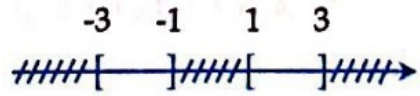

**D.** 


**Câu 61.** Cho tập hợp $X=\{x \setminus x\in\mathbb{R}, 1\le|x|\le 3\}$ thì $X$ được biểu diễn là hình nào sau đây?

**A.** 


**B.** 


**C.** 


**D.** 


**Câu 62.** Sử dụng các kí hiệu khoảng, đoạn để viết tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}|4\le x\le 9\}$:

**A.** $A=[4;9]$. **B.** $A=(4;9]$. **C.** $A=[4;9)$. **D.** $A=(4;9)$.

**Câu 63.** Tập $A=\{x\in\mathbb{R}|-3<1-2x\le 1\}$ được viết lại dưới dạng đoạn, khoảng, nửa khoảng là:

**A.** $(-1;0]$. **B.** $[0;2)$. **C.** $[1;2]$. **D.** $(0;2]$.

**Câu 64.** Sử dụng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}|4\le x\le 9\}$:

**A.** $A=[4;9]$. **B.** $A=(4;9]$. **C.** $A=(4;9)$. **D.** $A=[4;9)$.

**Câu 65.** Cho tập hợp: $A=\{x\in\mathbb{R}|x-5<4-2x\}$. Hãy viết lại tập hợp $A$ dưới kí hiệu khoảng, nửa khoảng, đoạn.

**A.** $A=(3;+\infty)$. **B.** $A=(-\infty;3]$. **C.** $A=[-\infty;3)$. **D.** $A=(-\infty;3)$.

**Câu 66.** Hình vẽ nào sau đây (phần không bị gạch) biểu diễn cho tập $A=\{x\in\mathbb{R}|3x-1\ge 2\}$?

**A.** 


**B.** 


**C.** 


**D.** 

**Câu 67.** Cho tập hợp $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2<x\le 7\}$. Tập hợp $C$ được viết dưới dạng tập hợp nào sau đây?

**A.** $C=[2;7)$. **B.** $C=(2;7]$. **C.** $C=(2;7)$. **D.** $C=[2;7]$.

**Câu 68.** Cho tập hợp $M=\{x\in R\,|\,-1\le x<2\}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

**A.** $M=[-1;2)$. **B.** $M=(-1;2]$. **C.** $M=(-1;2)$. **D.** $M=\{-1;0;1\}$.

**Câu 69.** Cho tập $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,3\le x<9\}$. **Tập C là tập nào sau đây:**

**A.** $C=(3\,;\,9)$. **B.** $C=(3\,;\,9]$. **C.** $C=[3\,;\,9)$. **D.** $A=\varnothing$.

**Câu 70.** Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x-2<4-2x\}$. Hãy viết lại tập hợp $A$ dưới kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng.

**A.** $A=[2;+\infty)$. **B.** $A=(2;+\infty)$. **C.** $A=(-\infty;2)$. **D.** $A=(-\infty;2]$.

**Câu 71.** Sử dụng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|\le 3\}$.

**A.** $A=[3;+\infty)$. **B.** $A=(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

**C.** $A=[-3;3]$. **D.** $A=(-3;3)$.

**Câu 72.** Cho $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-1<x\le 2\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** $A=(-1;2]$. **B.** $A=\{0;1;2\}$. **C.** $A=\{-1;0;2\}$. **D.** $A=\{0;1\}$.

**Câu 73.** Sử dụng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le 2\}$.

**A.** $A=(-\infty;2)$. **B.** $A=(-\infty;2]$. **C.** $A=[2;+\infty)$. **D.** $A=(2;+\infty)$.

**Câu 74.** Sử dụng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-4\le x<9\}$.

**A.** $A=(-4;9]$. **B.** $A=[-4;9]$. **C.** $A=(-4;9)$. **D.** $A=[-4;9)$.

## Dạng 5. Các phép toán trên tập hợp

**Câu 75.** Cho tập hợp $X=\{1;5\}, Y=\{1;3;5\}$. Tập $X\cap Y$ là tập hợp nào sau đây?

**A.** $\{1\}$. **B.** $\{1;3\}$. **C.** $\{1;3;5\}$. **D.** $\{1;5\}$.

**Câu 76.** Cho tập $X=\{0,1,2,3,4,5\}$ và tập $A=\{0,2,4\}$. Tìm phần bù của $A$ trong $X$.

**A.** $\varnothing$. **B.** $\{2,4\}$. **C.** $\{0,1,3\}$. **D.** $\{1,3,5\}$.

**Câu 77.** Cho tập hợp $A=\{2\,;4\,;6\,;9\}$, $B=\{1\,;2\,;3\,;4\}$. Tập hợp $A\setminus B$ bằng tập hợp nào sau đây?

**A.** $\{1\,;2\,;3\,;5\}$. **B.** $\{6\,;9\,;1\,;3\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\{6\,;9\}$.

**Câu 78.** Cho hai tập hợp $A=\{0;1;2;3;4;5\}$ và $B=\{2;3;4;6;7\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $A\setminus B=\{1;2;3\}$. **B.** $A\setminus B=\{0;1;5\}$. **C.** $A\setminus B=\{0;1\}$. **D.** $A\setminus B=\{0;1;4;5\}$.

**Câu 79.** Cho hai tập hợp $A=\{1;3;5;6\}$ và $B=\{0;3;4;6\}$. Tập hợp $A\setminus B$ bằng tập nào sau đây.

**A.** $\{0;3;4;6\}$. **B.** $\{1;0;4;5\}$. **C.** $\{1;5\}$. **D.** $\{0;4\}$.

**Câu 80.** Cho hai tập hợp $A=\{0;1;2;3;4;5\}, B=\{2;4;6;7\}$. Khi đó tập $A\cap B$ là tập nào sau đây?

**A.** $\{2;4;6;7\}$.. **B.** $\{2;4\}$.. **C.** $\{2;4;6\}$.. **D.** $\{0;1;3;5\}$.

**Câu 81.** Cho hai tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-3x+2=0\right\}, B=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\,2x+1\le\sqrt{17}\right\}$. Chọn khẳng định đúng.

**A.** $A\cap B=\{0;1\}$. **B.** $A\cap B=\{1\}$. **C.** $A\cap B=\{0;1;2\}$. **D.** $A\cap B=\{0;2\}$.

**Câu 82.** Cho hai tập hợp $A=\{-3;0;4;7\}, B=\{-3;4;7;17\}$. Khi đó tập $A\cap B$ là tập nào sau đây?

**A.** $\{-3;7\}$.. **B.** $\{-3;0;4;7;17\}$.. **C.** $\{-3;4;7\}$.. **D.** $\{4;7\}$.

**Câu 83.** Cho hai tập hợp $X=\{1;2;4;7;9\}$ và $X=\{-1;0;7;10\}$. Tập hợp $X\cup Y$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

**Câu 84.** Cho hai tập hợp $A=\{1;2;5;6;7;10\}, B=\{1;2;3;4;5;9;10\}$. Tập hợp $B\setminus A$ bằng tập hợp nào sau đây?

**A.** $\{1;2;3;4;5;7;9;10\}$. **B.** $\{6;7\}$. **C.** $\{3;4;9\}$. **D.** $\{1;2;5;10\}$.

**Câu 85.** Cho tập $X=\{2;4;6;9\}, Y=\{1;2;3;4\}$. Tập nào sau đây bằng tập $X\setminus Y$?

**A.** $\{1;2;3;5\}$. **B.** $\{1;3;6;9\}$. **C.** $\{6;9\}$. **D.** $\{1\}$.

**Câu 86.** Cho tập hợp $X=\{a;b\}, Y=\{a;b;c\}$. $X\cup Y$ là tập hợp nào sau đây?

**A.** $\{a;b;c;d\}$. **B.** $\{a;b\}$. **C.** $\{c\}$. **D.** $\{a;b;c\}$.

**Câu 87.** Cho hai tập hợp $A$ và $B$ khác rỗng thỏa mãn: $A\subset B$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

**A.** $A\setminus B=\varnothing$. **B.** $A\cap B=A$. **C.** $B\setminus A=B$. **D.** $A\cup B=B$.

**Câu 88.** Cho ba tập hợp:
$F=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=0\right\}, G=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,g(x)=0\right\}, H=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)+g(x)=0\right\}$.
Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $H=F\cap G$. **B.** $H=F\cup G$. **C.** $H=F\setminus G$. **D.** $H=G\setminus F$.

**Câu 89.** Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\dfrac{2x}{x^2+1}\ge 1\right\}$; $B$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $b$ để phương trình $x^2-2bx+4=0$ vô nghiệm. Số phần tử chung của hai tập hợp trên là:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

**Câu 90.** Cho hai tập hợp $X=\{1;2;3;4\}, Y=\{1;2\}$. $C_X Y$ là tập hợp sau đây?

**A.** $\{1;2\}$. **B.** $\{1;2;3;4\}$. **C.** $\{3;4\}$. **D.** $\varnothing$.

**Câu 91.** Cho *A, B, C* là ba tập hợp được minh họa bằng biểu đồ ven như hình vẽ. Phần gạch sọc trong hình vẽ là tập hợp nào sau đây?

**A.** $(A\cup B)\setminus C$. **B.** $(A\cap B)\setminus C$. **C.** $(A\setminus C)\cup(A\setminus B)$. **D.** $(A\cap B)\cup C$.

**Câu 92.** Cho hai tập hợp $A=\{0;2\}$ và $B=\{0;1;2;3;4\}$. Số tập hợp $X$ thỏa mãn $A\cup X=B$ là:

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Câu 93.** Cho hai tập hợp $A=\{0;1\}$ và $B=\{0;1;2;3;4\}$. Số tập hợp $X$ thỏa mãn $X\subset C_B A$ là:

**A.** 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

**Câu 94.** Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;5\}$. Tìm số tập hợp $X$ sao cho $A\setminus X=\{1;3;5\}$ và $X\setminus A=\{6;7\}$.

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 95.** Ký hiệu $|X|$ là số phần tử của tập hợp $X$. Mệnh đề nào sai trong các mệnh đề sau?

**A.** $A\cap B=\varnothing \Rightarrow |A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$.

**B.** $A\cap B\neq \varnothing \Rightarrow |A|+|B|=|A\cup B|-|A\cap B|$.

**C.** $A\cap B\neq \varnothing \Rightarrow |A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$.

**D.** $A\cap B=\varnothing \Rightarrow |A|+|B|=|A\cup B|$.

**Câu 96.** Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4\}, B=\{0;2;4;6\}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $A\cap B=\{2;4\}$. **B.** $A\cup B=\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

**C.** $A\subset B$. **D.** $A\setminus B=\{0;6\}$.

**Câu 97.** Ký hiệu $H$ là tập hợp các học sinh của lớp 10**A.** $T$ là tập hợp các học sinh nam, $G$ là tập hợp các học sinh nữ của lớp 10**A.** Khẳng định nào sau đây sai?

**A.** $T\cup G=H$. **B.** $T\cap G=\varnothing$. **C.** $H\setminus T=G$. **D.** $G\setminus T=\varnothing$.

**Câu 98.** Cho $A, B, C$ là ba tập hợp. Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.** $A\subset B\Rightarrow A\cap C\subset B\cap C$. **B.** $A\subset B\Rightarrow C\setminus A\subset C\setminus B$.

**C.** $A\subset B\Rightarrow A\cup C\subset B\cup C$. **D.** $A\subset B, B\subset C\Rightarrow A\subset C$.

**Câu 99.** Cho tập hợp $A=\{a;b;c\}$ và $B=\{a;b;c;d;e\}$. Có tất cả bao nhiêu tập hợp $X$ thỏa mãn $A\subset X\subset B$?

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

**Câu 100.** Cho hai tập hợp $A=\{1;2;3;4;5\}; B=\{1;3;5;7;9\}$. Tập nào sau đây bằng tập $A\cap B$?

**A.** $\{1;3;5\}$. **B.** $\{1;2;3;4;5\}$. **C.** $\{2;4;6;8\}$. **D.** $\{1;2;3;4;5;7;9\}$.

**Câu 101.** Cho tập hợp $A=\{2;4;6;9\}, B=\{1;2;3;4\}$. Tập nào sau đây bằng tập $A\setminus B$?

**A.** $\{1;2;3;5\}$. **B.** $\{1;2;3;4;6;9\}$. **C.** $\{6;9\}$. **D.** $\varnothing$.

**Câu 102.** Cho các tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2-7x+6=0\}, B=\{x\in\mathbb{N}: |x|<4\}$. Khi đó:

**A.** $A\cup B=A$. **B.** $A\cap B=A\cup B$. **C.** $A\setminus B\subset A$. **D.** $B\setminus A=\varnothing$.

**Câu 103.** Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng:

**A.** $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\mathbb{N}$. **B.** $\mathbb{N}^*\cup\mathbb{N}=\mathbb{Z}$. **C.** $\mathbb{N}^*\cap\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$. **D.** $\mathbb{N}^*\cap\mathbb{Q}=\mathbb{N}^*$.

**Câu 104.** Chọn kết quả **sai** trong các kết quả sau:

**A.** $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subset B$..**B.** $A\cup B=A\Leftrightarrow A\subset B$..

**C.** $A\setminus B=A\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.. **D.** $B\setminus A=B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$..

**Câu 105.** Cho $X=\{7;2;8;4;9;12\}; Y=\{1;3;7;4\}$. Tập nào sau đây bằng tập $X\cap Y$?

**A.** $\{1;2;3;4;8;9;7;12\}$. **B.** $\{2;8;9;12\}$. **C.** $\{4;7\}$. **D.** $\{1;3\}$.

**Câu 106.** Cho hai tập hợp $A=\{2,4,6,9\}$ và $B=\{1,2,3,4\}$.Tập hợp $A\setminus B$ bằng tập nào sau đây?

**A.** $A=\{1,2,3,5\}$. **B.** $\{1;3;6;9\}$.. **C.** $\{6;9\}$.. **D.** $\varnothing$..

**Câu 107.** Cho $A=\{0;1;2;3;4\}, B=\{2;3;4;5;6\}$. Tập hợp $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ bằng?

**A.** $\{0;1;5;6\}$.. **B.** $\{1;2\}$.. **C.** $\{2;3;4\}$.. **D.** $\{5;6\}$..

**Câu 108.** Cho $A=\{0;1;2;3;4\}, B=\{2;3;4;5;6\}$. Tập hợp $A\setminus B$ bằng:

**A.** $\{0\}$.. **B.** $\{0;1\}$.. **C.** $\{1;2\}$.. **D.** $\{1;5\}$..

**Câu 109.** Cho $A=\{0;1;2;3;4\}, B=\{2;3;4;5;6\}$. Tập hợp $B\setminus A$ bằng:

**A.** $\{5\}$.. **B.** $\{0;1\}$.. **C.** $\{2;3;4\}$.. **D.** $\{5;6\}$..

**Câu 110.** Cho $A=\{1;5\}; B=\{1;3;5\}$.Chọn kết quả **đúng** trong các kết quả sau

**A.** $A\cap B=\{1\}$.. **B.** $A\cap B=\{1;3\}$.. **C.** $A\cap B=\{1;5\}$.. **D.** $A\cap B=\{1;3;5\}$..

**Câu 111.** Cho tập hợp $A=(-\infty;-1]$ và tập $B=(-2;+\infty)$. Khi đó $A\cup B$ là:

**A.** $(-2;+\infty)$ **B.** $(-2;-1]$ **C.** $\mathbb{R}$ **D.** $\varnothing$

**Câu 112.** Cho hai tập hợp $A=[-5;3), B=(1;+\infty)$. Khi đó $A\cap B$ là tập nào sau đây?

**A.** $(1;3)$ **B.** $(1;3]$ **C.** $[-5;+\infty)$ **D.** $[-5;1]$

**Câu 113.** Cho $A=(-2;1), B=[-3;5]$. Khi đó $A\cap B$ là tập hợp nào sau đây?

**A.** $[-2;1]$ **B.** $(-2;1)$ **C.** $(-2;5]$ **D.** $[-2;5]$

**Câu 114.** Cho hai tập hợp $A=(1;5]; B=(2;7]$. Tập hợp $A\setminus B$ là:

**A.** $(1;2]$ **B.** $(2;5)$ **C.** $(-1;7]$ **D.** $(-1;2)$

**Câu 115.** Cho tập hợp $A=(2;+\infty)$. Khi đó $C_R A$ là:

**A.** $[2;+\infty)$ **B.** $(2;+\infty)$ **C.** $(-\infty;2]$ **D.** $(-\infty;-2]$

**Câu 116.** Cho các số thực *a, b, c, d* và $a<b<c<d$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $(a;c)\cap(b;d)=(b;c)$ **B.** $(a;c)\cap(b;d)=(b;c]$

**C.** $(a;c)\cap[b;d)=[b;c)$ **D.** $(a;c)\cup[b;d)=(b;c)$

**Câu 117.** Cho ba tập hợp $A=[-2;2], B=[1;5], C=[0;1)$. Khi đó tập $(A\setminus B)\cap C$ là:

**A.** $\{0;1\}$ **B.** $[0;1)$ **C.** $(-2;1)$ **D.** $[-2;5]$

**Câu 118.** Cho tập hợp $C_{\mathbb{R}}A=\left[-3;\sqrt{8}\right), C_{\mathbb{R}}B=(-5;2)\cup\left(\sqrt{3};\sqrt{11}\right)$. Tập $C_{\mathbb{R}}(A\cap B)$ là:

**A.** $\left(-3;\sqrt{3}\right)$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\left(-5;\sqrt{11}\right)$. **D.** $(-3;2)\cup\left(\sqrt{3};\sqrt{8}\right)$.

**Câu 119.** Cho $A=[1;4]; B=(2;6); C=(1;2)$. Tìm $A\cap B\cap C$:

**A.** $[0;4]$. **B.** $[5;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $\varnothing$.

**Câu 120.** Cho hai tập $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x+3<4+2x\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,5x-3<4x-1\}$.
Tất cả các số tự nhiên thuộc cả hai tập $A$ và $B$ là:

**A.** 0 và 1. **B.** 1. **C.** 0 **D.** Không có.

**Câu 121.** Cho $A=[-4;7]$, $B=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. Khi đó $A\cap B$:

**A.** $[-4;-2)\cup(3;7]$. **B.** $[-4;-2)\cup(3;7)$. **C.** $(-\infty;2]\cup(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.

**Câu 122.** Cho $A=(-\infty;-2]$, $B=[3;+\infty)$, $C=(0;4)$. Khi đó tập $(A\cup B)\cap C$ là:

**A.** $[3;4]$. **B.** $(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$. **C.** $[3;4)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.

**Câu 123.** Cho $A=\{x\in R: x+2\geq 0\}$, $B=\{x\in R: 5-x\geq 0\}$. Khi đó $A\cap B$ là:

**A.** $[-2;5]$. **B.** $[-2;6]$. **C.** $[-5;2]$. **D.** $(-2;+\infty)$.

**Câu 124.** Cho $A=\{x\in R: x+2\geq 0\}, B=\{x\in R: 5-x\geq 0\}$. Khi đó $A\setminus B$ là:

**A.** $[-2;5]$. **B.** $[-2;6]$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Câu 125.** Cho hai tập hợp $A=[-2;7), B=(1;9]$. Tìm $A\cup B$.

**A.** $(1;7)$ **B.** $[-2;9]$ **C.** $[-2;1)$ **D.** $(7;9]$

**Câu 126.** Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -5\leq x<1\}$; $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -3<x\leq 3\}$. Tìm $A\cap B$.

**A.** $[-5;3]$ **B.** $(-3;1)$ **C.** $(1;3]$ **D.** $[-5;3)$

**Câu 127.** Cho $A=(-1;5], B=(2;7)$. Tìm $A\setminus B$.

**A.** $(-1;2]$ **B.** $(2;5]$ **C.** $(-1;7)$ **D.** $(-1;2)$

**Câu 128.** Cho 3 tập hợp $A=(-\infty;0]$, $B=(1;+\infty)$, $C=[0;1)$. Khi đó $(A\cup B)\cap C$ bằng:

**A.** $\{0\}$ **B.** $\mathbb{R}$ **C.** $\{0;1\}$ **D.** $\varnothing$

**Câu 129.** Cho hai tập hợp $M=[-4;7]$ và $N=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. Khi đó $M\cap N$ bằng:

**A.** $[-4;-2)\cup(3;7]$ **B.** $[-4;2)\cup(3;7)$ **C.** $(-\infty;2]\cup(3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$

**Câu 130.** Cho hai tập hợp $A=[-2;3], B=(1;+\infty)$. Khi đó $C_{\mathbb{R}}(A\cup B)$ bằng:

**A.** $(1;3)$ **B.** $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$ **C.** $[3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-2)$

**Câu 131.** Cho 3 tập hợp: $A=(-\infty;1]$; $B=[-2;2]$ và $C=(0;5)$. Tính $(A\cap B)\cup(A\cap C)=?$

**A.** $[-2;1]$. **B.** $(-2;5)$. **C.** $(0;1]$. **D.** $[1;2]$.

**Câu 132.** Cho $A=\{x\in\mathbb{N}\mid(2x-x^2)(2x^2-3x-2)=0\}; B=\{n\in\mathbb{N}^*\mid 3<n^2<30\}$. Khi đó tập hợp $A\cap B$ bằng:

**A.** $\{2;4\}$.. **B.** $\{2\}$.. **C.** $\{4;5\}$.. **D.** $\{3\}$..

**Câu 133.** Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\mid(x^2-4x+3)(x^2-4)=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{N}\mid x<4\}$. Tìm $A\cap B$.

**A.** $A\cap B=\{-2;1;2\}$.. **B.** $A\cap B=\{0;1;2;3\}$..

**C.** $A\cap B=\{1;2;3\}$.. **D.** $A\cap B=\{-1;2\}$..

**Câu 134.** Cho 2 tập hợp $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2+x-6=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{N}\mid 2x^2-3x+1=0\}$. Chọn khẳng định đúng?

**A.** $B\setminus A=\{1;2\}$. **B.** $A\cap B=\{-3;1;2\}$. **C.** $A\setminus B=A$. **D.** $A\cup B=\varnothing$.

**Câu 135.** Cho 2 tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\mid(2x-x^2)(x-1)=0\}$, $B=\{n\in\mathbb{N}\mid 0<n^2<10\}$. Chọn mệnh đề đúng?

**A.** $A\cap B=\{1;2\}$. **B.** $A\cap B=\{2\}$. **C.** $A\cap B=\{0;1;2;3\}$. **D.** $A\cap B=\{0;3\}$.

**Câu 136.** Cho hai tập hợp $A=\{1;2003;2018;2019\}$ và $B=\{0;2003;2018;2020\}$. Tìm tập hợp $A\cap B$.

**A.** $A\cap B=\{0;2020\}$. **B.** $A\cap B=\{1;2019\}$.

**C.** $A\cap B=\{2003;2018\}$. **D.** $A\cap B=\{0;1;2003;2018;2019;2020\}$.

**Câu 137.** Cho hai tập hợp $M=\{1;2;3;5\}$ và $N=\{2;6;-1\}$. Xét các khẳng định sau đây:

$M\cap N=\{2\}$; $N\setminus M=\{1;3;5\}$; $M\cup N=\{1;2;3;5;6;-1\}$.

Có bao nhiêu khẳng định đúng trong ba khẳng định nêu trên?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 138.** Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|x|<3\}$, $B=\{0\,;1\,;3\}$, $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,(x^2-4x+3)(x^2-4)=0\right\}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** $(A\setminus B)\cup C=\{-2\,;\,-1\,;\,2\,;3\}$. **B.** $C_{\mathbb{N}}B=\varnothing$.

**C.** $(B\cap C)\setminus A=\{1\}$. **D.** $C_{A\cup B}C=\{-1\,;\,0\}$.

**Câu 139.** Cho $A$ là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10, $B=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n\le 6\}$, $C=\{n\in\mathbb{N}\,|\,4\le n\le 10\}$. Tìm tập hợp $A\cap(B\cup C)$.

**A.** $A\cap(B\cup C)=B$. **B.** $A\cap(B\cup C)=A$.

**C.** $A\cap(B\cup C)=C$. **D.** $A\cap(B\cup C)=\varnothing$.

**Câu 140.** Cho hai tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,(x^2-4x)(2x^2-3x-2)=0\right\}$ và $B=\{n\in\mathbb{N}\,|\,3<n^2<30\}$. Khi đó, $A\cap B$ là?

**A.** $\{2\,;\,4\}$. **B.** $\{5\,;\,4\}$. **C.** $\{3\}$. **D.** $\{2\}$.

**Câu 141.** Cho 2 tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(2x-x^2)(2x^2-3x-2)=0\}$,

$B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(2x^2+x)(3x-12m)=0\}$, với giá trị nào của $m$ thì $A=B$?

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $-2$. **C.** $2$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

**Câu 142.** Cho hai tập hợp bằng nhau là $A=\{x\in\mathbb{Z}\,||x-2|=|x^2-3x+1|\}$ và $B=\{b,c\}$. Giá trị biểu thức $M=b^3+c^3$ bằng

**A.** $62$. **B.** $26$. **C.** $82$. **D.** $28$.

**Câu 143.** Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=3k,k\in\mathbb{Z},10<x<100\}$. Tổng các phần tử của tập hợp $A$ bằng:

**A.** $1665$. **B.** $1767$. **C.** $1566$. **D.** $1674$.

**Câu 144.** Cho tập hợp $A=\{(x\,;\,y)\,|\,x^2-25=y(y+6);x\,,\,y\in\mathbb{Z}\}$, $B=\{(4\,;\,-3)\,;\,(-4\,;\,-3)\}$ và tập hợp $M$. Biết $A\setminus B=M$, số phần tử của tập hợp $M$ là

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Câu 145.** Cho ba tập $A=[-2;0]$, $B=\{x\in\mathbb{R}:-1<x<0\}$; $C=\{x\in\mathbb{R}:|x|<2\}$. Khi đó:

**A.** $(A\cap C)\setminus B=(-2;-1)$. **B.** $(A\cap C)\setminus B=[-2;-1]$.

**C.** $(A\cap C)\setminus B=(-2;-1]$. **D.** $(A\cap C)\setminus B=[-2;-1)$.

**Câu 146.** Cho $A=(-\infty;-2]$; $B=[3;+\infty)$ và $C=(0;4)$. Khi đó tập $(A\cup B)\cap C$ là:

**A.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$.

**C.** $[3;4)$. **D.** $[3;4]$.

**Câu 147.** Cho ba tập hợp $C_{\mathbb{R}}M=(-\infty;3), C_{\mathbb{R}}N=(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$ và $C_{\mathbb{R}}P=(-2;3]$. Chọn khẳng định đúng?

**A.** $(M\cap N)\cup P=(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$. **B.** $(M\cap N)\cup P=[-3;+\infty)$.

**C.** $(M\cap N)\cup P=(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$. **D.** $(M\cap N)\cup P=[-2;3)$.

## Dạng 6. (Nâng cao) Các bài toán tìm điều kiện của tham số

**Câu 148.** Cho tập hợp $A=[m;m+2], B[-1;2]$. Tìm điều kiện của $m$ để $A\subset B$.

**A.** $m\le -1$ hoặc $m\ge 0$ **B.** $-1\le m\le 0$ **C.** $1\le m\le 2$ **D.** $m<1$ hoặc $m>2$

**Câu 149.** Cho tập hợp $A=(0;+\infty)$ và $B=\{x\in\mathbb{R}\setminus mx^2-4x+m-3=0\}$. Tìm $m$ để $B$ có đúng hai tập con và $B\subset A$.

**A.** $\left[\begin{array}{l}0<m\le 3\\ m=4\end{array}\right.$ **B.** $m=4$ **C.** $m>0$ **D.** $m=3$

**Câu 150.** Cho hai tập hợp $A=[-2;3], B=(m;m+6)$. Điều kiện để $A\subset B$ là:

**A.** $-3\le m\le -2$ **B.** $-3<m<-2$ **C.** $m<-3$ **D.** $m\ge -2$

**Câu 151.** Cho hai tập hợp $X=(0;3]$ và $Y=(a;4)$. Tìm tất cả các giá trị của $a\le 4$ để $X\cap Y\ne\varnothing$.

**A.** $\left[\begin{array}{l}a<3\\ a\ge 4\end{array}\right.$ **B.** $a<3$ **C.** $a<0$ **D.** $a>3$

**Câu 152.** Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\setminus 1\le|x|\le 2\}; B=(-\infty;m-2]\cup[m;+\infty)$. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để $A\subset B$.

**A.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 4\\ m\le -2\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 4\\ m\le -2\\ m=1\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m>4\\ m<-2\\ m=1\end{array}\right.$ **D.** $-2<m<4$

**Câu 153.** Cho số thực $a<0$ .Điều kiện cần và đủ để $(-\infty;9a)\cap\left(\frac{4}{a};+\infty\right)\ne\varnothing$ là:

**A.** $-\frac{2}{3}<a<0.$ **B.** $-\frac{2}{3}\le a<0.$ **C.** $-\frac{3}{4}<a<0.$ **D.** $-\frac{3}{4}\le a<0.$

**Câu 154.** Cho tập hợp $A=[m;m+2], B=[-1;2]$ với $m$ là tham số. Điều kiện để $A\subset B$ là:

**A.** $1\le m\le 2$ **B.** $-1\le m\le 0$

**C.** $m\le -1$ hoặc $m\ge 0$ **D.** $m<-1$ hoặc $m>2$

**Câu 155.** Cho tập hợp $A=[m;m+2], B=[1;3)$. Điều kiện để $A\cap B=\varnothing$ là:

**A.** $m<-1$ hoặc $m>3$ **B.** $m\le -1$ hoặc $m>3$

**C.** $m<-1$ hoặc $m\ge 3$ **D.** $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$

**Câu 156.** Cho hai tập hợp $A=[-3;-1]\cup[2;4]$, $B=(m-1;m+2)$. Tìm $m$ để $A\cap B\ne\varnothing$.

**A.** $|m|<5$ và $m\ne 0$ **B.** $|m|>5$ **C.** $1\le m\le 3$ **D.** $m>0$

**Câu 157.** Cho 3 tập hợp $A=(-3;-1)\cup(1;2)$, $B=(m;+\infty)$, $C(-\infty;2m)$. Tìm $m$ để $A\cap B\cap C\ne\varnothing$.

**A.** $\frac{1}{2}<m<2$ **B.** $m\ge 0$ **C.** $m\le -1$ **D.** $m\ge 2$

**Câu 158.** Cho hai tập $A=[0;5]$; $B=(2a;3a+1]$, $a>-1$. Với giá trị nào của $a$ thì $A\cap B\ne\varnothing$

**A.** $-\frac{1}{3}\le a\le\frac{5}{2}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} a\ge\frac{5}{2} \\ a<-\frac{1}{3}\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} a<\frac{5}{2} \\ a\ge-\frac{1}{3}\end{array}\right.$. **D.** $-\frac{1}{3}\le a<\frac{5}{2}$.

**Câu 159.** Cho 2 tập khác rỗng $A=(m-1;4];B=(-2;2m+2),m\in\mathbb{R}$. Tìm m để $A\cap B\neq\varnothing$

**A.** $-1<m<5$. **B.** $1<m<5$. **C.** $-2<m<5$. **D.** $m>-3$.

**Câu 160.** Cho số thực $a<0$ .Điều kiện cần và đủ để $(-\infty;9a)\cap\left(\frac{4}{a};+\infty\right)\neq\varnothing$ là:

**A.** $-\frac{3}{4}\le a<0$. **B.** $-\frac{2}{3}<a<0$. **C.** $-\frac{2}{3}\le a<0$. **D.** $-\frac{3}{4}<a<0$.

**Câu 161.** Cho hai tập hợp $A=(m-1;5);B=(3;+\infty),m\in\mathbb{R}$. Tìm $m$ để $A\backslash B=\varnothing$.

**A.** $m=4$. **B.** $4\le m<6$. **C.** $4\le m\le 6$. **D.** $m\ge 4$.

**Câu 162.** Cho tập hợp $A=(-\infty;m-1)$, tập $B=(2;+\infty)$, tìm $m$ để $A\cap B=\varnothing$?

**A.** $m<3$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m>1$. **D.** $m\le 1$.

**Câu 163.** Cho nửa khoảng $A=[0;3)$ và $B=(b;10]$. $A\cap B=\varnothing$ nếu:

**A.** $b<3$. **B.** $b\ge 3$. **C.** $0\le b<3$. **D.** $b\le 0$.

**Câu 164.** Cho tập hợp $A=[m;m+2]$ và $B=[-1;2]$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để $A\subset B$.

**A.** $-1\le m\le 0$. **B.** $m\le 1$ hoặc $m\ge 2$. **C.** $1\le m\le 2$. **D.** $m<1$ hoặc $m>2$.

**Câu 165.** Cho tập hợp khác rỗng $A=[a,8-a],a\in R$. Với giá trị nào của $a$ thì $A$ sẽ là một đoạn có độ dài bằng 5?

**A.** $a=3$ **B.** $a<4$. **C.** $a=\frac{3}{2}$. **D.** $a=\frac{13}{2}$.

**Câu 166.** Cho hai tập hợp $A=(0;3)$ và $B=[a;a+2]$, với giá trị nào của $a$ thì $A\cap B=\varnothing$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} a\le -2 \\ a\ge 3\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} a\le -2 \\ a\ge 2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} a\le -3 \\ a\ge 1\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} a<-2 \\ a\ge 3\end{array}\right.$.

**Câu 167.** Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,1\le|x|\le 2\}$; $B=(-\infty;m-2]\cup[m;+\infty)$. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để $A\subset B$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m\le -2\end{array}\right.$. **B.** $-2<m<4$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m\le -2 \\ m=1\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<-2 \\ m=1\end{array}\right.$.

**Câu 168.** Cho các tập hợp $A=(-2;10)$, $B=(m;m+2)$. Tìm $m$ để tập $A\cap B=(m;m+2)$

**A.** $2<m\le 8$. **B.** $2\le m\le 8$. **C.** $-2\le m\le 8$. **D.** $2\le m<8$.

**Câu 169.** Cho $A=[m;m+1]$; $B=[1;4)$. Tìm $m$ để $A\cap B\neq\varnothing$.

**A.** $m\in[0;4]$. **B.** $m\in(0;4]$. **C.** $m\in(0;4)$. **D.** $m\in[0;4)$.

**Câu 170.** Cho các tập hợp khác rỗng $A=\left[m-1;\frac{m+3}{2}\right]$ và $B=(-\infty;-3)\cup[3;+\infty)$.

Tập hợp các giá trị thực của $m$ để $A\cap B\neq\varnothing$ là

**A.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-2;3)$.

**C.** $(-\infty;-2)\cup[3;5]$. **D.** $(-\infty;-9)\cup(4;+\infty)$.

**Câu 171.** Cho hai tập hợp $M=[2m-1;\ 2m+5]$ và $N=[m+1;\ m+7]$ (với $m$ là tham số thực). Tổng tất cả các giá trị của $m$ để hợp của hai tập hợp $M$ và $N$ là một đoạn có độ dài bằng 10 là

**A.** 4. **B.** -2. **C.** 6. **D.** 10.

**Câu 172.** Cho hai tập hợp $A=(m-1\,;\,5]$, $B=(3\,;\,2020-5m)$ và $A$, $B$ khác rỗng. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để $A\setminus B=\varnothing$?

**A.** 3. **B.** 399. **C.** 398. **D. 2.**

**Câu 173.** Cho hai tập hợp $X=[-1\,;\,4]$ và $Y=[m+1;\,m+3]$. Tìm tất cả các giá trị $m\in\mathbb{R}$ sao cho $Y\subset X$.

**A.** $-2\le m\le 1$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$. **C.** $-2<m<1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1 \end{array}\right.$.

**Câu 174.** Cho hai tập hợp $P=[3m-6\,;\,4)$ và $Q=(-2\,;\,m+1)$, $m\in\mathbb{R}$. Tìm $m$ để $P\setminus Q=\varnothing$.

**A.** $3\le m<\dfrac{10}{3}$. **B.** $3<m<\dfrac{10}{3}$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $\dfrac{4}{3}<m\le 3$.

**Câu 175.** Cho tập hợp $A=[4;7]$ và $B=[2a+3b-1;3a-b+5]$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Khi $A=B$ thì giá trị biểu thức $M=a^2+b^2$ bằng?

**A.** 2. **B.** 5. **C.** 13. **D.** 25.

**Câu 176.** Cho các tập hợp khác rỗng $[2m;m+3]$ và $B=(-\infty;-2]\cup(4;+\infty)$. Tập hợp các giá trị thực của $m$ để $A\cap B\neq\varnothing$ là

**A.** $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m>1 \end{array}\right.$. **B.** $-1<m\le 1$. **C.** $1<m<3$. **D.** $\left[\begin{array}{l} 1<m\le 3 \\ m\le -1 \end{array}\right.$.

**Câu 177.** Cho số thực $m<0$. Tìm $m$ để $(-\infty;m^2)\cap(4;+\infty)\neq\varnothing$

**A.** $m>2$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $m<0$. **D.** $m<-2$.

**Câu 178.** Cho 2 tập khác rỗng $A=(m-1;4];B=(-2;2m+2),m\in\mathbb{R}$. Tìm m để $A\subset B$

**A.** $1<m<5$. **B.** $m>1$. **C.** $-1\le m<5$. **D.** $-2<m<-1$.

**Câu 179.** Cho các tập hợp $A=\{3k+1\,|\,k\in\mathbb{Z}\},B=\{6m+4\,|\,m\in\mathbb{Z}\}$. Khi đó:

**A.** $A=B$. **B.** $A\subset B$. **C.** $B\subset A$. **D.** $A\setminus B=\varnothing$.

# Bài 2. TẬP HỢP. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Tập hợp

***Ví dụ 1.*** Cho tập hợp $B$ gồm các số tự nhiên có một chữ số và chia hết cho 3 .
a) Viết tập hợp $B$ theo hai cách: liệt kê các phần tử của tập hợp; chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.
b) Minh họa tập hợp $B$ bằng biểu đồ Ven.

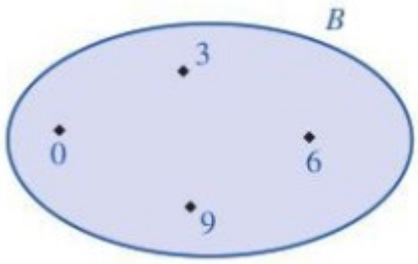
***Giải***

a) Tập hợp $B$ được viết theo cách liệt kê các phần tử là: $B=\{0;3;6;9\}$

Tập hợp $B$ được viết theo cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử là:

$B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,0\le x\le 9 \text{ và } x:3\}$.

b) Tập hợp $B$ được minh hoạ bằng biểu đồ Ven



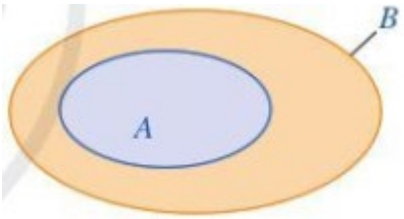

*Nhận xét*
- Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng, kí hiệu là $\varnothing$.
- Một tập hợp có thể không có phần tử nào, cũng có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử.

*Chú ý:* Khi tập hợp $C$ là tập hợp rỗng, ta viết $C=\varnothing$ và không được viết là $C=\{\varnothing\}$.

### II. Tập con và tập hợp bằng nhau

#### 1. Tập con

Nếu mọi phần tử của tập hợp $A$ đều là phần tử của tập hợp $B$ thì ta nói $A$ là một tập con của tập hợp $B$ và viết là $A\subset B$. Ta còn đọc là $A$ chứa trong $B$.




*Quy ước*: Tập hợp rỗng $\varnothing$ được coi là tập con của mọi tập hợp.

*Chú ý:* $A\subset B\Leftrightarrow(\forall x, x\in A\Rightarrow x\in B)$.

Khi $A\subset B$, ta cũng viết $B\supset A$ (đọc là $B$ chứa $A$).

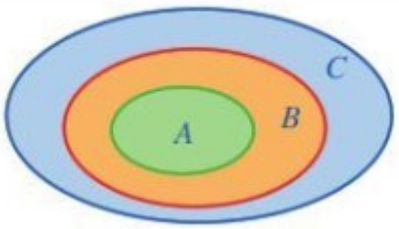
Nếu $A$ không phải là tập con của $B$, ta viết $A\not\subset B$.

***Ví dụ 2.*** Cho hai tập hợp: $E=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le 1\}, F=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<2\}$. Chứng tỏ rằng $E\subset F$.

***Giải***

Với mọi số thực $x$, ta có: $x\le 1$ thì $x<2$ nên $x\in E$ thì $x\in F$. Do đó $E\subset F$

Ta có các tính chất sau:
- $A\subset A$ với mọi tập hợp $A$;
- Nếu $A\subset B$ và $B\subset C$ thì $A\subset C$



## 2. Tập hợp bằng nhau

Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói hai tập hợp $A$ *và* $B$ *bằng nhau*, viết là $A = B$

***Ví dụ 3.*** Cho tập hợp $C$ gồm các tam giác có ba cạnh bằng nhau và tập hợp $D$ gồm các tam giác có ba góc bằng nhau. Hai tập hợp $C$ và $D$ có bằng nhau hay không?

***Giải***

Do một tam giác có ba cạnh bằng nhau khi và chỉ khi tam giác đó có ba góc bằng nhau nên hai tập hợp $C$ và $D$ là bằng nhau.

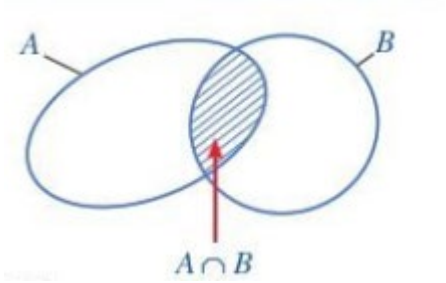
## III. Giao của hai tập hợp

Tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc $A$ vừa thuộc $B$ được gọi là *giao* của $A$ và $B$, kí hiệu $A \cap B$.

$x \in A \cap B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \in B$.

Vậy $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$

Tập hợp $A \cap B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong hình bên




***Ví dụ 4***. Tìm giao của hai tập hợp trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 16\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 20\}$.

b) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 4\}, D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 5\}$.

***Giải***

a) $A = \{1;2;4;8;16\}, B = \{1;2;4;5;10;20\}$. Vậy $A \cap B = \{1;2;4\}$.

*Chú ý:* A là tập hợp các ước tự nhiên của $16, B$ là tập hợp các ước tự nhiên của 20 nên $A \cap B$ là tập hợp các ước chung tự nhiên của 16 và 20.

b) $C \cap D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của 4 và } x \text{ là bội của } 5\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội chung của 4 và } 5\}$.

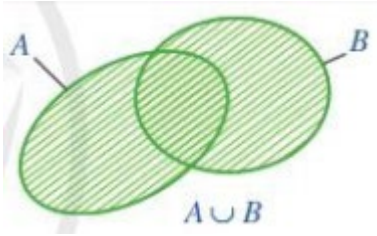
## IV. Hợp của hai tập hợp

Tập hợp gồm các phần tử thuộc $A$ hoặc thuộc $B$ được gọi là *hợp* của $A$ và $B$, kí hiệu $A \cup B$

$x \in A \cup B$ khi và chỉ khi $x \in A$ hoặc $x \in B$.

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

Tập hợp $A \cup B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong hình bên




***Ví dụ 5***. Cho tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ và tập hợp $I$ các số vô tỉ. Tìm $\mathbb{Q} \cap I, \mathbb{Q} \cup I$.

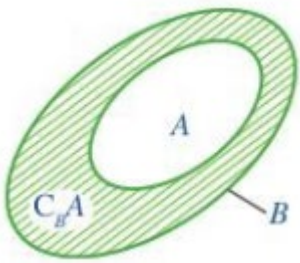
***Giải***

Ta có $\mathbb{Q} \cap I = \varnothing, \mathbb{Q} \cup I = \mathbb{R}$

## V. Phần bù. Hiệu của hai tập hợp

Cho tập hợp $A$ là tập con của tập hợp $B$. Tập hợp những phần tử của $B$ mà không phải là phần tử của $A$ được gọi là phần bù của $A$ trong $B$, kí hiệu $C_B A$.

Tập hợp $C_B A$ được mô tả bằng phần gạch chéo




***Ví dụ 6.*** Các học sinh của lớp $10A$ đăng kí đi tham quan ở một trong hai địa điểm: Hoàng thành Thăng Long và Văn Miếu - Quốc Tử Giám. Mỗi học sinh đều đăng kí đúng một địa điểm. Gọi $A$ là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long, $B$ là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Văn Miếu - Quốc Tủ Giám, $T$ là tập hợp các học sinh lốp $10A$. Tìm phần bù của tập hợp $A$ trong tập hợp $T$.

***Giải.*** Phần bù của tập hợp $A$ trong tập hợp $T$ bao gồm những học sinh trong lốp không đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long nên $C_T A = B$.

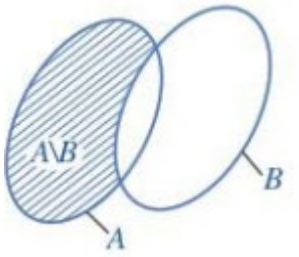
Tập hợp gồm các phần tử thuộc $A$ nhưng không thuộc $B$ được gọi là hiệu của $A$ và $B$, kí hiệu $A \setminus B$.

$x \in A \setminus B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \notin B$

Vậy $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.

Chú ý: Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B = C_A B$.

Tập hợp $A \setminus B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo.




***Ví dụ 7.*** Cho hai tập hợp: $A = \{3;6;9;12\}$, $B = \{2;4;6;8;10;12\}$.

Tìm $A \setminus B, B \setminus A$.

***Giải***

- Tập hợp $A \setminus B$ gồm những phần tử thuộc $A$ mà không thuộc $B$. Vậy $A \setminus B = \{3;9\}$.
- Tập hợp $B \setminus A$ gồm những phần tử thuộc $B$ mà không thuộc $A$. Vậy $B \setminus A = \{2;4;8;10\}$.

***Ví dụ 8.*** Cho hai tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 11 \le 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 - 14x + 11 = 0\}$.

Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

***Giải***

Ta có: $A = \{0;1;2;3\}, B = \{1\}$.

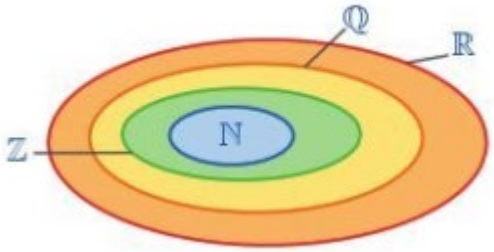
Vậy $A \cap B = \{1\}, A \cup B = \{0;1;2;3\}, A \setminus B = \{0;2;3\}, B \setminus A = \varnothing$.

## VI. Các tập hợp số

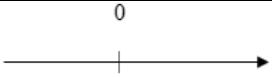
### 1. Các tập hợp số đã học

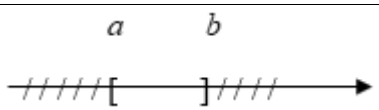
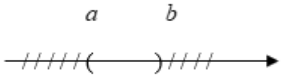
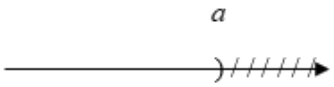
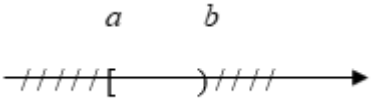
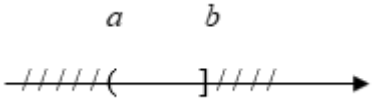
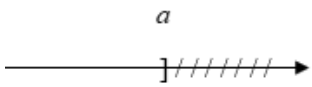
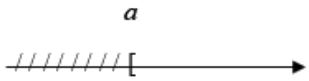
Ta đã biết $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp số tự nhiên, tập hợp số nguyên, tập hợp số hữu tỉ, tập hợp số thực.

Ta có quan hệ sau: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$




### 2. Một số tập con thường dùng của tập hợp số thực

| Tên gọi, ký hiệu | Tập hợp | Hình biểu diễn |
|---|---|---|
| Tập số thực $(-\infty;+\infty)$ | $\mathbb{R}$ |   |

| | | |
|---|---|---|
| Đoạn $[a;b]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ |  |
| Khoảng $(a;b)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ |  |
| Khoảng $(-\infty;a)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ |  |
| Khoảng $(a;+\infty)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ |  |
| Nửa khoảng $[a;b)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ |  |
| Nửa khoảng $(a;b]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ |  |
| Nửa khoảng $(-\infty;a]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$ |  |
| Nửa khoảng $[a;+\infty)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$ |  |

Kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực, kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực; $a$ và $b$ được gọi là đầu mút của các đoạn, khoảng, nửa khoảng.

Ta cũng có thể biểu diễn tập hợp trên trục số bằng cách gạch bỏ phần không thuộc tập đó, chẳng hạn đoạn $[a;b]$ có thể biểu diễn như sau:




***Ví dụ 9.*** Hãy đọc tên, kí hiệu và biểu diễn mỗi tập hợp sau trên trục số:

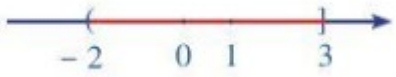
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \le 3\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 1\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 > 0\}$.

***Giải***

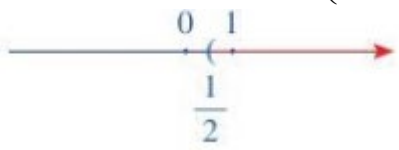
a) Tập hợp $A$ là nửa khoảng $(-2;3]$ và được biểu diễn là:




b) Tập hợp $B$ là đoạn $[-3;1]$ và được biểu diễn là:




c) Tập hợp $C$ là khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ và được biểu diễn là:



## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Xác định tập hợp

**Câu 1.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

a) $A=\left\{x\in R\,|\,(2x-x^2)(2x^2-3x-2)=0\right\}$

b) $B=\left\{n\in N\,|\,3<n^2<30\right\}$

c) $C=\left\{x\in Z\,|\,2x^2-75x-77=0\right\}$.

**Lời giải**

a) $(2x-x^2)(2x^2-3x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-x^2=0\\2x^2-3x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1}{2}\\x=2\end{array}\right.\end{array}\right.$

Vậy $A=\left\{\dfrac{-1}{2};0;2\right\}$

b) $n\in N\,|\,3<n^2<30$ nên ta có: $n=2;3;4;5$

Vậy $B=\{2;3;4;5\}$

c) $2x^2-75x-77=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{77}{2}(loai)\end{array}\right.$

Vậy $C=\{-1\}$.

**Câu 2.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

a) $A=\left\{x\in R\,|\,(2x^2-5x+3)(x^2-4x+3)=0\right\}$

b) $B=\left\{x\in R\,|\,(x^2-10x+21)(x^3-x)=0\right\}$

c) $C=\left\{x\in R\,|\,(6x^2-7x+1)(x^2-5x+6)=0\right\}$

d) $D=\left\{x\in Z\,|\,2x^2-5x+3=0\right\}$

e) $E=\left\{x\in N\,|\,\left\{\begin{array}{l}x+3<4+2x\\5x-3<4x-1\end{array}\right.\right\}$

f) $F=\left\{x\in Z\,|\,|x+2|\le 1\right\}$

g) $G=\left\{x\in N\,|\,x<5\right\}$

h) $H=\left\{x\in R\,|\,x^2+x+3=0\right\}$.

**Lời giải**

a) $A=\left\{x\in R\,|\,(2x^2-5x+3)(x^2-4x+3)=0\right\}$

$(2x^2-5x+3)(x^2-4x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-5x+3=0\\x^2-4x+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{3}{2}\\x=3\end{array}\right.$

$A=\left\{1;\dfrac{3}{2};3\right\}$

b) $B=\left\{x\in R\,|\,(x^2-10x+21)(x^3-x)=0\right\}$

$$(x^2-10x+21)(x^3-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-10x+21=0\\x^3-x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=7\\x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$$

$B=\left\{-1;0;1;3;7\right\}$

c) $C=\left\{x\in R\,|\,(6x^2-7x+1)(x^2-5x+6)=0\right\}$

$$(6x^2-7x+1)(x^2-5x+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x^2-7x+1=0\\x^2-5x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{1}{6}\\x=2\\x=3\end{array}\right.$$

$C=\left\{\dfrac{1}{6};1;2;3\right\}$

d) $D=\left\{x\in Z\,|\,2x^2-5x+3=0\right\}$

$$2x^2-5x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}(loai)\\x=1\end{array}\right.$$

$x\in Z\Rightarrow x=1$

$D=\left\{1\right\}$

e) $E=\left\{x\in N\,|\,\left\{\begin{array}{l}x+3<4+2x\\5x-3<4x-1\end{array}\right.\right\}$

$$\left\{\begin{array}{l}x+3<4+2x\\5x-3<4x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>-1\\x<2\end{array}\right.$$

$x\in N\Rightarrow x=1$

$E=\left\{1\right\}$

f) $F=\left\{x\in Z\,|\,\left|x+2\right|\le1\right\}$

$\left|x+2\right|\le1\Leftrightarrow-1<x+2<1\Leftrightarrow-3<x<-1$

$x\in Z\Rightarrow x=-1;-2;-3$

$F=\left\{-1;-2;-3\right\}$

g) $G=\left\{0;1;2;3;4\right\}$

h) $H=\left\{x\in R\,|\,x^2+x+3=0\right\}$

$x^2+x+3=0$ vô nghiệm

$H=\varnothing$.

**Câu 3.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

a) $A=\left\{x\in Z\,|\,2x^3-3x^2-5x=0\right\}$

b) $B=\left\{x\in Z\,|\,x<|3|\right\}$

c) $C=\left\{x=3k;x,k\in Z;-4<x<12\right\}$.

**Lời giải**

a) $2x^3-3x^2-5x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{5}{3}(loai)\\x=-1\end{array}\right.$

Vậy $A=\{0;-1\}$

b) $x<|3|\Leftrightarrow -3<x<3$

$x\in Z\Rightarrow x=0;\pm1;\pm2$

Vậy $B=\{\pm1;\pm2;0\}$

c) $C=\{-3;0;3;6;9\}$.

**Câu 4.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng:

a) $A=\{0;1;2;3;4\}$

b) $B=\{0;4;8;12;16\}$

c) $C=\{-3;9;-27;81\}$

d) $D=\{9;36;81;144\}$

e) $E=\{2;3;5;7;11\}$

f) $F=\{3;6;9;12;15\}$

g) $G=$ Tập hợp các điểm thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB**.**

h) $H=$ Tập hợp các điểm thuộc đường tròn tâm I cho trước và có bán kính bằng 5.

**Lời giải**

a) $A=\{n\in N\mid n<5\}$

b) $B=\{x\in N\mid x\vdots 4, x<20\}$

c) $C=\{x\in Z\mid x=(-3)^n, n\in N, 0<n<5\}$

d) $D=\{x\in Z\mid x=(3n)^2, n\in N, 0<n<5\}$

e) $E=\{x\in N\mid x$ là số nguyên tố nhỏ hơn $12\}$

f) $F=\{x\in N\mid x\vdots 3, 0<x<18\}$

g) $G=\{M\mid MA=MB;$ A và B là các điểm cho trước $\}$

h) $H=\{M\mid IM=5; I$ là điểm cho trước $\}$.

**Câu 5.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

a) Tập hợp các số chính phương.

b) Tập hợp các ước chung của 36 và 120.

c) Tập hợp các bội chung của 8 và 15.

**Lời giải**

a) $\{0;1;4;9;16;25;36;49;...\}$

b) $\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm6;\pm12\}$

c) $\{0;\pm120;\pm240;\pm360;...\}$.

**Câu 6.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng:

a) $A=\{1;4;7;10\}$

b) $B=\left\{\frac{2}{3};\frac{3}{8};\frac{4}{15};\frac{5}{24};\frac{6}{35}\right\}$.

**Lời giải**

a) $A=\{x\,|\,x=3n+1;n\in N\}$

b) $B=\left\{\frac{n}{n^2-1}\,|\,n\in N,2\le n\le 6\right\}$.

**Câu 7.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng:

a) $A=\{0;3;8;15;24;35\}$

b) $B=\{-4;1;6;11;16\}$

c) $C=\{1;-2;7\}$.

**Lời giải**

a) Nhận xét rằng với mỗi số thuộc tập A cộng thêm 1 đều là số chính phương. Ta có thể viết thêm

$A=\{n^2-1\,|\,n\in N,1\le n\le 6\}$

b) $B=\{5n-4\,|\,n\in N\}$

c) Ta có thể xem 1;-2;7 là nghiệm của phương trình (x-1)(x+2)(x-7)=0 nên

$C=\{x\in R\,|\,(x-1)(x+2)(x-7)=0\}$.

**Câu 8.** Trong các tập hợp sau tập nào là tập rỗng

a) $A=\{x\in Z\,|\,|x|<1\}$

b) $B=\{x\in R\,|\,x^2-x+1=0\}$

c) $C=\{x\in Q\,|\,x^2-4x+2=0\}$

d) $D=\{x\in Q\,|\,x^2-2=0\}$

e) $E=\{x\in N\,|\,x^2+7x+12=0\}$

f) $F=\{x\in R\,|\,x^2-4x+2=0\}$.

**Lời giải**

a) Ta thấy x = 0 là một phần tử của tập A vì $0\in Z$ và $|0|<1$ nên rõ ràng nó không phải là tập rỗng)

b) $x^2-x+1=0$ vô nghiệm nên B là tập rỗng)

c) $x^2-4x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2+\sqrt{2}\\x_2=2-\sqrt{2}\end{array}\right.$

2 nghiệm đều là số vô tỉ nên C là tập rỗng)

d) $x^2-2=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

2 nghiệm đều là số vô tỉ nên D là tập rỗng)

e) Do $x\in N\Rightarrow x^2+7x+12\ge 12>0$ nên phương trình vô nghiệm

E rỗng)

f) $x^2-4x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2+\sqrt{2}\in R\\x_2=2-\sqrt{2}\in R\end{array}\right.$

Vậy F không phải là tập rỗng)

**Câu 9.** Viết lại các tập sau bằng cách liệt kê các phần tử của chúng)

a) $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x<7\}$

b) $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-3<x<5\}$

c) $C=\left\{x\,|\,x=\frac{1}{2^k};k\in\mathbb{N};x\le\frac{1}{16}\right\}$

d) $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^4-6x^2+8=0\}$

e) $E=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x$ là số chính phương nhỏ hơn $100\}$

f) $F=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x$ là ước chung của $64$ và $120\}$

g) $G=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x$ là bội chung của $12$ và $20\}$.

**Lời giải.**

a) $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$. b) $B=\{-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

c) $C=\left\{x\;\middle|\;x=\frac{1}{2^k};k\ge 4\right\}$.

d) $x^4-6x^2+8=0\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow x^2\in\{2;4\}\Leftrightarrow x\in\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2};-2;2\right\}$

$\Rightarrow C=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2};-2;2\right\}$

e) $E=\{0;1;4;9;16;25;64;81\}$ f) $F=\{1;2;3;4;8\}$.

g) Bội chung nhỏ nhất của 12 và 20 là 60 nên $G=\{60k;k\in Z\}$..

**Câu 10.** Liệt kê các phần của tập hợp dưới đây:

a) $A=\left\{\frac{3k-1}{k}\in Z:-5\le k\le 3\right\}$.

**b)** $B=\{x\in Z\,||x|<10\}$.

c) $C=\left\{x\in Z\,\middle|\,3<|x|<\frac{19}{2}\right\}$..

**Lời giải**

a) $A=\left\{\frac{3k-1}{k}\in Z:-5\le k\le 3\right\}=A=\left\{3-\frac{1}{k}\in Z:-5\le k\le 3\right\}\Rightarrow k\in\{-1;1\}\Rightarrow A=\{4;2\}$.

b) $B=\{x\in Z\,||x|<10\}\Rightarrow B=\{-9;-8;...;8;9\}$.

c) $C=\left\{x\in Z\,\middle|\,3<|x|<\frac{19}{2}\right\}\Rightarrow C=\{-9;-8;-7;-6;-5;-4\}$.

**Dạng 2. Tập hợp con, tập bằng nhau**

**Câu 11.** Tìm tất cả các tập con, các tập con gồm hai phần tử của các tập hợp sau:

a) $A=\{1;2\}$

b) $B=\{1;2;3\}$

c) $C=\{a;b;c\}$

d) $D=\left\{x\in R\,|\,2x^2-5x+2=0\right\}$

**Lời giải**

a) Tập A có các tập con gồm 2 phần tử là $\{1;2\}$

b) Tập B có các tập con gồm 2 phần tử là $\{1,2\};\{2,3\};\{1,3\}$

c) Tập C có các tập con gồm 2 phần tử là $\{a;b\};\{a;c\};\{a;d\};\{b;c\};\{b;d\};\{c;d\}$

d) $x^2-4x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Suy ra $D=\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$

Tập con của nó chính là nó vì D chỉ có đúng 2 phần tử.

**Câu 12.** Tìm tất cả các tập hợp con của tập:

a) $A=\{a;b\}$ b) $B=\{1;2;3\}$ c) $C=\varnothing$ *d)* $D=\{a;b;c;d\}$.

**Lời giải**

a) Có bốn tập con: $\varnothing,\{a\},\{b\}$ và $\{a;b\}$.

b) Có tám tập con: $\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1;2\},\{2;3\},\{1;3\},\{1;2;3\}$.

c) Có hai tập con: $\varnothing$ và $\{\varnothing\}$.

d) Có 16 tập con: $\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a;b\},\{a;c\},\{a;d\},\{b;c\},\{b;d\},\{c;d\},$

$\{a;b;c\},\{a;b;d\},\{b;c;d\},\{a;b;c;d\}$.

**Câu 13.** Cho $A=\{1;2;3;4;5\}$. Viết tất cả các tập con của $A$ có ít nhất ba phần tử.

**Lời giải:**

Các tập con có ít nhất ba phầu tử của $A$ là:

$\{1;2;3\},\{1;2;4\},\{1;2;5\},\{1;3;4\},\{1;3;5\},\{1;4;5\},\{2;3;4\},\{2;3;5\},\{2;4;5\},\{3;4;5\},\{1;2;3;4\},$

$\{1;2;3;5\},\{1;2;4;5\},\{1;3;4;5\},\{2;3;4;5\},\{1;2;3;4;5\}$ gồm 16 tập.

**Câu 14.** Cho $A=\{1;2;3;4\}$. Hãy viết tất cả các tập con gồm:

a) Một phần tử b) Hai phần tử c) Ba phần tử.

**Lời giải:**

a) $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$.

b) $\{1;2\},\{1;3\},\{1;4\},\{2;3\},\{2;4\},\{3;4\}$.

c) $\{1;2;3\},\{1;2;4\},\{1;3;4\},\{2;3;4\}$..

**Câu 15.** Trong các tập sau, tập nào là tập con của tập nào?

$A=\{1;2;3\}$ $B=\{x\in\mathbb{N}|x<4\}$

$C=(0;+\infty)$ $D=\{x\in\mathbb{R}|2x^2-7x+3=0\}$.

**Lời giải:**

$A=\{1;2;3\}$, $B=\{0;1;2;3\}$, $C=(0;+\infty)$, $D=\left\{\frac{1}{2};3\right\}$

Do đó: $A\subset B$, $A\subset C$, $D\subset C$..

**Câu 16.** Xác định quan hệ giữa các tập hợp sau.

a) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x-\sqrt{3-2x}=0\right\}$ và $B=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2+2x-3=0\right\}$

b) $A=\left\{x\in N\middle|x^2-2x+1\geq 10\right\}$ và $B=\left\{x\in N\middle|x\geq 2\right\}$.

**Lời giải**

a) Ta có $x=\sqrt{3-2x}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\x^2+2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\x\in\{-3;1\}\end{cases}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow A=\{1\}$.

Mặt khác, $x^2+2x-3=0\Leftrightarrow x\in\{-3;1\}\Rightarrow B=\{-3;1\}$. Vậy $A\subset B$.

b) Ta có $\begin{cases}x\in N\\(x-1)^2\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\geq\sqrt{10}+1>2\Rightarrow B\subset A$..

**Câu 17.** Tìm các tập $X$ thỏa mãn $\{1;2;3\}\subset X\subset\{1;2;3;4;5;6\}$.

**Lời giải**.

Ta có $X=\{1;2;3;4;5\}\vee X=\{1;2;3;4\}$..

**Câu 18.** Tìm tất cả các tập hợp $X$ sao cho: $\{1,2\}\subset X\subset\{1,2,3,4,5\}$.

**Lời giải**

$X=\{1,2,3\}$ hoặc $X=\{1,2,4\}$ hoặc $X=\{1,2,3,4\}$.

**Câu 19.** Tìm tất cả các tập hợp $X$ sao cho: $X\subset\{1,2,3,4\}$.

**Lời giải**

$X$ có thể là các tập hợp: $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$.

**Câu 20.** Tìm tất cả các tập hợp $X$ sao cho: $\{1;2\}\subset X\subset\{1;2;3;4;5;6\}$.

**Lời giải:**

Tập hợp $X$ phải chứa các phần tử $1;2$; ngoài ra có thể chứa thêm một số phần tử còn lại là $3;4;5$; tức là là tập hợp giao của 2 tập $A=\{1;2\}$ và tập $B$, với $B$ là tập con của tập $\{3;4;5\}$.

Vậy các tập $X$ cần tìm là: $\{1;2\},\{1;2;3\},\{1;2;4\},\{1;2;5\},\{1;2;3;4\},\{1;2;3;5\}$,

$\{1;2;4;5\},\{1;2;3;4;5\}$..

**Câu 21.** Cho $A=\{2,5\}$; $B=\{5,x\}$; $C=\{x,y,5\}$. Tìm các cặp số $(x;y)$ để $A=B=C$.

**Lời giải**

Vì $A=B=C$ nên cả 3 tập hợp A, B, C chỉ chứa 2 phần tử là 2 và 5.

Do đó ta có $\begin{cases}x=2\\\left[\begin{array}{l}y=2\\y=5\end{array}\right.\end{cases}$

**Dạng 3. (Nâng cao) Sơ đồ ven**

**Câu 22.** Cho $A$ là tập hợp các học sinh lớp 10 đang học ở trường em, $B$ là tập hợp học sinh đang học tiếng Anh ở trường em. Hãy diễn đạt bằng lời các tập:

a) $A \cap B$ b) $A \setminus B$

c) $A \cup B$ d) $B \setminus A$.

**Lời giải**

a) $A \cap B$ là tập hợp các học sinh lớp 10 học môn Tiếng Anh của trường em.

b) $A \setminus B$ là tập hợp các học sinh lớp 10 nhưng không học môn tiếng Anh của trường em.

c) $A \cup B$ là tập hợp các học sinh học lớp 10 hoặc học môn tiếng Anh của trường em.

d) $B \setminus A$ là tập hợp các học sinh học môn tiếng Anh nhưng không học lớp 10 của trường em.

**Câu 23.** Kí hiệu $H$ là tập hợp học sinh lớp 10A1, $T$ là tập hợp các học sinh nam và $G$ là tập hợp các học sinh nữ của lớp 10A1. Hãy xác định các tập hợp sau:

a) $T \cup G$. b) $T \cap G$.

c) $H \setminus T$. d) $G \setminus T$. e) $C_T H$.

**Lời giải**

Ta có: $T \cup G = H; T \cap G = \varnothing; H \setminus T = G; G \setminus T = G; C_T H = G.$.

**Câu 24.** Trong một trường THPT, khối 10 có 160 em học sinh tham gia câu lạc bộ Toán, 140 em tham gia câu lạc bộ Tin, 100 em học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ. Hỏi khối 10 có bao nhiêu học sinh?.

**Lời giải**

Gọi $A$ là tập hợp các bạn tham gia câu lạc bộ Toán.

$B$ là tập hợp các bạn tham gia câu lạc bộ Tin như vậy số học sinh của khối 10 là số phần tử của tập hợp $A \cup B = A \setminus B \cup B$ vậy có: $160 + 140 - 100 = 200$ học sinh khối 10.

**Câu 25.** Một lớp có 45 hs, đăng kí chơi ít nhất một trong hai môn thể thao là bóng đá và cầu lông. Có 30 em đăng kí môn bóng đá, 25 em đăng kí môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng kí cả hai môn thể thao?.

**Lời giải**

+) Gọi $A$ là tập hợp các bạn đăng ký môn bong đá, $B$ là tập hợp các bạn đăng kí cầu lông, gọi $x$ là số bạn đăng ký cả hai môn.

+) Tập hợp số học sinh của lớn là: $A \cup B = A \setminus B \cup B$: Ta có: $25 + 30 - x = 45 \Rightarrow x = 10.$

Vậy có 10 bạn đăng ký cả hai môn.

**Câu 26.** Trong 100 học sinh lớp 10 có 70 học sinh nói được tiếng Anh, 45 học sinh nói được tiếng Pháp và 23 học sinh nói được cả hai tiếng Anh và Pháp. Hỏi có bao nhiêu học sinh không nói được hai thứ tiếng?.

**Lời giải**

+) Gọi $A$ là tập hợp số học sinh nói được tiếng Anh, $B$ là tập hợp số học sinh nói được tiếp Pháp

Tập hợp số học sinh nói được cả 2 tiếng là: $A \cap B$ và có 23 học sinh

Vậy có $100 - 23 = 77$ học sinh không nói được cả hai thứ tiếng.

+) Tập hợp số học sinh nói được ít nhất 1 thứ tiếng là: $A \setminus B \cup B$ và có: $40 + 45 - 23 = 92$ học sinh

Vậy số học sinh không nói được tiếng gì là: $100 - 92 = 8$ học sinh không nói **được một trong hai thứ tiếng.**

## Dạng 4. Biểu diễn tập hợp số

**Câu 27.** Xác định các tập hợp $A \cup B; A \cap B$ và biểu diễn trên trục số với

**a.** $A = \{x \in R | x \geq 1\}$ và $B = \{x \in R | x \leq 3\}$.

**b.** $A = \{x \in R | x \leq 1\}$ và $B = \{x \in R | x \geq 3\}$.

**c.** $A = [1;3]$ và $B = (2;+\infty)$.

**Lời giải**

**a.** $A\cup B=R; A\cap B=[1;3]$.

**b.** $A\cup B=(-\infty;1]\cup[3;+\infty); A\cap B=\varnothing$.

**c.** $A\cup B=[1;+\infty); A\cap B=(2;3]$.

## Dạng 5. Các phép toán trên tập hợp

**Câu 28.** Cho các tập hợp: $A=\{a;b;c;d\}$ $B=\{b;d;e\}$ $C=\{a;b;e\}$

Chứng minh:

a) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

b) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

**Lời giải:**

a) $A\cap(B\setminus C)=\{a;b;c;d\}\cap\{d\}=\{d\}$

$(A\cap B)\setminus(A\cap C)=\{b;d\}\cap\{a;b\}=\{d\}$

Vậy $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

b) $A\setminus(B\cap C)=\{a;b;c;d\}\setminus\{b;e\}=\{a;c;d\}$

$(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=\{a;c\}\cup\{c;d\}=\{a;c;d\}$

Vậy $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

**Câu 29.** Chứng minh rằng:

a) Nếu $A\subset B$ thì $A\cap B=A$.

b) Với ba tập $A, B, C$ thì $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$.

**Lời giải:**

a) $x\in A\cap B\Rightarrow x\in A$. Do đó $A\cap B\subset A$.

$x\in A\Rightarrow\begin{cases}x\in A\\ x\in B(\text{do } A\subset B)\end{cases}\Rightarrow x\in A\cap B$. Do đó $A\subset A\cap B$.

Vậy $A\cap B=A$.

b) Giả sử: $x\in A\cap(B\setminus C)\Rightarrow\begin{cases}x\in A\\ x\in B\setminus C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in A\\ x\in B\\ x\notin C\end{cases}\Rightarrow x\in(A\cap B)\setminus C$.

Do đó $A\cap(B\setminus C)\subset(A\cap B)\setminus C$. (1)

Ngược lại, giả sử: $x\in(A\cap B)\setminus C\Rightarrow\begin{cases}x\in A\cap B\\ x\notin C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in A\\ x\in B\\ x\notin C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in A\\ x\in B\setminus C\end{cases}\Rightarrow x\in A\cap(B\setminus C)$

Do đó: $(A\cap B)\setminus C\subset A\cap(B\setminus C)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $A\cap\left(B\setminus C\right)=\left(A\cap B\right)\setminus C$.

**Câu 30.** Cho $X=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|2<x<12\right\}$.

Xác định $A\subset X;B\subset X$ sao cho: $\begin{cases}A\cap B=\{6;8;11\} & (1)\\ A\cup\{5;6;7\}=\{3;5;6;7;8;10;11\} & (2)\\ \{4;5;6;7;8;9;10;11\}=B\cup\{6;10\} & (3)\end{cases}$.

**Lời giải:**

Từ (1) và (2) suy ra: $\{3;6;8;10;11\}\subset A$

Từ (1) và (3) suy ra: $\{4;5;6;7;8;9;10;11\}\subset B$

Vậy $A=\{3;6;8;10;11\}$; $B=\{4;5;6;7;8;9;10;11\}$.

**Câu 31.** Cho $A=\{0;1;2;3;4\},B=\{2;3;4;5;6\}$.

a) Tìm các tập $A\setminus B,B\setminus A,A\cup B,A\cap B.$

b) Tìm các tập $\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right),\left(A\setminus B\right)\cap\left(B\setminus A\right)..$

**Lời giải**

a) $A\setminus B=\{0;1\}$; $B\setminus A=\{5;6\}$; $A\cup B=\{0;1;2;3;4;5;6\}$; $A\cap B=\{2;3;4\}$

b) $\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right)=\{0;1;5;6\}$; $\left(A\setminus B\right)\cap\left(B\setminus A\right)=\varnothing$.

**Câu 32.** Cho hai tập hợp A và B dưới đây. Viết tập $A\cap B,A\cup B$ bằng hai cách:

a) $A=\{x\,|\,x$ là ước nguyên dương của $12\}$ $B=\{x\,|\,x$ là ước nguyên dương của $18\}$

b) $A=\{x\,|\,x$ là bội nguyên dương của $6\}$ $B=\{x\,|\,x$ là ước nguyên dương của $15\}$.

**Lời giải**

a) $A\cap B=\{x\,|\,x$ là ước nguyên dương của $6\}=\{1;2;3;6\}$

$A\cup B=\{x\,|\,x$ là ước nguyên dương của 12 hoặc $18\}=\{1;2;3;4;6;9;12;18\}$

b) $A\cap B=\{x\,|\,x$ là bội nguyên dương của $30\}=\{30;60;90;...30n;...\}$

$A\cup B=\{x\,|\,x$ là bội nguyên dương của 6 hoặc $18\}=\{6;12;15;18;24;30;...\}$.

**Câu 33.** Cho các tập hợp: $A=\{1;2;3;4\}$, $C=\{3;4;5;6\}$

Tìm: $A\cup B,A\cup C,B\cup C,A\cap B,A\cap C,B\cap C,(A\cup B)\cap C,A\cup(B\cup C)..$

**Lời giải**

Ta có: $A\cup B=\{1;\ 2;3;\ 4;\ 6;8\}$ $A\cup C=\{1;\ 2;3;\ 4;5;\ 6\}$ $B\cup C=\{2;3;\ 4;5;\ 6;8\}$

$A\cap B=\{2;\ 4\}$ $A\cap C=\{3;\ 4\}$ $B\cap C=\{4;\ 6\}$

$(A\cup B)\cap C=\{3;\ 4;\ 6\}$ $A\cup(B\cup C)=\{1;\ 2;3;\ 4;\ 6\}$

**Câu 34.** Cho tập hợp A các ước số tự nhiên của 18 và tập hợp B các ước số tự nhiên của 30. Xác định $A,B,A\cup B,A\cap B,A\setminus B,B\setminus A..$

**Lời giải**

Ta có:

$A=\{1;2;3;6;9;18\}$ *và* $B=\{1;2;3;5;6;10;15;30\}$ nên:

$A\cap B=\{1;2;3;6\}$; $A\cup B=\{1;2;3;5;6;9;10;15;18;30\}$; $A\setminus B=\{9;18\}$; $B\setminus A=\{5;10;15;30\}..$

**Câu 35.** Cho $A$ là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10. $B=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n\le 6\}$ $C=\{n\in\mathbb{N}\,|\,4\le n\le 10\}$

Tìm: a) $A\cap(B\cup C)$ b) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

**Lời giải**

Ta có: $A=\{2;4;6;8;10\}$, $B=\{0;1;2;3;5;6\}$, $C=\{4;5;6;7;8;9;10\}$

*a/* $B\cup C=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ nên $A\cap(B\cup C)=\{2;4;6;8;10\}=A$

*b/* $A\setminus B=\{8;10\}$, $A\setminus C=\{2\}$, $B\setminus C=\{0;1;2;3\}$

nên $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)\cup(B\setminus C)=\{0;1;2;3;8;10\}$.

**Câu 36.** Cho $A$ là tập hợp các số nguyên lẻ, $B$ là tập hợp các bội của 3, $C$ là tập hợp các bội của 6. Xác định $A\cap B, B\cap C, C\setminus B$.

$A\cap B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x$ lẻ và $x$ là bội của $3\}=\{3(2k-1)\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$

$B\cap C=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x$ là bội của 3 hoặc $x$ là bội của $6\}=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x$ là bội của $3\}=B$.

$C\setminus B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x$ là bội của 6 và $x$ không là bội của $3\}=\varnothing$..

**Câu 37.** Cho $A=\{2,4,7,8,9,12\}, B=\{2,8,9,12\}$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Lời giải**

$A\cap B=\{2,8,9,12\}$; $A\cup B=\{2,4,7,8,9,12\}$; $A\setminus B=\{4,7\}$; $B\setminus A=\varnothing$.

**Câu 38.** Cho $A=\{2,4,6,9\}, B=\{1,2,3,4\}$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Lời giải**

$A\cap B=\{2,4\}$; $A\cup B=\{1,2,3,4,6,9\}$; $A\setminus B=\{6,9\}$; $B\setminus A=\{1,3\}$.

**Câu 39.** Cho $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2x^2-3x+1=0\}, B=\{x\in\mathbb{R}\,||2x-1|=1\}$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Lời giải**

Ta có: $2x^2-3x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow A=\left\{1,\dfrac{1}{2}\right\}$ và $|2x-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow B=\{0,1\}$.

Vậy $A\cap B=\{1\}$; $A\cup B=\left\{0,\dfrac{1}{2},1\right\}$; $A\setminus B=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$; $B\setminus A=\{0\}$.

**Câu 40.** Cho $A=$ tập các ước số của 12; $B=$ Tập các ước số của 18. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Lời giải**

Ta có $A=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12\}$, $B=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18\}$.

Suy ra $A\cap B=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$, $A\cup B=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm9,\pm12,\pm18\}$

$A\setminus B=\{\pm4,\pm12\}$, $B\cap A=\{\pm9,\pm18\}$.

**Câu 41.** Cho $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x+1)(x-2)(x^2-8x+15)=0\}, B=$ Tập các số nguyên tố có một chữ số. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Lời giải**

Ta có: $(x+1)(x-2)(x^2-8x+15)=0\Leftrightarrow(x+1)(x-2)(x-3)(x-5)=0\Leftrightarrow x=\{-1,2,3,5\}$.

Suy ra $A=\{-1,2,3,5\}$ và $B=\{2,3,5,7\}$.

Vậy $A\cap B=\{2,3,5\}$, $A\cup B=\{-1,2,3,5,7\}$, $A\setminus B=\{-1\}$, $B\setminus A=\{7\}$.

**Câu 42.** Cho $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x^2<4\right\}, B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\left(5x-3x^2\right)\left(x^2-2x-3\right)=0\right\}$.

Tìm $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

**Lời giải**

Ta có: $x\in\mathbb{Z},\ x^2<4\Leftrightarrow x\in\{\pm1\}\Rightarrow A=\{\pm1\}$.

$\left(5x-3x^2\right)\left(x^2-2x-3\right)=0\Leftrightarrow x(5-3x)(x+1)(x-3)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-1,0,\frac{5}{3},3\right\}\Rightarrow B=\left\{-1,0,\frac{5}{3},3\right\}$

Vậy $A\cap B=\{-1\}$, $A\cup B=\left\{-1,0,1,\frac{5}{3},3\right\}$, $A\setminus B=\{1\}$, $B\setminus A=\left\{0,\frac{5}{3},3\right\}$.

**Câu 43.** Cho $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\left(x^2-9\right)\left(x^2-5x-6\right)=0\right\}, B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x$ là số nguyên tố nhỏ hơn $5\}$. Tìm $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

**Lời giải**

Ta có: $\left(x^2-9\right)\left(x^2-5x-6\right)=0\Leftrightarrow(x-3)(x+3)(x+1)(x-6)=0\Leftrightarrow x\in\{-3,-1,3,6\}$.

Suy ra $A=\{-3,-1,3,6\}$ và $B=\{2,3\}$.

Vậy $A\cap B=\{3\}$, $A\cup B=\{2,3,6\}$, $A\setminus B=\{6\}$, $B\setminus A=\{2\}$.

**Câu 44.** Tìm các tập hợp $A,\ B$ sao cho: $A\cap B=\{0,1,2,3,4\}$, $A\setminus B=\{-3,-2\}$, $B\setminus A=\{6,9,10\}$.

**Lời giải**

Ta có: $\begin{cases}A\cap B=\{0,1,2,3,4\}\Rightarrow\{0,1,2,3,4\}\subset A\\ A\setminus B=\{-3,-2\}\Rightarrow\{-3,-2\}\subset A\end{cases}\Rightarrow A=\{-3,-2,0,1,2,3,4\}$.

Tương tự $\begin{cases}A\cap B=\{0,1,2,3,4\}\Rightarrow\{0,1,2,3,4\}\subset B\\ B\setminus A=\{6,9,10\}\Rightarrow\{6,9,10\}\subset B\end{cases}\Rightarrow B=\{0,1,2,3,4,6,9,10\}$.

**Câu 45.** Tìm các tập hợp $A,\ B$ sao cho: $A\cap B=\{1,2,3\}$, $A\setminus B=\{4,5\}$, $B\setminus A=\{6,9\}$.

**Lời giải**

Ta có: $\begin{cases}A\cap B=\{1,2,3\}\Rightarrow\{1,2,3\}\subset A\\ A\setminus B=\{4,5\}\Rightarrow\{4,5\}\subset A\end{cases}\Rightarrow A=\{1,2,3,4,5\}$.

Tương tự $\begin{cases}A\cap B=\{1,2,3\}\Rightarrow\{1,2,3\}\subset B\\ B\setminus A=\{6,9\}\Rightarrow\{6,9\}\subset B\end{cases}\Rightarrow B=\{1,2,3,6,9\}$.

**Câu 46.** Cho tập hợp $A=\{a,b,c,d\}; B=\{b;d;e\};\ C=\{a;b;c\}$. Chứng minh các hệ thức:

a) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

b) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

**Lời giải**

a) Ta có $B\setminus C=\{d;e\}\Rightarrow A\cap(B\setminus C)=\{d\}$

$A\cap B=\{b;d\}, A\cap C=\{a;b;c\}\Rightarrow(A\cap B)\setminus(A\cap C)=\{d\}$

Vậy $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

b) $B\cap C=\{b\}\Rightarrow A\setminus(B\cap C)=\{a;c;d\}$

$A\setminus C=\{d\}, A\setminus B=\{a;c\}\Rightarrow(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=\{a;c;d\}$

Vậy $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

**Câu 47.** Cho tập hợp $A=\{1,2,3,4,5\}$ và $B=\{1,3,5,7,9,11\}$. Hãy tìm tập hợp $C$ thỏa mãn:

a) $C=A\cup B$ b) $C=A\cap B$

c) $C=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ d) $C=(A\setminus B)\cup(B\setminus \mathrm{A})$.

**Lời giải**

a) Ta có $C=A\cup B=\{1;2;3;4;5;7;9;11\}$

b) Ta có $C=A\cap B=\{1;3;5\}$

c) Ta có $A\cup B=\{1;2;3;4;5;7;9;11\}$, $A\cap B=\{1;3;5\}\Rightarrow C=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=\{2;4;7;9;11\}$

d) Ta có $A\setminus B=\{2;4\};B\setminus A=\{7;9;11\}\Rightarrow C=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\{2;4;7;9;11\}$.

**Câu 48.** Chứng minh rằng:

a)Nếu $A\subset B$ thì $A\cap B=A$.

b) Nếu $A\subset C$ và $B\subset C$ thì $A\cup B\subset C$.

c)Nếu $A\cup B=A\cap B$ thì $A=B$. d) Nếu $A\subset B$ và $A\subset C$ thì $A\subset B\cap C$.

**Lời giải**

a)Nếu $A\subset B$ thì $A\cap B=A$

Thật vậy:

Xét với mọi $x\in A$ thì $x\in B$ ( do $A\subset B$ ) nên $x\in A\cap B\Rightarrow A\subset A\cap B\ (1)$.

Hơn nữa với mọi $x\in A\cap B\Rightarrow x\in A$ hay $A\cap B\subset A\ (2)$.

Từ $(1);(2)$ ta suy ra $A\cap B=A$.

b) Xét với mọi $x\in A\cup B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\in A\xrightarrow{A\subset C}x\in C\\ x\in B\xrightarrow{B\subset C}x\in C\end{bmatrix}\Rightarrow x\in C\Rightarrow A\cup B\subset C$.

c) Vì $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)$ mà $A\cup B=A\cap B$ thì $A=B$ nên $\begin{cases}A\setminus B=\varnothing\Rightarrow A\subset B\\ B\setminus A=\varnothing\Rightarrow B\subset A\end{cases}\Rightarrow A=B$.

d) Do $A\subset B$ và $A\subset C$ nên với mọi $x\in A\Rightarrow\begin{cases}x\in B\\ x\in C\end{cases}\Rightarrow x\in B\cap C\Rightarrow A\subset(B\cap C)$.

**Câu 49.** Cho $A=\{x\in R:x^2-x-6=0\};B=\{n\in N:2n-6\le 0\};C=\{n\in N:|n|\le 4\}$. Tìm

$A\cap B;A\cap C;B\cup C$..

**Lời giải**

Ta có: $\begin{cases}A=\{-2;3\}\\ B=\{0;1;2;3\}\\ C=\{0;1;2;3;4\}\end{cases}\Rightarrow A\cap B=\{3\};A\cap C=\{3\};B\cup C=\{0;1;2;3;4\}$..

**Câu 50.** Cho $A=\{1;2;3;4\};B=\{2;4;6\};C=\{1;3;5\}$. Xác định các tập hợp sau:

a) $A\cap B;A\cup B.$

b) $A\cap C;A\cup C.$

c) $B\cap C;B\cup C.$

**Lời giải**

a) $A\cap B=\{2;4\}; A\cup B=\{1;2;3;4;6\}$.

b) $A\cap C=\{1;3\}; A\cup C=\{1;2;3;5\}$.

c) $B\cap C=\varnothing; B\cup C=\{1;2;3;4;5;6\}$.

**Câu 51.** Cho $E=\{a,b,c,d\}; F=\{b,c,e,g\}; G=\{c,d,e,f\}$. Chứng minh rằng:

$E\cap(F\cup G)=(E\cap F)\cup(E\cap G)$.

**Lời giải**

Ta có: $\begin{cases}F\cup G=\{b,c,d,e,f,g\}\Rightarrow E\cup(F\cup G)=\{b,c,d\}\\ E\cap F=\{b,c\}; E\cap G=\{c;d\}\Rightarrow(E\cap F)\cup(E\cap G)=\{b,c,d\}\end{cases}$

$\Rightarrow E\cap(F\cup G)=(E\cap F)\cup(E\cap G)$.

**Câu 52.** Cho $A=\{a,e,i,o\}; E=\{a,b,c,d,i,e,o,f\}$. Tính $C_E A$.

**Lời giải**

Ta có: $C_E A=E\setminus A=\{b;c;d;f\}$..

**Câu 53.** Cho $E=\{x\in N\,|\,x\le 8\}; A=\{1,3,5,7\}; B=\{1;2;3;6\}$.

a) Tính $C_E A; C_E B; C_E A\cap C_E B$.

b) Chứng minh $C_E(A\cup B)\subset C_E(A\cap B)$..

**Lời giải**

a) Ta có: $C_E A=\{0;2;4;6;8\}; C_E B=\{0;4;5;7;8\}\Rightarrow C_E A\cap C_E B=\{4;8\}$.

b) $\begin{cases}A\cup B=\{1;2;3;5;6;7\}\Rightarrow C_E(A\cup B)=E\setminus\{1;2;3;5;6;7\}\\ A\cap B=\{3\}\Rightarrow C_E(A\cap B)=E\setminus\{3\}\end{cases}\Rightarrow C_E(A\cup B)\subset C_E(A\cap B)$..

**Câu 54.** Cho các tập hợp sau:

$E=\{x\in Z\,|\,|x|\le 5\}; A=\{x\in R\,|\,x^2+3x-4=0\}; B=\{x\in Z\,|\,(x-2)(x+1)(2x^2-x-3)=0\}$.

a) Chứng minh $A\subset E; B\subset E$.

b) Tìm $C_E(A\cap B), C_E(A\cup B)$ rồi tìm mối quan hệ của hai tập này.

c) Chứng minh $C_E(A\cup B)\subset C_E A$..

**Lời giải**

**a)** Ta có: $\begin{cases}E=\{x\in Z\,|\,|x|\le 5\}\\ A=\{x\in R\,|\,x^2+3x-4=0\}\\ B=\{x\in Z\,|\,(x-2)(x+1)(2x^2-x-3)=0\}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}E=\{-5;-4;...;4;5\}\\ A=\{-4;1\}\\ B=\{-1;1\}\end{cases}\Rightarrow A\subset E; B\subset E.$

**b)** Ta có: $\begin{cases} A\cap B=\{1\}\Rightarrow C_E\left(A\cap B\right)=E\setminus\{1\} \\ A\cup B=\{-4;-1;1\}\Rightarrow C_E\left(A\cup B\right)=E\setminus\{-4;-1;1\} \end{cases}\Rightarrow C_E\left(A\cup B\right)\subset C_E\left(A\cap B\right).$

**c)** Ta có $C_EA=E\setminus A\Rightarrow C_E\left(A\cup B\right)\subset C_EA.$

**Câu 55.** Xác định tập hợp:

$A=(-3;5]\cup[8;10]\cup[2;8)$;

$B=[0;2]\cup(-\infty;5]\cup(1;+\infty)$;

$C=[-4;7]\cup(0;10)$;

$D=(-\infty;3]\cup(-5;+\infty)$;

$E=(3;+\infty)\setminus(-\infty;1]$;

$F=(1;3]\setminus[0;4).$

**Lời giải:**

Dùng định nghĩa các phép toán ta có:

$A=(-3;10]$ $B=(-\infty;+\infty)=\mathbb{R}$ $C=(0;7]$

$D=(-5;3]$ $E=(3;+\infty)$ $F=\varnothing.$

**Câu 56.** Xác định các tập hợp sau:

a) $(-3;6)\cap\mathbb{Z}$; b) $(1;2)\cap\mathbb{Z}$; c) $(1;2]\cap\mathbb{Z}$; d) $[-3;5)\cap\mathbb{N}.$

**Lời giải:**

Dùng định nghĩa giao các tập hợp, ta có:

a) $\{-2;-1;0;1;2;3;4;5;6\}$

b) $\varnothing$

c) $\{2\}$

d) $\{0;1;2;3;4\}$.

**Câu 57.** Cho $A=[-4;4],B=[1;7]$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Lời giải**

$A\cap B=[-1;4]$, $A\cup B=[-4;7]$, $A\setminus B=[-4;1)$, $B\setminus A=(4;7]$.

**Câu 58.** Cho $A=[-4;-2]$, $B=(3;7]$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Lời giải**

$A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=[-4;7]\setminus(-2;3]$, $A\setminus B=[-4;-2]$, $B\setminus A=(3;7]$.

**Câu 59.** Cho $A=[-4;-2]$, $B=(3;7)$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Lời giải**

$A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=[-4;7]\setminus(-2;3]$, $A\setminus B=[-4;-2]$, $B\setminus A=(3;7]$.

**Câu 60.** Cho $A=(-\infty;-2]$, $B=[3;+\infty)$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Lời giải**

$A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\mathbb{R}\setminus(-2;3)$, $A\setminus B=(-\infty;-2]$, $B\setminus A=[3;+\infty)$.

**Câu 61.** Cho $A=[3;+\infty)$, $B=(0;4)$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Lời giải**

$A\cap B=[3;4)$, $A\cup B=[0;+\infty)$, $A\setminus B=[4;+\infty)$, $B\setminus A=(0;3)$.

**Câu 62.** Cho $A=(1;4)$, $B=(2;6)$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

**Lời giải**

$A\cap B=(2;4)$, $A\cup B=(1;6)$, $A\setminus B=(1;2]$, $B\setminus A=(2;4]$.

**Câu 63.** Cho $A=[1;4]$, $B=(2;6)$, $C=(1;2)$. Tìm $A\cup B\cup C$, $A\cap B\cap C$.

**Lời giải**

$A\cup B\cup C=[1;6)$, $A\cap B\cap C=\varnothing$

**Câu 64.** Cho $A=[0;4]$, $B=(1;5)$, $C=(-3;1]$. Tìm $A\cup B\cup C$, $A\cap B\cap C$.

**Lời giải**

$A\cup B\cup C=[0;5)$, $A\cap B\cap C=\{1\}$

**Câu 65.** Cho $A=(-\infty;2]$, $B=[2;+\infty)$, $C=(0;3)$. Tìm $A\cup B\cup C$, $A\cap B\cap C$.

**Lời giải**

$A\cup B\cup C=\mathbb{R}$, $A\cap B\cap C=\{2\}$

**Câu 66.** Cho $A=(-5;1]$, $B=[3;+\infty)$, $C=(-\infty;-2)$. Tìm $A\cup B\cup C$, $A\cap B\cap C$.

**Lời giải**

$A\cup B\cup C=\mathbb{R}\setminus(1;3)$, $A\cap B\cap C=\varnothing$

**Câu 67.** Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}/-3\le x\le 2\}, B=\{x\in\mathbb{R}/0<x<7\}; C=\{x\in\mathbb{R}/x<-1\}$ và $D=\{x\in\mathbb{R}\setminus x\ge 5\}$.

a) Dùng kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết lại các tập hợp trên.

b) Biểu diễn các tập hợp $A,B,C$ và $D$ trên trục số. Chỉ rõ nó thuộc phần nào trên trục số.

**Lời giải**

a) $A=[-3;2], B=(0;7), C=(-\infty;-1), D=(5;+\infty)$.

b) Học sinh tự biểu diễn.

**Câu 68.** Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}|-1<x\le 5\}$ và $B=\{x\in\mathbb{R}|0\le x<7\}$. Hãy tìm tập hợp $C$ thỏa mãn:

a) $C=A\cup B$

b) $C=A\cap B$

c) $C=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

d) $C=(A\setminus B)\cup(B\setminus \mathrm{A})$

**Lời giải**

a) Ta có $C=A\cup B=\{x\in\mathbb{R}|-1<x<7\}$

b) Ta có $C = A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 5\}$

c) Ta có $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 7\}$,

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 5\}$

$\Rightarrow C = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = C = A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0$ hoặc $5 < x < 7\}$

d) Ta có $A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0\}; B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} | 5 < x < 7\}$

$\Rightarrow C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0$ hoặc $5 < x < 7\}$

**Câu 69.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \le 3\}$ và $C = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 4\}$. Hãy tìm tập hợp $D$ thỏa mãn:

a) $D = (A \cup B) \cup C$

b) $D = (A \cup B) \cap C$

c) $D = (A \cap B) \cap C$

d) $D = (A \cap B) \cup C$

e) $D = (A \cap B) \setminus C$

f) $D = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

g) $D = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$

h) $D = (B \setminus A) \setminus C$

i) $D = (B \setminus A) \cup C$

j) $D = (B \cup C) \setminus A$

**Lời giải**

a) Ta có $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \le 3\}; D = (A \cup B) \cup C = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \le 4\}$

b) Ta có $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \le 3\}; D = (A \cup B) \cap C = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \le 3\}$

c) Ta có $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 3\}; D = (A \cap B) \cap C = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 3\}$

d) Ta có $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 3\}; D = (A \cap B) \cup C = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \le 4\}$

e) Ta có $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 3\}; D = (A \cap B) \setminus C = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \le 0\}$

f) Ta có $A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \le -2\}; A \setminus C = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \le 0\}$

g) Ta có $B \setminus A = \{3\}; C \setminus A = \{x \in \mathbb{R} | 3 \le x \le 4\}$ nên $D = (B \setminus A) \cup (C \setminus A) = C \setminus A = \{x \in \mathbb{R} | 3 \le x \le 4\}$

h) Ta có $B \setminus A = \{3\}$ nên $D = (B \setminus A) \setminus C = \varnothing$

i) Theo h) thì $D = (B \setminus A) \cup C = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 4\}$

j) Ta có $B \cap C = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \le 4\}$ nên $D = (B \cup C) \setminus A = \{x \in \mathbb{R} | 3 \le x \le 4\}$

**Dạng 6. (Nâng cao) Các bài toán tìm điều kiện của tham số**

**Câu 70.** Có thể kết luận gì về số $a$ biết:

a) $(-1;3) \cap (a;+\infty) = \varnothing$

b) $(5;a) \cap (2;8) = (2;8)$

c) $[3;12) \setminus (-\infty;a) = \varnothing$

**Lời giải:**

Theo đề bài thì ta có kết quả

a) $a \geq 3$

b) $5 < a \leq 8$

c) $a \geq 12$

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Xác định tập hợp

**Câu 1.** Ký hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề: "3 là một số tự nhiên"?

**A.** $3 \subset \mathbb{N}$. **B.** $3 \in \mathbb{N}$. **C.** $3 < \mathbb{N}$. **D.** $3 \le \mathbb{N}$.

**Lời giải**

- Đáp án A sai vì kí hiệu "$\subset$" chỉ dùng cho hai tập hợp mà ở đây "3" là một số
- Hai đáp án C và D đều sai vì ta không muốn so sánh một số với tập hợp.

**Đáp án B.**

**Câu 2.** Ký hiệu nào sau đây để chỉ $\sqrt{5}$ không phải là một số hữu tỉ?

**A.** $\sqrt{5} \ne \mathbb{Q}$. **B.** $\sqrt{5} \not\subset \mathbb{Q}$. **C.** $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. **D.** $\sqrt{5} \subset \mathbb{Q}$.

**Lời giải**

Vì $\sqrt{5}$ chỉ là một phần tử còn $\mathbb{Q}$ là một tập hợp nên các đáp án A, B, D đều sai.

**Đáp án C.**

**Câu 3.** Cho tập hợp $A = \{x+1 \mid x \in \mathbb{N}, x \le 5\}$. Tập hợp $A$ là:

**A.** $A = \{1;2;3;4;5\}$. **B.** $A = \{0;1;2;3;4;5;6\}$.

**C.** $A = \{0;1;2;3;4;5\}$. **D.** $A = \{1;2;3;4;5;6\}$.

**Lời giải**

Vì $x \in \mathbb{N}, x \le 5$ nên $x \in \{0;1;2;3;4;5\} \Rightarrow x+1 = \{1;2;3;4;5;6\}$.

**Đáp án D.**

**Câu 4.** Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$.

**A.** $X = \{0\}$. **B.** $X = \{1\}$. **C.** $X = \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$. **D.** $X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$.

**Lời giải**

Vì phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ nhưng vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Vậy $X = \{1\}$.

**Đáp án B.**

**Câu 5.** Liệt kê các phần tử của phần tử tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$.

**A.** $X = \{0\}$. **B.** $X = \{1\}$. **C.** $X = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. **D.** $X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$.

**Lời giải**

Vì phương trình $2x^2-5x+3=0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\in\mathbb{R}$ nên $X=\left\{1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

**Đáp án D.**

**Câu 6.** Trong các tập sau, tập nào là tập rỗng?

**A.** $\left\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|x|<1\right\}$. **B.** $\left\{x\in\mathbb{Z}\,|\,6x^2-7x+1=0\right\}$.

**C.** $\left\{x\in\mathbb{Q}:x^2-4x+2=0\right\}$. **D.** $\left\{x\in\mathbb{R}:x^2-4x=3=0\right\}$.

**Lời giải**

Xét các đáp án:

- Đáp án A: $x\in\mathbb{Z},|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1\Rightarrow x=0$.

- Đáp án B: Giải phương trình: $6x^2-7x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{1}{6}\end{array}\right.$. Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=1$.

- Đáp án C: $x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{2}$. Vì $x\in\mathbb{Q}\Rightarrow$ Đây là tập rỗng.

**Đáp án C.**

**Câu 7.** Cho tập hợp $M=\left\{(x;y)\,|\,x;y\in\mathbb{N},x+y=1\right\}$. Hỏi tập $M$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

Vì $x;y\in\mathbb{N}$ nên $x$, $y$ thuộc vào tập $\{0;1;2;...\}$

Vậy cặp $(x;y)$ là $(1;0),(0;1)$ thỏa mãn $x+y=1\Rightarrow$ Có 2 cặp hay $M$ có 2 phần tử.

**Đáp án C.**

**Câu 8.** Cho tập hợp $A=\left\{x^2+1\,\backslash\,x\in\mathbb{N},x\le 5\right\}$. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp#$A$.

**A.** $A=\{0;1;2;3;4;5\}$. **B.** $A=\{1;2;5;10;17;26\}$.

**C.** $A=\{2;5;10;17;26\}$. **D.** $A=\{0;1;4;9;16;25\}$.

**Lời giải**

**Đáp án B.**

Ta có $A=\left\{x^2+1\,\backslash\,x\in\mathbb{N},x\le 5\right\}$.

Vì $x\in\mathbb{N},x\le 5$ nên $x\in\{0;1;2;3;4;5\}$

$\Rightarrow x^2+1\in\{1;2;5;10;17;26\}$.

**Câu 9.** Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp: $X=\left\{x\in\mathbb{R}\,\backslash\,x^4-6x^2+8=0\right\}$.

**A.** $X=\{2;4\}$. **B.** $X=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$. **C.** $X=\left\{\sqrt{2};2\right\}$ **D.** $X=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2};-2;2\right\}$.

**Lời giải**

**Đáp án D.**

Giải phương trình $x^4-6x^2+8=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=2\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{2}\\x=\pm 2\end{array}\right.$.

**Câu 10.** Cho tập hợp $M=\{(x;y)\setminus x,y\in\mathbb{R},x^2+y^2\le 0\}$. Khi đó tập hợp $M$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Đáp án B.**

Vì $\begin{cases}x^2\ge 0\\ y^2\ge 0\end{cases}$

nên $x^2+y^2\le 0\Leftrightarrow x=y=0$.

Khi đó tập hợp $M$ có 1 phần tử duy nhất là $\{(0;0)\}$.

**Câu 11.** Số phần tử của tập hợp: $A=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\left(x^2+x\right)^2=x^2-2x+1\right\}$ là:

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

**Đáp án D.**

Giải phương trình $\left(x^2+x\right)^2=x^2-2x+1$ trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow\left(x^2+x\right)^2-\left(x-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2+x-x+1\right)\left(x^2+x+x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{2}\\ x=-1+\sqrt{2}\end{array}\right.$.

**Câu 12.** Số phần tử của tập hợp:
$A=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\left(2x^2+x-4\right)^2=4x^2-4x+1\right\}$ là:

**A.** 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Giải phương trình

$\left(2x^2+x-4\right)^2=4x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow\left(2x^2+x-4\right)^2=\left(2x-1\right)^2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2+x-4=2x-1\\ 2x^2+x-4=-2x+1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-x-3=0\\ 2x^2+3x-5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{3}{2}\\ x=1\\ x=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

Vậy $A$ có 4 phần tử.

**Câu 13.** Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2+x+1=0\right\}$:

**A.** $X=0$. **B.** $X=\{0\}$. **C.** $X=\varnothing$. **D.** $X=\{\varnothing\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình $x^2+x+1=0$ vô nghiệm nên $X=\varnothing$.

**Câu 14.** Số phần tử của tập hợp $A=\left\{k^2+1/\,k\in\mathbb{Z},|k|\le 2\right\}$ là:

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$A=\left\{k^2+1\middle|k\in\mathbb{Z},|k|\le 2\right\}$. Ta có $k\in\mathbb{Z},|k|\le 2\Leftrightarrow -2\le k\le 2\Rightarrow A=\{1;2;5\}$..

**Câu 15.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng:

**A.** $\left\{\mathrm{x}\in\mathbb{Z}\middle\|\mathrm{x}|<1\right\}$. **B.** $\left\{\mathrm{x}\in\mathbb{Z}\middle|6x^2-7x+1=0\right\}$.

**C.** $\left\{\mathrm{x}\in\mathbb{Q}\middle|\mathrm{x}^2-4x+2=0\right\}$. **D.** $\left\{\mathrm{x}\in\mathbb{R}\middle|x^2-4x+3=0\right\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$A=\left\{\mathrm{x}\in\mathbb{Z}\middle\|\mathrm{x}|<1\right\}\Rightarrow A=\{0\}$.

$B=\left\{\mathrm{x}\in\mathbb{Z}\middle|6x^2-7x+1=0\right\}$. Ta có $6x^2-7x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{1}{6}\notin\mathbb{Z}\end{array}\right.\Rightarrow B=\{1\}$.

$C=\left\{\mathrm{x}\in\mathbb{Q}\middle|\mathrm{x}^2-4x+2=0\right\}$. Ta có $x^2-4x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\\x=2+\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\end{array}\right.\Rightarrow C=\varnothing$

$D=\left\{\mathrm{x}\in\mathbb{R}\middle|x^2-4x+3=0\right\}$. Ta có $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.\Rightarrow D=\{1;3\}$..

**Câu 16.** Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)=0\right\}$. Các phần tử của tập $A$ là:

**A.** $A=\{-1;1\}$. **B.** $A=\{-\sqrt{2};-1;1;\sqrt{2}\}$ .**C.** $A=\{-1\}$. **D.** $A=\{1\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)=0\right\}$.

Ta có $\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=0\\x^2+2=0\ (\mathrm{vn})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.\Rightarrow A=\{-1;1\}$..

**Câu 17.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập rỗng?

**A.** $A=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|x^2-4=0\right\}$. **B.** $B=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2+2x+3=0\right\}$.

**C.** $C=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2-5=0\right\}$. **D.** $D=\left\{x\in\mathbb{Q}\middle|x^2+x-12=0\right\}$..

**Lời giải**

**Chọn B**

$A=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|x^2-4=0\right\}\Rightarrow A=\{2\}$.

$B=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2+2x+3=0\right\}\Rightarrow B=\varnothing$.

$C=\left\{x\in\mathbb{R}\left|x^2-5=0\right.\right\}\Rightarrow C=\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$.

$D=\left\{x\in\mathbb{Q}\left|x^2+x-12=0\right.\right\}\Rightarrow D=\left\{-3;4\right\}$.

**Câu 18.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào khác rỗng?

**A.** $A=\left\{x\in\mathbb{R}\left|x^2+x+1=0\right.\right\}$.

**B.** $B=\left\{x\in\mathbb{N}\left|x^2-2=0\right.\right\}$.

**C.** $C=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\left(x^3-3\right)\left(x^2+1\right)=0\right.\right\}$.

**D.** $D=\left\{x\in\mathbb{Q}\left|x\left(x^2+3\right)=0\right.\right\}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$A=\left\{x\in\mathbb{R}\left|x^2+x+1=0\right.\right\}$. Ta có $x^2+x+1=0(\text{vn})\Rightarrow A=\varnothing$.

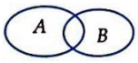
$B=\left\{x\in\mathbb{N}\left|x^2-2=0\right.\right\}$. Ta có $x^2-2=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{N}\Rightarrow B=\varnothing$

$C=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\left(x^3-3\right)\left(x^2+1\right)=0\right.\right\}$. Ta có $\left(x^3-3\right)\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{3}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow C=\varnothing$

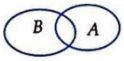
$D=\left\{x\in\mathbb{Q}\left|x\left(x^2+3\right)=0\right.\right\}$. Ta có $x\left(x^2+3\right)=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow D=\left\{0\right\}$.

**Dạng 2. Tập hợp con, tập bằng nhau**

**Câu 19.** Cho hai tập hợp $A$ và. $B$. Hình nào sau đây minh họa $A$ là tập con của $B$?

**A.** 

.

**B.** 

.

**C.** 

.

**D.** 

.

**Lời giải**

Hình C là biểu đồ ven, minh họa cho $A\subset B$ vì mọi phần tử của $A$ đều là của. ***B.***

**Đáp án C.**

**Câu 20.** Cho ba tập hợp $E$, $F$, $G$ thỏa mãn: $E\subset F, F\subset G$ và $G\subset K$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $G\subset F$.

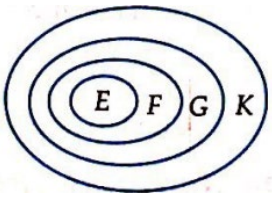
**B.** $K\subset G$.

**C.** $E=F=G$.

**D.** $E\subset K$.

**Lời giải**

Dùng biểu đồ minh họa ta thấy $E\subset K$.




**Đáp án D.**

**Câu 21.** Trong các tập hợp sau đây, tập hợp nào có đúng một tập hợp con?

**A.** $\varnothing$.

**B.** $\left\{x\right\}$.

**C.** $\left\{\varnothing\right\}$.

**D.** $\left\{\varnothing,x\right\}$.

**Lời giải**

Vì tập $\varnothing$ có tập hợp con là chính nó.

- Đáp án B có 2 tập con là $\varnothing$ và $\left\{x\right\}$.

- Đáp án C có 2 tập con là $\varnothing$ và $\left\{\varnothing\right\}$.

- Đáp án D có 4 tập con.

**Đáp án A.**

**Câu 22.** Cho tập hợp $A=\left\{1;2\right\}$ và $B=\left\{1;2;3;4;5\right\}$. Có tất cả bao nhiêu tập $X$ thỏa mãn: $A\subset X\subset B$?

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

**Lời giải**

$X$ là tập hợp phải luôn có mặt 1 và 2.

Vì vậy ta đi tìm số tập con của tập $\{3;4;5\}$, sau đó cho hai phần tử 1 và 2 vào các tập con nói trên ta được tập $X$.

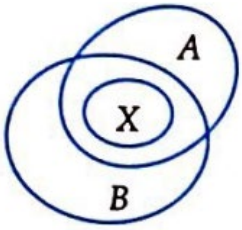
Vì số tập con của tập $\{3;4;5\}$ là $2^3=8$ nên có 8 tập $X$.

**Đáp án D.**

**Câu 23.** Cho tập hợp $A=\{1;2;5;7\}$ và $B=\{1;2;3\}$. Có tất cả bao nhiêu tập $X$ thỏa mãn: $X\subset A$ và $X\subset B$?

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

**Lời giải**




**Cách 1:** Vì $\begin{cases}X\subset A\\ X\subset B\end{cases}$ nên $X\subset(A\cap B)$.

Mà $A\cap B=\{1;2\}\Rightarrow$ Có $2^2=4$ tập $X$.

**Cách 2:** $X$ là một trong các tập sau: $\varnothing;\{1\};\{2\};\{1;2\}$.

**Đáp án B.**

**Câu 24.** Cho tập hợp $A=\{1;3\}, B=\{3;x\}, C=\{x;y;3\}$. Để $A=B=C$ thì tất cả các cặp $(x;y)$ là:

**A.** $(1;1)$. **B.** $(1;1)$ và $(1;3)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;1)$ và $(3;3)$.

**Lời giải**

Ta có: $A=B=C\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ \left[\begin{array}{l}y=1\\ y=3\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow$ Cặp $(x;y)$ là $(1;1);(1;3)$.

**Đáp án B.**

**Câu 25.** Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4\}, B=\{0;2;4\}$, $C=\{0;1;2;3;4;5\}$. Quan hệ nào sau đây là đúng?

**A.** $B\subset A\subset C$. **B.** $B\subset A=C$. **C.** $\begin{cases}A\subset C\\ B\subset C\end{cases}$. **D.** $A\cup B=C$.

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Ta thấy mọi phần tử của $A$ đều thuộc $C$ và mọi phần tử của $B$ đều thuộc $C$ nên chọn ***C.***

**Câu 26.** Cho tập hợp $A$ có 4 phần tử. Hỏi tập $A$ có bao nhiêu tập con khác rỗng?

**A.** 16. **B.** 15. **C.** 12. **D.** 7.

**Lời giải**

**Đáp án B.**

Vì số tập con của tập 4 phần tử là $2^4=16\Rightarrow$ Số tập con khác rỗng là $16-1=15$.

**Câu 27.** Số các tập hợp con gồm hai phần tử của tập hợp $B=\{a;b;c;d;e;f\}$ là:

**A.** 15. **B.** 16. **C.** 22. **D.** 25.

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Số tập con có 2 phần tử trong đó có phần tử *a* là 5 tập $\{a;b\},\{a;c\},\{a;d\},\{a;e\},\{a,f\}$.

Số tập con có 2 phần tử mà luôn có phần tử *b* nhưng không có phần tử *a* là 4 tập: $\{b;c\}$, $\{b;d\}$, $\{b;e\}$, $\{b;f\}$.

Tương tự ta có tất cả $5+4+3+2+1=15$ tập.

**Câu 28.** Số các tập hợp con có 3 phần tử có chứa *a, b* của tập hợp $C=\{a;b;c;d;e;f;g\}$ là:

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Tập con có 3 phần tử trong đó *a, b* luôn có mặt.

Vậy phần tử thứ 3 sẽ thuộc một trong các phần tử *c, d, e, f, g* (5 phần tử) nên có 5 tập con.

**Câu 29.** Cho tập hợp $A=\{1,2,3,4,x,y\}$. Xét các mệnh đề sau đây:

$(I)$: "$3\in A$".

$(II)$: "$\{3,4\}\in A$".

$(III)$: "$\{a,3,b\}\in A$".

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

**A.** $I$ đúng. **B.** $I,II$ đúng. **C.** $II,III$ đúng. **D.** $I,III$ đúng.

**Lời giải**

**Chọn A**

3 là một phần tử của tập hợp $A$.

$\{3,4\}$ là một tập con của tập hợp $A$. Ký hiệu: $\{3,4\}\subset A$.

$\{a,3,b\}$ là một tập con của tập hợp $A$. Ký hiệu: $\{a,3,b\}\subset A$.

**Câu 30.** Cho tập hợp $X=\{1;2;3;4\}$. Câu nào sau đây đúng?

**A.** Số tập con của $X$ là 16.

**B.** Số tập con của $X$ gồm có 2 phần tử là 8.

**C.** Số tập con của $X$ chứa số 1 là 6.

**D.** Số tập con của $X$ gồm có 3 phần tử là 2.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số tập con của tập hợp $X$ là: $2^4=16$

Số tập con có 2 phần tử của tập hợp $X$ là: $C_4^2=6$

Số tập con của tập hợp $X$ chứa số 1 là: 8

$\{1\}$, $\{1;2\},\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{1;2;3\}$, $\{1;2;4\}$, $\{1;3;4\}$, $\{1;2;3;4\}$.

Số tập con có 3 phần tử của tập hợp $X$ là: $C_4^3=4$.

**Câu 31.** Số các tập con 3 phần tử có chứa $\alpha,\pi$ của $C=\{\alpha,\pi,\xi,\psi,\rho,\eta,\gamma,\sigma,\omega,\tau\}$ là:

**A.** 8. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 14.

**Lời giải**

**Chọn A**

Các tập con 3 phần tử có chứa $\alpha,\pi$ của $C=\{\alpha,\pi,\xi,\psi,\rho,\eta,\gamma,\sigma,\omega,\tau\}$ là:

$\{\alpha,\pi,\xi\}$, $\{\alpha,\pi,\psi\}$, $\{\alpha,\pi,\rho\}$, $\{\alpha,\pi,\eta\}$, $\{\alpha,\pi,\gamma\}$, $\{\alpha,\pi,\sigma\}$, $\{\alpha,\pi,\omega\}$, $\{\alpha,\pi,\tau\}$..

**Câu 32.** Trong các tập sau đây, tập hợp nào có đúng hai tập hợp con?

**A.** $\{x;y\}$. **B.** $\{x\}$. **C.** $\{\varnothing;x\}$. **D.** $\{\varnothing;x;y\}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\{x;y\}$ có $2^2=4$ tập con.

$\{x\}$ có $2^1=2$ tập con là $\{x\}$ và $\varnothing$.

$\{\varnothing;x\}$ có $2^2=4$ tập con.

$\{\varnothing;x;y\}$ có $2^3=8$ tập con.

**Câu 33.** Khẳng định nào sau đây sai? Các tập $A=B$ với $A,B$ là các tập hợp sau?

**A.** $A=\{1;3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x-1)(x-3)=0\}$.

**B.** $A=\{1;3;5;7;9\}$, $B=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z},0\le k\le 4\}$.

**C.** $A=\{-1;2\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-2x-3=0\}$.

**D.** $A=\varnothing$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+x+1=0\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

* $A=\{1;3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x-1)(x-3)=0\}\Rightarrow B=\{1;3\}\Rightarrow A=B$.

* $A=\{1;3;5;7;9\}$, $B=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z},0\le k\le 4\}\Rightarrow B=\{1;3;5;7;9\}\Rightarrow A=B$.

* $A=\{-1;2\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-2x-3=0\}\Rightarrow B=\{-1;3\}\Rightarrow A\neq B$.

* $A=\varnothing$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+x+1=0\}\Rightarrow B=\varnothing\Rightarrow A=B$.

**Câu 34.** Có tất cả bao nhiêu tập $X$ thỏa mãn $\{1;2;3\}\subset X\subset\{1;2;3;4;5;6\}$ ?

**A.** 1. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn B**

Các tập hợp $X$ thỏa mãn điều kiện là:

$X=\{1;2;3\}$, $X=\{1;2;3;4\}$, $X=\{1;2;3;5\}$, $X=\{1;2;3;6\}$, $X=\{1;2;3;4;5\}$,

$X=\{1;2;3;4;6\}$, $X=\{1;2;3;5;6\}$, $X=\{1;2;3;4;5;6\}$ j

Vậy có tất cả 8 tập hợp $X$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 35.** Số tập con của tập hợp: $A=\{x\in\mathbb{R}\setminus 3(x^2+x)^2-2x^2-2x=0\}$ là:

**A.** 16. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 10.

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Giải phương trình

$3\left(x^2+x\right)^2-2\left(x^2+x\right)=0$

Đặt $x^2+x=t$ ta có phương trình

$3t^2-2t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$

Với $t=0$ ta có $x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$

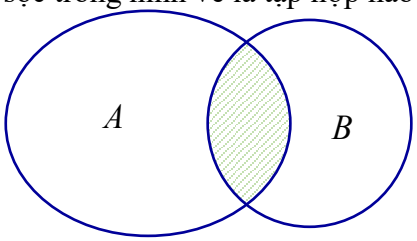
Với $t=\dfrac{2}{3}$ ta có: $x^2+x=\dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 3x^2+3x-2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{3}$

Vậy $A$ có 4 phần tử suy ra số tập con của $A$ là $2^4=16$.

**Dạng 3. (Nâng cao) Sơ đồ ven**

**Câu 36.** Cho $A$, $B$ là hai tập hợp bất kì khác tập rỗng, được biểu diễn theo biểu đồ Ven sau. Phần gạch sọc trong hình vẽ là tập hợp nào sau đây?




**A.** $A\cup B$. **B.** $B\setminus A$. **C.** $A\setminus B$. **D.** $A\cap B$.

**Lời giải**

**Chọn D**

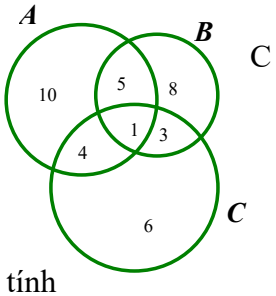
Theo biểu đồ Ven thì phần gạch sọc trong hình vẽ là tập hợp $A\cap B$.

**Câu 37.** Trong một khoảng thời gian nhất định, tại một địa phương, Đài khí tượng thủy văn đã thống kê được: Số ngày mưa: 10 ngày; Số ngày có gió: 8 ngày; Số ngày lạnh: 6 ngày; Số ngày mưa và gió: 5 ngày; Số ngày mưa và lạnh: 4 ngày; Số ngày lạnh và có gió: 3 ngày; Số ngày mưa, lạnh và có gió: 1 ngày.Vậy có bao nhiêu ngày thời tiết xấu (Có gió, mưa hay lạnh)?

**A.** 14. **B.** 13. **C.** 15. **D.** 16.

**Lời giải**

**Chọn B**




Ký hiệu A là tập hợp những ngày mưa, B là tập hợp những ngày có gió, là tập hợp những ngày lạnh.

Theo giả thiết ta có: $n(A)=10,\ n(B)=8,\ n(C)=6,$

$n(A\cap B)=5,\ n(A\cap C)=4,\ n(B\cap C)=3,\ n(A\cap B\cap C)=1$

Để tìm số ngày thời tiết xấu ta sử dụng biểu đồ Ven(hình vẽ). Ta cần tính $n(A\cup B\cup C)$.

Xét tổng $n(A)+n(B)+n(C)$: trong tổng này, mỗi phần tử của A giao B, B giao C, C giao A được tính làm hai lần nên trong tổng $n(A)+n(B)+n(C)$ ta phải trừ đi tổng $n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$.

Trong tổng $n(A)+n(B)+n(C)$ được tính $n(A\cap B\cap C)$ 3 lần, trong $n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$

cũng được tính $n(A\cap B\cap C)$ 3 lần. Vì vậy

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

$$=10+8+6-(5+4+3)+1=13$$

Vậy số ngày thời tiết xấu là 13 ngày.

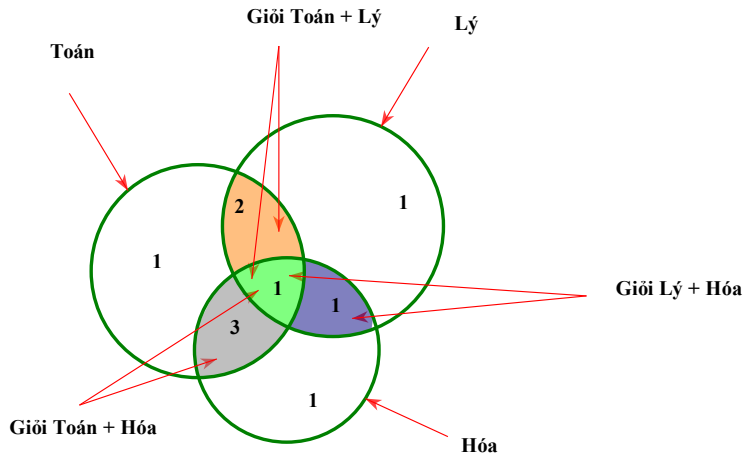
**Câu 38.** Lớp $10B_1$ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa) Số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp $10B_1$ là:

**A.** 9.. **B.** 10.. **C.** 18.. **D.** 28.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta dùng biểu đồ Ven để giải:




Nhìn vào biểu đồ, số học sinh giỏi ít nhất 1 trong 3 môn là: $1+2+1+3+1+1+1=10$.

**Câu 39.** Trong lớp 10C có 45 học sinh trong đó có 25 em thích môn Văn, 20 em thích môn Toán, 18 em thích môn Sử, 6 em không thích môn nào, 5 em thích cả ba môn. Hỏi số em thích chỉ một môn trong ba môn trên.

**A.** 15. **B.** 20. **C.** 25. **D.** 30.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $a,b,c$ theo thứ tự là số học sinh chỉ thích môn Văn, Sử, Toán;

$x$ là số học sịnh chỉ thích hai môn là văn và toán

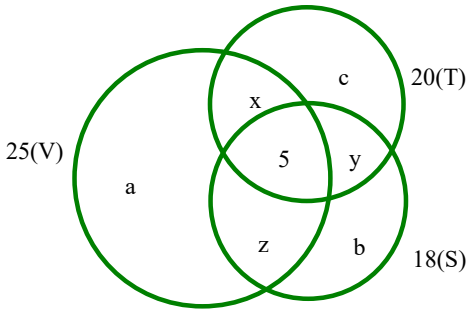
$y$ là số học sịnh chỉ thích hai môn là Sử và toán

$z$ là số học sịnh chỉ thích hai môn là văn và Sử

Ta có số em thích ít nhất một môn là $45-6=39$

Sựa vào biểu đồ ven ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+x+z+5=25 & (1) \\ b+y+z+5=18 & (2) \\ c+x+y+5=20 & (3) \\ x+y+z+a+b+c+5=39 & (4) \end{cases}$$




Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta có

$a+b+c+2(x+y+z)+15=63$ (5)

Từ (4) và (5) ta có

$a+b+c+2(39-5-a-b-c)+15=63$

$\Leftrightarrow a+b+c=20$

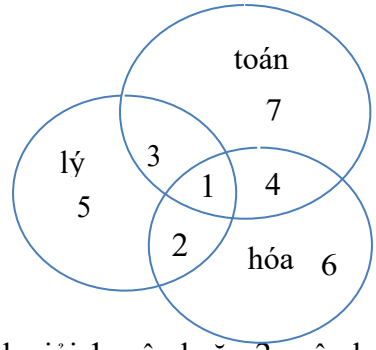
Vậy chỉ có 20 em thích chỉ một môn trong ba môn trên.

**Câu 40.** Lớp $10A$ có $7$ học sinh giỏi Toán, $5$ học sinh giỏi Lý, $6$ học sinh giỏi Hoá, $3$ học sinh giỏi cả Toán và Lý, $4$ học sinh giỏi cả Toán và Hoá, $2$ học sinh giỏi cả Lý và Hoá, $1$ học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hoá. Số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán, Lý, Hoá) của lớp $10A$ là

**A.** $9$. **B.** $18$. **C.** $10$. **D.** $28$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Số học sinh giỏi toán, lý mà không giỏi hóa: $3-1=2$.

Số học sinh giỏi toán, hóa mà không giỏi lý: $4-1=3$.

Số học sinh giỏi hóa, lý mà không giỏi toán: $2-1=1$.

Số học sinh chỉ giỏi môn lý: $5-2-1-1=1$.

Số học sinh chỉ giỏi môn hóa: $6-3-1-1=1$.

Số học sinh chỉ giỏi môn toán: $7-3-2-1=1$.

Số học sinh giỏi ít nhất một (môn toán, lý, hóa) là số học sinh giỏi $1$ môn hoặc $2$ môn hoặc cả $3$ môn: $1+1+1+1+2+3+1=10$.

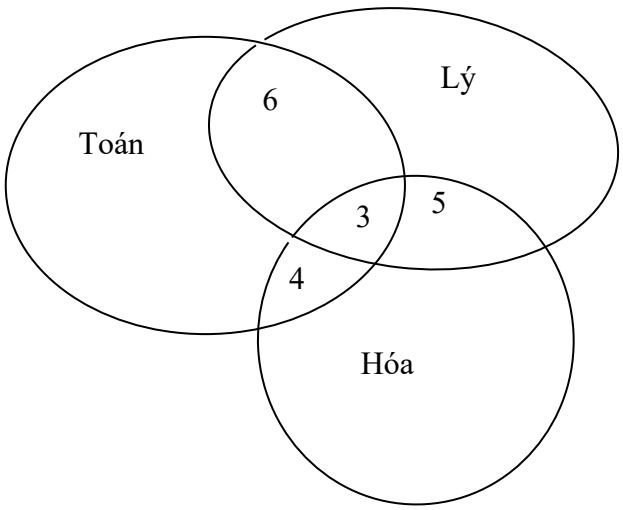
**Câu 41.** Lớp 10A có $10$ học sinh giỏi Toán, $10$ học sinh giỏi Lý, $11$ học sinh giỏi hóa, $6$ học sinh giỏi cả Toán và Lý, $5$ học sinh giỏi cả Hóa và Lý, $4$ học sinh giỏi cả Toán và Hóa, $3$ học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa) Số học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp 10A là

**A.** $19$. **B.** $18$. **C.** $31$. **D.** $49$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo giả thiết đề bài cho, ta có biểu đồ Ven:




Dựa vào biểu đồ Ven, ta có học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp 10A là

Số học sinh giỏi Toán: $6+4+3=13$.

Số học sinh giỏi Lý: $6+5+3=14$.

Số học sinh giỏi Hóa: $4+5+3=12$.

Ta lại có:

Số học sinh giỏi cả Toán và Lý: $6$.

Số học sinh giỏi cả Toán và Hóa: $4$.

Số học sinh giỏi cả Hóa và Lý: $5$.

Và số học sinh giỏi cả Toán, Lý và Hóa là $3$.

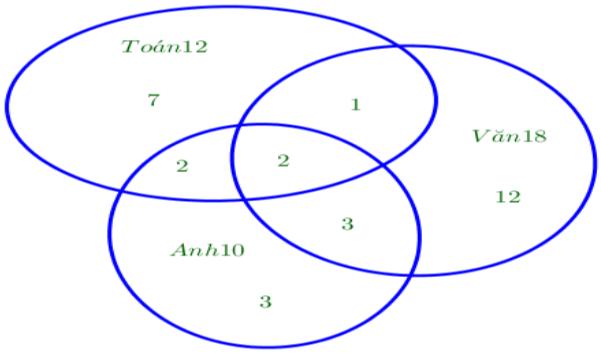
Số học sinh giỏi hơn một môn là $4+6+5+3=18$.

**Câu 42.** Một nhóm học sinh giỏi các môn: Anh, Toán, Văn. Có 18 em giỏi Văn, 10 em giỏi Anh, 12 em giỏi Toán, 3 em giỏi Văn và Toán, 4 em giỏi Toán và Anh, 5 em giỏi Văn và Anh, 2 em giỏi cả ba môn. Hỏi nhóm đó có bao nhiêu em học sinh?

**A.** 25. **B.** 20. **C.** 30. **D.** Đáp án khác)

**Lời giải**

**Chọn C**




Vì có 2 em giỏi cùng lúc ba môn, nên ta có :

- Số học sinh giỏi hai môn Toán và Văn, không giỏi Anh là : $3-2=1$.
- Số học sinh giỏi hai môn Toán và Anh, không giỏi Văn là : $4-2=2$.
- Số học sinh giỏi hai môn Văn và Anh, không giỏi Toán là : $5-2=3$.

Lúc đó :

- Số em giỏi mình môn Văn là : $18-3-2-1=12$.
- Số em giỏi mình môn Toán là : $12-1-2-2=7$.
- Số em giỏi mình môn Anh là : $10-2-2-3=3$.

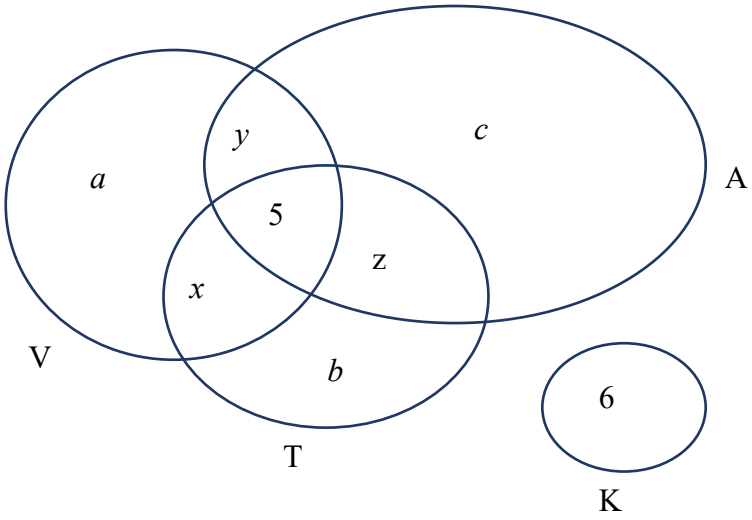
Vậy cả nhóm có tổng số học sinh là : $2+1+2+3+12+7+3=30$.

**Câu 43.** Lớp 12D có 45 học sinh, trong đó có 25 em thích môn Văn, 20 em thích môn Toán, 18 em thích môn Tiếng Anh, 6 em không thích môn nào, 5 em thích cả ba môn. Hỏi số em thích chỉ một môn trong ba môn trên là bao nhiêu?

**A. 11.** **B. 34.** **C. 1.** **D. 20.**

**Lời giải**

**Chọn D**




Trong lớp 10A, gọi T là tập hợp những em thích môn Toán; V là tập hợp những em thích môn Văn; A là tập hợp những em thích môn Tiếng Anh; K là tập hợp những em không thích môn nào.

Gọi $a,b,c$ theo thứ tự là số học sinh chỉ thi môn Văn, Toán, Tiếng Anh.

$x$ là số học sinh chỉ thích hai môn Văn và Toán

$y$ là số học sinh chỉ thích hai môn Văn và Tiếng Anh

$z$ là số học sinh chỉ thích hai môn Toán và Tiếng Anh

Ta có biểu đồ Ven:

Từ biểu đồ ven Ven ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} a+x+y+5=25 \ (1) \\ b+x+z+5=20 \ (2) \\ c+y+z+5=18 \ (3) \\ x+y+z+a+b+c+5+6=45 \ (5) \end{cases}$

Cộng vế với vế của $(1),(2),(3)$ ta có: $a+b+c+2(x+y+z)+15=63$

$\Leftrightarrow a+b+c+2(x+y+z)=48 \quad (4)$

Từ (4) và (5) ta có

Ta có: $\begin{cases} a+b+c+2(x+y+z)=48 \\ 2(x+y+z)+2(a+b+c)=68 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=20$

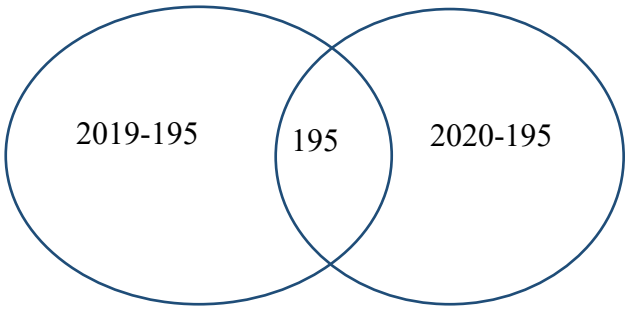
Vậy có 20 học sinh chỉ thích một trong ba môn trên.

**Câu 44.** Cho tập $A$ là tập hợp các số tự nhiên, mà mỗi số tự nhiên trong $A$ đều chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5, hoặc chia hết cho cả 3 và 5. Trong đó có 2019 số chia hết cho 3; 2020 số chia hết cho 5, 195 số chia hết cho 15; Hỏi tập $A$ có bao nhiêu phần tử

**A.** 4234. **B.** 4039. **C.** 4235. **D.** 3844.

**Lời giải**

**Chọn D**




Theo biểu đồ ven ta có:

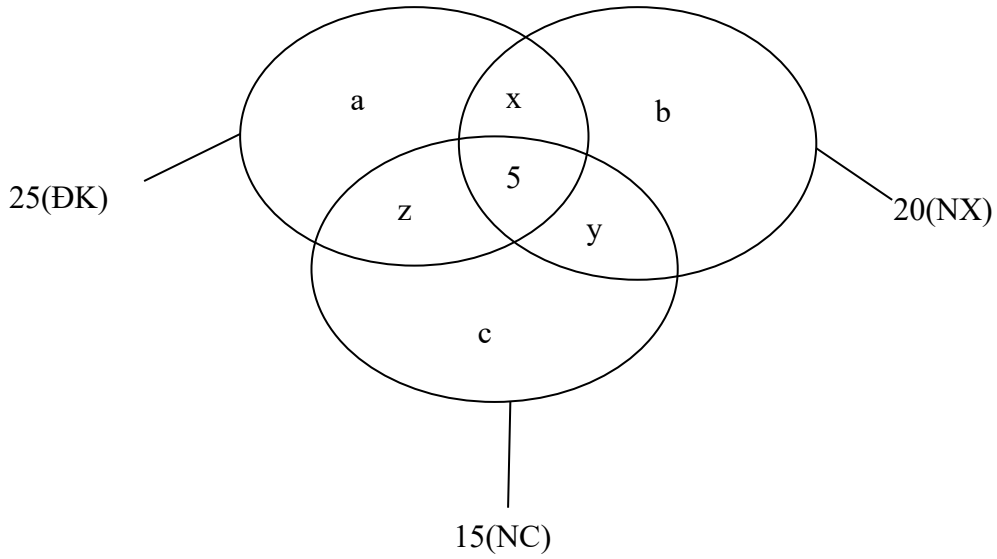
Tập A có $2019-195+195+2020-195=3844$ phần tử.

**Câu 45.** Hội khỏe Phù Đổng của trường Trần Phú, lớp $10A$ có 45 học sinh, trong đó có 25 học sinh thi điền kinh, 20 học sinh thi nhảy xa, 15 học sinh thi nhảy cao, 7 em không tham gia môn nào, 5 em tham gia cả 3 môn. Hỏi số em tham gia chỉ một môn trong ba môn trên là bao nhiêu?

**A.** 20. **B.** 45. **C.** 38. **D.** 21.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $a,b,c$ theo thứ tự là số học sinh chỉ thi môn điền kinh, nhảy xa, nhảy cao.

$x$ là số học sinh chỉ thi hai môn điền kinh và nhảy xa

$y$ là số học sinh chỉ thi hai môn nhảy xa và nhảy cao

$z$ là số học sinh chỉ thi hai môn điền kinh và nhảy cao

Số em thi ít nhất một môn là: $45-7=38$

Dựa vào biểu đồ ven ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a+x+z+5=25 & (1) \\ b+x+y+5=20 & (2) \\ c+y+z+5=15 & (3) \\ x+y+z+a+b+c+5=38 & (4) \end{cases}$$

Cộng vế với vế của $(1),(2),(3)$ ta có: $a+b+c+2(x+y+z)+15=60$ (5)

Từ $(4),(5)$ ta có: $a+b+c+2(38-5-a-b-c)+15=60 \Leftrightarrow a+b+c=21$

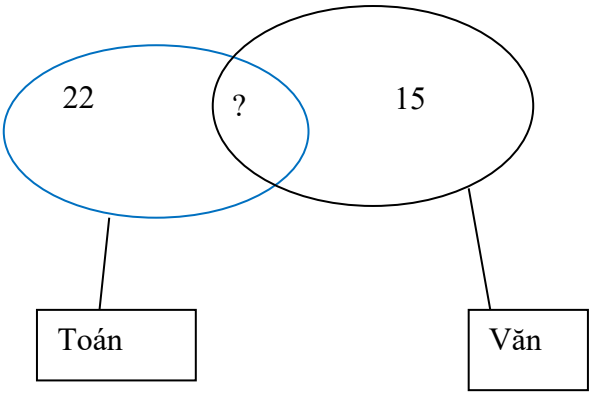
Vậy có 21 học sinh chỉ thi một trong ba nội dung trên.

**Câu 46.** Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp $11B_1$ có 15 học sinh giỏi Văn, 22 học sinh giỏi Toán. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán biết lớp $11B_1$ có 40 học sinh, và có 14 học sinh không đạt học sinh giỏi.

**A.** 4. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 20.

**Lời giải**

**Chọn C**




Số học sinh học giỏi ít nhất một trong hai môn Toán và Văn là: $40-14=26$.

Số học sinh chỉ giỏi Toán mà không giỏi Văn (Phần Toán sau khi bỏ đi phần giao) là: $26-15=11$.

Vậy số học sinh giỏi cả hai môn Toán và Văn (Phần giao nhau) là: $22-11=11$

Cách 2:

Số học sinh học giỏi ít nhất một trong hai môn Toán và Văn là: $40-14=26$.

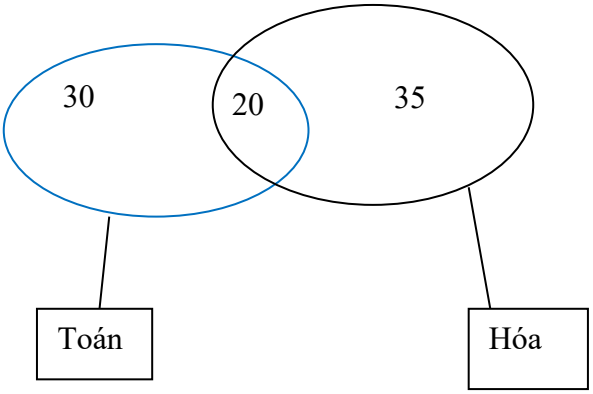
Số học sinh giỏi cả hai môn Toán và Văn là: $22+15-26=11$.

**Câu 47.** Mỗi học sinh của lớp $10A_1$ đều học giỏi môn Toán hoặc môn Hóa, biết rằng có 30 học sinh giỏi Toán, 35 học sinh giỏi Hóa, và 20 em học giỏi cả hai môn. Hỏi lớp $10A_1$ có bao nhiêu học sinh?

**A.** 40. **B.** 45. **C.** 50. **D.** 55.

**Lời giải**

**Chọn B**




Dựa vào biểu đồ ven ta có:

Số học sinh chỉ giỏi môn Toán là: $30-20=10$.

Số học sinh chỉ giỏi môn Hóa là: $35-20=15$.

Do đó số học sinh lớp $10A_1$ là: $10+20+15=45$

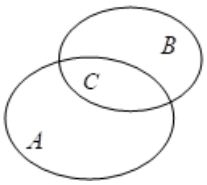
Cách 2: Sĩ số học sinh lớp $10A_1$ là: $30+35-20=45$.

**Câu 48.** Trong một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 30 học sinh đạt học sinh giỏi môn Toán, 25 học sinh đạt học sinh giỏi môn Văn. Biết rằng chỉ có 5 học sinh không đạt danh hiệu học sinh giỏi môn nào trong cả hai môn Toán và Văn. Hỏi có bao nhiêu học sinh chỉ học giỏi một môn trong hai môn Toán hoặc Văn?

**A.** 20. **B.** 15. **C.** 5. **D.** 10.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $A$ là tập hợp các học sinh đạt học sinh giỏi môn Toán.

$B$ là tập hợp các học sinh đạt học sinh giỏi môn Văn.

$C$ là tập hợp các học sinh đạt học sinh giỏi cả hai môn Toán và Văn.

Số học sinh đạt học sinh giỏi môn Toán, Văn của lớp là: 40-5=35 (học sinh).

Theo sơ đồ Ven ta có: $A+B-C=35 \Leftrightarrow 30+25-C=35 \Leftrightarrow C=20$.

Do vậy ta có:

Số học sinh chỉ giỏi môn Toán là: $A-C=30-20=10$ (học sinh).

Số học sinh chỉ giỏi môn Văn là: $B-C=25-20=5$ (học sinh).

Nên số học sinh chỉ giỏi một trong hai môn Toán hoặc Văn là: $10+5=15$ (học sinh).

Vậy ta chọn đáp án $B$.

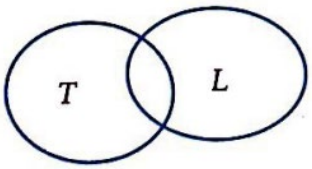
**Câu 49.** Một lớp học có 25 học sinh giỏi môn Toán, 23 học sinh giỏi môn Lý, 14 học sinh giỏi cả môn Toán và Lý và có 6 học sinh không giỏi môn nào cả. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh?

**A.** 54. **B.** 40. **C.** 26. **D.** 68.

**Lời giải**

Gọi $T$, $L$ lần lượt là tập hợp các học sinh giỏi Toán và các học sinh giỏi Lý.

Ta có:




$|T|$: là số học sinh giỏi Toán

$|L|$: là số học sinh giỏi Lý

$|T \cap L|$: là số học sinh giỏi cả hai môn Toán và Lý

Khi đó số học sinh của lớp là: $|T \cup L|+6$.

Mà $|T \cup L|=|T|+|L|-|T \cap L|=25+23-14=34$.

Vậy số học sinh của lớp là $34+6=40$.

**Đáp án B.**

**Câu 50.** Lớp 10A có 45 học sinh trong đó có 25 em học giỏi môn Toán, 23 em học giỏi môn Lý, 20 em học giỏi môn Hóa, 11 em học giỏi cả môn Toán và môn Lý, 8 em học giỏi cả môn Lý và môn Hóa, 9 em học giỏi cả môn Toán và môn Hóa) Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn học giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa, biết rằng mỗi học sinh trong lớp học giỏi ít nhất một trong 3 môn Toán, Lý, Hóa?

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Lời giải**

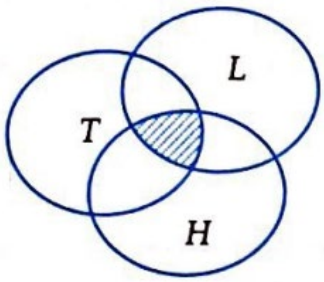
Gọi $T$, $L$, $H$ lần lượt là tập hợp các học sinh giỏi môn Toán, Lý, Hóa)

Khi đó tương tự Ví dụ 13 ta có công thức:

$$|T \cup L \cup H|=|T|+|L|+|H|-|T \cap L|-|L \cap H|-|H \cap T|+|T \cap L \cap H|$$

$$\Leftrightarrow 45=25+23+20-11-8-9+|T \cap L \cap H|$$

$$\Leftrightarrow |T \cap L \cap H|=5$$




Vậy có 5 học sinh giỏi cả 3 môn.

**Đáp án C.**

**Câu 51.** Một lớp học có 25 học sinh chơi bóng đá, 23 học sinh chơi bóng bàn, 14 học sinh chơi cả bóng đá và bóng bàn và 6 học sinh không chơi môn nào. Số học sinh chỉ chơi 1 môn thể thao là?

**A.** 48. **B.** 20. **C.** 34. **D.** 28.

**Lời giải**

**Đáp án B.**

Gọi $A$ là tập hợp các học sinh chơi bóng đá

$B$ là tập hợp các học sinh chơi bóng bàn

$C$ là tập hợp các học sinh không chơi môn nào

Khi đó số học sinh chỉ chơi bóng đá là

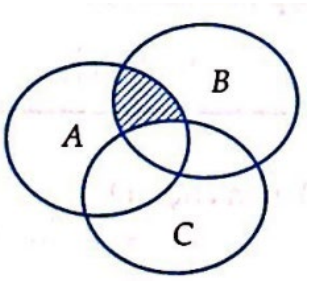
$|A|+|B|-2|A\cap B|=25+23-2.14=20$.

**Câu 52.** Cho $A$, $B$, $C$ là ba tập hợp được minh họa bằng biểu đồ ven như hình vẽ. Phần gạch sọc trong hình vẽ là tập hợp nào sau đây?

**A.** $(A\cup B)\setminus C$. **B.** $(A\cap B)\setminus C$. **C.** $(A\setminus C)\cup(A\setminus B)$. **D.** $(A\cap B)\cup C$.

**Lời giải**

Vì với mỗi phần tử $x$ thuộc phần gạch sọc




thì ta thấy: $\begin{cases} x\in A \\ x\in B \Rightarrow x\in(A\cap B)\setminus C \\ x\notin C \end{cases}$.

**Đáp án B.**

**Câu 53.** Cho $A$, $B$, $C$ là các tập hợp bất kì. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. **B.** $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

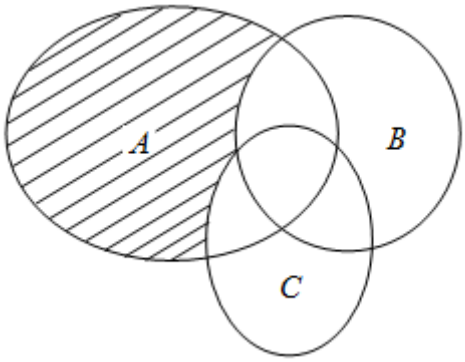
**C.** $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$. **D.** $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

**Lời giải**

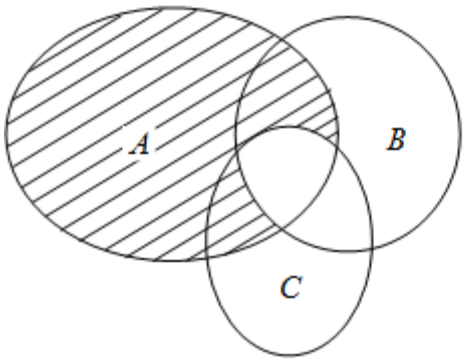
**Chọn D**

Dùng biểu đồ Ven để kiểm tra đáp án **D** sai.

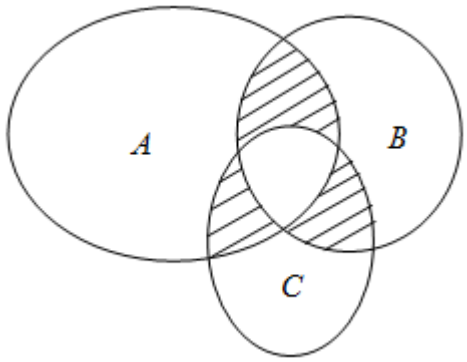
Biểu đồ Ven tập hợp $A\setminus(B\cup C)$:




Biểu đồ Ven tập hợp $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$:




**Câu 54.** Cho $A$, $B$, $C$ là các tập hợp bất kì. Phần gạch sọc trong hình vẽ bên dưới là tập hợp nào sau đây?




**A.** $(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$.

**B.** $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)$.

**C.** $\left[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)\right]\setminus(A\cap B\cap C)$.

**D.** $\left[(A\cap B)\setminus C\right]\cap\left[(B\cap C)\setminus A\right]\cap\left[(C\cap B)\setminus A\right]$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ hình vẽ ta thấy phần gạch sọc là $\left[(A\cap B)\setminus C\right]\cup\left[(B\cap C)\setminus A\right]\cup\left[(C\cap A)\setminus B\right]$, nhưng kết quả này không có trong đáp án.

Từ hình vẽ ta có thể nhìn thấy $\left[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)\right]$ là phần gạch sọc thêm phần của $A\cap B\cap C$, bỏ đi phần của $A\cap B\cap C$ ta được kết quả đúng.

**Câu 55.** Lớp 10A có 40 học sinh trong đó có 10 bạn học sinh giỏi Toán, 15 bạn học sinh giỏi Lý, và 22 bạn không giỏi môn học nào trong hai môn Toán, Lý. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn học sinh vừa giỏi Toán vừa giỏi Lý?

**A.** 7. **B.** 25. **C.** 10. **D.** 18.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số học sinh vừa giỏi Toán, vừa giỏi Lý chính là số phần tử của tập hợp $A\cap B$. Từ biểu đồ Ven, ta có: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(A)-n(B)$.

**B.** (HS nhầm với phép tính tổng).

**C.** (HS lấy số nhỏ nhất trong hai tập hợp học sinh giỏi Toán, giỏi Lý).

**D.** (HS lấy sĩ số lớp trừ số bạn không giỏi môn nào.

**Câu 56.** Một lớp có 45 học sinh. Mỗi em đều đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn: bóng đá và bóng chuyền. Có 35 em đăng ký môn bóng đá, 15 em đăng ký môn bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký chơi cả 2 môn?

**A.** 5. **B.** 10. **C.** 30. **D.** 25.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đáp án A đúng vì: Gọi A là tập hợp các học sinh đăng ký chơi bóng đá, B là tập hợp các học sinh đăng ký chơi bóng chuyền. Dựa vào biểu đồ Ven, ta có: số học sinh đăng ký cả 2 môn là $|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=35+15-45=5$.

**Câu 57.** Mỗi học sinh lớp 10B đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có $25$ bạn chơi bóng đá, $20$ bạn chơi bóng chuyền và $10$ bạn chơi cả hai môn. Hỏi lớp 10B có bao nhiêu học sinh?

**A.** $35$. **B.** $30$. **C.** $25$. **D.** $20$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Giả sử $A=$"Hs chơi bóng đá".

$B=$ "Hs chơi bóng chuyền"

$A\cup B=$ "Hs chơi bóng đá hoặc bóng chuyền"

$A\cap B=$ "Hs chơi cả hai môn".

Số phần tử của $A\cup B$ là: $25+20-10=35$.

Số Hs chơi bóng đá hoặc bóng chuyền là số Hs của lớp: $35$.

**Câu 58.** Kí hiệu $|X|$ là số phần tử của tập hợp $X$. Cho hai tập hợp $A$, $B$ bất kì và xét các khẳng định sau:

$(I)$: nếu $A\cap B=\varnothing$ thì $|A|+|B|=|A\cup B|$.

$(II)$: nếu $A\cap B\neq\varnothing$ thì $|A|+|B|=|A\cup B|-|A\cap B|$.

$(III)$: nếu $A\cap B\neq\varnothing$ thì $|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$.

Khẳng định nào đúng?

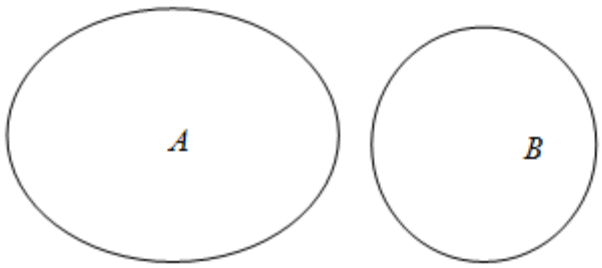
**A.** Chỉ $(I)$. **B.** Chỉ $(I)$ và $(II)$. **C.** Chỉ $(I)$ và $(III)$. **D.** Chỉ $(III)$.

**Lời giải**

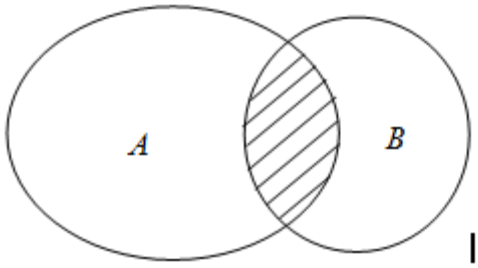
**Chọn C**

Dùng biểu đồ Ven:

Nếu $A\cap B=\varnothing$ thì $|A|+|B|=|A\cup B|$.




Nếu $A\cap B\neq\varnothing$ thì khi tính $|A\cup B|$ từ $|A|+|B|$ ta thấy $|A\cap B|$ được tính đến 2 lần nên ta có $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ do đó $|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$.




**Dạng 4. Biểu diễn tập hợp số**

**Câu 59.** Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\setminus -3<x<1\}$. Tập $A$ là tập nào sau đây?

**A.** $\{-3;1\}$ **B.** $[-3;1]$ **C.** $[-3;1)$ **D.** $(-3;1)$

**Lời giải**

Theo định nghĩa tập hợp con của tập số thực $\mathbb{R}$ ở phần trên ta chọn $(-3;1)$.

**Đáp án** **D.**

**Câu 60.** Hình vẽ nào sau đây (phần không bị gạch) minh họa cho tập hợp $(1;4]$?

**A.**

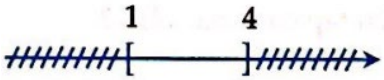


**B.**



**C.**



**D.**



**Lời giải**

Vì $(1;4]$ gồm các số thực $x$ mà $1<x\le 4$ nên chọn#**A.**

**Đáp án#A.**

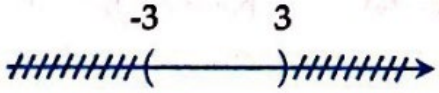
**Câu 61.** Cho tập hợp $X=\{x\setminus x\in\mathbb{R},1\le|x|\le 3\}$ thì $X$ được biểu diễn là hình nào sau đây?

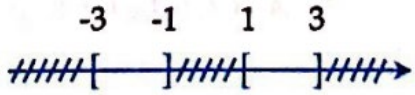
**A.**



**B.**



**C.**



**D.**



**Lời giải**

Giải bất phương trình: $1\le|x|\le 3\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\ge 1\\|x|\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x\le -1\end{array}\right.\\-3\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-3;-1]\cup[1;3]$

**Đáp án** **D.**

**Câu 62.** Sử dụng các kí hiệu khoảng, đoạn để viết tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}|4\le x\le 9\}$:

**A.** $A=[4;9]$. **B.** $A=(4;9]$. **C.** $A=[4;9)$. **D.** $A=(4;9)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,4\le x\le 9\}\Leftrightarrow A=[4;9]$.

**Câu 63.** Tập $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-3<1-2x\le 1\}$ được viết lại dưới dạng đoạn, khoảng, nửa khoảng là:

**A.** $(-1;0]$. **B.** $[0;2)$. **C.** $[1;2]$. **D.** $(0;2]$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $-3<1-2x\le 1\Leftrightarrow -4<-2x\le 0\Leftrightarrow 0\le x<2$.

Do đó $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\le x<2\}=[0;2)$.

**Câu 64.** Sử dụng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,4\le x\le 9\}$:

**A.** $A=[4;9]$. **B.** $A=(4;9]$. **C.** $A=(4;9)$. **D.** $A=[4;9)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

◆ Ta có $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,4\le x\le 9\}=[4;9]$.

**Câu 65.** Cho tập hợp: $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x-5<4-2x\}$. Hãy viết lại tập hợp $A$ dưới kí hiệu khoảng, nửa khoảng, đoạn.

**A.** $A=(3;+\infty)$. **B.** $A=(-\infty;3]$. **C.** $A=[-\infty;3)$. **D.** $A=(-\infty;3)$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

**Ta có:** $x-5<4-2x\Leftrightarrow 3x<9\Leftrightarrow x<3\Rightarrow A=(-\infty;3)$.

**Câu 66.** Hình vẽ nào sau đây (phần không bị gạch) biểu diễn cho tập $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,3x-1\ge 2\}$?

**A.**




**B.**




**C.**




**D.**



**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta **có:** $3x-1\ge 2\Leftrightarrow x\ge 1\Rightarrow A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge 1\}$.

**Câu 67.** Cho tập hợp $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2<x\le 7\}$. Tập hợp $C$ được viết dưới dạng tập hợp nào sau đây?

**A.** $C=[2;7)$. **B.** $C=(2;7]$. **C.** $C=(2;7)$. **D.** $C=[2;7]$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 68.** Cho tập hợp $M=\{x\in R\,|\,-1\le x<2\}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

**A.** $M=[-1;2)$. **B.** $M=(-1;2]$. **C.** $M=(-1;2)$. **D.** $M=\{-1;0;1\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Theo cách viết các tập con của R ta có $M=\{x\in R\,|\,-1\le x<2\}=[-1;2)$.

**Câu 69.** Cho tập $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,3\le x<9\}$. **Tập C là tập nào sau đây:**

**A.** $C=(3\ ;\ 9)$. **B.** $C=(3\ ;\ 9]$. **C.** $C=[3\ ;\ 9)$. **D.** $A=\varnothing$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 70.** Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x-2<4-2x\}$. Hãy viết lại tập hợp $A$ dưới kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng.

**A.** $A=[2;+\infty)$. **B.** $A=(2;+\infty)$. **C.** $A=(-\infty;2)$. **D.** $A=(-\infty;2]$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 71.** Sử dụng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|\le 3\}$.

**A.** $A=[3;+\infty)$. **B.** $A=(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

**C.** $A=[-3;3]$. **D.** $A=(-3;3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 72.** Cho $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-1<x\le 2\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** $A=(-1;2]$. **B.** $A=\{0;1;2\}$. **C.** $A=\{-1;0;2\}$. **D.** $A=\{0;1\}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 73.** Sử dụng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le 2\}$.

**A.** $A=(-\infty;2)$. **B.** $A=(-\infty;2]$. **C.** $A=[2;+\infty)$. **D.** $A=(2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 74.** Sử dụng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-4\le x<9\}$.

**A.** $A=(-4;9]$. **B.** $A=[-4;9]$. **C.** $A=(-4;9)$. **D.** $A=[-4;9)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

## Dạng 5. Các phép toán trên tập hợp

**Câu 75.** Cho tập hợp $X=\{1;5\}, Y=\{1;3;5\}$. Tập $X\cap Y$ là tập hợp nào sau đây?

**A.** $\{1\}$. **B.** $\{1;3\}$. **C.** $\{1;3;5\}$. **D.** $\{1;5\}$.

**Lời giải**

Vì $X\cap Y$ là tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc $X$ và vừa thuộc $Y$ nên chọn. **D.**

**Đáp án.** **D.**

**Câu 76.** Cho tập $X=\{0,1,2,3,4,5\}$ và tập $A=\{0,2,4\}$. Tìm phần bù của $A$ trong $X$.

**A.** $\varnothing$. **B.** $\{2,4\}$. **C.** $\{0,1,3\}$. **D.** $\{1,3,5\}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phần bù của $A$ trong $X$ là $C_X A = X \setminus \mathrm{A} = \{1,3,5\}$.

**Câu 77.** Cho tập hợp $A = \{2;4;6;9\}$, $B = \{1;2;3;4\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng tập hợp nào sau đây?

**A.** $\{1;2;3;5\}$. **B.** $\{6;9;1;3\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\{6;9\}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

◆ $A \setminus B = \{x / x \in A \text{ và } x \notin B\} = \{6;9\}$.

**Câu 78.** Cho hai tập hợp $A = \{0;1;2;3;4;5\}$ và $B = \{2;3;4;6;7\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $A \setminus B = \{1;2;3\}$. **B.** $A \setminus B = \{0;1;5\}$. **C.** $A \setminus B = \{0;1\}$. **D.** $A \setminus B = \{0;1;4;5\}$.

**Lời giải**.

**Chọn B**

**Câu 79.** Cho hai tập hợp $A = \{1;3;5;6\}$ và $B = \{0;3;4;6\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng tập nào sau đây.

**A.** $\{0;3;4;6\}$. **B.** $\{1;0;4;5\}$. **C.** $\{1;5\}$. **D.** $\{0;4\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập hợp $A \setminus B$ là tập gồm các phần tử thuộc $A$ nhưng không thuộc $B$. $A \setminus B = \{1;5\}$.

**Câu 80.** Cho hai tập hợp $A = \{0;1;2;3;4;5\}, B = \{2;4;6;7\}$. Khi đó tập $A \cap B$ là tập nào sau đây?

**A.** $\{2;4;6;7\}$.. **B.** $\{2;4\}$.. **C.** $\{2;4;6\}$.. **D.** $\{0;1;3;5\}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta tìm phần tử chung của cả hai tập hợp.

**Câu 81.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \le \sqrt{17}\}$. Chọn khẳng định đúng.

**A.** $A \cap B = \{0;1\}$. **B.** $A \cap B = \{1\}$. **C.** $A \cap B = \{0;1;2\}$. **D.** $A \cap B = \{0;2\}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 82.** Cho hai tập hợp $A = \{-3;0;4;7\}, B = \{-3;4;7;17\}$. Khi đó tập $A \cap B$ là tập nào sau đây?

**A.** $\{-3;7\}$.. **B.** $\{-3;0;4;7;17\}$.. **C.** $\{-3;4;7\}$.. **D.** $\{4;7\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta tìm phần chung của cả hai tập hợp.

**Câu 83.** Cho hai tập hợp $X = \{1;2;4;7;9\}$ và $X = \{-1;0;7;10\}$. Tập hợp $X \cup Y$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $X \cup Y = \{-1;0;1;2;4;7;9;10\}$. Do đó $X \cup Y$ có 8 phần tử.

**Câu 84.** Cho hai tập hợp $A = \{1;2;5;6;7;10\}, B = \{1;2;3;4;5;9;10\}$. Tập hợp $B \setminus A$ bằng tập hợp nào sau đây?

**A.** $\{1;2;3;4;5;7;9;10\}$. **B.** $\{6;7\}$. **C.** $\{3;4;9\}$. **D.** $\{1;2;5;10\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 85.** Cho tập $X = \{2;4;6;9\}, Y = \{1;2;3;4\}$. Tập nào sau đây bằng tập $X \setminus Y$?

**A.** $\{1;2;3;5\}$. **B.** $\{1;3;6;9\}$. **C.** $\{6;9\}$. **D.** $\{1\}$.

**Lời giải**

Vì $X \setminus Y$ là tập hợp các phần tử thuộc $X$ mà không thuộc $Y$ nên chọn. **C.**

**Đáp án**. **C.**

**Câu 86.** Cho tập hợp $X = \{a;b\}, Y = \{a;b;c\}$. $X \cup Y$ là tập hợp nào sau đây?

**A.** $\{a;b;c;d\}$. **B.** $\{a;b\}$. **C.** $\{c\}$. **D.** $\{a;b;c\}$.

**Lời giải**

Vì $X \cup Y$ là tập hợp gồm các phần tử thuộc $X$ hoặc thuộc $Y$ nên chọn. **D.**

**Đáp án**. **D.**

**Câu 87.** Cho hai tập hợp $A$ và $B$ khác rỗng thỏa mãn: $A \subset B$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

**A.** $A \setminus B = \varnothing$. **B.** $A \cap B = A$. **C.** $B \setminus A = B$. **D.** $A \cup B = B$.

**Lời giải**

Vì $B \setminus A$ gồm các phần tử thuộc $B$ và không thuộc $A$ nên chọn. **C.**

**Đáp án**. **C.**

**Câu 88.** Cho ba tập hợp:
$F = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}, G = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}, H = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) + g(x) = 0\}$.
Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $H = F \cap G$. **B.** $H = F \cup G$. **C.** $H = F \setminus G$. **D.** $H = G \setminus F$.

**Lời giải**

Vì $|f(x)| + |g(x)| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ mà $F \cap G = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x)$ và $g(x) = 0\}$

**Đáp án**.#**A.**

**Câu 89.** Cho tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2x}{x^2+1} \geq 1\right\}$; $B$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $b$ để phương trình $x^2 - 2bx + 4 = 0$ vô nghiệm. Số phần tử chung của hai tập hợp trên là:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

**Lời giải**

Ta có: $\frac{2x1}{x^2+1} \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$

Phương trình $x^2 - 2bx + 4 = 0$ có $\Delta' = b^2 - 4$

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow b^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < b < 2$

Có $b = 1$ là phần tử chung duy nhất của hai tập hợp.

**Đáp án**.#**A.**

**Câu 90.** Cho hai tập hợp $X=\{1;2;3;4\}, Y=\{1;2\}$. $C_X Y$ là tập hợp sau đây?

**A.** $\{1;2\}$. **B.** $\{1;2;3;4\}$. **C.** $\{3;4\}$. **D.** $\varnothing$.

**Lời giải**

Vì $Y \subset X$ nên $C_X Y = X \setminus Y = \{3;4\}$

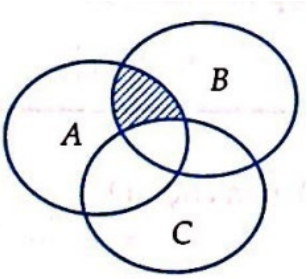
**Đáp án.** **C.**

**Câu 91.** Cho *A, B, C* là ba tập hợp được minh họa bằng biểu đồ ven như hình vẽ. Phần gạch sọc trong hình vẽ là tập hợp nào sau đây?

**A.** $(A \cup B) \setminus C$. **B.** $(A \cap B) \setminus C$. **C.** $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$. **D.** $(A \cap B) \cup C$.

**Lời giải**

Vì với mỗi phần tử *x* thuộc phần gạch sọc




thì ta thấy: $\begin{cases} x \in A \\ x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B) \setminus C \\ x \notin C \end{cases}$.

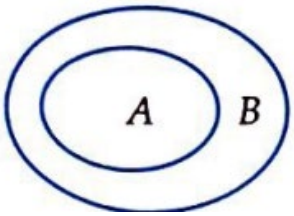
**Đáp án.** **B.**

**Câu 92.** Cho hai tập hợp $A=\{0;2\}$ và $B=\{0;1;2;3;4\}$. Số tập hợp *X* thỏa mãn $A \cup X = B$ là:

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải**

Vì $A \cup X = B$ nên bắt buộc *X* phải chứa các phần tử $\{1;3;4\}$




và $X \subset B$.

Vậy *X* có 3 tập hợp đó là: $\{1;3;4\}, \{1;2;3;4\}, \{0;1;2;3;4\}$.

**Đáp án.** **B.**

**Câu 93.** Cho hai tập hợp $A=\{0;1\}$ và $B=\{0;1;2;3;4\}$. Số tập hợp *X* thỏa mãn $X \subset C_B A$ là:

**A.** 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

**Lời giải**

Ta có $C_B A = B \setminus A = \{2;3;4\}$ có 3 phần tử nên số tập con $X$ có $2^3 = 8$ (tập).

**Đáp án.** **D.**

**Câu 94.** Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;5\}$. Tìm số tập hợp *X* sao cho $A \setminus X = \{1;3;5\}$ và $X \setminus A = \{6;7\}$.

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

Vì $A\setminus X=\{1;3;5\}$ nên $X$ phải chứa hai phần tử 2; 4 và $X$ không chứa các phần tử 1; 3; 5. Mặt khác $X\setminus A=\{6;7\}$ vậy $X$ phải chứa 6; 7 và các phần tử khác nếu có phải thuộc)#***A.*** Vậy $X=\{2;4;6;7\}$.

**Đáp án**.#**A.**

**Câu 95.** Ký hiệu $|X|$ là số phần tử của tập hợp $X$. Mệnh đề nào sai trong các mệnh đề sau?

**A.** $A\cap B=\varnothing\Rightarrow|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$.

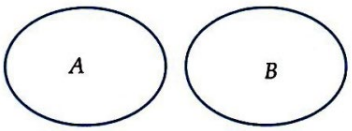
**B.** $A\cap B\neq\varnothing\Rightarrow|A|+|B|=|A\cup B|-|A\cap B|$.

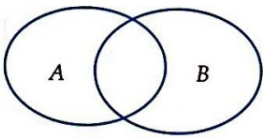
**C.** $A\cap B\neq\varnothing\Rightarrow|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$.

**D.** $A\cap B=\varnothing\Rightarrow|A|+|B|=|A\cup B|$.

**Lời giải**

Kiểm tra các đáp án bằng cách vẽ biểu đồ Ven cho hai trường hợp $A\cap B=\varnothing$ và $A\cap B\neq\varnothing$




**Đáp án**. **C.**

**Câu 96.** Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4\}, B=\{0;2;4;6\}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $A\cap B=\{2;4\}$. **B.** $A\cup B=\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

**C.** $A\subset B$. **D.** $A\setminus B=\{0;6\}$.

**Lời giải**

**Đáp án**.#**A.**

Ta thấy $A\cap B=\{2;4\}$.

**Câu 97.** Ký hiệu $H$ là tập hợp các học sinh của lớp 10**A.** $T$ là tập hợp các học sinh nam, $G$ là tập hợp các học sinh nữ của lớp 10**A.** Khẳng định nào sau đây sai?

**A.** $T\cup G=H$. **B.** $T\cap G=\varnothing$. **C.** $H\setminus T=G$. **D.** $G\setminus T=\varnothing$.

**Lời giải**

**Đáp án**. **D.**

Vì $G\setminus T=G$.

**Câu 98.** Cho $A, B, C$ là ba tập hợp. Mệnh đề nào sau đây là sai?

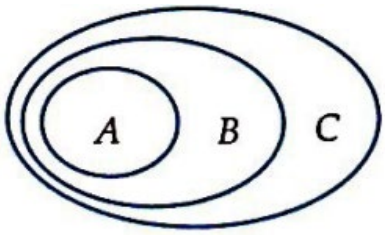
**A.** $A\subset B\Rightarrow A\cap C\subset B\cap C$. **B.** $A\subset B\Rightarrow C\setminus A\subset C\setminus B$.

**C.** $A\subset B\Rightarrow A\cup C\subset B\cup C$. **D.** $A\subset B, B\subset C\Rightarrow A\subset C$.

**Lời giải**

**Đáp án**. **B.**

Ta có thể dùng biểu đồ Ven ta thấy $A\subset B\Rightarrow C\setminus A\subset C\setminus B$




.

**Câu 99.** Cho tập hợp $A=\{a;b;c\}$ và $B=\{a;b;c;d;e\}$. Có tất cả bao nhiêu tập hợp $X$ thỏa mãn $A\subset X\subset B$?

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

**Lời giải**

**Đáp án**. **C.**

Vì $A\subset X$ nên $X$ phải chứa 3 phần tử $\{a;b;c\}$ của)#***A.*** Mặt khác $X\subset B$ nên $X$ chỉ có thể lấy các phần tử *a, b, c, d, e)* Vậy $X$ là một trong các tập hợp sau:

$\{a;b;c\},\{a;b;c;d\}$, $\{a;b;c;e\}$, $\{a;b;c;d;e\}$.

**Câu 100.** Cho hai tập hợp $A=\{1;2;3;4;5\};B=\{1;3;5;7;9\}$. Tập nào sau đây bằng tập $A\cap B$?

**A.** $\{1;3;5\}$. **B.** $\{1;2;3;4;5\}$. **C.** $\{2;4;6;8\}$. **D.** $\{1;2;3;4;5;7;9\}$.

**Lời giải**

**Đáp án**.#**A.**

Vì $A\cap B$ gồm các phần tử vừa thuộc $A$ vừa thuộc) ***B.***

**Câu 101.** Cho tập hợp $A=\{2;4;6;9\},B=\{1;2;3;4\}$. Tập nào sau đây bằng tập $A\setminus B$?

**A.** $\{1;2;3;5\}$. **B.** $\{1;2;3;4;6;9\}$. **C.** $\{6;9\}$. **D.** $\varnothing$.

**Lời giải**

**Đáp án**. **C.**

Vì $A\setminus B=\{x\,|\,x\in A$ và $x\notin B\}$.

**Câu 102.** Cho các tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}:x^2-7x+6=0\},B=\{x\in\mathbb{N}:|x|<4\}$. Khi đó:

**A.** $A\cup B=A$. **B.** $A\cap B=A\cup B$. **C.** $A\setminus B\subset A$. **D.** $B\setminus A=\varnothing$.

**Lời giải**

**Đáp án**. **C.**

Ta có $A=\{1;6\},B=\{x\in\mathbb{N}\setminus|x|<4\}$

$\Rightarrow B=\{0;1;2;3\}\Rightarrow A\setminus B=\{6\}\Rightarrow A\setminus B\subset A$.

**Câu 103.** Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng:

**A.** $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\mathbb{N}$. **B.** $\mathbb{N}^*\cup\mathbb{N}=\mathbb{Z}$. **C.** $\mathbb{N}^*\cap\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$. **D.** $\mathbb{N}^*\cap\mathbb{Q}=\mathbb{N}^*$.

**Lời giải**

**Chọn D**

D đúng do $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{Q}\Rightarrow\mathbb{N}^*\cap\mathbb{Q}=\mathbb{N}^*$.

**Câu 104.** Chọn kết quả **sai** trong các kết quả sau:

**A.** $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subset B$..**B.** $A\cup B=A\Leftrightarrow A\subset B$..

**C.** $A\setminus B=A\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.. **D.** $B\setminus A=B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$..

**Lời giải**

**Chọn B**

B sai do $A \cup B = A \Leftrightarrow A \supset B$..

**Câu 105.** Cho $X = \{7;2;8;4;9;12\}; Y = \{1;3;7;4\}$. Tập nào sau đây bằng tập $X \cap Y$?

**A.** $\{1;2;3;4;8;9;7;12\}$. **B.** $\{2;8;9;12\}$. **C.** $\{4;7\}$. **D.** $\{1;3\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$X = \{7;2;8;4;9;12\}$, $Y = \{1;3;7;4\} \Rightarrow X \cap Y = \{7;4\}$..

**Câu 106.** Cho hai tập hợp $A = \{2,4,6,9\}$ và $B = \{1,2,3,4\}$.Tập hợp $A \setminus B$ bằng tập nào sau đây?

**A.** $A = \{1,2,3,5\}$. **B.** $\{1;3;6;9\}$.. **C.** $\{6;9\}$.. **D.** $\varnothing$..

**Lời giải**

**Chọn C**

$A = \{2,4,6,9\}$, $B = \{1,2,3,4\} \Rightarrow A \setminus B = \{6,9\}$..

**Câu 107.** Cho $A = \{0;1;2;3;4\}, B = \{2;3;4;5;6\}$. Tập hợp $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ bằng?

**A.** $\{0;1;5;6\}$.. **B.** $\{1;2\}$.. **C.** $\{2;3;4\}$.. **D.** $\{5;6\}$..

**Lời giải**

**Chọn A**

$A = \{0;1;2;3;4\}, B = \{2;3;4;5;6\}$.

$A \setminus B = \{0;1\}$, $B \setminus A = \{5;6\} \Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0;1;5;6\}$.

**Câu 108.** Cho $A = \{0;1;2;3;4\}, B = \{2;3;4;5;6\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng:

**A.** $\{0\}$.. **B.** $\{0;1\}$.. **C.** $\{1;2\}$.. **D.** $\{1;5\}$..

**Lời giải**

**Chọn B**

$A = \{0;1;2;3;4\}$, $B = \{2;3;4;5;6\} \Rightarrow A \setminus B = \{0;1\}$.

**Câu 109.** Cho $A = \{0;1;2;3;4\}, B = \{2;3;4;5;6\}$. Tập hợp $B \setminus A$ bằng:

**A.** $\{5\}$.. **B.** $\{0;1\}$.. **C.** $\{2;3;4\}$.. **D.** $\{5;6\}$..

**Lời giải**

**Chọn D**

$A = \{0;1;2;3;4\}$, $B = \{2;3;4;5;6\} \Rightarrow B \setminus A = \{5;6\}$..

**Câu 110.** Cho $A = \{1;5\}; B = \{1;3;5\}$.Chọn kết quả **đúng** trong các kết quả sau

**A.** $A \cap B = \{1\}$.. **B.** $A \cap B = \{1;3\}$.. **C.** $A \cap B = \{1;5\}$.. **D.** $A \cap B = \{1;3;5\}$..

**Lời giải**

**Chọn C**

$A = \{1;5\}; B = \{1;3;5\}$. Suy ra $A \cap B = \{1;5\}$..

**Câu 111.** Cho tập hợp $A = (-\infty;-1]$ và tập $B = (-2;+\infty)$. Khi đó $A \cup B$ là:

**A.** $(-2;+\infty)$ **B.** $(-2;-1]$ **C.** $\mathbb{R}$ **D.** $\varnothing$

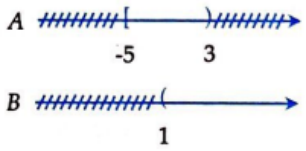
Vì $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \in A$ hoac $x \in B\}$ nên chọn đáp án **C.**

**Đáp án** **C.**

**Câu 112.** Cho hai tập hợp $A = [-5;3), B = (1;+\infty)$. Khi đó $A \cap B$ là tập nào sau đây?

**A.** $(1;3)$ **B.** $(1;3]$ **C.** $[-5;+\infty)$ **D.** $[-5;1]$

**Lời giải**




Ta có thể biểu diễn hai tập hợp $A$ và $B$, tập $A \cap B$ là phần không bị gạch ở cả $A$ và $B$ nên $x \in (1;3)$.

**Đáp án#A.**

**Câu 113.** Cho $A = (-2;1), B = [-3;5]$. Khi đó $A \cap B$ là tập hợp nào sau đây?

**A.** $[-2;1]$ **B.** $(-2;1)$ **C.** $(-2;5]$ **D.** $[-2;5]$

**Lời giải**

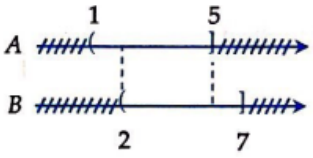
Vì với $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$ hay $\begin{cases} -2 < x < 1 \\ -3 \le x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 1$

**Đáp án** **B.**

**Câu 114.** Cho hai tập hợp $A = (1;5]; B = (2;7]$. Tập hợp $A \setminus B$ là:

**A.** $(1;2]$ **B.** $(2;5)$ **C.** $(-1;7]$ **D.** $(-1;2)$

**Lời giải**




$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \in A$ va $x \notin B\} \Rightarrow x \in (1;2]$.

**Đáp án#A.**

**Câu 115.** Cho tập hợp $A = (2;+\infty)$. Khi đó $C_R A$ là:

**A.** $[2;+\infty)$ **B.** $(2;+\infty)$ **C.** $(-\infty;2]$ **D.** $(-\infty;-2]$

**Lời giải**

Ta có: $C_R A = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty;2]$.

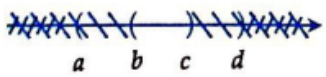
**Đáp án** **C.**

**Câu 116.** Cho các số thực *a, b, c, d* và $a < b < c < d$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $(a;c) \cap (b;d) = (b;c)$ **B.** $(a;c) \cap (b;d) = (b;c]$

**C.** $(a;c) \cap [b;d) = [b;c)$ **D.** $(a;c) \cup [b;d) = (b;c)$

**Lời giải**




**Đáp án#A.**

**Câu 117.** Cho ba tập hợp $A = [-2;2], B = [1;5], C = [0;1)$. Khi đó tập $(A \setminus B) \cap C$ là:

**A.** $\{0;1\}$ **B.** $[0;1)$ **C.** $(-2;1)$ **D.** $[-2;5]$

**Lời giải**

Ta có: $A \setminus B = [-2;1) \Rightarrow (A \setminus B) \cap C = [0;1)$.

**Đáp án** **B.**

**Câu 118.** Cho tập hợp $C_{\mathbb{R}}A=\left[-3;\sqrt{8}\right)$, $C_{\mathbb{R}}B=(-5;2)\cup\left(\sqrt{3};\sqrt{11}\right)$. Tập $C_{\mathbb{R}}(A\cap B)$ là:

**A.** $\left(-3;\sqrt{3}\right)$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\left(-5;\sqrt{11}\right)$. **D.** $(-3;2)\cup\left(\sqrt{3};\sqrt{8}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$C_{\mathbb{R}}A=\left[-3;\sqrt{8}\right)$, $C_{\mathbb{R}}B=(-5;2)\cup\left(\sqrt{3};\sqrt{11}\right)=\left(-5;\sqrt{11}\right)$

$A=(-\infty;-3)\cup\left[\sqrt{8};+\infty\right)$, $B=(-\infty;-5]\cup\left[\sqrt{11};+\infty\right)$.

$\Rightarrow A\cap B=(-\infty;-5]\cup\left[\sqrt{11};+\infty\right)\Rightarrow C_{\mathbb{R}}(A\cap B)=\left(-5;\sqrt{11}\right)$.

**Câu 119.** Cho $A=[1;4];B=(2;6);C=(1;2)$. Tìm $A\cap B\cap C$:

**A.** $[0;4]$. **B.** $[5;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $\varnothing$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$A=[1;4];B=(2;6);C=(1;2)\Rightarrow A\cap B=(2;4]\Rightarrow A\cap B\cap C=\varnothing$.

**Câu 120.** Cho hai tập $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x+3<4+2x\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,5x-3<4x-1\}$.
Tất cả các số tự nhiên thuộc cả hai tập $A$ và $B$ là:

**A.** 0 và 1. **B.** 1. **C.** 0 **D.** Không có.

**Lời giải**

**Chọn A**

$A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x+3<4+2x\}\Rightarrow A=(-1;+\infty)$.

$B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,5x-3<4x-1\}\Rightarrow B=(-\infty;2)$.

$A\cap B=(-1;2)\Leftrightarrow A\cap B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-1<x<2\}$.

$\Rightarrow A\cap B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,-1<x<2\}\Leftrightarrow A\cap B=\{0;1\}$.

**Câu 121.** Cho $A=[-4;7]$, $B=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. Khi đó $A\cap B$:

**A.** $[-4;-2)\cup(3;7]$. **B.** $[-4;-2)\cup(3;7)$. **C.** $(-\infty;2]\cup(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$A=[-4;7]$, $B=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$, suy ra $A\cap B=[-4;-2)\cup(3;7]$.

**Câu 122.** Cho $A=(-\infty;-2]$, $B=[3;+\infty)$, $C=(0;4)$. Khi đó tập $(A\cup B)\cap C$ là:

**A.** $[3;4]$. **B.** $(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$. **C.** $[3;4)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$A=(-\infty;-2]$, $B=[3;+\infty)$, $C=(0;4)$. Suy ra

$A\cup B=(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$; $(A\cup B)\cap C=[3;4)$.

**Câu 123.** Cho $A=\{x\in R:x+2\geq 0\}$, $B=\{x\in R:5-x\geq 0\}$. Khi đó $A\cap B$ là:

**A.** $[-2;5]$. **B.** $[-2;6]$. **C.** $[-5;2]$. **D.** $(-2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $A=\{x\in R:x+2\geq 0\}\Rightarrow A=[-2;+\infty)$, $B=\{x\in R:5-x\geq 0\}\Rightarrow B=(-\infty;5]$

Vậy $\Rightarrow A\cap B=[-2;5]$.

**Câu 124.** Cho $A=\{x\in R: x+2\ge 0\}, B=\{x\in R: 5-x\ge 0\}$. Khi đó $A\setminus B$ là:

**A.** $[-2;5]$. **B.** $[-2;6]$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $A=\{x\in R: x+2\ge 0\}\Rightarrow A=[-2;+\infty)$, $B=\{x\in R: 5-x\ge 0\}\Rightarrow B=(-\infty;5]$.

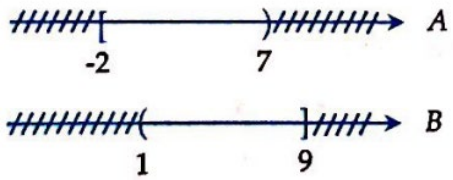
Vậy $\Rightarrow A\setminus B=(5;+\infty)$.

**Câu 125.** Cho hai tập hợp $A=[-2;7), B=(1;9]$. Tìm $A\cup B$.

**A.** $(1;7)$ **B.** $[-2;9]$ **C.** $[-2;1)$ **D.** $(7;9]$

**Lời giải**

**Đáp án** **B.**



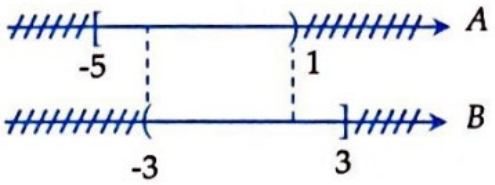

$[-2;7)\cup(1;9]=[-2;9]$

**Câu 126.** Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-5\le x<1\}$; $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-3<x\le 3\}$. Tìm $A\cap B$.

**A.** $[-5;3]$ **B.** $(-3;1)$ **C.** $(1;3]$ **D.** $[-5;3)$

**Lời giải**

**Đáp án** **B.**




$A=[-5;1), B=(-3;3]\Rightarrow A\cap B=(-3;1)$

**Câu 127.** Cho $A=(-1;5], B=(2;7)$. Tìm $A\setminus B$.

**A.** $(-1;2]$ **B.** $(2;5]$ **C.** $(-1;7)$ **D.** $(-1;2)$

**Lời giải**

**Đáp án#A.**

Vì $A\setminus B$ gồm các phần tử thuộc $A$ mà không thuộc $B$ nên $A\setminus B=(-1;2]$.

**Câu 128.** Cho 3 tập hợp $A=(-\infty;0]$, $B=(1;+\infty)$, $C=[0;1)$. Khi đó $(A\cup B)\cap C$ bằng:

**A.** $\{0\}$ **B.** $\mathbb{R}$ **C.** $\{0;1\}$ **D.** $\varnothing$

**Lời giải**

**Đáp án#A.**

$A\cup B=(-\infty;0]\cup(1;+\infty)$

$\Rightarrow (A\cup B)\cap C=\{0\}$.

**Câu 129.** Cho hai tập hợp $M=[-4;7]$ và $N=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. Khi đó $M\cap N$ bằng:

**A.** $[-4;-2)\cup(3;7]$ **B.** $[-4;2)\cup(3;7)$ **C.** $(-\infty;2]\cup(3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$

**Lời giải**

**Đáp án#A.**

$M \cap N = [-4;2) \cup (3;7]$

**Câu 130.** Cho hai tập hợp $A = [-2;3], B = (1;+\infty)$. Khi đó $C_{\mathbb{R}}(A \cup B)$ bằng:

**A.** $(1;3)$ **B.** $(-\infty;1] \cup [3;+\infty)$ **C.** $[3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-2)$

**Lời giải**

**Đáp án** **D.**

Ta có: $A \cup B = [-2;+\infty)$

$\Rightarrow C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = \mathbb{R} \setminus (A \cup B)$

$\Rightarrow C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = (-\infty;-2)$

**Câu 131.** Cho 3 tập hợp: $A = (-\infty;1]$; $B = [-2;2]$ và $C = (0;5)$. Tính $(A \cap B) \cup (A \cap C) = ?$

**A.** $[-2;1]$. **B.** $(-2;5)$. **C.** $(0;1]$. **D.** $[1;2]$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$A \cap B = [-2;1]$.

$A \cap C = (0;1]$.

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = [-2;1]$.

**Câu 132.** Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}; B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 3 < n^2 < 30\}$. Khi đó tập hợp $A \cap B$ bằng:

**A.** $\{2;4\}$.. **B.** $\{2\}$.. **C.** $\{4;5\}$.. **D.** $\{3\}$..

**Lời giải**

**Chọn B**

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\} \Leftrightarrow A = \{0;2\}$

$B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 3 < n^2 < 30\} \Leftrightarrow B = \{1;2;3;4;5\}$

$\Rightarrow A \cap B = \{2\}$..

**Câu 133.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$. Tìm $A \cap B$.

**A.** $A \cap B = \{-2;1;2\}$.. **B.** $A \cap B = \{0;1;2;3\}$..

**C.** $A \cap B = \{1;2;3\}$.. **D.** $A \cap B = \{-1;2\}$..

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét $(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4) = 0\} \Rightarrow A = \{-2;1;2;3\}.$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\} = \{0;1;2;3\}.$

Vậy $A \cap B = \{1;2;3\}$..

**Câu 134.** Cho 2 tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\middle|x^2+x-6=0\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|2x^2-3x+1=0\right\}$. Chọn khẳng định đúng?

**A.** $B\setminus A=\{1;2\}$. **B.** $A\cap B=\{-3;1;2\}$. **C.** $A\setminus B=A$. **D.** $A\cup B=\varnothing$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $x^2+x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\in\mathbb{Z}\\x=2\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Rightarrow A=\{-3;2\}$

$2x^2-3x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in\mathbb{N}\\x=\dfrac{1}{2}\notin\mathbb{N}\end{array}\right.\Rightarrow B=\{1\}$

Suy ra $B\setminus A=B$; $A\cap B=\varnothing$; $A\setminus B=A$; $A\cup B=\{-3;1;2\}$.

**Câu 135.** Cho 2 tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|(2x-x^2)(x-1)=0\right\}$, $B=\left\{n\in\mathbb{N}\middle|0<n^2<10\right\}$. Chọn mệnh đề đúng?

**A.** $A\cap B=\{1;2\}$. **B.** $A\cap B=\{2\}$. **C.** $A\cap B=\{0;1;2;3\}$. **D.** $A\cap B=\{0;3\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $(2x-x^2)(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-x^2=0\\x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;x=2\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow A=\{0;1;2\}$.

$B=\{1;2;3\}$.

Suy ra $A\cap B=\{1;2\}$.

**Câu 136.** Cho hai tập hợp $A=\{1;2003;2018;2019\}$ và $B=\{0;2003;2018;2020\}$. Tìm tập hợp $A\cap B$.

**A.** $A\cap B=\{0;2020\}$. **B.** $A\cap B=\{1;2019\}$.

**C.** $A\cap B=\{2003;2018\}$. **D.** $A\cap B=\{0;1;2003;2018;2019;2020\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $A\cap B=\{2003;2018\}$.

**Câu 137.** Cho hai tập hợp $M=\{1;2;3;5\}$ và $N=\{2;6;-1\}$. Xét các khẳng định sau đây:

$M\cap N=\{2\}$; $N\setminus M=\{1;3;5\}$; $M\cup N=\{1;2;3;5;6;-1\}$.

Có bao nhiêu khẳng định đúng trong ba khẳng định nêu trên?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:

+ $M\cap N=\{2\}$.

+ $N\setminus M=\{6;-1\}$.

+ $M\cup N=\{1;2;3;5;6;-1\}$.

Vậy có hai khẳng định đúng trong ba khẳng định trên.

**Câu 138.** Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|x|<3\}$, $B=\{0\,;1\,;3\}$, $C=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|(x^2-4x+3)(x^2-4)=0\right\}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** $(A\setminus B)\cup C=\{-2\,;\ -1\,;\ 2\,;3\}$.

**B.** $C_{\mathbb{N}}B=\varnothing$.

**C.** $(B\cap C)\setminus A=\{1\}$.

**D.** $C_{A\cup B}C=\{-1\,;\ 0\}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có

$$\left[\begin{array}{l}x^2-4x+3=0\\ x^2-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\\ x=\pm2\end{array}\right.\text{ mà nên } C=\{1\,;\ -2\,;\ 2\,;\ 3\}$$

$|x|<3\Leftrightarrow -3<x<3$ do $x\in\mathbb{Z}$ nên $A=\{-2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\}$

Khi đó $A\setminus B=\{-2\,;\ -1\,;\ 2\}$ nên $(A\setminus B)\cup C=\{-2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\}$ do đó loại#**A.**

$B\cap C=\{1\,;\ 3\}$ nên $(B\cap C)\setminus A=\{3\}$ nên loại. **C.**

$A\cup B=\{-2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\}$ nên $C_{A\cup B}C=\{-1\,;\ 0\}$ vậy chọn **D.**

**Câu 139.** Cho $A$ là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10, $B=\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\ n\le 6\right\}$, $C=\left\{n\in\mathbb{N}\middle|4\le n\le 10\right\}$. Tìm tập hợp $A\cap(B\cup C)$.

**A.** $A\cap(B\cup C)=B$.

**B.** $A\cap(B\cup C)=A$.

**C.** $A\cap(B\cup C)=C$.

**D.** $A\cap(B\cup C)=\varnothing$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$A=\{0\,;2\,;4\,;6\,;8\}$; $B=\{0\,;1\,;\ 2\,;3\ ;4\,;\ 5\,;\ 6\}$; $C=\{4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$

$\Rightarrow A\cap(B\cup C)=\{0\,;2\,;4\,;6\,;8\}=A$.

**Câu 140.** Cho hai tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\left(x^2-4x\right)\left(2x^2-3x-2\right)=0\right\}$ và $B=\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\ 3<n^2<30\right\}$. Khi đó, $A\cap B$ là?

**A.** $\{2\,;4\}$.

**B.** $\{5\ ;4\}$.

**C.** $\{3\}$.

**D.** $\{2\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$A=\left\{0\,;2\,;4\,;-\frac{1}{2}\right\}$; $B=\{2\,;3\,;4\,;5\}$

$\Rightarrow A\cap B=\{2\,;4\}$.

**Câu 141.** Cho 2 tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\left(2x-x^2\right)\left(2x^2-3x-2\right)=0\right\}$,

$B=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\left(2x^2+x\right)(3x-12m)=0\right\}$, với giá trị nào của $m$ thì $A=B$?

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $-2$.

**C.** $2$.

**D.** $-\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\left(2x-x^2\right)\left(2x^2-3x-2\right)=0\right\}$ ta có: $\left(2x-x^2\right)\left(2x^2-3x-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-x^2=0\\2x^2-3x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\dfrac{1}{2}\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow A=\left\{0;2;-\frac{1}{2}\right\}.$$

Xét tập hợp $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\left(2x^2+x\right)\left(3x-12m\right)=0\right\}=\left\{0;-\frac{1}{2};4m\right\}$.

Để $A=B\Leftrightarrow 2=4m\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

**Câu 142.** Cho hai tập hợp bằng nhau là $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|x-2|=\left|x^2-3x+1\right|\right\}$ và $B=\{b,c\}$. Giá trị biểu thức $M=b^3+c^3$ bằng

**A.** 62. **B.** 26. **C.** 82. **D.** 28.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:

$$|x-2|=\left|x^2-3x+1\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+1=x-2\\x^2-3x+1=2-x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x+3=0\\x^2-2x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=1 & (n)\\x=3 & (n)\\x=1\pm\sqrt{2} & (l)\end{array}\right.\text{ do } x\in\mathbb{Z}\Rightarrow A=\{1\,;\,3\}$$

Mà $B=A\Rightarrow B=\{1;3\}\Rightarrow M=b^3+c^3=28$.

**Câu 143.** Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=3k,k\in\mathbb{Z},10<x<100\right\}$. Tổng các phần tử của tập hợp $A$ bằng:

**A.** 1665. **B.** 1767. **C.** 1566. **D.** 1674.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $10<x<100\Rightarrow 10<3k<100$

$$\Rightarrow\frac{10}{3}<k<\frac{100}{3}$$

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{4;5;...;33\}$.

Suy ra $x\in\{12;15;...;99\}$.

Tổng các phần tử của tập hợp $A$ bằng: 1665.

**Câu 144.** Cho tập hợp $A=\left\{(x\,;\,y)\,|\,x^2-25=y(y+6);x\,,\,y\in\mathbb{Z}\right\}$, $B=\left\{(4\,;\,-3)\,;\,(-4\,;\,-3)\right\}$ và tập hợp $M$. Biết $A\setminus B=M$, số phần tử của tập hợp $M$ là

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $x^2-25=y(y+6)\Leftrightarrow x^2-(y+3)^2=16\Leftrightarrow\left(|x|+|y+3|\right)\left(|x|-|y+3|\right)=16$

Vì $|x|+|y+3|\ge|x|-|y+3|$ và $|x|+|y+3|\ge 0$ nên $|x|-|y+3|\ge 0$

Do đó $\left(|x|+|y+3|\right)\left(|x|-|y+3|\right)=16$ khi các trường hợp sau xảy ra:

$*\begin{cases}|x|+|y+3|=16\\|x|-|y+3|=1\end{cases}\begin{cases}|x|=\dfrac{17}{2}\\|y+3|=\dfrac{15}{2}\end{cases}$ loại do $x,\ y\in\mathbb{Z}$

$*\begin{cases}|x|+|y+3|=8\\|x|-|y+3|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|=5\\|y+3|=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm5\\y+3=\pm3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm5\\\left[\begin{array}{l}y=0\\y=-6\end{array}\right.\end{cases}$

$*\begin{cases}|x|+|y+3|=4\\|x|-|y+3|=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|=4\\|y+3|=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm4\\y=-3\end{cases}$

Do đó $A=\left\{(5\ ;\ 0)\ ;\ (5\ ;\ -6)\ ;\ (-5\ ;\ 0)\ ;\ (-5\ ;\ -6)\ ;\ (4\ ;\ -3)\ ;\ (-4\ ;\ -3)\right\}$

$\Rightarrow M=\left\{(5\ ;\ 0)\ ;\ (5\ ;\ -6)\ ;\ (-5\ ;\ 0)\ ;\ (-5\ ;\ -6)\right\}$

$\Rightarrow$ số phần tử của tập hợp $M$ bằng $4$.

**Câu 145.** Cho ba tập $A=[-2;0]$, $B=\{x\in\mathbb{R}:-1<x<0\}$; $C=\{x\in\mathbb{R}:|x|<2\}$. Khi đó:

**A.** $(A\cap C)\setminus B=(-2;-1)$.

**B.** $(A\cap C)\setminus B=[-2;-1]$.

**C.** $(A\cap C)\setminus B=(-2;-1]$.

**D.** $(A\cap C)\setminus B=[-2;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$A=[-2;0]$

$B=(-1;0)$

$C=(-2;2)$

$A\cap C=(-2;0)$

$(A\cap C)\setminus B=(-2;0)\setminus(-1;0)=(-2;-1]$

**Câu 146.** Cho $A=(-\infty;-2]$; $B=[3;+\infty)$ và $C=(0;4)$. Khi đó tập $(A\cup B)\cap C$ là:

**A.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.

**B.** $(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$.

**C.** $[3;4)$.

**D.** $[3;4]$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $A\cup B=(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$.

$\Rightarrow(A\cup B)\cap C=[3;4)$.

**Câu 147.** Cho ba tập hợp $C_{\mathbb{R}}M=(-\infty;3),C_{\mathbb{R}}N=(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$ và $C_{\mathbb{R}}P=(-2;3]$. Chọn khẳng định đúng?

**A.** $(M\cap N)\cup P=(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$.

**B.** $(M\cap N)\cup P=[-3;+\infty)$.

**C.** $(M\cap N)\cup P=(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$.

**D.** $(M\cap N)\cup P=[-2;3)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Ta có**

$C_{\mathbb{R}}M=(-\infty;3)\Rightarrow M=[3;+\infty)$.

$C_{\mathbb{R}}N=(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)\Rightarrow N=[-3;3]$.

$C_{\mathbb{R}}P=(-2;3]\Rightarrow P=(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$.

$M\cap N=\{3\}$.

NÊN: $(M\cap N)\cup P=(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$.

**Dạng 6. (Nâng cao) Các bài toán tìm điều kiện của tham số**

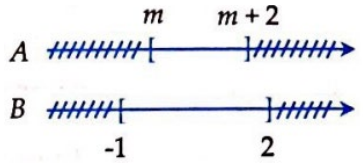
**Câu 148.** Cho tập hợp $A=[m;m+2], B[-1;2]$. Tìm điều kiện của $m$ để $A\subset B$.

**A.** $m\le -1$ hoặc $m\ge 0$ **B.** $-1\le m\le 0$ **C.** $1\le m\le 2$ **D.** $m<1$ hoặc $m>2$

**Lời giải**

Để $A\subset B$ thì $-1\le m<m+2\le 2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -1\\ m+2\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -1\\ m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le 0$




**Đáp án** **B.**

**Câu 149.** Cho tập hợp $A=(0;+\infty)$ và $B=\{x\in\mathbb{R}\setminus mx^2-4x+m-3=0\}$. Tìm $m$ để $B$ có đúng hai tập con và $B\subset A$.

**A.** $\left[\begin{array}{l}0<m\le 3\\ m=4\end{array}\right.$ **B.** $m=4$ **C.** $m>0$ **D.** $m=3$

**Lời giải**

Để $B$ có đúng hai tập con thì $B$ phải có duy nhất một phần tử, và $B\subset A$ nên $B$ có một phần tử thuộc#***A***. Tóm lại ta tìm $m$ để phương trình $mx^2-4x+m-3=0$ (1) có nghiệm duy nhất lớn hơn 0.

+ Với $m=0$ ta có phương trình: $-4x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-3}{4}$ (không thỏa mãn).

+ Với $m\ne 0$:

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất lớn hơn 0 điều kiện cần là:

$\Delta'=4-m(m-3)=0\Leftrightarrow -m^2+3m+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=4\end{array}\right.$

+) Với $m=-1$ ta có phương trình $-x^2-4x-4=0$

Phương trình có nghiệm $x=-2$ (không thỏa mãn).

+) Với $m=4$, ta có phương trình $4x^2-4x+1=0$

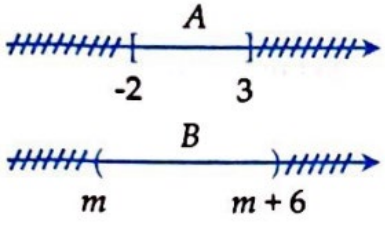
Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}>0\Rightarrow m=4$ thỏa mãn.

**Đáp Án** **B.**

**Câu 150.** Cho hai tập hợp $A=[-2;3], B=(m;m+6)$. Điều kiện để $A\subset B$ là:

**A.** $-3\le m\le -2$ **B.** $-3<m<-2$ **C.** $m<-3$ **D.** $m\ge -2$

**Lời giải**

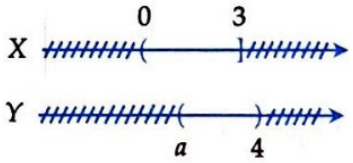



Điều kiện để $A\subset B$ là $m<-2<3<m+6\Leftrightarrow\begin{cases}m<-2\\ m+6>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-2\\ m>-3\end{cases}\Leftrightarrow -3<m<-2$.

**Câu 151.** Cho hai tập hợp $X=(0;3]$ và $Y=(a;4)$. Tìm tất cả các giá trị của $a\le 4$ để $X\cap Y\neq\varnothing$.

**A.** $\left[\begin{array}{l}a<3\\a\ge 4\end{array}\right.$ **B.** $a<3$ **C.** $a<0$ **D.** $a>3$

**Lời giải**



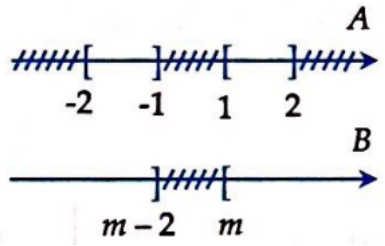

Ta tìm $a$ để $X\cap Y=\varnothing\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a\ge 3\\a\le 4\end{array}\right.\Leftrightarrow 3\le a\le 4\Rightarrow X\cap Y\neq\varnothing$ là $a<3$.

**Đáp án** **B.**

**Câu 152.** Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\setminus 1\le|x|\le 2\};B=(-\infty;m-2]\cup[m;+\infty)$. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để $A\subset B$.

**A.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 4\\m\le -2\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 4\\m\le -2\\m=1\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m>4\\m<-2\\m=1\end{array}\right.$ **D.** $-2<m<4$

**Lời giải**




Giải bất phương trình: $1\le|x|\le 2\Leftrightarrow x\in[-2;-1]\cup[1;2]$

$\Rightarrow A=[-2;-1]\cup[1;2]$

Để $A\subset B$ thì: $\left[\begin{array}{l}m-2\ge 2\\m\le -2\\\left\{\begin{array}{l}-1\le m-2\\m\le 1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 4\\m\le -2\\m=1\end{array}\right.$

**Đáp án** **B.**

**Câu 153.** Cho số thực $a<0$ .Điều kiện cần và đủ để $(-\infty;9a)\cap\left(\frac{4}{a};+\infty\right)\neq\varnothing$ là:

**A.** $-\frac{2}{3}<a<0.$ **B.** $-\frac{2}{3}\le a<0.$ **C.** $-\frac{3}{4}<a<0.$ **D.** $-\frac{3}{4}\le a<0.$

**Lời giải**

**Chọn A**

$(-\infty;9a)\cap\left(\frac{4}{a};+\infty\right)\neq\varnothing\ (a<0)\Leftrightarrow\frac{4}{a}<9a\Leftrightarrow\frac{4}{a}-9a<0\Leftrightarrow\frac{4-9a^2}{a}<0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4-9a^2>0\\a<0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}<a<0.$

**Câu 154.** Cho tập hợp $A=[m;m+2],B=[-1;2]$ với $m$ là tham số. Điều kiện để $A\subset B$ là:

**A.** $1\le m\le 2$ **B.** $-1\le m\le 0$

**C.** $m\le -1$ hoặc $m\ge 0$ **D.** $m<-1$ hoặc $m>2$

**Lời giải**

**: Đáp án** **B.**

$A \subset B \Leftrightarrow -1 \le m < m+2 \le 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -1 \\ m+2 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -1 \\ m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 0$

**Câu 155.** Cho tập hợp $A=[m;m+2], B=[1;3)$. Điều kiện để $A \cap B = \varnothing$ là:

**A.** $m<-1$ hoặc $m>3$ **B.** $m \le -1$ hoặc $m>3$

**C.** $m<-1$ hoặc $m \ge 3$ **D.** $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$

**Lời giải**

**Đáp án** **C.**

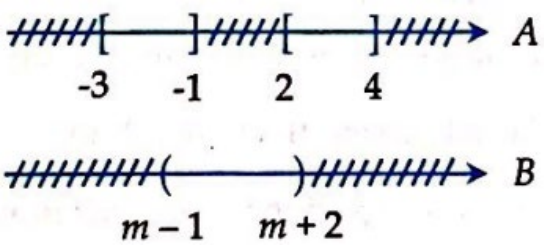
$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 3 \\ m+2<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 3 \\ m<-1 \end{array}\right.$

**Câu 156.** Cho hai tập hợp $A=[-3;-1] \cup [2;4]$, $B=(m-1;m+2)$. Tìm $m$ để $A \cap B \ne \varnothing$.

**A.** $|m|<5$ và $m \ne 0$ **B.** $|m|>5$ **C.** $1 \le m \le 3$ **D.** $m>0$

**Lời giải**

**Đáp án#A.**




Ta đi tìm $m$ để $A \cap B = \varnothing$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m+2 \le -3 \\ m-1 \ge 4 \\ \begin{cases} -1 \le m-1 \\ m+2 \le 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -5 \\ m \ge 5 \\ m = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow A \cap B \ne \varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < m < 5 \\ m \ne 0 \end{cases}$

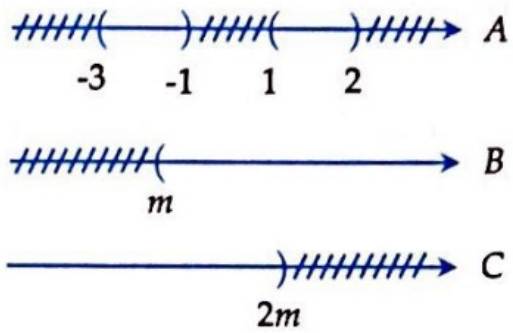
hay $\begin{cases} |m|<5 \\ m \ne 0 \end{cases}$

**Câu 157.** Cho 3 tập hợp $A=(-3;-1) \cup (1;2)$, $B=(m;+\infty)$, $C(-\infty;2m)$. Tìm $m$ để $A \cap B \cap C \ne \varnothing$.

**A.** $\frac{1}{2}<m<2$ **B.** $m \ge 0$ **C.** $m \le -1$ **D.** $m \ge 2$

**Lời giải**

**Đáp án#A.**




Ta đi tìm $m$ để $A\cap B\cap C=\varnothing$

- TH1: Nếu $2m\le m\Leftrightarrow m\le 0$ thì $B\cap C=\varnothing$

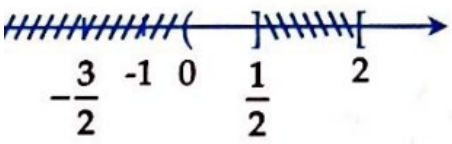
$\Rightarrow A\cap B\cap C=\varnothing$

- TH2: Nếu $2m>m\Leftrightarrow m>0$

$\Rightarrow A\cap B\cap C=\varnothing$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m\le -3\\ m\ge 2\\ \begin{cases}-1\le m\\ 2m\le 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le\dfrac{-3}{2}\\ m\ge 2\\ -1\le m\le\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vì $m>0$ nên $\left[\begin{array}{l}0<m\le\dfrac{1}{2}\\ m\ge 2\end{array}\right.$




$A\cap B\cap C=\varnothing\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$

$\Rightarrow A\cap B\cap C\ne\varnothing\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<m<2$

**Câu 158.** Cho hai tập $A=[0;5]$; $B=(2a;3a+1]$, $a>-1$. Với giá trị nào của $a$ thì $A\cap B\ne\varnothing$

**A.** $-\dfrac{1}{3}\le a\le\dfrac{5}{2}$. **B.** $\left[\begin{array}{l}a\ge\dfrac{5}{2}\\ a<-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}a<\dfrac{5}{2}\\ a\ge-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$. **D.** $-\dfrac{1}{3}\le a<\dfrac{5}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta tìm $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2a\ge 5\\ 3a+1<0\end{array}\right.\\ a>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a\ge\dfrac{5}{2}\\ a<-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\\ a>-1\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a\ge\dfrac{5}{2}\\ -1<a<-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$ $\Rightarrow A\cap B\ne\varnothing\Leftrightarrow-\dfrac{1}{3}\le a<\dfrac{5}{2}$

chọn#**A.**

**Câu 159.** Cho 2 tập khác rỗng $A=(m-1;4];B=(-2;2m+2),m\in\mathbb{R}$. Tìm m để $A\cap B\ne\varnothing$

**A.** $-1<m<5$. **B.** $1<m<5$. **C.** $-2<m<5$. **D.** $m>-3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đáp án A đúng vì: Với 2 tập khác rỗng A, B ta có điều kiện $\begin{cases} m-1<4 \\ 2m+2>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<5 \\ m>-2 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<5$. Để $A\cap B\neq\varnothing \Leftrightarrow m-1<2m+2 \Leftrightarrow m>-3$. So với kết quả của điều kiện thì $-2<m<5$.

**Câu 160.** Cho số thực $a<0$ .Điều kiện cần và đủ để $(-\infty;9a)\cap\left(\frac{4}{a};+\infty\right)\neq\varnothing$ là:

**A.** $-\frac{3}{4}\le a<0.$ **B.** $-\frac{2}{3}<a<0.$ **C.** $-\frac{2}{3}\le a<0.$ **D.** $-\frac{3}{4}<a<0.$

**Lời giải**

**Chọn B**

$(-\infty;9a)\cap\left(\frac{4}{a};+\infty\right)\neq\varnothing\ (a<0)\Leftrightarrow\frac{4}{a}<9a\Leftrightarrow\frac{4}{a}-9a<0\Leftrightarrow\frac{4-9a^2}{a}<0\Leftrightarrow\begin{cases}4-9a^2>0\\a<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow-\frac{2}{3}<a<0$.

**Câu 161.** Cho hai tập hợp $A=(m-1;5);B=(3;+\infty),m\in\mathbb{R}$. Tìm $m$ để $A\backslash B=\varnothing.$

**A.** $m=4.$ **B.** $4\le m<6.$ **C.** $4\le m\le 6.$ **D.** $m\ge 4.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện $m-1<5\Leftrightarrow m<6$

Để $A\backslash B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow m-1\ge 3\Leftrightarrow m\ge 4$

Kết hợp điều kiện bàn đầu ta được: $4\le m<6.$

**Câu 162.** Cho tập hợp $A=(-\infty;m-1)$, tập $B=(2;+\infty)$, tìm $m$ để $A\cap B=\varnothing$?

**A.** $m<3$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m>1$. **D.** $m\le 1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow m-1\le 2\Leftrightarrow m\le 3$.

**Câu 163.** Cho nửa khoảng $A=[0;3)$ và $B=(b;10]$. $A\cap B=\varnothing$ nếu:

**A.** $b<3$. **B.** $b\ge 3$. **C.** $0\le b<3$. **D.** $b\le 0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow b\ge 3$.

**Câu 164.** Cho tập hợp $A=[m;m+2]$ và $B=[-1;2]$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để $A\subset B$.

**A.** $-1\le m\le 0$. **B.** $m\le 1$ hoặc $m\ge 2$. **C.** $1\le m\le 2$. **D.** $m<1$ hoặc $m>2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$A\subset B\Leftrightarrow -1\le m<m+2\le 2\Leftrightarrow -1\le m\le 0$.

**Câu 165.** Cho tập hợp khác rỗng $A=[a,8-a],a\in R$. Với giá trị nào của $a$ thì $A$ sẽ là một đoạn có độ dài bằng 5?

**A.** $a=3$ **B.** $a<4$. **C.** $a=\frac{3}{2}$. **D.** $a=\frac{13}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $8-a>a \Leftrightarrow a<4$

Độ dài đoạn $A$ là $8-a-a=5 \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}(tm)$

**Câu 166.** Cho hai tập hợp $A=(0;3)$ và $B=[a;a+2]$, với giá trị nào của $a$ thì $A\cap B=\varnothing$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} a\le -2 \\ a\ge 3 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} a\le -2 \\ a\ge 2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} a\le -3 \\ a\ge 1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} a<-2 \\ a\ge 3 \end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Để $A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\ge 3 \\ a+2\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\ge 3 \\ a\le -2 \end{array}\right.$.

**Câu 167.** Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,1\le|x|\le 2\}$; $B=(-\infty;m-2]\cup[m;+\infty)$. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để $A\subset B$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m\le -2 \end{array}\right.$. **B.** $-2<m<4$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m\le -2 \\ m=1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<-2 \\ m=1 \end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $A=[-2;-1]\cup[1;2]$, $B=(-\infty;m-2]\cup[m;+\infty)$.

Để $A\subset B$ ta có

Trường hợp 1: $\begin{cases} m-2\ge -1 \\ m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 1 \\ m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Trường hợp 2: $m\le -2$.

Trường hợp 3: $m-2\ge 2 \Leftrightarrow m\ge 4$.

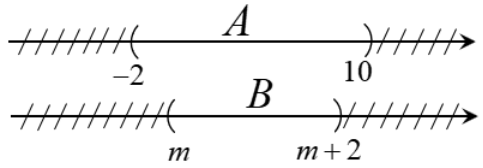
Vậy $\left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m\le -2 \\ m=1 \end{array}\right.$ thì $A\subset B$.

**Câu 168.** Cho các tập hợp $A=(-2;10)$, $B=(m;m+2)$. Tìm $m$ để tập $A\cap B=(m;m+2)$

**A.** $2<m\le 8$. **B.** $2\le m\le 8$. **C.** $-2\le m\le 8$. **D.** $2\le m<8$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Ta có $A\cap B=(m;m+2)=B \Leftrightarrow B\subset A \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -2 \\ m+2\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le m\le 8$.

**Câu 169.** Cho $A=[m;m+1]$; $B=[1;4)$. Tìm $m$ để $A\cap B\ne\varnothing$.

**A.** $m \in [0;4]$. **B.** $m \in (0;4]$. **C.** $m \in (0;4)$. **D.** $m \in [0;4)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Để $A \cap B \neq \varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \geq 1 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 4 \end{cases}$.

**Câu 170.** Cho các tập hợp khác rỗng $A = \left[ m-1; \frac{m+3}{2} \right]$ và $B = (-\infty;-3) \cup [3;+\infty)$.

Tập hợp các giá trị thực của $m$ để $A \cap B \neq \varnothing$ là

**A.** $(-\infty;-2) \cup [3;+\infty)$. **B.** $(-2;3)$.

**C.** $(-\infty;-2) \cup [3;5]$. **D.** $(-\infty;-9) \cup (4;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Để $A \cap B \neq \varnothing$ thì điều kiện là $\begin{cases} m-1 \leq \frac{m+3}{2} \\ \left[ \begin{array}{l} m-1 < -3 \\ \frac{m+3}{2} \geq 3 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ \left[ \begin{array}{l} m < -2 \\ m \geq 3 \end{array} \right. \end{cases} . \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} m < -2 \\ 3 \leq m \leq 5 \end{array} \right.$

Vậy $m \in (-\infty -2) \cup [3;5]$.

**Câu 171.** Cho hai tập hợp $M = [2m-1;\ 2m+5]$ và $N = [m+1;\ m+7]$ (với $m$ là tham số thực). Tổng tất cả các giá trị của $m$ để hợp của hai tập hợp $M$ và $N$ là một đoạn có độ dài bằng 10 là

**A.** 4. **B.** -2. **C.** 6. **D.** 10.

**Lời giải**

**Chọn A**

Nhận thấy $M, N$ là hai đoạn cùng có độ dài bằng 6, nên để $M \cup N$ là một đoạn có độ dài bằng 10 thì ta có các trường hợp sau:

* $2m-1 \leq m+1 \leq 2m+5 \Leftrightarrow m \in [-4;2]$ $(1)$

Khi đó $M \cup N = [2m-1; m+7]$, nên $M \cup N$ là một đoạn có độ dài bằng 10 khi:

$(m+7)-(2m-1)=10 \Leftrightarrow m=-2$ (thỏa mãn $(1)$).

* $2m-1 \leq m+7 \leq 2m+5 \Leftrightarrow m \in [2;8]$ $(2)$

Khi đó $M \cup N = [m+1; 2m+5]$, nên $M \cup N$ là một đoạn có độ dài bằng 10 khi:

$(2m+5)-(m+1)=10 \Leftrightarrow m=6$ (thỏa mãn $(2)$).

Vậy Tổng tất cả các giá trị của $m$ để hợp của hai tập hợp $M$ và $N$ là một đoạn có độ dài bằng 10 là $-2+6=4$.

**Câu 172.** Cho hai tập hợp $A = (m-1\ ;\ 5]$, $B = (3\ ;\ 2020-5m)$ và $A$, $B$ khác rỗng. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để $A \setminus B = \varnothing$?

**A.** 3. **B.** 399. **C.** 398. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn D**

Vì $A, B$ là hai tập hợp khác rỗng, nên ta có điều kiện:

$\begin{cases} m-1 < 5 \\ 3 < 2020-5m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m < \frac{2017}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m < 6$.

Để $A\setminus B=\varnothing$ thì $A\subset B$ ta có điều kiện: $\begin{cases}3\le m-1\\5<2020-5m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\le m\\m<403\end{cases}\Leftrightarrow 4\le m<403$.

Kết hợp điều kiện, $4\le m<6$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn.

**Câu 173.** Cho hai tập hợp $X=[-1\ ;\ 4]$ và $Y=[m+1;\ m+3]$. Tìm tất cả các giá trị $m\in\mathbb{R}$ sao cho $Y\subset X$.

**A.** $-2\le m\le 1$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m\le -2\\m\ge 1\end{array}\right.$. **C.** $-2<m<1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>1\end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$Y\subset X\Leftrightarrow -1\le m+1\le m+3\le 4\Leftrightarrow -2\le m\le 1$. Vậy chọn đáp án#**A.**

HS chọn đáp án B và D do đọc không kỹ đề hoặc hiểu sai khái niệm tập hợp con thành $X\subset Y$ HS chọn đáp án C do hiểu khái niệm tập hợp con thành khái niệm tập hợp con thực sự.

**Câu 174.** Cho hai tập hợp $P=[3m-6\ ;\ 4)$ và $Q=(-2\ ;\ m+1)$, $m\in\mathbb{R}$. Tìm $m$ để $P\setminus Q=\varnothing$.

**A.** $3\le m<\dfrac{10}{3}$. **B.** $3<m<\dfrac{10}{3}$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $\dfrac{4}{3}<m\le 3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $P$, $Q$ là hai tập hợp khác rỗng, nên ta có điều kiện:

$$\begin{cases}3m-6<4\\m+1>-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{10}{3}\\m>-3\end{cases}\Leftrightarrow -3<m<\dfrac{10}{3}$$

Để $P\setminus Q=\varnothing\Leftrightarrow P\subset Q$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3m-6>-2\\m+1\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{4}{3}\\m\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 3$$

Kết hợp với điều kiện ta có $3\le m<\dfrac{10}{3}$

**Câu 175.** Cho tập hợp $A=[4;7]$ và $B=[2a+3b-1;3a-b+5]$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Khi $A=B$ thì giá trị biểu thức $M=a^2+b^2$ bằng?

**A.** $2$. **B.** $5$. **C.** $13$. **D.** $25$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $A=[4;7]$, $B=[2a+3b-1;3a-b+5]$. Khi đó:

$$A=B\Leftrightarrow\begin{cases}2a+3b-1=4\\3a-b+5=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+3b=5\\3a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow M=a^2+b^2=2.$$

**Câu 176.** Cho các tập hợp khác rỗng $[2m;m+3]$ và $B=(-\infty;-2]\cup(4;+\infty)$. Tập hợp các giá trị thực của $m$ để $A\cap B\ne\varnothing$ là

**A.** $\left[\begin{array}{l}m\le -1\\m>1\end{array}\right.$. **B.** $-1<m\le 1$. **C.** $1<m<3$. **D.** $\left[\begin{array}{l}1<m\le 3\\m\le -1\end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Để $A\cap B\ne\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}2m\le m+3\\\left[\begin{array}{l}2m\le -2\\m+3>4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 3\\\left[\begin{array}{l}m\le -1\\m>1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<m\le 3\\m\le -1\end{array}\right.$.

**Câu 177.** Cho số thực $m<0$. Tìm $m$ để $\left(-\infty;m^2\right)\cap\left(4;+\infty\right)\neq\varnothing$

**A.** $m>2$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $m<0$. **D.** $m<-2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Để

$\left(-\infty;m^2\right)\cap\left(4;+\infty\right)\neq\varnothing\Leftrightarrow m^2>4\Leftrightarrow m^2-4>0\Leftrightarrow\left(m-2\right)\left(m+2\right)>0\Leftrightarrow m+2<0\Leftrightarrow m<-2$ (do $m<0$ nên $m-2<0$).

**Câu 178.** Cho 2 tập khác rỗng $A=\left(m-1;4\right];B=\left(-2;2m+2\right),m\in\mathbb{R}$. Tìm m để $A\subset B$

**A.** $1<m<5$. **B.** $m>1$. **C.** $-1\le m<5$. **D.** $-2<m<-1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Với 2 tập khác rỗng $A$, $B$ ta có điều kiện $\begin{cases}m-1<4\\2m+2>-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<5\\m>-2\end{cases}\Leftrightarrow-2<m<5$.

Để $A\subset B\Leftrightarrow\begin{cases}m-1\ge-2\\2m+2>4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge-1\\2m+2>4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge-1\\m>1\end{cases}\Leftrightarrow m>1$. So với điều kiện $1<m<5$.

**Câu 179.** Cho các tập hợp $A=\left\{3k+1\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\},B=\left\{6m+4\,|\,m\in\mathbb{Z}\right\}$. Khi đó:

**A.** $A=B$. **B.** $A\subset B$. **C.** $B\subset A$. **D.** $A\setminus B=\varnothing$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\forall x\in B\Rightarrow x=6m+4$.

$\Rightarrow x=3\left(2m+1\right)+1$.

Đặt $k=2m+1\in\mathbb{Z}$, ta được $x\in A$.

Suy ra: $B\subset A$.

Ta có: $7\in A$. Nếu $7\in B$ thì $7=6m+4\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

Do đó: $A\subset B$ và $A=B$ sai.

# Bài 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

• |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x, y$ là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$ax+by<c; ax+by>c; ax+by\le c; ax+by\ge c,$

trong đó $a,b,c$ là những số cho trước với $a,b$ không đồng thời bằng $0, x$ và $y$ là các ẩn.

Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax+by<c(*)$.

Mỗi cặp số $(x_0;y_0)$ sao cho $ax_0+by_0<c$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình $(*)$.

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của bất phương trình (*) được gọi là *miền nghiệm* của bất phương trình đó.

Nghiệm và miền nghiệm của các bất phương trình dạng $ax+by>c, ax+by\le c$ và $ax+by\ge c$ được định nghĩa tương tự.

***Ví dụ 1.*** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $3x+2y\ge -5$ ?

a) $(2;-1)$;

b) $(-2;0)$;

c) $(-1;-1)$.

***Giải***

a) Thay $x=2, y=-1$, ta có: $3\cdot 2+2\cdot(-1)\ge -5$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(2;-1)$ là nghiệm của bất phương trình.

b) Thay $x=-2, y=0$, ta có: $3\cdot(-2)+2.0\ge -5$ là mệnh đề sai.

Vậy $(-2;0)$ không là nghiệm của bất phương trình.

c) Thay $x=-1, y=-1$, ta có: $3\ .\ (-1)+2.(-1)\ge -5$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(-1;-1)$ là nghiệm của bất phương trình.

### II. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

#### 1. Mô tả miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Người ta chứng minh được định lí sau:

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, phương trình $ax+by=c$ (với $a$ và $b$ không đồng thời bằng 0 ) xác định một đường thẳng $d$ như sau:

- $d$ có phương trình là $x=\dfrac{c}{a}$ nếu $b=0$;

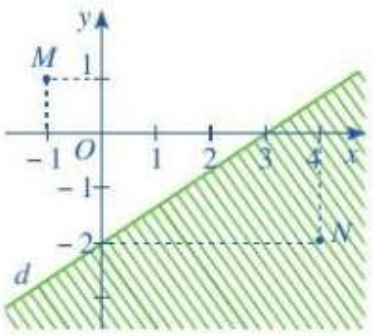
- $d$ có phương trình là $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$ nếu $b\ne 0$.

Ngoài ra, người ta cũng chứng minh được định lí sau:

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, đường thẳng $d: ax+by=c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể d) là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by>c$.

*Chú ý:* Đối vối bất phương trình dạng $ax+by\le c$ hoặc $ax+by\ge c$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả đường thẳng $d$.

***Ví dụ 2.*** Nửa mặt phẳng không bị gạch trong hình dưới (không kể d) biểu diễn miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Hỏi tọa độ hai điểm $M(-1;1)$, $N(4;-2)$ có là nghiệm của bất phương trình đó không?




***Giải***

- Điểm $M(-1;1)$ thuộc nửa mặt phẳng không bị gạch nên $(-1;1)$ là nghiệm của bất phương trình đó.
- Điểm $N(4;-2)$ thuộc nửa mặt phẳng bị gạch nên $(4;-2)$ không là nghiệm của bất phương trình đó.

**2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn**

Quy tắc thực hành biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn như sau:

Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$ trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$ :

***Bước 1.*** Vẽ đường thẳng $d: ax+by=c$. Đường thẳng $d$ chia mặt phẳng toạ độ thành hai nửa mặt phẳng

***Bước 2.*** Lấy một điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ không nằm trên $d$ (ta thường lấy gốc toạ độ $O$ nếu $c\neq 0$ ). Tính $ax_0+by_0$ và so sánh với $c$

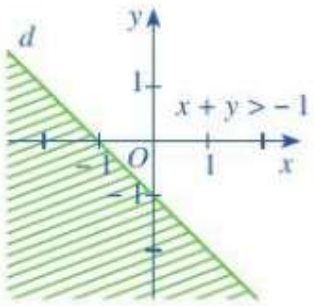
***Bước 3.*** Kết luận

- Nếu $ax_0+by_0<c$ thì nửa mặt phẳng (không kể $d$ ) chứa điểm $M$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$
- Nếu $ax_0+by_0>c$ thì nửa mặt phẳng (không kể $d$) không chứa điểm $M$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$.

***Ví dụ 3.*** Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau: $x+y>-1; x+y\geq -1$.

***Giải***

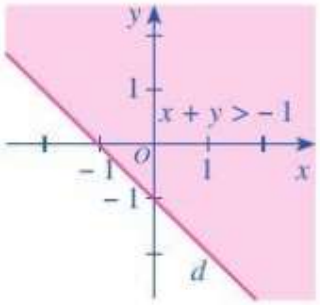
- Vẽ đường thẳng $d: x+y=-1$.




- Lấy điểm $O(0;0)$. Ta có: $0+0=0>-1$.
- Vậy miền nghiệm của bất phương trình $x+y>-1$ là nửa mặt phẳng không bị gạch ở hình trên chứa điểm $O(0;0)$ không kể đường thẳng $d$; miền nghiệm của bất phương trình $x+y\geq -1$ là nửa mặt phẳng không bị gạch ở hình trên chứa điểm $O(0;0)$ kể cả đường thẳng $d$.

Chú ý: Thông thường khi sử dụng phần mềm toán học để biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn, miền nghiệm của bất phương trình đó được tô màu.

Chẳng hạn, miền nghiệm của bất phương trình $x+y>-1$ được tô màu như hình sau




## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Cho bất phương trình: $2x-y<0$. Trong các cặp số $(-1;2)$, $(2;0)$, $(0;1)$, $(3;-2)$, $(-1;-2)$, cặp nào là nghiệm của bất phương trình, cặp nào không phải là nghiệm của bất phương trình?

**Câu 2.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $x-2y>1$?

**Câu 3.** Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau

a) $2x-y\ge 0$.

b) $\dfrac{x-2y}{2}>\dfrac{2x+y+1}{3}$.

**Câu 4.** Tìm các nghiệm $(x;y)$ của bất phương trình $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}\le 1$, trong đó $x$, $y$ là số nguyên dương.

**Câu 5.** Tìm giá trị của tham số $m$ sao cho $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình $mx+(m-1)y>2$.

**Câu 6.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;2)$, $B(-3;-1)$ và $C(3;-4)$. Tìm điều kiện của tham số $m$ để điểm $M\left(m;\dfrac{m-5}{3}\right)$ nằm bên trong tam giác $ABC$?

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $ax+by\le c$ (các hệ số $a$, $b$, $c$ là những số thực, $a$ và $b$ không đồng thời bằng $0$) không được gọi là miền nghiệm của nó.

**B.** Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình $2x-3y+1<0$ trên hệ trục $Oxy$ là đường thẳng $2x-3y+1=0$.

**C.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $ax+by\le c$ (các hệ số $a$, $b$, $c$ là những số thực, $a$ và $b$ không đồng thời bằng $0$) được gọi là miền nghiệm của nó.

**D.** Nghiệm của bất phương trình $ax+by\le c$ (các hệ số $a$, $b$, $c$ là những số thực, $a$ và $b$ không đồng thời bằng $0$) là tập rỗng.

**Câu 2.** Miền nghiệm của bất phương trình $-x+2+2(y-2)<2(1-x)$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(0;0)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(4;2)$. **D.** $(1;-1)$.

**Câu 3.** Miền nghiệm của bất phương trình $3(x-1)+4(y-2)<5x-3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(0;0)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(-5;3)$.

**Câu 4.** Miền nghiệm của bất phương trình $x+3+2(2y+5)<2(1-x)$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(-3;-4)$. **B.** $(-2;-5)$. **C.** $(-1;-6)$. **D.** $(0;0)$.

**Câu 5.** Miền nghiệm của bất phương trình $4(x-1)+5(y-3)>2x-9$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(0;0)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(2;5)$.

**Câu 6.** Miền nghiệm của bất phương trình $3x+2(y+3)>4(x+1)-y+3$ là phần mặt phẳng chứa điểm nào?

**A.** $(3;0)$. **B.** $(3;1)$. **C.** $(1;1)$. **D.** $(0;0)$.

**Câu 7.** Miền nghiệm của bất phương trình $5(x+2)-9<2x-2y+7$ là phần mặt phẳng **không** chứa điểm nào?

**A.** $(-2;1)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(2;-1)$. **D.** $(0;0)$.

**Câu 8.** Trong các cặp số sau đây, cặp nào **không** là nghiệm của bất phương trình $2x+y<1$?

**A.** $(-2;1)$. **B.** $(3;-7)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(0;0)$.

**Câu 9.** Trong các cặp số sau đây, cặp nào **không** là nghiệm của bất phương trình $x-4y+5\geq 0$?

**A.** $(-5;0)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;-3)$. **D.** $(0;0)$.

**Câu 10.** Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

**A.** $2x-5y+3z\leq 0$. **B.** $3x^2+2x-4>0$. **C.** $2x^2+5y>3$. **D.** $2x+3y<5$.

**Câu 11.** Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x+y-3>0$?

**A.** $Q(-1;-3)$. **B.** $M\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $N(1;1)$. **D.** $P\left(-1;\frac{3}{2}\right)$.

**Câu 12.** Miền nghiệm của bất phương trình $-3x+y+2\leq 0$ không chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1;2)$. **B.** $B(2;1)$. **C.** $C\left(1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $D(3;1)$.

**Câu 13.** Miền nghiệm của bất phương trình $x+3+2(2y+5)<2(1-x)$ không chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(-1;-2)$. **B.** $B\left(-\frac{1}{11};-\frac{2}{11}\right)$. **C.** $C(0;-3)$. **D.** $D(-4;0)$.

**Câu 14.** Miền nghiệm của bất phương trình $2x+y>1$ không chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1;1)$. **B.** $B(2;2)$. **C.** $C(3;3)$. **D.** $D(-1;-1)$.

**Câu 15.** Miền nghiệm của bất phương trình $\left(1+\sqrt{3}\right)x-\left(1-\sqrt{3}\right)y\geq 2$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1;-1)$. **B.** $B(-1;-1)$. **C.** $C(-1;1)$. **D.** $D\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

**Câu 16.** Miền nghiệm của bất phương trình $x-2+2(y-1)>2x+4$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1;1)$. **B.** $B(1;5)$. **C.** $C(4;3)$. **D.** $D(0;4)$.

**Câu 17.** Miền nghiệm của bất phương trình $2x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}-2\leq 0$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1;1)$. **B.** $B(1;0)$. **C.** $C\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. **D.** $D\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

**Câu 18.** Cho bất phương trình $2x+4y<5$ có tập nghiệm là $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

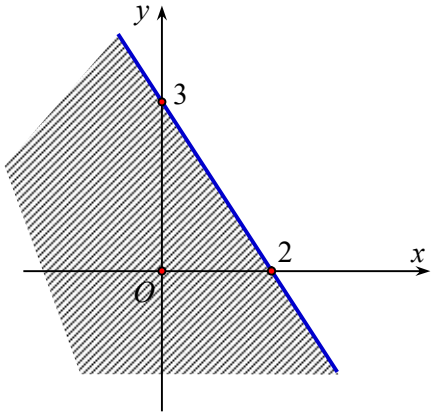
**A.** $(1;1)\in S$. **B.** $(1;10)\in S$. **C.** $(1;-1)\in S$. **D.** $(1;5)\in S$.

**Câu 19.** Cho bất phương trình $x-2y+5>0$ có tập nghiệm là $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

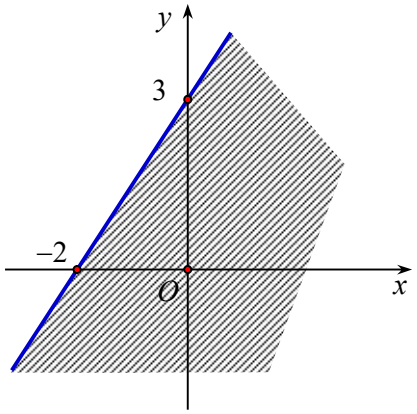
**A.** $(2;2)\in S$. **B.** $(1;3)\in S$. **C.** $(-2;2)\in S$. **D.** $(-2;4)\in S$.

**Câu 20.** Miền nghiệm của bất phương trình $3x-2y>-6$ là

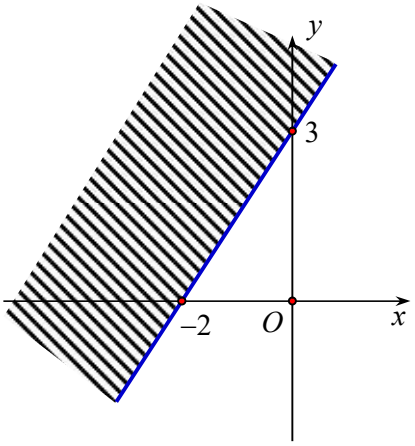
**A.**



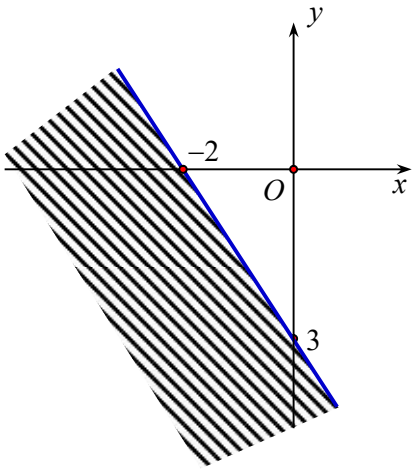

**B.**




**C.**

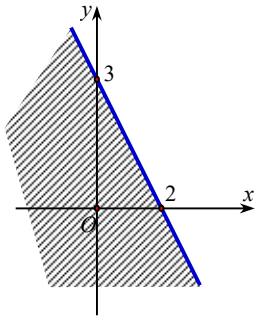



**D.**

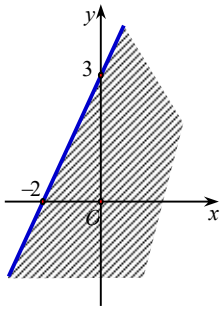



**Câu 21.** Miền nghiệm của bất phương trình $3x+2y>6$ là

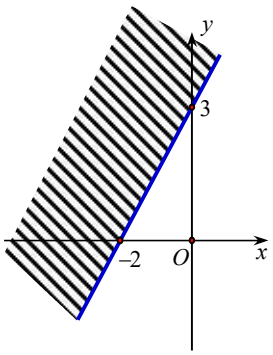
**A.**



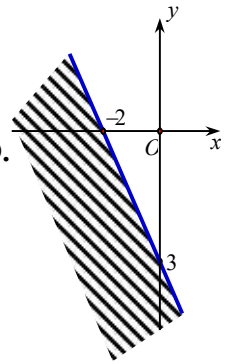

**B.**



**C.**

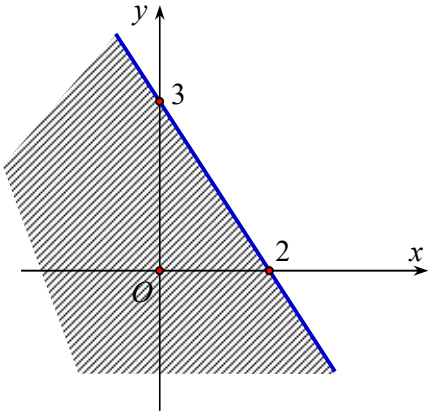



**D.**

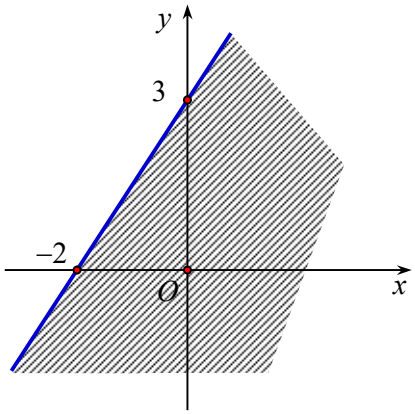



**Câu 22.** Miền nghiệm của bất phương trình $3x+2y>-6$ là

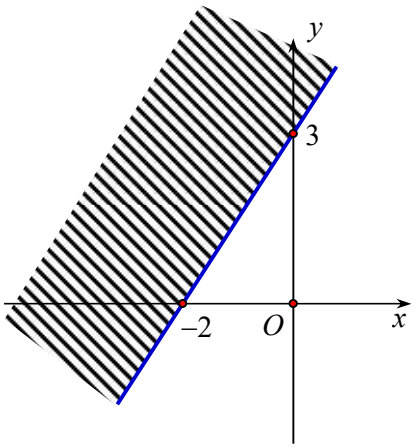
**A.**



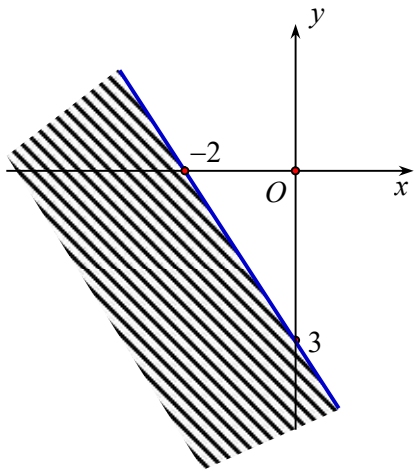

**B.**




**C.**




**D.**




**Câu 23.** Cho bất phương trình $-2x+\sqrt{3}y+\sqrt{2}\le 0$ có tập nghiệm là $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A.** $(1;1)\in S$. **B.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)\in S$. **C.** $(1;-2)\notin S$. **D.** $(1;0)\notin S$.

**Câu 24.** Cặp số $(x;y)=(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

**A.** $4x>3y$. **B.** $x-3y+7<0$. **C.** $2x-3y-1>0$. **D.** $x-y<0$.

**Câu 25.** Cặp số $(x_0;y_0)$ nào là nghiệm của bất phương trình $3x-3y\ge 4$.

**A.** $(x_0;y_0)=(-2;2)$. **B.** $(x_0;y_0)=(5;1)$. **C.** $(x_0;y_0)=(-4;0)$. **D.** $(x_0;y_0)=(2;1)$.

# Bài 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

• |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x, y$ là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$ax+by<c; ax+by>c; ax+by\le c; ax+by\ge c,$

trong đó $a,b,c$ là những số cho trước với $a,b$ không đồng thời bằng $0, x$ và $y$ là các ẩn.

Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax+by<c(*)$.

Mỗi cặp số $(x_0;y_0)$ sao cho $ax_0+by_0<c$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình $(*)$.

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của bất phương trình (*) được gọi là *miền nghiệm* của bất phương trình đó.

Nghiệm và miền nghiệm của các bất phương trình dạng $ax+by>c, ax+by\le c$ và $ax+by\ge c$ được định nghĩa tương tự.

***Ví dụ 1.*** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $3x+2y\ge -5$ ?

a) $(2;-1)$;

b) $(-2;0)$;

c) $(-1;-1)$.

***Giải***

a) Thay $x=2, y=-1$, ta có: $3\cdot 2+2\cdot(-1)\ge -5$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(2;-1)$ là nghiệm của bất phương trình.

b) Thay $x=-2, y=0$, ta có: $3\cdot(-2)+2.0\ge -5$ là mệnh đề sai.

Vậy $(-2;0)$ không là nghiệm của bất phương trình.

c) Thay $x=-1, y=-1$, ta có: $3\ .\ (-1)+2.(-1)\ge -5$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(-1;-1)$ là nghiệm của bất phương trình.

### II. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

#### 1. Mô tả miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Người ta chứng minh được định lí sau:

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, phương trình $ax+by=c$ (với $a$ và $b$ không đồng thời bằng 0 ) xác định một đường thẳng $d$ như sau:

- $d$ có phương trình là $x=\dfrac{c}{a}$ nếu $b=0$;

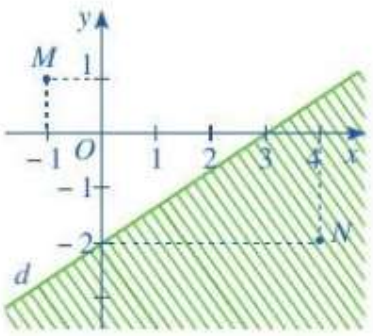
- $d$ có phương trình là $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$ nếu $b\ne 0$.

Ngoài ra, người ta cũng chứng minh được định lí sau:

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, đường thẳng $d: ax+by=c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể d) là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by>c$.

*Chú ý:* Đối vối bất phương trình dạng $ax+by\le c$ hoặc $ax+by\ge c$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả đường thẳng $d$.

***Ví dụ 2.*** Nửa mặt phẳng không bị gạch trong hình dưới (không kể d) biểu diễn miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Hỏi tọa độ hai điểm $M(-1;1)$, $N(4;-2)$ có là nghiệm của bất phương trình đó không?




***Giải***

- Điểm $M(-1;1)$ thuộc nửa mặt phẳng không bị gạch nên $(-1;1)$ là nghiệm của bất phương trình đó.
- Điểm $N(4;-2)$ thuộc nửa mặt phẳng bị gạch nên $(4;-2)$ không là nghiệm của bất phương trình đó.

**2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn**

Quy tắc thực hành biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn như sau:

Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$ trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$ :

***Bước 1.*** Vẽ đường thẳng $d: ax+by=c$. Đường thẳng $d$ chia mặt phẳng toạ độ thành hai nửa mặt phẳng

***Bước 2.*** Lấy một điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ không nằm trên $d$ (ta thường lấy gốc toạ độ $O$ nếu $c\neq 0$ ). Tính $ax_0+by_0$ và so sánh với $c$

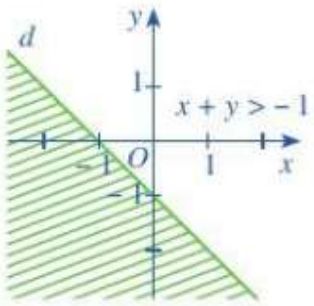
***Bước 3.*** Kết luận

- Nếu $ax_0+by_0<c$ thì nửa mặt phẳng (không kể $d$ ) chứa điểm $M$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$
- Nếu $ax_0+by_0>c$ thì nửa mặt phẳng (không kể $d$) không chứa điểm $M$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$.

***Ví dụ 3.*** Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau: $x+y>-1; x+y\geq -1$.

***Giải***

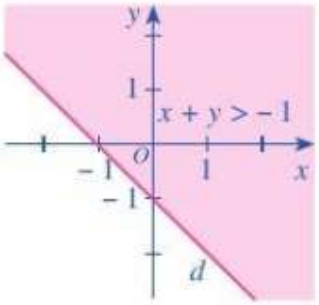
- Vẽ đường thẳng $d: x+y=-1$.




- Lấy điểm $O(0;0)$. Ta có: $0+0=0>-1$.
- Vậy miền nghiệm của bất phương trình $x+y>-1$ là nửa mặt phẳng không bị gạch ở hình trên chứa điểm $O(0;0)$ không kể đường thẳng $d$; miền nghiệm của bất phương trình $x+y\geq -1$ là nửa mặt phẳng không bị gạch ở hình trên chứa điểm $O(0;0)$ kể cả đường thẳng $d$.

Chú ý: Thông thường khi sử dụng phần mềm toán học để biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn, miền nghiệm của bất phương trình đó được tô màu.

Chẳng hạn, miền nghiệm của bất phương trình $x+y>-1$ được tô màu như hình sau




## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Cho bất phương trình: $2x-y<0$. Trong các cặp số $(-1;2)$, $(2;0)$, $(0;1)$, $(3;-2)$, $(-1;-2)$, cặp nào là nghiệm của bất phương trình, cặp nào không phải là nghiệm của bất phương trình?

**Lời giải**

Bằng cách thử trực tiếp, các cặp $(-1;2)$, $(0;1)$ là nghiệm, các cặp còn lại không phải là nghiệm của bất phương trình.

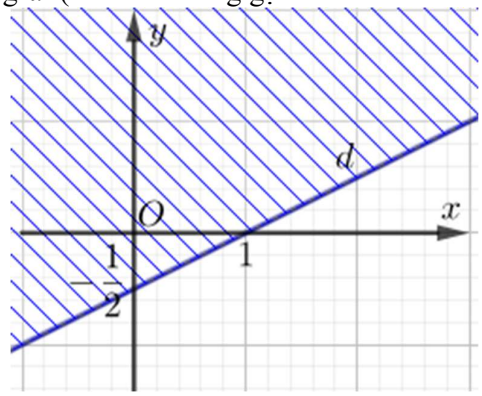
**Câu 2.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $x-2y>1$?

**Lời giải**

+ Đường thẳng $d: x-2y=1$ đi qua hai điểm $A(1;0)$ và $B\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

+ $x=y=0$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

+ Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $d: x-2y=1$, không chứa gốc tọa độ $O$, không bao gồm đường thẳng $d$ (là miền không gạch chéo trên hình vẽ)




**Câu 3.** Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau

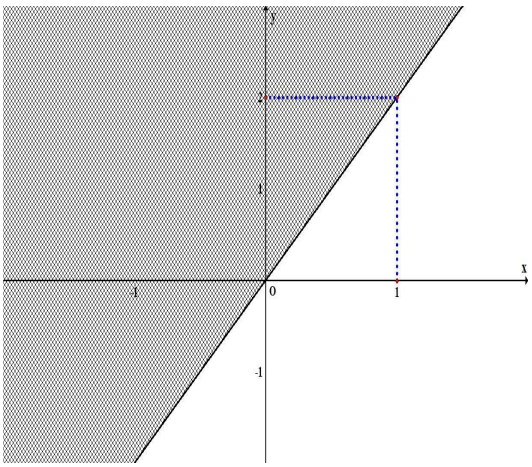
a) $2x-y\geq 0$.

b) $\frac{x-2y}{2}>\frac{2x+y+1}{3}$.

**Lời giải.**

a) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, vẽ đường thẳng $d: 2x-y=0$. Ta có $d$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $M(1;0)$.

Ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng chứa bờ $d$ và chứa điểm $M(1;0)$ (miền không được tô màu trên hình vẽ).



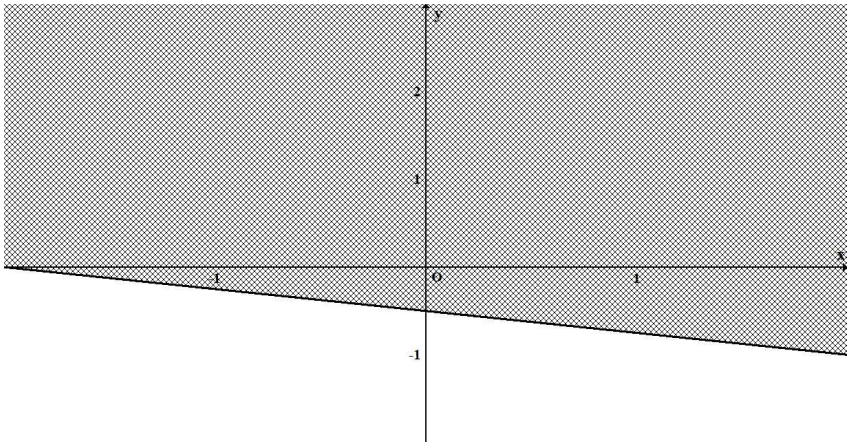
b) Ta có $\frac{x-2y}{2} > \frac{2x+y+1}{3} \Leftrightarrow 3(x-2y)-2(2x-y+1)>0 \Leftrightarrow -x-4y-2>0 \Leftrightarrow x+4y+2<0$.

Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, vẽ đường thẳng $\Delta: x+4y+2=0$.

Ta có $\Delta$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $O(0;0)$.

Ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ $\Delta$ (Không kể đường thẳng $\Delta$) và không chứa điểm $O(0;0)$ (miền không được tô màu trên hình vẽ).




**Câu 4.** Tìm các nghiệm $(x;y)$ của bất phương trình $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\le 1$, trong đó $x$, $y$ là số nguyên dương.

**Lời giải**

**Cách 1:** Do $x>0$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\le 1$ nên ta có $\frac{y}{4}<1 \Leftrightarrow y<4$.

Do $y$ nguyên dương nên $y\in\{1;2;3\}$.

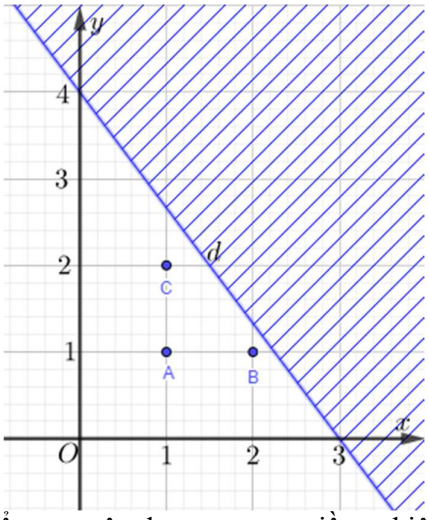
+ Với $y=1$, ta có $0<\frac{x}{3}\le\frac{3}{4} \Leftrightarrow 0<x\le\frac{9}{4} \Leftrightarrow x\in\{1;2\}$.

+ Với $y=2$, ta có $0<\frac{x}{3}\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0<x\le\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=1$.

+ Với $y=3$, ta có $0<\frac{x}{3}\le\frac{1}{4} \Leftrightarrow 0<x\le\frac{3}{4} \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Vậy bất phương trình có các nghiệm nguyên dương là $(1;1)$, $(2;1)$ và $(1;2)$.

**Cách 2:** Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình lên hệ trục tọa độ (là miền không gạch chéo trên hình vẽ):




Từ biểu diễn hình học, ta thấy các điểm nguyên dương trong miền nghiệm của bất phương trình là $A(1;1)$, $B(2;1)$ và $C(1;2)$

**Câu 5.** Tìm giá trị của tham số $m$ sao cho $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình $mx+(m-1)y>2$.

**Lời giải**

Ta có $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình $mx+(m-1)y>2$ khi và chỉ khi

$$-m+2(m-1)>2 \Leftrightarrow m>4$$

**Câu 6.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;2)$, $B(-3;-1)$ và $C(3;-4)$. Tìm điều kiện của tham số $m$ để điểm $M\left(m;\dfrac{m-5}{3}\right)$ nằm bên trong tam giác $ABC$?

**Lời giải**

**Cách 1:**

Đường thẳng $AB: \dfrac{x-1}{-3-1}=\dfrac{y-2}{-1-2} \Leftrightarrow 3x-4y+5=0$.

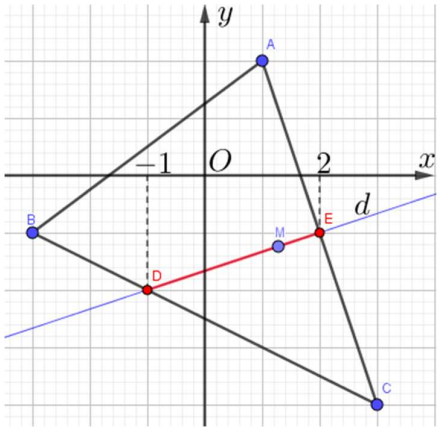
Đường thẳng $BC: \dfrac{x+3}{3+3}=\dfrac{y+1}{-4+1} \Leftrightarrow x+2y+5=0$.

Đường thẳng $AC: \dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-2}{-4-2} \Leftrightarrow 3x+y-5=0$.

Điều kiện cần và đủ để điểm $M$ nằm bên trong tam giác $ABC$ là điểm $M$ cùng với mỗi đỉnh $A$, $B$, $C$ lần lượt cùng phía với nhau đối với cạnh $BC$, $CA$, $AB$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+4+5)\left(m+2\dfrac{m-5}{3}+5\right)>0 \\ (-9-1-5)\left(3m+\dfrac{m-5}{3}-5\right)>0 \\ (9+16+5)\left(3m-4\dfrac{m-5}{3}+5\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ m<2 \\ m>-7 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<2$$

**Cách 2:**




Do $M\left(m;\dfrac{m-5}{3}\right)$ nên $M\in d:y=\dfrac{x-5}{3}$.

Ta thấy, đường thẳng $d$ cắt cạnh $AC$ , $BC$ của tam giác $ABC$ lần lượt tại $D$ và $E$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hoành độ $D$ là $x_D=-1$, hoành độ điểm $E$ là $x_E=2$.

Điểm $M$ nằm bên trong tam giác $ABC$ khi và chỉ khi điểm $M$ nằm trên đoạn thẳng $DE$ (trừ hai điểm $D,E$) khi và chỉ khi $-1<m<2$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $ax+by\le c$ (các hệ số $a$, $b$, $c$ là những số thực, $a$ và $b$ không đồng thời bằng $0$) không được gọi là miền nghiệm của nó.

**B.** Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình $2x-3y+1<0$ trên hệ trục $Oxy$ là đường thẳng $2x-3y+1=0$.

**C.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $ax+by\le c$ (các hệ số $a$, $b$, $c$ là những số thực, $a$ và $b$ không đồng thời bằng $0$) được gọi là miền nghiệm của nó.

**D.** Nghiệm của bất phương trình $ax+by\le c$ (các hệ số $a$, $b$, $c$ là những số thực, $a$ và $b$ không đồng thời bằng $0$) là tập rỗng.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 2.** Câu nào sau đây **sai**?.

Miền nghiệm của bất phương trình $-x+2+2(y-2)<2(1-x)$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(0;0)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(4;2)$. **D.** $(1;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: $-x+2+2(y-2)<2(1-x)\Leftrightarrow -x+2+2y-4<2-2x\Leftrightarrow x+2y<4$.

Dễ thấy tại điểm $(4;2)$ ta có: $4+2.2=8>4$.

**Câu 3.** Câu nào sau đây đúng?.

Miền nghiệm của bất phương trình $3(x-1)+4(y-2)<5x-3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(0;0)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(-5;3)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $3(x-1)+4(y-2)<5x-3 \Leftrightarrow 3x-3+4y-8<5x-3 \Leftrightarrow 2x-4y+8>0 \Leftrightarrow x-2y+4>0$

Dễ thấy tại điểm $(0;0)$ ta có: $0-2.0+4=4>0$.

**Câu 4.** Câu nào sau đây **sai**?.

Miền nghiệm của bất phương trình $x+3+2(2y+5)<2(1-x)$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(-3;-4)$. **B.** $(-2;-5)$. **C.** $(-1;-6)$. **D.** $(0;0)$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có: $x+3+2(2y+5)<2(1-x) \Leftrightarrow x+3+4y+10<2-2x \Leftrightarrow 3x+4y+8<0$.

Dễ thấy tại điểm $(0;0)$ ta có: $3.0+4.0+8>0$ (mâu thuẫn).

**Câu 5.** Câu nào sau đây đúng?.

Miền nghiệm của bất phương trình $4(x-1)+5(y-3)>2x-9$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(0;0)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(2;5)$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có: $4(x-1)+5(y-3)>2x-9 \Leftrightarrow 4x-4+5y-15>2x-9 \Leftrightarrow 2x+5y-10>0$.

Dễ thấy tại điểm $(2;5)$ ta có: $2.2+5.5-10>0$ (đúng).

**Câu 6.** Miền nghiệm của bất phương trình $3x+2(y+3)>4(x+1)-y+3$ là phần mặt phẳng chứa điểm nào?

**A.** $(3;0)$. **B.** $(3;1)$. **C.** $(1;1)$. **D.** $(0;0)$.

**Lời giải**

**ChọnC.**

Nhận xét: chỉ có cặp số $(1;1)$ thỏa bất phương trình.

**Câu 7.** Miền nghiệm của bất phương trình $5(x+2)-9<2x-2y+7$ là phần mặt phẳng **không** chứa điểm nào?

**A.** $(-2;1)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(2;-1)$. **D.** $(0;0)$.

**Lời giải**

**ChọnC.**

Nhận xét: chỉ có cặp số $(2;3)$ không thỏa bất phương trình.

**Câu 8.** Trong các cặp số sau đây, cặp nào **không** là nghiệm của bất phương trình $2x+y<1$?

**A.** $(-2;1)$. **B.** $(3;-7)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(0;0)$.

**Lời giải**

**ChọnC.**

Nhận xét: chỉ có cặp số $(0;1)$ không thỏa bất phương trình.

**Câu 9.** Trong các cặp số sau đây, cặp nào **không** là nghiệm của bất phương trình $x-4y+5\geq 0$?

**A.** $(-5;0)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;-3)$. **D.** $(0;0)$.

**Lời giải**

**ChọnB.**

Ta thay cặp số $(-2;1)$ vào bất phương trình $x-4y+5\ge 0$ được $-2-4+5\ge 0$ (sai) đo đó cặp số $(-2;1)$ không là nghiệm của bất phương trình $x-4y+5\ge 0$.

**Câu 10.** Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

**A.** $2x-5y+3z\le 0$. **B.** $3x^2+2x-4>0$. **C.** $2x^2+5y>3$. **D.** $2x+3y<5$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

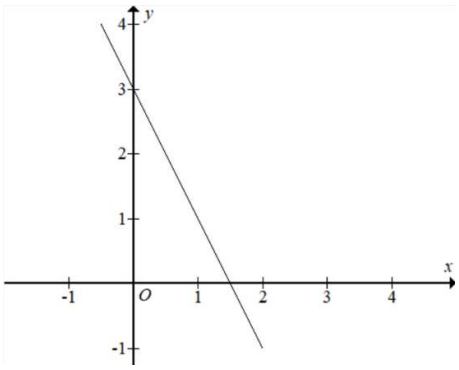
Theo định nghĩa bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

**Câu 11.** Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x+y-3>0$?

**A.** $Q(-1;-3)$. **B.** $M\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $N(1;1)$. **D.** $P\left(-1;\frac{3}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B.**




Tập hợp các điểm biểu diễn nghiệm của bất phương trình $2x+y-3>0$ là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $2x+y-3=0$ và không chứa gốc tọa độ.

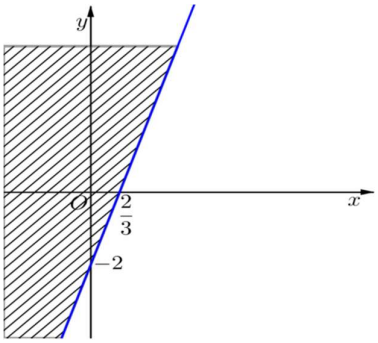
Từ đó ta có điểm $M\left(1;\frac{3}{2}\right)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x+y-3>0$.

**Câu 12.** Miền nghiệm của bất phương trình $-3x+y+2\le 0$ không chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1;2)$. **B.** $B(2;1)$. **C.** $C\left(1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $D(3;1)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**




Trước hết, ta vẽ đường thẳng $(d):-3x+y+2=0$.

Ta thấy $(0;0)$ không là nghiệm của bất phương trình.

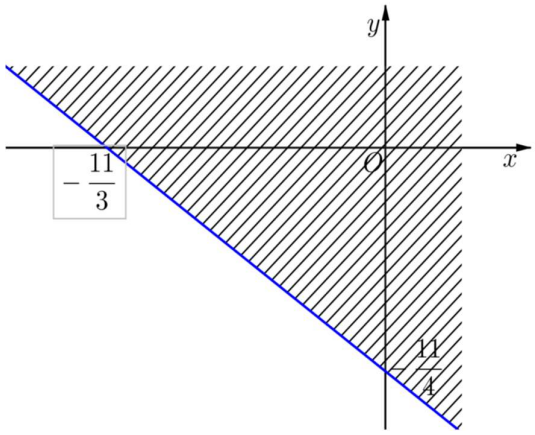
Vậy miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $(d)$ không chứa điểm $(0;0)$.

**Câu 13.** Miền nghiệm của bất phương trình $x+3+2(2y+5)<2(1-x)$ không chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(-1;-2)$. **B.** $B\left(-\frac{1}{11};-\frac{2}{11}\right)$. **C.** $C(0;-3)$. **D.** $D(-4;0)$.

**Lời giải**

**Chọn B.**




Đầu tiên, thu gọn bất phương trình đề bài đã cho về thành $3x+4y+11<0$.

Ta vẽ đường thẳng $(d):3x+4y+11=0$.

Ta thấy $(0;0)$ không là nghiệm của bất phương trình.

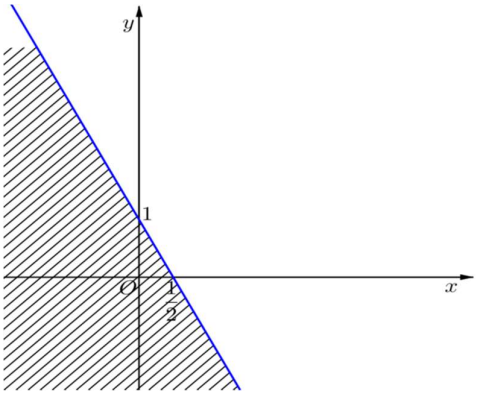
Vậy miền nghiệm là nửa mặt phẳng (không kể bờ $(d)$) không chứa điểm $(0;0)$.

**Câu 14.** Miền nghiệm của bất phương trình $2x+y>1$ không chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1;1)$. **B.** $B(2;2)$. **C.** $C(3;3)$. **D.** $D(-1;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn D.**




Trước hết, ta vẽ đường thẳng $(d):2x+y=1$.

Ta thấy $(0;0)$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

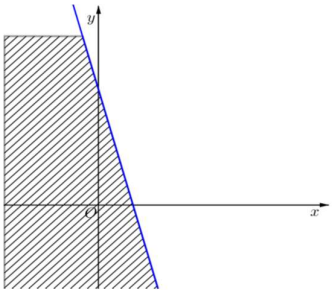
Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (không kể bờ $(d)$) không chứa điểm $(0;0)$.

**Câu 15.** Miền nghiệm của bất phương trình $\left(1+\sqrt{3}\right)x-\left(1-\sqrt{3}\right)y\geq 2$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1;-1)$. **B.** $B(-1;-1)$. **C.** $C(-1;1)$. **D.** $D\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**




Trước hết, ta vẽ đường thẳng $(d):(1+\sqrt{3})x-(1-\sqrt{3})y=2.$

Ta thấy $(0\,;\,0)$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

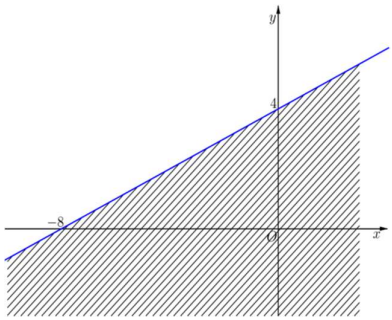
Vậy miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $(d)$ không chứa điểm $(0\,;\,0).$

**Câu 16.** Miền nghiệm của bất phương trình $x-2+2(y-1)>2x+4$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1\,;\,1).$ **B.** $B(1\,;\,5).$ **C.** $C(4\,;\,3).$ **D.** $D(0\,;\,4).$

**Lời giải**

**Chọn B**




Đầu tiên ta thu gọn bất phương trình đã cho về thành $-x+2y-8>0.$

Vẽ đường thẳng $(d):-x+2y-8=0.$

Ta thấy $(0\,;\,0)$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

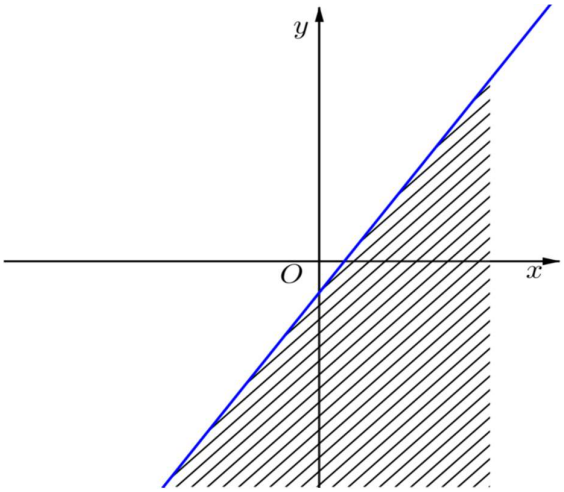
Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng (không kể bờ $(d)$) không chứa điểm $(0\,;\,0).$

**Câu 17.** Miền nghiệm của bất phương trình $2x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}-2\le 0$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1\,;\,1).$ **B.** $B(1\,;\,0).$ **C.** $C(\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}).$ **D.** $D(\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{2}).$

**Lời giải**

**Chọn A.**




Trước hết, ta vẽ đường thẳng $(d):2x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}-2=0.$

Ta thấy $(0\,;\,0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ $(d)$ chứa điểm $(0\,;\,0)$.

**Câu 18.** Cho bất phương trình $2x+4y<5$ có tập nghiệm là $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

**A.** $(1;1)\in S$. **B.** $(1;10)\in S$. **C.** $(1;-1)\in S$. **D.** $(1;5)\in S$.

**Lời giải**

**ChọnC.**

Ta thấy $(1;-1)$ thỏa mãn hệ phương trình do đó $(1;-1)$ là một cặp nghiệm của hệ phương trình.

**Câu 19.** Cho bất phương trình $x-2y+5>0$ có tập nghiệm là $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A.** $(2;2)\in S$. **B.** $(1;3)\in S$. **C.** $(-2;2)\in S$. **D.** $(-2;4)\in S$.

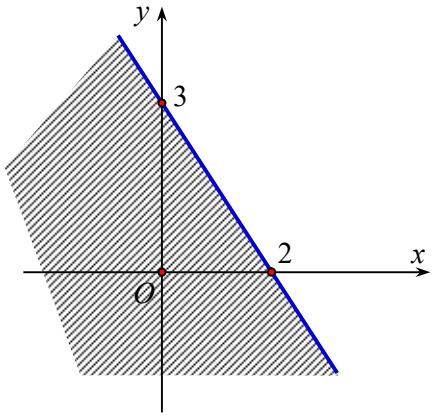
**Lời giải**

**Chọn A.**

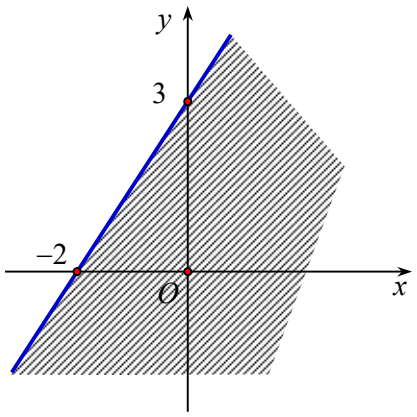
Ta thấy $(2;2)\in S$ vì $2-2.2+5>0$.

**Câu 20.** Miền nghiệm của bất phương trình $3x-2y>-6$ là

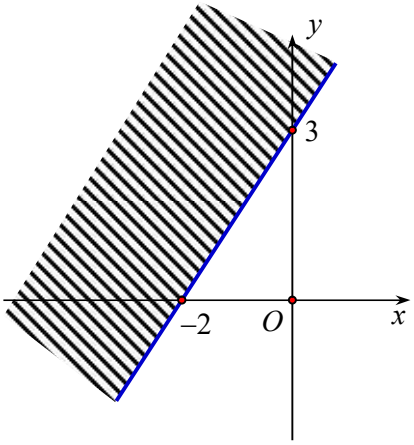
**A.**



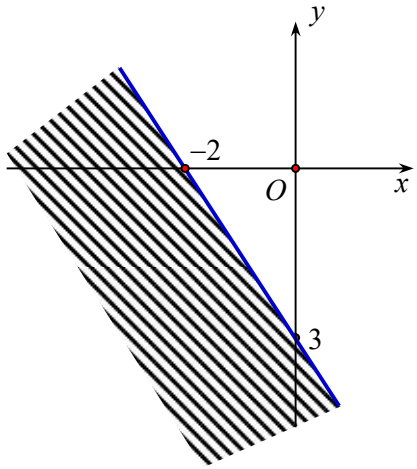

**B.**




**C.**



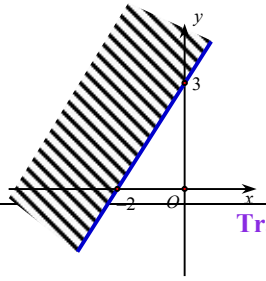

**D.**




**Lời giải**

**Chọn C.**

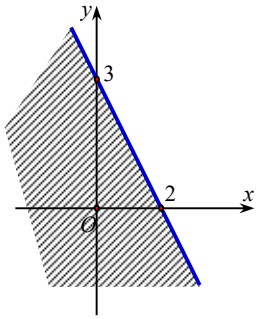
Trước hết, ta vẽ đường thẳng $(d):3x-2y=-6$.



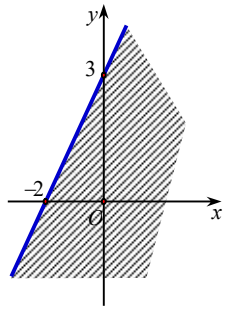
Ta thấy $(0\,;\,0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ $(d)$ chứa điểm $(0\,;\,0)$.

**Câu 21.** Miền nghiệm của bất phương trình $3x+2y>6$ là

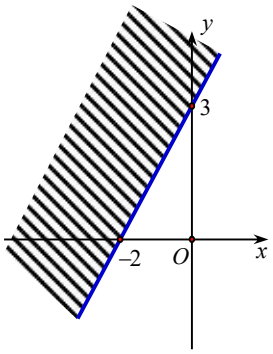
**A.**



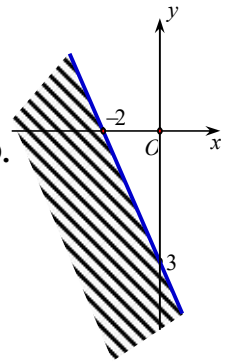

**B.**




**C.**

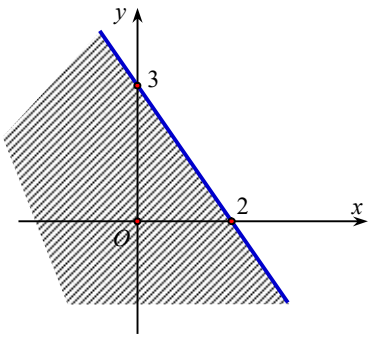



**D.**




**Lời giải**

**Chọn A.**



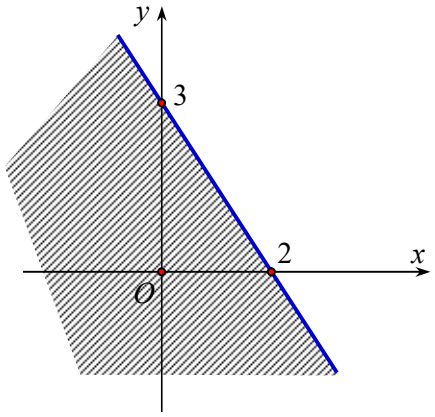

Trước hết, ta vẽ đường thẳng $(d): 3x+2y=6$.

Ta thấy $(0\,;\,0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho.

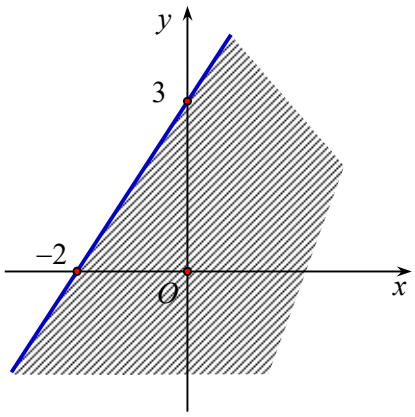
Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng (không kể bờ $(d)$) không chứa điểm $(0\,;\,0)$.

**Câu 22.** Miền nghiệm của bất phương trình $3x+2y>-6$ là

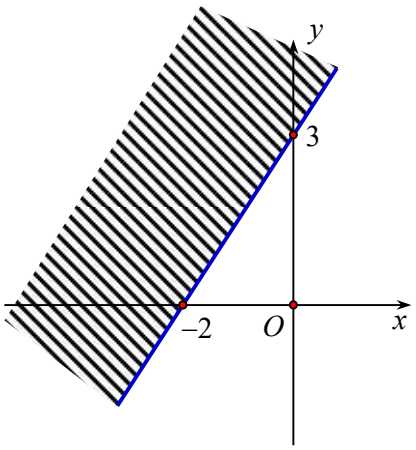
**A.**



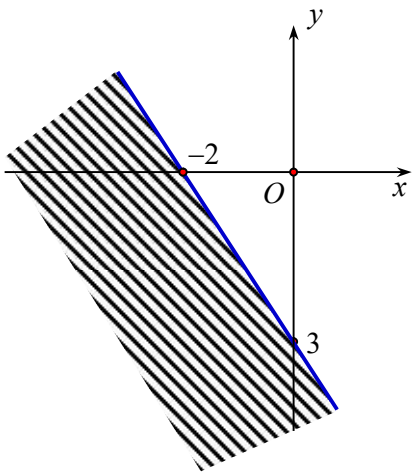

**B.**



**C.**

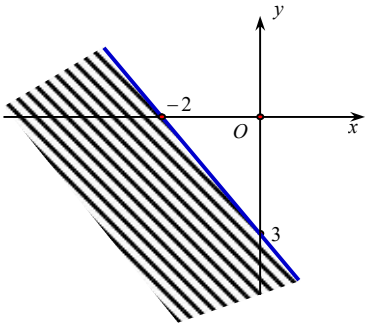



**D.**




**Lời giải**

**Chọn D.**




Trước hết, ta vẽ đường thẳng $(d): 3x+2y=-6$.

Ta thấy $(0\,;\,0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng (không kể bờ $(d)$) chứa điểm $(0\,;\,0)$.

**Câu 23.** Cho bất phương trình $-2x+\sqrt{3}y+\sqrt{2}\le 0$ có tập nghiệm là $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A.** $(1;1)\in S$. **B.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)\in S$. **C.** $(1;-2)\notin S$. **D.** $(1;0)\notin S$.

**Lời giải**

**ChọnB.**

Ta thấy $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)\in S$ vì $-2.\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}.0+\sqrt{2}=0$.

**Câu 24.** Cặp số $(x;y)=(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

**A.** $4x>3y$. **B.** $x-3y+7<0$. **C.** $2x-3y-1>0$. **D.** $x-y<0$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có $2-3=-1<0$ nên Chọn **D.**

**Câu 25.** Cặp số $(x_0;y_0)$ nào là nghiệm của bất phương trình $3x-3y\ge 4$.

**A.** $(x_0;y_0)=(-2;2)$. **B.** $(x_0;y_0)=(5;1)$. **C.** $(x_0;y_0)=(-4;0)$. **D.** $(x_0;y_0)=(2;1)$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Thế các cặp số $(x_0;y_0)$ vào bất phương trình:

$(x_0;y_0)=(-2;2)\Rightarrow 3x-3y\ge 4\Leftrightarrow 3(-2)-3.2\ge 4$ (vô lí)

$(x_0;y_0)=(5;1)\Rightarrow 3x-3y\ge 4\Leftrightarrow 3.5-3.1\ge 4$ (đúng)

$(x_0;y_0)=(-4;0)\Rightarrow 3x-3y\ge 4\Leftrightarrow 3.(-4)-3.0\ge 4$ (vô lí)

$(x_0;y_0)=(2;1)\Rightarrow 3x-3y\ge 4\Leftrightarrow 3.2-3.1\ge 4$ (vô lí).

# Bài 2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x, y$ là một hệ gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x, y$. Mỗi nghiệm chung của các bất phương trình trong hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đó.

***Ví dụ 1***. Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x-4y \le 6 & (1) \\ x+y>2 & (2) \end{cases}$$

Cặp số $(x;y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình trên? $(3;1),(1;-2),(5;-3)$.

***Giải***

- Thay $x=3, y=1$ vào hai bất phương trình của hệ, ta có:

2. $3-4.1 \le 6$ là mệnh đề đúng; $3+1>2$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(3;1)$ là nghiệm chung của $(1)$ và $(2)$ nên $(3;1)$ là nghiệm của hệ bất phương trình.

- Thay $x=1, y=-2$ vào bất phương trình (1) của hệ, ta có:

$2\cdot 1-4\cdot(-2) \le 6$ là mệnh đề sai.

Vậy $(1;-2)$ không là nghiệm của $(1)$ nên $(1;-2)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.

- Thay $x=5, y=-3$ vào bất phương trình (2) của hệ, ta có:

$5+(-3)>2$ là mệnh đề sai.

Vậy $(5;-3)$ không là nghiệm của $(2)$ nên $(5;-3)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.

### II. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

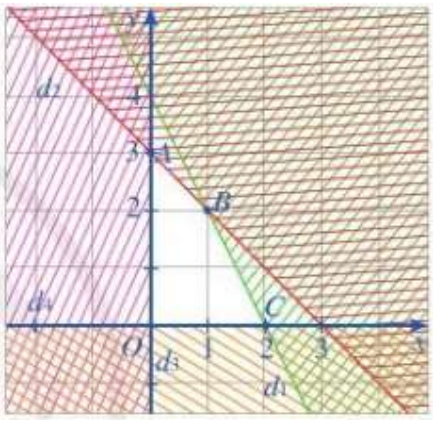
Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta làm như sau:

- Trong cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

***Ví dụ 2.*** Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x+y \le 4 \\ x+y \le 3 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

***Giải***




Vẽ các đường thẳng: $d_1: 2x+y=4; d_2: x+y=3; d_3: x=0$ là trục tung; $d_4: y=0$ là trục hoành.

Gạch đi các phần không thuộc miền của mỗi bất phương trình.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ kể cả miền trong (còn gọi là miền tức giác $OABC$) với $O(0;0), A(0;3), B(1;2), C(2;0)$

## III. Áp dụng vào bài toán thực tiễn

***Bài toán 1.*** Quảng cáo sản phẩm trên truyền hình là một hoạt động quan trọng trong kinh doanh của các doanh nghiệp.



*Sảnh "Trống đồng" ở trụ sở của VTV tại Hà Nội*

Theo Thông báo số 10/2019, giá quảng cáo trên VTV1 là 30 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khoảng $20h30$; là 6 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khung giờ $16h00-17h00$.

Một công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng để quảng cáo trên VTV1 với yêu cầu quảng cáo về số lần phát như sau: ít nhất 10 lần quảng cáo vào khoảng $20h30$ và không quá 50 lần quảng cáo vào khung giờ $16h00-17h00$. Gọi $x, y$ lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng $20h30$ và vào khung giờ $16h00-17h00$. Tìm $x$ và $y$

sao cho tổng số lần xuất hiện quảng cáo của công ty là nhiều nhất.

***Giải***

Gọi $x, y$ lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng $20h30$ và vào khung giờ $16h00-17h00$. Theo giả thiết, ta có: $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x \geq 10, 0 \leq y \leq 50$.

Tổng số lần phát quảng cáo là $T = x + y$.

Số tiền công ty cần chi là $30x + 6y$ (triệu đồng).

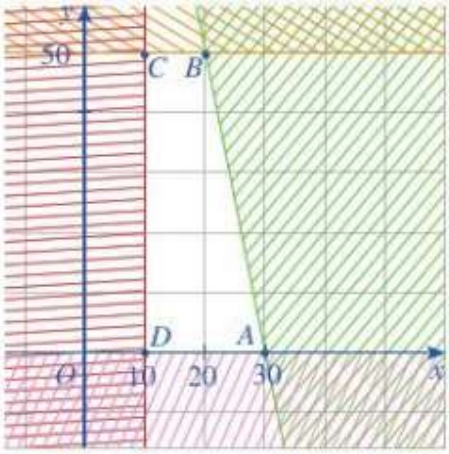
Do công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng nên $30x + 6y \leq 900$ hay $5x + y \leq 150$.

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 5x + y \leq 150 \\ x \geq 10 \\ 0 \leq y \leq 50 \end{cases} \quad (I)$

Bài toán đưa về tìm $x, y$ là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho $T = x + y$ có giá trị lớn nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(30;0), B(20;50)$, $C(10;50), D(10;0)$




Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = x + y$ đạt được giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = x + y$ tại cặp số $(x; y)$ là toạ độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được $T$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 20, y = 50$ ứng với toạ độ đỉnh $B$.

Vậy để phát được số lần quảng cáo nhiều nhất thì số lần phát quảng cáo vào khoảng $20h30$ và vào khung giờ $16h00-17h00$ lần lượt là 20 và 50 lần.

***Bài toán 2.*** Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất $140kg$ chất $A$ và $9kg$ chất $B$. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được $20kg$ chất $A$ và $0,6kg$ chất $B$. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được $10kg$ chất $A$ và $1,5kg$ chất $B$. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất? Biết rằng cở sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

***Giải***

Gọi $x, y$ lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I, loại II cần sử dụng.

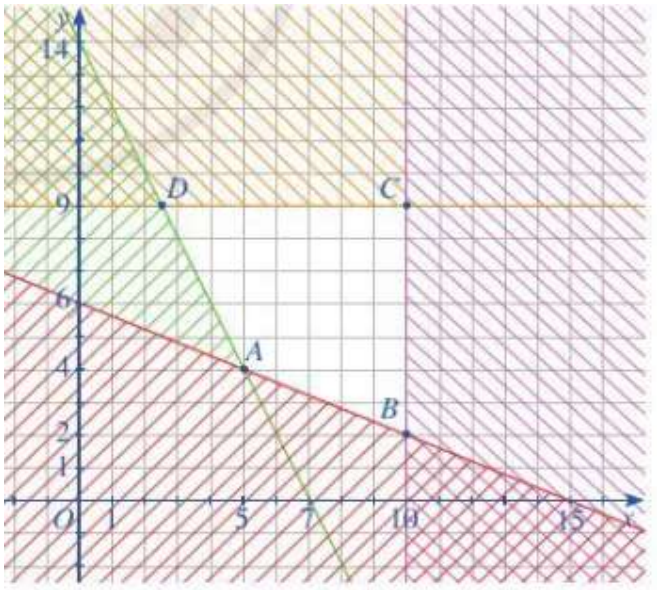
Khi đó, ta chiết xuất được $20x+10y(kg)$ chất $A$ và $0,6x+1,5y(kg)$ chất $B$.

Theo giả thiết, $x$ và $y$ phải thoả mãn các điều kiện:

$0 \le x \le 10, 0 \le y \le 9$

$20x+10y \ge 140$ hay $2x+y \ge 14$;

$0,6x+1,5y \ge 9$ hay $2x+5y \ge 30$.




Tổng số tiền cần mua nguyên liệu là $T = 4x+3y$.

Bài toán đưa về: Tìm $x, y$ là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x+y \ge 14 \\ 2x+5y \ge 30 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

sao cho $T = 4x+3y$ có giá trị nhỏ nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(5;4), B(10;2)$, $C(10;9), D\left(\frac{5}{2};9\right)$

Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = 4x+3y$ có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = 4x+3y$ tại cặp số $(x;y)$ là toạ độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được $T$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 32 khi $x=5, y=4$ ứng với tọa độ đỉnh $A$.

Vậy để chi phí nguyên liệu là ít nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II; khi đó chi phí là 32 triệu đồng.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

**Câu 1.** Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau

a) $\begin{cases} x+y-2\ge 0 \\ x-3y+3\le 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y>0 \\ -2x-3y+6>0 \\ x-2y+1\ge 0 \end{cases}$

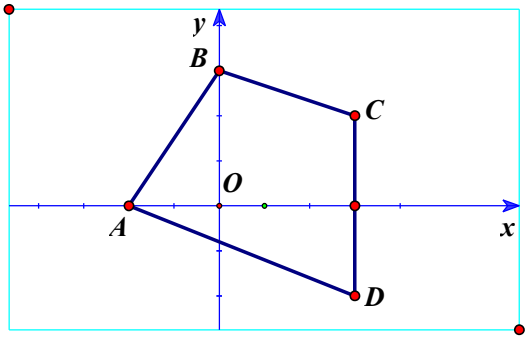
**Câu 2.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-2y>0 \\ x+3y<3 \end{cases}$.

**Câu 3.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x+2y\le 6 \\ x+y\le 4 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$.

**Câu 4.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x-y\ge -1 \\ 2x+y\le 6 \\ x+3y>3 \end{cases}$.

**Câu 5.** Cho cặp $(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x-y\ge -1 \\ 2x+y\le 6 \\ x+3y\ge 3 \end{cases}$ (*). Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $f(x;y)=2x-3y+1$.

**Câu 6.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho tứ giác $ABCD$ có $A(-2;0)$; $B(0;3)$; $C(3;2)$ và $D(3;-2)$ (tham khảo hình vẽ). Tìm tất cả các giá trị của $m$ sao cho điểm $M(m;m+1)$ nằm trên hình tứ giác $ABCD$ tính cả bốn cạnh $AB, BC, CD, DA$.




## Dạng 2. Bài toán thức tế - tìm GTLN-GTNN

**Câu 7.** Một hộ nông dân dự định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu về được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180.

**Câu 8.** Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng mỗi ngày gia đình này chỉ mua tối đa 1.5kg thịt bò và 1kg thịt lợn, giá tiền 1kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

**Câu 9.** Người ta định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 120 kg hóa chất A và 9 kg hóa chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất.

Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

**Câu 10.** Có ba nhóm máy A, B,C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

| Nhóm | Số máy trong mỗi nhóm | Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm | |
|---|---|---|---|
| | | Loại I | Loại II |
| A | 10 | 2 | 2 |
| B | 4 | 0 | 2 |
| C | 12 | 2 | 4 |

Một đơn vị sản phẩm I lãi ba nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm loại II lãi năm nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

**Câu 1.** Trong các cặp số sau, cặp nào **không** là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y-2\le 0 \\ 2x-3y+2>0 \end{cases}$ là

**A.** $(0;0)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;-1)$.

**Câu 2.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1\ge 0 \\ 2(x-1)+\dfrac{3y}{2}\le 4 \\ x\ge 0 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(2;1)$. **B.** $(0;0)$. **C.** $(1;1)$. **D.** $(3;4)$.

**Câu 3.** Điểm nào sau đây **không** thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x+3y-1>0 \\ 5x-y+4<0 \end{cases}$?

**A.** $(-1;4)$. **B.** $(-2;4)$. **C.** $(0;0)$. **D.** $(-3;4)$.

**Câu 4.** Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-5y-1>0 \\ 2x+y+5>0 \\ x+y+1<0 \end{cases}$?

**A.** $(0;0)$. **B.** $(1;0)$. **C.** $(0;-2)$. **D.** $(0;2)$.

**Câu 5.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y>0 \\ x-3y+3<0 \\ x+y-5>0 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(5;3)$. **B.** $(0;0)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $(-2;2)$.

**Câu 6.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+y\ge 9 \\ x\ge y-3 \\ 2y\ge 8-x \\ y\le 6 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(0;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;1)$. **D.** $(8;4)$.

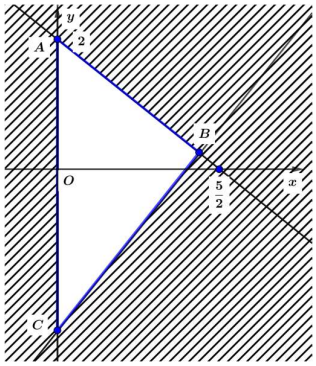
**Câu 7.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y>0 \\ 2x+5y<0 \end{cases}$ có tập nghiệm là $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A.** $(1;1)\in S$. **B.** $(-1;-1)\in S$. **C.** $\left(1;-\frac{1}{2}\right)\in S$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right)\in S$.

**Câu 8.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+y\ge 6 \\ x\ge y-3 \\ 2y\ge 8-x \\ y\le 4 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm:

**A.** $(2;1)$. **B.** $(6;4)$. **C.** $(0;0)$. **D.** $(1;2)$.

**Câu 9.** Miền tam giác $ABC$ kể cả ba cạnh sau đây là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ bất phương trình dưới đây?




**A.** $\begin{cases} y\ge 0 \\ 5x-4y\ge 10 \\ 5x+4y\le 10 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x>0 \\ 5x-4y\le 10 \\ 4x+5y\le 10 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x\ge 0 \\ 4x-5y\le 10 \\ 5x+4y\le 10 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x\ge 0 \\ 5x-4y\le 10 \\ 4x+5y\le 10 \end{cases}$.

**Câu 10.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x>0 \\ x+\sqrt{3}y+1\le 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A.** $(1;-1)\in S$. **B.** $\left(1;-\sqrt{3}\right)\in S$. **C.** $\left(-1;\sqrt{5}\right)\notin S$. **D.** $\left(-4;\sqrt{3}\right)\in S$.

**Câu 11.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x>0 \\ x+\sqrt{3}y+1>0 \end{cases}$ có tập nghiệm là $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A.** $(-1;2)\in S$. **B.** $\left(\sqrt{2};0\right)\notin S$. **C.** $\left(1;-\sqrt{3}\right)\in S$. **D.** $\left(\sqrt{3};0\right)\in S$.

**Câu 12.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y>3 \\ 1-\frac{1}{2}x+y>0 \end{cases}$ có tập nghiệm $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

**A.** $(1;-2)\in S$. **B.** $(2;1)\in S$. **C.** $(5;-6)\in S$. **D.** $S=\varnothing$.

**Câu 13.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-\dfrac{3}{2}y\ge 1 \\ 4x-3y\le 2 \end{cases}$ có tập nghiệm $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

**A.** $\left(-\dfrac{1}{4};-1\right)\notin S$.

**B.** $S=\left\{(x;y)\,|\,4x-3y=2\right\}$.

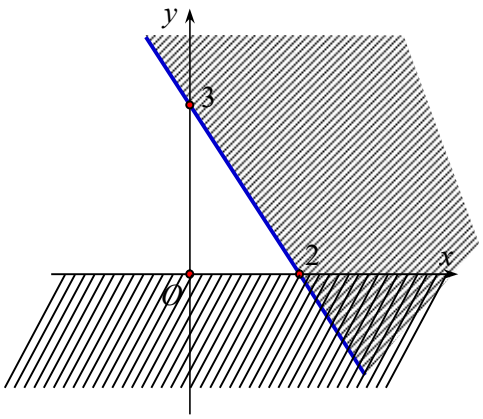
**C.** Biểu diễn hình học của $S$ là nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ và kể cả bờ $d$, với $d$ là là đường thẳng $4x-3y=2$.

**D.** Biểu diễn hình học của $S$ là nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ và kể cả bờ $d$, với $d$ là là đường thẳng $4x-3y=2$.

**Câu 14.** Cho hệ $\begin{cases} 2x+3y<5 \ \ (1) \\ x+\dfrac{3}{2}y<5 \ \ (2) \end{cases}$. Gọi $S_1$ là tập nghiệm của bất phương trình (1), $S_2$ là tập nghiệm của bất phương trình (2) và $S$ là tập nghiệm của hệ thì

**A.** $S_1\subset S_2$. **B.** $S_2\subset S_1$. **C.** $S_2=S$. **D.** $S_1\neq S$.

**Câu 15.** Phần không gạch chéo ở hình sau đây là biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ A, B, C, D?




**A.** $\begin{cases} y>0 \\ 3x+2y<6 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} y>0 \\ 3x+2y<-6 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x>0 \\ 3x+2y<6 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x>0 \\ 3x+2y>-6 \end{cases}$.

**Câu 16.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \\ y-x<3 \end{cases}$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1\,;\,0)$. **B.** $B(-2\,;\,3)$. **C.** $C(0\,;\,-1)$. **D.** $D(-1\,;\,0)$.

**Câu 17.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x+3y-6<0 \\ x\ge 0 \\ 2x-3y-1\le 0 \end{cases}$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1\,;\,2)$. **B.** $B(0\,;\,2)$. **C.** $C(-1\,;\,3)$. **D.** $D\left(0\,;\,-\dfrac{1}{3}\right)$.

**Câu 18.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1\le 0 \\ -3x+5\le 0 \end{cases}$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** Không có. **B.** $B\left(\frac{5}{3};2\right)$. **C.** $C(-3;1)$. **D.** $D\left(\frac{1}{2};10\right)$.

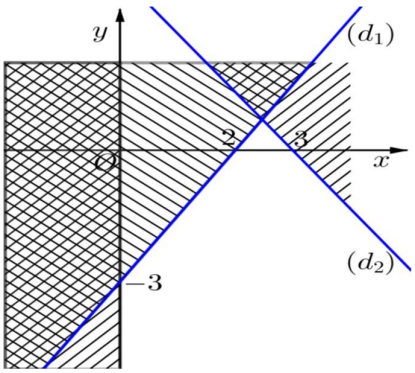
**Câu 19.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}3-y<0\\2x-3y+1>0\end{cases}$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(3;4)$. **B.** $B(4;3)$. **C.** $C(7;4)$. **D.** $D(4;4)$.

**Câu 20.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}x-2y<0\\x+3y>-2\end{cases}$ không chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(-1;0)$. **B.** $B(1;0)$. **C.** $C(-3;4)$. **D.** $D(0;3)$.

**Câu 21.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}3x-2y-6\ge 0\\2(x-1)+\frac{3y}{2}\le 4\\x\ge 0\end{cases}$ không chứa điểm nào sau đây?

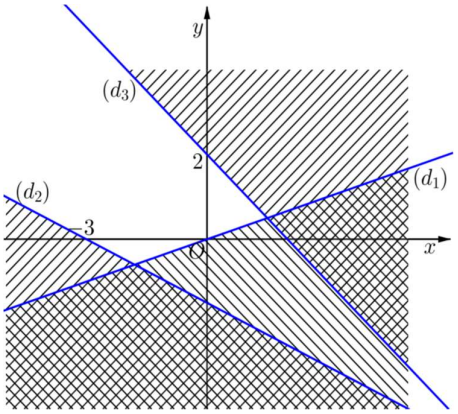



**A.** $A(2;-2)$. **B.** $B(3;0)$. **C.** $C(1;-1)$. **D.** $D(2;-3)$.

**Câu 22.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}x-y>0\\x-3y\le -3\\x+y>5\end{cases}$ không chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(3;2)$. **B.** $B(6;3)$. **C.** $C(6;4)$. **D.** $D(5;4)$.

**Câu 23.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}x-3y<0\\x+2y>-3\\y+x<2\end{cases}$ không chứa điểm nào sau đây?




**A.** $A(0;1)$. **B.** $B(-1;1)$. **C.** $C(-3;0)$. **D.** $D(-3;1)$.

**Câu 24.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} y - 2x \le 2 \\ 2y - x \ge 4 \\ x + y \le 5 \end{cases}$ là

**A.** $\min F = 1$ khi $x = 2,\ y = 3$.
**B.** $\min F = 2$ khi $x = 0,\ y = 2$.
**C.** $\min F = 3$ khi $x = 1,\ y = 4$.
**D.** $\min F = 0$ khi $x = 0,\ y = 0$.

**Câu 25.** Giá trị nhỏ nhất của biết thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 2x + y \le 2 \\ x - y \le 2 \\ 5x + y \ge -4 \end{cases}$ là

**A.** $\min F = -3$ khi $x = 1, y = -2$.
**B.** $\min F = 0$ khi $x = 0, y = 0$.
**C.** $\min F = -2$ khi $x = \frac{4}{3}, y = -\frac{2}{3}$.
**D.** $\min F = 8$ khi $x = -2, y = 6$.

**Câu 26.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y \le 2 \\ 3x + 5y \le 15 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

**A.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, biểu diễn miền nghiệm của hệbất phương trình đã cho là miền tứ giác $ABCO$ kể cả các cạnh với $A(0;3)$, $B\left(\frac{25}{8};\frac{9}{8}\right)$, $C(2;0)$ và $O(0;0)$.

**B.** Đường thẳng $\Delta : x + y = m$ có giao điểm với tứ giác $ABCO$ kể cả khi $-1 \le m \le \frac{17}{4}$.

**C.** Giá trị lớn nhất của biểu thức $x + y$, với $x$ và $y$ thỏa mãn hệ bất phương trình đã cho là $\frac{17}{4}$.

**D.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y$, với $x$ và $y$ thỏa mãn hệ bất phương trình đã cho là 0.

**Câu 27.** Giá trị lớn nhất của biết thức $F(x;y) = x + 2y$ với điều kiện $\begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ x \ge 0 \\ x - y - 1 \le 0 \\ x + 2y - 10 \le 0 \end{cases}$ là

**A.** 6.
**B.** 8.
**C.** 10.
**D.** 12.

**Câu 28.** Giá trị nhỏ nhất của biết thức $F(x;y) = x - 2y$ với điều kiện $\begin{cases} 0 \le y \le 5 \\ x \ge 0 \\ x + y - 2 \ge 0 \\ x - y - 2 \le 0 \end{cases}$ là

**A.** $-10$.
**B.** 12.
**C.** $-8$.
**D.** $-6$.

**Câu 29.** Biểu thức $F = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện $\begin{cases} -2x + y \le -2 \\ x - 2y \le 2 \\ x + y \le 5 \\ x \ge 0 \end{cases}$ tại điểm $S(x;y)$ có toạ độ là

**A.** $(4;1)$.
**B.** $(3;1)$.
**C.** $(2;1)$.
**D.** $(1;1)$.

**Câu 30.** Biểu thức $L = y - x$, với $x$ và $y$ thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \le 0 \\ x \ge 0 \\ 2x - 3y - 1 \le 0 \end{cases}$, đạt giá trị lớn nhất là $a$ và đạt giá trị nhỏ nhất là $b$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

**A.** $a = \frac{25}{8}$ và $b = -2$. **B.** $a = 2$ và $b = -\frac{11}{12}$. **C.** $a = 3$ và $b = 0$. **D.** $a = 3$ và $b = \frac{-9}{8}$.

**Câu 31.** Trong một cuộc thi pha chế, hai đội A, B được sử dụng tối đa $24g$ hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1g hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Đội A pha chế được $a$ lít nước cam và $b$ lít nước táo và dành được điểm thưởng cao nhất. Hiệu số $a - b$ là

**A.** 1. **B.** 3. **C.** $-1$. **D.** $-6$.

**Câu 32.** Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích $800\,m^2$. Nếu trồng đậu trên diện tích $100\,m^2$ thì cần 20 công làm và thu được 3000000 đồng. Nếu trồng cà thì trên diện tích $100\,m^2$ cần 30 công làm và thu được 4000000 đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất khi tổng số công làm không quá 180 công. Hãy chọn phương án đúng nhất trong các phương án sau:

**A.** Trồng $600\,m^2$ đậu; $200\,m^2$ cà. **B.** Trồng $500\,m^2$ đậu; $300\,m^2$ cà.

**C.** Trồng $400\,m^2$ đậu; $200\,m^2$ cà. **D.** Trồng $200\,m^2$ đậu; $600\,m^2$ cà.

**Câu 33.** Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán khuyến mãi hàng hóa (1 sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở trên 140 người và trên 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe $A$ và $B$. Trong đó xe loại $A$ có 10 chiếc, xe loại $B$ có 9 chiếc. Một chiếc xe loại $A$ cho thuê với giá 4 triệu, loại $B$ giá 3 triệu. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí vận chuyển là thấp nhất. Biết rằng xe $A$ chỉ chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng. Xe $B$ chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng.

**A.** 4 xe $A$ và 5 xe $B$. **B.** 5 xe $A$ và 6 xe $B$.

**C.** 5 xe $A$ và 4 xe $B$. **D.** 6 xe $A$ và 4 xe $B$.

**Câu 34.** Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilogam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi $x, y$ lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn. Tính $x^2 + y^2$

**A.** $x^2 + y^2 = 1{,}3$.

**B.** $x^2 + y^2 = 2{,}6$.

**C.** $x^2 + y^2 = 1{,}09$.

**D.** $x^2 + y^2 = 0{,}58$.

**Câu 35.** Có hai cái giỏ đựng trứng gồm giỏ A và giỏ B, các quả trứng trong mỗi đều có hai loại là trứng lành và trứng hỏng. Tổng số trứng trong hai giỏ là 20 quả và số trứng trong giỏ A nhiều hơn số trứng trong giỏ B. Lấy ngẫu nhiên mỗi giỏ 1 quả trứng, biết xác suất để lấy được hai quả trứng lành là $\frac{55}{84}$. Tìm số trứng lành trong giỏ A.

**A.** 6. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 10.

**Câu 36.** Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm $I$ và $II$. Mỗi sản phẩm $I$ bán lãi $500$ nghìn đồng, mỗi sản phẩm $II$ bán lãi $400$ nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm $I$ thì Chiến phải làm việc trong $3$ giờ, Bình phải làm việc trong $1$ giờ. Để sản xuất được một sản phẩm $II$ thì Chiến phải làm việc trong $2$ giờ, Bình phải làm việc trong $6$ giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá $180$ giờ và Bình không thể làm việc quá $220$ giờ. Số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là.

**A.** $32$ triệu đồng. **B.** $35$ triệu đồng. **C.** $14$ triệu đồng. **D.** $30$ triệu đồng.

**Câu 37.** Một gia đình cần ít nhất $900$ đơn vị protein và $400$ đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kiogam thịt bò chứa $800$ đơn vị protein và $200$ đơn vị lipit. Mỗi kilogam thịt lợn chứa $600$ đơn vị protein và $400$ đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất $1,6$ kg thịt bò và $1,1$ kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là $160$ nghìn đồng, một kg thịt lợn là $110$ nghìn đồng. Gọi $x, y$ lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm $x, y$ để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn?

**A.** $x=0,3$ và $y=1,1$. **B.** $x=0,3$ và $y=0,7$. **C.** $x=0,6$ và $y=0,7$. **D.** $x=1,6$ và $y=0,2$.

# Bài 2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x, y$ là một hệ gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x, y$. Mỗi nghiệm chung của các bất phương trình trong hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đó.

***Ví dụ 1***. Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x-4y \le 6 & (1) \\ x+y>2 & (2) \end{cases}$$

Cặp số $(x;y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình trên? $(3;1),(1;-2),(5;-3)$.

***Giải***

- Thay $x=3, y=1$ vào hai bất phương trình của hệ, ta có:

2. $3-4.1 \le 6$ là mệnh đề đúng; $3+1>2$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(3;1)$ là nghiệm chung của $(1)$ và $(2)$ nên $(3;1)$ là nghiệm của hệ bất phương trình.

- Thay $x=1, y=-2$ vào bất phương trình (1) của hệ, ta có:

$2\cdot 1-4\cdot(-2) \le 6$ là mệnh đề sai.

Vậy $(1;-2)$ không là nghiệm của $(1)$ nên $(1;-2)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.

- Thay $x=5, y=-3$ vào bất phương trình (2) của hệ, ta có:

$5+(-3)>2$ là mệnh đề sai.

Vậy $(5;-3)$ không là nghiệm của $(2)$ nên $(5;-3)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.

### II. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

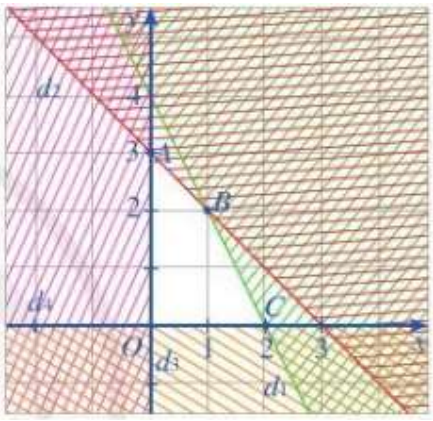
Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta làm như sau:

- Trong cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

***Ví dụ 2.*** Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x+y \le 4 \\ x+y \le 3 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

***Giải***




Vẽ các đường thẳng: $d_1: 2x+y=4; d_2: x+y=3; d_3: x=0$ là trục tung; $d_4: y=0$ là trục hoành.

Gạch đi các phần không thuộc miền của mỗi bất phương trình.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ kể cả miền trong (còn gọi là miền tức giác $OABC$) với $O(0;0), A(0;3), B(1;2), C(2;0)$

## III. Áp dụng vào bài toán thực tiễn

***Bài toán 1.*** Quảng cáo sản phẩm trên truyền hình là một hoạt động quan trọng trong kinh doanh của các doanh nghiệp.



*Sảnh "Trống đồng" ở trụ sở của VTV tại Hà Nội*

Theo Thông báo số 10/2019, giá quảng cáo trên VTV1 là 30 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khoảng $20h30$; là 6 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khung giờ $16h00-17h00$.

Một công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng để quảng cáo trên VTV1 với yêu cầu quảng cáo về số lần phát như sau: ít nhất 10 lần quảng cáo vào khoảng $20h30$ và không quá 50 lần quảng cáo vào khung giờ $16h00-17h00$. Gọi $x, y$ lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng $20h30$ và vào khung giờ $16h00-17h00$. Tìm $x$ và $y$

sao cho tổng số lần xuất hiện quảng cáo của công ty là nhiều nhất.

***Giải***

Gọi $x, y$ lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng $20h30$ và vào khung giờ $16h00-17h00$. Theo giả thiết, ta có: $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x \geq 10, 0 \leq y \leq 50$.

Tổng số lần phát quảng cáo là $T = x + y$.

Số tiền công ty cần chi là $30x + 6y$ (triệu đồng).

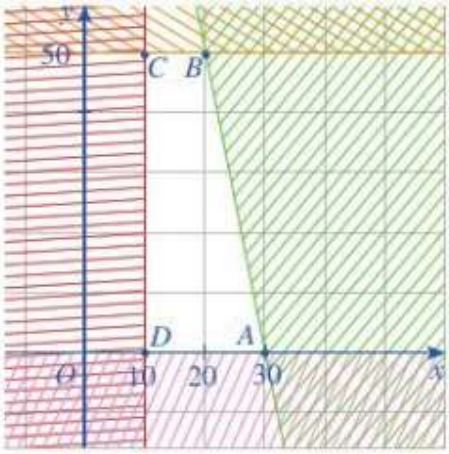
Do công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng nên $30x + 6y \leq 900$ hay $5x + y \leq 150$.

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 5x + y \leq 150 \\ x \geq 10 \\ 0 \leq y \leq 50 \end{cases} \quad (I)$

Bài toán đưa về tìm $x, y$ là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho $T = x + y$ có giá trị lớn nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(30;0), B(20;50)$, $C(10;50), D(10;0)$




Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = x + y$ đạt được giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = x + y$ tại cặp số $(x; y)$ là toạ độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được $T$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 20, y = 50$ ứng với toạ độ đỉnh $B$.

Vậy để phát được số lần quảng cáo nhiều nhất thì số lần phát quảng cáo vào khoảng $20h30$ và vào khung giờ $16h00-17h00$ lần lượt là 20 và 50 lần.

***Bài toán 2.*** Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất $140kg$ chất $A$ và $9kg$ chất $B$. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được $20kg$ chất $A$ và $0,6kg$ chất $B$. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được $10kg$ chất $A$ và $1,5kg$ chất $B$. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất? Biết rằng cở sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

***Giải***

Gọi $x, y$ lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I, loại II cần sử dụng.

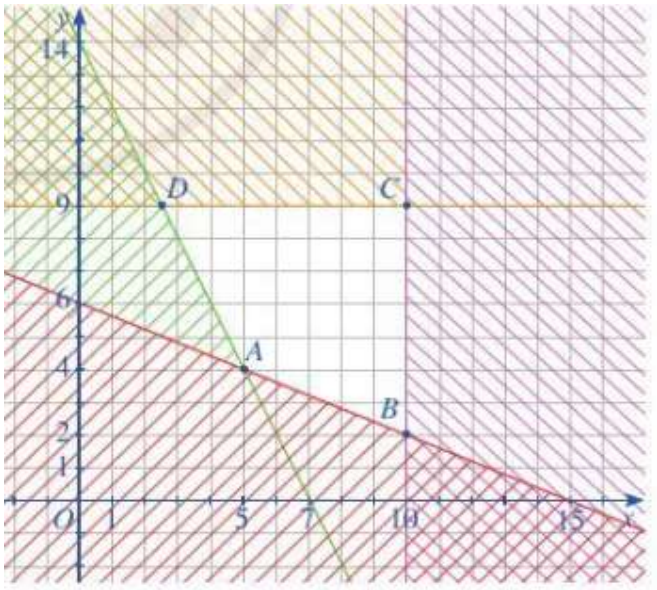
Khi đó, ta chiết xuất được $20x+10y(kg)$ chất $A$ và $0,6x+1,5y(kg)$ chất $B$.

Theo giả thiết, $x$ và $y$ phải thoả mãn các điều kiện:

$0 \le x \le 10, 0 \le y \le 9$

$20x+10y \ge 140$ hay $2x+y \ge 14$;

$0,6x+1,5y \ge 9$ hay $2x+5y \ge 30$.




Tổng số tiền cần mua nguyên liệu là $T = 4x+3y$.

Bài toán đưa về: Tìm $x, y$ là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x+y \ge 14 \\ 2x+5y \ge 30 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

sao cho $T = 4x+3y$ có giá trị nhỏ nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(5;4), B(10;2)$, $C(10;9), D\left(\frac{5}{2};9\right)$

Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = 4x+3y$ có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = 4x+3y$ tại cặp số $(x;y)$ là toạ độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được $T$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 32 khi $x=5, y=4$ ứng với tọa độ đỉnh $A$.

Vậy để chi phí nguyên liệu là ít nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II; khi đó chi phí là 32 triệu đồng.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

**Câu 1.** Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau

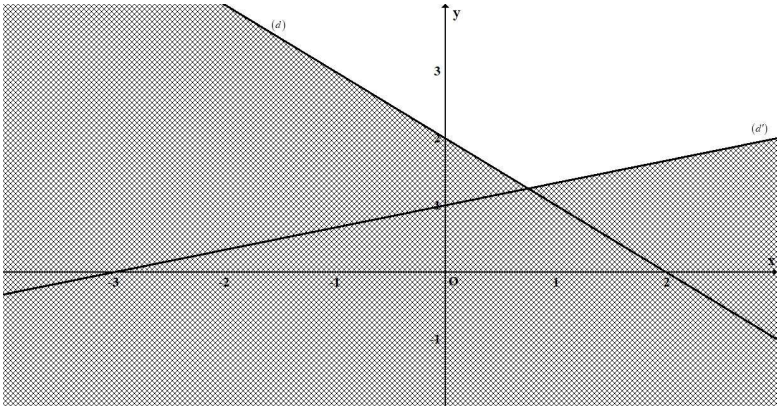
a) $\begin{cases} x+y-2\ge 0 \\ x-3y+3\le 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y>0 \\ -2x-3y+6>0 \\ x-2y+1\ge 0 \end{cases}$

**Lời giải.**

a) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, vẽ các đường thẳng $d: x+y-2=0$ và $d': x-3y+3=0$.

Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x+y-2\ge 0$ và $x-3y+3\le 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ cả hai đường thẳng $d$ và $d'$.

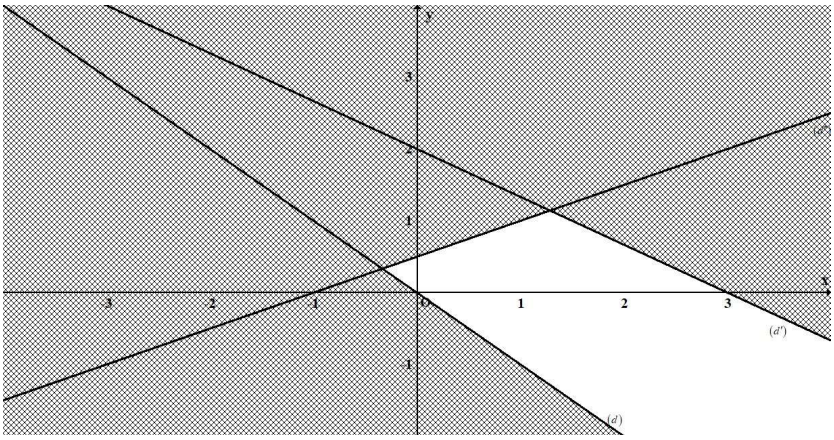



b) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, vẽ các đường thẳng $d: x+y=0$, $d': -2x-3y+6=0$ và $d'': x-2y+1=0$.

Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $-2x-3y+6>0$ và $x-2y+1\ge 0$. Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $-2x-3y+6>0$ và $x-2y+1\ge 0$.

Xét điểm $M(1;0)$, ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x+y>0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm bất phương trình $x+y>0$.

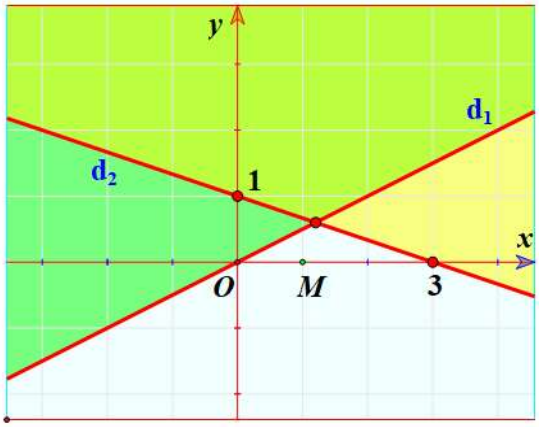
Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả đường thẳng $d''$.




**Câu 2.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-2y>0 \\ x+3y<3 \end{cases}$.

**Lời giải**

- Vẽ các đường thẳng $d_1: x-2y=0$; $d_2: x+3y=3$.
- Điểm $M(1;0)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2$ không chứa điểm $M$. Miền không bị tô đậm (miền chứa điểm $M$), không tính các bờ $d_1; d_2$ (hình vẽ) là miền nghiệm của hệ đã cho.

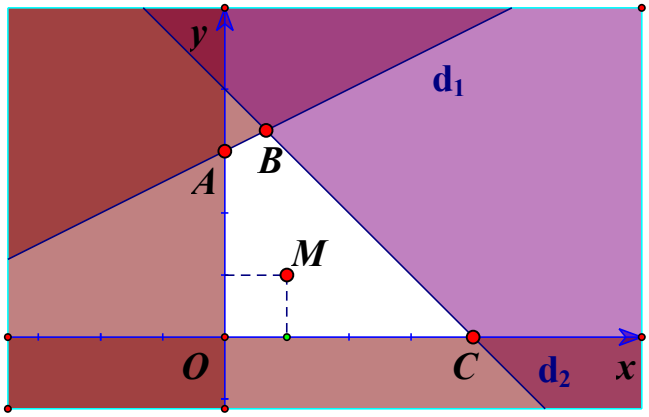



**Câu 3.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x+2y\le 6 \\ x+y\le 4 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$.

**Lời giải**

- Vẽ các đường thẳng $d_1:-x+2y=6$ ; $d_2:x+y=4$; trục $Oy:x=0$; trục $Ox:y=0$.

- Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1;d_2;Ox;Oy$ không chứa điểm $M$. Miền không bị tô đậm là hình tứ giác $OABC$ kể cả bốn cạnh $OA,AB,BC,CO$ trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

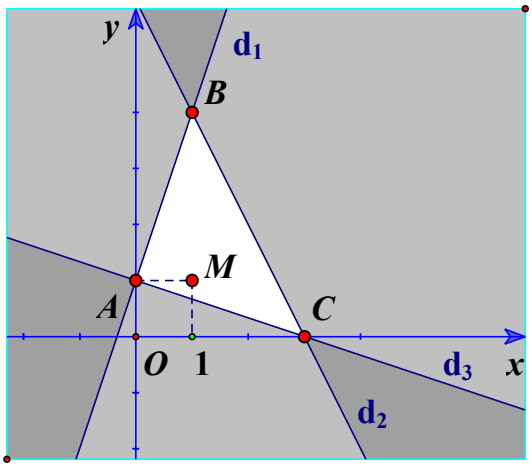



**Câu 4.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x-y\ge -1 \\ 2x+y\le 6 \\ x+3y>3 \end{cases}$.

**Lời giải**

- Vẽ các đường thẳng $d_1:3x-y=-1$; $d_2:2x+y=6$; $d_3:x+3y=3$

- Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1;d_2;d_3$ không chứa điểm $M$. Miền không bị tô đậm là hình tam giác $ABC$ không tính cạnh $AC$ trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



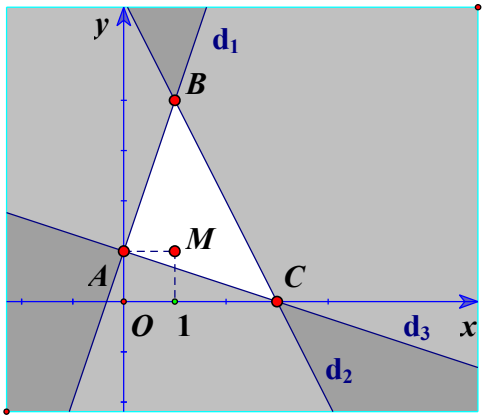

**Câu 5.** Cho cặp $(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x-y\ge -1\\ 2x+y\le 6\\ x+3y\ge 3\end{cases}$ (*). Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $f(x;y)=2x-3y+1$.

**Lời giải**

* Trước hết ta biểu diễn miền nghiệm của hệ (*):

+ Vẽ các đường thẳng $d_1:3x-y=-1;\ d_2:2x+y=6;\ d_3:x+3y=3$

+ Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1;d_2;d_3$ không chứa điểm $M$. Miền không bị tô đậm là hình tam giác $ABC$, tính cả ba cạnh $AB,BC,CA$ trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.




* Tìm tọa độ các điểm $A,B,C$:

+ $A=d_1\cap d_3$ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x-y=-1\\ x+3y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$. Vậy $A(0;1)$.

+ $B=d_1\cap d_2$ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x-y=-1\\ 2x+y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}$. Vậy $B(1;4)$.

+ $C=d_2\cap d_3$ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x+y=6\\ x+3y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases}$. Vậy $C(3;0)$.

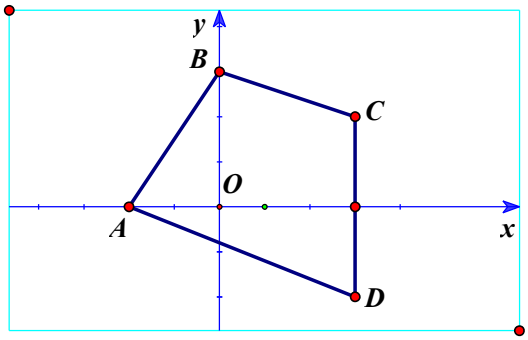
* Tính giá trị của $f(x;y)=2x-3y+1$ tại tất cả các đỉnh của tam giác $ABC$:

| $(x;y)$ | $A(0;1)$ | $B(1;4)$ | $C(3;0)$ |
|---|---|---|---|
| $f(x;y)=2x-3y+1$ | $-2$ | $-9$ | $7$ |

Suy ra $\min f(x;y)=f(1;4)=-9$ và $\max f(x;y)=f(3;0)=7$.

**Câu 6.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho tứ giác $ABCD$ có $A(-2;0)$; $B(0;3)$; $C(3;2)$ và $D(3;-2)$ (tham

khảo hình vẽ). Tìm tất cả các giá trị của $m$ sao cho điểm $M(m;m+1)$ nằm trên hình tứ giác $ABCD$ tính cả bốn cạnh $AB, BC, CD, DA$.




**Lời giải**

* Nhận thấy hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình gồm 4 bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng chứa điểm $O(0;0)$ và lần lượt có các bờ là các đường $AB, BC, CD$ và $DA$.

- Phương trình đường thẳng $AB$: $-3x+2y=6$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $AB$ (tính cả bờ $AB$) và chứa điểm $O$ là $-3x+2y\le 6$.
- Phương trình đường thẳng $BC$: $x+3y=9$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $BC$ (tính cả bờ $BC$) và chứa điểm $O$ là $x+3y\le 9$.
- Phương trình đường thẳng $CD$: $x=3$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $CD$ (tính cả bờ $CD$) và chứa điểm $O$ là $x\le 3$.
- Phương trình đường thẳng $DA$: $2x+5y=-4$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $DA$ (tính cả bờ $DA$) và chứa điểm $O$ là $2x+5y\ge -4$.

Như vậy hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} -3x+2y\le 6 \\ x+3y\le 9 \\ x\le 3 \\ 2x+5y\ge -4 \end{cases} \quad (*).$$

* Điểm $M(m;m+1)$ nằm trên hình tứ giác $ABCD$ tính cả bốn cạnh của nó khi và chỉ khi $(m;m+1)$ là một nghiệm của hệ (*), tức là

$$\begin{cases} -3m+2(m+1)\le 6 \\ m+3(m+1)\le 9 \\ m\le 3 \\ 2m+5(m+1)\ge -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -4 \\ m\le \dfrac{3}{2} \\ m\le 3 \\ m\ge -\dfrac{9}{7} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{7}\le m\le \frac{3}{2}.$$

Vậy các giá trị $m$ cần tìm là $-\dfrac{9}{7}\le m\le \dfrac{3}{2}$.

**Dạng 2. Bài toán thức tế - tìm GTLN-GTNN**

**Câu 7.** Một hộ nông dân dự định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu về được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180.

**Lời giải**

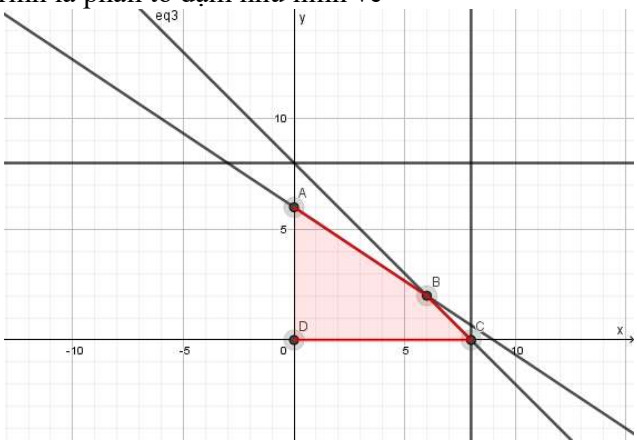
Gọi diện tích để trồng đậu là : $x$ (ha); diện tích để trồng cà là: $y$ (ha). ( Đk: $0\le x,y\le 8$)

Tổng số diện tích sử dụng là: $x+y$.

Tổng số công cần sử dụng là: $20x+30y$

Ta có hệ bất phương trình : $\begin{cases} 0 \le x \le 8 \\ 0 \le y \le 8 \\ x + y \le 8 \\ 20x + 30y \le 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 8 \\ 0 \le y \le 8 \\ x + y \le 8 \\ 2x + 3y \le 18 \end{cases}$

Vẽ các đường thẳng $(d_1): x + y = 8,\ (d_2): 2x + 3y = 18, (d_3): x = 8,\ (d_4): y = 8$ ta được miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần tô đậm như hình vẽ




$A(0;6) = (d_2) \cap Oy,\ B(6;2) = (d_1) \cap (d_2)$

$C(8;0) = (d_1) \cap Ox,\ D \equiv O(0;0)$

Số tiền thu về là: $f(x;y) = 3x + 4y$ (triệu đồng)

| $M(x;y)$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x,y) = 3x + 4y$ | 24 | 26 | 24 | 0 |

Do đó $f(x;y)$ đạt giá trị lớn nhất tại $B(6;2)$.

Vậy để thu được nhiều tiền nhất thì cần trồng 6 ha đậu và 2 ha cà.

**Câu 8.** Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng mỗi ngày gia đình này chỉ mua tối đa 1.5kg thịt bò và 1kg thịt lợn, giá tiền 1kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

**Lời giải**

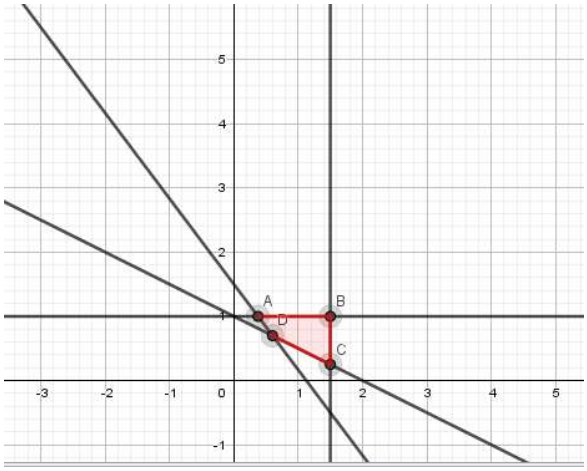
Gọi số kg thịt bò cần mua là : $x$ (kg); số kg thịt lợn cần mua là : $y$ (kg). Đk: $0 \le x \le 1,5,\ 0 \le y \le 1$.

Khi đó số đơn vị protein là : $800x + 600y$.

Số đơn vị lipit là : $200x + 400y$.

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 0 \le x \le 1,5 \\ 0 \le y \le 1 \\ 800x + 600y \ge 900 \\ 200x + 400y \ge 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1,5 \\ 0 \le y \le 1 \\ 8x + 6y \ge 9 \\ x + 2y \ge 2 \end{cases}$.

Vẽ các đường thẳng: $(d_1): x = 1,5,\ (d_2): y = 1,\ (d_3): 8x + 6y = 9$ , $(d_4): x + 2y = 2$. Ta được miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần tô đậm trong hình vẽ.




$A\left(\frac{3}{8};1\right)=(d_3)\cap(d_2)$, $B(1,5;1)=(d_1)\cap(d_2)$, $C(1,5;0,25)=(d_1)\cap(d_4)$ $D\left(\frac{3}{5};\frac{7}{10}\right)=(d_3)\cap(d_4)$.

Số tiền bỏ ra là : $f(x;y)=200x+100y$ ( nghìn đồng ).

| $M(x;y)$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x;y)=200x+100y$ | 175 | 400 | 325 | 190 |

Do đó $f(x;y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $A\left(\frac{3}{8};1\right)$.

Vậy để số tiền bỏ ra nhỏ nhất thì cần mua $\frac{3}{8}kg$ và 1kg thịt lợn.

**Câu 9.** Người ta định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 120 kg hóa chất A và 9 kg hóa chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất. Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

**Lời giải**

Gọi số tấn nguyên liệu loại I cần sử dụng là $x$ (tấn) ; số tấn nguyên liệu loại II cần sử dụng là $y$ (tấn).

Đk: $0\le x\le 10,\ 0\le y\le 9$.

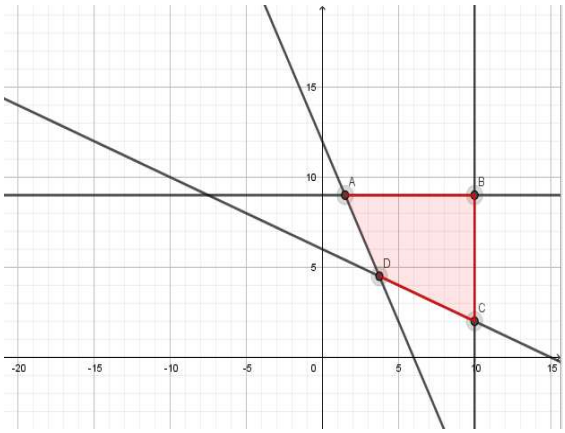
Khi đó số kg chất A thu được là: $20x+10y$

Số kg chất B thu được là: $0,6x+1,5y$.

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases}0\le x\le 10\\0\le y\le 9\\20x+10y\ge 120\\0,6x+1,5y\ge 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 10\\0\le y\le 9\\2x+y\ge 12\\2x+5y\ge 30\end{cases}$.

Vẽ các đường thẳng $(d_1):x=10,(d_2):y=9,(d_3):2x+y=12,(d_4):2x+5y=30$

Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần tô màu như hình vẽ :




$(d_2)\cap(d_3)=A\left(\frac{3}{2};9\right)$, $(d_2)\cap(d_1)=B(10;9)$.

$(d_1)\cap(d_4)=C(10;2)$, $(d_4)\cap(d_3)=D\left(\frac{15}{4};\frac{9}{2}\right)$

Chi phí mua nguyên liệu cần bỏ ra là : $f(x;y)=4x+3y$ ( triệu đồng ).

| $M(x;y)$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x,y)=4x+3y$ | 33 | 67 | 46 | 28,5 |

Do đó $f(x;y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $D\left(\frac{15}{4};\frac{9}{2}\right)$.

Vậy để chi phí nguyên liệu là ít nhất ta cần sử dụng $\frac{15}{4}=3,75$ tấn nguyên liệu loại I và $\frac{9}{2}=4,5$ tấn nguyên liệu loại II.

**Câu 10.** Có ba nhóm máy A, B,C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

| **Nhóm** | **Số máy trong mỗi nhóm** | **Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm** | |
|---|---|---|---|
| | | **Loại I** | **Loại II** |
| A | 10 | 2 | 2 |
| B | 4 | 0 | 2 |
| C | 12 | 2 | 4 |

Một đơn vị sản phẩm I lãi ba nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm loại II lãi năm nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

**Lời giải**

Gọi số sản phẩm loại I cần sản xuất là $x$ ; số sản phẩm loại II cần sản xuất là $y$. Đk: $x,y\ge 0$.

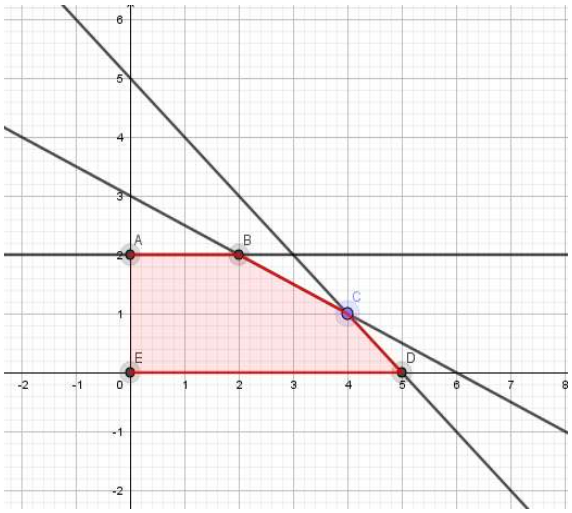
Số máy nhóm A cần sử dụng là: $2x+2y$.

Số máy nhóm B cần sử dụng là: $2y$.

Số máy nhóm C cần sử dụng là: $2x+4y$.

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ 2x+2y\le 10\\ 2y\le 4\\ x+2y\le 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 0\le y\le 2\\ x+y\le 5\\ x+2y\le 6\end{cases}$.

Vẽ các đường thẳng $(d_1):y=2$, $(d_2):x+y=5$, $(d_3):x+2y=6$. Ta có miền nghiệm của bất phương trình là phần tô màu như hình vẽ :




$(d_1)\cap Oy = A(0;2)$, $(d_1)\cap(d_3) = B(2;2)$, $(d_2)\cap(d_3) = C(4;1)$

$(d_2)\cap Ox = D(5;0)$, $E \equiv O = (0;0)$

Lãi suất thu được là : $f(x;y) = 3x+5y$ ( nghìn đồng).

| $M(x;y)$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x,y) = 4x+3y$ | 10 | 16 | 17 | 15 | 0 |

Do đó $f(x;y)$ đạt giá trị lớn nhất tại $C(4;1)$.

Vậy phương án sản xuất 4 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II sẽ cho lãi cao nhất.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

**Câu 1.** Trong các cặp số sau, cặp nào **không** là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y-2\le 0 \\ 2x-3y+2>0 \end{cases}$ là

**A.** $(0;0)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;-1)$.

**Lời giải**

**ChọnC.**

Ta thay cặp số $(-1;1)$ vào hệ ta thấy không thỏa mãn.

**Câu 2.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1\ge 0 \\ 2(x-1)+\dfrac{3y}{2}\le 4 \\ x\ge 0 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(2;1)$. **B.** $(0;0)$. **C.** $(1;1)$. **D.** $(3;4)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Nhận xét: chỉ có điểm $(2;1)$ thỏa mãn hệ.

**Câu 3.** Điểm nào sau đây **không** thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x+3y-1>0 \\ 5x-y+4<0 \end{cases}$?

**A.** $(-1;4)$. **B.** $(-2;4)$. **C.** $(0;0)$. **D.** $(-3;4)$.

**Lời giải**

**ChọnC.**

Nhận xét: chỉ có điểm $(0;0)$ không thỏa mãn hệ.

**Câu 4.** Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-5y-1>0 \\ 2x+y+5>0 \\ x+y+1<0 \end{cases}$ ?

**A.** $(0;0)$. **B.** $(1;0)$. **C.** $(0;-2)$. **D.** $(0;2)$.

**Lời giải**

**ChọnC.**

Nhận xét: chỉ có điểm $(0;-2)$ thỏa mãn hệ.

**Câu 5.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y>0 \\ x-3y+3<0 \\ x+y-5>0 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(5;3)$. **B.** $(0;0)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $(-2;2)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Nhận xét: chỉ có điểm $(5;3)$ thỏa mãn hệ.

**Câu 6.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+y\ge 9 \\ x\ge y-3 \\ 2y\ge 8-x \\ y\le 6 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm

**A.** $(0;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;1)$. **D.** $(8;4)$.

**Lời giải**

**ChọnD.**

Nhận xét: chỉ có cặp số $(8;4)$ thỏa bất phương trình $3x+y\ge 9$.

**Câu 7.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y>0 \\ 2x+5y<0 \end{cases}$ có tập nghiệm là $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A.** $(1;1)\in S$. **B.** $(-1;-1)\in S$. **C.** $\left(1;-\frac{1}{2}\right)\in S$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right)\in S$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Thế đáp án, chỉ có $x=1;y=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn hệ bất phương trình $\Rightarrow$ chọn C

**Câu 8.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+y\ge 6 \\ x\ge y-3 \\ 2y\ge 8-x \\ y\le 4 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm:

**A.** $(2;1)$. **B.** $(6;4)$. **C.** $(0;0)$. **D.** $(1;2)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

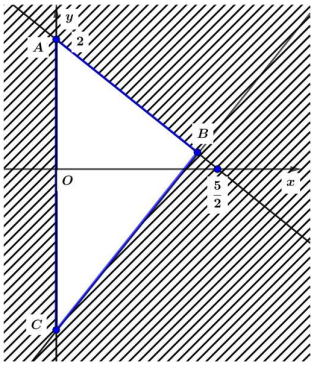
Nhận xét: Miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là miền mặt phẳng chứa tất cả các điểm có toạ độ thoả mãn tất cả các bất phương trình trong hệ.

Thế $x=6; y=4$ vào từng bất phương trình trong hệ, ta lần lượt có các mệnh đề đúng: $22\ge 6; 6\ge 1; 8\ge 2; 4\le 4$. Vậy ta chọn đáp án B.

Đáp án A có toạ độ không thoả bất phương trình thứ 3.

Đáp án C, D có toạ độ không thoả bất phương trình thứ 1 và 3.

**Câu 9.** Miền tam giác $ABC$ kể cả ba cạnh sau đây là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ bất phương trình dưới đây?




**A.** $\begin{cases} y\ge 0 \\ 5x-4y\ge 10 \\ 5x+4y\le 10 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x>0 \\ 5x-4y\le 10 \\ 4x+5y\le 10 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x\ge 0 \\ 4x-5y\le 10 \\ 5x+4y\le 10 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x\ge 0 \\ 5x-4y\le 10 \\ 4x+5y\le 10 \end{cases}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Cạnh $AC$ có phương trình $x=0$ và cạnh $AC$ nằm trong miền nghiệm nên $x\ge 0$ là một bất phương trình của hệ.

Cạnh $AB$ qua hai điểm $\left(\frac{5}{2};0\right)$ và $(0;2)$ nên có phương trình: $\frac{x}{\frac{5}{2}}+\frac{y}{2}=1\Leftrightarrow 4x+5y=10$.

Vậy hệ bất phương trình cần tìm là $\begin{cases} x\ge 0 \\ 5x-4y\le 10 \\ 4x+5y\le 10 \end{cases}$.

**Câu 10.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x>0 \\ x+\sqrt{3}y+1\le 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A.** $(1;-1)\in S$. **B.** $\left(1;-\sqrt{3}\right)\in S$. **C.** $\left(-1;\sqrt{5}\right)\notin S$. **D.** $\left(-4;\sqrt{3}\right)\in S$.

**Lời giải**

**ChọnC.**

Ta thấy $\left(-1;\sqrt{5}\right)\notin S$ vì $-1<0$.

**Câu 11.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x>0 \\ x+\sqrt{3}y+1>0 \end{cases}$ có tập nghiệm là $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A.** $(-1;2)\in S$. **B.** $\left(\sqrt{2};0\right)\notin S$. **C.** $\left(1;-\sqrt{3}\right)\in S$. **D.** $\left(\sqrt{3};0\right)\in S$.

**Lời giải**

**ChọnD.**

Ta thấy $\left(\sqrt{3};0\right)\in S$ vì $\begin{cases}\sqrt{3}>0\\ \sqrt{3}+\sqrt{3}.0+1>0\end{cases}$.

**Câu 12.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x-y>3\\ 1-\dfrac{1}{2}x+y>0\end{cases}$ có tập nghiệm $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

**A.** $\left(1;-2\right)\in S$. **B.** $\left(2;1\right)\in S$. **C.** $\left(5;-6\right)\in S$. **D.** $S=\varnothing$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Vì không có điểm nào thỏa hệ bất phương trình.

**Câu 13.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}2x-\dfrac{3}{2}y\ge 1\\ 4x-3y\le 2\end{cases}$ có tập nghiệm $S$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

**A.** $\left(-\dfrac{1}{4};-1\right)\notin S$.

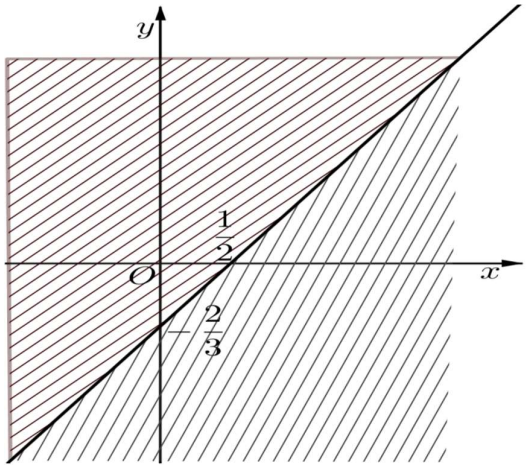
**B.** $S=\left\{\left(x;y\right)\,|\,4x-3y=2\right\}$.

**C.** Biểu diễn hình học của $S$ là nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ và kể cả bờ $d$, với $d$ là là đường thẳng $4x-3y=2$.

**D.** Biểu diễn hình học của $S$ là nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ và kể cả bờ $d$, với $d$ là là đường thẳng $4x-3y=2$.

**Lời giải**

**Chọn B.**




Trước hết, ta vẽ hai đường thẳng:

$\left(d_1\right):2x-\dfrac{3}{2}y=1$

$\left(d_2\right):4x-3y=2$

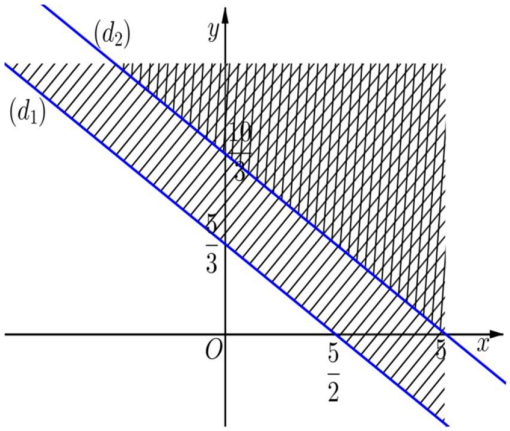
Thử trực tiếp ta thấy $\left(0\,;\,0\right)$ là nghiệm của phương trình (2) nhưng không phải là nghiệm của phương trình (1). Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, tập hợp nghiệm của bất phương trình chính là các điểm thuộc đường thẳng $\left(d\right):4x-3y=2.$

**Câu 14.** Cho hệ $\begin{cases} 2x+3y<5 \ (1) \\ x+\dfrac{3}{2}y<5 \ (2) \end{cases}$. Gọi $S_1$ là tập nghiệm của bất phương trình (1), $S_2$ là tập nghiệm của bất phương trình (2) và $S$ là tập nghiệm của hệ thì

**A.** $S_1 \subset S_2$. **B.** $S_2 \subset S_1$. **C.** $S_2 = S$. **D.** $S_1 \neq S$.

**Lời giải**

**Chọn B.**



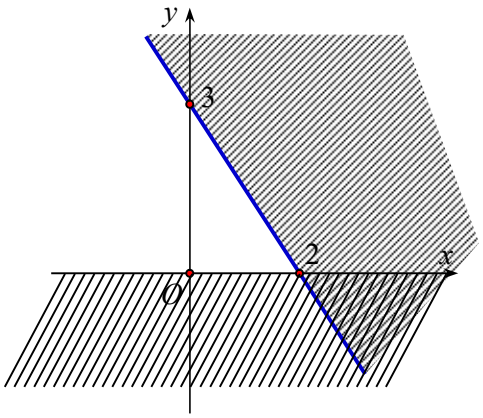

Trước hết, ta vẽ hai đường thẳng:

$(d_1): 2x+3y=5$

$(d_2): x+\dfrac{3}{2}y=5$

Ta thấy $(0\,;0)$ là nghiệm của cả hai bất phương trình. Điều đó có nghĩa gốc tọa độ thuộc cả hai miền nghiệm của hai bất phương trình. Say khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

**Câu 15.** Phần không gạch chéo ở hình sau đây là biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ A, B, C, D?




**A.** $\begin{cases} y>0 \\ 3x+2y<6 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} y>0 \\ 3x+2y<-6 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x>0 \\ 3x+2y<6 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x>0 \\ 3x+2y>-6 \end{cases}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Dựa vào hình vẽ ta thấy đồ thị gồm hai đường thẳng $(d_1): y=0$ và đường thẳng

$(d_2): 3x+2y=6.$

Miền nghiệm gồm phần $y$ nhận giá trị dương.

Lại có $(0\,;\,0)$ thỏa mãn bất phương trình $3x+2y<6$.

**Câu 16.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \\ y-x<3 \end{cases}$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1\,;\,0)$. **B.** $B(-2\,;\,3)$. **C.** $C(0\,;\,-1)$. **D.** $D(-1\,;\,0)$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng:

$(d_1): x-2y=0$

$(d_2): x+3y=-2$

$(d_3): y-x=3$

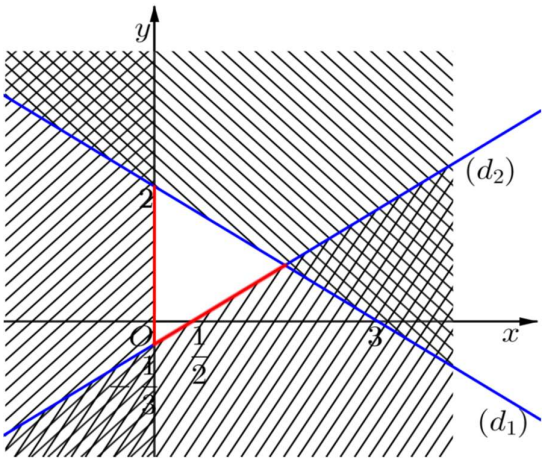
Ta thấy $(0\,;\,1)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(0\,;\,1)$ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình. Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

**Câu 17.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x+3y-6<0 \\ x\ge 0 \\ 2x-3y-1\le 0 \end{cases}$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(1\,;\,2)$. **B.** $B(0\,;\,2)$. **C.** $C(-1\,;\,3)$. **D.** $D\left(0\,;\,-\frac{1}{3}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D.**




Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng:

$(d_1): 2x+3y-6=0$

$(d_2): x=0$

$(d_3): 2x-3y-1=0$

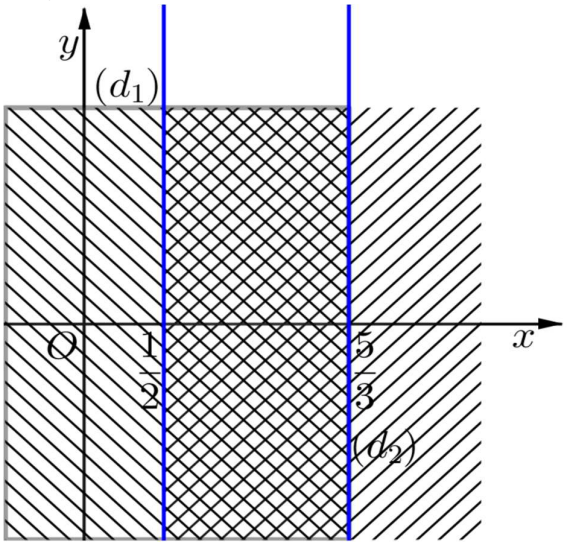
Ta thấy $(1\,;\,1)$ là nghiệm của các ba bất phương trình. Điều này có nghĩa là điểm $(1\,;\,1)$ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình. Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

**Câu 18.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1\le 0 \\ -3x+5\le 0 \end{cases}$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** Không có. **B.** $B\left(\frac{5}{3};2\right)$. **C.** $C(-3;1)$. **D.** $D\left(\frac{1}{2};10\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**




Trước hết, ta vẽ hai đường thẳng:

$(d_1): 2x-1=0$

$(d_2): -3x+5=0$

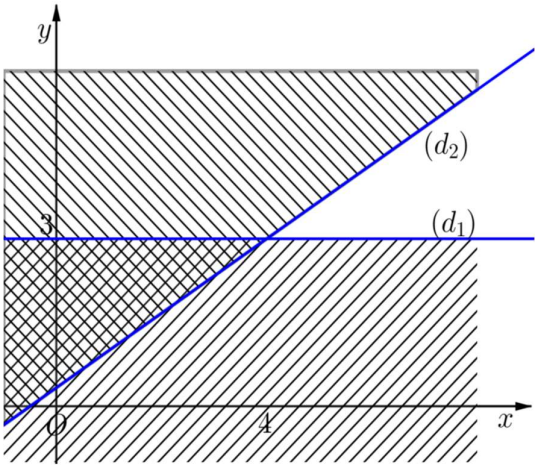
Ta thấy $(1;0)$ là không nghiệm của cả hai bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(1;0)$ không thuộc cả hai miền nghiệm của hai bất phương trình. Vậy không có điểm nằm trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn hệ bất phương trình.

**Câu 19.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}3-y<0\\2x-3y+1>0\end{cases}$ chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(3;4)$. **B.** $B(4;3)$. **C.** $C(7;4)$. **D.** $D(4;4)$.

**Lời giải**

**Chọn C.**




Trước hết, ta vẽ hai đường thẳng:

$(d_1): 3-y=0$

$(d_2): 2x-3y+1=0$

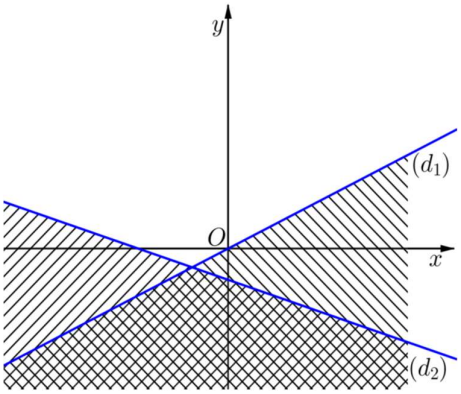
Ta thấy $(6\,;\,4)$ là nghiệm của hai bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(6\,;\,4)$ thuộc cả hai miền nghiệm của hai bất phương trình. Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

**Câu 20.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \end{cases}$ không chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(-1\,;\,0)$. **B.** $B(1\,;\,0)$. **C.** $C(-3\,;\,4)$. **D.** $D(0\,;\,3)$.

**Lời giải**

**Chọn B.**



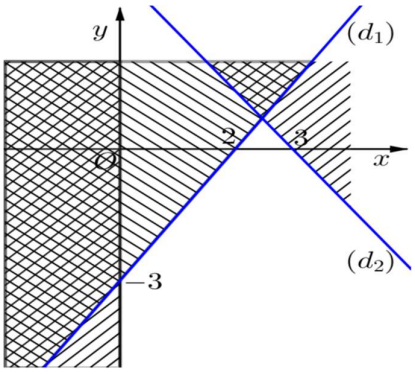

Trước hết, ta vẽ hai đường thẳng:

$(d_1): x-2y=0$

$(d_2): x+3y=-2$

Ta thấy $(0\,;\,1)$ là nghiệm của hai bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(0\,;\,1)$ thuộc cả hai miền nghiệm của hai bất phương trình. Sau khi gạch bỏ phần không thích hợp, phần không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

**Câu 21.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x-2y-6\ge 0 \\ 2(x-1)+\dfrac{3y}{2}\le 4 \\ x\ge 0 \end{cases}$ không chứa điểm nào sau đây?




**A.** $A(2\,;\,-2)$. **B.** $B(3\,;\,0)$. **C.** $C(1\,;\,-1)$. **D.** $D(2\,;\,-3)$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng:

$(d_1): 3x-2y-6=0$

$(d_2): 4x+3y-12=0$

$(d_3): x=0$

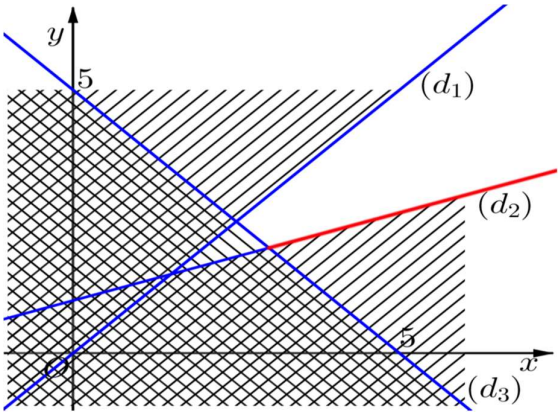
Ta thấy $(2\ ;\ -1)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(2\ ;\ -1)$ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình. Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

**Câu 22.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y>0 \\ x-3y\le -3 \\ x+y>5 \end{cases}$ không chứa điểm nào sau đây?

**A.** $A(3\ ;\ 2)$. **B.** $B(6\ ;\ 3)$. **C.** $C(6\ ;\ 4)$. **D.** $D(5\ ;\ 4)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**




Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng:

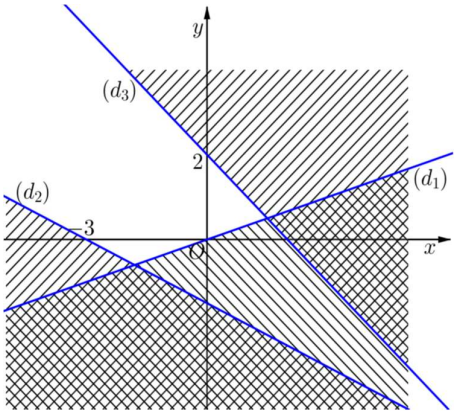
$(d_1): x-y=0$

$(d_2): x-3y=-3$

$(d_3): x+y=5$

Ta thấy $(5\ ;\ 3)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(5\ ;\ 3)$ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình. Sau khi gạch bỏ miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

**Câu 23.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-3y<0 \\ x+2y>-3 \\ y+x<2 \end{cases}$ không chứa điểm nào sau đây?



**A.** $A(0\,;1)$. **B.** $B(-1\,;1)$. **C.** $C(-3\,;0)$. **D.** $D(-3\,;1)$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng:

$(d_1): x-3y=0$

$(d_2): x+2y=-3$

$(d_3): x+y=2$

Ta thấy $(-1\,;0)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa điểm $(-1\,;0)$ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình. Sau khi gạch bỏ miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ.

## Dạng 2. Bài toán thức tế - tìm GTLN-GTNN

**Câu 24.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=y-x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} y-2x\le 2 \\ 2y-x\ge 4 \\ x+y\le 5 \end{cases}$ là

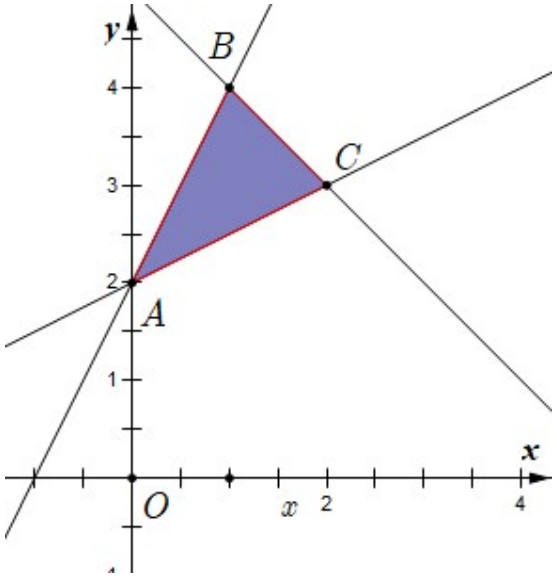
**A.** $\min F=1$ khi $x=2$, $y=3$. **B.** $\min F=2$ khi $x=0$, $y=2$.

**C.** $\min F=3$ khi $x=1$, $y=4$. **D.** $\min F=0$ khi $x=0$, $y=0$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Miền nghiệm của hệ $\begin{cases} y-2x\le 2 \\ 2y-x\ge 4 \\ x+y\le 5 \end{cases}$ là miền trong của tam giác $ABC$ kể cả biên (như hình)




Ta thấy $F=y-x$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm $A$, $B$, $C$.

Tại $A(0;2)$ thì $F=2$.

Tại $B(1;4)$ thì $F=3$

Tại $A(2;3)$ thì $F=1$.

Vậy $\min F=1$ khi $x=2$, $y=3$.

**Câu 25.** Giá trị nhỏ nhất của biết thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 2x + y \le 2 \\ x - y \le 2 \\ 5x + y \ge -4 \end{cases}$ là

**A.** $\min F = -3$ khi $x = 1, y = -2$.

**B.** $\min F = 0$ khi $x = 0, y = 0$.

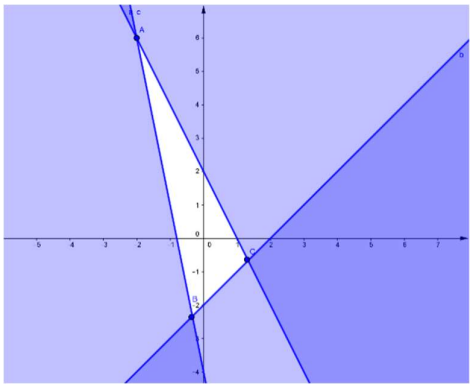
**C.** $\min F = -2$ khi $x = \frac{4}{3}, y = -\frac{2}{3}$.

**D.** $\min F = 8$ khi $x = -2, y = 6$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + y \le 2 \\ x - y \le 2 \\ 5x + y \ge -4 \end{cases}$ trên hệ trục tọa độ như dưới đây:



Giá trị nhỏ nhất của biết thức $F = y - x$ chỉ đạt được tại các điểm

$A(-2;6), C\left(\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right), B\left(\frac{-1}{3};\frac{-7}{3}\right)$.

Ta có: $F(A) = 8; F(B) = -2; F(C) = -2$.

Vậy $\min F = -2$ khi $x = \frac{4}{3}, y = -\frac{2}{3}$.

**Câu 26.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y \le 2 \\ 3x + 5y \le 15 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

**A.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, biểu diễn miền nghiệm của hệbất phương trình đã cho là miền tứ giác $ABCO$ kể cả các cạnh với $A(0;3)$, $B\left(\frac{25}{8};\frac{9}{8}\right)$, $C(2;0)$ và $O(0;0)$.

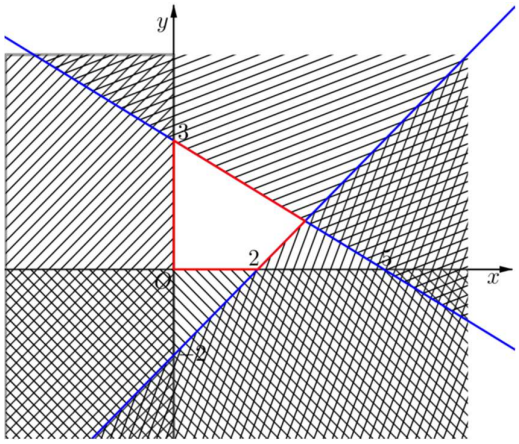
**B.** Đường thẳng $\Delta : x + y = m$ có giao điểm với tứ giác $ABCO$ kể cả khi $-1 \le m \le \frac{17}{4}$.

**C.** Giá trị lớn nhất của biểu thức $x + y$, với $x$ và $y$ thỏa mãn hệ bất phương trình đã cho là $\frac{17}{4}$.

**D.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y$, với $x$ và $y$ thỏa mãn hệ bất phương trình đã cho là 0.

**Lời giải**

**Chọn B.**




Trước hết, ta vẽ bốn đường thẳng:

$(d_1): x-y=2$

$(d_2): 3x+5y=15$

$(d_3): x=0$

$(d_4): y=0$

Miền nghiệm là phần không bị gạch, kể cả biên.

**Câu 27.** Giá trị lớn nhất của biết thức $F(x;y)=x+2y$ với điều kiện $\begin{cases} 0\le y\le 4 \\ x\ge 0 \\ x-y-1\le 0 \\ x+2y-10\le 0 \end{cases}$ là

**A.** $6$. **B.** $8$. **C.** $10$. **D.** $12$.

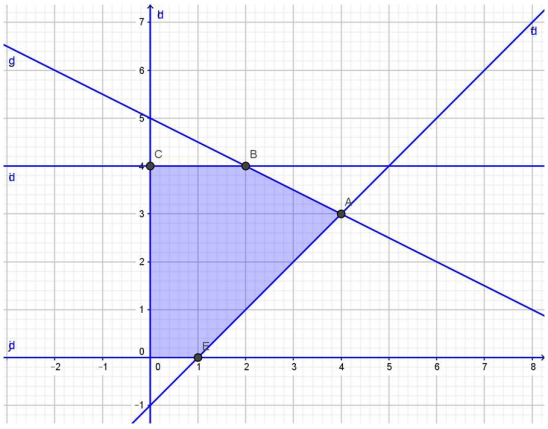
**Lời giải**

**Chọn C.**

Vẽ đường thẳng $d_1: x-y-1=0$, đường thẳng $d_1$ qua hai điểm $(0;-1)$ và $(1;0)$.

Vẽ đường thẳng $d_2: x+2y-10=0$, đường thẳng $d_2$ qua hai điểm $(0;5)$ và $(2;4)$.

Vẽ đường thẳng $d_3: y=4$.




Miền nghiệm là ngũ giác $ABCOE$ với $A(4;3), B(2;4), C(0;4), E(1;0)$.

Ta có: $F(4;3)=10$, $F(2;4)=10$, $F(0;4)=8$, $F(1;0)=1$, $F(0;0)=0$.

Vậy giá trị lớn nhất của biết thức $F(x;y)=x+2y$ bằng $10$.

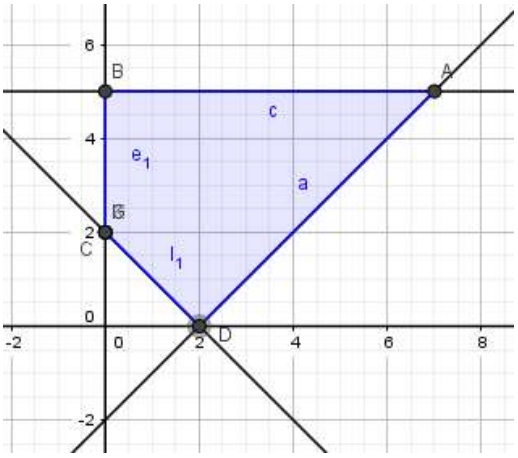
**Câu 28.** Giá trị nhỏ nhất của biết thức $F(x;y)=x-2y$ với điều kiện $\begin{cases} 0\le y\le 5 \\ x\ge 0 \\ x+y-2\ge 0 \\ x-y-2\le 0 \end{cases}$ là

**A.** $-10$. **B.** $12$. **C.** $-8$. **D.** $-6$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Biểu diễn miền ngiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 0\le y\le 5 \\ x\ge 0 \\ x+y-2\ge 0 \\ x-y-2\le 0 \end{cases}$ trên hệ trục tọa độ như dưới đây:.




Nhận thấy biết thức $F=y-x$ chỉ đạt giá trị nhỏ nhất tại các điểm $A,B,C$ hoặc $D$.

Ta có: $F(A)=7-2\times 5=-3; F(B)=-2\times 5=-10$.

$F(C)=-2\times 2=-4, F(D)=2-2\times 0=2$.

Vậy $\min F=-10$ khi $x=0, y=5$.

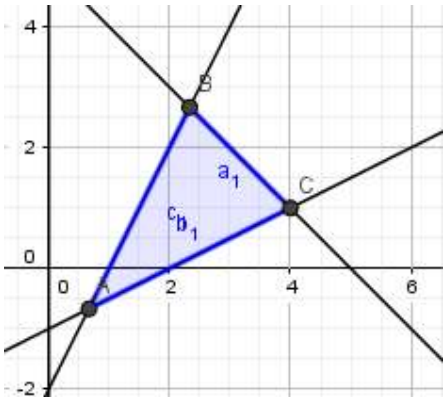
**Câu 29.** Biểu thức $F=y-x$ đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện $\begin{cases} -2x+y\le -2 \\ x-2y\le 2 \\ x+y\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$ tại điểm $S(x;y)$ có toạ độ là

**A.** $(4;1)$. **B.** $(3;1)$. **C.** $(2;1)$. **D.** $(1;1)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Biểu diễn miền ngiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -2x+y\le -2 \\ x-2y\le 2 \\ x+y\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$ trên hệ trục tọa độ như dưới đây:




Nhận thấy biết thức $F = y - x$ chỉ đạt giá trị nhỏ nhất tại các điểm $A, B$ hoặc $C$.

Chỉ $C(4;1)$ có tọa độ nguyên nên thỏa mãn.

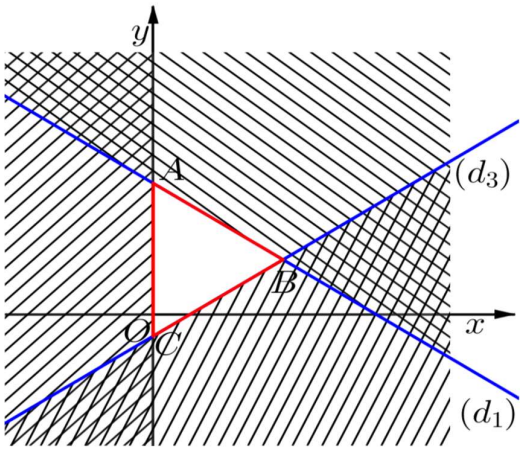
Vậy $\min F = -3$ khi $x = 4, y = 1$.

**Câu 30.** Biểu thức $L = y - x$, với $x$ và $y$ thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \le 0 \\ x \ge 0 \\ 2x - 3y - 1 \le 0 \end{cases}$, đạt giá trị lớn nhất là $a$ và đạt giá trị nhỏ nhất là $b$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

**A.** $a = \dfrac{25}{8}$ và $b = -2$. **B.** $a = 2$ và $b = -\dfrac{11}{12}$. **C.** $a = 3$ và $b = 0$. **D.** $a = 3$ và $b = \dfrac{-9}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**




Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng:

$(d_1): 2x + 3y - 6 = 0$

$(d_2): x = 0$

$(d_3): 2x - 3y - 1 = 0$

Ta thấy $(0\ ;\ 0)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa gốc tọa độ thuộc cả ba miền nghiệm của cả ba bất phương trình. Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ (kể cả biên).

Miền nghiệm là hình tam giác $ABC$ (kể cả biên), với $A(0\ ;\ 2)$, $B\left(\dfrac{7}{4}\ ;\ \dfrac{5}{6}\right)$, $C\left(0\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right)$.

Vậy ta có $a = 2 - 0 = 2$, $b = \dfrac{5}{6} - \dfrac{7}{4} = -\dfrac{11}{12}$.

**Câu 31.** Trong một cuộc thi pha chế, hai đội A, B được sử dụng tối đa $24g$ hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít

nước và 1g hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Đội A pha chế được $a$ lít nước cam và $b$ lít nước táo và dành được điểm thưởng cao nhất. Hiệu số $a-b$ là

**A.** 1. **B.** 3. **C.** $-1$. **D.** $-6$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $x, y$ lần lượt là số lít nước cam và nước táo mà mỗi đội cần pha chế $(x \ge 0;\ y \ge 0)$.

Để pha chế $x$ lít nước cam cần $30x$ g đường, $x$ lít nước và $x$ g hương liệu.

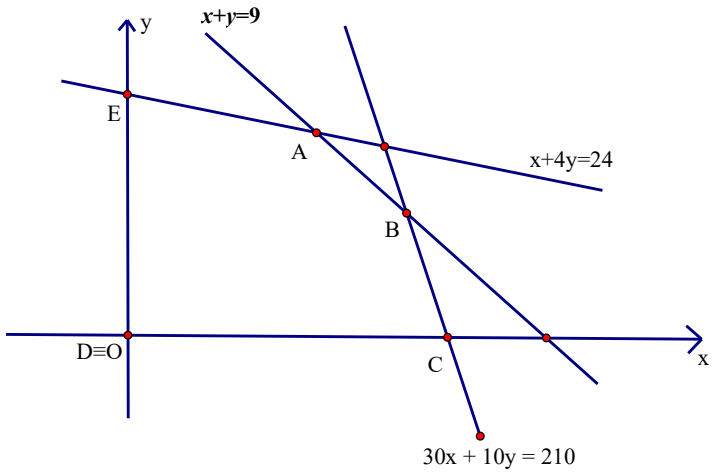
Để pha chế $y$ lít nước táo cần $10y$ g đường, $y$ lít nước và $4y$ g hương liệu.

Theo bài ra ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 30x+10y \le 210 \\ x+y \le 9 \\ x+4y \le 24 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases} \quad (*).$$

Số điểm đạt được khi pha $x$ lít nước cam và $y$ lít nước táo là $M(x,y)=60x+80y$. Bài toán trở thành tìm $x, y$ để $M(x,y)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta biểu diễn miền nghiệm của hệ $(*)$ trên mặt phẳng tọa độ như sau:




Miền nghiệm là ngũ giác $ABCDE$.

Tọa độ các điểm: $A(4;5)$, $B(6;3)$, $C(7;0)$, $D(0;0)$, $E(0;6)$.

$M(x,y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại các đỉnh của miền nghiệm nên thay tọa độ các điểm vào biểu thức $M(x,y)$ ta được:

$M(4;5)=640$; $M(6;3)=600$, $M(7;0)=420$, $M(0;0)=0$, $M(0;6)=480$.

Vậy giá trị lớn nhất của $M(x;y)$ bằng 640 khi $x=4;\ y=5 \Rightarrow a=4; b=5 \Rightarrow a-b=-1$.

**Câu 32.** Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích $800\,m^2$. Nếu trồng đậu trên diện tích $100\,m^2$ thì cần 20 công làm và thu được 3000000 đồng. Nếu trồng cà thì trên diện tích $100\,m^2$ cần 30 công làm và thu được 4000000 đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất khi tổng số công làm không quá 180 công. Hãy chọn phương án đúng nhất trong các phương án sau:

**A.** Trồng $600\,m^2$ đậu; $200\,m^2$ cà. **B.** Trồng $500\,m^2$ đậu; $300\,m^2$ cà.

**C.** Trồng $400\,m^2$ đậu; $200\,m^2$ cà. **D.** Trồng $200\,m^2$ đậu; $600\,m^2$ cà.

**Lời giải**

**Chọn A**

Giả sử diện tích trồng đậu là $x$ (trăm $m^2$ );suy ra diện tích trồng cà là $8-x$ (trăm $m^2$ )

Ta có thu nhập thu được là $S(x)=\left[3x+4(8-x)\right].10000=10000(-x+32)$ đồng.

Tổng số công là $20x+30(8-x)=-10x+240$

Theo giả thiết có $-10x+240\le 180\Leftrightarrow x\ge 6$

Mà hàm số $S(x)$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=6$.

Do đó trồng $600m^2$ đậu, $200m^2$ cà.

**Câu 33.** Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán khuyến mãi hàng hóa (1 sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở trên 140 người và trên 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe $A$ và $B$. Trong đó xe loại $A$ có 10 chiếc, xe loại $B$ có 9 chiếc. Một chiếc xe loại $A$ cho thuê với giá 4 triệu, loại $B$ giá 3 triệu. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí vận chuyển là thấp nhất. Biết rằng xe $A$ chỉ chở tối đa 20 người và $0,6$ tấn hàng. Xe $B$ chở tối đa 10 người và $1,5$ tấn hàng.

**A.** 4 xe $A$ và 5 xe $B$.

**B.** 5 xe $A$ và 6 xe $B$.

**C.** 5 xe $A$ và 4 xe $B$.

**D.** 6 xe $A$ và 4 xe $B$.

**Lời giải**

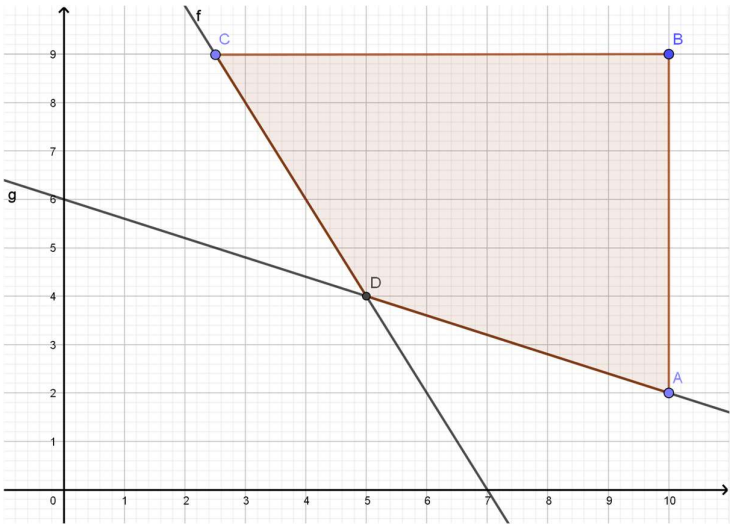
**Chọn D**

Gọi $x$ là số xe loại $A$ $(0\le x\le 10;x\in\mathbb{N})$, $y$ là số xe loại $B$ $(0\le y\le 9;y\in\mathbb{N})$. Khi đó tổng chi phí thuê xe là $T=4x+3y$ (triệu đồng).

Xe $A$ chở tối đa 20 người, xe $B$ chở tối đa 10 người nên tổng số người 2 xe chở tối đa được là $20x+10y$ (người).

Xe $A$ chở được $0,6$ tấn hàng, xe $B$ chở được $1,5$ tấn hàng nên tổng lượng hàng 2 xe chở được là $0,6x+1,5y$ (tấn).

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}0\le x\le 10\\0\le y\le 9\\20x+10y\ge 140\\0,6x+1,5y\ge 9\end{cases}$ $(*)$




Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ là tứ giác $ABCD$ kể cả miền trong của tứ giác (như hình vẽ trên).

Biểu thức $T=4x+3y$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tại các đỉnh $A(10;2);B(10;9);C\left(\frac{5}{2};9\right);D(5;4)$, ta thấy $T$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$.

Khi đó $T_{\min}=32$ (triệu đồng).

**Câu 34.** Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilogam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi $x,y$ lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn. Tính $x^2+y^2$

**A.** $x^2+y^2=1,3$.

**B.** $x^2+y^2=2,6$.

**C.** $x^2+y^2=1,09$.

**D.** $x^2+y^2=0,58$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $0\le x\le 1,6$ ; $0\le y\le 1,1$

Khi đó số protein có được là $800x+600y$ và số lipit có được là $200x+400y$

Vì gia đình đó cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày nên điều kiện tương ứng là: $800x+600y\ge 900$ và $200x+400y\ge 400$

$\Leftrightarrow 8x+6y\ge 9$ và $x+2y\ge 2$

$$\begin{cases}0\le x\le 1,6\\0\le y\le 1,1\\8x+6y\ge 9\\x+2y\ge 2\end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ trên là miền nghiệm của tứ giác ABCD (kể cả biên)

Chi phí để mua $x$ kg thịt bò và $y$ kg thịt lợn là $T=160x+110y$

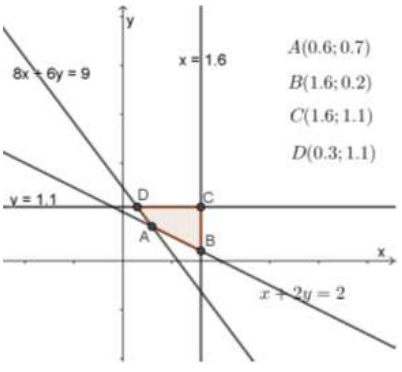
Biết T đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác ABCD

Tại A: $T=160.0,6+110.0,7=173$ (nghìn)

Tại B: $T=160.1,6+110.0,2=278$ (nghìn)

Tại C: $T=160.1,6+110.1,1=377$ (nghìn)

Tại D: $T=160.0,3+110.1,1=169$ (nghìn)




Vậy T đạt GTNN khi $x=0,3$ ; $y=1,1$ $\Rightarrow x^2+y^2=0,3^2+1,1^2=1,3$.

**Câu 35.** Có hai cái giỏ đựng trứng gồm giỏ A và giỏ B, các quả trứng trong mỗi đều có hai loại là trứng lành và trứng hỏng. Tổng số trứng trong hai giỏ là 20 quả và số trứng trong giỏ A nhiều hơn số trứng trong giỏ **B.** Lấy ngẫu nhiên mỗi giỏ 1 quả trứng, biết xác suất để lấy được hai quả trứng lành là $\frac{55}{84}$. Tìm số trứng lành trong giỏ **A.**

**A.** 6. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 10.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $a$ là số trứng lành, $b$ là số trứng hỏng trong giỏ **A.**

Gọi $x$ là số trứng lành, $y$ là số trứng hỏng trong giỏ **B.**

Lấy ngẫu nhiên mỗi giỏ 1 quả trứng, xác suất để lấy được hai quả trứng lành: $\frac{a}{a+b}.\frac{x}{x+y}=\frac{55}{84}$.

Do đó: $\begin{cases}(a.x)\vdots 55\\(a+b)(x+y)\vdots 84\\a+b+x+y=20\\(a+b)(x+y)\le\left(\frac{a+b+x+y}{2}\right)^2=100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=14\\x+y=6\\(a.x)\vdots 55\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=11\\x=5\end{cases}$.

Suy ra: Giỏ A có 11 quả trứng lành.

**Câu 36.** Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm $I$ và $II$. Mỗi sản phẩm $I$ bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm $II$ bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm $I$ thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm $II$ thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là.

**A.** 32 triệu đồng. **B.** 35 triệu đồng. **C.** 14 triệu đồng. **D.** 30 triệu đồng.

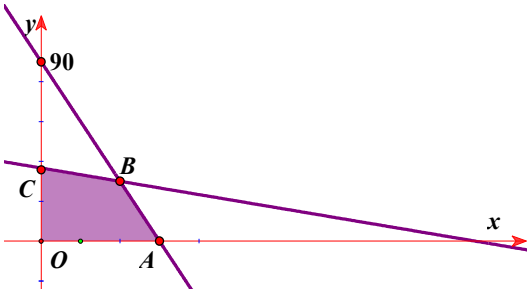
**Lời giải**

**Chọn A.**

Gọi $x$, $y$ lần lượt là số sản phẩm loại $I$ và loại $II$ được sản xuất ra. Điều kiện $x$, $y$ nguyên dương.

Ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases}3x+2y\le 180\\x+6y\le 220\\x>0\\y>0\end{cases}$

Miền nghiệm của hệ trên là




Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T=0,5x+0,4y$ (triệu đồng).

Ta thấy $T$ đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm $A$, $B$, $C$. Vì $C$ có tọa độ không nguyên nên loại.

Tại $A(60;0)$ thì $T=30$ triệu đồng.

Tại $B(40;30)$ thì $T=32$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là $32$ triệu đồng.

**Câu 37.** Một gia đình cần ít nhất $900$ đơn vị protein và $400$ đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kiogam thịt bò chứa $800$ đơn vị protein và $200$ đơn vị lipit. Mỗi kilogam thịt lợn chứa $600$ đơn vị protein và $400$ đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất $1,6$ kg thịt bò và $1,1$ kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là $160$ nghìn đồng, một kg thịt lợn là $110$ nghìn đồng. Gọi $x, y$ lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm $x, y$ để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn?

**A.** $x=0,3$ và $y=1,1$. **B.** $x=0,3$ và $y=0,7$. **C.** $x=0,6$ và $y=0,7$. **D.** $x=1,6$ và $y=0,2$.

**Lời giải**

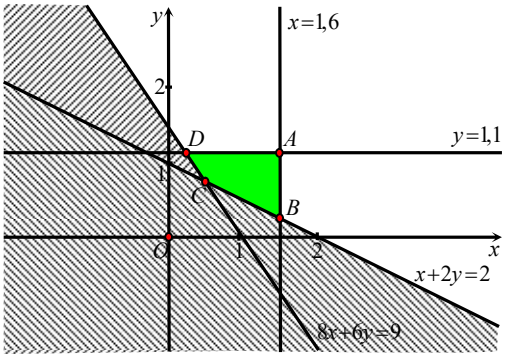
**Chọn A.**

Theo bài ra ta có số tiền gia đình cần trả là $160.x+110.y$ với $x, y$ thỏa mãn: $\begin{cases}0\le x\le 1,6\\0\le y\le 1,1\end{cases}$.

Số đơn vị protein gia đình có là $0,8.x+0,6.y\ge 0,9\Leftrightarrow 8x+6y\ge 9\ (d_1)$.

Số đơn vị lipit gia đình có là $0,2.x+0,4.y\ge 0,4\Leftrightarrow x+2y\ge 2\ (d_2)$.

Bài toán trở thành: Tìm $x, y$ thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases}0\le x\le 1,6\\0\le y\le 1,1\\8x+6y\ge 9\\x+2y\ge 2\end{cases}$ sao cho $T=160.x+110.y$ nhỏ nhất.




Vẽ hệ trục tọa độ ta tìm được tọa độ các điểm $A(1,6;1,1)$; $B(1,6;0,2)$; $C(0,6;0,7)$; $D(0,3;1,1)$.

Nhận xét: $T(A)=377$ nghìn, $T(B)=278$ nghìn, $T(C)=173$ nghìn, $T(D)=169$ nghìn.

Vậy tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn thì $x=0,6$ và $y=0,7$.

# Bài 1. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

## I. Hàm số

### 1. Định nghĩa

Cho tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$. Nếu với mỗi giá trị của $x$ thuộc $D$ có một và chỉ một giá trị tương ứng của $y$ thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

Ta gọi $x$ là biến số và $y$ là hàm số của $x$.

Tập hợp $D$ được gọi là tập xác định của hàm số.

Kí hiệu hàm số: $y = f(x), x \in D$.

***Ví dụ 1.***

a) Diện tích $S$ của hình tròn bán kính $r$ được tính theo công thức $S = \pi r^2$. Hỏi $S$ có phải là hàm số của $r$ hay không? Giải thích.

b) Cho công thức $y^2 = x$. Hỏi $y$ có phải hàm số của $x$ hay không? Giải thích.

***Giải***

a) $S$ là hàm số của $r$ vì mỗi giá trị của $r$ chỉ cho đúng một giá trị của $S$.

b) $y$ không phải là hàm số của $x$ vì khi $x = 1$ thì ta tìm được hai giá trị tương ứng của $y$ là 1 và $-1$

### 2. Cách cho hàm số

#### a) Hàm số cho bằng một công thức

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực $x$ sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

***Ví dụ 2.*** Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x}$

b) $y = \sqrt{x-1}$.

***Giải***

a) Biểu thức $\dfrac{1}{x}$ có nghĩa khi $x \neq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Biểu thức $\sqrt{x-1}$ có nghĩa khi $x - 1 \geq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = [1; +\infty)$.

#### b) Hàm số cho bằng nhiều công thức

Một hàm số có thể được cho bằng nhiều công thức, chẳng hạn hàm số trong Ví dụ 3 sau:

***Ví dụ 3.*** Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } x < 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \\ 1 \text{ nếu } x > 0. \end{cases}$$

a) Tìm tập xác định của hàm số trên.

b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -2; x = 0; x = 2021$.

***Giải***

a) $f(x)$ có nghĩa khi $x < 0, x = 0, x > 0$ nên tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) $f(-2) = -1; f(0) = 0; f(2021) = 1$.

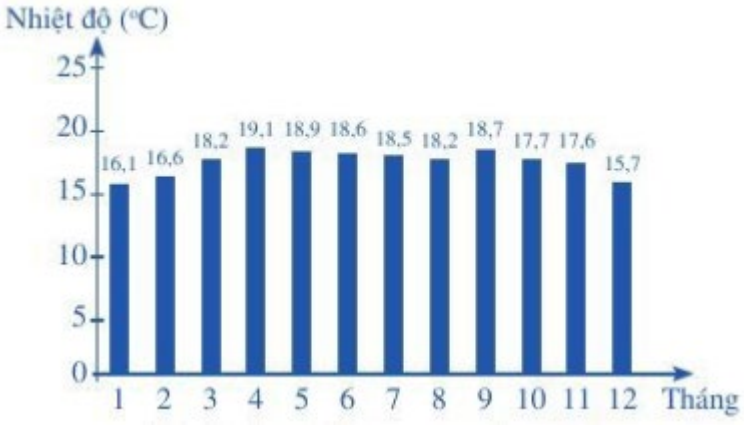
*Chú ý:* Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định là $D$. Khi biến số $x$ thay đổi trong tập $D$ thì tập hợp các giá trị y tương ứng được gọi là *tập giá trị* của hàm số đã cho.

Chẳng hạn, trong Ví dụ 3, ta có: Ứng với các giá trị của $x$ thì $f(x)$ chỉ nhận một trong ba giá trị $-1; 0; 1$ nên tập giá trị của hàm số đó là tập hợp $\{-1; 0; 1\}$.

#### c) Hàm số không cho bằng công thức

Trong thực tiễn, có những tình huống dẫn tới những hàm số không thể cho bằng công thức (hoặc nhiều công thức). Chẳng hạn, trong ví dụ sau đây:

***Ví dụ 4.*** Biểu đồ ở dưới cho biết Nhiệt độ trung bình ở Đà Lạt theo từng tháng trong năm




a) Xác định tập hợp các tháng được nếu trong biểu đồ.

b) Tương ứng tháng với nhiệt độ trung bình của tháng đó có phải là hàm số không? Giải thích.

***Giải***

a) Tập hợp các tháng là $D=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$.

b) Mỗi tháng chỉ tương ứng với đúng một giá trị nhiệt độ trung bình nên tương ứng đó xác định một hàm số. Hàm số đó có thể được cho bằng bảng như sau:

| Tháng | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nhiệt độ $\left(^{\circ}C\right)$ | 16,1 | 16,6 | 18,2 | 19,1 | 18,9 | 18,6 | 18,5 | 18,2 | 18,7 | 17,7 | 17,6 | 15,7 |

## II. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập hợp $D$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x;f(x))$ trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ với mọi $x$ thuộc $D$.

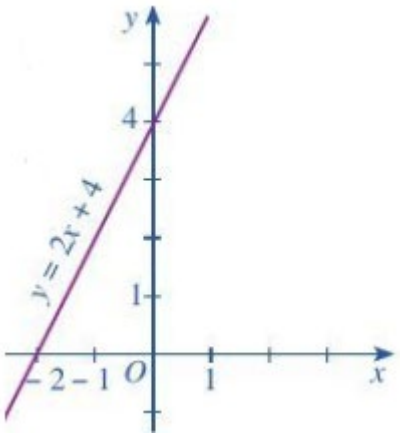
***Ví dụ 5.*** Cho hàm số $y=2x+4$.

a) Vẽ đồ thị hàm số trên.

b) Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho bốn điểm: $A(-1;2), B(1;6), C(2020;2021), D(2030;4064)$. Điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số trên?

***Giải***

a) Khi $x=0$ thì $y=4$; khi $y=0$ thì $x=-2$. Vậy đồ thị hàm số $y=2x+4$ là đường thẳng cắt trục $Oy$ tại điểm $(0;4)$, cắt trục $Ox$ tại điểm $(-2;0)$




b) Khi $x=-1$ thì $y=2$; khi $x=1$ thì $y=6$; khi $x=2020$ thì $y=4044$; khi $x=2030$ thì $y=4064$.

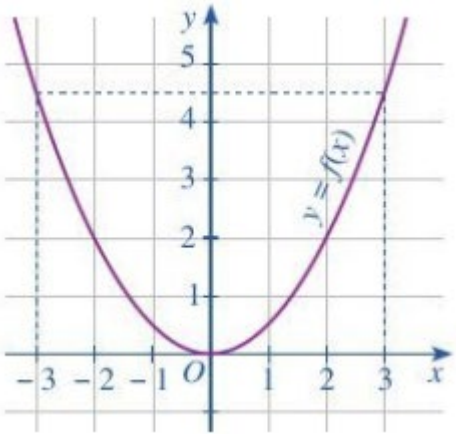
Vậy các điểm $A(-1;2), B(1;6), D(2030;4064)$ thuộc đồ thị hàm số và điểm $C(2020;2021)$ không thuộc đồ thị hàm số.

*Nhận xét* - Điểm $M(a;b)$ trong mặt phẳng toạ độ *thuộc* đồ thị hàm số $y=f(x), x\in D$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a\in D \\ b=f(a). \end{cases}$$

- Để chứng tỏ điểm $M(a;b)$ trong mặt phẳng toạ độ không thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$, $x\in D$, ta có thể kiểm tra một trong hai khả năng sau:
Khả năng 1 : Chứng tỏ rằng $a\notin D$.
Khả năng 2 : Khi $a\in D$ thì chứng tỏ rằng $b\neq f(a)$.

***Ví dụ 6.*** Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình




a) Trong các điểm có toạ độ $(-2;2),(0;0),(0;1)$, $(2;2),(1;1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Quan sát đồ thị, tìm $f(3)$ và những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$.

***Giải***

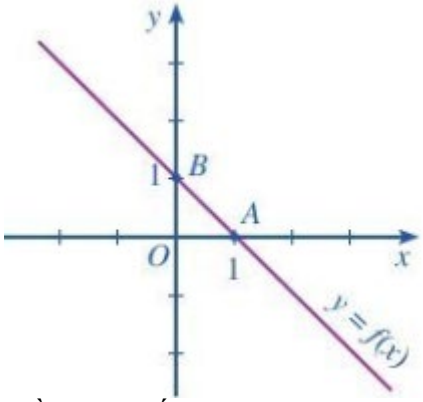
a) Các điểm thuộc đồ thị hàm số có toạ độ là: $(-2;2),(0;0),(2;2)$

Các điểm không thuộc đồ thị hàm số có toạ độ là: $(0;1),(1;1)$.

b) Quan sát đồ thị, ta có: $f(3)=\frac{9}{2}$.

Toạ độ những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$ là: $\left(-3;\frac{9}{2}\right),\left(3;\frac{9}{2}\right)$.

***Ví dụ 7.*** Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình




a) Xác định tọa độ các giao điểm của đồ thị đó với hai trục toạ độ.

b) Hàm số $y=f(x)$ được xác định bởi công thức nào?

***Giải***

a) Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(1;0)$. Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;1)$.

b) Vì đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường thẳng cắt cả hai trục toạ độ nên hàm số đó là hàm số bậc nhất, tức là $y=f(x)=ax+b(a\neq 0)$. Giao điểm của đồ thị đó với trục $Oy$ là điểm có toạ độ $(0;b)$ nên $b=1$. Suy ra $y=f(x)=ax+1$. Khi đó, giao điểm của đồ thị đó với trục $Ox$ là điểm có toạ độ $\left(-\frac{1}{a};0\right)$ nên $-\frac{1}{a}=1$, tức là $a=-1$. Vậy $y=f(x)=-x+1$.

## III. Sự biến thiên của hàm số

### 1. Khái niệm

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$.

- Hàm số $y=f(x)$ gọi là đồng biến trên khoảng $(a;b)$ nếu
$\forall x_1,x_2\in(a;b),x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
- Hàm số $y=f(x)$ gọi là nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ nếu
$\forall x_1,x_2\in(a;b),x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

***Ví dụ 8.*** Chứng tỏ hàm số $y=6x^2$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

***Giải***

Xét hai số bất kì $x_1,x_2\in(0;+\infty)$ sao cho $x_1<x_2$.

Ta có: $0<x_1<x_2$ nên $6x_1^2<6x_2^2$ hay $f(x_1)<f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

*Nhận xét:* Xét sự biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng hàm số đồng biến và các khoảng hàm số nghịch biến. Kết quả xét sự biến thiên được tổng kết trong một *bảng biến thiên.*

Chẳng hạn, sau đây là bảng biến thiên của hàm số $y=6x^2$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

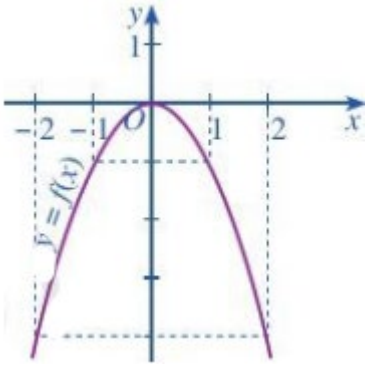
- Dấu mũi tên đi xuống (từ $+\infty$ đến 0 ) diễn tả hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
- Dấu mũi tên đi lên (từ 0 đến $+\infty$) diễn tả hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**2. Mô tả hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến bằng đồ thị**

Nhận xét.

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi lên" trên khoảng đó.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi xuống" trên khoảng đó.

***Ví dụ 9.*** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình. Quan sát đồ thị và cho biết phát biểu nào sau đây là đúng.




a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

***Giải***

a) Phát biểu "Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$ " là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi lên" trên khoảng đó.

b) Phát biểu "Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ " là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi xuống" trên khoảng đó.

c) Phát biểu "Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ " là sai vì đồ thị hàm số đã cho vừa có phần "đi lên" vừa có phần "đi xuống" trên khoảng đó.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Để tìm tập xác định $D$ của hàm số ta tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa, tức là

$D=\left\{x\in\mathbb{R}\middle| f(x)\in\mathbb{R}\right\}$.

Chú ý. Thông thường $y=f(x)$ cho bởi các biểu thức đại số, ta xét một số trường hợp sau:

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{u(v)}{v(x)}$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x),v(x)\\ v(x)\neq 0\end{cases}$

Hàm số $y=f(x)=\sqrt[2k]{u(x)}\,(k\in\mathbb{Z})$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x)\\ u(x)\geq 0\end{cases}$

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{u(x)}{\sqrt[2k]{v(x)}}(k\in\mathbb{Z})$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x),v(x)\\ v(x)>0\end{cases}$

**Câu 1.** Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y=\dfrac{3x-1}{-2x+2}$.

b) $y=\dfrac{2x-1}{(2x+1)(x-3)}$.

c) $y=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$.

d) $y=\dfrac{2x+1}{x^3-3x+2}$.

**Câu 2.** Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y=\sqrt{3x-2}$.

b) $y=\sqrt{x^2+1}$.

c) $y=\sqrt{-2x+1}-\sqrt{x-1}$.

d) $y=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x-3}$.

e) $y=\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}+\sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$.

f) $y=\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

**Câu 3.** Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{2}{(x+2)\sqrt{x+1}}$.

b) $y=\dfrac{x}{1-x^2}-\sqrt{-x}$.

c) $y=\dfrac{x-3\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$.

d) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$.

e) $y=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{x\sqrt{1+x}}$.

f) $y=\dfrac{2015}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}-\sqrt[3]{x^2-7}}$.

g) $y=\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\dfrac{1}{1-x}$.

h) $y=\sqrt{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)}$.

**Câu 4.** Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y=\sqrt{\left|x^2+x+4\right|}$.

b) $y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x\,|\,x-4\,|}}$.

c) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x+5}}+|\,x+1\,|\sqrt{x^2-x+6}$.

d) $y=\dfrac{2x+1}{x(|\,x\,|-1)}$.

e) $y=\dfrac{|\,x\,|}{|\,x-2\,|+\left|x^2+2x\right|}$.

f) $y=\dfrac{|\,x\,|-1}{x^2-1}-\dfrac{x^2-|\,x\,|}{x^2-2|\,x\,|+1}$.

**Câu 5.** Tìm $m$ để các hàm số sau đây xác định với mọi $x$ thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

a) $y=\sqrt{x-m}+\sqrt{2x-m-1}$.

b) $y=\sqrt{2x-3m+4}+\dfrac{x-m}{x+m-1}$.

**Câu 6.** Tìm $m$ để các hàm số sau:

**a)** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-m}}+\sqrt{-x+2m+6}$ xác định trên $(-1;0)$.

**b)** $y=\sqrt{1-\left|2x^2+mx+m+15\right|}$ xác định trên $[1;3]$.

**Câu 7.** Tìm $m$ để các hàm số:

**a)** $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+m-2}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

**b)** $y=\dfrac{\sqrt{m+1}}{3x^2-2x+m}$ xác định trên toàn bộ trục số.

## DẠNG 2. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Để xét sự biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên từng khoảng xác định $(a;b)$ ta làm như sau:

Giả sử $\forall x_1,x_2\in K: x_1<x_2$

Tính $f(x_1)-f(x_2)$

Lập tỉ số $T=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Nếu $T>0$ thù hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$

Nếu $T<0$ thù hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$

**Câu 1.** Khảo sát sự biến thiên và lập bảng biến thiên của các hàm số sau:

**a)** $y=-2x+3$ trên $\mathbb{R}$.

**b)** $y=x^2-4x+5$ trên khoảng $(-\infty;2)$ và trên khoảng $(2;+\infty)$.

**c)** $y=-2x^2+4x+1$ trên khoảng $(3;+\infty)$.

**d)** $y=\dfrac{x-3}{x-5}$ trên khoảng $(-\infty;-5)$ và trên khoảng $(-5;+\infty)$.

**Câu 2.** Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

**a)** $y=\sqrt{2x-7}$ trên khoảng $\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)$.

**b)** $y=\sqrt{x^2+2}$.

**c)** $y=x-\sqrt{3x+5}$ trên khoảng $(5;+\infty)$.

**d)** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

**Câu 3.** Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

**a)** $y=\dfrac{1}{x^2}$.

**b)** $y=x^{2015}+1$.

**c)** $y=|x+2|-|x-2|$ trên khoảng $(-2;2)$.

**Câu 4.** Với giá trị nào của $m$ thì các hàm số sau đồng biến trên các khoảng xác định của nó:

**a)** $y=(m+1)x+m-2$.

**b)** $y=\dfrac{m}{x-2}$.

**Câu 5.** Với giá trị nào của $m$ thì hàm số $y=-x^2+(m-1)x+2$ nghịch biến trên $(1;2)$.

## DẠNG 3. TẬP GIÁ TRỊ - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $D$.

Tập hợp $T=\{y=f(x)\,|\,x\in D\}$ gọi là tập giá trị của hàm số $y=f(x)$.

*Nhận dạng:* Khi hàm số chỉ xuất hiện tích các biểu thức là hằng số hoặc tổng bình phương các biểu thức là hằng số.

*Bất đẳng thức:*

+) Cho $a,\ b\ge 0$ ta luôn có $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ hay *hay* $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, đẳng thức xảy ra khi $a=b$

+) $a,\ b\in\mathbb{R}$ ta có $a^2+b^2\ge 2ab$, đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

**Câu 1.** Tìm tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$.

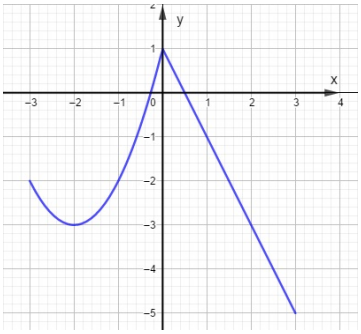
**Câu 2.** Tìm tập giá trị của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

**Câu 3.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-2\sqrt{x+2}$

**Câu 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{2}{x-1}$ với $x>1$.

## DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

**Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tính giá trị của hàm số tại $x=-1$.




**Câu 2.** Tìm các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

**Câu 3.** Tịnh tiến đồ thị hàm số.

**a)** $y=f(x)=2x^2-3x+1$ lên trên $2$ đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số nào?

**b)** $y=g(x)=-3|x|+1$ xuống dưới $3$ đơn vị. Sau đó sang trái $4$ đơn vị thì ta thu được đồ thị hàm số nào?

**c)** $y=k(x)=\dfrac{x-4}{2x+3}$ sang phải $1$ đơn vị. Sau đó lên trên $5$ đơn vị thì ta thu được đồ thị hàm số nào?

**Câu 4.** Từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-3x+2$, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y=g(x)=x^2+3x+2$.

b) $y=h(x)=x^2-3|x|+2$.

c) $y=k(x)=-x^2+3x-2$.

d) $y=l(x)=|x^2-3x+2|$.

**Câu 5.** Đồ thị hàm số

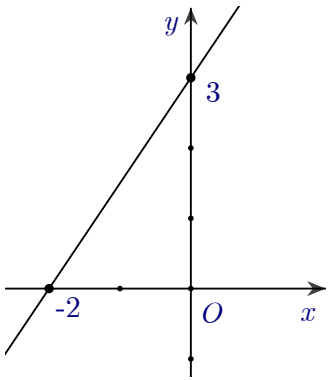
**a)** $y=-x^2-2$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=x^2-2x+3$ như thế nào.

**b)** $y=\dfrac{-7x+6}{-3x+4}$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{3x+4}$ như thế nào.

**Câu 6.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x^2+m^2}}{x-1} & \text{khi } x<1\\ 2x & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$ với $m$ là tham số. Biết đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $3$. Hãy tính $P=f(-4)+f(1)$.

**Câu 7.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}|mx-1| & khi \quad x\in(-\infty;0)\\ x^2+2x-1 & khi \quad x\in[0;+\infty)\end{cases}$. Tìm điều kiện của $m$ để đồ thị hàm số không đi qua điểm $A(-2;3)$.

**Câu 8.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Với $M(x;y)$ là một điểm bất kì nằm trên đồ thị hàm số $y=f(x)$. Tìm tập hợp các điểm $I(2x+3;3y)$.




## DẠNG 5. XÁC ĐỊNH BIỂU THỨC CỦA HÀM SỐ

**Câu 1.** Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-4} & \text{khi } x>3\\ \sqrt[3]{x+8} & \text{khi } 0\le x\le 3\end{cases}$.

**a)** Tìm tập xác định của hàm số.

**b)** Tính các giá trị $f(0), f\left(\sqrt{2}\right), f(-1), f\left(\sqrt{5}\right), f(5)$.

**Câu 2.** Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x+2} & \text{khi } x\geqslant 0\\ \dfrac{\sqrt[3]{2x+1}}{x-1} & \text{khi } x<0\end{cases}$.

**a)** Tìm tập xác định của hàm số.

**b)** Tính các giá trị $f(0), f(2), f(-1), f(-3)$.

**Câu 3.** Cho thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Hãy xác định hàm số $f\left(f(x)\right)$ và $f\left(f\left(f(x)\right)\right)$.

**Câu 4.** Cho hai hàm số $f(x)=2x-4$ và $g(x)=x^2+13$. Hãy xác định hàm số $f\left(g(x)\right)$ và $g\left(f(x)\right)$

**Câu 5.** Xác định hàm số $f(x)$ biết

*a)* $f(x+3)=2x-1$. *b)* $f(x-1)=x^2-3x+3$.

**Câu 6.** Xác định hàm số $f(x)$ biết

*a)* $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$. *b)* $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

**Câu 7.** Xác định hàm số $f(x)$ biết

*a)* $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=x+3, \forall x\neq 1$. *b)* $f\left(\dfrac{3x+1}{x+2}\right)=\dfrac{x+1}{x-1}, \forall x\neq -2, x\neq 1$.

**Câu 8.** Xác định hàm số $f(x)$ biết

*a)* $2f(x)-f(-x)=x^4-12x^3+4..$ *b)* $f(x)-xf(-x)=x+1$.

*c)* $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Để tìm tập xác định $D$ của hàm số ta tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa, tức là

$D=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\, f(x)\in\mathbb{R}\right\}$.

Chú ý. Thông thường $y=f(x)$ cho bởi các biểu thức đại số, ta xét một số trường hợp sau:

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{u(v)}{v(x)}$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x),v(x)\\ v(x)\neq 0\end{cases}$

Hàm số $y=f(x)=\sqrt[2k]{u(x)}\,(k\in\mathbb{Z})$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x)\\ u(x)\geq 0\end{cases}$

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{u(x)}{\sqrt[2k]{v(x)}}(k\in\mathbb{Z})$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x),v(x)\\ v(x)>0\end{cases}$

**Câu 1.** Tập xác định của hàm số $y=x^4-2018x^2-2019$ là

**A.** $(-1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

**Câu 2.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ là:

**A.** $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Câu 3.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x-3}{2x-2}$ là

**A.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Câu 4.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+2}{(x-3)^2}$ là

**A.** $(-\infty;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

**Câu 5.** Tập xác định $D$ của hàm số $y=\dfrac{3x-1}{2x-2}$ là

**A.** $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=[1;+\infty)$. **C.** $D=(1;+\infty)$. **D.** $D=R\setminus\{1\}$.

**Câu 6.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{5}{x^2-1}$ là

**A.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

**Câu 7.** Tập xác định của hàm số $f(x)=\dfrac{x+5}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+5}$ là

**A.** $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-5;\ 1\}$.

**Câu 8.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{3-x}{x^2-5x-6}$ là

**A.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;6\}$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1;-6\}$ **C.** $D=\{-1;6\}$ **D.** $D=\{1;-6\}$

**Câu 9.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-4)}$.

**A.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$

**C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;\pm 2\}$

**Câu 10.** Tập xác định $D$ của hàm số $y=\sqrt{3x-1}$ là

**A.** $D=(0;+\infty)$. **B.** $D=[0;+\infty)$. **C.** $D=\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$. **D.** $D=\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

**Câu 11.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{8-2x}-x$ là

**A.** $(-\infty;4]$. **B.** $[4;+\infty)$. **C.** $[0;4]$. **D.** $[0;+\infty)$.

**Câu 12.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}$ là

**A.** $D=(2;4)$ **B.** $D=[2;4]$

**C.** $D=\{2;4\}$ **D.** $D=(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$

**Câu 13.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1+2x}+\sqrt{6+x}$ là:

**A.** $\left[-6;-\frac{1}{2}\right]$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $[-6;+\infty)$.

**Câu 14.** Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}$.

**A.** $[-1;+\infty)$. **B.** $[-2;+\infty)$. **C.** $[-3;+\infty)$. **D.** $[0;+\infty)$.

**Câu 15.** Tập xác định $D$ của hàm số $y=\sqrt{x+2}+4\sqrt{3-x}$ là

**A.** $D=(-2;3)$. **B.** $D=[-3;+\infty)$. **C.** $D=(-\infty;3]$. **D.** $D=[-2;3]$.

**Câu 16.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2x-3}-3\sqrt{2-x}$ là

**A.** $\varnothing$. **B.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $\left[\frac{3}{2};2\right]$.

**Câu 17.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2x^2-7x+3}-3\sqrt{-2x^2+9x-4}$ là

**A.** $\left[\frac{1}{2};4\right]$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $[3;4]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $[3;4]$.

**Câu 18.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\frac{6x}{\sqrt{4-3x}}$

**A.** $D=\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$. **B.** $D=\left[\frac{3}{2};\frac{4}{3}\right)$. **C.** $D=\left[\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right)$. **D.** $D=\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$.

**Câu 19.** Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{2x-5}}+\sqrt{9-x}$ là

**A.** $D=\left(\frac{5}{2};9\right]$. **B.** $D=\left(\frac{5}{2};9\right)$. **C.** $D=\left[\frac{5}{2};9\right)$. **D.** $D=\left[\frac{5}{2};9\right]$.

**Câu 20.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\frac{x+1}{(x-3)\sqrt{2x-1}}$.

**A.** $D=\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{3\}$. **B.** $D=\mathbb{R}$. **C.** $D=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{3\}$. **D.** $D=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{3\}$.

**Câu 21.** Hàm số nào sau đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

**A.** $y=\frac{2\sqrt{x}}{x^2+4}$. **B.** $y=x^2-\sqrt{x^2+1}-3$.

**C.** $y=\frac{3x}{x^2-4}$. **D.** $y=x^2-2\sqrt{x-1}-3$.

**Câu 22.** Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x-1}-\dfrac{3x-1}{(x^2-4)\sqrt{5-x}}$.

**A.** $[1;5]\setminus\{2\}$. **B.** $(-\infty;5]$. **C.** $[1;5)\setminus\{2\}$. **D.** $[1;+\infty)\setminus\{2;5\}$.

**Câu 23.** Tập xác định $D$ của hàm số $y=\dfrac{3x+4}{(x-2)\sqrt{x+4}}$ là

**A.** $D=(-4;+\infty)\setminus\{2\}$. **B.** $D=[-4;+\infty)\setminus\{2\}$.

**C.** $D=\varnothing$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

**Câu 24.** Tập xác định $D$ của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}}{(x+1)\sqrt{3-2x}}$ là

**A.** $D=\left[-4;\dfrac{3}{2}\right]$. **B.** $D=\left[-4;\dfrac{3}{2}\right)$.

**C.** $D=\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$. **D.** $D=[-4;-1)\cup\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

**Câu 25.** Tập xác định của hàm số $f(x)=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ là

**A.** $D=(1;\ 3]$. **B.** $D=(-\infty;1)\cup[3;+\infty)$.

**C.** $D=[1;3]$. **D.** $D=\varnothing$.

**Câu 26.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\sqrt{6-x}+\dfrac{4}{5x-10}$.

**A.** $D=(-\infty;6]\setminus\{2\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $D=[6;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;6]$.

**Câu 27.** Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-3}$. Tập nào sau đây là tập xác định của hàm số $f(x)$?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $[1;3)\cup(3;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)\setminus\{3\}$.

**Câu 28.** Tập xác định của hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{-3x+8}+x & \text{khi}\quad x<2\\ \sqrt{x+7}+1 & \text{khi}\quad x\ge 2\end{cases}$ là

**A.** $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{8}{3}\right]$. **D.** $[-7;+\infty)$.

**Câu 29.** Tập xác định $D$ của hàm số $y=(2x-1)\sqrt{3-2x}+\dfrac{1}{2x-2}$ là

**A.** $D=\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$. **B.** $D=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]\setminus\{1\}$. **C.** $D=\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]\setminus\{1\}$. **D.** $D=\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$.

**Câu 30.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{3}{\sqrt{x+2}-1}$ là

**A.** $D=[-2;+\infty)\setminus\{-1\}$. **B.** $D=R\setminus\{-1\}$.

**C.** $D=[-2;+\infty)$. **D.** $D=(1;+\infty)$.

**Câu 31.** Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$.

**A.** $D=(-5;0]\cup[2;5)$.

**B.** $D=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

**C.** $D=(-5;5)$.

**D.** $D=[-5;0]\cup[2;5]$.

**Câu 32.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x^2-5x+6)\sqrt{4-x}}$ là

**A.** $[-1;4)\setminus\{2;3\}$. **B.** $[-1;4)$. **C.** $(-1;4]\setminus\{2;3\}$. **D.** $(-1;4)\setminus\{2;3\}$.

**Câu 33.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$ là:

**A.** $D=[0;+\infty)$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ **D.** $D=(0;+\infty)$

**Câu 34.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số:

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x-2} \text{ khi } x\le 0\\ \sqrt{1-x} \text{ khi } x>0\end{cases}.$$

**A.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ **B.** $D=[1;+\infty)\setminus\{2\}$

**C.** $D=(-\infty;1]$ **D.** $D=[1;+\infty)$

**Câu 35.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{x^3}{4|x|-3}$

**A.** $D=[-2;+\infty)$. **B.** $D=[-2;+\infty)\setminus\left\{-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right\}$.

**C.** $D=\left\{-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right\}$.

**Câu 36.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x-2}+6x}{\sqrt{4-3x}}$.

**A.** $D=\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$. **B.** $D=\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $D=\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4}\right)$. **D.** $D=\left(-\infty;\dfrac{4}{3}\right)$.

**Câu 37.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x}{|x|x+1}-\sqrt{3-x}$ là

**A.** $(-\infty;3]\setminus\{-1\}$. **B.** $(-\infty;3)\setminus\{-1\}$. **C.** $(-\infty;3]$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

**Câu 38.** Giả sử $D=(a;b)$ là tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$. Tính $S=a^2+b^2$.

**A.** $S=7$. **B.** $S=5$. **C.** $S=4$. **D.** $S=3$.

**Câu 39.** Hàm số $y=\dfrac{x^2-7x+8}{x^2-3x+1}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{a;b\};a\ne b.$ Tính giá trị biểu thức $Q=a^3+b^3-4ab.$

**A.** $Q=11$. **B.** $Q=14$. **C.** $Q=-14$. **D.** $Q=10$.

**Câu 40.** Với giá trị nào của $m$ thì hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x^2-2x-3-m}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

**A.** $m\le -4$. **B.** $m<-4$. **C.** $m>0$. **D.** $m<4$.

**Câu 41.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{3x+5}{x-1}-4}$ là $(a;b]$ với $a,b$ là các số thực. Tính tổng $a+b$.

**A.** $a+b=-8$. **B.** $a+b=-10$. **C.** $a+b=8$. **D.** $a+b=10$.

**Câu 42.** Tập tất cả các giá trị $m$ để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}+\sqrt{x-m}$ có tập xác định khác tập rỗng là

**A.** $(-\infty;3)$. **B.** $(-3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;1]$.

**Câu 43.** Biết hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là đoạn $[-1;0]$. Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=f(-x^2)$.

**A.** $D=[-1;0]$

**B.** $D=[0;1]$

**C.** $D=[-1;1]$

**D.** $D=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$

**Câu 44.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=f(x)=\sqrt{x^2-3mx+4}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

**A.** $|m|<\dfrac{4}{3}$. **B.** $|m|\le\dfrac{4}{3}$. **C.** $|m|>\dfrac{4}{3}$. **D.** $|m|\ge\dfrac{4}{3}$.

**Câu 45.** Tìm m để hàm số $y=(x-2)\sqrt{3x-m-1}$ xác định trên tập $(1;+\infty)$?

**A.** $m<2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m>2$. **D.** $m\ge 2$.

**Câu 46.** Tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m}+\dfrac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$ là

**A.** $m\in[-3;0]\cup[0;1]$. **B.** $m\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

**C.** $m\in[-3;0]$. **D.** $m\in[-4;0]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

**Câu 47.** Gọi tập xác định của các hàm số $f(x)=\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x};g(x)=\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$ lần lượt là $D_1;D_2$. Hãy tìm $D_1\cap D_2$, $D_1\cup D_2$.

**A.** $D_1\cap D_2=(-4;5]$, $D_1\cup D_2=[-5;+\infty)$. **B.** $D_1\cap D_2=(-4;5)$, $D_1\cup D_2=[-5;+\infty)$.

**C.** $D_1\cap D_2=(-4;5]$, $D_1\cup D_2=(-5;+\infty)$. **D.** $D_1\cap D_2=[-4;5]$, $D_1\cup D_2=[-5;+\infty)$.

**Câu 48.** Tìm $m$ để hàm số $y=\dfrac{x\sqrt{2}+1}{x^2+2x-m+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $m\ge 1$. **B.** $m<0$. **C.** $m>2$. **D.** $m\le 3$

**Câu 49.** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2(m+1)x+m^2+2m}$. Tập các giá trị của $m$ để hàm số xác định trên $[0;1)$ là $T=(-\infty;a)\cup[b;c)\cup[d;+\infty)$. Tính $P=a+b+c+d$.

**A.** $P=-2$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=1$.

**Câu 50.** Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1;2)$.

**A.** $\begin{cases} m\le -1 \\ m\ge 2 \end{cases}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m< -1 \\ m> 2 \end{array}\right.$. **D.** $-1<m<2$.

**Câu 51.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=\sqrt{x-m+1}+\sqrt{2x-m}$ xác định với $\forall x>0$.

**A.** $m\ge 1$. **B.** $m\le 0$. **C.** $m>0$. **D.** $m<1$.

**Câu 52.** Tập hợp tất cả giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\sqrt{x-2m+1}$ xác định với mọi $x\in[1;3]$ là:

**A.** $\{2\}$. **B.** $\{1\}$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $(-\infty;1]$.

**Câu 53.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{5-x^2-2\sqrt{4-x^2}}$ có dạng $[a;b]$. Tính $a+b$.

**A.** $3$. **B.** $-1$. **C.** $0$. **D.** $-3$.

**Câu 54.** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\sqrt{x-m+2}+\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$ có tập xác định $D=[0;5)$.

**A.** $m\ge 0$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $m\le -2$. **D.** $m=2$.

**Câu 55.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{m+1}}{3x^2-2x+m}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

**A.** $-1\le m\le \dfrac{1}{3}$. **B.** $m\ge -1$. **C.** $m>\dfrac{1}{3}$. **D.** $m\ge \dfrac{1}{3}$.

**Câu 56.** Tìm điều kiện của $m$ để hàm số $y=\sqrt{x^2-x+m}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$

**A.** $m\ge \dfrac{1}{4}$. **B.** $m>\dfrac{1}{4}$. **C.** $m>-\dfrac{1}{4}$. **D.** $m\le \dfrac{1}{4}$.

**Câu 57.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+9}{x-2m-1}$ xác định trên đoạn $[3;5]$.

**A.** $m\le 1$ hoặc $m\ge 2$. **B.** $m>3$ hoặc $m<0$.

**C.** $m>4$ hoặc $m<1$. **D.** $m>2$ hoặc $m<1$.

**Câu 58.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $x$ thuộc tập xác định của hàm số $y=\dfrac{2+x}{x\sqrt{3-x}}+\sqrt{2x+1}$?

**A.** 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

**Câu 59.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-3}{\sqrt{|x-2|-1}}$ có tập xác định là $D_1$ và hàm số $g(x)=\dfrac{2x-\sqrt{m-2x}}{|x|+5}$ có tập xác định là $D_2$. Tìm điều kiện của tham số $m$ để $D_2\subset D_1$.

**A.** $m<2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m>2$. **D.** $m\ge 2$.

**Câu 60.** Tìm $m$ để hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)}+\dfrac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

**A.** $m\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. **B.** $m\in[-3;0]$.

**C.** $m\in[-3;0]\cup[0;1]$. **D.** $m\in[-4;0]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

**Câu 61.** Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x+2m-1}+\sqrt{4-2m-\dfrac{x}{2}}$ xác định với mọi $x\in[0;2]$ khi $m\in[a;b]$. Giá trị của tổng $a+b$ bằng

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Câu 62.** Tìm $m$ để hàm số $y=\sqrt{-2x+3m+2}+\dfrac{x+1}{2x+4m-8}$ xác định trên khoảng $(-\infty;-2)$.

**A.** $m\in[-2;4]$. **B.** $m\in[-2;3)$. **C.** $m\in(-2;3]$. **D.** $m\in[-2;3]$.

**Câu 63.** Tập xác định của hàm số nào dưới đây chứa nhiều số nguyên dương nhất?

**A.** $y=\sqrt{3-x}$ **B.** $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{x+2}}$

**C.** $y=\sqrt{4-9x^2}$ **D.** $y=\sqrt{\dfrac{1}{27-x^3}}$

**Câu 64.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để tập xác định của hàm số $y=\dfrac{2}{x-2m}+\sqrt{7m+1-2x}$ chứa đoạn $[-1;1]$?

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

**Câu 65.** Cho hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{m-2x}$ với $m\ge -2$. Có bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để tập xác định của hàm số có độ dài bằng 1?

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

## DẠNG 2. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Để xét sự biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên từng khoảng xác định $(a;b)$ ta làm như sau:

Giả sử $\forall x_1,x_2\in K: x_1<x_2$

Tính $f(x_1)-f(x_2)$

Lập tỉ số $T=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Nếu $T>0$ thù hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$

Nếu $T<0$ thù hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$

**Câu 1.** Chọn khẳng định đúng?

**A.** Hàm số $y=f(x)$ được gọi là nghịch biến trên $K$ nếu $\forall x_1;x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

**B.** Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên $K$ nếu $\forall x_1;x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$.

**C.** Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên $K$ nếu $\forall x_1;x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

**D.** Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên $K$ nếu $\forall x_1;x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

**Câu 2.** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $y=1-2x$ **B.** $y=3x+2$ **C.** $y=x^2+2x-1$ **D.** $y=-2(2x-3)$.

**Câu 3.** Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $y=x$. **B.** $y=-2x$. **C.** $y=2x$. **D.** $y=\dfrac{1}{2}x$

**Câu 4.** Xét sự biến thiên của hàm số $f(x)=\dfrac{3}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**B.** Hàm số vừa đồng biến, vừa nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**D.** Hàm số không đồng biến, không nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**Câu 5.** Hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng

**A.** $(-\infty;2)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Câu 6.** Hàm số $y=f(x)=x^4-2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

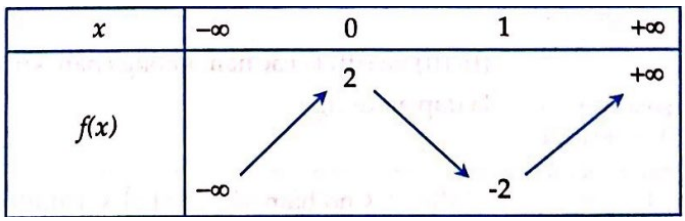
**A.** $(-1;0)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $(1;+\infty)$

**Câu 7.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-1;1)$?

**A.** $y=\sqrt{1-x^2}$ **B.** $y=x^2$

**C.** $y=\dfrac{x+1}{x}$ **D.** $y=-x^3+3x$

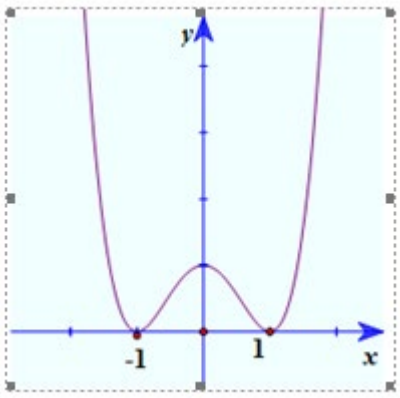
**Câu 8.** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau




Hàm số nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;0)$ **B.** $(1;+\infty)$ **C.** $(-2;2)$ **D.** $(0;1)$

**Câu 9.** Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ.




Chọn đáp án sai.

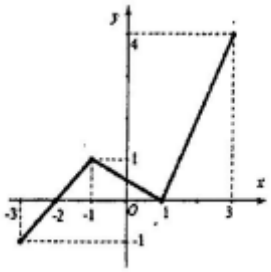
**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

**D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

**Câu 10.** Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $[-3;3]$ và có đồ thị được biểu diễn bởi hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



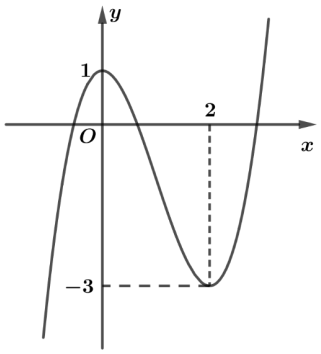
**A.** Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

**B.** Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$ và $(1;3)$.

**C.** Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(0;1)$.

**D.** Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$.

**Câu 11.** Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.




Khẳng định nào sau đây là đúng?

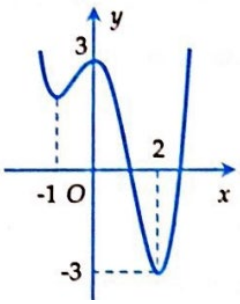
**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

**D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

**Câu 12.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.




Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$

**B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$

**D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$

**Câu 13.** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

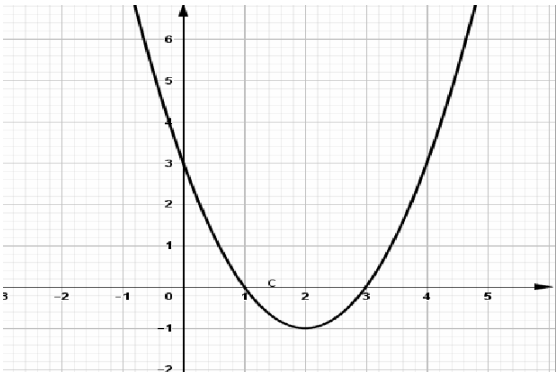
| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $2$ ↘ | $-32$ ↗ | $+\infty$ |

Đặt $h(x)=5x-f(x)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

**A.** $h(3)<h(1)<h(2)$ **B.** $h(1)<h(2)<h(3)$

**C.** $h(2)<h(1)<h(3)$ **D.** $h(3)<h(2)<h(1)$

**Câu 14.** Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.** Đồ thị hàm số cắt trục hoành theo một dây cung có độ dài bằng $2$.

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;5)$.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

**D.** $f\left(\sqrt{2019}\right)<f\left(\sqrt{2017}\right)$.

## DẠNG 3. TẬP GIÁ TRỊ - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $D$.

Tập hợp $T=\left\{y=f(x)\middle|x\in D\right\}$ gọi là tập giá trị của hàm số $y=f(x)$.

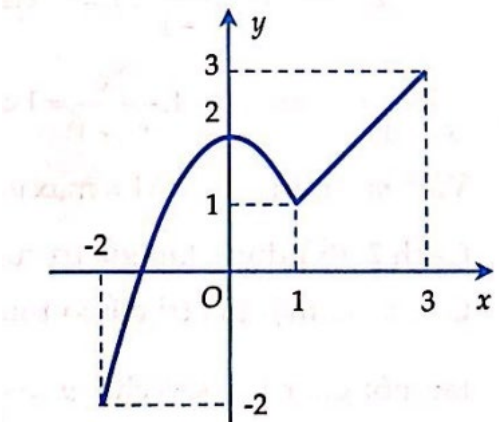
*Nhận dạng:* Khi hàm số chỉ xuất hiện tích các biểu thức là hằng số hoặc tổng bình phương các biểu thức là hằng số.

*Bất đẳng thức:*

+) Cho $a,\ b\ge 0$ ta luôn có $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ hay *hay* $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, đẳng thức xảy ra khi $a=b$

+) $a,\ b\in\mathbb{R}$ ta có $a^2+b^2\ge 2ab$, đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

**Câu 1.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên đoạn $[-2;3]$ có đồ thị được cho như trong hình dưới đây:




Gọi *M, m* lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$. Tính $M+m$.

**A.** $M+m=0$ **B.** $M+m=1$ **C.** $M+m=2$ **D.** $M+m=3$

**Câu 2.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x-2|-3|x-1|$ trên đoạn $[0;2]$ là

**A.** $1$. **B.** $-1$. **C.** $2$. **D.** $-3$.

**Câu 3.** Cho hàm số $y=\begin{cases}2x-1 \text{ khi } x\ge 1\\ 1 \quad\quad \text{khi } 0<x<1\\ 1-2x \text{ khi } x\le 0\end{cases}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2;2]$ là:

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

**Câu 4.** Gọi *M, m* lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$. Tìm $M+m$.

**A.** $M+m=2+\sqrt{2}$

**B.** $M+m=2$

**C.** $M+m=4$

**D.** $M+m=4+\sqrt{2}$

**Câu 5.** Gọi *M, m* lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-8x+7}{x^2+1}$. Tìm $M-m$.

**A.** $M-m=8$ **B.** $M-m=9$

**C.** $M-m=10$ **D.** $M-m=11$

**Câu 6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^2+(x-3)^2$.

**A.** 0 **B.** $\dfrac{9}{2}$ **C.** $\dfrac{-9}{2}$ **D.** $\dfrac{3}{2}$

**Câu 7.** Tìm giá trị nhỏ nhất *m* của hàm số $y=f(x)=x-\sqrt{x-2}$.

**A.** $m=0$ **B.** $m=2$

**C.** $m=\dfrac{7}{4}$ **D.** $m=\dfrac{3}{4}$

**Câu 8.** Gọi *m, M* lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Tính $m^2+M^2$.

**A.** $m^2+M^2=\dfrac{1}{2}$ **B.** $m^2+M^2=2$

**C.** $m^2+M^2=1$ **D.** $m^2+M^2=4$

**Câu 9.** Gọi *M, m* lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x=3)(5-x)$ với $-3\le x\le 5$. Tìm $M+2m$.

**A.** $M+2m=8$ **B.** $M+2m=16$

**C.** $M+2m=24$ **D.** $M+2m=32$

**Câu 10.** Cho hàm số $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$.

a) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* thỏa mãn $f(x)\le m$ với mọi $x\in[-1;1]$.

**A.** $m\ge\sqrt{2}$ **B.** $m<0$

**C.** $m=\sqrt{2}$ **D.** $m<\sqrt{2}$

b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* thỏa mãn $f(x)>m$ với mọi $x\in[-1;1]$.

**A.** $m\le-\sqrt{2}$ **B.** $m<-\sqrt{2}$

**C.** $m\le-1$ **D.** $m<-1$

**Câu 11.** Trong các hàm số sau, hàm số nào có tập giá trị là đoạn $[0;2]$?

**A.** $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$

**B.** $g(x)=x+\sqrt{2-x^2}$

**C.** $h(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$

**D.** $k(x)=\sqrt{4x-x^2}$

**Câu 12.** Gọi $M$ là giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+3}}$. Biết $M=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $b$ nhỏ nhất. Tìm $a+b$.

**A.** $a+b=87$ **B.** $a+b=88$

**C.** $a+b=89$ **D.** $a+b=90$

**Câu 13.** Người ta cần xây một chiếc bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 500.000 đồng/m$^2$ lòng bể. Khi đó, kích thước của bể nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất là:

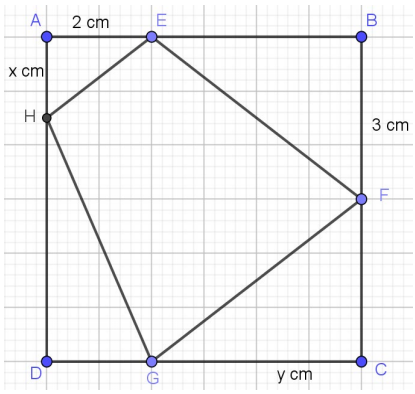
**A.** Chiều dài 20m, chiều rộng 10m, chiều cao $\dfrac{5}{6}$m.

**B.** Chiều dài 10m, chiều rộng 5m, chiều cao $\dfrac{10}{3}$m.

**C.** Chiều dài 30m, chiều rộng 15m, chiều cao $\dfrac{10}{27}$m.

**D.** Một đáp án khác.

**Câu 14.** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.




**A.** $x+y=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ **B.** $x+y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $x+y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $x+y=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

**Câu 15.** Giả sử bạn được chi cho một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi $100\ m$. Hỏi bạn phải chọn kích thước của hình chữ nhật bằng bao nhiêu để diện tích mảnh đất của bạn là lớn nhất.

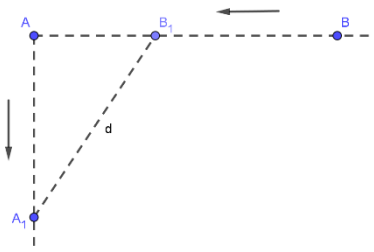
**A.** chiều dài mảnh đất là 30 m, chiều rộng là 20 m.

**B.** chiều dài mảnh đất là 40 m, chiều rộng là 10 m.

**C.** chiều dài mảnh đất là 35 m, chiều rộng là 15 m.

**D.** chiều dài mảnh đất là 25 m, chiều rộng là 25 m.

**Câu 16.** Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai con tàu cùng khởi hành, một tàu chạy về hướng nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/giờ. Hãy xác định thời điểm mà khoảng cách của hai tàu là nhỏ nhất?




**A.** sau $\frac{7}{17}$ giờ xuất phát

**B.** sau $\frac{5}{17}$ giờ xuất phát

**C.** sau $\frac{9}{17}$ giờ xuất phát

**D.** sau $\frac{8}{17}$ giờ xuất phát

**Câu 17.** Một của hàng buôn giày nhập một đôi với giá là $40$ USD. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá $x$ USD thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120-x)$ đôi. Hỏi của hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

**A.** 80 USD. **B.** 70 USD. **C.** 30 USD. **D.** 90 USD.

## DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

**Câu 1.** Trong các điểm sau đây điểm nào thuộc đồ thị của hàm số?

**A.** $M_1(2;\ 3)$. **B.** $M_2(0;\ -1)$. **C.** $M_3\left(\frac{1}{2};\ \frac{-1}{2}\right)$. **D.** $M_4(1;\ 0)$.

**Câu 2.** Cho hàm số $y=x^3-3x+2$. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số đã cho?

**A.** $(-2;0)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-2;-12)$. **D.** $(1;-1)$.

**Câu 3.** Đồ thị hàm số $y=f(x)=\begin{cases}2x+3 & khi\ x\le 2\\ x^2-3 & khi\ x>2\end{cases}$ đi qua điểm có tọa độ nào sau đây ?

**A.** $(0;-3)$ **B.** $(3;6)$ **C.** $(2;5)$ **D.** $(2;1)$

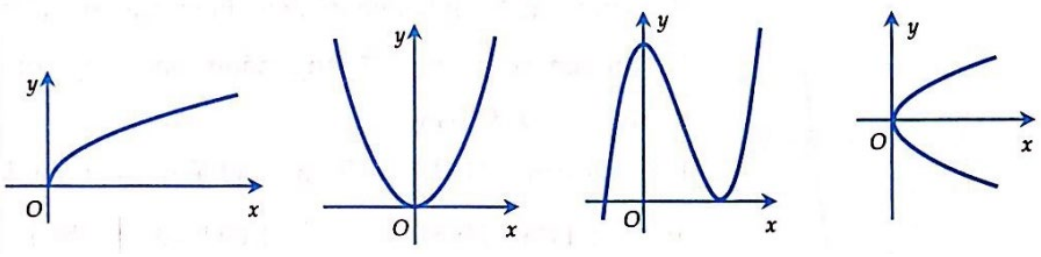
**Câu 4.** Đồ thị của hàm số $y=f(x)=\begin{cases}2x+1 \text{ khi } x\le 2\\ -3 \text{ khi } x>2\end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?

**A.** $(0;-3)$ **B.** $(3;7)$ **C.** $(2;-3)$ **D.** $(0;1)$

**Câu 5.** Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y=\frac{x-2}{x(x-1)}$?

**A.** $M(0;-1)$ **B.** $M(2;1)$ **C.** $M(2;0)$ **D.** $M(1;1)$

**Câu 6.** Đường cong trong hình nào dưới đây **không phải** là đồ thị của một hàm số dạng $y=f(x)$?




**A.** **B.** **C.** **D.**

**Câu 7.** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị trùng với đồ thị hàm số $y=x+2$?

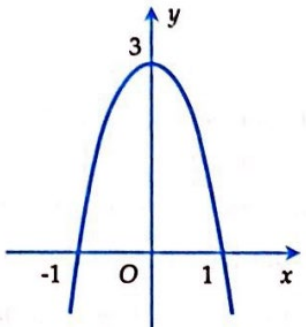
**A.** $y=\left(\sqrt{x+2}\right)^2$

**B.** $y=\dfrac{(x+2)^2}{x+2}$

**C.** $y=x(x+1)+2-x^2$

**D.** $y=\dfrac{x^2(x+2)}{x^2}$

**Câu 8.** Đường cong trong hình sau đây là đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây?




**A.** $y=x^3+3x^2-3$

**B.** $y=-x^2+2x+3$

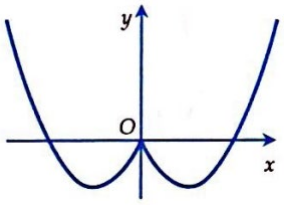
**C.** $y=x^4+2x^2-3$

**D.** $y=-x^4-2x^2+3$

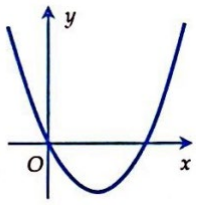
**Câu 9.** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3$. Có bao nhiêu điểm trên đồ thị hàm số có tung độ bằng 1?

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

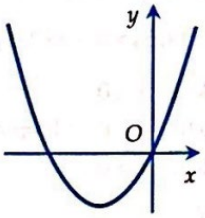
**Câu 10.** Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)=x^2-2|x|$?



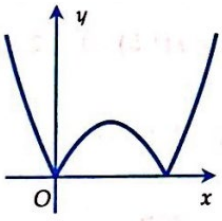

**A.**




**B.**




**C.**




**D.**

**Câu 11.** Có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ ?

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

## DẠNG 5. XÁC ĐỊNH BIỂU THỨC CỦA HÀM SỐ

**Câu 1.** Cho hàm số $y=f(x)=|-5x|$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

**A.** $f(-1)=5$. **B.** $f(-2)=10$. **C.** $f\left(\dfrac{1}{5}\right)=-1$. **D.** $f(2)=10$.

**Câu 2.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{x-2}-3}{x-1} & \text{khi} \quad x\geq 2\\ x^2+2 & \text{khi} \quad x<2\end{cases}$. Tính $P=f(2)+f(-2)$.

**A.** $P=3$. **B.** $P=2$. **C.** $P=\dfrac{7}{3}$. **D.** $P=6$.

**Câu 3.** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-6x^2+11x-6$. Kết quả sai là

**A.** $f(1)=0$. **B.** $f(2)=0$. **C.** $f(3)=0$. **D.** $f(-4)=-24$.

**Câu 4.** Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}, x\geq 0\\ \dfrac{1}{x-1}, x<0\end{cases}$. Giá trị $f(0), f(2), f(-2)$ là

**A.** $f(0)=0; f(2)=\dfrac{2}{3}, f(-2)=2$. **B.** $f(0)=0; f(2)=\dfrac{2}{3}, f(-2)=-\dfrac{1}{3}$.

**C.** $f(0)=0; f(2)=1, f(-2)=-\dfrac{1}{3}$. **D.** $f(0)=0; f(2)=1, f(-2)=2$.

**Câu 5.** Cho hàm số: $y=f(x)=\begin{cases}1-x & khi \ -2<x\leq 1\\ x-1 & khi \ 1<x\leq 2\\ 5-x^2 & khi \ 2<x\leq 5\end{cases}$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

**A.** $f(3)=2$. **B.** $f(3)=-2$. **C.** $f(3)=-4$. **D.** $f(3)=-1$.

**Câu 6.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3(x-2) & \text{khi} \quad -1\leq x<2\\ \sqrt{x^2-4} & \text{khi} \quad x\geq 2\end{cases}$. Tính giá trị $f(3)$.

**A.** Không xác định. **B.** $f(3)=\sqrt{5}$ hoặc $f(3)=3$.

**C.** $f(3)=\sqrt{5}$. **D.** $f(3)=3$.

**Câu 7.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x+1} & \text{khi } x\geq 0\\ \dfrac{\sqrt[3]{2+3x}}{x-2} & \text{khi } -2\leq x<0\end{cases}$. Ta có kết quả nào sau đây **đúng**?

**A.** $f(-1)=\dfrac{1}{3}; f(2)=\dfrac{7}{3}$. **B.** $f(0)=2; f(-3)=\sqrt{7}$.

**C.** $f(-1)$: không xác định; $f(-3)=-\dfrac{11}{24}$. **D.** $f(-1)=\sqrt{8}; f(3)=0$.

**Câu 8.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \text{khi } x\leq -3\\ \dfrac{x+7}{2} & \text{khi } x>-3\end{cases}$. Biết $f(x_0)=5$ thì $x_0$ là

**A.** $-2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Câu 9.** Cho hàm số $y=\begin{cases}-2(x-2) & nếu \ -1\leq x<1\\ \sqrt{x^2-1} & nếu \ x\geq 1\end{cases}$. Tính $f(-1)$.

**A.** $-6$. **B.** $6$. **C.** $5$. **D.** $-5$.

**Câu 10.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2(x-3) & \text{nếu } -1\le x\le 1\\ \sqrt{x^2-1} & \text{nếu } x\ge 1\end{cases}$; giá trị của $f(-1);f\left(\sqrt{10}\right)$ lần lượt là

**A.** 8 và 0. **B.** 0 và 8. **C.** $-8$ **và** 3. **D.** 3 và $-8$.

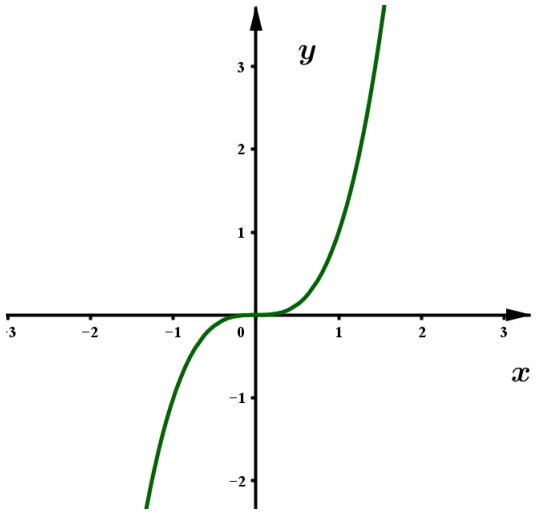
**Câu 11.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x-1} & \text{khi } x\in(-\infty;0)\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x\in[0;2]\\ x^2-1 & \text{khi } x\in(2;5]\end{cases}$. Tính $f(4)$.

**A.** Không tính được. **B.** $f(4)=\dfrac{2}{3}$. **C.** $f(4)=15$. **D.** $f(4)=\sqrt{5}$.

**Câu 12.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{x+2}-3}{x-1} & \text{khi } x\ge 2\\ x^2+1 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Khi đó, $f(-2)+f(2)$ bằng

**A.** 6. **B.** 4. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

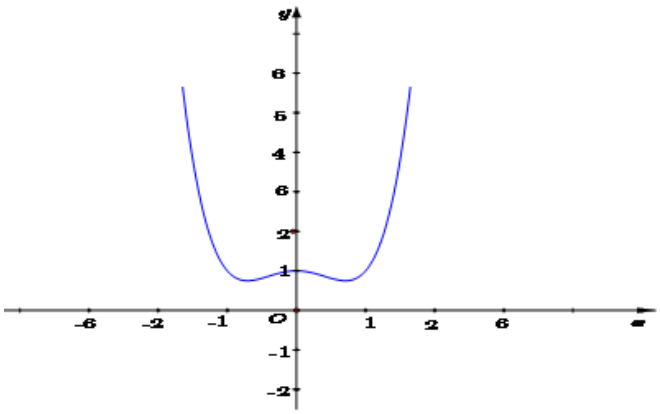
**Câu 13.** Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ




Tnh giá trị biểu thức $f\left(\sqrt{2018}\right)+f\left(-\sqrt{2018}\right)$

**A.** $-2018$. **B.** 0. **C.** 2018. **D.** 4036.

**Câu 14.** Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ




Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $f(-1)=f(1)=1$. **B.** Đồ thị hàm số có tâm đối xứng.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-6;-1)$.

**Câu 15.** Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2016+9x}-\sqrt{2016-9x}}{|x|}$. Tính giá trị của biểu thức:

$S=f(220)+f(-221)+f(222)+f(-223)+f(-220)+f(221)+f(-222)+f(223)+f(224)$

**A.** $24\sqrt{7}$. **B.** $\dfrac{24\sqrt{7}}{223}$. **C.** $\dfrac{6\sqrt{7}}{55}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{28}$.

**Câu 16.** Cho hai hàm số $f(x)=x^2+5$ và $g(x)=x^3+2x^2+1$. Tính tổng các hệ số của hàm số $f(g(x))$.

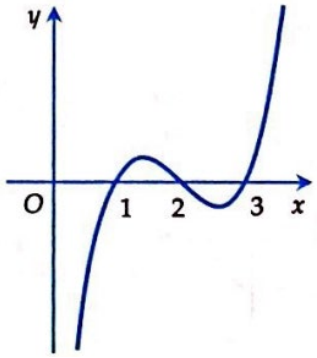
**A.** 18 **B.** 19 **C.** 20 **D.** 21

**Câu 17.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x-1)=x^2+3x-2$. Tìm biểu thức $f(x)$.

**A.** $f(x)=x^2+5x+2$ **B.** $f(x)=x^2+5x-2$

**C.** $f(x)=x^2+x-2$ **D.** $f(x)=x^2+x+2$

**Câu 18.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?




**A.** $f(1,5)<0<f(2,5)$

**B.** $f(1,5)<0, f(2,5)<0$

**C.** $f(1,5)>0, f(2,5)>0$

**D.** $f(1,5)>0>f(2,5)$

**Câu 19.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{36\}$. Biết $f(2x-5)=x^2+3x-2$ và $g(5x+1)=\dfrac{x}{x-7}$. Tính $g(f(1))$.

**A.** $g(f(1))=\dfrac{-3}{4}$ **B.** $g(f(1))=\dfrac{3}{4}$

**C.** $g(f(1))=\dfrac{47}{4}$ **D.** $g(f(1))=\dfrac{-47}{4}$

**Câu 20.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^3+\dfrac{1}{x^3}\forall x\neq 0$. Tính $f(3)$.

**A.** $f(3)=36$ **B.** $f(3)=18$

**C.** $f(3)=29$ **D.** $f(3)=25$

**Câu 21.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right)=x+2\ \forall x\neq 1$. Tính $f(2)+f(4)$.

**A.** $f(2)+f(4)=6$ **B.** $f(2)+f(4)=2$

**C.** $f(2)+f(4)=-6$ **D.** $f(2)+f(4)=-2$

# Bài 1. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

## I. Hàm số

### 1. Định nghĩa

Cho tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$. Nếu với mỗi giá trị của $x$ thuộc $D$ có một và chỉ một giá trị tương ứng của $y$ thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

Ta gọi $x$ là biến số và $y$ là hàm số của $x$.

Tập hợp $D$ được gọi là tập xác định của hàm số.

Kí hiệu hàm số: $y = f(x), x \in D$.

***Ví dụ 1.***

a) Diện tích $S$ của hình tròn bán kính $r$ được tính theo công thức $S = \pi r^2$. Hỏi $S$ có phải là hàm số của $r$ hay không? Giải thích.

b) Cho công thức $y^2 = x$. Hỏi $y$ có phải hàm số của $x$ hay không? Giải thích.

***Giải***

a) $S$ là hàm số của $r$ vì mỗi giá trị của $r$ chỉ cho đúng một giá trị của $S$.

b) $y$ không phải là hàm số của $x$ vì khi $x = 1$ thì ta tìm được hai giá trị tương ứng của $y$ là 1 và $-1$

### 2. Cách cho hàm số

#### a) Hàm số cho bằng một công thức

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực $x$ sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

***Ví dụ 2.*** Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x}$

b) $y = \sqrt{x-1}$.

***Giải***

a) Biểu thức $\dfrac{1}{x}$ có nghĩa khi $x \neq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Biểu thức $\sqrt{x-1}$ có nghĩa khi $x - 1 \geq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = [1; +\infty)$.

#### b) Hàm số cho bằng nhiều công thức

Một hàm số có thể được cho bằng nhiều công thức, chẳng hạn hàm số trong Ví dụ 3 sau:

***Ví dụ 3.*** Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } x < 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \\ 1 \text{ nếu } x > 0. \end{cases}$$

a) Tìm tập xác định của hàm số trên.

b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -2; x = 0; x = 2021$.

***Giải***

a) $f(x)$ có nghĩa khi $x < 0, x = 0, x > 0$ nên tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) $f(-2) = -1; f(0) = 0; f(2021) = 1$.

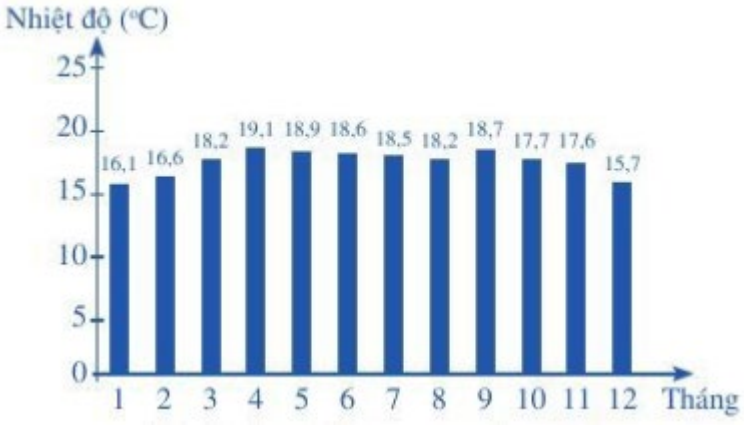
*Chú ý:* Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định là $D$. Khi biến số $x$ thay đổi trong tập $D$ thì tập hợp các giá trị y tương ứng được gọi là *tập giá trị* của hàm số đã cho.

Chẳng hạn, trong Ví dụ 3, ta có: Ứng với các giá trị của $x$ thì $f(x)$ chỉ nhận một trong ba giá trị $-1; 0; 1$ nên tập giá trị của hàm số đó là tập hợp $\{-1; 0; 1\}$.

#### c) Hàm số không cho bằng công thức

Trong thực tiễn, có những tình huống dẫn tới những hàm số không thể cho bằng công thức (hoặc nhiều công thức). Chẳng hạn, trong ví dụ sau đây:

***Ví dụ 4.*** Biểu đồ ở dưới cho biết Nhiệt độ trung bình ở Đà Lạt theo từng tháng trong năm




a) Xác định tập hợp các tháng được nếu trong biểu đồ.

b) Tương ứng tháng với nhiệt độ trung bình của tháng đó có phải là hàm số không? Giải thích.

***Giải***

a) Tập hợp các tháng là $D=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$.

b) Mỗi tháng chỉ tương ứng với đúng một giá trị nhiệt độ trung bình nên tương ứng đó xác định một hàm số. Hàm số đó có thể được cho bằng bảng như sau:

| Tháng | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nhiệt độ $\left(^{\circ}C\right)$ | 16,1 | 16,6 | 18,2 | 19,1 | 18,9 | 18,6 | 18,5 | 18,2 | 18,7 | 17,7 | 17,6 | 15,7 |

## II. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập hợp $D$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x;f(x))$ trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ với mọi $x$ thuộc $D$.

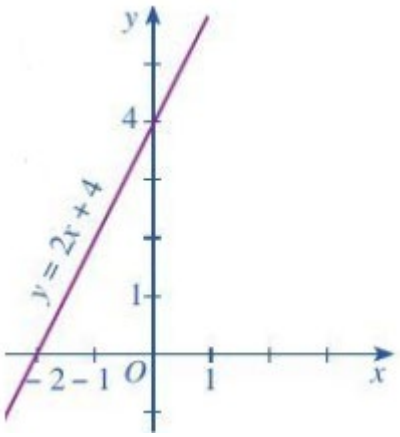
***Ví dụ 5.*** Cho hàm số $y=2x+4$.

a) Vẽ đồ thị hàm số trên.

b) Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho bốn điểm: $A(-1;2), B(1;6), C(2020;2021), D(2030;4064)$. Điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số trên?

***Giải***

a) Khi $x=0$ thì $y=4$; khi $y=0$ thì $x=-2$. Vậy đồ thị hàm số $y=2x+4$ là đường thẳng cắt trục $Oy$ tại điểm $(0;4)$, cắt trục $Ox$ tại điểm $(-2;0)$




b) Khi $x=-1$ thì $y=2$; khi $x=1$ thì $y=6$; khi $x=2020$ thì $y=4044$; khi $x=2030$ thì $y=4064$.

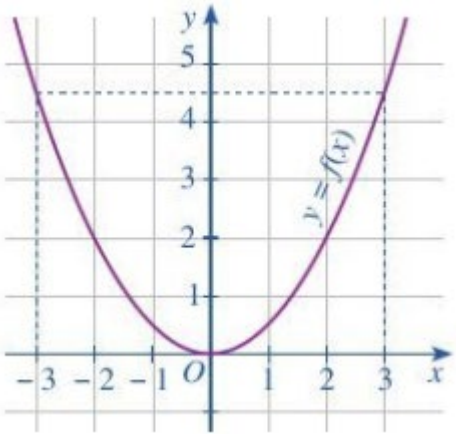
Vậy các điểm $A(-1;2), B(1;6), D(2030;4064)$ thuộc đồ thị hàm số và điểm $C(2020;2021)$ không thuộc đồ thị hàm số.

*Nhận xét* - Điểm $M(a;b)$ trong mặt phẳng toạ độ *thuộc* đồ thị hàm số $y=f(x), x\in D$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a\in D \\ b=f(a). \end{cases}$$

- Để chứng tỏ điểm $M(a;b)$ trong mặt phẳng toạ độ không thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$, $x\in D$, ta có thể kiểm tra một trong hai khả năng sau:
Khả năng 1 : Chứng tỏ rằng $a\notin D$.
Khả năng 2 : Khi $a\in D$ thì chứng tỏ rằng $b\neq f(a)$.

***Ví dụ 6.*** Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình




a) Trong các điểm có toạ độ $(-2;2),(0;0),(0;1)$, $(2;2),(1;1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Quan sát đồ thị, tìm $f(3)$ và những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$.

***Giải***

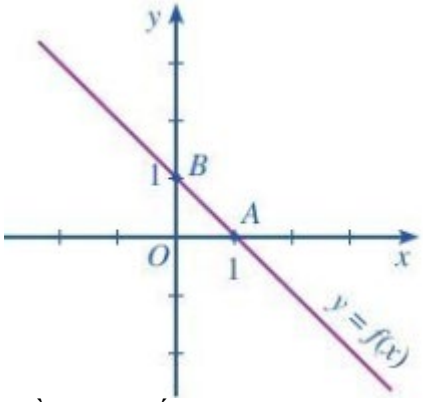
a) Các điểm thuộc đồ thị hàm số có toạ độ là: $(-2;2),(0;0),(2;2)$

Các điểm không thuộc đồ thị hàm số có toạ độ là: $(0;1),(1;1)$.

b) Quan sát đồ thị, ta có: $f(3)=\frac{9}{2}$.

Toạ độ những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$ là: $\left(-3;\frac{9}{2}\right),\left(3;\frac{9}{2}\right)$.

***Ví dụ 7.*** Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình




a) Xác định tọa độ các giao điểm của đồ thị đó với hai trục toạ độ.

b) Hàm số $y=f(x)$ được xác định bởi công thức nào?

***Giải***

a) Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(1;0)$. Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;1)$.

b) Vì đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường thẳng cắt cả hai trục toạ độ nên hàm số đó là hàm số bậc nhất, tức là $y=f(x)=ax+b(a\neq 0)$. Giao điểm của đồ thị đó với trục $Oy$ là điểm có toạ độ $(0;b)$ nên $b=1$. Suy ra $y=f(x)=ax+1$. Khi đó, giao điểm của đồ thị đó với trục $Ox$ là điểm có toạ độ $\left(-\frac{1}{a};0\right)$ nên $-\frac{1}{a}=1$, tức là $a=-1$. Vậy $y=f(x)=-x+1$.

## III. Sự biến thiên của hàm số

### 1. Khái niệm

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$.

- Hàm số $y=f(x)$ gọi là đồng biến trên khoảng $(a;b)$ nếu
$\forall x_1,x_2\in(a;b),x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
- Hàm số $y=f(x)$ gọi là nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ nếu
$\forall x_1,x_2\in(a;b),x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

***Ví dụ 8.*** Chứng tỏ hàm số $y=6x^2$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

***Giải***

Xét hai số bất kì $x_1,x_2\in(0;+\infty)$ sao cho $x_1<x_2$.

Ta có: $0<x_1<x_2$ nên $6x_1^2<6x_2^2$ hay $f(x_1)<f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

*Nhận xét:* Xét sự biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng hàm số đồng biến và các khoảng hàm số nghịch biến. Kết quả xét sự biến thiên được tổng kết trong một *bảng biến thiên.*

Chẳng hạn, sau đây là bảng biến thiên của hàm số $y=6x^2$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

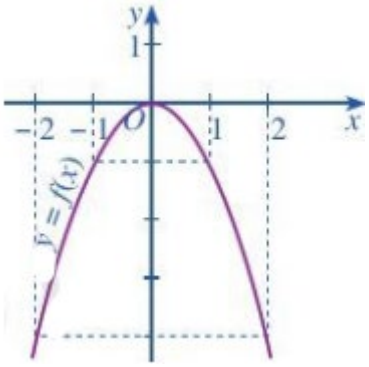
- Dấu mũi tên đi xuống (từ $+\infty$ đến 0 ) diễn tả hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
- Dấu mũi tên đi lên (từ 0 đến $+\infty$) diễn tả hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**2. Mô tả hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến bằng đồ thị**

Nhận xét.

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi lên" trên khoảng đó.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi xuống" trên khoảng đó.

***Ví dụ 9.*** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình. Quan sát đồ thị và cho biết phát biểu nào sau đây là đúng.




a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

***Giải***

a) Phát biểu "Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$ " là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi lên" trên khoảng đó.

b) Phát biểu "Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ " là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi xuống" trên khoảng đó.

c) Phát biểu "Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ " là sai vì đồ thị hàm số đã cho vừa có phần "đi lên" vừa có phần "đi xuống" trên khoảng đó.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Để tìm tập xác định $D$ của hàm số ta tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa, tức là

$D=\left\{x\in\mathbb{R}\middle| f(x)\in\mathbb{R}\right\}$.

Chú ý. Thông thường $y=f(x)$ cho bởi các biểu thức đại số, ta xét một số trường hợp sau:

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{u(v)}{v(x)}$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x),v(x)\\ v(x)\neq 0\end{cases}$

Hàm số $y=f(x)=\sqrt[2k]{u(x)}\,(k\in\mathbb{Z})$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x)\\ u(x)\geq 0\end{cases}$

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{u(x)}{\sqrt[2k]{v(x)}}(k\in\mathbb{Z})$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x),v(x)\\ v(x)>0\end{cases}$

**Câu 1.** Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y=\dfrac{3x-1}{-2x+2}$.

b) $y=\dfrac{2x-1}{(2x+1)(x-3)}$.

c) $y=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$.

d) $y=\dfrac{2x+1}{x^3-3x+2}$.

**Lời giải**

a) Hàm số xác định khi $-2x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases}2x+1\neq 0\\ x-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{-1}{2}\\ x\neq 3\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};3\right\}$.

c) Ta có $x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

d) Hàm số xác định khi $x^3-3x+2\neq 0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x-2)\neq 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)\neq 0\\ (x^2+x-2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ \begin{cases}x\neq 1\\ x\neq=2\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq=2\end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$.

**Câu 2.** Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y=\sqrt{3x-2}$.

b) $y=\sqrt{x^2+1}$.

c) $y=\sqrt{-2x+1}-\sqrt{x-1}$.

d) $y=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x-3}$.

e) $y=\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}+\sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$.

f) $y=\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

**Lời giải**

a) Hàm số xác định khi $3x-2\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant \frac{2}{3}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

b) Ta có $x^2+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

c) Hàm số xác định khi $\begin{cases}-2x+3\geqslant 0\\ x-1\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant\frac{3}{2}\\ x\geqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow 1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

d) Hàm số xác định khi $\begin{cases}x^2-2x+1\geqslant 0\\ x-3\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2\geqslant 0\\ x-3\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\geqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow x\geqslant 3$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[3;+\infty)$.

e) Ta có $y=\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}+\sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{(\sqrt{x+2}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{1-x^2}+1)^2}$

$=|\sqrt{x+2}+1|+|\sqrt{1-x^2}+1|=\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x^2}+2$

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x+2\geqslant 0\\ 1-x^2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -2\\ (1-x)(1+x)\geqslant 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -2\\ \left[\begin{cases}1-x\geq 0\\ 1+x\geq 0\end{cases}\\ \left[\begin{cases}1-x\leq 0\\ 1+x\leq 0\end{cases}\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -2\\ \left[\begin{cases}x\leqslant 1\\ x\geqslant -1\end{cases}\\ \left[\begin{cases}x\geq 1\\ x\leq -1\end{cases}\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-1;1]$.

f) Hàm số xác định khi $\begin{cases}x^2-x+1\geqslant 0\\ x+\sqrt{x^2-x+1}\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq 0\\ \sqrt{x^2-x+1}\geqslant -x\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}\geqslant -x$

$\Leftrightarrow\left[\begin{cases}-x<0\\ x^2-x+1\geqslant 0\end{cases}\right.\left.\begin{cases}-x\geqslant 0\\ x^2-x+1\geqslant x^2\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}-x<0\\ -x\geqslant 0\\ -x+1\geqslant 0\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x>0\\ x\leqslant 0\\ x\leqslant 1\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>0\\ x\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

**Câu 3.** Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y=\frac{2}{(x+2)\sqrt{x+1}}$.

b) $y=\frac{x}{1-x^2}-\sqrt{-x}$.

c) $y=\dfrac{x-3\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$.

d) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$.

e) $y=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{x\sqrt{1+x}}$.

f) $y=\dfrac{2015}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}-\sqrt[3]{x^2-7}}$.

g) $y=\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\dfrac{1}{1-x}$.

h) $y=\sqrt{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)}$.

**Lời giải**

**a)** Hàm số xác định khi $\begin{cases}x+2\neq 0\\ x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -2\\ x>-1\end{cases}\Leftrightarrow x>-1$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(1;+\infty)$.

**b)** Hàm số xác định khi $\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ -x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\neq x\leqslant 0$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;0]\setminus\{-1\}$.

**c)** Hàm số xác định khi $\begin{cases}2-x\geqslant 0\\ x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant 2\\ x>-2\end{cases}\Leftrightarrow -2<x\leqslant 2$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-2;2]$.

**d)** Hàm số xác định khi $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ 4-x\geqslant 0\\ x-2\neq 0\\ x-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 1\\ x\leqslant 4\\ x\neq 2\\ x\neq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 4\\ x\neq 2\\ x\neq 3\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[1;4]\setminus\{2;3\}$.

**e)** Hàm số xác định khi $\begin{cases}1-x\geqslant 0\\ x\neq 0\\ 1+x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant 1\\ x\neq 0\\ x>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x\leqslant 1\\ x\neq 0\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-1;1]\setminus\{0\}$.

**f)** Hàm số xác định khi $\sqrt[3]{x^2-3x+2}-\sqrt[3]{x^2-7}\neq 0\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2-3x+2}\neq\sqrt[3]{x^2-7}$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2\neq x^2-7\Leftrightarrow 9\neq 3x\Leftrightarrow x\neq 3$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

**g)** Ta có $y=\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\dfrac{1}{1-x}=\sqrt{(\sqrt{x+7}+1)^2}+\dfrac{1}{1-x}=\sqrt{x+7}+1+\dfrac{1}{1-x}$

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x+7\geqslant 0\\ 1-x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -7\\ x\neq 1\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-7;+\infty)\setminus\{1\}$.

**h)** Ta có $y=\sqrt{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)}=\sqrt{\sqrt{(x+1)^2+1}-(x+1)}$

Hàm số xác định khi $\sqrt{(x+1)^2+1}-(x+1)\geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+1}\geqslant x+1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x+1<0\\(x+1)^2+1\geq 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x+1\geq 0\\(x+1)^2+1\geq (x+1)^2\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1<0\\x+1\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

**Câu 4.** Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y=\sqrt{\left|x^2+x+4\right|}$.

b) $y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x\,|x-4|}}$.

c) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x+5}}+|x+1|\sqrt{x^2-x+6}$.

d) $y=\dfrac{2x+1}{x(|x|-1)}$.

e) $y=\dfrac{|x|}{|x-2|+\left|x^2+2x\right|}$.

f) $y=\dfrac{|x|-1}{x^2-1}-\dfrac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$.

**Lời giải**

**a)** Ta có $\left|x^2+x+4\right|=\left|\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}\right|>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(1;+\infty)$.

**b)** Hàm số xác định khi $x\,|x-4|>0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x>0\\|x-4|\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x>0\\x\neq 4\end{array}\right.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)\setminus\{4\}$.

**c)** Ta có $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x+5}}+|x+1|\sqrt{x^2-x+6}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}}}+|x+1|\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}}$

Vì $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}\geqslant 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

**d)** Hàm số xác định khi $x(|x|-1)\neq 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\neq 0\\|x|-1\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\neq 0\\x\neq \pm 1\end{array}\right.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$.

**e)** Hàm số xác định khi $|x-2|+\left|x^2+2x\right|\neq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$. Thật vậy:

Nếu $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ thì $\left|x^2+2x\right|=8$

$Neáu\left|x^2+2x\right|=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$ thì $\left[\begin{array}{l}|x-2|=2\\|x-2|=4\end{array}\right.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

**f)** Ta có $y=\dfrac{|x|-1}{x^2-1}-\dfrac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}=\dfrac{|x|-1}{x^2-1}-\dfrac{x^2-|x|}{(|x|-1)^2}$

Hàm số xác định khi $\left\{\begin{array}{l}x^2-1\neq 0\\|x|-1\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\neq\pm 1\\x\neq\pm 1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\neq\pm 1$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

**Câu 5.** Tìm $m$ để các hàm số sau đây xác định với mọi $x$ thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

a) $y=\sqrt{x-m}+\sqrt{2x-m-1}$.

b) $y=\sqrt{2x-3m+4}+\dfrac{x-m}{x+m-1}$.

**Lời giải**

**a)** Hàm số xác định khi $\left\{\begin{array}{l}x-m\geqslant 0\\2x-m-1\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\geqslant m\\x\geqslant\dfrac{m+1}{2}\end{array}\right.\ (*)$

+) Nếu $m\geqslant\dfrac{m+1}{2}\Leftrightarrow m\geqslant 1$ thì (*) $\Leftrightarrow x\geqslant m$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D=[m;+\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(0;+\infty)\subset[m;+\infty)\Leftrightarrow m\leqslant 0$: không thỏa mãn $m\geq 1$.

+) Nếu $m\leq\dfrac{m+1}{2}\Leftrightarrow m\leq 1$ thì (*) $\Leftrightarrow x\geqslant\dfrac{m+1}{2}$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D=[m;+\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(0;+\infty)\subset[\dfrac{m+1}{2};+\infty)\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{2}\leqslant 0\Leftrightarrow m\leq -1$: thỏa mãn điều kiện $m\leq 1$.

Vậy $m\leq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**b)** Hàm số xác định khi $\left\{\begin{array}{l}2x-3m+4\geqslant 0\\x+m-1\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\geqslant\dfrac{3m-4}{2}\\x\neq 1-m\end{array}\right.$

Do đó để hàm số xác định với mọi $x$ thuộc khoảng $(0;+\infty)$, ta phải có

$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3m-4}{2}\leqslant 0\\1-m\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\leqslant\dfrac{4}{3}\\m\geqslant 1\end{array}\right.\Leftrightarrow 1\leqslant m\leqslant\dfrac{4}{3}$

Vậy $1\leq m\leq\dfrac{4}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 6.** Tìm $m$ để các hàm số sau:

**a)** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-m}}+\sqrt{-x+2m+6}$ xác định trên $(-1;0)$.

**b)** $y=\sqrt{1-\left|2x^2+mx+m+15\right|}$ xác định trên $[1;3]$.

**Lời giải**

**a)** Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-m>0 \\ -x+2m+6\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>m \\ x\leq 2m+6 \end{cases} \Leftrightarrow m<x\leq 2m+6$

Do để hàm số xác định trên $(-1;0)$, ta phải có $\begin{cases} m\leqslant -1 \\ 2m+6\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\leqslant -1 \\ m\geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3\leq m\leqslant -1$.

Vậy $-3\leq m\leq -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**b)** Hàm số xác định khi $1-\left|2x^2+mx+m+15\right|\geqslant 0 \Leftrightarrow \left|2x^2+mx+m+15\right|\leqslant 1.(*)$

Bài toán được chuyển về việc tìm $m$ để $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x$ thuộc đoạn $[1;3]$.

**Điều kiện cần:** Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x$ thuộc đoạn $[1;3]$ nên nghiệm đúng với $x=1, x=2$ tức là ta có:

$$\begin{cases} |2m+17|\leqslant 1 \\ |3m+23|\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\leqslant 2m+17\leqslant 1 \\ -1\leqslant 3m+23\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9\leqslant m\leqslant -8 \\ -8\leqslant m\leqslant -\dfrac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m=-8$$

Điều kiện đủ: Với $m=-8$, ta có :

$(*) \Leftrightarrow \left|2x^2-8x+7\right|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq 2x^2-8x+7\leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-8x+8\geqslant 0 \\ 2x^2-8x+6\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2\geqslant 0 \\ x^2-4x+3\leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+3\leqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)\leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\leq 0 \\ x-3\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3\geq 0 \\ x-1\geq 0 \\ x-3\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-3\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq x\leq 3 : \text{thoûa maõn.}$$

Vậy $m=-8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 7.** Tìm $m$ để các hàm số:

**a)** $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+m-2}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

**b)** $y=\dfrac{\sqrt{m+1}}{3x^2-2x+m}$ xác định trên toàn bộ trục số.

**Lời giải**

**a)** Hàm số xác định khi $x^2-6x+m-2>0 \Leftrightarrow (x-3)^2+m-11>0$

Để hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (x-3)^2+m-11>0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m-11>0 \Leftrightarrow m>11$

Vậy $m>11$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**b)** Hàm số xác định khi $\begin{cases} m+1\geq 0 \\ 3x^2-2x+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq -1 \\ 3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+m-\dfrac{1}{3}\neq 0 \end{cases}$

Để hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq -1 \\ 3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+m-\dfrac{1}{3}\neq 0 \end{cases}$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geqslant -1 \\ m - \dfrac{1}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{3}$

Vậy $m > \dfrac{1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

## DẠNG 2. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Để xét sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên từng khoảng xác định $(a;b)$ ta làm như sau:

Giả sử $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2$

Tính $f(x_1) - f(x_2)$

Lập tỉ số $T = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Nếu $T > 0$ thù hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$

Nếu $T < 0$ thù hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$

**Câu 1.** Khảo sát sự biến thiên và lập bảng biến thiên của các hàm số sau:

**a)** $y = -2x + 3$ trên $\mathbb{R}$.

**b)** $y = x^2 - 4x + 5$ trên khoảng $(-\infty;2)$ và trên khoảng $(2;+\infty)$.

**c)** $y = -2x^2 + 4x + 1$ trên khoảng $(3;+\infty)$.

**d)** $y = \dfrac{x-3}{x-5}$ trên khoảng $(-\infty;-5)$ và trên khoảng $(-5;+\infty)$.

**Lời giải**

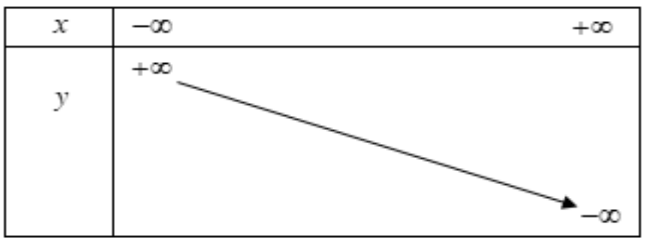
**a)** Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$.

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = (-2x_1 + 3) - (-2x_2 + 3) = -2(x_1 - x_2)$.

Suy ra $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{-2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = -2 < 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên




**b)** Ta có $f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - 4x_1 + 5) - (x_2^2 - 4x_2 + 5)$

$= (x_1^2 - x_2^2) - 4(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty;2)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < 4$.

Do đó $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 - 4 < 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty;2)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 > 4$.

Do đó $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2-4)}{x_1-x_2} = x_1+x_2-4 > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ ↘ | $1$ | ↗ $+\infty$ |

**c)** Ta có $f(x_1)-f(x_2) = (-2x_1^2+4x_1+1)-(2x_2^2+4x_2+1)$

$= -2(x_1^2-x_2^2)+4(x_1-x_2) = -2(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (3;+\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 > 3 \\ x_2 > 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 > 6$.

Do đó $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{-2(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)}{x_1-x_2} = -2(x_1+x_2-2) < 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $(3;+\infty)$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | ↗ $3$ | ↘ | $-\infty$ |

**d)** Ta có $f(x_1)-f(x_2) = \left(\frac{x_1-3}{x_1+5}\right)-\left(\frac{x_2-3}{x_2+5}\right)$

$= \frac{(x_1-3)(x_2+5)-(x_2-3)(x_1+5)}{(x_1+5)(x_2+5)} = \frac{8(x_1-x_2)}{(x_1+5)(x_2+5)}$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty;-5)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 < -5 \\ x_2 < -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+5 < 0 \\ x_2+5 < 0 \end{cases}$.

Do đó $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{8}{(x_1+5)(x_2+5)} > 0$.

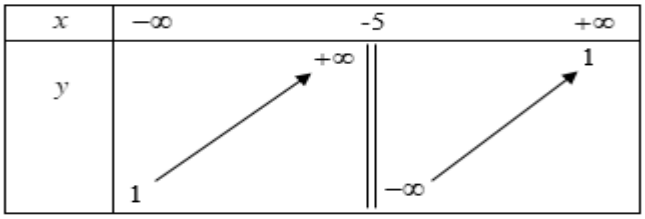
Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-5)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-5;+\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 > -5 \\ x_2 > -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+5 > 0 \\ x_2+5 > 0 \end{cases}$.

Do đó $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{8}{(x_1+5)(x_2+5)} > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-5;+\infty)$.

Bảng biến thiên




**Câu 2.** Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

**a)** $y=\sqrt{2x-7}$ trên khoảng $\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$.

**b)** $y=\sqrt{x^2+2}$.

**c)** $y=x-\sqrt{3x+5}$ trên khoảng $\left(5;+\infty\right)$.

**d)** $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

**Lời giải**

**a)** Với mọi $x_1,x_2\in\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$ và $x_1<x_2$.

Ta có $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\sqrt{2x_1-7}-\sqrt{2x_2-7}=\frac{2\left(x_1-x_2\right)}{\sqrt{2x_1-7}+\sqrt{2x_2-7}}$.

Suy ra $\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\frac{2}{\sqrt{2x_1-7}+\sqrt{2x_2-7}}>0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$.

**b)** Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Với mọi $x_1,x_2\in D$ và $x_1<x_2$.

Ta có $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\sqrt{x_1^2+2}-\sqrt{x_2^2+2}=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+2}+\sqrt{x_2^2+2}}$.

Suy ra $\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+2}+\sqrt{x_2^2+2}}$.

Nếu $x_1<x_2<0$ thì $\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+2}+\sqrt{x_2^2+2}}<0$

Vậy hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;0\right)$.

Nếu $0<x_1<x_2$ thì $\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+2}+\sqrt{x_2^2+2}}>0$

Vậy hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

**c)** Với mọi $x_1,x_2\in\left(5;+\infty\right)$ và $x_1<x_2$. Ta có

$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\left(x_1-\sqrt{3x_1+5}\right)-\left(x_2-\sqrt{3x_2+5}\right)=\left(x_1-x_2\right)-(\sqrt{3x_1+5}-\sqrt{3x_2+5})$.

Suy ra $\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\frac{\sqrt{3x_1+5}+\sqrt{3x_2+5}-3}{\sqrt{3x_1+5}+\sqrt{3x_2+5}}$.

Vì $x_1, x_2 \in (5;+\infty)$ nên $\begin{cases} x_1 > 5 \\ x_2 > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x_1+5} > 2\sqrt{5} \\ \sqrt{3x_2+5} > 2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3x_1+5} + \sqrt{3x_2+5} - 3 > 0$.

Do đó $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{\sqrt{3x_1+5}+\sqrt{3x_2+5}-3}{\sqrt{3x_1+5}+\sqrt{3x_2+5}} > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(5;+\infty)$.

**d)** Tập xác định $D = (1;+\infty)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in D$ và $x_1 < x_2$. Ta có

$$f(x_1)-f(x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_1-1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2-1}} = \frac{\sqrt{x_2-1}-\sqrt{x_1-1}}{\sqrt{x_1-1}\cdot\sqrt{x_2-1}}$$

$$= -\frac{(x_1-x_2)}{\sqrt{x_1-1}\cdot\sqrt{x_2-1}(\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_1-1})}$$

Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = -\dfrac{1}{\sqrt{x_1-1}\cdot\sqrt{x_2-1}(\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_1-1})} < 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

**Câu 3.** Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

**a)** $y = \dfrac{1}{x^2}$.

**b)** $y = x^{2015} + 1$.

**c)** $y = |x+2| - |x-2|$ trên khoảng $(-2;2)$.

**Lời giải**

**a)** Tập xác định $D = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Ta có $f(x_1)-f(x_2) = \dfrac{1}{x_1^2} - \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_2^2-x_1^2}{(x_1x_2)^2}$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty;0)$ và $x_1 < x_2$ ta có $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow -(x_2+x_1) > 0$.

Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = -\dfrac{x_2+x_1}{(x_1x_2)^2} > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (0;+\infty)$ và $x_1 < x_2$ ta có $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -(x_2+x_1) < 0$.

Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = -\dfrac{x_2+x_1}{(x_1x_2)^2} < 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

**b)** Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(x_1)-f(x_2) = (x_1^{2015}+1) - (x_2^{2015}+1) = x_1^{2015} - x_2^{2015}$.

Với mọi $x_1, x_2 \in D$ và $x_1 < x_2$ ta có

$x_1^{2015} < x_2^{2015}$ suy ra $x_1^{2015} - x_2^{2015} < 0 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$ hay $f(x_1) < f(x_2)$

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**c)** Với mọi $x \in (-2;2)$ ta có $\begin{cases} x+2>0 \\ x-2<0 \end{cases}$.

Do đó $y = |x+2| - |x-2| = (x+2) + (x-2) = 2x$.

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2)$. Suy ra $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 2 > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-2;2)$.

**Câu 4.** Với giá trị nào của $m$ thì các hàm số sau đồng biến trên các khoảng xác định của nó:

**a)** $y = (m+1)x + m - 2$.

**b)** $y = \dfrac{m}{x-2}$.

**Lời giải**

**a)** Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x_1, x_2 \in D$ và $x_1 < x_2$ ta có :

$f(x_1) - f(x_2) = [(m+1)x_1 + m - 2] - [(m+1)x_2 + m - 2] = (m+1)(x_1 - x_2)$

Suy ra $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = m + 1$.

Để hàm số đồng biến trên $D = \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

**b)** Tập xác định $D = (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$.

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = \left(\dfrac{m}{x_1 - 2}\right) - \left(\dfrac{m}{x_2 - 2}\right) = \dfrac{-m(x_1 - x_2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty;2)$ và $x_1 < x_2$ ta có :

$\begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$ vaø $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{-m}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$.

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$ khi và chỉ khi $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (2;+\infty)$ và $x_1 < x_2$ ta có :

$\begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 > 0 \\ x_2 - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$ vaø $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{-m}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$.

Để hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

**Câu 5.** Với giá trị nào của $m$ thì hàm số $y = -x^2 + (m-1)x + 2$ nghịch biến trên $(1;2)$.

**Lời giải**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $y = -x^2 + (m-1)x + 2 = -\left(x - \dfrac{m-1}{2}\right)^2 + 2 + \left(\dfrac{m-1}{2}\right)^2$

Ta phân chia tập xác định $\mathbb{R}$ thành hai khoảng $\left(-\infty; \dfrac{m-1}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{m-1}{2}; +\infty\right)$.

Trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{m-1}{2}\right)$ thì hàm số đồng biến, trên khoảng $\left(\dfrac{m-1}{2};+\infty\right)$ nghịch biến.

Do đó điều kiện để hàm số nghịch biến trên $(1;2)$ là $(1;2)\subset\left(\dfrac{m-1}{2};+\infty\right)$ hay

$\dfrac{m-1}{2}\le 1\Leftrightarrow m\le 3$.

Cách 2.

Với mọi $x_1\ne x_2$, ta có

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\left[-x_1^2+(m-1)x_1+2\right]-\left[-x_2^2+(m-1)x_2+2\right]}{x_1-x_2}=-(x_1+x_2)+m-1$$

Để hàm số nghịch biến trên $(1;2)$ khi và chỉ khi $-(x_1+x_2)+m-1<0$,

$\forall x_1,x_2\in(1;2)\Leftrightarrow m\le 3$.

## DẠNG 3. TẬP GIÁ TRỊ - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $D$.

Tập hợp $T=\left\{y=f(x)\middle|x\in D\right\}$ gọi là tập giá trị của hàm số $y=f(x)$.

*Nhận dạng:* Khi hàm số chỉ xuất hiện tích các biểu thức là hằng số hoặc tổng bình phương các biểu thức là hằng số.

*Bất đẳng thức:*

+) Cho $a,\ b\ge 0$ ta luôn có $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ hay *hay* $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, đẳng thức xảy ra khi $a=b$

+) $a,\ b\in\mathbb{R}$ ta có $a^2+b^2\ge 2ab$, đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

**Câu 1.** Tìm tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$.

**Lời giải**

Điều kiện xác định: $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow -2\le x\le 2$. Tập xác định: $D=[-2;\ 2]$.

$\forall x\in D$ ta có $x^2\ge 0\Leftrightarrow 4-x^2\le 4\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}\le 2$.

Mặt khác: $\sqrt{4-x^2}\ge 0$. Nên $0\le\sqrt{4-x^2}\le 2,\ \forall x\in D$.

Vậy tập giá trị của hàm số $T=[0;\ 2]$.

**Câu 2.** Tìm tập giá trị của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

**Lời giải**

Điều kiện xác định: $x^2-4x+5>0\Leftrightarrow(x-2)^2+1>0$, đúng $\forall x\in\mathbb{R}$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\ge 1\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+1}\ge 1>0\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}\le 1$.

Mặt khác: $\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}>0$. Nên $0<\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}\le 1,\ \forall x\in D$.

Vậy tập giá trị của hàm số $T=(0;1]$.

**Câu 3.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-2\sqrt{x+2}$

**Lời giải**

TXĐ: $[-2,+\infty)$

Ta có $y=x-2\sqrt{x+2}=x+2-2\sqrt{x+2}+1-1=\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2-1\geq -1\Rightarrow y_{\min}=-1$ khi $x=-1$

**Câu 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{2}{x-1}$ với $x>1$.

**Lời giải**

Ta có $y=x+\dfrac{2}{x-1}=x-1+\dfrac{2}{x-1}+1$.

Với $x>1$ thì $x-1>0$.

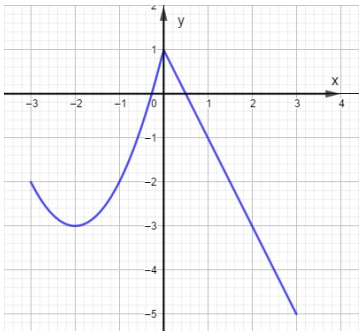
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $x-1+\dfrac{2}{x-1}\geq 2\sqrt{2}$. Suy ra $y\geq 2\sqrt{2}+1$.

$y=2\sqrt{2}+1$ khi $x-1=\dfrac{2}{x-1}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=2\Rightarrow x=1+\sqrt{2}$

## DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

**Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tính giá trị của hàm số tại $x=-1$.




***Lời giải***

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $f(-1)=-2$.

**Câu 2.** Tìm các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

***Lời giải***

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y=\dfrac{x+2}{x-1}=1+\dfrac{3}{x-1}$.

Tung độ của một điểm thuộc đồ thị hàm số là số nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{3}{x-1}\in\mathbb{Z}$. (1)

Vì hoành độ của điểm đó là số nguyên nên (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=3 \\ x-1=-3 \\ x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \\ x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Vậy các điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có tọa độ nguyên là

$$A(4;2),\ B(-2;0),\ C(2;4),\ D(0;-2).$$

**Câu 3.** Tịnh tiến đồ thị hàm số.

**a)** $y=f(x)=2x^2-3x+1$ lên trên $2$ đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số nào?

**b)** $y=g(x)=-3|x|+1$ xuống dưới $3$ đơn vị. Sau đó sang trái $4$ đơn vị thì ta thu được đồ thị hàm số nào?

**c)** $y=k(x)=\dfrac{x-4}{2x+3}$ sang phải $1$ đơn vị. Sau đó lên trên $5$ đơn vị thì ta thu được đồ thị hàm số nào?

**Lời giải**

**a)** Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)=2x^2-3x+1$ lên trên $2$ đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y=f(x)+2=2x^2-3x+3$.

**b)** Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=g(x)=-3|x|+1$ xuống dưới $3$ đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y=g(x)-3=-3|x|-2=h(x)$.

Sau đó tịnh tiến đồ thị $y=h(x)$ sang trái $4$ đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y=h(x+4)=-3|x+4|-2$.

**c)** Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=k(x)=\dfrac{x-4}{2x+3}$ sang phải $1$ đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y=k(x-1)=\dfrac{x-5}{2x+1}=l(x)$.

Sau đó lên trên $5$ đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y=l(x)+5=\dfrac{x-5}{2x+1}+5=\dfrac{11x}{2x+1}$.

**Câu 4.** Từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-3x+2$, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y=g(x)=x^2+3x+2$.

b) $y=h(x)=x^2-3|x|+2$.

c) $y=k(x)=-x^2+3x-2$.

d) $y=l(x)=|x^2-3x+2|$.

**Lời giải**

**a)** Ta có $y=g(x)=x^2+3x+2=f(-x)$.

Vậy từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-3x+2$ ta lấy đối xứng qua trục tung thì được đồ thị hàm số $y=g(x)=x^2+3x+2$.

**b)** Ta có $y=h(x)=x^2-3|x|+2=\begin{cases}f(x)=x^2-3x+2 & \text{khi } x\ge 0\\ x^2+3x+2 & \text{khi } x<0.\end{cases}$

Hơn nữa hàm số $h(x)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung.

Do đó từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-3x+2$ suy ra đồ thị hàm số $y=h(x)=x^2-3|x|+2$ như sau:

Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ bên phải trục tung.

Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số vừa giữ nguyên ở trên qua trục tung, ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y=h(x)$.

**c)** Ta có $y=k(x)=-x^2+3x-2=-(x^2-3x+2)=-f(-x)$.

Vậy từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-3x+2$ ta lấy đối xứng qua trục hoành thì được đồ thị hàm số $y=k(x)=-x^2+3x-2$.

**d)** Ta có $y=l(x)=\left|x^2-3x+2\right|=\begin{cases}f(x)=x^2-3x+2 & \text{khi } x^2-3x+2\ge 0\\ -f(x)=-\left(x^2-3x+2\right) & \text{khi } x^2-3x+2<0.\end{cases}$

Do đó từ từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-3x+2$ suy ra đồ thị hàm số $y=l(x)=\left|-x^2+3x-2\right|$ như sau:

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ phần phía trên trục hoành ta giữ nguyên.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ phần phía dưới trục hoành ta lấy đối xứng qua trục hoành.

**Câu 5.** Đồ thị hàm số

**a)** $y=-x^2-2$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=x^2-2x+3$ như thế nào.

**b)** $y=\dfrac{-7x+6}{-3x+4}$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{3x+4}$ như thế nào.

**Lời giải**

**a)** Đặt $f(x)=x^2-2x+3$. Ta có $-x^2-2=-(x+1)^2+2(x+1)-3=-f(x+1)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=-x^2-2$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=x^2-2x+3$ bằng cách tịnh tiến sang trái $1$ đơn vị, sau đó lấy đối xứng qua trục hoành.

**b)** Đặt $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+4}$. Ta có $\dfrac{-7x+6}{-3x+4}=\dfrac{7(-x)+6}{3(-x)+4}=\dfrac{(-x)-2}{3(-x)+4}+2=f(-x)+2$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{-7x+6}{-3x+4}$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{3x+4}$ bằng cách tịnh tiến lên trên $2$ đơn vị, sau đó lấy đối xứng qua trục tung.

**Câu 6.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x^2+m^2}}{x-1} & \text{khi } x<1\\ 2x & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$ với $m$ là tham số. Biết đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $3$. Hãy tính $P=f(-4)+f(1)$.

***Lời giải***

Ta có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $3$

Suy ra $f(0)=3\Leftrightarrow\sqrt{m^2}=3\Leftrightarrow m^2=9$.

Vậy $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x^2+9}}{x-1} & \text{khi } x<1\\ 2x & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$ nên ta có

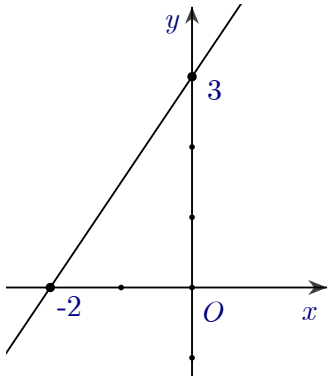
$P=f(-4)+f(1)=\dfrac{-4-\sqrt{16+9}}{-4-1}+2=\dfrac{9}{5}+2=\dfrac{19}{5}$.

**Câu 7.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}|mx-1| & khi \quad x\in(-\infty;0)\\ x^2+2x-1 & khi \quad x\in[0;+\infty)\end{cases}$. Tìm điều kiện của $m$ để đồ thị hàm số không đi qua điểm $A(-2;3)$.

***Lời giải***

Để $A$ không thuộc vào đồ thị hàm số thì $\left|-2m-1\right|\neq 3\Leftrightarrow \begin{cases}-2m-1\neq 3\\ -2m-1\neq -3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m\neq -2\\ m\neq 1\end{cases}$.

**Câu 8.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Với $M\left(x;y\right)$ là một điểm bất kì nằm trên đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$. Tìm tập hợp các điểm $I\left(2x+3;3y\right)$.




***Lời giải***

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $y=f\left(x\right)=\frac{3}{2}x+3\quad (1)$

Đặt $I\left(x_I;y_I\right)$ thì $\begin{cases}x_I=2x+3\\ y_I=3y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{x_I-3}{2}\\ y=\frac{y_I}{3}\end{cases}$

Thay vào $(1)$ ta có $\frac{y_I}{3}=\frac{3}{2}.\frac{x_I-3}{2}+3\Leftrightarrow 4y_I=9x_I+9\Leftrightarrow y_I=\frac{9}{4}x_I+\frac{9}{4}$

Vậy tập hợp điểm $I$ là đường thẳng $y=\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}$.

## DẠNG 5. XÁC ĐỊNH BIỂU THỨC CỦA HÀM SỐ

**Câu 1.** Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-4} & \text{khi } x>3\\ \sqrt[3]{x+8} & \text{khi } 0\le x\le 3\end{cases}$.

**a)** Tìm tập xác định của hàm số.

**b)** Tính các giá trị $f\left(0\right),f\left(\sqrt{2}\right),f\left(-1\right),f\left(\sqrt{5}\right),f\left(5\right)$.

**Lời giải**

**a)** Khi $x>3$ thì hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-4}$ xác định vì $x^2>9$.

Khi $0\le x\le 3$ thì hàm số $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x+8}$ xác định.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left[0;+\infty\right)$.

**b)** Ta có $0\in\left[0;3\right]$ nên $f(0)=\sqrt[3]{0+8}=2$;

$\sqrt{2}\in\left[0;3\right]$ nên $f(0)=\sqrt[3]{\sqrt{2}+8}$;

$-1\notin D$ nên $f\left(-1\right)$ không xác định;

$\sqrt{5}\in\left[0;3\right]$ nên $f(0)=\sqrt[3]{\sqrt{5}+8}$;

$5\in\left(3;+\infty\right)$ nên $f(0)=\sqrt{5^2-4}=\sqrt{21}$.

**Câu 2.** Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x+2} & \text{khi } x\geqslant 0\\ \dfrac{\sqrt[3]{2x+1}}{x-1} & \text{khi } x<0\end{cases}$.

**a)** Tìm tập xác định của hàm số.

**b)** Tính các giá trị $f(0), f(2), f(-1), f(-3)$.

**Lời giải**

**a)** Khi $x\geq 0$ thì hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$ xác định vì $x+2\geq 2>0$.

Khi $x<0$ thì hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}}{x-1}$ xác định vì $x-1\neq 0$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

**b)** Ta có $0\in[0;+\infty)$ nên $f(0)=\dfrac{2.0+1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$;

$2\in[0;+\infty)$ nên $f(2)=\dfrac{2.2+1}{2+2}=\dfrac{5}{4}$;;

$-1\in(-\infty;0)$ nên $f(-1)=\dfrac{\sqrt[3]{2.(-1)+1}}{-1-1}=\dfrac{1}{2}$;

$-3\in(-\infty;0)$ nên $f(-1)=\dfrac{\sqrt[3]{2.(-3)+1}}{-3-1}=\dfrac{\sqrt[3]{5}}{4}$;

$5\in(3;+\infty)$ nên $f(0)=\sqrt{5^2-4}=\sqrt{21}$.

**Câu 3.** Cho thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Hãy xác định hàm số $f(f(x))$ và $f(f(f(x)))$.

**Lời giải**

- $f(f(x))=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$.

- $f(f(f(x)))=\dfrac{f(f(x))}{\sqrt{1+f^2(f(x))}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+2x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$.

**Câu 4.** Cho hai hàm số $f(x)=2x-4$ và $g(x)=x^2+13$. Hãy xác định hàm số $f(g(x))$ và $g(f(x))$

**Lời giải**

$f(g(x))=2(x^2+13)-4=2x^2+22$.

$g(f(x))=(2x-4)^2+13=4x^2-16x+29$.

**Câu 5.** Xác định hàm số $f(x)$ biết

*a)* $f(x+3)=2x-1$. *b)* $f(x-1)=x^2-3x+3$.

**Lời giải**

*a)* Đặt $t=x+3\Rightarrow x=t-3$. Ta có: $f\left(x+3\right)=2x-1\Rightarrow f\left(t\right)=2\left(t-3\right)-1=2t-7\ \ \forall t\in\mathbb{R}$.

Vậy $f\left(x\right)=2x-7\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Cách 2: Ta có: $f\left(x\right)=2x-7=f\left(\left(x+3\right)-3\right)=2\left(x-3\right)-1=2x-7\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

*b)* Đặt $t=x-1\Rightarrow x=t+1$. Ta có:

$f\left(x-1\right)=x^2-3x+3\Rightarrow f\left(t\right)=\left(t+1\right)^2-3\left(t+1\right)+3=t^2-t+1\ \ \forall t\in\mathbb{R}$.

Vậy $f\left(x\right)=x^2-x+1\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Cách 2: Ta có: $f\left(x\right)==f\left(\left(x-1\right)+1\right)=\left(x+1\right)^2-3\left(x+1\right)+3=x^2-x+1\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

**Câu 6.** Xác định hàm số $f\left(x\right)$ biết

*a)* $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$. *b)* $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$.

**Lời giải**

*a)* Ta biến đổi biểu thức về dạng $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.\left(1\right)$

Từ $\left(1\right)$ suy ra $f\left(x\right)=x^2-2$ với mọi $\left|x\right|\ge2.$

Thử lại thấy $f\left(x\right)=x^2-2$ thõa yêu cầu bài toán. Vậy $f\left(x\right)=x^2-2$.

*b)* Ta biến đổi biểu thức về dạng $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right).\left(2\right)$

Từ $\left(2\right)$ suy ra $f\left(x\right)=x^3-3x$ với mọi $\left|x\right|\ge2.$

Thử lại thấy $f\left(x\right)=x^3-3x$ thõa yêu cầu bài toán. Vậy $f\left(x\right)=x^3-3x$.

**Câu 7.** Xác định hàm số $f\left(x\right)$ biết

*a)* $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x+3,\ \forall x\ne1.$ *b)* $f\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)=\frac{x+1}{x-1},\ \forall x\ne-2,\ x\ne1.$

**Lời giải**

*a)* Đặt $t=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow x=\frac{t+1}{t-1},\ \forall x\ne1.$ Thay vào $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x+3$ ta được

$f\left(t\right)=\frac{t+1}{t-1}+3=\frac{4t-2}{t-1}.$

Suy ra $f\left(x\right)=\frac{4x-2}{x-1}.$

Thử lại thấy $f\left(x\right)=\frac{4x-2}{x-1}$ thõa yêu cầu bài toán. Vậy $f\left(x\right)=\frac{4x-2}{x-1}.$

*b)* Đặt $t=\frac{3x+1}{x+2}\Rightarrow x=\frac{2t-1}{3-t},\ \forall x\ne-2.$ Thay vào $f\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)=\frac{x+1}{x-1}$ ta được

$f\left(t\right)=\frac{\frac{2t-1}{3-t}+1}{\frac{2t-1}{3-t}-1}=\frac{t+2}{3t-4}$. Suy ra $f\left(x\right)=\frac{x+2}{3x-4}.$

Thử lại thấy $f(x)=\dfrac{x+2}{3x-4}$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x)=\dfrac{x+2}{3x-4}$.

**Câu 8.** Xác định hàm số $f(x)$ biết

*a*) $2f(x)-f(-x)=x^4-12x^3+4$.. *b*) $f(x)-xf(-x)=x+1$.

*c*) $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$.

**Lời giải**

*a*) Thay $x$ bằng $-x$ ta được $2f(-x)-f(x)=(-x)^4-12(-x)^3+4=x^4+12x^3+4$.

Ta có hệ:

$$\begin{cases}2f(x)-f(-x)=x^4-12x^3+4\\-f(x)+2f(-x)=x^4+12x^3+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)-2f(-x)=2x^4-24x^3+8 & (1)\\-f(x)+2f(-x)=x^4+12x^3+4 & (2)\end{cases}.$$

Cộng $(1)$ và $(2)$ vế theo vế ta được

$3f(x)=3x^4-12x^3+12$ hay $f(x)=x^4-4x^3+4$.

Thử lại thấy $f(x)=x^4-4x^3+4$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x)=x^4-4x^3+4$.

*b*) Thay $x$ bằng $-x$ ta được $f(-x)+xf(x)=-x+1$.

Ta có hệ:

$$\begin{cases}f(x)-xf(-x)=x+1\\f(-x)+xf(x)=-x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)-xf(-x)=x+1 & (1)\\x^2f(x)+xf(-x)=-x^2+x & (2)\end{cases}.$$

Cộng $(1)$ và $(2)$ vế theo vế ta được

$(x^2+1)f(x)=-x^2+2x+1$ hay $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{x^2+1}$.

Thử lại thấy $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{x^2+1}$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{x^2+1}$.

*c*) Thay $x$ bằng $1-x$ ta được $(1-x)^2f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$.

Ta có hệ:

$$\begin{cases}x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4 & (1)\\(1-x)^2f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4 & (2)\end{cases}.$$

Phương trình $(1)\Leftrightarrow f(1-x)=2x-x^4-x^2f(x)$. Thay vào $(2)$ ta được

$(1-x)^2\left[2x-x^4-x^2f(x)\right]+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4\Leftrightarrow f(x)=1-x^2$.

Thử lại thấy $f(x)=1-x^2$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x)=1-x^2$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Để tìm tập xác định $D$ của hàm số ta tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa, tức là

$D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\in\mathbb{R}\}$.

Chú ý. Thông thường $y=f(x)$ cho bởi các biểu thức đại số, ta xét một số trường hợp sau:

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{u(v)}{v(x)}$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x),v(x)\\v(x)\neq 0\end{cases}$

Hàm số $y=f(x)=\sqrt[2k]{u(x)}\,(k\in\mathbb{Z})$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x)\\u(x)\geq 0\end{cases}$

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{u(x)}{\sqrt[2k]{v(x)}}\,(k\in\mathbb{Z})$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x),v(x)\\v(x)>0\end{cases}$

**Câu 1.** Tập xác định của hàm số $y=x^4-2018x^2-2019$ là

**A.** $(-1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số là hàm đa thức nên xác định với mọi số thực $x$.

**Câu 2.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ là:

**A.** $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện xác định: $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$

Vậy tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ là $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

**Câu 3.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x-3}{2x-2}$ là

**A.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định : $2x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$

Nên tập xác định của hàm số là : $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

**Câu 4.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+2}{(x-3)^2}$ là

**A.** $(-\infty;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x-3\neq 0\Leftrightarrow x\neq 3$.

TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

**Câu 5.** Tập xác định $D$ của hàm số $y=\dfrac{3x-1}{2x-2}$ là

**A.** $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=[1;+\infty)$. **C.** $D=(1;+\infty)$. **D.** $D=R\setminus\{1\}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số $y=\dfrac{3x-1}{2x-2}$ xác định khi $x\neq 1$. Vậy $D=R\setminus\{1\}$.

**Câu 6.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{5}{x^2-1}$ là

**A.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số đã cho xác định khi $x^2-1\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x\neq -1\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

**Câu 7.** Tập xác định của hàm số $f(x)=\dfrac{x+5}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+5}$ là

**A.** $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-5;\ 1\}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $\begin{cases}x-1\neq 0\\x+5\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x\neq -5\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\{1;-5\}$.

**Câu 8.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{3-x}{x^2-5x-6}$ là

**A.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;6\}$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1;-6\}$ **C.** $D=\{-1;6\}$ **D.** $D=\{1;-6\}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $x^2-5x-6\neq 0\Rightarrow\begin{cases}x\neq -1\\x\neq 6\end{cases}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;6\}$.

**Câu 9.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-4)}$.

**A.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$

**C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;\pm 2\}$

**Lời giải**

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1\neq 0 \\ x^2-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq \pm 2 \end{cases}$. Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;\pm 2\}$.

**Đáp án D.**

***Lưu ý:*** Nếu rút gọn $y=\dfrac{1}{x^2-4}$ rồi khẳng định $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$ là sai. Vì với $x=-1$ thì biểu thức ban đầu $\dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-4)}$ không xác định.

**Câu 10.** Tập xác định $D$ của hàm số $y=\sqrt{3x-1}$ là

**A.** $D=(0;+\infty)$. **B.** $D=[0;+\infty)$. **C.** $D=\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **D.** $D=\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số $y=\sqrt{3x-1}$ xác định $\Leftrightarrow 3x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{3}$.

Vậy: $D=\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

**Câu 11.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{8-2x}-x$ là

**A.** $(-\infty;4]$. **B.** $[4;+\infty)$. **C.** $[0;4]$. **D.** $[0;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định của hàm số là $8-2x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 4$, nên tập xác định là $(-\infty;4]$.

**Câu 12.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}$ là

**A.** $D=(2;4)$ **B.** $D=[2;4]$

**C.** $D=\{2;4\}$ **D.** $D=(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $\begin{cases} 4-x\geq 0 \\ x-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 4 \\ x\geq 2 \end{cases}$ suy ra TXĐ: $D=[2;4]$.

**Câu 13.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1+2x}+\sqrt{6+x}$ là:

**A.** $\left[-6;-\dfrac{1}{2}\right]$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $[-6;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 1+2x\geq 0 \\ 6+x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{1}{2} \\ x\geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

**Câu 14.** Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}$.

**A.** $[-1;+\infty)$. **B.** $[-2;+\infty)$. **C.** $[-3;+\infty)$. **D.** $[0;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\begin{cases} x+1\ge 0 \\ x+2\ge 0 \\ x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x\ge -2 \\ x\ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -1$

**Câu 15.** Tập xác định $D$ của hàm số $y=\sqrt{x+2}+4\sqrt{3-x}$ là

**A.** $D=(-2;3)$. **B.** $D=[-3;+\infty)$. **C.** $D=(-\infty;3]$. **D.** $D=[-2;3]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Để hàm số $y=\sqrt{x+2}+4\sqrt{3-x}$ xác định thì $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ 3-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x\le 3 \end{cases} \Rightarrow x\in[-2;3]$.

**Câu 16.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2x-3}-3\sqrt{2-x}$ là

**A.** $\varnothing$. **B.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $\left[\frac{3}{2};2\right]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện $\begin{cases} 2x-3\ge 0 \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{3}{2} \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[\frac{3}{2};2\right]$.

**Câu 17.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2x^2-7x+3}-3\sqrt{-2x^2+9x-4}$ là

**A.** $\left[\frac{1}{2};4\right]$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $[3;4]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $[3;4]$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x^2-7x+3\ge 0 \\ -2x^2+9x-4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{1}{2}\vee x\ge 3 \\ \frac{1}{2}\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\le x\le 4 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D=[3;4]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

**Câu 18.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\frac{6x}{\sqrt{4-3x}}$

**A.** $D=\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$. **B.** $D=\left[\frac{3}{2};\frac{4}{3}\right)$. **C.** $D=\left[\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right)$. **D.** $D=\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định: $4-3x>0 \Leftrightarrow x<\frac{4}{3}$.

**Câu 19.** Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{2x-5}}+\sqrt{9-x}$ là

**A.** $D=\left(\frac{5}{2};9\right]$. **B.** $D=\left(\frac{5}{2};9\right)$. **C.** $D=\left[\frac{5}{2};9\right)$. **D.** $D=\left[\frac{5}{2};9\right]$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định: $\begin{cases}9-x\ge 0\\2x-5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 9\\x>\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5}{2}<x\le 9.$

Tập xác định: $D=\left(\frac{5}{2};9\right]$.

**Câu 20.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\frac{x+1}{(x-3)\sqrt{2x-1}}$.

**A.** $D=\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{3\}$. **B.** $D=\mathbb{R}$. **C.** $D=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{3\}$. **D.** $D=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{3\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x-3\ne 0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 3\\x>\frac{1}{2}\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là: $D=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{3\}$.

**Câu 21.** Hàm số nào sau đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

**A.** $y=\frac{2\sqrt{x}}{x^2+4}$. **B.** $y=x^2-\sqrt{x^2+1}-3$.

**C.** $y=\frac{3x}{x^2-4}$. **D.** $y=x^2-2\sqrt{x-1}-3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$y=\frac{2\sqrt{x}}{x^2+4}$ có tập xác định là $(0;+\infty)$.

$y=\frac{3x}{x^2-4}$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

$y=x^2-2\sqrt{x-1}-3$ có tập xác định là $[1;+\infty)$.

**Câu 22.** Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x-1}-\frac{3x-1}{(x^2-4)\sqrt{5-x}}$.

**A.** $[1;5]\setminus\{2\}$. **B.** $(-\infty;5]$. **C.** $[1;5)\setminus\{2\}$. **D.** $[1;+\infty)\setminus\{2;5\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện xác định $\begin{cases}x-1\ge 0\\(x^2-4)\sqrt{5-x}\ne 0\\5-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in[1;5)\setminus\{2\}$.

**Câu 23.** Tập xác định $D$ của hàm số $y=\frac{3x+4}{(x-2)\sqrt{x+4}}$ là

**A.** $D=(-4;+\infty)\setminus\{2\}$. **B.** $D=[-4;+\infty)\setminus\{2\}$.

**C.** $D=\varnothing$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số $y=\dfrac{3x+4}{(x-2)\sqrt{x+4}}$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}x-2\neq 0\\ x+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x>-4\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-4;+\infty)\setminus\{2\}$.

**Câu 24.** Tập xác định $D$ của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}}{(x+1)\sqrt{3-2x}}$ là

**A.** $D=\left[-4;\dfrac{3}{2}\right]$. **B.** $D=\left[-4;\dfrac{3}{2}\right)$.

**C.** $D=\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$. **D.** $D=[-4;-1)\cup\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}}{(x+1)\sqrt{3-2x}}$ xác định thì: $\begin{cases}x+4\geq 0\\ x+1\neq 0\\ 3-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -4\\ x\neq -1\\ x<\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow x\in[-4;-1)\cup\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

**Câu 25.** Tập xác định của hàm số $f(x)=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ là

**A.** $D=(1;\ 3]$. **B.** $D=(-\infty;1)\cup[3;+\infty)$.

**C.** $D=[1;3]$. **D.** $D=\varnothing$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số xác định khi $\begin{cases}3-x\geq 0\\ x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 3\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x\leq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(1;\ 3]$.

**Câu 26.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\sqrt{6-x}+\dfrac{4}{5x-10}$.

**A.** $D=(-\infty;6]\setminus\{2\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $D=[6;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;6]$.

**Lời giải**

**Chọn A**

ĐKXĐ: $\begin{cases}6-x\geq 0\\ 5x-10\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 6\\ x\neq 2\end{cases}$. Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;6]\setminus\{2\}$.

**Câu 27.** Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-3}$. Tập nào sau đây là tập xác định của hàm số $f(x)$?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $[1;3)\cup(3;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)\setminus\{3\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập xác định là $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x\ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1\le x\ne 3$.

**Câu 28.** Tập xác định của hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases} \sqrt{-3x+8}+x & \text{khi} \quad x<2 \\ \sqrt{x+7}+1 & \text{khi} \quad x\ge 2 \end{cases}$ là

**A.** $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$. **C.** $\left(-\infty;\frac{8}{3}\right]$. **D.** $\left[-7;+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 29.** Tập xác định $D$ của hàm số $y=\left(2x-1\right)\sqrt{3-2x}+\frac{1}{2x-2}$ là

**A.** $D=\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$. **B.** $D=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]\setminus\left\{1\right\}$. **C.** $D=\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]\setminus\left\{1\right\}$. **D.** $D=\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện xác định của hàm số trên là $\begin{cases} 3-2x\ge 0 \\ 2x-2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{3}{2} \\ x\ne 1 \end{cases}$.

Vậy tập xác định: $D=\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]\setminus\left\{1\right\}$.

**Câu 30.** Tập xác định của hàm số $y=\frac{3}{\sqrt{x+2}-1}$ là

**A.** $D=\left[-2;+\infty\right)\setminus\left\{-1\right\}$. **B.** $D=R\setminus\left\{-1\right\}$.

**C.** $D=\left[-2;+\infty\right)$. **D.** $D=\left(1;+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ \sqrt{x+2}\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x\ne -1 \end{cases}$.

**Câu 31.** Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$.

**A.** $D=\left(-5;0\right]\cup\left[2;5\right)$.

**B.** $D=\left(-\infty;0\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

**C.** $D=\left(-5;5\right)$.

**D.** $D=\left[-5;0\right]\cup\left[2;5\right]$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x\ge 0 \\ 25-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0\vee x\ge 2 \\ -5<x<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x\le 0 \\ 2\le x<5 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D=\left(-5;0\right]\cup\left[2;5\right)$.

**Câu 32.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\left(x^2-5x+6\right)\sqrt{4-x}}$ là

**A.** $[-1;4)\setminus\{2;3\}$. **B.** $[-1;4)$. **C.** $(-1;4]\setminus\{2;3\}$. **D.** $(-1;4)\setminus\{2;3\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

ĐK: $\begin{cases}x+1\ge 0\\ x^2-5x+6\ne 0\\ 4-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x\ne 2\\ x\ne 3\\ x<4\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-1;4)\setminus\{2;3\}$.

Vậy TXĐ: $D=[-1;4)\setminus\{2;3\}$.

**Câu 33.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$ là:

**A.** $D=[0;+\infty)$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ **D.** $D=(0;+\infty)$

**Lời giải**

Điều kiện xác định $\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-3x+2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x\ne 1\\ x\ne 2\end{cases}$.

Vậy $D=\mathbb{R}_+\setminus\{1;2\}$.

**Đáp án C.**

**Câu 34.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số:

$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x-2} \text{ khi } x\le 0\\ \sqrt{1-x} \text{ khi } x>0\end{cases}$.

**A.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ **B.** $D=[1;+\infty)\setminus\{2\}$

**C.** $D=(-\infty;1]$ **D.** $D=[1;+\infty)$

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Với $x\le 0$ thì $x-2\ne 0$ nên hàm số xác định với mọi $x\le 0$.

Với $x>0$: Hàm số xác định khi $1-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 1$.

Vậy $D=(-\infty;0]\cup(0;1]=(-\infty;1]$.

**Câu 35.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{x^3}{4|x|-3}$

**A.** $D=[-2;+\infty)$. **B.** $D=[-2;+\infty)\setminus\left\{-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right\}$.

**C.** $D=\left\{-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right\}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện xác dịnh của hàm số $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ 4|x|-3\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x\ne -\dfrac{3}{4} \\ x\ne \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow D=[-2;+\infty)\setminus\left\{-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right\}$.

**Câu 36.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x-2}+6x}{\sqrt{4-3x}}$.

**A.** $D=\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$. **B.** $D=\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $D=\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4}\right)$. **D.** $D=\left(-\infty;\dfrac{4}{3}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 3x-2\ge 0 \\ 4-3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{2}{3} \\ x<\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}\le x<\dfrac{4}{3}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

**Câu 37.** Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x}{|x|x+1}-\sqrt{3-x}$ là

**A.** $(-\infty;3]\setminus\{-1\}$. **B.** $(-\infty;3)\setminus\{-1\}$. **C.** $(-\infty;3]$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $\begin{cases} 3-x\ge 0 \\ x|x|+1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x\ne -1 \end{cases}$.

**Câu 38.** Giả sử $D=(a;b)$ là tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$. Tính $S=a^2+b^2$.

**A.** $S=7$. **B.** $S=5$. **C.** $S=4$. **D.** $S=3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số xác định khi $-x^2+3x-2>0 \Leftrightarrow 1<x<2$

TXĐ: $D=(1;2)$ nên $a=1;\ b=2 \Rightarrow S=a^2+b^2=5$

**Câu 39.** Hàm số $y=\dfrac{x^2-7x+8}{x^2-3x+1}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{a;b\};a\ne b.$ Tính giá trị biểu thức $Q=a^3+b^3-4ab.$

**A.** $Q=11$. **B.** $Q=14$. **C.** $Q=-14$. **D.** $Q=10$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số $y=\dfrac{x^2-7x+8}{x^2-3x+1}$ xác định khi: $x^2-3x+1\ne 0$.

Gọi $a,b$ là 2 nghiệm của phương trình $x^2-3x+1=0$.

Theo Vi-et có $\begin{cases} a+b=3 \\ a.b=1 \end{cases}$.

Có $Q=a^3+b^3-4ab=(a+b)^3-3ab(a+b)-4ab=27-3.3-4=14$

Vậy $Q=14$.

**Câu 40.** Với giá trị nào của $m$ thì hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x^2-2x-3-m}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

**A.** $m\le -4$. **B.** $m<-4$. **C.** $m>0$. **D.** $m<4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x^2-2x-3-m}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi phương trình $x^2-2x-3-m=0$ vô nghiệm

Hay $\Delta'=m+4<0\Leftrightarrow m<-4$.

**Câu 41.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{3x+5}{x-1}-4}$ là $(a;b]$ với $a,b$ là các số thực. Tính tổng $a+b$.

**A.** $a+b=-8$. **B.** $a+b=-10$. **C.** $a+b=8$. **D.** $a+b=10$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y=\sqrt{\dfrac{3x+5}{x-1}-4}=\sqrt{\dfrac{3x+5-4(x-1)}{x-1}}=\sqrt{\dfrac{-x+9}{x-1}}$.

Điều kiện xác định của hàm số:

$$\begin{cases} x-1\neq 0 \\ \dfrac{-x+9}{x-1}\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow \frac{-x+9}{x-1}\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x+9\ge 0 \\ x-1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x+9\le 0 \\ x-1<0 \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 9 \\ x>1 \end{cases}\ (TM) \\ \begin{cases} x\ge 9 \\ x<1 \end{cases}\ (L) \end{array}\right.\Leftrightarrow 1<x\le 9.$$

TXĐ: $D=(1;9]$.

Vậy $a=1,b=9\Rightarrow a+b=10.$

**Câu 42.** Tập tất cả các giá trị $m$ để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}+\sqrt{x-m}$ có tập xác định khác tập rỗng là

**A.** $(-\infty;3)$. **B.** $(-3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;1]$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} -x^2-2x+3>0 \\ x-m\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<1 \\ x\ge m \end{cases}$

Để hàm số có tập xác định khác tập rỗng thì $m<1$

**Câu 43.** Biết hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là đoạn $[-1;0]$. Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=f(-x^2)$.

**A.** $D=[-1;0]$

**B.** $D=[0;1]$

**C.** $D=[-1;1]$

**D.** $D=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Điều kiện xác định của hàm số $y=f\left(-x^2\right)$ là: $-1\le -x^2\le 0$

$\Leftrightarrow 0\le x^2\le 1\Leftrightarrow -1\le x\le 1$

Vậy $D=[-1;1]$.

**Câu 44.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=f(x)=\sqrt{x^2-3mx+4}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

**A.** $|m|<\frac{4}{3}$. **B.** $|m|\le\frac{4}{3}$. **C.** $|m|>\frac{4}{3}$. **D.** $|m|\ge\frac{4}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x^2-3mx+4\ge 0$.

YCBT $\Leftrightarrow$ $x^2-3mx+4\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\frac{-\Delta}{4a}\ge 0\Leftrightarrow\frac{-9m^2+16}{4}\ge 0\Leftrightarrow m^2\le\left(\frac{4}{3}\right)^2$.

**Câu 45.** Tìm m để hàm số $y=(x-2)\sqrt{3x-m-1}$ xác định trên tập $(1;+\infty)$?

**A.** $m<2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m>2$. **D.** $m\ge 2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

ĐK: $x\ge\frac{m+1}{3}\Rightarrow D=\left[\frac{m+1}{3};+\infty\right)$.

Để hàm số xác định trên $(1;+\infty)$ thì $(1;+\infty)\subset\left[\frac{m+1}{3};+\infty\right)\Leftrightarrow\frac{m+1}{3}\le 1\Leftrightarrow m+1\le 3\Rightarrow m\le 2$.

**Câu 46.** Tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m}+\frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$ là

**A.** $m\in[-3;0]\cup[0;1]$. **B.** $m\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

**C.** $m\in[-3;0]$. **D.** $m\in[-4;0]\cup\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện xác định của hàm số là: $\begin{cases}x-2m+3\ge 0\\ x-m\ne 0\\ -x+m+5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2m-3\\ x\ne m\\ x<m+5\end{cases}$.

TH1. $2m-3\ge m+5\Leftrightarrow m\ge 8\Rightarrow$ tập xác định của hàm số là: $D=\varnothing\Rightarrow m\ge 8$ loại.

TH2. $2m-3<m+5\Leftrightarrow m<8\Rightarrow$ TXĐ của hàm số là: $D=[2m-3;m+5)\setminus\{m\}$.

Để hàm số xác định trên khoảng $(0;1)$ thì $(0;1)\subset D$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m-3\le 0 \\ m+5\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \dfrac{3}{2} \\ m\ge -4 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -4\le m\le 0 \\ 1\le m\le \dfrac{3}{2} \end{array}\right. .$$

Suy ra $m\in[-4;0]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

**Câu 47.** Gọi tập xác định của các hàm số $f(x)=\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}; g(x)=\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$ lần lượt là $D_1; D_2$. Hãy tìm $D_1\cap D_2$, $D_1\cup D_2$.

**A.** $D_1\cap D_2=(-4;5]$, $D_1\cup D_2=[-5;+\infty)$.

**B.** $D_1\cap D_2=(-4;5)$, $D_1\cup D_2=[-5;+\infty)$.

**C.** $D_1\cap D_2=(-4;5]$, $D_1\cup D_2=(-5;+\infty)$.

**D.** $D_1\cap D_2=[-4;5]$, $D_1\cup D_2=[-5;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

+/ Điều kiện xác định của hàm số $f(x)=\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}$ là $\begin{cases} 5+x\ge 0 \\ 5-x\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow -5\le x\le 5$

Suy ra tập xác định của $f(x)=\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}$ là $D_1=[-5;5]$

+/ Điều kiện xác định của hàm số $g(x)=\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$ là $x+4>0\Leftrightarrow x>-4$

Suy ra tập xác định của $g(x)=\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$ là $D_2=(-4;+\infty)$

Vậy $D_1\cap D_2=(-4;5]; D_1\cup D_2=[-5;+\infty)$

**Câu 48.** Tìm $m$ để hàm số $y=\dfrac{x\sqrt{2}+1}{x^2+2x-m+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $m\ge 1$. **B.** $m<0$. **C.** $m>2$. **D.** $m\le 3$

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi $x^2+2x-m+1\ne 0, \forall x\Leftrightarrow \Delta=1+m-1<0\Leftrightarrow m<0$.

**Câu 49.** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2(m+1)x+m^2+2m}$. Tập các giá trị của $m$ để hàm số xác định trên $[0;1)$ là $T=(-\infty;a)\cup[b;c)\cup[d;+\infty)$. Tính $P=a+b+c+d$.

**A.** $P=-2$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số xác định khi $x^2-2(m+1)x+m^2+2m\ne 0\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne m \\ x\ne m+2 \end{cases}$.

Do đó tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{m+2;m\}$.

Vậy để hàm số xác định trên $[0;1)$ điều kiện là:

$m;m+2\notin[0;1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+2<0\\m\geq 1\\m<0<1\leq m+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-2\\m\geq 1\\-1\leq m<0\end{array}\right.$.

**Câu 50.** Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1;2)$.

**A.** $\begin{cases}m\leq -1\\m\geq 2\end{cases}$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m\leq -1\\m\geq 2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.$. **D.** $-1<m<2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số xác định khi $x-m\neq 0\Leftrightarrow x\neq m$.

Do đó hàm số xác định trên $(-1;2)\Leftrightarrow m\notin(-1;2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq -1\\m\geq 2\end{array}\right.$.

**Câu 51.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=\sqrt{x-m+1}+\sqrt{2x-m}$ xác định với $\forall x>0$.

**A.** $m\geq 1$. **B.** $m\leq 0$. **C.** $m>0$. **D.** $m<1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện $\begin{cases}x-m+1\geq 0\\2x-m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq m-1\\x\geq\dfrac{m}{2}\end{cases}$.

Hàm số xác định với $\forall x>0\Leftrightarrow\begin{cases}m-1\leq 0\\\dfrac{m}{2}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\leq 0$.

**Câu 52.** Tập hợp tất cả giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\sqrt{x-2m+1}$ xác định với mọi $x\in[1;3]$ là:

**A.** $\{2\}$. **B.** $\{1\}$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $(-\infty;1]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số xác định khi $x-2m+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2m-1$.

Hàm số xác định với mọi $x\in[1;3]$ thì $2m-1\leq 1\Leftrightarrow m\leq 1$.

**Câu 53.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{5-x^2-2\sqrt{4-x^2}}$ có dạng $[a;b]$. Tính $a+b$.

**A.** $3$. **B.** $-1$. **C.** $0$. **D.** $-3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $y=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{4-x^2}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{4-x^2}-1\right|$.

Do đó hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\geq 0\\4-x^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\-2\leq x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow 1\leq x\leq 2\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$.

Do đó $a+b=3$. Chọn A

**Câu 54.** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\sqrt{x-m+2}+\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$ có tập xác định $D=[0;5)$.

**A.** $m\ge 0$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $m\le -2$. **D.** $m=2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện xác định của hàm số đã cho là $\begin{cases}x-m+2\ge 0\\5-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge m-2\\x<5\end{cases}$

Hàm số có tập xác định $D=[0;5)\Leftrightarrow m-2=0\Leftrightarrow m=2.$

**Câu 55.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{m+1}}{3x^2-2x+m}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

**A.** $-1\le m\le\dfrac{1}{3}$. **B.** $m\ge -1$. **C.** $m>\dfrac{1}{3}$. **D.** $m\ge\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{m+1}}{3x^2-2x+m}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\ge 0\\3x^2-2x+m\ne 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -1\\\Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -1\\1-3m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -1\\m>\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{3}.$

**Câu 56.** Tìm điều kiện của $m$ để hàm số $y=\sqrt{x^2-x+m}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$

**A.** $m\ge\dfrac{1}{4}$. **B.** $m>\dfrac{1}{4}$. **C.** $m>-\dfrac{1}{4}$. **D.** $m\le\dfrac{1}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số $y=\sqrt{x^2-x+m}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow x^2-x+m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\left(\text{Đ do } a=1\right)\\\Delta\le 0,\Delta=1-4m\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{4}.$

Vậy $m\ge\dfrac{1}{4}$ thỏa yêu cầu bài.

**Câu 57.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+9}{x-2m-1}$ xác định trên đoạn $[3;5]$.

**A.** $m\le 1$ hoặc $m\ge 2$. **B.** $m>3$ hoặc $m<0$.

**C.** $m>4$ hoặc $m<1$. **D.** $m>2$ hoặc $m<1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện xác định của hàm số là $x-2m-1\ne 0\Leftrightarrow x\ne 2m+1$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2m+1\notin[3;5]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m+1<3\\2m+1>5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<1\\m>2\end{array}\right.$.

**Câu 58.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $x$ thuộc tập xác định của hàm số $y=\dfrac{2+x}{x\sqrt{3-x}}+\sqrt{2x+1}$?

**A.** 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn C.**

Tập xác định: $\begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ 3-x>0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ x<3 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\le x<3 \\ x\ne 0 \end{cases}$.

Do $x$ nguyên nên $x\in\{1;2\}$.

**Câu 59.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-3}{\sqrt{|x-2|-1}}$ có tập xác định là $D_1$ và hàm số $g(x)=\dfrac{2x-\sqrt{m-2x}}{|x|+5}$ có tập xác định là $D_2$. Tìm điều kiện của tham số $m$ để $D_2\subset D_1$.

**A.** $m<2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m>2$. **D.** $m\ge 2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét $f(x)=\dfrac{2x-3}{\sqrt{|x-2|-1}}$

ĐKXĐ: $|x-2|-1>0\Leftrightarrow |x-2|>1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2>1 \\ x-2<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<1 \end{array}\right. \Rightarrow D_1=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

Xét $g(x)=\dfrac{2x-\sqrt{m-2x}}{|x|+5}$

Ta thấy $|x|+5>0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

ĐKXĐ: $m-2x\ge 0\Leftrightarrow x\le\dfrac{m}{2}\Rightarrow D_2=\left(-\infty;\dfrac{m}{2}\right]$

Để $D_2\subset D_1$ thì $\dfrac{m}{2}<1\Leftrightarrow m<2$.

Vậy với $m<2$ thì $D_2\subset D_1$.

**Câu 60.** Tìm $m$ để hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)}+\dfrac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

**A.** $m\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. **B.** $m\in[-3;0]$.

**C.** $m\in[-3;0]\cup[0;1]$. **D.** $m\in[-4;0]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

*Gọi $D$ là tập xác định của hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)}+\dfrac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$.

* $x\in$ D $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2m+3\ge 0 \\ x-m\ne 0 \\ -x+m+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2m-3 \\ x\ne m \\ x<m+5 \end{cases}$.

*Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m}+\dfrac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$

$$\Leftrightarrow (0;1)\subset D \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3\le 0 \\ m+5\ge 1 \\ m\notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \dfrac{3}{2} \\ m\ge -4 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\in [-4;0]\cup \left[1;\dfrac{3}{2}\right].$$

**Câu 61.** Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x+2m-1}+\sqrt{4-2m-\dfrac{x}{2}}$ xác định với mọi $x\in[0;2]$ khi $m\in[a;b]$. Giá trị của tổng $a+b$ bằng

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số $f(x)=\sqrt{x+2m-1}+\sqrt{4-2m-\dfrac{x}{2}}$ xác định khi: $\begin{cases} x\ge 1-2m \\ x\le 8-4m \end{cases}$

Hàm số xác định trên [0; 2] nên $1-2m\le 0\le 2\le 8-4m \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le m\le \dfrac{3}{2} \Rightarrow m\in\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right] \Rightarrow a+b=2$

**Câu 62.** Tìm $m$ để hàm số $y=\sqrt{-2x+3m+2}+\dfrac{x+1}{2x+4m-8}$ xác định trên khoảng $(-\infty;-2)$.

**A.** $m\in[-2;4]$. **B.** $m\in[-2;3)$. **C.** $m\in(-2;3]$. **D.** $m\in[-2;3]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tập xác định của hàm số là tập hợp các giá trị của $x$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} -2x+3m+2\ge 0 \\ 2x+4m-8\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{3m+2}{2} \\ x\ne 4-2m \end{cases}.$$

Để hàm số xác định trên khoảng $(-\infty;-2)$ cần có: $\begin{cases} \dfrac{3m+2}{2}\ge -2 \\ 4-2m\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -2 \\ m\le 3 \end{cases} \Rightarrow m\in[-2;3]$.

**Câu 63.** Tập xác định của hàm số nào dưới đây chứa nhiều số nguyên dương nhất?

**A.** $y=\sqrt{3-x}$ **B.** $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{x+2}}$

**C.** $y=\sqrt{4-9x^2}$ **D.** $y=\sqrt{\dfrac{1}{27-x^3}}$

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Với A: Điều kiện xác định:

$3-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 3$.

Vậy $D=(-\infty;3]$, chứa 3 số nguyên dương là $1;2;3$.

Với B: Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+2\ne 0 \\ \dfrac{2-x}{x+2}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x\le 2$.

Vậy $D=(-2;2]$, chứa 2 số nguyên dương là 1; 2.

Với C: Điều kiện xác định:

$4-9x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \le \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} \le x \le \frac{2}{3}$.

Vậy $D=\left[\frac{-2}{3};\frac{2}{3}\right]$ không chứa số nguyên dương nào.

Với D: Điều kiện xác định:

$\begin{cases} 27-x^3 \ne 0 \\ \frac{1}{27-x^3} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 27-x^3>0$

$\Leftrightarrow x^3<27 \Leftrightarrow x<3$

Vậy $D=(-\infty;3)$, chứa 2 số nguyên dương là 1; 2.

**Câu 64.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để tập xác định của hàm số $y=\frac{2}{x-2m}+\sqrt{7m+1-2x}$ chứa đoạn $[-1;1]$?

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi:

$\begin{cases} x-2m \ne 0 \\ 7m+1-2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 2m \\ x \le \frac{7m+1}{2} \end{cases}$.

Để tập xác định của hàm số chứa đoạn $[-1;1]$ thì ta phải có

$\begin{cases} \frac{7m+1}{2} \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} 2m>1 \\ 2m<-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1/7 \\ \left[\begin{array}{l} m>1/2 \\ m<-1/2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$.

Vậy không có giá trị nguyên âm nào của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 65.** Cho hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{m-2x}$ với $m \ge -2$. Có bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để tập xác định của hàm số có độ dài bằng 1?

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Điều kiện xác định của hàm số:

$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ m-2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x \le \frac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le \frac{m}{2}$

(do $m \ge -2$ nên $\frac{m}{2} \ge -1$).

Vậy $D=\left[-1;\frac{m}{2}\right]$. Độ dài của $D$ bằng 1 khi và chỉ khi $\frac{m}{2}-(-1)=1 \Leftrightarrow m=0$.

Vậy có 1 giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

## DẠNG 2. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Để xét sự biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên từng khoảng xác định $(a;b)$ ta làm như sau:

Giả sử $\forall x_1,x_2\in K: x_1<x_2$

Tính $f(x_1)-f(x_2)$

Lập tỉ số $T=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Nếu $T>0$ thù hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$

Nếu $T<0$ thù hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$

**Câu 1.** Chọn khẳng định đúng?

**A.** Hàm số $y=f(x)$ được gọi là nghịch biến trên $K$ nếu $\forall x_1;x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

**B.** Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên $K$ nếu $\forall x_1;x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$.

**C.** Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên $K$ nếu $\forall x_1;x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

**D.** Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên $K$ nếu $\forall x_1;x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Lí thuyết định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến

**Câu 2.** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $y=1-2x$ **B.** $y=3x+2$ **C.** $y=x^2+2x-1$ **D.** $y=-2(2x-3)$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

$y=3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì có hệ số góc $a=3>0$.

**Câu 3.** Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $y=x$. **B.** $y=-2x$. **C.** $y=2x$. **D.** $y=\dfrac{1}{2}x$

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số $y=ax+b$ với $a\neq 0$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a<0$.

**Câu 4.** Xét sự biến thiên của hàm số $f(x)=\dfrac{3}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**B.** Hàm số vừa đồng biến, vừa nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**D.** Hàm số không đồng biến, không nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\forall x_1,x_2\in(0;+\infty): x_1\neq x_2$

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{3}{x_2}-\frac{3}{x_1}=\frac{-3(x_2-x_1)}{x_2x_1}\Rightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=-\frac{3}{x_2x_1}<0$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**Câu 5.** Hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng

**A.** $(-\infty;2)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

□ Lấy $x_1;x_2\in(-\infty;1)$ sao cho $x_1<x_2$.

Xét $y_1-y_2=\dfrac{2x_1+1}{x_1-1}-\dfrac{2x_2+1}{x_2-1}=\dfrac{2x_1x_2-2x_1+x_2-1-2x_2x_1+2x_2-x_1+1}{(x_1-1)(x_2-1)}=\dfrac{3(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$

Với $x_1;x_2\in(-\infty;1)$ và $x_1<x_2$, ta có $x_2-x_1>0$; $x_1-1<0$; $x_2-1<0\Rightarrow y_1-y_2>0\Leftrightarrow y_1>y_2$

Do đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$

□ Lấy $x_1;x_2\in(1;+\infty)$ sao cho $x_1<x_2$.

Xét $y_1-y_2=\dfrac{2x_1+1}{x_1-1}-\dfrac{2x_2+1}{x_2-1}=\dfrac{2x_1x_2-2x_1+x_2-1-2x_2x_1+2x_2-x_1+1}{(x_1-1)(x_2-1)}=\dfrac{3(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$

Với $x_1;x_2\in(1;+\infty)$ và $x_1<x_2$, ta có $x_2-x_1>0$; $x_1-1>0$; $x_2-1>0\Rightarrow y_1-y_2>0\Leftrightarrow y_1>y_2$

Do đó hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

**Câu 6.** Hàm số $y=f(x)=x^4-2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

**A.** $(-1;0)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $(1;+\infty)$

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

**Cách 1:** $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R},x_1\neq x_2$ ta có

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2^4-x_1^4)-2(x_2^2-x_1^2)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2^2-x_1^2)(x_2^2+x_1^2)-2(x_2^2-x_1^2)}{x_2-x_1}$$

$=(x_2+x_1)(x_2^2+x_1^2-2)$.

Ta thấy với $x_1,x_2\in(0;1)$ thì $x_1+x_2>0$ và $0<x_1^2,x_2^2<1$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2<2\Rightarrow x_1^2+x_2^2-2<0$, do đó $(x_2+x_1)(x_2^2+x_1^2-2)<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

**Câu 7.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-1;1)$?

**A.** $y=\sqrt{1-x^2}$ **B.** $y=x^2$

**C.** $y=\dfrac{x+1}{x}$ **D.** $y=-x^3+3x$

**Lời giải**

**Đáp án D.**

* Xét hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$:

Tập xác định $D=[-1;1]$;

$\forall x_1,x_2\in(-1;1),x_1\neq x_2$:

$$\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\sqrt{1-x_2^2}-\sqrt{1-x_1^2}}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_2-x_1)\left(\sqrt{1-x_2^2}+\sqrt{1-x_1^2}\right)}$$

$$=\frac{-(x_1+x_2)}{\sqrt{1-x_2^2}+\sqrt{1-x_1^2}}$$

Do đó với $x_1,x_2<0$ ta có

$\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}>0$;

với $x_1,x_2>0$ ta có $\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}<0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;1)$, tức là hàm số không đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

* Xét hàm số $y=x^2$:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$;

$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R},x_1\neq x_2$:

$$\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}=x_2+x_1.$$

Do đó với $x_1,x_2<0$ ta có

$\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}<0$;

với $x_1,x_2>0$ ta có $\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}>0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$, tức là hàm số không đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

* Xét hàm số $y=\frac{x+1}{x}$:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\},x_1\neq x_2$:

$$y(x_2)-y(x_1)=\frac{x_2+1}{x_2}-\frac{x_1+1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$$

$$\Rightarrow\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-1}{x_1x_2}.$$

Do đó với $x_1,x_2<0$ và với $x_1,x_2>0$

ta đều có $\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ $(0;+\infty)$, tức là hàm số không đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

* Do đó đáp án đúng là **D.** Thật vậy xét hàm số $y=-x^3+3x$ ta có

Tập xác định $D=\mathbb{R}$;

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$:

$$\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_1^3-x_2^3+3(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$=3-\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)$$

Với $|x_1|<1, |x_2|<1$ ta có

$x_1^2<1, x_2^2<1, |x_1x_2|<1 \Rightarrow x_1x_2<1$,

do đó $x_1^2+x_1x_2+x_2^2<3$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

**Cách 2:** Sử dụng chức năng TABLE của máy tính cầm tay như đã giới thiệu trong Bài tập 17 ở phần B - Các dạng bài tập điển hình. Độc giả hãy tự thực hiện để kiểm chứng kết quả như trong cách 1 đã nêu ở trên.

**Câu 8.** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

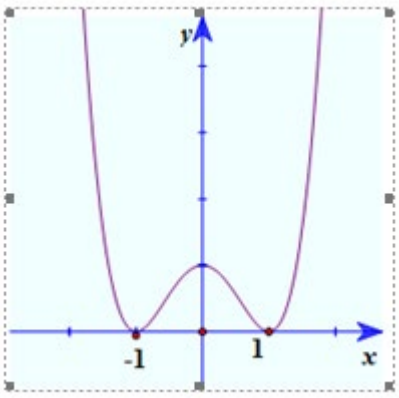
**A.** $(-\infty;0)$ **B.** $(1;+\infty)$ **C.** $(-2;2)$ **D.** $(0;1)$

**Lời giải**

Ta thấy trong khoảng $(0;1)$, mũi tên có chiều đi xuống. Do đó hàm số nghịch biến trong khoảng $(0;1)$.

**Đáp án D.**

**Câu 9.** Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ.




Chọn đáp án sai.

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

**D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

**Lời giải**

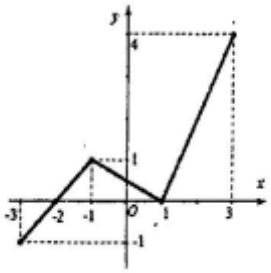
**Chọn C**

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

Hàm số nghịch biến trong các khoảng: $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Hàm số đồng biến trong các khoảng: $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

**Câu 10.** Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $[-3;3]$ và có đồ thị được biểu diễn bởi hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?




**A.** Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

**B.** Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$ và $(1;3)$.

**C.** Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(0;1)$.

**D.** Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $(C):y=f(x),(C')y=f(x)+2018$. Khi tịnh tiến đồ thị $(C)$ theo phương song song trục tung lên phía trên $2018$ đơn vị thì được đồ thị $(C')$. Nên tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, $y=f(x)+2018$ trong từng khoảng tương ứng không thay đổi.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

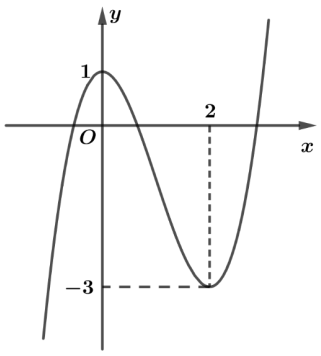
Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(1;3)$ (đúng).

Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$ và $(1;3)$ (sai).

Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(0;1)$ (sai).

Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$ (sai).

**Câu 11.** Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.




Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

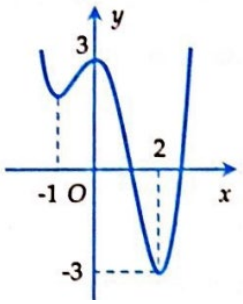
**D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Trên khoảng $(0;2)$, đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến.

**Câu 12.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.




Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$

**B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$

**D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Quan sát trên đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi lên trên khoảng $(-1;0)$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

**Câu 13.** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-32$ | ↗ | $+\infty$ |

Đặt $h(x)=5x-f(x)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

**A.** $h(3)<h(1)<h(2)$ **B.** $h(1)<h(2)<h(3)$

**C.** $h(2)<h(1)<h(3)$ **D.** $h(3)<h(2)<h(1)$

**Lời giải**

Quan sát trên bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$, suy ra hàm số $y=-f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

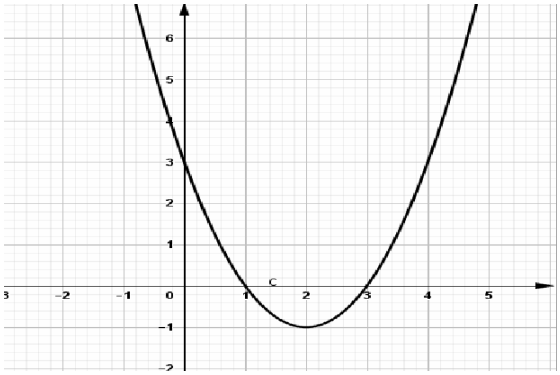
Mặt khác hàm số $y=5x$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Do đó hàm số $h(x)=5x-f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

Suy ra $h(1)<h(2)<h(3)$.

**Đáp án B.**

**Câu 14.** Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.** Đồ thị hàm số cắt trục hoành theo một dây cung có độ dài bằng $2$.

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;5)$.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

**D.** $f\left(\sqrt{2019}\right) < f\left(\sqrt{2017}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Nhìn vào đồ thị hàm số ta có:

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm $M(1;0), N(3;0) \Rightarrow MN = 2 \Rightarrow A$ đúng.

Trên khoảng $(0;2)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và trên khoảng $(2;5)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2;5) \Rightarrow B$ sai.

Trên khoảng $(0;2)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và trên khoảng $(2;3)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3) \Rightarrow C$ sai.

Ta có: $\sqrt{2019}, \sqrt{2017} \in (2;+\infty)$ và trên khoảng $(2;+\infty)$ hàm số đồng biến nên

$$\begin{cases} \sqrt{2019} > \sqrt{2017} \\ f\left(\sqrt{2019}\right) > f\left(\sqrt{2017}\right) \end{cases} \Rightarrow D \text{ sai.}$$

## DẠNG 3. TẬP GIÁ TRỊ - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $D$.

Tập hợp $T = \left\{ y = f(x) \middle| x \in D \right\}$ gọi là tập giá trị của hàm số $y = f(x)$.

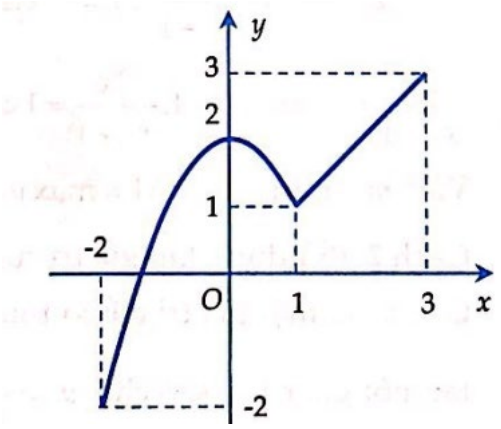
*Nhận dạng:* Khi hàm số chỉ xuất hiện tích các biểu thức là hằng số hoặc tổng bình phương các biểu thức là hằng số.

*Bất đẳng thức:*

+) Cho $a,\ b \ge 0$ ta luôn có $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ hay *hay* $a+b \ge 2\sqrt{ab}$, đẳng thức xảy ra khi $a = b$

+) $a,\ b \in \mathbb{R}$ ta có $a^2 + b^2 \ge 2ab$, đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

**Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-2;3]$ có đồ thị được cho như trong hình dưới đây:




Gọi *M, m* lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$. Tính $M+m$.

**A.** $M+m=0$ **B.** $M+m=1$ **C.** $M+m=2$ **D.** $M+m=3$

**Lời giải**

Quan sát trên đồ thị ta thấy $M=3$ (ứng với $x=3$), $m=-2$ (ứng với $x=-2$). Vậy $M+m=1$.

**Đáp án B.**

**Câu 2.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x-2|-3|x-1|$ trên đoạn $[0;2]$ là

**A.** 1. **B.** $-1$. **C.** 2. **D.** $-3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Có $x\in[0;2]\Rightarrow|x-2|=2-x\Rightarrow\ y=2-x-3|x-1|=1+(1-x)-|x-1|-2|x-1|$.

Do $|x-1|\geq 0\Rightarrow -2|x-1|\leq 0$ và $(1-x)-|x-1|\leq 0$ nên $y\leq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}|x-1|=0\\1-x=|x-1|\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x-2|-3|x-1|$ trên đoạn $[0;2]$ là 1.

**Câu 3.** Cho hàm số $y=\begin{cases}2x-1 \text{ khi } x\geq 1\\1 \quad\quad \text{khi } 0<x<1\\1-2x \text{ khi x} \leq 0\end{cases}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2;2]$ là:

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

**Lời giải**

**Chọn C**

Trên $[1;2]$ hàm số $y=2x-1$ đồng biến nên giá trị lớn nhất bằng $y(2)=3$.

Trên $(0;1)$ hàm số $y=1$ nên giá trị lớn nhất bằng $y=1$.

Trên $[-2;0]$ hàm số $y=1-2x$ nghịch biến nên giá trị lớn nhất bằng $y(-2)=5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2;2]$ là $y(-2)=5$.

**Câu 4.** Gọi *M, m* lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$. Tìm $M+m$.

**A.** $M+m=2+\sqrt{2}$

**B.** $M+m=2$

**C.** $M+m=4$

**D.** $M+m=4+\sqrt{2}$

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Điều kiện xác định: $D=[-1;1]$.

Dễ thấy $y \ge 0, \forall x \in [-1;1]$.

Ta có $y^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$ nên suy ra:

$2 \le y^2 \le 4 \Rightarrow \sqrt{2} \le y \le 2$.

$y = \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$;

$y = 2 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $m = \sqrt{2}$ và $M = 2$.

Do đó $M + m = 2 + \sqrt{2}$.

**Câu 5.** Gọi *M, m* lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$. Tìm $M - m$.

**A.** $M - m = 8$ **B.** $M - m = 9$

**C.** $M - m = 10$ **D.** $M - m = 11$

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Gọi $y_0$ là một giá trị bất kì thuộc tập giá trị của hàm số đã cho. Khi đó phải tồn tại một giá trị $x$ sao cho

$y_0 = \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$

$\Leftrightarrow (y_0 - 1)x^2 + 8x + y_0 - 7 = 0$ (*).

+ Nếu $y_0 = 1$ thì $x_0 = \dfrac{3}{4}$.

+ Nếu $y_0 \ne 1$ thì (*) có nghiệm khi và chỉ khi:

$\Delta' = -y_0^2 + 8y_0 + 9 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le y_0 \le 9$.

Kết hợp hai trường hợp ta có:

$$-1 \le y_0 \le 9.$$

Ta thấy $y_0 = -1 \Rightarrow x = 2$;

$y_0 = 9 \Rightarrow x = \dfrac{-1}{2}$.

Vậy $m = \min\limits_{\mathbb{R}} y = -1; M = \max\limits_{\mathbb{R}} y = 9$

$\Rightarrow M - m = 10$.

**Câu 6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + (x-3)^2$.

**A.** 0 **B.** $\dfrac{9}{2}$ **C.** $\dfrac{-9}{2}$ **D.** $\dfrac{3}{2}$

**Lời giải**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+ $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 2x^2 - 6x + 9 = 2\left(x^2 - 3x + \dfrac{9}{4}\right) + \dfrac{9}{2} = 2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2} \ge \dfrac{9}{2}$.

+ $f(x) = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{9}{2}$.

**Đáp án B.**

**Câu 7.** Tìm giá trị nhỏ nhất *m* của hàm số $y = f(x) = x - \sqrt{x-2}$.

**A.** $m=0$ **B.** $m=2$

**C.** $m=\dfrac{7}{4}$ **D.** $m=\dfrac{3}{4}$

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Tập xác định: $D=[2;+\infty)$

Ta có $\forall x\in[2;+\infty)$:

$y=f(x)=x-\sqrt{x-2}$

$=(x-2)-\sqrt{x-2}+2$

$=\left(\sqrt{x-2}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\geq\dfrac{7}{4}.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x-2}-\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là bằng $\dfrac{7}{4}$.

**Câu 8.** Gọi *m, M* lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Tính $m^2+M^2$.

**A.** $m^2+M^2=\dfrac{1}{2}$ **B.** $m^2+M^2=2$

**C.** $m^2+M^2=1$ **D.** $m^2+M^2=4$

**Lời giải**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

**Cách 1:** (Sử dụng bất đẳng thức)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $\forall x\in\mathbb{R}$:

$x^2+1\geq 2|x|\Rightarrow\dfrac{2|x|}{x^2+1}\leq 1\Rightarrow -1\leq\dfrac{2x}{x^2+1}\leq 1;$

$\dfrac{2x}{x^2+1}=-1\Leftrightarrow x=-1;\dfrac{2x}{x^2+1}=1\Leftrightarrow x=1.$

Vậy $m=\min\limits_{\mathbb{R}}y=-1;M=\max\limits_{R}y=1\Rightarrow m^2+M^2=2.$

**Cách 2:** (Sử dụng tập giá trị của hàm số)

Gọi $y_0$ là một giá trị bất kì thuộc tập giá trị của hàm số đã cho. Khi đó phải tồn tại một giá trị $x$ sao cho $y_0=\dfrac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow y_0x^2-2x+y_0=0$ (*). Ta coi (*) là phương trình ẩn $x$, tham số $y_0$.

+ Nếu $y_0=0$ thì $x=0$.

+ Nếu $y_0\neq 0$ thì (*) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'=1-y_0^2\geq 0\Leftrightarrow -1\leq y_0\leq 1$.

Kết hợp hai trường hợp ta có $-1\leq y_0\leq 1;y_0=-1\Rightarrow x=-1;y_0=1\Rightarrow x=1$.

Vậy $m=\min\limits_{\mathbb{R}}y=-1;M=\max\limits_{\mathbb{R}}y=1\Rightarrow m^2+M^2=2.$

**Đáp án B.**

**Câu 9.** Gọi *M, m* lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x=3)(5-x)$ với $-3\leq x\leq 5$.

Tìm $M+2m$.

**A.** $M+2m=8$ **B.** $M+2m=16$

**C.** $M+2m=24$ **D.** $M+2m=32$

**Lời giải**

**Đáp án B.**

Với $-3 \le x \le 5$ thì $x+3 \ge 0; 5-x \ge 0$, suy ra $y=(x+3)(5-x) \ge 0$.

Với $x=-3$ hoặc $x=5$ thì $y=0$.

Vậy $m=0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $x+3$ và $5-x$ ta có:

$$(x+3)(5-x) \le \frac{(x+3+5-x)^2}{4}=16.$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$x+3=5-x \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy $M=16$. Do đó $M+2m=16$.

Hoặc có thể giải như sau:

$y=-x^2+2x+15=-x^2+2x-1+16$

$=16-(x-1)^2 \le 16$

$y=16 \Leftrightarrow x=1$. Vậy $M=16$.

**Câu 10.** Cho hàm số $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$.

a) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ thỏa mãn $f(x) \le m$ với mọi $x \in [-1;1]$.

**A.** $m \ge \sqrt{2}$ **B.** $m<0$

**C.** $m=\sqrt{2}$ **D.** $m<\sqrt{2}$

b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ thỏa mãn $f(x)>m$ với mọi $x \in [-1;1]$.

**A.** $m \le -\sqrt{2}$ **B.** $m<-\sqrt{2}$

**C.** $m \le -1$ **D.** $m<-1$

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Tập xác định: $D=[-1;1]$.

**a) Đáp án A.**

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có:

$$\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2 \le (1^2+1^2)(x^2+1-x^2)=2$$

Suy ra $f(x) \le \sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi

$$x=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=\sqrt{2}$.

$f(x) \le m$ với mọi $x \in [-1;1]$ khi và chỉ khi $m \ge \max\limits_{[-1;1]} f(x) \Rightarrow m \ge \sqrt{2}$.

**b) Đáp án D.**

Ta có $\forall x \in [-1;1]$: $x \ge -1$ và $\sqrt{1-x^2} \ge 0$ nên $x+\sqrt{1-x^2} \ge -1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=-1$. Vậy $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=-1$.

$f(x)>m$ với mọi $x \in [-1;1]$ khi và chỉ khi $m<\min\limits_{[-1;1]} f(x) \Leftrightarrow m<-1$.

**Câu 11.** Trong các hàm số sau, hàm số nào có tập giá trị là đoạn $[0;2]$?

**A.** $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$

**B.** $g(x)=x+\sqrt{2-x^2}$

**C.** $h(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$

**D.** $k(x)=\sqrt{4x-x^2}$

**Lời giải**

**Đáp án D.**

* Với $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\forall x\in\mathbb{R}: x^2+1\geq 2|x|$.

Suy ra $\left|\dfrac{4x}{x^2+1}\right|\leq 2\Rightarrow -2\leq\dfrac{4x}{x^2+1}\leq 2$.

$f(x)=-2\Leftrightarrow x=-1$;

$f(x)=1\Leftrightarrow x=1$.

Vậy $f(x)$ có tập giá trị là đoạn $[-2;2]$.

* Với $g(x)=x+\sqrt{2-x^2}$:

Tập xác định $D=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Ta có $x\geq-\sqrt{2};\sqrt{2-x^2}\geq 0$.

Suy ra $x+\sqrt{2-x^2}\geq-\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=-\sqrt{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có

$g^2(x)=\left(x+\sqrt{2-x^2}\right)^2$

$\leq(1+1)\left(x^2+2-x^2\right)=4$

Suy ra $g(x)\leq 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$x=\sqrt{2-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x^2=2-x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Vậy $-\sqrt{2}\leq g(x)\leq 2$.

Vậy $g(x)$ có tập giá trị là đoạn $\left[-\sqrt{2};2\right]$.

* Với $h(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow x^2+1=1\Leftrightarrow x=0$

Vậy $h(x)$ có tập giá trị là nửa khoảng $[2;+\infty)$.

* Với $k(x)=\sqrt{4x-x^2}$:

Tập xác định $D=[0;4]$.

Ta có $\forall x\in[0;4]$:

$0\le 4x-x^2=4-(x-2)^2\le 4$.

Suy ra $0\le k(x)\le 2$.

$k(x)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=4$;

$k(x)=2\Leftrightarrow x=2$.

Vậy $k(x)$ có tập giá trị là đoạn $[0;2]$

**Câu 12.** Gọi $M$ là giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+3}}$. Biết $M=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $b$ nhỏ nhất. Tìm $a+b$.

**A.** $a+b=87$ **B.** $a+b=88$

**C.** $a+b=89$ **D.** $a+b=90$

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có: $(3x+1)^2=\left(3.x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}\right)^2\le\left(9+\dfrac{1}{3}\right)\left(x^2+3\right)$.

Suy ra $3x+1\le\sqrt{\dfrac{28}{3}}\sqrt{x^2+3}$

$\Rightarrow\dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+3}}\le\sqrt{\dfrac{28}{3}}=\dfrac{\sqrt{84}}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi

$\dfrac{x}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\Leftrightarrow x=9$.

Vậy $M=\dfrac{\sqrt{84}}{3}$, tức là

$a=84,b=3\Rightarrow a+b=87$.

***Lưu ý:*** Với kĩ thuật tương tự, các bạn dễ dàng tìm được giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của các hàm số có dạng $f(x)=\dfrac{ax+b}{\sqrt{(cx)^2+d^2}}$.

**Câu 13.** Người ta cần xây một chiếc bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 500.000 đồng/m$^2$ lòng bể. Khi đó, kích thước của bể nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất là:

**A.** Chiều dài 20m, chiều rộng 10m, chiều cao $\dfrac{5}{6}$m.

**B.** Chiều dài 10m, chiều rộng 5m, chiều cao $\dfrac{10}{3}$m.

**C.** Chiều dài 30m, chiều rộng 15m, chiều cao $\frac{10}{27}$m.

**D.** Một đáp án khác.

**Lời giải**

**Đáp án B.**

Gọi $x$ là chiều rộng của bể chứa nước (đơn vị: m, điều kiện: $x>0$).

Khi đó chiều dài của bể chứa nước là $2x$ và chiều cao của bể chứa nước là $\frac{500}{3.x.2x}=\frac{250}{3x^2}$.

Diện tích cần xây dựng là:

$S=x.2x+\frac{250}{3x^2}.2\left(x+2x\right)=2x^2+\frac{500}{x}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$S=2x^2+\frac{250}{x}+\frac{250}{x}$

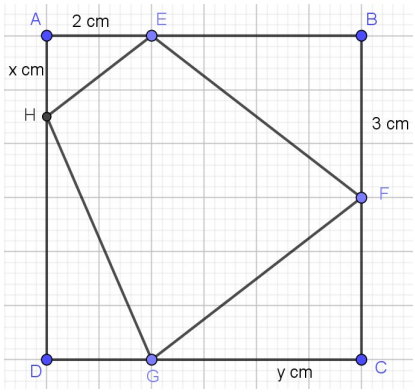
$\geq 3\sqrt[3]{2x^2.\frac{250}{x}.\frac{250}{x}}=30$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$2x^2=\frac{250}{x}\Leftrightarrow x=5$ (TMĐK).

Vậy kích thước của bể nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất là chiều dài 10m, chiều rộng 5m, chiều cao thước của bể nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất là chiều dài 10m, chiều rộng 5m, chiều cao $\frac{10}{3}$m.

**Câu 14.** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.




**A.** $x+y=\frac{7\sqrt{2}}{2}$ **B.** $x+y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $x+y=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

***Lời giải***

Ta có $S_{EFGH}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $S=S_{AEH}+S_{FCG}+S_{GDH}$ lớn nhất

Ta có: $2S=2x+3y+(6-x)(6-y)=xy-4x-3y+36$ (1).

Mặt khác: $\triangle AEH$ đồng dạng $\triangle CGF$ nên $\frac{AE}{CG}=\frac{AH}{CF}\Rightarrow xy=6$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $2S=42-\left(4x+\frac{18}{x}\right)$.

Ta có: $2S_{max}\Leftrightarrow\left(4x+\frac{18}{x}\right)_{min}$

Biểu thức $\left(4x+\frac{18}{x}\right)_{min} \Leftrightarrow 4x=\frac{18}{x} \Rightarrow x=\frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=2\sqrt{2}$.

Vậy $x+y=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 15.** Giả sử bạn được chi cho một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi $100\ m$. Hỏi bạn phải chọn kích thước của hình chữ nhật bằng bao nhiêu để diện tích mảnh đất của bạn là lớn nhất.

**A.** chiều dài mảnh đất là 30 m, chiều rộng là 20 m.

**B.** chiều dài mảnh đất là 40 m, chiều rộng là 10 m.

**C.** chiều dài mảnh đất là 35 m, chiều rộng là 15 m.

**D.** chiều dài mảnh đất là 25 m, chiều rộng là 25 m.

***Lời giải***

Gọi độ dài của chiều dài, chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật lần lượt $x, y$ (m), $x, y>0$.

Chu vi của mảnh đất hình chữ nhật là $2(x+y)=100$ nên $x+y=50$.

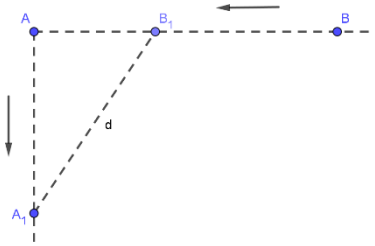
Diện tích mảnh đất hình chữ nhật là $S=xy$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương: $S=xy\le\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{50^2}{4}=625$.

Khi đó $S_{max}=625$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=25$.

Vậy độ dài của chiều dài mảnh đất là 25 m, chiều rộng là 25 m.

**Câu 16.** Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai con tàu cùng khởi hành, một tàu chạy về hướng nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/giờ. Hãy xác định thời điểm mà khoảng cách của hai tàu là nhỏ nhất?




**A.** sau $\frac{7}{17}$ giờ xuất phát

**B.** sau $\frac{5}{17}$ giờ xuất phát

**C.** sau $\frac{9}{17}$ giờ xuất phát

**D.** sau $\frac{8}{17}$ giờ xuất phát

***Lời giải***

Gọi $d$ là khoảng cách của hai tàu sau khi xuất phát $t$ (giờ), $t>0$.

Ta có: $d^2=AB_1^2+AA_1^2=(5-BB_1)^2+AA_1^2=(5-7t)^2+(6t)^2=85t^2-70t+25$.

Suy ra $d=d(t)=\sqrt{85t^2-70t+25}=\sqrt{85\left(t-\frac{7}{17}\right)^2+\frac{180}{17}}\ge\frac{6\sqrt{85}}{17}$.

Khi đó $d_{min}=\frac{6\sqrt{85}}{17}$. Dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow t=\frac{7}{17}$.

Vậy sau $\frac{7}{17}$ giờ xuất phát thì khoảng cách hai tàu nhỏ nhất là nhỏ nhất.

**Câu 17.** Một của hàng buôn giày nhập một đôi với giá là $40$ USD. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá $x$ USD thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120-x)$ đôi. Hỏi của hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

**A.** 80 USD. **B.** 70 USD. **C.** 30 USD. **D.** 90 USD.

***Lời giải***

Gọi $y$ (USD) là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

Ta có $y=(120-x)(x-40)=-x^2+160x-4800=-(x-80)^2+1600\le 1600$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá $80$ USD.

## DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

**Câu 1.** Trong các điểm sau đây điểm nào thuộc đồ thị của hàm số?

**A.** $M_1(2;\ 3)$. **B.** $M_2(0;\ -1)$. **C.** $M_3\left(\frac{1}{2};\ \frac{-1}{2}\right)$. **D.** $M_4(1;\ 0)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Thay $x=0$ vào hàm số ta thấy $y=-1$. Vậy $M_2(0;-1)$ thuộc đồ thị hàm số.

**Câu 2.** Cho hàm số $y=x^3-3x+2$. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số đã cho?

**A.** $(-2;0)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-2;-12)$. **D.** $(1;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Thay tọa độ điểm vào hàm số ta thấy chỉ có điểm $(-2;0)$ thỏa mãn.

**Câu 3.** Đồ thị hàm số $y=f(x)=\begin{cases}2x+3 & khi\ x\le 2\\ x^2-3 & khi\ x>2\end{cases}$ đi qua điểm có tọa độ nào sau đây ?

**A.** $(0;-3)$ **B.** $(3;6)$ **C.** $(2;5)$ **D.** $(2;1)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Thay tọa độ điểm $(0;-3)$ vào hàm số ta được : $f(0)=3\ne -3$ nên loại đáp án A

Thay tọa độ điểm $(3;6)$ vào hàm số ta được : $f(3)=9-3=6$, thỏa mãn nên chọn đáp án B

**Câu 4.** Đồ thị của hàm số $y=f(x)=\begin{cases}2x+1 \text{ khi } x\le 2\\ -3 \text{ khi } x>2\end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?

**A.** $(0;-3)$ **B.** $(3;7)$ **C.** $(2;-3)$ **D.** $(0;1)$

**Lời giải**

Với $x=0<2$ thì $y=f(0)=2.0+1=1$.

Vậy đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $(0;1)$.

**Đáp án D.**

**Câu 5.** Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x(x-1)}$?

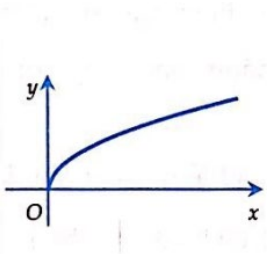
**A.** $M(0;-1)$ **B.** $M(2;1)$ **C.** $M(2;0)$ **D.** $M(1;1)$

**Lời giải**

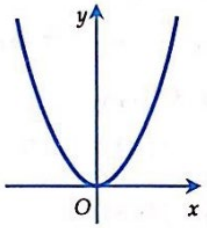
Với $x=2$ thì $y=0$. Vậy điểm $M(2;0)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

**Đáp án C.**

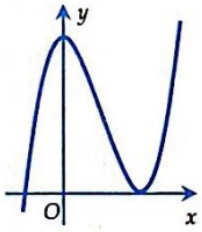
**Câu 6.** Đường cong trong hình nào dưới đây **không phải** là đồ thị của một hàm số dạng $y=f(x)$?



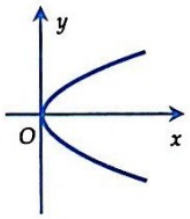

**A.**




**B.**



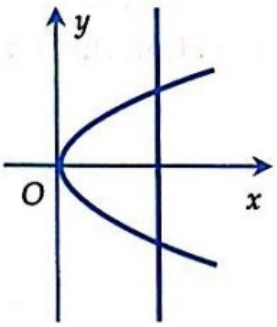

**C.**




**D.**

**Lời giải**

Đường cong trong hình *D* không phải là đồ thị của một hàm số dạng $y=f(x)$ vì mỗi giá trị $x>0$ ứng với hai giá trị phân biệt của *y*.




**Đáp án D.**

**Câu 7.** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị trùng với đồ thị hàm số $y=x+2$?

**A.** $y=\left(\sqrt{x+2}\right)^2$

**B.** $y=\dfrac{(x+2)^2}{x+2}$

**C.** $y=x(x+1)+2-x^2$

**D.** $y=\dfrac{x^2(x+2)}{x^2}$

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Tập xác định của hàm số

$y=x+2$ là $\mathbb{R}$

Tập xác định của hàm số

$y=x(x+1)+2-x^2$ là $\mathbb{R}$.

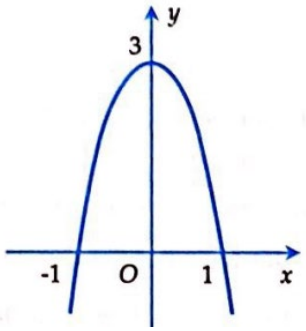
Mặt khác ta có

$y=x(x+1)+2-x^2=x+2$. Vậy đồ thị của hàm số $y=x(x+1)+2-x^2$ trùng với đồ thị của hàm số $y=x+2$.

Các hàm số còn lại mặc dù sau khi rút gon đều có dạng $y=x+2$ nhưng có tập xác định không phải là $\mathbb{R}$ nên đồ thị không trùng với đồ thị hàm số $y=x+2$.

Thật vậy, hàm số $y=\left(\sqrt{x+2}\right)^2$ có tập xác định là $[-2;+\infty)$; hàm số $y=\dfrac{(x+2)^2}{x+2}$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$; hàm số $y=\dfrac{x^2(x+2)}{x^2}$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**Câu 8.** Đường cong trong hình sau đây là đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây?




**A.** $y=x^3+3x^2-3$

**B.** $y=-x^2+2x+3$

**C.** $y=x^4+2x^2-3$

**D.** $y=-x^4-2x^2+3$

**Lời giải**

**Đáp án D.**

Đường cong trong hình vẽ đối xứng qua trục *Oy* nên là đồ thị của một hàm số chẵn. Mặt khác đường cong đi qua điểm $(0;3)$. Do đó nó là đồ thị của hàm số $y=-x^4-2x^2+3$.

**Câu 9.** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3$. Có bao nhiêu điểm trên đồ thị hàm số có tung độ bằng 1?

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

**Lời giải**

**Đáp án D.**

$y=1\Rightarrow x^3-3x^2+3=1$

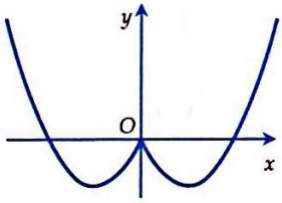
$\Leftrightarrow x^3-3x^2+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x-2\right)=0$

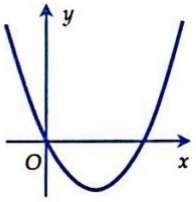
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2-2x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy có 3 điểm nào trên đồ thị hàm số có tung độ bằng 1.

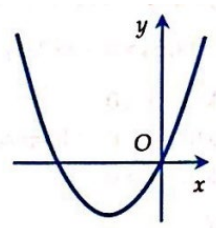
**Câu 10.** Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)=x^2-2|x|$?



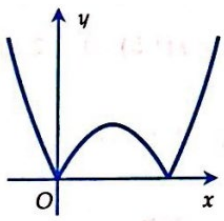

**A.**




**B.**




**C.**




**D.**

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Ta có $\forall x\in\mathbb{R}$:

$f(-x)=(-x)^2-2|-x|$

$=x^2-2|x|=f(x)$

Vậy hàm số $y=f(x)=|x^2-2|$ là hàm số chẵn. Do đó đồ thị của nó đối xứng qua trục $Oy$. Trong bốn đường cong đã cho chỉ có đường cong trong hình A là đối xứng qua $Oy$. Vậy A là đáp án đúng.

**Câu 11.** Có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ ?

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

**Lời giải**

**Đáp án B.**

Điều kiện xác định:

$\begin{cases}x\ge 0\\ x+\sqrt{x}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 0$.

Đặt $\sqrt{x+\sqrt{x}}=n, n\in\mathbb{N}$. Suy ra:

$x+\sqrt{x}=n^2\Leftrightarrow 4x+4\sqrt{x}+1-4n^2=1$

$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{x}+1\right)^2-(2n)^2=1$

$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{x}+1-2n\right)\left(2\sqrt{x}+1+2n\right)=1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{x}+1-2n=1\\ 2\sqrt{x}+1+2n=1\end{cases}$

(do $2\sqrt{x}+1+2n>0$)

$\Rightarrow 4\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$.

Với $x=0$ thì $y=0$. Vậy có duy nhất một điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số, đó là điểm có tọa độ $(0;0)$.

## DẠNG 5. XÁC ĐỊNH BIỂU THỨC CỦA HÀM SỐ

**Câu 1.** Cho hàm số $y=f(x)=|-5x|$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

**A.** $f(-1)=5$. **B.** $f(-2)=10$. **C.** $f\left(\frac{1}{5}\right)=-1$. **D.** $f(2)=10$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y=f(x)=|-5x|\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f\left(\frac{1}{5}\right)=-1$ là mệnh đề sai.

**Câu 2.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{x-2}-3}{x-1} & \text{khi } x\geq 2\\ x^2+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tính $P=f(2)+f(-2)$.

**A.** $P=3$. **B.** $P=2$. **C.** $P=\frac{7}{3}$. **D.** $P=6$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $f(2)+f(-2)=\frac{2\sqrt{2-2}-3}{2-1}+(-2)^2+2\Rightarrow P=3$.

**Câu 3.** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-6x^2+11x-6$. Kết quả sai là

**A.** $f(1)=0$. **B.** $f(2)=0$. **C.** $f(3)=0$. **D.** $f(-4)=-24$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$f(-4)=-210$.

**Câu 4.** Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}, x\geq 0\\ \dfrac{1}{x-1}, x<0\end{cases}$. Giá trị $f(0), f(2), f(-2)$ là

**A.** $f(0)=0; f(2)=\frac{2}{3}, f(-2)=2$. **B.** $f(0)=0; f(2)=\frac{2}{3}, f(-2)=-\frac{1}{3}$.

**C.** $f(0)=0; f(2)=1, f(-2)=-\frac{1}{3}$. **D.** $f(0)=0; f(2)=1, f(-2)=2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $f(0)=\frac{0}{0+1}=0, f(2)=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}, f(-2)=\frac{1}{-2-1}=-\frac{1}{3}$.

**Câu 5.** Cho hàm số: $y=f(x)=\begin{cases}1-x & khi\ -2<x\leq 1\\ x-1 & khi\ 1<x\leq 2\\ 5-x^2 & khi\ 2<x\leq 5\end{cases}$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

**A.** $f(3)=2$. **B.** $f(3)=-2$. **C.** $f(3)=-4$. **D.** $f(3)=-1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Với $x=3$, ta có $f(x)=5-x^2$. Do đó: $f(3)=5-3^2=-4$.

**Câu 6.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3(x-2) & \text{khi } -1\leq x<2\\ \sqrt{x^2-4} & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$. Tính giá trị $f(3)$.

**A.** Không xác định. **B.** $f(3)=\sqrt{5}$ hoặc $f(3)=3$.

**C.** $f(3)=\sqrt{5}$. **D.** $f(3)=3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét $x \ge 2$ hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ ;nên $f(3)=\sqrt{3^2-4}=\sqrt{5}$.

**Câu 7.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x+1} & \text{khi } x \ge 0 \\ \dfrac{\sqrt[3]{2+3x}}{x-2} & \text{khi } -2 \le x < 0\end{cases}$. Ta có kết quả nào sau đây **đúng**?

**A.** $f(-1)=\dfrac{1}{3}; f(2)=\dfrac{7}{3}$.

**B.** $f(0)=2; f(-3)=\sqrt{7}$.

**C.** $f(-1)$: không xác định; $f(-3)=-\dfrac{11}{24}$.

**D.** $f(-1)=\sqrt{8}; f(3)=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $f(-1)=\dfrac{\sqrt[3]{2+3.(-1)}}{-1-2}=\dfrac{1}{3}$.

$f(2)=\dfrac{2.2+3}{2+1}=\dfrac{7}{3}$.

**Câu 8.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \text{khi } x \le -3 \\ \dfrac{x+7}{2} & \text{khi } x > -3\end{cases}$. Biết $f(x_0)=5$ thì $x_0$ là

**A.** $-2$.

**B.** $3$.

**C.** $0$.

**D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Với $x \le -3$ ta có: $-2x+1=5 \Leftrightarrow x=-2$ (loại).

Với $x > -3$ ta có: $\dfrac{x+7}{2}=5 \Leftrightarrow x=3$ (nhận).

Vậy $x_0=3$.

**Câu 9.** Cho hàm số $y=\begin{cases}-2(x-2) & \text{nếu } -1 \le x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{nếu } x \ge 1\end{cases}$. Tính $f(-1)$.

**A.** $-6$.

**B.** $6$.

**C.** $5$.

**D.** $-5$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $f(-1)=-2(-1-2)=-6$ nên chọn **A.**

**Câu 10.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2(x-3) & \text{nếu } -1 \le x \le 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{nếu } x \ge 1\end{cases}$; giá trị của $f(-1); f\left(\sqrt{10}\right)$ lần lượt là

**A.** 8 và 0.

**B.** 0 và 8.

**C.** $-8$ **và** 3.

**D.** 3 và $-8$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\begin{cases}f(-1)=2(-1-3)=-8 \\ f\left(\sqrt{10}\right)=\sqrt{\sqrt{10}^2-1}=3\end{cases}$.

**Câu 11.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x-1} & \text{khi } x\in(-\infty;0)\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x\in[0;2]\\ x^2-1 & \text{khi } x\in(2;5]\end{cases}$. Tính $f(4)$.

**A.** Không tính được. **B.** $f(4)=\frac{2}{3}$. **C.** $f(4)=15$. **D.** $f(4)=\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta thấy $f(x)=x^2-1$ khi $x\in(2;5]\Rightarrow f(4)=4^2-1=15$

**Câu 12.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{x+2}-3}{x-1} & \text{khi } x\geq 2\\ x^2+1 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Khi đó, $f(-2)+f(2)$ bằng

**A.** 6. **B.** 4. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

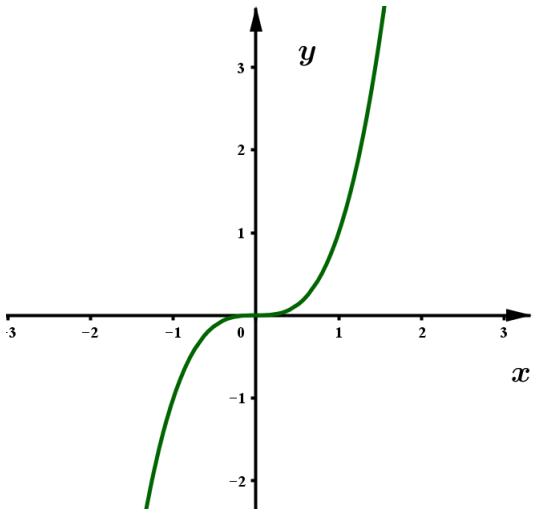
**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $f(2)=\dfrac{2\sqrt{2+2}-3}{2-1}=1$, $f(-2)=(-2)^2+1=5$

Suy ra: $f(-2)+f(2)=6$.

**Câu 13.** Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ




Tnh giá trị biểu thức $f\left(\sqrt{2018}\right)+f\left(-\sqrt{2018}\right)$

**A.** −2018. **B.** 0. **C.** 2018. **D.** 4036.

**Lời giải**

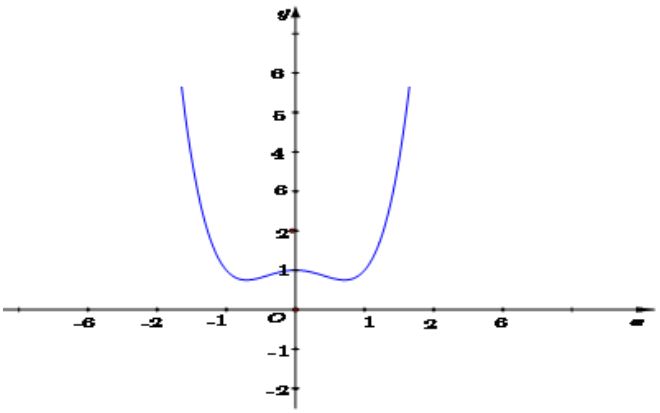
**Chọn B**

Dựa vào hình dáng của đồ thị ta thấy rằng hàm số đối xứng qua $O(0;0)$ nên là hàm số lẻ.

Suy ra $f(-x)=-f(x)\Rightarrow f(-x)+f(x)=0$

Vì vậy $f\left(\sqrt{2018}\right)+f\left(-\sqrt{2018}\right)=0$.

**Câu 14.** Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $f(-1)=f(1)=1$. **B.** Đồ thị hàm số có tâm đối xứng.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-6;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Nhìn đồ thị ta có:

$f(-1)=f(1)=1\Rightarrow$ A đúng.

Đồ thị không có tâm đối xứng nên B sai.

Trên khoảng $(1;5)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5)\Rightarrow$ C đúng.

Trên khoảng $(-6;-1)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-6;-1)\Rightarrow$ D đúng.

**Câu 15.** Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2016+9x}-\sqrt{2016-9x}}{|x|}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$S=f(220)+f(-221)+f(222)+f(-223)+f(-220)+f(221)+f(-222)+f(223)+f(224)$$

**A.** $24\sqrt{7}$. **B.** $\dfrac{24\sqrt{7}}{223}$. **C.** $\dfrac{6\sqrt{7}}{55}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{28}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tập xác định $D=\left[\dfrac{-2016}{9};\dfrac{2016}{9}\right]\setminus\{0\}$.

$\forall x\in D$, ta có $-x\in D$ và

$$f(-x)=\frac{\sqrt{2016-9x}-\sqrt{2016+9x}}{|-x|}=-\frac{\sqrt{2016+9x}-\sqrt{2016-9x}}{|x|}=-f(x).$$

Do đó $f(x)$ là hàm số lẻ, và $f(x)+f(-x)=0$.

$$\begin{aligned}S&=f(220)+f(-221)+f(222)+f(-223)+f(-220)+f(221)+f(-222)+f(223)+f(224)\\&=f(220)+f(-220)+f(-221)+f(221)+f(222)+f(-222)+f(-223)+f(223)+f(224)\\&=f(224)=\frac{3\sqrt{7}}{28}.\end{aligned}$$

**Câu 16.** Cho hai hàm số $f(x)=x^2+5$ và $g(x)=x^3+2x^2+1$. Tính tổng các hệ số của hàm số $f(g(x))$.

**A.** 18 **B.** 19 **C.** 20 **D.** 21

**Lời giải**

**Cách 1:** $f\left(g\left(x\right)\right)=\left(x^3+2x^2+1\right)^2+5=x^6+4x^5+4x^4+2x^3+4x^2+6$.

Vậy tổng các hệ số của $f\left(g\left(x\right)\right)$ là $1+4+4+2+4+6=21$.

**Cách 2:** Áp dụng kết quả: "Cho đa thức $P\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$. Khi đó tổng các hệ số của $P\left(x\right)$ là $P\left(1\right)$", ta có tổng các hệ số của $f\left(g\left(x\right)\right)$ là $f\left(g\left(1\right)\right)$ mà $g\left(1\right)=4$ nên $f\left(g\left(1\right)\right)=4^2+5=21$.

**Đáp án D.**

**Câu 17.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\forall x\in\mathbb{R}:\ f\left(x-1\right)=x^2+3x-2$. Tìm biểu thức $f\left(x\right)$.

**A.** $f\left(x\right)=x^2+5x+2$ **B.** $f\left(x\right)=x^2+5x-2$

**C.** $f\left(x\right)=x^2+x-2$ **D.** $f\left(x\right)=x^2+x+2$

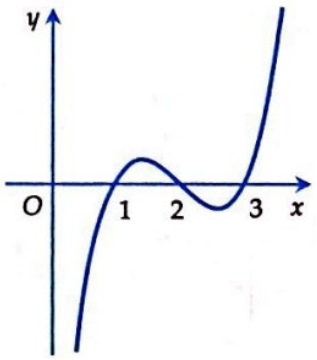
**Lời giải**

Ta có $\forall x\in\mathbb{R}:f\left(x-1\right)=x^2+3x-2=\left(x-1\right)^2+5\left(x-1\right)+2$.

Do đó $f\left(x\right)=x^2+5x+2$.

**Đáp án A.**

**Câu 18.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?




**A.** $f\left(1,5\right)<0<f\left(2,5\right)$

**B.** $f\left(1,5\right)<0,f\left(2,5\right)<0$

**C.** $f\left(1,5\right)>0,f\left(2,5\right)>0$

**D.** $f\left(1,5\right)>0>f\left(2,5\right)$

**Lời giải**

**Đáp án D.**

Quan sát trên đồ thị ta thấy $f\left(x\right)>0\forall x\in\left(1;2\right)$ và $f\left(x\right)<0\ \ \forall x\in\left(2;3\right)$.

Do đó $f\left(1,5\right)>0>f\left(2,5\right)$.

**Câu 19.** Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{36\right\}$. Biết $f\left(2x-5\right)=x^2+3x-2$ và $g\left(5x+1\right)=\dfrac{x}{x-7}$. Tính $g\left(f\left(1\right)\right)$.

**A.** $g\left(f\left(1\right)\right)=\dfrac{-3}{4}$ **B.** $g\left(f\left(1\right)\right)=\dfrac{3}{4}$

**C.** $g\left(f\left(1\right)\right)=\dfrac{47}{4}$ **D.** $g\left(f\left(1\right)\right)=\dfrac{-47}{4}$

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Ta có $2x-5=1\Leftrightarrow x=3$.

Vậy $f(1)=3^2+3.3-2=16$.

Lại có $5x+1=16\Leftrightarrow x=3$.

Vậy $g(f(1))=\dfrac{3}{3-7}=\dfrac{-3}{4}$.

**Câu 20.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^3+\dfrac{1}{x^3}\forall x\neq 0$. Tính $f(3)$.

**A.** $f(3)=36$ **B.** $f(3)=18$

**C.** $f(3)=29$ **D.** $f(3)=25$

**Lời giải**

**Đáp án B.**

Ta có $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^3+\dfrac{1}{x^3}$

$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

Do đó $f(x)=x^3-3x$.

Vậy $f(3)=3^3-3.3=18$.

**Câu 21.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right)=x+2\ \forall x\neq 1$. Tính $f(2)+f(4)$.

**A.** $f(2)+f(4)=6$ **B.** $f(2)+f(4)=2$

**C.** $f(2)+f(4)=-6$ **D.** $f(2)+f(4)=-2$

**Lời giải**

**Đáp án A.**

**Cách 1:** Đặt $\dfrac{3x-2}{x-1}=t$

$\Rightarrow x=\dfrac{t-2}{t-3}\Rightarrow x+2=\dfrac{3t-8}{t-3}$.

Do đó ta có

$f(t)=\dfrac{3t-8}{t-3}\Rightarrow f(x)=\dfrac{3x-8}{x-3}$.

Vậy $f(2)+f(4)=6$.

**Cách 2:**

$\dfrac{3x-2}{x-1}=2\Leftrightarrow x=0\Rightarrow f(2)=2$;

$\dfrac{3x-2}{x-1}=4\Leftrightarrow x=2\Rightarrow f(2)=4$.

Vậy $f(2)+f(4)=6$.

# Bài 2. HÀM SỐ BẬC HAI. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

- | FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y=ax^2+bx+c$, trong đó $a,b,c$ là những hằng số và $a$ khác 0. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

***Ví dụ 1.*** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định $a,b,c$ lần lượt là hệ số của $x^2$, hệ số của $x$ và hệ số tự do.

a) $y=8x^2-6x+1$

b) $y=2x+2021$.

***Giải***

a) Hàm số $y=8x^2-6x+1$ là hàm số bậc hai có hệ số của $x^2$ bằng 8, hệ số của $x$ bằng $-6$, hệ số tự do bằng 1.

b) Hàm số $y=2x+2021$ không phải là hàm số bậc hai.

### II. Đồ thị hàm số bậc hai

Đồ thị hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm với tọa độ $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ và trục đối xứng là đường thẳng $x=-\frac{b}{2a}$.

*Nhận xét:* Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$, ta có: $-\frac{\Delta}{4a}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Để vẽ đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$, ta thực hiện các bước:

- Xác định toạ độ đỉnh: $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$;
- Vẽ trục đối xứng $x=-\frac{b}{2a}$;
- Xác định một số điểm đặc biệt, chẳng hạn: giao điểm với trục tung (có tọa độ $(0;c)$) và trục hoành (nếu có), điểm đối xứng với điểm có tọa độ $(0;c)$ qua trục đối xứng $x=-\frac{b}{2a}$.
- Vẽ đường parabol đi qua các điểm đã xác định ta nhận được đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$.

*Chú ý:* Nếu $a>0$ thì parabol có bề lõm quay lên trên, nếu bậc hai sau: $a<0$ thì parabol có bề lõm quay xuống dưới.

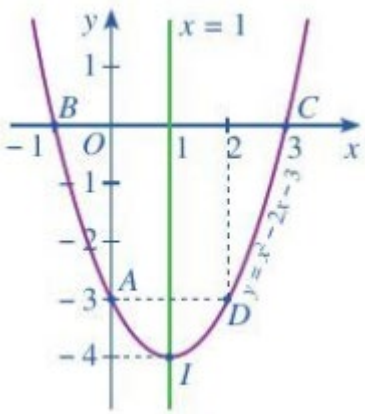
***Ví dụ 2.*** Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y=x^2-2x-3$.

***Giải***

Ta có: $a=1,b=-2,c=-3,\Delta=(-2)^2-4.1.(-3)=16$.

- Toạ độ đỉnh $I(1;-4)$.
- Trục đối xứng $x=1$.
- Giao điểm của parabol với trục tung là $A(0;-3)$.
- Giao điểm của parabol với trục hoành là $B(-1;0)$ và $C(3;0)$.
- Điểm đối xứng vối điểm $A(0;-3)$ qua trục đối xứng $x=1$ là $D(2;-3)$.

Vẽ parabol đi qua các điểm được xác định ở trên, ta nhận được đồ thị hàm số $y=x^2-2x-3$ như hình




Nhận xét: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số bậc hai như sau:

$a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

***Ví dụ 3.*** Nêu khoảng đồng biến, nghịch biến của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3x^2 + 5x - 2$

b) $y = -4x^2 + 6x + 3$

***Giải***

a) Ta có: $a = 3 > 0, b = 5, -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{6}$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

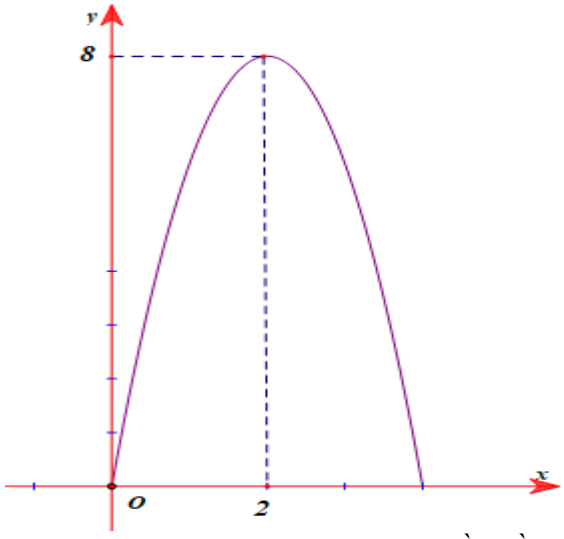
b) Ta có: $a = -4 < 0, b = 6, -\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

**III. Ứng dụng**

Các hàm số bậc hai có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết những vấn đề thực tiễn. Chẳng hạn, ta sẽ tìm hiểu ứng dụng đó thông qua ví dụ sau:

***Ví dụ 4.*** Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Hình minh họa quỹ đạo của quả bóng là một phần cung parabol trong mặt phẳng tọa độ $Oth$, trong đó $t$ là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên và $h$ là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ mặt đất. Sau khoảng 2s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8m.




a) Tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao $h$ theo thời gian $t$ và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống này.

b) Tính độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3s.

c) Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?

***Giải***

a) Gọi hàm số bậc hai biểu thị độ cao $h(m)$ theo thời gian $t(s)$ là $h = f(t) = at^2 + bt + c (a < 0)$. Theo giả thiết, quả bóng được đá lên từ mặt đất, nghĩa là $f(0) = c$, do đó $f(t) = at^2 + bt$.

Sau 2s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8m nên

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}$$

Vậy $f(t) = -2t^2 + 8t$

b) Độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3 s là: $h = f(3) = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 6(m)$

c) Cách 1. Quả bóng chạm đất (trở lại) khi độ cao $h = 0$, tức là: $\begin{cases} t > 0 \\ -2t^2 + 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4.$

Vì thế sau $4s$ quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

Cách 2. Quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một phần của cung parabol có trục đối xứng là đường thẳng $t = 2$. Điểm xuất phát và điểm quả bóng chạm đất (trở lại) đối xứng nhau qua đường thẳng $t = 2$. Vì thế sau $4s$ quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ

**Câu 1.** Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, có đồ thị là $(P)$.

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $(P)$.

b) Nhận xét sự biến thiên của hàm số trong khoảng $(0;3)$.

c) Tìm tập hợp giá trị $x$ sao cho $y \le 0$.

d) Tìm các khoảng của tập xác định để đồ thị $(P)$ nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $y = 8$.

e) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$.

**Câu 2.** Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = 7x^2 - 3x + 10$.

b) $y = -2x^2 - x + 1$.

**Câu 3.** Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y=x^2-3x$ với $0\le x\le 2$.

b) $y=-x^2-4x+3$ với $0\le x\le 4$.

**Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị của $a$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3.

**Câu 5.** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y=x(x+1)(x-2)(x-3)$.

b) $y=(2x-1)^2-4|2x-1|+3$.

**Câu 6.** Cho hàm số $y=-x^2+5x-4$, có đồ thị là $(P)$.

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $(P)$.

b) Dựa vào đồ thị trên, tùy theo giá trị của $m$, hãy cho biết số nghiệm của phương trình $x^2-5x+7+2m=0$.

c) Tìm $m$ để phương trình $x^2-5x+7+2m=0$ có nghiệm $x\in[1;5]$.

**Câu 7.** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=x^2+2x-3$. Từ đó suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y=|x^2+2x-3|$.

b) $y=x^2+2|x|-3$.

**Câu 8.** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=x^2+2x-3$. Từ đó suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y=|x^2+2x-3|$ b) $y=x^2+2|x|-3$

**Câu 9.** Cho hàm số $y=x^2-6x+8$ có đồ thị là $(P)$.

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $(P)$.

b) Biện luận theo $m$ số nghiệm của phương trình $(x-4)|x-2|+m=0$.

**Câu 10.** Vẽ đồ thị hàm số $y=\begin{cases}-x+4 & \text{khi } x<1\\ x^2-4x+3 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$

**Câu 11.** Không vẽ đồ thị. Hãy tìm tọa độ đỉnh, phương trình trục đối xứng của mỗi parabol sau đây. Tìm giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của mỗi hàm số tương ứng.

a) $y=2(x+3)^2-5$

b) $y=-\sqrt{2}x^2+4x$

**Câu 12.** Cho Parabol $(P)$ : $y=ax^2+bx+c$ $(a\ne 0)$. Xét dấu hệ số $a$ và biệt thức $\Delta$ khi

a) $(P)$ hoàn toàn nằm phía trên trục hoành.

b) $(P)$ hoàn toàn nằm phía dưới trục hoành.

c) $(P)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía trên trục hoành.

## DẠNG 2. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Để xác định hàm số bậc hai $y=f(x)=ax^2+bx+c$ (đồng nghĩa với xác định các tham số $a, b, c$) ta cần dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là $a, b, c$. Từ đó tìm được $a, b, c$. Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_0=f(x_0)$.

- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x=x_0 \Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a}=x_0$.

- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I(x_I; y_I) \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=x_I \\ -\dfrac{\Delta}{4a}=y_I \end{cases} \left( \begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=x_I \\ f(x_I)=y_I \end{cases} \right)$.

- Trên $\mathbb{R}$, ta có:

1. $f(x)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a<0$. Lúc này $\underset{\mathbb{R}}{Max} f(x)=-\dfrac{\Delta}{4a}=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

2. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a>0$. Lúc này $\underset{\mathbb{R}}{Min} f(x)=-\dfrac{\Delta}{4a}=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

**Câu 1.** Xác định parabol $y=ax^2+3x-2$, biết rằng parabol đó

a) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Có trục đối xứng $x=-3$.

c) Có đỉnh $I\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{11}{4}\right)$.

d) Đạt cực tiểu tại $x=1$.

**Câu 2.** Xác định parabol $y=ax^2+bx+2$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$.

b) Có đỉnh $I(2;-2)$.

c) Đi qua điểm $A(3;-4)$ và có trục đối xứng $x=-\dfrac{3}{4}$.

d) Đi qua điểm $B(-1;6)$ và đỉnh có tung độ $-\dfrac{1}{4}$.

**Câu 3.** Xác định parabol $y=2x^2+bx+c$, biết rằng parabol đó

a) Có trục đối xứng $x=1$ và cắt $Oy$ tại điểm $M(0;4)$.

b) Có đỉnh $I(-1;-2)$.

c) Đi qua hai điểm $A(0;-1)$ và $B(4;0)$.

d) Có hoành độ đỉnh $-2$ và đi qua điểm $N(1;-2)$.

**Câu 4.** Xác định parabol $y=ax^2+c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;1)$, $B(2;-2)$.

b) Có đỉnh $I(0;3)$ và một trong hai giao điểm với $Ox$ là $A(-2;0)$.

**Câu 5.** Xác định parabol $y=ax^2-4x+c$, biết rằng parabol đó

a) Có hoành độ đỉnh là $-3$ và đi qua điểm $M(-2;1)$.

b) Có trục đối xứng là đường thẳng $x=2$ và cắt trục hoành tại điểm $A(3;0)$.

**Câu 6.** Xác định parabol $y=ax^2+bx+c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;-3)$, $O(0;0)$.

b) Cắt trục $Ox$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-1$ và $2$, cắt trục $Oy$ tại điểm có tung độ bằng $-2$.

c) Đi qua điểm $M(4;-6)$, cắt trục $Ox$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $1$ và $3$.

**Câu 7.** Xác định parabol $y=ax^2+bx+c$, biết rằng parabol đó

a) Có đỉnh $I(2;-1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-3$.

b) Cắt trục hoành tại hai điểm $A(1;0)$, $B(3;0)$ và có đỉnh nằm trên đường thẳng $y=-1$.

c) Có đỉnh nằm trên trục hoành và đi qua hai điểm $M(0;1)$, $N(2;1)$.

d) Trục đối xứng là đường thẳng $x=3$, qua $M(-5;6)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-2$.

**Câu 8.** Xác định parabol $y=ax^2+bx+c$, biết rằng parabol đó

a) Đạt cực tiểu bằng $4$ tại $x=2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$.

b) Đạt cực đại bằng $3$ tại $x=2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $B(0;-1)$.

**Câu 9.** Cho hàm số $y=mx^2-2mx-3m-2$ $(m\neq 0)$. Xác định giá trị của $m$ trong mỗi trường hợp sau

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2;3)$.

b) Có đỉnh thuộc đường thẳng $y=3x-1$.

c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-10$.

**Câu 10.** Tìm các tham số $a, b, c$ sao cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ đạt giá trị nhỏ nhất là $4$ tại $x=2$ và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ là 6.

**Câu 11.** Cho hàm số $y=f(x)=4x^2-4mx+m^2-2m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho $\underset{[-2;0]}{Min}\, f(x)=3$.

## DẠNG 3. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA PARABOL VỚI ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ KHÁC

### Dạng 1. Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc nhất và bậc hai

Cho đồ thị $(P)$ của hàm số $y=ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$ và đồ thị $d$ của hàm số $y=kx+m$.

Toạ độ giao điểm của hai đồ thị $(P)$ và $d$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $d$ là

$$ax^2 + bx + c = kx + m \Leftrightarrow ax^2 + (b-k)x + c - m = 0 \quad (2)$$

Nhận xét:

1. Số giao điểm của $(P)$ và $d$ bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và cũng bằng số nghiệm của phương trình (2).

2. Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì ta nói $d$ và $(P)$ không giao nhau.

3. Nếu phương trình (2) có nghiệm kép thì ta nói $d$ và $(P)$ tiếp xúc với nhau. Lúc này ta nói $d$ là tiếp tuyến của $(P)$.

4. Nếu phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thì ta nói $d$ và $(P)$ cắt nhau.

**Dạng 2. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số bậc hai**

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai có đồ thị lần lượt là các đường parabol $(P_1)$ và $(P_2)$, khi đó tọa độ giao điểm của $(P_1)$ và $(P_2)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}. \quad (1)$$

Để giải hệ (1) ta cần giải phương trình $f(x) = g(x)$ (2), phương trình (2) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của $(P_1)$ và $(P_2)$.

* Nhận xét:

i) Số giao điểm của $(P_1)$ và $(P_2)$ bằng số nghiệm của hệ (1) và bằng số nghiệm của phương trình (2).

ii) $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai nên phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm. iii) Các bài toán liên quan đến dạng này thường áp dụng đến nội dung định lý Vi et thuận, nhắc lại như sau. Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1$ và $x_2$, ta luôn có $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ và $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

**Dạng 3. Điểm cố định của đồ thị hàm số**

Cho họ hàm số $f(x;m) = 0$ ($m$ là tham số) có đồ thị $(P_m)$. Để tìm điểm cố định mà $(P_m)$ luôn đi qua với mọi giá trị của $m$, ta thực hiện các bước sau:

**Bước 1:** Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà $(P_m)$ luôn đi qua.

Tọa độ điểm $M$ thỏa mãn phương trình $f(x;m) = 0$.

**Bước 2**: Chuyển phương trình về phương trình ẩn $m$ dạng $Am + B = 0$
(hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$). Phương trình nghiệm đúng với mọi $m$.

Khi đó ta có $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$. Tìm được $x_0;y_0 \Rightarrow M\left(x_0;y_0\right)$.

**Bước 3:** Kết luận.

**Câu 1.** Tìm tọa độ giao điểm của các cặp đồ thị của các hàm số sau

a) $y=2x-3$ và $y=x^2-5x+9$.

b) $y=2x^2+x-3$ và $y=-x^2+3x+2$.

**Câu 2.** Cho parabol $y=-x^2+4x-2$ và đường thẳng $d: y=-2x+m$. Tìm các giá trị $m$ để

a) $d$ cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$. tìm tọa độ trung điểm của $AB$.

b) $d$ và $\left(P\right)$ có một điểm chung duy nhất. Tìm tọa độ điểm chung này.

c) $d$ không cắt $\left(P\right)$.

d) $d$ và $\left(P\right)$ có một giao điểm nằm trên đường thẳng $y=-2$.

**Câu 3.** Cho parabol $\left(P\right): y=x^2-4x+3$ và đường thẳng $d: y=mx+3$. Tìm các giá trị của $m$ để

a) $d$ và $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác $OAB$ bằng $\frac{9}{2}$.

b) $d$ cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=8$.

**Câu 4.** Chứng minh rằng với mọi $m$, đồ thị của mỗi hàm số sau luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và đỉnh $I$ của đồ thị luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

a) $y=x^2-mx+\frac{m^2}{4}-1$.

b) $y=x^2-2mx+m^2-1$.

**Câu 5.** Chứng minh rằng với mọi $m$, đồ thị hàm số $y=mx^2+2\left(m-2\right)x-3m+1$ luôn đi qua hai điểm cố định.

**Câu 6.** Chứng minh rằng các parabol sau luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

a) $y=2x^2-4\left(2m-1\right)x+8m^2-3$.

b) $y=mx^2-\left(4m-1\right)x+4m-1\left(m\neq 0\right)$.

**Câu 7.** Chứng minh rằng các đường thẳng sau luôn tiếp xúc vơi một parabol cố định.

a) $y=2mx-m^2+4m+2\left(m\neq 0\right)$.

b) $y=\left(4m-2\right)x-4m^2-2\left(m\neq \frac{1}{2}\right)$.

## DẠNG 4. MỘT SỐ CÂU HỎI THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ BẬC HAI

**Dạng 1:** Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học. Các bước làm như sau:

**Bước 1:** Dựa vào giả thiết và các yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả dưới "dạng ngôn ngữ toán học" cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Căn cứ vào các yếu tố bài ra ta chọn biến số, tìm điều kiện tồn tại, đơn vị.

**Bước 2:** Dựa vào các mối liên hệ ràng buộc giữa biến số với các giả thiết của đề bài cũng như các kiến thức liên quan đến thực tế, ta thiết lập hàm số bậc hai. Chuyển yêu cầu đặt ra đối với bài toán thực tiễn thành yêu cầu bài toán hàm số bậc hai.

**Bước 3:** Dùng tính chất hàm số bậc hai để giải quyết bài toán hình thành ở bước 2. Lưu ý kiểm tra điều kiện, và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.

**Dạng 2:** Các bài toán thực tế đã mô hình hóa bằng một hàm số bậc hai. Thực hiện bước 3 của dạng 1.

**Câu 1.** Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t) = -t^2 + 2t + 3$ (tính bằng mét), $t$ là thời gian tính bằng giây $(t \geq 0)$.

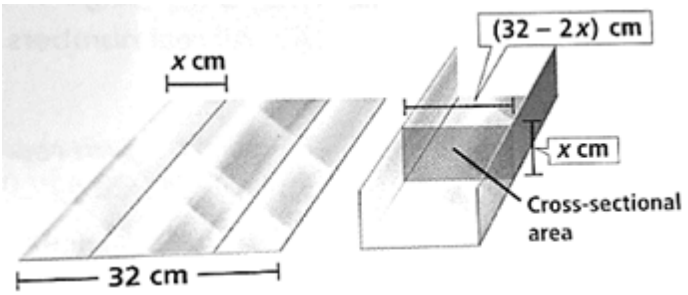
**a.** Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.

**b.** Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất?

**Câu 2.** Độ cao của quả bóng golf tính theo thời gian có thể được xác định bằng một hàm bậc hai. Với các thông số cho trong bảng sau, hãy xác định độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây?

| Thời gian (giây) | 0 | 0,5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Độ cao (mét) | 0 | 28 | 48 | 64 |

**Câu 3.** Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi $x$ bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang $S$ lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?




***Lời giải***

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang $x$ (cm) của phần gấp hai bên, ta có:

$S(x) = x(32 - 2x)$, với $0 < x < 16$.

Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;16)$.

Ta có: $S(x) = -2x^2 + 32x = -2(x-8)^2 + 128 \leq 128,\ \forall x \in (0;16)$.

$\Rightarrow \max S(x) = S(8) = 128$.

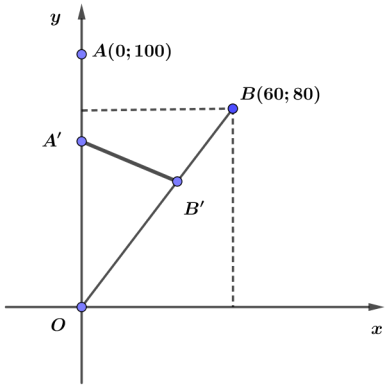
Vậy $x = 8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

**Câu 4.** Hai con chuồn chuồn bay trên hai quĩ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm.

Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0;100)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 5 m/s.

Con còn lại bay trên quĩ đạo là đường thẳng từ $B(60;80)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 10 m/s.

Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu?



**Câu 5.** Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để của hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### DẠNG 1. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ

**Câu 1.** Hàm số $y=ax^2+bx+c$, $(a>0)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\Delta}{4a};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

**Câu 2.** Cho hàm số $y=-x^2+4x+1$. Khẳng định nào sau đây sai?

**A.** Trên khoảng $(-\infty;1)$ hàm số đồng biến.

**B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

**C.** Trên khoảng $(3;+\infty)$ hàm số nghịch biến.

**D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;4)$.

**Câu 3.** Hàm số $y=4x-x^2$ có sự biến thiên trong khoảng $(2;+\infty)$ là

**A.** tăng. **B.** giảm.
**C.** vừa tăng vừa giảm. **D.** không tăng không giảm.

**Câu 4.** Hàm số $y=x^2-4x+11$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**A.** $(-2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;+\infty)$ **C.** $(2;+\infty)$ **D.** $(-\infty;2)$

**Câu 5.** Khoảng đồng biến của hàm số $y=x^2-4x+3$ là

**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;2)$.

**C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Câu 6.** Khoảng nghịch biến của hàm số $y=x^2-4x+3$ là

**A.** $(-\infty;-4)$. **B.** $(-\infty;-4)$.

**C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

**Câu 7.** Cho hàm số $y=-x^2+4x+3$. Chọn khẳng định đúng.

**A.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
**C.** Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

**Câu 8.** Hàm số $f(x)=x^2-2x+3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;+\infty)$.

**Câu 9.** Hàm số $y=2x^2-4x+1$ đồng biến trên khoảng nào?

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Câu 10.** Hàm số $y=-3x^2+x-2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(\dfrac{1}{6};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{6}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{6};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{6}\right)$.

**Câu 11.** Cho hàm số $y=-x^2+6x-1$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;3)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;6)$ **D.** $(6;+\infty)$

**Câu 12.** Cho hàm số $y=x^2-3mx+m^2+1$ $(1)$, $m$ là tham số. Khi $m=1$ hàm số đồng biến trên khoảng nào?

**A.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

**Câu 13.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=x^2-2(m+1)x-3$ đồng biến trên khoảng $(4;2018)$?

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

**Câu 14.** Tìm tất cả các giá trị của $b$ để hàm số $y=x^2+2(b+6)x+4$ đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$.

**A.** $b\geq 0$. **B.** $b=-12$.

**C.** $b\geq -12$. **D.** $b\geq -9$.

**Câu 15.** Hàm số $y=-x^2+2(m-1)x+3$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ khi giá trị $m$ thỏa mãn:

**A.** $m\leq 0$. **B.** $m>0$. **C.** $m\leq 2$. **D.** $0<m\leq 2$

**Câu 16.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=-x^2+2|m+1|x-3$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m\leq -3 \\ m\geq 1 \end{array}\right.$. **B.** $-3<m<1$. **C.** $-3\leq m\leq 1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right.$.

**Câu 17.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=x^2+(m-1)x+2m-1$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$. Khi đó tập hợp $(-10;10)\cap S$ là tập nào?

**A.** $(-10;5)$. **B.** $[5;10)$. **C.** $(5;10)$. **D.** $(-10;5]$.

**Câu 18.** Tìm tất cả các giá trị dương của tham số $m$ để hàm số $f(x)=mx^2-4x-m^2$ luôn nghịch biến trên $(-1;2)$.

**A.** $m\leq 1$. **B.** $-2\leq m\leq 1$. **C.** $0<m\leq 1$. **D.** $0<m<1$.

**Câu 19.** Bảng biến thiên của hàm số $y=-2x^2+4x+1$ là bảng nào sau đây?

**A.**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**B.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

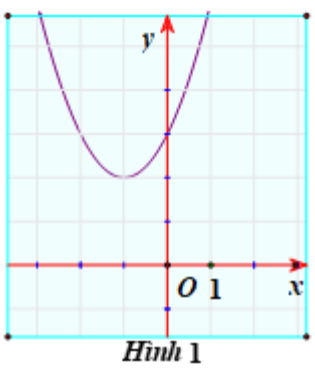
**C.**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

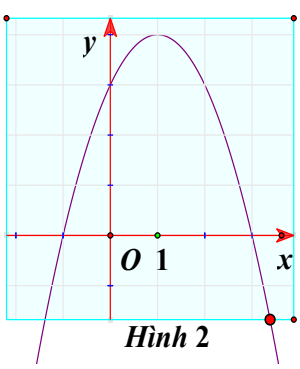
**D.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

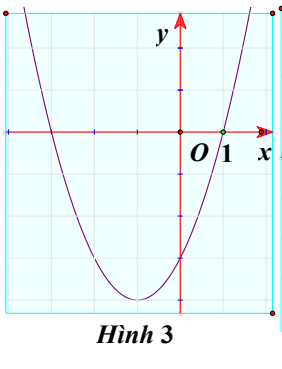
**Câu 20.** Đồ thị nào sau đây là đồ thị của hàm số $y=x^2-2x-3$



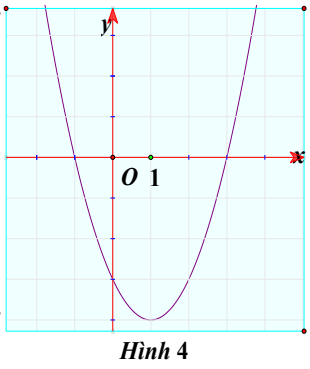
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

**A.** Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

**Câu 21.** Bảng biến thi của hàm số $y=-2x^4+4x+1$ là bảng nào sau đây?

**A.**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**B.**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $-\infty$ |

**C.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**D.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $-\infty$ |

**Câu 22.** Bảng biến thiên của hàm số $y=-x^2+2x-1$ là:

**A.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**B.**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**C.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**D.**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Câu 23.** Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y=-x^2+2x+2$?

**A.**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**B.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | |
| | $-\infty$ | | | | |

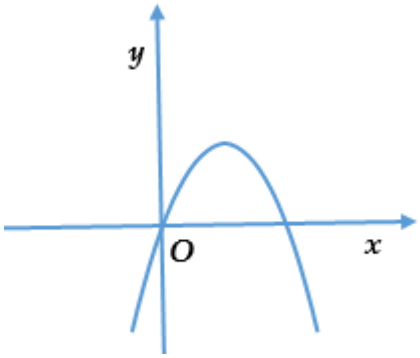
**C.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**D.**

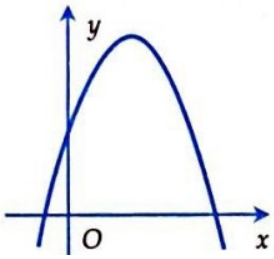
| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Câu 24.** Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ có hệ số $a$ là




**A.** $a>0$. **B.** $a<0$. **C.** $a=1$. **D.** $a=2$.

**Câu 25.** Cho parabol $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào dưới đây đúng?



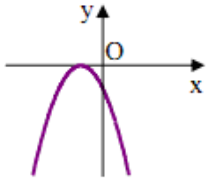

**A.** $a<0, b>0, c<0$

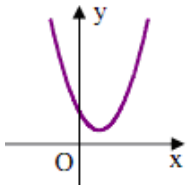
**B.** $a<0, b<0, c<0$

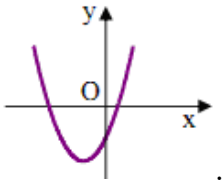
**C.** $a<0, b>0, c>0$

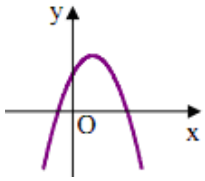
**D.** $a<0, b<0, c>0$

**Câu 26.** Nếu hàm số $y=ax^2+bx+c$ có $a>0$, $b>0$ và $c<0$ thì đồ thị hàm số của nó có dạng

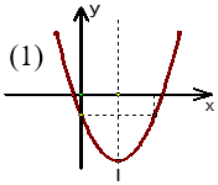
**A.** 

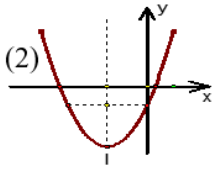

**B.** 

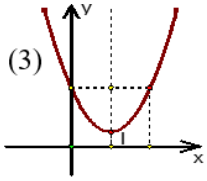

**C.** 

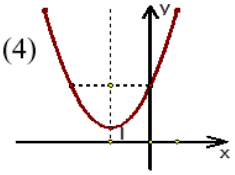

**D.** 


**Câu 27.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c, (a>0, b<0, c>0)$ thì đồ thị (P) của hàm số là hình nào trong các hình sau:



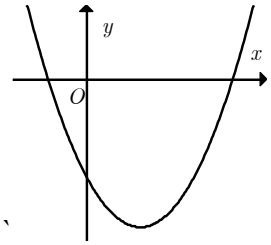




**A.** Hình (4). **B.** Hình (2). **C.** Hình (3). **D.** Hình (1)

**Câu 28.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?




**A.** $a>0,\ b<0,\ c<0$. **B.** $a>0,\ b<0,\ c>0$.

**C.** $a>0,\ b>0,\ c>0$. **D.** $a<0,\ b<0,\ c<0$.

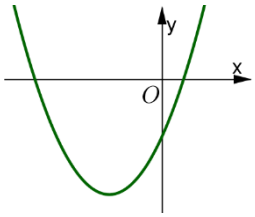
**Câu 29.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c, (a\neq 0)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ như hình vẽ dưới đây:

| $x$ | $0$ | $-\dfrac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $-\dfrac{\Delta}{4a}$ | $-\infty$ |

Xác định dấu của $a$, $b$, $c$.

**A.** $a<0, b<0, c>0$. **B.** $a<0, b>0, c>0$. **C.** $a<0, b>0, c>0$. **D.** $a<0, b>0, c<0$.

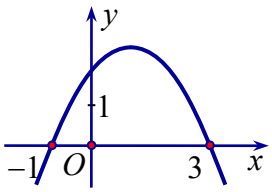
**Câu 30.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị là parabol trong hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?




**A.** $a>0;\ b>0;\ c>0$. **B.** $a>0;\ b<0;\ c>0$.

**C.** $a>0;\ b<0;\ c<0$. **D.** $a>0;\ b>0;\ c<0$.

**Câu 31.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên.

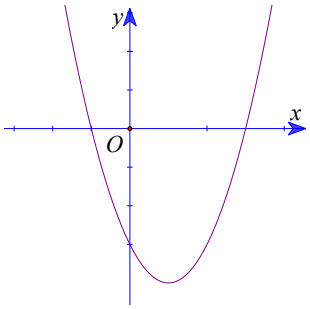



Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $a>0,\ b>0,\ c>0$. **B.** $a>0,\ b<0,\ c<0$.

**C.** $a<0,\ b<0,\ c>0$. **D.** $a<0,\ b>0,\ c>0$.

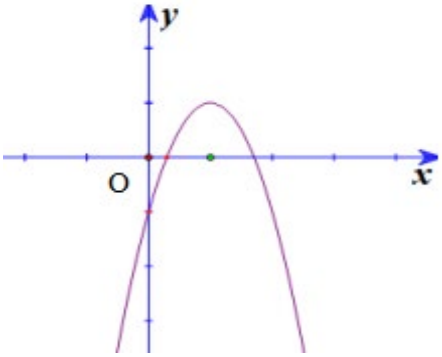
**Câu 32.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như bên.




Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $a>0, b<0, c<0$.. **B.** $a>0, b<0, c>0$.. **C.** $a>0, b>0, c<0$.. **D.** $a<0, b<0, c>0$.

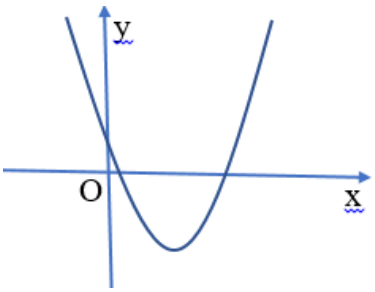
**Câu 33.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$. Có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi mệnh đề nào đúng?




**A.** $a<0, b>0, c<0$. **B.** $a<0, b<0, c>0$.

**C.** $a<0, b<0, c<0$. **D.** $a>0, b>0, c<0$.

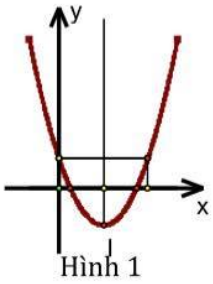
**Câu 34.** Cho đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



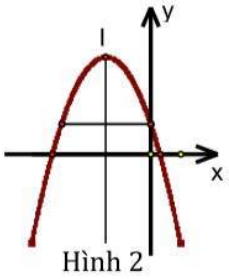

**A.** $a>0,b=0,c>0$. **B.** $a>0,b>0,c>0$.

**C.** $a>0,b<0,c>0$. **D.** $a<0,b>0,c>0$.

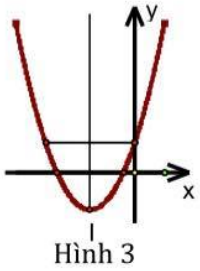
**Câu 35.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có $a<0;b<0;c>0$ thì đồ thị $(P)$ của hàm số là hình nào trong các hình dưới đây



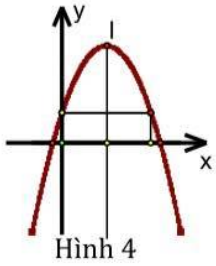
Hình 1



Hình 2



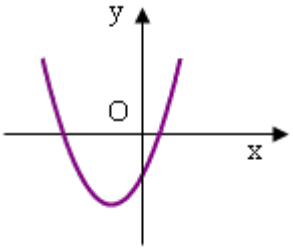
Hình 3



Hình 4

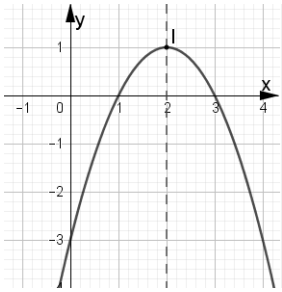
**A.** hình $(4)$. **B.** hình $(3)$. **C.** hình $(2)$. **D.** hình $(1)$.

**Câu 36.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



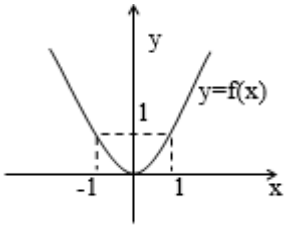

**A.** $a>0,b>0,c>0$. **B.** $a>0,b>0,c<0$. **C.** $a>0,b<0,c<0$. **D.** $a>0,b<0,c>0$.

**Câu 37.** Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



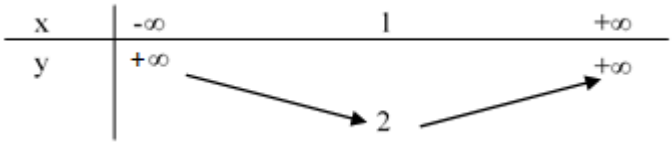

**A.** $y=-x^2+4x-3$. **B.** $y=-x^2-4x-3$. **C.** $y=-2x^2-x-3$. **D.** $y=x^2-4x-3$.

**Câu 38.** Đồ thị hàm số sau biểu diễn đồ thị hàm số nào?




**A.** $y=2x^2$. **B.** $y=x^2$. **C.** $y=-x^2$. **D.** $y=\frac{1}{2}x^2$.

**Câu 39.** Bảng biến thiên sau là của hàm số nào ?



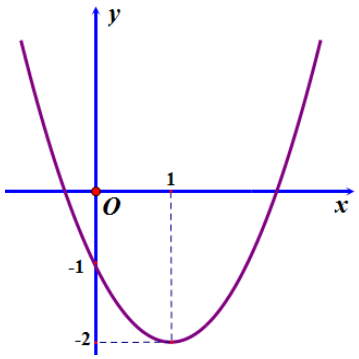

**A.** $y=2x^2-4x+4$. **B.** $y=-3x^2+6x-1$. **C.** $y=x^2+2x-1$. **D.** $y=x^2-2x+2$.

**Câu 40.** Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

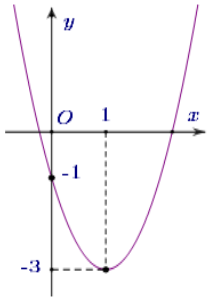
**A.** $y=x^2-4x$. **B.** $y=x^2+4x$. **C.** $y=-x^2+4x$. **D.** $y=-x^2-4x$.

**Câu 41.** Đồ thị trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các phương án A;B;C;D sau đây?




**A.** $y=x^2+2x-1$. **B.** $y=x^2+2x-2$. **C.** $y=2x^2-4x-2$. **D.** $y=x^2-2x-1$.

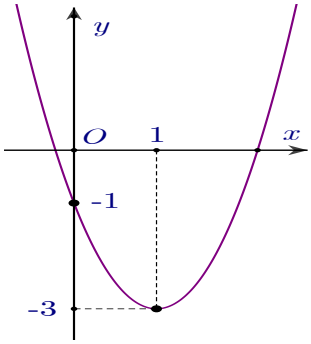
**Câu 42.** Cho parabol $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình sau




Phương trình của parabol này là

**A.** $y=-x^2+x-1$. **B.** $y=2x^2+4x-1$. **C.** $y=x^2-2x-1$. **D.** $y=2x^2-4x-1$.

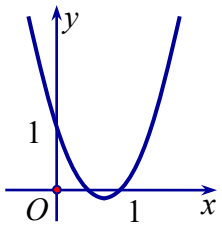
**Câu 43.** Cho parabol $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình sau:




Phương trình của parabol này là

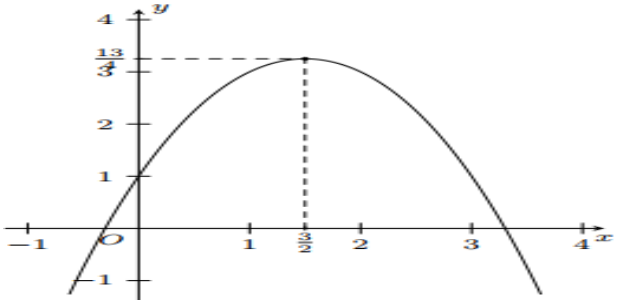
**A.** $y=-x^2+x-1$. **B.** $y=2x^2+4x-1$. **C.** $y=x^2-2x-1$. **D.** $y=2x^2-4x-1$.

**Câu 44.** Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số bậc hai nào?




**A.** $y=x^2-3x+1$. **B.** $y=2x^2-3x+1$. **C.** $y=-x^2+3x-1$. **D.** $y=-2x^2+3x-1$.

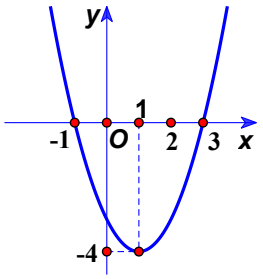
**Câu 45.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho Parabol như hình vẽ.




Hỏi parabol có phương trình nào trong các phương trình dưới đây?

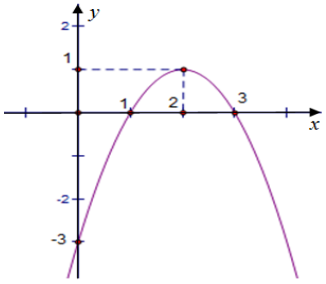
**A.** $y=x^2+3x-1$. **B.** $y=x^2-3x-1$. **C.** $y=-x^2-3x-1$. **D.** $y=-x^2+3x+1$.

**Câu 46.** Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+c, (a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $2a+b+2c$ có giá trị là




**A.** $-9$. **B.** $9$. **C.** $-6$. **D.** $6$.

**Câu 47.** Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên dưới



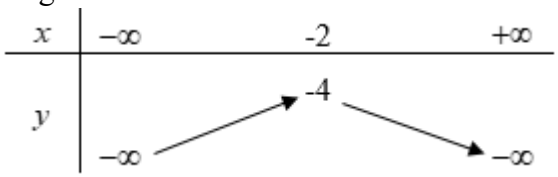

**A.** $y=-x^2+2x-3$. **B.** $y=-x^2+4x-3$. **C.** $y=x^2-4x+3$. **D.** $y=x^2-2x-3$.

**Câu 48.** Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $-5$ | ↗ | $+\infty$ |

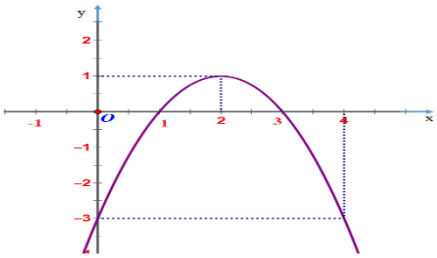
**A.** $y=-x^2+4x$. **B.** $y=-x^2+4x-9$. **C.** $y=x^2-4x-1$. **D.** $y=x^2-4x-5$.

**Câu 49.** Bảng biến thiên sau đây là bảng biến thiên của hàm số nào?

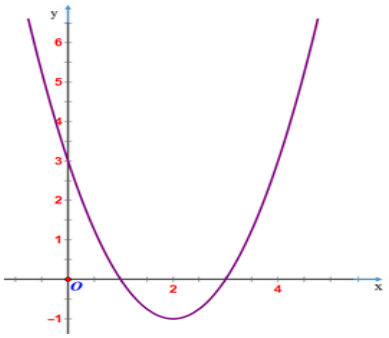



**A.** $y=x^2+4x$. **B.** $y=-x^2-4x-8$. **C.** $y=-x^2-4x+8$. **D.** $y=-x^2-4x$.

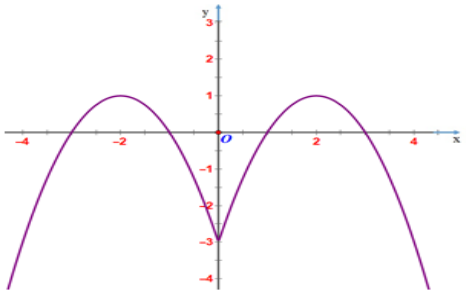
**Câu 50.** Cho đồ thị hàm số $y=-x^2+4x-3$ có đồ thị như hình vẽ sau



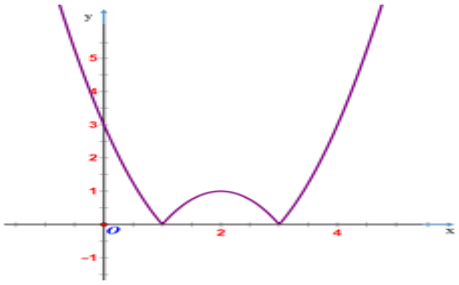
Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\left|-x^2+4x-3\right|$



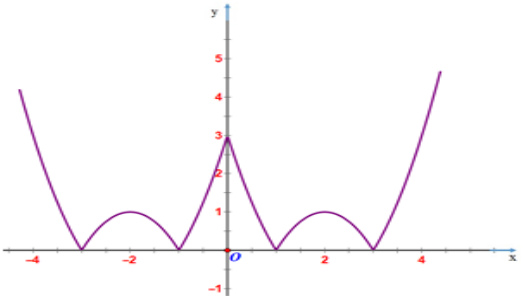
Hình 1



Hình 2



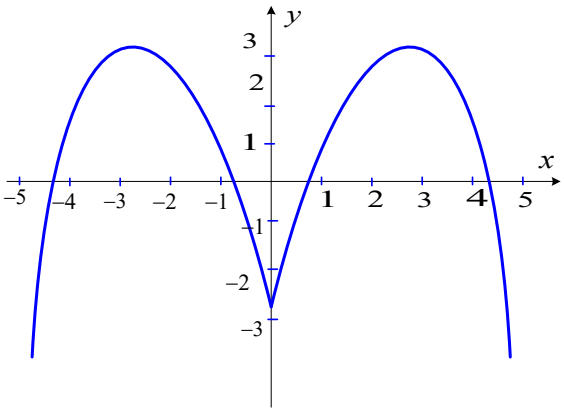
Hình 3



Hình 4

**A.** Hình 2 **B.** Hình 4 **C.** Hình 1 **D.** Hình 3

**Câu 51.** Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?




**A.** $y=x^2-3x-3$. **B.** $y=-x^2+5\left|x\right|-3$. **C.** $y=-x^2-3\left|x\right|-3$. **D.** $y=-x^2+5x-3$.

**Câu 52.** Cho hàm số $y=x^2-2x+4$ có đồ thị $(P)$. Tìm mệnh đề sai.

**A.** $(P)$ có đỉnh $I(1;3)$. **B.** $\min y = 4, \forall x \in [0;3]$.

**C.** $(P)$ có trục đối xứng $x = 1$. **D.** $\max y = 7, \forall x \in [0;3]$.

**Câu 53.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$.

**A.** $-3$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $13$.

**Câu 54.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2x + 3$ đạt được tại

**A.** $x = -2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 1$.

**Câu 55.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^2 + x - 3$ là

**A.** $-3$. **B.** $-2$. **C.** $\frac{-21}{8}$. **D.** $\frac{-25}{8}$.

**Câu 56.** Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{12}$

**B.** Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{12}$

**C.** Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{3}$

**D.** Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{3}$.

**Câu 57.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5x^2 + 2x + 1$ trên đoạn $[-2;2]$ là:

**A.** 17 **B.** 25 **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** $\frac{16}{5}$

**Câu 58.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^2 + 2x + 1$ trên đoạn $[1;3]$ là:

**A.** $\frac{4}{5}$ **B.** $0$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $-20$

**Câu 59.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng:

**A.** $\frac{11}{8}$ **B.** $\frac{11}{4}$ **C.** $\frac{4}{11}$ **D.** $\frac{8}{11}$

**Câu 60.** Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ trên miền $[-1;4]$ là

**A.** $-1$. **B.** $2$. **C.** $7$. **D.** $8$.

**Câu 61.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2|x|$ là:

**A.** 1 **B.** 0 **C.** $-1$ **D.** $-2$

**Câu 62.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 4|x| + 3$ là:

**A.** $-1$ **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

**Câu 63.** Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 8 & \text{khi } x \le 2 \\ 2x - 12 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Gọi $M, m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $x \in [-1;4]$. Tính $M + m$.

**A.** $-14$. **B.** $-13$. **C.** $-4$. **D.** $-9$.

**Câu 64.** Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-10$ trên $\mathbb{R}$.

**A.** $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-1$.

**Câu 65.** Hàm số $y=-x^2+2x+m-4$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;2]$ bằng 3 khi $m$ thuộc

**A.** $(-\infty;5)$. **B.** $[7;8)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(9;11)$.

**Câu 66.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+2mx+5$ bằng 1 khi giá trị của tham số $m$ là

**A.** $m=\pm 4$. **B.** $m=4$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m\in\varnothing$.

**Câu 67.** Giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=x^2-2mx+m^2-3m-2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-10$ trên $\mathbb{R}$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**A.** $m\in[-1;0)$. **B.** $m\in\left(\frac{3}{2};5\right)$. **C.** $m\in\left(-\frac{5}{2};-1\right)$. **D.** $m\in\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

**Câu 68.** Tìm $m$ để hàm số $y=x^2-2x+2m+3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng $-3$.

**A.** $m=0$. **B.** $m=-9$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-3$.

**Câu 69.** Tìm $m$ để hàm số $y=x^2-2x+2m+3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng $-3$.

**A.** $m=-3$. **B.** $m=-9$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

**Câu 70.** Tìm số các giá trị của tham số $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^2+(2m+1)x+m^2-1$ trên đoạn $[0;1]$ là bằng 1.

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

**Câu 71.** Cho hàm số $f(x)=x^2-2\left(m+\frac{1}{m}\right)x+m$. Đặt $m=\min\limits_{x\in[-1;1]}f(x)$ và $M=\max\limits_{x\in[-1;1]}f(x)$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho $M-m=8$. Tính tổng bình phương các phần tử thuộc $S$.

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

**Câu 72.** Cho hàm số $y=2x^2-3(m+1)x+m^2+3m-2$, $m$ là tham số. Giá trị của $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số là lớn nhất thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $m\in(1;4)$. **B.** $m\in(3;9)$. **C.** $m\in(-5;1)$. **D.** $m\in(-2;2)$.

**Câu 73.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $a$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=4x^2-4ax+(a^2-3x+2)$ trên đoạn $[0;2]$ là bằng 3.

**A.** $\{-1;4+\sqrt{7}\}$. **B.** $\{4+\sqrt{7}\}$. **C.** $\{-1\}$. **D.** $\{1;4-\sqrt{7}\}$.

**Câu 74.** Cho hàm số $y=2x^2-3(m+1)x+m^2+3m-2$, $m$ là tham số. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số là lớn nhất.

**A.** $m=-2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=3$ **D.** $m=5$

**Câu 75.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị dương của tham số $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=4x^2-4mx+m^2-2m$ trên đoạn $[-2;0]$ bằng 3. Tính tổng $T$ các phần tử của $S$.

**A.** $T=3$. **B.** $T=\frac{1}{2}$. **C.** $T=\frac{9}{2}$. **D.** $T=-\frac{3}{2}$.

**Câu 76.** Cho hàm số $y=x^2-\left(m+\sqrt{m^2-4}\right)x+4m+2\sqrt{m^2-4}\,(m\neq 0)$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;1]$ lần lượt là $y_1;y_2$. Số giá trị của $m$ để $y_1-y_2=8$ là

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

**Câu 77.** Giả sử hàm số $y=-x^2+2x+4\sqrt{(3-x)(x+1)}+3$ có tập giá trị $W=[a;b]$. Hãy tính giá trị của biểu thức $K=a^2+b^2$.

**A.** $K=145$. **B.** $K=144$. **C.** $K=143$. **D.** $169$.

## DẠNG 2. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

**Câu 1.** Cho hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ có đồ thị $(P)$, đỉnh của $(P)$ được xác định bởi công thức nào?

**A.** $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$. **B.** $I\left(-\frac{b}{a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$. **C.** $I\left(\frac{b}{a};\frac{\Delta}{4a}\right)$. **D.** $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{2a}\right)$.

**Câu 2.** Cho parabol $(P):y=3x^2-2x+1$. Điểm nào sau đây là đỉnh của $(P)$?

**A.** $I(0;1)$. **B.** $I\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **C.** $I\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **D.** $I\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

**Câu 3.** Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ là đường thẳng nào dưới đây?

**A.** $x=-\frac{b}{2a}$. **B.** $x=-\frac{c}{2a}$. **C.** $x=-\frac{\Delta}{4a}$. **D.** Không có.

**Câu 4.** Điểm $I(-2;1)$ là đỉnh của Parabol nào sau đây?

**A.** $y=x^2+4x+5$. **B.** $y=2x^2+4x+1$. **C.** $y=x^2+4x-5$. **D.** $y=-x^2-4x+3$.

**Câu 5.** Xác định các hệ số $a$ và $b$ để Parabol $(P):y=ax^2+4x-b$ có đỉnh $I(-1;-5)$.

**A.** $\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$.

**Câu 6.** Biết hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị là một đường Parabol đi qua điểm $A(-1;0)$ và có đỉnh $I(1;2)$. Tính $a+b+c$.

**A.** $3$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $2$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Câu 7.** Biết đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$, $(a,b,c\in\mathbb{R};a\neq 0)$ đi qua điểm $A(2;1)$ và có đỉnh $I(1;-1)$. Tính giá trị biểu thức $T=a^3+b^2-2c$.

**A.** $T=22$. **B.** $T=9$. **C.** $T=6$. **D.** $T=1$.

**Câu 8.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ có đồ thị (P). Biết đồ thị của hàm số có đỉnh $I(1;1)$ và đi qua điểm $A(2;3)$. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $29$. **D.** $1$.

**Câu 9.** Cho Parabol $(P):y=x^2+mx+n$ ($m,n$ tham số). Xác định $m,n$ để $(P)$ nhận đỉnh $I(2;-1)$.

**A.** $m=4,n=-3$. **B.** $m=4,n=3$. **C.** $m=-4,n=-3$. **D.** $m=-4,n=3$.

**Câu 10.** Cho Parabol (P): $y=ax^2+bx+c$ có đỉnh $I(2;0)$ và $(P)$ cắt trục $Oy$ tại điểm $M(0;-1)$. Khi đó Parabol (P) có hàm số là

**A.** $(P):y=-\frac{1}{4}x^2-3x-1$. **B.** $(P):y=-\frac{1}{4}x^2-x-1$.

**C.** $(P):y=-\frac{1}{4}x^2+x-1$. **D.** $(P):y=-\frac{1}{4}x^2+2x-1$

**Câu 11.** Gọi $S$ là tập các giá trị $m\neq 0$ để parabol $(P):y=mx^2+2mx+m^2+2m$ có đỉnh nằm trên đường thẳng $y=x+7$. Tính tổng các giá trị của tập $S$

**A.** $-1$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $-2$.

**Câu 12.** Xác định hàm số $y=ax^2+bx+c(1)$ biết đồ thị của nó có đỉnh $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $2$.

**A.** $y=-x^2+3x+2$. **B.** $y=-x^2-3x-2$. **C.** $y=x^2-3x+2$. **D.** $y=-x^2+3x-2$.

**Câu 13.** Hàm số bậc hai nào sau đây có đồ thị là parabol có đỉnh là $S\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đi qua $A(1;-4)$?

**A.** $y=-x^2+5x-8$. **B.** $y=-2x^2+10x-12$.

**C.** $y=x^2-5x$. **D.** $y=-2x^2+5x+\frac{1}{2}$.

**Câu 14.** Cho parabol $(P)$ có phương trình $y=ax^2+bx+c$. Tìm $a+b+c$, biết $(P)$ đi qua điểm $A(0;3)$ và có đỉnh $I(-1;2)$.

**A.** $a+b+c=6$ **B.** $a+b+c=5$ **C.** $a+b+c=4$ **D.** $a+b+c=3$

**Câu 15.** Parabol $y=ax^2+bx+c$ đạt cực tiểu bằng $4$ tại $x=-2$ và đi qua $A(0;6)$ có phương trình là

**A.** $y=\frac{1}{2}x^2+2x+6$. **B.** $y=x^2+2x+6$. **C.** $y=x^2+6x+6$. **D.** $y=x^2+x+4$.

**Câu 16.** Parabol $y=ax^2+bx+c$ đi qua $A(0;-1)$, $B(1;-1)$, $C(-1;1)$ có phương trình là

**A.** $y=x^2-x+1$. **B.** $y=x^2-x-1$. **C.** $y=x^2+x-1$. **D.** $y=x^2+x+1$.

**Câu 17.** Parabol $y=ax^2+bx+2$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ có phương trình là

**A.** $y=x^2+x+2$. **B.** $y=2x^2+x+2$. **C.** $y=2x^2+2x+2$ **D.** $y=x^2+2x$

**Câu 18.** Cho $(P):y=x^2+bx+1$ đi qua điểm $A(-1;3)$. Khi đó

**A.** $b=-1$. **B.** $b=1$. **C.** $b=3$. **D.** $b=-2$.

**Câu 19.** Cho parabol $(P):y=ax^2+bx+c$ đi qua ba điểm $A(1;4),B(-1;-4)$ và $C(-2;-11)$. Tọa độ đỉnh của $(P)$ là:

**A.** $(-2;-11)$ **B.** $(2;5)$ **C.** $(1;4)$ **D.** $(3;6)$

## DẠNG 3. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA PARABOL VỚI ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ KHÁC

**Câu 1.** Giao điểm của parabol $(P):y=x^2-3x+2$ với đường thẳng $y=x-1$ là:

**A.** $(1;0);(3;2)$. **B.** $(0;-1);(-2;-3)$.

**C.** $(-1;2);(2;1)$. **D.** $(2;1);(0;-1)$.

**Câu 2.** Tọa độ giao điểm của $(P):y=x^2-4x$ với đường thẳng $d:y=-x-2$ là

**A.** $M(0;-2)$, $N(2;-4)$. **B.** $M(-1;-1)$, $N(-2;0)$.

**C.** $M(-3;1)$, $N(3;-5)$. **D.** $M(1;-3)$, $N(2;-4)$.

**Câu 3.** Cho hàm số $y=2x^2-3x+1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?.

**A.** Đồ thị hàm số không cắt trục tung. **B.** Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại gốc tọa độ.

**C.** Đồ thị hàm số không có trục đối xứng. **D.** Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1$.

**Câu 4.** Tọa độ giao điểm của đường thẳng $d:y=-x+4$ và parabol $y=x^2-7x+12$ là

**A.** $(-2;6)$ và $(-4;8)$. **B.** $(2;2)$ và $(4;8)$. **C.** $(2;-2)$ và $(4;0)$. **D.** $(2;2)$ và $(4;0)$.

**Câu 5.** Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=1-x$ với $(P):y=x^2-2x+1$ là

**A.** $x=0;\ x=1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0;\ x=2$. **D.** $x=0$.

**Câu 6.** Gọi $A(a;b)$ và $B(c;d)$ là tọa độ giao điểm của $(P):y=2x-x^2$ và $\Delta:y=3x-6$. Giá trị của $b+d$ bằng.

**A.** 7. **B.** $-7$. **C.** 15. **D.** $-15$.

**Câu 7.** Cho parabol $(P)$ có phương trình $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x-1)=x^2-5x+5\ \forall x\in\mathbb{R}$. Số giao điểm của $(P)$ và trục hoành là:

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

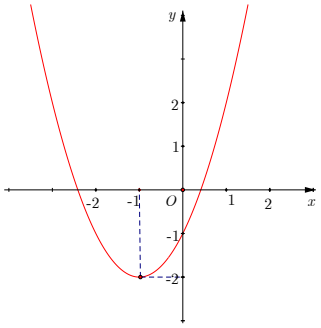
**Câu 8.** Cho hai parabol có phương trình $y=x^2+x+1$ và $y=2x^2-x-2$. Biết hai parabol cắt nhau tại hai điểm $A$ và $B$ ($x_A<x_B$). Tính độ dài đoạn thẳng $AB$.

**A.** $AB=4\sqrt{2}$ **B.** $AB=2\sqrt{26}$ **C.** $AB=4\sqrt{10}$ **D.** $AB=2\sqrt{10}$

**Câu 9.** Giá trị nào của $m$ thì đồ thị hàm số $y=x^2+3x+m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt?

**A.** $m<-\frac{9}{4}$. **B.** $m>-\frac{9}{4}$. **C.** $m>\frac{9}{4}$. **D.** $m<\frac{9}{4}$.

**Câu 10.** Hàm số $y=x^2+2x-1$ có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị $m$ để phương trình $x^2+2x+m=0$ vô nghiệm.




**A.** $m<-2$. **B.** $m<-1$. **C.** $m<1$. **D.** $m>1$.

**Câu 11.** Hỏi có bao nhiêu giá trị $m$ nguyên trong nửa khoảng $[-10;-4)$ để đường thẳng $d:y=-(m+1)x+m+2$ cắt parabol $(P):y=x^2+x-2$ tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung?

**A.** 6 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 8

**Câu 12.** Cho parabol $(P):y=x^2-mx$ và đường thẳng $(d):y=(m+2)x+1$, trong đó $m$ là tham số. Khi parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt $M$, $N$, tập hợp trung điểm $I$ của đoạn thẳng $MN$ là:

**A.** một parabol **B.** một đường thẳng
**C.** một đoạn thẳng **D.** một điểm

**Câu 13.** Cho hàm số $y=x^2+3x$ có đồ thị $(P)$. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị của tham số $m$ để đường thẳng $d:y=x+m^2$ cắt đồ thị $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A,B$ sao cho trung điểm $I$ của đoạn $AB$ nằm trên đường thẳng $d':y=2x+3$. Tổng bình phương các phần tử của $S$ là

**A.** 6. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 14.** Cho hàm số $y=x^2-3mx+m^2+1\ (1)$, $m$ là tham số và đường thẳng $(d)$ có phương trình $y=mx+m^2$. Tính giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $(1)$ cắt đường thẳng $(d)$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1$, $x_2$ thoả mãn $\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=1$.

**A.** $m=\frac{3}{4}$. **B.** $m=-\frac{3}{4}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\frac{4}{3}$.

**Câu 15.** Cho hàm số $y=2x^2-3x-5(1)$. Giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $(1)$ cắt đường thẳng $y=4x+m$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;x_2)$ thỏa mãn $2x_1^2+2x_2^2=3x_1x_2+7$ là

**A.** $-10$. **B.** $10$. **C.** $-6$. **D.** $9$.

**Câu 16.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để đường thẳng $y=mx-3$ không có điểm chung với Parabol $y=x^2+1$?

**A.** $6$. **B.** $9$. **C.** $7$. **D.** $8$.

**Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị $m$ để đường thẳng $y=mx+3-2m$ cắt parabol $y=x^2-3x-5$ tại $2$ điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

**A.** $m<-3$. **B.** $-3<m<4$. **C.** $m<4$. **D.** $m\le 4$.

**Câu 18.** Tìm $m$ để Parabol $(P):y=x^2-2(m+1)x+m^2-3$ cắt trục hoành tại $2$ điểm phân biệt có hoành độ $x_1$, $x_2$ sao cho $x_1.x_2=1$.

**A.** $m=2$. **B.** Không tồn tại $m$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=\pm 2$.

**Câu 19.** Cho parabol $(P):y=x^2+2x-5$ và đường thẳng $d:y=2mx+2-3m$. Tìm tất cả các giá trị $m$ để $(P)$ cắt $d$ tại hai điểm phân biệt nằm về phía bên phải của trục tung.

**A.** $1<m<\frac{7}{3}$. **B.** $m>1$. **C.** $m>\frac{7}{3}$. **D.** $m<1$

**Câu 20.** Gọi $T$ là tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ để parabol $(P):y=x^2-4x+m$ cắt trục $Ox$ tại hai điểm phân biệt $A,B$ thỏa mãn $OA=3OB$. Tính $T$.

**A.** $T=-9$. **B.** $T=\frac{3}{2}$. **C.** $T=-15$. **D.** $T=3$.

**Câu 21.** Tìm $m$ để Parabol $(P):y=x^2-2(m+1)x+m^2-3$ cắt trục hoành tại $2$ điểm phân biệt có hoành độ $x_1$, $x_2$ sao cho $x_1.x_2=1$.

**A.** $m=2$. **B.** Không tồn tại $m$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=\pm 2$.

**Câu 22.** Cho parabol $(P):y=ax^2+bx+c$. Tìm $a-b+c$, biết rằng đường thẳng $y=-2,5$ có một điểm chung duy nhất với $(P)$ và đường thẳng $y=2$ cắt $(P)$ tại hai điểm có hoành độ là $-1$ và 5.

**A.** $a-b-c=-2$ **B.** $a-b-c=2$

**C.** $a-b-c=1$ **D.** $a-b-c=-1$

**Câu 23.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $x^2-2|x|+1-m=0$ có bốn nghiệm phân biệt?

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

**Câu 24.** Biết $S=(a;b)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=|x^2-4x+3|$ tại bốn điểm phân biệt. Tìm $a+b$.

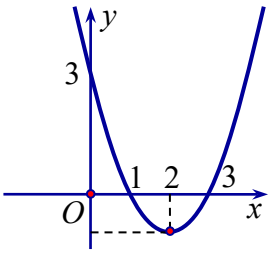
**A.** $a+b=1$ **B.** $a+b=-1$ **C.** $a+b=2$ **D.** $a+b=-2$

**Câu 25.** Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $|x|\sqrt{x^2-4|x|+4}=m$ có 6 nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tính $a+b$.

**A.** $a+b=6$ **B.** $a+b=4$

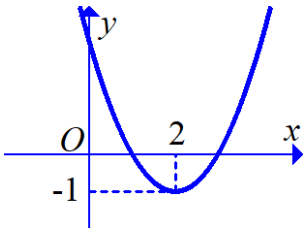
**C.** $a+b=1$ **D.** $a+b=2$

**Câu 26.** Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị $(C)$ (như hình vẽ). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f^2(|x|)+(m-2)f(|x|)+m-3=0$ có 6 nghiệm phân biệt?



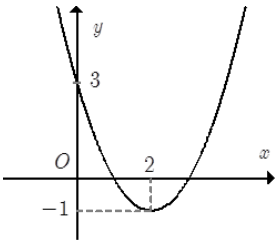

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

**Câu 27.** Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Với những giá trị nào của tham số $m$ thì phương trình $|f(x)|=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.




**A.** $0<m<1$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $m=-1;\ m=3$. **D.** $m>3$.

**Câu 28.** Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ.

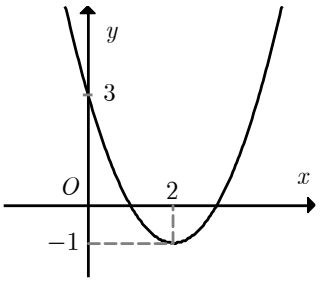



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $|ax^2-bx+c|=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

**A.** $0<m<1$. **B.** $m=0$.

**C.** $m=1$. **D.** không có giá trị của m.

**Câu 29.** Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực $m$ thì phương trình $f(|x|)+1=m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt




**A.** $m=4$. **B.** $m>0$. **C.** $m>-1$. **D.** $m=2$.

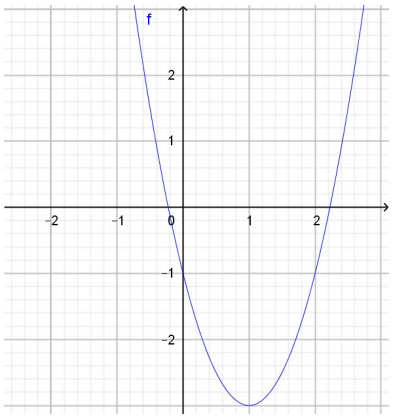
**Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để parabol $(P): y = x^2 - 2|x| - 1$ cắt đường thẳng $y = m - 3$ tại 4 điểm phân biệt.

**A.** $-2 < m < -1$. **B.** $1 < m < 2$. **C.** $-2 \le m \le -1$. **D.** $1 \le m \le 2$.

**Câu 31.** Với giá trị nào của $m$ thì phương trình $m = |x^2 - 5x + 4|$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

**A.** $m \le \frac{9}{4}$. **B.** $m \ge \frac{9}{4}$. **C.** $m = \frac{9}{4}$. **D.** $m = 0$.

**Câu 32.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ cắt đường $y = m + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ tại 4 điểm phân biệt là?




**A.** $-3 < m < 0$. **B.** $0 < m < 3$. **C.** $1 < m < 4$. **D.** $-1 < m < 2$.

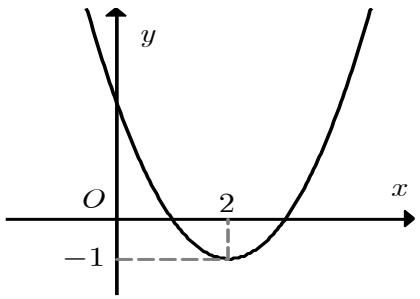
**Câu 33.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt.

**A.** $m < -3$. **B.** $m > -\frac{81}{4}$. **C.** $-\frac{81}{4} < m < 0$. **D.** $m > 0$.

**Câu 34.** Cho phương trình $x^2 - 2x - 2|x - m| + 1 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để phương trình có 3 nghiệm thực?

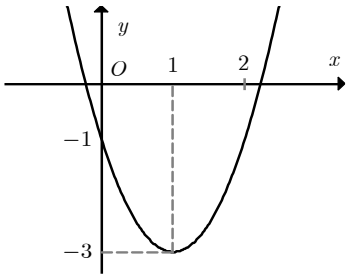
**A.** 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 35.** Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình đưới đây. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



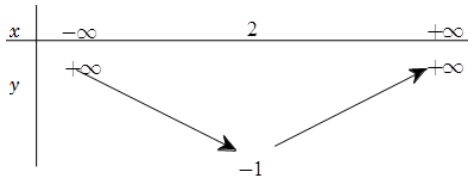

**A.** $-1 < m < 0$. **B.** $m > 3$. **C.** $m = -1,\ m = 3$. **D.** $0 < m < 1$.

**Câu 36.** Cho đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ như hình bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị $m$ nguyên trong đoạn $[0; 2018]$ để phương trình $|ax^2 + b|x| + c| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?




**A.** 2016. **B.** 2015. **C.** 2018. **D.** 2017.

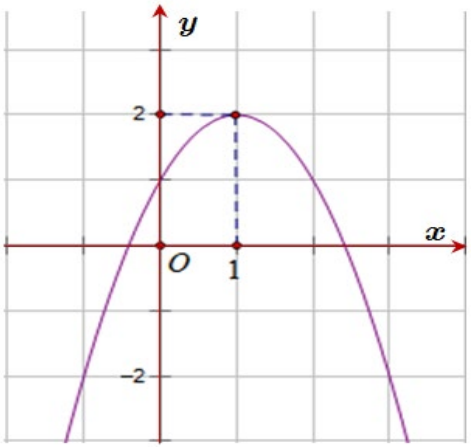
**Câu 37.** Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có bảng biến thiên như sau:




Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $\left|f(2017x-2018)-2\right|=m$ có đúng ba nghiệm.

**A.** $m=1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** không tồn tại $m$.

**Câu 38.** Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $f(-x)+m-2019=0$ có duy nhất một nghiệm.

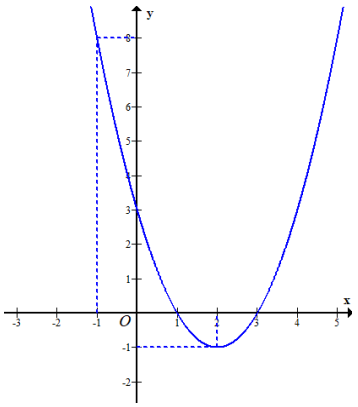



**A.** $m=2015$. **B.** $m=2016$. **C.** $m=2017$. **D.** $m=2019$.

**Câu 39.** Cho đồ thị hàm số $y=x^2-4\left|x\right|+2$ như hình vẽ dưới đây. Tìm $m$ để phương trình $x^2-4\left|x\right|-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt?

**A.** $-4<m<0$ **B.** $-2<m<2$ **C.** $0<m<4$ **D.** $-2\le m\le 2$

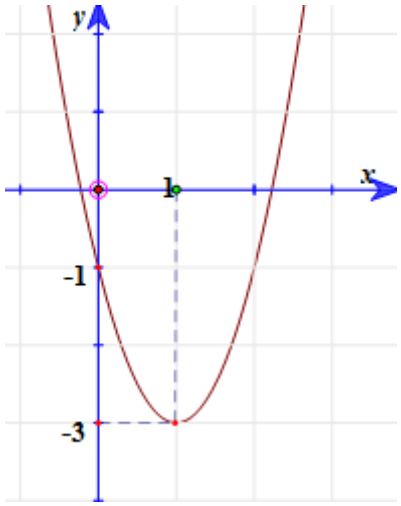
**Câu 40.** Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị $(C)$(như hình vẽ):



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f^2\left(|x|\right)+\left(m-2\right)f\left(|x|\right)+m-3=0$ có 6 nghiệm phân biệt?

**A.** 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 41.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



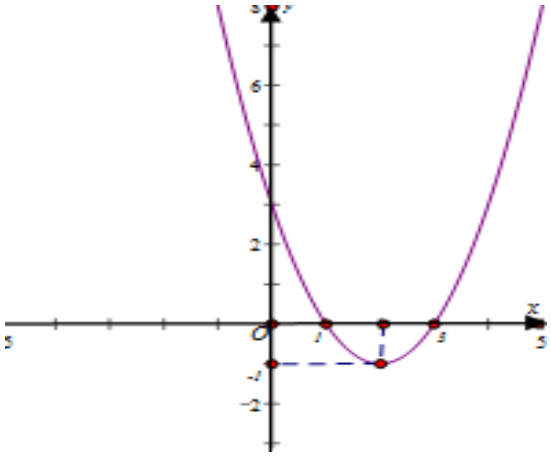

Phương trình $f^2\left(|x|\right)+f\left(|x|\right)-2=0$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

**Câu 42.** Hỏi có bao nhiêu giá trị $m$ nguyên trong nửa khoảng $\left(0;2017\right]$ để phương trình $\left|x^2-4\left|x\right|-5\right|-m=0$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** 2016. **B.** 2008. **C.** 2009. **D.** 2017.

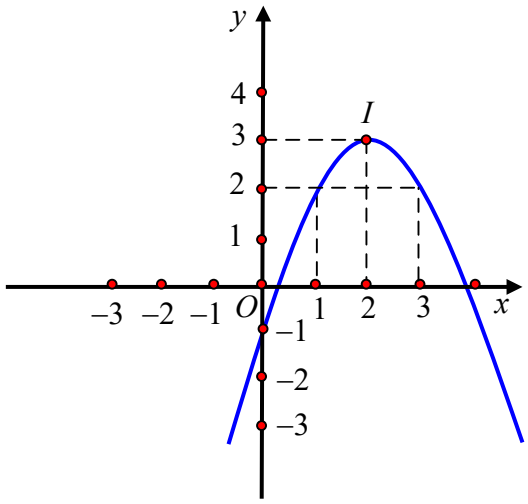
**Câu 43.** Cho hàm số $y=x^2-4x+3$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $f\left(x\right)=x^2-4\left|x\right|+3$;gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m$ có 8 nghiệm phân biệt. Số phần tử của $S$ bằng

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

**Câu 44.** Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị $m$ để phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ có bốn nghiệm phân biệt.




**A.** $-1 < m < 3$. **B.** $0 < m < 3$. **C.** $0 \leq m \leq 3$. **D.** $-1 \leq m \leq 3$.

## DẠNG 4. MỘT SỐ CÂU HỎI THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ BẬC HAI

**Câu 1.** Một chiếc ăng - ten chảo parabol có chiều cao $h = 0,5m$ và đường kính miệng $d = 4m$. Mặt cắt qua trục là một parabol dạng $y = ax^2$. Biết $a = \frac{m}{n}$, trong đó $m$, $n$ là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính $m - n$.

**A.** $m - n = 7$ **B.** $m - n = -7$ **C.** $m - n = 31$ **D.** $m - n = -31$

**Câu 2.** Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oth$, trong đó $t$ là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên; $h$ là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá lên, nó đạt độ cao 6m. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi được đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm?

**A.** 2,56 giây **B.** 2,57 giây **C.** 2,58 giây **D.** 2,59 giây

**Câu 3.** Khi một quả bóng được đá lên nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng tọa độ $Oth$ có phương trình $h = at^2 + bt + c\ (a < 0)$, trong đó $t$ là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên, $h$ là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,2\ m$ và sau 1 giây thì nó đạt độ cao $8,5m$, sau 2 giây nó đạt độ cao $6m$. Tính tổng $a + b + c$.

**A.** $a + b + c = 18,3$. **B.** $a + b + c = 6,1$.

**C.** $a + b + c = 8,5$. **D.** $a + b + c = -15,9$.

**Câu 4.** Một của hàng buôn giày nhập một đôi với giá là $40$ đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá $x$ đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi của hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

**A.** 80 USD. **B.** 160 USD. **C.** 40 USD. **D.** 240 USD.

**Câu 5.** Một quả bóng cầu thủ sút lên rồi rơi xuống theo quỹ đạo là parabol. Biết rằng ban đầu quả bóng được sút lên từ độ cao $1\,\text{m}$ sau đó $1$ giây nó đạt độ cao $10\,\text{m}$ và $3,5$ giây nó ở độ cao $6,25\,\text{m}$. Hỏi độ cao cao nhất mà quả bóng đạt được là bao nhiêu mét?

**A.** $11\,\text{m}$. **B.** $12\,\text{m}$. **C.** $13\,\text{m}$. **D.** $14\,\text{m}$.

**Câu 6.** **(THI HK1 LỚP 11 THPT VIỆT TRÌ 2018 - 2019)** Một chiếc cổng hình parabol có chiều rộng $12\,m$ và chiều cao $8\,m$ như hình vẽ. Giả sử một chiếc xe tải có chiều ngang $6\,m$ đi vào vị trí chính giữa cổng. Hỏi chiều cao $h$ của xe tải thỏa mãn điều kiện gì để có thể đi vào cổng mà không chạm tường?

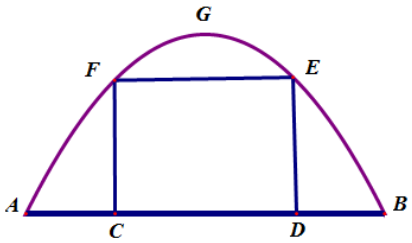


**A.** $0 < h < 6$. **B.** $0 < h \le 6$. **C.** $0 < h < 7$. **D.** $0 < h \le 7$.

**Câu 7.** Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng $16$, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

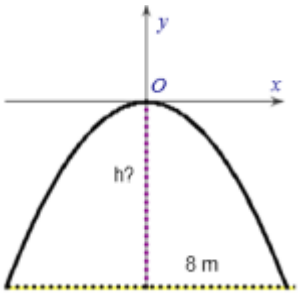
**A.** 64. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 8.

**Câu 8.** Một chiếc cổng hình parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hai cánh cửa phụ hai bên như hình vẽ. Biết chiều cao cổng parabol là 4m còn kích thước cửa ở giữa là 3m x 4m. Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm $A$ và $B$. (xem hình vẽ bên dưới)




**A.** 5m. **B.** 8,5m. **C.** 7,5m. **D.** 8m.

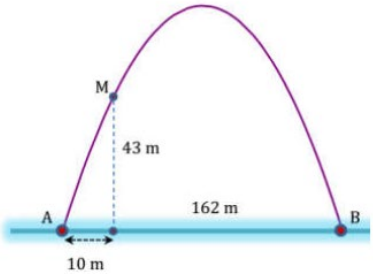
**Câu 9.** Một chiếc cổng hình parabol dạng $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ có chiều rộng $d = 8m$. Hãy tính chiều cao $h$ của cổng (*xem hình minh họa bên cạnh*).




**A.** $h = 9m$. **B.** $h = 7m$. **C.** $h = 8m$. **D.** $h = 5m$.

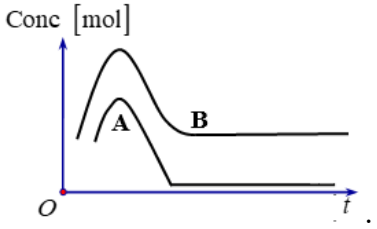
**Câu 10.** Cổng Arch tại thành phố St.Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol (hình vẽ). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162 m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43 m so với mặt đất (điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng thẳng theo phương vuông góc với mặt đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng $A$ một đoạn 10 m. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch (tính từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng).

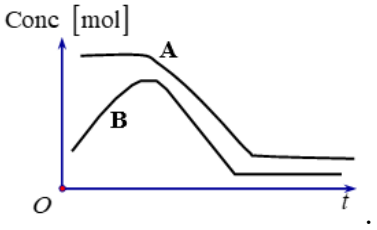


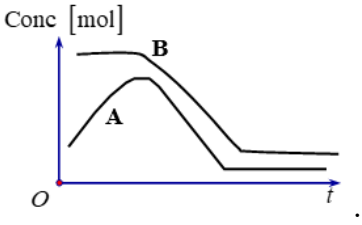


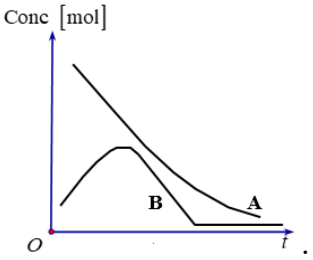

**A.** 175,6 m. **B.** 197,5 m. **C.** 210 m. **D.** 185,6 m.

**Câu 11.** Rót chất $A$ vào một ống nghiệm, rồi đổ thêm chất $B$ vào. Khi nồng độ chất $B$ đạt đến một giá trị nhất định thì chất $A$ mới tác dụng với chất $B$. Khi phản ứng xảy ra, nồng độ cả hai chất đều giảm đến khi chất $B$ được tiêu thụ hoàn hoàn. Đồ thị nồng độ mol theo thời gian nào sau đây thể hiện quá trình của phản ứng?

**A.** 


**B.** 


**C.** 


**D.** 


**Câu 12.** Cô Tình có $60m$ lưới muốn rào một mảng vườn hình chữ nhật để trồng rau, biết rằng một cạnh là tường, cô Tình chỉ cần rào $3$ cạnh còn lại của hình chữ nhật để làm vườn. Em hãy tính hộ diện tích lớn nhất mà cô Tình có thể rào được?

**A.** $400m^2$. **B.** $450m^2$. **C.** $350m^2$. **D.** $425m^2$.

# Bài 2. HÀM SỐ BẬC HAI. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

- | FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y=ax^2+bx+c$, trong đó $a,b,c$ là những hằng số và $a$ khác 0. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

***Ví dụ 1.*** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định $a,b,c$ lần lượt là hệ số của $x^2$, hệ số của $x$ và hệ số tự do.

a) $y=8x^2-6x+1$

b) $y=2x+2021$.

***Giải***

a) Hàm số $y=8x^2-6x+1$ là hàm số bậc hai có hệ số của $x^2$ bằng 8, hệ số của $x$ bằng $-6$, hệ số tự do bằng 1.

b) Hàm số $y=2x+2021$ không phải là hàm số bậc hai.

### II. Đồ thị hàm số bậc hai

Đồ thị hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm với tọa độ $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ và trục đối xứng là đường thẳng $x=-\frac{b}{2a}$.

*Nhận xét:* Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$, ta có: $-\frac{\Delta}{4a}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Để vẽ đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$, ta thực hiện các bước:

- Xác định toạ độ đỉnh: $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$;
- Vẽ trục đối xứng $x=-\frac{b}{2a}$;
- Xác định một số điểm đặc biệt, chẳng hạn: giao điểm với trục tung (có tọa độ $(0;c)$) và trục hoành (nếu có), điểm đối xứng với điểm có tọa độ $(0;c)$ qua trục đối xứng $x=-\frac{b}{2a}$.
- Vẽ đường parabol đi qua các điểm đã xác định ta nhận được đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$.

*Chú ý:* Nếu $a>0$ thì parabol có bề lõm quay lên trên, nếu bậc hai sau: $a<0$ thì parabol có bề lõm quay xuống dưới.

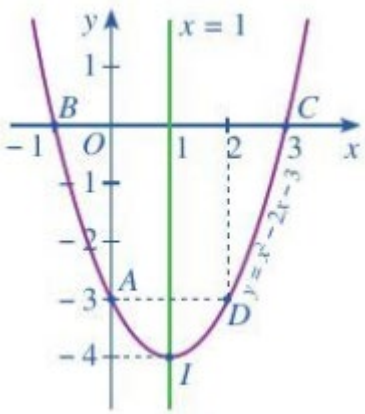
***Ví dụ 2.*** Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y=x^2-2x-3$.

***Giải***

Ta có: $a=1,b=-2,c=-3,\Delta=(-2)^2-4.1.(-3)=16$.

- Toạ độ đỉnh $I(1;-4)$.
- Trục đối xứng $x=1$.
- Giao điểm của parabol với trục tung là $A(0;-3)$.
- Giao điểm của parabol với trục hoành là $B(-1;0)$ và $C(3;0)$.
- Điểm đối xứng vối điểm $A(0;-3)$ qua trục đối xứng $x=1$ là $D(2;-3)$.

Vẽ parabol đi qua các điểm được xác định ở trên, ta nhận được đồ thị hàm số $y=x^2-2x-3$ như hình




Nhận xét: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số bậc hai như sau:

$a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

***Ví dụ 3.*** Nêu khoảng đồng biến, nghịch biến của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3x^2 + 5x - 2$

b) $y = -4x^2 + 6x + 3$

***Giải***

a) Ta có: $a = 3 > 0, b = 5, -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{6}$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

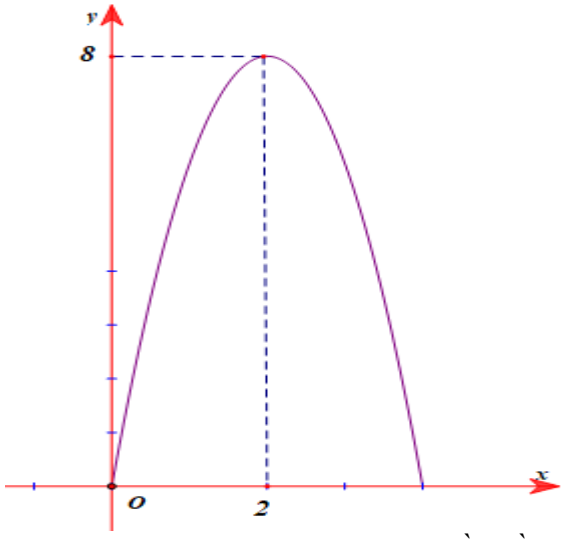
b) Ta có: $a = -4 < 0, b = 6, -\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

**III. Ứng dụng**

Các hàm số bậc hai có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết những vấn đề thực tiễn. Chẳng hạn, ta sẽ tìm hiểu ứng dụng đó thông qua ví dụ sau:

***Ví dụ 4.*** Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Hình minh họa quỹ đạo của quả bóng là một phần cung parabol trong mặt phẳng tọa độ $Oth$, trong đó $t$ là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên và $h$ là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ mặt đất. Sau khoảng 2s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8m.




a) Tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao $h$ theo thời gian $t$ và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống này.

b) Tính độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3s.

c) Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?

***Giải***

a) Gọi hàm số bậc hai biểu thị độ cao $h(m)$ theo thời gian $t(s)$ là $h = f(t) = at^2 + bt + c (a < 0)$. Theo giả thiết, quả bóng được đá lên từ mặt đất, nghĩa là $f(0) = c$, do đó $f(t) = at^2 + bt$.

Sau 2s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8m nên

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}$$

Vậy $f(t) = -2t^2 + 8t$

b) Độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3 s là: $h = f(3) = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 6(m)$

c) Cách 1. Quả bóng chạm đất (trở lại) khi độ cao $h = 0$, tức là: $\begin{cases} t > 0 \\ -2t^2 + 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4.$

Vì thế sau $4s$ quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

Cách 2. Quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một phần của cung parabol có trục đối xứng là đường thẳng $t = 2$. Điểm xuất phát và điểm quả bóng chạm đất (trở lại) đối xứng nhau qua đường thẳng $t = 2$. Vì thế sau $4s$ quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ

**Câu 1.** Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, có đồ thị là $(P)$.

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $(P)$.

b) Nhận xét sự biến thiên của hàm số trong khoảng $(0;3)$.

c) Tìm tập hợp giá trị $x$ sao cho $y \le 0$.

d) Tìm các khoảng của tập xác định để đồ thị $(P)$ nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $y = 8$.

e) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$.

**Lời giải**

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $(P)$.

• Tọa độ đỉnh $I(2;-1)$.

• Trục đối xứng $x = 2$.

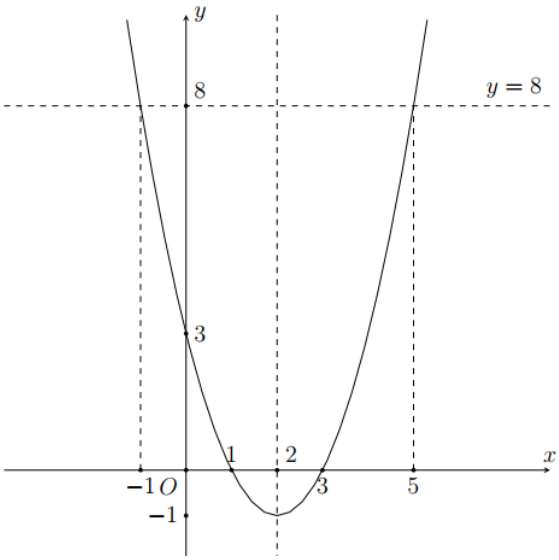
• Hệ số $a = 1 > 0$: bề lõm quay lên trên.

• Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

• Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |

• Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;3)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1;0)$ và $C(3;0)$.




b) Ta có $(0;3)=(0;2)\cup\{2\}\cup(2;3)$.

Trên khoảng $(0;2)$ hàm số nghịch biến, tại $x=2$ thì hàm số đạt giá trị bằng $-1$, trên khoảng $(2;3)$ hàm số đồng biến.

c) Dựa vào đồ thị, ta thấy tập hợp các giá trị của $x$ để $y\le 0$ (đồ thị hàm số nằm phía dưới trục hoành) là $1\le x\le 3$.

d) Ta thấy đồ thị $(P)$ cắt đường thẳng $y=8$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-1$ và $5$.

Do đó để đồ thị $(P)$ nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $y=8$ thì $x\in(-\infty;-1)$ hoặc $x\in(5;+\infty)$.

e) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ nên nghịch biến trên đoạn $[-2;1]$. Do đó

• Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt tại $x=-2$, khi đó $y_{\max}=y(-2)=15$.

• Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt tại $x=1$, khi đó $y_{\min}=y(1)=0$.

**Câu 2.** Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y=7x^2-3x+10$.

b) $y=-2x^2-x+1$.

**Lời giải**

a) Hàm số $y=7x^2-3x+10$ có $a=7>0$ nên $y$ đạt giá trị bé nhất tại đỉnh.

Suy ra $y_{\min}=-\dfrac{\Delta}{4a}=\dfrac{271}{8}$ và không tồn tại giá trị lớn nhất.

b) Hàm số $y=-2x^2-x+1$ có $a=-2<0$ nên $y$ đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh.

Suy ra $y_{\max}=-\dfrac{\Delta}{4a}=\dfrac{9}{8}$ và không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

**Câu 3.** Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y=x^2-3x$ với $0\le x\le 2$.

b) $y=-x^2-4x+3$ với $0\le x\le 4$.

**Lời giải**

a) Hàm số $y=x^2-3x$ có $a=1>0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{3}{2}\in[0;2]$.

Vậy $\min y=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9}{4};\max y=\max\{f(0);f(2)\}=\max\{0;-2\}=0$.

b) Hàm số $y=-x^2-4x+3$ có $a=-1<0$ nên bề lõm hướng xuống.

Hoành độ đỉnh $x_I=-\dfrac{b}{2a}=-2\notin[0;4]$.

Ta có $f(4)=-29;f(0)=3$.

Vậy $\min y=f(4)=-29;\max y=f(0)=3$.

**Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị của $a$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3.

**Lời giải**

Parabol có hệ số theo $x^2$ là $4>0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I=\dfrac{a}{2}$

• Nếu $\dfrac{a}{2}<0\Leftrightarrow a<0$ thì $x_I<0<2$. Suy ra $f$ đồng biến trên $[0;2]$.

Do đó $\min f(x)=f(0)=a^2-2a+2$. Theo yêu cầu bài toán

$$a^2-2a+2=3\Leftrightarrow a^2-2a-1=0,a=1\pm\sqrt{2}.$$

Vì $a<0$ nên ta chọn $a=1-\sqrt{2}$.

• Nếu $0\le\dfrac{a}{2}\le 2\Leftrightarrow 0\le a\le 4$ thì $x_I\in[0;2]$. Suy ra $f$ đạt giá trị nhỏ nhất tại đỉnh.

Do đó $\min f(x)=f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-2a+2$. Theo yêu cầu bài toán

$$-2a+2=3\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}<0 \text{ (không thỏa mãn).}$$

• Nếu $\dfrac{a}{2}>2\Leftrightarrow a>4$ thì $x_I>2>0$. Suy ra $f$ nghịch biến trên $[0;2]$.

Do đó $\min f(x)=f(2)=a^2-10a+18$. Theo yêu cầu bài toán

$$a^2-10a+18=3\Leftrightarrow a^2-10a+15=0\Leftrightarrow a=5\pm\sqrt{10}$$

Vì $a>4$ nên ta chọn $a=5+\sqrt{10}$.

Vậy $a=1-\sqrt{2}$ hoặc $a=5+\sqrt{10}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 5.** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y=x(x+1)(x-2)(x-3)$.

b) $y=(2x-1)^2-4|2x-1|+3$.

**Lời giải**

a) Ta có $y=x(x+1)(x-2)(x-3)=\left[x(x-2)\right].\left[(x+1)(x-3)\right]=(x^2-2x)(x^2-2x-3)$.

Đặt $t=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$, ta được $y=f(t)=(t-1)(t-4)=t^2-5t+4, t\geq 0$.

Hàm số $y=t^2-5t+4$ có $a=1>0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{5}{2}\in\left[0;+\infty\right)$.

Do đó $\min y=\min f(t)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$ đạt được khi $\left(x-1\right)^2=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{2}$.

Hàm số không có giá trị lớn nhất.

b) Đặt $t=\left|2x-1\right|\geq 0$ thì $y=t^2-4t+3, t\geq 0$.

Hàm số $y=t^2-4t+3$ có $a=1>0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I=-\dfrac{b}{2a}=2\in\left[0;+\infty\right)$.

Do đó $\min y=\min f(t)=f\left(2\right)=-1$ đạt được khi $\left|2x-1\right|=2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $x=\dfrac{3}{2}$.

Hàm số không có giá trị lớn nhất.

**Câu 6.** Cho hàm số $y=-x^2+5x-4$, có đồ thị là $(P)$.

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $(P)$.

b) Dựa vào đồ thị trên, tùy theo giá trị của $m$, hãy cho biết số nghiệm của phương trình $x^2-5x+7+2m=0$.

c) Tìm $m$ để phương trình $x^2-5x+7+2m=0$ có nghiệm $x\in\left[1;5\right]$.

**Lời giải**

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $(P)$.

• Tọa độ đỉnh $I\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{9}{4}\right)$.

• Trục đối xứng $x=\dfrac{5}{2}$.

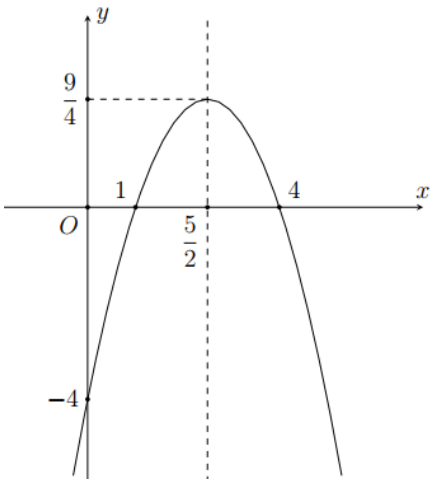
• Hệ số $a=-1<0$: bề lõm quay xuống dưới.

• Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

• Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $\dfrac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\dfrac{9}{4}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

• Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A\left(0;-4\right)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B\left(1;0\right)$ và $C\left(4;0\right)$.




b) Ta có $x^2-5x+7+2m=0 \Leftrightarrow -x^2+5x-4=2m+3$ $(*)$.

Phương trình $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(P)$ và đường thẳng $y=2m+3$ (song song với $Ox$). Do đó số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị và đường thẳng.

Dựa vào đồ thị ta có

- $2m+3>\dfrac{9}{4} \Leftrightarrow m>-\dfrac{3}{8}$: phương trình vô nghiệm.
- $2m+3=\dfrac{9}{4} \Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{8}$: phương trình có nghiệm kép.
- $2m+3<\dfrac{9}{4} \Leftrightarrow m<-\dfrac{3}{8}$: phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c) Ta có bảng biến thiên của hàm số trên $[1;5]$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\dfrac{5}{2}$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{9}{4}$ | $\searrow$ | $-4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến ta thấy $x\in[1;5]$ thì $y\in\left[-4;\dfrac{9}{4}\right]$.

Do đó để phương trình có nghiệm $x\in[1;5]$ khi và chỉ khi

$$-4\le 2m+3\le\frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{7}{2}\le m\le -\frac{3}{8}.$$

**Câu 7.** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=x^2+2x-3$. Từ đó suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y=\left|x^2+2x-3\right|$.

b) $y=x^2+2\left|x\right|-3$.

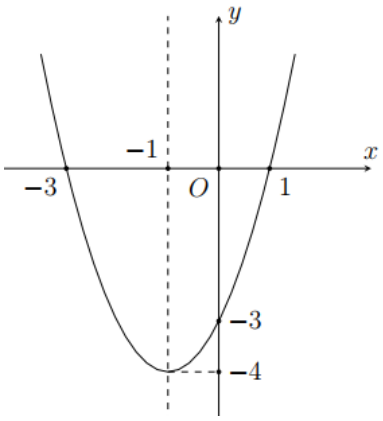
**Lời giải**

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=x^2+2x-3$.

- Tọa độ đỉnh $I(-1;-4)$.
- Trục đối xứng $x=-1$.
- Hệ số $a=1>0$: bề lõm quay lên trên.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.
- Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $-4$ | $+\infty$ |

• Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;-3)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1;0)$ và $C(-3;0)$.




a) Ta có $y=\left|x^2+2x-3\right|=\begin{cases}x^2+2x-3 & khi\ x^2+2x-3\geq 0\\ -\left(x^2+2x-3\right) & khi\ x^2+2x-3<0\end{cases}$

Do đó từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2+2x-3$ suy ra đồ thị hàm số $y=\left|x^2+2x-3\right|$ như sau:

• Đồ thị hàm số $y=f(x)$ phần phía trên trục hoành ta giữ nguyên.

• Đồ thị hàm số $y=f(x)$ phần phía dưới trục hoành ta lấy đối xứng qua trục hoành

**Câu 8.** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=x^2+2x-3$. Từ đó suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y=\left|x^2+2x-3\right|$ b) $y=x^2+2|x|-3$

**Lời giải**

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=x^2+2x-3$.

□ Tọa độ đỉnh $I(-1;-4)$.

□ Trục đối xứng $x=-1$.

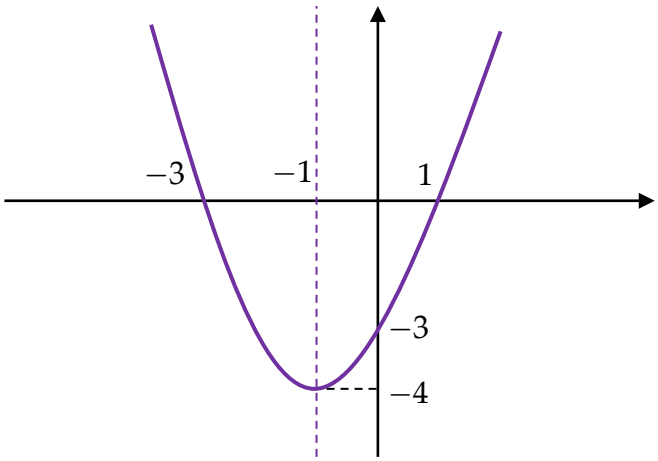
□ Hệ số $a=1>0$: bề lõm quay lên trên.

□ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

□ Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $-4$ | $+\infty$ |

□ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;-3)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1;0)$ và $C(-3;0)$.

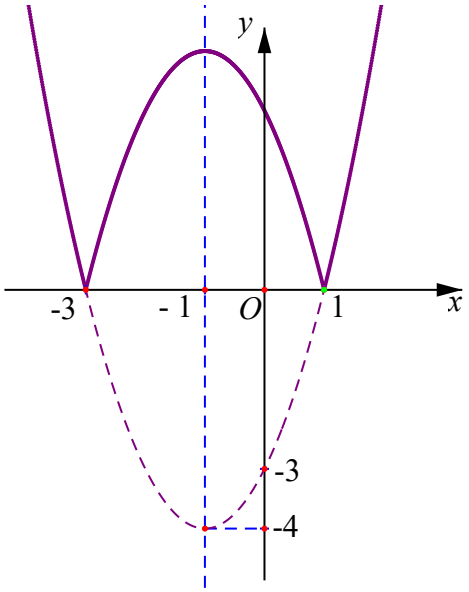



a) Ta có $y=\left|x^2+2x-3\right| = =\begin{cases} f(x)=x^2+2x-3 & \text{khi } x^2+2x-3\geq 0 \\ -f(x)=-\left(x^2+2x-3\right) & \text{khi } x^2+2x-3<0 \end{cases}$

Do đó từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2+2x-3$ suy ra đồ thị hàm số $y=\left|x^2+2x-3\right|$ như sau :

□ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ phần phía trên trục hoành ta giữ nguyên.

□ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ phần phía dưới trục hoành ta lấy đối xứng qua trục hoành.



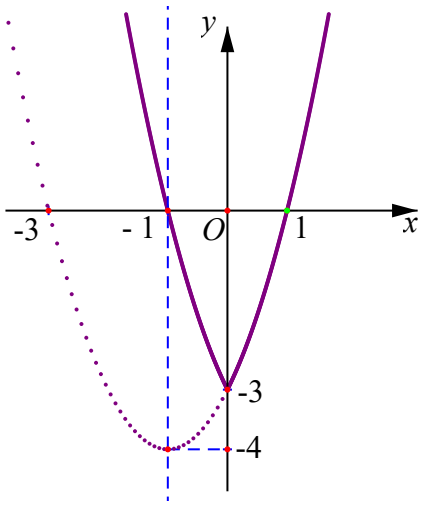

b) Ta có $y=h(x)=x^2+2\left|x\right|-3 =\begin{cases} x^2+2x-3 \text{ khi } x\geq 0 \\ x^2-2x-3 \text{ khi } x<0 \end{cases}$

Hơn nữa hàm số $h(x)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung.

Do đó từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2+2x-3$ suy ra đồ thị hàm số $y=h(x)=x^2+2\left|x\right|-3$ như sau :

□ Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ phần bên phải trục tung.

□ Lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ nguyên ở trên qua trục tung, ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y=h(x)$.




**Câu 9.** Cho hàm số $y=x^2-6x+8$ có đồ thị là $(P)$.

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $(P)$.

b) Biện luận theo $m$ số nghiệm của phương trình $(x-4)|x-2|+m=0$.

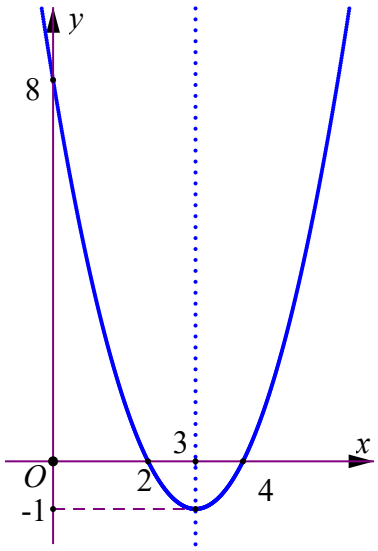
**Lời giải**

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $(P): y=x^2-6x+8$.

- Tọa độ đỉnh $I(3;-1)$
- Trục đối xứng $x=3$
- Hệ số $a=1>0$ : bề lõm quay lên trên.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$ và đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
- Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ ↘ | $-1$ | ↗ $+\infty$ |

- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;8)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(4;0)$ và $C(2;0)$.



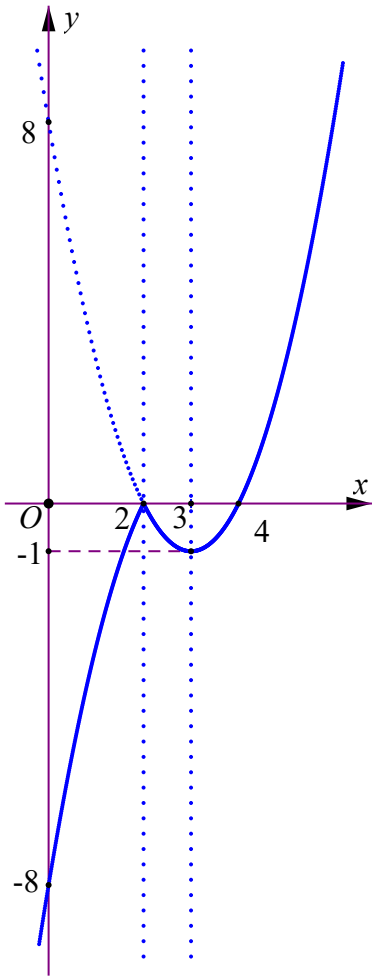

b) Biện luận theo $m$ số nghiệm của phương trình $(x-4)|x-2|+m=0$.

Ta có $y=(x-4)|x-2| =\begin{cases}(x-4)(x-2) & \text{khi } x-2\ge 0\\ -(x-4)(x-2) & \text{khi } x-2<0\end{cases}$ hay $y=\begin{cases}x^2-6x+8 & \text{khi } x\ge 2\\ -(x^2-6x+8) & \text{khi } x<2\end{cases}$.

Do đó từ đồ thị hàm số $y=x^2-6x+8$ suy ra đồ thị hàm số $y=(x-4)|x-2|$ như sau

□ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ phần bên phải đường $x=2$ ta giữ nguyên.

□ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ phần bên trái đường $x=2$ ta lấy đối xứng qua trục hoành.




Phương trình $(x-4)|x-2|+m=0 \Leftrightarrow (x-4)|x-2|=-m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=(x-4)|x-2|$ và đường thẳng $y=-m$ (song song với $Ox$). Do đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị và đường thẳng.

Dựa vào đồ thị, ta có

□ $\begin{bmatrix}-m>0\\ -m<-1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m<0\\ m>1\end{bmatrix}$ : phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

□ $\begin{bmatrix}-m=0\\ -m=-1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=0\\ m=1\end{bmatrix}$ : phương trình có 2 nghiệm.

□ $-1<-m<0 \Leftrightarrow 0<m<1$ : phương trình có 3 nghiệm.

**Câu 10.** Vẽ đồ thị hàm số $y=\begin{cases}-x+4 & \text{khi } x<1\\ x^2-4x+3 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$

**Lời giải**

Khi $x<1$ thì $y=-x+4$.

Cho $x=1\Rightarrow y=3$, ta được điểm $A(1;3)$.

Cho $x=0\Rightarrow y=4$ ta được điểm $B(0;4)$.

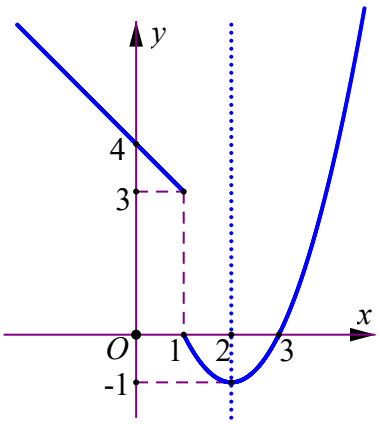
Khi $x\geq 1$ thì $y=x^2-4x+3$.

Tọa độ đỉnh $I(2;-1)$.

Hệ số $a=-1<0$ : bề lõm quay lên trên.

Cho $x=1\Rightarrow y=0$ ta được điểm $M(1;0)$.

Cho $x=3\Rightarrow y=0$ ta được điểm $N(3;0)$.




**Câu 11.** Không vẽ đồ thị. Hãy tìm tọa độ đỉnh, phương trình trục đối xứng của mỗi parabol sau đây. Tìm giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của mỗi hàm số tương ứng.

a) $y=2(x+3)^2-5$

b) $y=-\sqrt{2}x^2+4x$

**Lời giải**

a) Hàm số $y=2(x+3)^2-5=2x^2+12x+13$

Ta có $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{12}{2.2}=-3\Rightarrow y=-5$

Tọa độ đỉnh $I(-3;-5)$

Trục đối xứng là đường thẳng $x=-3$

Hệ số $a=2>0$ : bề lõm quay lên nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại tung độ đỉnh và bằng $-5$

b) Hàm số $y=-\sqrt{2}x^2+4x$

Ta có $x=-\dfrac{b}{2a}=\sqrt{2}$ suy ra $y=2\sqrt{2}$.

Tọa độ đỉnh $I(\sqrt{2};2\sqrt{2})$

Trục đối xứng đường thẳng $x=\sqrt{2}$.

Hệ số $a=-\sqrt{2}<0$ : bề lõm quay xuống dưới nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại tung độ đỉnh và bằng $2\sqrt{2}$.

**Câu 12.** Cho Parabol $(P)$ : $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. Xét dấu hệ số $a$ và biệt thức $\Delta$ khi

a) $(P)$ hoàn toàn nằm phía trên trục hoành.

b) $(P)$ hoàn toàn nằm phía dưới trục hoành.

c) $(P)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía trên trục hoành.

**Lời giải**

a) Theo giả thiết thì bề lõm hướng lên trên và đỉnh có tung độ dương nên

$$\begin{cases} a>0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}.$$

b) Theo giả thiết thì bề lõm hướng xuống dưới và đỉnh có tung độ âm nên

$$\begin{cases} a<0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}.$$

c) Theo giả thiết thì $\begin{cases} \Delta>0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ a<0 \end{cases}.$

## DẠNG 2. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Để xác định hàm số bậc hai $y=f(x)=ax^2+bx+c$ (đồng nghĩa với xác định các tham số $a, b, c$) ta cần dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là $a, b, c$. Từ đó tìm được $a, b, c$. Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_0=f(x_0)$.

- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x=x_0 \Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a}=x_0$.

- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I(x_I; y_I) \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=x_I \\ -\dfrac{\Delta}{4a}=y_I \end{cases} \left( \begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=x_I \\ f(x_I)=y_I \end{cases} \right)$.

- Trên $\mathbb{R}$, ta có:

1. $f(x)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a<0$. Lúc này $\underset{\mathbb{R}}{Max} f(x)=-\dfrac{\Delta}{4a}=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

2. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a>0$. Lúc này $\underset{\mathbb{R}}{Min} f(x)=-\dfrac{\Delta}{4a}=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

**Câu 1.** Xác định parabol $y=ax^2+3x-2$, biết rằng parabol đó

a) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Có trục đối xứng $x=-3$.

c) Có đỉnh $I\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{11}{4}\right)$.

d) Đạt cực tiểu tại $x=1$.

**Lời giải**

a) Vì parabol $(P)$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên điểm $A(2;0)$ thuộc $(P)$.

Thay $x=2, y=0$ vào $(P)$, ta được $0=4a+6-2 \Leftrightarrow a=-1$.

Vậy $(P): y=-x^2+3x-2$.

b) Vì $(P)$ có trục đối xứng $x=-3$ nên $-\dfrac{b}{2a}=-3 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2a}=-3 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $(P): y=\dfrac{1}{2}x^2+3x-2$.

c) Vì $(P)$ có đỉnh $I\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{11}{4}\right)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a \\ \Delta=11a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ 9+8a=11a \end{cases} \Leftrightarrow a=3.$$

Vậy $(P): y=3x^2+3x-2$.

d) Vì $(P)$ đạt cực tiểu tại $x=1$ nên suy ra

$$\begin{cases} a>0 \\ -\dfrac{b}{2a}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ -\dfrac{3}{2a}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy không có $(P)$ nào thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 2.** Xác định parabol $y=ax^2+bx+2$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$.

b) Có đỉnh $I(2;-2)$.

c) Đi qua điểm $A(3;-4)$ và có trục đối xứng $x=-\dfrac{3}{4}$.

d) Đi qua điểm $B(-1;6)$ và đỉnh có tung độ $-\dfrac{1}{4}$.

**Lời giải**

a) Vì $(P)$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ nên ta có $\begin{cases} a+b+2=5 \\ 4a-2b+2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$.

Vậy $(P): y=2x^2+x+2$.

b) Vì $(P)$ có đỉnh $I(2;-2)$ nên ta có $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=2 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}=-2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-4a \\ b^2-4ac=8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4a \\ 16a^2-16a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases}.$$

Do $(P)$ là parabol nên $a\neq 0$ nên ta chọn $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases}$.

Vậy $(P): y=x^2-4x+2$.

c) Vì $(P)$ đi qua điểm $A(3;-4)$ và có trục đối xứng $x=-\dfrac{3}{4}$ nên ta có

$$\begin{cases} 9a+3b+2=-4 \\ -\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b=-2 \\ b=\dfrac{3}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{4}{9} \\ b=-\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy $(P): y=-\dfrac{4}{9}x^2-\dfrac{2}{3}x+2$.

d) Vì $(P)$ đi qua điểm $B(-1;6)$ và có tung độ đỉnh bằng $-\dfrac{1}{4}$ nên ta có

$$\begin{cases} a-b+2=6 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=4 \\ b^2-4ac=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4+b \\ b^2-8(4+b)=4+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4+b \\ b^2-9b-36=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=16 \\ b=12 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}.$$

□ Với $\begin{cases} a=16 \\ b=12 \end{cases}$ ta có $(P): y=16x^2+12x+2$.

□ Với $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$ ta có $(P): y=x^2-3x+2$.

**Câu 3.** Xác định parabol $y=2x^2+bx+c$, biết rằng parabol đó

a) Có trục đối xứng $x=1$ và cắt $Oy$ tại điểm $M(0;4)$.

b) Có đỉnh $I(-1;-2)$.

c) Đi qua hai điểm $A(0;-1)$ và $B(4;0)$.

d) Có hoành độ đỉnh $-2$ và đi qua điểm $N(1;-2)$.

**Lời giải**

a) Vì $(P)$ có trục đối xứng $x=1$ nên $-\dfrac{b}{2a}=1 \Leftrightarrow b=-2a \Leftrightarrow b=-4$.

Hơn nữa $(P)$ cắt trục $Oy$ tại điểm $M(0;4)$ nên $2.0+b.0+c=4 \Leftrightarrow c=4$.

Vậy $(P): y=2x^2-4x+4$.

b) Vì $(P)$ có đỉnh $I(-1;-2)$ nên suy ra

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=-1 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a \\ b^2-4ac=8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ 16-8c=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ c=0 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y=2x^2+4x$.

c) Vì $(P)$ đi qua hai điểm $A(0;-1)$ và $B(4;0)$ nên suy ra $\begin{cases} 2.0+b.0+c=-1 \\ 32+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1 \\ b=-\dfrac{31}{4} \end{cases}.$

Vậy $(P): y = 2x^2 - \frac{31}{4}x - 1$.

d) Vì $(P)$ có hoành độ đỉnh $-2$ nên $-\frac{b}{2a} = -2 \Leftrightarrow b = 4a \Leftrightarrow b = 8$.

Hơn nữa $(P)$ đi qua điểm $N(1;-2)$ nên $2 + b + c = -2 \Leftrightarrow 2 + 8 + c = -2 \Leftrightarrow c = -12$.

Vậy $(P): y = 2x^2 + 8x - 12$.

**Câu 4.** Xác định parabol $y = ax^2 + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;1)$, $B(2;-2)$.

b) Có đỉnh $I(0;3)$ và một trong hai giao điểm với $Ox$ là $A(-2;0)$.

**Lời giải**

a) Vì $(P)$ đi qua hai điểm $M(1;1)$, $B(2;-2)$ nên suy ra $\begin{cases} a + c = 1 \\ 4a + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 2 \end{cases}$.

Vậy $(P): y = -x^2 + 2$.

b) Vì $(P)$ có đỉnh $I(0;3)$ và giao với $Ox$ tại $A(-2;0)$ nên suy ra $\begin{cases} c = 3 \\ 4a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = -\frac{3}{4} \end{cases}$.

Vậy $(P): y = -\frac{3}{4}x^2 + 3$.

**Câu 5.** Xác định parabol $y = ax^2 - 4x + c$, biết rằng parabol đó

a) Có hoành độ đỉnh là $-3$ và đi qua điểm $M(-2;1)$.

b) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm $A(3;0)$.

**Lời giải**

a) Vì $(P)$ có hoành độ đỉnh bằng $-3$ và đi qua $M(-2;1)$ nên suy ra

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -3 \\ 4a + 8 + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6a \\ 4a + c = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ c = -\frac{13}{3} \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = -\frac{2}{3}x^2 - 4x - \frac{13}{3}$.

b) Vì $(P)$ có trục đối xứng $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm $A(3;0)$ nên suy ra

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 9a - 12 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 9a + c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = x^2 - 4x + 3$.

**Câu 6.** Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;-3)$, $O(0;0)$.

b) Cắt trục $Ox$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-1$ và $2$, cắt trục $Oy$ tại điểm có tung độ bằng $-2$.

c) Đi qua điểm $M(4;-6)$, cắt trục $Ox$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $1$ và $3$.

**Lời giải**

a) Vì $(P)$ đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;-3)$, $O(0;0)$ nên suy ra $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-b+c=-3 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}$.

Vậy $(P): y=-x^2+2x$.

b) Gọi $A$ và $B$ là hai giao điểm của $(P)$ với trục $Ox$ có hoành độ lần lượt là $-1$ và $2$. Suy ra $A(-1;0)$, $B(2;0)$.

Gọi $C$ là giao điểm của $(P)$ với trục $Oy$ có tung độ bằng $-2$. Suy ra $C(0;-2)$.

Theo giả thiết $(P)$ đi qua ba điểm $A, B, C$ nên ta có $\begin{cases} a-b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \\ c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-2 \end{cases}$.

Vậy $(P): y=x^2-x-2$.

c) Gọi $E$ và $F$ là hai giao điểm của $(P)$ với trục $Ox$ có hoành độ lần lượt là 1 và 3. Suy ra $E(1;0)$, $F(3;0)$.

Theo giả thiết $(P)$ đi qua ba điểm $M$, $E$, $F$ nên ta có

$$\begin{cases} 16a+4b+c=-6 \\ a+b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a-b \\ 15a+3b=-6 \\ 8a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=8 \\ c=-6 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y=-2x^2+8x-6$.

**Câu 7.** Xác định parabol $y=ax^2+bx+c$, biết rằng parabol đó

a) Có đỉnh $I(2;-1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-3$.

b) Cắt trục hoành tại hai điểm $A(1;0)$, $B(3;0)$ và có đỉnh nằm trên đường thẳng $y=-1$.

c) Có đỉnh nằm trên trục hoành và đi qua hai điểm $M(0;1)$, $N(2;1)$.

d) Trục đối xứng là đường thẳng $x=3$, qua $M(-5;6)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-2$.

**Lời giải**

a) Vì $(P)$ có đỉnh $I(2;-1)$ nên ta có $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=2 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4a \\ b^2-4ac=4a \end{cases} (1)$

Gọi $A$ là giao điểm của $(P)$ với trục tung tại điểm có tung độ bằng $-3$. Suy ra $A(0;-3)$. Theo giả thiết $A(0;-3)$ thuộc $(P)$ nên $a.0+b.0+c=-3 \Leftrightarrow c=-3$. $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có hệ $\begin{cases} b=4a \\ 16a^2+8a=0 \\ c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=-3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$.

Do $(P)$ là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a=-\dfrac{1}{2}; b=-2; c=-3$.

Vậy $(P): y=-\dfrac{1}{2}x^2-2x-3$.

b) Vì $(P)$ cắt trục hoành tại hai điểm $A(1;0)$, $B(3;0)$ nên

$$\begin{cases} 0=a.1+b.1+c \\ 0=a.9+b.3+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases} (1)$$

Hơn nữa $(P)$ có đỉnh thuộc đường thẳng $y=-1$ nên

$$-\frac{\Delta}{4a}=-1 \Leftrightarrow \Delta=4a \Leftrightarrow b^2-4ac=4a \ (2)$$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có hệ $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \\ b^2-4ac=4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4a \\ c=3a \\ b^2-4ac=4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases}$.

Do $(P)$ là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a=1$, $b=-4$, $c=3$.

Vậy $(P): y=x^2-4x+3$.

c) Vì $(P)$ có đỉnh nằm trên trục hoành nên $-\dfrac{\Delta}{4a}=0 \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow b^2-4a=0 \ (1)$

Hơn nữa $(P)$ đi qua hai điểm $M(0;1)$, $N(2;1)$ nên ta có $\begin{cases} c=1 \\ 4a+2b+c=1 \end{cases} (2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có hệ

$$\begin{cases} b^2-4a=0 \\ c=1 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-4a=0 \\ c=1 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \begin{cases} c=1 \\ b=-2a \\ 4a^2-4a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}.$$

Do $(P)$ là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a=1; b=-2; c=1$.

Vậy $(P): y=x^2-2x+1$.

d) Vì $(P)$ có trục đối xứng là đường thẳng $x=3$ nên $-\dfrac{b}{2a}=3 \Leftrightarrow b=-6a$. $(1)$

Hơn nữa $(P)$ qua $M(-5;6)$ nên ta có $6=25a-5b+c$. $(2)$

Lại có $(P)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-2$ nên $-2=a.0+b.0+c \Leftrightarrow c=-2$. $(3)$

Từ $(1),(2)$ và $(3)$ ta có hệ $\begin{cases} b=-6a \\ 25a+30a-2=6 \\ c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{8}{55} \\ b=-\dfrac{48}{55} \\ c=-2 \end{cases}$.

Vậy $(P): y=\frac{8}{55}x^2-\frac{48}{55}x-2$.

**Câu 8.** Xác định parabol $y=ax^2+bx+c$, biết rằng parabol đó

a) Đạt cực tiểu bằng $4$ tại $x=2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$.

b) Đạt cực đại bằng $3$ tại $x=2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $B(0;-1)$.

**Lời giải**

a) Vì hàm số đạt cực tiểu bằng 4 tại $x=2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$ nên ta có

$$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=2\\-\frac{\Delta}{4a}=4\\c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4a\\b^2-4ac=-16a\\c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4a\\16a^2-8a=0\\c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\\c=6\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-2\\c=6\end{cases}.$$

Do $(P)$ là parabol nên $a\neq 0$ nên ta chọn $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$, $c=6$.

Vậy $(P): y=\frac{1}{2}x^2-2x+6$.

b) Vì hàm số đạt cực đại bằng $3$ tại $x=2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $B(0;-1)$ nên ta có

$$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=2\\-\frac{\Delta}{4a}=3\\c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4a\\b^2-4ac=-12a\\c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4a\\16a^2+16a=0\\c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\\c=-1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}a=-1\\b=4\\c=-1\end{cases}.$$

Do $(P)$ là parabol nên $a\neq 0$ nên ta chọn $a=-1$, $b=4$, $c=-1$.

Vậy $(P): y=-x^2+4x-1$.

**Câu 9.** Cho hàm số $y=mx^2-2mx-3m-2$ $(m\neq 0)$. Xác định giá trị của $m$ trong mỗi trường hợp sau

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2;3)$.

b) Có đỉnh thuộc đường thẳng $y=3x-1$.

c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-10$.

**Lời giải**

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2;3)$ nên ta có $4m+4m-3m-2=3\Leftrightarrow m=1$.

Vậy $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có $x=-\frac{b}{2a}=\frac{2m}{2m}=1$, suy ra $y=-4m-2$. Do đó tọa độ đỉnh $I(1;-4m-2)$.

Theo giả thiết đỉnh $I$ thuộc đường thẳng $y=3x-1$ nên ta có

$$-4m-2=3.1-1 \Leftrightarrow m=-1.$$

Vậy $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Theo câu $b)$ ta có tung độ đỉnh $y=-\dfrac{\Delta}{4a}=-4m-2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-10$ thì $\begin{cases} a>0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ -4m-2=-10 \end{cases} \Leftrightarrow m=2$.

Vậy $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 10.** Tìm các tham số $a, b, c$ sao cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ đạt giá trị nhỏ nhất là $4$ tại $x=2$ và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ là 6.

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{R}$ hàm số  có giá trị nhỏ nhất nên $a>0$.

Lại có đồ thị hàm số có đỉnh $I(2;4)$. Do đó ta có:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=2 \\ 4a+2b+c=4 \\ c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4a \\ 4a+2b=-2 \\ c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-2 \\ c=6 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

**Câu 11.** Cho hàm số $y=f(x)=4x^2-4mx+m^2-2m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho $\underset{[-2;\,0]}{Min}\, f(x)=3$.

**Lời giải**

Ta có $a=4>0$ nên đồ thị hàm số là một parabol có bề lõm hướng lên và có hoành độ đỉnh $x_I=\dfrac{m}{2}$.

• Nếu $\dfrac{m}{2}<-2 \Leftrightarrow m<-4$ thì $x_I<-2<0$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-2;0]$.

Do đó $\min\limits_{[-2;0]} f(x)=f(-2)=m^2+6m+16$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2+6m+16=3$ (vô nghiệm).

• Nếu $-2\le\dfrac{m}{2}\le 0 \Leftrightarrow -4\le m\le 0$ thì $x_I\in[0;2]$. Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_I=\dfrac{m}{2}$.

Do đó $\min\limits_{[-2;0]} f(x)=f\left(\dfrac{m}{2}\right)=-2m$.

Theo yêu cầu bài toán $-2m=3 \Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn $-4\le m\le 0$).

• Nếu $\dfrac{m}{2}>0 \Leftrightarrow m>0$ thì $x_I>0>-2$. Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-2;0]$.

Do đó $\min\limits_{[-2;0]} f(x)=f(0)=m^2-2m.$

Theo yêu cầu bài toán: $m^2-2m=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=3$ ( Vì $m>0$ ).

Từ các trường hợp trên, ta được $m \in \left\{\frac{-3}{2} ; 3\right\}$.

## DẠNG 3. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA PARABOL VỚI ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ KHÁC

**Dạng 1. Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc nhất và bậc hai**

Cho đồ thị $(P)$ của hàm số $y=ax^2+bx+c$ với $a \neq 0$ và đồ thị $d$ của hàm số $y=kx+m$.

Toạ độ giao điểm của hai đồ thị $(P)$ và $d$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{l} y=ax^2+bx+c \\ y=kx+m \end{array}\right. \quad (1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $d$ là

$$ax^2+bx+c=kx+m \Leftrightarrow ax^2+(b-k)x+c-m=0 \quad (2)$$

Nhận xét:

1. Số giao điểm của $(P)$ và $d$ bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và cũng bằng số nghiệm của phương trình (2).

2. Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì ta nói $d$ và $(P)$ không giao nhau.

3. Nếu phương trình (2) có nghiệm kép thì ta nói $d$ và $(P)$ tiếp xúc với nhau. Lúc này ta nói $d$ là tiếp tuyến của $(P)$.

4. Nếu phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thì ta nói $d$ và $(P)$ cắt nhau.

**Dạng 2. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số bậc hai**

Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm số bậc hai có đồ thị lần lượt là các đường parabol $(P_1)$ và $(P_2)$, khi đó tọa độ giao điểm của $(P_1)$ và $(P_2)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{l} y=f(x) \\ y=g(x) \end{array}\right. . \quad (1)$$

Để giải hệ (1) ta cần giải phương trình $f(x)=g(x)$ (2), phương trình (2) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của $(P_1)$ và $(P_2)$.

* Nhận xét:

i) Số giao điểm của $(P_1)$ và $(P_2)$ bằng số nghiệm của hệ (1) và bằng số nghiệm của phương trình (2).

ii) $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm số bậc hai nên phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm. iii) Các bài toán liên quan đến dạng này thường áp dụng đến nội dung định lý Vi et thuận, nhắc lại như sau. Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm $x_1$ và $x_2$, ta luôn có $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ và $x_1 x_2=\frac{c}{a}$.

**Dạng 3. Điểm cố định của đồ thị hàm số**

Cho họ hàm số $f(x;m)=0$ ($m$ là tham số) có đồ thị $(P_m)$. Để tìm điểm cố định mà $(P_m)$ luôn đi qua với mọi giá trị của $m$, ta thực hiện các bước sau:

**Bước 1:** Giả sử điểm $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà $(P_m)$ luôn đi qua.

Tọa độ điểm $M$ thỏa mãn phương trình $f(x;m)=0$.

**Bước 2**: Chuyển phương trình về phương trình ẩn $m$ dạng $Am+B=0$ (hoặc $Am^2+Bm+C=0$). Phương trình nghiệm đúng với mọi $m$.

Khi đó ta có $\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}A=0\\B=0\\C=0\end{cases}$. Tìm được $x_0;y_0 \Rightarrow M(x_0;y_0)$.

**Bước 3:** Kết luận.

**Câu 1.** Tìm tọa độ giao điểm của các cặp đồ thị của các hàm số sau

a) $y=2x-3$ và $y=x^2-5x+9$.

b) $y=2x^2+x-3$ và $y=-x^2+3x+2$.

**Lời giải**

a) Tọa độ giao điểm của $y=2x-3$ và $y=x^2-5x+9$ là nghiệm của hệ sau

$$\begin{cases}y=2x-3\\y=x^2-5x+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-3\\x^2-7x+12=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=5\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}.$$

Vậy hai giao điểm có tọa độ là $(4;5)$ và $(3;3)$.

b) Tọa độ gaio điểm của $y=2x^2+x-3$ và $y=-x^2+3x+2$ là nghiệm của hệ sau

$$\begin{cases}y=2x^2+x-3\\y=-x^2+3x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-x^2+3x+2\\3x^2-2x-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\y=\dfrac{34}{9}\end{cases}.$$

Vậy hai giao điểm có tọa độ là $(-1;-2)$ và $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{34}{9}\right)$.

**Câu 2.** Cho parabol $y=-x^2+4x-2$ và đường thẳng $d: y=-2x+m$. Tìm các giá trị $m$ để

a) $d$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$. tìm tọa độ trung điểm của $AB$.

b) $d$ và $(P)$ có một điểm chung duy nhất. Tìm tọa độ điểm chung này.

c) $d$ không cắt $(P)$.

d) $d$ và $(P)$ có một giao điểm nằm trên đường thẳng $y=-2$.

**Lời giải**

Phương trình hoành độ giao điểm của $d$ và $(P)$ là

$$-x^2+4x-2=-2x+3m \Leftrightarrow x^2-6x+3m+2=0 \quad (*)$$

a) $d$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=9-(3m+2)>0 \Leftrightarrow 7-3m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{7}{3}$.

Tọa độ trung điểm $AB$ có dạng $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ với $x_A, x_B$ là nghiệm của $(*)$.

Theo định lí Viet, ta có $x_A+x_B=6$, suy ra $x_I=\frac{x_A+x_B}{3}=3$.

Ta có $\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{(-2x_A+3m)+(-2x_B+3m)}{2}=-(x_A+x_B)+3m=-6+3m$.

Vậy $I(3;-6+3m)$.

b) $d$ và $(P)$ có một điểm chung duy nhất khi và chỉ khi phươmng trình $(*)$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta'=9-(3m+2)=0 \Leftrightarrow 7-3m=0 \Leftrightarrow m=\frac{7}{3}$.

Với $m=\frac{7}{3}$ phương trình $(*)$ có nghiệm kép (nghiệm duy nhất) $x=-\frac{b}{2a}=3$.

Thay $x=3$ vào hàm số $y=-x^2+4x-2$, ta được $y=1$.

Vậy tọa độ điểm chung là $(3;1)$.

c) $d$ không cắt $(P)$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta'=9-(3m+2)<0 \Leftrightarrow 7-3m<0 \Leftrightarrow m>\frac{7}{3}.$$

d) Gọi $M(x_M;y_M)$ là giao điểm của $d$ và $(P)$. Giao điểm này nằm trên đường thẳng $y=-2$ suy ra $y_M=-2$.

Mặt khác $M$ thuộc $(P)$ nên thay $x=x_M$ và $y=y_M=-2$ vào $(P)$ ta được

$$-2=-x_M^2+4x_M-2 \Leftrightarrow x_M^2-4x_M=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M=0\Rightarrow M(0;-2) \\ x_M=4\Rightarrow M(4;-2)\end{array}\right.$$

□ Với $M(0;-2)$, vì $M$ cũng thuộc $d$ nên ta có $-2.0+3m=-2 \Leftrightarrow m=-\frac{2}{3}$.

□ Với $M(4;-2)$, vì $M$ cũng thuộc $d$ nên ta có $-2.4+3m=-2 \Leftrightarrow m=2$.

Vậy $m=-\frac{2}{3}$ hoặc $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 3.** Cho parabol $(P): y=x^2-4x+3$ và đường thẳng $d: y=mx+3$. Tìm các giá trị của $m$ để

a) $d$ và $(P)$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác $OAB$ bằng $\frac{9}{2}$.

b) $d$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=8$.

**Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $d$ là $x^2-4x+3=mx+3$

$$\Leftrightarrow x^2-(4+m)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4+m\end{array}\right.$$

a) $d$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt A, **B** khi $4+m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -4$.

Với $x=0$ thì $y=3$ suy ra $A(0;3)\in Oy$. Với $x=4+m$ thì $y=m^2+4m+3$ suy ra $B(4+m\,;\,m^2+4m+3)$.

Gọi H là hình chiếu của B lên OA. Suy ra $BH=\left|x_B\right|=\left|4+m\right|$.

Theo gải thiết bài toán, ta có

$$S_{\Delta OAB}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}OA.BH=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}.3.\left|m+4\right|=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\left|m+4\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-7\end{array}\right.$$

Vậy $m=-1$ hoặc $m=-7$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Giả sử $x_1=0$ và $x_2=4+m$. Theo gải thiết, ta có

$$x_1^3+x_2^3=8\Leftrightarrow 0+\left(4+m\right)^3=8\Leftrightarrow 4+m=2\Leftrightarrow m=-2.$$

Vậy $m=-1$ hoặc $m=-7$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Cách 2.** Áp dụng cho trường hợp không tìm cụ thể $x_1$, $x_2$.

Ta có $x_1^3+x_2^3=8\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=8\ (*)$

Do $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-\left(4+m\right)x=0$ nên theo định lý Viet, ta có

$\begin{cases}x_1+x_2=4+m\\x_1x_2=0\end{cases}$. Thay vào $(*)$, ta được $\left(4+m\right)^3-3.0.\left(4+m\right)=8\Leftrightarrow m=-2$. □

**Câu 4.** Chứng minh rằng với mọi $m$, đồ thị của mỗi hàm số sau luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và đỉnh $I$ của đồ thị luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

a) $y=x^2-mx+\frac{m^2}{4}-1$.

b) $y=x^2-2mx+m^2-1$.

**Lời giải.**

a) Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(P\right)$ và trục hoành là $x^2-mx+\frac{m^2}{4}-1=0.\ (1)$

Ta có $\Delta=m^2-4.1.\left(\frac{m^2}{4}-1\right)=4>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Do đó $(1)$ luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$ hay $\left(P\right)$ luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\forall m$.

Ta có $x=-\frac{b}{2a}=\frac{m}{2}$ suy ra $y=-1$. Do đó tọa độ đỉnh $I\left(\frac{m}{2};-1\right)$.

Vì $y_I=-1$ nên đỉnh $I$ luôn chạy trên đường thẳng cố định $y=-1$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(P\right)$ và trục hoành là $x^2-2mx+m^2-1=0.\ (2)$

Ta có $\Delta'=m^2-\left(m^2-1\right)=1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Do đó $(2)$ luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$ hay $\left(P\right)$ luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\forall m$.

Ta có $x=-\frac{b}{2a}=m$ suy ra $y=-1$. Do đó tọa độ đỉnh $I\left(m;-1\right)$.

Vì $y_I=-1$ nên đỉnh $I$ luôn chạy trên đường thẳng cố định $y=-1$.

**Câu 5.** Chứng minh rằng với mọi $m$, đồ thị hàm số $y=mx^2+2\left(m-2\right)x-3m+1$ luôn đi qua hai điểm cố định.

**Lời giải.**

Gọi $A(x_0;y_0)$ là điểm cố định của đồ thị hàm số $\Leftrightarrow y_0 = mx_0^2 + 2(m-2)x_0 - 3m + 1$, với mọi $m \Leftrightarrow m(x_0^2 + 2x_0 - 3) - 4x_0 - y_0 + 1 = 0$, với mọi $m$

$\begin{cases} x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \\ -4x_0 - y_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -3 \end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 13 \end{cases}$

Vậy đồ thị luôn đi qua hai điểm cố định là $A_1(1;-3)$ hoặc $A_2(-3;13)$ với mọi giá trị $m$.

**Câu 6.** Chứng minh rằng các parabol sau luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

a) $y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3$.

b) $y = mx^2 - (4m-1)x + 4m - 1 \ (m \neq 0)$.

**Lời giải.**

a) Gọi $y = ax + b$ là đường thẳng mà parabol luôn tiếp xúc.

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3 = ax + b$

$\Leftrightarrow 2x^2 - (8m - 4 + a)x + 8m^2 - 3 - b = 0$. $(1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $(1)$ luôn có nghiệm kép với mọi $m$

$\Leftrightarrow \Delta = (8m - 4 + a)^2 - 8(8m^2 - 3 - b) = 0$, với mọi $m$

$\Leftrightarrow 16(-4 + a)m + (-4 + a)^2 + 8(3 + b) = 0$, với mọi $m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 + a = 0 \\ (-4 + a)^2 + 8(3 + b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}$.

Vậy parabol $y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3$ luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = 4x - 3$.

b) Gọi $y = ax + b$ là đường thẳng mà parabol luôn tiếp xúc.

Phương trình hoành độ giao điểm $mx^2 - (4m-1)x + 4m - 1 = ax + b$

$\Leftrightarrow mx^2 - (4m - 1 + a)x + 4m - 1 - b = 0$. $(2)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $(2)$ luôn có nghiệm kép với mọi $m$

$\Leftrightarrow \Delta = (4m - 1 + a)^2 - 4m(4m - 1 - b) = 0$, với mọi $m$

$\Leftrightarrow 16m^2 + 8m(-1 + a)m + (-1 + a)^2 - 16m^2 + 4m(1 + b) = 0$, với mọi $m$

$\Leftrightarrow 4(2a + b - 1)m + (-1 + a)^2 = 0$, với mọi $m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b - 1 = 0 \\ -1 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$.

Vậy parabol $y = mx^2 - (4m-1)x + 4m - 1$ luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x - 1$.

**Câu 7.** Chứng minh rằng các đường thẳng sau luôn tiếp xúc vơi một parabol cố định.

a) $y = 2mx - m^2 + 4m + 2 \ (m \neq 0)$.

b) $y = (4m-2)x - 4m^2 - 2 \left(m \neq \frac{1}{2}\right)$.

**Lời giải.**

a) Gọi $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ là parabol cần tìm.

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^2+bx+c=2mx=m^2+4m+2$

$$\Leftrightarrow ax^2+(b-2m)x+c+m^2-4m-2=0\,.(1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $(1)$ luôn có nghiệm kép với mọi $m$

$\Leftrightarrow \Delta=(b-2m)^2-4a(c+m^2-4m-2)=0$, với mọi $m$

$\Leftrightarrow 4(1-a)m^2-4(b-4a)m+b^2-4ac+8a=0$, với mọi $m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-a=0\\ b-4a=0\\ b^2-4ac+8b=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=4\\ c=6\end{cases}.$$

Vậy đường thẳng $y=2mx-m^2+4m+2$ luôn tiếp xúc với parabol $y=x^2+4x+6$.

b) Gọi $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ là parabol cần tìm.

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^2+bx+c=(4m-2)x-4m^2-2$

$$\Leftrightarrow ax^2+(b-4m+2)x+c+4m^2+2=0\,.(2)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $(2)$ luôn có nghiệm kép với mọi $m$

$\Leftrightarrow \Delta=(b-4m+2)^2-4a(c+4m^2+2)=0$, với mọi $m$

$\Leftrightarrow \left[4m-(b+2)^2\right]-4a(c+4m^2+2)=0$, với mọi $m$

$\Leftrightarrow 16(1-a)m^2-8(b+2)m+(b+2)^2-4ac-8a=0$, với mọi $m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-a=0\\ b+2=0\\ (b+2)^2-4ac-8a=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=-2\end{cases}.$$

Vậy đường thẳng $y=(4m-2)x-4m^2-2$ luôn tiếp xúc với parabol $y=x^2-2x-2$.

## DẠNG 4. MỘT SỐ CÂU HỎI THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ BẬC HAI

**Dạng 1:** Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học. Các bước làm như sau:

**Bước 1:** Dựa vào giả thiết và các yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả dưới "dạng ngôn ngữ toán học" cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Căn cứ vào các yếu tố bài ra ta chọn biến số, tìm điều kiện tồn tại, đơn vị.

**Bước 2:** Dựa vào các mối liên hệ ràng buộc giữa biến số với các giả thiết của đề bài cũng như các kiến thức liên quan đến thực tế, ta thiết lập hàm số bậc hai. Chuyển yêu cầu đặt ra đối với bài toán thực tiễn thành yêu cầu bài toán hàm số bậc hai.

**Bước 3:** Dùng tính chất hàm số bậc hai để giải quyết bài toán hình thành ở bước 2. Lưu ý kiểm tra điều kiện, và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.

**Dạng 2:** Các bài toán thực tế đã mô hình hóa bằng một hàm số bậc hai. Thực hiện bước 3 của dạng 1.

**Câu 1.** Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t)=-t^2+2t+3$ (tính bằng mét), $t$ là thời gian tính bằng giây $(t\geq 0)$.

**a.** Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.

**b.** Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất?

***Lời giải***

**a.** Ta có: $h(t)=-t^2+2t+3\Leftrightarrow h(t)=-(t-1)^2+4\Rightarrow \max h(t)=h(1)=4$.

Vậy quả bóng đạt chiều cao lớn nhất bằng 4 m tại thời điểm $t=1$ giây.

**b.** Ta có: $-t^2+2t+3=0 \Leftrightarrow t=-1$ (loại) hoặc $t=3$ (nhận).

Vậy sau 3 giây quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất.

**Câu 2.** Độ cao của quả bóng golf tính theo thời gian có thể được xác định bằng một hàm bậc hai. Với các thông số cho trong bảng sau, hãy xác định độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây?

| Thời gian (giây) | 0 | 0,5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Độ cao (mét) | 0 | 28 | 48 | 64 |

***Lời giải***

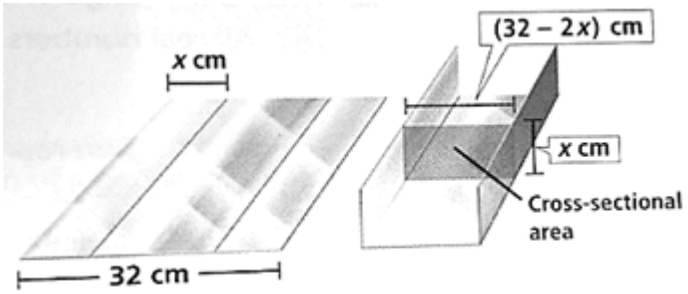
Độ cao của quả bóng tính theo thời gian được xác định bởi hàm số $h(t)=at^2+bt+c$ (tính bằng mét), $t$: giây, $t\ge 0$.

Với các thông số cho bởi bảng trên ta có:

$$\begin{cases} c=0 \\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=28 \\ a+b+c=48 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-16 \\ b=64 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow h(t)=-16t^2+64t \Rightarrow h(3)=48.$$

Vậy độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây là 48 m.

**Câu 3.** Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi $x$ bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang $S$ lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?




***Lời giải***

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang $x$ (cm) của phần gấp hai bên, ta có:

$S(x)=x(32-2x)$, với $0<x<16$.

Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;16)$.

Ta có: $S(x)=-2x^2+32x=-2(x-8)^2+128\le 128,\ \forall x\in(0;16)$.

$\Rightarrow \max S(x)=S(8)=128$.

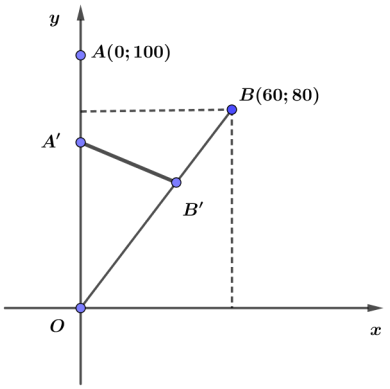
Vậy $x=8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

**Câu 4.** Hai con chuồn chuồn bay trên hai quĩ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm.

Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0;100)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc $5$ m/s.

Con còn lại bay trên quĩ đạo là đường thẳng từ $B(60;80)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc $10$ m/s.

Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu?




***Lời giải***

Xét tại thời điểm $t$ (giây), $t \in [0;10]$, con chuồn chuồn bay từ $A$ về $O$ có tọa độ là $A'(0;100-5t)$.

Con chuồn chuồn bay từ $B(60;80)$ về $O(0;0)$ trên quĩ đạo là đường thẳng có hệ số góc là $k = \tan\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5},\ \sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Do đó tại thời điểm $t$, nó có tọa độ là $\begin{cases} x = 60 - 10t.\cos\alpha \\ y = 80 - 10t.\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 - 6t \\ y = 80 - 8t \end{cases} \Rightarrow B'(60-6t;80-8t)$.

Ta có: $\overrightarrow{A'B'} = (60-6t;-20-3t)$.

Khi đó, khoảng cách giữa hai con chuồn chuồn là:

$$d = A'B' = \sqrt{(60-6t)^2 + (20+3t)^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{45t^2 - 600t + 4000}$$

$d$ nhỏ nhất khi hàm số $f(t) = 45t^2 - 600t + 4000$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;10]$.

Ta có: $f(t) = 5(3t-20)^2 + 2000 \geq 2000,\ \forall t \in [0;10]$

$$\Rightarrow \min_{t\in[0;10]} f(t) = f\left(\frac{20}{3}\right) = 2000.$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất của hai con chuồn chuồn trong quá trình bay là $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$ m.

**Câu 5.** Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để của hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

***Lời giải***

Gọi $x$ là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng ($x$: đồng, $30000 \leq x \leq 50000$).

Tương ứng với giá bán là $x$ thì số quả bán được là: $40 + \frac{10}{1000}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$.

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right).(x - 30000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$$

Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[30000;50000]$

Ta có: $f\left(x\right)=-\left(\frac{1}{10}x-4200\right)^2+1440000\le 1440000,\ \forall x\in\left[30000;50000\right]$

$\Rightarrow \max\limits_{x\in[30000;50000]} f\left(x\right)=f\left(42000\right)=1440000$.

Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### DẠNG 1. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ

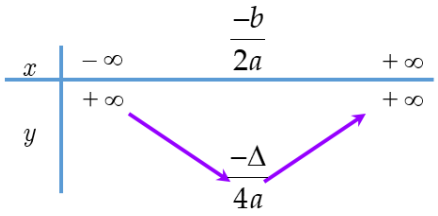
**Câu 1.** Hàm số $y=ax^2+bx+c$, $(a>0)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\Delta}{4a};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$a>0$. Bảng biến thiên




**Câu 2.** Cho hàm số $y=-x^2+4x+1$. Khẳng định nào sau đây sai?

**A.** Trên khoảng $(-\infty;1)$ hàm số đồng biến.

**B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

**C.** Trên khoảng $(3;+\infty)$ hàm số nghịch biến.

**D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;4)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đỉnh của parabol: $x_I=-\dfrac{b}{2a}=2$

Bảng biến thiên của hàm số:

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $5$ | ↘ | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra khẳng định **D** sai.

**Câu 3.** Hàm số $y=4x-x^2$ có sự biến thiên trong khoảng $(2;+\infty)$ là

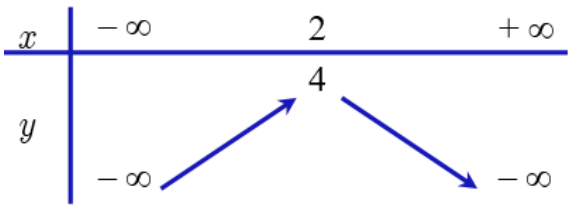
**A.** tăng. **B.** giảm.

**C.** vừa tăng vừa giảm. **D.** không tăng không giảm.

**Lời giải**

**Chọn B**

Bảng biến thiên




**Câu 4.** Hàm số $y=x^2-4x+11$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**A.** $(-2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;+\infty)$ **C.** $(2;+\infty)$ **D.** $(-\infty;2)$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $7$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy, hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

**Câu 5.** Khoảng đồng biến của hàm số $y=x^2-4x+3$ là

**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;2)$.

**C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số $y=x^2-4x+3$ có $a=1>0$ nên đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$.

Vì vậy hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.

**Câu 6.** Khoảng nghịch biến của hàm số $y=x^2-4x+3$ là

**A.** $(-\infty;-4)$. **B.** $(-\infty;-4)$.

**C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số $y=x^2-4x+3$ có hệ số $a=1>0$ nên đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$.

Vì vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$.

**Câu 7.** Cho hàm số $y=-x^2+4x+3$. Chọn khẳng định đúng.

**A.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**C.** Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Do $a=-1$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

**Câu 8.** Hàm số $f(x)=x^2-2x+3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có hàm số $(P): y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1$;nên $(P)$ có bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh của parabol $x_I = \dfrac{-b}{2a} = 1$. Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

**Câu 9.** Hàm số $y = 2x^2 - 4x + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số bậc hai có $a = 2 > 0; -\dfrac{b}{2a} = 1$ nên hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

**Câu 10.** Hàm số $y = -3x^2 + x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(\dfrac{1}{6};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{6}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{6};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{6}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$(P): y = f(x) = -3x^2 + x - 2$, TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Có $a = -3$, đỉnh $S$ có hoành độ $x = \dfrac{1}{6}$.

Nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $\left(\dfrac{1}{6};+\infty\right)$.

**Câu 11.** Cho hàm số $y = -x^2 + 6x - 1$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;3)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;6)$ **D.** $(6;+\infty)$

**Lời giải**

Ta có $a = -1 < 0, \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2.(-1)} = 3$. Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

**Đáp án** **A.**

**Câu 12.** Cho hàm số $y = x^2 - 3mx + m^2 + 1$ $(1)$, $m$ là tham số. Khi $m = 1$ hàm số đồng biến trên khoảng nào?

**A.** $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Khi $m = 1$, hàm số trở thành $y = x^2 - 3x + 2$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đỉnh $I\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{4}\right)$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $-\frac{1}{4}$ | $+\infty$ |

Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

**Câu 13.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=x^2-2(m+1)x-3$ đồng biến trên khoảng $(4;2018)$?

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

**Lời giải**

Hàm số có $a=1>0, \frac{-b}{2a}=m+1$ nên đồng biến trên khoảng $(m+1;+\infty)$.

Do đó để hàm số đồng biến trên khoảng $(4;2018)$ thì ta phải có

$$(4;2018)\subset(m+1;+\infty)\Leftrightarrow m+1\le 4\Leftrightarrow m\le 3.$$

Vậy có ba giá trị nguyên dương của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1, 2, 3.

**Đáp án D.**

**Câu 14.** Tìm tất cả các giá trị của $b$ để hàm số $y=x^2+2(b+6)x+4$ đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$.

**A.** $b\ge 0$. **B.** $b=-12$.

**C.** $b\ge -12$. **D.** $b\ge -9$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số $y=f(x)=x^2+2(b+6)x+4$ là hàm số bậc hai có hệ số $a=1>0$, $-\frac{b}{2a}=-b-6$ nên có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | $-(b+6)$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $f(-(b+6))$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số đồng biến trên $(6;+\infty)$ thì $\Leftrightarrow(6;+\infty)\subset(-b-6;+\infty)\Leftrightarrow -b-6\le 6\Leftrightarrow b\ge -12$..

**Câu 15.** Hàm số $y=-x^2+2(m-1)x+3$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ khi giá trị $m$ thỏa mãn:

**A.** $m\le 0$. **B.** $m>0$. **C.** $m\le 2$. **D.** $0<m\le 2$

**Lời giảiss**

**Chọn C**

Đồ thị hàm số có trục đối xứng là đường $x=m-1$. Đồ thị hàm số đã cho có hệ số $x^2$ âm nên sẽ đồng biến trên $(-\infty;m-1)$ và nghịch biến trên $(m-1;+\infty)$. Theo đề, cần: $m-1\le 1\Leftrightarrow m\le 2$.

**Câu 16.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=-x^2+2|m+1|x-3$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m \le -3 \\ m \ge 1 \end{array}\right.$. **B.** $-3 < m < 1$. **C.** $-3 \le m \le 1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số $y = -x^2 + 2|m+1|x - 3$ có $a = -1 < 0; -\dfrac{b}{2a} = |m+1|$ nên hàm số nghịch biến trên $(|m+1|; +\infty)$.

Để hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$ thì $(2; +\infty) \subset (|m+1|; +\infty)$

$\Leftrightarrow |m+1| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le m+1 \le 2 \Leftrightarrow -3 \le m \le 1$.

**Câu 17.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^2 + (m-1)x + 2m - 1$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$. Khi đó tập hợp $(-10;10) \cap S$ là tập nào?

**A.** $(-10;5)$. **B.** $[5;10)$. **C.** $(5;10)$. **D.** $(-10;5]$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $(P)$ là đồ thị của $y = f(x) = x^2 + (m-1)x + 2m - 1$.

$y = f(x)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1$.

Gọi $I$ là đỉnh của $(P)$, có $x_I = \dfrac{1-m}{2}$.

Nên hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1-m}{2}; +\infty\right)$.

Do đó để hàm số trên khoảng $(-2; +\infty)$ khi $\dfrac{1-m}{2} \le -2 \Leftrightarrow m \ge 5$.

Suy ra tập $S = [5; +\infty)$. Khi đó $(-10;10) \cap S = [5;10)$.

**Câu 18.** Tìm tất cả các giá trị dương của tham số $m$ để hàm số $f(x) = mx^2 - 4x - m^2$ luôn nghịch biến trên $(-1;2)$.

**A.** $m \le 1$. **B.** $-2 \le m \le 1$. **C.** $0 < m \le 1$. **D.** $0 < m < 1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

- Với $m > 0$, ta có hàm số $f(x) = mx^2 - 4x - m^2$ nghịch biến trên $\left(-\infty; \dfrac{2}{m}\right)$, suy ra hàm nghịch biến trên $(-1;2)$ khi $(-1;2) \subset \left(-\infty; \dfrac{2}{m}\right) \Leftrightarrow 2 \le \dfrac{2}{m} \Leftrightarrow 0 < m \le 1$.

**Câu 19.** Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?

**A.**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**B.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**C.**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**D.**

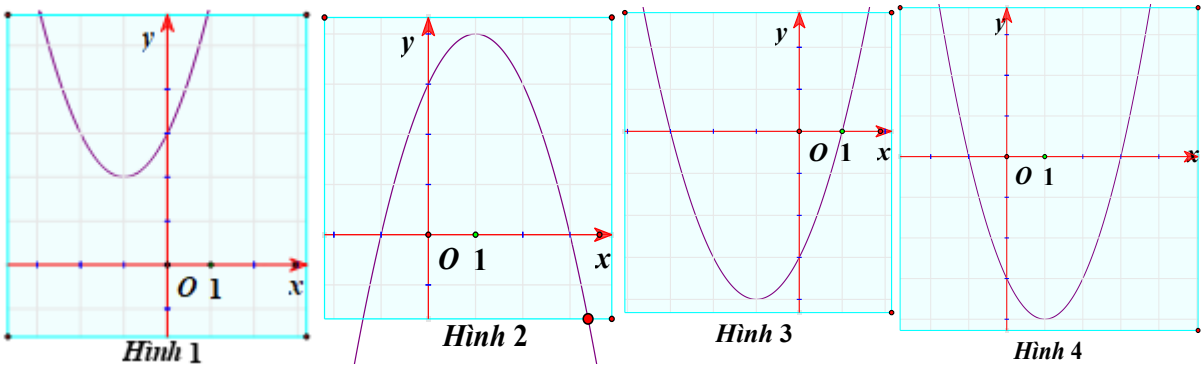
| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số $y=-2x^2+4x+1$ có đỉnh $I(1;3)$, hệ số $a=-2<0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$, nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

**Câu 20.** Đồ thị nào sau đây là đồ thị của hàm số $y=x^2-2x-3$




**A.** Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

**Lời giải**

**Chọn D**

Dựa vào đồ thị có:

$(P): y=f(x)=x^2-2x-3$ ;có $a=1>0$ ;nên $(P)$ có bề lõm hướng lên (loại hình 2).

$(P)$ có đỉnh $I$ có $x_I=1$ (loại hình 1 và 3).

Vậy $(P): y=f(x)=x^2-2x-3$ có đồ thị là hình 4.

**Câu 21.** Bảng biến thi của hàm số $y=-2x^4+4x+1$ là bảng nào sau đây?

**A.**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**B.**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $-\infty$ |

**C.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**D.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $-\infty$ |

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số $y=-2x^4+4x+1$ có hệ số $a=-2<0$ nên bề lõm quay lên trên vì vậy ta loại đáp án **B**, **D.** Hàm số có tọa độ đỉnh $I(1;3)$ nên ta loại đáp án **A.**

Vậy bảng biến thiên của hàm số $y=-2x^4+4x+1$ là bảng **C.**

**Câu 22.** Bảng biến thiên của hàm số $y=-x^2+2x-1$ là:

**A.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**B.**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**C.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**D.**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Lời giải**

**Chọn A**

$y=-x^2+2x-1$

Có $a=-1<0$, nên loại C và **D.**

Tọa độ đỉnh $I(1;0)$, nên nhận **A.**

**Câu 23.** Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y=-x^2+2x+2$?

**A.**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**B.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**C.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**D.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Lời giải**

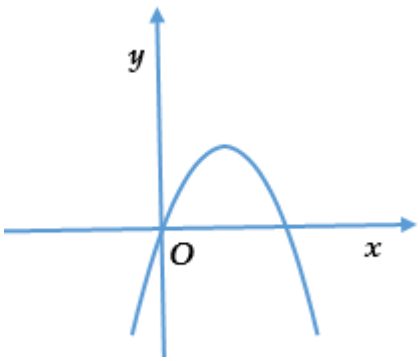
**Chọn C**

$y'=-2x+2$

$y'=0 \Leftrightarrow x=1$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;\ 1)$; nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

**Câu 24.** Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ có hệ số $a$ là



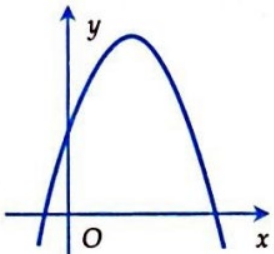

**A.** $a>0$. **B.** $a<0$. **C.** $a=1$. **D.** $a=2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Bề lõm hướng xuống $a<0$.

**Câu 25.** Cho parabol $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào dưới đây đúng?




**A.** $a<0, b>0, c<0$

**B.** $a<0, b<0, c<0$

**C.** $a<0, b>0, c>0$

**D.** $a<0, b<0, c>0$

**Lời giải**

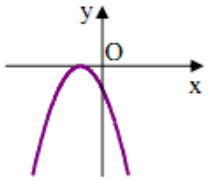
**Đáp án C.**

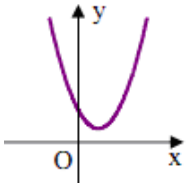
Parabol quay bề lõm xuống dưới $\Rightarrow a<0$.

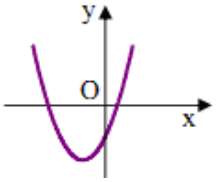
Parabol cắt $Oy$ tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow c>0$.

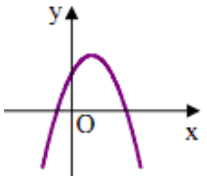
Đỉnh của parabol có hoành độ dương $\Rightarrow \dfrac{-b}{2a}>0 \Rightarrow \dfrac{b}{a}<0$ mà $a<0$ nên suy ra $b>0$.

**Câu 26.** Nếu hàm số $y=ax^2+bx+c$ có $a>0$, $b>0$ và $c<0$ thì đồ thị hàm số của nó có dạng

**A.** 

. **B.** 

. **C.** 

. **D.** 

.

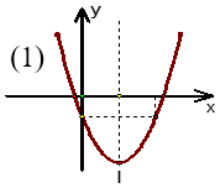
**Lời giải**

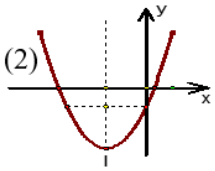
**Chọn C**

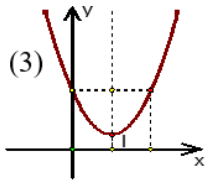
Do $a>0$ nên Parabol quay bề lõm lên trên, suy ra loại phương án $A, D$. Mặt khác do $a>0$, $b>0$ nên đỉnh Parabol có hoành độ $x=-\dfrac{b}{2a}<0$ nên loại phương án $B$. Vậy chọn $C$.

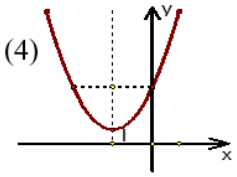
(Nhận xét: Với các đáp án này thừa dữ kiện $c<0$)

**Câu 27.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c, (a>0, b<0, c>0)$ thì đồ thị (P) của hàm số là hình nào trong các hình sau:










**A.** Hình (4). **B.** Hình (2). **C.** Hình (3). **D.** Hình (1)

**Lời giải**

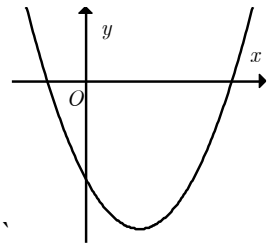
**Chọn C**

Vì $c>0$ nên đồ thị cắt trục tung tại điểm nằm phía trên trục hoành.

Mặt khác $a>0, b<0$ nê hai hệ số này trái dấu, trục đối xứng sẽ phía phải trục tung.

Do đó, hình (3) là đáp án cần tìm.

**Câu 28.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?




**A.** $a>0,\ b<0,\ c<0$. **B.** $a>0,\ b<0,\ c>0$.

**C.** $a>0,\ b>0,\ c>0$. **D.** $a<0,\ b<0,\ c<0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Parabol có bề lõm quay lên $\Rightarrow a>0$ loại **D.**

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c<0$ loại B, **C.** Chọn **A.**

**Câu 29.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ như hình vẽ dưới đây:

| $x$ | $0$ | | $-\dfrac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $\nearrow$ | $-\dfrac{\Delta}{4a}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Xác định dấu của $a$, $b$, $c$.

**A.** $a<0,b<0,c>0$. **B.** $a<0,b>0,c>0$. **C.** $a<0,b>0,c>0$. **D.** $a<0,b>0,c<0$.

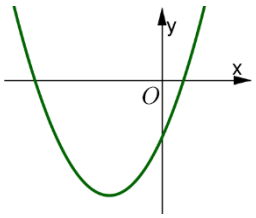
**Lời giải**

**Chọn D**

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Parabol $(P)$ có bề lõm quay xuống dưới; hoành độ đỉnh dương;

cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng – 1 nên $\begin{cases}a<0\\ \dfrac{-b}{2a}>0\\ c=-1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<0\\ b>0\\ c<0\end{cases}$.

**Câu 30.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị là parabol trong hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?




**A.** $a>0;\ b>0;\ c>0$. **B.** $a>0;\ b<0;\ c>0$.

**C.** $a>0;\ b<0;\ c<0$. **D.** $a>0;\ b>0;\ c<0$.

**Lời giải**

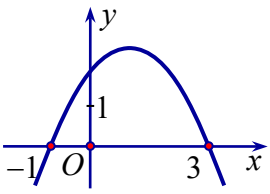
**Chọn D**

Vì Parabol hướng bề lõm lên trên nên $a>0$.

Đồ thị hàm số cắt $Oy$ tại điểm $(0;c)$ ở dưới $Ox\Rightarrow c<0$.

Hoành độ đỉnh Parabol là $-\dfrac{b}{2a}<0$, mà $a>0\Rightarrow b>0$.

**Câu 31.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên.




Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $a>0,\ b>0,\ c>0$. **B.** $a>0,\ b<0,\ c<0$.

**C.** $a<0,\ b<0,\ c>0$. **D.** $a<0,\ b>0,\ c>0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Dựa vào đồ thị, nhận thấy:

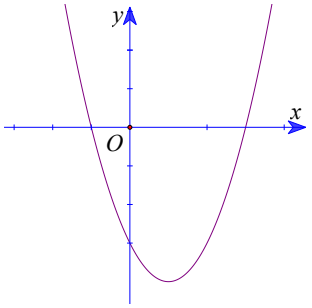
* Đồ thị hàm số là một parabol có bề lõm quay xuống dưới nên $a<0$.

* Đồ thị cắt trục tung tại tung độ bằng $c$ nên $c>0$.

* Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x_1=-1$ và $x_2=3$ nên $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ mà theo Vi-et $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2\Leftrightarrow b=-2a\Rightarrow b>0$.

* Vậy $a<0$, $b>0$, $c>0$.

**Câu 32.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như bên.




Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $a>0,b<0,c<0.$. **B.** $a>0,b<0,c>0.$. **C.** $a>0,b>0,c<0.$. **D.** $a<0,b<0,c>0.$

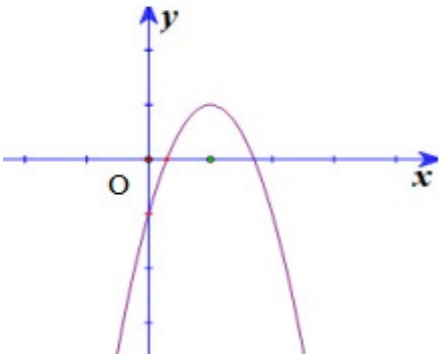
**Lời giải**

**Chọn A**

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ $(=c)$ âm nên $c<0$. Suy ra loại B,. **D.**

Đồ thị hướng bề lõm lên trên nên $a>0$, hoành độ đỉnh $\left(=\dfrac{-b}{2a}\right)$ dương nên $\dfrac{-b}{2a}>0,a>0\Rightarrow b<0$.

**Câu 33.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$. Có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi mệnh đề nào đúng?




**A.** $a<0,b>0,c<0$. **B.** $a<0,b<0,c>0$.

**C.** $a<0,b<0,c<0$. **D.** $a>0,b>0,c<0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Nhận xét:

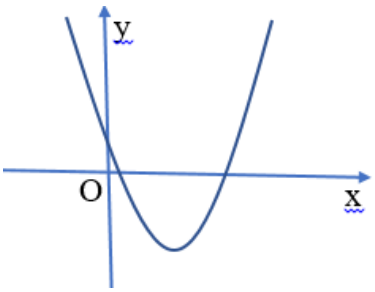
+) Parabol có bề lõm quay xuống dưới nên $a<0$.

+) Parabol cắt trục tung tại điểm có hoành độ bằng $0$ và tung độ âm nên thay $x=0$ vào $y=ax^2+bx+c$ suy ra $c<0$.

+) Parabol có trục đối xứng nằm bên phải trục tung nên $x=-\dfrac{b}{2a}>0$ mà $a<0$ nên $b>0$.

Vậy $a<0,b>0,c<0$.

**Câu 34.** Cho đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?




**A.** $a>0,b=0,c>0$. **B.** $a>0,b>0,c>0$.

**C.** $a>0,b<0,c>0$. **D.** $a<0,b>0,c>0$.

**Lời giải**

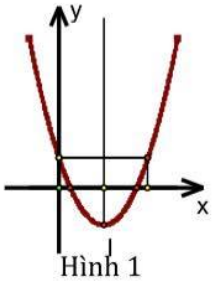
**Chọn C**

Từ dáng đồ thị ta có $a>0$.

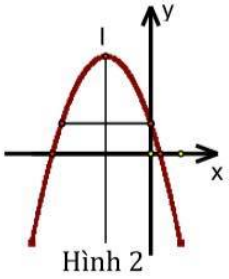
Đồ thị cắt trục $Oy$ tại điểm có tung độ dương nên $c>0$.

Hoành độ đỉnh $-\dfrac{b}{2a}>0$ mà $a>0$ suy ra $b<0$.

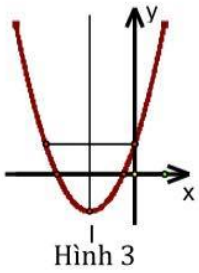
**Câu 35.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có $a<0;b<0;c>0$ thì đồ thị $(P)$ của hàm số là hình nào trong các hình dưới đây



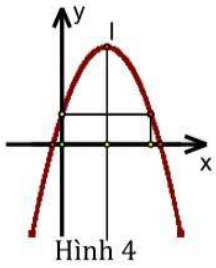
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

**A.** hình $(4)$. **B.** hình $(3)$. **C.** hình $(2)$. **D.** hình $(1)$.

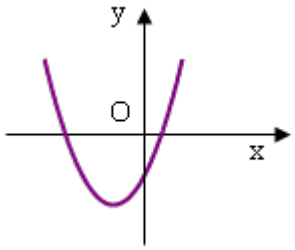
**Lời giải**

**Chọn C**

Vì $a<0$ nên đồ thị có bề lõm hướng xuống dưới $\Rightarrow$ loại hình (1), hình (3).

$a<0;b<0\Rightarrow\dfrac{-b}{2a}<0$ nên trục đối xứng của $(P)$ nằm bên trái trục tung. Vậy hình (2) thỏa mãn nên chọn đáp án **C.**

**Câu 36.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?




**A.** $a>0,b>0,c>0$. **B.** $a>0,b>0,c<0$. **C.** $a>0,b<0,c<0$. **D.** $a>0,b<0,c>0$.

**Lời giải**

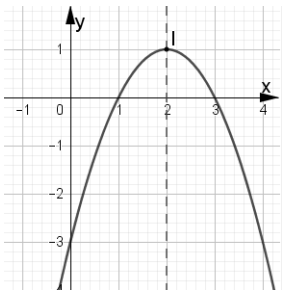
**Chọn B**

Đồ thị hàm số cắt trục $Oy$ tại điểm nằm phía dưới trục $Ox$ nên $C<0$

Đồ thị có bề lõm hướng lên do đó $a>0$

Tọa độ đỉnh nằm ở góc phần tư thứ III nên $\dfrac{-b}{2a}<0\Rightarrow b>0$.

**Câu 37.** Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên dưới?




**A.** $y=-x^2+4x-3$. **B.** $y=-x^2-4x-3$. **C.** $y=-2x^2-x-3$. **D.** $y=x^2-4x-3$.

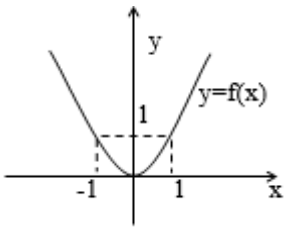
**Lời giải**

**Chọn A**

Đồ thị có bề lõm quay xuống dưới nên $a<0$. Loại phương án **D.**

Trục đối xứng: $x=2$ do đó chọn **A.**

**Câu 38.** Đồ thị hàm số sau biểu diễn đồ thị hàm số nào?




**A.** $y=2x^2$. **B.** $y=x^2$. **C.** $y=-x^2$. **D.** $y=\frac{1}{2}x^2$.

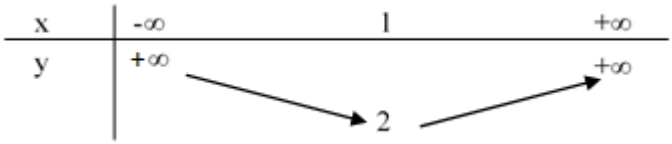
**Lời giải**

**Chọn B**

Đồ thị có hệ số $a>0$ nên loại $C$.

Đồ thị đi qua điêm $(1;1)$ nên loại $A$ và loại $D$.

**Câu 39.** Bảng biến thiên sau là của hàm số nào ?




**A.** $y=2x^2-4x+4$. **B.** $y=-3x^2+6x-1$. **C.** $y=x^2+2x-1$. **D.** $y=x^2-2x+2$.

**Lời giải**

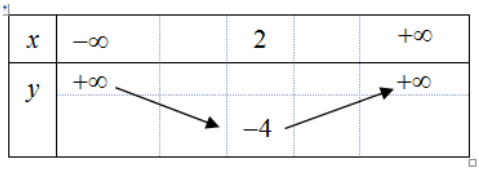
**Chọn A.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $a>0$. Loại ***B***.

Tọa độ đỉnh $I(1;2)\Rightarrow -\frac{b}{2a}=1>0$. Suy ra $b<0$. Loại. ***C***.

Thay $x=1\Rightarrow y=2$. Loại ***D***.

**Câu 40.** Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?




**A.** $y=x^2-4x$. **B.** $y=x^2+4x$. **C.** $y=-x^2+4x$. **D.** $y=-x^2-4x$.

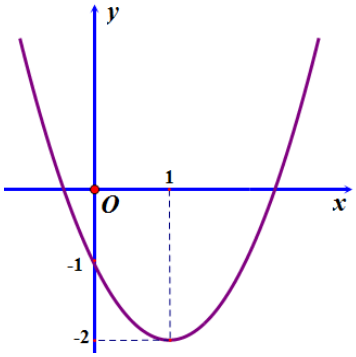
**Lời giải**

**Chọn A**

Từ bảng biến thiên suy ra hệ số $a>0$. Loại **C, D**

Toạ độ đỉnh $I=(2;-4)$ loại **B**

**Câu 41.** Đồ thị trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các phương án A;B;C;D sau đây?




**A.** $y=x^2+2x-1$. **B.** $y=x^2+2x-2$. **C.** $y=2x^2-4x-2$. **D.** $y=x^2-2x-1$.

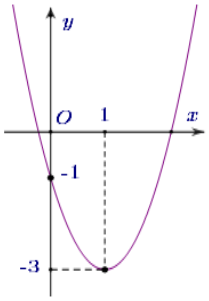
**Lời giải**

**Chọn D**

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-1$ nên loại **B** và **C**

Hoành độ của đỉnh là $x_I=-\dfrac{b}{2a}=1$ nên ta loại A và chọn **D.**

**Câu 42.** Cho parabol $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình sau




Phương trình của parabol này là

**A.** $y=-x^2+x-1$. **B.** $y=2x^2+4x-1$. **C.** $y=x^2-2x-1$. **D.** $y=2x^2-4x-1$.

**Lời giải**

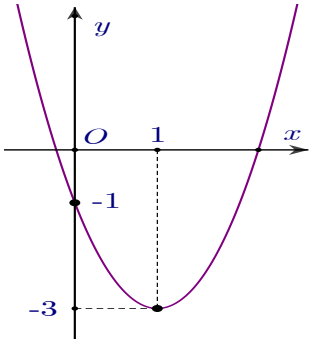
**Chọn D**

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0\,;-1)$ nên $c=-1$.

Tọa độ đỉnh $I(1\,;-3)$, ta có phương trình: $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=1\\ a.1^2+b.1-1=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=0\\ a+b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-4\end{cases}$.

Vậy parabol cần tìm là: $y=2x^2-4x-1$.

**Câu 43.** Cho parabol $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình sau:




Phương trình của parabol này là

**A.** $y=-x^2+x-1$. **B.** $y=2x^2+4x-1$. **C.** $y=x^2-2x-1$. **D.** $y=2x^2-4x-1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Do đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-1$ nên suy ra $c=-1$ (1)

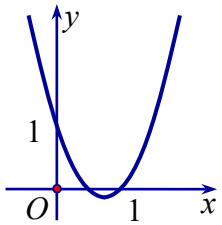
Đồ thị có tọa độ đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right)\equiv I(1;-3)$ nên ta có:

$$\begin{cases}\frac{-b}{2a}=1\\ \frac{-\Delta}{4a}=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2a\\ \Delta=12a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2a\\ b^2-4ac-12a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2a\\ 4a^2-4ac-12a=0\end{cases}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}c=-1\\ b=-2a\\ 4a^2-8a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-4\\ c=-1\end{cases}$.

Ta được parabol có phương trình là $y=2x^2-4x-1$.

**Câu 44.** Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số bậc hai nào?




**A.** $y=x^2-3x+1$. **B.** $y=2x^2-3x+1$. **C.** $y=-x^2+3x-1$. **D.** $y=-2x^2+3x-1$.

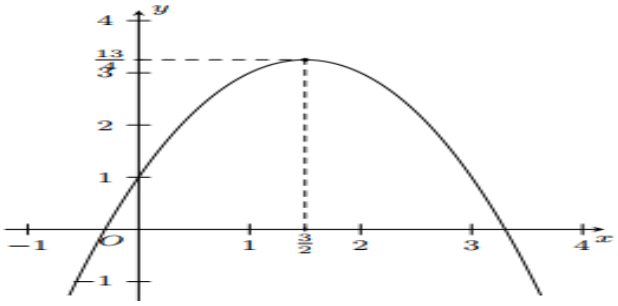
**Lời giải**

**Chọn B**

Dựa vào hình vẽ ta có hàm số bậc hai có hệ số $a>0$ nên ta loại đáp án **C,** **D.**

Mặt khác đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(1;0)$, mà điểm $(1;0)$ thuộc đồ thị hàm số $y=2x^2-3x+1$ và không thuộc đồ thị hàm số $y=x^2-3x+1$ nên ta chọn **B.**

**Câu 45.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho Parabol như hình vẽ.




Hỏi parabol có phương trình nào trong các phương trình dưới đây?

**A.** $y=x^2+3x-1$. **B.** $y=x^2-3x-1$. **C.** $y=-x^2-3x-1$. **D.** $y=-x^2+3x+1$.

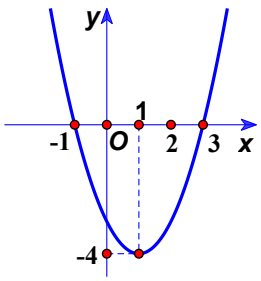
**Lời giải**

**Chọn D**

Đồ thị hàm số là parabol có bề lõm quay xuống nên hệ số $a<0$. Loại đáp án A, **B.**

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên loại đáp án **C.**

**Câu 46.** Cho parabol $(P):y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $2a+b+2c$ có giá trị là




**A.** $-9$. **B.** $9$. **C.** $-6$. **D.** $6$.

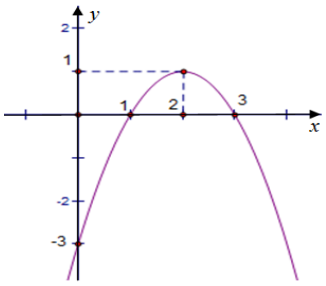
**Lời giải**

**Chọn C**

Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ đi qua các điểm $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ -4)$, $C(3;\ 0)$ nên có hệ phương trình: $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = -4 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$.

Khi đó: $2a + b + 2c = 2.1 - 2 + 2(-3) = -6$.

**Câu 47.** Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên dưới




**A.** $y = -x^2 + 2x - 3$. **B.** $y = -x^2 + 4x - 3$. **C.** $y = x^2 - 4x + 3$. **D.** $y = x^2 - 2x - 3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đồ thị trên là của hàm số bậc hai với hệ số $a < 0$ và có tọa độ đỉnh là $I(2;1)$. Vậy đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

**Câu 48.** Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

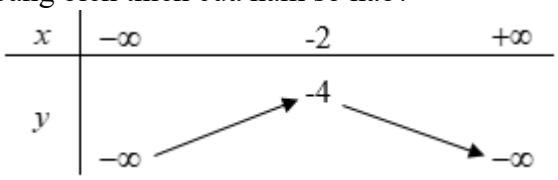
**A.** $y = -x^2 + 4x$. **B.** $y = -x^2 + 4x - 9$. **C.** $y = x^2 - 4x - 1$. **D.** $y = x^2 - 4x - 5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Parabol cần tìm phải có hệ số $a>0$ và đồ thị hàm số phải đi qua điểm $(2;-5)$. Đáp án **C** thỏa mãn.

**Câu 49.** Bảng biến thiên sau đây là bảng biến thiên của hàm số nào?




**A.** $y=x^2+4x$. **B.** $y=-x^2-4x-8$. **C.** $y=-x^2-4x+8$. **D.** $y=-x^2-4x$.

**Lời giải**

**Chọn B**

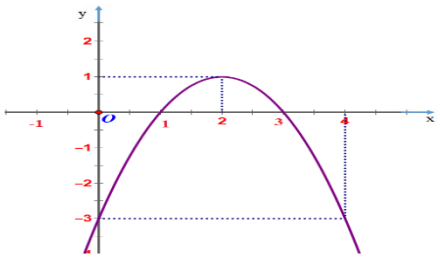
Dựa vào BBT ta thấy:

Parabol có bề lõm quay lên trên nên hệ số $a<0 \Rightarrow$ Loại **A.**

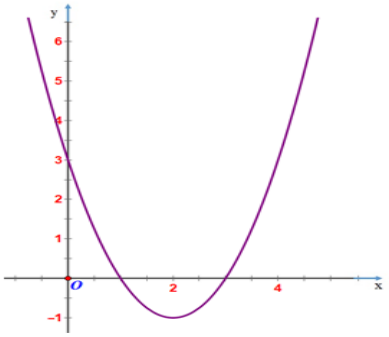
Parabol có đỉnh $I(-2;-4)$ nên thay $x=-2;y=-4$ vào các đáp án B, C, **D.**

Nhận thấy chỉ có đáp án B thỏa mãn.

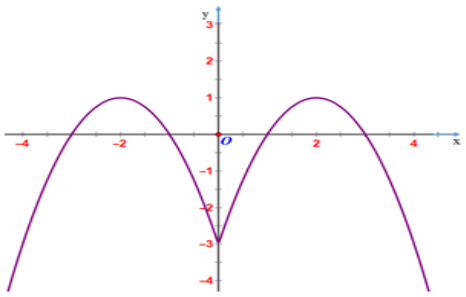
**Câu 50.** Cho đồ thị hàm số $y=-x^2+4x-3$ có đồ thị như hình vẽ sau



Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\left|-x^2+4x-3\right|$



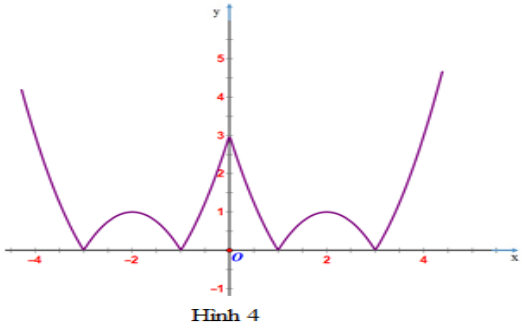
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

**A.** Hình 2 **B.** Hình 4 **C.** Hình 1 **D.** Hình 3

**Lời giải**

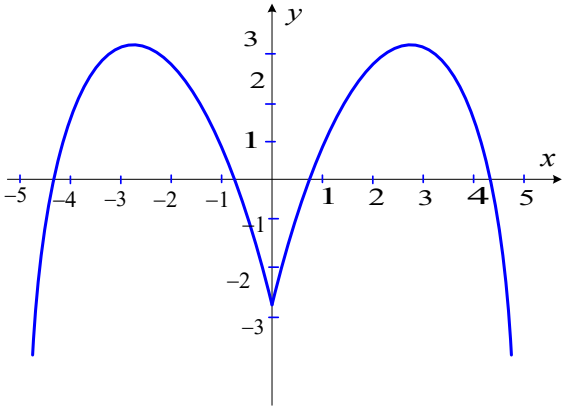
**Chọn D.**

Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ gồm hai phần

Phần 1: ứng với $y\ge 0$ của đồ thị $y=f(x)$.

Phần 2: lấy đối xứng phần $y<0$ của đồ thị $y=f(x)$ qua trục $Ox$.

**Câu 51.** Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?




**A.** $y=x^2-3x-3$. **B.** $y=-x^2+5|x|-3$. **C.** $y=-x^2-3|x|-3$. **D.** $y=-x^2+5x-3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Quan sát đồ thị ta loại **A.** và **D.** Phần đồ thị bên phải trục tung là phần đồ thị $(P)$ của hàm số $y=-x^2+5x-3$ với $x>0$, tọa độ đỉnh của $(P)$ là $\left(\frac{5}{2};\frac{13}{4}\right)$, trục đối xứng là $x=2,5$. Phần đồ thị bên trái trục tung là do lấy đối xứng phần đồ thị bên phải của $(P)$ qua trục tung $Oy$. Ta được cả hai phần là đồ thị của hàm số $y=-x^2+5|x|-3$.

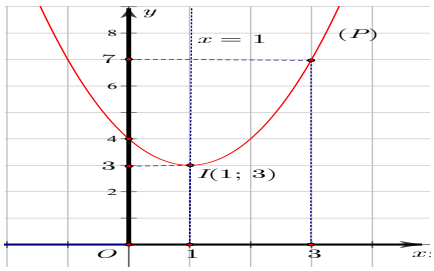
**Câu 52.** Cho hàm số $y=x^2-2x+4$ có đồ thị $(P)$. Tìm mệnh đề sai.

**A.** $(P)$ có đỉnh $I(1;3)$. **B.** $\min y=4, \forall x\in[0;3]$.

**C.** $(P)$ có trục đối xứng $x=1$. **D.** $\max y=7, \forall x\in[0;3]$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Dựa vào đồ thị của hàm số $y=x^2-2x+4$: $(P)$, ta nhận thấy:

$(P)$ có đỉnh $I(1;3)$ nên A đúng.

$\min y=3, \forall x\in[0;3]$, đạt được khi $x=1$ nên B sai.

$(P)$ có trục đối xứng $x=1$ nên C đúng.

$\max y=7, \forall x\in[0;3]$, đạt được khi $x=3$ nên D đúng.

**Câu 53.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-4x+1$.

**A.** $-3$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $13$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

$y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3 \geq -3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất là $-3$ tại $x = 2$.

**Câu 54.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2x + 3$ đạt được tại

**A.** $x = -2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $y = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

Dấu bằng xảy ra khi $x = -1$ nên chọn đáp án **B.**

**Câu 55.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^2 + x - 3$ là

**A.** $-3$. **B.** $-2$. **C.** $\frac{-21}{8}$. **D.** $\frac{-25}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$y = 2x^2 + x - 3 = 2(x + \frac{1}{4}) - \frac{25}{8} \geq \frac{-25}{8}$

$y = \frac{-25}{8} khi\, x = \frac{-1}{4}$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^2 + x - 3$ là $\frac{-25}{8}$.

**Câu 56.** Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{12}$

**B.** Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{12}$

**C.** Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{3}$

**D.** Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{3}$.

**Lời giải**

Ta có $\Delta = 1^2 - 4.(-3).2 = 25$

Vì $a = -3 < 0$ nên hàm số có giá trị lớn nhất là: $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{25}{12}$.

**Đáp án A.**

**Câu 57.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5x^2 + 2x + 1$ trên đoạn $[-2;2]$ là:

**A.** 17 **B.** 25 **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** $\frac{16}{5}$

**Lời giải**

Ta có $\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{5} \in [-2;2], a = 5 > 0$. Do đó $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = \min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4}{5}$.

Để dễ hiểu hơn, ta quan sát bảng biến thiên của hàm số

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-\frac{1}{5}$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | | | | $+\infty$ |

| | |
|---|---|
| | $\frac{4}{5}$ |

***Lưu ý:*** $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = \max\{f(-2), f(2)\} = \max\{17, 25\} = 25$.

**Câu 58.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^2 + 2x + 1$ trên đoạn $[1;3]$ là:

**A.** $\frac{4}{5}$ **B.** $0$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $-20$

**Lời giải**

Ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{3}$ và $a = -3 < 0$. Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Mà $[1;3] \subset \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Do đó trên đoạn $[1;3]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 1$, tức là $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(1) = 0$.

**Đáp án B.**

**Câu 59.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng:

**A.** $\frac{11}{8}$ **B.** $\frac{11}{4}$ **C.** $\frac{4}{11}$ **D.** $\frac{8}{11}$

**Lời giải**

**Đáp án D.**

Hàm số $y = x^2 - 5x + 9$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{11}{4} > 0$.

Suy ra hàm số $y = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ có giá trị lớn nhất là $\frac{2}{\frac{11}{4}} = \frac{8}{11}$.

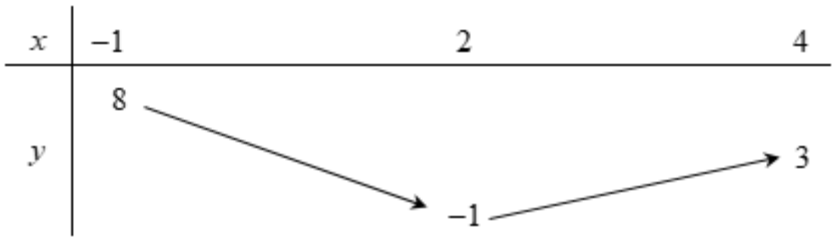
**Câu 60.** Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ trên miền $[-1;4]$ là

**A.** $-1$. **B.** $2$. **C.** $7$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét trên miền $[-1;4]$ thì hàm số có bảng biến thiên là




Từ bảng biến thiên suy ra: Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $8$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-1$ nên tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $8 + (-1) = 7$.

**Câu 61.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2|x|$ là:

**A.** $1$ **B.** $0$ **C.** $-1$ **D.** $-2$

**Lời giải**

**Đáp án C.**

**Cách 1:** Đặt $t=|x|, t\ge 0$.

Hàm số $f(t)=t^2-2t$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-1$ khi $t=1>0$.

Vậy hàm số $y=x^2-2|x|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-1$ khi $|x|=1\Leftrightarrow x=\pm 1$.

**Cách 2:** Ta có

$y=x^2-2|x|=(|x|-1)^2-1\ge -1\ \forall x$; $y=-1\Leftrightarrow |x|=1\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-1$.

**Câu 62.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+4|x|+3$ là:

**A.** $-1$ **B.** $1$ **C.** $4$ **D.** $3$

**Lời giải**

**Đáp án D.**

Ta có $x^2\ge 0\ \forall x, |x|\ge 0\ \forall x$.

Suy ra $x^2+4|x|+3\ge 3\ \forall x$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là 3.

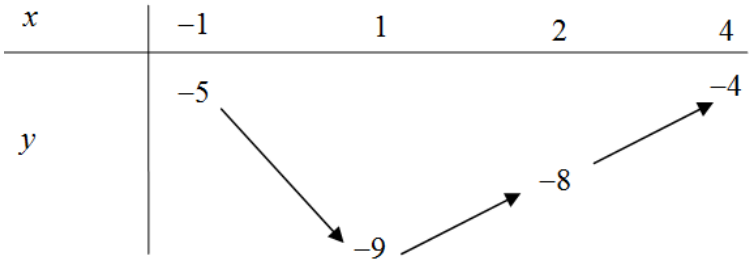
**Câu 63.** Cho hàm số $y=\begin{cases}x^2-2x-8 & \text{khi } x\le 2\\ 2x-12 & \text{khi } x>2\end{cases}$. Gọi $M, m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $x\in[-1;4]$. Tính $M+m$.

**A.** $-14$. **B.** $-13$. **C.** $-4$. **D.** $-9$.

**Lời giải**

**Chọn B**

BBT




Dựa vào BBT ta có $M=-4, m=-9$.

Vậy $M+m=-4+(-9)=-13$.

**Câu 64.** Tìm giá trị thực của tham số $m\ne 0$ để hàm số $y=mx^2-2mx-3m-2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-10$ trên $\mathbb{R}$.

**A.** $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{2m}{2m}=1$, suy ra $y=-4m-2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-10$ khi và chỉ khi

$$\frac{m}{2}>0\Leftrightarrow m>0\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ -4m-2=-10\end{cases}\Leftrightarrow m=2.$$

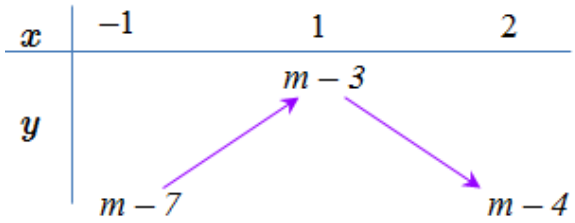
**Câu 65.** Hàm số $y=-x^2+2x+m-4$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;2]$ bằng 3 khi $m$ thuộc

**A.** $(-\infty;5)$. **B.** $[7;8)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(9;11)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét hàm số $y=-x^2+2x+m-4$ trên đoạn $[-1;2]$.




Hàm số đạt GTLN trên đoạn $[-1;2]$ bằng $3$ khi và chỉ khi $m-3=3 \Leftrightarrow m=6$.

**Câu 66.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+2mx+5$ bằng 1 khi giá trị của tham số $m$ là

**A.** $m=\pm 4$. **B.** $m=4$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m\in\varnothing$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số $y=x^2+2mx+5$ có $a=1>0$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Theo đề bài ta có $y\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=1 \Leftrightarrow y(-m)=1 \Leftrightarrow m^2-2m^2+5=1 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

**Câu 67.** Giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=x^2-2mx+m^2-3m-2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-10$ trên $\mathbb{R}$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**A.** $m\in[-1;0)$. **B.** $m\in\left(\dfrac{3}{2};5\right)$. **C.** $m\in\left(-\dfrac{5}{2};-1\right)$. **D.** $m\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $y=x^2-2mx+m^2-3m-2=(x-m)^2-3m-2\geq -3m-2 \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=m$. Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y=-3m-2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3m-2=-10 \Leftrightarrow m=\dfrac{8}{3}$.

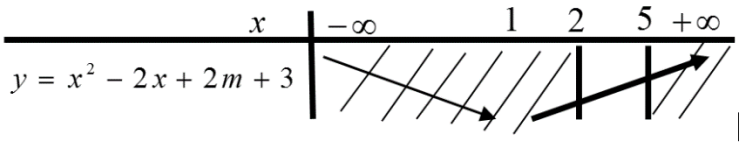
**Câu 68.** Tìm $m$ để hàm số $y=x^2-2x+2m+3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng $-3$.

**A.** $m=0$. **B.** $m=-9$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có hàm số $y=x^2-2x+2m+3$ có hệ số $a=1>0, b=-2$, trục đối xứng là đường thẳng $x=-\dfrac{b}{2a}=1$ nên có bảng biến thiên




Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên đoạn $[2;5]$ suy ra giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng $f(2)$. Theo giả thiết $f(2)=-3 \Leftrightarrow 2m+3=-3 \Leftrightarrow m=-3$.

**Câu 69.** Tìm $m$ để hàm số $y=x^2-2x+2m+3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng $-3$.

**A.** $m=-3$. **B.** $m=-9$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $y=x^2-2x+2m+3$ có $a=1>0$ nên hàm số đồng biến trong khoảng $(1;+\infty)$. Như vậy trên đoạn $[2;5]$ hàm số đồng biến. Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[2;5]$ là $y(2)=2m+3$.

$y(2)=-3 \Leftrightarrow 2m+3=-3 \Leftrightarrow m=-3$.

**Câu 70.** Tìm số các giá trị của tham số $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^2+(2m+1)x+m^2-1$ trên đoạn $[0;1]$ là bằng 1.

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Ta có $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-(2m+1)}{2}; \Delta=4m+5$.

Vì $a>0$ nên đồ thị hàm số là một parabol quay bề lõm lên trên và có điểm thấp nhất là đỉnh $I\left(\dfrac{-b}{2a};\dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

Từ đó ta xét các trường hợp sau:

* Trường hợp 1:

$\dfrac{-b}{2a}\in(0;1) \Leftrightarrow 0<\dfrac{-(2m+1)}{2}<1$

$\Leftrightarrow \dfrac{-3}{2}<m<\dfrac{-1}{2}$ (1).

Khi đó $\min\limits_{[0;1]} f(x)=\dfrac{-\Delta}{4a}=\dfrac{-(4m+5)}{4}$.

Vậy ta phải có $\dfrac{-(4m+5)}{4}=1$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{-9}{4}$ (không thỏa mãn (1)).

* Trường hợp 2:

$\dfrac{-b}{2a}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-(2m+1)}{2}\le 0 \Leftrightarrow m\ge\dfrac{-1}{2}$ (2).

Khi đó $\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(0)=m^2-1$.

Ta phải có $m^2-1=1 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$.

Chỉ có $m=-\sqrt{2}$ thỏa mãn $(2)$.

* Trường hợp 3:

$\dfrac{-b}{2a}\ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{-(2m+1)}{2}\ge 1 \Leftrightarrow m\le\dfrac{-3}{2}$ (3).

Khi đó $\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(1)=m^2+2m+1$.

Ta phải có $m^2+2m+1=1 \Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=-2$.

Chỉ có $m=-2$ thỏa mãn $(3)$.

Vậy $m\in\{-2;-\sqrt{2}\}$.

**Câu 71.** Cho hàm số $f(x)=x^2-2\left(m+\frac{1}{m}\right)x+m$. Đặt $m=\min\limits_{x\in[-1;1]}f(x)$ và $M=\max\limits_{x\in[-1;1]}f(x)$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho $M-m=8$. Tính tổng bình phương các phần tử thuộc $S$.

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Đồ thị hàm số là một parabol quay bề lõm lên trên và có đỉnh có hoành độ $x_0=m+\frac{1}{m}$.

Ta có $|x_0|=\left|m_0+\frac{1}{m}\right|=|m|+\left|\frac{1}{m}\right|$

$\geq 2\sqrt{|m|.\left|\frac{1}{m}\right|}=2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=\pm 1$

Vậy $x_0\notin[-1;1]$.

Ta thấy nếu $x_0<-1$ thì

$m=\min\limits_{x\in[-1;1]}f(x)=f(-1)$,

$M=\max\limits_{x\in[-1;1]}f(x)=f(1)$.

Ngược lại nếu $x_0>1$ thì

$m=\min\limits_{x\in[-1;1]}f(x)=f(1)$,

$M=\max\limits_{x\in[-1;1]}f(x)=f(-1)$.

Vậy $M-m=8\Leftrightarrow|f(1)-f(-1)|=8$

$\Leftrightarrow\left|4\left(m+\frac{1}{m}\right)\right|=8\Leftrightarrow\left|m+\frac{1}{m}\right|=2$

$\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Vậy $S=\{-1;1\}$. Do đó tổng bình phương các phần tử thuộc $S$ bằng 2.

**Câu 72.** Cho hàm số $y=2x^2-3(m+1)x+m^2+3m-2$, $m$ là tham số. Giá trị của $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số là lớn nhất thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $m\in(1;4)$. **B.** $m\in(3;9)$. **C.** $m\in(-5;1)$. **D.** $m\in(-2;2)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số đã cho là hàm số bậc hai (biến $x$) và có hệ số $a=2>0$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\frac{\Delta}{4a}=\frac{-m^2+6m-25}{8}$. Đặt $f(m)=-\frac{1}{8}m^2+\frac{3}{4}m-\frac{25}{8}$.

$f(m)$ là hàm số bậc hai (biến $m$) có hệ số $a=-\frac{1}{8}<0$ nên đạt giá trị lớn nhất tại

$m=-\frac{b}{2a}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3\in(1;4)$.

**Câu 73.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $a$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=4x^2-4ax+\left(a^2-3x+2\right)$ trên đoạn $[0;2]$ là bằng 3.

**A.** $\left\{-1;4+\sqrt{7}\right\}$. **B.** $\left\{4+\sqrt{7}\right\}$. **C.** $\{-1\}$. **D.** $\left\{1;4-\sqrt{7}\right\}$.

**Lời giải**

Ta có: tọa độ đỉnh $I\left(\frac{4a+3}{8};\frac{23-24a}{16}\right)$

BBT:

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{4a+3}{8}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ ↘ | $\frac{23-24a}{16}$ | ↗ $+\infty$ |

+ Nếu $\frac{4a+3}{8}\geq 2\Leftrightarrow a\geq\frac{13}{4}$

$$\min_{x\in[0;2]} y=f(2)=a^2-8a+12=3\Leftrightarrow a^2-8a+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=4+\sqrt{7}\ (\text{TM})\\a=4-\sqrt{7}\ (\text{Loai})\end{array}\right.$$

+ Nếu $\frac{4a+3}{8}\leq 0\Leftrightarrow a\leq\frac{-3}{4}$

$$\min_{x\in[0;2]} y=f(0)=a^2+2=3\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1(\text{Loai})\\a=-1(\text{TM})\end{array}\right.$$

+ Nếu $0<\frac{4a+3}{8}<2\Rightarrow 0<a<\frac{13}{4}$: $\min_{x\in[0;2]} y=\frac{23-24a}{16}=3\Leftrightarrow a=\frac{-25}{24}$, loại.

Vậy các giá trị cần tìm của $a$ là: $a\in\left\{4+\sqrt{7};-1\right\}$.

**Câu 74.** Cho hàm số $y=2x^2-3(m+1)x+m^2+3m-2$, $m$ là tham số. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số là lớn nhất.

**A.** $m=-2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=3$ **D.** $m=5$

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số bậc hai với hệ số $a=2>0$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-\frac{b}{2a}=\frac{3(m+1)}{4}$ và

$y_{\min}=y\left(\frac{3(m+1)}{4}\right)=-\frac{1}{8}m^2+\frac{3}{4}m-\frac{25}{8}=-\frac{1}{8}(m-3)^2-2\leq -2$.

Dấu bằng xảy ra khi $m=3$.

**Câu 75.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị dương của tham số $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=4x^2-4mx+m^2-2m$ trên đoạn $[-2;0]$ bằng 3. Tính tổng $T$ các phần tử của $S$.

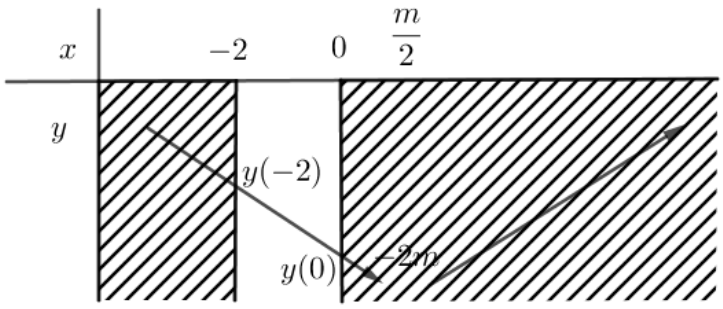
**A.** $T=3$. **B.** $T=\dfrac{1}{2}$. **C.** $T=\dfrac{9}{2}$. **D.** $T=-\dfrac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có đỉnh $I\left(\dfrac{m}{2};-2m\right)$.

Do $m>0$ nên $\dfrac{m}{2}>0$. Khi đó đỉnh $I\notin[-2;0]$.




Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;0]$ là $y(0)=3$ tại $x=0$.

$\Leftrightarrow m^2-2m-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m_1=3\\m_2=-1<0\end{array}\right.\Rightarrow S=\{3\}$.

**Câu 76.** Cho hàm số $y=x^2-\left(m+\sqrt{m^2-4}\right)x+4m+2\sqrt{m^2-4}\,(m\neq 0)$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;1]$ lần lượt là $y_1;y_2$. Số giá trị của $m$ để $y_1-y_2=8$ là

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $4$. **D.** $2$.

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn B.**

Điều kiện của $m$ là $m^2-4\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 2\\m\leq -2\end{array}\right.$.

- Xét $m\leq -2$ ta có $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}<0$. Khi đó các số 0;1 đều nằm bên phải $-\dfrac{b}{2a}$ nên

$y_2=y(0)=4m+2\sqrt{m^2-4}$; $y_1=y(1)=\sqrt{m^2-4}+3m+1$.

$y_1-y_2=8\Leftrightarrow -m-7=\sqrt{m^2-4}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq -7\\m=-\dfrac{53}{14}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\varnothing$.

- Xét $m\geq 2$ ta có $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\geq\dfrac{m}{2}=1$; khi đó 0;1 đều nằm bên trái $-\dfrac{b}{2a}$ suy ra

$y_1=y(0)=4m+2\sqrt{m^2-4}$; $y_2=y(1)=\sqrt{m^2-4}+3m+1$

$y_1-y_2=8\Leftrightarrow\sqrt{m^2-4}=9-m\Leftrightarrow\begin{cases}2\leq m\leq 9\\m=\dfrac{85}{18}\end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{85}{18}$.

Vậy chỉ có duy nhất một giá trị của $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 77.** Giả sử hàm số $y=-x^2+2x+4\sqrt{(3-x)(x+1)}+3$ có tập giá trị $W=[a;b]$. Hãy tính giá trị của biểu thức $K=a^2+b^2$.

**A.** $K=145$. **B.** $K=144$. **C.** $K=143$. **D.** $169$.

**Lời giải**

**Chọn B**

- Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow (3-x)(x+1)\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 3$.

Vậy TXĐ: $D=[-1;3]$.

- Đặt $t=\sqrt{(3-x)(x+1)}$, với $t\in[0;2]$.

$\Rightarrow t^2=(3-x)(x+1)$

$\Leftrightarrow t^2=-x^2+2x+3$.

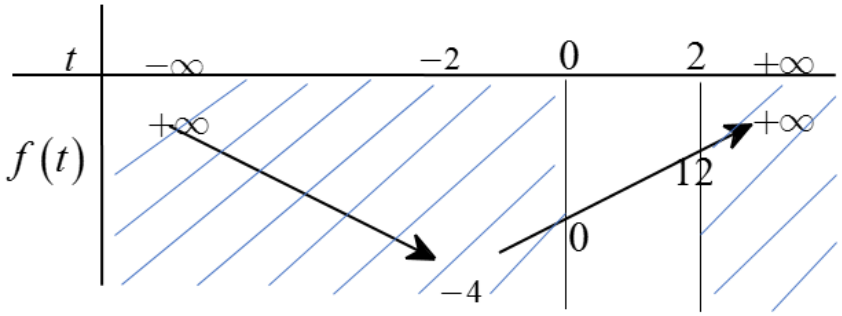
Khi đó hàm số đã cho trở thành: $f(t)=t^2+4t$, với $t\in[0;2]$.

Ta có đỉnh $I$ của Parabol $(P)$ của hàm số $f(t)=t^2+4t$ có hoành độ: $t_I=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-4}{2.1}=-2$.

Khi đó $f(-2)=(-2)^2+4.(-2)=-4$.

Hay $I(-2;-4)$.

- Ta lập BBT hàm số $f(t)=t^2+4t$, với $t\in[0;2]$.




- Từ BBT ta suy ra tập giá trị của hàm số đã cho là $W=[0;12]$. Khi đó $K=0^2+12^2=144$.

## DẠNG 2. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Để xác định hàm số bậc hai $y=f(x)=ax^2+bx+c$ (đồng nghĩa với xác định các tham số $a$, $b$, $c$) ta cần dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là $a$, $b$, $c$. Từ đó tìm được $a$, $b$, $c$. Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0;\,y_0)\Leftrightarrow y_0=f(x_0)$.

- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x=x_0\Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a}=x_0$.

- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I(x_I;\,y_I)\Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=x_I\\ -\dfrac{\Delta}{4a}=y_I\end{cases}\left(\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=x_I\\ f(x_I)=y_I\end{cases}\right)$.

- Trên $\mathbb{R}$, ta có:

1. $f(x)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a<0$. Lúc này $\underset{\mathbb{R}}{Max}\,f(x)=-\dfrac{\Delta}{4a}=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

2. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a>0$. Lúc này $\underset{\mathbb{R}}{Min}\,f(x)=-\dfrac{\Delta}{4a}=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

**Câu 1.** Cho hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c\ (a\ne 0)$ có đồ thị $(P)$, đỉnh của $(P)$ được xác định bởi công thức nào?

**A.** $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$. **B.** $I\left(-\frac{b}{a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$. **C.** $I\left(\frac{b}{a};\frac{\Delta}{4a}\right)$. **D.** $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{2a}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đỉnh của parabol $(P): y=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$ là điểm $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

**Câu 2.** Cho parabol $(P): y=3x^2-2x+1$. Điểm nào sau đây là đỉnh của $(P)$?

**A.** $I(0;1)$. **B.** $I\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **C.** $I\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **D.** $I\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hoành độ đỉnh của $(P): y=3x^2-2x+1$ là $x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{3}\Rightarrow y=3\left(\frac{1}{3}\right)^2-2.\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$.

Vậy $I\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

**Câu 3.** Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ là đường thẳng nào dưới đây?

**A.** $x=-\frac{b}{2a}$. **B.** $x=-\frac{c}{2a}$. **C.** $x=-\frac{\Delta}{4a}$. **D.** Không có.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 4.** Điểm $I(-2;1)$ là đỉnh của Parabol nào sau đây?

**A.** $y=x^2+4x+5$. **B.** $y=2x^2+4x+1$. **C.** $y=x^2+4x-5$. **D.** $y=-x^2-4x+3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hoành độ đỉnh là $x_I=-\frac{b}{2a}=-2$. Từ đó loại câu **B.**

Thay hoành độ $x_I=-2$ vào phương trình Parabol ở các câu A, C, D, ta thấy chỉ có câu A thỏa điều kiện $y_I=1$.

**Câu 5.** Xác định các hệ số $a$ và $b$ để Parabol $(P): y=ax^2+4x-b$ có đỉnh $I(-1;-5)$.

**A.** $\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $x_I=-1\Rightarrow -\frac{4}{2a}=-1\Rightarrow a=2.$

Hơn nữa $I\in(P)$ nên $-5=a-4-b\Rightarrow b=3.$

**Câu 6.** Biết hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị là một đường Parabol đi qua điểm $A(-1;0)$ và có đỉnh $I(1;2)$. Tính $a+b+c$.

**A.** $3$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $2$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo giả thiết ta có hệ: $\begin{cases} a-b+c=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=1 \\ a+b+c=2 \end{cases}$ . với $a\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ b=-2a \\ a+b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-\dfrac{1}{2} \\ c=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy hàm bậc hai cần tìm là $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$

**Câu 7.** Biết đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$, $(a,b,c\in\mathbb{R};a\neq 0)$ đi qua điểm $A(2;1)$ và có đỉnh $I(1;-1)$. Tính giá trị biểu thức $T=a^3+b^2-2c$.

**A.** $T=22$. **B.** $T=9$. **C.** $T=6$. **D.** $T=1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đồ thị hàm số $y=\text{ax}^2+bx+c$ đi qua điểm $A(2;1)$ và có đỉnh $I(1;-1)$ nên có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ -\dfrac{b}{2a}=1 \\ a+b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ b=-2a \\ a+b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-2a \\ -a+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-4 \\ a=2 \end{cases}.$$

Vậy $T=a^3+b^2-2c=22$.

**Câu 8.** Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ có đồ thị (P). Biết đồ thị của hàm số có đỉnh $I(1;1)$ và đi qua điểm $A(2;3)$. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $29$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ có đỉnh $I(1;1)$ và đi qua điểm $A(2;3)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ -\dfrac{b}{2a}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases}$$

Nên $S=a^2+b^2+c^2$=29

**Câu 9.** Cho Parabol $(P):y=x^2+mx+n$ ($m,n$ tham số). Xác định $m,n$ để $(P)$ nhận đỉnh $I(2;-1)$.

**A.** $m=4,n=-3$. **B.** $m=4,n=3$. **C.** $m=-4,n=-3$. **D.** $m=-4,n=3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Parabol $(P):y=x^2+mx+n$ nhận $I(2;-1)$ là đỉnh, khi đó ta có

$$\begin{cases} 4+2m+n=-1 \\ -\dfrac{m}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+n=-5 \\ m=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=3 \\ m=-4 \end{cases}.$$

Vậy $m=-4, n=3$.

**Câu 10.** Cho Parabol (P): $y=ax^2+bx+c$ có đỉnh $I(2;0)$ và $(P)$ cắt trục $Oy$ tại điểm $M(0;-1)$. Khi đó Parabol (P) có hàm số là

**A.** $(P): y=-\frac{1}{4}x^2-3x-1$. **B.** $(P): y=-\frac{1}{4}x^2-x-1$.

**C.** $(P): y=-\frac{1}{4}x^2+x-1$. **D.** $(P): y=-\frac{1}{4}x^2+2x-1$

**Lời giải**

**Chọn C**

Parabol $(P): y=ax^2+bx+c \longrightarrow$ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a};c-\frac{b^2}{4a}\right)$

Theo bài ra, ta có (P) có đỉnh $I(2;0) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a}=2 \\ c-\frac{b^2}{4a}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4a \\ b^2=4ac \end{cases} \quad (1)$

Lại có (P) cắt Oy tại điểm $M(0;-1)$ suy ra $y(0)=-1 \Leftrightarrow c=-1 \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra $\begin{cases} b=-4a \\ b^2=-a \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4a \\ b^2=b \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ b=1;\ c=-1 \end{cases}$ (vì $b=0 \Rightarrow a=0$ loại)

**Câu 11.** Gọi $S$ là tập các giá trị $m \neq 0$ để parabol $(P): y=mx^2+2mx+m^2+2m$ có đỉnh nằm trên đường thẳng $y=x+7$. Tính tổng các giá trị của tập $S$

**A.** $-1$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Khi $m \neq 0$ thì $(P): y=mx^2+2mx+m^2+2m$ có đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow I\left(-1;m^2+m\right)$

Vì đỉnh nằm trên đường thẳng $y=x+7$ nên

$m^2+m=-1+7 \Leftrightarrow m^2+m-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-3 \end{array}\right. (TM)$

Vậy tổng các giá trị của tập $S$: $2+(-3)=-1$.

**Câu 12.** Xác định hàm số $y=ax^2+bx+c(1)$ biết đồ thị của nó có đỉnh $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

**A.** $y=-x^2+3x+2$. **B.** $y=-x^2-3x-2$. **C.** $y=x^2-3x+2$. **D.** $y=-x^2+3x-2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

. Do đồ thị của nó có đỉnh $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$ và cắt trụ hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên ta có

$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{9}{4}a+\dfrac{3}{2}b+c=\dfrac{1}{4}\\ 4a+2b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+b=0\\ 9a+6b+4c=1\\ 4a+2b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=3\\ c=-2\end{cases}$$

Vậy $y=-x^2+3x-2$

**Câu 13.** Hàm số bậc hai nào sau đây có đồ thị là parabol có đỉnh là $S\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đi qua $A(1;-4)$?

**A.** $y=-x^2+5x-8$. **B.** $y=-2x^2+10x-12$.

**C.** $y=x^2-5x$. **D.** $y=-2x^2+5x+\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số bậc hai cần tìm có phương trình: $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

Hàm số bậc hai có đồ thị là parabol có đỉnh là $S\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đi qua $A(1;-4)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{-\Delta}{4a}=\dfrac{1}{2}\\ a+b+c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{-b^2+4ac}{4a}=\dfrac{1}{2}\\ a+b+c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-5a\\ \dfrac{-25a^2+4a(4a-4)}{4a}=\dfrac{1}{2}\\ c=4a-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=10\\ c=-12\end{cases}$$

**Câu 14.** Cho parabol $(P)$ có phương trình $y=ax^2+bx+c$. Tìm $a+b+c$, biết $(P)$ đi qua điểm $A(0;3)$ và có đỉnh $I(-1;2)$.

**A.** $a+b+c=6$ **B.** $a+b+c=5$ **C.** $a+b+c=4$ **D.** $a+b+c=3$

**Lời giải**

$(P)$ đi qua điểm $A(0;3)\Rightarrow c=3$.

$(P)$ có đỉnh $I(-1;2)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=-1\\ a-b+3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\ a-2a=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\Rightarrow a+b+c=6$.

**Đáp án A.**

**Câu 15.** Parabol $y=ax^2+bx+c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x=-2$ và đi qua $A(0;6)$ có phương trình là

**A.** $y=\frac{1}{2}x^2+2x+6$. **B.** $y=x^2+2x+6$. **C.** $y=x^2+6x+6$. **D.** $y=x^2+x+4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $-\dfrac{b}{2a}=-2\Rightarrow b=4a$.(1)

Mặt khác : Vì $A,I\in(P)\Leftrightarrow\begin{cases}4=a.(-2)^2+b.(-2)+c\\ 6=a.(0)^2+b.(0)+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4.a-2b=-2\\ c=6\end{cases}(2)$

Kết hợp (1),(2) ta có : $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=2 \\ c=6 \end{cases}$. Vậy $(P): y=\dfrac{1}{2}x^2+2x+6$.

**Câu 16.** Parabol $y=ax^2+bx+c$ đi qua $A(0;-1)$, $B(1;-1)$, $C(-1;1)$ có phương trình là

**A.** $y=x^2-x+1$. **B.** $y=x^2-x-1$. **C.** $y=x^2+x-1$. **D.** $y=x^2+x+1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: Vì $A,B,C\in(P) \Leftrightarrow \begin{cases} -1=a.0^2+b.0+c \\ -1=a.(1)^2+b.(1)+c \\ 1=a.(-1)^2+b.(-1)+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$.

Vậy $(P): y=x^2-x-1$.

**Câu 17.** Parabol $y=ax^2+bx+2$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ có phương trình là

**A.** $y=x^2+x+2$. **B.** $y=2x^2+x+2$. **C.** $y=2x^2+2x+2$ **D.** $y=x^2+2x$

**Lời giải**

**Chọn B**

Parabol $y=ax^2+bx+2$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ nên ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} 5=a.1^2+b.1+2 \\ 8=a.(-2)^2+b.(-2)+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 4a-2b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$. Vậy hàm số cần tìm là $y=2x^2+x+2$.

**Câu 18.** Cho $(P): y=x^2+bx+1$ đi qua điểm $A(-1;3)$. Khi đó

**A.** $b=-1$. **B.** $b=1$. **C.** $b=3$. **D.** $b=-2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Thay tọa độ $A(-1;3)$ vào $(P): y=x^2+bx+1$.

Ta được: $3=(-1)^2-b+1 \Leftrightarrow b=-1$.

**Câu 19.** Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ đi qua ba điểm $A(1;4), B(-1;-4)$ và $C(-2;-11)$. Tọa độ đỉnh của $(P)$ là:

**A.** $(-2;-11)$ **B.** $(2;5)$ **C.** $(1;4)$ **D.** $(3;6)$

**Lời giải**

$(P): y=ax^2+bx+c$ đi qua ba điểm $A(1;4), B(-1;-4)$ và $C(-2;-11)$ suy ra

$\begin{cases} a+b+c=4 \\ a-b+c=-4 \\ 4a-2b+c=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow (P): y=-x^2+4x+1$.

Hoành độ của đỉnh của $(P)$ là $x=\dfrac{-b}{2a}=2$. Suy ra tung độ của đỉnh của $(P)$ là

$y=-2^2+4.2+1=5$.

**Đáp án B.**

## DẠNG 3. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA PARABOL VỚI ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ KHÁC

**Dạng 1. Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc nhất và bậc hai**

Cho đồ thị $(P)$ của hàm số $y=ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$ và đồ thị $d$ của hàm số $y=kx+m$.

Toạ độ giao điểm của hai đồ thị $(P)$ và $d$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=kx+m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $d$ là

$$ax^2+bx+c=kx+m \Leftrightarrow ax^2+(b-k)x+c-m=0 \quad (2)$$

Nhận xét:

1. Số giao điểm của $(P)$ và $d$ bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và cũng bằng số nghiệm của phương trình (2).

2. Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì ta nói $d$ và $(P)$ không giao nhau.

3. Nếu phương trình (2) có nghiệm kép thì ta nói $d$ và $(P)$ tiếp xúc với nhau. Lúc này ta nói $d$ là tiếp tuyến của $(P)$.

4. Nếu phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thì ta nói $d$ và $(P)$ cắt nhau.

**Dạng 2. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số bậc hai**

Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm số bậc hai có đồ thị lần lượt là các đường parabol $(P_1)$ và $(P_2)$, khi đó tọa độ giao điểm của $(P_1)$ và $(P_2)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}. \quad (1)$$

Để giải hệ (1) ta cần giải phương trình $f(x)=g(x)$ (2), phương trình (2) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của $(P_1)$ và $(P_2)$.

* Nhận xét:

i) Số giao điểm của $(P_1)$ và $(P_2)$ bằng số nghiệm của hệ (1) và bằng số nghiệm của phương trình (2).

ii) $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm số bậc hai nên phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm. iii) Các bài toán liên quan đến dạng này thường áp dụng đến nội dung định lý Vi et thuận, nhắc lại như sau. Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm $x_1$ và $x_2$, ta luôn có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ và $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

**Dạng 3. Điểm cố định của đồ thị hàm số**

Cho họ hàm số $f(x;m)=0$ ($m$ là tham số) có đồ thị $(P_m)$. Để tìm điểm cố định mà $(P_m)$ luôn đi qua với mọi giá trị của $m$, ta thực hiện các bước sau:

**Bước 1:** Giả sử điểm $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà $(P_m)$ luôn đi qua.

Tọa độ điểm $M$ thỏa mãn phương trình $f(x;m)=0$.

**Bước 2**: Chuyển phương trình về phương trình ẩn $m$ dạng $Am+B=0$ (hoặc $Am^2+Bm+C=0$). Phương trình nghiệm đúng với mọi $m$.

Khi đó ta có $\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}A=0\\B=0\\C=0\end{cases}$. Tìm được $x_0;y_0 \Rightarrow M(x_0;y_0)$.

**Bước 3:** Kết luận.

**Câu 1.** Giao điểm của parabol $(P): y=x^2-3x+2$ với đường thẳng $y=x-1$ là:

**A.** $(1;0);(3;2)$. **B.** $(0;-1);(-2;-3)$.

**C.** $(-1;2);(2;1)$. **D.** $(2;1);(0;-1)$.

**Lờigiải**

**Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2-3x+2=x-1 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$$

$x=1 \Rightarrow y=x-1=0$

$x=3 \Rightarrow y=x-1=2$

Hai giao điểm là: $(1;0);(3;2)$.

**Câu 2.** Tọa độ giao điểm của $(P): y=x^2-4x$ với đường thẳng $d: y=-x-2$ là

**A.** $M(0;-2)$, $N(2;-4)$. **B.** $M(-1;-1)$, $N(-2;0)$.

**C.** $M(-3;1)$, $N(3;-5)$. **D.** $M(1;-3)$, $N(2;-4)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Hoành độ giao điểm của $(P)$ và $d$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2-4x=-x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm của $(P)$ và $d$ là $M(1;-3)$, $N(2;-4)$.

**Câu 3.** Cho hàm số $y=2x^2-3x+1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?.

**A.** Đồ thị hàm số không cắt trục tung. **B.** Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại gốc tọa độ.

**C.** Đồ thị hàm số không có trục đối xứng. **D.** Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Parabol đã cho có hệ số $c=1$ nên sẽ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1$.

**Câu 4.** Tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y=-x+4$ và parabol $y=x^2-7x+12$ là

**A.** $(-2;6)$ và $(-4;8)$. **B.** $(2;2)$ và $(4;8)$. **C.** $(2;-2)$ và $(4;0)$. **D.** $(2;2)$ và $(4;0)$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-7x+12=-x+4\Leftrightarrow x^2-6x+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\Rightarrow y=2\\x=4\Rightarrow y=0\end{array}\right.$.

**Câu 5.** Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=1-x$ với $(P):y=x^2-2x+1$ là

**A.** $x=0;\ x=1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0;\ x=2$. **D.** $x=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm

$1-x=x^2-2x+1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

**Câu 6.** Gọi $A(a;b)$ và $B(c;d)$ là tọa độ giao điểm của $(P):y=2x-x^2$ và $\Delta:y=3x-6$. Giá trị của $b+d$ bằng.

**A.** 7. **B.** $-7$. **C.** 15. **D.** $-15$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x-x^2=3x-6\Leftrightarrow x^2+x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\Rightarrow y=0\\x=-3\Rightarrow y=-15\end{array}\right.$

$b+d=-15$

**Câu 7.** Cho parabol $(P)$ có phương trình $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x-1)=x^2-5x+5\ \forall x\in\mathbb{R}$. Số giao điểm của $(P)$ và trục hoành là:

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

**Lời giải**

Ta có $f(x-1)=x^2-5x+5=(x-1)^2-3(x-1)+1$. Suy ra $f(x)=x^2-3x+1$.

Phương trình $x^2-3x+1=0$ có $\Delta=3^2-4.1.1=5>0$ nên có hai nghiệm phân biệt.

Vậy $(P)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

**Đáp án C.**

**Câu 8.** Cho hai parabol có phương trình $y=x^2+x+1$ và $y=2x^2-x-2$. Biết hai parabol cắt nhau tại hai điểm $A$ và $B$ ($x_A<x_B$). Tính độ dài đoạn thẳng $AB$.

**A.** $AB=4\sqrt{2}$ **B.** $AB=2\sqrt{26}$ **C.** $AB=4\sqrt{10}$ **D.** $AB=2\sqrt{10}$

**Lời giải**

Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol:

$2x^2-x-2=x^2+x+1\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

$x=-1\Rightarrow y=1;x=3\Rightarrow y=13$, do đó hai giao điểm là $A(-1;1)$ và $B(3;13)$.

Từ đó $AB=\sqrt{(3+1)^2+(13-1)^2}=4\sqrt{10}$.

**Đáp án C.**

**Câu 9.** Giá trị nào của $m$ thì đồ thị hàm số $y=x^2+3x+m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt?

**A.** $m<-\frac{9}{4}$. **B.** $m>-\frac{9}{4}$. **C.** $m>\frac{9}{4}$. **D.** $m<\frac{9}{4}$.

**Lời giải**

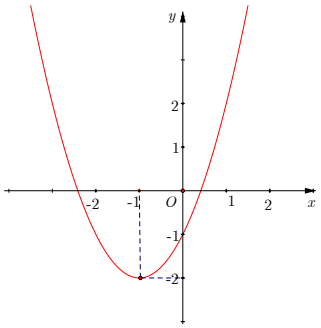
**Chọn D**

Cho $x^2+3x+m=0\,(1)$

Để đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 3^2-4m>0 \Leftrightarrow 9-4m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{9}{4}.$

**Câu 10.** Hàm số $y=x^2+2x-1$ có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị $m$ để phương trình $x^2+2x+m=0$ vô nghiệm.




**A.** $m<-2$. **B.** $m<-1$. **C.** $m<1$. **D.** $m>1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$x^2+2x+m=0 \Leftrightarrow x^2+2x-1=-m-1\ (*)$

Số nghiệm của phương trình $(*)$ chính là số giao điểm của parabol $y=x^2+2x+1$ và đường thẳng $y=-m-1$.

Ycbt $\Rightarrow m>1$.

**Câu 11.** Hỏi có bao nhiêu giá trị $m$ nguyên trong nửa khoảng $[-10;-4)$ để đường thẳng $d: y=-(m+1)x+m+2$ cắt parabol $(P): y=x^2+x-2$ tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung?

**A.** 6 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 8

**Lời giải**

Phương trình hoành độ giao điểm của $d$ và $(P)$:

$$x^2+x-2=-(m+1)x+m+2 \Leftrightarrow x^2+(m+2)x-m-4=0\ (*).$$

$d$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2+8m+20>0\\ -m-4>0\end{cases} \Leftrightarrow m<-4$.

Vậy có 6 giá trị $m$ nguyên trong nửa khoảng $[-10;-4)$ thỏa mãn ycbt.

**Đáp án A.**

**Câu 12.** Cho parabol $(P): y=x^2-mx$ và đường thẳng $(d): y=(m+2)x+1$, trong đó $m$ là tham số. Khi parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt $M$, $N$, tập hợp trung điểm $I$ của đoạn thẳng $MN$ là:

**A.** một parabol **B.** một đường thẳng

**C.** một đoạn thẳng **D.** một điểm

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $(d)$:

$x^2 - mx = (m+2)x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x - 1 = 0$ (*).

(*) có *a, c* trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi *m*. Do đó $(P)$ và $(d)$ luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi *m*. Khi đó $x_M, x_N$ là hai nghiệm phân biệt của (*).

Theo Viet ta có $x_M + x_N = 2(m+1)$.

Ta có $x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = m+1$.

Suy ra $y_I = (m+2)(m+1)+1$

$= (m+1)^2 + (m+1) + 1 = x_I^2 + x_I + 1$.

Vậy *I* luôn thuộc parabol $y = x^2 + x + 1$ với mọi *m*.

***Chú ý:*** Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Trung điểm của đoạn thẳng *AB* là

$I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

**Câu 13.** Cho hàm số $y = x^2 + 3x$ có đồ thị $(P)$. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị của tham số $m$ để đường thẳng $d: y = x + m^2$ cắt đồ thị $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A, B$ sao cho trung điểm *I* của đoạn $AB$ nằm trên đường thẳng $d': y = 2x + 3$. Tổng bình phương các phần tử của $S$ là

**A.** 6. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình hoành độ giao điểm của $d$ và $(P)$ là: $x^2 + 3x = x + m^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - m^2 = 0$ (1).

Để *d* cắt $(P)$ tại 2 điểm phân biệt $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 + m^2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Gọi $x_1$; $x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1), khi đó $A(x_1; x_1 + m^2)$, $B(x_2; x_2 + m^2)$

$\Rightarrow I\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{x_1 + x_2 + 2m^2}{2}\right)$

Theo Vi ét ta có $x_1 + x_2 = -2$; $x_1.x_2 = -m^2$ nên $I(-1; m^2 - 1)$.

Vì $I$ thuộc $d'$ nên $m^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

**Câu 14.** Cho hàm số $y = x^2 - 3mx + m^2 + 1$ $(1)$, $m$ là tham số và đường thẳng $(d)$ có phương trình $y = mx + m^2$. Tính giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $(1)$ cắt đường thẳng $(d)$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1$, $x_2$ thoả mãn $\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| = 1$.

**A.** $m = \dfrac{3}{4}$. **B.** $m = -\dfrac{3}{4}$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = \dfrac{4}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(1)$ và đường thẳng $(d)$ là nghiệm của phương trình

$x^2 - 3mx + m^2 + 1 = mx + m^2 \Leftrightarrow x^2 - 4mx + 1 = 0$ $(*)$.

Đồ thị hàm số $(1)$ cắt đường thẳng $(d)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=1$ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt không âm thỏa mãn $x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}=1$.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt không âm $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ S\ge 0\\ P\ge 0\end{cases}(**)$.

Theo định lí Vi–et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=4m\\ x_1x_2=1\end{cases}$, suy ra $(**)\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-1>0\\ 4m\ge 0\\ 1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{1}{2}\\ m>\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$.

Lại có, $x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}=1\Leftrightarrow 4m-2=1\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{4}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $m=\dfrac{3}{4}$.

**Câu 15.** Cho hàm số $y=2x^2-3x-5(1)$. Giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $(1)$ cắt đường thẳng $y=4x+m$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;x_2)$ thỏa mãn $2x_1^2+2x_2^2=3x_1x_2+7$ là

**A.** $-10$. **B.** $10$. **C.** $-6$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2-3x-5=4x+m\Leftrightarrow 2x^2-7x-5-m=0$ (*)

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta=(-7)^2-4.2(-m-5)>0$

$\Leftrightarrow 8m+89>0\Leftrightarrow m>-\dfrac{89}{8}$.

Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm phân biệt của (*) nên theo Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{7}{2}\\ x_1.x_2=\dfrac{-5-m}{2}\end{cases}$.

$2x_1^2+2x_2^2=3x_1x_2+7\Leftrightarrow 2(x_1+x_2)^2-7x_1x_2-7=0\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{7}{2}\right)^2-7.\left(\dfrac{-5-m}{2}\right)-7=0$

$\Leftrightarrow 70+7m=0\Leftrightarrow m=-10$ (thỏa mãn đk $m>-\dfrac{89}{8}$).

Vậy $m=-10$ là giá trị cần tìm.

**Câu 16.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để đường thẳng $y=mx-3$ không có điểm chung với Parabol $y=x^2+1$?

**A.** $6$. **B.** $9$. **C.** $7$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+1=mx-3\Leftrightarrow x^2-mx+4=0$ (*)

Đường thẳng $y=mx-3$ không có điểm chung với Parabol $y=x^2+1\Leftrightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow m^2-16<0\Leftrightarrow -4<m<4$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

**Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị $m$ để đường thẳng $y=mx+3-2m$ cắt parabol $y=x^2-3x-5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

**A.** $m<-3$. **B.** $-3<m<4$. **C.** $m<4$. **D.** $m\le 4$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-3x-5=mx+3-2m \Leftrightarrow x^2-(m+3)x+2m-8=0$ $(*)$.

Đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c<0 \Leftrightarrow 2m-8<0 \Leftrightarrow m<4$.

**Câu 18.** Tìm $m$ để Parabol $(P): y=x^2-2(m+1)x+m^2-3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1$, $x_2$ sao cho $x_1.x_2=1$.

**A.** $m=2$. **B.** Không tồn tại $m$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=\pm 2$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ với trục hoành: $x^2-2(m+1)x+m^2-3=0$ $(1)$.

Parabol $(P)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1$, $x_2$ sao cho $x_1.x_2=1$

$\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ thỏa $x_1.x_2=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=(m+1)^2-(m^2-3)>0\\ m^2-3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-2\\ m=\pm 2\end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

**Câu 19.** Cho parabol $(P): y=x^2+2x-5$ và đường thẳng $d: y=2mx+2-3m$. Tìm tất cả các giá trị $m$ để $(P)$ cắt $d$ tại hai điểm phân biệt nằm về phía bên phải của trục tung.

**A.** $1<m<\frac{7}{3}$. **B.** $m>1$. **C.** $m>\frac{7}{3}$. **D.** $m<1$

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $d$ là

$x^2+2x-5=2mx+2-3m \Leftrightarrow x^2+2(1-m)x-7+3m=0$ $(*)$

$(P)$ cắt $d$ tại hai điểm phân biệt nằm về phía bên phải của trục tung khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ \frac{-b}{a}>0\\ \frac{c}{a}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-m)^2+7-3m>0\\ -2(1-m)>0\\ -7+3m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-5m+8>0\\ 1-m<0\\ 3m-7>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>1\\ m>\frac{7}{3}\end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{7}{3}.$$

Vậy $m>\frac{7}{3}$.

**Câu 20.** Gọi $T$ là tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ để parabol $(P): y=x^2-4x+m$ cắt trục $Ox$ tại hai điểm phân biệt $A, B$ thỏa mãn $OA=3OB$. Tính $T$.

**A.** $T=-9$. **B.** $T=\frac{3}{2}$. **C.** $T=-15$. **D.** $T=3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và trục $Ox$ là: $x^2-4x+m=0$ (1).

$(P)$ cắt trục $Ox$ tại hai điểm phân biệt $A,B$ thỏa mãn $OA=3OB \Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn $|x_1|=3|x_2|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m>0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Mặt khác, theo định lý Viet cho phương trình (1) thì: $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1.x_2=m \end{cases}$.

Với $x_1=3x_2 \Rightarrow x_1=3$, $x_2=1 \Rightarrow m=3$ thỏa mãn.

Với $x_1=-3x_2 \Rightarrow x_1=6$, $x_2=-2 \Rightarrow m=-12$ thỏa mãn.

Có hai giá trị của $m$ là $m=3$ và $m=-12$.

Vậy $T=-9$. Chọn đáp án **A.**

**Câu 21.** Tìm $m$ để Parabol $(P): y=x^2-2(m+1)x+m^2-3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1$, $x_2$ sao cho $x_1.x_2=1$.

**A.** $m=2$. **B.** Không tồn tại $m$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=\pm 2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ với trục hoành: $x^2-2(m+1)x+m^2-3=0$ (1).

Parabol $(P)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1$, $x_2$ sao cho $x_1.x_2=1$

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ thỏa $x_1.x_2=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2-(m^2-3)>0 \\ m^2-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m=\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

**Câu 22.** Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+c$. Tìm $a-b+c$, biết rằng đường thẳng $y=-2,5$ có một điểm chung duy nhất với $(P)$ và đường thẳng $y=2$ cắt $(P)$ tại hai điểm có hoành độ là $-1$ và 5.

**A.** $a-b-c=-2$ **B.** $a-b-c=2$

**C.** $a-b-c=1$ **D.** $a-b-c=-1$

**Lời giải**

**Đáp án D.**

Vì đường thẳng $y=-2,5$ có một điểm chung duy nhất với $(P)$ và đường thẳng $y=2$ cắt $(P)$ tại hai điểm có hoành độ là $-1$ và 5 nên suy ra tọa độ đỉnh của $(P)$ là:

$$\left(\frac{-1+5}{2}; 2,5\right)=(2;2,5).$$

Vậy $(P)$ đi qua ba điểm $(2;2,5)$, $(-1;2)$ và $(5;2)$.

Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} a-b+c=2 \\ 25a+5b+c=2 \\ 4a+2b+c=2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{10} \\ b=\dfrac{-4}{10} \\ c=\dfrac{15}{10} \end{cases}.$$

Vậy $a-b-c=-1$.

**Câu 23.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $x^2-2|x|+1-m=0$ có bốn nghiệm phân biệt?

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

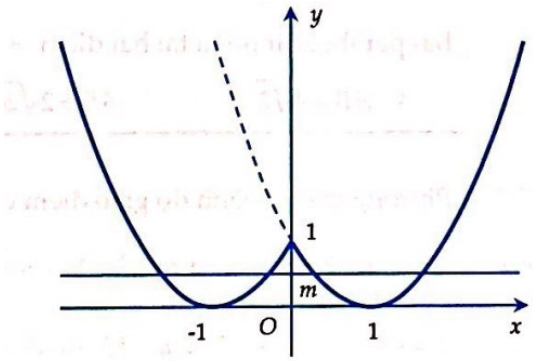
**Lời giải**

**Cách 1:** $x^2-2|x|+1-m=0 \Leftrightarrow x^2-2|x|+1=m$ $(*)$. Số nghiệm của $(*)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2-2|x|+1$ và đường thẳng $y=m$.

Dễ thấy hàm số $y=x^2-2|x|+1$ là một hàm số chẵn, do đó có đồ thị đối xứng qua trục $Oy$. Mặt khác ta có $y=x^2-2|x|+1=x^2-2x+1$ với $x\ge 0$.

Từ đó ta có cách vẽ đồ thị hàm số $y=x^2-2|x|+1$ như sau:

- Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y=x^2-2x+1$;
- Bước 2: Xóa phần nằm bên trái trục tung (ứng với $x<0$) của đồ thị hàm số $y=x^2-2x+1$;
- Bước 3: Lấy đối xứng phần nằm bên phải trục tung (ứng với $x\ge 0$) của đồ thị hàm số $y=x^2-2x+1$ qua trục tung.




Quan sát trên đồ thị ta thấy đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2-2|x|+1$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $0<m<1$. Suy ra không có giá trị nguyên nào của $m$ để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

**Cách 2:** Đặt $t=|x|, t\ge 0$. Phương trình đã cho trở thành $t^2-2t+1-m=0$ (**).

Ta thấy với $t=0$ thì $x=0$, với $t>0$ thì $x=\pm t$.

Do đó để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì (**) phải có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-(1-m)>0 \\ 2>0 \\ 1-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m<1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<1.$

Do đó không có giá trị nguyên nào của $m$ để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

**Đáp án A.**

**Câu 24.** Biết $S=(a;b)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=|x^2-4x+3|$ tại bốn điểm phân biệt. Tìm $a+b$.

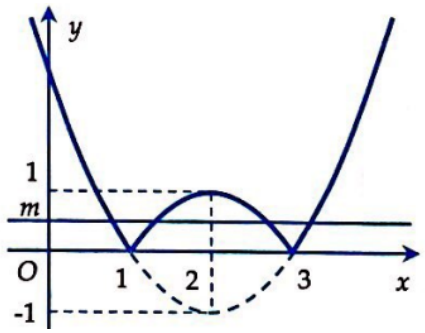
**A.** $a+b=1$ **B.** $a+b=-1$ **C.** $a+b=2$ **D.** $a+b=-2$

**Lời giải**

Ta có $y=\left|x^2-4x+3\right|=\begin{cases}x^2-4x+3 \text{ khi } x^2-4x+3\ge 0\\ -\left(x^2-4x+3\right) \text{ khi } x^2-4x+3<0\end{cases}$.

Từ đó ta có cách vẽ đồ thị hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$:

- Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$;
- Bước 2: Giữ nguyên phần nằm trên trục $Ox$ của đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$;
- Bước 3: Lấy đối xứng phần nằm dưới trục $Ox$ của đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$.




Quan sát đồ thị ta thấy đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $0<m<1$. Vậy $S=\left(0;1\right)$. Suy ra $a+b=1$.

**Đáp án A.**

**Câu 25.** Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $\left|x\right|\sqrt{x^2-4\left|x\right|+4}=m$ có 6 nghiệm phân biệt là khoảng $\left(a;b\right)$. Tính $a+b$.

**A.** $a+b=6$ **B.** $a+b=4$
**C.** $a+b=1$ **D.** $a+b=2$

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Ta có $\left|x\right|\sqrt{x^2-4\left|x\right|+4}=m$

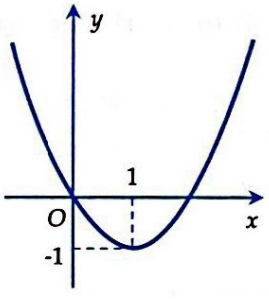
$\Leftrightarrow \left|x\right|\sqrt{\left(\left|x\right|-2\right)^2}=m$

$\Leftrightarrow \left|\left|x\right|\left(\left|x\right|-2\right)\right|=m$

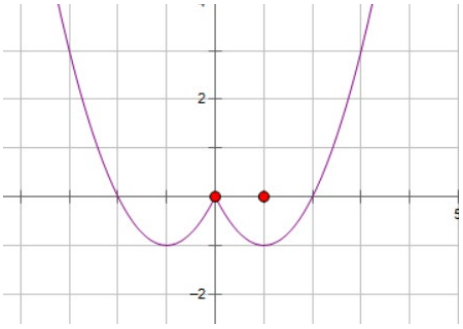
Phương trình $\left|\left|x\right|\left(\left|x\right|-2\right)\right|=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|\left|x\right|\left(\left|x\right|-2\right)\right|$ và đường thẳng $y=m$.

Vẽ đồ thị hàm số $y=\left|\left|x\right|\left(\left|x\right|-2\right)\right|$:

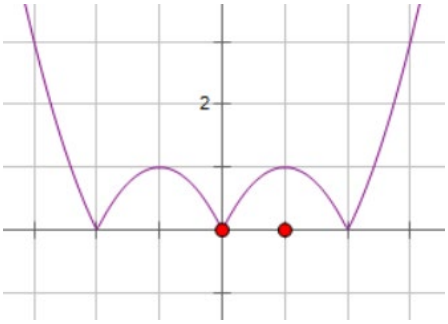
- Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y=x\left(x-2\right)$.




- Bước 2: Từ đồ thị hàm số $y=x\left(x-2\right)$ suy ra đồ thị hàm số $y=\left|x\right|\left(\left|x\right|-2\right)$.



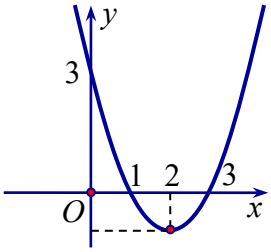
- Bước 3: Từ đồ thị hàm số $y=|x|\left(|x|-2\right)$ suy ra đồ thị hàm số $y=\left||x|\left(|x|-2\right)\right|$.



Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $|x|\sqrt{x^2-4|x|+4}=m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\in(0;1)$.

Vậy $a+b=1$.

**Câu 26.** Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị $(C)$ (như hình vẽ). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f^2\left(|x|\right)+(m-2)f\left(|x|\right)+m-3=0$ có 6 nghiệm phân biệt?

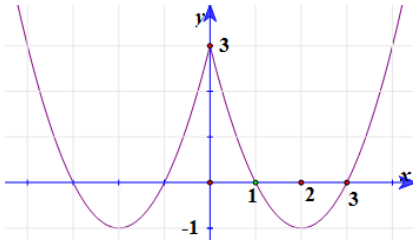



**A.** 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ đồ thị $(C)$ suy ra đồ thị $(C')$ của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ gồm 2 phần: Phần 1 giữ nguyên phần $(C)$ bên phải trục $Oy$; phần 2 lấy đối xứng phần 1 qua trục $Oy$.




Ta có: $f^2\left(|x|\right)+(m-2)f\left(|x|\right)+m-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(|x|\right)=-1 \quad (1)\\ f\left(|x|\right)=3-m \quad (2)\end{array}\right.$.

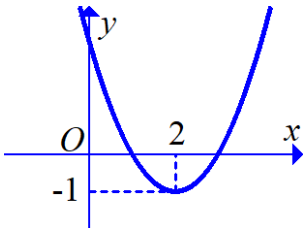
Từ đồ thị $(C')\Rightarrow$ phương trình $(1)$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $(2)$ có 4 nghiệm phân biệt, khác hai 2 nghiệm của phương trình $(1)$ $(*)$.

Từ đồ thị $(C')$, ta có $(*) \Leftrightarrow -1 < 3-m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Do đó có 3 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 27.** Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Với những giá trị nào của tham số $m$ thì phương trình $|f(x)|=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

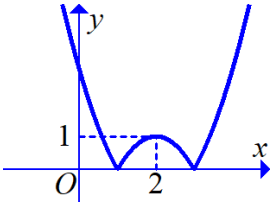



**A.** $0 < m < 1$. **B.** $-1 < m < 0$. **C.** $m=-1;\ m=3$. **D.** $m > 3$.

**Lời giải**

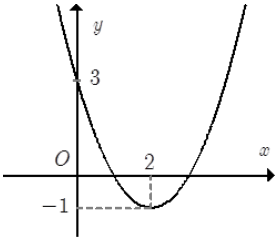
**Chọn A**

Số nghiệm của phương trình $|f(x)|=m$ là số giao điểm của đồ thị $y=|f(x)|$ và đường thẳng $y=m$. Ta có đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như hình vẽ dưới đây.




Do đó phương trình $|f(x)|=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$.

**Câu 28.** Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ.



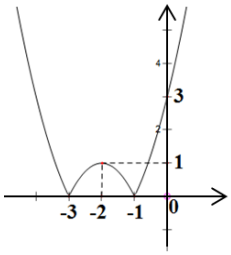

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $|ax^2-bx+c|=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

**A.** $0 < m < 1$. **B.** $m=0$.

**C.** $m=1$. **D.** không có giá trị của m.

**Lời giải**

**Chọn D**

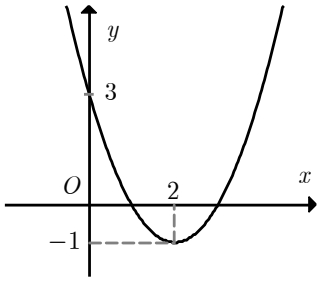



Đồ thị $(C_1)$ của hàm số $y=ax^2-bx+c=a(-x)^2+b(-x)+c$ đối xứng với đồ thị $(C)$ của hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ qua trục tung.

Từ đó suy ra đồ thị $(C_2)$ của hàm số $y=\left|ax^2-bx+c\right|$ gồm phần đồ thị $(C_1)$ ở phía trên $Ox$ (kể cả các điểm thuộc $Ox$) và phần đối xứng qua $Ox$ của phần $(C_1)$ nằm phía dưới trục hoành (như hình vẽ).

Dựa vào đồ thị suy rađường thẳng $y=m$ cắt đồ thị $(C_2)$ tại 4 điểm phân biệt khi $0<m<1$, hay phương trình $\left|ax^2-bx+c\right|=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<m<1$. Không có số nguyên $m$ nào thuộc khoảng $(0;1)$.

**Câu 29.** Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực $m$ thì phương trình $f(|x|)+1=m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt




**A.** $m=4$. **B.** $m>0$. **C.** $m>-1$. **D.** $m=2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

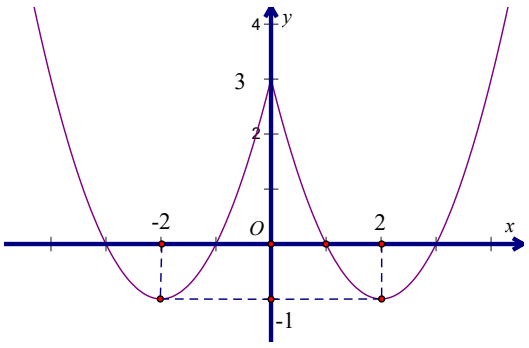
Đồ thị hàm số cắt $Oy$ tại $(0;3)\Rightarrow c=3$

Đồ thị hàm số nhận $(2;-1)$ làm đỉnh nên ta có $\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=2\\4a+2b+c=-1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}b=-4a\\4a+2b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-4\end{cases}$

Ta có $f(|x|)+1=m\Leftrightarrow y=f(|x|)=m-1$

Ta có đồ thị hàm $y=f(|x|)\,(C)$ như hình vẽ.



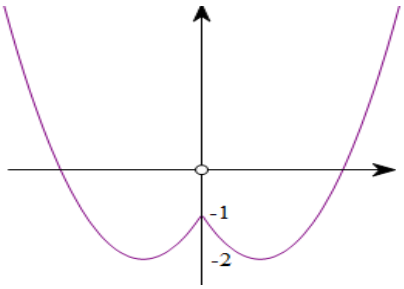

Số nghiệm của phương trình $f(|x|)+1=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $(C)$ với đường thẳng $y=m-1\Leftrightarrow m-1=3\Leftrightarrow m=4$

**Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để parabol $(P):y=x^2-2|x|-1$ cắt đường thẳng $y=m-3$ tại 4 điểm phân biệt.

**A.** $-2<m<-1$. **B.** $1<m<2$. **C.** $-2\le m\le -1$. **D.** $1\le m\le 2$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Hàm số $y=x^2-2|x|-1$ có đồ thị được suy ra từ đồ thị hàm số $y=x^2-2x-1$ bằng cách bỏ phần đồ thị phía trái trục tung và lấy thêm phần đối xứng của phần phía phải trục tung qua trục tung (như hình vẽ)

Đồ thị hàm số $y=x^2-2|x|-1$ cắt đường thẳng $y=m-3$ tại $4$ điểm phân biệt khi và chỉ khi $-2<m-3<-1\Leftrightarrow 1<m<2$.

**Câu 31.** Với giá trị nào của $m$ thì phương trình $m=\left|x^2-5x+4\right|$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

**A.** $m\le\frac{9}{4}$. **B.** $m\ge\frac{9}{4}$. **C.** $m=\frac{9}{4}$. **D.** $m=0$.

**Lời giải**

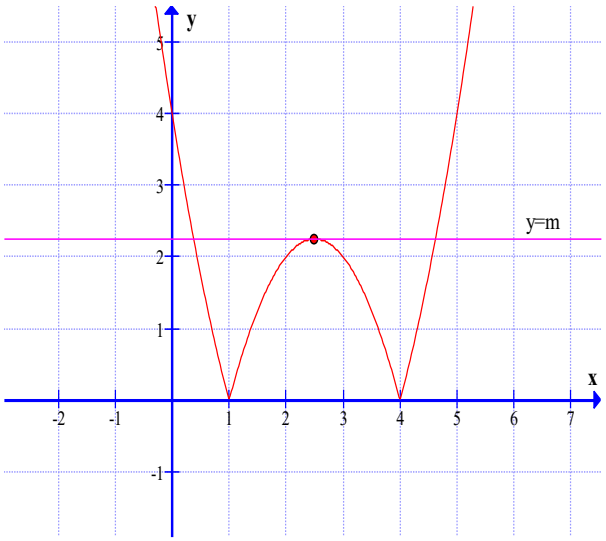
**Chọn C**

Ta có: $y=\left|x^2-5x+4\right|=\begin{cases}x^2-5x+4 \ \ khi \ \ x^2-5x+4\ge 0\\ -(x^2-5x+4) \ khi \ x^2-5x+4<0\end{cases}$ (C)

Giữ nguyên đồ thị $(P)$ ứng với $y\ge 0$ ta được đồ thị $(C_1)$

Lấy đối xứng phần đồ thị (P) ứng với $y<0$ ta được đồ thị $(C_2)$

Vậy $(C)=(C_1)\cup(C_2)$



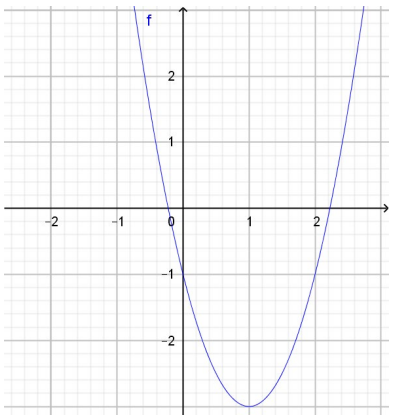

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm nếu có của đồ thị hàm số $y=\left|x^2-5x+4\right|$ $(C)$ và đường thẳng $y=m$ $(d)$

Yêu cầu bài ra $\Leftrightarrow$ $(d)$ cắt $(P)$ tại 3 điểm phân biệt

-$d$ là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành

Từ đồ thị hàm số ta suy ra $(d)$ cắt $(P)$ tại 3 điểm phân biệt khi $m=\frac{9}{4}$

**Câu 32.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ cắt đường $y=m+1$ trên cùng một hệ trục tọa độ tại 4 điểm phân biệt là?




**A.** $-3<m<0$. **B.** $0<m<3$. **C.** $1<m<4$. **D.** $-1<m<2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

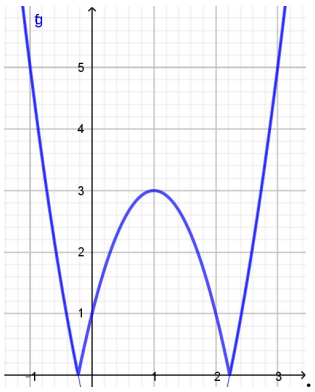
Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$, ta suy ra cách vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau:

-Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ ở phía trên trục hoành.

-Lấy đối xứng phần đồ thị dưới trục hoành qua trục hoành.

-Xóa phần đồ thị phía dưới trục hoành.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ ta có đường thẳng $y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m+1<3\Leftrightarrow -1<m<2$.




**Câu 33.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để đồ thị hàm số $y=x^2-9|x|$ cắt đường thẳng $y=m$ tại 4 điểm phân biệt.

**A.** $m<-3$. **B.** $m>-\frac{81}{4}$. **C.** $-\frac{81}{4}<m<0$. **D.** $m>0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1:**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-9|x|=m\Leftrightarrow x^2-9|x|-m=0$ (1)

Đặt $t=|x|$, $t\ge 0$.

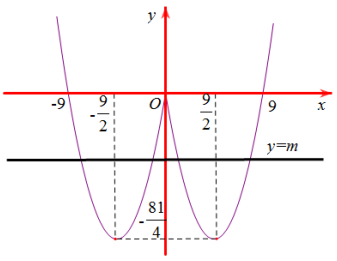
(1) $\Rightarrow t^2-9t-m=0$ (2)

Đồ thị hàm số $y=x^2-9|x|$ cắt đường thẳng $y=m$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}81+4m>0\\9>0\\-m>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{81}{4}<m<0.$$

**Cách 2:**

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$




Dựa vào đồ thị suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-\frac{81}{4} < m < 0$.

**Câu 34.** Cho phương trình $x^2 - 2x - 2|x - m| + 1 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để phương trình có 3 nghiệm thực?

**A.** $4$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

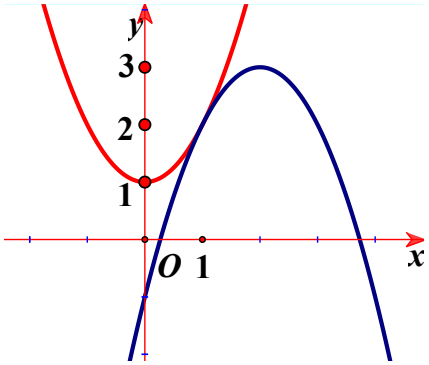
**Lời giải**

**Chọn C**

$$pt \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2 = 2(x-m)\\(x-1)^2 = -2(x-m)\end{array}\right.$$

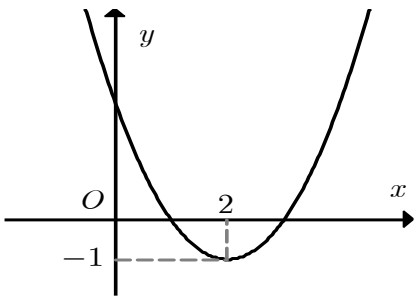
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-x^2 + 4x - 1 = 2m\\x^2 + 1 = 2m\end{array}\right.$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 1$ và $y = x^2 + 1$ trên cùng 1 hệ trục tọa độ:




Từ đồ thị suy ra để phương trình có 3 nghiệm thì $\left[\begin{array}{l}2m = 1\\2m = 2\\2m = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = \frac{1}{2}\\m = 1\\m = \frac{3}{2}\end{array}\right.$.

**Câu 35.** Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình đưới đây. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

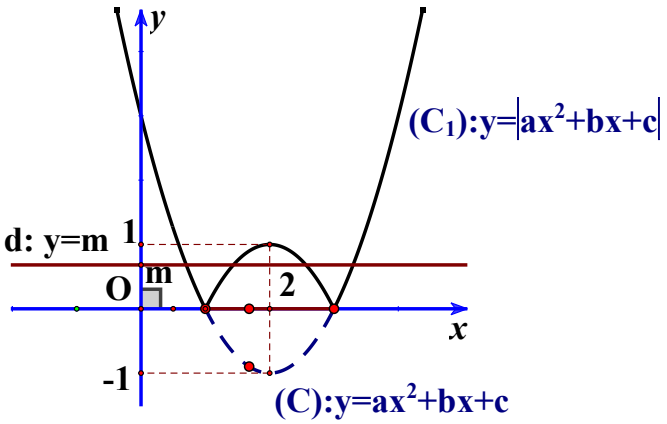


**A.** $-1<m<0$. **B.** $m>3$. **C.** $m=-1,\ m=3$. **D.** $0<m<1$.

**Lời giải**

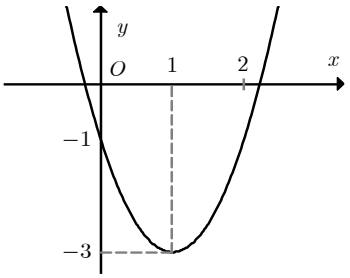
**Chọn D**

Từ đồ thị hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ ta suy ra đồ thị hàm $y=\left|f(x)\right|=\left|ax^2+bx+c\right|$.




Phương trình $\left|f(x)\right|=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đđường thẳng d: $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=\left|ax^2+bx+c\right|$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<1$.

**Câu 36.** Cho đồ thị hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ như hình bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị $m$ nguyên trong đoạn $[0;2018]$ để phương trình $\left|ax^2+b|x|+c\right|-m=0$ có hai nghiệm phân biệt?




**A.** 2016. **B.** 2015. **C.** 2018. **D.** 2017.

**Lời giải**

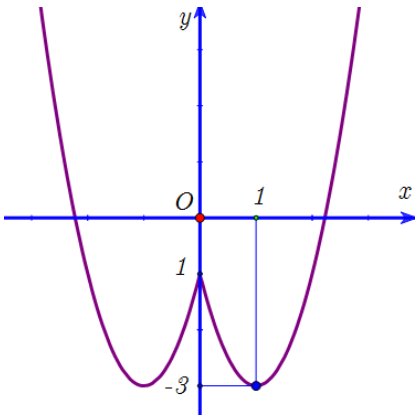
**Chọn A**

Gọi $(C):y=ax^2+bx+c$; $(C_1):y=ax^2+b|x|+c$; $(C_2):y=\left|ax^2+b|x|+c\right|$

Từ $(C)$ suy ra $(C_1)$ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị của $(C)$ bên phải trục tung.

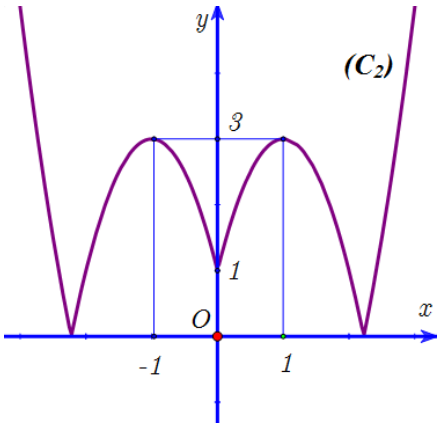
- Lấy đối xứng phần đồ thị $(C)$ bên phải trục tung qua trục tung.




Từ $(C_1)$ suy ra $(C_2)$ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị $(C_1)$ phía trên trục hoành.

- Lấy đối xứng phần đồ thị $(C_1)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.




Ta có phương trình $\left|ax^2+b|x|+c\right|-m=0 \Leftrightarrow \left|ax^2+b|x|+c\right|=m\ (*)$

Khi đó số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số giao điểm giữa $(C_2)$ và đường thẳng $y=m$.

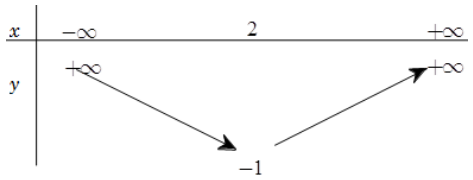
Vì vậy đề phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>3 \end{array}\right.$.

Mà $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[0;2018] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m=0\vee m\in(3;2018] \end{cases} \Rightarrow m\in\{0;4;5;6;...;2018\}$.

Vậy có $2016$ giá trị của $m$.

.

**Câu 37.** Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có bảng biến thiên như sau:




Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $\left|f(2017x-2018)-2\right|=m$ có đúng ba nghiệm.

**A.** $m=1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** không tồn tại $m$.

**Lời giải**

**Chọn B**

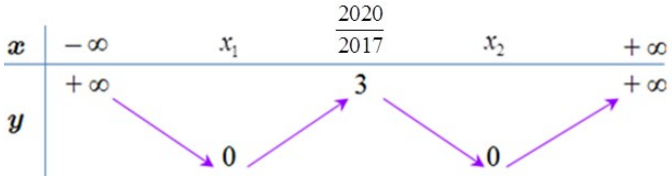
Dựa vào BBT ta thấy hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ đạt GTNN bằng $-1$ tại $x=2$ và có hệ số $a>0$.

Ta biểu diễn được: $f(x)=a(x-2)^2-1=ax^2-4ax+4a-1$

Do đó $f(2017x-2018)=a(2017x-2020)^2-1 \Rightarrow f(2017x-2018)-2=a(2017x-2020)^2-3$.

Vậy GTNN của $y=f(2017x-2018)-2$ bằng $-3$ tại $x=\dfrac{2020}{2017}$.

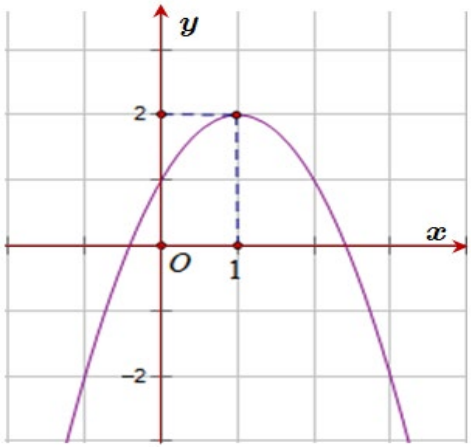
BBT của hàm số $y=\left|f(2017x-2018)-2\right|$ có dạng:




Số nghiệm của phương trình $\left|f(2017x-2018)-2\right|=m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|f(2017x-2018)-2\right|$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào BBT ta thấy phương trình $\left|f\left(2017x-2018\right)-2\right|=m$ có đúng ba nghiệm khi $m=3$.

**Câu 38.** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $f\left(-x\right)+m-2019=0$ có duy nhất một nghiệm.




**A.** $m=2015$. **B.** $m=2016$. **C.** $m=2017$. **D.** $m=2019$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ đạt GTLN bằng $2$ tại $x=1$ và có hệ số $a<0$.Ta biểu diễn được: $f\left(x\right)=a\left(x-1\right)^2+2=ax^2-2ax+a+2$

$\Rightarrow f\left(-x\right)=a\left(x+1\right)^2+2$.

Vậy GTLN của $y=f\left(-x\right)$ bằng $2$ tại $x=-1$. (vì hệ số $a<0$).

Số nghiệm của phương trình $f\left(-x\right)+m-2019=0\Leftrightarrow f\left(-x\right)=2019-m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(-x\right)$ và đường thẳng $y=2019-m$

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất khi $2019-m=\max f\left(x\right)\Leftrightarrow 2019-m=2\Leftrightarrow m=2017$.

**Câu 39.** Cho đồ thị hàm số $y=x^2-4\left|x\right|+2$ như hình vẽ dưới đây. Tìm $m$ để phương trình $x^2-4\left|x\right|-m=0$ có $4$ nghiệm phân biệt?

**A.** $-4<m<0$ **B.** $-2<m<2$ **C.** $0<m<4$ **D.** $-2\le m\le 2$

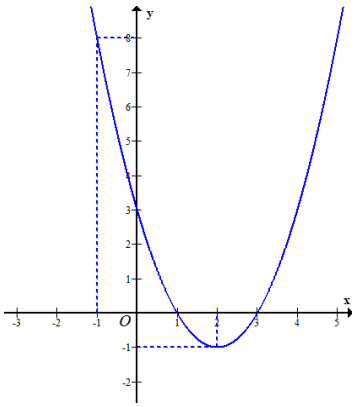
**Lời giải**

**Chọn A.**

$x^2-4\left|x\right|-m=0\ (1)\Leftrightarrow x^2-4\left|x\right|=m\Leftrightarrow x^2-4\left|x\right|+2=m+2\ \ (2)$

Phương trình $(1)$ có $4$ nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có $4$ nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=x^2-4\left|x\right|+2$ cắt đường thẳng $y=m+2$ tại $4$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2<m+2<2$ $\Leftrightarrow -4<m<0$.

**Câu 40.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có đồ thị $(C)$(như hình vẽ):



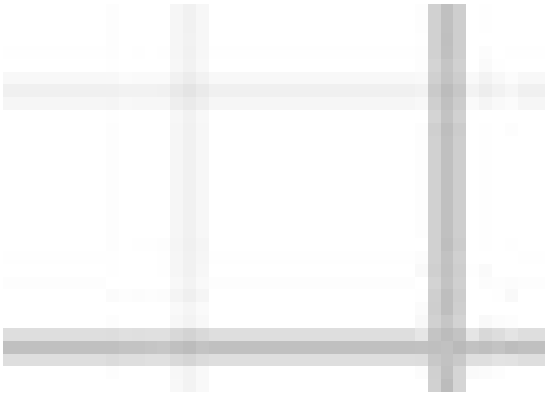
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f^2\left(|x|\right)+\left(m-2\right)f\left(|x|\right)+m-3=0$ có $6$ nghiệm phân biệt?

**A.** 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn C**

* Vẽ đồ thị hàm số $\left(C'\right)$ của hàm số $y=f\left(|x|\right)$: Giữ nguyên phần đồ thị $\left(C\right)$ nằm phía bên phải trục $Oy$, bỏ đi phần đồ thị $\left(C\right)$ bên trái trục $Oy$ và lấy đối xứng phần đồ thị $\left(C\right)$ phía bên phải trục $Oy$ qua trục $Oy$.



* Ta có $f^2\left(|x|\right)+\left(m-2\right)f\left(|x|\right)+m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(|x|\right)=-1 \\ f\left(|x|\right)=3-m \end{array}\right.$.

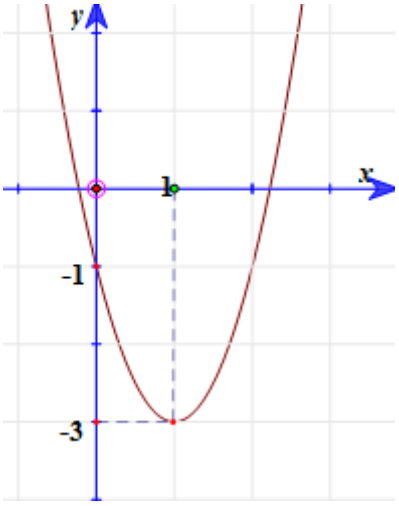
* Từ đồ thị $\left(C'\right)$, ta có:

- Phương trình $f\left(|x|\right)=-1$ có hai nghiệm là $x=2, x=-2$.

- Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $f\left(|x|\right)=3-m$ có bốn nghiệm phân biệt khác $\pm 2$ suy ra Đường thẳng $d: y=3-m$ cắt đồ thị $\left(C'\right)$ tại bốn điểm phân biệt khác $A, B$

$\Leftrightarrow -1<3-m<3 \Leftrightarrow 0<m<4$. Suy ra $m\in\{1,2,3\}$.

**Câu 41.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



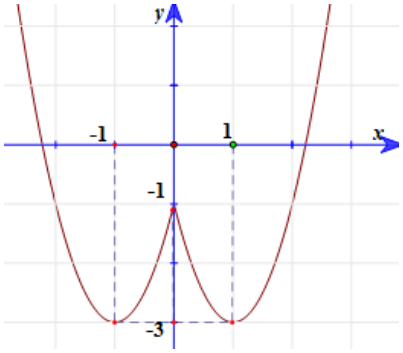

Phương trình $f^2\left(|x|\right)+f\left(|x|\right)-2=0$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** $2$. **B.** $6$. **C.** $8$. **D.** $7$.

**Lời giải**

**Chọn B**

+) Vẽ đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$




$$f^2\left(|x|\right)+f\left(|x|\right)-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(|x|\right)=1\ (1)\\ f\left(|x|\right)=-2\ (2)\end{array}\right.$$

Số nghiệm của $(1)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ và đường thẳng $y=1$, từ đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ ta suy ra $(1)$ có $2$ nghiệm phân biệt.

Số nghiệm của $(2)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ và đường thẳng $y=-2$, từ đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ ta suy ra $(2)$ có $4$ nghiệm phân biệt (khác $2$ nghiệm của $(1)$).

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

**Câu 42.** Hỏi có bao nhiêu giá trị $m$ nguyên trong nửa khoảng $(0;2017]$ để phương trình $\left|x^2-4|x|-5\right|-m=0$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** $2016$. **B.** $2008$. **C.** $2009$. **D.** $2017$.

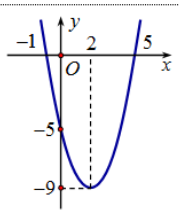
**Lời giải**

**Chọn B**

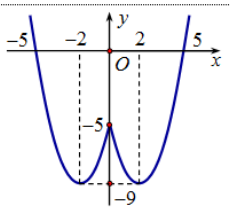
PT: $\left|x^2-4|x|-5\right|-m=0\Leftrightarrow\left|x^2-4|x|-5\right|=m(1)$.

Số nghiệm phương trình $(1)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|x^2-4|x|-5\right|(P)$ và đường thẳng $y=m$ (cùng phương $Ox$).

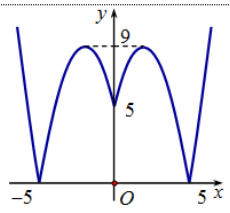
Xét hàm số $y=x^2-4x-5\ (P_1)$ có đồ thị như hình 1.



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

Xét hàm số $y=x^2-4|x|-5\ (P_2)$ là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận $Oy$ làm trục đối xứng. Mà $y=x^2-4|x|-5=x^2-4x-5$ nếu $x\ge 0$. Suy ra đồ thị hàm số $(P_2)$ gồm hai phần:

- Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số $(P_1)$ phần bên phải $Oy$.
- Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục $Oy$.

Ta được đồ thị $(P_2)$ như hình 2.

Xét hàm số $y=|x^2-4|x|-5|(P)$, ta có: $y=\begin{cases}x^2-4|x|-5 & (y\ge 0)\\ -(x^2-4|x|-5) & (y<0)\end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số $(P)$ gồm hai phần:

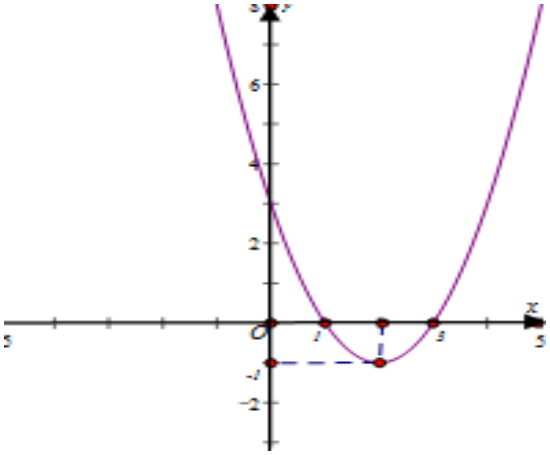
- Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số $(P_2)$ phần trên $Ox$.
- Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số $(P_2)$ phần dưới $Ox$ qua trục $Ox$.

Ta được đồ thị $(P)$ như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số $(P)$ ta có: Để $|x^2-4|x|-5|=m\ (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>9\\ m=0\end{array}\right.$.

Mà $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in(0;2017]\end{cases}\Rightarrow m\in\{10;11;12;...;2017\}$.

**Câu 43.** Cho hàm số $y=x^2-4x+3$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây




Đặt $f(x)=x^2-4|x|+3$;gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x)|=m$ có 8 nghiệm phân biệt. Số phần tử của $S$ bằng

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số nghiệm của phương trình $|f(x)|=m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=|f(x)|$ và đường thẳng $y=m$.

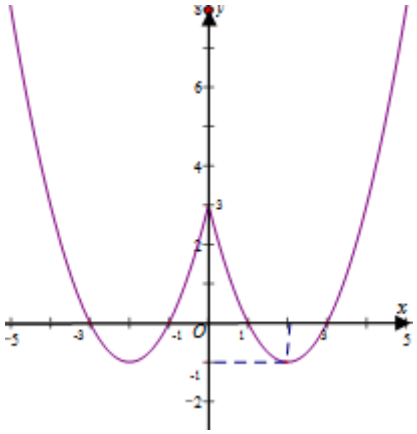
Xét $(P_2): y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ ;có $y = f(x)$ là hàm số chẵn;nên $(P_2)$ nhận trục $Oy$ làm trục đối xứng.

Từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ $(P_1)$ ;ta vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ $(P_2)$ như sau:

+) Giữ nguyên phần đồ thị $(P_1)$ bên phải trục $Oy$.

+) Lấy đối xứng phần đồ thị $(P_1)$ bên phải trục $Oy$ qua trục $Oy$.

(Bỏ phần đồ thị $(P_1)$ bên trái trục $Oy$)

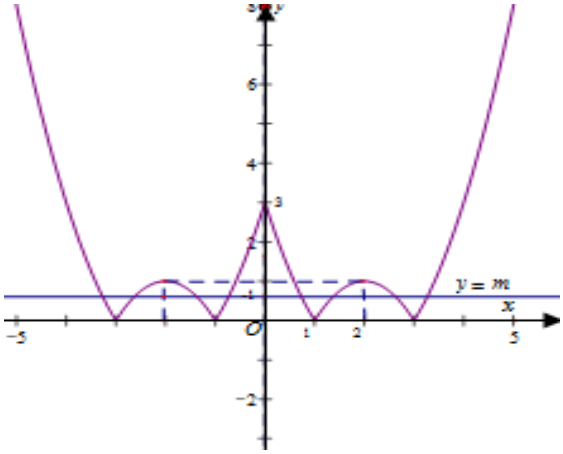


Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ $(P_2)$ ta vẽ đồ thị hàm số $y = g(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ $(P_3)$ như sau

+) Giữ nguyên phần đồ thị $(P_2)$ nằm trên trục $Ox$.

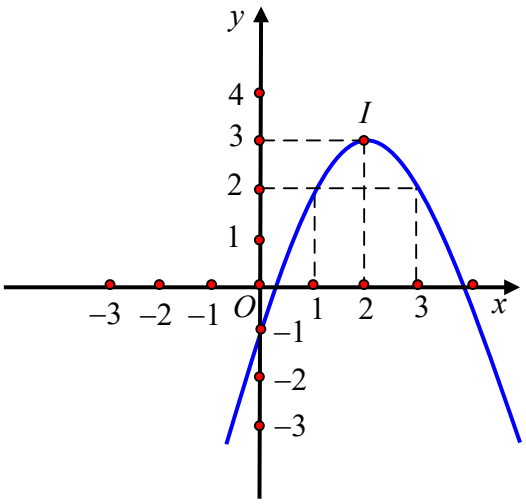
+) Lấy đối xứng phần đồ thị $(P_2)$ nằm trên trục $Ox$ qua trục $Ox$.

(Bỏ phần đồ thị $(P_2)$ nằm phía dưới trục $Ox$)




Dựa vào đồ thị hàm số $y = g(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ $(P_3)$ ta có phương trình $|f(x)| = m$ có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$. Vậy không có giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn bài toán.

**Câu 44.** Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị $m$ để phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ có bốn nghiệm phân biệt.




**A.** $-1<m<3$. **B.** $0<m<3$. **C.** $0\le m\le 3$. **D.** $-1\le m\le 3$.

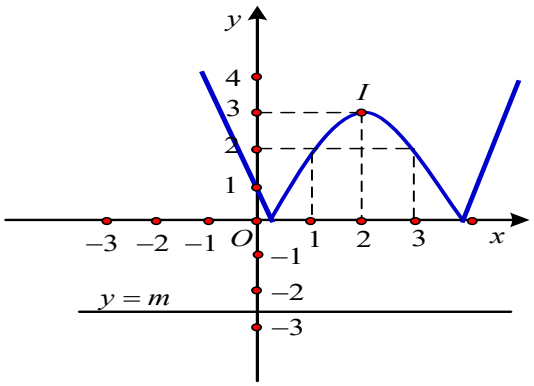
**Lời giải**

**Chọn B**

Quan sát đồ thị ta có đỉnh của parabol là $I(2;3)$ nên $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=2\\3=4a+2b+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4a\\4a+2b+c=3\end{cases}$.

Mặt khác $(P)$ cắt trục tung tại $(0;-1)$ nên $c=-1$. Suy ra $\begin{cases}b=-4a\\4a+2b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=4\end{cases}$.

$(P):y=-x^2+4x-1$ suy ra hàm số $y=\left|-x^2+4x-1\right|$ có đồ thị là là phần đồ thị phía trên trục hoành của $(P)$ và phần có được do lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của $(P)$, như hình vẽ sau:




Phương trình $\left|ax^2+bx+c\right|=m$ hay $\left|-x^2+4x-1\right|=m$ có bốn nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số hàm số $y=\left|-x^2+4x-1\right|$ tại bốn điểm phân biệt.

Suy ra $0<m<3$.

## DẠNG 4. MỘT SỐ CÂU HỎI THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ BẬC HAI

**Dạng 1:** Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học. Các bước làm như sau:

**Bước 1:** Dựa vào giả thiết và các yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả dưới "dạng ngôn ngữ toán học" cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Căn cứ vào các yếu tố bài ra ta chọn biến số, tìm điều kiện tồn tại, đơn vị.

**Bước 2:** Dựa vào các mối liên hệ ràng buộc giữa biến số với các giả thiết của đề bài cũng như các kiến thức liên quan đến thực tế, ta thiết lập hàm số bậc hai. Chuyển yêu cầu đặt ra đối với bài toán thực tiễn thành yêu cầu bài toán hàm số bậc hai.

**Bước 3:** Dùng tính chất hàm số bậc hai để giải quyết bài toán hình thành ở bước 2. Lưu ý kiểm tra điều kiện, và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.

**Dạng 2:** Các bài toán thực tế đã mô hình hóa bằng một hàm số bậc hai. Thực hiện bước 3 của dạng 1.

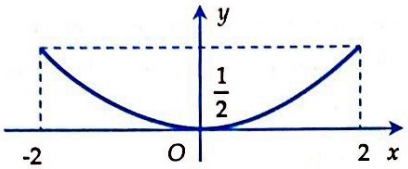
**Câu 1.** Một chiếc ăng - ten chảo parabol có chiều cao $h = 0,5m$ và đường kính miệng $d = 4m$. Mặt cắt qua trục là một parabol dạng $y = ax^2$. Biết $a = \frac{m}{n}$, trong đó *m, n* là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính $m - n$.

**A.** $m - n = 7$ **B.** $m - n = -7$ **C.** $m - n = 31$ **D.** $m - n = -31$

**Lời giải**

**Đáp án B.**

Từ giả thiết suy ra parabol $y = ax^2$ đi qua điểm $I\left(2;\frac{1}{2}\right)$.




Từ đó ta có $\frac{1}{2} = a.2^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$.

Vậy $m - n = 1 - 8 = -7$.

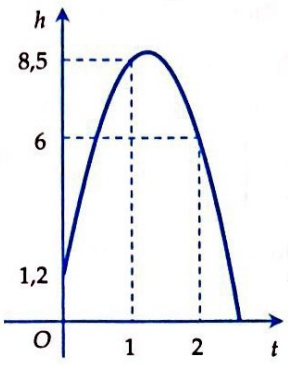
**Câu 2.** Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oth*, trong đó *t* là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên; *h* là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá lên, nó đạt độ cao 6m. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi được đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm?

**A.** 2,56 giây **B.** 2,57 giây **C.** 2,58 giây **D.** 2,59 giây

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Gọi phương trình của parabol quỹ đạo là $h = at^2 + bt + c$. Từ giả thiết suy ra parabol đi qua các điểm $(0;1;2)$, $(1;8;5)$ và $(2;6)$.




Từ đó ta có

$$\begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4,9 \\ b = 12,2 \\ c = 1,2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình của parabol quỹ đạo là $h=-4,9t^2+12,2t+1,2$.

Giải phương trình

$h=0\Leftrightarrow -4,9t^2+12,2t+1,2=0$ ta tìm được một nghiệm dương là $t\approx 2,58$.

**Câu 3.** Khi một quả bóng được đá lên nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng tọa độ $Oth$ có phương trình $h=at^2+bt+c\ (a<0)$, trong đó $t$ là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên, $h$ là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,2\ m$ và sau 1 giây thì nó đạt độ cao $8,5m$, sau 2 giây nó đạt độ cao $6m$. Tính tổng $a+b+c$.

**A.** $a+b+c=18,3$. **B.** $a+b+c=6,1$.

**C.** $a+b+c=8,5$. **D.** $a+b+c=-15,9$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ giả thiết của bài toán ta có hệ phương trình $\begin{cases}c=1,2\\a+b+c=8,5\\4a+2b+c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{49}{10}\\b=\dfrac{61}{5}\\c=1,2\end{cases}$

$\Rightarrow a+b+c=\dfrac{17}{2}$.

**Câu 4.** Một của hàng buôn giày nhập một đôi với giá là $40$ đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá $x$ đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120-x)$ đôi. Hỏi của hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

**A.** 80 USD. **B.** 160 USD. **C.** 40 USD. **D.** 240 USD.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Gọi $y$ là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

Ta có $y=(120-x)(x-40)=-x^2+160x-4800=-(x-80)^2+1600\le 1600$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=80$.

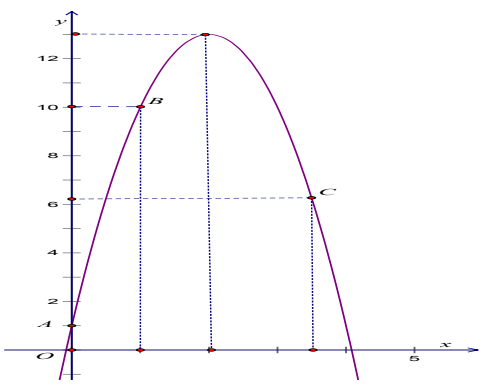
Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá $80$ USD.

**Câu 5.** Một quả bóng cầu thủ sút lên rồi rơi xuống theo quỹ đạo là parabol. Biết rằng ban đầu quả bóng được sút lên từ độ cao $1\,\text{m}$ sau đó $1$ giây nó đạt độ cao $10\,\text{m}$ và $3,5$ giây nó ở độ cao $6,25\,\text{m}$. Hỏi độ cao cao nhất mà quả bóng đạt được là bao nhiêu mét?

**A.** $11\,\text{m}$. **B.** $12\,\text{m}$. **C.** $13\,\text{m}$. **D.** $14\,\text{m}$.

**Lời giải**

**Chọn C**



Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol nên phương trình có dạng $y = ax^2 + bx + c$

Theo bài ra gắn vào hệ tọa độ và sẽ tương ứng các điểm $A$, $B$, $C$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 10 \\ 12,25a + 3,5b + c = 6,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 12 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình parabol là $y = -3x^2 + 12x + 1$.

Parabol có đỉnh $I(2;13)$. Khi đó quả bóng đạt vị trí cao nhất tại đỉnh tức $h = 13$ m.

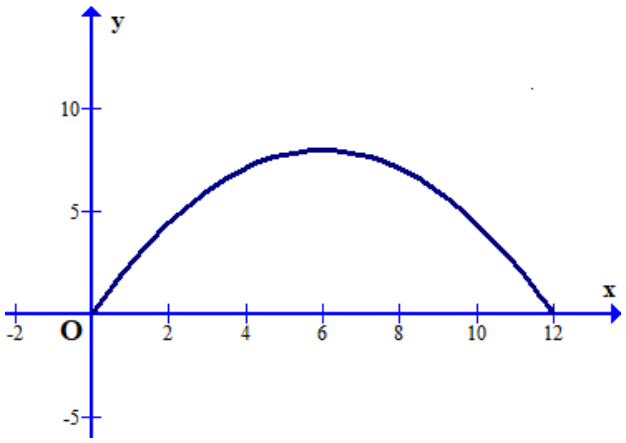
**Câu 6.** **(THI HK1 LỚP 11 THPT VIỆT TRÌ 2018 - 2019)** Một chiếc cổng hình parabol có chiều rộng $12\ m$ và chiều cao $8\ m$ như hình vẽ. Giả sử một chiếc xe tải có chiều ngang $6\ m$ đi vào vị trí chính giữa cổng. Hỏi chiều cao $h$ của xe tải thỏa mãn điều kiện gì để có thể đi vào cổng mà không chạm tường?



**A.** $0 < h < 6$. **B.** $0 < h \le 6$. **C.** $0 < h < 7$. **D.** $0 < h \le 7$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + bx$.

Vì chiếc cổng hình parabol có chiều rộng $12\ m$ và chiều cao, theo hình vẽ ta có parabol đi qua các điểm $(12;0)$ và $(6;8)$, suy ra:

$$\begin{cases} 144a + 12b = 0 \\ 36a + 6b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{9} \\ b = \dfrac{8}{3} \end{cases}.$$

Suy ra parabol có phương trình $y = -\dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{8}{3}$.

Do chiếc xe tải có chiều ngang $6\ m$ đi vào vị trí chính giữa cổng nên xe sẽ chạm tường tại điểm $A(3;6)$ khi đó chiều cao của xe là 6.

Vậy điều kiện để xe tải có thể đi vào cổng mà không chạm tường là $0 < h < 6$.

**Câu 7.** Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng $16$, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

**A.** 64. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $x$ là chiều dài của hình chữ nhật.

Khi đó chiều rộng là $8-x$.

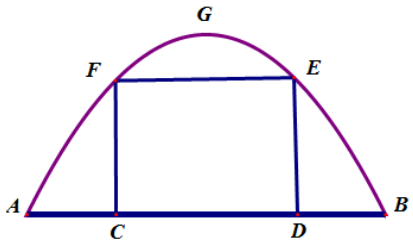
Diện tích hình chữ nhật là $x(8-x)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai $f(x)=-x^2+8x$ trên khoảng $(0;8)$ ta được

$\max\limits_{(0;8)} f(x)=f(4)=16$.

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng $16$ khi chiều dài bằng chiều rộng bằng $4$.

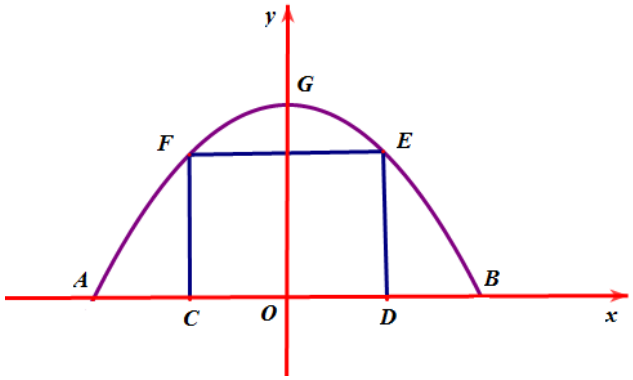
**Câu 8.** Một chiếc cổng hình parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hai cánh cửa phụ hai bên như hình vẽ. Biết chiều cao cổng parabol là 4m còn kích thước cửa ở giữa là 3m x 4m. Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm $A$ và $B$. (xem hình vẽ bên dưới)




**A.** 5m. **B.** 8,5m. **C.** 7,5m. **D.** 8m.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gắn hệ trục tọa độ $Oxy$ như hình vẽ, chiếc cổng là 1 phần của parabol $(P)$: $y=ax^2+bx+c$ với $a<0$.

Do parabol $(P)$ đối xứng qua trục tung nên có trục đối xứng $x=0\Rightarrow -\dfrac{b}{2a}=0\Leftrightarrow b=0$.

Chiều cao của cổng parabol là 4m nên $G(0;4)\Rightarrow c=4$.

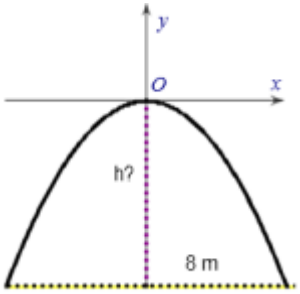
$\Rightarrow (P)$: $y=ax^2+4$

Lại có, kích thước cửa ở giữa là 3m x 4m nên $E(2;3), F(-2;3)\Rightarrow 3=4a=4\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{4}$.

Vậy $(P)$: $y=-\dfrac{1}{4}x^2+4$.

Ta có $-\dfrac{1}{4}x^2+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-4 \end{array}\right.$ nên $A(-4;0)$, $B(4;0)$ hay $AB=8$ (m).

**Câu 9.** Một chiếc cổng hình parabol dạng $y=-\frac{1}{2}x^2$ có chiều rộng $d=8m$. Hãy tính chiều cao $h$ của cổng (*xem hình minh họa bên cạnh*).




**A.** $h=9m$. **B.** $h=7m$. **C.** $h=8m$. **D.** $h=5m$.

**Lời giải**

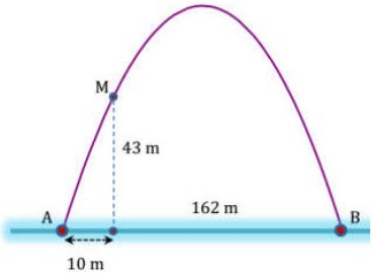
**Chọn C**

$(P): y=-\frac{1}{2}x^2$, có $d=8$. Suy ra $\frac{d}{2}=4$.

Thay $x=4$ vào $y=-\frac{1}{2}x^2$. Suy ra $y=-8$. Suy ra $h=8(cm)$.

**Câu 10.** Cổng Arch tại thành phố St.Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol (hình vẽ). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162 m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43 m so với mặt đất (điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng thẳng theo phương vuông góc với mặt đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng $A$ một đoạn 10 m. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch (tính từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng).






**A.** 175,6 m. **B.** 197,5 m. **C.** 210 m. **D.** 185,6 m.

**Lời giải**

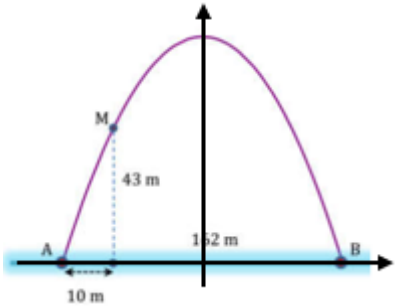
**Chọn D**

Gắn hệ toạ độ $Oxy$ sao cho gốc toạ độ trùng với trung điểm của $AB$, tia $AB$ là chiều dương của trục hoành (hình vẽ).

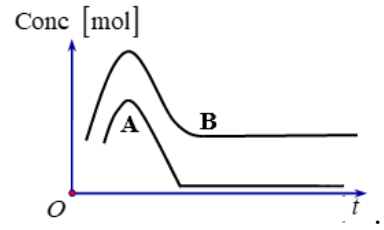
Parabol có phương trình $y=ax^2+c$, đi qua các điểm: $B(81;0)$ và $M(-71;43)$ nên ta có hệ

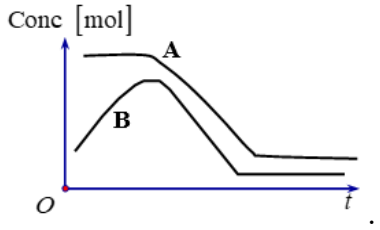
$$\begin{cases}81^2a+c=0\\71^2a+c=43\end{cases}\Rightarrow c=\frac{81^2.43}{81^2-71^2}\approx 185.6$$

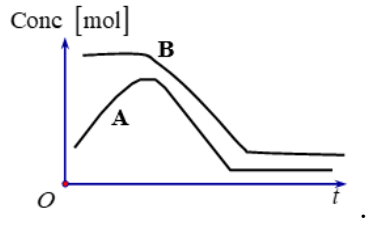
Suy ra chiều cao của cổng là $c\approx 185,6$ m.

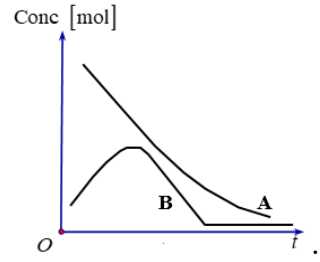



**Câu 11.** Rót chất $A$ vào một ống nghiệm, rồi đổ thêm chất $B$ vào. Khi nồng độ chất $B$ đạt đến một giá trị nhất định thì chất $A$ mới tác dụng với chất $B$. Khi phản ứng xảy ra, nồng độ cả hai chất đều giảm đến khi chất $B$ được tiêu thụ hoàn hoàn. Đồ thị nồng độ mol theo thời gian nào sau đây thể hiện quá trình của phản ứng?

**A.** 


**B.** 


**C.** 


**D.** 


**Lời giải**

**Chọn B**

Theo giả thiết ta có:

Từ khi bắt đầu rót chất $B$ thì đã có chất $A$ trong ống nghiệm, nên nồng độ chất $A$ ban đầu lớn hơn chất $B$. Tức là ban đầu, đồ thị nồng độ chất $A$ nằm "phía trên" đồ thị nồng độ chất $B$ $(1)$.

Khi chất $B$ đạt đến một giá trị nhất định thì hai chất mới phản ứng với nhau. Điều này chứng tỏ có một khoảng thời gian từ khi rót chất $B$ đến khi bắt đầu phản ứng xảy ra thì nồng độ chất $A$ là một hằng số. Tức trong khoảng thời gian đó đồ thị nồng độ chất $A$ là đồ thị của một hàm số hằng $(2)$.

Khi phản ứng xảy ra, nồng độ hai chất đều giảm đến khi chất $B$ được tiêu thụ hoàn toàn. Điều này chứng tỏ sau khi kết thúc phản ứng thì chất $B$ được tiêu thụ hết và chất $A$ có thể còn dư (hoặc cũng có thể hết), kể từ khi ngừng phản ứng thì nồng độ chất $A$ trong ống nghiệm không thay đổi nữa, nên đồ thị nồng độ chất $A$ sau phản ứng phải là đồ thị của một hàm số hằng $(3)$.

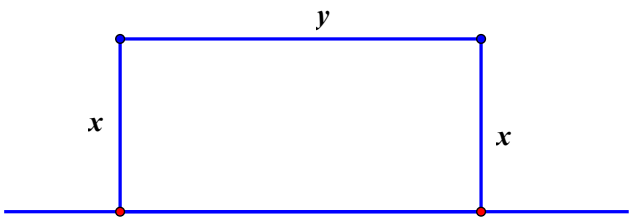
Từ sự phân tích trên ta thấy chỉ có đồ thị của đáp án **B.** phù hợp.

**Câu 12.** Cô Tình có $60m$ lưới muốn rào một mảng vườn hình chữ nhật để trồng rau, biết rằng một cạnh là tường, cô Tình chỉ cần rào $3$ cạnh còn lại của hình chữ nhật để làm vườn. Em hãy tính hộ diện tích lớn nhất mà cô Tình có thể rào được?

**A.** $400m^2$. **B.** $450m^2$. **C.** $350m^2$. **D.** $425m^2$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi hai cạnh của hình chữ nhật có độ dài là $x, y$ (như hình vẽ); $0 < x, y < 60$.

Ta có $2x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - 2x$.

Diện tích hình chữ nhật là $S = xy = x(60 - 2x) = \frac{1}{2}.2x(60 - 2x) \le \frac{1}{2}\left(\frac{2x + 60 - 2x}{x}\right) = 450$.

Vậy diện tích hình chữ nhật lớn nhất là $450(m^2)$, đạt được khi $x = 15, y = 30$.

# Bài 3. DẤU TAM THỨC BẬC HAI

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0),\Delta=b^2-4ac$.

+ Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số $a$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số $a$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$.

+ Nếu $\Delta>0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$. Khi đó:

$f(x)$ cùng dấu với hệ số $a$ với mọi $x$ thuộc các khoảng $\left(-\infty;x_1\right)$ và $\left(x_2;+\infty\right)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số $a$ với mọi $x$ thuộc khoảng $\left(x_1;x_2\right)$.

Nhận xét: Trong định lí, có thể thay biệt thức $\Delta=b^2-4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta'=\left(b'\right)^2-ac$ với $b=2b'$.

### II. Ví dụ

***Ví dụ 1.*** Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

1 Xét dấu của mỗi tam thức

a) $f(x)=3x^2-x+1$

b) $f(x)=4x^2+4x+1$

***Giải***

a) Tam thức bậc hai $f(x)=3x^2-x+1$ có $\Delta=-11<0$, hệ số $a=3>0$ nên $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $f(x)=4x^2+4x+1$ có $\Delta=0$, nghiệm kép $x_0=-\frac{1}{2}$ và hệ số $a=4>0$ nên $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

***Ví dụ 2.*** Lập bảng xét dấu của $f(x)=x^2-3x+2$ tam thức bậc hai:

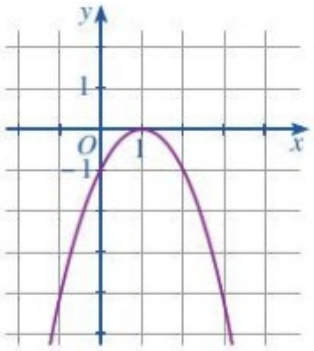
***Giải***

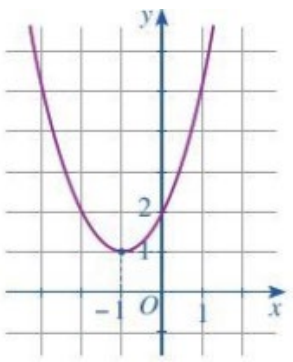
Tam thức bậc hai $f(x)=x^2-3x+2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=1,x_2=2$ và hệ số $a=1>0$.

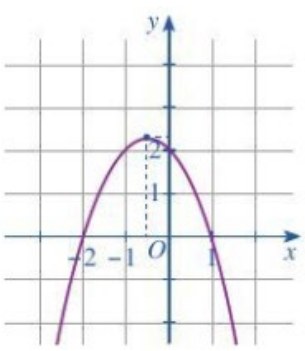
Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

***Ví dụ 3.*** Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho ở mỗi a), b), c).

a) 


b) 


c) 

***Giải***

a) Từ đồ thị Hình a) ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x=1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

b) Từ đồ thị Hình b ta có tam thức bậc hai $f(x)$ vô nghiệm. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | |

c) Từ đồ thị Hình c ta có tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1=-2, x_2=1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

***Ví dụ 4.*** Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận $y$ (đồng) theo công thức sau: $y=-200x^2+92000x-8400000$, trong đó $x$ là số sản phẩm được bán ra. Dựa theo số sản phẩm bán ra, cho biết doanh nghiệp có lãi khi nào, bị lỗ khi nào.

***Giải***

Xét tam thức bậc hai $f(x)=-200x^2+92000x-8400000$.

Nhận thấy $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1=\dfrac{-460+\sqrt{43600}}{-2}\approx 125,6; x_2=\dfrac{-460-\sqrt{43600}}{-2}\approx 334,4$ và hệ số $a=-200<0$. Ta có bảng xét dấu sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Vì $x$ là số nguyên dương nên:

+) Doanh nghiệp có lãi khi và chỉ khi $f(x)>0$, tức là $126\le x\le 334$.

+) Doanh nghiệp bị lỗ khi và chỉ khi $f(x)<0$, tức là $x\le 125$ hoặc $x\ge 335$.

Vậy doanh nghiệp có lãi khi bán từ 126 đến 334 sản phẩm, doanh nghiệp bị lỗ khi bán tối đa 125 sản phẩm hoặc bán tối thiểu 335 sản phẩm.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng. Dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp: Dựa vào định lú về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

-Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau:

1) Phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

-Đối với phân thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức) ta làm như sau

1) Phân tích đa thức $P(x), Q(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$ và $Q(x)$. Từ đó suy ra dấu của $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

**Câu 1.** Xét dấu của các tam thức sau

a) $3x^2-2x+1$. b) $-x^2+4x+5$.

**Câu 2.** Xét dấu của các biểu thức sau

a) $x^3-5x+2$.

b) $x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng. Dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp: Dựa vào định lú về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

-Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau:

1) Phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

-Đối với phân thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x),Q(x)$ là các đa thức) ta làm như sau

1) Phân tích đa thức $P(x),Q(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$ và $Q(x)$. Từ đó suy ra dấu của $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

**Câu 1.** Cho tam thức $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$, $\Delta=b^2-4ac$. Ta có $f(x)\le 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

**A.** $\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a\le 0\\ \Delta<0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a<0\\ \Delta\ge 0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}$.

**Câu 2.** Cho tam thức bậc hai $f(x)=-2x^2+8x-8$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** $f(x)<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. **B.** $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**C.** $f(x)\le 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. **D.** $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**Câu 3.** Tam thức nào dưới đây luôn dương với mọi giá trị của $x$?

**A.** $x^2-10x+2$. **B.** $x^2-2x-10$. **C.** $x^2-2x+10$. **D.** $-x^2+2x+10$.

**Câu 4.** Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

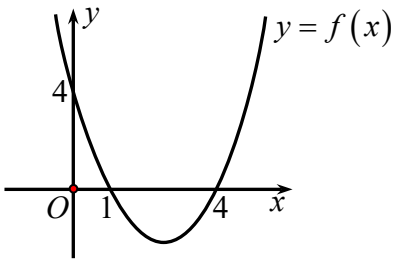
**A.** $f(x)=3x^2+2x-5$ là tam thức bậc hai. **B.** $f(x)=2x-4$ là tam thức bậc hai.

**C.** $f(x)=3x^3+2x-1$ là tam thức bậc hai. **D.** $f(x)=x^4-x^2+1$ là tam thức bậc hai.

**Câu 5.** Cho $f(x)=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ và $\Delta=b^2-4ac$. Cho biết dấu của $\Delta$ khi $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**A.** $\Delta<0$. **B.** $\Delta=0$. **C.** $\Delta>0$. **D.** $\Delta\ge 0$.

**Câu 6.** Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $\Delta=b^2-4ac$, tìm dấu của $a$ và $\Delta$.




**A.** $a>0,\ \Delta>0$. **B.** $a<0,\ \Delta>0$. **C.** $a>0,\ \Delta=0$. **D.** $a<0,\ ,\ \Delta=0$.

**Câu 7.** Cho tam thức $f(x)=x^2-8x+16$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm. **B.** $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**C.** $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. **D.** $f(x)<0$ khi $x<4$.

**Câu 8.** Cho tam thức bậc hai $f(x)=x^2+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $f(x)>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;+\infty)$.

**B.** $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

**C.** $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;1)$.

**D.** $f(x)>0 \Leftrightarrow x \in (0;1)$.

**Câu 9.** Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c \ (a \neq 0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Nếu $\Delta>0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

**B.** Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ luôn trái dấu với hệ số $a$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

**C.** Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a$, với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.

**D.** Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $b$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

# Bài 3. DẤU TAM THỨC BẬC HAI

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0),\Delta=b^2-4ac$.

+ Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số $a$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số $a$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$.

+ Nếu $\Delta>0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$. Khi đó:

$f(x)$ cùng dấu với hệ số $a$ với mọi $x$ thuộc các khoảng $\left(-\infty;x_1\right)$ và $\left(x_2;+\infty\right)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số $a$ với mọi $x$ thuộc khoảng $\left(x_1;x_2\right)$.

Nhận xét: Trong định lí, có thể thay biệt thức $\Delta=b^2-4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta'=\left(b'\right)^2-ac$ với $b=2b'$.

### II. Ví dụ

***Ví dụ 1.*** Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

1 Xét dấu của mỗi tam thức

a) $f(x)=3x^2-x+1$

b) $f(x)=4x^2+4x+1$

***Giải***

a) Tam thức bậc hai $f(x)=3x^2-x+1$ có $\Delta=-11<0$, hệ số $a=3>0$ nên $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $f(x)=4x^2+4x+1$ có $\Delta=0$, nghiệm kép $x_0=-\frac{1}{2}$ và hệ số $a=4>0$ nên $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

***Ví dụ 2.*** Lập bảng xét dấu của $f(x)=x^2-3x+2$ tam thức bậc hai:

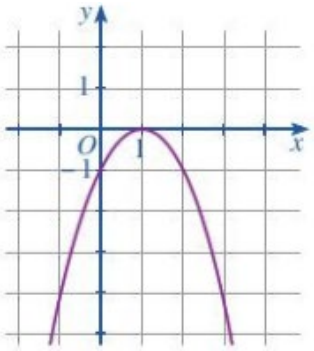
***Giải***

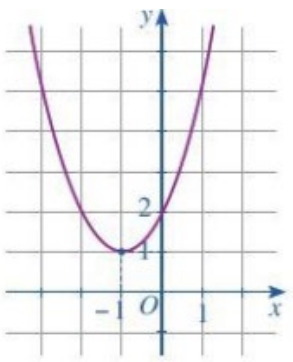
Tam thức bậc hai $f(x)=x^2-3x+2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=1,x_2=2$ và hệ số $a=1>0$.

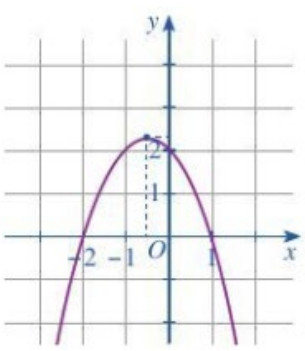
Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

***Ví dụ 3.*** Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho ở mỗi a), b), c).

a) 


b) 


c) 

***Giải***

a) Từ đồ thị Hình a) ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x=1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

b) Từ đồ thị Hình b ta có tam thức bậc hai $f(x)$ vô nghiệm. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | |

c) Từ đồ thị Hình c ta có tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1=-2, x_2=1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

***Ví dụ 4.*** Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận $y$ (đồng) theo công thức sau: $y=-200x^2+92000x-8400000$, trong đó $x$ là số sản phẩm được bán ra. Dựa theo số sản phẩm bán ra, cho biết doanh nghiệp có lãi khi nào, bị lỗ khi nào.

***Giải***

Xét tam thức bậc hai $f(x)=-200x^2+92000x-8400000$.

Nhận thấy $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1=\dfrac{-460+\sqrt{43600}}{-2}\approx 125,6; x_2=\dfrac{-460-\sqrt{43600}}{-2}\approx 334,4$ và hệ số $a=-200<0$. Ta có bảng xét dấu sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Vì $x$ là số nguyên dương nên:

+) Doanh nghiệp có lãi khi và chỉ khi $f(x)>0$, tức là $126\le x\le 334$.

+) Doanh nghiệp bị lỗ khi và chỉ khi $f(x)<0$, tức là $x\le 125$ hoặc $x\ge 335$.

Vậy doanh nghiệp có lãi khi bán từ 126 đến 334 sản phẩm, doanh nghiệp bị lỗ khi bán tối đa 125 sản phẩm hoặc bán tối thiểu 335 sản phẩm.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng. Dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp: Dựa vào định lú về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

-Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau:

1) Phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

-Đối với phân thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức) ta làm như sau

1) Phân tích đa thức $P(x), Q(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$ và $Q(x)$. Từ đó suy ra dấu của $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

**Câu 1.** Xét dấu của các tam thức sau

a) $3x^2-2x+1$.

b) $-x^2+4x+5$.

**Lời giải.**

a) Ta có $\Delta' = -2 < 0$ và $a = 3 > 0$. Suy ra $3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Ta có $-x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 5 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2 + 4x + 5$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Suy ra $-x^2 + 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;5)$ và $-x^2 + 4x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;1) \cup (5;+\infty)$.

**Câu 2.** Xét dấu của các biểu thức sau

a) $x^3 - 5x + 2$.

b) $x - \dfrac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$.

**Lời giải.**

a) Ta có $x^3 - 5x + 2 = (x-2)(x^2 + 2x - 1)$.

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$.

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-1-\sqrt{3}$ | | $-1+\sqrt{3}$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | $-$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^2+2x-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ |
| $x^3-5x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Suy ra $x^3 - 5x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}) \cup (2;+\infty)$;

$x^3 - 5x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}; 2)$.

b) Ta có $x - \dfrac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4} = \dfrac{-x^3 + 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + 3x + 4} = \dfrac{(x-1)(-x^2 + x + 6)}{-x^2 + 3x + 4}$.

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3 \end{array}\right.$; $-x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $\|$ | $+$ | |
| $-x^2+x+6$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $-$ | |
| $-x^2+3x+4$ | | $-$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x - \dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |

Suy ra $x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(3;4)$.

$x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}>0 \Leftrightarrow x\in(-2;-1)\cup(1;3)\cup(4;+\infty)$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng. Dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp: Dựa vào định lú về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

-Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau:

1) Phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

-Đối với phân thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x),Q(x)$ là các đa thức) ta làm như sau

1) Phân tích đa thức $P(x),Q(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$ và $Q(x)$. Từ đó suy ra dấu của $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

**Câu 1.** Cho tam thức $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$, $\Delta=b^2-4ac$. Ta có $f(x)\le 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

**A.** $\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a\le 0\\ \Delta<0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a<0\\ \Delta\ge 0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai ta có: $f(x)\le 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}$

**Câu 2.** Cho tam thức bậc hai $f(x)=-2x^2+8x-8$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** $f(x)<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. **B.** $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**C.** $f(x)\le 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. **D.** $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $f(x)=-2(x^2-4x+4)=-2(x-2)^2\le 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy: $f(x)\le 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**Câu 3.** Tam thức nào dưới đây luôn dương với mọi giá trị của $x$?

**A.** $x^2-10x+2$. **B.** $x^2-2x-10$. **C.** $x^2-2x+10$. **D.** $-x^2+2x+10$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Tam thức luôn dương với mọi giá trị của $x$ phải có $\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$ nên Chọn **C.**

**Câu 4.** Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

**A.** $f(x)=3x^2+2x-5$ là tam thức bậc hai. **B.** $f(x)=2x-4$ là tam thức bậc hai.

**C.** $f(x)=3x^3+2x-1$ là tam thức bậc hai. **D.** $f(x)=x^4-x^2+1$ là tam thức bậc hai.

**Lời giải**

**Chọn A.**

* Theo định nghĩa tam thức bậc hai thì $f(x)=3x^2+2x-5$ là tam thức bậc hai.

**Câu 5.** Cho $f(x)=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ và $\Delta=b^2-4ac$. Cho biết dấu của $\Delta$ khi $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

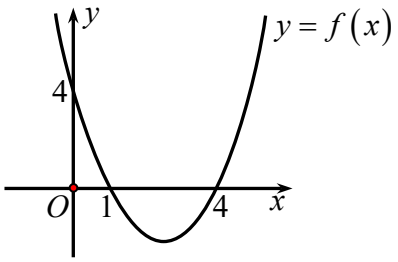
**A.** $\Delta<0$. **B.** $\Delta=0$. **C.** $\Delta>0$. **D.** $\Delta\geq 0$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

* Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi $\Delta<0$.

**Câu 6.** Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $\Delta=b^2-4ac$, tìm dấu của $a$ và $\Delta$.




**A.** $a>0$, $\Delta>0$. **B.** $a<0$, $\Delta>0$. **C.** $a>0$, $\Delta=0$. **D.** $a<0$, , $\Delta=0$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

* Đồ thị hàm số là một Parabol quay lên nên $a>0$ và đồ thị hàm số cắt trục $Ox$ tại hai điểm phân biệt nên $\Delta>0$.

**Câu 7.** Cho tam thức $f(x)=x^2-8x+16$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm. **B.** $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**C.** $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. **D.** $f(x)<0$ khi $x<4$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $f(x)=x^2-8x+16=(x-4)^2$. Suy ra $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**Câu 8.** Cho tam thức bậc hai $f(x)=x^2+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;+\infty)$. **B.** $f(x)=0\Leftrightarrow x=-1$.

**C.** $f(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;1)$. **D.** $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(0;1)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $f(x)=x^2+1\geq 1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

**Câu 9.** Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Nếu $\Delta>0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**B.** Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ luôn trái dấu với hệ số $a$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**C.** Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.

**D.** Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $b$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

# Bài 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Bất phương trình bậc hai một ẩn

- Bất phương trình bậc hai ẩn $x$ là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$ax^2+bx+c<0; ax^2+bx+c\le 0; ax^2+bx+c>0; ax^2+bx+c\ge 0$, trong đó $a,b,c$ là các số thực đã cho, $a\neq 0$.

- Đối với bất phương trình bậc hai có dạng $ax^2+bx+c<0$, mỗi số $x_0\in\mathbb{R}$ sao cho $ax_0^2+bx_0+c<0$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình đó.

Tập hợp các nghiệm $x_0$ như thế còn được gọi là tập nghiệm của bất phương trình bậc hai đã cho.

Nghiệm và tập nghiệm của các dạng bất phương trình bậc hai ẩn $x$ còn lại được định nghĩa tương tự.

***Ví dụ 1.*** Cho bất phương trình bậc hai một ẩn $x^2-4x+3<0$ (1). Trong các giá trị sau đây của $x$, giá trị nào là nghiệm của bất phương trình (1)?

a) $x=2$

b) $x=0$;

c) $x=3$.

***Giải***

a) Với $x=2$, ta có: $2^2-4.2+3=-1<0$. Vậy $x=2$ là nghiệm của bất phương trình (1).

b) Với $x=0$, ta có: $0^2-4.0+3=3>0$. Vậy $x=0$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

c) Với $x=3$, ta có: $3^2-4\cdot 3+3=0$. Vậy $x=3$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

*Chú ý:* Giải bất phương trình bậc hai ẩn $x$ là đi tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

### II. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

#### 1. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách xét dấu của tam thức bậc hai

*Nhận xét:* Để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x)>0\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$, ta chuyển việc giải bất phương trình đó về việc tìm tập hợp những giá trị của $x$ sao cho $f(x)$ mang dấu "+". Cụ thể, ta làm như sau:

*Bước 1* . Xác định dấu của hệ số $a$ và tìm nghiệm của $f(x)$ (nếu có).

*Bước 2.* Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập hợp những giá trị của $x$ sao cho $f(x)$ mang dấu "+".

*Chú ý:* Các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x)<0, f(x)\ge 0, f(x)\le 0$ được giải bằng cách tương tự.

***Ví dụ 2***. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2-5x+2>0$

b) $-x^2-2x+8>0$

***Giải***

a) Tam thức bậc hai $2x^2-5x+2$ có hai nghiệm $x_1=\frac{1}{2}, x_2=2$ và có hệ số $a=2>0$.

Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của $x$ sao cho tam thức $2x^2-5x+2$ mang dấu "+" là $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $2x^2-5x+2>0$ là $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

b) Tam thức bậc hai $-x^2-2x+8$ có hai nghiệm $x_1=-4, x_2=2$ và có hệ số $a=-1<0$. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của $x$ sao cho tam thức $-x^2-2x+8$ mang dấu "+" là $(-4;2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2-2x+8>0$ là $(-4;2)$.

**2. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách sử dụng đồ thị**

*Nhận xét*

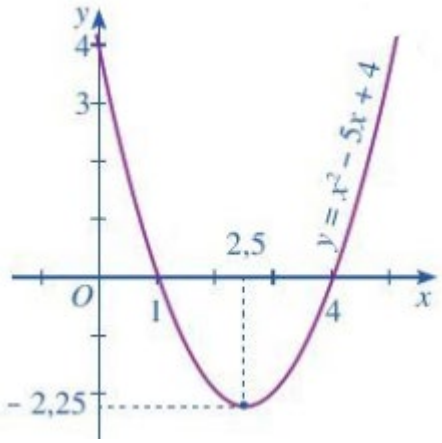
- *Giải bất phương trình bậc hai* $ax^2+bx+c>0$ là tìm tập hợp những giá trị của $x$ ứng với phần parabol $y=ax^2+bx+c$ nằm phía trên trục hoành.

- Tương tự, giải bất phương trình bậc hai $ax^2+bx+c<0$ là tìm tập hợp những giá trị của $x$ ứng với phần parabol $y=ax^2+bx+c$ nằm phía dưới trục hoành.

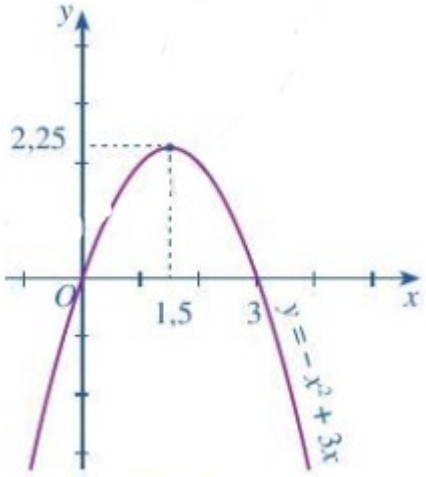
Như vậy, để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x)>0\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$ bằng cách sử dụng đồ thị, ta có thể làm như sau: Dựa vào parabol $y=ax^2+bx+c$, ta tìm tập hợp những giá trị của $x$ ứng với phần parabol đó nằm phía trên trục hoành. Đối với các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x)<0, f(x)\ge 0, f(x)\le 0$, ta cũng làm tương tự.

***Ví dụ 3.*** Quan sát đồ thị ở Hình và giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $x^2-5x+4<0$.




b) $-x^2+3x>0$.




***Giải***

a) Quan sát đồ thị ở a, ta thấy: $x^2-5x+4<0$ biểu diễn phần parabol $y=x^2-5x+4$ nằm phía dưới trục hoành, tương ứng với $1<x<4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2-5x+4<0$ là khoảng $(1;4)$.

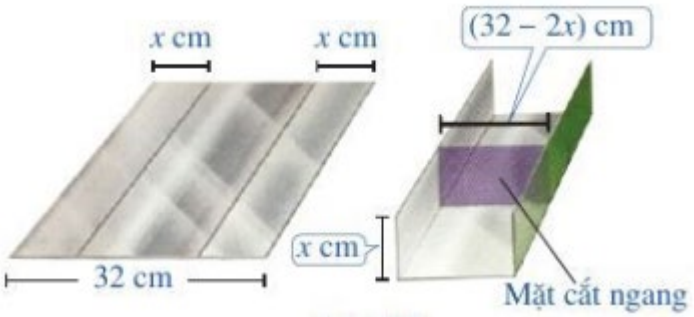
b) Quan sát đồ thị ở b , ta thấy: $-x^2+3x>0$ biểu diễn phần parabol $y=-x^2+3x$ nằm phía trên trục hoành, tương ứng với $0<x<3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+3x>0$ là khoảng $(0;3)$.

**III. Ứng dụng của bất phương trình bậc hai một ẩn**

Bất phương trình bậc hai một ẩn có nhiều ứng dụng, chẳng hạn: giải một số hệ bất phương trình; ứng dụng vào tính toán lợi nhuận trong kinh doanh; tính toán điểm rơi trong pháo binh; ...

Chúng ta sẽ làm quen với những ứng dụng đó qua một số ví dụ sau đây.

***Ví dụ 4.*** Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật ( như hình) với bề ngang $32cm$ thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông. Để đảm bảo kĩ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng $120cm^2$.




Hỏi rãnh nước phải có độ cao ít nhất là bao nhiêu xăng-ti-mét?

***Giải***

Khi chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như hình thì kích thước của mặt cắt ngang là $x(cm)$ và $32-2x(cm)$. Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $(32-2x)x\left(cm^2\right)$

Ta thấy: Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước lớn hơn $120cm^2$ khi và chỉ khi $(32-2x)x \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2+32x-120 \geq 0.$

Tam thức $-2x^2+32x-120$ có hai nghiệm $x_1=6, x_2=10$ và hệ số $a=-2<0$. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của $x$ sao cho tam thức $-2x^2+32x-120$ mang dấu "+" là $(6;10)$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-2x^2+32x-120 \geq 0$ là $[6;10]$.

Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là $6cm$.

***Ví dụ 5.*** Tìm giao các tập nghiệm của hai bất phương trình sau:

$x^2+2x-8<0(3)$ và $x^2-9<0$ (4)

***Giải***

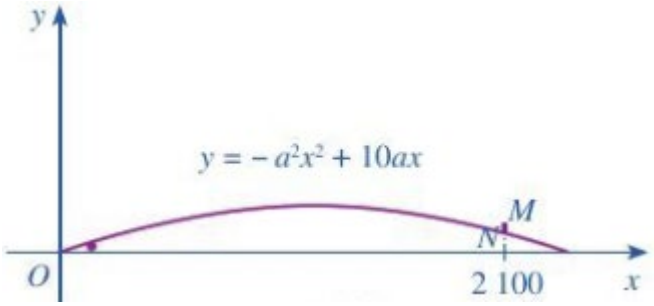
Ta có: (3) $\Leftrightarrow -4<x<2$. Tập nghiệm của bất phương trình (3) là $S_3=(-4;2)$;

(4) $\Leftrightarrow -3<x<3$. Tập nghiệm của bất phương trình (4) là $S_4=(-3;3)$.

Giao các tập nghiệm của hai bất phương trình trên là:

$S=S_3 \cap S_4=(-4;2)\cap(-3;3)=(-3;2)$

***Ví dụ 6.*** Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0;0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng $MN$ với $M(2100;25)$ và $N(2100;15)$




Xạ thủ cần xác định parabol $y=-a^2x^2+10ax$ $(a>0)$ mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của $a$ để xạ thủ đạt được mục đích trên.

***Giải***

Tại vị trí $x=2100$, độ cao của viên đạn là:

$y=-a^2.2100^2+10a\cdot 2100=-4410000a^2+21000a.$

Viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi $a$ thoả mãn các bất phương trình sau:

$2100 \leq \frac{10}{a}(5); -4410000a^2+21000a \leq 25$ (6); - $4410000a^2+21000a \geq 15$ (7).

- (5) $\Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq 210 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{210}$. Vì $a>0$ nên $a \in \left(0;\frac{1}{210}\right]$.

- (6) $\Leftrightarrow 4410000a^2-21000a+25 \geq 0 \Leftrightarrow (2100a-5)^2 \geq 0$. Bất phương trình này đúng $\forall a>0$.

- $(7) \Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 15 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} \le a \le \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$

$\Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right]$

Do $\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} > 0$ và $\frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} < \frac{1}{210}$ nên

$\left(0; \frac{1}{210}\right] \cap \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right] = \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right]$

Vì thế, viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi

$a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right]$. Vậy giá trị lớn nhất của $a$ là $\frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$.

**Tìm hiểu thêm**

Bảng dưới đây tổng kết các trường hợp có thể xảy ra khi giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0 (*) (a \ne 0)$.

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

| Dấu của a<br>Dấu của $\Delta$ | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$<br>$f(x)$ có hai nghiệm<br>$x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ | $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1 \\ x > x_2 \end{array}\right.$ | $(*) \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$ |
| $\Delta = 0$<br>$f(x)$ có nghiệm kép<br>$x = -\frac{b}{2a}$ | $(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ | $(*)$ vô nghiệm |
| $\Delta < 0$ $f(x)$ vô nghiệm | $(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ | $(*)$ vô nghiệm |

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Bất phương trình bậc hai

1. Định nghĩa. Bất phương trình bậc hai (ẩn $x$) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \ge 0$, $f(x) \le 0$.

Trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

2. Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

3. Ứng dụng. Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng.

**Câu 1.** Giải các bất phương trình sau

a) $-3x^2 + 2x + 1 < 0$ .b) $x^2 + x - 12 < 0$.

**Câu 2.** Giải các bất phương trình sau

a) $(1 - 2x)(x^2 - x - 1) > 0$.

b) $x^4 - 5x^2 + 2x + 3 \le 0$.

**Câu 3.** Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{x^2 - 1}{(x^2 - 3)(-3x^2 + 2x + 8)} > 0$.

b) $x^2 + 10 \le \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 8}$.

**Câu 4.** Giải các bất phương trình sau

a) $\dfrac{\left|x^2-x\right|-2}{x^2-x-1}\ge 0$.  b) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0$.

**Dạng 2. Bài toán tham số liên quan đến tam thức bậc hai**

**Câu 1.** Tìm $m$ để các phương trình sau có nghiệm.

a) $x^2-mx+m+3=0$.  b) $(1+m)x^2-2mx+2m=0$.

**Câu 2.** Giải và biện luận bất phương trình $(m+1)x^2-2(2m-1)x-4m+2<0$.

**Câu 3.** Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì pt

a) $mx^2-(3m+2)x+1=0$ luôn có nghiệm

b) $(m^2+5)x^2-(\sqrt{3}m-2)x+1=0$ luôn vô nghiệm

**Câu 4.** Tìm m để biểu thức sau luôn dương

a) $(m^2+2)x^2-2(m+1)x+1$.  b) $(m+2)x^2+2(m+2)x+m+3$

**Câu 5.** Tìm m để biểu thức sau luôn âm

a) $f(x)=mx^2-x-1$.  b) $g(x)=(m-4)x^2+(2m-8)x+m-5$

**Câu 6.** Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn dương

a) $f(x)=\dfrac{-x^2+4(m+1)x+1-4m^2}{-4x^2+5x-2}$  b) $f(x)=\sqrt{x^2-x+m}-1$

**Câu 7.** Tìm các giá trị của m để các bpt sau được nghiệm đúng với mọi x.

a) $(2m^2-3m-2)x^2+2(m-2)x-1\leqslant 0$.  b ) $(m+4)x^2<2(mx-m+3)$

**Câu 8.** Chứng minh hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$ với mọi m

a) $y=\dfrac{mx}{(2m^2+1)x^2-4mx+2}$  b) $y=\sqrt{\dfrac{2x^2-2(m+1)x+m^2+1}{n^2}}$

**Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $(m^2+1)x+m(x+3)+1>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;2]$.

**Câu 10.** Tìm các giá trị của tham số m để bpt $(m-1)x^2-2x+m+1>0$ nghiệm đúng với mọi $x>0$.

**Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2]$

**Câu 12.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt

$x^2+(1-3m)x+3m-2>0$ nghiệm đúng với mọi x mà $|x|\ge 2$.

**Câu 13.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2+(3-m)x-2m+3>0$ nghiệm đúng với mọi $x\le 4$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Dạng 1. Bất phương trình bậc hai**

1. Định nghĩa. Bất phương trình bậc hai (ẩn $x$) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x)>0$, $f(x)<0$, $f(x)\ge 0$, $f(x)\le 0$.

Trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

2. Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

3. Ứng dụng. Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng.

**Câu 1.** Cho tam thức bậc hai $f(x)=-x^2-4x+5$. Tìm tất cả giá trị của $x$ để $f(x)\ge 0$.

**A.** $x\in(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$.  **B.** $x\in[-1;5]$.

**C.** $x\in[-5;1]$.  **D.** $x\in(-5;1)$.

**Câu 2.** Gọi $S$ là tập nghiệm của bất phương trình $x^2-8x+7\ge 0$. Trong các tập hợp sau, tập nào **không** là tập con của $S$?

**A.** $(-\infty;0]$.  **B.** $[6;+\infty)$.  **C.** $[8;+\infty)$.  **D.** $(-\infty;-1]$.

**Câu 3.** Tập nghiệm của bất phương trình $2x^2-14x+20<0$ là

**A.** $S=(-\infty;2]\cup[5;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$.

**C.** $S=(2;5)$. **D.** $S=[2;5]$.

**Câu 4.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-25<0$ là

**A.** $S=(-5;5)$. **B.** $x>\pm 5$.

**C.** $-5<x<5$. **D.** $S=(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$.

**Câu 5.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-3x+2<0$ là

**A.** $(1;2)$. **B.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Câu 6.** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $x^2-x-6\le 0$.

**A.** $S=(-\infty;-3)\cup(2:+\infty)$. **B.** $[-2;3]$.

**C.** $[-3;2]$. **D.** $(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$.

**Câu 7.** Bất phương trình $-x^2+2x+3>0$ có tập nghiệm là

**A.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $(-3;1)$.

**Câu 8.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{-x^2+2x+3}$ là:

**A.** $(1;3)$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

**C.** $[-1;3]$. **D.** $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

**Câu 9.** Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+x+12\ge 0$ là

**A.** $(-\infty;-3]\cup[4;+\infty)$. **B.** $\varnothing$.

**C.** $(-\infty;-4]\cup[3;+\infty)$. **D.** $[-3;4]$.

**Câu 10.** Hàm số $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-3}+x-2}$ có tập xác định là

**A.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{7}{4}\right\}$.

**C.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{7}{4}\right\}$. **D.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\dfrac{7}{4}\right)$.

**Câu 11.** Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2x^2-5x+2}$.

**A.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

**Câu 12.** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $x^2-4>0$.

**A.** $S=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(-2;2)$.

**C.** $S=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

**Câu 13.** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $x^2-4x+4>0$.

**A.** $S=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $S=\mathbb{R}$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

**Câu 14.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2x^2-3x-15\le 0$ là

**A.** $6$. **B.** $5$. **C.** $8$. **D.** $7$.

**Câu 15.** Tập nghiệm của bất phương trình: $x^2+9>6x$ là

**A.** $(3;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-\infty;3)$.

**Câu 16.** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $-2x^2-3x+2>0$?

**A.** $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-2)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

**C.** $S=\left(-2;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $S=\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

**Câu 17.** Bất phương trình $(x-1)\left(x^2-7x+6\right)\ge 0$ có tập nghiệm $S$ là:

**A.** $S=(-\infty;1]\cup[6;+\infty)$. **B.** $S=[6;+\infty)$.

**C.** $(6;+\infty)$. **D.** $S=[6;+\infty)\cup\{1\}$.

**Câu 18.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^4-5x^2+4<0$ là

**A.** $(1;4)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-2;-1)\cup(1;2)$.

**Câu 19.** Giải bất phương trình $x(x+5)\le 2\left(x^2+2\right)$.

**A.** $x\le 1$. **B.** $1\le x\le 4$. **C.** $x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. **D.** $x\ge 4$.

**Câu 20.** Biểu thức $\left(3x^2-10x+3\right)(4x-5)$ âm khi và chỉ khi

**A.** $x\in\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$. **B.** $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{4};3\right)$.

**C.** $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right)\cup(3;+\infty)$. **D.** $x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$.

**Câu 21.** Biểu thức $\left(4-x^2\right)\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+5x+9\right)$ âm khi

**A.** $x\in(1;2)$. **B.** $x\in(-3;-2)\cup(1;2)$.

**C.** $x\ge 4$. **D.** $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;1)\cup(2;+\infty)$.

**Câu 22.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^3+3x^2-6x-8\ge 0$ là

**A.** $x\in[-4;-1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $x\in(-4;-1)\cup(2;+\infty)$.

**C.** $x\in[-1;+\infty)$. **D.** $x\in(-\infty;-4]\cup[-1;2]$.

**Câu 23.** Cho biểu thức $f(x)=\frac{4x-12}{x^2-4x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của $x$ thỏa mãn $f(x)$ không dương là

**A.** $x\in(0;3]\cup(4;+\infty)$. **B.** $x\in(-\infty;0]\cup[3;4)$.

**C.** $x\in(-\infty;0)\cup[3;4)$. **D.** $x\in(-\infty;0)\cup(3;4)$.

**Câu 24.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2-3x-4}{x-1}\le 0$.

**A.** $T=(-\infty;-1]\cup[1;4]$. **B.** $T=(-\infty;-1]\cup(1;4]$.

**C.** $T=(-\infty;-1)\cup(1;4]$. **D.** $T=(-\infty;-1]\cup(1;4)$.

**Câu 25.** Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2-7x+12}{x^2-4}\le 0$ là.

**A.** $S=[-2;2]\cup[3;4]$. **B.** $S=(-2;2]\cup[3;4]$.

**C.** $S=(-2;2)\cup[3;4]$. **D.** $S=[-2;2]\cup(3;4)$.

**Câu 26.** Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x-2}{x+1}\ge\frac{x+1}{x-2}$ là.

**A.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right]\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{2};2\right)$.

**C.** $(-\infty;-1)\cup\left[\frac{1}{2};2\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$.

**Câu 27.** Gọi $S$ là tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+x+3}{x^2-4}\ge 1$. Khi đó $S\cap(-2;2)$ là tập nào sau đây?

**A.** $(-2;-1)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $\varnothing$. **D.** $(-2;-1]$.

**Câu 28.** Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{2x^2-3x+4}{x^2+3}>2$ là

**A.** $\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{23}}{4};\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{23}}{4}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{23}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{23}}{4};+\infty\right)$.

**C.** $\left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)$.

**Câu 29.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $x$ thỏa mãn $\dfrac{x+3}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{2x}{2x-x^2}$?

**A.** 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

**Câu 30.** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\dfrac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10}\le -1$ là

**A.** Hai khoảng. **B.** Một khoảng và một đoạn.

**C.** Hai khoảng và một đoạn. **D.** Ba khoảng.

**Dạng 2. Bài toán tham số liên quan đến tam thức bậc hai**

**Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2+mx+4=0$ có nghiệm

**A.** $-4\le m\le 4$. **B.** $m\le -4$ *hay* $m\ge 4$.

**C.** $m\le -2$ *hay* $m\ge 2$. **D.** $-2\le m\le 2$.

**Câu 2.** Tìm $m$ để phương trình $-x^2+2(m-1)x+m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt

**A.** $(-1;2)$ **B.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ **C.** $[-1;2]$ **D.** $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$

**Câu 3.** Giá trị nào của $m$ thì phương trình $(m-3)x^2+(m+3)x-(m+1)=0$ $(1)$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **B.** $m\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{5}\right)\cup(1;+\infty)\setminus\{3\}$.

**C.** $m\in\left(-\dfrac{3}{5};1\right)$. **D.** $m\in\left(-\dfrac{3}{5};+\infty\right)$.

**Câu 4.** Tìm các giá trị của tham số $m$ để phương trình $x^2-mx+4m=0$ vô nghiệm.

**A.** $0<m<16$. **B.** $-4<m<4$. **C.** $0<m<4$. **D.** $0\le m\le 16$.

**Câu 5.** Phương trình $x^2-(m+1)x+1=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

**A.** $m>1$. **B.** $-3<m<1$.

**C.** $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$. **D.** $-3\le m\le 1$.

**Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho phương trình sau vô nghiệm $m=-\dfrac{1}{2}$

**A.** $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m>3$. **C.** $m=2$ **D.** $m>-\dfrac{3}{5}$.

**Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình

$(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6=0$ vô nghiệm?

**A.** $m<0$. **B.** $m>2$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m>3\\m<1\end{array}\right.$. **D.** $\left\{\begin{array}{l}m\ne 2\\1<m<3\end{array}\right.$.

**Câu 8.** Phương trình $mx^2-2mx+4=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

**A.** $0<m<4$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\m>4\end{array}\right.$. **C.** $0\le m\le 4$. **D.** $0\le m<4$.

**Câu 9.** Phương trình $(m^2-4)x^2+2(m-2)x+3=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

**A.** $m \ge 0$. **B.** $m = \pm 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m < -4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le -4 \end{array}\right.$.

**Câu 10.** Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của $b$ thì tam thức $f(x)$ có nghiệm?

**A.** $b \in \left[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right]$. **B.** $b \in \left(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$.

**C.** $b \in \left(-\infty; -2\sqrt{3}\right] \cup \left[2\sqrt{3}; +\infty\right)$. **D.** $b \in \left(-\infty; -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}; +\infty\right)$.

**Câu 11.** Phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$ ($m$ là tham số) có nghiệm khi

**A.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -5 \end{array}\right.$. **B.** $-5 \le m \le -1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > -1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \le -5 \\ m \ge -1 \end{array}\right.$.

**Câu 12.** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình

$$2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0 \text{ có nghiệm?}$$

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 13.** Tìm các giá trị của $m$ để phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ có nghiệm.

**A.** $m \ne 5$. **B.** $-\dfrac{10}{3} \le m \le 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \le -\dfrac{10}{3} \\ m \ge 1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \le -\dfrac{10}{3} \\ 1 \le m \ne 5 \end{array}\right.$.

**Câu 14.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số $m$ sao cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$ có nghiệm.

**A.** $m \in \varnothing$. **B.** $m \in \mathbb{R}$. **C.** $-1 < m < 3$. **D.** $-2 < m < 2$.

**Câu 15.** Các giá trị $m$ để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ đổi dấu 2 lần là

**A.** $m \le 0$ hoặc $m \ge 28$. **B.** $m < 0$ hoặc $m > 28$.

**C.** $0 < m < 28$. **D.** $m > 0$.

**Câu 16.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho phương trình $x^2 + (m+1)x + m - \dfrac{1}{3} = 0$ có nghiệm?

**A.** $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m > 1$. **C.** $-\dfrac{3}{4} < m < 1$. **D.** $m > -\dfrac{3}{4}$.

**Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho phương trình

$$(m-1)x^2 + (3m-2)x + 3 - 2m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt?}$$

**A.** $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m \ne 1$ **C.** $-1 < m < 6$. **D.** $-1 < m < 2$.

**Câu 18.** Phương trình $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

**A.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $m \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

**C.** $m \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \setminus \{1\}$. **D.** $m \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$.

**Câu 19.** Giá trị nào của $m = 0$ thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** $m \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$. **B.** $m \in \left(-\dfrac{3}{5}; 1\right)$.

**C.** $m \in \left(-\dfrac{3}{5}; +\infty\right)$. **D.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

**Câu 20.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $mx^2 + 2x + m^2 + 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

**A.** $\left\{\begin{array}{l} m < 0 \\ m \ne -1 \end{array}\right.$. **B.** $m < 0$. **C.** $m \ne -1$. **D.** $\left\{\begin{array}{l} m \ne 0 \\ m \ne -1 \end{array}\right.$.

**Câu 21.** Xác định $m$ để phương trình $mx^3 - x^2 + 2x - 8m = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn $1$.

**A.** $\frac{1}{7} < m < \frac{1}{6}$. **B.** $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{6}$. **C.** $m > \frac{1}{7}$. **D.** $m > 0$.

**Câu 22.** Với giá trị nào của $m$ thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1$?

**A.** $1 < m < 3$. **B.** $1 < m < 2$. **C.** $m > 2$. **D.** $m > 3$.

**Câu 23.** Cho phương trình $(m-5)x^2 + 2(m-1)x + m = 0$ $(1)$. Với giá trị nào của $m$ thì $(1)$ có $2$ nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa $x_1 < 2 < x_2$?

**A.** $m \geq 5$. **B.** $m < \frac{8}{3}$. **C.** $\frac{8}{3} < m < 5$. **D.** $\frac{8}{3} \leq m \leq 5$.

**Câu 24.** Tìm giá trị của tham số $m$ để phương trình $x^2 - (m-2)x + m^2 - 4m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

**A.** $0 < m < 4$. **B.** $m < 0$ hoặc $m > 4$. **C.** $m > 2$. **D.** $m < 2$.

**Câu 25.** Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m = 0$ có một nghiệm lớn hơn $1$ và một nghiệm nhỏ hơn $1$?

**A.** $0 < m < 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \in \varnothing$. **D.** $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

**Câu 26.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 \leq 16$.

**A.** Không có giá trị của $m$. **B.** $m \geq 2$.

**C.** $m \leq -1$. **D.** $m \leq -1$ hoặc $m = 2$.

**Câu 27.** Xác định $m$ để phương trình $(x-1)\left[x^2 + 2(m+3)x + 4m + 12\right] = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn $-1$.

**A.** $-\frac{7}{2} < m < -3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$. **B.** $m < -\frac{7}{2}$.

**C.** $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$. **D.** $-\frac{7}{2} < m < 3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$.

**Câu 28.** Tìm $m$ để phương trình $x^2 - mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

**A.** $m > 6$. **B.** $m < 6$. **C.** $6 > m > 0$. **D.** $m > 0$.

**Câu 29.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

**A.** $2 < m < 6$. **B.** $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$.

**C.** $m < 0$ hoặc $-3 < m < 6$. **D.** $-3 < m < 6$.

**Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

**A.** $m < 6$. **B.** $\frac{5}{9} < m < 1$ hoặc $m > 6$.

**C.** $m > 1$. **D.** $1 < m < 6$.

**Câu 31.** Phương trình $x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 2 = 0$ có hai nghiệm không âm khi

**A.** $m \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **B.** $m \in \left[\frac{5+\sqrt{41}}{4}; +\infty\right)$.

**C.** $m \in \left[\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{41}}{4}\right]$. **D.** $m \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{41}}{4}\right]$.

**Câu 32.** Phương trình $2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi

**A.** $m<-1$ **hoặc** $m>\dfrac{5}{2}$. **B.** $-1<m<\dfrac{5}{2}$.

**C.** $m\le -1$ **hoặc** $m\ge \dfrac{5}{2}$. **D.** $-1\le m\le \dfrac{5}{2}$.

**Câu 33.** Phương trình $\left(m^2-3m+2\right)x^2-2m^2x-5=0$ có hai nghiệm trái dấu khi

**A.** $m\in(1;2)$. **B.** $m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

**C.** $\begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{cases}$. **D.** $m\in\varnothing$.

**Câu 34.** Giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-2m=0$ có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có trị tuyệt đối lớn hơn là

**A.** $0<m<2$. **B.** $0<m<1$. **C.** $1<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<0 \end{array}\right.$.

**Câu 35.** Tìm giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $(m+1)x^2-2mx+m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ khác $0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}<3$ ?

**A.** $m<2 \vee m>6$. **B.** $-2<m\neq -1<2 \vee m>6$.

**C.** $2<m<6$. **D.** $-2<m<6$.

**Câu 36.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $x^2-(m-1)x+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ khác $0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}>1$.

**A.** $m\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(7;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\dfrac{11}{10}\right)$.

**C.** $m\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)$. **D.** $m\in(7;+\infty)$.

**Câu 37.** Cho hàm số $f(x)=x^2+2x+m$. Với giá trị nào của tham số $m$ thì $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

**A.** $m\ge 1$. **B.** $m>1$. **C.** $m>0$. **D.** $m<2$.

**Câu 38.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $x^2-(m+2)x+8m+1\le 0$ vô nghiệm.

**A.** $m\in[0;28]$. **B.** $m\in(-\infty;0)\cup(28;+\infty)$.

**C.** $m\in(-\infty;0]\cup[28;+\infty)$. **D.** $m\in(0;28)$.

**Câu 39.** Tam thức $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-3m+4$ không âm với mọi giá trị của $x$ khi

**A.** $m<3$. **B.** $m\ge 3$. **C.** $m\le -3$. **D.** $m\le 3$.

**Câu 40.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để với mọi $x\in\mathbb{R}$ biểu thức $f(x)=x^2+(m+2)x+8m+1$ luôn nhận giá trị dương.

**A.** $27$. **B.** $28$. **C.** Vô số. **D.** $26$.

**Câu 41.** Tìm các giá trị của m để biểu thức $f(x)=x^2+(m+1)x+2m+7>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

**A.** $m\in[2;6]$. **B.** $m\in(-3;9)$. **C.** $m\in(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$. **D.** $m\in(-9;3)$.

**Câu 42.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình: $(m+1)x^2-2(m+1)x+4\ge 0(1)$ có tập nghiệm $S=R$ ?

**A.** $m>-1$. **B.** $-1\le m\le 3$. **C.** $-1<m\le 3$. **D.** $-1<m<3$.

**Câu 43.** Bất phương trình $(m+1)x^2-2mx-(m-3)<0$ vô nghiệm. Điều kiện cần và đủ của tham số $m$ là

**A.** $\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\le m\le\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$. **B.** $1\le m\le\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$.

**C.** $m\neq 1$. **D.** $m\ge -1$.

**Câu 44.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để tam thức bậc hai $f(x)$ sau đây thỏa mãn $f(x)=-x^2+2x+m-2018<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

**A.** $m>2019$. **B.** $m<2019$. **C.** $m>2017$. **D.** $m<2017$.

**Câu 45.** Tìm $m$ để $f(x)=mx^2-2(m-1)x+4m$ luôn luôn âm

**A.** $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

**Câu 46.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $\frac{-x^2+2x-5}{x^2-mx+1}\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**A.** $m\in\varnothing$. **B.** $m\in(-2;2)$.

**C.** $m\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $m\in[-2;2]$.

**Câu 47.** Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $x^2-2(m-1)x+4m+8\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m>7 \\ m<-1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 7 \\ m\le -1 \end{array}\right.$. **C.** $-1\le m\le 7$. **D.** $-1<m<7$.

**Câu 48.** Bất phương trình $x^2+4x+m<0$ vô nghiệm khi

**A.** $m<4$. **B.** $m>4$. **C.** $m\le 4$. **D.** $m\ge 4$.

**Câu 49.** Bất phương trình $mx^2-2(m+1)x+m+7<0$ vô nghiệm khi

**A.** $m\ge\frac{1}{5}$. **B.** $m>\frac{1}{4}$. **C.** $m>\frac{1}{5}$. **D.** $m>\frac{1}{25}$.

**Câu 50.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $mx^2-2mx-1\ge 0$ vô nghiệm.

**A.** $m\in\varnothing$. **B.** $m<-1$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $-1<m\le 0$.

**Câu 51.** Gọi $S$ là tập các giá trị của $m$ để bất phương trình $x^2-2mx+5m-8\le 0$ có tập nghiệm là $[a;b]$ sao cho $b-a=4$. Tổng tất cả các phần tử của $S$ là

**A.** $-5$. **B.** $1$. **C.** $5$. **D.** $8$.

**Câu 52.** Tìm các giá trị của tham số $m$ để $x^2-2x-m\ge 0,\ \forall x>0$.

**A.** $m\le 0$. **B.** $m<-1$. **C.** $m\le -1$. **D.** $m<0$.

**Câu 53.** Tìm tập hợp các giá trị của $m$ để hàm số $y=\sqrt{(m+10)x^2-2(m-2)x+1}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

**A.** $[-1;6]$. **B.** $(-1;6)$. **C.** $(-\infty;-1)\cup(6;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

**Câu 54.** Cho bất phương trình $(m-2)x^2+2(4-3m)x+10m-11\le 0\ (1)$. Gọi $S$ là tập hợp các số nguyên dương $m$ để bất phương trình đúng với mọi $\forall x<-4$. Khi đó số phần tử của $S$ là

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Câu 55.** Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y=1-\sqrt{(m+1)x^2-2(m-1)x+2-2m}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

**Câu 56.** Để bất phương trình $5x^2-x+m\le 0$ vô nghiệm thì $m$ thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

**A.** $m\le\frac{1}{5}$. **B.** $m>\frac{1}{20}$. **C.** $m\le\frac{1}{20}$. **D.** $m>\frac{1}{5}$.

**Câu 57.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\sqrt{x^2-2mx-2m+3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $4$. **B.** $6$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Câu 58.** Tìm tất cả cách giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $(m+1)x^2+mx+m<0$ đúng với mọi $x$ thuộc $\mathbb{R}$.

**A.** $m>\frac{4}{3}$. **B.** $m>-1$. **C.** $m<-\frac{4}{3}$. **D.** $m<-1$.

**Câu 59.** Tìm tất cả giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $-x^2+2x-m-1>0$ vô nghiệm:

**A.** $m>0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\ge 0$.

**Câu 60.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $-x^2+x-m>0$ vô nghiệm.

**A.** $m\ge\frac{1}{4}$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m>\frac{1}{4}$. **D.** $m<\frac{1}{4}$.

**Câu 61.** Bất phương trình $(m-1)x^2-2(m-1)x+m+3\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi

**A.** $m\in[1;+\infty)$. **B.** $m\in(2;+\infty)$. **C.** $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-2;7)$.

**Câu 62.** Cho hàm số $f(x)=-x^2-2(m-1)x+2m-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để $f(x)>0$, $\forall x\in(0;1)$.

**A.** $m>1$. **B.** $m<\frac{1}{2}$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m\ge\frac{1}{2}$.

**Câu 63.** Hệ bất phương trình $\begin{cases}(x+5)(3-x)>0\\ x-3m+2<0\end{cases}$ vô nghiệm khi

**A.** $m\le -1$. **B.** $m\ge -1$. **C.** $m>-1$. **D.** $m<-1$.

**Câu 64.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hệ bất phương trình $\begin{cases}2x^2-5x+2<0\\ x^2-(2m+1)x+m(m+1)\le 0\end{cases}$ vô nghiệm.

**A.** $\frac{1}{2}\le m\le 2$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m\le-\frac{1}{2}\\ m\ge 2\end{array}\right.$. **C.** $\frac{1}{2}<m<1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<-\frac{1}{2}\\ m>2\end{array}\right.$.

**Câu 65.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-4x>5\\ x^2-(m-1)x-m\le 0\end{cases}$ có nghiệm.

**A.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 5\\ m<-1\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 5\\ m\le -1\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m>5\\ m\le -1\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>5\\ m<-1\end{array}\right.$.

**Câu 66.** Hệ bất phương trình $\begin{cases}(x+3)(4-x)>0\\ x<m-1\end{cases}$ vô nghiệm khi

**A.** $m\le -2$. **B.** $m>-2$. **C.** $m<-1$. **D.** $m=0$.

**Câu 67.** Hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-1\le 0\\ x-m>0\end{cases}$ có nghiệm khi

**A.** $m>1$. **B.** $m<1$. **C.** $m\ne 1$. **D.** $m=1$.

**Câu 68.** Hệ bất phương trình $\begin{cases}2x+m<0 & (1)\\ 3x^2-x-4\le 0 & (2)\end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

**A.** $m>-\frac{8}{3}$. **B.** $m<2$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m\ge-\frac{8}{3}$.

**Câu 69.** Hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-1\le 0(1)\\ x-m>0(2)\end{cases}$ có nghiệm khi:

**A.** $m>1$. **B.** $m=1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\ne 1$.

**Câu 70.** Hệ bất phương trình $\begin{cases}(x+3)(4-x)>0(1)\\ x<m-1(2)\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

**A.** $m<5$. **B.** $m>-2$. **C.** $m=5$. **D.** $m>5$.

**Câu 71.** Tìm $m$ để $-9<\dfrac{3x^2+mx-6}{x^2-x+1}<6$ nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$.

**A.** $-3<m<6$. **B.** $-3\le m\le 6$. **C.** $m<-3$. **D.** $m>6$.

**Câu 72.** Xác định $m$ để với mọi $x$ ta có $-1\le\dfrac{x^2+5x+m}{2x^2-3x+2}<7$.

**A.** $-\dfrac{5}{3}\le m<1$. **B.** $1<m\le\dfrac{5}{3}$. **C.** $m\le-\dfrac{5}{3}$. **D.** $m<1$.

**Câu 73.** Hệ bất phương trình $\begin{cases}x-1>0\\ x^2-2mx+1\le 0\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

**A.** $m>1$. **B.** $m=1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\ne 1$.

**Câu 74.** Tìm $m$ để hệ $\begin{cases}x^2-2x+1-m\le 0 & (1)\\ x^2-(2m+1)x+m^2+m\le 0 & (2)\end{cases}$ có nghiệm.

**A.** $0<m<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $0\le m\le\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

**C.** $0\le m<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $0<m\le\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

**Câu 75.** Tìm $m$ sao cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-3x-4\le 0(1)\\ (m-1)x-2\ge 0(2)\end{cases}$ có nghiệm.

**A.** $-1\le m\le\dfrac{3}{2}$. **B.** $m\ge\dfrac{3}{2}$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m\ge-1$.

**Câu 76.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số $m$ để hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2+10x+16\le 0(1)\\ mx\ge 3m+1(2)\end{cases}$ vô nghiệm.

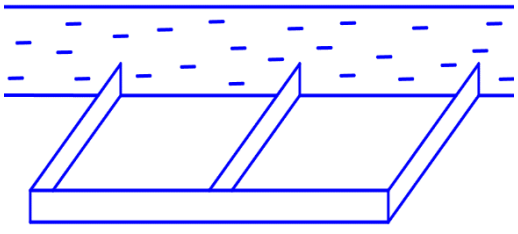
**A.** $m>-\dfrac{1}{5}$. **B.** $m>\dfrac{1}{4}$. **C.** $m>-\dfrac{1}{11}$. **D.** $m>\dfrac{1}{32}$.

**Câu 77.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-2(a+1)x+a^2+1\le 0(2)\\ x^2-6x+5\le 0(1)\end{cases}$. Để hệ bất phương trình có nghiệm, giá trị thích hợp của tham số $a$ là:

**A.** $0\le a\le 2$. **B.** $0\le a\le 4$. **C.** $2\le a\le 4$. **D.** $0\le a\le 8$.

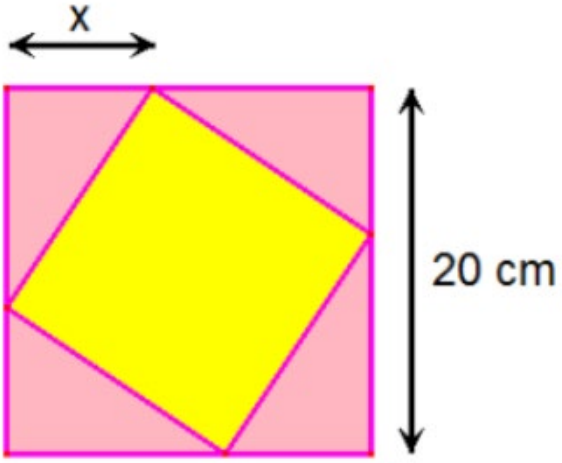
## Dạng 3. Ứng dụng của bất phương trình bậc hai một ẩn

**Câu 1.** Một người nông dân có 6 triệu đồng để làm một hàng rào chữ $E$ dọc theo một con sông (*như hình vẽ*) làm một khu đất có hai phần là hình chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 40000 đồng một mét. Tính diện tích lớn nhất của khu đất rào thu được.



**A.** 1245. **B.** 1250. **C.** 1255. **D.** 1260.

**Câu 2.** Một viên gạch hình vuông có cạnh thay đổi được đặt nội tiếp trong một hình vuông có cạnh bằng $20\,cm$, tạo thành bốn tam giác xung quanh như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của $x$ để diện tích viên gạch không vượt quá $208\,cm^2$.




**A.** $8 \le x \le 12$. **B.** $6 \le x \le 14$. **C.** $12 \le x \le 14$. **D.** $12 \le x \le 18$.

**Câu 3.** Công ty du lịch Hòa Bình dự định tổ chức một tua đi Sapa từ Hà Nội. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất ?

**A.** 1.875.000 **(đồng).** **B.** 1.375.000 **(đồng).**

**C.** 1.675.000 **(đồng).** **D.** 1.475.000 **(đồng).**

**Câu 4.** Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc**.** Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

**A.** 39.000. **B.** 43.000. **C.** 40.000. **D.** 42.000.

**Câu 5.** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có $x$ con cá ($x \in \mathbb{Z}^+$) thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $480 - 20x$ ($gam$). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau mỗi vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

**A.** 10. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 24.

# Bài 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Bất phương trình bậc hai một ẩn

- Bất phương trình bậc hai ẩn $x$ là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$ax^2+bx+c<0; ax^2+bx+c\le 0; ax^2+bx+c>0; ax^2+bx+c\ge 0$, trong đó $a,b,c$ là các số thực đã cho, $a\neq 0$.

- Đối với bất phương trình bậc hai có dạng $ax^2+bx+c<0$, mỗi số $x_0\in\mathbb{R}$ sao cho $ax_0^2+bx_0+c<0$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình đó.

Tập hợp các nghiệm $x_0$ như thế còn được gọi là tập nghiệm của bất phương trình bậc hai đã cho.

Nghiệm và tập nghiệm của các dạng bất phương trình bậc hai ẩn $x$ còn lại được định nghĩa tương tự.

***Ví dụ 1.*** Cho bất phương trình bậc hai một ẩn $x^2-4x+3<0$ (1). Trong các giá trị sau đây của $x$, giá trị nào là nghiệm của bất phương trình (1)?

a) $x=2$

b) $x=0$;

c) $x=3$.

***Giải***

a) Với $x=2$, ta có: $2^2-4.2+3=-1<0$. Vậy $x=2$ là nghiệm của bất phương trình (1).

b) Với $x=0$, ta có: $0^2-4.0+3=3>0$. Vậy $x=0$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

c) Với $x=3$, ta có: $3^2-4\cdot 3+3=0$. Vậy $x=3$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

*Chú ý:* Giải bất phương trình bậc hai ẩn $x$ là đi tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

### II. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

#### 1. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách xét dấu của tam thức bậc hai

*Nhận xét:* Để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x)>0\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$, ta chuyển việc giải bất phương trình đó về việc tìm tập hợp những giá trị của $x$ sao cho $f(x)$ mang dấu "+". Cụ thể, ta làm như sau:

*Bước 1* . Xác định dấu của hệ số $a$ và tìm nghiệm của $f(x)$ (nếu có).

*Bước 2.* Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập hợp những giá trị của $x$ sao cho $f(x)$ mang dấu "+".

*Chú ý:* Các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x)<0, f(x)\ge 0, f(x)\le 0$ được giải bằng cách tương tự.

***Ví dụ 2***. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2-5x+2>0$

b) $-x^2-2x+8>0$

***Giải***

a) Tam thức bậc hai $2x^2-5x+2$ có hai nghiệm $x_1=\frac{1}{2}, x_2=2$ và có hệ số $a=2>0$.

Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của $x$ sao cho tam thức $2x^2-5x+2$ mang dấu "+" là $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $2x^2-5x+2>0$ là $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

b) Tam thức bậc hai $-x^2-2x+8$ có hai nghiệm $x_1=-4, x_2=2$ và có hệ số $a=-1<0$. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của $x$ sao cho tam thức $-x^2-2x+8$ mang dấu "+" là $(-4;2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2-2x+8>0$ là $(-4;2)$.

**2. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách sử dụng đồ thị**

*Nhận xét*

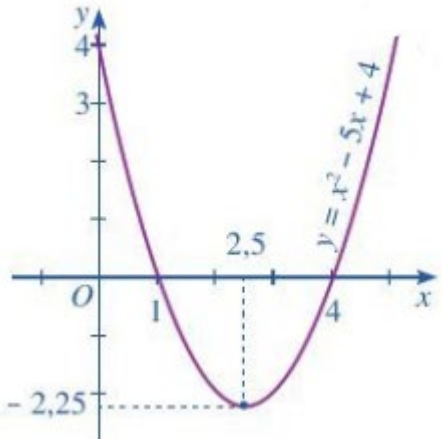
- *Giải bất phương trình bậc hai* $ax^2+bx+c>0$ là tìm tập hợp những giá trị của $x$ ứng với phần parabol $y=ax^2+bx+c$ nằm phía trên trục hoành.

- Tương tự, giải bất phương trình bậc hai $ax^2+bx+c<0$ là tìm tập hợp những giá trị của $x$ ứng với phần parabol $y=ax^2+bx+c$ nằm phía dưới trục hoành.

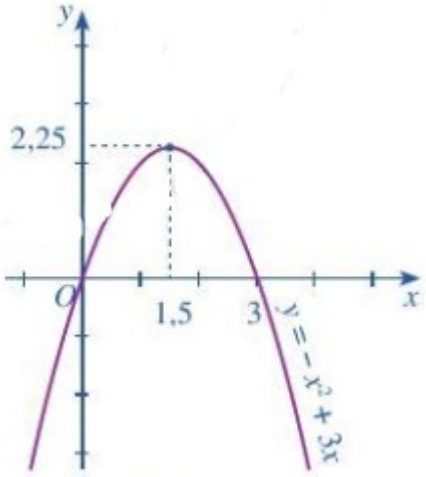
Như vậy, để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x)>0\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$ bằng cách sử dụng đồ thị, ta có thể làm như sau: Dựa vào parabol $y=ax^2+bx+c$, ta tìm tập hợp những giá trị của $x$ ứng với phần parabol đó nằm phía trên trục hoành. Đối với các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x)<0, f(x)\ge 0, f(x)\le 0$, ta cũng làm tương tự.

***Ví dụ 3.*** Quan sát đồ thị ở Hình và giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $x^2-5x+4<0$.




b) $-x^2+3x>0$.




***Giải***

a) Quan sát đồ thị ở a, ta thấy: $x^2-5x+4<0$ biểu diễn phần parabol $y=x^2-5x+4$ nằm phía dưới trục hoành, tương ứng với $1<x<4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2-5x+4<0$ là khoảng $(1;4)$.

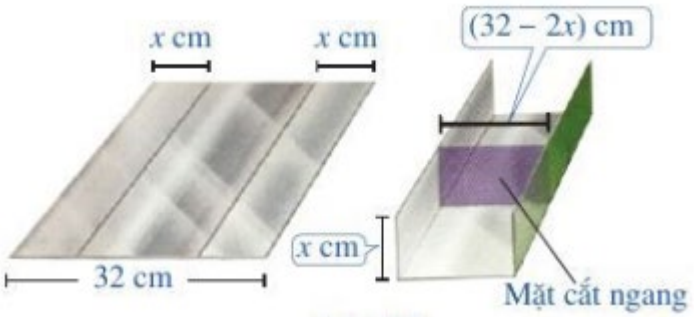
b) Quan sát đồ thị ở b , ta thấy: $-x^2+3x>0$ biểu diễn phần parabol $y=-x^2+3x$ nằm phía trên trục hoành, tương ứng với $0<x<3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+3x>0$ là khoảng $(0;3)$.

**III. Ứng dụng của bất phương trình bậc hai một ẩn**

Bất phương trình bậc hai một ẩn có nhiều ứng dụng, chẳng hạn: giải một số hệ bất phương trình; ứng dụng vào tính toán lợi nhuận trong kinh doanh; tính toán điểm rơi trong pháo binh; ...

Chúng ta sẽ làm quen với những ứng dụng đó qua một số ví dụ sau đây.

***Ví dụ 4.*** Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật ( như hình) với bề ngang $32cm$ thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông. Để đảm bảo kĩ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng $120cm^2$.




Hỏi rãnh nước phải có độ cao ít nhất là bao nhiêu xăng-ti-mét?

***Giải***

Khi chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như hình thì kích thước của mặt cắt ngang là $x(cm)$ và $32-2x(cm)$. Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $(32-2x)x\left(cm^2\right)$

Ta thấy: Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước lớn hơn $120cm^2$ khi và chỉ khi $(32-2x)x \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2+32x-120 \geq 0.$

Tam thức $-2x^2+32x-120$ có hai nghiệm $x_1=6, x_2=10$ và hệ số $a=-2<0$. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của $x$ sao cho tam thức $-2x^2+32x-120$ mang dấu "+" là $(6;10)$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-2x^2+32x-120 \geq 0$ là $[6;10]$.

Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là $6cm$.

***Ví dụ 5.*** Tìm giao các tập nghiệm của hai bất phương trình sau:

$x^2+2x-8<0(3)$ và $x^2-9<0$ (4)

***Giải***

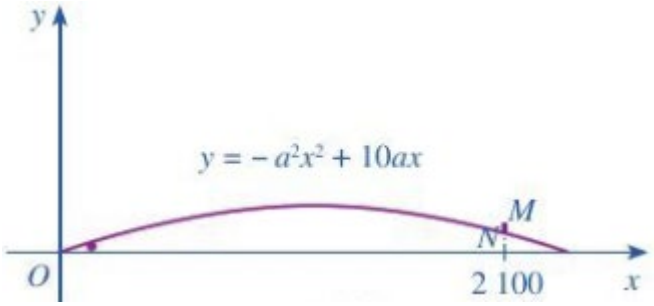
Ta có: (3) $\Leftrightarrow -4<x<2$. Tập nghiệm của bất phương trình (3) là $S_3=(-4;2)$;

(4) $\Leftrightarrow -3<x<3$. Tập nghiệm của bất phương trình (4) là $S_4=(-3;3)$.

Giao các tập nghiệm của hai bất phương trình trên là:

$S=S_3 \cap S_4=(-4;2)\cap(-3;3)=(-3;2)$

***Ví dụ 6.*** Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0;0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng $MN$ với $M(2100;25)$ và $N(2100;15)$




Xạ thủ cần xác định parabol $y=-a^2x^2+10ax$ $(a>0)$ mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của $a$ để xạ thủ đạt được mục đích trên.

***Giải***

Tại vị trí $x=2100$, độ cao của viên đạn là:

$y=-a^2.2100^2+10a\cdot 2100=-4410000a^2+21000a.$

Viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi $a$ thoả mãn các bất phương trình sau:

$2100 \leq \frac{10}{a}(5); -4410000a^2+21000a \leq 25$ (6); - $4410000a^2+21000a \geq 15$ (7).

- (5) $\Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq 210 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{210}$. Vì $a>0$ nên $a \in \left(0;\frac{1}{210}\right]$.

- (6) $\Leftrightarrow 4410000a^2-21000a+25 \geq 0 \Leftrightarrow (2100a-5)^2 \geq 0$. Bất phương trình này đúng $\forall a>0$.

- $(7) \Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 15 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} \le a \le \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$

$\Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right]$

Do $\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} > 0$ và $\frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} < \frac{1}{210}$ nên

$\left(0; \frac{1}{210}\right] \cap \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right] = \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right]$

Vì thế, viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi

$a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right]$. Vậy giá trị lớn nhất của $a$ là $\frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$.

**Tìm hiểu thêm**

Bảng dưới đây tổng kết các trường hợp có thể xảy ra khi giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0 (*) (a \ne 0)$.

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

| Dấu của a<br>Dấu của $\Delta$ | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$<br>$f(x)$ có hai nghiệm<br>$x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ | $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1 \\ x > x_2 \end{array}\right.$ | $(*) \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$ |
| $\Delta = 0$<br>$f(x)$ có nghiệm kép<br>$x = -\frac{b}{2a}$ | $(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ | $(*)$ vô nghiệm |
| $\Delta < 0$ $f(x)$ vô nghiệm | $(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ | $(*)$ vô nghiệm |

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Bất phương trình bậc hai

1. Định nghĩa. Bất phương trình bậc hai (ẩn $x$) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \ge 0$, $f(x) \le 0$.

Trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

2. Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.
3. Ứng dụng. Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng.

**Câu 1.** Giải các bất phương trình sau

a) $-3x^2 + 2x + 1 < 0$ .b) $x^2 + x - 12 < 0$.

**Lời giải.**

a) Ta có $-3x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ hoặc $x = 1$.

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x^2 + 2x + 1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

b) Ta có $x^2+x-12=0\Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=-4$.

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-12$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-4;3)$.

**Câu 2.** Giải các bất phương trình sau

a) $(1-2x)\left(x^2-x-1\right)>0$.

b) $x^4-5x^2+2x+3\le 0$.

**Lời giải.**

a) Ta có $1-2x=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$; $x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-2x$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | |
| $x^2-x-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| VT | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$S=\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

b) Bất phương trình tương đương với

$\left(x^4-4x^2+4\right)-\left(x^2-2x+1\right)\le 0\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)^2-(x-1)^2\le 0\Leftrightarrow\left(x^2+x-3\right)\left(x^2-x-1\right)\le 0$.

Ta có $x^2+x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$; $x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ | | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | | $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ | | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $x^2-x-1$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| VT | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$S=\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

**Câu 3.** Giải các bất phương trình sau

a) $\dfrac{x^2-1}{\left(x^2-3\right)\left(-3x^2+2x+8\right)}>0$.

b) $x^2+10\le\dfrac{2x^2+1}{x^2-8}$.

**Lời giải.**

a) Ta có

$$x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm1;\ x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3};\ -3x^2+2x+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-\dfrac{4}{3}$ | | $-1$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $x^2-3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $-3x^2+2x+8$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| VT | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S=\left(-\sqrt{3};-\frac{4}{3}\right)\cup(-1;1)\cup\left(\sqrt{3};2\right).$$

b) Bất phương trình tương đương với

$$\frac{2x^2+1}{x^2-8}-x^2+10\ge0\Leftrightarrow\frac{2x^2+1-\left(x^2-8\right)\left(x^2+10\right)}{x^2-8}\ge0$$

$$\Leftrightarrow\frac{81-x^4}{x^2-8}\ge0\Leftrightarrow\frac{\left(9-x^2\right)\left(9+x^2\right)}{\left(x^2-8\right)}\ge0\Leftrightarrow\frac{9-x^2}{x^2-8}\ge0.$$

Ta có $9-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm3$; $x^2-8=0\Leftrightarrow x=\pm2\sqrt{2}$.

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2\sqrt{2}$ | | $2\sqrt{2}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $9-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x^2-8$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| VT | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S=\left[-3;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};3\right].$$

**Câu 4.** Giải các bất phương trình sau

a) $\dfrac{\left|x^2-x\right|-2}{x^2-x-1}\ge0$.

b) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le0$.

**Lời giải.**

a) Vì $\left|x^2-x\right|+2>0$ nên

$$\frac{\left|x^2-x\right|-2}{x^2-x-1}\ge 0\Leftrightarrow\frac{\left(\left|x^2-x\right|-2\right)\left(\left|x^2-x\right|+2\right)}{x^2-x-1}\ge 0\Leftrightarrow\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x+2\right)}{x^2-x-1}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-x-2}{x^2-x-1}\ge 0\ (\text{do } x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0).$$

Ta có $x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.;\ x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2-x-1$ | | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | |
| $\frac{x^2-x-2}{x^2-x-1}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S=(-\infty;1]\cup\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup[2;+\infty).$$

b) Điều kiện $\left\{\begin{array}{l}x+1\ge 0\\x^2+\sqrt{3}x-6\ne 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\ge -1\\x\ne\sqrt{3}\\x\ne -2\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\ge -1\\x\ne\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Vì $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}>0$ nên

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0\Leftrightarrow\frac{x^2-x}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0.$$

Ta có $x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.;\ x^2+\sqrt{3}x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\sqrt{3}\\x=\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-2\sqrt{3}$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x$ | | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | |
| $x^2+\sqrt{3}x-6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\frac{x^2-x}{x^2\sqrt{3}x-6}$ | | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu và đối chiếu điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S=[-1;0]\cup\left[1;\sqrt{3}\right).$$

## Dạng 2. Bài toán tham số liên quan đến tam thức bậc hai

**Câu 1.** Tìm $m$ để các phương trình sau có nghiệm.

a) $x^2-mx+m+3=0$.

b) $(1+m)x^2-2mx+2m=0$.

**Lời giải.**

a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta=m^2-4(m+3)\ge 0\Leftrightarrow m^2-4m-12\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 6\\ m\le -2\end{array}\right.$$

Vậy với $m\in(-\infty;-2]\cup[6;+\infty)$ thì phương trình có nghiệm.

b) Với $m=-1$, phương trình trở thành $2x-2=0\Leftrightarrow x=1$. Suy ra $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m\ne -1$ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta=m^2-2m(1+m)\ge 0\Leftrightarrow m^2+2m\le 0\Leftrightarrow -2\le m\le 0$.

Vậy với $-2\le m\le 0$ thì phương trình có nghiệm.

**Câu 2.** Giải và biện luận bất phương trình $(m+1)x^2-2(2m-1)x-4m+2<0$.

**Lời giải.**

□Với $m=-1$, bất phương trình trở thành $6x+6<0\Leftrightarrow x<-1$.

□Với $m\ne -1$, ta có $g(x)=(m+1)x^2-2(2m-1)x-4m+2$ là tam thức bậc hai có $\begin{cases}a=m+1\\ \Delta'=8m^2-2m-1\end{cases}$

□Bảng xét dấu

| $m$ | $-\infty$ | | -1 | | $-\frac{1}{4}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m+1$ | - | | 0 | + | \| | + | \| | + | |
| $8m^2-2m-1$ | + | \| | + | | 0 | - | 0 | + | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta có

-Nếu $m<1$, ta có $\begin{cases}a<0\\ \Delta'>0\end{cases}$. Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$;

Với $x_1=\dfrac{2m-1-\sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1}, x_2=\dfrac{2m-1+\sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1}$.

-Nếu $-1<m<-\dfrac{1}{4}$ hoặc $m>\dfrac{1}{2}$, ta co $\begin{cases}a>0\\ \Delta'>0\end{cases}$. Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(x_1;x_2)$.

-Nếu $-\dfrac{1}{4}\leqslant m\leqslant\dfrac{1}{2}$, ta có $\begin{cases}a>0\\ \Delta'\leqslant 0\end{cases}$. Suy ra $g(x)\geqslant 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên bpt vô nghiệm.

-Kết luận:

□ $m=-1$, bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-\infty;-1)$.

□ $-\dfrac{1}{4}\leqslant m\leqslant\dfrac{1}{2}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=\varnothing$.

□ $m>\dfrac{1}{2}$ hoặc $-1<m<-\dfrac{1}{4}$ bpt có tập nghiệm là $S=(x_1;x_2)$.

□ $m<-1$ bpt có tập nghiệm là $S=(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$.

**Câu 3.** Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì pt

a) $mx^2-(3m+2)x+1=0$ luôn có nghiệm

b) $(m^2+5)x^2-(\sqrt{3}m-2)x+1=0$ luôn vô nghiệm

**Lời giải**

a) Với m = 0 thì py trở thành $-2x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ suy ra pt có nghiệm

Với $m\neq 0$ ta có $\Delta=(3m+2)^2-4m=9m^2+8m+4=\left(3m+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{20}{9}>0$ với mọi m

Do đó pt đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

b) Ta có

$\Delta=(\sqrt{3}m-2)^2-4(m^2+5)=-m^2-4\sqrt{3m}-16=-(m+2\sqrt{3})^2-4<0$ với mọi m

Do đó pt đã cho luôn vô nghiệm với mọi m.

**Câu 4.** Tìm m để biểu thức sau luôn dương

a) $(m^2+2)x^2-2(m+1)x+1.$ b) $(m+2)x^2+2(m+2)x+m+3$

**Lời giải**

a) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(m^2+2)x^2-2(m+1)x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'<0\\a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)^2-(m^2+2)<0\\m^2+2>0\end{cases}\Leftrightarrow(m+1)^2-(m^2+2)<0\Leftrightarrow 2m<1\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$$

Vậy $m<\frac{1}{2}$ thỏa mãn.

b) Với $m=-2$, tam thức bậc hai trở thành $1>0$: luôn đúng với mọi $x$.

Với $m\neq -2$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(m+2)x^2+2(m+2)x+m+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\\Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+2>0\\(m+2)^2-(m+2)(m+3)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+2>0\\-m-2<0\end{cases}\Leftrightarrow m>-2$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m\geq 2$ là giá trị cần tìm.

**Câu 5.** Tìm m để biểu thức sau luôn âm

a) $f(x)=mx^2-x-1.$ b) $g(x)=(m-4)x^2+(2m-8)x+m-5$

**Lời giải**

a) Với $m=0$, ta có $f(x)=-x-1<0\Leftrightarrow x>-1$: không thỏa mãn.

Với $m\neq 0$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow mx^2-x-1<0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\\Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\1+4m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\m>-\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{1}{4}<m<0$$

Vậy với $-\frac{1}{4}<m<0$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

b) Với $m=4$, ta có $g(x)=-1<0$: đúng với mọi $x$.

Với $m\neq 4$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(m-4)x^2+(2m-8)x+m-5<0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\\Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-4<0\\(m-4)^2-(m-4)(m-5)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<4\\m-4<0\end{cases}\Leftrightarrow m<4$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m\leq 4$.

**Câu 6.** Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn dương

a) $f(x)=\dfrac{-x^2+4(m+1)x+1-4m^2}{-4x^2+5x-2}$ b) $f(x)=\sqrt{x^2-x+m}-1$

**Lời giải**

a) Ta có $-4x^2+5x-2=-\left(2x-\dfrac{5}{4}\right)^2-\dfrac{7}{16}<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(x)=\dfrac{-x^2+4(m+1)x+1-4m^2}{-4x^2+5x-2}>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -x^2+4(m+1)x+1-4m^2<0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'=4(m+1)^2+\left(1-4m^2\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 8m+5<0\Leftrightarrow m<-\dfrac{5}{8}$

Vậy với $m<-\dfrac{5}{8}$ là giá trị cần tìm.

b) Yêu cầu bài toán tương đương với

$\sqrt{x^2-x+m}-1>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+m}>1,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2-x+m>1,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2-x+m-1>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1>0 \\ \Delta=1-4(m-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<\dfrac{5}{4}$

Vậy với $m<\dfrac{5}{4}$ thì biểu thức đã cho luôn dương.

**Câu 7.** Tìm các giá trị của m để các bpt sau được nghiệm đúng với mọi x.

a) $\left(2m^2-3m-2\right)x^2+2(m-2)x-1\leqslant 0$. b ) $(m+4)x^2<2(mx-m+3)$

**Lời giải**

a) Xét $2m^2-3m-2=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}\ \vee\ m=2$

□Khi $m=-\dfrac{1}{2}$ thì bpt trở thành $-5x-1\leqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant -\dfrac{1}{5}$: Không nghiệm đúng với mọi x.

□Khi $m=2$ thì bpt nghiệm đúng với mọi x.

□Khi $\begin{cases} m\neq -\dfrac{1}{2} \\ m\neq 2 \end{cases}$ thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left(2m^2-3m-2\right)x^2+2(m-2)x-1\leqslant 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'\leqslant 0 \\ a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2-7m-2\leqslant 0 \\ 2m^2-3m-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{3}\leqslant m\leqslant 2 \\ -\dfrac{1}{2}<m<2 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\leqslant m<2$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-\dfrac{1}{3}\leqslant m\leqslant 2$.

b) Khi $m=-4$ thì bpt trở thành $0<-8x+14$: Không nghiệm đúng với mọi x.

Khi $m\neq 4$ thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m+4)x^2-2mx+2m-6<0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'<0 \\ a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2-2m+24<0 \\ m+4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-6\vee m>4 \\ m<-4 \end{cases} \Leftrightarrow m<-6$

Vậy $m<-6$ là giá trị cần tìm.

**Câu 8.** Chứng minh hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$ với mọi m

a) $y=\dfrac{mx}{\left(2m^2+1\right)x^2-4mx+2}$ b) $y=\sqrt{\dfrac{2x^2-2(m+1)x+m^2+1}{n^2}}$

**Lời giải**

a) Điều kiện $\left(2m^2+1\right)x^2-4mx+2\neq 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x)=\left(2m^2+1\right)x^2-4mx+2$. Ta có

$a_f=2m^2+1>0, \Delta_f^{'}=4m^2-2\left(2m^2+1\right)=-2<0$

Suy ra với mọi m ta có $f(x)=\left(2m^2+1\right)x^2-4mx+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó với mọi m ta có $\left(2m^2+1\right)x^2-4mx+2\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) Điều kiện $\dfrac{2x^2-2(m+1)x+m^2+1}{m^2x^2-2mx+m^2+2}\geqslant 0$ và $m^2x^2-2mx+m^2+2\neq 0$

□Xét tam thức bậc hai $f(x)=2x^2-2(m+1)x+m^2+1$. Ta có

$a_f=2>0, \Delta_f^{'}=(m+1)^2-2\left(m^2+1\right)=-m^2+2m-1=-(m-1)^2\leqslant 0$

Suy ra với mọi m, ta có $f(x)=2x^2-2(m+1)x+m^2+1\geqslant 0, \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

□Xét tam thức bậc hai $g(x)=m^2x^2-2mx+m^2+2$

Với $m=0$ thì $g(x)=2>0$

Với $m\neq 0$, ta có

$a_g=m^2>0, \Delta_g^{'}=m^2-m^2\left(m^2+2\right)=-m^2\left(m^2+1\right)<0$

Suy ra với mọi m, ta có $g(x)=m^2x^2-2mx+m^2+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra với mọi m thì $\dfrac{2x^2-2(m+1)x+m^2+1}{m^2x^2-2mx+m^2+2}\geqslant 0$

Và $m^2x^2-2mx+m^2+2\neq 0$ đúng với mọi x.

Vậy tập xác định là $\mathbb{R}$.

**Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $\left(m^2+1\right)x+m(x+3)+1>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;2]$.

**Lời giải**

Bpt tương đương $\left(m^2+m+1\right)x+3m+1>0$

$\Leftrightarrow x>\dfrac{-3m-1}{m^2+m+1}\left(\text{do } m^2+m+1=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0\right)$

Suy ra tập nghiệm của bpt là $S=\left(\dfrac{-3m-1}{m^2+m+1};+\infty\right)$

Bpt nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;2]$ khi và chỉ khi $[-1;2]\subset\left(\dfrac{-3m-1}{m^2+m+1};+\infty\right)$

Suy ra $\dfrac{-3m-1}{m^2+m+1}<-1\Leftrightarrow\dfrac{m^2-2m}{m^2+m+1}<0\Leftrightarrow m^2-2m<0\Leftrightarrow 0<m<2$

Vậy $0 < m < 2$ thỏa mãn.

**Câu 10.** Tìm các giá trị của tham số m để bpt $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$.

**Lời giải**

-Với $m = 1$ thì bpt trở thành $2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$: Thỏa mãn

-Với $m < 1$, ta có $\Delta' = 1 - (m-1)(m+1) = 2 - m^2$

- Nếu $\Delta' \le 0$ thì $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra bpt vô nghiệm: không thỏa mãn.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì bpt tương đương $\dfrac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1} < x < \dfrac{1-\sqrt{2-m^2}}{m-1}$

Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = \left( \dfrac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1}; \dfrac{1-\sqrt{2-m^2}}{m-1} \right)$: không thỏa mãn.

-Với $m > 1$, ta có $\Delta' = 1 - (m-1)(m+1) = 2 - m^2$

$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 - m^2 < 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} m > \sqrt{2} \\ m < -\sqrt{2} \end{array} \right.$ thi $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

-Nếu

Suy ra tập nghiệm của bpt là $\mathbb{R}$ thỏa mãn.

Vậy $m > \sqrt{2}$ thỏa mãn.

-Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ thì bpt tương đương $\left[ \begin{array}{l} x < \dfrac{1-\sqrt{2-m^2}}{m-1} \\ x > \dfrac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1} \end{array} \right.$

-Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = \left( -\infty; \dfrac{1-\sqrt{2-m^2}}{m-1} \right) \cup \left( \dfrac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1}; +\infty \right)$

Bpt nghiệm đúng với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi $(0; +\infty) \subset \left( \dfrac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1}; +\infty \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1} \leqslant 0 \\ m > 1 \end{array} \right. \leqslant \left\{ \begin{array}{l} 1+\sqrt{2-m^2} \leqslant 0 \\ m > 1 \end{array} \right.$ (vô nghiệm).

-Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$, xét $m = \sqrt{2}$ thì bpt trở thành

$(\sqrt{2}-1)x^2 - 2x + \sqrt{2} + 1 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)\left( x - \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \right)^2 > 0 \Leftrightarrow \left( x - \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \right)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

Không thỏa mãn. Vậy $m = 1, m > \sqrt{2}$ là giá trị cần tìm.

**Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2 - 2x + 1 - m^2 \leqslant 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$

**Lời giải**

Ta có $\Delta' = m^2 \geqslant 0$. Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1 - m$ và $x_2 = 1 + m$

-Nếu $m = 0$ thì bpt trở thành $x^2 - 2x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x = 1$ không thỏa mãn.

-Nếu $m > 0$ thì $x_1 = 1 - m < x_2 = 1 + m$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = [1 - m\ ;\ 1 + m]$

Để bpt nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$ khi và chỉ khi $[1; 2] \subset [1 - m; 1 + m]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geqslant 1-m \\ 2 \geqslant 1+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geqslant 0 \\ m \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geqslant 1$

-Nếu $m<0$ thì $x_1 = 1-m > x_2 = 1+m$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S=[1+m\ ;\ 1-m]$
Để bpt nghiệm đúng với mọi $x \in [1;2]$ khi và chỉ khi $[1;2] \subset [1+m;1-m]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geqslant 1+m \\ 2 \geqslant 1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$
Vậy $m \leq -1 \vee m \geq 1$ thỏa mãn.

**Câu 12.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt
$x^2+(1-3m)x+3m-2>0$ nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geq 2$.

**Lời giải**

Ta có $x^2+(1-3m)x+3m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3m-2 \end{array}\right.$

-Nếu $3m-2=1 \Leftrightarrow m=1$ thì bpt trở thành $(x-1)^2>0 \Leftrightarrow x \neq 1$
suy ra tập nghiệm của bpt là $S=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

Vậy m=1 thỏa mãn.

-Nếu $3m-2<1 \Leftrightarrow m<1$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S=(-\infty;3m-2)\cup(1;+\infty)$
Bpt nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geq 2$ khi và chỉ khi $3m-2>-2 \Leftrightarrow m>0$

Vậy $0<m<1$ thỏa mãn.

□Nếu $3m-2>1 \Leftrightarrow m>1$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S=(-\infty;1)\cup(3m-2;+\infty)$
Bpt nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geq 2$ khi và chỉ khi $3m-2<2 \Leftrightarrow m<\frac{4}{3}$

Vậy $1<m<\frac{4}{3}$ thỏa mãn.

-Kết hợp các Th ta có $0<m<\frac{4}{3}$ là giá trị cần tìm.

**Câu 13.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2+(3-m)x-2m+3>0$ nghiệm đúng với mọi $x \leq 4$.

**Lời giải**

Ta có $\Delta=(3-m)^2-4(-2m+3)=m^2+2m-3$
-Nếu $m=1$ thì bpt trở thành $x^2+2x+1>0 \Leftrightarrow (x+1)^2>0 \Leftrightarrow x \neq -1$ thỏa mãn.
-Nếu $m=-3$ thì bpt trở thành $x^2+6x+9>0 \Leftrightarrow (x+3)^2>0 \Leftrightarrow x \neq -3$ thỏa mãn
-Nếu $-3<m<1$ thì $\Delta<0$ mà hệ số $a=1>0$ nên $x^2+(3-m)x-2m+3>0, \forall x \in \mathbb{R}$
Suy ra tập nghiệm của bpt là $\mathbb{R}$ (thỏa mãn).

-Nếu $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right.$ thì $\Delta>0$ nên phương trình $x^2+(3-m)x-2m+3=0$ có hai nghiệm
$S=\left(-\infty;\frac{-3+m-\sqrt{m^2+2m-3}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+m+\sqrt{m^2+2m-3}}{2};+\infty\right)$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \leq -4$ khi và chỉ khi

$$(-\infty;-4]\subset\left(-\infty;\frac{-3+m-\sqrt{m^2+2m-3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -4<\frac{-3+m-\sqrt{m^2+2m-3}}{2}\Leftrightarrow \sqrt{m^2+2m-3}<m+5\Leftrightarrow \begin{cases} m>-5\vee m>1\\ m>-5\\ m>-\frac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{7}{2}<m<-3\\ m>1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3>0\\ m+5>0\\ m^2+2m-3<(11-m)^2\end{cases}$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m>-\frac{7}{2}$ là giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Bất phương trình bậc hai

1. Định nghĩa. Bất phương trình bậc hai (ẩn $x$) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x)>0$, $f(x)<0$, $f(x)\ge 0$, $f(x)\le 0$.

Trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

2. Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

3. Ứng dụng. Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng.

**Câu 1.** Cho tam thức bậc hai $f(x)=-x^2-4x+5$. Tìm tất cả giá trị của $x$ để $f(x)\ge 0$.

**A.** $x\in(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$. **B.** $x\in[-1;5]$.

**C.** $x\in[-5;1]$. **D.** $x\in(-5;1)$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow -x^2-4x+5=0\Leftrightarrow x=1,\ x=-5$.

Mà hệ số $a=-1<0$ nên: $f(x)\ge 0\Leftrightarrow x\in[-5;1]$.

**Câu 2.** Gọi $S$ là tập nghiệm của bất phương trình $x^2-8x+7\ge 0$. Trong các tập hợp sau, tập nào **không** là tập con của $S$?

**A.** $(-\infty;0]$. **B.** $[6;+\infty)$. **C.** $[8;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1]$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $x^2-8x+7\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 1\\ x\ge 7\end{array}\right.$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;1]\cup[7;+\infty)$.

Do đó $[6;+\infty)\not\subset S$.

**Câu 3.** Tập nghiệm của bất phương trình $2x^2-14x+20<0$ là

**A.** $S=(-\infty;2]\cup[5;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$.

**C.** $S=(2;5)$. **D.** $S=[2;5]$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Bất phương trình $0\le x\le 10\Leftrightarrow 2<x<5$.

Vậy $S=(2;5)$.

**Câu 4.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-25<0$ là

**A.** $S=(-5;5)$. **B.** $x>\pm 5$.

**C.** $-5<x<5$. **D.** $S=(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Bất phương trình $x^2-25<0 \Leftrightarrow -5<x<5$.

Vậy $S=(-5;5)$.

**Câu 5.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-3x+2<0$ là

**A.** $(1;2)$. **B.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $x^2-3x+2<0 \Leftrightarrow 1<x<2.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2-3x+2<0$ là $(1;2)$. Chọn đáp án **A.**

**Câu 6.** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $x^2-x-6\le 0$.

**A.** $S=(-\infty;-3)\cup(2:+\infty)$. **B.** $[-2;3]$.

**C.** $[-3;2]$. **D.** $(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $x^2-x-6\le 0 \Leftrightarrow -2\le x\le 3$.

Tập nghiệm bất phương trình là: $S=[-2;3]$.

**Câu 7.** Bất phương trình $-x^2+2x+3>0$ có tập nghiệm là

**A.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $(-3;1)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $-x^2+2x+3>0 \Leftrightarrow -1<x<3$

**Câu 8.** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{-x^2+2x+3}$ là:

**A.** $(1;3)$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

**C.** $[-1;3]$. **D.** $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số $y=\sqrt{-x^2+2x+3}$ xác định khi $-x^2+2x+3\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-1;3]$.

**Câu 9.** Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+x+12\ge 0$ là

**A.** $(-\infty;-3]\cup[4;+\infty)$. **B.** $\varnothing$.

**C.** $(-\infty;-4]\cup[3;+\infty)$. **D.** $[-3;4]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $-x^2+x+12\ge 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-3;4]$.

**Câu 10.** Hàm số $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-3}+x-2}$ có tập xác định là

**A.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

**B.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{7}{4}\right\}$.

**C.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{7}{4}\right\}$.

**D.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\dfrac{7}{4}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases}\sqrt{x^2-3}+x-2\neq 0\\ x^2-3\geq 0\end{cases}$

Ta có $x^2-3\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq\sqrt{3}\\ x\leq-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Xét $\sqrt{x^2-3}+x-2=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3}=2-x\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\geq 0\\ x^2-3=(2-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2\\ x=\dfrac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{4}$

Do đó tập xác định của hàm số đã cho là $D=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{7}{4}\right\}$.

**Câu 11.** Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2x^2-5x+2}$.

**A.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2x^2-5x+2\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq\dfrac{1}{2}\\ x\geq 2\end{array}\right.$.

**Câu 12.** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $x^2-4>0$.

**A.** $S=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

**B.** $S=(-2;2)$.

**C.** $S=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

**D.** $S=(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

* Bảng xét dấu:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

* Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

**Câu 13.** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $x^2-4x+4>0$.

**A.** $S=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $S=\mathbb{R}$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

* Bảng xét dấu:

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4x+4$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

* Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

**Câu 14.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2x^2-3x-15\le 0$ là

**A.** $6$. **B.** $5$. **C.** $8$. **D.** $7$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Xét $f(x)=2x^2-3x-15$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{129}}{4}$.

Ta có bảng xét dấu:

| $x$ | | $\dfrac{3-\sqrt{129}}{4}$ | | $\dfrac{3+\sqrt{129}}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\dfrac{3-\sqrt{129}}{4};\dfrac{3+\sqrt{129}}{4}\right]$.

Do đó bất phương trình có $6$ nghiệm nguyên là $-2$, $-1$, $0$, $1$, $2$, $3$.

**Câu 15.** Tập nghiệm của bất phương trình: $x^2+9>6x$ là

**A.** $(3;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-\infty;3)$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

$x^2+9>6x \Leftrightarrow (x-3)^2>0 \Leftrightarrow x\ne 3$.

**Câu 16.** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $-2x^2-3x+2>0$?

**A.** $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-2)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

**C.** $S=\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $S=\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $-2x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow -2<x<\dfrac{1}{2}$.

**Câu 17.** Bất phương trình $(x-1)(x^2-7x+6)\ge 0$ có tập nghiệm $S$ là:

**A.** $S=(-\infty;1]\cup[6;+\infty)$. **B.** $S=[6;+\infty)$.

**C.** $(6;+\infty)$. **D.** $S=[6;+\infty)\cup\{1\}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$(x-1)(x^2-7x+6)\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x-6)\ge 0$$

Ta có: $\Leftrightarrow (x-1)^2(x-6)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-6\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x\ge 6 \end{array}\right.$.

**Câu 18.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^4-5x^2+4<0$ là

**A.** $(1;4)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-2;-1)\cup(1;2)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $x^4-5x^2+4=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=0\\x^2-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Đặt $f\left(x\right)=x^4-5x^2+4$.

Bảng xét dấu:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f\left(x\right)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy tập nghiệm của bất phương trình $f\left(x\right)<0$ là $\left(-2;-1\right)\cup\left(1;2\right)$.

**Câu 19.** Giải bất phương trình $x\left(x+5\right)\le 2\left(x^2+2\right)$.

**A.** $x\le 1$. **B.** $1\le x\le 4$. **C.** $x\in\left(-\infty;1\right]\cup\left[4;+\infty\right)$. **D.** $x\ge 4$.

**Lời giải**

Bất phương trình $x\left(x+5\right)\le 2\left(x^2+2\right)\Leftrightarrow x^2+5x\le 2x^2+4\Leftrightarrow x^2-5x+4\ge 0$

Xét phương trình $x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-5x+4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2-5x+4\ge 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;1\right]\cup\left[4;+\infty\right)$. **Chọn C.**

**Câu 20.** Biểu thức $\left(3x^2-10x+3\right)\left(4x-5\right)$ âm khi và chỉ khi

**A.** $x\in\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$. **B.** $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{4};3\right)$.

**C.** $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right)\cup\left(3;+\infty\right)$. **D.** $x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$.

**Lời giải**

Đặt $f\left(x\right)=\left(3x^2-10x+3\right)\left(4x-5\right)$

Phương trình $3x^2-10x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$ và $4x-5=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$.

Lập bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $\frac{5}{4}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2-10x+3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $4x-5$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f\left(x\right)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{4};3\right)$. **Chọn B.**

**Câu 21.** Biểu thức $\left(4-x^2\right)\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+5x+9\right)$ âm khi

**A.** $x \in (1;2)$. **B.** $x \in (-3;-2)\cup(1;2)$.

**C.** $x \geq 4$. **D.** $x \in (-\infty;-3)\cup(-2;1)\cup(2;+\infty)$.

**Lời giải**

Đặt $f(x)=\left(4-x^2\right)\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+5x+9\right)$

Phương trình $4-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Phương trình $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Ta có $x^2+5x+9=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0 \Rightarrow x^2+5x+9=0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$. Lập bảng xét dấu:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4-x^2$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x^2+2x-3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $x^2+5x+9$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\left(4-x^2\right)\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+5x+9\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ -2<x<1 \\ x>2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty;-3)\cup(-2;1)\cup(2;+\infty)$. **Chọn D.**

**Câu 22.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^3+3x^2-6x-8 \geq 0$ là

**A.** $x \in [-4;-1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $x \in (-4;-1)\cup(2;+\infty)$.

**C.** $x \in [-1;+\infty)$. **D.** $x \in (-\infty;-4]\cup[-1;2]$.

**Lời giải**

Bất phương trình $x^3+3x^2-6x-8 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+5x+4\right) \geq 0$.

Phương trình $x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1 \end{array}\right.$ và $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Lập bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+5x+4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x-2)\left(x^2+5x+4\right)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $(x-2)\left(x^2+5x+4\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-4;-1]\cup[2;+\infty)$.

**Chọn A.**

**Câu 23.** Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{4x-12}{x^2-4x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của $x$ thỏa mãn $f(x)$ không dương là

**A.** $x\in(0;3]\cup(4;+\infty)$. **B.** $x\in(-\infty;0]\cup[3;4)$.

**C.** $x\in(-\infty;0)\cup[3;4)$. **D.** $x\in(-\infty;0)\cup(3;4)$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: $\dfrac{4x-12}{x^2-4x}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\3\le x<4\end{array}\right.$ hay $x\in(-\infty;0)\cup[3;4)$.

**Câu 24.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{x^2-3x-4}{x-1}\le 0$.

**A.** $T=(-\infty;-1]\cup[1;4]$. **B.** $T=(-\infty;-1]\cup(1;4]$.

**C.** $T=(-\infty;-1)\cup(1;4]$. **D.** $T=(-\infty;-1]\cup(1;4)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\dfrac{x^2-3x-4}{x-1}\le 0\ (1)$.

$x^2-3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=4\end{array}\right.$.

$x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | 1 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-3x-4$ | + | | 0 | - | | - | 0 | + | |
| $x-1$ | - | | | - | 0 | + | | + | |
| VT (1) | - | | 0 | + | ‖ | - | 0 | + | |

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=(-\infty;-1]\cup(1;4]$.

**Câu 25.** Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-4}\le 0$ là.

**A.** $S=[-2;2]\cup[3;4]$. **B.** $S=(-2;2]\cup[3;4]$.

**C.** $S=(-2;2)\cup[3;4]$. **D.** $S=[-2;2]\cup(3;4)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét $f(x)=\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-4}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

$x^2-7x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=4\end{array}\right.$.

$x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $f(x)$

| x | $-\infty$ | | -2 | | 2 | | 3 | | 4 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-7x+12$ | | + | \| | + | \| | + | 0 | - | 0 | + |
| $x^2-4$ | | + | 0 | - | 0 | + | \| | + | \| | + |
| $f(x)$ | | + | \|\| | - | \|\| | + | 0 | - | 0 | + |

Từ bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(-2;2)\cup[3;4]$.

**Câu 26.** Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{x-2}{x+1}\geq\dfrac{x+1}{x-2}$ là.

**A.** $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right]\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

**C.** $(-\infty;-1)\cup\left[\dfrac{1}{2};2\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\dfrac{x-2}{x+1}\geq\dfrac{x+1}{x-2}\Leftrightarrow\dfrac{(x-2)^2-(x+1)^2}{(x+1)(x-2)}\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{-6x+3}{x^2-x-2}\geq 0\ (1)$.

Ta có bảng xét dấu sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\dfrac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VT (1) | | + | \|\| | - | 0 | + | \|\| | - | |

$(1)\Leftrightarrow x<-1\vee\dfrac{1}{2}\leq x<2$.

**Câu 27.** Gọi $S$ là tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{x^2+x+3}{x^2-4}\geq 1$. Khi đó $S\cap(-2;2)$ là tập nào sau đây?

**A.** $(-2;-1)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $\varnothing$. **D.** $(-2;-1]$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Xét $\dfrac{x^2+x+3}{x^2-4}-1\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{x+7}{x^2-4}\geq 0$.

Bất phương trình có tập nghiệm $S=[-7;-2)\cup(2;+\infty)$.

Vậy $S\cap(-2;2)=\varnothing$.

**Câu 28.** Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{2x^2-3x+4}{x^2+3}>2$ là

**A.** $\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{23}}{4};\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{23}}{4}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{23}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{23}}{4};+\infty\right)$.

**C.** $\left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Do $x^2+3>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2-3x+4}{x^2+3}>2 \Leftrightarrow 2x^2-3x+4>2\left(x^2+3\right) \Leftrightarrow 3x<-2 \Leftrightarrow x<-\frac{2}{3}.$$

**Câu 29.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $x$ thỏa mãn $\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}<\frac{2x}{2x-x^2}$?

**A.** 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

**Lời giải**

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4\neq 0 \\ x+2\neq 0 \\ 2x-x^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 2 \end{cases}$. Bất phương trình:

$$\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}<\frac{2x}{2x-x^2} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}+\frac{2x}{x^2-2x}<0 \Leftrightarrow \frac{2x+9}{x^2-4}<0.$$

Bảng xét dấu:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{9}{2}$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+9$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $x^2-4$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\frac{2x+9}{x^2-4}<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{9}{2}\right)\cup(-2;2)$.

Vậy có chỉ có duy nhất một giá trị nguyên dương của $x$ $(x=1)$ thỏa mãn yêu cầu.

**Chọn C.**

**Câu 30.** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10}\leq -1$ là

**A.** Hai khoảng. **B.** Một khoảng và một đoạn.

**C.** Hai khoảng và một đoạn. **D.** Ba khoảng.

**Lời giải**

Điều kiện: $x^2-3x-10\neq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-5)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ x\neq 5 \end{cases}$.

Bất phương trình

$$\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10}\leq -1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10}+1\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-3}{x^2-3x-10}\leq 0 \quad (*).$$

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+4x-3$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | |
| $x^2-3x-10$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, bất phương trình $(*) \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup[1;3]\cup(5;+\infty)$.

**Chọn C.**

## Dạng 2. Bài toán tham số liên quan đến tam thức bậc hai

**Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2+mx+4=0$ có nghiệm

**A.** $-4\le m\le 4$. **B.** $m\le -4$ *hay* $m\ge 4$.

**C.** $m\le -2$ *hay* $m\ge 2$. **D.** $-2\le m\le 2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình $x^2+mx+4=0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\ge 0 \Leftrightarrow m^2-16\ge 0 \Leftrightarrow m\le -4$ *hay* $m\ge 4$

**Câu 2.** Tìm $m$ để phương trình $-x^2+2(m-1)x+m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt

**A.** $(-1;2)$ **B.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ **C.** $[-1;2]$ **D.** $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow (m-1)^2-(-1).(m-3)>0 \Leftrightarrow m^2-m-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$$

Vậy $m\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

**Câu 3.** Giá trị nào của $m$ thì phương trình $(m-3)x^2+(m+3)x-(m+1)=0$ $(1)$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **B.** $m\in\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right)\cup(1;+\infty)\setminus\{3\}$.

**C.** $m\in\left(-\frac{3}{5};1\right)$. **D.** $m\in\left(-\frac{3}{5};+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-3\ne 0 \\ \Delta=(m+3)^2+4(m-3)(m+1)>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 3 \\ 5m^2-2m-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 3 \\ \left[\begin{array}{l} x<-\frac{3}{5} \\ x>1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right)\cup(1;+\infty)\setminus\{3\}.$$

**Câu 4.** Tìm các giá trị của tham số $m$ để phương trình $x^2-mx+4m=0$ vô nghiệm.

**A.** $0<m<16$. **B.** $-4<m<4$. **C.** $0<m<4$. **D.** $0\le m\le 16$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Phương trình $x^2-mx+4m=0$ vô nghiệm khi $\Delta<0 \Leftrightarrow m^2-16m<0 \Leftrightarrow 0<m<16$.

**Câu 5.** Phương trình $x^2-(m+1)x+1=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

**A.** $m>1$. **B.** $-3<m<1$.

**C.** $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$. **D.** $-3\le m\le 1$.

**Lời giải**

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta_x<0 \Leftrightarrow (m+1)^2-4<0$

$\Leftrightarrow m^2+2m-3<0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3)<0 \Leftrightarrow -3<m<1$. **Chọn B.**

**Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho phương trình sau vô nghiệm $m=-\frac{1}{2}$

**A.** $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m>3$. **C.** $m=2$ **D.** $m>-\frac{3}{5}$.

**Lời giải**

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a=2m^2+1\neq 0 \\ \Delta'_x=4m^2-2\left(2m^2+1\right)=-2<0 \end{cases}, \forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi $m\in\mathbb{R}$. **Chọn** **A.**

**Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình

$$\left(m-2\right)x^2+2\left(2m-3\right)x+5m-6=0 \text{ vô nghiệm?}$$

**A.** $m<0$. **B.** $m>2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right.$. **D.** $\begin{cases} m\neq 2 \\ 1<m<3 \end{cases}$.

**Lời giải**

Xét phương trình $\left(m-2\right)x^2+2\left(2m-3\right)x+5m-6=0 \quad (*)$.

**TH1.** Với $m-2=0\Leftrightarrow m=2$, khi đó $(*)\Leftrightarrow 2x+4=0\Leftrightarrow x=-2$.

Suy ra với $m=2$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Do đó $m=2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**TH2.** Với $m-2\neq 0\Leftrightarrow m\neq 2$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x<0$

$\Leftrightarrow \left(2m-3\right)^2-\left(m-2\right)\left(5m-6\right)<0\Leftrightarrow 4m^2-12m+9-\left(5m^2-16m+12\right)<0$

$\Leftrightarrow -m^2+4m-3<0\Leftrightarrow m^2-4m+3>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right.$.

Do đó, với $\left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right.$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm. **Chọn** **C.**

**Câu 8.** Phương trình $mx^2-2mx+4=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

**A.** $0<m<4$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>4 \end{array}\right.$. **C.** $0\le m\le 4$. **D.** $0\le m<4$.

**Lời giải**

Xét phương trình $mx^2-2mx+4=0 \quad (*)$.

**TH1.** Với $m=0$, khi đó phương trình $(*)\Leftrightarrow 4=0$ (vô lý).

Suy ra với $m=0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

**TH2.** Với $m\neq 0$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x<0$

$\Leftrightarrow m^2-4m<0\Leftrightarrow m\left(m-4\right)<0\Leftrightarrow 0<m<4$

Kết hợp hai **TH**, ta được $0\le m<4$ là giá trị cần tìm. **Chọn** **D.**

**Câu 9.** Phương trình $\left(m^2-4\right)x^2+2\left(m-2\right)x+3=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

**A.** $m\ge 0$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m<-4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le -4 \end{array}\right.$.

**Lời giải**

Xét phương trình $\left(m^2-4\right)x^2+2\left(m-2\right)x+3=0 \quad (*)$.

**TH1.** Với $m^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-2\end{array}\right.$.

- Khi $m=2\Rightarrow(*)\Leftrightarrow 3=0$ (vô lý).
- Khi $m=-2\Rightarrow(*)\Leftrightarrow -8x+3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{8}$.

Suy ra với $m=2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

**TH2.** Với $m^2-4\neq 0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 2\\m\neq -2\end{array}\right.$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x<0$

$\Leftrightarrow\left(m-2\right)^2-3\left(m^2-4\right)<0\Leftrightarrow m^2-4m+4-3m^2+12<0\Leftrightarrow -2m^2-4m+16<0$

$\Leftrightarrow m^2+2m-8>0\Leftrightarrow\left(m-2\right)\left(m+4\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-4\end{array}\right.$.

Suy ra với $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-4\end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\left[\begin{array}{l}m\geq 2\\m<-4\end{array}\right.$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

**Câu 10.** Cho tam thức bậc hai $f\left(x\right)=x^2-bx+3$. Với giá trị nào của $b$ thì tam thức $f\left(x\right)$ có nghiệm?

**A.** $b\in\left[-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right]$. **B.** $b\in\left(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

**C.** $b\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[2\sqrt{3};+\infty\right)$. **D.** $b\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$.

**Lời giải**

Để phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x\geq 0\Leftrightarrow\left(-b\right)^2-4.3\geq 0$

$\Leftrightarrow b^2-12\geq 0\Leftrightarrow b^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow\left(b-2\sqrt{3}\right)\left(b+2\sqrt{3}\right)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b\geq 2\sqrt{3}\\b\leq -2\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Vậy $b\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[2\sqrt{3};+\infty\right)$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

**Câu 11.** Phương trình $x^2+2(m+2)x-2m-1=0$ ($m$ là tham số) có nghiệm khi

**A.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-5\end{array}\right.$. **B.** $-5\leq m\leq -1$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m<-5\\m>-1\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m\leq -5\\m\geq -1\end{array}\right.$.

**Lời giải**

Xét phương trình $x^2+2\left(m+2\right)x-2m-1=0$, có $\Delta'_x=\left(m+2\right)^2+2m+1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta'_x\geq 0\Leftrightarrow m^2+4m+4+2m+1\geq 0\Leftrightarrow m^2+6m+5\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(m+1\right)\left(m+5\right)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq -1\\m\leq -5\end{array}\right.$ là giá trị cần tìm. **Chọn D.**

**Câu 12.** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình

$2x^2+2\left(m+2\right)x+3+4m+m^2=0$ có nghiệm?

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

Xét $2x^2+2(m+2)x+3+4m+m^2=0$, có $\Delta'_x=(m+2)^2-2(m^2+4m+3)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta'_x\ge 0\Leftrightarrow m^2+4m+4-2m^2-8m-6\ge 0\Leftrightarrow -m^2-4m-2\ge 0$

$\Leftrightarrow m^2+4m+2\le 0\Leftrightarrow (m+2)^2\le 2\Leftrightarrow -2-\sqrt{2}\le m\le -2+\sqrt{2}.$

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$, ta được $m=\{-3;-2;-1\}$ là các giá trị cần tìm. **Chọn A.**

**Câu 13.** Tìm các giá trị của $m$ để phương trình $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$ có nghiệm.

**A.** $m\ne 5$. **B.** $-\frac{10}{3}\le m\le 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le -\frac{10}{3} \\ m\ge 1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le -\frac{10}{3} \\ 1\le m\ne 5 \end{array}\right.$.

**Lời giải**

Xét phương trình $(m-5)x^2-4mx+m-2=0 \quad (*)$.

**TH1.** Với $m-5=0\Leftrightarrow m=5$, khi đó $(*)\Leftrightarrow -20x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{20}$.

Suy ra với $m=1$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=\frac{3}{20}$.

**TH2.** Với $m-5\ne 0\Leftrightarrow m\ne 5$, khi đó để phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x\ge 0$

$\Leftrightarrow (-2m)^2-(m-5)(m-2)\ge 0\Leftrightarrow 4m^2-(m^2-7m+10)\ge 0$

$\Leftrightarrow 3m^2+7m-10\ge 0\Leftrightarrow (m-1)(3m+10)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -\frac{10}{3} \end{array}\right.$.

Do đó, với $\left[\begin{array}{l} 5\ne m\ge 1 \\ m\le -\frac{10}{3} \end{array}\right.$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -\frac{10}{3} \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

**Câu 14.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số $m$ sao cho phương trình $(m-1)x^2-2(m+3)x-m+2=0$ có nghiệm.

**A.** $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $-1<m<3$. **D.** $-2<m<2$.

**Lời giải**

Xét phương trình $(m-1)x^2-2(m+3)x-m+2=0 \quad (*)$.

**TH1.** Với $m-1=0\Leftrightarrow m=1$, khi đó $(*)\Leftrightarrow -2.4x-1+2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$.

Suy ra với $m=1$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{8}$.

**TH2.** Với $m-1\ne 0\Leftrightarrow m\ne 1$, khi đó để phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x\ge 0$

$\Leftrightarrow (m+3)^2-(m-1)(2-m)\ge 0\Leftrightarrow m^2+6m+9-(-m^2+3m-2)\ge 0$

$\Leftrightarrow 2m^2+3m+11\ge 0 \Leftrightarrow 2\left(m+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{79}{8}\ge 0,\ \forall m\in\mathbb{R}$ suy ra $\Delta'_x\ge 0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Do đó, với $m\ne 1$ thì phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Kết hợp hai **TH**, ta được $m\in\mathbb{R}$ là giá trị cần tìm. **Chọn** **B.**

**Câu 15.** Các giá trị $m$ để tam thức $f(x)=x^2-(m+2)x+8m+1$ đổi dấu 2 lần là

**A.** $m\le 0$ hoặc $m\ge 28$. **B.** $m<0$ hoặc $m>28$.

**C.** $0<m<28$. **D.** $m>0$.

**Lời giải**

Tam thức $f(x)$ đổi dấu hai lần $\Leftrightarrow f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\ne 0 \\ \Delta_x=(m+2)^2-4(8m+1)>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2+4m+4-32m-4>0 \Leftrightarrow m^2-28m>0 \Leftrightarrow m(m-28)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>28 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Vậy $m<0$ hoặc $m>28$ là giá trị cần tìm. **Chọn** **B.**

**Câu 16.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho phương trình $x^2+(m+1)x+m-\frac{1}{3}=0$ có nghiệm?

**A.** $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m>1$. **C.** $-\frac{3}{4}<m<1$. **D.** $m>-\frac{3}{4}$.

**Lời giải**

Xét $x^2+(m+1)x+m-\frac{1}{3}=0$, có $\Delta_x=(m+1)^2-4\left(m-\frac{1}{3}\right)=m^2-2m+\frac{7}{3}$.

Ta có $\begin{cases} a=1>0 \\ \Delta'_m=1-\frac{7}{3}=-\frac{4}{3}<0 \end{cases}$ suy ra $m^2-2m+\frac{7}{3}>0,\ \forall m\in\mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi $m\in\mathbb{R}$. **Chọn** **A.**

**Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho phương trình

$(m-1)x^2+(3m-2)x+3-2m=0$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\ne 1$ **C.** $-1<m<6$. **D.** $-1<m<2$.

**Lời giải**

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a=m-1\ne 0 \\ \Delta_x=(3m-2)^2-4(m-1)(3-2m)>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 1 \\ 9m^2-12m+4-4(-2m^2+5m-3)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 1 \\ 17m^2-32m+16>0 \end{cases}$ $(*)$.

Ta có $\begin{cases} a=17>0 \\ \Delta'_m=16^2-17.16=-16<0 \end{cases}$ suy ra $17m^2-32m+16>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Do đó, hệ bất phương trình $(*)\Leftrightarrow m\ne 1$. **Chọn** **B.**

**Câu 18.** Phương trình $(m-1)x^2-2x+m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt khi

**A.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $m \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

**C.** $m \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right) \setminus \{1\}$. **D.** $m \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$.

**Lời giải**

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m-1 \neq 0 \\ \Delta'_x = (-1)^2 - (m-1)(m+1) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1 - m^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right) \setminus \{1\}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right) \setminus \{1\}$. **Chọn C.**

**Câu 19.** Giá trị nào của $m = 0$ thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** $m \in \left(-\infty;-\frac{3}{5}\right) \cup (1;+\infty) \setminus \{3\}$. **B.** $m \in \left(-\frac{3}{5};1\right)$.

**C.** $m \in \left(-\frac{3}{5};+\infty\right)$. **D.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

**Lời giải**

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m-3 \neq 0 \\ \Delta_x = (m+3)^2 + 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 + 6m + 9 + 4\left(m^2 - 2m - 3\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ (m-1)(5m+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -\frac{3}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty;-\frac{3}{5}\right) \cup (1;+\infty) \setminus \{3\}$ là giá trị cần tìm.

**Chọn A.**

**Câu 20.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $mx^2 + 2x + m^2 + 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

**A.** $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$. **B.** $m < 0$. **C.** $m \neq -1$. **D.** $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Dễ thấy $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 0$, phương trình đã cho là phương trình bậc hai.

Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $\frac{a}{c} = \frac{m^2 + 2m + 1}{m} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < 0 \end{cases}$.

**Câu 21.** Xác định $m$ để phương trình $mx^3 - x^2 + 2x - 8m = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn $1$.

**A.** $\frac{1}{7} < m < \frac{1}{6}$. **B.** $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{6}$. **C.** $m > \frac{1}{7}$. **D.** $m > 0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $mx^3-x^2+2x-8m=0\Leftrightarrow (x-2)\left(mx^2+(2m-1)x+4m\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f(x)=mx^2+(2m-1)x+4m=0 \qquad (*) \end{array}\right.$

Để phương trình ban đầu có ba nghiệm phân biệt lớn hơn 1 thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 và khác 2.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 2 khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta>0 \\ f(2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -12m^2-4m+1>0 \\ 4m+2(2m-1)+4m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{6} \\ m\neq \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{6} \end{cases} (1).$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ khác 2.

Theo định lí Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{1-2m}{2} \\ x_1+x_2=4 \end{cases}$.

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $1<x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-1)+(x_2-1)>0 \\ (x_1-1)(x_2-1)>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2-2>0 \\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-2m}{m}-2>0 \\ 4-\dfrac{1-2m}{m}+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-2m}{m}-2>0 \\ 4-\dfrac{1-2m}{m}+1>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-4m}{m}>0 \\ \dfrac{7m-1}{m}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0< \\ \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{1}{7} \\ m<0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{7}<m<\frac{1}{4} \ (2).$$

**Câu 22.** Với giá trị nào của $m$ thì phương trình $(m-1)x^2-2(m-2)x+m-3=0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2+x_1x_2<1$?

**A.** $1<m<3$. **B.** $1<m<2$. **C.** $m>2$. **D.** $m>3$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Phương $(m-1)x^2-2(m-2)x+m-3=0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-1\neq 0 \\ \Delta'\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ (m-2)^2-(m-1)(m-3)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ 1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 1.$$

Theo định lí Vi-et ta có: $x_1+x_2=\dfrac{2m-4}{m-1}$, $x_1x_2=\dfrac{m-3}{m-1}$.

Theo đề ta có: $x_1+x_2+x_1x_2<1 \Leftrightarrow \dfrac{2m-4}{m-1}+\dfrac{m-3}{m-1}<1 \Leftrightarrow \dfrac{2m-6}{m-1}<0 \Leftrightarrow 1<m<3$.

Vậy $1<m<3$ là giá trị cần tìm.

**Câu 23.** Cho phương trình $(m-5)x^2+2(m-1)x+m=0$ $(1)$. Với giá trị nào của $m$ thì $(1)$ có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa $x_1<2<x_2$?

**A.** $m\ge 5$. **B.** $m<\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}<m<5$. **D.** $\frac{8}{3}\le m\le 5$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}m-5\neq 0\\(m-1)^2-m(m-5)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 5\\m>-\frac{1}{3}\end{cases}$ $(*)$.

Khi đó theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2(m-1)}{m-5}\\x_1x_2=\frac{m}{m-5}\end{cases}$.

Với $x_1<2<x_2\Rightarrow(x_1-2)(x_2-2)<0\Leftrightarrow x_1x_2-2(x_1+x_2)+4<0\Leftrightarrow\frac{m}{m-5}+\frac{4(m-1)}{m-5}+4<0$

$\Leftrightarrow\frac{9m-24}{m-5}<0\Leftrightarrow\frac{8}{3}<m<5$. Kiểm tra điều kiện $(*)$ ta được $\frac{8}{3}<m<5$.

**Câu 24.** Tìm giá trị của tham số $m$ để phương trình $x^2-(m-2)x+m^2-4m=0$ có hai nghiệm trái dấu.

**A.** $0<m<4$. **B.** $m<0$ hoặc $m>4$. **C.** $m>2$. **D.** $m<2$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi $m^2-4m<0\Leftrightarrow 0<m<4$.

**Câu 25.** Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $(m-1)x^2-2mx+m=0$ có một nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1?

**A.** $0<m<1$. **B.** $m>1$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $\begin{cases}m>0\\m\neq 1\end{cases}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Với $m-1\neq 0$ ta xét phương trình: $(m-1)x^2-2mx+m=0$ $(1)$.

Ta có: $\Delta'=b'^2-ac=m^2-m(m-1)=m$.

Để phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt thì: $\Delta'>0\Leftrightarrow m>0$.

Giả sử $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của $(1)$ và $x_1>1$, $x_2<1$.

Ta có: $(x_1-1)(x_2-1)<0\Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0$ $(*)$.

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1.x_2=\frac{m}{m-1}\\x_1+x_2=\frac{2m}{m-1}\end{cases}$, thay vào $(*)$ ta có:

$\frac{m}{m-1}-\frac{2m}{m-1}+1<0\Leftrightarrow\frac{-1}{m-1}<0\Leftrightarrow m>1$.

Vậy với $m>1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

**Câu 26.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $x^2-2mx+m+2=0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1^3+x_2^3\le 16$.

**A.** Không có giá trị của $m$. **B.** $m \ge 2$.

**C.** $m \le -1$. **D.** $m \le -1$ hoặc $m = 2$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le -1 \end{array}\right. (1)$.

Theo định lý Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$.

$x_1^3 + x_2^3 \le 16 \Leftrightarrow 8m^3 - 6m(m+2) \le 16 \Leftrightarrow 8m^3 - 6m^2 - 12m - 16 \le 0 \Leftrightarrow (m-2)(8m^2 + 10m + 8) \le 0$

$\Leftrightarrow m - 2 \le 0 \Leftrightarrow m \le 2$.

Kiểm tra điều kiện $(1)$, ta được $m \le -1$ hoặc $m = 2$.

**Câu 27.** Xác định $m$ để phương trình $(x-1)\left[x^2 + 2(m+3)x + 4m + 12\right] = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn $-1$.

**A.** $-\frac{7}{2} < m < -3$ và $m \ne -\frac{19}{6}$. **B.** $m < -\frac{7}{2}$.

**C.** $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m \ne -\frac{16}{9}$. **D.** $-\frac{7}{2} < m < 3$ và $m \ne -\frac{19}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

$(x-1)\left[x^2 + 2(m+3)x + 4m + 12\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + 2(m+3)x + 4m + 12 = 0 \ (*) \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt lớn hơn $-1$ khi và chỉ khi khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ lớn hơn $-1$ và khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + 1 + x_2 + 1 > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ 1 + 2(m+3) + 4m + 12 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ -2m - 4 > 0 \\ 2m + 7 > 0 \\ m \ne -\frac{19}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} < m < -3 \\ m \ne -\frac{19}{6} \end{cases}.$$

**Câu 28.** Tìm $m$ để phương trình $x^2 - mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

**A.** $m > 6$. **B.** $m < 6$. **C.** $6 > m > 0$. **D.** $m > 0$.

**Lời giải**

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m+3) > 0 \\ x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1 x_2 = m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 12 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 6.$$ **Chọn A.**

**Câu 29.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

**A.** $2 < m < 6$. **B.** $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$.

**C.** $m < 0$ hoặc $-3 < m < 6$. **D.** $-3 < m < 6$.

**Lời giải**

. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ m^2-(m-2)(m+3) > 0 \\ \dfrac{2m}{m-2} > 0 \\ \dfrac{m+3}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < m < 6 \\ m < -3 \end{array}\right.$.

**Chọn B.**

**Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để $x^2+2(m+1)x+9m-5=0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

**A.** $m<6$. **B.** $\dfrac{5}{9}<m<1$ hoặc $m>6$.

**C.** $m>1$. **D.** $1<m<6$.

**Lời giải**

Phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2-(9m-5) > 0 \\ -2(m+1) < 0 \\ 9m-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-7m+6 > 0 \\ m > \dfrac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ \dfrac{5}{9} < m < 1 \end{array}\right.$. **Chọn B.**

**Câu 31.** Phương trình $x^2-(3m-2)x+2m^2-5m-2=0$ có hai nghiệm không âm khi

**A.** $m \in \left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$. **B.** $m \in \left[\dfrac{5+\sqrt{41}}{4};+\infty\right)$.

**C.** $m \in \left[\dfrac{2}{3};\dfrac{5+\sqrt{41}}{4}\right]$. **D.** $m \in \left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{41}}{4}\right]$.

**Lời giải**

Phương trình đã cho có hai nghiệm không âm khi và chỉ khi

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-2)^2-4(2m^2-5m-2) > 0 \\ 3m-2 \geq 0 \\ 2m^2-5m-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 \geq 0 \\ m^2+8m+12 \geq 0 \\ 2m^2-5m-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{5+\sqrt{41}}{4}$.

**Chọn B.**

**Câu 32.** Phương trình $2x^2-(m^2-m+1)x+2m^2-3m-5=0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi

**A.** $m<-1$ **hoặc** $m>\dfrac{5}{2}$. **B.** $-1<m<\dfrac{5}{2}$.

**C.** $m \leq -1$ **hoặc** $m \geq \dfrac{5}{2}$. **D.** $-1 \leq m \leq \dfrac{5}{2}$.

**Lời giải**

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$ac<0 \Leftrightarrow 2.(2m^2-3m-5)<0 \Leftrightarrow -1<m<\dfrac{5}{2}$. **Chọn B.**

**Câu 33.** Phương trình $\left(m^2-3m+2\right)x^2-2m^2x-5=0$ có hai nghiệm trái dấu khi

**A.** $m\in(1;2)$. **B.** $m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

**C.** $\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq 2\end{cases}$. **D.** $m\in\varnothing$.

**Lời giải**

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$ac<0\Leftrightarrow\left(m^2-3m+2\right).(-5)<0\Leftrightarrow m^2-3m+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<1\end{array}\right.$. **Chọn** **B.**

**Câu 34.** Giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-2m=0$ có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có trị tuyệt đối lớn hơn là

**A.** $0<m<2$. **B.** $0<m<1$. **C.** $1<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<0\end{array}\right.$.

**Lời giải**

Phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-2m=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2+2x-2m=0$

$\Leftrightarrow(x-m)^2+2(x-m)=0\Leftrightarrow(x-m)(x-m+2)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=m\\ x_2=m-2\end{cases}$.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow\begin{cases}x_1\neq x_2\\ x_1x_2<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<2\quad(\mathrm{I})$.

Với $m\in(0;2)$ suy ra $\begin{cases}x_1>0\\ x_2<0\end{cases}$, theo bài ra, ta có $|x_2|>|x_1|\Leftrightarrow|x_2|^2>|x_1|^2\Leftrightarrow x_2^2-x_1^2>0$

$\Leftrightarrow(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0\Leftrightarrow(m-2-m)(m-2+m)>0\Leftrightarrow 2m-2<0\Leftrightarrow m<1$.

Kết hợp với $(\mathrm{I})$, ta được $0<m<1$ là giá trị cần tìm. **Chọn** **B.**

**Câu 35.** Tìm giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $(m+1)x^2-2mx+m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ khác $0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}<3$ ?

**A.** $m<2\ \vee\ m>6$. **B.** $-2<m\neq -1<2\ \vee\ m>6$.

**C.** $2<m<6$. **D.** $-2<m<6$.

**Lời giải**

Xét phương trình $(m+1)x^2-2mx+m-2=0\quad(*)$, có $\Delta'=m+2$.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $0$ khi và chỉ khi

$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta'>0\\ P\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\neq 0\\ m+2>0\\ m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq\{-1;2\}\\ m>-2\end{cases}\quad(\mathrm{I})$.

Khi đó, gọi $x_1$, $x_2$ là nghiệm của phương trình $(*)$ suy ra $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{2m}{m+1}\\ x_1x_2=\dfrac{m-2}{m+1}\end{cases}$.

Theo bài ra, ta có $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2m}{m-2}<3\Leftrightarrow\frac{m-6}{m-2}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>6\\m<2\end{array}\right.$.

Kết hợp với $(\mathrm{I})$, ta được $\left[\begin{array}{l}m>6\\m\in(-2;-1)\cup(-1;2)\end{array}\right.$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

**Câu 36.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $x^2-(m-1)x+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ khác $0$ thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>1$.

**A.** $m\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(7;+\infty)$.

**B.** $m\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\frac{11}{10}\right)$.

**C.** $m\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)$.

**D.** $m\in(7;+\infty)$.

**Lời giải**

Đặt $f(x)=x^2-(m-1)x+m+2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác $0$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta>0\\f(0)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-6m-7>0\\m+2\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>7\\m<-1.\end{array}\right.\ (*)\\m\neq-2\end{cases}$$

Gọi $x_1$, $x_2$ là nghiệm của phương trình đã cho. Theo Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m-1\\x_1x_2=m+2\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>1\Leftrightarrow\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2.x_2^2}>1\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}>1$

$\Leftrightarrow\frac{(m-1)^2-2(m+2)}{(m+2)^2}>1\Leftrightarrow\frac{8m+7}{(m+2)^2}<0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-2\\m<-\frac{7}{8}\end{cases}\xrightarrow{(*)}-2\neq m<-1$. **Chọn C.**

**Câu 37.** Cho hàm số $f(x)=x^2+2x+m$. Với giá trị nào của tham số $m$ thì $f(x)\geq0,\forall x\in\mathbb{R}$.

**A.** $m\geq1$.

**B.** $m>1$.

**C.** $m>0$.

**D.** $m<2$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $f(x)\geq0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1>0\\\Delta'=1-m\leq0\end{cases}\Leftrightarrow m\geq1$.

**Câu 38.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $x^2-(m+2)x+8m+1\leq0$ vô nghiệm.

**A.** $m\in[0;28]$.

**B.** $m\in(-\infty;0)\cup(28;+\infty)$.

**C.** $m\in(-\infty;0]\cup[28;+\infty)$.

**D.** $m\in(0;28)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $(m+2)^2-4(8m+1)<0\Leftrightarrow m^2-28m<0\ \ 0<m<28$.

**Câu 39.** Tam thức $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-3m+4$ không âm với mọi giá trị của $x$ khi

**A.** $m<3$.

**B.** $m\geq3$.

**C.** $m\leq-3$.

**D.** $m\leq3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2+2(m-1)x+m^2-3m+4\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta'=(m-1)^2-(m^2-3m+4)\le 0$

$\Leftrightarrow m-3\le 0$

$\Leftrightarrow m\le 3$.

Vậy $m\le 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 40.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để với mọi $x\in\mathbb{R}$ biểu thức $f(x)=x^2+(m+2)x+8m+1$ luôn nhận giá trị dương.

**A.** $27$. **B.** $28$. **C.** Vô số. **D.** $26$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$f(x)>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\ \Delta=(m+2)^2-4(8m+1)<0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow m^2-28m<0\Leftrightarrow 0<m<28$

Vậy có $27$ giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 41.** Tìm các giá trị của m để biểu thức $f(x)=x^2+(m+1)x+2m+7>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

**A.** $m\in[2;6]$. **B.** $m\in(-3;9)$. **C.** $m\in(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$. **D.** $m\in(-9;3)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có : $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\ (m+1)^2-4(2m+7)<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2-6m-27<0\Leftrightarrow -3<m<9$.

**Câu 42.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình: $(m+1)x^2-2(m+1)x+4\ge 0(1)$ có tập nghiệm $S=R$?

**A.** $m>-1$. **B.** $-1\le m\le 3$. **C.** $-1<m\le 3$. **D.** $-1<m<3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

TH1: $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$ Bất phương trình (1) trở thành $4\ge 0\forall x\in R$ ( Luôn đúng) (*)

TH2: $m+1\ne 0\Leftrightarrow m\ne -1$ Bất phương trình (1) có tập nghiệm $S=R$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+1>0\\ \Delta'=m^2-2m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -1<m\le 3(**)$$

Từ (*) và (**) ta suy ra: $-1\le m\le 3$.

**Câu 43.** Bất phương trình $(m+1)x^2-2mx-(m-3)<0$ vô nghiệm. Điều kiện cần và đủ của tham số $m$ là

**A.** $\frac{1-\sqrt{7}}{2}\le m\le\frac{1+\sqrt{7}}{2}$. **B.** $1\le m\le\frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

**C.** $m\ne 1$. **D.** $m\ge -1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $f(x)=(m+1)x^2-2mx-(m-3)$

Bất phương trình $(m+1)x^2-2mx-(m-3)<0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x)\geq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

TH1: Với $m=-1$ thì $f(x)=2x+4$

Khi đó $f(x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq -2$ không thỏa mãn nên loại $m=-1$

TH2: Với $m\neq -1$, $f(x)\geq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}$

$a>0\Leftrightarrow m>-1$

$\Delta'=m^2+(m+1)(m-3)=2m^2-2m-3$

$\Delta'\leq 0\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\leq m\leq \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$ suy ra $\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\leq m\leq \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$

**Câu 44.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để tam thức bậc hai $f(x)$ sau đây thỏa mãn $f(x)=-x^2+2x+m-2018<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

**A.** $m>2019$. **B.** $m<2019$. **C.** $m>2017$. **D.** $m<2017$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Vì tam thức bậc hai $f(x)$ có hệ số $a=-1<0$ nên $f(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$\Delta'<0\Leftrightarrow 1-(-1)(m-2018)<0\Leftrightarrow m-2017<0\Leftrightarrow m<2017$.

**Câu 45.** Tìm $m$ để $f(x)=mx^2-2(m-1)x+4m$ luôn luôn âm

**A.** $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$. **B.** $(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

TH1: $m=0$: $f(x)=2x$ đổi dấu (loại $m=0$)

TH2: $m\neq 0$; Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ -3m^2-2m+1<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m<-1\vee m>\dfrac{1}{3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow m<-1$

Vậy $m<-1$.

**Câu 46.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $\dfrac{-x^2+2x-5}{x^2-mx+1}\leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**A.** $m\in\varnothing$. **B.** $m\in(-2;2)$.

**C.** $m\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $m\in[-2;2]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $-x^2+2x-5=-(x-1)^2-4<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nên $\dfrac{-x^2+2x-5}{x^2-mx+1}\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2-mx+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta=m^2-4\le 0$

$\Leftrightarrow m\in[-2;2]$.

**Câu 47.** Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $x^2-2(m-1)x+4m+8\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m>7 \\ m<-1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 7 \\ m\le -1 \end{array}\right.$. **C.** $-1\le m\le 7$. **D.** $-1<m<7$.

**Lời giải**

**Chọn C**

BPT nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases} a>0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 1>0 \\ m^2-6m-7\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le 7$.

**Câu 48.** Bất phương trình $x^2+4x+m<0$ vô nghiệm khi

**A.** $m<4$. **B.** $m>4$. **C.** $m\le 4$. **D.** $m\ge 4$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có BPT $x^2+4x+m<0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow f(x)=x^2+4x+m\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases} a>0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 1>0 \\ 4-m\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow m\ge 4.$

**Câu 49.** Bất phương trình $mx^2-2(m+1)x+m+7<0$ vô nghiệm khi

**A.** $m\ge\frac{1}{5}$. **B.** $m>\frac{1}{4}$. **C.** $m>\frac{1}{5}$. **D.** $m>\frac{1}{25}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Trường hợp 1. $m=0$. Khi đó bất phương trình trở thành: $-2x+7<0\Leftrightarrow x>\frac{7}{2}$.

Trường hợp này không thỏa mãn yêu cầu bài toán, loại.

Trường hợp 2. $m\ne 0$. Bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi:

$mx^2-2(m+1)x+m+7\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} m>0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} m>0 \\ 1-5m\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{5}$

**Câu 50.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $mx^2-2mx-1\ge 0$ vô nghiệm.

**A.** $m\in\varnothing$. **B.** $m<-1$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $-1<m\le 0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$mx^2-2mx-1\ge 0$ (1)

+) $m=0$ thì bất phương trình (1) trở thành: $-1>0$ (vô lí). Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+) $m \neq 0$, bất phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi

$\begin{cases} a = m < 0 \\ \Delta' = (-m)^2 - m(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -1 < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0$.

Vậy bất phương trình $mx^2 - 2mx - 1 \geq 0$ vô nghiệm khi $-1 < m \leq 0$.

**Câu 51.** Gọi $S$ là tập các giá trị của $m$ để bất phương trình $x^2 - 2mx + 5m - 8 \leq 0$ có tập nghiệm là $[a;b]$ sao cho $b - a = 4$. Tổng tất cả các phần tử của $S$ là

**A.** $-5$. **B.** $1$. **C.** $5$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Có $x^2 - 2mx + 5m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow (x-m)^2 \leq m^2 - 5m + 8 \Leftrightarrow |x-m| \leq \sqrt{m^2 - 5m + 8}$

$|x-m| \leq \sqrt{m^2 - 5m + 8} \Leftrightarrow m - \sqrt{m^2 - 5m + 8} \leq x \leq m + \sqrt{m^2 - 5m + 8}$.

Vậy tập nghiệm của BPT là $\left[m - \sqrt{m^2 - 5m + 8}; m + \sqrt{m^2 - 5m + 8}\right]$.

Theo bài ra ta có $b - a = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 - 5m + 8} = 4 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 4 \end{array}\right.$

Tổng tất cả các phần tử của $S$ là 5.

**Câu 52.** Tìm các giá trị của tham số $m$ để $x^2 - 2x - m \geq 0,\ \forall x > 0$.

**A.** $m \leq 0$. **B.** $m < -1$. **C.** $m \leq -1$. **D.** $m < 0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $x^2 - 2x - m \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq m$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1 > 0$, hoành độ đỉnh của parabol $x_I = \dfrac{-b}{2a} = 1$. Do đó có bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bbt ta có $x^2 - 2x \geq m,\ \forall x > 0$ khi và chỉ khi $m \leq -1$.

**Câu 53.** Tìm tập hợp các giá trị của $m$ để hàm số $y = \sqrt{(m+10)x^2 - 2(m-2)x + 1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

**A.** $[-1;6]$. **B.** $(-1;6)$. **C.** $(-\infty;-1) \cup (6;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số xác định $\Leftrightarrow (m+10)x^2 - 2(m-2)x + 1 \geq 0\ (*)$.

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $(*)$ đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+) $m = -10$: $(*)$ trở thành: $24x + 1 \geq 0$ không đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $m = -10$ loại.

+) $m \neq -10$: $(*)$ đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-2)^2 - (m+10) \leq 0 \\ m + 10 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-5m-6\le 0 \\ m>-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le m\le 6 \\ m>-10 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le m\le 6$.

Vậy với $-1\le m\le 6$ thì hàm số đã cho có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

**Câu 54.** Cho bất phương trình $(m-2)x^2+2(4-3m)x+10m-11\le 0\ (1)$. Gọi $S$ là tập hợp các số nguyên dương $m$ để bất phương trình đúng với mọi $\forall x<-4$. Khi đó số phần tử của $S$ là

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1:**

Đặt $f(x)=(m-2)x^2+2(4-3m)x+10m-11$

**TH1:** $m-2=0\Leftrightarrow m=2$

$(1)\Leftrightarrow -4x+9\le 0\Leftrightarrow x\ge \dfrac{9}{4}$ không thỏa đề

**TH2:** $m-2\ne 0\Leftrightarrow m\ne 2$

$\Delta'=(4-3m)^2-(m-2)(10m-11)=-m^2+7m-6$

Bảng xét dấu $\Delta'$

| $m$ | $-\infty$ | | $1$ | | $6$ | | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta'$ | | - | 0 | + | 0 | - | |

* Nếu $m>6$ thì $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ không thỏa đề

*** Nếu $m\le 1$ thì $f(x)<0\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa đề**

* Nếu $2<m<6$ thì $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$

Bảng xét dấu $f(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

Khi đó $f(x)\le 0\ \forall x\in(x_1,x_2)$ không thỏa đề

* Nếu $1<m<2$ thì $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$

Bảng xét dấu $f(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |

Khi đó $f(x)\le 0\ \ \forall x<-4\Leftrightarrow -4\le x_1<x_2$

$$\Leftrightarrow 0\le x_1+4<x_2+4\Leftrightarrow \begin{cases}x_1+4+x_2+4>0\\(x_1+4)(x_2+4)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2+8>0\\x_1x_2+4(x_1+x_2)+16\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2(3m-4)}{m-2}+8>0\\\dfrac{10m-11}{m-2}+\dfrac{8(3m-4)}{m-2}+16\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{14m-24}{m-2}>0\\\dfrac{50m-75}{m-2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}14m-24<0\\50m-75\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{12}{7}\\m\le\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m\le\frac{3}{2}$$

So sánh điều kiện suy ra $1<m\le\frac{3}{2}$.

Vậy $m\le\frac{3}{2}$. Khi đó $S=\{1\}$.

**Cách 2:**

Ta có $(m-2)x^2+2(4-3m)x+10m-11\le 0\ (1)$

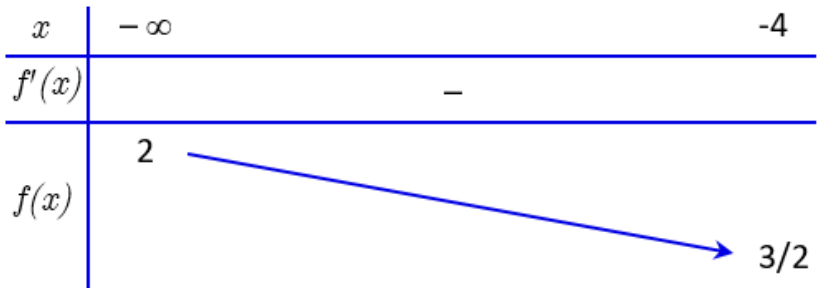
$\Leftrightarrow m(x^2-6x+10)-2x^2+8x-11\le 0\Leftrightarrow m\le\dfrac{2x^2-8x+11}{x^2-6x+10}$ ( vì $x^2-6x+10>0;\forall x<-4$ ).

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+11}{x^2-6x+10}$ với $x<-4$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{(4x-8)(x^2-6x+10)-(2x-6)(2x^2-8x+11)}{(x^2-6x+10)^2}=\dfrac{-4x^2+18x-14}{(x^2-6x+10)^2}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7}{2}(l)\\x=1\ (l)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:




Bất phương trình $(1)$ nghiệm đúng với mọi $x<-4\Leftrightarrow m\le f(x),\forall x<-4\Leftrightarrow m\le\frac{3}{2}$.

Vậy $m\le\frac{3}{2}$. Khi đó $S=\{1\}$.

**Câu 55.** Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y=1-\sqrt{(m+1)x^2-2(m-1)x+2-2m}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn** B

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow (m+1)x^2-2(m-1)x+2-2m\geq 0$ (1) nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$.

**Trường hợp 1:** $m=-1 \Rightarrow$ bpt (1) $\Leftrightarrow 4x+4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ không nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$.

**Trường hợp 2:** $m\neq -1 \Rightarrow$ bpt (1) nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ (m-1)^2-(m+1)(2-2m)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ 3m^2-2m-1\leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ -\frac{1}{3}\leq m\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\leq m\leq 1.$$

Vì m nguyên nên $m\in\{0\ ;\ 1\}$.

**Câu 56.** Để bất phương trình $5x^2-x+m\leq 0$ vô nghiệm thì $m$ thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

**A.** $m\leq\frac{1}{5}$. **B.** $m>\frac{1}{20}$. **C.** $m\leq\frac{1}{20}$. **D.** $m>\frac{1}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Bất phương trình $5x^2-x+m\leq 0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow 5x^2-x+m>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta<0 \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-20m<0 \\ 5>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{1}{20}.$$

**Câu 57.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\sqrt{x^2-2mx-2m+3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Hàm số $y=\sqrt{x^2-2mx-2m+3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi $x^2-2mx-2m+3\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'\leq 0 \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3\leq 0 \\ 1>0 \end{cases} \Leftrightarrow -3\leq m\leq 1.$$ Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 58.** Tìm tất cả cách giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $(m+1)x^2+mx+m<0$ đúng vơi mọi $x$ thuộc $\mathbb{R}$.

**A.** $m>\frac{4}{3}$. **B.** $m>-1$. **C.** $m<-\frac{4}{3}$. **D.** $m<-1$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

- Với $m=-1$ ta có: $x>-1$ không thỏa mãn.
- Với $m\neq -1$ ta có:

$$(m+1)x^2+mx+m<0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}m+1<0\\ m^2-4(m+1)m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1\\ \left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{4}{3}\\ m>0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m<-\frac{4}{3}.$$

**Câu 59.** Tìm tất cả giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $-x^2+2x-m-1>0$ vô nghiệm:

**A.** $m>0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\ge 0$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

$-x^2+2x-m-1>0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow -x^2+2x-m-1\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0\\ -m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 0$.

**Câu 60.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $-x^2+x-m>0$ vô nghiệm.

**A.** $m\ge\frac{1}{4}$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m>\frac{1}{4}$. **D.** $m<\frac{1}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Bất phương trình $-x^2+x-m>0$ vô nghiệm khi và chỉ khi $-x^2+x-m\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $-x^2+x-m\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta\le 0\Leftrightarrow 1-4m\le 0\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{4}$.

**Câu 61.** Bất phương trình $(m-1)x^2-2(m-1)x+m+3\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi

**A.** $m\in[1;+\infty)$. **B.** $m\in(2;+\infty)$. **C.** $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-2;7)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

$$(m-1)x^2-2(m-1)x+m+3\ge 0\text{ với mọi }x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-1=0\\ m+3\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}m-1>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ \begin{cases}m>1\\ -4(m-1)\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ge 1.$$

**Câu 62.** Cho hàm số $f(x)=-x^2-2(m-1)x+2m-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để $f(x)>0$, $\forall x\in(0;1)$.

**A.** $m>1$. **B.** $m<\frac{1}{2}$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m\ge\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có $f(x)>0$, $\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow -x^2-2(m-1)x+2m-1>0$, $\forall x\in(0;1)$.

$\Leftrightarrow -2m(x-1)>x^2-2x+1$, $\forall x\in(0;1)$ $(*)$.

Vì $x\in(0;1)\Rightarrow x-1<0$ nên $(*)\Leftrightarrow -2m<\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}=x-1=g(x)$, $\forall x\in(0;1)$.

$\Leftrightarrow -2m\le g(0)=-1\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{2}$.

**Câu 63.** Hệ bất phương trình $\begin{cases}(x+5)(3-x)>0\\ x-3m+2<0\end{cases}$ vô nghiệm khi

**A.** $m \le -1$. **B.** $m \ge -1$. **C.** $m > -1$. **D.** $m < -1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\begin{cases} (x+5)(3-x) > 0 \\ x - 3m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 3 \\ x < 3m - 2 \end{cases}$

Để hệ vô nghiệm thì $3m - 2 \le -5 \Leftrightarrow 3m \le -3 \Leftrightarrow m \le -1$.

**Câu 64.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 < 0 \\ x^2 - (2m+1)x + m(m+1) \le 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

**A.** $\frac{1}{2} \le m \le 2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \le -\frac{1}{2} \\ m \ge 2 \end{array}\right.$. **C.** $\frac{1}{2} < m < 1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < -\frac{1}{2} \\ m > 2 \end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Xét hệ bất phương trình $(I)\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 < 0 \ (1) \\ x^2 - (2m+1)x + m(m+1) \le 0 \ (2) \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow (2x-1)(x-2) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2 \Leftrightarrow S_1 = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

$(2) \Leftrightarrow (x-m)\left[x - (m+1)\right] \le 0 \Leftrightarrow m \le x \le m+1 \Leftrightarrow S_2 = [m; m+1]$.

Hệ $(I)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -\frac{1}{2} \\ m \ge 2 \end{array}\right.$.

**Câu 65.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x > 5 \\ x^2 - (m-1)x - m \le 0 \end{cases}$ có nghiệm.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m \ge 5 \\ m < -1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \ge 5 \\ m \le -1 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m > 5 \\ m \le -1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m > 5 \\ m < -1 \end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\begin{cases} x^2 - 4x > 5 \\ x^2 - (m-1)x - m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ x < -1 \end{array}\right. \ (*) \\ (x+1)(x-m) \le 0 \ (**) \end{cases}$

+) Nếu $m = -1$ thì $(**) \Leftrightarrow x = -1$. Kết hợp $(*)$ suy ra hệ bpt vô nghiệm $\Rightarrow m = -1$ loại.

+) Nếu $m > -1$ thì $(**) \Leftrightarrow -1 < x < m$. Kết hợp với $(*)$ suy ra hệ bpt có nghiệm $\Leftrightarrow m > 5$.

+) Nếu $m < -1$ thì $(**) \Leftrightarrow m < x < -1$. Kết hợp với $(*)$ suy ra với $m < -1$ thì hệ bpt luôn có nghiệm.

Vậy hệ bpt có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 5 \\ m < -1 \end{array}\right.$.

**Câu 66.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 \\ x < m - 1 \end{cases}$ vô nghiệm khi

**A.** $m \le -2$. **B.** $m > -2$. **C.** $m < -1$. **D.** $m = 0$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

$\begin{cases}(x+3)(4-x)>0\\ x<m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<x<4\\ x<m-1\end{cases}$

Do đó hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm khi $m-1\le -3\Leftrightarrow m\le -2$.

**Câu 67.** Hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-1\le 0\\ x-m>0\end{cases}$ có nghiệm khi

**A.** $m>1$. **B.** $m<1$. **C.** $m\ne 1$. **D.** $m=1$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $x^2-1\le 0\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

$x-3>0\Leftrightarrow x>m$.

Do đó hệ có nghiệm khi $m<1$.

**Câu 68.** Hệ bất phương trình $\begin{cases}2x+m<0 & (1)\\ 3x^2-x-4\le 0 & (2)\end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

**A.** $m>-\frac{8}{3}$. **B.** $m<2$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m\ge -\frac{8}{3}$.

**Lời giải**

Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow -1\le x\le \frac{4}{3}$. Suy ra $S_1=\left[-1;\frac{4}{3}\right]$

Bất phương trình $(2)\Leftrightarrow x<-\frac{m}{2}$. Suy ra $S_2=\left(-\infty;-\frac{m}{2}\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2=\varnothing\Leftrightarrow -\frac{m}{2}\le -1\Leftrightarrow m\ge 2$.

**Chọn C.**

**Câu 69.** Hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-1\le 0(1)\\ x-m>0(2)\end{cases}$ có nghiệm khi:

**A.** $m>1$. **B.** $m=1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\ne 1$.

**Lời giải**

Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow -1\le x\le 1$. Suy ra $S_1=[-1;1]$.

Bất phương trình $(2)\Leftrightarrow x>m$. Suy ra $S_2=(m;+\infty)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2\ne\varnothing\Leftrightarrow m<1$.

**Chọn C.**

**Câu 70.** Hệ bất phương trình $\begin{cases}(x+3)(4-x)>0(1)\\ x<m-1(2)\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

**A.** $m<5$. **B.** $m>-2$. **C.** $m=5$. **D.** $m>5$.

**Lời giải**

Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow -3<x<4$. Suy ra $S_1=(-3;4)$.

Bất phương trình có $S_2=(-\infty;m-1)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow m-1>-3 \Leftrightarrow m>-2$. **Chọn B.**

**Câu 71.** Tìm $m$ để $-9<\dfrac{3x^2+mx-6}{x^2-x+1}<6$ nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

**A.** $-3<m<6$. **B.** $-3 \le m \le 6$. **C.** $m<-3$. **D.** $m>6$.

**Lời giải**

Bất phương trình đã cho tương tương với

$$-9\left(x^2-x+1\right)<3x^2+mx-6<6\left(x^2-x+1\right) (\text{do } x^2-x+1>0 \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2+(m-9)x+3>0 \ (1) \\ 3x^2-(m+6)x+12>0 \ (2) \end{cases}$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow$ (1) và (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)}<0 \\ \Delta_{(2)}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-9)^2-144<0 \\ (m+6)^2-144<0 \end{cases} \Leftrightarrow -3<m<6.$$

**Câu 72.** Xác định $m$ để với mọi $x$ ta có $-1 \le \dfrac{x^2+5x+m}{2x^2-3x+2}<7$.

**A.** $-\dfrac{5}{3} \le m<1$. **B.** $1<m \le \dfrac{5}{3}$. **C.** $m \le -\dfrac{5}{3}$. **D.** $m<1$.

**Lời giải**

Bất phương trình tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2+2x+2+m}{2x^2-3x+2} \ge 0 \\ \dfrac{13x^2-26x+14-m}{2x^2-3x+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+2x+2+m \ge 0 (1) \\ 13x^2-26x+14-m>0 (2) \end{cases}.$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow$ (1) và (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \le 0 \\ \Delta_{(2)}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2-4.3(2+m) \le 0 \\ 26^2-4.13(14-m)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \dfrac{-5}{3} \\ m<1 \end{cases}.$$ **Chọn A.**

**Câu 73.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-2mx+1 \le 0 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

**A.** $m>1$. **B.** $m=1$. **C.** $m<1$. **D.** $m \neq 1$.

**Lời giải**

Bất phương trình $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Suy ra $S_1=(1;+\infty)$.

Bất phương trình $x^2-2mx+1 \le 0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2 \le m^2-1 \Leftrightarrow (x-m)^2 \le m^2-1$

$\Leftrightarrow -\sqrt{m^2-1} \le x-m \le \sqrt{m^2-1}$ (điều kiện: $m^2-1 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -1 \end{array}\right.$)

$\Leftrightarrow m-\sqrt{m^2-1} \le x \le m+\sqrt{m^2-1}$. Suy ra $S_2=\left[m-\sqrt{m^2-1};m+\sqrt{m^2-1}\right]$.

Để hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m+\sqrt{m^2-1}>1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2-1} > 1-m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-m<0\\ m^2-1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}1-m\ge 0\\ m^2-1>(1-m)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>1\\ m\le -1 \vee m\ge 1\end{cases}\\ \begin{cases}m\le 1\\ m>1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow m>1$$

Đối chiếu điều kiện, ta được $m>1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

**Câu 74.** Tìm $m$ để hệ $\begin{cases}x^2-2x+1-m\le 0 & (1)\\ x^2-(2m+1)x+m^2+m\le 0 & (2)\end{cases}$ có nghiệm.

**A.** $0<m<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $0\le m\le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

**C.** $0\le m<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $0<m\le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

**Lời giải**

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta' = m\ge 0$.

Khi đó $(1)$ có tập nghiệm $S_1=\left[1-\sqrt{m};1+\sqrt{m}\right]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2=[m;m+1]$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2\ne\varnothing \Leftrightarrow \begin{cases}m\le 1+\sqrt{m}\\ 1-\sqrt{m}\le m+1\end{cases} \Leftrightarrow 0\le m\le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **Chọn B.**

**Câu 75.** Tìm $m$ sao cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-3x-4\le 0(1)\\ (m-1)x-2\ge 0(2)\end{cases}$ có nghiệm.

**A.** $-1\le m\le \dfrac{3}{2}$. **B.** $m\ge \dfrac{3}{2}$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m\ge -1$.

**Lời giải**

Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow -1\le x\le 4$. Suy ra $S_1=[-1;4]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m-1=0\Leftrightarrow m=1$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x\ge 2$ : vô nghiệm.

Với $m-1>0\Leftrightarrow m>1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x\ge \dfrac{2}{m-1}$.

Suy ra $S_2=\left[\dfrac{2}{m-1};+\infty\right)$.Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\dfrac{2}{m-1}\le 4\Leftrightarrow m\ge \dfrac{3}{2}$.

Với $m-1<0\Leftrightarrow m<1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x\le \dfrac{2}{m-1}$.

Suy ra $S_2=\left(-\infty;\dfrac{2}{m-1}\right]$.

Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\dfrac{2}{m-1}\ge -1\Leftrightarrow m\le -1$ (không thỏa)

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge \dfrac{3}{2}$. **Chọn B.**

**Câu 76.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số $m$ để hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2+10x+16\le 0(1)\\ mx\ge 3m+1(2)\end{cases}$ vô nghiệm.

**A.** $m>-\frac{1}{5}$. **B.** $m>\frac{1}{4}$. **C.** $m>-\frac{1}{11}$. **D.** $m>\frac{1}{32}$.

**Lời giải**

Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow -8\le x\le -2$. Suy ra $S_1=[-8;-2]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m=0$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x\ge 1$: vô nghiệm.

Với $m>0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x\ge\frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2=\left[\frac{3m+1}{m};+\infty\right)$.

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi $\frac{3m+1}{m}>-2\Leftrightarrow m>-\frac{1}{5}$.

Với $m<0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x\le\frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2=\left(-\infty;\frac{3m+1}{m}\right]$.Hệ bất phương trình vô nghiệm khi

$\frac{3m+1}{m}<-8\Leftrightarrow m>\frac{-1}{11}$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m>-\frac{1}{11}$. **Chọn C.**

**Câu 77.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-2(a+1)x+a^2+1\le 0(2)\\ x^2-6x+5\le 0(1)\end{cases}$. Để hệ bất phương trình có nghiệm, giá trị thích hợp của tham số $a$ là:

**A.** $0\le a\le 2$. **B.** $0\le a\le 4$. **C.** $2\le a\le 4$. **D.** $0\le a\le 8$.

**Lời giải**

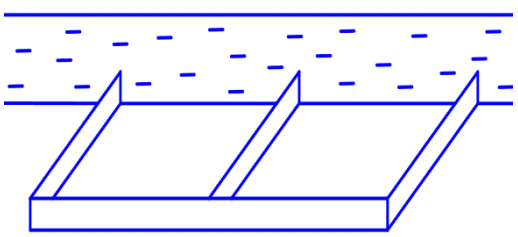
Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow 1\le x\le 5$. Suy ra $S_1=[1;5]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2=\left[a+1-\sqrt{2a};a+1+\sqrt{2a}\right]$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2\ne\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}a+1+\sqrt{2a}\ge 1\\ a+1-\sqrt{2a}\le 5\end{cases}\Leftrightarrow 0\le a\le 2$. **Chọn A.**

## Dạng 3. Ứng dụng của bất phương trình bậc hai một ẩn

**Câu 1.** Một người nông dân có 6 triệu đồng để làm một hàng rào chữ $E$ dọc theo một con sông (*như hình vẽ*) làm một khu đất có hai phần là hình chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 40000 đồng một mét. Tính diện tích lớn nhất của khu đất rào thu được.



**A.** 1245. **B.** 1250. **C.** 1255. **D.** 1260.

**Lời giải**

**Chọn B**

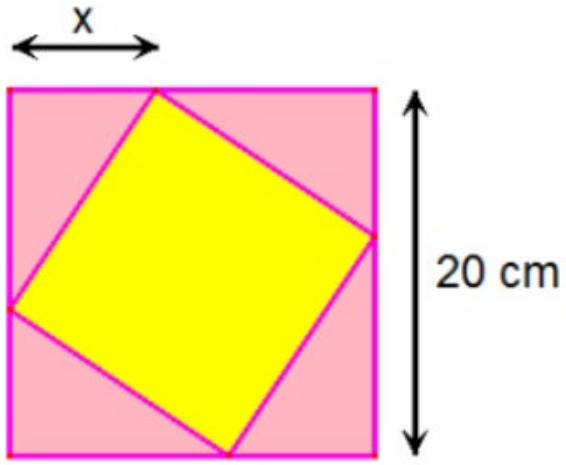
Giả sử độ dài của một hàng rào vuông góc bờ sông là $x\,(m)$ và độ dài của hàng rào song song với bờ sông là $y(m)\ (x, y > 0)$.

Khi đó, tổng số tiền để mua hàng rào là $3x.40000 + y.60000 = 6000000 \Leftrightarrow y = 100 - 2x$.

Diện tích khu đất là $S = x.y = x(100 - 2x) = -2(x - 25)^2 + 1250 \le 1250$.

Vậy diện tích khu đất lớn nhất là $1250(m^2)$ khi $x = 25(m)$ và $y = 50(m)$.

**Câu 2.** Một viên gạch hình vuông có cạnh thay đổi được đặt nội tiếp trong một hình vuông có cạnh bằng $20\,cm$, tạo thành bốn tam giác xung quanh như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của $x$ để diện tích viên gạch không vượt quá $208\,cm^2$.

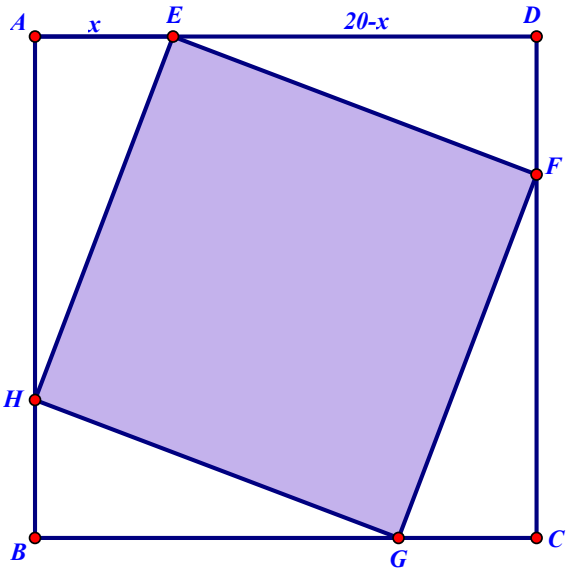



**A.** $8 \le x \le 12$. **B.** $6 \le x \le 14$. **C.** $12 \le x \le 14$. **D.** $12 \le x \le 18$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $E, F, G, H$ là bốn đỉnh của viên gạch hình vuông nội tiếp trong hình vuông $ABCD$ có cạnh $20\,cm$ như hình vẽ




Ta có cạnh viên gạch là $EF = \sqrt{x^2 + (20 - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 40x + 400}$.

Diện tích của viên gạch là: $EF^2 = 2x^2 - 40x + 400$.

Theo đề ta có diện tích viên gạch không vượt quá $208\,cm^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 400 \le 208 \Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 192 \le 0 \Leftrightarrow 8 \le x \le 12$.

**Câu 3.** Công ty du lịch Hòa Bình dự định tổ chức một tua đi Sapa từ Hà Nội. Công ty dự định nếu giá tua

là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất ?

**A.** 1.875.000 **(đồng).** **B.** 1.375.000 **(đồng).**

**C.** 1.675.000 **(đồng).** **D.** 1.475.000 **(đồng).**

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $x$ (triệu đồng) là giá tua ($0 < x < 2$)

Giá đã giảm so với ban đầu là $2 - x$

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán $x$ là $\dfrac{(2-x)20}{0,1} = 400 - 200x$

Số người sẽ tham gia nếu bán giá $x$ là $150 + 400 - 200x = 450 - 200x$

Tổng doanh thu là $f(x) = x(550 - 200x)$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ với $0 < x < 2$. Có

$$x(550 - 200x) = \frac{200x(550 - 200x)}{200} \le \frac{3025}{8} = 378,125$$

Khi đó $x = \dfrac{11}{8}$ (triệu) vậy chọn B

**Câu 4.** Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc**.** Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

**A.** 39.000. **B.** 43.000. **C.** 40.000. **D.** 42.000.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là $x$ (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng $x$ (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiế**c.** Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng). Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là: $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000 = -100(x - 9)^2 + 44100 \le 44100$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 9$.

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

**Câu 5.** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có $x$ con cá ($x \in \mathbb{Z}^+$) thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $480 - 20x$ (*gam*). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau mỗi vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

**A.** 10. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 24.

**Lời giải**

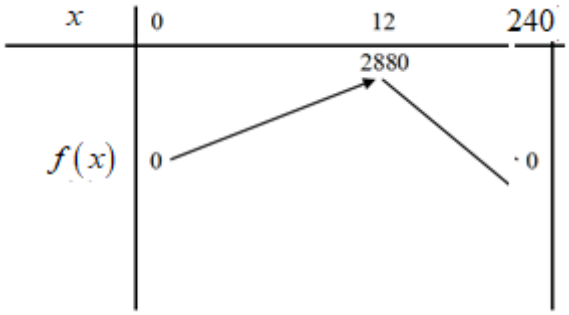
**Chọn B**

Cân nặng của $x$ con cá là: $f(x)=x.(480-20x)=480x-20x^2$, $(0<x<240)$.

Xét hàm số $f(x)=-20x^2+480x$ trên $(0;240)$.

Có hoành độ đỉnh $x=12$ và hệ số $a=-20<0$

Lập bảng biến thiên:




Vậy thu hoạch sản lượng cá nhiều nhất thì phải thả trên một đơn vị diện tích mặt hồ 12 con cá.

# Bài 5. HAI PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### 1. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ (I)

$\left(f(x)=ax^2+bx+c,\ g(x)=mx^2+nx+p\ ,\ a\neq m\right)$

Để giải phương trình (I), ta làm như sau:

*Bước 1.* Bình phương hai vế của (I) dẫn đến phương trình $f(x)=g(x)$ rồi tìm nghiệm của phương trình này.

*Bước 2.* Thay từng nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ vào bất phương trình $f(x)\geq 0$ (hoặc $g(x)\geq 0$ ). Nghiệm nào thoả mãn bất phương trình đó thì giữ lại, nghiệm nào không thoả mãn thì loại đi.

*Bước 3.* Trên cơ sở những nghiệm giữ lại ở Bước 2, ta kết luận nghiệm của phương trình (I).

Chú ý:

- Trong hai bất phương trình $f(x)\geq 0$ và $g(x)\geq 0$, ta thường chọn bất phương trình có dạng đơn giản hơn để thực hiện Bước 2.
- Người ta chứng minh được rằng tập hợp (số thực) giữ lại ở Bước 2 chính là tập nghiệm của phương trình (I).

***Ví dụ 1.*** Giải phương trình $\sqrt{x^2-6x-4}=\sqrt{x-4}$ (1).

***Giải***

Bình phương hai vế của (1) ta được $x^2-6x-4=x-4$ (2).

Ta có: $(2)\Leftrightarrow x^2-7x=0$.

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là $x=0$ và $x=7$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x-4\geq 0$, ta thấy chỉ có $x=7$ thoả mãn bất phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=7$.

***Ví dụ 2.*** Giải phương trình $\sqrt{2x^2+3x+1}=\sqrt{x^2+4x+3}$ (3).

***Giải***

Bình phương hai vế của (3) ta được $2x^2+3x+1=x^2+4x+3(4)$.

Ta có: $(4)\Leftrightarrow x^2-x-2=0$.

Do đó, phương trình (4) có hai nghiệm là $x=-1$ và $x=2$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $\sqrt{3x^2-4x+1}=\sqrt{x^2+x-1}$ bất phương trình.

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm là $x=-1$ và $x=2$.

### II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)}=g(x)$ (II)

$\left(f(x)=ax^2+bx+c,\ g(x)=dx+e,a\neq d^2\right)$

Để giải phương trình (II), ta làm như sau:

*Bước 1.* Giải bất phương trình $g(x)\geq 0$ để tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

*Bước 2.* Bình phương hai vế của (II) dẫn đến phương trình $f(x)=[g(x)]^2$ rồi tìm tập nghiệm của phương trình đó.

*Bước 3.* Trong những nghiệm của phương trình $f(x)=[g(x)]^2$, ta chỉ giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình $g(x)\geq 0$. Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm của phương trình (II).

***Ví dụ 3***. Giải phương trình $\sqrt{x^2-6x+6}=2x-1$

***Giải***

Trước hết ta giải bất phương trình $2x-1\ge 0$ (6).

Ta có: (6) $\Leftrightarrow 2x\ge 1\Leftrightarrow x\ge \frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế của (5) ta được $x^2-6x+6=(2x-1)^2$(7).

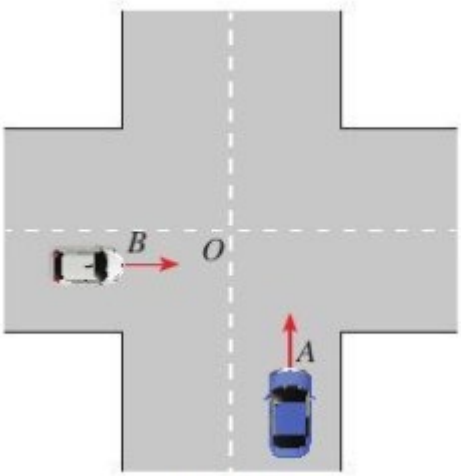
Ta có: (7) $\Leftrightarrow x^2-6x+6=4x^2-4x+1\Leftrightarrow 3x^2+2x-5=0$.

Do đó, phương trình (7) có hai nghiệm là $x=1$ và $x=\frac{-5}{3}$.

Trong hai giá trị trên, chỉ có giá trị $x=1$ là thoả mãn $x\ge \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình (5) có nghiệm là $x=1$.

***Ví dụ 4.*** Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm với vận tốc trung bình như nhau là $40km/h$ từ hai vị trí $A$ và $B$ trên hai con đường vuông góc với nhau để đi về bến $O$ là giao của hai con đường. Vị trí $A$ cách bến $8km$, vị trí $B$ cách bến $7km$. Gọi $x$ là thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau $5km$.




Bạn Dương xác định được $x$ thoả mãn phương trình $\sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2}=5$.Hãy giải thích vì sao thời gian $x$ (giờ) để hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km thoả mãn phương trình $\sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2}=5$. Sau đó, hãy giải phương trình trên.

***Giải.***

Quãng đường xe ô tô xuất phát từ $A,B$ đi được sau $x$ giờ là $40x(km)$.

Sau $x$ giờ, ô tô xuất phát từ vị trí $A$ đến $C$ cách $O$ một khoảng $OC=8-40x(km)$.

Sau $x$ giờ, ô tô xuất phát từ vị trí $B$ đến $D$ cách $O$ một khoảng $OD=7-40x(km)$.

Để $8-40x\ge 0$ và $7-40x\ge 0$ thì $0\le x\le 0{,}175$. Do tam giác $OCD$ là tam giác vuông nên

$CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=\sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2}$.

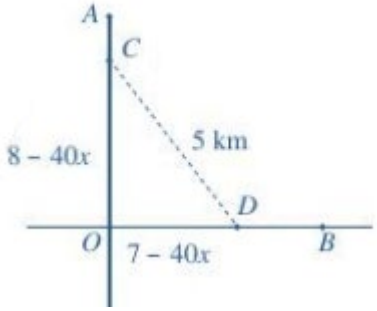
Ta có phương trình: $\sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2}=5$.

Bình phương hai vế ta có:

$(8-40x)^2+(7-40x)^2=25.$

$\Leftrightarrow 1600x^2-640x+64+1600x^2-560x+49=25$

$\Leftrightarrow 3200x^2-1200x+88=0$




$\Leftrightarrow 400x^2-150x+11=0.$

Phương trình có hai nghiệm là $x=0,1$ hoặc $x=0,275$. Đối chiếu vối điều kiện $0\le x\le 0,175$, ta chọn $x=0,1$.

Vậy thời gian để hai xe cách nhau $5km$ là 0,1 giờ.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Nâng lên lũy thừa, trị tuyệt đối hóa, sử dụng bất đẳng thức, đưa về phương trình tích, đặt ẩn phụ.

| Phương trình có dạng | Đặt ẩn phụ |
|---|---|
| $\sqrt{ax+b},x,x^2,...$ | $t=\sqrt{ax+b},t\ge 0$ |
| $\sqrt{ax^2+bx+c},ax^2+bx,...$ | $t=\sqrt{ax^2+bx+c},\text{t}\ge 0$ |
| $\sqrt[3]{ax+b},ax+b,...$ | $t=\sqrt[3]{ax+b}$ |
| $\begin{cases}\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}\\ \sqrt{f(x)}.\sqrt{g(x)}\end{cases},f(x)+g(x)=C$ | $t=\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}$ |
| $\sqrt{f(x)}\pm\frac{A}{\sqrt{f(x)}},f(x)+\frac{A^2}{f(x)}$ | $t=\sqrt{f(x)}\pm\frac{A}{\sqrt{f(x)}}$ |
| $\sqrt[m]{f(x)},\sqrt[n]{f(x)}$ | $t=\sqrt[s]{f(x)}$ với $s$ là bội chung nhỏ nhất của $m$ và $n$ |

**Câu 1.** Giải các phương trình sau:

*a)* $\sqrt{14-2x}=x-3$.

*b)* $\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{2-x}$.

**Câu 2.** Giải các phương trình sau:

*a)* $\sqrt{x-2}-3\sqrt{x^2-4}=0$.

*b)* $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$.

**Câu 3.** Giải các phương trình sau:

*a)* $\sqrt{\sqrt{3}-x}=x\sqrt{\sqrt{3}+x}$.

*b)* $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$.

**Câu 4.** Giải các phương trình sau:

*a)* $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$.

*b)* $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$.

**Câu 5.** Giải các phương trình sau:

*a)* $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}=x+3$.

*b)* $(x+3)\sqrt{2x^2+1}=x^2+x+3$.

**Câu 6.** Giải các phương trình sau:

*a)* $\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{x}=2$.

*b)* $3\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^2+8}=\sqrt{x^2+15}+2$.

**Câu 7.** Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$.

b) $3x^2+21x+18+2\sqrt{x^2+7x+7}=2$.

**Câu 8.** Giải các phương trình sau

a) $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$.

b) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$.

**Câu 9.** Giải các phương trình sau

a) $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$.

b) $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$.

**Câu 10.** Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{60-24x-5x^2}=x^2+5x-10$.

b) $(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)}=28-x$.

**Câu 11.** Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$.

b) $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3$.

**Câu 12.** Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$

b) $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1}=2-x$ là:

**A.** $S=\{1;5\}$. **B.** $S=\{1\}$. **C.** $S=\{5\}$. **D.** $S=\{2;3\}$.

**Câu 2.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1}=-x^2-5$ là

**A.** $S=\{1;5\}$. **B.** $S=\{1\}$. **C.** $S=\{5\}$. **D.** $S=\varnothing$.

**Câu 3.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4-3x^2}=2x-1$ là:

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 4.** Số nghiệm của phương trình $(x-3)\sqrt{4-x^2}=x^2-4x+3$ là:

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 5.** Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)\sqrt{10-x^2}=x^2-3x+2$ là:

**A.** 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 6.** Tập nghiệm $S$ của phương trình $\sqrt{2x-3}=x-3$ là

**A.** $S=\varnothing$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{6;2\}$. **D.** $S=\{6\}$.

**Câu 7.** Tìm số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=\sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y=x-3$.

**A.** 2 giao điểm. **B.** 4 giao điểm. **C.** 3 giao điểm. **D.** 1 giao điểm.

**Câu 8.** Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình: $\sqrt{2x-1}=x-2$ bằng:

**A.** 6. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

**Câu 9.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x-2}=x$ là

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

**Câu 10.** Nghiệm của phương trình $\sqrt{5x+6}=x-6$ bằng

**A.** 15. **B.** 6. **C.** 2 và 15. **D.** 2.

**Câu 11.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{4x+7}=2x-1$ là

**A.** $\left\{\frac{2-\sqrt{10}}{2};\frac{2+\sqrt{10}}{2}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{2+\sqrt{10}}{2}\right\}$.

**C.** $\left\{\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right\}$. **D.** Một phương án khác.

**Câu 12.** Phương trình $\sqrt{-x^2+4x}=2x-2$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 13.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}=x^2-2x+3$ là

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

**Câu 14.** Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+x+1}=x^2+x-1$ là

**A.** 3. **B.** $-3$. **C.** $-1$. **D.** 0.

**Câu 15.** Phương trình $\sqrt{2x^2+3x-5}=x+1$ có nghiệm:

**A.** $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=4$.

**Câu 16.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2-9x+7}=x-2$ là

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

**Câu 17.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+3}=3x-1$. là

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 18.** Phương trình: $\sqrt{x^2-x-12}=7-x$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 0. **B.** 2.

**C.** 1. **D.** Vô Số.

**Câu 19.** Số nghiệm của phương trình sau $x-\sqrt{2x^2-3x+1}=1$ là:

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 20.** Số nghiệm của phương trình $x^2-3x+86-19\sqrt{x^2-3x+16}=0$ là.

**A.** 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 21.** Tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $(x-1)(x-3)+3\sqrt{x^2-4x+5}-2=0$ là:

**A.** 17. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 8.

**Câu 22.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2+5x+2+2\sqrt{x^2+5x+10}=0$ là:

**A.** 5. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 25.

**Câu 23.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}\left(x^2-3x+2\right)=0$ là

**A.** $S=\varnothing$. **B.** $S=\{1\}$. **C.** $S=\{2\}$. **D.** $S=\{1;2\}$.

**Câu 24.** Phương trình $\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{2x+1}-x\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

**A.** 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 25.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{x-2}=0$

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2

**Câu 26.** Tập nghiệm của phương trình $\left(x^2-x-2\right).\sqrt{x-1}=0$ là

**A.** $\{1;2\}$. **B.** $\{-1;1;2\}$. **C.** $[1;2]$. **D.** $\{-1;2\}$.

**Câu 27.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}\left(x^2-4x+3\right)=0$ là

**A.** $S=\{2;3\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{1;3\}$. **D.** $S=\{1;2;3\}$.

**Câu 28.** Tập nghiệm của phương trình $\left(x^2-x-2\right).\sqrt{x-1}=0$ là

**A.** $\{1;2\}$. **B.** $\{-1;1;2\}$. **C.** $\left[1;2\right]$. **D.** $\{-1;2\}$.

**Câu 29.** Phương trình $\left(x^2-6x\right)\sqrt{17-x^2}=x^2-6x$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 30.** Số nghiệm của phương trình $\left(x-2\right)\sqrt{2x+7}=x^2-4$ bằng:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

**Câu 31.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}$ là

**A.** $S=\varnothing$. **B.** $S=\left\{-2;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

**Câu 32.** Nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1}=\sqrt{3-x}$ là

**A.** $x=\frac{3}{4}$. **B.** $x=\frac{2}{3}$. **C.** $x=\frac{4}{3}$. **D.** $x=\frac{3}{2}$.

**Câu 33.** Số nghiệm của phương trình $x\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}$ là

**A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

**Câu 34.** Tìm tập hợp nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}+1$.

**A.** $\{2\}$. **B.** $\{1;-2\}$. **C.** $\{-1;2\}$. **D.** $\{-1\}$.

**Câu 35.** Số nghiệm nguyên của phương trình sau $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=1$ là:

**A.** 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

**Câu 36.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}=1$ là

**A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

**Câu 37.** Số nghiệm của phương trình $x^2+2x+2x\sqrt{x+3}=6\sqrt{1-x}+7$ là

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 38.** Phương trình $x^2+4x+3=(x+1)\sqrt{8x+5}+\sqrt{6x+2}$ có một nghiệm dạng $x=a+\sqrt{b}$ với $a,b>0$. Khi đó: $a+b=$

**A.** 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

**Câu 39.** Biết phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-3}=\sqrt{x^2-1}$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Tính giá trị biểu thức $\left(x_1-1\right).\left(x_2-1\right)$.

**A.** 1. **B.** 0. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Câu 40.** Phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=2x-1+\sqrt{x-2}$ có số nghiệm là:

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

**Câu 41.** Với bài toán: Giải phương trình $\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}+\sqrt{16-x^2}=4$. Một học sinh giải như sau:

Bước 1. Điều kiện: $-4 \le x \le 4$.

Đặt $t = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = 8 - 2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = \dfrac{8-t^2}{2}$.

Bước 2. Ta được phương trình $t + \dfrac{8-t^2}{2} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Bước 3. Với $t = 0$ ta có $\sqrt{16-x^2} = 4 \Leftrightarrow 16 - x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 0$.

Với $t = 2$ ta có $\sqrt{16-x^2} = 2 \Leftrightarrow 16 - x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{0; -2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right\}$.

Hãy chọn phương án đúng.

**A. Lời giải** trên sai ở bước 2.
**B. Lời giải** trên đúng hoàn toàn.
**C. Lời giải** trên sai ở bước 1.
**D. Lời giải** trên sai ở bước 3.

**Câu 42.** Giải phương trình trên tập số thực: $\dfrac{\sqrt{5x-4x^2} - x}{x-1} = 2.$

**A.** $x = 1$. **B.** $x = 4$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$. **D.** $x \in \varnothing$.

**Câu 43.** Số nghiệm của phương trình $\dfrac{\left(x^2 - 3x + 2\right)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}} = 0$

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

**Câu 44.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2-x} + \dfrac{2-x}{\sqrt{x-3}} = 0$ là

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

**Câu 45.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 + 4x - 1} = x + 1$ là?

**A.** $S = \left\{-1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\right\}$. **B.** $S = \left\{-1 + \sqrt{3}\right\}$.

**C.** $S = \left\{-1 - \sqrt{3}\right\}$. **D.** $\varnothing$.

**Câu 46.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} + 5 = 2x$ là?

**A.** $S = \left\{2; \dfrac{14}{5}\right\}$. **B.** $S = \left\{2; 4\right\}$. **C.** $S = \left\{\dfrac{14}{5}\right\}$. **D.** $S = \left\{2\right\}$

**Câu 47.** Khi giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x} + 1 = 3x$ ta tiến hành theo các bước sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được: $x^2 + 3x = \left(3x - 1\right)^2$ (2)

Bước 2: Khai triển và rút gọn (2) ta được: $8x^2 - 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{8} \end{array}\right.$

Bước 3: Khi $x = 1$,ta có $x^2 + 3x > 0$. Khi $x = \dfrac{1}{8}$, ta có $x^2 + 3x > 0$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{1; \dfrac{1}{8}\right\}$

Vậy Cách giải trên **đúng** hay **sai**? Nếu sai thì sai ở bước nào?

**A.** Đúng. **B.** Sai ở bước 1. **C.** Sai ở bước 2. **D.** Sai ở bước 3.

**Câu 48.** Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^3+x^2+6x+28}=x+5$ bằng:

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** –1.

**Câu 49.** Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^4-4x^3+14x-11}=1-x$ bằng:

**A.** –2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** –1.

**Câu 50.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$ là:

**A.** 0 nghiệm. **B.** 1 nghiệm. **C.** 2 nghiệm. **D.** 3 nghiệm.

**Câu 51.** Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$ bằng:

**A.** $3-\sqrt{2}$. **B.** $2+\sqrt{2}$. **C.** $2-\sqrt{2}$. **D.** $5$.

**Câu 52.** Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x}$ là

**A.** $\frac{1}{2}\le x$. **B.** $x=\frac{1}{2}$. **C.** $x\le\frac{1}{2}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

**Câu 53.** $\left[-3;1\right)$ là tập xác định của phương trình nào sau đây?

**A.** $\sqrt{3+x}=\sqrt{\frac{1}{1-x^3}}$ **B.** $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{3-2x-x^2}$

**C.** $\sqrt{-x^2-x+6}=\sqrt{-x^2-3x+4}$ **D.** $\sqrt{1-x}=\sqrt{-x^2-x+6}$

**Câu 54.** Cho phương trình $\sqrt{x^2-2x-3}=\sqrt{x+1}$ (1). Phép biến đổi nào sau đây là **sai?**

**A.** $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0\\x^2-2x-3=x+1\end{cases}$

**B.** $(1)\Leftrightarrow x^2-2x-3=x+1$

**C.** $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-3\ge 0\\x^2-2x-3=x+1\end{cases}$

**D.** $(1)\Rightarrow\begin{cases}x+1\ge 0\\x^2-2x-3\ge 0\\x^2-2x-3=x+1\end{cases}$

**Câu 55.** Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x-3}=\sqrt{x-\frac{5}{4}}$. Một bạn làm như sau:

Bước 1: $\sqrt{x^2-2x-3}=\sqrt{x-\frac{5}{4}}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{5}{4}\ge 0\\x^2-2x-3=x-\frac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{5}{4}\\x^2-3x-\frac{7}{4}=0\end{cases}$

Bước 2: Phương trình $x^2-3x-\frac{7}{4}=0$ có hai nghiệm phân biệt, nên theo định lý Vi-et, ta có tổng hai nghiệm là $S=3$.

Bước 3: Vậy phương trình có tổng các nghiệm là 3.

**Lời giải** trên là đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

**A.** Đúng. **B.** Sai từ bước 1. **C.** Sai từ bước 2. **D.** Sai từ bước 3.

**Câu 56.** Giải phương trình $\sqrt{x^2\left(x-1\right)}=\sqrt{x^2\left(3-x\right)}$ (*), một bạn làm như sau:

Bước 1: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-1) \ge 0 \,(1) \\ x^2(x-1) = x^2(3-x) \,(2) \end{cases}$.

Bước 2: Giải $(1)$: Vì $x^2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Bước 3: $(2) \Leftrightarrow x^2(2x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$.

Kết hợp ta được $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

**Lời giải** trên là đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

**A.** Đúng. **B.** Sai từ bước $1$. **C.** Sai từ bước $2$. **D.** Sai từ bước $3$.

**Câu 57.** Điều kiện xác định của phương trình $\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-2x+1}} = 2$ là

**A.** $1 \le x$ **B.** $x \ne 1$ **C.** $\left[ \begin{array}{l} 2 < x \\ x < 0 \end{array} \right.$ **D.** $x > 1$

**Câu 58.** Điều kiện xác định của phương trình $(x-3)(x+1) + 4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = -3$ là

**A.** $x > 3$ **B.** $\left[ \begin{array}{l} x > 3 \\ x \le -1 \end{array} \right.$ **C.** $\left[ \begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le -1 \end{array} \right.$ **D.** $x \le -1$

**Câu 59.** Phép biến đổi nào sau đây là **sai**

**A.** $\sqrt{5x^2+10x+1} = -x^2-2x+7 \Rightarrow 5x^2+10x+1 = (-x^2-2x+7)^2$

**B.** $\sqrt{5x^2+10x+1} = -x^2-2x+7 \Leftrightarrow 5x^2+10x+1 = (-x^2-2x+7)^2$

**C.** $\sqrt{5x^2+10x+1} = -x^2-2x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+10x+1 = (-x^2-2x+7)^2 \\ -x^2-2x+7 \ge 0 \end{cases}$

**D.** $\sqrt{5x^2+10x+1} = -x^2-2x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{5x^2+10x+1} \ge 0 \\ t = \dfrac{1-t^2}{5} + 7 \end{cases}$

**Câu 60.** Giải phương trình $(x-2)(x-1) + 2(x-2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}} = 0 \;\; (1)$

Bước 1: Điều kiện: $\dfrac{x-1}{x-2} \ge 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x > 2 \\ x \le 1 \end{array} \right.$

Bước 2: $(1) \Leftrightarrow (x-2)(x-1) + 2\sqrt{(x-2)(x-1)} = 0 \quad (2)$

Bước 3: $(2) \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \sqrt{(x-2)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x = 1 \quad (tm) \\ x = 2 \quad (loai) \end{array} \right. \\ \sqrt{(x-2)(x-1)} = -2 \quad (loai) \end{array} \right.$.

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 1$

**Lời giải** trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

**A.** Đúng **B.** Sai từ bước 1 **C.** Sai từ bước 2 **D.** Sai từ bước 3

**Câu 61.** Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{5x^2+10x+1}=-x^2-2x+7$ là

**A.** -3 **B.** -5 **C.** -2 **D.** 2

**Câu 62.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2-x}+\dfrac{2-x}{\sqrt{x-3}}=0$ là

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Câu 63.** Tìm tập hợp nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}+1$.

**A.** $\{2\}$. **B.** $\{1;-2\}$. **C.** $\{-1;2\}$. **D.** $\{-1\}$.

**Câu 64.** Số nghiệm nguyên của phương trình sau $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=1$ là:

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Câu 65.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}=1$ là

**A.** $3$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Câu 66.** Số nghiệm của phương trình $x^2+2x+2x\sqrt{x+3}=6\sqrt{1-x}+7$ là

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 67.** Phương trình $x^2+4x+3=(x+1)\sqrt{8x+5}+\sqrt{6x+2}$ có một nghiệm dạng $x=a+\sqrt{b}$ với $a,b>0$. Khi đó: $a+b=$

**A.** 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

**Câu 68.** Biết phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-3}=\sqrt{x^2-1}$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Tính giá trị biểu thức $(x_1-1).(x_2-1)$.

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Câu 69.** Phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=2x-1+\sqrt{x-2}$ có số nghiệm là:

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Câu 70.** Với bài toán: Giải phương trình $\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}+\sqrt{16-x^2}=4$. Một học sinh giải như sau:

Bước 1. Điều kiện: $-4\le x\le 4$.

Đặt $t=\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\Rightarrow t^2=8-2\sqrt{16-x^2}\Rightarrow\sqrt{16-x^2}=\dfrac{8-t^2}{2}$.

Bước 2. Ta được phương trình $t+\dfrac{8-t^2}{2}=4\Leftrightarrow t^2-2t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$.

Bước 3. Với $t=0$ ta có $\sqrt{16-x^2}=4\Leftrightarrow 16-x^2=16\Leftrightarrow x=0$.

Với $t=2$ ta có $\sqrt{16-x^2}=2\Leftrightarrow 16-x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{0;-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\}$.

Hãy chọn phương án đúng.

**A.** Lời giải trên sai ở bước 2. **B.** Lời giải trên đúng hoàn toàn.

**C.** Lời giải trên sai ở bước 1. **D.** Lời giải trên sai ở bước 3.

**Câu 71.** Giải phương trình trên tập số thực: $\dfrac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1}=2$.

**A.** $x=1$. **B.** $x=4$. **C.** $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$. **D.** $x\in\varnothing$.

**Câu 72.** Số nghiệm của phương trình $\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}=0$

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Câu 73.** Số nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5)=2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$ là

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$

**Câu 74.** Phương trình $\sqrt{x^2+481}-3\sqrt[4]{x^2+481}=10$ có hai nghiệm $\alpha,\beta$. Khi đó tổng $\alpha+\beta$ thuộc đoạn nào sau đây ?

**A.** $[2;5]$. **B.** $[-1;1]$. **C.** $[-10;-6]$. **D.** $[-5;-1]$.

**Câu 75.** Phương trình: $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$ có nghiệm là $a\pm\sqrt{b}$ thì $2a-b$ bằng

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 76.** Giải phương trình: $x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ ta được một nghiệm $x=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, $a,b,c\in\mathbb{N},b<20$. Tính giá trị biểu thức $P=a^3+2b^2+5c$.

**A.** $P=61$. **B.** $P=109$. **C.** $P=29$. **D.** $P=73$.

**Câu 77.** Cho phương trình $\sqrt{2x^2-6x+m}=x-1$. Tìm m để phương trình có một nghiệm duy nhất

**A.** $m>4$. **B.** $4<m<5$. **C.** $3<m<4$. **D.** $m<4$.

**Câu 78.** Tìm $m$ để phương trình $\sqrt{2x^2-x-2m}=x-2$ có nghiệm. Đáp số nào sau đây đúng?

**A.** $m\ge-\frac{25}{4}$. **B.** $m\ge3$. **C.** $m\ge0$. **D.** $m\ge-\frac{25}{8}$.

**Câu 79.** Tìm $m$ để phương trình $\sqrt{2x^2-2x-2m}=x-2$ có nghiệm.

**A.** $m\le1$. **B.** $m\in(1;+\infty)$. **C.** $m>2$. **D.** $m\ge2$.

**Câu 80.** Với mọi giá trị dương của $m$ phương trình $\sqrt{x^2-m^2}=x-m$ luôn có số nghiệm là

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

**Câu 81.** Cho phương trình $\sqrt{x^2-8x+m}=2x-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số để phương trình đã cho vô nghiệm.

**A.** $m\in\left[-\frac{1}{3};\frac{15}{4}\right)$. **B.** $m\in\left(-\frac{1}{3};\frac{15}{4}\right)$. **C.** $m\in\left(-\infty;\frac{15}{4}\right)$. **D.** $m\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$.

**Câu 82.** Tập hợp các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $\sqrt{x^2+2x+2m}=2x+1$ có hai nghiệm phân biệt là $S=(a;b]$. Khi đó giá trị $P=a.b$ là

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Câu 83.** Cho phương trình $\sqrt{-x^2+4x-3}=\sqrt{2m+3x-x^2}$ $(1)$. Để phương trình $(1)$ có nghiệm thì $m\in[a;b]$. Giá trị $a^2+b^2$ bằng

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

**Câu 84.** Số các giá trị nguyên của $m$ để phương trình $\sqrt{x^2-2x-m-1}=\sqrt{2x-1}$ có hai nghiệm phân biệt là

**A.** $0$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Câu 85.** Cho phương trình: $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+2\sqrt{4-x^2}+m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** $4$. **B.** $5$. **C.** vô số. **D.** $10$.

**Câu 86.** Tìm tất cả giá trị $m$ để phương trình $3\sqrt{x-1}-m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm là

**A.** $m<-\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{3}<m\le1$. **C.** $-\frac{1}{3}\le m<1$. **D.** $-\frac{1}{3}<m<1$.

**Câu 87.** Cho hàm số $y=f(x)=\frac{m\sqrt{2018+x}+(m^2-2)\sqrt{2018-x}}{(m^2-1)x}$ có đồ thị là $(C_m)$, ($m$ là tham số). Số giá trị của $m$ để đồ thị $(C_m)$ nhận trục $Oy$ làm trục đối xứng là

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 88.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $\frac{2(x-m)-x-m}{\sqrt{x+3}}=0$ có nghiệm.

**A.** $m\in(-\infty;-1)$. **B.** $m\in(-1;+\infty)$. **C.** $m\in[-1;+\infty)$. **D.** $m\in R$.

**Câu 89.** Số các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2018]$ để phương trình:

$$x^2+(2-m)x+4=4\sqrt{x^3+4x}$$

có nghiệm là

**A.** $2020$. **B.** $2019$. **C.** $2018$. **D.** $2021$.

**Câu 90.** Tìm $m$ để phương trình $\left(\sqrt{5m^2-2m-2}+m-1\right)(x+1)^3+x^2-x-3=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$, ta được điều kiện $m\notin[a;b]$. Giá trị của biểu thức $P=a^2+2b$ bằng

**A.** $P=10$. **B.** $P=12$. **C.** $P=20$. **D.** $P=15$.

**Câu 91.** Cho phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}+3.\sqrt{(x-1)(5-x)}=m$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có nghiệm?

**A.** $6$. **B.** $8$. **C.** $7$. **D.** Vô số.

**Câu 92.** Tìm $m$ để phương trình $x+2\sqrt{x+1}+m=0$ vô nghiệm

**A.** $m\in(2;+\infty)$. **B.** $m\in(1;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;1]$. **D.** $m\in(-\infty;2]$.

**Câu 93.** Phương trình $\sqrt{2x^2-(2m^2+1)x+m^2}=2x-1$ có hai nghiệm phân biệt thì $m\in(a,b)$. Tính $b-a$.

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

**Câu 94.** Phương trình $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=m$ có vô số nghiệm thì giá trị của m thuộc khoảng nào?

**A.** $m\in(1;3)$. **B.** $m\in(2;4)$. **C.** $m\in(3;5)$. **D.** $m\in(4;6)$.

**Câu 95.** Phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=m^2(x+1)$ có nghiệm thì $m\in[a;b]\setminus\{0\}$, tính giá trị của $a^2+b$

**A.** $0$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Câu 96.** Số các nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5)=2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$ là

**A.** $0$ **B.** $1$ **C.** $2$ **D.** $3$

**Câu 97.** Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-x-1}-\sqrt{3-\sqrt{x^2-x-1}}=1$ là

**A.** $\frac{1}{2}$ **B.** $-5$ **C.** $5$ **D.** $1$

**Câu 98.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $2x^2+2x-\sqrt{x^2+x+2\sqrt{x^2+x-1}}=7$ là

**A. 11** **B. - 1** **C. - 9** **D.** $\frac{25}{4}$

**Câu 99.** Nếu phương trình $x^2+2x+\sqrt{-x^2-2x+15}+m=0$ có nghiệm duy nhất thì

**A.** $m\in(-2;0)$ **B.** $m=-4$ **C.** $m\in(-4;0)$ **D.** $m=-\frac{65}{4}$

**Câu 100.** Với giá trị nào của tham số m thì phương trình sau có nghiệm ( ẩn x)

$$2x^2-4x+m+\sqrt{-x^2+2x}=-1$$

**A.** $\frac{-9}{8}\le m\le 0$ **B.** $0\le m\le\frac{1}{4}$ **C.** $-1\le m$ **D.** $-\frac{9}{8}\le m\le -1$

**Câu 101.** Cho phương trình $\sqrt{x^2(1-2x)}=\sqrt{x^2(m+x)}$. Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất?

**A.** $m<-\frac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m<-\frac{1}{2} \end{array}\right.$. **D.** $m>-\frac{1}{2}$.

**Câu 102.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x^2+\sqrt{x+3}}=\sqrt{3-2x-x^2}$ là:

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $2$.

**Câu 103.** Cho phương trình $4\sqrt{2x^2-3x+1}=\sqrt{9x^2+54x+81}$. Tính tổng các nghiệm của phương trình?

**A.** $\frac{13}{23}$. **B.** $5$. **C.** $\frac{102}{23}$. **D.** $\frac{125}{23}$.

**Câu 104.** Biết phương trình $\sqrt{\left(x^2-3x\right)\sqrt{2x^2-5x+2}}=\sqrt{\left(x^2-3x\right)\sqrt{2x^2-5x+2}}$ có tập nghiệm $S$. Phát biểu nào là đúng trong các phát biểu sau?

**A.** $S\cap\left(0;\frac{1}{4}\right)=\varnothing$. **B.** $S=\mathbb{R}$.

**C.** $S=\left(-\infty;0\right]\cup\left[3;+\infty\right)$. **D.** $S$ có hai phần tử.

**Câu 105.** Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\sqrt{m-x^2+\sqrt{2x+9}}=\sqrt{x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** $m>-5$. **B.** $m<-3$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\in\varnothing$.

**Câu 106.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2$ là:

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

**Câu 107.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\sqrt{17+x}+\sqrt{17-x}=8$ là:

**A.** 5. **B.** 2. **C.** 128. **D.** 256.

**Câu 108.** Số nghiệm của phương trình $x+\sqrt{x^2+16}=\frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$ là:

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

**Câu 109.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $4x^3-3x=\sqrt{1-x^2}$ là:

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 110.** Cho phương trình $\sqrt{x^2-1}-x=m$ .Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để phương trình có nghiệm:

**A.** $m\in\left[-1;0\right]\cup\left[1;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left[-1;0\right)\cup\left[1;+\infty\right)$.

**C.** $m\in\left[-2;0\right)\cup\left[2;+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[-2;0\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

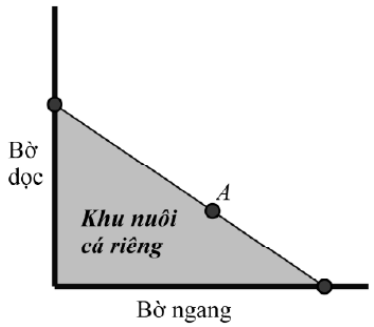
**Câu 111.** Cho phương trình $\sqrt{2x^2+mx-3}=x-m$ .Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để phương trình vô nghiệm:

**A.** $m>1$ **B.** $m\le-1$. **C.** $m>3$. **D.** $m\ge2$

**Câu 112.** Cho phương trình $\sqrt{2x^2-6x+m}=x-1$ .Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt:

**A.** $m\in\left[2;6\right]$ **B.** $m\in\left[4;6\right)$. **C.** $m\in\left[2;5\right)$. **D.** $m\in\left[4;5\right)$

**Câu 113.** Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí $A$. Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là $5m$ và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là $12m$.




**A.** $120m^2$. **B.** $156m^2$. **C.** $238,008(3)m^2$. **D.** $283,003(8)m^2$.

# Bài 5. HAI PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### 1. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ (I)

$\left(f(x)=ax^2+bx+c,\ g(x)=mx^2+nx+p\ ,\ a\neq m\right)$

Để giải phương trình (I), ta làm như sau:

*Bước 1.* Bình phương hai vế của (I) dẫn đến phương trình $f(x)=g(x)$ rồi tìm nghiệm của phương trình này.

*Bước 2.* Thay từng nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ vào bất phương trình $f(x)\geq 0$ (hoặc $g(x)\geq 0$ ). Nghiệm nào thoả mãn bất phương trình đó thì giữ lại, nghiệm nào không thoả mãn thì loại đi.

*Bước 3.* Trên cơ sở những nghiệm giữ lại ở Bước 2, ta kết luận nghiệm của phương trình (I).

Chú ý:

- Trong hai bất phương trình $f(x)\geq 0$ và $g(x)\geq 0$, ta thường chọn bất phương trình có dạng đơn giản hơn để thực hiện Bước 2.
- Người ta chứng minh được rằng tập hợp (số thực) giữ lại ở Bước 2 chính là tập nghiệm của phương trình (I).

***Ví dụ 1.*** Giải phương trình $\sqrt{x^2-6x-4}=\sqrt{x-4}$ (1).

***Giải***

Bình phương hai vế của (1) ta được $x^2-6x-4=x-4$ (2).

Ta có: $(2)\Leftrightarrow x^2-7x=0$.

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là $x=0$ và $x=7$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x-4\geq 0$, ta thấy chỉ có $x=7$ thoả mãn bất phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=7$.

***Ví dụ 2.*** Giải phương trình $\sqrt{2x^2+3x+1}=\sqrt{x^2+4x+3}$ (3).

***Giải***

Bình phương hai vế của (3) ta được $2x^2+3x+1=x^2+4x+3(4)$.

Ta có: $(4)\Leftrightarrow x^2-x-2=0$.

Do đó, phương trình (4) có hai nghiệm là $x=-1$ và $x=2$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $\sqrt{3x^2-4x+1}=\sqrt{x^2+x-1}$ bất phương trình.

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm là $x=-1$ và $x=2$.

### II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)}=g(x)$ (II)

$\left(f(x)=ax^2+bx+c,\ g(x)=dx+e,a\neq d^2\right)$

Để giải phương trình (II), ta làm như sau:

*Bước 1.* Giải bất phương trình $g(x)\geq 0$ để tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

*Bước 2.* Bình phương hai vế của (II) dẫn đến phương trình $f(x)=[g(x)]^2$ rồi tìm tập nghiệm của phương trình đó.

*Bước 3.* Trong những nghiệm của phương trình $f(x)=[g(x)]^2$, ta chỉ giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình $g(x)\geq 0$. Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm của phương trình (II).

***Ví dụ 3***. Giải phương trình $\sqrt{x^2-6x+6}=2x-1$

***Giải***

Trước hết ta giải bất phương trình $2x-1\ge 0$ (6).

Ta có: (6) $\Leftrightarrow 2x\ge 1\Leftrightarrow x\ge \frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế của (5) ta được $x^2-6x+6=(2x-1)^2$(7).

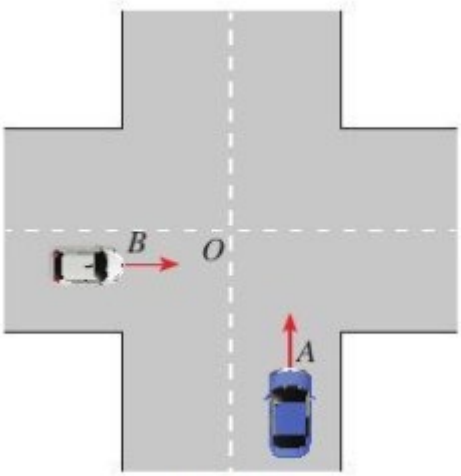
Ta có: (7) $\Leftrightarrow x^2-6x+6=4x^2-4x+1\Leftrightarrow 3x^2+2x-5=0$.

Do đó, phương trình (7) có hai nghiệm là $x=1$ và $x=\frac{-5}{3}$.

Trong hai giá trị trên, chỉ có giá trị $x=1$ là thoả mãn $x\ge \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình (5) có nghiệm là $x=1$.

***Ví dụ 4.*** Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm với vận tốc trung bình như nhau là $40km/h$ từ hai vị trí $A$ và $B$ trên hai con đường vuông góc với nhau để đi về bến $O$ là giao của hai con đường. Vị trí $A$ cách bến $8km$, vị trí $B$ cách bến $7km$. Gọi $x$ là thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau $5km$.




Bạn Dương xác định được $x$ thoả mãn phương trình $\sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2}=5$.Hãy giải thích vì sao thời gian $x$ (giờ) để hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km thoả mãn phương trình $\sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2}=5$. Sau đó, hãy giải phương trình trên.

***Giải.***

Quãng đường xe ô tô xuất phát từ $A,B$ đi được sau $x$ giờ là $40x(km)$.

Sau $x$ giờ, ô tô xuất phát từ vị trí $A$ đến $C$ cách $O$ một khoảng $OC=8-40x(km)$.

Sau $x$ giờ, ô tô xuất phát từ vị trí $B$ đến $D$ cách $O$ một khoảng $OD=7-40x(km)$.

Để $8-40x\ge 0$ và $7-40x\ge 0$ thì $0\le x\le 0{,}175$. Do tam giác $OCD$ là tam giác vuông nên

$CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=\sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2}$.

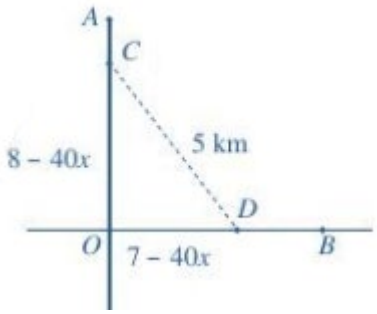
Ta có phương trình: $\sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2}=5$.

Bình phương hai vế ta có:

$(8-40x)^2+(7-40x)^2=25.$

$\Leftrightarrow 1600x^2-640x+64+1600x^2-560x+49=25$

$\Leftrightarrow 3200x^2-1200x+88=0$




$\Leftrightarrow 400x^2-150x+11=0.$

Phương trình có hai nghiệm là $x=0,1$ hoặc $x=0,275$. Đối chiếu vối điều kiện $0\le x\le 0,175$, ta chọn $x=0,1$.

Vậy thời gian để hai xe cách nhau $5km$ là 0,1 giờ.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Nâng lên lũy thừa, trị tuyệt đối hóa, sử dụng bất đẳng thức, đưa về phương trình tích, đặt ẩn phụ.

| Phương trình có dạng | Đặt ẩn phụ |
|---|---|
| $\sqrt{ax+b},x,x^2,...$ | $t=\sqrt{ax+b},t\ge 0$ |
| $\sqrt{ax^2+bx+c},ax^2+bx,...$ | $t=\sqrt{ax^2+bx+c},\text{t}\ge 0$ |
| $\sqrt[3]{ax+b},ax+b,...$ | $t=\sqrt[3]{ax+b}$ |
| $\begin{cases}\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}\\ \sqrt{f(x)}.\sqrt{g(x)}\end{cases},f(x)+g(x)=C$ | $t=\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}$ |
| $\sqrt{f(x)}\pm\dfrac{A}{\sqrt{f(x)}},f(x)+\dfrac{A^2}{f(x)}$ | $t=\sqrt{f(x)}\pm\dfrac{A}{\sqrt{f(x)}}$ |
| $\sqrt[m]{f(x)},\sqrt[n]{f(x)}$ | $t=\sqrt[s]{f(x)}$ với $s$ là bội chung nhỏ nhất của $m$ và $n$ |

**Câu 1.** Giải các phương trình sau:

*a)* $\sqrt{14-2x}=x-3$.

*b)* $\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{2-x}$.

**Lời giải**

a)

$$\sqrt{14-2x}=x-3\Leftrightarrow\begin{cases}x-3\ge 0\\ 14-2x=(x-3)^2\\ 14-2x=(x-3)^2\\ x^2-4x-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 3\\ x=-1\vee x=5\end{cases}\Leftrightarrow x=5.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=5$.

b)

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+2x+4\ge 0\\ 2-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\le 2$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$x^2+2x+4=2-x \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=-2$, $x=-1$.

**Câu 2.** Giải các phương trình sau:

*a)* $\sqrt{x-2}-3\sqrt{x^2-4}=0$.

*b)* $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$.

**Lời giải**

a) Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} x-2\geq 0 \\ x^2-4\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\geq 2$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$\sqrt{x-2}-3\sqrt{(x-2)(x+2)}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}(1-3\sqrt{x+2})=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}=0 \\ 1-3\sqrt{x+2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{17}{9} \end{array}\right. .$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=2$.

b)

Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} x+4\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \\ 1-2x\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -4\leq x\leq \dfrac{1}{2}$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$\sqrt{x+4}=\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-x}.$$

Bình phương hai vế phương trình và rút gọn ta được

$$2x+1=\sqrt{2x^2-3x+1} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+1\geq 0 \\ (2x+1)^2=2x^2-3x+1 \end{array}\right. .$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\geq -\dfrac{1}{2} \\ x^2+7x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\geq -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-7 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0 .$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=0$.

**Câu 3.** Giải các phương trình sau:

*a)* $\sqrt{\sqrt{3}-x}=x\sqrt{\sqrt{3}+x}$.

*b)* $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$.

**Lời giải**

a) Điều kiện: $0\le x\le\sqrt{3}$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$x^3+\sqrt{3}x^2+x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{10}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{10}-1}{\sqrt{3}}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=\frac{\sqrt[3]{10}-1}{\sqrt{3}}$.

b) Điều kiện: $x\ge 3$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$(1+\sqrt{3+x})^2=9x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}+1=3x\\\sqrt{x+3}+1=-3x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{-5-\sqrt{97}}{18}\end{array}\right.\cdot$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=1,x=\frac{-5-\sqrt{97}}{18}$.

**Câu 4.** Giải các phương trình sau:

*a)*$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$.

*b)* $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$.

**Lời giải**

a) Ta có:

$$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3\left(x^2+2x+1+\frac{4}{3}\right)}+\sqrt{5\left(x^2+2x+1+\frac{9}{5}\right)}=-\left(x^2+2x+1\right)+5.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3\left(x+1\right)^2+4}+\sqrt{5\left(x+1\right)^2+9}=5-\left(x+1\right)^2.$$

Phương trình $(1)$ có: $\begin{cases}VT\ge\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5\\VP\le 5\end{cases}$. Do đó: $(1)\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2=0\Leftrightarrow x=-1$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{1\}$.

b) Ta có:

$\sqrt{x+\sqrt{2x-5}-2}+\sqrt{x-3\cdot\sqrt{2x-5}+2}=2.\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sqrt{2x-5}+1\right)^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sqrt{2x-3}-3\right)^2}=2\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5}+1+\left|\sqrt{2x-5}-3\right|=4 \quad (2)$.

Do $\left|3-\sqrt{2x-5}\right|\geq 3-\sqrt{2x-5}$ nên $4=|3-\sqrt{2x-5}|+\sqrt{2x-5}+1\geq 3-\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x-5}+1=4$.

Vậy *(2)* $\Leftrightarrow 3-\sqrt{2x-5}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-5\geq 0\\ 9\geq 2x-5\end{cases} \Leftrightarrow 7\geq x\geq \frac{5}{2}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S=\left[\frac{5}{2};7\right]$.

**Câu 5.** Giải các phương trình sau:

*a)* $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}=x+3$.

*b)* $(x+3)\sqrt{2x^2+1}=x^2+x+3$.

**Lời giải**

a) Điều kiện: $\begin{cases}2x+1\geq 0\\ x-2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -\frac{1}{2}\\ x\geq 2\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 2$.

Nhận thấy $(2x-1)-(x-2)=x+3$ nên ta nhân liên hợp vế trái của phương trình, ta được

$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}=x+3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2}}=x+3$.

$\Leftrightarrow (x+3)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+3=0\\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}-1=0\end{array}\right.$.

Phương trình vô nghiệm với mọi $x\geq 2$.

b)

Ta thấy $x=-3$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x\neq -3$

Phương trình tương đương với:

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=\frac{x^2+x+3}{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}-1=\frac{x^2}{x+3}$.

$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\frac{x^2}{x+3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ 2(x+3)=\sqrt{2x^2+1}+1 \quad (*)\end{array}\right.$.

Phương trình $(*) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=2x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{5}{2} \\ 2x^2+1=4x^2+25+20x \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{5}{2} \\ x^2+10x+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{5}{2} \\ x=-5\pm\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x=5+\sqrt{13}$.

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x=5+\sqrt{13}, x=0$.

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=-2$, $x=-1$.

**Câu 6.** Giải các phương trình sau:

*a)* $\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{x}=2$.

*b)* $3\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^2+8}=\sqrt{x^2+15}+2$.

**Lời giải**

a) Điều kiện: $x \ge \dfrac{2}{3}$.

Nhẩm ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình nên ta tách như sau:

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-2}-1\right)+\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=0$.

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{3x-2}-1\right)\left(\sqrt{3x-2}+1\right)}{\sqrt{3x-2}+1}+\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=0$.

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)=0 \quad (1)$.

Vì $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1=\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ nên $\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}>0$

Do đó phương trình $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=1$.

b)

Phương trình được viết lại như sau: $3\sqrt[3]{x}-2=\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8}$.

Vì $\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8}>0$ nên phương trình có nghiệm thì phải thỏa mãn $3\sqrt[3]{x}-2>0$ hay. $x>\dfrac{8}{27}$.

Phương trình tương đương với:

$3\sqrt[3]{x}-3=\sqrt{x^2+15}-4+3-\sqrt{x^2+8}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{3(x-1)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}-\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3} \quad (2)$.

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}\right)=0$.

Vì $x>\dfrac{8}{27}$ suy ra: $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}>0$ nên

$\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}>0$.

Do đó phương trình $(2)\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Đối chếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x=1$.

**Câu 7.** Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$.

b) $3x^2+21x+18+2\sqrt{x^2+7x+7}=2$.

**Lời giải**

a) Điều kiện $x\ge 1$.

Nhận xét $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=1$.

Đặt $t=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}},t\ge 0$ thì phương trình có dạng $t+\dfrac{1}{t}=2\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1$.

Với $t=1$ ta có

$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=1\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-1}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=x-1\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)=0\Leftrightarrow x=1.$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm phương trình là $x=1$.

Ta có $3x^2+21x+18+2\sqrt{x^2+7x+7}=2\Leftrightarrow 3\left(x^2+7x+7\right)+2\sqrt{x^2+7x+7}=5.$

Đặt $t=\sqrt{x^2+7x+7},t\ge 0$ thì phương trình có dạng

$3t^2+2t-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{5}{3}(loai) \\ t=1(thoa\ man). \end{array}\right.$

Với $t=1$ ta có $\sqrt{x^2+7x+7}=1\Leftrightarrow x^2+7x+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-6,x=-1$.

**Câu 8.** Giải các phương trình sau

a) $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$.

b) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$.

**Lời giải**

a) Đặt $t=\sqrt{x^2+11}, t\ge 0$ thì phương trình có dạng

$$t^2+t-42=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-7\,(loai)\\t=6\,(thoa\,man)\end{array}\right.$$

Với $t=6$ ta có $\sqrt{x^2+11}=6\Leftrightarrow x^2+11=36\Leftrightarrow x=\pm 5$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\pm 5$.

b) Phương trình $\Leftrightarrow x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x}-10=0$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+3x}, t\ge 0$ thì phương trình có dạng

$$t^2+3t-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-5\,(loai)\\t=2\,(thoa\,man)\end{array}\right.$$

Với $t=2$ ta có $\sqrt{x^2+3x}=2\Leftrightarrow x^2+3x-4=0\Leftrightarrow x=-4$ hoặc $x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=1, x=-4$.

**Câu 9.** Giải các phương trình sau

a) $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$.

b) $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$.

**Lời giải**

a) Điều kiện: $x\ge -\dfrac{4}{5}$.

Đặt $t=\sqrt{4x+5}, t\ge 0$ thì $x=\dfrac{t^2-5}{4}$.

Khi đó phương trình trở thành

$$2.\frac{t^4-10t^2+25}{16}-\frac{6}{4}(t^2-5)-1=t$$

$$\Leftrightarrow t^4-22t^2-8t+27=0$$

$$\Leftrightarrow (t^2+2t-7)(t^2-2t-11)=0.$$

Ta tìm được bốn nghiệm là $t_{1,2}=-1\pm 2\sqrt{2}, t_{3,4}=1\pm 2\sqrt{3}$.

Do $t\ge 0$ nên chỉ nhận các giá trị $t_1=-1+2\sqrt{2}, t_3=1+2\sqrt{3}$.

Từ đó tìm được các nghiệm của phương trình $x=1-\sqrt{2}, x=2+\sqrt{3}$.

b) Điều kiện $1\le x\le 6$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}, t\ge 0$ thì phương trình trở thành

$t^2+\sqrt{t+5}=5\Leftrightarrow t^4-10t^2-t+20=0$

$\Leftrightarrow\left(t^2+t-4\right)\left(t^2-t-5\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\\ t=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$ (do $t\ge 0$)

Từ đó ta tìm được các giá trị của $x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$.

**Câu 10.** Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{60-24x-5x^2}=x^2+5x-10.$

b) $(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)}=28-x.$

**Lời giải**

a) Điều kiện $60-24x-5x^2\ge 0.$

Đặt $t=\sqrt{60-24x-5x^2},t\ge 0$ thì phương trình trở thành

$\dfrac{1}{6}t^2+t-\dfrac{1}{6}x^2-x=0\Leftrightarrow t^2+6t-x^2-6x=0.$

Ta có $\Delta_t^{'}=(x+3)^2\ge 0$ suy ra $t=x$ hoặc $t=-x-6.$

Với $t=x$ ta có $\sqrt{60-24x-5x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2+4x-10=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-2+\sqrt{14}.$

Với $t=-x-6$ ta có $\sqrt{60-24x-5x^2}=-x-6\Leftrightarrow\begin{cases}-x-6\ge 0\\ x^2+6x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-3-\sqrt{13}.$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=-2-\sqrt{14},x=-3-\sqrt{13}.$

b) Điều kiện $-x^2-8x+48\ge 0.$

Đặt $t=\sqrt{-x^2=8x+48},t\ge 0$ thì phương trình trở thành $-\dfrac{1}{2}t^2+(x+3)t-\dfrac{1}{2}x^2-3x-4=0.$

Ta có $\Delta_t=1$ suy ra $t=x+2$ hoặc $t=x+4.$

Với $t=x+2$ ta có $\sqrt{-x^2-8x+48}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\ge 0\\ x^2+6x-22=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-3+\sqrt{31}.$

Với $t=x+4$ ta có $\sqrt{-x^2-8x+48}=x+4\Leftrightarrow\begin{cases}x+4\ge 0\\ x^2+8x-16=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-4+4\sqrt{2}.$

Đối chiếu với điều kiện ta đượ nghiệm của phương trình là $x=-3+\sqrt{31},x=-4+4\sqrt{2}.$

Dạng 3.5 Đưa về hệ phương trình

**Câu 11.** Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$.

b) $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3$.

**Lời giải**

a) Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{4x^2+5x+1}\ge 0\\ b=\sqrt{x^2-x+1}\ge 0\end{cases}$, ta được hệ phương trình $\begin{cases}a^2-4b^2=9x-3\\ a-2b=9x-3\end{cases}$

Từ đó ta có $a^2-4b^2=a-2b\Leftrightarrow (a-2b)(a+2b)=0\Leftrightarrow a=2b$ hoặc $a=1-2b$.

Với $a=2b$ ta có $\sqrt{4x^2+4x+1}=2\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Với $a=1-2b$ ta có $\sqrt{4x^2+5x+1}=1-2\sqrt{x^2-x+1}$. (*)

Ta có $\begin{cases}VT(*)\ge 0\\ VP(*)=1-2\sqrt{x^2-x+1}=1-2\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\le 1-\sqrt{3}<0\end{cases}$ suy ra $(*)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{3}$.

b) Điều kiện $x^3+x^2-1\ge 0$.

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x^3+x^2-1}\ge 0\\ v=\sqrt{x^3+x^2+2}\ge 0\end{cases}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}u+v=3\\ v^2-u^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3\\ (v+u)(v-u)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3\\ v-u=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\ v=2\end{cases}.$$

Với $\begin{cases}u=1\\ v=2\end{cases}$ ta có

$$\begin{cases}\sqrt{x^3+x^2-1}=1\\ \sqrt{x^3+x^2+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+x^2-1=1\\ x^3+x^2+2=4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x^3+x^2-2=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+2)=0\Leftrightarrow x=1.$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=1$.

**Câu 12.** Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$

b) $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$.

**Lời giải**

a) Điều kiện $-1\le x\le 1$.

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{1+x}\ge 0\\ v=\sqrt{1-x}\ge 0\end{cases}$, ta được hệ phương trình $\begin{cases}u^2+v^2=2\\ \sqrt{1+uv}\left(u^3-v^3\right)=2+uv\end{cases}$

Ta có $\begin{cases} 1+uv=\dfrac{1}{2}\left(2+2uv\right)=\dfrac{1}{2}\left(u^2+v^2+2uv\right)=\dfrac{1}{2}\left(u+v\right)^2 \\ u^3-v^3=\left(u-v\right)\left(u^2+v^2+uv\right)=\left(u-v\right)\left(1+uv\right). \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} u^2+v^2=2 \\ u^2-v^2=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v^2=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ta có $\begin{cases} 1+x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

b) Điều kiện $x\ge 1.$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x-1}\ge 0 \\ b=\sqrt{5+\sqrt{x-1}}\ge\sqrt{5} \end{cases}$, ta được hệ phương trình $\begin{cases} a^2+b=5 \\ b^2-a=5 \end{cases}.$

Từ đó ta có $\left(a+b\right)\left(a-b+1\right)=0\Leftrightarrow a-b+1=0\Leftrightarrow a=b-1.$

Với $a=b-1$ ta có

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{5+\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+1=\sqrt{5+\sqrt{x-1}}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=5-x\Leftrightarrow x=\frac{11-\sqrt{17}}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện ta đượ nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{11-\sqrt{7}}{2}.$

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1}=2-x$ là:

**A.** $S=\left\{1;5\right\}.$ **B.** $S=\left\{1\right\}.$ **C.** $S=\left\{5\right\}.$ **D.** $S=\left\{2;3\right\}.$

**Lời giải**

Chọn **B**

Thay các giá trị vào phương trình có $x=1$ vào thỏa mãn phương trình.

**Câu 2.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1}=-x^2-5$ là

**A.** $S=\left\{1;5\right\}.$ **B.** $S=\left\{1\right\}.$ **C.** $S=\left\{5\right\}.$ **D.** $S=\varnothing.$

**Lời giải**

Chọn D

Vì $-x^2-5<0$ vậy phương trình vô nghiệm

**Câu 3.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4-3x^2}=2x-1$ là:

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

Chọn B

$$\sqrt{4-3x^2}=2x-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1\ge 0\\4-3x^2=4x^2-4x+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{1}{2}\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{-3}{7}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$\Rightarrow x=1$

Vậy phương trình có 1 nghiệm

**Câu 4.** Số nghiệm của phương trình $(x-3)\sqrt{4-x^2}=x^2-4x+3$ là:

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

Chọn B

Điều kiện xác định $-2\le x\le 2$

$$\begin{aligned}&(x-3)\sqrt{4-x^2}=x^2-4x+3\\\Leftrightarrow&(x-3)\sqrt{4-x^2}=(x-3)(x-1)\\\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{ll}x=3 & (L)\\\sqrt{4-x^2}=x-1(*)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Giải (*)

$$\sqrt{4-x^2}=x-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\2x^2-2x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x\ge 1\\\left[\begin{array}{ll}x=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2} & \text{(TM)}\\x=\dfrac{1-\sqrt{7}}{2} & \text{(L)}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm

**Câu 5.** Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)\sqrt{10-x^2}=x^2-3x+2$ là:

**A.** 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

Chọn A

Điều kiện xác định $-\sqrt{10}\le x\le\sqrt{10}$

$$\begin{aligned}&(x-1)\sqrt{10-x^2}=x^2-3x+2\\\Leftrightarrow&(x-1)\sqrt{10-x^2}=(x-2)(x-1)\\\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}x=1(TM)\\\sqrt{10-x^2}=x-2(*)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Giải (*)

$$\sqrt{10-x^2}=x-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\10-x^2=(x-2)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\\left[\begin{array}{l}x=3(TM)\\x=-1(L)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 4

**Câu 6.** Tập nghiệm $S$ của phương trình $\sqrt{2x-3}=x-3$ là

**A.** $S=\varnothing$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{6;2\}$. **D.** $S=\{6\}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\sqrt{2x-3}=x-3\Leftrightarrow\begin{cases}x-3>0\\2x-3=(x-3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\\2x-3=x^2-6x+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\\x^2-8x+12=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\\\left[\begin{array}{l}x=6\\x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=6.$$

**Câu 7.** Tìm số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=\sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y=x-3$.

**A.** 2 giao điểm. **B.** 4 giao điểm. **C.** 3 giao điểm. **D.** 1 giao điểm.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=\sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y=x-3$ là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm:

$$\sqrt{3x-4}=x-3\Leftrightarrow\begin{cases}x-3\geq 0\\\left(\sqrt{3x-4}\right)^2=(x-3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 3\\3x-4=x^2-6x+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 3\\x^2-9x+13=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 3\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{9-\sqrt{29}}{2}\\x=\dfrac{9+\sqrt{29}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{9+\sqrt{29}}{2}.$$

Vậy đồ thị hàm số $y=\sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y=x-3$ có 1 giao điểm chung.

**Câu 8.** Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình: $\sqrt{2x-1}=x-2$ bằng:

**A.** 6. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn C**

+) Với điều kiện $x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$ ta có phương trình đã cho tương đương với phương trình: $2x-1=(x-2)^2\Leftrightarrow x^2-6x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1(L)\\x=5(t/m)\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

**Câu 9.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x-2}=x$ là

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\sqrt{3x-2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\3x-2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\x^2-3x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có $2$ nghiệm.

**Câu 10.** Nghiệm của phương trình $\sqrt{5x+6}=x-6$ bằng

**A.** $15$. **B.** $6$. **C.** $2$ và $15$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\sqrt{5x+6}=x-6\Leftrightarrow\begin{cases}x-6\ge 0\\5x+6=x^2-12x+36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 6\\x^2-17x+30=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 6\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=15\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=15.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=15$.

**Câu 11.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{4x+7}=2x-1$ là

**A.** $\left\{\dfrac{2-\sqrt{10}}{2};\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}\right\}$. **B.** $\left\{\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}\right\}$.

**C.** $\left\{\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}\right\}$. **D.** Một phương án khác.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\sqrt{4x+7}=2x-1\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\ge 0\\4x+7=(2x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\4x^2-8x-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\x=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$. Vậy $x=\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$.

**Câu 12.** Phương trình $\sqrt{-x^2+4x}=2x-2$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** $3$. **B.** $0$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\sqrt{-x^2+4x}=2x-2\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2\ge 0\\-x^2+4x=(2x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\5x^2-12x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\\left[\begin{array}{l}x=2(n)\\x=\dfrac{2}{5}(l)\end{array}\right.\end{cases}.$$

Vậy $x=2$ là nghiệm của phương trình.

**Câu 13.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}=x^2-2x+3$ là

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $x^2-2x+5>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Đặt $t=x^2-2x+5$, ta có phương trình trở thành $\sqrt{t}=t-2$

$$\sqrt{t}=t-2\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 2\\t=(t-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 2\\t^2-5t+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 2\\\left[\begin{array}{l}t=1\Rightarrow t=4\\t=4\end{array}\right.\end{cases}.$$

Khi đó $4=x^2-2x+5\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$. Thử lại ta thấy $x=1$ thỏa mãn.

Suy ra phương trình đã cho có một nghiệm.

**Câu 14.** Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+x+1}=x^2+x-1$ là

**A.** $3$. **B.** $-3$. **C.** $-1$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $x^2+x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2+x+1}=x^2+x-1\Leftrightarrow x^2+x+1-\sqrt{x^2+x+1}-2=0\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\sqrt{x^2+x+1}-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+x+1}=-1\,(vn)\\ \sqrt{x^2+x+1}=2\,(1)\end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}=2\Leftrightarrow x^2+x-3=0$

Do đó: $x_1.x_2=\dfrac{-3}{1}=-3$.

**Câu 15.** Phương trình $\sqrt{2x^2+3x-5}=x+1$ có nghiệm:

**A.** $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có : $\sqrt{2x^2+3x-5}=x+1\Leftrightarrow \begin{cases}x+1\ge 0\\ 2x^2+3x-5=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ x^2+x-6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

**Câu 16.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2-9x+7}=x-2$ là

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\sqrt{3x^2-9x+7}=x-2\Leftrightarrow \begin{cases}x-2\ge 0\\ 3x^2-9x+7=(x-2)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-2\ge 0\\ 2x^2-5x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Câu 17.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+3}=3x-1.$ là

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện xác định: $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2+3}=3x-1\Leftrightarrow \begin{cases}3x-1\ge 0\\ x^2+3=(3x-1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ 8x^2 - 6x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận.

**Câu 18.** Phương trình: $\sqrt{x^2 - x - 12} = 7 - x$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** $0$. **B.** $2$.

**C.** $1$. **D.** Vô Số.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\sqrt{x^2 - x - 12} = 7 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x \ge 0 \\ x^2 - x - 12 = (7 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 7 \\ 13x = 61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 7 \\ x = \dfrac{61}{13}(tm) \end{cases}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{61}{13}$.

**Câu 19.** Số nghiệm của phương trình sau $x - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 1$ là:

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$x - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 1$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy số nghiệm của phương trình là $1$.

**Câu 20.** Số nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 86 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} = 0$ là.

**A.** $4$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Phương trình $x^2 - 3x + 86 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 16 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} + 70 = 0 (*)$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 16}$, $t \ge 0$. Khi đó $(*) \Rightarrow t^2 - 19t + 70 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 14 (n) \\ t = 5 \ \ (n) \end{array}\right.$

Với $t = 14 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 16} = 14 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15 \\ x = -12 \end{array}\right.$.

Với $t = 5 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 16} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

**Câu 21.** Tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $(x - 1)(x - 3) + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$ là:

**A.** $17$. **B.** $4$. **C.** $16$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $(x-1)(x-3)+3\sqrt{x^2-4x+5}-2=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+5+3\sqrt{x^2-4x+5}-4=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+5}=1$

$\Leftrightarrow x^2-4x+5=1 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2$.

**Câu 22.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2+5x+2+2\sqrt{x^2+5x+10}=0$ là:

**A.** $5$. **B.** $13$. **C.** $10$. **D.** $25$.

**Lời giải**:

**Chọn B**

Điều kiện xác định $x^2+5x+10\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow x^2+5x+10+2\sqrt{x^2+5x+10}-8=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+5x+10}=2\\ \sqrt{x^2+5x+10}=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+10}=2 \Leftrightarrow x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=-3\\ x_2=-2\end{array}\right.$$

Vậy $x_1^2+x_2^2=2^2+3^2=13$.

**Câu 23.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}\left(x^2-3x+2\right)=0$ là

**A.** $S=\varnothing$. **B.** $S=\{1\}$. **C.** $S=\{2\}$. **D.** $S=\{1;2\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\sqrt{x-2}\left(x^2-3x+2\right)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x-2\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=0\\ x^2-3x+2=0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\geq 2\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=1\\ x=2\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow x=2.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}$.

**Câu 24.** Phương trình $\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{2x+1}-x\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

**A.** $1$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

+) Điều kiện $\left\{\begin{array}{l}x^2-1\geq 0\\ 2x+1\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x\geq 1$.

+) $\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{2x+1}-x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-1}=0\\ \sqrt{2x+1}-x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-1=0(1)\\ \sqrt{2x+1}=x(2)\end{array}\right.$

Giải $(1)$: $x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1(n)\\ x=-1(l)\end{array}\right.$

Giải $(2)$: $\sqrt{2x+1}=x \Rightarrow 2x+1=x^2\ (do\ x\geq 1) \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}(n)\\ x=1-\sqrt{2}(l)\end{array}\right.$

Vậy số nghiệm của phương trình là $2$.

**Câu 25.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{x-2}=0$

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$

$\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{x-2}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x+3=0\\\sqrt{x-2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1(l)\\x=3(n)\\x=2(n)\end{array}\right.$.

**Câu 26.** Tập nghiệm của phương trình $\left(x^2-x-2\right).\sqrt{x-1}=0$ là

**A.** $\{1;2\}$. **B.** $\{-1;1;2\}$. **C.** $[1;2]$. **D.** $\{-1;2\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

ĐKXĐ: $x\ge 1$.

Biến đổi: $\left(x^2-x-2\right).\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0\\x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=1.\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta được $x=1,x=2$

**Câu 27.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}\left(x^2-4x+3\right)=0$ là

**A.** $S=\{2;3\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{1;3\}$. **D.** $S=\{1;2;3\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$\left[\begin{array}{l}x-2=0\\x^2-4x+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1,x=3\end{array}\right.$. So với điều kiện chỉ có $x=2$, $x=3$ thỏa.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2;3\}$.

**Câu 28.** Tập nghiệm của phương trình $\left(x^2-x-2\right).\sqrt{x-1}=0$ là

**A.** $\{1;2\}$. **B.** $\{-1;1;2\}$. **C.** $[1;2]$. **D.** $\{-1;2\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x\ge 1$.

$\left(x^2-x-2\right).\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0\\\sqrt{x-1}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=1\end{array}\right.$

So sánh điều kiện kết luận phương trình có nghiệm $x=1;x=2$.

**Câu 29.** Phương trình $\left(x^2-6x\right)\sqrt{17-x^2}=x^2-6x$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\left(x^2-6x\right)\sqrt{17-x^2}=x^2-6x\Leftrightarrow\left(x^2-6x\right)\left(\sqrt{17-x^2}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-6x=0\\17-x^2\ge 0\end{cases}\\\sqrt{17-x^2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0(TM)\\x=6(L)\end{array}\right.\\|x|\le\sqrt{17}\end{cases}\\17-x^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 4\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

**Câu 30.** Số nghiệm của phương trình $\left(x-2\right)\sqrt{2x+7}=x^2-4$ bằng:

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

+) Điều kiện: $2x+7\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\frac{7}{2}$.

$\left(x-2\right)\sqrt{2x+7}=x^2-4\Leftrightarrow\left(x-2\right)\sqrt{2x+7}=\left(x-2\right)\left(x+2\right)$

$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left[\sqrt{2x+7}-\left(x+2\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\\\sqrt{2x+7}=x+2\end{array}\right.$.

+) $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ ( thỏa mãn ).

+) $\sqrt{2x+7}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\ge 0\\2x+7=\left(x+2\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\x^2+2x-3=0\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ ( thỏa mãn ).

Vậy phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.$.

**Câu 31.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}$ là

**A.** $S=\varnothing$. **B.** $S=\left\{-2;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $\begin{cases}3-x\ge 0\\x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x\le 3$.

Phương trình tương đương: $3-x=x+2\Leftrightarrow 1=2x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

**Câu 32.** Nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1}=\sqrt{3-x}$ là

**A.** $x=\frac{3}{4}$. **B.** $x=\frac{2}{3}$. **C.** $x=\frac{4}{3}$. **D.** $x=\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Thay các nghiệm $x$ vào phương trình thấy $x=\frac{4}{3}$ là nghiệm.

**Câu 33.** Số nghiệm của phương trình $x\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}$ là

**A.** $3$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình $x\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}$ chỉ xác định khi $x=2$.

Thử lại, ta thấy là nghiệm phương trình.

Vậy phương trình chỉ có 1 nghiệm.

**Câu 34.** Tìm tập hợp nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}+1$.

**A.** $\{2\}$. **B.** $\{1;-2\}$. **C.** $\{-1;2\}$. **D.** $\{-1\}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đk: $-2\le x\le 3$

$\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}+1\Leftrightarrow 3-x=x+3+2\sqrt{x+2}\Leftrightarrow 3-x-x-3=2\sqrt{x+2}\Leftrightarrow -2x=2\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\x^2=x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.\end{cases}$

**Câu 35.** Số nghiệm nguyên của phương trình sau $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=1$ là:

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=1$

Điều kiện $\begin{cases}x+3\ge 0\\2x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}$.

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=1+\sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow x+3=1+2\sqrt{2x-1}+2x-1\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=-x+3\Leftrightarrow\begin{cases}-x+3\ge 0\\4(2x-1)=(-x+3)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\x^2-14x+13=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Vậy số nghiệm nguyên của phương trình là $1$.

**Câu 36.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}=1$ là

**A.** $3$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

- Điều kiện: $\begin{cases}3x+1\ge 0\\2-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\frac{1}{3}\\x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le x\le 2.$

- PT $\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}=1+\sqrt{2-x}\Leftrightarrow\left[\sqrt{3x+1}\right]^2=\left[1+\sqrt{2-x}\right]^2\Leftrightarrow 3x+1=1+2\sqrt{2-x}+2-x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}=4x-2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ 2-x=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ 2-x=4x^2-4x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ 4x^2-3x-1=0 \end{cases} \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=1$.

**Câu 37.** Số nghiệm của phương trình $x^2+2x+2x\sqrt{x+3}=6\sqrt{1-x}+7$ là

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện $-3\le x\le 1$.

Phương trình

$x^2+2x+2x\sqrt{x+3}=6\sqrt{1-x}+7 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x+3}\right)^2=\left(3+\sqrt{1-x}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x+3}=3+\sqrt{1-x} \\ x+\sqrt{x+3}=-\left(3+\sqrt{1-x}\right) VN \end{array}\right. \Leftrightarrow 1-x+\sqrt{1-x}+2-\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}+1+\dfrac{\sqrt{1-x}}{2+\sqrt{x+3}}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}=0$ (do $\sqrt{1-x}+1+\dfrac{\sqrt{1-x}}{2+\sqrt{x+3}}>0, \forall x\in[-3;1]$)

$\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=1$.

**Câu 38.** Phương trình $x^2+4x+3=(x+1)\sqrt{8x+5}+\sqrt{6x+2}$ có một nghiệm dạng $x=a+\sqrt{b}$ với $a,b>0$. Khi đó: $a+b=$

**A.** $7$. **B.** $5$. **C.** $4$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$x^2+4x+3=(x+1)\sqrt{8x+5}+\sqrt{6x+2}$ ( điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{3}$)

$\Leftrightarrow (x+1)\left[\sqrt{8x+5}-(x+2)\right]+\left[\sqrt{6x+2}-(x+1)\right]$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)\left(-x^2+4x+1\right)}{\sqrt{8x+5}+(x+2)}+\dfrac{-x^2+4x+1}{\sqrt{6x-2}+x+1}=0$

$\Leftrightarrow \left(-x^2+4x+1\right)\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{8x+5}+(x+2)}+\dfrac{1}{\sqrt{6x-2}+x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+4x+1=0 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{8x+5}+(x+2)}+\dfrac{1}{\sqrt{6x-2}+x+1}=0 (\text{VN}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{5} \\ x=2-\sqrt{5} \end{array}\right.$

**Câu 39.** Biết phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-3}=\sqrt{x^2-1}$ có hai nghiệm $x_1, x_2$. Tính giá trị biểu thức $(x_1-1).(x_2-1)$.

**A.** 1. **B.** 0. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-3}=\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{3}\right)=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=0 \\ \sqrt{x+1}=1+\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3+2\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3+2\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Suy ra $(x_1-1).(x_2-1)=0$.

**Câu 40.** Phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=2x-1+\sqrt{x-2}$ có số nghiệm là:

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $x \geq 2$.

Khi đó $\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=2x-1+\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=2x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2-x+1=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 3x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1(ktm)$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**Câu 41.** Với bài toán: Giải phương trình $\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}+\sqrt{16-x^2}=4$. Một học sinh giải như sau:

Bước 1. Điều kiện: $-4 \leq x \leq 4$.

Đặt $t=\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x} \Rightarrow t^2=8-2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow \sqrt{16-x^2}=\dfrac{8-t^2}{2}$.

Bước 2. Ta được phương trình $t+\dfrac{8-t^2}{2}=4 \Leftrightarrow t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right.$.

Bước 3. Với $t=0$ ta có $\sqrt{16-x^2}=4 \Leftrightarrow 16-x^2=16 \Leftrightarrow x=0$.

Với $t=2$ ta có $\sqrt{16-x^2}=2 \Leftrightarrow 16-x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{0;-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right\}$.

Hãy chọn phương án đúng.

**A. Lời giải** trên sai ở bước 2.
**B. Lời giải** trên đúng hoàn toàn.
**C. Lời giải** trên sai ở bước 1.
**D. Lời giải** trên sai ở bước 3.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ở bước 1, khi đặt $t=\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x} \Rightarrow t^2=8-2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow \sqrt{16-x^2}=\dfrac{8-t^2}{2}$ thì bản chất của **Lời giải** trên là đưa về phương trình hệ quả. Do đó cần thử lại nghiệm ở bước 3.

**Câu 42.** Giải phương trình trên tập số thực: $\dfrac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1}=2.$

**A.** $x=1$. **B.** $x=4$. **C.** $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$. **D.** $x\in\varnothing$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Giải phương trình trên tập số thực: $\dfrac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1}=2$.

Điều kiện xác định của phương trình: $\begin{cases}5x-4x^2\ge 0\\x-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le\dfrac{5}{4}\\x\ne 1\end{cases}(*)$.

Từ phương trình: $\dfrac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1}=2\Rightarrow\sqrt{5x-4x^2}-x=2(x-1)$

$\Leftrightarrow\sqrt{5x-4x^2}=3x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{2}{3}\\5x-4x^2=9x^2-12x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{2}{3}\\13x^2-17x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{2}{3}\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện $(*)$ thì $x=1$, $x=4$ đều không thỏa mãn điều kiện phương trình ban đầu.

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Câu 43.** Số nghiệm của phương trình $\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}=0$

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $x\ge 3$.

Khi đó pt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+2=0\\\sqrt{x-3}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

**Câu 44.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2-x}+\dfrac{2-x}{\sqrt{x-3}}=0$ là

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $\begin{cases}2-x\ge 0\\x-3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\x>3\end{cases}$.

Hệ bất phương trình vô nghiệm. Suy ra phương trình ban đầu vô nghiệm.

**Câu 45.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2+4x-1}=x+1$ là?

**A.** $S=\left\{-1+\sqrt{3};-1-\sqrt{3}\right\}$. **B.** $S=\left\{-1+\sqrt{3}\right\}$.

**C.** $S=\left\{-1-\sqrt{3}\right\}$. **D.** $\varnothing$.

**Lời giải**

Chọn **B**

$$\sqrt{2x^2+4x-1}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0\\2x^2+4x-1=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x^2+2x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x=-1\pm\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow x=-1+\sqrt{3}$$

**Câu 46.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2+4x-3}+5=2x$ là?

**A.** $S=\left\{2;\frac{14}{5}\right\}$. **B.** $S=\{2;4\}$. **C.** $S=\left\{\frac{14}{5}\right\}$. **D.** $S=\{2\}$

**Lời giải**

Chọn **C**

$$\sqrt{-x^2+4x-3}+5=2x\Leftrightarrow\sqrt{-x^2+4x-3}=2x-5\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5\ge 0\\-x^2+4x-3=(2x-5)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{5}{2}\\5x^2-24x+28=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{5}{2}\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\frac{14}{5}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow x=\frac{14}{5}$$

**Câu 47.** Khi giải phương trình $\sqrt{x^2+3x}+1=3x$ ta tiến hành theo các bước sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được: $x^2+3x=(3x-1)^2$ (2)

Bước 2: Khai triển và rút gọn (2) ta được: $8x^2-9x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{8}\end{array}\right.$

Bước 3: Khi $x=1$,ta có $x^2+3x>0$. Khi $x=\frac{1}{8}$, ta có $x^2+3x>0$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{1;\frac{1}{8}\right\}$

Vậy Cách giải trên **đúng** hay **sai**? Nếu sai thì sai ở bước nào?

**A.** Đúng. **B.** Sai ở bước 1. **C.** Sai ở bước 2. **D.** Sai ở bước 3.

**Lời giải**

Chọn D

- Ta có: $x^2+3x>0$, ở là điều kiện xác định của phương trình không phải là điều kiện có nghiệm của phương trình
- Ở Bước 3 ta thay $x=1$ vào phương trình thỏa mãn nên $x=1$ là nghiệm

  Khi ta thay $x=\frac{1}{8}$ vào phương trình và thấy $x=\frac{1}{8}$ không thỏa mãn phương trình nên $x=\frac{1}{8}$ không là nghiệm

**Câu 48.** Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^3+x^2+6x+28}=x+5$ bằng:

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** –1.

**Lời giải**

Chọn A

$$\sqrt{x^3+x^2+6x+28}=x+5\Leftrightarrow\begin{cases}x+5\ge 0\\ x^3+x^2+6x+28=(x+5)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -5\\ x^3-4x+3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -5\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$$

Tổng các nghiệm là: 0.

**Câu 49.** Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^4-4x^3+14x-11}=1-x$ bằng:

**A.** $-2$. **B.** 4. **C.** 3. **D.** $-1$.

**Lời giải**

Chọn D

$$\sqrt{x^4-4x^3+14x-11}=1-x\Leftrightarrow\begin{cases}1-x\ge 0\\ x^4-4x^3+14x-11=(1-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1\\ x^4-4x^3-x^2+16x-12=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\\ x=2\\ x=3\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

Tổng các nghiệm là: $-1$.

**Câu 50.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$ là:

**A.** 0 nghiệm. **B.** 1 nghiệm. **C.** 2 nghiệm. **D.** 3 nghiệm.

**Lời giải**

Chọn C

$$\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}1+x\ge 0\\ 2x+\sqrt{6x^2+1}=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ \sqrt{6x^2+1}=x^2+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ 6x^2+1=(x^2+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x^4-4x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$$

Số các nghiệm là: 2.

**Câu 51.** Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$ bằng:

**A.** $3-\sqrt{2}$. **B.** $2+\sqrt{2}$. **C.** $2-\sqrt{2}$. **D.** 5.

**Lời giải**

Chọn A

$$\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=-x^2+3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1\ge 0 \\ 2x-1=\left(-x^2+3x-1\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1\ge 0 \\ x^4-6x^3+11x^2-8x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1\ge 0 \\ \left(x-1\right)^2\left(x^2-4x+2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2\pm\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Tổng các nghiệm là: $3-\sqrt{2}$

**Câu 52.** Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x}$ là

**A.** $\frac{1}{2}\le x$. **B.** $x=\frac{1}{2}$. **C.** $x\le\frac{1}{2}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

**Lời giải**

Chọn B

ĐK: $\begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ 1-2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\frac{1}{2} \\ x\le\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

**Câu 53.** $\left[-3;1\right)$ là tập xác định của phương trình nào sau đây?

**A.** $\sqrt{3+x}=\sqrt{\frac{1}{1-x^3}}$ **B.** $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{3-2x-x^2}$

**C.** $\sqrt{-x^2-x+6}=\sqrt{-x^2-3x+4}$ **D.** $\sqrt{1-x}=\sqrt{-x^2-x+6}$

**Lời giải**

Chọn A

**A.** ĐK: $\begin{cases} 3+x\ge 0 \\ \frac{1}{1-x^3}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ 1-x^3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ x<1 \end{cases}$.

**B.** ĐK: $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{3-2x-x^2}$ $\begin{cases} x^2-2x+1\ge 0 \\ 3-2x-x^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2\ge 0 \\ -(x-1)(x+3)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3\le x\le 1.$

**C.** ĐK: $\begin{cases} -x^2-x+6\ge 0 \\ -x^2-3x+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x+3)(x-2)\ge 0 \\ -(x-1)(x+4)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\le x\le 2 \\ -4\le x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3\le x\le 1.$

**D.** ĐK: $\begin{cases} 1-x\ge 0 \\ -x^2-x+6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ -(x+3)(x-2)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ -3\le x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -3\le x\le 1.$

**Câu 54.** Cho phương trình $\sqrt{x^2-2x-3}=\sqrt{x+1}$ (1). Phép biến đổi nào sau đây là **sai?**

**A.** (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x^2-2x-3=x+1 \end{cases}$

**B.** (1) $\Leftrightarrow x^2-2x-3=x+1$

**C.** (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3\ge 0 \\ x^2-2x-3=x+1 \end{cases}$

**D.** $(1) \Rightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x^2-2x-3 \ge 0 \\ x^2-2x-3 = x+1 \end{cases}$

**Lời giải**

Chọn B

Phép biến đổi B thiếu điều kiện.

**Câu 55.** Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x-3} = \sqrt{x-\frac{5}{4}}$ . Một bạn làm như sau:

Bước 1: $\sqrt{x^2-2x-3} = \sqrt{x-\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{5}{4} \ge 0 \\ x^2-2x-3 = x-\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{5}{4} \\ x^2-3x-\frac{7}{4} = 0 \end{cases}$

Bước 2: Phương trình $x^2-3x-\frac{7}{4}=0$ có hai nghiệm phân biệt, nên theo định lý Vi-et, ta có tổng hai nghiệm là $S=3$.

Bước 3: Vậy phương trình có tổng các nghiệm là 3.

**Lời giải** trên là đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

**A.** Đúng. **B.** Sai từ bước 1. **C.** Sai từ bước 2. **D.** Sai từ bước 3.

**Lời giải**

Chọn D

Phương trình $x^2-3x-\frac{7}{4}=0$ có hai nghiệm phân biệt: $x=\frac{7}{2}$ (thỏa ĐK) và $x=-\frac{1}{2}$ (không thỏa ĐK) nên phương trình đã cho có một nghiệm $x=\frac{7}{2}$, và tổng các nghiệm là: $\frac{7}{2}$.

**Câu 56.** Giải phương trình $\sqrt{x^2(x-1)} = \sqrt{x^2(3-x)}$ (*), một bạn làm như sau:

Bước 1: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-1) \ge 0 \ (1) \\ x^2(x-1) = x^2(3-x) \ (2) \end{cases}$.

Bước 2: Giải $(1)$: Vì $x^2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Bước 3: $(2) \Leftrightarrow x^2(2x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Kết hợp ta được $x=2$ là nghiệm của phương trình.

**Lời giải** trên là đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

**A.** Đúng. **B.** Sai từ bước 1. **C.** Sai từ bước 2. **D.** Sai từ bước 3.

**Lời giải**

Chọn C

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-1 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x \ge 1 \end{array}\right.$.

**Câu 57.** Điều kiện xác định của phương trình $\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-2x+1}}=2$ là

**A.** $1\le x$ **B.** $x\ne 1$ **C.** $\left[\begin{array}{l}2<x\\x<0\end{array}\right.$ **D.** $x>1$

**Lời giải**

Chọn **B**

Điều kiện: $x^2-2x+1>0\Leftrightarrow (x-1)^2>0\Leftrightarrow x\ne 1$

**Câu 58.** Điều kiện xác định của phương trình $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=-3$ là

**A.** $x>3$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x>3\\x\le -1\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\x\le -1\end{array}\right.$ **D.** $x\le -1$

**Lời giải**

Chọn B

Điều kiện: $\dfrac{x+1}{x-3}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x\le -1\end{array}\right.$

**Câu 59.** Phép biến đổi nào sau đây là **sai**

**A.** $\sqrt{5x^2+10x+1}=-x^2-2x+7\Rightarrow 5x^2+10x+1=(-x^2-2x+7)^2$

**B.** $\sqrt{5x^2+10x+1}=-x^2-2x+7\Leftrightarrow 5x^2+10x+1=(-x^2-2x+7)^2$

**C.** $\sqrt{5x^2+10x+1}=-x^2-2x+7\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}5x^2+10x+1=(-x^2-2x+7)^2\\-x^2-2x+7\ge 0\end{array}\right.$

**D.** $\sqrt{5x^2+10x+1}=-x^2-2x+7\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}t=\sqrt{5x^2+10x+1}\ge 0\\t=\dfrac{1-t^2}{5}+7\end{array}\right.$

**Lời giải**

Chọn B

Phép biến đổi bình phương hai vế không phải là phép biến đổi tương đương nếu 2 vế không cùng dấu.

**Câu 60.** Giải phương trình $(x-2)(x-1)+2(x-2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}=0\ \ (1)$

Bước 1: Điều kiện: $\dfrac{x-1}{x-2}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x\le 1\end{array}\right.$

Bước 2: $(1)\Leftrightarrow (x-2)(x-1)+2\sqrt{(x-2)(x-1)}=0\quad (2)$

Bước 3: $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{(x-2)(x-1)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\quad (tm)\\x=2\quad (loai)\end{array}\right.\\\sqrt{(x-2)(x-1)}=-2\quad (loai)\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có một nghiệm $x=1$

**Lời giải** trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

**A.** Đúng **B.** Sai từ bước 1 **C.** Sai từ bước 2 **D.** Sai từ bước 3

**Lời giải**

Chọn C

$(x-2)(x-1)+2(x-2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)+2\sqrt{(x-2)(x-1)}=0$ chỉ đúng khi $x>2$

**Câu 61.** Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{5x^2+10x+1}=-x^2-2x+7$ là

**A.** -3 **B.** -5 **C.** -2 **D.** 2

**Lời giải**

Chọn C

$$\sqrt{5x^2+10x+1}=-x^2-2x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{5x^2+10x+1}\ge 0 \\ t=\dfrac{1-t^2}{5}+7 \Leftrightarrow t^2+5t-36=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-9(loai) \\ t=4(tm) \end{array}\right.$$

Với $t=4$: $5x^2+10x+1=16 \Leftrightarrow 5x^2+10x-15=0 \Rightarrow x_1+x_2=-2$

**Câu 62.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2-x}+\dfrac{2-x}{\sqrt{x-3}}=0$ là

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $\begin{cases} 2-x\ge 0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ x>3 \end{cases}$.

Hệ bất phương trình vô nghiệm. Suy ra phương trình ban đầu vô nghiệm.

**Câu 63.** Tìm tập hợp nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}+1$.

**A.** $\{2\}$. **B.** $\{1;-2\}$. **C.** $\{-1;2\}$. **D.** $\{-1\}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đk: $-2\le x\le 3$

$\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}+1 \Leftrightarrow 3-x=x+3+2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow 3-x-x-3=2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow -2x=2\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}$$

**Câu 64.** Số nghiệm nguyên của phương trình sau $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=1$ là:

**A.** 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=1$

Điều kiện $\begin{cases} x+3\ge 0 \\ 2x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{1}{2}$.

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=1+\sqrt{2x-1}$

$$\Leftrightarrow x+3=1+2\sqrt{2x-1}+2x-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=-x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+3\ge 0 \\ 4(2x-1)=(-x+3)^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x^2 - 14x + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy số nghiệm nguyên của phương trình là $1$.

**Câu 65.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = 1$ là

**A.** $3$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

- Điều kiện: $\begin{cases} 3x+1 \ge 0 \\ 2-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{3} \\ x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \le x \le 2.$

- PT $\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{2-x} \Leftrightarrow \left[\sqrt{3x+1}\right]^2 = \left[1+\sqrt{2-x}\right]^2 \Leftrightarrow 3x+1 = 1 + 2\sqrt{2-x} + 2 - x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x} = 4x - 2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ 2 - x = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ 2 - x = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

**Câu 66.** Số nghiệm của phương trình $x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7$ là

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện $-3 \le x \le 1$.

Phương trình

$x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x+3}\right)^2 = \left(3 + \sqrt{1-x}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{1-x} \\ x + \sqrt{x+3} = -\left(3 + \sqrt{1-x}\right) \ VN \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 - x + \sqrt{1-x} + 2 - \sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x} + 1 + \dfrac{\sqrt{1-x}}{2+\sqrt{x+3}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 0$ (do $\sqrt{1-x} + 1 + \dfrac{\sqrt{1-x}}{2+\sqrt{x+3}} > 0, \forall x \in [-3;1]$)

$\Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

**Câu 67.** Phương trình $x^2 + 4x + 3 = (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2}$ có một nghiệm dạng $x = a + \sqrt{b}$ với $a, b > 0$.

Khi đó: $a + b =$

**A.** $7$. **B.** $5$. **C.** $4$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$x^2+4x+3=(x+1)\sqrt{8x+5}+\sqrt{6x+2}$ ( điều kiện: $x\ge -\frac{1}{3}$)

$\Leftrightarrow (x+1)\left[\sqrt{8x+5}-(x+2)\right]+\left[\sqrt{6x+2}-(x+1)\right]$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x^2+4x+1)}{\sqrt{8x+5}+(x+2)}+\frac{-x^2+4x+1}{\sqrt{6x-2}+x+1}=0$

$\Leftrightarrow (-x^2+4x+1)\left(\frac{x+1}{\sqrt{8x+5}+(x+2)}+\frac{1}{\sqrt{6x-2}+x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-x^2+4x+1=0\\ \frac{x+1}{\sqrt{8x+5}+(x+2)}+\frac{1}{\sqrt{6x-2}+x+1}=0(\text{VN})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt{5}\\ x=2-\sqrt{5}\end{array}\right.$

**Câu 68.** Biết phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-3}=\sqrt{x^2-1}$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Tính giá trị biểu thức $(x_1-1).(x_2-1)$.

**A.** 1. **B.** 0. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-3}=\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\ge 1\\ \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{3}\right)=0\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\ge 1\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=0\\ \sqrt{x+1}=1+\sqrt{3}\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\ge 1\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3+2\sqrt{3}\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3+2\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Suy ra $(x_1-1).(x_2-1)=0$.

**Câu 69.** Phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=2x-1+\sqrt{x-2}$ có số nghiệm là:

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $x\ge 2$.

Khi đó $\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=2x-1+\sqrt{x-2}\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=2x-1$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x-1\ge 0\\ x^2-x+1=(2x-1)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\ge \frac{1}{2}\\ 3x^2-3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1(ktm)$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**Câu 70.** Với bài toán: Giải phương trình $\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}+\sqrt{16-x^2}=4$. Một học sinh giải như sau:

Bước 1. Điều kiện: $-4\le x\le 4$.

Đặt $t=\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\Rightarrow t^2=8-2\sqrt{16-x^2}\Rightarrow \sqrt{16-x^2}=\frac{8-t^2}{2}$.

Bước 2. Ta được phương trình $t+\frac{8-t^2}{2}=4\Leftrightarrow t^2-2t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\ t=2\end{array}\right.$.

Bước 3. Với $t=0$ ta có $\sqrt{16-x^2}=4\Leftrightarrow 16-x^2=16\Leftrightarrow x=0$.

Với $t=2$ ta có $\sqrt{16-x^2}=2\Leftrightarrow 16-x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{0;-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right\}$.

Hãy chọn phương án đúng.

**A.** Lời giải trên sai ở bước 2.

**B.** Lời giải trên đúng hoàn toàn.

**C.** Lời giải trên sai ở bước 1.

**D.** Lời giải trên sai ở bước 3.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ở bước 1, khi đặt $t=\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\Rightarrow t^2=8-2\sqrt{16-x^2}\Rightarrow\sqrt{16-x^2}=\dfrac{8-t^2}{2}$ thì bản chất của lời giải trên là đưa về phương trình hệ quả. Do đó cần thử lại nghiệm ở bước 3.

**Câu 71.** Giải phương trình trên tập số thực: $\dfrac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1}=2.$

**A.** $x=1$.

**B.** $x=4$.

**C.** $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$.

**D.** $x\in\varnothing$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Giải phương trình trên tập số thực: $\dfrac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1}=2$.

Điều kiện xác định của phương trình: $\begin{cases}5x-4x^2\ge 0\\x-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le\dfrac{5}{4}\\x\ne 1\end{cases}(*)$.

Từ phương trình: $\dfrac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1}=2\Rightarrow\sqrt{5x-4x^2}-x=2(x-1)$

$$\Leftrightarrow\sqrt{5x-4x^2}=3x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{2}{3}\\5x-4x^2=9x^2-12x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{2}{3}\\13x^2-17x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{2}{3}\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện $(*)$ thì $x=1$, $x=4$ đều không thỏa mãn điều kiện phương trình ban đầu.

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Câu 72.** Số nghiệm của phương trình $\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}=0$

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 3.

**D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $x\ge 3$.

Khi đó pt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+2=0\\\sqrt{x-3}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

**Câu 73.** Số nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5)=2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$ là

**A.** 0.

**B.** 1.

**C.** 2.

**D.** 3

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2+5x-2}$ ta được phương trình: $t^3+2=2t-2\Leftrightarrow t^3-2t+4=0\Leftrightarrow t=-2$

Với $t=-2\Rightarrow\sqrt[3]{x^2+5x-2}=-2\Leftrightarrow x^2+5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-3\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên.

**Câu 74.** Phương trình $\sqrt{x^2+481}-3\sqrt[4]{x^2+481}=10$ có hai nghiệm $\alpha,\beta$. Khi đó tổng $\alpha+\beta$ thuộc đoạn nào sau đây ?

**A.** $[2;5]$. **B.** $[-1;1]$. **C.** $[-10;-6]$. **D.** $[-5;-1]$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $t=\sqrt[4]{x^2+481}, t\geq\sqrt[4]{481}$. Phương trình đã cho trở thành :

$t^2-3t-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\t=-2\end{array}\right.$ .Đối chiếu điều kiện, loại $t=-2$.

Với $t=5\Rightarrow\sqrt[4]{x^2+481}=5\Leftrightarrow x^2=144\Leftrightarrow x=\pm12\Rightarrow\alpha=12,\beta=-12$

Do đó : $\alpha+\beta=0\in[-1;1]$. Chọn **B.**

**Câu 75.** Phương trình: $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$ có nghiệm là $a\pm\sqrt{b}$ thì $2a-b$ bằng

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định $x\geq1$.

Ta có $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}\Leftrightarrow2\left(x^2+x+1\right)+3\left(x-1\right)=7\sqrt{\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}$ $(1)$

Với $x=1$ ta thấy không thỏa mãn $(1)$ nên không phải là nghiệm.

Với $x\neq1$ ta có:

$(1)\Leftrightarrow2\left(x^2+x+1\right)+3\left(x-1\right)=7\sqrt{\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}\Leftrightarrow2\dfrac{x^2+x+1}{x-1}-7\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x-1}}+3=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x-1}}=\dfrac{1}{2}\\\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x-1}}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=\dfrac{1}{4}\\\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^2+3x+5=0\\x^2-8x+10=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{6}.$

Suy ra $a=4$ và $b=6$. Do đó, $2a-b=2.4-6=2$.

**Câu 76.** Giải phương trình: $x=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$ ta được một nghiệm $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$, $a,b,c\in\mathbb{N},b<20$. Tính giá trị biểu thức $P=a^3+2b^2+5c$.

**A.** $P=61$. **B.** $P=109$. **C.** $P=29$. **D.** $P=73$.

**Lờigiải**

**Chọn A**

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l}x-\dfrac{1}{x}\geq\\1-\dfrac{1}{x}\geq0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}\geq0\\\dfrac{x-1}{x}\geq0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq x<0\\x\geq1\end{array}\right.$

$-1 \le x < 0 \Rightarrow x < \sqrt{x-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}$

Xét $x \ge 1$ $x = \sqrt{x-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x - \sqrt{1-\frac{1}{x}} = \sqrt{x-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x^2 + 1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x^2-x} = x - \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2\sqrt{x^2-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-x} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (tm) \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} (l) \end{array}\right.$

$a = 1, b = 5, c = 2 \Rightarrow P = a^3 + 2b^2 + 5c = 61$

**Câu 77.** Cho phương trình $\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1$. Tìm m để phương trình có một nghiệm duy nhất

**A.** $m > 4$. **B.** $4 < m < 5$. **C.** $3 < m < 4$. **D.** $m < 4$.

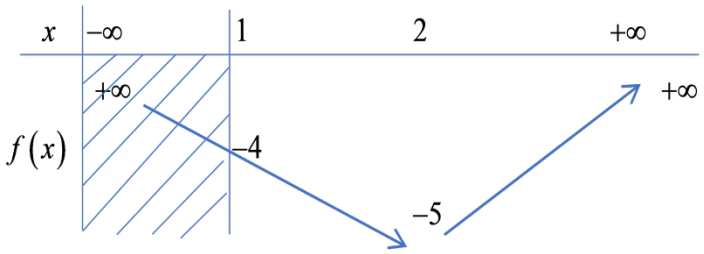
**Lời giải**

**Chọn D**

$\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 2x^2 - 6x + m = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 - 4x - 1 = -m \ (1) \end{cases}$.

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm duy nhất $x \ge 1$.

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của đường thẳng $y = -m$ và đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 4x - 1$.




Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\left[\begin{array}{l} -m = -5 \\ -m > -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m < 4 \end{array}\right.$.

**Câu 78.** Tìm $m$ để phương trình $\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x - 2$ có nghiệm. Đáp số nào sau đây đúng?

**A.** $m \ge -\frac{25}{4}$. **B.** $m \ge 3$. **C.** $m \ge 0$. **D.** $m \ge -\frac{25}{8}$.

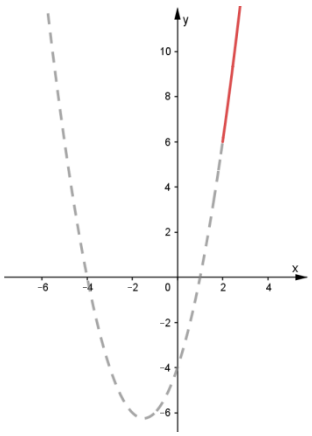
**Lời giải**

**Chọn B**

$\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 + 3x - 4 = 2m \end{cases}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x^2 + 3x - 4$ với đường thẳng $y = m$ trên tập $[2; +\infty)$.

Ta có đồ thị sau



Dựa vào đồ thị suy ra phương trình có nghiệm khi $2m \ge 6 \Leftrightarrow m \ge 3$.

**Câu 79.** Tìm $m$ để phương trình $\sqrt{2x^2-2x-2m} = x-2$ có nghiệm.

**A.** $m \le 1$. **B.** $m \in (1;+\infty)$. **C.** $m > 2$. **D.** $m \ge 2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\sqrt{2x^2-2x-2m} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 2x^2-2x-2m = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2+2x-4 = 2m \end{cases} (*).$$

Xét hàm số $f(x) = x^2+2x-4$, $(x \ge 2)$

BBT:

| $x$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $4$ | $\nearrow +\infty$ |

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $x \ge 2 \Leftrightarrow 2m \ge 4 \Leftrightarrow m \ge 2$.

**Câu 80.** Với mọi giá trị dương của $m$ phương trình $\sqrt{x^2-m^2} = x-m$ luôn có số nghiệm là

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn B**

Với mọi giá trị dương của $m$

Ta có $\sqrt{x^2-m^2} = x-m \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge m \\ x^2-m^2 = (x-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge m \\ 2xm = 2m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge m \\ x = m \end{cases} \Leftrightarrow x = m$.

Vậy phương trình luôn có 1 nghiệm $x = m$.

**Câu 81.** Cho phương trình $\sqrt{x^2-8x+m} = 2x-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số để phương trình đã cho vô nghiệm.

**A.** $m \in \left[-\frac{1}{3};\frac{15}{4}\right)$. **B.** $m \in \left(-\frac{1}{3};\frac{15}{4}\right)$. **C.** $m \in \left(-\infty;\frac{15}{4}\right)$. **D.** $m \in \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$.

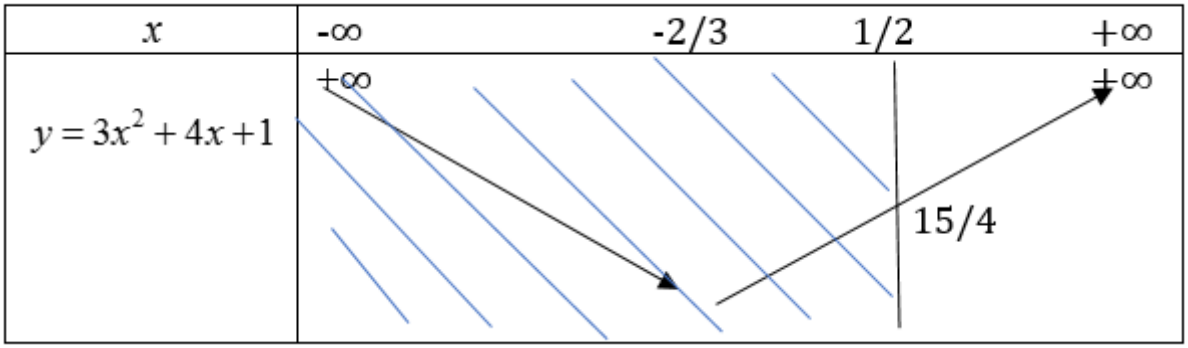
**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ x^2-8x+m = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ m = 3x^2+4x+1 \end{cases} (*)$

Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi (*) vô nghiệm.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=3x^2+4x+1$ như sau




Từ BBT suy ra pt vô nghiệm khi và chỉ khi $m<\frac{15}{4}$.

**Câu 82.** Tập hợp các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $\sqrt{x^2+2x+2m}=2x+1$ có hai nghiệm phân biệt là $S=(a;b]$. Khi đó giá trị $P=a.b$ là

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\sqrt{x^2+2x+2m}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ x^2+2x+2m=(2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{1}{2} \\ 3x^2+2x+1-2m=0\ (*) \end{cases}.$$

Đặt $t=x+\frac{1}{2}$;phương trình (*) trở thành: $3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(t-\frac{1}{2}\right)+1-2m=0$

$\Leftrightarrow 3t^2-t+\frac{3}{4}-2m=0\ (**)$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thỏa mãn $-\frac{1}{2}\le x_1<x_2$ khi và chỉ khi phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt $t_1,t_2$ thỏa $0\le t_1<t_2$. Điều kiện: $\begin{cases} \Delta=(-1)^2-4.3.\left(\frac{3}{4}-2m\right)>0 \\ S=-\frac{-1}{3}>0 \\ P=\frac{\frac{3}{4}-2m}{3}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\frac{1}{3} \\ m\le\frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}<m\le\frac{3}{8}$.

Vậy $S=\left(\frac{1}{3};\frac{3}{8}\right]$. Ta có: $\frac{1}{3}.\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$.

**Câu 83.** Cho phương trình $\sqrt{-x^2+4x-3}=\sqrt{2m+3x-x^2}\ (1)$. Để phương trình $(1)$ có nghiệm thì $m\in[a;b]$. Giá trị $a^2+b^2$ bằng

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\sqrt{-x^2+4x-3}=\sqrt{2m+3x-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+4x-3\ge 0\\-x^2+4x-3=2m+3x-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 3\\x=2m+3\end{cases}$

Để phương trình $(1)$ có nghiệm thì: $1\le 2m+3\le 3\Leftrightarrow -1\le m\le 0\Rightarrow m\in[-1;0]\Rightarrow a^2+b^2=1$. .

**Câu 84.** Số các giá trị nguyên của $m$ để phương trình $\sqrt{x^2-2x-m-1}=\sqrt{2x-1}$ có hai nghiệm phân biệt là

**A.** $0$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình tương đương: $\begin{cases}2x-1\ge 0\\x^2-2x-m-1=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\x^2-4x-m=0\end{cases}$

Để phương trình $\sqrt{x^2-2x-m-1}=\sqrt{2x-1}$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2-4x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa $x_2>x_1\ge\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\x_1+x_2>1\\\left(x_1-\dfrac{1}{2}\right)\left(x_2-\dfrac{1}{2}\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4+m>0\\4>0\\x_1x_2-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)+\dfrac{1}{4}\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4+m>0\\-m-\dfrac{1}{2}.4+\dfrac{1}{4}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -4<m\le-\dfrac{7}{4}$.

**Câu 85.** Cho phương trình: $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+2\sqrt{4-x^2}+m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** $4$. **B.** $5$. **C.** vô số. **D.** $10$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $-2\le x\le 2$

Đặt $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\Rightarrow t^2=4+2\sqrt{(2-x)(2+x)}\ge 4\Rightarrow t\ge 2$

Lại có: $\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)^2\le(2-x+2+x)(1^2+1^2)\Rightarrow t\le 2\sqrt{2}$

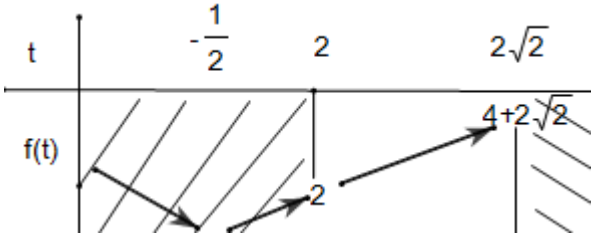
Khi đó phương trình đã cho chuyển về: $t+t^2-4+m=0$

$\Leftrightarrow t^2+t-4=-m(1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm $m$ để phương trình (1) có nghiệm $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $f(t)=t^2+t-4$ cắt đường thẳng $y=-m$ trong đoạn $\left[2;2\sqrt{2}\right]$ (*)

Bảng biến thiên của $f(t)=t^2+t-4$ trên $\left[2;2\sqrt{2}\right]$



Từ BBT ta có (*) $\Leftrightarrow 2 \le m \le 4+2\sqrt{2}$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2;3;4;5;6\}$

**Câu 86.** Tìm tất cả giá trị $m$ để phương trình $3\sqrt{x-1}-m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm là

**A.** $m<-\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{3}<m\le 1$. **C.** $-\frac{1}{3}\le m<1$. **D.** $-\frac{1}{3}<m<1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

ĐK: $x \ge 1$.

$3\sqrt{x-1}-m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1} \Leftrightarrow m=\frac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}-\frac{2\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}=3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$.

Đặt $t=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}, (0\le t<1)$, (vì $\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$ mà $0<\frac{2}{x+1}\le 1, \forall x\ge 1$ nên $0\le\frac{x-1}{x+1}<1$)

Ta được $m=3t^2-2t=f(t)$, $(0\le t<1)$

$f'(t)=6t-2$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{3}$ | $\nearrow$ | $1$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le m<1$.

**Câu 87.** Cho hàm số $y=f(x)=\frac{m\sqrt{2018+x}+(m^2-2)\sqrt{2018-x}}{(m^2-1)x}$ có đồ thị là $(C_m)$, ($m$ là tham số). Số giá trị của $m$ để đồ thị $(C_m)$ nhận trục $Oy$ làm trục đối xứng là

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn B**

Tập xác định: $D=[-2018;2018]\setminus\{0\}, m\ne\pm 1$

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận trục $Oy$ làm trục đối xứng khi $f(-x)=f(x), \forall x\in D$

$\Leftrightarrow \frac{m\sqrt{2018-x}+(m^2-2)\sqrt{2018+x}}{-(m^2-1)x}=\frac{m\sqrt{2018+x}+(m^2-2)\sqrt{2018-x}}{(m^2-1)x}, \forall x\in D$

$\Leftrightarrow (2-m^2)\sqrt{2018+x}-m\sqrt{2018-x}=m\sqrt{2018+x}+(m^2-2)\sqrt{2018-x}, \forall x\in D \Leftrightarrow 2-m^2=m$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 (l) \\ m=-2 \end{array}\right.$. Vậy $m=-2$.

**Câu 88.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $\frac{2(x-m)-x-m}{\sqrt{x+3}}=0$ có nghiệm.

**A.** $m\in(-\infty;-1)$. **B.** $m\in(-1;+\infty)$. **C.** $m\in[-1;+\infty)$. **D.** $m\in R$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x>-3$.

Với $x>-3$;phương trình $\dfrac{2(x-m)-x-m}{\sqrt{x+3}}=0 \Leftrightarrow 2(x-m)-x-m=0 \Leftrightarrow x=3m$.

Để phương trình có nghiệm thì $3m>-3 \Leftrightarrow m>-1 \Leftrightarrow m\in(-1;+\infty)$.

**Câu 89.** Số các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2018]$ để phương trình:

$$x^2+(2-m)x+4=4\sqrt{x^3+4x}$$

có nghiệm là

**A.** 2020. **B.** 2019. **C.** 2018. **D.** 2021.

**Lời giải**

**Chọn D**

ĐK: $x\geq 0$

Ta có $x^2+(2-m)x+4=4\sqrt{x^3+4x}$

$\Leftrightarrow x^2+4+(2-m)x=4\sqrt{(x^2+4)x}$ (1)

Với $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Với $x\neq 0$ phương trình (1) trở thành

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+4}{x}+(2-m)=4\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}$ (2)

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}, t\geq 2$

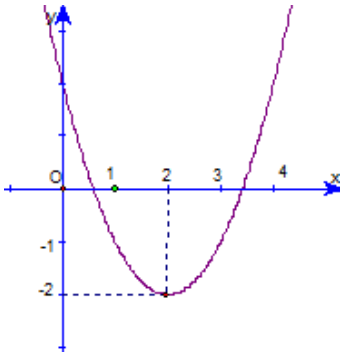
Phương trình (2) trở thành: $t^2-4t+2-m=0$.

$\Leftrightarrow t^2-4t+2=m$ (*)

Để phương trình dã cho có nghiệm thì phương trình (*) có nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2.

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm $y=t^2-4t+2$ và đường thẳng $y=m$

Xét hàm số $y=t^2-4t+2$ có đồ thị như hình vẽ




Dựa vào đồ thị hàm số, để phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình (*) có nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2 suy ra $m\geq -2$.

Suy ra số các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2018]$ để phương trình có nghiệm là 2021.

**Câu 90.** Tìm $m$ để phương trình $\left(\sqrt{5m^2-2m-2}+m-1\right)(x+1)^3+x^2-x-3=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$, ta được điều kiện $m\notin[a;b]$. Giá trị của biểu thức $P=a^2+2b$ bằng

**A.** $P=10$. **B.** $P=12$. **C.** $P=20$. **D.** $P=15$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét hàm số $f(x)=\left(\sqrt{5m^2-2m-2}+m-1\right)(x+1)^3+x^2-x-3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f(-1)=-1<0$, $f(0)=\sqrt{5m^2-2m-2}+m-4$.

Để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$ thì

$f(0)=\sqrt{5m^2-2m-2}+m-4>0 \Leftrightarrow \sqrt{5m^2-2m-2}>4-m$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-m<0\\5m^2-2m-2\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}4-m\ge 0\\5m^2-2m-2>m^2-8m+16\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>4\\\begin{cases}m\le 4\\4m^2+6m-18>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>4\\m<-3\vee\frac{3}{2}<m\le 4\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow m<-3 \vee m>\frac{3}{2}$.

Do đó $m\notin\left[-3;\frac{3}{2}\right]$ hay $P=a^2+2b=12$.

**Câu 91.** Cho phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}+3.\sqrt{(x-1)(5-x)}=m$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có nghiệm?

**A.** 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập xác định: $D=[1;5]$.

Đặt $u=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$, ta có $u^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}\right)^2=4+2\sqrt{(x-1)(5-x)}\ge 4$;nên $u\ge 2$.

Ta lại có: $u^2=\left(1.\sqrt{x-1}+1.\sqrt{5-x}\right)^2 \overset{Bunhiacopxki}{\le} \left(1^2+1^2\right)(x-1+5-x)=8$, nên $u\le 2\sqrt{2}$.

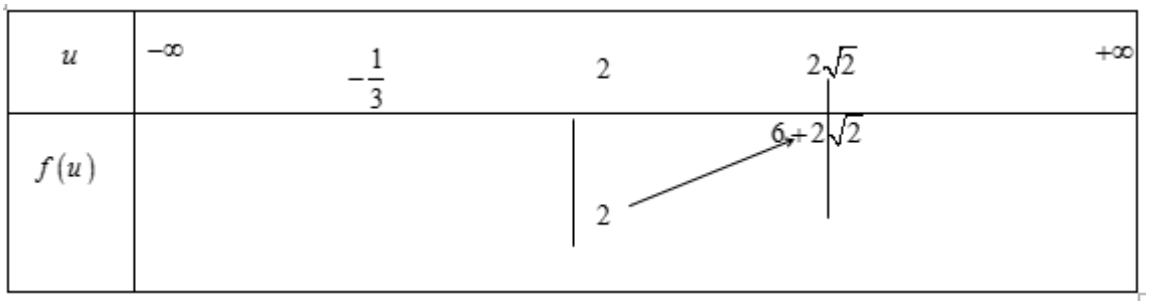
Vậy với $x\in[1;5]$ thì $u\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Mặt khác $u^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}\right)^2=4+2\sqrt{(x-1)(5-x)} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(5-x)}=\frac{u^2-4}{2}$.

Khi đó ta thu được phương trình: $u+\frac{3}{2}\left(u^2-4\right)=m \Leftrightarrow \frac{3}{2}u^2+u-6=m$.

Xét hàm số $f(u)=\frac{3}{2}u^2+u-6$ trên đoạn $\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Ta có bảng biến thiên như sau:




Dựa vào bảng biến thiên ta có yêu cầu bài toán tương đương $2 \le m \le 6+2\sqrt{2}$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2;3;4;5;6;7;8\}$.

**Câu 92.** Tìm $m$ để phương trình $x+2\sqrt{x+1}+m=0$ vô nghiệm

**A.** $m \in (2;+\infty)$. **B.** $m \in (1;+\infty)$. **C.** $m \in (-\infty;1]$. **D.** $m \in (-\infty;2]$.

**Lời giải:**

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x+1} \ge 0$ ta có phương trình $t^2+2t-1=-m \ (2)$. Phương trình ban đầu vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) không có nghiệm $t \in [0+\infty)$. Lập BBT cho hàm số $f(t)=t^2+2t-1$ với $t \in [0+\infty)$ ta có kết luận $-m<-1 \Leftrightarrow m>1$ là các giá trị cần tìm. Suy ra đáp án **B.**

**Câu 93.** Phương trình $\sqrt{2x^2-(2m^2+1)x+m^2}=2x-1$ có hai nghiệm phân biệt thì $m \in (a,b)$. Tính $b-a$.

**A.** 1. **B.** 0. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

**Lời giải:**

Chọn C

Phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt tương đương với phương trình

$2x^2-(2m^2+1)x+m^2=(2x-1)^2$ (1)có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1/2;+\infty)$.

Mà $(1) \Leftrightarrow 2x^2+(2m^2-3)x+1-m^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1/2 \\ x=1-m^2 \end{array}\right.$. Như vậy ta cần

$1-m^2>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Suy ra đáp án **C.**

**Câu 94.** Phương trình $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=m$ có vô số nghiệm thì giá trị của m thuộc khoảng nào?

**A.** $m \in (1;3)$. **B.** $m \in (2;4)$. **C.** $m \in (3;5)$. **D.** $m \in (4;6)$.

**Lời giải:**

Chọn **A.**

TXĐ: $[1;+\infty)$

Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-1}+1\right|=m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sqrt{x-1}=m & (x \in [2;+\infty)) \\ 2=m & (x \in [1;2]) \end{array}\right.$

Để phương trình có vô số nghiệm thì $m=2$, suy ra chọn đáp án **A.**

**Câu 95.** Phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=m^2(x+1)$ có nghiệm thì $m \in [a;b] \setminus \{0\}$, tính giá trị của $a^2+b$

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

**Lời giải:**

Chọn **C.**

TXĐ: $[1;+\infty)$

Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow 2(x+1)=m^2(x+1)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\2=m^2\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}\right)(1)\end{array}\right.$

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm $x\ge 1$.

Lại có $(1)\Leftrightarrow\dfrac{2}{m^2}=\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}$ do $m=0$ là cho phương trình vô nghiệm.

Vậy (1) có nghiệm $x\ge 1\Leftrightarrow\dfrac{2}{m^2}$ thuộc miền giá trị của hàm số $y=\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}$ với

$x\in[1;+\infty)\Leftrightarrow\dfrac{2}{m^2}\ge 2\Leftrightarrow m\in[-1;1]\setminus\{0\}$. Suy ra đáp án **C.**

**Câu 96.** Số các nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5)=2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$ là

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

**Lời giải:**

Chọn C

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2+5x-2}\Leftrightarrow x(x+5)=t^3+2$. Phương trình đã cho trở thành

$t^3-2t+4=0\Leftrightarrow(t+2)(t^2-2t+2)=0\Leftrightarrow t=-2$.

Với $t=-2$: $x^2+5x-2=-8\Leftrightarrow x^2+5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-3\end{array}\right.$

**Câu 97.** Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-x-1}-\sqrt{3-\sqrt{x^2-x-1}}=1$ là

**A.** $\dfrac{1}{2}$ **B.** $-5$ **C.** 5 **D.** 1

**Lời giải:**

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{3-\sqrt{x^2-x-1}}\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-1}=3-t^2$. Phương trình đã cho trở thành

$3-t^2-t=1\Leftrightarrow t^2+t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1(tm)\\t=-2(loai)\end{array}\right.$

Với $t=1$: $x^2-x-1=4\Leftrightarrow x^2-x-5=0\Rightarrow x_1.x_2=-5$

**Câu 98.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $2x^2+2x-\sqrt{x^2+x+2\sqrt{x^2+x-1}}=7$ là

**A. 11** **B. - 1** **C. - 9** **D.** $\dfrac{25}{4}$

**Lời giải:**

Chọn A

$2x^2+2x-\sqrt{x^2+x+2\sqrt{x^2+x-1}}=7\Leftrightarrow 2x^2+2x-\sqrt{(\sqrt{x^2+x-1}+1)^2}=7$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-(\sqrt{x^2+x-1}+1)=7\Leftrightarrow 2x^2+2x-\sqrt{x^2+x-1}-8=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2+x-1}\ge 0\Leftrightarrow 2x^2+2x=2(t^2+1)$. Phương trình trở thành

$2t^2-t-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2(tm)\\t=-\dfrac{3}{2}(loai)\end{array}\right.$.

Với $t=2:\quad x^2+x-1=4\Leftrightarrow x^2+x-5=0\Rightarrow\begin{cases}S=-1\\P=-5\end{cases}\Rightarrow {x_1}^2+{x_2}^2=S^2-2P=11$

**Câu 99.** Nếu phương trình $x^2+2x+\sqrt{-x^2-2x+15}+m=0$ có nghiệm duy nhất thì

**A.** $m\in(-2;0)$ **B.** $m=-4$ **C.** $m\in(-4;0)$ **D.** $m=-\dfrac{65}{4}$

**Lời giải:**

Chọn C

$x^2+2x+\sqrt{-x^2-2x+15}+m=0\Leftrightarrow-(x+5)(3-x)+\sqrt{(x+5)(3-x)}+m+15=0\quad(1)$

Nhận xét: Nếu $a$ là nghiệm của (1) thì $-2-a$ cũng là nghiệm của (1). Để (1) có nghiệm duy nhất thì $a=-2-a\Leftrightarrow a=-1$. Thay $a=-1$ là nghiệm của (1) ta tính được $m=-3$.

Thử lại: Thay $m=-3$ vào phương trình và giải được nghiệm duy nhất $x=-1$.

**Câu 100.** Với giá trị nào của tham số m thì phương trình sau có nghiệm ( ẩn x)

$$2x^2-4x+m+\sqrt{-x^2+2x}=-1$$

**A.** $\dfrac{-9}{8}\le m\le 0$ **B.** $0\le m\le\dfrac{1}{4}$ **C.** $-1\le m$ **D.** $-\dfrac{9}{8}\le m\le -1$

**Lời giải:**

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x}=\sqrt{-(x-1)^2+1}\in[0;1]$. Bài toán trở thành: tìm m để phương trình $2t^2-t-1=m$ có nghiệm $t\in[0;1]$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)=2t^2-t-1$, $t\in[0;1]$ ta tìm được tập giá trị của nó là $[\dfrac{-9}{8};0]$

**Câu 101.** Cho phương trình $\sqrt{x^2(1-2x)}=\sqrt{x^2(m+x)}$. Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất?

**A.** $m<-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m<-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. **D.** $m>-\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải:**

Chọn C

$$\sqrt{x^2(1-2x)}=\sqrt{x^2(m+x)}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2(1-2x)\ge 0\\x^2(1-2x)=x^2(m+x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\1-2x\ge 0\end{array}\right.\\x^2(3x+m-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\x\le\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\dfrac{m-1}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\\begin{cases}x=-\dfrac{m-1}{3}\\x\le\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}-\dfrac{m-1}{3}=0\\x=-\dfrac{m-1}{3}>\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m<-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

**Câu 102.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x^2+\sqrt{x+3}}=\sqrt{3-2x-x^2}$ là:

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

**Lời giải:**

Chọn A

$$\sqrt{3-x^2+\sqrt{x+3}}=\sqrt{3-2x-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}3-2x-x^2\ge 0\\3-x^2+\sqrt{x+3}=3-2x-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-(x-1)(x+3)\ge 0\\\sqrt{x+3}=-2x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 1\\x\le 0\\x+3=4x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 0\\4x^2-x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 0\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{3}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}.$$

**Câu 103.** Cho phương trình $4\sqrt{2x^2-3x+1}=\sqrt{9x^2+54x+81}$. Tính tổng các nghiệm của phương trình?

**A.** $\frac{13}{23}$. **B.** 5. **C.** $\frac{102}{23}$. **D.** $\frac{125}{23}$.

**Lời giải:**

Chọn C

$$4\sqrt{2x^2-3x+1}=\sqrt{9x^2+54x+81}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-3x+1\ge 0\\32x^2-48x+16=9x^2+54x+81\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x\le\frac{1}{2}\end{array}\right.\\23x^2-102x-65=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x\le\frac{1}{2}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-\frac{13}{23}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-\frac{13}{23}\end{array}\right.\Rightarrow 5+\left(-\frac{13}{23}\right)=\frac{102}{23}.$$

**Câu 104.** Biết phương trình $\sqrt{(x^2-3x)\sqrt{2x^2-5x+2}}=\sqrt{(x^2-3x)\sqrt{2x^2-5x+2}}$ có tập nghiệm $S$. Phát biểu nào là đúng trong các phát biểu sau?

**A.** $S\cap\left(0;\frac{1}{4}\right)=\varnothing$. **B.** $S=\mathbb{R}$.

**C.** $S=(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$. **D.** $S$ có hai phần tử.

**Lời giải:**

Chọn A

$$\sqrt{(x^2-3x)\sqrt{2x^2-5x+2}}=\sqrt{(x^2-3x)\sqrt{2x^2-5x+2}}\Leftrightarrow(x^2-3x)\sqrt{2x^2-5x+2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-5x+2=0\\\begin{cases}2x^2-5x+2>0\\x^2-3x\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x>2\\x<\frac{1}{2}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\x\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\frac{1}{2}\\x\ge 3\\x\le 0\end{array}\right.$$

**Câu 105.** Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\sqrt{m-x^2+\sqrt{2x+9}}=\sqrt{x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** $m>-5$. **B.** $m<-3$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\in\varnothing$.

**Lời giải:**

Chọn D

$$\sqrt{m-x^2+\sqrt{2x+9}}=\sqrt{x-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x-x^2\ge 0\\ m-x^2+\sqrt{2x+9}=x-x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ \sqrt{2x+9}=x-m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ x\ge m\\ 2x+9=(x-m)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1(*)\\ x\ge m(**)\\ x^2-2(m+1)x+m^2-9=0\,(1)\end{cases}.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(1)$ có hai nghiệm phân biệt thỏa điều kiện $(*),(**)$

$(1):\Delta'>0\Leftrightarrow(m+1)^2-(m^2-9)>0\Leftrightarrow m>-5$.

Khi đó hai nghiệm thỏa $(*),(**)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases}f(0)\ge 0;f(1)\ge 0;f(m)\ge 0\\ 0\le\dfrac{S}{2}\le 1;m\le\dfrac{S}{2}\end{cases}$

Với $f(x)=x^2-2(m+1)x+m^2-9;f(0)=m^2-9;f(1)=m^2-2m-10;f(m)=-2m-9.$

$\dfrac{S}{2}=m+1$.

Giải hệ ta được hệ vô nghiệm.

**Câu 106.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2$ là:

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

**Lời giải:**

Chọn C

Điều kiện xác định: $-17\le x\le 17$

$\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2$

$\Leftrightarrow\sqrt{17+x}=2+\sqrt{17-x}$

$\Leftrightarrow 17+x=4+4\sqrt{17-x}+17-x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{17-x}=x-2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x^2=64\end{array}\right.\Leftrightarrow x=8$

**Câu 107.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\sqrt{17+x}+\sqrt{17-x}=8$ là:

**A.** 5. **B.** 2. **C.** 128. **D.** 256.

**Lời giải:**

Chọn C

Điều kiện xác định: $-17\le x\le 17$

$\sqrt{17+x}+\sqrt{17-x}=8$

$\Leftrightarrow \sqrt{17+x}.\sqrt{17-x}=15$

$\Leftrightarrow 289-x^2=225$

$\Leftrightarrow x^2=64$

$\Leftrightarrow x=\pm 8$

Vậy tổng bình phương các nghiệm là 128

**Câu 108.** Số nghiệm của phương trình $x+\sqrt{x^2+16}=\dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}$ là:

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

**Lời giải:**

Chọn C

$x+\sqrt{x^2+16}=\dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}$

$\Leftrightarrow x.\sqrt{x^2+16}+x^2+16=40$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+16}=24-x^2$

$\Rightarrow x^4+16x^2=576-48x^2+x^4$

$\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm 3$

Thử lại ta có: $x=3$ thỏa mãn còn $x=-3$ không thỏa mãn phương trình

**Câu 109.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $4x^3-3x=\sqrt{1-x^2}$ là:

**A.** $\dfrac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**Lời giải:**

Chọn A

Tập xác định: $D=\left[-1;1\right]$. Đặt $x=cost$, $(t\in[0;\pi])$

Phương trình trở thành: $4cos^3t-3cost=\sqrt{1-\cos^2 t}\Leftrightarrow \cos 3t=\sin t\Leftrightarrow \cos 3t=\cos(\dfrac{\pi}{2}-t)$.

Phương trình này có 3 nghiệm thuộc $[0;\pi]$ là: $\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{\pi}{8};\dfrac{5\pi}{8}$.Do vậy pt đã cho có 3 nghiệm là:

$x_1=\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ;

$x_2=\cos\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$x_3=\cos\dfrac{5\pi}{8}=-\sin\dfrac{\pi}{8}=-\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Tổng bình phương 3 nghiệm bằng $\dfrac{3}{2}$.

**Câu 110.** Cho phương trình $\sqrt{x^2-1}-x=m$ .Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để phương trình có nghiệm:

**A.** $m\in\left[-1;0\right]\cup\left[1;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left[-1;0\right)\cup\left[1;+\infty\right)$.

**C.** $m\in\left[-2;0\right)\cup\left[2;+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[-2;0\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

**Lời giải:**

Chọn B

$\sqrt{x^2-1}-x=m\,(1)$

Ta có

$$pt(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}=m+x\Leftrightarrow\begin{cases}m+x\ge 0\\x^2-1=(m+x)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -m\\2mx=-m^2-1\end{cases}\qquad(2)$$

Với $m=0$ phương trình (2) vô nghiệm.

Với $m\neq 0$, phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm thỏa mãn $x\ge -m$

$$\Leftrightarrow-\frac{m^2+1}{2m}\ge -m\Leftrightarrow\frac{m^2-1}{2m}\ge 0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m\ge 1\\-1\le m<0\end{bmatrix}$$

**Câu 111.** Cho phương trình $\sqrt{2x^2+mx-3}=x-m$ .Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để phương trình vô nghiệm:

**A.** $m>1$ **B.** $m\le -1$. **C.** $m>3$. **D.** $m\ge 2$

**Lời giải:**

Chọn A

$\sqrt{2x^2+mx-3}=x-m\,(1)$

Ta có

$$pt(1)\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+mx-3}=x-m\Leftrightarrow\begin{cases}x-m\ge 0\\2x^2+mx-3=(x-m)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge m\\f(x)=x^2+3mx-3-m^2=0\qquad(2)\end{cases}\qquad(*)$$

pt(1) vô nghiệm khi và chỉ khi hệ (*) vô nghiệm. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) vô nghiệm hoặc phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn $x_1\le x_2<m$.

$\Delta=9m^2+4.(3+m^2)=13m^2+12\ge 12\forall m$,

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với:

$$\begin{cases}\Delta\ge 0\\x_1-m<0\\x_2-m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1-m)(x_2-m)>0\\(x_1-m)+(x_2-m)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2>0\\x_1+x_2-2m<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3-m^2+3m^2+m^2>0\\-3m-2m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3m^2>3\\-5m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m|>1\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>1$$

**Câu 112.** Cho phương trình $\sqrt{2x^2-6x+m}=x-1$ .Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt:

**A.** $m\in[2;6]$ **B.** $m\in[4;6)$. **C.** $m\in[2;5)$. **D.** $m\in[4;5)$

**Lời giải:**

Chọn D

$\sqrt{2x^2-6x+m}=x-1\,(1)$

Ta có

$$pt(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-6x+m} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 2x^2-6x+m = (x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ f(x) = x^2-4x-1+m = 0 \qquad (2) \end{cases} \qquad (*)$$

pt(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hệ (*) có hai nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt mãn $1 \le x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - 1 \ge 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 5-m > 0 \\ (x_1-1)(x_2-1) \ge 0 \\ (x_1-1)+(x_2-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ x_1x_2 - (x_1+x_2)+1 \ge 0 \\ x_1+x_2-2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ -1+m-4+1 \ge 0 \\ 4-2 > 0 \forall m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \le m < 5$$

Cách khác:

$\sqrt{2x^2-6x+m} = x-1\,(1)$

Ta có

$$pt(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-6x+m} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 2x^2-6x+m = (x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2-4x-1 = -m \qquad (2) \end{cases} \qquad (*)$$

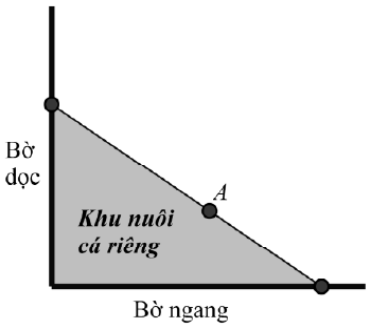
pt(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hệ (*) có hai nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt mãn $1 \le x_1 < x_2$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^2-4x-1$ trên $[1;+\infty)$ cắt đường thẳng $y = -m$ tại hai điểm phân biệt.

Ta có bảng biến thiên

| $x$ | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y(1) = -4$ | $\searrow$ | $y(2) = -5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: pt(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-5 < -m \le -4 \Leftrightarrow 4 \le m < 5$

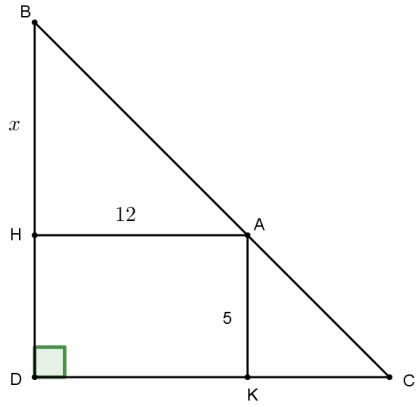
**Câu 113.** Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí $A$. Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là $5m$ và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là $12m$.




**A.** $120m^2$. **B.** $156m^2$. **C.** $238,008(3)m^2$. **D.** $283,003(8)m^2$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $H,K$ là hình chiếu của $A$ trên bờ dọc và bờ ngang. Đặt $BH = x\left(x > 0\right)$.

Khi đó, $\frac{BH}{HD} = \frac{BA}{AC} = \frac{DK}{KC} \Rightarrow KC = \frac{HD.DK}{BH} = \frac{60}{x}$.

Diện tích khu nuôi cá là:

$S = \frac{1}{2}BD.DC = \frac{1}{2}\left(x+5\right)\left(\frac{60}{x}+12\right) = 6x + \frac{150}{x} + 60 \ge 2\sqrt{6x.\frac{150}{x}} + 60$ (bất đẳng thức Côsi)

$\Rightarrow S \ge 120, S = 120$ *khi* $x = 5$. Vậy diện tích nhỏ nhất có thể giăng là $120m^2$.

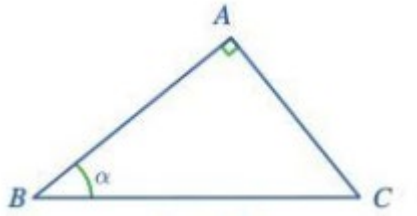
# Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°. ĐỊNH LÍ COSIN, SIN TRONG TAM GIÁC

- | FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°.

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có góc $\widehat{ABC}=\alpha$




$\sin\alpha=\dfrac{AC}{BC},\cos\alpha=\dfrac{AB}{BC},\tan\alpha=\dfrac{AC}{AB},\text{cost}\alpha=\dfrac{AB}{AC}$

$\sin\left(90^\circ-\alpha\right)=\cos\alpha,\cos\left(90^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$

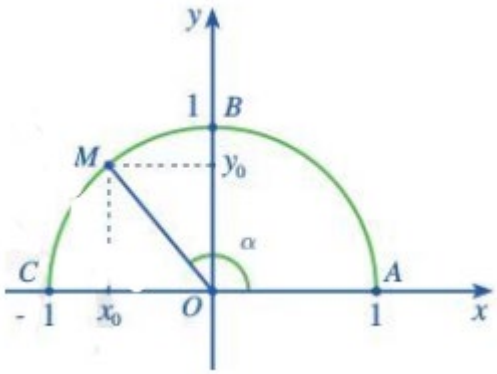
$\tan\left(90^\circ-\alpha\right)=\cot\alpha,\cot\left(90^\circ-\alpha\right)=\tan\alpha$

- sin của góc $\alpha$, kí hiệu là $\sin\alpha$, được xác định bởi: $\sin\alpha=y_0$;
- côsin của góc $\alpha$, kí hiệu là $\cos\alpha$, được xác định bởi: $\cos\alpha=x_0$;
- tang của góc $\alpha$, kí hiệu là $\tan\alpha$, được xác định bởi: $\tan\alpha=\dfrac{y_0}{x_0}\left(x_0\neq 0\right)$;
- côtang của góc $\alpha$, kí hiệu là $\cot\alpha$, được xác định bởi: $\cot\alpha=\dfrac{x_0}{y_0}\left(y_0\neq 0\right)$.

Các số $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha,\cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc $\alpha$.

***Ví dụ 1.*** Tính các giá trị lượng giác của các góc: $0^\circ,90^\circ,180^\circ$.

***Giải.***




Với $\alpha=0°$; khi đó, $M$ trùng với $A\left(1;0\right)$. Do đó $\sin 0°=0$, $\cos 0°=1,\tan 0°,\cot 0°$ không xác định.

Với $\alpha=90°$; khi đó, $M$ trùng với $B\left(0;1\right)$. Do đó $\sin 90°=1$, $\cos 90°=0,\cot 90°=0,\tan 0°$ không xác định.

Với $\alpha=180°$; khi đó, $M$ trùng với $C\left(-1;0\right)$. Do đó $\sin 180°=0$, $\cos 180°=0,\tan 180°=0,\cot 180°$ không xác định.

Chú ý. $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq 90°\right);\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(0°<\alpha<180°\right)$

$\sin\left(90°-\alpha\right)=\cos\alpha\left(0°\le\alpha\le 90°\right)$

$\cos\left(90°-\alpha\right)=\sin\alpha\left(0°\le\alpha\le 90°\right)$

$\tan\left(90°-\alpha\right)=\cot\alpha\left(0°\le\alpha\le 90°\right)$

$\cot\left(90°-\alpha\right)=\tan\alpha\left(0°\le\alpha\le 90°\right)$

Với $0°\le\alpha\le 180°$ thì:

- $\sin\left(180°-\alpha\right)=\sin\alpha$
- $\cos\left(180°-\alpha\right)=-\cos\alpha$
- $\tan\left(180°-\alpha\right)=-\tan\alpha\left(\alpha\neq 90°\right)$,

- $\cot(180°-\alpha)=-\cot\alpha\,(\alpha\neq 0°,\alpha\neq 180°)$.

***Ví dụ 2.*** Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức sau:

$T=\cos 15°-\sin 35°+\cos 55°+\cos 165°-\cos 180°$.

***Giải***

$T=\cos 15^\circ-\sin 35^\circ+\cos\left(90^\circ-35^\circ\right)+\cos\left(180^\circ-15^\circ\right)+1$

$=\cos 15^\circ-\sin 35^\circ+\sin 35^\circ-\cos 15^\circ+1=1$

***Ví dụ 3.*** Viết giá trị lượng giác của góc $120^\circ$.

***Giải***

Ta có: $\sin 120°=\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120°=-\cos 60°=-\dfrac{1}{2}$

$\tan 120°=-\tan 60°=-\sqrt{3}$; $\cot 120°=-\cot 60°=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự ta có bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt:

| GTLG $\alpha$ | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $180°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\|\|$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |
| $\cot\alpha$ | $\|\|$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | $\|\|$ |

## II. Định lí côsin

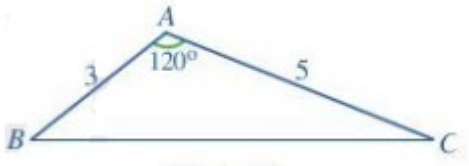
*Cho tam giác $ABC$ có $BC=a,CA=b,AB=c$. khi đó*

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\Rightarrow\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

***Ví dụ 4.*** Cho tam giác $ABC$ có $AB=3,AC=5$ và $\widehat{A}=120°$




a) Tính $\cos A$;

b) Tính độ dài cạnh $BC$.

***Giải***

a) Ta có: $\cos A=\cos 120°=-\cos 60°=-\dfrac{1}{2}$.

b) Áp dụng định lí côsin trong tam giác $ABC$ ta có:

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

Thay số ta có:

$BC^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=49$.

Do đó $BC=\sqrt{49}=7$.

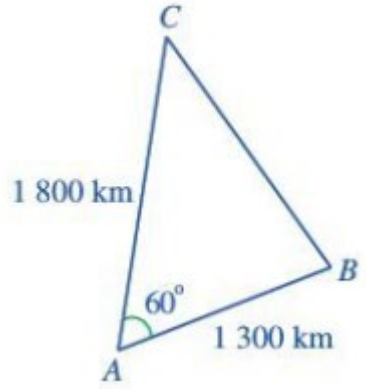
***Ví dụ 5.*** Hai máy bay cùng xuất phát từ một sân bay $A$ và bay theo hai hướng khác nhau, tạo với nhau góc $60^\circ$. Máy bay thứ nhất bay với vận tốc $650\,km/h$, máy bay thứ hai bay với vận tốc $900\,km/h$. Sau 2 giờ, hai máy bay cách nhau bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết rằng cả hai máy bay bay theo đường thẳng và sau 2 giờ bay đều chưa hạ cánh.

***Giải***

Giả sử sau 2 giờ, máy bay thứ nhất đến vị trí $B$, máy bay thứ hai đến vị trí $C$. Ta có:

$AB = 2.650 = 1300(km), AC = 2.900 = 1800(km)$,

$\widehat{BAC} = 60^\circ$




Áp dụng định lí côsin trong tam giác $ABC$, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC}$$
$$= 1300^2 + 1800^2 - 2 \cdot 1300 \cdot 1800 \cdot \cos 60^\circ = 2590000.$$

Do đó $BC \approx 1609,35(km)$.

Vậy sau 2 giờ hai máy bay cách nhau khoảng 1609,35 km.

## III. Định lí sin

Cho tam giác $ABC$ có $BC = a, CA = b, AB = c$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R$. Khi đó:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,\ a = 2R\sin A, b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C.$$

***Ví dụ 6.*** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{A} = 120^\circ, \widehat{B} = 45^\circ$ và $CA = 20$. Tính:




a) $\sin A$;

b) Độ dài cạnh $BC$ và bán kính $R$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

***Giải***

a) Ta có: $\sin A = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

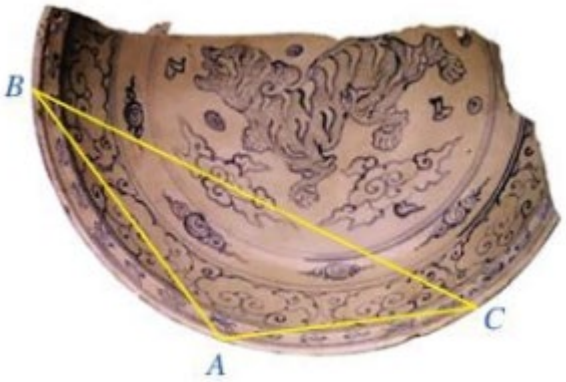
b) Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$, ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2R$.

Do đó $BC = \frac{CA \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{20 \cdot \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = 10\sqrt{6}$;

$R = \frac{CA}{2 \cdot \sin B} = \frac{20}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 10\sqrt{2}$

***Ví dụ 7.*** Các nhà khảo cổ học tìm được một mảnh chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ. Để xác định đường kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy ba điểm trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau:

$BC \approx 28,5\,cm; \widehat{BAC} \approx 120^\circ$.




Tính đường kính của chiếc đía theo đơn vị xăng-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

***Giải***

Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$, ta có: $2R = \dfrac{BC}{\sin A} \approx \dfrac{28,5}{\sin 120^\circ} \approx 33(cm)$.

Vậy đường kính của chiếc đĩa khoảng $33cm$.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°.

**Câu 1.** Tìm góc $\alpha$, $0^\circ \le \alpha \le 180^0$ trong mỗi trường hợp sau

a) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos\alpha = 0$.

c) $\tan\alpha = -\sqrt{3}$

**Câu 2.** Cho góc $\alpha = 135^\circ$. Hãy tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$

**Câu 3.** Tính giá trị lượng giác của các góc sau đây

a) $120^\circ$

b) $150^\circ$

c) $180^\circ$

**Câu 4.** Tính theo hàm số lượng giác của các góc bé hơn $90^\circ$:

$\sin 100^\circ$, $\sin 160^\circ$, $\cos 170^\circ$, $\tan 103^\circ 45'$ $\cot 124^\circ 15'$.

**Câu 5.** Tìm giá trị của biểu thức

a) $A = 2\sin 30^\circ + 3\cos 45^\circ - \sin 60^\circ$

b) $B = 3\cos 30^\circ + 3\sin 45^\circ - \cos 60^\circ$

**Câu 6.** Tính giá trị của biểu thức

a) $a\sin 0^\circ + b\cos 0^\circ + c\sin 90^\circ$.

b) $a\cos 90^\circ + b\sin 90^\circ + c\sin 180^\circ$.

c) $a^2\sin 90^\circ + b^2\cos 90^\circ + c^2\cos 180^\circ$.

**Câu 7.** Tính giá trị các biểu thức sau:

**a)** $A = a^2\sin 90^\circ + b^2\cos 90^\circ + c^2\cos 180^\circ$

**b)** $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$

**c)** $C = \sin^2 45^0 - 2\sin^2 50^\circ + 3\cos^2 45^\circ - 2\sin^2 40^\circ + 4\tan 55^\circ.\tan 35^\circ$

**Câu 8.** Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$

b) $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + ... + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

c) $C=\tan 5^o \tan 10^o \tan 15^o ... \tan 80^o \tan 85^o$

**Câu 9.** Tính giá trị của biểu thức

a) $\sin x+\cos x$ khi $x$ bằng $0^\circ, 135^\circ, 120^\circ$.

b) $2\sin x+\cos 2x$ khi $x$ bằng $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$.

c) $\sin^2 x+\cos^2 x$ khi $x$ bằng $30^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 145^\circ, 180^\circ$

**Câu 10.** Tính giá trị của biểu thức $T=\sqrt{1-\sin x}.\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-2\sin x.\cos x}$ khi $\tan x=\sqrt{3}$, $\tan x=-\frac{3}{4}$.

**Câu 11.** Tính giá trị của biểu thức

a) $\cos^2 12^\circ+\cos^2 78^\circ+\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ$.

b) $\sin^2 3^\circ+\sin^2 15^\circ+\sin^2 75^\circ+\sin^2 87^\circ$.

**Câu 12.** Tính giá trị của biểu thức

a) $A=\cos 0^\circ+\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+...+\cos 180^\circ$.

b) $B=\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+...+\sin^2 90^\circ$.

c) $C=\tan 1^\circ.\tan 3^\circ.\tan 5^\circ.....\tan 89^\circ$.

**Câu 13.** a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x$.

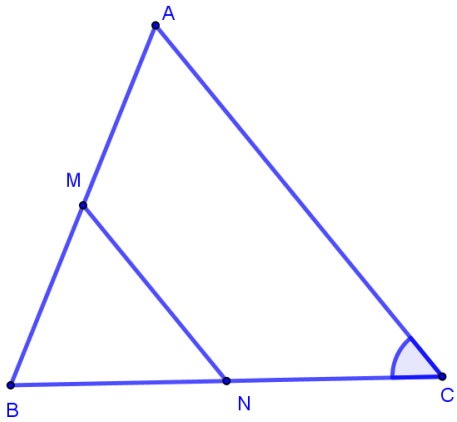
b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức: $Q=\sin^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x$.

## Dạng 2. Định lí cosin

**Câu 1.** Cho tam giác $ABC$, biết

a) $a=12, b=13, c=15$. Tính độ lớn góc $A$. b) $AB=5, AC=8, \widehat{A}=60^o$. Tính cạnh $BC$

**Câu 2.** Cho tam giác $ABC$, có đoạn thẳng nối trung điểm $AB$ và $BC$ bằng $3$, cạnh $AB=9$ và $\widehat{ACB}=60^o$. Tính cạnh $BC$.




## Dạng 3. Định lí sin

**Câu 3.** Cho tam giác $ABC$, biết

a) $\widehat{A}=60^o, \widehat{B}=45^o, b=4$. Tính cạnh $b$ và $c$. b) $\widehat{A}=60^o, a=6$. Tính $R$

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$, có $\widehat{B}=60^o, \widehat{C}=45^o, BC=a$

a) Tính độ dài hai cạnh $AB, AC$.

b) Chứng minh $\cos 75^o=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°.

**Câu 1.** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

**A.** $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

**Câu 2.** Giá trị của $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $1$

**Câu 3.** Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$ **B.** $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **D.** $2$

**Câu 4.** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

**A.** $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$ **B.** $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$

**C.** $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ **D.** $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$

**Câu 5.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$. **B.** $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$. **C.** $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$. **D.** $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$.

**Câu 6.** Đẳng thức nào sau đây **sai**?

**A.** $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$. **B.** $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.

**C.** $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$. **D.** $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

**Câu 7.** Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

**A.** $1$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $0$.

**Câu 8.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

**A.** $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$. **B.** $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.

**C.** $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$. **D.** $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

**Câu 9.** Giá trị của $\tan 45^\circ + \cot 135^\circ$ bằng bao nhiêu?

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $1$.

**Câu 10.** Tính giá trị của biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$.

**A.** $P = 1$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = \sqrt{3}$. **D.** $P = -\sqrt{3}$.

**Câu 11.** Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $1$. **D.** $-1$.

**Câu 12.** Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Câu 13.** Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ ... \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Câu 14.** Tổng $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + ... + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$ bằng

**A.** $21$. **B.** $23$. **C.** $22$. **D.** $24$.

**Câu 15.** Giá trị của $A = \tan 5^\circ . \tan 10^\circ . \tan 15^\circ ... \tan 80^\circ . \tan 85^\circ$ là

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $-1$.

**Câu 16.** Giá trị của $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$ là

**A.** $\sqrt{2}$. **B.** $2$. **C.** $-2$. **D.** $1$.

**Câu 17.** Biểu thức $A=\cos 20^\circ+\cos 40^\circ+\cos 60^\circ+...+\cos 160^\circ+\cos 180^\circ$ có giá trị bằng

**A.** $1$. **B.** $-1$. **C.** $2$. **D.** $-2$.

**Câu 18.** Cho $\tan\alpha-\cot\alpha=3$. Tính giá trị của biểu thức sau: $A=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$.

**A.** $A=12$. **B.** $A=11$. **C.** $A=13$. **D.** $A=5$.

**Câu 19.** Biết $\sin a+\cos a=\sqrt{2}$. Hỏi giá trị của $\sin^4 a+\cos^4 a$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-1$. **D.** $0$.

**Câu 20.** Biểu thức $f(x)=3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)$ có giá trị bằng:

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $-3$. **D.** $0$.

**Câu 21.** Biểu thức: $f(x)=\cos^4 x+\cos^2 x\sin^2 x+\sin^2 x$ có giá trị bằng

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $-2$. **D.** $-1$.

**Câu 22.** Biểu thức $\tan^2 x\sin^2 x-\tan^2 x+\sin^2 x$ có giá trị bằng

**A.** $-1$. **B.** $0$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Câu 23.** Cho $\sin x+\cos x=m$. Tính theo $m$ giá trị của $M=\sin x.\cos x$.

**A.** $m^2-1$. **B.** $\frac{m^2-1}{2}$. **C.** $\frac{m^2+1}{2}$. **D.** $m^2+1$.

## Dạng 2. Định lí cosin

**Câu 1.** Cho tam giác $ABC$, mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $a^2=b^2+c^2+2bc\cos A$. **B.** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

**C.** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos C$. **D.** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos B$.

**Câu 2.** Cho tam giác ABC có $a=8,b=10$, góc $C$ bằng $60^0$. Độ dài cạnh $c$ là?

**A.** $c=3\sqrt{21}$. **B.** $c=7\sqrt{2}$. **C.** $c=2\sqrt{11}$. **D.** $c=2\sqrt{21}$.

**Câu 3.** Cho $\Delta ABC$ có $b=6,c=8,\hat{A}=60^0$. Độ dài cạnh $a$ là:

**A.** $2\sqrt{13}$. **B.** $3\sqrt{12}$. **C.** $2\sqrt{37}$. **D.** $\sqrt{20}$.

**Câu 4.** Cho $\Delta ABC$ có $B=60^0,a=8,c=5$. Độ dài cạnh $b$ bằng:

**A.** $7$. **B.** $129$. **C.** $49$. **D.** $\sqrt{129}$.

**Câu 5.** Cho $\Delta ABC$ có $AB=9;BC=8;\hat{B}=60^0$. Tính độ dài $AC$.

**A.** $\sqrt{73}$. **B.** $\sqrt{217}$. **C.** $8$. **D.** $\sqrt{113}$.

**Câu 6.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=2,AC=1$ và $A=60^0$. Tính độ dài cạnh $BC$.

**A.** $BC=\sqrt{2}$. **B.** $BC=1$. **C.** $BC=\sqrt{3}$. **D.** $BC=2$.

**Câu 7.** Tam giác $ABC$ có $a=8,c=3,\hat{B}=60^0$. Độ dài cạnh $b$ bằng bao nhiêu?

**A.** $49$. **B.** $\sqrt{97}$ **C.** $7$. **D.** $\sqrt{61}$.

**Câu 8.** Tam giác $ABC$ có $\hat{C}=150^0,BC=\sqrt{3},AC=2$. Tính cạnh $AB$?

**A.** $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $10$. **D.** $1$.

**Câu 9.** Cho $a;b;c$ là độ dài 3 cạnh của tam giác $ABC$. Biết $b=7;c=5;\cos A=\frac{4}{5}$. Tính độ dài của $a$.

**A.** $3\sqrt{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{23}{8}$. **D.** $6$.

**Câu 10.** Cho $\widehat{xOy}=30°$.Gọi $A,B$ là 2 điểm di động lần lượt trên $Ox,Oy$ sao cho $AB=2$. Độ dài lớn nhất của $OB$ bằng bao nhiêu?

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

**Câu 11.** Cho $a;b;c$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

**A.** $a^2<ab+ac$. **B.** $a^2+c^2<b^2+2ac$. **C.** $b^2+c^2>a^2+2bc$. **D.** $ab+bc>b^2$.

**Câu 12.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=4$ cm, $BC=7$ cm, $AC=9$ cm. Tính $\cos A$.

**A.** $\cos A=-\frac{2}{3}$. **B.** $\cos A=\frac{1}{2}$. **C.** $\cos A=\frac{1}{3}$. **D.** $\cos A=\frac{2}{3}$.

**Câu 13.** Cho tam giác $ABC$ có $a^2+b^2-c^2>0$. Khi đó:

**A.** Góc $C>90^0$ **B.** Góc $C<90^0$

**C.** Góc $C=90^0$ **D.** Không thể kết luận được gì về góc $C$.

**Câu 14.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn: $b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$. Khi đó:

**A.** $A=30^0$. **B.** $A=45^0$. **C.** $A=60^0$. **D.** $A=75^0$.

**Câu 15.** Cho các điểm $A(1;1),B(2;4),C(10;-2)$. Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu?

**A.** $90^0$. **B.** $60^0$. **C.** $45^0$. **D.** $30^0$.

**Câu 16.** Cho tam giác $ABC$, biết $a=24,b=13,c=15$. Tính góc $A$?

**A.** $33^034'$. **B.** $117^049'$. **C.** $28^037'$. **D.** $58^024'$.

**Câu 17.** Cho tam giác $ABC$, biết $a=13,b=14,c=15$. Tính góc $B$?

**A.** $59^049'$. **B.** $53^07'$. **C.** $59^029'$. **D.** $62^022'$.

**Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ biết độ dài ba cạnh $BC$, $CA$, $AB$ lần lượt là $a$, $b$, $c$ và thỏa mãn hệ thức $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(c^2-a^2\right)$ với $b\neq c$. Khi đó, góc $\widehat{BAC}$ bằng

**A.** $45°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $120°$.

**Câu 19.** Tam giác $ABC$ có $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Các cạnh $a$, $b$, $c$ liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(a^2-c^2\right)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ.

**A.** $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

**Câu 20.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$ và $M$ là điểm nằm trong tam giác $ABC$ sao cho $MA:MB:MC=1:2:3$ khi đó góc $AMB$ bằng bao nhiêu?

**A.** $135°$. **B.** $90°$. **C.** $150°$. **D.** $120°$.

**Câu 21.** Hai chiếc xe cùng xuất phát ở vị trí A, đi theo hai hướng tạo với nhau một góc $60^0$. Xe thứ nhất chạy với tốc độ $30km/h$, xe thứ hai chạy với tốc độ $40km/h$. Hỏi sau 1h, khoảng cách giữa 2 xe là:

**A.** $13km$. **B.** $15\sqrt{3}km$. **C.** $10\sqrt{13}$. **D.** $15km$.

**Câu 22.** Hai tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A, đi theo hai hướng và tạo với nhau một góc $60^0$. Tàu thứ nhất chạy với vận tốc $30$ km/h, tàu thứ hai chạy với vận tốc $40$ km/h. Hỏi sau $2$ giờ hai tàu cách xa nhau bao nhiêu $km$?

**A.** $25\sqrt{10}$. **B.** $30\sqrt{10}$. **C.** $18\sqrt{13}$. **D.** $20\sqrt{13}$.

**Câu 23.** Khoảng cách từ $A$ đến $C$ không thể đo trực tiếp vì phải qua một đầm lầy nên người ta làm như sau. Xác định một điểm $B$ có khoảng cách $AB$ là $12km$ và đo được góc $\widehat{ACB}=37°$. Hãy tính khoảng cách $AC$ biết rằng $BC$ bằng $5km$.

**A.** $AC\approx 17\,km$. **B.** $AC\approx 12\,km$. **C.** $AC\approx 15,6\,km$. **D.** $AC\approx 20\,km$.

**Dạng 3. Định lí sin**

**Câu 24.** Cho tam giác $ABC$. Tìm công thức sai:

**A.** $\dfrac{a}{\sin A}=2R$. **B.** $\sin A=\dfrac{a}{2R}$. **C.** $b\sin B=2R$. **D.** $\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}$.

**Câu 25.** Cho tam giác $ABC$ có góc $\widehat{BAC}=60°$ và cạnh $BC=\sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

**A.** $R=4$. **B.** $R=1$. **C.** $R=2$. **D.** $R=3$.

**Câu 26.** Trong mặt phẳng, cho tam giác $ABC$ có $AC=4$ cm, góc $\widehat{A}=60°$, $\widehat{B}=45°$. Độ dài cạnh $BC$ là

**A.** $2\sqrt{6}$. **B.** $2+2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}-2$. **D.** $\sqrt{6}$.

**Câu 27.** Cho $\Delta ABC$ có $AB=5;\widehat{A}=40°;\widehat{B}=60°$. Độ dài $BC$ gần nhất với kết quả nào?

**A.** $3,7$. **B.** $3,3$. **C.** $3,5$. **D.** $3,1$.

**Câu 28.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn hệ thức $b+c=2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** $\cos B+\cos C=2\cos A$. **B.** $\sin B+\sin C=2\sin A$.

**C.** $\sin B+\sin C=\dfrac{1}{2}\sin A$. **D.** $\sin B+\cos C=2\sin A$.

**Câu 29.** Tam giác $ABC$ có $a=16,8;\ \widehat{B}=56^0 13';\ \widehat{C}=71^0$. Cạnh $c$ bằng bao nhiêu?

**A.** 29,9. **B.** 14,1. **C.** 17,5. **D.** 19,9.

**Câu 30.** Tam giác ABC có $\widehat{A}=68^0 12'$, $\widehat{B}=34^0 44'$, $AB=117$. Tính $AC$?

**A.** 68. **B.** 168. **C.** 118. **D.** 200.

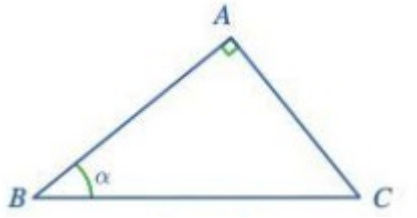
# Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°. ĐỊNH LÍ COSIN, SIN TRONG TAM GIÁC

- | FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°.

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có góc $\widehat{ABC}=\alpha$




$\sin\alpha=\dfrac{AC}{BC},\cos\alpha=\dfrac{AB}{BC},\tan\alpha=\dfrac{AC}{AB},\cot\alpha=\dfrac{AB}{AC}$

$\sin\left(90^\circ-\alpha\right)=\cos\alpha,\cos\left(90^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$

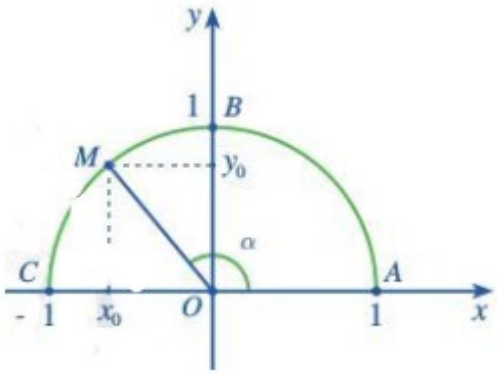
$\tan\left(90^\circ-\alpha\right)=\cot\alpha,\cot\left(90^\circ-\alpha\right)=\tan\alpha$

- sin của góc $\alpha$, kí hiệu là $\sin\alpha$, được xác định bởi: $\sin\alpha=y_0$;
- côsin của góc $\alpha$, kí hiệu là $\cos\alpha$, được xác định bởi: $\cos\alpha=x_0$;
- tang của góc $\alpha$, kí hiệu là $\tan\alpha$, được xác định bởi: $\tan\alpha=\dfrac{y_0}{x_0}\left(x_0\neq 0\right)$;
- côtang của góc $\alpha$, kí hiệu là $\cot\alpha$, được xác định bởi: $\cot\alpha=\dfrac{x_0}{y_0}\left(y_0\neq 0\right)$.

Các số $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha,\cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc $\alpha$.

***Ví dụ 1.*** Tính các giá trị lượng giác của các góc: $0^\circ,90^\circ,180^\circ$.

***Giải.***




Với $\alpha=0°$; khi đó, $M$ trùng với $A\left(1;0\right)$. Do đó $\sin 0°=0$, $\cos 0°=1,\tan 0°,\cot 0°$ không xác định.

Với $\alpha=90°$; khi đó, $M$ trùng với $B\left(0;1\right)$. Do đó $\sin 90°=1$, $\cos 90°=0,\cot 90°=0,\tan 0°$ không xác định.

Với $\alpha=180°$; khi đó, $M$ trùng với $C\left(-1;0\right)$. Do đó $\sin 180°=0$, $\cos 180°=0,\tan 180°=0,\cot 180°$ không xác định.

Chú ý. $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq 90°\right);\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(0°<\alpha<180°\right)$

$\sin\left(90°-\alpha\right)=\cos\alpha\left(0°\le\alpha\le 90°\right)$

$\cos\left(90°-\alpha\right)=\sin\alpha\left(0°\le\alpha\le 90°\right)$

$\tan\left(90°-\alpha\right)=\cot\alpha\left(0°\le\alpha\le 90°\right)$

$\cot\left(90°-\alpha\right)=\tan\alpha\left(0°\le\alpha\le 90°\right)$

Với $0°\le\alpha\le 180°$ thì:

- $\sin\left(180°-\alpha\right)=\sin\alpha$
- $\cos\left(180°-\alpha\right)=-\cos\alpha$
- $\tan\left(180°-\alpha\right)=-\tan\alpha\left(\alpha\neq 90°\right)$,

- $\cot(180°-\alpha)=-\cot\alpha\,(\alpha\neq 0°,\alpha\neq 180°)$.

***Ví dụ 2.*** Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức sau:

$T=\cos 15°-\sin 35°+\cos 55°+\cos 165°-\cos 180°$.

***Giải***

$T=\cos 15^\circ-\sin 35^\circ+\cos\left(90^\circ-35^\circ\right)+\cos\left(180^\circ-15^\circ\right)+1$

$=\cos 15^\circ-\sin 35^\circ+\sin 35^\circ-\cos 15^\circ+1=1$

***Ví dụ 3.*** Viết giá trị lượng giác của góc $120^\circ$.

***Giải***

Ta có: $\sin 120°=\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120°=-\cos 60°=-\dfrac{1}{2}$

$\tan 120°=-\tan 60°=-\sqrt{3}$; $\cot 120°=-\cot 60°=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự ta có bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt:

| GTLG $\alpha$ | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $180°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\|\|$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |
| $\cot\alpha$ | $\|\|$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | $\|\|$ |

## II. Định lí côsin

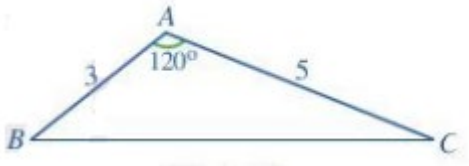
*Cho tam giác $ABC$ có $BC=a,CA=b,AB=c$. khi đó*

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\Rightarrow\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

***Ví dụ 4.*** Cho tam giác $ABC$ có $AB=3,AC=5$ và $\widehat{A}=120°$




a) Tính $\cos A$;

b) Tính độ dài cạnh $BC$.

***Giải***

a) Ta có: $\cos A=\cos 120°=-\cos 60°=-\dfrac{1}{2}$.

b) Áp dụng định lí côsin trong tam giác $ABC$ ta có:

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

Thay số ta có:

$BC^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=49$.

Do đó $BC=\sqrt{49}=7$.

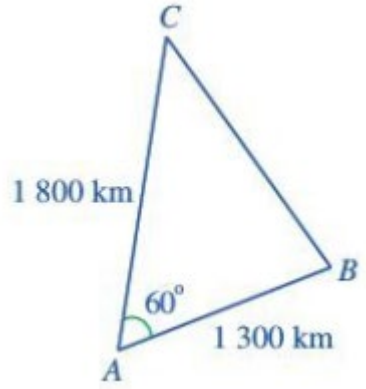
***Ví dụ 5.*** Hai máy bay cùng xuất phát từ một sân bay $A$ và bay theo hai hướng khác nhau, tạo với nhau góc $60^\circ$. Máy bay thứ nhất bay với vận tốc $650\,km/h$, máy bay thứ hai bay với vận tốc $900\,km/h$. Sau 2 giờ, hai máy bay cách nhau bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết rằng cả hai máy bay bay theo đường thẳng và sau 2 giờ bay đều chưa hạ cánh.

***Giải***

Giả sử sau 2 giờ, máy bay thứ nhất đến vị trí $B$, máy bay thứ hai đến vị trí $C$. Ta có:

$AB = 2.650 = 1300(km), AC = 2.900 = 1800(km)$,

$\widehat{BAC} = 60^\circ$




Áp dụng định lí côsin trong tam giác $ABC$, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC}$$
$$= 1300^2 + 1800^2 - 2 \cdot 1300 \cdot 1800 \cdot \cos 60^\circ = 2590000.$$

Do đó $BC \approx 1609,35(km)$.

Vậy sau 2 giờ hai máy bay cách nhau khoảng 1609,35 km.

## III. Định lí sin

Cho tam giác $ABC$ có $BC = a, CA = b, AB = c$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R$. Khi đó:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,\ a = 2R\sin A, b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C.$$

***Ví dụ 6.*** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{A} = 120^\circ, \widehat{B} = 45^\circ$ và $CA = 20$. Tính:




a) $\sin A$;

b) Độ dài cạnh $BC$ và bán kính $R$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

***Giải***

a) Ta có: $\sin A = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

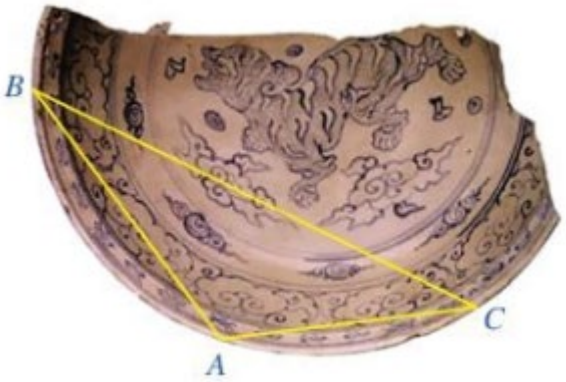
b) Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$, ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2R$.

Do đó $BC = \frac{CA \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{20 \cdot \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = 10\sqrt{6}$;

$R = \frac{CA}{2 \cdot \sin B} = \frac{20}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 10\sqrt{2}$

***Ví dụ 7.*** Các nhà khảo cổ học tìm được một mảnh chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ. Để xác định đường kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy ba điểm trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau:

$BC \approx 28,5\,cm; \widehat{BAC} \approx 120^\circ$.




Tính đường kính của chiếc đía theo đơn vị xăng-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

***Giải***

Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$, ta có: $2R = \dfrac{BC}{\sin A} \approx \dfrac{28,5}{\sin 120^\circ} \approx 33(cm)$.

Vậy đường kính của chiếc đĩa khoảng $33cm$.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°.

**Câu 1.** Tìm góc $\alpha$, $0^\circ \le \alpha \le 180^0$ trong mỗi trường hợp sau

a) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos\alpha = 0$.

c) $\tan\alpha = -\sqrt{3}$

**Lời giải.**

a) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ khi $\alpha = 30^\circ$ hay $\alpha = 150^\circ$

b) $\cos\alpha = 0$ khi $\alpha = 90^\circ$

c) $\tan\alpha = -\sqrt{3}$ khi $\alpha = 120^\circ$

**Câu 2.** Cho góc $\alpha = 135^\circ$. Hãy tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$

**Lời giải.**

$\sin 135^\circ = \sin\left(180^\circ - 135^\circ\right) = \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135^\circ = -\cos\left(180^\circ - 135^\circ\right) = -\cos 45^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\tan\alpha = \dfrac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = -1$ và $\cot 135^\circ = \dfrac{1}{\tan 135^\circ} = -1$.

**Câu 3.** Tính giá trị lượng giác của các góc sau đây

a) $120^\circ$

b) $150^\circ$

c) $180^\circ$

**Lời giải.**

Sử dụng 2 góc bù nhau: $120^\circ$ và $60^\circ$, $150^\circ$ và $30^\circ$ ta có:

a) $\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$; $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$; $\cot 120^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $\sin 150^\circ = \dfrac{1}{2}$; $\cos 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\cot 150^\circ = -\sqrt{3}$.

c) Điểm cuối $M$ của góc $180^\circ = \widehat{xOM}$ có tọa độ $M(-1;0)$ nên $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ = 0$, $\cot 180^\circ$ không xác định.

**Câu 4.** Tính theo hàm số lượng giác của các góc bé hơn $90^\circ$:
$\sin 100^\circ$, $\sin 160^\circ$, $\cos 170^\circ$, $\tan 103^\circ 45'$ $\cot 124^\circ 15'$.

**Lời giải.**

$\sin 100^\circ = \sin\left(180^\circ - 100^\circ\right) = \sin 80^\circ$;

$\sin 160^\circ = \sin\left(180^\circ - 160^\circ\right) = \sin 20^\circ$;

$\tan 103^\circ 45' = -\tan\left(180 -^\circ 103^\circ 45'\right) = \tan 76^\circ 15'$

$\cot 124^\circ 15' = -\cot\left(180^\circ - 124^\circ 15'\right) = -\cot 55^\circ 45'$

**Câu 5.** Tìm giá trị của biểu thức

a) $A = 2\sin 30^\circ + 3\cos 45^\circ - \sin 60^\circ$

b) $B = 3\cos 30^\circ + 3\sin 45^\circ - \cos 60^\circ$

**Lời giải.**

a) Ta có $A = 2.\dfrac{1}{2} + 3.\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có $B = 2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3.\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 1}{2}$.

**Câu 6.** Tính giá trị của biểu thức

a) $a\sin 0^\circ + b\cos 0^\circ + c\sin 90^\circ$.

b) $a\cos 90^\circ + b\sin 90^\circ + c\sin 180^\circ$.

c) $a^2\sin 90^\circ + b^2\cos 90^\circ + c^2\cos 180^\circ$.

**Lời giải.**

a) Ta có $a\sin 0^\circ + b\cos 0^\circ + c\sin 90^\circ = b + c$.

b) Ta có $a\cos 90^\circ + b\sin 90^\circ + c\sin 180^\circ = b$.

c) Ta có $a^2\sin 90^\circ + b^2\cos 90^\circ + c^2\cos 180^\circ = a^2 - c^2$.

**Câu 7.** Tính giá trị các biểu thức sau:

**a)** $A = a^2\sin 90^o + b^2\cos 90^o + c^2\cos 180^o$

**b)** $B = 3 - \sin^2 90^o + 2\cos^2 60^o - 3\tan^2 45^o$

**c)** $C = \sin^2 45^0 - 2\sin^2 50^o + 3\cos^2 45^o - 2\sin^2 40^o + 4\tan 55^o.\tan 35^o$

**Lời giải**

**a)** $A = a^2\sin 90^o + b^2\cos 90^o + c^2\cos 180^o = a^2.1 + b^2.0 + c^2.(-1) = a^2 - c^2$.

**b)** $B = 3 - \sin^2 90^o + 2\cos^2 60^o - 3\tan^2 45^o = 3 - (1)^2 + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$.

**c)** $C = \sin^2 45^0 - 2\sin^2 50^o + 3\cos^2 45^o - 2\sin^2 40^o + 4\tan 55^o.\tan 35^o$

$C = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(\sin^2 50^0 + \cos^2 40^0\right) + 4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} - 2 + 4 = 4$.

**Câu 8.** Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 3^o + \sin^2 15^o + \sin^2 75^o + \sin^2 87^o$

b) $B = \cos 0^o + \cos 20^o + \cos 40^o + ... + \cos 160^o + \cos 180^o$

c) $C=\tan 5^{\circ}\tan 10^{\circ}\tan 15^{\circ}...\tan 80^{\circ}\tan 85^{\circ}$

**Lời giải**

a) $A=\left(\sin^2 3^{\circ}+\sin^2 87^{\circ}\right)+\left(\sin^2 15^{\circ}+\sin^2 75^{\circ}\right)$

$=\left(\sin^2 3^{\circ}+\cos^2 3^{\circ}\right)+\left(\sin^2 15^{\circ}+\cos^2 15^{\circ}\right)=1+1=2$

b) $B=\left(\cos 0^{\circ}+\cos 180^{\circ}\right)+\left(\cos 20^{\circ}+\cos 160^{\circ}\right)+...+\left(\cos 80^{\circ}+\cos 100^{\circ}\right)$

$=\left(\cos 0^{\circ}-\cos 0^{\circ}\right)+\left(\cos 20^{\circ}-\cos 20^{\circ}\right)+...+\left(\cos 80^{\circ}-\cos 80^{\circ}\right)=0$

c) $C=\left(\tan 5^{\circ}\tan 85^{\circ}\right)\left(\tan 15^{\circ}\tan 75^{\circ}\right)...\left(\tan 45^{\circ}\tan 45^{\circ}\right)$

$=\left(\tan 5^{\circ}\cot 5^{\circ}\right)\left(\tan 15^{\circ}\cot 5^{\circ}\right)...\left(\tan 45^{\circ}\cot 5^{\circ}\right)=1$

**Câu 9.** Tính giá trị của biểu thức

a) $\sin x+\cos x$ khi $x$ bằng $0^{\circ},135^{\circ},120^{\circ}$.

b) $2\sin x+\cos 2x$ khi $x$ bằng $60^{\circ},45^{\circ},30^{\circ}$.

c) $\sin^2 x+\cos^2 x$ khi $x$ bằng $30^{\circ},75^{\circ},90^{\circ},145^{\circ},180^{\circ}$

**Lời giải.**

a) Khi $x=0^{\circ}$ thì $\sin x+\cos x=1$.

Khi $x=135^{\circ}$ thì $\sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$.

Khi $x=120^{\circ}$ thì $\sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

b) Khi $x=0^{\circ}$ thì $2\sin x+\cos 2x=2\sin 60^{\circ}+\cos 120^{\circ}=2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}$.

Khi $x=45^{\circ}$ thì $2\sin x+\cos 2x=2\sin 45^{\circ}+\cos 90^{\circ}=2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}+0=\sqrt{2}$.

Khi $x=30^{\circ}$ thì $2\sin x+\cos 2x=2\sin 30^{\circ}+\cos 60^{\circ}=2.\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

c) Ta có $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ với mọi giá trị của $x$.

**Câu 10.** Tính giá trị của biểu thức $T=\sqrt{1-\sin x}.\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-2\sin x.\cos x}$ khi $\tan x=\sqrt{3}$, $\tan x=-\dfrac{3}{4}$.

**Lời giải.**

Ta có $T=\sqrt{1-\sin x}.\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-2\sin x.\cos x}$

$=\sqrt{1-\sin^2 x}-\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x.\cos x}=\left|\cos x\right|-\left|\sin x-\cos x\right|$.

Khi $\tan x=\sqrt{3}$ thì $x=60^{\circ}\Rightarrow\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $\cos x=\dfrac{1}{2}$. Vậy $T=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

Khi $\tan x=-\dfrac{3}{4}$ thì $\sin^2 x=\dfrac{9}{25}$, $\cos^2 x=\dfrac{16}{25}$ và $\sin x.\cos x=\tan x.\cos^2 x=-\dfrac{3}{4}.\dfrac{16}{25}=-\dfrac{12}{25}$.

Do đó $T=\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}-\sqrt{1-2.\left(-\dfrac{12}{25}\right)}=-\dfrac{3}{5}$.

**Câu 11.** Tính giá trị của biểu thức

a) $\cos^2 12^{\circ}+\cos^2 78^{\circ}+\cos^2 1^{\circ}+\cos^2 89^{\circ}$.

b) $\sin^2 3^\circ+\sin^2 15^\circ+\sin^2 75^\circ+\sin^2 87^\circ$.

**Lời giải.**

Sử dụng hai góc phụ nhau thì ta có

a) $\cos^2 12^\circ+\cos^2 78^\circ+\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ=\sin^2 78^\circ+\cos^2 78^\circ+\sin^2 89^\circ+\cos^2 89^\circ=1+1=2$.

b) $\sin^2 3^\circ+\sin^2 15^\circ+\sin^2 75^\circ+\sin^2 87^\circ=\cos^2 87^\circ+\cos^2 75^\circ+\sin^2 75^\circ+\sin^2 87^\circ=1+1=2$.

**Câu 12.** Tính giá trị của biểu thức

a) $A=\cos 0^\circ+\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+...+\cos 180^\circ$.

b) $B=\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+...+\sin^2 90^\circ$.

c) $C=\tan 1^\circ.\tan 3^\circ.\tan 5^\circ.....\tan 89^\circ$.

**Lời giải.**

a) Sử dụng hai góc bù nhau để ghép cặp

$$A=\left(\cos 0^\circ+\cos 180^\circ\right)+\left(\cos 10^\circ+\cos 170^\circ\right)+...+\left(\cos 80^\circ+\cos 100^\circ\right)+\cos 90^\circ=0$$

b) Sử dụng 2 góc phụ nhau để ghép cặp

$$B=\left(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ\right)+\left(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ\right)+...+\left(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ\right)+\sin^2 45^\circ+\sin^2 90^\circ$$

$$=\left(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ\right)+\left(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ\right)+...+\left(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ\right)+\frac{1}{2}+1$$

$$=44+\frac{3}{2}=\frac{91}{2}.$$

c) Sử dụng 2 góc phụ nhau để ghép cặp

$$C=\left(\tan 1^\circ.\tan 89^\circ\right).\left(\tan 3^\circ.\tan 87^\circ\right)....\left(\tan 43^\circ.\tan 47^\circ\right).\tan 45^\circ$$

$$=\left(\tan 1^\circ.\cos 1^\circ\right).\left(\tan 3^\circ.\cos 3^\circ\right)....\left(\tan 43^\circ.\cos 43^\circ\right).1=1$$

**Câu 13.** a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức: $Q=\sin^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x$.

**Lời giải.**

a) Ta có

$$P=\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x=\cos^4 x-\cos^2 x+\left(1-\cos^2 x\right)$$

$$=\cos^4 x-2\cos^2 x+1=\left(\cos^2 x-1\right)^2=\sin^4 x.$$

Vậy $P$ có giá trị lớn nhất là 1 khi $\sin x=1$, tức $x=90^\circ$.

b) Ta có $Q=\sin^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x=\sin^4 x-2\sin^2 x+1=\left(\sin^2 x-1\right)=\cos^4 x$.

Vậy $Q$ có giá trị nhỏ nhất là 0 khi $\cos x=0$ tức $x=90^\circ$;

$Q$ có giá trị lớn nhất là 1 khi $\cos x=1$, tức $x=0^\circ$ hoặc $x=180^\circ$.

## Dạng 2. Định lí cosin

**Câu 1.** Cho tam giác $ABC$, biết

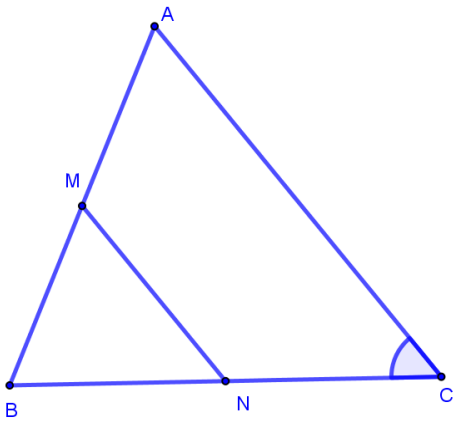
a) $a=12,b=13,c=15$. Tính độ lớn góc $A$. b) $AB=5,AC=8,\widehat{A}=60^o$. Tính cạnh $BC$

**Lời giải.**

a) Ta có $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{13^2+15^2-12^2}{2.13.15}=\dfrac{25}{39}$. Suy ra $\widehat{A}\approx 50^o$

b) Ta có $BC^2=AC^2+AB^2-2AC.AB.\cos A=8^2+5^2-2.8.5.\cos 60^o=49$. Vậy $BC=7$

**Câu 2.** Cho tam giác $ABC$, có đoạn thẳng nối trung điểm $AB$ và $BC$ bằng $3$, cạnh $AB=9$ và $\widehat{ACB}=60^o$. Tính cạnh $BC$.




**Lời giải.**

Đặt $BC = x, x > 0$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $BC$.

Ta có $MN = 3 \Rightarrow AC = 6$. Theo định lí cô-sin ta có

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2.CA.CB.\cos C \Leftrightarrow 81 = 36 + x^2 - 12x.\frac{1}{2} \Leftrightarrow BC = x = 3\left(1+\sqrt{6}\right)$$

## Dạng 3. Định lí sin

**Câu 3.** Cho tam giác $ABC$, biết

a) $\widehat{A} = 60^o, \widehat{B} = 45^o, b = 4$. Tính cạnh $b$ và $c$. b) $\widehat{A} = 60^o, a = 6$. Tính $R$

**Lời giải.**

a) Ta có $A + B + C = 180^o \Rightarrow C = 180^o - A - B = 75^o$.

Suy ra $a = \dfrac{b\sin A}{\sin B} = \dfrac{4\sin 60^o}{\sin 45^o} \approx 4,9$ và $c = \dfrac{b\sin C}{\sin B} = \dfrac{4\sin 75^o}{\sin 45^o} \approx 5,5$

b) Ta có $R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{6}{2\sin 60^o} \approx 3,5$.

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$, có $\widehat{B} = 60^o, \widehat{C} = 45^o, BC = a$

a) Tính độ dài hai cạnh $AB, AC$.

b) Chứng minh $\cos 75^o = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

**Lời giải.**

a) Ta có $\widehat{A} = 180^o - \left(60^o + 45^o\right) = 75^o$. Đặt $AC = b, AB = c$. Theo định lí hàm số sin, ta có

$\dfrac{b}{\sin 60^o} = \dfrac{a}{\sin 75^o} = \dfrac{c}{\sin 45^o}$. Suy ra $b = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin 75^o}; c = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\sin 75^o}$

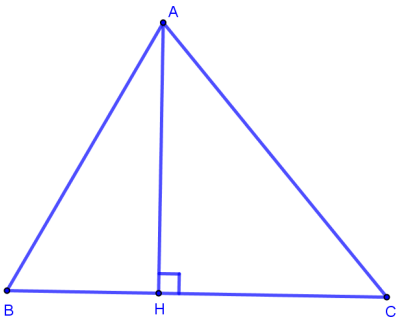
b) Kẻ $AH \perp BC$ do $\widehat{B}, \widehat{C}$ đều là góc nhọn nên $H$ thuộc đoạn $BC$, hay $BC = HB + HC$.

Ta có $HC = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}; HB = \dfrac{c}{2}$.

Suy ra $a = HC + HB = b\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{c}{2} = \dfrac{a\sqrt{6} + a\sqrt{2}}{4\sin 75^o}$.

Do đó $\sin 75^o = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ và

$$\cos 75^o = \sqrt{1 - \sin^2 75^o} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 2\sqrt{12}} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$




## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°.

**Câu 1.** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

**A.** $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

**Lời giải**

**Chọn C.**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 2.** Giá trị của $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** 1

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

**Câu 3.** Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$ **B.** $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **D.** 2

**Lời giải**

**Chọn A**

$\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 4.** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

**A.** $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$ **B.** $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$

**C.** $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ **D.** $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$

**Lời giải**

**Chọn D**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 5.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$. **B.** $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$. **C.** $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$. **D.** $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 6.** Đẳng thức nào sau đây **sai**?

**A.** $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$.

**B.** $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.

**C.** $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$.

**D.** $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 7.** Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

**A.** $1$.

**B.** $\sqrt{2}$.

**C.** $\sqrt{3}$.

**D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$.

**Câu 8.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

**A.** $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$.

**B.** $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.

**C.** $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$.

**D.** $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$.

**Câu 9.** Giá trị của $\tan 45^\circ + \cot 135^\circ$ bằng bao nhiêu?

**A.** $2$.

**B.** $0$.

**C.** $\sqrt{3}$.

**D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

$\tan 45^\circ + \cot 135^\circ = 1 - 1 = 0$

**Câu 10.** Tính giá trị của biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$.

**A.** $P = 1$.

**B.** $P = 0$.

**C.** $P = \sqrt{3}$.

**D.** $P = -\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1$.

**Câu 11.** Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

**A.** $\dfrac{1}{2}$.

**B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**C.** $1$.

**D.** $-1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin\left(90^\circ + 36^\circ\right)\cos\left(90^\circ - 6^\circ\right) = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

**Câu 12.** Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn D**

$A=\left(\sin^2 51^o+\sin^2 39^o\right)+\left(\sin^2 55^o+\sin^2 35^o\right)=\left(\sin^2 51^o+\cos^2 51^o\right)+\left(\sin^2 55^o+\cos^2 55^o\right)=2$

**Câu 13.** Giá trị của biểu thức $A=\tan 1^o \tan 2^o \tan 3^o ... \tan 88^o \tan 89^o$ là

**A.** 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn D**

$A=\left(\tan 1^o.\tan 89^o\right).\left(\tan 2^o.\tan 88^o\right)...\left(\tan 44^o.\tan 46^o\right).\tan 45^o=1.$

**Câu 14.** Tổng $\sin^2 2^o+\sin^2 4^o+\sin^2 6^o+...+\sin^2 84^o+\sin^2 86^o+\sin^2 88^o$ bằng

**A.** 21. **B.** 23. **C.** 22. **D.** 24.

**Lời giải**

**Chọn C**

$S=\sin^2 2^o+\sin^2 4^o+\sin^2 6^o+...+\sin^2 84^o+\sin^2 86^o+\sin^2 88^o$

$=\left(\sin^2 2^o+\sin^2 88^o\right)+\left(\sin^2 4^o+\sin^2 86^o\right)+...+\left(\sin^2 44^o+\sin^2 46^o\right)$

$=\left(\sin^2 2^o+\cos^2 2^o\right)+\left(\sin^2 4^o+\cos^2 4^o\right)+...+\left(\sin^2 44^o+\cos^2 44^o\right)=22.$

**Câu 15.** Giá trị của $A=\tan 5^o.\tan 10^o.\tan 15^o ... \tan 80^o.\tan 85^o$ là

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$A=\left(\tan 5^\circ.\tan 85^\circ\right).\left(\tan 10^\circ.\tan 80^\circ\right)...\left(\tan 40^\circ \tan 50^\circ\right).\tan 45^\circ=1.$

**Câu 16.** Giá trị của $B=\cos^2 73^\circ+\cos^2 87^\circ+\cos^2 3^\circ+\cos^2 17^\circ$ là

**A.** $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $-2$. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn B**

$B=\left(\cos^2 73^o+\cos^2 17^o\right)+\left(\cos^2 87^o+\cos^2 3^o\right)=\left(\cos^2 73^o+\sin^2 73^o\right)+\left(\cos^2 87^o+\sin^2 87^o\right)=2$

**Câu 17.** Biểu thức $A=\cos 20°+\cos 40°+\cos 60°+...+\cos 160°+\cos 180°$ có giá trị bằng

**A.** 1. **B.** $-1$. **C.** 2. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\cos\alpha=-\cos\left(180°-\alpha\right)\ \ \left(0°\le\alpha\le 180°\right)$ nên suy ra $\cos\alpha+\cos\left(180°-\alpha\right)=0.$

Do đó:

$A=(\cos 20^\circ+\cos 160^\circ)+(\cos 40^\circ+\cos 140^\circ)+(\cos 60^\circ+\cos 120^\circ)$

$+(\cos 80^\circ+\cos 100^\circ)+\cos 180^\circ \ =\cos 180^\circ=-1$.

**Câu 18.** Cho $\tan\alpha-\cot\alpha=3$. Tính giá trị của biểu thức sau: $A=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$.

**A.** $A=12$. **B.** $A=11$. **C.** $A=13$. **D.** $A=5$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\tan\alpha-\cot\alpha=3\Leftrightarrow(\tan\alpha-\cot\alpha)^2=9\Leftrightarrow\tan^2\alpha+\cot^2\alpha-2\tan\alpha.\cot\alpha=9$

$\Leftrightarrow\tan^2\alpha+\cot^2\alpha-2=9\Leftrightarrow\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=11$.

**Câu 19.** Biết $\sin a+\cos a=\sqrt{2}$. Hỏi giá trị của $\sin^4 a+\cos^4 a$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-1$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $\sin a+\cos a=\sqrt{2}\Rightarrow 2=(\sin a+\cos a)^2\Rightarrow\sin a.\cos a=\frac{1}{2}$.

$\sin^4 a+\cos^4 a=(\sin^2 a+\cos^2 a)-2\sin^2 a\cos^2 a=1-2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

**Câu 20.** Biểu thức $f(x)=3(\sin^4 x+\cos^4 x)-2(\sin^6 x+\cos^6 x)$ có giá trị bằng:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** $-3$. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn A.**

- $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$.
- $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$.

$f(x)=3(1-2\sin^2 x\cos^2 x)-2(1-3\sin^2 x\cos^2 x)=1$.

**Câu 21.** Biểu thức: $f(x)=\cos^4 x+\cos^2 x\sin^2 x+\sin^2 x$ có giá trị bằng

**A.** 1. **B.** 2. **C.** $-2$. **D.** $-1$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

$f(x)=\cos^2 x(\cos^2 x+\sin^2 x)+\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

**Câu 22.** Biểu thức $\tan^2 x\sin^2 x-\tan^2 x+\sin^2 x$ có giá trị bằng

**A.** $-1$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn B.**

$\tan^2 x\sin^2 x-\tan^2 x+\sin^2 x=\tan^2 x(\sin^2 x-1)+\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}(-\cos^2 x)+\sin^2 x=0$.

**Câu 23.** Cho $\sin x+\cos x=m$. Tính theo $m$ giá trị của $M=\sin x.\cos x$.

**A.** $m^2-1$. **B.** $\frac{m^2-1}{2}$. **C.** $\frac{m^2+1}{2}$. **D.** $m^2+1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\sin x+\cos x=m \Rightarrow (\sin x+\cos x)^2=m^2 \Leftrightarrow (\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin x.\cos x=m^2$

$\Leftrightarrow 1+2\sin x.\cos x=m^2 \Leftrightarrow \sin x.\cos x=\dfrac{m^2-1}{2}$.

Vậy $M=\dfrac{m^2-1}{2}$.

## Dạng 2. Định lí cosin

**Câu 1.** Cho tam giác $ABC$, mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $a^2=b^2+c^2+2bc\cos A$. **B.** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

**C.** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos C$. **D.** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos B$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo định lý cosin trong tam giác $ABC$, ta có $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

**Câu 2.** Cho tam giác ABC có $a=8,b=10$, góc $C$ bằng $60^0$. Độ dài cạnh $c$ là?

**A.** $c=3\sqrt{21}$. **B.** $c=7\sqrt{2}$. **C.** $c=2\sqrt{11}$. **D.** $c=2\sqrt{21}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có: $c^2=a^2+b^2-2a.b.\cos C=8^2+10^2-2.8.10.\cos 60^0=84 \Rightarrow c=2\sqrt{21}$.

**Câu 3.** Cho $\Delta ABC$ có $b=6,c=8,\widehat{A}=60^0$. Độ dài cạnh $a$ là:

**A.** $2\sqrt{13}$. **B.** $3\sqrt{12}$. **C.** $2\sqrt{37}$. **D.** $\sqrt{20}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36+64-2.6.8.\cos 60^0=52 \Rightarrow a=2\sqrt{13}$.

**Câu 4.** Cho $\Delta ABC$ có $B=60^0,a=8,c=5$. Độ dài cạnh $b$ bằng:

**A.** 7. **B.** 129. **C.** 49. **D.** $\sqrt{129}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=8^2+5^2-2.8.5.\cos 60^0=49 \Rightarrow b=7$.

**Câu 5.** Cho $\Delta ABC$ có $AB=9;BC=8;\widehat{B}=60^0$. Tính độ dài $AC$.

**A.** $\sqrt{73}$. **B.** $\sqrt{217}$. **C.** $8$. **D.** $\sqrt{113}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Theo định lý cosin có:

$AC^2=BA^2+BC^2-2BA.BC.\cos\widehat{ABC}=73 \Rightarrow AC=\sqrt{73}$.

Vậy $AC=\sqrt{73}$.

**Câu 6.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=2, AC=1$ và $A=60^0$. Tính độ dài cạnh $BC$.

**A.** $BC=\sqrt{2}$. **B.** $BC=1$. **C.** $BC=\sqrt{3}$. **D.** $BC=2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo định lý cosin ta có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos 60^0}$

$=\sqrt{2^2+1^2-2.2.1.\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

**Câu 7.** Tam giác $ABC$ có $a=8, c=3, \hat{B}=60^0$. Độ dài cạnh $b$ bằng bao nhiêu?

**A.** 49. **B.** $\sqrt{97}$ **C.** 7. **D.** $\sqrt{61}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=8^2+3^2-2.8.3.\cos 60^0=49\Rightarrow b=7$.

**Câu 8.** Tam giác $ABC$ có $\hat{C}=150^0, BC=\sqrt{3}, AC=2$. Tính cạnh $AB$ ?

**A.** $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $10$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Theo định lí cosin trong $\Delta ABC$ ta có:

$AB^2=CA^2+CB^2-2CA.CB.\cos\hat{C}=13\Rightarrow AB=\sqrt{13}$. Chọn **A.**

**Câu 9.** Cho $a;b;c$ là độ dài 3 cạnh của tam giác $ABC$. Biết $b=7; c=5; \cos A=\frac{4}{5}$. Tính độ dài của $a$.

**A.** $3\sqrt{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{23}{8}$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Áp dụng định lí cosin cho tam giác $ABC$ ta có:

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A=7^2+5^2-2.7.5.\frac{4}{5}=18$.

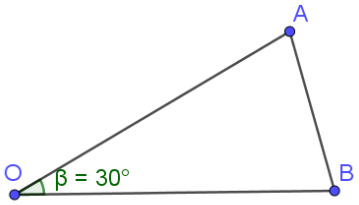
Suy ra: $a=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

**Câu 10.** Cho $\widehat{xOy}=30°$.Gọi $A,B$ là 2 điểm di động lần lượt trên $Ox, Oy$ sao cho $AB=2$. Độ dài lớn nhất của $OB$ bằng bao nhiêu?

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn A**




Áp dụng định lí cosin: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos 30° \Leftrightarrow 4 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow OA^2 - \sqrt{3}.OB.OA + OB^2 - 4 = 0$ (*).

Coi phương trình (*) là một phương trình bậc hai ẩn $OA$. Để tồn tại giá trị lớn nhất của $OB$ thì $\Delta_{(*)} \ge 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}OB)^2 - 4(\mathrm{OB}^2 - 4) \ge 0 \Leftrightarrow OB^2 \le 16 \Leftrightarrow OB \le 4$.

Vậy $\max OB = 4$.

**Câu 11.** Cho $a;b;c$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

**A.** $a^2 < ab + ac$. **B.** $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$. **C.** $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$. **D.** $ab + bc > b^2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Do $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc.\cos\hat{A} \le 2bc \Rightarrow b^2 + c^2 \le a^2 + 2bc$ nên mệnh đề C sai.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có $a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ac$ ;đáp án A đúng.

Tương tự $a + c > b \Rightarrow ab + bc > b^2$ ;mệnh đề D đúng.

Ta có: $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac.\cos B < 2ac \Rightarrow a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$ ;mệnh đề B đúng.

**Câu 12.** Cho tam giác $ABC$ có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm. Tính $\cos A$.

**A.** $\cos A = -\dfrac{2}{3}$. **B.** $\cos A = \dfrac{1}{2}$. **C.** $\cos A = \dfrac{1}{3}$. **D.** $\cos A = \dfrac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = \dfrac{4^2 + 9^2 - 7^2}{2.4.9} = \dfrac{2}{3}$.

**Câu 13.** Cho tam giác $ABC$ có $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Khi đó:

**A.** Góc $C > 90^0$ **B.** Góc $C < 90^0$

**C.** Góc $C = 90^0$ **D.** Không thể kết luận được gì về góc $C$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Mà: $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ suy ra: $\cos C > 0 \Rightarrow C < 90^0$.

**Câu 14.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn: $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Khi đó:

**A.** $A = 30^0$. **B.** $A = 45^0$. **C.** $A = 60^0$. **D.** $A = 75^0$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^0.$

**Câu 15.** Cho các điểm $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$. Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu?

**A.** $90^0$. **B.** $60^0$. **C.** $45^0$. **D.** $30^0$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;3)$, $\overrightarrow{AC} = (9;-3)$.

Suy ra: $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = 0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0.$

**Câu 16.** Cho tam giác $ABC$, biết $a = 24, b = 13, c = 15$. Tính góc $A$?

**A.** $33^0 34'$. **B.** $117^0 49'$. **C.** $28^0 37'$. **D.** $58^0 24'$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{13^2+15^2-24^2}{2.13.15} = -\dfrac{7}{15} \Rightarrow A \simeq 117^0 49'.$

**Câu 17.** Cho tam giác $ABC$, biết $a = 13, b = 14, c = 15$. Tính góc $B$?

**A.** $59^0 49'$. **B.** $53^0 7'$. **C.** $59^0 29'$. **D.** $62^0 22'$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{13^2+15^2-14^2}{2.13.15} = \dfrac{33}{65} \Rightarrow B \simeq 59^0 29'.$

**Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ biết độ dài ba cạnh $BC$, $CA$, $AB$ lần lượt là $a$, $b$, $c$ và thỏa mãn hệ thức $b\left(b^2-a^2\right) = c\left(c^2-a^2\right)$ với $b \neq c$. Khi đó, góc $\widehat{BAC}$ bằng

**A.** $45°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $120°$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $b\left(b^2-a^2\right) = c\left(c^2-a^2\right) \Leftrightarrow b^3 - ba^2 = c^3 - ca^2 \Leftrightarrow b^3 - c^3 - a^2(b-c) = 0$

$\Leftrightarrow (b-c)\left(b^2+bc+c^2-a^2\right) = 0 \Leftrightarrow b^2+c^2-a^2 = -bc$.

Mặt khác $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{-bc}{2bc} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120°$.

**Câu 19.** Tam giác $ABC$ có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Các cạnh $a$, $b$, $c$ liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b\left(b^2-a^2\right) = c\left(a^2-c^2\right)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ.

**A.** $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo bài ra, ta có: $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(a^2-c^2\right)\Leftrightarrow b^3-a^2b=a^2c-c^3=0\Leftrightarrow b^3+c^3-a^2b-a^2c=0$

$\Leftrightarrow (b+c)\left(b^2-bc+c^2\right)-a^2(b+c)=0\Leftrightarrow (b+c)\left(b^2-bc+c^2-a^2\right)=0\Leftrightarrow b^2-bc+c^2-a^2=0$

(do $b+c\neq 0$)

$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=bc\Leftrightarrow \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \cos\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \widehat{BAC}=60°$.

**Câu 20.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$ và $M$ là điểm nằm trong tam giác $ABC$ sao cho $MA:MB:MC=1:2:3$ khi đó góc $AMB$ bằng bao nhiêu?

**A.** $135°$. **B.** $90°$. **C.** $150°$. **D.** $120°$.

**Lời giải**

$MB=x\Leftrightarrow MA=2x;\ MC=3x$ với $0<x<BC=\sqrt{2}$.

Ta có $\cos\widehat{BAM}=\dfrac{1+4x^2-x^2}{2.1.2x}=\dfrac{3x^2+1}{4x}$

$\cos\widehat{MAC}=\dfrac{1+4x^2-9x^2}{4x}=\dfrac{1-5x^2}{4x}$.

$\Rightarrow\left(\dfrac{3x^2+1}{4x}\right)^2+\left(\dfrac{1-5x^2}{4x}\right)^2=1\Rightarrow 9x^4+6x^2+1+1-10x^2+25x^4=16$.

$\Rightarrow 34x^4-20x^2+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\dfrac{5+2\sqrt{2}}{17}>\dfrac{1}{5}(l)\\ x^2=\dfrac{5-2\sqrt{2}}{17}\end{array}\right.$.

$\Rightarrow\cos\widehat{AMB}=\dfrac{AM^2+BM^2-AB^2}{2AM.BM}=\dfrac{4x^2+x^2-1}{2.2x.x}$

$=\dfrac{5x^2-1}{4x^2}=\left(\dfrac{25-10\sqrt{2}}{17}-1\right):\dfrac{20-8\sqrt{2}}{17}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

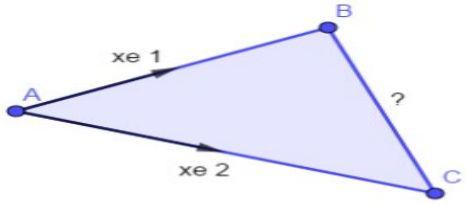
Vậy $\widehat{AMB}=135°$.

**Câu 21.** Hai chiếc xe cùng xuất phát ở vị trí A, đi theo hai hướng tạo với nhau một góc $60^0$. Xe thứ nhất chạy với tốc độ $30km/h$, xe thứ hai chạy với tốc độ $40km/h$. Hỏi sau 1h, khoảng cách giữa 2 xe là:

**A.** $13km$. **B.** $15\sqrt{3}km$. **C.** $10\sqrt{13}$. **D.** $15km$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Trong 1h, xe 1 đi được quãng đường là $AB=30km$

Trong 1h, xe 2 đi được quãng đường là $AC=40km$

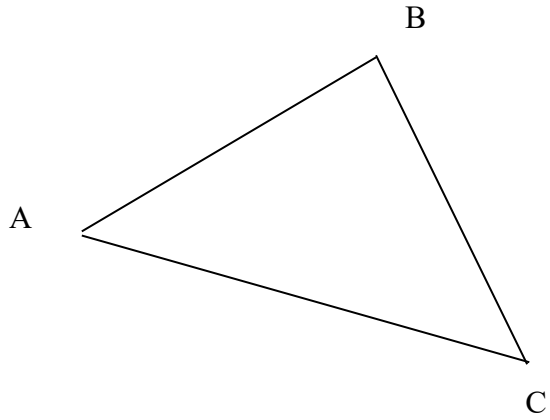
Sau 1h khoảng cách giữa 2 xe là $BC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos 60^0 = 1300$
$\Rightarrow BC = 10\sqrt{13} km$.

**Câu 22.** Hai tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A, đi theo hai hướng và tạo với nhau một góc $60^0$. Tàu thứ nhất chạy với vận tốc $30\,\text{km/h}$, tàu thứ hai chạy với vận tốc $40\,\text{km/h}$. Hỏi sau $2$ giờ hai tàu cách xa nhau bao nhiêu $km$?

**A.** $25\sqrt{10}$. **B.** $30\sqrt{10}$. **C.** $18\sqrt{13}$. **D.** $20\sqrt{13}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Sau 2 giờ tàu thứ nhất cách vị trí A một khoảng cách $AB = 30.2 = 60(km)$

Và tàu thứ hai cách vị trí A một khoảng cách $AC = 40.2 = 80(km)$

Khi đó hai tàu cách nhau một khoảng cách $BC$.

Theo định lý Côsin, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.cosA$

$\Rightarrow BC^2 = 3600 + 6400 - 2.60.80.cos\,60^0$

$= 5200$

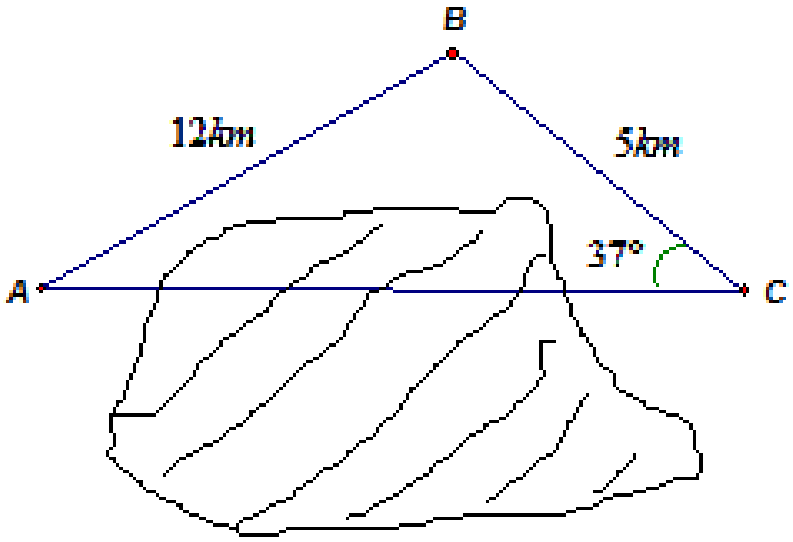
$\Rightarrow BC = 20\sqrt{13}(km)$

**Câu 23.** Khoảng cách từ $A$ đến $C$ không thể đo trực tiếp vì phải qua một đầm lầy nên người ta làm như sau. Xác định một điểm $B$ có khoảng cách $AB$ là $12km$ và đo được góc $\widehat{ACB} = 37°$. Hãy tính khoảng cách $AC$ biết rằng $BC$ bằng $5km$.

**A.** $AC \approx 17\,km$. **B.** $AC \approx 12\,km$. **C.** $AC \approx 15,6\,km$. **D.** $AC \approx 20\,km$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Áp dụng đinh lí Côsin ta có:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos\widehat{ACB}$

$\Leftrightarrow 144 = AC^2 + 25 - 10AC.\cos 37°$

$\Leftrightarrow AC^2 - 10AC.\cos 37° - 119 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AC = 5\cos 37° + \sqrt{25\cos^2 37° + 119} \approx 15,6\,(n) \\ AC = 5\cos 37° - \sqrt{25\cos^2 37° + 119} \approx -7,6\,(l) \end{array}\right.$

Vậy $AC \approx 15,6\,km$.

## Dạng 3. Định lí sin

**Câu 24.** Cho tam giác $ABC$. Tìm công thức sai:

**A.** $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$. **B.** $\sin A = \dfrac{a}{2R}$. **C.** $b\sin B = 2R$. **D.** $\sin C = \dfrac{c\sin A}{a}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

**Câu 25.** Cho tam giác $ABC$ có góc $\widehat{BAC} = 60°$ và cạnh $BC = \sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

**A.** $R = 4$. **B.** $R = 1$. **C.** $R = 2$. **D.** $R = 3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 1$.

**Câu 26.** Trong mặt phẳng, cho tam giác $ABC$ có $AC = 4$ cm, góc $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 45°$. Độ dài cạnh $BC$ là

**A.** $2\sqrt{6}$. **B.** $2 + 2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3} - 2$. **D.** $\sqrt{6}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}\Leftrightarrow BC=\frac{4.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{6}$.

**Câu 27.** Cho $\Delta ABC$ có $AB=5;\widehat{\mathrm{A}}=40°;\widehat{\mathrm{B}}=60°$. Độ dài $BC$ gần nhất với kết quả nào?

**A.** $3,7$. **B.** $3,3$. **C.** $3,5$. **D.** $3,1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\widehat{\mathrm{C}}=180°-\widehat{\mathrm{A}}-\widehat{\mathrm{B}}=180°-40°-60°=80°$

Áp dụng định lý sin: $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow BC=\frac{AB}{\sin C}.\sin A=\frac{5}{\sin 80°}\sin 40°\approx 3,3$.

**Câu 28.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn hệ thức $b+c=2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** $\cos B+\cos C=2\cos A$. **B.** $\sin B+\sin C=2\sin A$.

**C.** $\sin B+\sin C=\frac{1}{2}\sin A$. **D.** $\sin B+\cos C=2\sin A$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow\frac{\frac{b+c}{2}}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Leftrightarrow\frac{b+c}{2\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}\Leftrightarrow\sin B+\sin C=2\sin A.$$

**Câu 29.** Tam giác $ABC$ có $a=16,8$; $\widehat{B}=56^0 13'$; $\widehat{C}=71^0$. Cạnh $c$ bằng bao nhiêu?

**A.** $29,9$. **B.** $14,1$. **C.** $17,5$. **D.** $19,9$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có: Trong tam giác $ABC$: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0\Rightarrow\widehat{A}=180^0-71^0-56^0 13'=52^0 47'$.

Mặt khác $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow c=\frac{a.\sin C}{\sin A}=\frac{16,8.\sin 71^0}{\sin 52^0 47'}\simeq 19,9$.

**Câu 30.** Tam giác ABC có $\widehat{A}=68^0 12'$, $\widehat{B}=34^0 44'$, $AB=117$. Tính $AC$?

**A.** 68. **B.** 168. **C.** 118. **D.** 200.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: Trong tam giác $ABC$: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0\Rightarrow\widehat{C}=180^0-68^0 12'-34^0 44'=77^0 4'$.

Mặt khác $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow AC=\frac{AB.\sin B}{\sin C}=\frac{117.\sin 34^0 44'}{\sin 77^0 4'}\simeq 68$.

# Bài 2. GIẢI TAM GIÁC

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

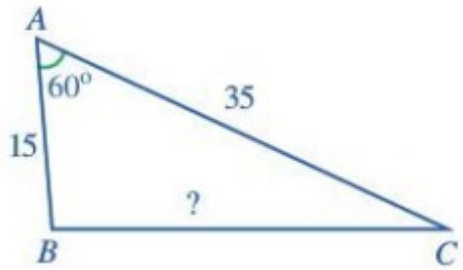
## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Tính các cạnh và góc của tam giác dựa tren một số điều kiện cho trước

Như ta đã biết, một tam giác hoàn toàn xác định nếu biết một trong những dữ kiện sau:
- Biết độ dài hai cạnh và độ lớn góc xen giữa hai cạnh đó;
- Biết độ dài ba cạnh;
- Biết độ dài một cạnh và độ lớn hai góc kề với cạnh đó.

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước.

***Ví dụ 1.*** Cho tam giác $ABC$ có $AB=15, AC=35, \widehat{A}=60°$.




Tính cạnh $BC$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) và góc $B$ (làm tròn kết quả đến độ).

***Giải***

Áp dụng định lí côsin trong tam giác $ABC$, ta có:

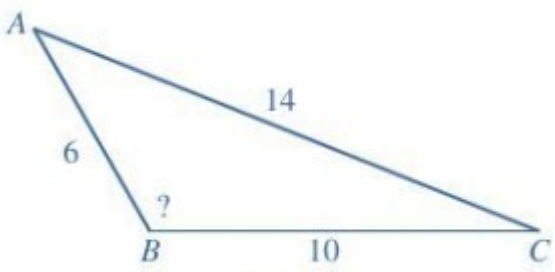
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot \cos A$$
$$= 15^2 + 35^2 - 2\cdot 15\cdot 35\cdot \cos 60^\circ = 925.$$

Do đó $BC=\sqrt{925}\approx 30,4$.

Ta có: $\cos B = \dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC} = \dfrac{15^2+925-35^2}{2\cdot 15\cdot \sqrt{925}}$.

Do đó $\hat{B}\approx 95^\circ$.

***Ví dụ 2.*** Cho tam giác $ABC$ có $AB=6, BC=10, CA=14$.




Tính số đo góc $B$.

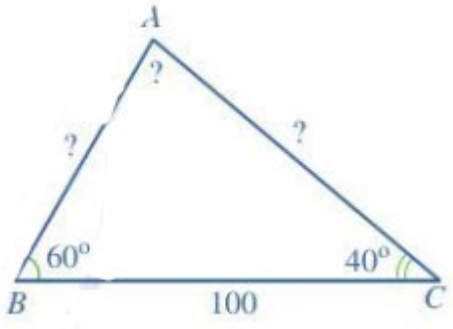
***Giải***

Áp dụng định lí côsin trong tam giác $ABC$, ta có:

$$\cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC} = \frac{6^2+10^2-14^2}{2\cdot 6\cdot 10} = -0,5$$

Do đó $\hat{B}=120°$.

***Ví dụ 3.*** Cho tam giác $ABC$ có $BC=100, \hat{B}=60°, \hat{C}=40°$.




Tính góc $A$ và các cạnh $AB, AC$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) của tam giác đó.

***Giải***

Ta có:

$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180° - (60° + 40°) = 80°$

Áp dụng định lí sin trong $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$.

$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 65,3.$

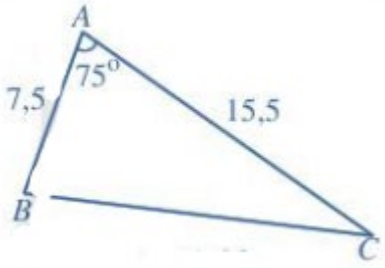
$AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 87,9.$

## II. Tính diện tích tam giác

Cho tam giác $ABC$ có $BC = a, CA = b, AB = c$. Khi đó, diện tích $S$ của tam giác $ABC$ là:

$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C.$

***Ví dụ 4.*** Cho tam giác $ABC$ có $AB = 7,5; AC = 15,5; \hat{A} = 75°$. Tính diện tích $S$ của tam giác $ABC$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



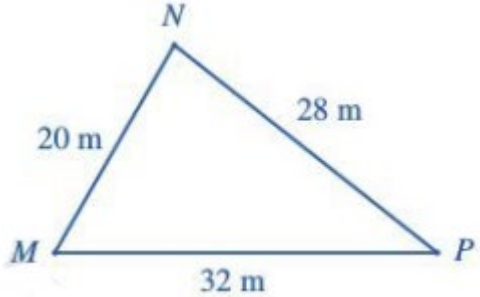

***Giải***

Ta có $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.7,5.15,5.\sin 75° \approx 56,1$.

Cho tam giác $ABC$ có $BC = a, CA = b, AB = c, p = \frac{a+b+c}{2}$. Khi đó, diện tích $S$ của tam giác $ABC$ là:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

***Ví dụ 5.*** Mảnh vườn hình tam giác của gia đình bạn Nam có chiều dài các cạnh là $MN = 20\,m, NP = 28\,m, MP = 32\,m$.




Hỏi diện tích mảnh vườn của gia đình bạn Nam là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng phần mười)?

***Giải***

Ta có: $p=\dfrac{20+28+32}{2}=40(m)$.

Diện tích mảnh vườn là:

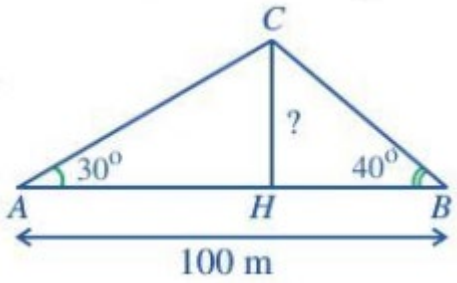
$S=\sqrt{40(40-20)(40-28)(40-32)}\approx 277,1\left(m^2\right)$.

**III. Áp dụng vào bài toán thực tiễn**

***Ví dụ 6.*** Đứng ở vị trí $A$ trên bờ biển, bạn Minh đo được góc nghiêng so với bờ biển tới một vị trí $C$ trên đảo là $30^\circ$. Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí $B$ cách $A$ một khoảng $100m$ và đo được góc nghiêng so với bờ biển tới vị trí $C$ đã chọn là $40^\circ$.

Tính khoảng cách từ vị trí $C$ trên đảo tới bờ biển theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).




***Giải***

Xét tam giác $ABC$ (ở hình trên) ta có: $\hat{C}=180^\circ-\left(30^\circ+40^\circ\right)=110^\circ$.

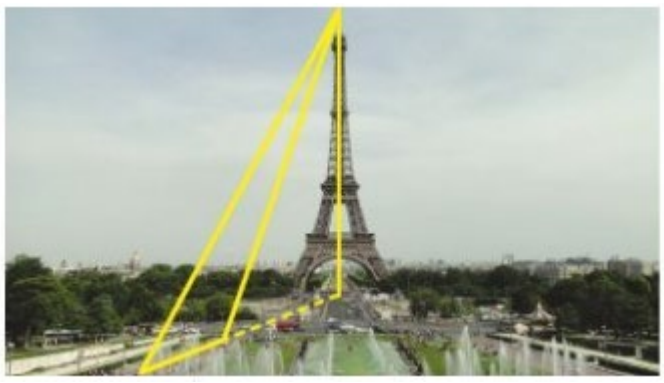
Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$, ta có: $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$.

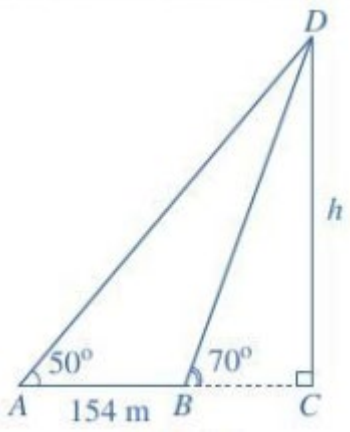
Do đó $AC=\dfrac{AB\cdot\sin B}{\sin C}=\dfrac{100\cdot\sin 40^\circ}{\sin 110^\circ}\approx 68,4(m)$.

Xét tam giác vuông $AHC$, ta có: $CH=AC\cdot\sin 30^\circ\approx 68,4\cdot 0,5\approx 34,2(m)$.

Vậy khoảng cách từ vị trí $C$ trên đảo tối bờ biển khoảng $34,2\,m$.

***Ví dụ 7.*** Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Phương muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Phương đã minh hoạ lại kết quả đo đạc ở hình dưới. Em hãy giúp bạn Phương tính độ cao $h$ của tháp Eiffel (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).






***Giải***

Xét tam giác $ABD$, sử dụng tính chất góc ngoài, ta có: $\widehat{ADB}=70°-50°=20°$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác $ABD$, ta có:

$\dfrac{BD}{\sin\widehat{BAD}}=\dfrac{AB}{\sin\widehat{ADB}}$.

Do đó $BD=\dfrac{154\cdot\sin 50°}{\sin 20°}\approx 345(\text{m})$.

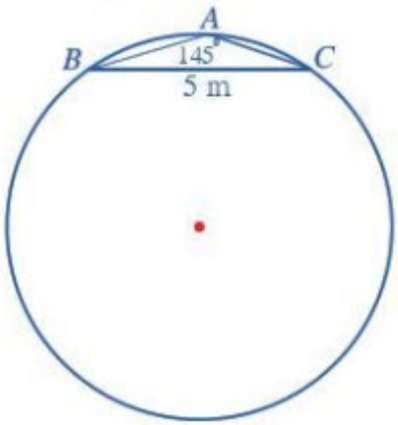
Xét tam giác vuông $BCD$, ta có:

$CD=BD\cdot\sin\widehat{CBD}\approx 345\cdot\sin 70°\approx 324$ (m).

Vậy chiều cao $h$ của tháp Eiffel khoảng $324\,\text{m}$.

***Ví dụ 8.*** Để tính đường kính và diện tích của một giếng nước cổ có dạng hình tròn, người ta tiến hành đo đạc tại ba vị trí $A, B, C$ trên thành giếng. Kết quả đo được là: $BC = 5m$, $\widehat{BAC} = 145^\circ$ hình dưới. Diện tích của giếng là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?






***Giải***

Áp dụng định lí sin cho tam giác $ABC$, ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$.

Do đó $R = \frac{BC}{2 \cdot \sin A} = \frac{5}{2 \cdot \sin 145^\circ} \approx 4,36(m)$.

Vậy diện tích của giếng là: $S = \pi R^2 \approx 3,14 \cdot 4,36^2 \approx 59,69\left(m^2\right)$.

**Tìm hiểu thêm**

Cho tam giác $ABC$ có $AB = c, AC = b, BC = a$. Gọi $R, r, p$ và $S$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, nửa chu vi và diện tích của tam giác $ABC$.

1. Công thức độ dài đường trung tuyến

Gọi $m_a, m_b, m_c$ là độ dài các đường trung tuyến lần lượt xuất phát từ các đỉnh $A, B, C$ của tam giác $ABC$.

Ta có:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Chứng minh

Gọi $D$ là trung điểm của $BC$ (Hình 33), ta có:

$$AD = m_a, BD = DC = \frac{a}{2}.$$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác $ABD$, ta có:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \widehat{ABD} = c^2 + \frac{a^2}{4} - ca \cdot \cos B \cdot$$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác $ABC$, ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Suy ra

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

2. Công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

Ta có hai công thức sau: $r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S}$.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Giải tam giác

**Câu 1.** Giải tam giác $ABC$, biết

a) $c=14, A=60°, B=40°.$

b) $b=4,5,\ A=30°, C=75°.$

**Câu 2.** Giải tam giác $ABC$, biết

a) $c=35,\ A=40°,\ C=120°.$

b) $a=137,5,\ B=83°,\ C=57°.$

**Câu 3.** Giải tam giác $ABC$, biết $a=6,3;\ b=6,3;\ \widehat{C}=54°.$

**Câu 4.** Giải tam giác $ABC$, biết $b=32;\ c=45;\ \widehat{A}=87°.$

**Câu 5.** Giải tam giác $ABC$, biết $a=7;\ b=23;\ \widehat{C}=130°.$

**Câu 6.** Giải tam giác $ABC$, biết $b=14;\ c=10;\ \widehat{A}=145°.$

**Câu 7.** Giải tam giác $ABC$, biết $a=14;\ b=18;\ c=20.$

**Câu 8.** Giải tam giác $ABC$, biết $a=6;\ b=5;\ c=7.$

**Câu 9.** Giải tam giác $ABC$, biết $a=6;\ b=7,3;\ c=4,8.$

**Câu 10.** Giải tam giác $ABC$, biết $\widehat{B}=60°;\ \widehat{C}=45°;\ BC=a.$

### Dạng 2. Tính diện tích tam giác

**Câu 1.** Cho tam giác $ABC$, biết

a) $a=7,b=8,c=6$. Tính $S$ và $h_a$.

b) $b=7,c=5,\cos A=\dfrac{3}{5}$. Tính $S$ và $R,r$

**Câu 2.** Cho tam giác $ABC$, biết $a=21,b=17,c=10$

a) Tính diện tích $S$ của tam giác $ABC$ và chiều cao $h_a$.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp $r$ và trung tuyến $m_a$.

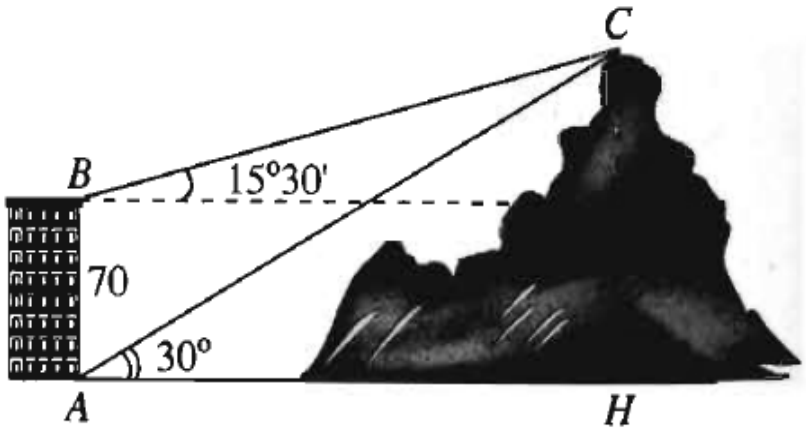
**Câu 3.** Cho tam giác $ABC$, có $\widehat{A}=60^o, b=20, c=25$.

a) Tính diện tích $S$ và chiều cao $h_a$.

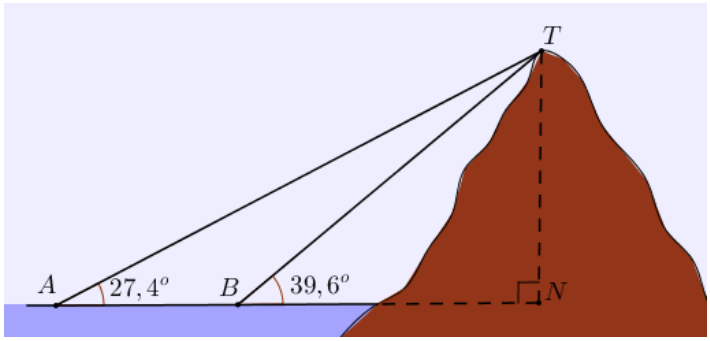
b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $R$ và bán kính đường tròn nội tiếp $r$

### Dạng 3. Áp dụng vào bài toán thực tiễn

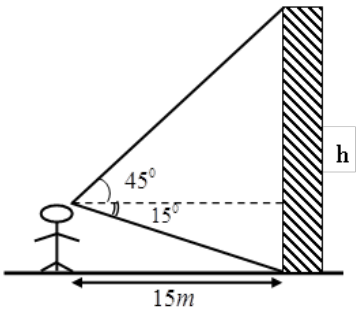
**Câu 1.** Từ hai vị trí $A$ và $B$ của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh $C$ của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB=70\,m$, phương nhìn $AC$ tạo với phương nằm ngang một góc $30°$, phương nhìn $BC$ tạo với phương nằm ngang một góc $15°30'$ (như hình vẽ). Tính độ cao $CH$ của ngọn núi so với mặt đất.



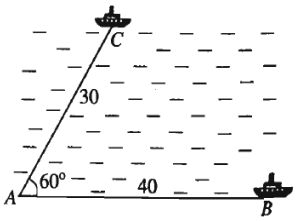

**Câu 2.** Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đèn tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Nếu các đèn tín hiệu cách nhau 1536 m thì ngọn núi cao bao nhiêu (tính gần đúng sau dấu phẩy hai chữ số)?




**Câu 3.** Một người quan sát đứng cách một cái tháp $15m$, nhìn thấy đỉnh tháp một góc $45^0$ và nhìn dưới chân tháp một góc $15^0$ so với phương nằm ngang như trong hình vẽ. Tính chiều cao h của tháp.




**Câu 4.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí $A$, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc $60^0$. Tàu $B$ chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu $C$ chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?




**Câu 5.** Vịnh Vân Phong – tỉnh Khánh Hòa nổi tiếng vì có con đường đi bộ xuyên biển nối từ Hòn Quạ đến đảo Điệp Sơn. Một du khách muốn chèo thuyền kayak từ vị trí $C$ trên Hòn Quạ đến vị trí $B$ trên Bè thay vì đi bộ xuyên qua con đường qua vị trí $A$ rồi mới đến vị trí $B$. Nếu người đó chèo thuyền với vận tốc không đổi là 4 km/h thì sẽ mất bao nhiêu thời gian biết $AB = 0,4$ km, $AC = 0,6$ km và góc giữa $AB$ và $AC$ là $60^\circ$?

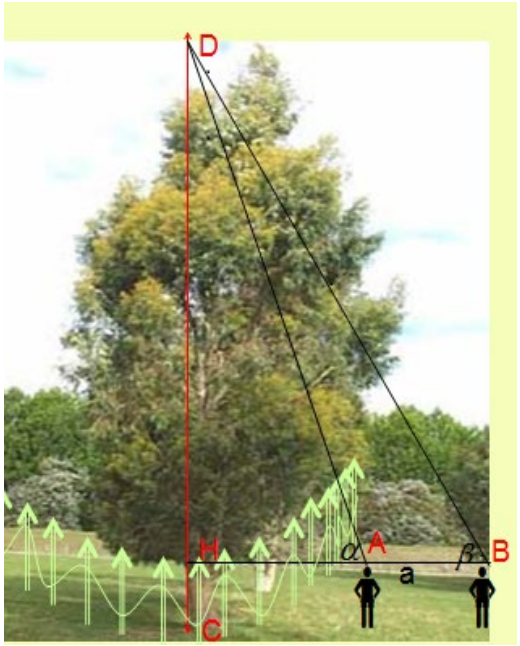



**Câu 6.** Trong một lần đi khảo sát các đảo thuộc quần đảo Trường Sa của Việt Nam, các nhà khoa học phát hiện có một đảo có dạng hình tròn, tâm của đảo này bị che bởi một bãi đá nhỏ mà các nhà khoa học không thể tới được. Các nhà khoa học muốn đo bán kính của đảo này, biết rằng các nhà khoa học chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài. Nêu cách để các nhà khoa học tính được bán kính đảo?

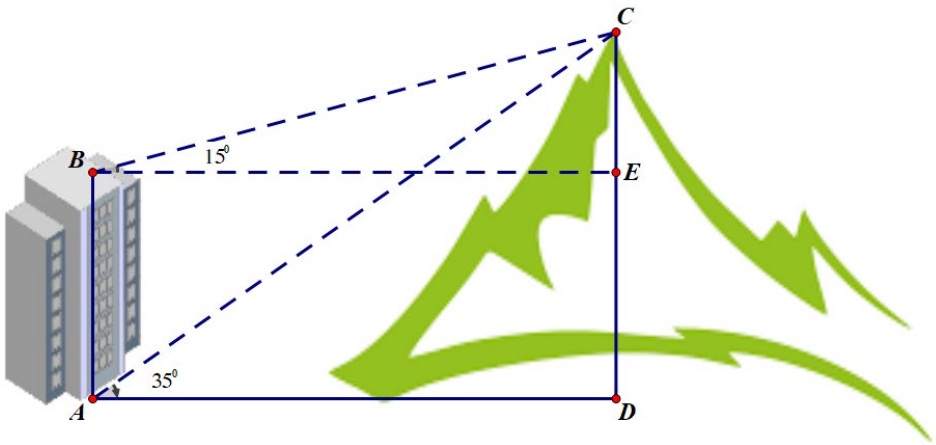
**Câu 7.** Giả sử chúng ta cần đo chiều cao $AB$ của một tòa tháp với $B$ là chân tháp và $A$ là đỉnh tháp. Vì không thể đến chân tháp được nên từ hai điểm $C$ và $D$ có khoảng cách $CD = 30m$ sao cho ba điểm $B, C, D$ thẳng hàng người ta đo các góc $\widehat{BCA} = 43°$ và góc $\widehat{BDA} = 67°$. Hãy tính chiều cao $AB$ của tòa tháp

**Câu 8.** Trong tam giác vuông $AHC$ ta có $AH = AC.\cos\widehat{HAC} \approx 6,30.\cos 35° \approx 5,16$ (km).

Từ hai vị trí $A, B$ người ta quan sát một cái cây (hình vẽ). Lấy $C$ là điểm gốc cây, $D$ là điểm ngọn cây. $A, B$ cùng thẳng hàng với điểm $H$ thuộc chiều cao $CD$ của cây. Người ta đo được $AB = 10m$, $HC = 1,7m$, $\alpha = 63°$, $\beta = 48°$. Tính chiều cao của cây đó.




**Câu 9.** Một người quan sát đỉnh của một ngọn núi nhân tạo từ hai vị trí khác nhau của tòa nhà. Lần đầu tiên người đó quan sát đỉnh núi từ tầng trệt với phương nhìn tạo với phương nằm ngang $35^0$ và lần thứ hai người này quan sát tại sân thượng của cùng tòa nhà đó với phương nằm ngang $15^0$ (như hình vẽ). Tính chiều cao ngọn núi biết rằng tòa nhà cao $60(m)$.




## Dạng 4. Nhận dạng tam giác

**Câu 1.** Cho tam giác $ABC$. Chứng minh:

a) Góc $A$ nhọn $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$;

b) Góc $A$ tù $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$;

c) Góc $A$ vuông $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$;

**Câu 2.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $a^3 = b^3 + c^3$. Chứng minh tam giác có ba góc nhọn.

**Câu 3.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh $ABC$ là tam giác nhọn.

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $\sin A = 2\sin B \cdot \cos C$. Chứng minh $ABC$ là tam giác cân.

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$ có cạnh $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$, $C = 30°$. Chứng minh $ABC$ là tam giác cân. Tính diện tích và chiều cao $h_a$ của tam giác.

**Câu 6.** Xét dạng tam giác $ABC$ thoả mãn $\dfrac{1+\cos B}{\sin B} = \dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$.

**Câu 7.** Cho tam giác $ABC$ có chiều cao $h_a = \sqrt{p(p-a)}$ .Chứng minh $ABC$ là tam giác cân.

**Câu 8.** Chứng minh tam giác $ABC$ vuông tại $A$ khi và chỉ khi $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$.

**Câu 9.** Cho tam giác $ABC$ có bán kính đường tròn nội tiếp bằng $r$ và các bán kính đường tròn bàng tiếp các góc $A, B, C$ tương ứng bằng $r_a, r_b, r_c$. Chứng minh rằng nếu $r = r_a - r_b - r_c$ thì góc $A$ là góc vuông.

**Câu 10.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $\dfrac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2$. Chứng minh góc $C = 60°$.

**Câu 11.** Cho tam giác $ABC$ biết $a = 7$, $b = 8$, $c = 5$. Chứng minh tam giác $ABC$ có góc $60°$

**Câu 12.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $c^4 - 2\left(a^2 + b^2\right)c^2 + a^4 + a^2b^2 + c^4 = 0$. Chứng minh tam giác $ABC$ có góc $60°$ hoặc $120°$.

**Câu 13.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $a + b + c = 2\left(a\cos A + b\cos B + c\cos C\right)$. Chứng minh tam giác $ABC$ đều.

**Câu 14.** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{A} = 60°, a = 10$, $r = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. Chứng minh tam giác $ABC$ đều.

**Câu 15.** Xét tam giác $ABC$ thỏa mãn $\dfrac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2$ và $\sin A.\sin C = \dfrac{3}{4}$.

**Câu 16.** Chứng minh điều kiện cần và đủ để tam giác $ABC$ đều là $m_a + m_b + m_c = \dfrac{9}{2}R$.

**Câu 17.** Cho tam giác $ABC$ thỏa mãn $\sin C = 2\sin B\cos A$. Chứng minh rằng tam giác $ABC$ cân.

**Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ thỏa mãn $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác $ABC$ vuông.

**Câu 19.** Nhận dạng tam giác $ABC$ trong các trường hợp sau:

a) $a\sin A + b\sin B + c\sin C = h_a + h_b + h_c$.

b) $\dfrac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{2}\left(\cot^2 A + \cot^2 B\right)$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Giải tam giác, Đường trung tuyến

**Câu 1.** Tam giác $ABC$ có $AB = 9$ cm, $BC = 15$ cm, $AC = 12$ cm. Khi đó đường trung tuyến $AM$ của tam giác có độ dài là

**A.** 10 cm. **B.** 9 cm. **C.** 7,5 cm. **D.** 8 cm.

**Câu 2.** Cho tam giác $ABC$ có $AB = 3, BC = 5$ và độ dài đường trung tuyến $BM = \sqrt{13}$. Tính độ dài $AC$.

**A.** $\sqrt{11}$. **B.** $4$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

**Câu 3.** Cho $\Delta ABC$ vuông ở $A$, biết $\widehat{C} = 30°$, $AB = 3$. Tính độ dài trung tuyến $AM$?

**A.** $3$ **B.** $4$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{7}{2}$

**Câu 4.** Tam giác $ABC$ có $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$. $M$ là điểm trên cạnh $BC$ sao cho $BM = 3$. Độ dài đoạn $AM$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\sqrt{9}$. **B.** 9. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{108}$.

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$ có góc $C$ nhọn, $AH$ và $BK$ là hai đường cao, $HK = \sqrt{7}$, diện tích tứ giác $ABHK$ bằng 7 lần diện tích ta giác $CHK$. Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ bằng

**A.** 4. **B.** 7. **C.** 8. **D.** $\sqrt{14}$.

**Câu 6.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4\,cm; BC = 5\,cm; BD = 7\,cm$. Độ dài đoạn $AC$ bằng bao nhiêu $cm$ ? (Tính chính xác đến hàng phần trăm)

**A.** $6,25(cm)$. **B.** $5,74(cm)$. **C.** $5,67(cm)$. **D.** $5,93(cm)$.

**Câu 7.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ biết $\widehat{A} = 120°$ và $AB = AC = a$. Lấy điểm $M$ trên cạnh $BC$ sao cho $BM = \dfrac{2}{5}BC$. Tính độ dài $AM$.

**A.** $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $AM = \dfrac{11a}{5}$. **C.** $AM = \dfrac{a\sqrt{7}}{5}$. **D.** $AM = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

**Câu 8.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $a$. Gọi $E$ là trung điểm cạnh $BC$ và $F$ là trung điểm cạnh $AE$. Tính độ dài đoạn thẳng $DF$.

**A.** $DF = \dfrac{a\sqrt{13}}{4}$. **B.** $DF = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $DF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $DF = \dfrac{3a}{4}$.

**Câu 9.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ có cạnh bên bằng $a$ và nội tiếp đườn tròn $\left(O;\sqrt{3}\right)$. Để diện tích tam giác lớn nhất thì $\hat{B}$ bằng

**A.** $90°$. **B.** $120°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

**Câu 10.** Cho tam giác $ABC$ có $AC=8;AB=15;\cos A=\frac{4}{5}$. Độ dài đường cao $AH$ bằng:

**A.** $\frac{72}{\sqrt{79}}$. **B.** $\frac{72}{97}$. **C.** $\frac{\sqrt{72}}{97}$. **D.** $\frac{72}{\sqrt{97}}$.

**Câu 11.** Cho tam giác $ABC$ có $a=109$, $\widehat{B}=33°24'$, góc $\widehat{C}=66°59'$. Chu vi tam giác $ABC$ gần bằng số nào sau đây?

**A.** $136$. **B.** $227$. **C.** $272$. **D.** $372$.

**Câu 12.** Cho $\Delta ABC$ có $AB=2;AC=3;\widehat{A}=60°$. Tính độ dài đường phân giác trong góc $A$ của tam giác $ABC$.

**A.** $\frac{12}{5}$. **B.** $\frac{6\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\frac{6\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

**Câu 13.** Cho tam giác $ABC$, có $m_a=\frac{\sqrt{151}}{2}$, (với $m_a$ là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh $A$ và các cạnh $AC=8$, $AB=6$. Tính độ dài $BC$.

**A.** $a=6$. **B.** $a=9$. **C.** $a=49$. **D.** $a=7$.

**Câu 14.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=60°$,cạnh $a=30$ bán kính đường tròn nội tiếp $r=5\sqrt{3}$. Tính tổng độ dài hai cạnh còn lại $b,c$ của tam giác $ABC$.

**A.** 30. **B.** 60. **C.** 50. **D.** 90.

**Câu 15.** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{B}=45°,\widehat{C}=75°$ và phân giác trong $AD=4$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

**A.** $\sqrt{6}-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. **C.** $-4+4\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

**Câu 16.** Tam giác $ABC$ có $\cos\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)=-\frac{1}{5}$, $AC=6$, $BC=5$. Tính độ dài cạnh $AB$.

**A.** $\sqrt{73}$. **B.** $8$. **C.** $\sqrt{55}$. **D.** $7$.

**Lời giải**

Vì trong tam giác $ABC$ ta có $A+B$ bù với góc $C$ nên $\cos\left(A+B\right)=-\frac{1}{5}\Rightarrow\cos C=\frac{1}{5}$ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AB.BC.\cos C}=\sqrt{6^2+5^2-2.6.5.\frac{1}{5}}=7$.

**Câu 17.** Tam giác $ABC$ có $BC=12$, $CA=9$, $AB=6$. Trên cạnh $BC$ lấy điểm $M$ sao cho $BM=8$. Tính độ dài đoạn thẳng $AM$.

**A.** $\sqrt{94}$. **B.** $\sqrt{106}$. **C.** $\sqrt{166}$. **D.** $\sqrt{34}$.

**Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $2a$. Một điểm $I$ bất kì thuộc miền trong tam giác $ABC$. Tính tổng khoảng cách từ điểm $I$ đến ba cạnh của tam giác?

**A.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

**Câu 19.** Tam giác ABC có trọng tâm G. Hai trung tuyến $\mathrm{BM}=6,\mathrm{CN}=9$ và $\widehat{\mathrm{BGC}}=120°$. Tính độ dài cạnh AB.

**A.** $AB=\sqrt{11}$. **B.** $AB=\sqrt{13}$. **C.** $AB=2\sqrt{11}$. **D.** $AB=2\sqrt{13}$.

**Dạng 1. Diện tích tam giác**

**Câu 20.** Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

**A.** $S=\frac{1}{2}bc\sin A$. **B.** $S=\frac{1}{2}ac\sin A$. **C.** $S=\frac{1}{2}bc\sin B$. **D.** $S=\frac{1}{2}bc\sin B$.

**Câu 21.** Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng $a$. Góc $\widehat{BAD}=30°$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

**A.** $\frac{a^2}{4}$. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a^2$.

**Câu 22.** Tính diện tích tam giác $ABC$ biết $AB=3, BC=5, CA=6$.

**A.** $\sqrt{56}$. **B.** $\sqrt{48}$. **C.** $6$. **D.** $8$.

**Câu 23.** Cho $\Delta ABC$ có $a=6,b=8,c=10$. Diện tích $S$ của tam giác trên là:

**A.** 48. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 30.

**Câu 24.** Cho $\Delta ABC$ có $a=4,c=5,B=150^0$. Diện tích của tam giác là:

**A.** $5\sqrt{3}$. **B.** 5. **C.** 10. **D.** $10\sqrt{3}$.

**Câu 25.** Một tam giác có ba cạnh là $13,14,15$. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

**A.** 84. **B.** $\sqrt{84}$. **C.** 42. **D.** $\sqrt{168}$.

**Câu 26.** Cho các điểm $A(1;-2),B(-2;3),C(0;4)$. Diện tích $\Delta ABC$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{13}{2}$. **B.** 13. **C.** 26. **D.** $\frac{13}{4}$.

**Câu 27.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;-1),B(3;-3),C(6;0)$. Diện tích $\Delta ABC$ là

**A.** 12. **B.** 6. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** 9.

**Câu 28.** Cho tam giác $ABC$ có $a=4,b=6,c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

**A.** $9\sqrt{15}$. **B.** $3\sqrt{15}$. **C.** 105. **D.** $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

**Câu 29.** Cho tam giác $ABC$. Biết $AB=2$; $BC=3$ và $\widehat{ABC}=60°$. Tính chu vi và diện tích tam giác $ABC$.

**A.** $5+\sqrt{7}$ và $\frac{3}{2}$. **B.** $5+\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

**C.** $5\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $5+\sqrt{19}$ và $\frac{3}{2}$.

**Câu 30.** Tam giác $ABC$ có các trung tuyến $m_a=15, m_b=12, m_c=9$. Diện tích S của tam giác $ABC$ bằng

**A.** 72. **B.** 144. **C.** 54. **D.** 108.

**Câu 31.** Cho tam giác $\Delta ABC$ có $b=7;c=5;\cos A=\frac{3}{5}$. Độ dài đường cao $h_a$ của tam giác $\Delta ABC$ là.

**A.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **B.** 8. **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** $80\sqrt{3}$

**Câu 32.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=2a$; $AC=4a$ và $\widehat{BAC}=120°$. Tính diện tích tam giác $ABC$?

**A.** $S=8a^2$. **B.** $S=2a^2\sqrt{3}$. **C.** $S=a^2\sqrt{3}$. **D.** $S=4a^2$.

**Câu 33.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ bằng

**A.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 34.** Cho tam giác $ABC$ có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác $ABC$ bằng

**A.** $12$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $24$.

**Câu 35.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $2a$. Tính bán kính $R$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

**A.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{4a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{8a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{6a}{\sqrt{3}}$.

**Câu 36.** Cho tam giác $ABC$ có $BC=\sqrt{6}$, $AC=2$ và $AB=\sqrt{3}+1$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ bằng:

**A.** $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2$.

**Câu 37.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=3$, $AC=4$, $BC=5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

**A.** $1$. **B.** $\frac{8}{9}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

**Câu 38.** Cho $\Delta ABC$ có $S=84, a=13, b=14, c=15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp $R$ của tam giác trên là:

**A.** 8,125. **B.** 130. **C.** 8. **D.** 8,5.

**Câu 39.** Cho $\Delta ABC$ có $S=10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p=10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp $r$ của tam giác trên là:

**A.** 3. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Câu 40.** Một tam giác có ba cạnh là $26, 28, 30$. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

**A.** 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{2}$.

**Câu 41.** Một tam giác có ba cạnh là $52, 56, 60$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

**A.** $\frac{65}{8}$. **B.** 40. **C.** 32,5. **D.** $\frac{65}{4}$.

**Câu 42.** Tam giác với ba cạnh là $5;12;13$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?

**A.** 6. **B.** 8. **C.** $\frac{13}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

**Câu 43.** Tam giác với ba cạnh là $5;12;13$ có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

**A.** 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 3.

**Câu 44.** Tam giác với ba cạnh là $6;8;10$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?

**A.** 5. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** 6.

**Câu 45.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB=4, BC=6$, $M$ là trung điểm của $BC$, $N$ là điểm trên cạnh $CD$ sao cho $ND=3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AMN$ bằng

**A.** $3\sqrt{5}$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 46.** Cho tam giác đều $ABC$;gọi $D$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$. Gọi $R$ và $r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác $ADC$. Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

**A.** $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}$. **C.** $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}$. **D.** $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}$.

**Câu 47.** Cho tam giác $ABC$ có $\angle B=60^0, \angle A=30^0$, cạnh $BC=12$ .Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ gần với số nào nhất?

**A.** $4,6$ **B.** $4,9$. **C.** $4,8$. **D.** $4,7$

**Câu 48.** Cho tam giác $ABC$ có góc $A=60°$, cạnh $a=30$, bán kính đường tròn nội tiếp $r=5\sqrt{3}$. Tính chu vi của tam giác $ABC$.

**A.** $60+5\sqrt{3}$. **B.** $30+10\sqrt{3}$. **C.** $80$. **D.** $90$.

**Câu 49.** Cho tam giác $ABC$ có độ dài ba cạnh $BC=a, CA=b, AB=c$. Biết $a^2+b^2=5c^2$. Góc giữa hai đường trung tuyến $AM, BN$ của tam giác $ABC$ bằng bao nhiêu?.

**A.** $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

**Dạng 2. Bài toán thực tế**

**Câu 50.** Hai chiếc tàu thuỷ cùng xuất phát từ vị trí $A$, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc $60^0$. Tàu thứ nhất chạy với tốc độ $30 km/h$, tàu thứ hai chạy với tốc độ $40 km/h$. Hỏi sau $2$ giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu $km$?

**A.** $13$. **B.** $20\sqrt{13}$. **C.** $10\sqrt{13}$. **D.** $15$.

**Câu 51.** Khoảng cách từ $A$ đến $B$ không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm $C$ mà từ đó có thể nhìn được $A$ và $B$ dưới một góc $78^o24'$. Biết $CA=250 m, CB=120 m$. Khoảng cách $AB$ bằng bao nhiêu?

**A.** $266 m$. **B.** $255 m$. **C.** $166 m$. **D.** $298 m$.

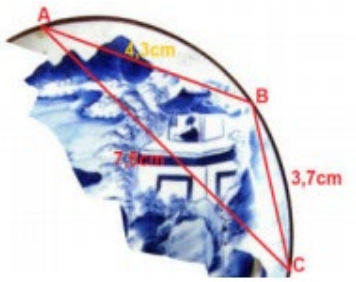
**Câu 52.** Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD=80 m$, người ta nhìn hai điểm $A$ và $B$ trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^012'$ và $34^026'$. Ba điểm $A, B, D$ thẳng hàng. Tính khoảng cách $AB$?

**A.** $71 m$. **B.** $91 m$. **C.** $79 m$. **D.** $40 m$.

**Câu 53.** Khoảng cách từ $A$ đến $B$ không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm $C$ mà từ đó có thể nhìn được $A$ và $B$ dưới một góc $56^016'$. Biết $CA=200 m$, $CB=180 m$. Khoảng cách $AB$ bằng bao nhiêu?

**A.** $180 m$. **B.** $224 m$. **C.** $112 m$. **D.** $168 m$.

**Câu 54.** Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ( $AB=4,3 cm; BC=3,7 cm;$ $CA=7,5$ $cm$). Bán kính của chiếc đĩa này bằng (*kết quả làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy*).




**A.** 5,73 *cm*. **B.** 6,01*cm*. **C.** 5,85*cm*. **D.** 4,57*cm*.

**Câu 55.** Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó $C$ là chân tháp. Chọn hai điểm $A$, $B$ trên mặt đất sao cho ba điểm $A$, $B$, $C$ thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24m$, $\widehat{CAD} = 63^0$; $\widehat{CBD} = 48^0$. Chiều cao $h$ của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?

**A.** 61,4 m. **B.** 18,5 m. **C.** 60 m. **D.** 18 m.

**Câu 56.** Từ hai vị trí A, B của một tòa nhà người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao AB bằng $70\,m$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang một góc $30^0$, phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang một góc $15^0 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị

**A.** $195\,m$. **B.** $234\,m$. **C.** $165\,m$. **D.** $135\,m$.

# Bài 2. GIẢI TAM GIÁC

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

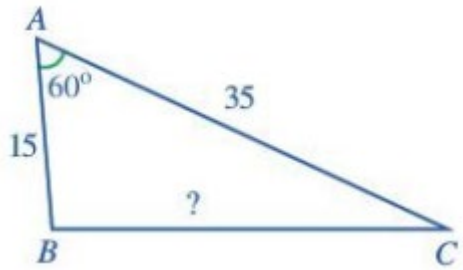
## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Tính các cạnh và góc của tam giác dựa tren một số điều kiện cho trước

Như ta đã biết, một tam giác hoàn toàn xác định nếu biết một trong những dữ kiện sau:
- Biết độ dài hai cạnh và độ lớn góc xen giữa hai cạnh đó;
- Biết độ dài ba cạnh;
- Biết độ dài một cạnh và độ lớn hai góc kề với cạnh đó.

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước.

***Ví dụ 1.*** Cho tam giác $ABC$ có $AB=15, AC=35, \widehat{A}=60°$.




Tính cạnh $BC$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) và góc $B$ (làm tròn kết quả đến độ).

***Giải***

Áp dụng định lí côsin trong tam giác $ABC$, ta có:

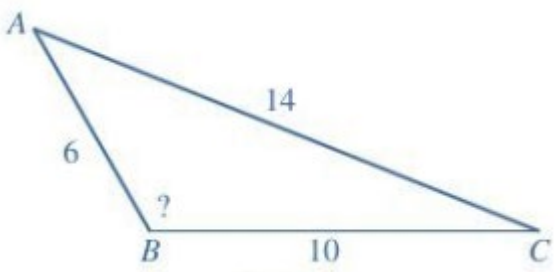
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot \cos A$$
$$= 15^2 + 35^2 - 2\cdot 15\cdot 35\cdot \cos 60^\circ = 925.$$

Do đó $BC=\sqrt{925}\approx 30,4$.

Ta có: $\cos B = \dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC} = \dfrac{15^2+925-35^2}{2\cdot 15\cdot \sqrt{925}}$.

Do đó $\hat{B}\approx 95^\circ$.

***Ví dụ 2.*** Cho tam giác $ABC$ có $AB=6, BC=10, CA=14$.




Tính số đo góc $B$.

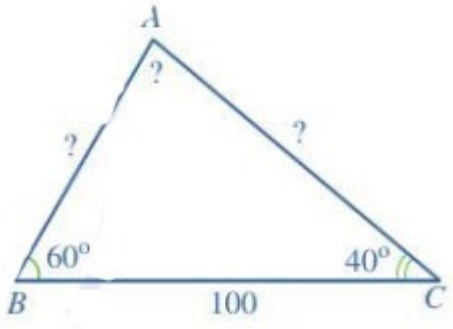
***Giải***

Áp dụng định lí côsin trong tam giác $ABC$, ta có:

$$\cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC} = \frac{6^2+10^2-14^2}{2\cdot 6\cdot 10} = -0,5$$

Do đó $\hat{B}=120°$.

***Ví dụ 3.*** Cho tam giác $ABC$ có $BC=100, \hat{B}=60°, \hat{C}=40°$.




Tính góc $A$ và các cạnh $AB, AC$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) của tam giác đó.

***Giải***

Ta có:

$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180° - (60° + 40°) = 80°$

Áp dụng định lí sin trong $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$.

$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 65,3.$

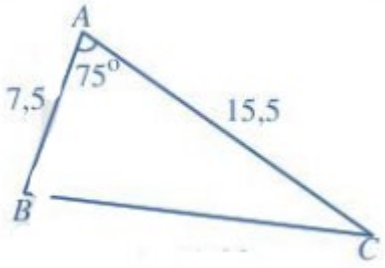
$AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 87,9.$

## II. Tính diện tích tam giác

Cho tam giác $ABC$ có $BC = a, CA = b, AB = c$. Khi đó, diện tích $S$ của tam giác $ABC$ là:

$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C.$

***Ví dụ 4.*** Cho tam giác $ABC$ có $AB = 7,5; AC = 15,5; \hat{A} = 75°$. Tính diện tích $S$ của tam giác $ABC$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



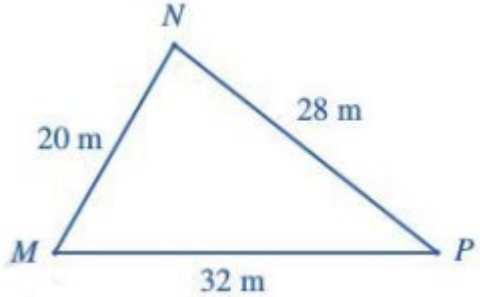

***Giải***

Ta có $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.7,5.15,5.\sin 75° \approx 56,1$.

Cho tam giác $ABC$ có $BC = a, CA = b, AB = c, p = \frac{a+b+c}{2}$. Khi đó, diện tích $S$ của tam giác $ABC$ là:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

***Ví dụ 5.*** Mảnh vườn hình tam giác của gia đình bạn Nam có chiều dài các cạnh là $MN = 20\,m, NP = 28\,m, MP = 32\,m$.




Hỏi diện tích mảnh vườn của gia đình bạn Nam là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng phần mười)?

***Giải***

Ta có: $p=\dfrac{20+28+32}{2}=40(m)$.

Diện tích mảnh vườn là:

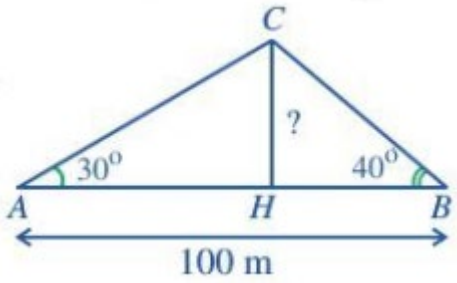
$S=\sqrt{40(40-20)(40-28)(40-32)}\approx 277,1\left(m^2\right)$.

**III. Áp dụng vào bài toán thực tiễn**

***Ví dụ 6.*** Đứng ở vị trí $A$ trên bờ biển, bạn Minh đo được góc nghiêng so với bờ biển tới một vị trí $C$ trên đảo là $30^\circ$. Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí $B$ cách $A$ một khoảng $100m$ và đo được góc nghiêng so với bờ biển tới vị trí $C$ đã chọn là $40^\circ$.

Tính khoảng cách từ vị trí $C$ trên đảo tới bờ biển theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).




***Giải***

Xét tam giác $ABC$ (ở hình trên) ta có: $\hat{C}=180^\circ-\left(30^\circ+40^\circ\right)=110^\circ$.

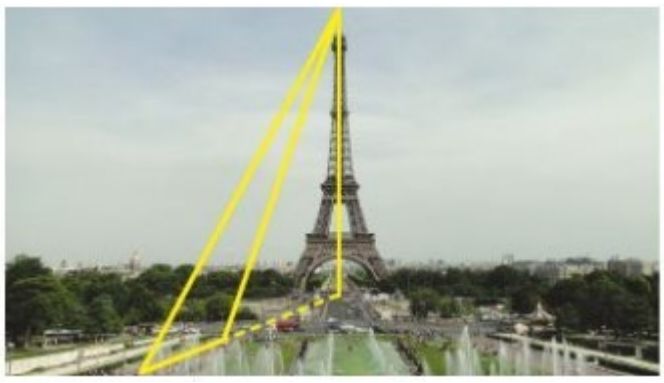
Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$, ta có: $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$.

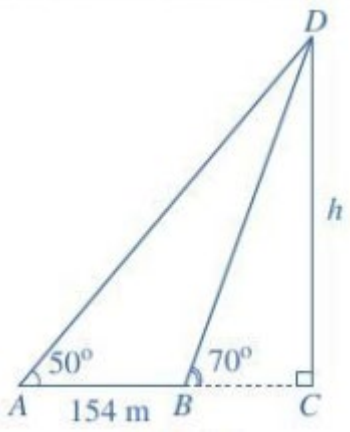
Do đó $AC=\dfrac{AB\cdot\sin B}{\sin C}=\dfrac{100\cdot\sin 40^\circ}{\sin 110^\circ}\approx 68,4(m)$.

Xét tam giác vuông $AHC$, ta có: $CH=AC\cdot\sin 30^\circ\approx 68,4\cdot 0,5\approx 34,2(m)$.

Vậy khoảng cách từ vị trí $C$ trên đảo tối bờ biển khoảng $34,2\,m$.

***Ví dụ 7.*** Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Phương muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Phương đã minh hoạ lại kết quả đo đạc ở hình dưới. Em hãy giúp bạn Phương tính độ cao $h$ của tháp Eiffel (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).






***Giải***

Xét tam giác $ABD$, sử dụng tính chất góc ngoài, ta có: $\widehat{ADB}=70°-50°=20°$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác $ABD$, ta có:

$\dfrac{BD}{\sin\widehat{BAD}}=\dfrac{AB}{\sin\widehat{ADB}}$.

Do đó $BD=\dfrac{154\cdot\sin 50°}{\sin 20°}\approx 345(\text{m})$.

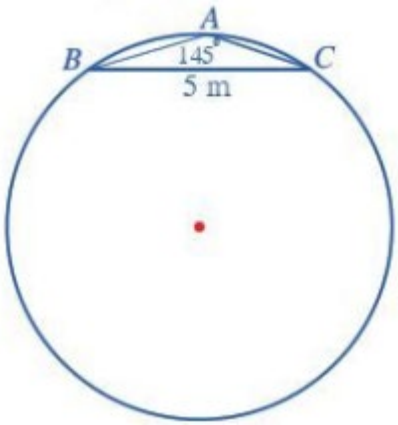
Xét tam giác vuông $BCD$, ta có:

$CD=BD\cdot\sin\widehat{CBD}\approx 345\cdot\sin 70°\approx 324$ (m).

Vậy chiều cao $h$ của tháp Eiffel khoảng $324\,\text{m}$.

***Ví dụ 8.*** Để tính đường kính và diện tích của một giếng nước cổ có dạng hình tròn, người ta tiến hành đo đạc tại ba vị trí $A, B, C$ trên thành giếng. Kết quả đo được là: $BC = 5m$, $\widehat{BAC} = 145^\circ$ hình dưới. Diện tích của giếng là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?






***Giải***

Áp dụng định lí sin cho tam giác $ABC$, ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$.

Do đó $R = \frac{BC}{2 \cdot \sin A} = \frac{5}{2 \cdot \sin 145^\circ} \approx 4,36(m)$.

Vậy diện tích của giếng là: $S = \pi R^2 \approx 3,14 \cdot 4,36^2 \approx 59,69\left(m^2\right)$.

**Tìm hiểu thêm**

Cho tam giác $ABC$ có $AB = c, AC = b, BC = a$. Gọi $R, r, p$ và $S$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, nửa chu vi và diện tích của tam giác $ABC$.

1. Công thức độ dài đường trung tuyến

Gọi $m_a, m_b, m_c$ là độ dài các đường trung tuyến lần lượt xuất phát từ các đỉnh $A, B, C$ của tam giác $ABC$.

Ta có:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Chứng minh

Gọi $D$ là trung điểm của $BC$ (Hình 33), ta có:

$$AD = m_a, BD = DC = \frac{a}{2}.$$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác $ABD$, ta có:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \widehat{ABD} = c^2 + \frac{a^2}{4} - ca \cdot \cos B \cdot$$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác $ABC$, ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Suy ra

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

2. Công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

Ta có hai công thức sau: $r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S}$.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Giải tam giác

**Câu 1.** Giải tam giác $ABC$, biết

a) $c=14, A=60°, B=40°.$

b) $b=4,5,\ A=30°, C=75°.$

**Lời giải**

a) Ta có $C=180°-(A+B)=180°-(60°+40°)=80°.$

Có $b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{14\sin 40°}{\sin 80°}\approx 9,1$ và $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{14\sin 60°}{\sin 80°}\approx 12,3.$

b) Ta có $B=180°-(A+C)=180°-(30°+75°)=75°$ vì $B=C$ nên tam giác cân tại $A.$

Suy ra $c=b=4,5$ và $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{4,5\sin 30°}{\sin 75°}\approx 2,3.$

**Câu 2.** Giải tam giác $ABC$, biết

a) $c=35,\ A=40°,\ C=120°.$

b) $a=137,5,\ B=83°,\ C=57°.$

**Lời giải**

a) Ta có $B=180°-(A+C)=180°-(40°+120°)=20°.$

Từ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$, ta suy ra

$a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}\approx 26;\ a=\dfrac{c\sin B}{\sin C}\approx\dfrac{35.0,43}{0,87}\approx 13,8.$

b) Ta có $A=180°-(B+C)=180°-(83°+57°)=40°.$

Từ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$, ta suy ra

$b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}\approx\dfrac{137,5.0,9925}{0,6427}\approx 212,3;\ c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}\approx\dfrac{137,5.0,8387}{0,6427}\approx 179,4.$

**Câu 3.** Giải tam giác $ABC$, biết $a=6,3;\ b=6,3;\ \widehat{C}=54°.$

**Lời giải**

Ta có $a=b=6,3$ nên tam giác $ABC$ cân tại $C$.

Suy ra $\widehat{A}=\widehat{B}=\dfrac{180°-54°}{2}=63°.$

Áp dụng định lí sin cho tam giác $ABC$ ta có

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}\Leftrightarrow c=\frac{a\sin C}{\sin A}\Leftrightarrow c=\frac{6,3.\sin 54°}{\sin 63°}\approx 5,72.$$

Vậy $\widehat{A}=\widehat{B}=63°$, $c\approx 5,72$.

**Câu 4.** Giải tam giác $ABC$, biết $b=32$; $c=45$; $\widehat{A}=87°$.

**Lời giải**

Áp dụng định lí cô-sin, ta có

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{32^2+45^2-2.32.45.\cos 87°}\approx 53,84.$$

Vì $b<c<a$ nên $\widehat{B}<\widehat{C}<\widehat{A}$, suy ra tam giác $ABC$ có ba góc nhọn. Áp dụng định lí sin, ta có

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Leftrightarrow \sin B\approx\frac{32.\sin 87°}{53,84}\approx 0,594.$$

Suy ra $\widehat{B}\approx 36°$, do đó $\widehat{C}=180°-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)\approx 57°$.

Vậy $a\approx 53,84$, $\widehat{B}\approx 36°$, $\widehat{C}\approx 57°$.

**Câu 5.** Giải tam giác $ABC$, biết $a=7$; $b=23$; $\widehat{C}=130°$.

**Lời giải**

Áp dụng định lí cô-sin, ta có

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{7^2+23^2-2.7.23.\cos 130°}\approx 28,02.$$

Vì $\widehat{C}=130°$ nên $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ là các góc nhọn.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Leftrightarrow \sin A=\frac{a\sin C}{c}\Leftrightarrow \sin A\approx\frac{7.\sin 130°}{28,02}\approx 0,191.$$

Suy ra $\widehat{A}\approx 11°$, do đó $\widehat{B}=180°-\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right)\approx 39°$.

Vậy $c\approx 28,02$, $\widehat{A}\approx 11°$, $\widehat{B}\approx 39°$.

**Câu 6.** Giải tam giác $ABC$, biết $b=14$; $c=10$; $\widehat{A}=145°$.

**Lời giải**

Áp dụng định lí cô-sin, ta có

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{14^2+10^2-2.14.10.\cos 145°}\approx 22,92.$$

Vì $\widehat{A}=145°$ nên $\widehat{C}$, $\widehat{B}$ là các góc nhọn.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\text{sinB}}\Leftrightarrow \sin B=\frac{b\sin A}{a}\Leftrightarrow \sin B\approx \frac{14.\sin 145^\circ}{22,92}\approx 0,35.$$

Suy ra $\widehat{B}\approx 21^\circ$, do đó $\widehat{C}=180^\circ-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)\approx 14^\circ.$

Vậy $c\approx 22,92$, $\widehat{B}\approx 21^\circ$, $\widehat{C}\approx 14^\circ.$

**Câu 7.** Giải tam giác $ABC$, biết $a=14$; $b=18$; $c=20.$

**Lời giải**

Ta có

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{18^2+20^2-14^2}{2.18.20}=\frac{11}{15}\Rightarrow \widehat{A}\approx 43^\circ.$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{14^2+20^2-18^2}{2.14.18}=\frac{17}{35}\Rightarrow \widehat{B}\approx 61^\circ.$$

Khi đó $\widehat{C}=180^\circ-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)\approx 76^\circ.$

Vậy $\widehat{A}\approx 43^\circ$, $\widehat{B}\approx 61^\circ$, $\widehat{C}\approx 76^\circ.$

**Câu 8.** Giải tam giác $ABC$, biết $a=6$; $b=5$; $c=7.$

**Lời giải**

Ta có

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+7^2-4^2}{2.5.7}=\frac{29}{35}\Rightarrow \widehat{A}\approx 34^\circ.$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{4^2+7^2-5^2}{2.4.7}=\frac{5}{7}\Rightarrow \widehat{B}\approx 44^\circ.$$

Khi đó $\widehat{C}=180^\circ-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)\approx 102^\circ.$

Vậy $\widehat{A}\approx 34^\circ$, $\widehat{B}\approx 44^\circ$, $\widehat{C}\approx 102^\circ.$

**Câu 9.** Giải tam giác $ABC$, biết $a=6$; $b=7,3$; $c=4,8.$

**Lời giải**

Ta có

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{7,3^2+4,8^2-6^2}{2.7,3.4,8}=\frac{4033}{7008}\Rightarrow \widehat{A}\approx 55^\circ.$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{6^2+4,8^2-7,3^2}{2.6.4,8}=\frac{115}{1152}\Rightarrow \widehat{B}\approx 84^\circ.$$

Khi đó $\widehat{C}=180^\circ-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)\approx 41^\circ.$

Vậy $\widehat{A} \approx 55°$, $\widehat{B} \approx 84°$, $\widehat{C} \approx 41°$.

**Câu 10.** Giải tam giác $ABC$, biết $\widehat{B} = 60°$; $\widehat{C} = 45°$; $BC = a$.

**Lời giải**

Ta có $\widehat{A} = 180° - (60° + 45°) = 75°$.

Áp dụng định lí sin, ta có

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Leftrightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A} \Leftrightarrow b \approx 0,897a.$$

Tương tự ta có $c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx 0,732a$.

Vậy $\widehat{A} = 75°$, $b \approx 0,897a$, $c \approx 0,732a$.

## Dạng 2. Tính diện tích tam giác

**Câu 1.** Cho tam giác $ABC$, biết

a) $a = 7, b = 8, c = 6$. Tính $S$ và $h_a$.

b) $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$. Tính $S$ và $R, r$

**Lời giải.**

a) Áp dụng công thức Hê-rông với $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{21}{2}$

Ta có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-7\right)\left(\frac{21}{2}-8\right)\left(\frac{21}{2}-6\right)} = \frac{21\sqrt{15}}{4}$

Vì $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow \frac{21\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2}7.h_a \Rightarrow h_a = \frac{3\sqrt{15}}{2}$

b) Ta có $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$ (vì $\sin A > 0$).

Mà $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}.7.5.\frac{4}{5} = 14$

Theo Định lí Cô-sin ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

Từ $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Theo định lí sin: $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{2.\frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Ta có $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{14}{5+7+4\sqrt{2}} = \frac{14}{12+4\sqrt{2}} = \frac{7}{6+2\sqrt{2}}$

**Câu 2.** Cho tam giác $ABC$, biết $a = 21, b = 17, c = 10$

a) Tính diện tích $S$ của tam giác $ABC$ và chiều cao $h_a$.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp $r$ và trung tuyến $m_a$.

**Lời giải.**

a) Ta có $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{21+17+10}{2}=24$

Theo công thức Hê-rông, ta có

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}=84$

Do đó: $h_a=\dfrac{2S}{a}=\dfrac{2.84}{21}=8$.

b) Ta có $S=pr\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{82}{24}=3,5$.

Độ dài trung tuyến $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{17^2+10^2}{2}-\dfrac{21^2}{4}=\dfrac{337}{4}=84,25$

**Câu 3.** Cho tam giác $ABC$, có $\widehat{A}=60^o, b=20, c=25$.

a) Tính diện tích $S$ và chiều cao $h_a$.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $R$ và bán kính đường tròn nội tiếp $r$

**Lời giải.**

a) Ta có $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}.20.35.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=175\sqrt{3}$

Hơn nữa $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=20^2+35^2-2.20.35.\dfrac{1}{2}=925$

Vậy $a=\sqrt{925}\approx 30,41$

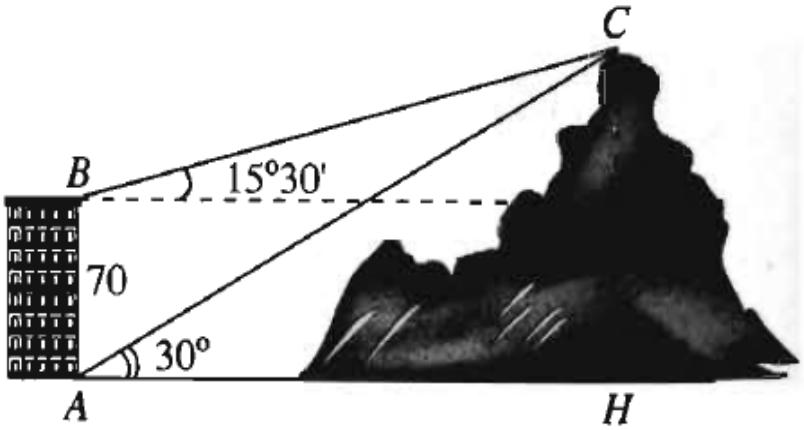
Từ công thức $S=\dfrac{1}{2}ah_a\Rightarrow h_a=\dfrac{2S}{a}=\dfrac{350\sqrt{3}}{\sqrt{925}}\approx 19,94$

b) Từ công thức $\dfrac{a}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{\sqrt{925}}{\sqrt{3}}\approx 17,56$

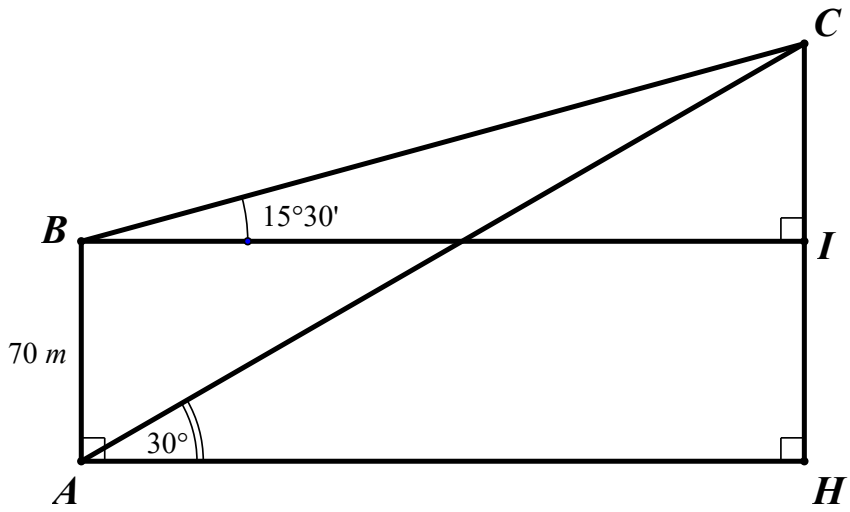
Từ công thức $S=pr$ với $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ta có $r=\dfrac{2S}{a+b+c}=\dfrac{bc\sin A}{a+b+c}=\dfrac{20.30.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{925}+20+35}\approx 7,10$

## Dạng 3. Áp dụng vào bài toán thực tiễn

**Câu 1.** Từ hai vị trí $A$ và $B$ của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh $C$ của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB=70\,m$, phương nhìn $AC$ tạo với phương nằm ngang một góc $30°$, phương nhìn $BC$ tạo với phương nằm ngang một góc $15°30'$ (như hình vẽ). Tính độ cao $CH$ của ngọn núi so với mặt đất.




***Lời giải***




**Cách 1:**

+ Ta có: $\tan\widehat{CAH}=\dfrac{CH}{AH}\Rightarrow AH=\dfrac{CH}{\tan 30°}$.

+ Lại có: $\tan\widehat{CBI}=\dfrac{CI}{BI}\Rightarrow BI=\dfrac{CI}{\tan 15°30'}=\dfrac{CH-70}{\tan 15°30'}$.

+ Do $AH=BI$ nên $\dfrac{CH}{\tan 30°}=\dfrac{CH-70}{\tan 15°30'}=\dfrac{70}{\tan 30°-\tan 15°30'}$.

+ Vậy $CH=\dfrac{70.\tan 30°}{\tan 30°-\tan 15°30'}\approx 134,7\,m$.

**Cách 2:**

+ Ta có: $\widehat{ABC}=90°+15°30'=105°30'$.

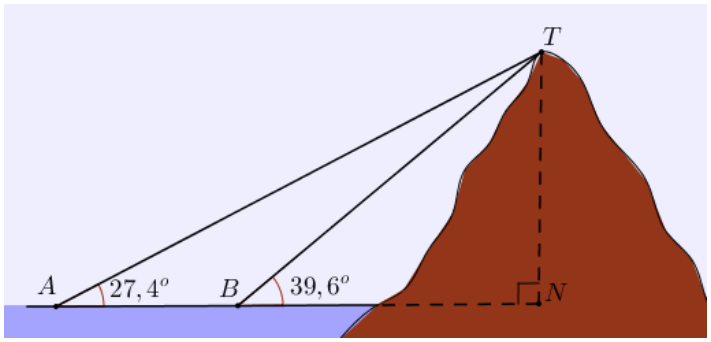
$\widehat{ACB}=180°-\widehat{ABC}-\widehat{BAC}=180°-60°-105°30'=14°30'$.

+ Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$, ta có:

$$\frac{AC}{\sin\widehat{ABC}}=\frac{AB}{\sin\widehat{ACB}}\Rightarrow AC=\frac{70.\sin 105°30'}{\sin 14°30'}.$$

+ Lại có: $\sin\widehat{CAH}=\dfrac{CH}{AC}\Rightarrow CH=AC.\sin 30°=\dfrac{70.\sin 105°30'}{\sin 14°30'}.\sin 30°\approx 134,7\,m$.

**Câu 2.** Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đèn tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Nếu các đèn tín hiệu cách nhau 1536 m thì ngọn núi cao bao nhiêu (tính gần đúng sau dấu phẩy hai chữ số)?




***Lời giải***

Ta có $\widehat{ATB}=\widehat{TBN}-\widehat{TAN}=12,2°$.

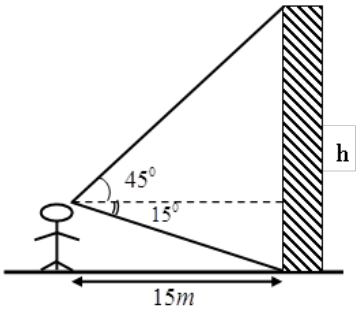
Áp dụng định lí sin cho tam giác $TAB$: $\dfrac{TB}{\sin\widehat{TAB}}=\dfrac{AB}{\sin\widehat{ATB}}\Rightarrow TB=\dfrac{AB.\sin\widehat{TAB}}{\sin\widehat{ATB}}$.

Xét tam giác vuông $TBN$ ta có:

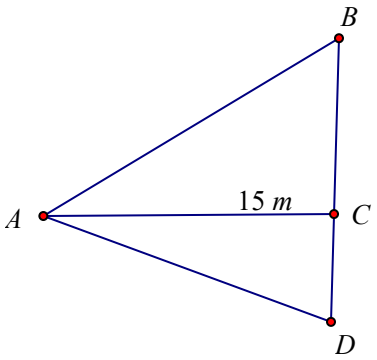
$$TN = TB.\sin\widehat{TBN} = \frac{AB.\sin\widehat{TAB}.\sin\widehat{TBN}}{\sin\widehat{ATB}} = \frac{1536.\sin 27,4°.\sin 39,6°}{\sin 12,2°} \approx 2132,14.$$

Vậy chiều cao ngọn núi xấp xỉ $2132,14$ m.

**Câu 3.** Một người quan sát đứng cách một cái tháp $15m$, nhìn thấy đỉnh tháp một góc $45^0$ và nhìn dưới chân tháp một góc $15^0$ so với phương nằm ngang như trong hình vẽ. Tính chiều cao $h$ của tháp.




***Lời giải***



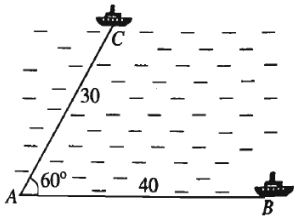

Ta có $BC = AC.\tan\widehat{BAC} = 15.\tan 45^0 = 15\ (m)$

$$CD = AC.\tan\widehat{DAC} = 15.\tan 15^0 = 15\left(2-\sqrt{3}\right)\ (m)$$

$$h = BD = BC + CD = 45 - 15\sqrt{3}\ (m).$$

Vậy chiều cao của tháp là $45-15\sqrt{3}\ (m)$.

**Câu 4.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí $A$, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc $60^0$. Tàu $B$ chạy với tốc độ $20$ hải lí một giờ. Tàu $C$ chạy với tốc độ $15$ hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?




***Lời giải***

Sau $2$ giờ tàu $B$ đi được $40$ hải lí, tàu $C$ đi được $30$ hải lí. Vậy tam giác $ABC$ có $AB = 40$, $AC = 30$ và $\widehat{A} = 60^0$.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác $ABC$, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A = 30^2 + 40^2 - 2.30.40.\cos 60^0 = 900 + 1600 - 1200 = 1300.$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lí).

Sau $2$ giờ, hai tàu cách nhau khoảng $36$ hải lí.

**Câu 5.** Vịnh Vân Phong – tỉnh Khánh Hòa nổi tiếng vì có con đường đi bộ xuyên biển nối từ Hòn Quạ đến đảo Điệp Sơn. Một du khách muốn chèo thuyền kayak từ vị trí $C$ trên Hòn Quạ đến vị trí $B$ trên Bè thay vì đi bộ xuyên qua con đường qua vị trí $A$ rồi mới đến vị trí $B$. Nếu người đó chèo thuyền với vận tốc không đổi là $4$ km/h thì sẽ mất bao nhiêu thời gian biết $AB = 0,4$ km, $AC = 0,6$ km và góc giữa $AB$ và $AC$ là $60^\circ$?




***Lời giải***

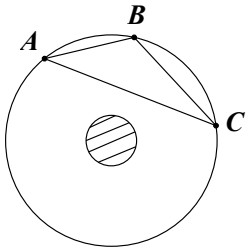
Áp dụng định lí Cô sin cho tam giác $ABC$ ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{A} = 0,28 \text{ km}.$$

Vậy thời gian du khách chèo thuyền từ $C$ đến $B$ là: $t = \dfrac{BC}{v} = \dfrac{0,28}{4} = 0,07$ giờ $= 4,2$ phút.

**Câu 6.** Trong một lần đi khảo sát các đảo thuộc quần đảo Trường Sa của Việt Nam, các nhà khoa học phát hiện có một đảo có dạng hình tròn, tâm của đảo này bị che bởi một bãi đá nhỏ mà các nhà khoa học không thể tới được. Các nhà khoa học muốn đo bán kính của đảo này, biết rằng các nhà khoa học chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài. Nêu cách để các nhà khoa học tính được bán kính đảo?

***Lời giải***




Lấy ba điểm $A$, $B$, $C$ khác nhau trên đường tròn (ở các điểm ngoài cùng của đảo). Đo độ dài các đoạn thẳng $BC = a$, $AC = b$, $AC = c$. Áp dụng công thức Hê-rông tính diện tích tam giác $ABC$.

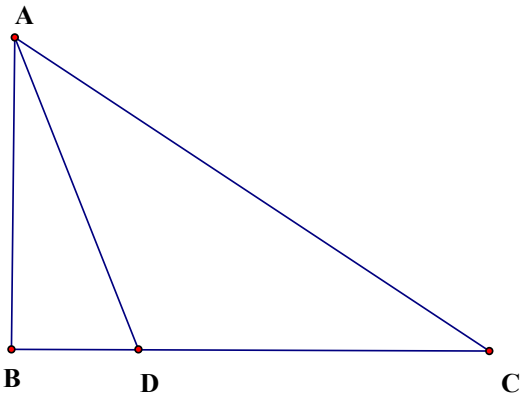
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Lại có: $S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{abc}{4S}$

Vậy bán kính của đảo được tính theo công thức: $R = \dfrac{abc}{4S}$.

**Câu 7.** Giả sử chúng ta cần đo chiều cao $AB$ của một tòa tháp với $B$ là chân tháp và $A$ là đỉnh tháp. Vì không thể đến chân tháp được nên từ hai điểm $C$ và $D$ có khoảng cách $CD = 30m$ sao cho ba điểm $B, C, D$ thẳng hàng người ta đo các góc $\widehat{BCA} = 43^\circ$ và góc $\widehat{BDA} = 67^\circ$. Hãy tính chiều cao $AB$ của tòa tháp

***Lời giải***




Trong tam giác $ACD$: có góc $\widehat{CAD} = 67° - 43° = 24°$

Áp dụng định lý sin trong tam giác $ACD$ ta có:

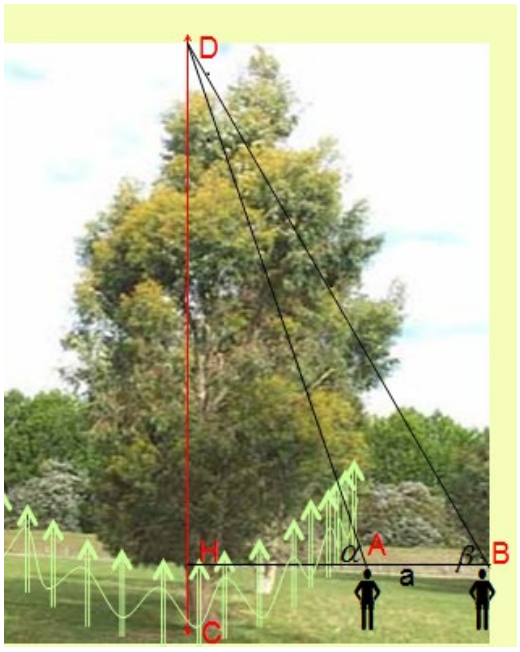
$$\frac{AD}{\sin 43°} = \frac{CD}{\sin 24°} \Rightarrow AD = \frac{30.\sin 43°}{\sin 24°} \simeq 50,30(m)$$

Trong tam giác vuông $BAD$ ta có $\sin 67° = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AB = 50,30.\sin 67° = 46,30(m)$

Vậy chiều cao của tòa tháp là $46,30(m)$

**Câu 8.** Trong tam giác vuông $AHC$ ta có $AH = AC.\cos\widehat{HAC} \approx 6,30.\cos 35° \approx 5,16$ (km).

Từ hai vị trí $A, B$ người ta quan sát một cái cây (hình vẽ). Lấy $C$ là điểm gốc cây, $D$ là điểm ngọn cây. $A, B$ cùng thẳng hàng với điểm $H$ thuộc chiều cao $CD$ của cây. Người ta đo được $AB = 10m$, $HC = 1,7m$, $\alpha = 63°$, $\beta = 48°$. Tính chiều cao của cây đó.




***Lời giải***

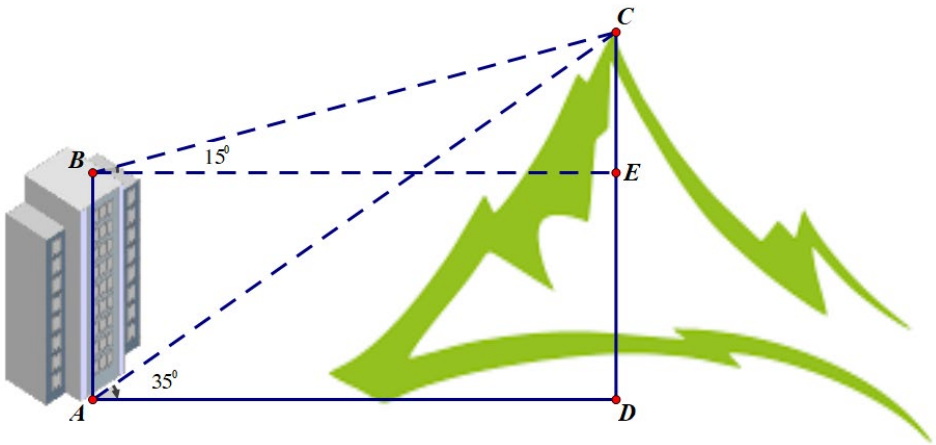
Ta có $\alpha = 63° \Rightarrow \widehat{BAD} = 117° \Rightarrow \widehat{ADB} = 180° - (117° + 48°) = 15°$

Áp dụng định lý sin trong tam giác $ABD$ ta có: $\frac{AB}{\sin\widehat{ADB}} = \frac{BD}{\sin\widehat{BAD}} \Rightarrow BD = \frac{AB.\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{ADB}}$

Tam giác $BHD$ vuông tại $H$ nên có: $\sin\widehat{HBD} = \frac{HD}{BD} \Rightarrow HD = BD.\sin\widehat{HBD}$

Vậy $HD = \frac{AB.\sin\widehat{BAD}.\sin\widehat{HBD}}{\sin\widehat{ADB}} = \frac{10.\sin 117°.\sin 48°}{\sin 15°} = 25,58m$.

**Câu 9.** Một người quan sát đỉnh của một ngọn núi nhân tạo từ hai vị trí khác nhau của tòa nhà. Lần đầu tiên người đó quan sát đỉnh núi từ tầng trệt với phương nhìn tạo với phương nằm ngang $35^0$ và lần thứ hai người này quan sát tại sân thượng của cùng tòa nhà đó với phương nằm ngang $15^0$ (như hình vẽ). Tính chiều cao ngọn núi biết rằng tòa nhà cao $60(m)$.




***Lời giải***

Ta có: $\widehat{CBA}=\widehat{CBE}+\widehat{EBA}=90^0+15^0=105^0$

$\widehat{BAC}=\widehat{BAD}-\widehat{CAD}=90^0-35^0=55^0\Rightarrow\widehat{BCA}=180^0-\left(\widehat{CBA}+\widehat{BAC}\right)=20^0$

Áp dụng định lý hàm sin cho $\Delta CBA$ ta có

$$\frac{AB}{\sin\left(\widehat{BCA}\right)}=\frac{AC}{\sin\left(\widehat{CBA}\right)}\Rightarrow AC=\frac{AB.\sin\left(\widehat{CBA}\right)}{\sin\left(\widehat{BCA}\right)}=\frac{60.\sin 105^0}{\sin 20^0}=169,4506909(m)$$

Xét $\Delta CAD$ vuông tại $D$, ta có $CD=AC.\sin\left(\widehat{CAD}\right)\approx 97,193(m)$.

## Dạng 4. Nhận dạng tam giác

**Câu 1.** Cho tam giác $ABC$. Chứng minh:

a) Góc $A$ nhọn $\Leftrightarrow a^2<b^2+c^2$;

b) Góc $A$ tù $\Leftrightarrow a^2>b^2+c^2$;

c) Góc $A$ vuông $\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$;

**Lời giải**

a) Góc $A$ nhọn $\Leftrightarrow \cos A>0\Leftrightarrow\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0\Leftrightarrow a^2<b^2+c^2$;

b) Góc $A$ tù $\Leftrightarrow \cos A<0\Leftrightarrow\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<0\Leftrightarrow a^2>b^2+c^2$;

c) Góc $A$ vuông $\Leftrightarrow \cos A=0\Leftrightarrow\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$

**Câu 2.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $a^3=b^3+c^3$. Chứng minh tam giác có ba góc nhọn.

**Lời giải**

Ta có $a^3=b^3+c^3$ nên $a$ là cạnh lớn nhất, suy ra $A$ là góc lớn nhất.

Ta chứng minh góc $A$ nhọn là đủ. Thật vậy, ta có:

$$a^3 = b^3 + c^3 = b \cdot b^2 + c \cdot c^2 < a \cdot b^2 + a \cdot c^2 = a\left(b^2 + c^2\right) \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \cos A > 0$$

Vậy ta suy ra góc $A$ nhọn, dẫn đến tam giác có ba góc nhọn.

**Câu 3.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh $ABC$ là tam giác nhọn.

**Lời giải**

Ta có $a^4 = b^4 + c^4$ nên $a$ là cạnh lớn nhất, suy ra $A$ là góc lớn nhất.

Ta chứng minh góc $A$ nhọn là đủ. Thật vậy, ta có:

$$a^4 = b^4 + c^4 = \left(b^2 + c^2\right)^2 - 2b^2c^2 < \left(b^2 + c^2\right)^2 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \cos A > 0$$

Vậy ta suy ra góc $A$ nhọn, dẫn đến $ABC$ là tam giác nhọn.

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $\sin A = 2\sin B \cdot \cos C$. Chứng minh $ABC$ là tam giác cân.

**Lời giải**

Ta có $\sin A = 2\sin B \cdot \cos C \Leftrightarrow \dfrac{a}{2R} = 2 \cdot \dfrac{b}{2R} \cdot \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c$

Vậy $ABC$ là tam giác cân tại $A$.

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$ có cạnh $a = 2\sqrt{3}, b = 2, C = 30°$. Chứng minh $ABC$ là tam giác cân. Tính diện tích và chiều cao $h_a$ của tam giác.

**Lời giải**

Theo định lý cosin ta có $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 12 + 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4$

Do đó $c = 2 = b$ nên tam giác $ABC$ cân tại $A$ có góc $B = C = 30°$.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}ac\sin B = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} = \sqrt{3}$, $h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$.

**Câu 6.** Xét dạng tam giác $ABC$ thoả mãn $\dfrac{1+\cos B}{\sin B} = \dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$.

**Lời giải**

Ta có

$$\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{4a^2 - c^2} \Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2a+c}{2a-c} \Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} - 1 = \frac{2a+c}{2a-c} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2ac \cdot \cos B = c^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$$

Vậy tam giác $ABC$ cân tại $C$.

**Câu 7.** Cho tam giác $ABC$ có chiều cao $h_a = \sqrt{p(p-a)}$ .Chứng minh $ABC$ là tam giác cân.

**Lời giải**

Ta có $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ nên

$h_a=\sqrt{p(p-a)}\Leftrightarrow 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=a\sqrt{p(p-a)}\Leftrightarrow 2\sqrt{(p-b)(p-c)}=a$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $2\sqrt{(p-b)(p-c)}\le (p-b)+(p-c)=2p-b-c=a$.

Do đó dấu đẳng thức xảy ra nên $p-b=p-c\Leftrightarrow b=c$.

Vậy tam giác $ABC$ cân tại $A$.

**Câu 8.** Chứng minh tam giác $ABC$ vuông tại $A$ khi và chỉ khi $5m_a^2=m_b^2+m_c^2$.

**Lời giải**

Áp dụng định lý trung tuyến ta có:

$$5m_a^2=m_b^2+m_c^2\Leftrightarrow 5\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow 5\left(2b^2+2c^2\right)-5a^2=2\left(a^2+c^2\right)-b^2+2\left(a^2+b^2\right)-c^2\Leftrightarrow 9b^2+9c^2=9a^2\Rightarrow b^2+c^2=a^2$$

Vậy $ABC$ là tam giác vuông tại $A$.

**Câu 9.** Cho tam giác $ABC$ có bán kính đường tròn nội tiếp bằng $r$ và các bán kính đường tròn bàng tiếp các góc $A,B,C$ tương ứng bằng $r_a,r_b,r_c$. Chứng minh rằng nếu $r=r_a-r_b-r_c$ thì góc $A$ là góc vuông.

**Lời giải**

Ta có $r_a=\frac{S}{p-a}$, tương tự $r_b=\frac{S}{p-b}$, $r_c=\frac{S}{p-c}$.

Mặt khác từ công thức diện tích có $r=\frac{S}{p}$.

Từ giả thiết suy ra $\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p}=\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\Rightarrow\frac{a}{p(p-a)}=\frac{2p-(b+c)}{(p-b)(p-c)}$.

Vì

$2p-(b+c)=a\Rightarrow p(p-a)=(p-b)(p-c)$;

$pa=p(p+c)-bc\Rightarrow bc=p(b+c-a)=\frac{b+c+a}{2}(b+c-a)$

$\Rightarrow 2bc=(b+c)^2-a^2\Rightarrow b^2+c^2-a^2=0\Rightarrow a^2=b^2+c^2$

Theo định lý Pitago ta có $\widehat{A}=90°$.

**Câu 10.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2$. Chứng minh góc $C=60°$.

**Lời giải**

Ta có $\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2\Rightarrow a^3+b^3-c^3=(a+b)c^2-c^3$

Suy ra $a^3+b^3=(a+b)c^2 \Rightarrow a^2-ab+b^2=c^2$

$\Rightarrow a^2-ab+b^2=a^2+b^2-2ab\cos C \Rightarrow \cos C=\frac{1}{2} \Rightarrow C=60^{\circ}$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

**Câu 11.** Cho tam giác $ABC$ biết $a=7,\ b=8,\ c=5$. Chứng minh tam giác $ABC$ có góc $60°$

**Lời giải**

Ta có $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{64+25-49}{2\cdot 8\cdot 5}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2} \Rightarrow A=60°$.

**Câu 12.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $c^4-2\left(a^2+b^2\right)c^2+a^4+a^2b^2+c^4=0$. Chứng minh tam giác $ABC$ có góc $60°$ hoặc $120°$.

**Lời giải**

Xét đẳng thức đã cho là phương trình bậc 2 theo $t=c^2$.

Ta có: $\Delta'=\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a^4+a^2b^2+c^4\right)=a^2b^2$.

Do đó $c^2=a^2+b^2\pm ab \Rightarrow a^2+b^2+2ab\cos C=a^2+b^2\pm 2ab$.

Suy ra $\cos C=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow C=60°$ hay $120°$.

**Câu 13.** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $a+b+c=2\left(a\cos A+b\cos B+c\cos C\right)$. Chứng minh tam giác $ABC$ đều.

**Lời giải**

Ta có $a=b\cos C+c\cos B, b=c\cos A+a\cos C, c=a\cos B+b\cos A$ nên điều kiện đã cho tương đương với $(a-b)(\cos A-\cos B)+(b-c)(\cos B-\cos C)+(c-a)(\cos C-\cos A)=0$.

Ta chứng minh $(a-b)(\cos A-\cos B)\le 0$, dấu "=" khi $a=b$.

Xét $a=b$ thì bất đẳng thức đúng.

Xét $a>b$ thì $A>B \Rightarrow \cos A<\cos B \Rightarrow (a-b)(\cos A-\cos B)<0$.

Xét $a<b$ thì $A<B \Rightarrow \cos A>\cos B \Rightarrow (a-b)(\cos A-\cos B)<0$.

Tương tự thì $(b-c)(\cos B-\cos C)\le 0$ và $(c-a)(\cos C-\cos a)\le 0$.

Do đó dấu đẳng thức đồng thời xảy ra nên $a=b=c$. Vậy tam giác $ABC$ đều.

**Câu 14.** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{A}=60°, a=10, r=\frac{5\sqrt{3}}{3}$. Chứng minh tam giác $ABC$ đều.

**Lời giải**

Gọi $M, N, P$ lần lượt là các tiếp điểm của $BC, CA, CA$ với đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$

Ta có $AP = AN = r \cdot \cot 30^\circ = 5$ và $BP + NC = BM + MC = a = 10$.

Từ đó ta có $(b - AN) + (c - AP) = 10$ hay $b + c = 20$.

Theo định lý cô-sin ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^\circ$ hay $a^2 = (b+c)^2 - 2bc - bc$.

Suy ra $bc = \dfrac{(b+c)^2 - a^2}{3} = \dfrac{20^2 - 10^2}{3} = 100$.

Mà $b + c = 20$ nên $b, c$ là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 20x + 100 = 0$.

Phương trình này có nghiệm kép $b = c = 10$ nên $ABC$ là tam giác đều.

**Câu 15.** Xét tam giác $ABC$ thỏa mãn $\dfrac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2$ và $\sin A.\sin C = \dfrac{3}{4}$.

**Lời giải**

Ta có $\dfrac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2 \Rightarrow a^3 + c^3 - b^3 = (a+c)b^2 - b^3$.

$\Rightarrow a^3 + c^3 = (a+c)b^2 \Rightarrow a^2 - ac + c^2 = b^2$.

$\Rightarrow a^2 - ac + c^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B = 60°$

Do đó $\sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin^2 B = \dfrac{3}{4}$ nên $\sin A.\sin C = \dfrac{3}{4} = \sin^2 B \Rightarrow \dfrac{a}{2R} \cdot \dfrac{c}{2R} = \left(\dfrac{b}{2R}\right)^2$

$\Rightarrow ac = b^2 \Rightarrow ac = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = a^2 + c^2 - ac$

$\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow (a - c)^2 = 0 \Rightarrow a = c.$

Vậy $ABC$ là tam giác cân và có góc $60°$ nên là tam giác đều.

**Câu 16.** Chứng minh điều kiện cần và đủ để tam giác $ABC$ đều là $m_a + m_b + m_c = \dfrac{9}{2}R.$

**Lời giải**

Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$ và $M$ là một điểm tùy ý.

Ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM}\right)^2$

$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2 - 2\overrightarrow{GM}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)$

$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2 + 3\overrightarrow{GM} \geq GA^2 + GB^2 + GC^2.$

Ta có $(x + y + z)^2 \leq 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$

Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh, với mọi điểm $M$, ta có

$$\left(m_a+m_b+m_c\right)^2=\frac{9}{4}\left(GA+GB+GC\right)^2\le\frac{9}{4}\cdot3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)\le\frac{27}{4}\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)$$

Thay $M$ bởi tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp, ta được

$$\left(m_a+m_b+m_c\right)^2\le\frac{27}{4}\cdot3R^2=\frac{81}{4}R^2.$$

Suy ra $m_a+m_b+m_c\le\frac{9}{2}R.$

Vậy nếu $ABC$ là tam giác đều thì có $m_a+m_b+m_c=\frac{9}{2}R.$ (1)

Ngược lại nếu giả sử tam giác $ABC$ thỏa mãn điều kiện (1). Thay điểm $M$ bằng tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp $ABC$, ta có $3R^2=\frac{4}{9}\left(m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2\right)+3OG^2.$

Suy ra $\frac{81}{4}R^2=3\left(m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2\right)+\frac{81}{4}OG^2\ge\left(m_a+m_b+m_c\right)^2+\frac{81}{4}OG^2.$

Do đó $\frac{81}{4}R^2\ge\frac{81}{4}R^2+\frac{81}{4}OG^2\Rightarrow OG^2=0$ hay $O\equiv G.$

Vậy $ABC$ là tam giác đều.

**Câu 17.** Cho tam giác $ABC$ thỏa mãn $\sin C=2\sin B\cos A.$ Chứng minh rằng tam giác $ABC$ cân.

**Lời giải**

Áp dụng định lí cô-sin và sin ta có

$$\sin C=2\sin B\cos A\Leftrightarrow\frac{c}{2R}=2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Leftrightarrow c^2=b^2+c^2-a^2\Leftrightarrow a=b.$$

Suy ra tam giác $ABC$ cân tại đỉnh $C.$

**Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ thỏa mãn $\sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}.$ Chứng minh rằng tam giác $ABC$ vuông.

**Lời giải**

Ta có $\sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}\Leftrightarrow\sin A\left(\cos B+\cos C\right)=\sin B+\sin C$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{2R}\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=\frac{b+c}{2R}\Leftrightarrow b\left(c^2+a^2-b^2\right)+c\left(a^2+b^2-c^2\right)=2b^2c+2c^2b$$

$$\Leftrightarrow b^3+c^3+b^2c+bc^2-a^2b-a^2c=0$$

$$\Leftrightarrow\left(b+c\right)\left(b^2+c^2\right)-a^2\left(b+c\right)=0\Leftrightarrow b^2+c^2=a^2.$$

Vậy tam giác $ABC$ vuông tại $A$.

**Câu 19.** Nhận dạng tam giác $ABC$ trong các trường hợp sau:

a) $a\sin A+b\sin B+c\sin C=h_a+h_b+h_c$.

b) $\dfrac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}\left(\cot^2 A+\cot^2 B\right)$.

**Lời giải**

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ah_a$ suy ra

$$a\sin A+b\sin B+c\sin C=h_a+h_b+h_c \Leftrightarrow a\cdot\frac{2S}{bc}+b\cdot\frac{2S}{ca}+c\cdot\frac{2S}{ab}=\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\Leftrightarrow a=b=c.$$

Vậy tam giác $ABC$ đều.

b) Ta có

$$\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\cot^2 A+\cot^2 B\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A+\cos^2 B+\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\cot^2 A+1+\cot^2 B+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)^2=4\sin^2 A\sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A=\sin^2 B\Leftrightarrow\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2\Leftrightarrow a=b.$$

Vậy tam giác $ABC$ cân tại $C$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Đường trung tuyến

**Câu 1.** Tam giác $ABC$ có $AB=9$ cm, $BC=15$ cm, $AC=12$ cm. Khi đó đường trung tuyến $AM$ của tam giác có độ dài là

**A.** 10 cm. **B.** 9 cm. **C.** 7,5 cm. **D.** 8 cm.

**Lời giải**

**Chọn C**

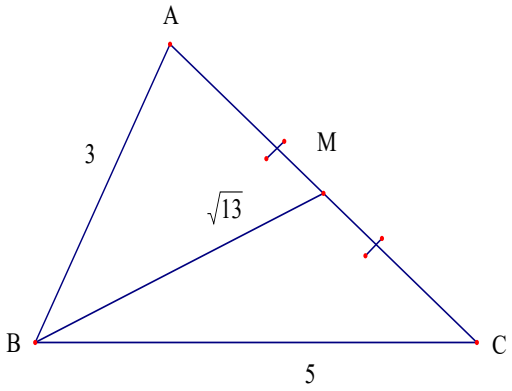
Ta có $AM^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=\dfrac{9^2+12^2}{2}-\dfrac{15^2}{4}=\dfrac{225}{4}\Rightarrow AM=\dfrac{15}{2}$.

**Câu 2.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=3, BC=5$ và độ dài đường trung tuyến $BM=\sqrt{13}$. Tính độ dài $AC$.

**A.** $\sqrt{11}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến;ta có:

$BM^2 = \dfrac{BA^2 + BC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{13}\right)^2 = \dfrac{3^2 + 5^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4} \Leftrightarrow AC = 4.$

**Câu 3.** Cho $\Delta ABC$ vuông ở $A$, biết $\widehat{C} = 30°$, $AB = 3$. Tính độ dài trung tuyến $AM$ ?

**A.** 3 **B.** 4 **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{7}{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$AM$ là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $AM = \dfrac{1}{2}BC = BM = MC$.

Xét $\Delta BAC$ có $\widehat{B} = 90° - 30° = 60°$.

Xét tam giác $ABM$ có $BM = AM$ và $\widehat{B} = 60°$ suy ra $\Delta ABM$ là tam giác đều.

$\Rightarrow AM = AB = 3$.

**Câu 4.** Tam giác $ABC$ có $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$. $M$ là điểm trên cạnh $BC$ sao cho $BM = 3$. Độ dài đoạn $AM$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\sqrt{9}$. **B.** 9. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{108}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: Trong tam giác $ABC$ có $a = 6 \Rightarrow BC = 6$ mà $BM = 3$ suy ra $M$ là trung điểm $BC$.

Suy ra: $AM^2 = m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = 9 \Rightarrow AM = 3$.

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$ có góc $C$ nhọn, $AH$ và $BK$ là hai đường cao, $HK = \sqrt{7}$, diện tích tứ giác $ABHK$ bằng 7 lần diện tích ta giác $CHK$. Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ bằng

**A.** 4. **B.** 7. **C.** 8. **D.** $\sqrt{14}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

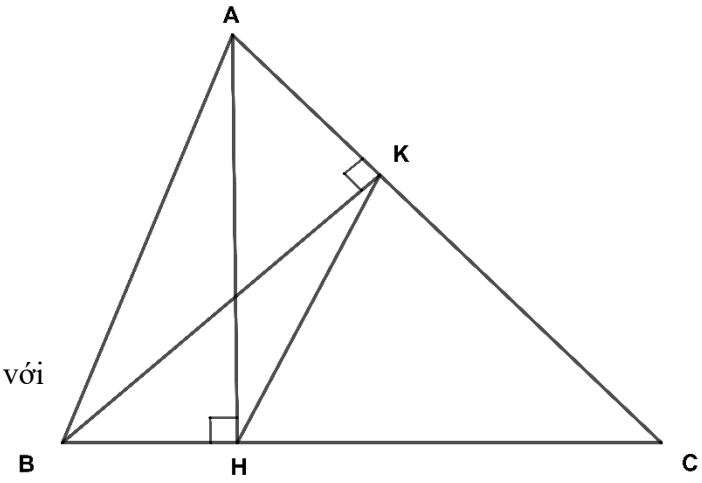
Ta có $S_{ABHK} = 7S_{CHK} \Rightarrow S_{ABC} = 8S_{CHK}$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CHK}}=\frac{\frac{1}{2}CA.CB.\sin C}{\frac{1}{2}CK.CH.\sin C}=\frac{CA.CB}{CK.CH}=8 \quad (1)$$

$\Delta AHC$ vuông tại $H$, ta có $\cos C=\frac{CH}{CA}$ (2)

$\Delta BKC$ vuông tại $K$, ta có $\cos C=\frac{CK}{CB}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $\cos^2 C=\frac{1}{8}$




Ta có $\Delta HCK$ đồng dạng với $\Delta ACB \Rightarrow \frac{HK}{AB}=\frac{CH}{AC}=\cos C=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow AB=2\sqrt{2}HK=2\sqrt{14}$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là:

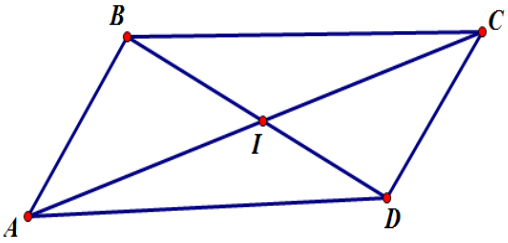
$$R=\frac{AB}{2\sin C}=\frac{AB}{2\sqrt{1-\cos^2 C}}=\frac{2\sqrt{14}}{2\sqrt{1-\frac{1}{8}}}=4.$$

**Câu 6.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=4\,cm;\ BC=5\,cm;BD=7\,cm$. Độ dài đoạn $AC$ bằng bao nhiêu $cm$ ? (Tính chính xác đến hàng phần trăm)

**A.** $6,25(cm)$. **B.** $5,74(cm)$. **C.** $5,67(cm)$. **D.** $5,93(cm)$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $I$ là giao điểm của $AC$ và $BD$.

Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến trong tam giác $ABD$ ta có

$$AI^2=\frac{AB^2+AD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}\Leftrightarrow AI^2=\frac{4^2+5^2}{2}-\frac{7^2}{4}\Leftrightarrow AI^2=\frac{33}{4}\Rightarrow AI=\frac{\sqrt{33}}{2}(cm)$$

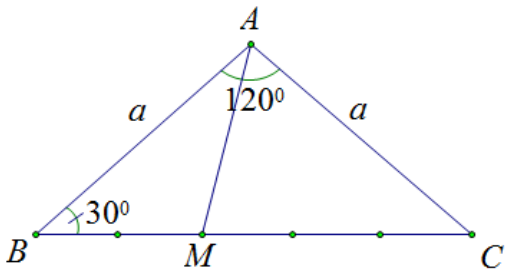
$$\Rightarrow AC=2AI=2.\frac{\sqrt{33}}{2}\approx 5,74(cm).$$

**Câu 7.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ biết $\widehat{A}=120°$ và $AB=AC=a$. Lấy điểm $M$ trên cạnh $BC$ sao cho $BM=\frac{2}{5}BC$. Tính độ dài $AM$.

**A.** $AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $AM=\frac{11a}{5}$. **C.** $AM=\frac{a\sqrt{7}}{5}$. **D.** $AM=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




+ Áp dụng định lí cosin trong $\Delta ABC$, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos 120° = a^2 + a^2 - 2a.a.\left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2$$

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{3} \Rightarrow BM = \frac{2a\sqrt{3}}{5}.$$

+ Áp dụng định lí cosin trong $\Delta ABM$, ta có:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos 30° = a^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 2a.\frac{2a\sqrt{3}}{5}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7a^2}{25}.$$

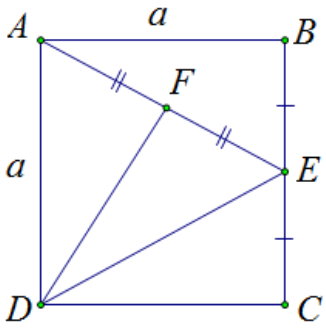
$$\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{7}}{5}.$$

**Câu 8.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $a$. Gọi $E$ là trung điểm cạnh $BC$ và $F$ là trung điểm cạnh $AE$. Tính độ dài đoạn thẳng $DF$.

**A.** $DF = \frac{a\sqrt{13}}{4}$. **B.** $DF = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $DF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $DF = \frac{3a}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Vì $ABCD$ là hình vuông và $E$ là trung điểm của $BC$ nên $AE = DE = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Áp dụng công thức độ dài trung tuyến trong tam giác $DAE$, ta có

$$DF^2 = \frac{DA^2 + DE^2}{2} - \frac{AE^2}{4} = \frac{a^2 + \frac{5a^2}{4}}{2} - \frac{5a^2}{16} = \frac{13a^2}{16} \Rightarrow DF = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

**Câu 9.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ có cạnh bên bằng $a$ và nội tiếp đuờn tròn $\left(O;\sqrt{3}\right)$. Để diện tích tam giác lớn nhất thì $\hat{B}$ bằng

**A.** $90°$. **B.** $120°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

**Lời giải**

Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ lên cạnh $BC$.

Áp dụng định lí Pitago vào $\triangle ABH$ vuông tại $H$ có: $AH^2 + BH^2 = AB^2$

Xét $\triangle ABC$ có $\sin B = \frac{AH}{AB}$, $\cos B = \frac{BH}{AB}$

$\sin^2 B+\cos^2 B=\left(\frac{AH}{AB}\right)^2+\left(\frac{BH}{AB}\right)^2=\frac{AB^2}{AB^2}=1$

Do $\triangle ABC$ cân tại A nên $\hat{B}=\hat{C}<90°$

Ta có $\sin B=\frac{AC}{2R}=\frac{a}{2\sqrt{3}}\Rightarrow \cos \mathrm{B}=\cos \mathrm{C}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4\left(\sqrt{3}\right)^2}}$

$S=\frac{1}{2}BC.AH=\frac{1}{2}.2a\cos B.a\sin B=\frac{a^3\sqrt{4\left(\sqrt{3}\right)^2-a^2}}{4\left(\sqrt{3}\right)^2}$

Áp dụng BĐT Cauchy cho bốn số không âm ta có

$3\sqrt{3}\sqrt{\frac{a^2}{3}.\frac{a^2}{3}.\frac{a^2}{3}.\left(4\left(\sqrt{3}\right)^2-a^2\right)}\le 3\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{\frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\left(4R^2-b^2\right)}{4}\right)^4}=3\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)^4$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a^2}{3}=4\left(\sqrt{3}\right)^2-a^2\Leftrightarrow a=3$.

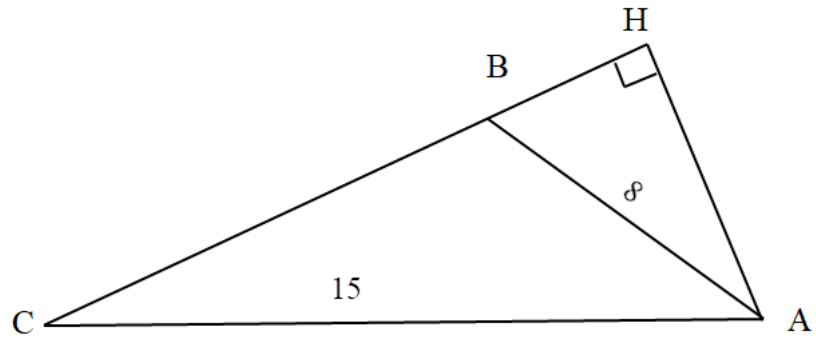
Suy ra $\sin B=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \hat{B}=60°$

Vậy $\hat{B}=60°$.

**Câu 10.** Cho tam giác $ABC$ có $AC=8;AB=15;\cos A=\frac{4}{5}$. Độ dài đường cao $AH$ bằng:

**A.** $\frac{72}{\sqrt{79}}$. **B.** $\frac{72}{97}$. **C.** $\frac{\sqrt{72}}{97}$. **D.** $\frac{72}{\sqrt{97}}$.

**Lời giải**




+ Theo định lí côsin ta có: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A=97\Rightarrow BC=\sqrt{97}$.

+ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A$.

Ta có: $\sin^2 A=1-\cos^2 A=\frac{9}{25}$. Vì $\sin A>0\Rightarrow \sin A=\frac{3}{5}$.

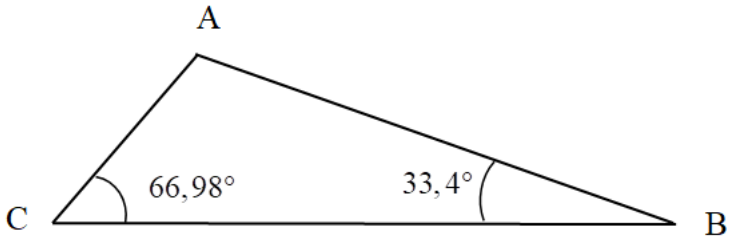
$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=36$.

Ta có $AH=\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}=\frac{72}{\sqrt{97}}$. Vậy $AH=\frac{72}{\sqrt{97}}$.

**Câu 11.** Cho tam giác $ABC$ có $a=109$, $\hat{B}=33°24'$, góc $\hat{C}=66°59'$. Chu vi tam giác $ABC$ gần bằng số nào sau đây?

**A.** 136. **B.** 227. **C.** 272. **D.** 372.

**Lời giải**




109

Ta có: $\widehat{B}=33°24'=33,4°$, $\widehat{C}=66°59'\approx 66,98°\Rightarrow \widehat{A}\approx 79,62°$.

Áp dụng định lý sin ta có $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow b=\frac{\text{a}.\sin\text{B}}{\sin A}\approx 61$.

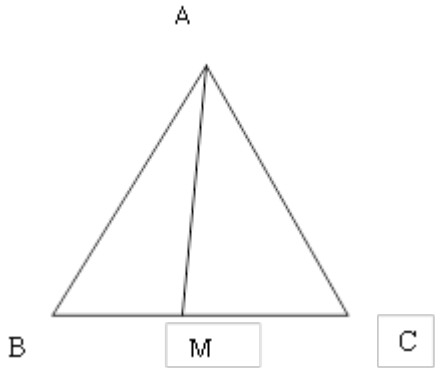
Tương tự ta có $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin\text{C}}\Rightarrow c=\frac{\text{a}.\sin\text{C}}{\sin A}\approx 102$.

Chu vi tam giác $ABC$ là: $2p=a+b+c\approx 109+61+102=272$.

**Câu 12.** Cho $\Delta ABC$ có $AB=2$; $AC=3$; $\widehat{A}=60°$. Tính độ dài đường phân giác trong góc $A$ của tam giác $ABC$.

**A.** $\frac{12}{5}$. **B.** $\frac{6\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\frac{6\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

**Lời giải**




Gọi $M$ là chân đường phân giác góc $A$.

Ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A=7\Rightarrow BC=\sqrt{7}$.

Lại có $\frac{BM}{CM}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{3}$.

Suy ra $BM=\frac{2\sqrt{7}}{5}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác $ABM$ ta được:

$$AM^2=AB^2+BM^2-2AB.BM.\cos\widehat{ABC}=AB^2+BM^2-2AB.BM.\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2.AB.BC}=\frac{108}{25}.$$

$$\Rightarrow AM=\frac{6\sqrt{3}}{5}.$$

**Câu 13.** Cho tam giác $ABC$, có $m_a=\frac{\sqrt{151}}{2}$, (với $m_a$ là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh $A$ và các cạnh $AC=8$, $AB=6$. Tính độ dài $BC$.

**A.** $a=6$. **B.** $a=9$. **C.** $a=49$. **D.** $a=7$.

**Lời giải**

Đặt: $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Ta có:

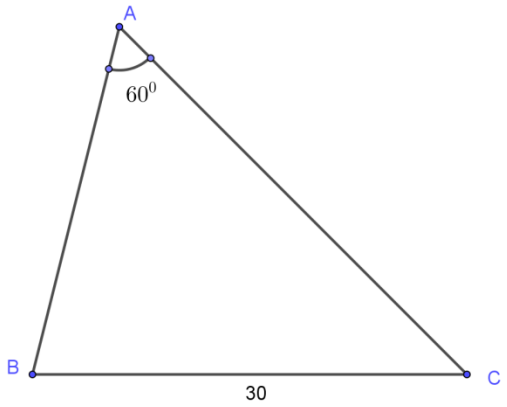
$$m_a^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}\Rightarrow a=\sqrt{2\left(b^2-c^2\right)-4m_a^2}=\sqrt{2\left(8^2+6^2\right)-151}=7.$$

**Câu 14.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=60°$,cạnh $a=30$ bán kính đường tròn nội tiếp $r=5\sqrt{3}$. Tính tổng độ dài hai cạnh còn lại $b,c$ của tam giác $ABC$.

**A.** 30. **B.** 60. **C.** 50. **D.** 90.

**Lời giải**

***guyên***




Áp dụng định lý cosin vào tam giác $ABC$ ta có

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Leftrightarrow 900=b^2+c^2-bc\Leftrightarrow (b+c)^2-3bc=900$ (1)

Lại có $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{a+b+c}{2}r\Leftrightarrow\frac{bc\sqrt{3}}{2}=(30+b+c)5\sqrt{3}\Leftrightarrow bc=300+10(b+c)$ (2)

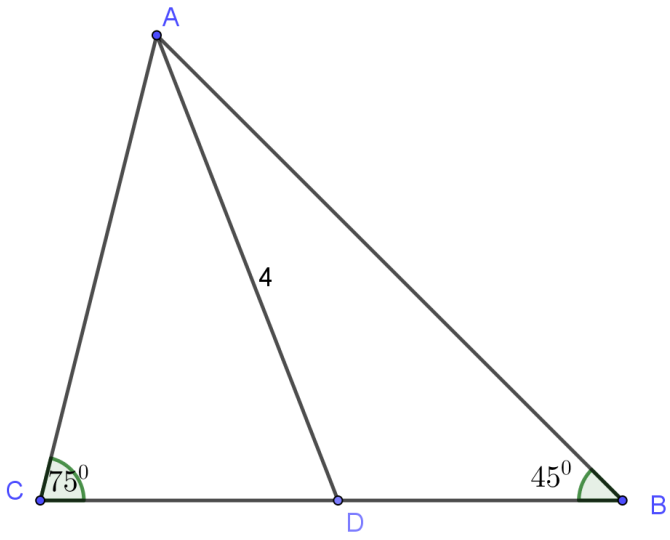
Thay (2) vào (1) ta có $(b+c)^2-30(b+c)-900=900\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b+c=60(tm)\\b+c=-30(l)\end{array}\right.$

Vậy $b+c=60$.

**Câu 15.** Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{B}=45°,\widehat{C}=75°$ và phân giác trong $AD=4$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

**A.** $\sqrt{6}-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. **C.** $-4+4\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

**Lời giải**




Ta có $\widehat{A}=180^0-\widehat{B}-\widehat{C}=60^0$, $\widehat{ADB}=\widehat{C}+\widehat{DAC}=105°$

Áp dụng định lý sin vào tam giác $ADB$

$$\frac{AB}{\sin\widehat{ADB}}=\frac{AD}{\sin\widehat{ABD}}\Rightarrow AB=\frac{\sin\widehat{ADB}}{\sin\widehat{ABD}}.AD=\frac{\sin 105^\circ}{\sin 45^\circ}.4=2+2\sqrt{3}.$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là:

$$R=\frac{AB}{2\sin C}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2\sin 75^0}=2\sqrt{2}.$$

**Câu 16.** Tam giác $ABC$ có $\cos(\mathrm{A}+\mathrm{B})=-\frac{1}{5}$, $AC=6$, $BC=5$. Tính độ dài cạnh $AB$.

**A.** $\sqrt{73}$. **B.** $8$. **C.** $\sqrt{55}$. **D.** $7$.

**Lời giải**

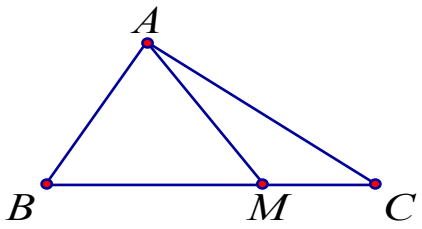
Vì trong tam giác $ABC$ ta có $A+B$ bù với góc $C$ nên

$$\cos(A+B)=-\frac{1}{5}\Rightarrow\cos C=\frac{1}{5}\ AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AB.BC.\cos C}=\sqrt{6^2+5^2-2.6.5.\frac{1}{5}}=7.$$

**Câu 17.** Tam giác $ABC$ có $BC=12, CA=9, AB=6$. Trên cạnh $BC$ lấy điểm $M$ sao cho $BM=8$. Tính độ dài đoạn thẳng $AM$.

**A.** $\sqrt{94}$. **B.** $\sqrt{106}$. **C.** $\sqrt{166}$. **D.** $\sqrt{34}$.

**Lời giải**



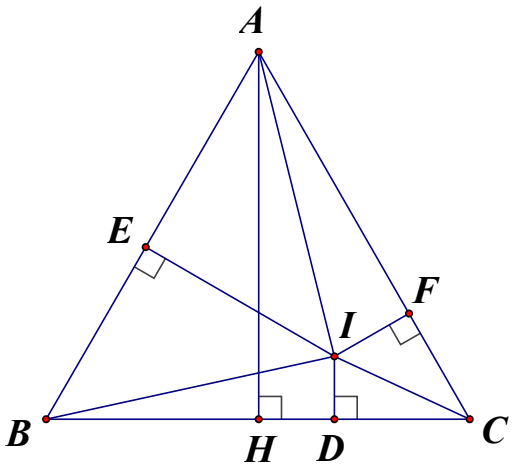

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB.BC}=\frac{6^2+12^2-9^2}{2.6.12}=\frac{11}{16}$$

$$AM=\sqrt{AB^2+BM^2-2AB.BM.\cos\mathrm{B}}=\sqrt{6^2+8^2-2.6.8.\frac{11}{16}}=\sqrt{34}.$$

**Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $2a$. Một điểm $I$ bất kì thuộc miền trong tam giác $ABC$. Tính tổng khoảng cách từ điểm $I$ đến ba cạnh của tam giác?

**A.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

**Lời giải**




Gọi $D$, $E$, $F$ lần lượt là hình chiếu của $I$ trên các cạnh $BC$, $AB$, $AC$.

Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ trên $BC$. Khi đó:

$S_{ABC}=S_{ABI}+S_{ACI}+S_{BCI}\Leftrightarrow\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}IE.AB+\frac{1}{2}IF.AC+\frac{1}{2}ID.BC$

$\Leftrightarrow AH.BC=(ID+IE+IF).BC$ (Do $ABC$ là tam giác đều nên $AB=AC=BC$)

$\Leftrightarrow ID+IE+IF=AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=a\sqrt{3}$.

Vậy tổng khoảng cách từ điểm $I$ đến các cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

**Câu 19.** Tam giác ABC có trọng tâm G. Hai trung tuyến $BM=6, CN=9$ và $\widehat{BGC}=120^\circ$. Tính độ dài cạnh AB.

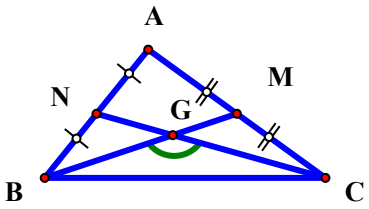
**A.** $AB=\sqrt{11}$. **B.** $AB=\sqrt{13}$. **C.** $AB=2\sqrt{11}$. **D.** $AB=2\sqrt{13}$.

**Lời giải**

Ta có: $\widehat{BGC}$ và $\widehat{BGN}$ là hai góc kề bù mà $\widehat{BGC}=120^\circ\Rightarrow\widehat{BGN}=60^\circ$

G là trọng tâm của tam giác $\Delta ABC$

$\Rightarrow\begin{cases}BG=\frac{2}{3}BM=4.\\ GN=\frac{1}{3}CN=3.\end{cases}$




Trong tam giác $\Delta BGN$ ta có:

$BN^2=GN^2+BG^2-2GN.BG.\cos\widehat{BGN}$

$\Rightarrow BN^2=9+16-2.3.4.\frac{1}{2}=13\Rightarrow BN=\sqrt{13}.$

N là trung điểm của $AB\Rightarrow AB=2BN=2\sqrt{13}.$

## Dạng 2. Diện tích tam giác

**Câu 20.** Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

**A.** $S=\frac{1}{2}bc\sin A$. **B.** $S=\frac{1}{2}ac\sin A$. **C.** $S=\frac{1}{2}bc\sin B$. **D.** $S=\frac{1}{2}bc\sin B$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$.

**Câu 21.** Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng $a$. Góc $\widehat{BAD}=30^\circ$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

**A.** $\frac{a^2}{4}$. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a^2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $S_{ABCD}=AB.AD.\sin\widehat{BAD}=a.a.\sin 30^\circ=\frac{1}{2}a^2$.

**Câu 22.** Tính diện tích tam giác $ABC$ biết $AB=3, BC=5, CA=6$.

**A.** $\sqrt{56}$. **B.** $\sqrt{48}$. **C.** $6$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $p=\dfrac{AB+AC+BC}{2}=\dfrac{3+5+6}{2}=7$.

Vậy diện tích tam giác $ABC$ là:

$S=\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}=\sqrt{7(7-3)(7-6)(7-5)}=\sqrt{56}$.

**Câu 23.** Cho $\Delta ABC$ có $a=6,b=8,c=10$. Diện tích $S$ của tam giác trên là:

**A.** 48. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 30.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: Nửa chu vi $\Delta ABC$: $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Áp dụng công thức Hê-rông: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}=24$.

**Câu 24.** Cho $\Delta ABC$ có $a=4,c=5,B=150^0$. Diện tích của tam giác là:

**A.** $5\sqrt{3}$. **B.** 5. **C.** 10. **D.** $10\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}a.c.\sin B=\dfrac{1}{2}.4.5.\sin 150^0=5.$

**Câu 25.** Một tam giác có ba cạnh là $13,14,15$. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

**A.** 84. **B.** $\sqrt{84}$. **C.** 42. **D.** $\sqrt{168}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{13+14+15}{2}=21$.

Suy ra: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=84$.

**Câu 26.** Cho các điểm $A(1;-2),B(-2;3),C(0;4)$. Diện tích $\Delta ABC$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\dfrac{13}{2}$. **B.** 13. **C.** 26. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;5)\Rightarrow AB=\sqrt{34}$, $\overrightarrow{AC}=(-1;6)\Rightarrow AC=\sqrt{37}$, $\overrightarrow{BC}=(2;1)\Rightarrow BC=\sqrt{5}$.

Mặt khác $p=\dfrac{AB+AC+BC}{2}=\dfrac{\sqrt{37}+\sqrt{34}+\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra: $S=\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}=\frac{13}{2}$.

**Câu 27.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;-1),B(3;-3),C(6;0)$. Diện tích $\Delta ABC$ là

**A.** 12. **B.** 6. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-2)\Rightarrow AB=2\sqrt{2}$, $\overrightarrow{AC}=(5;1)\Rightarrow AC=\sqrt{26}$, $\overrightarrow{BC}=(3;3)\Rightarrow BC=3\sqrt{2}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow AB\perp BC$.

Suy ra: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.BC=6$.

**Câu 28.** Cho tam giác $ABC$ có $a=4,b=6,c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

**A.** $9\sqrt{15}$. **B.** $3\sqrt{15}$. **C.** 105. **D.** $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{4+6+8}{2}=9$.

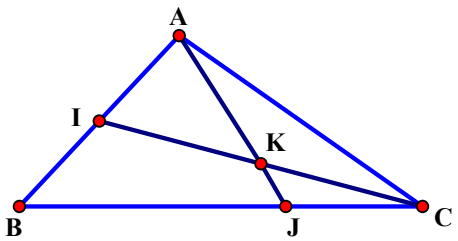
Suy ra: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=3\sqrt{15}$.

**Câu 29.** Cho tam giác $ABC$. Biết $AB=2$; $BC=3$ và $\widehat{ABC}=60°$. Tính chu vi và diện tích tam giác $ABC$.

**A.** $5+\sqrt{7}$ và $\frac{3}{2}$. **B.** $5+\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

**C.** $5\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $5+\sqrt{19}$ và $\frac{3}{2}$.

**Lời giải**




**Chọn B**

Ta có: $AC^2=AB^2+BC^2-2.AB.BC.\cos\widehat{ABC}=4+9-2.2.3.\cos60°=13-6=7$.

Suy ra $AC=\sqrt{7}$.

Chu vi tam giác $ABC$ là $AB+AC+BC=2+3+\sqrt{7}$.

Diện tích tam giác $ABC$ là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.BC.\sin\widehat{ABC}=\frac{1}{2}.2.3.\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (đvdt).

**Câu 30.** Tam giác $ABC$ có các trung tuyến $m_a=15$, $m_b=12$, $m_c=9$. Diện tích S của tam giác $ABC$ bằng

**A.** $72$. **B.** $144$. **C.** $54$. **D.** $108$.

**Lời giải** 1

**Chọn A**

Theo bài toán ta có

$$\begin{cases} m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=15^2 \\ m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}=12^2 \\ m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}=9^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2b^2+2c^2-a^2=900 \\ 2a^2+2c^2-b^2=576 \\ 2a^2+2b^2-c^2=324 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=10 \\ b=4\sqrt{13} \\ c=2\sqrt{73} \end{cases}$$

Ta có $p=\frac{a+b+c}{2}=5+2\sqrt{13}+\sqrt{73}$, áp dụng công thức He-rong ta có

$S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=72$.

**Cách 2:**

Đặt $BC=a, CA=b, AB=c$,

Theo định lý trung tuyến có:

$$\begin{cases} 4m_a^2+a^2=2\left(b^2+c^2\right) \\ 4m_b^2+b^2=2\left(a^2+c^2\right) \\ 4m_c^2+c^2=2\left(b^2+a^2\right) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -a^2+2b^2+2c^2=900 \\ 2a^2-b^2+2c^2=576 \\ 2a^2+2b^2-c^2=324 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2=100 \\ b^2=208 \\ c^2=291 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2=100 \\ b^2=208 \\ c^2=292 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=10 \\ b=4\sqrt{13} \\ c=2\sqrt{73} \end{cases}$$

Có $S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ Suy ra $S_{ABC}=72$

**Câu 31.** Cho tam giác $\Delta ABC$ có $b=7; c=5; \cos A=\frac{3}{5}$. Độ dài đường cao $h_a$ của tam giác $\Delta ABC$ là.

**A.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **B.** $8$. **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** $80\sqrt{3}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{7^2+5^2-2.7.5.\frac{3}{5}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}\sin A=\frac{4}{5}\\ \sin A=-\frac{4}{5}\end{array}\right.$ vì $0\le\hat{A}\le 180^0$ nên $\sin A=\frac{4}{5}$

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.7.5.\frac{4}{5}=14$ mà $S=\frac{1}{2}a.h_a\Leftrightarrow 14=\frac{1}{2}.4\sqrt{2}.h_a\Leftrightarrow h_a=\frac{7\sqrt{2}}{2}$

**Câu 32.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=2a$; $AC=4a$ và $\widehat{BAC}=120^\circ$. Tính diện tích tam giác $ABC$?

**A.** $S=8a^2$. **B.** $S=2a^2\sqrt{3}$. **C.** $S=a^2\sqrt{3}$. **D.** $S=4a^2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Diện tích của tam giác $ABC$ là $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}.2a.4a.\sin 120°=2a^2\sqrt{3}$ (đvdt).

**Câu 33.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ bằng

**A.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $G$ là trọng tâm $ABC$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $R=AG=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 34.** Cho tam giác $ABC$ có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác $ABC$ bằng

**A.** $12$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $24$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo đề bài tam giác $ABC$ có chu vi bằng 12 nên nửa chu vi là $p=\frac{12}{2}$; bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1, tức là ta có: $r=1$.

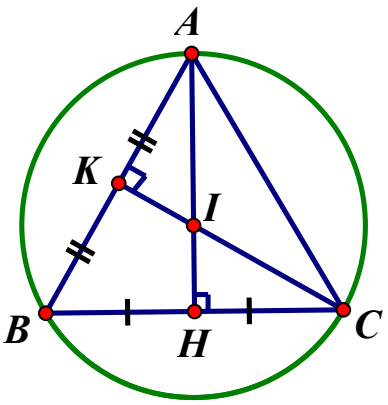
Diện tích tam giác $ABC$ là: $S=p.r=6.1=6$.

**Câu 35.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $2a$. Tính bán kính $R$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

**A.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{4a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{8a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{6a}{\sqrt{3}}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh $AB, BC$;

I là giao điểm của $AH$ và $CK$.

Lúc đó, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

Ta có: $AH=\frac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Do đó: $R = AI = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

**Câu 36.** Cho tam giác $ABC$ có $BC = \sqrt{6}$, $AC = 2$ và $AB = \sqrt{3}+1$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ bằng:

**A.** $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Áp dụng định lý cosin ta có $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ suy ra $A = 60°$.

Áp dụng định lý sin ta có $R = \frac{a}{2\sin A} = \sqrt{2}$.

**Câu 37.** Cho tam giác $ABC$ có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

**A.** $1$. **B.** $\frac{8}{9}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác $ABC$ vuông tại $A$.

Do đó bán kính đường tròn nội tiếp $r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB.AC}{\frac{1}{2}(AB+AC+BC)} = \frac{3.4}{3+4+5} = 1$.

**Câu 38.** Cho $\Delta ABC$ có $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp $R$ của tam giác trên là:

**A.** $8{,}125$. **B.** $130$. **C.** $8$. **D.** $8{,}5$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{a.b.c}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{a.b.c}{4S} = \frac{13.14.15}{4.84} = \frac{65}{8}$.

**Câu 39.** Cho $\Delta ABC$ có $S = 10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p = 10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp $r$ của tam giác trên là:

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có: $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$.

**Câu 40.** Một tam giác có ba cạnh là $26, 28, 30$. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

**A.** $16$. **B.** $8$. **C.** $4$. **D.** $4\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{26+28+30}{2}=42.$

$S=pr\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}=\dfrac{\sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}}{42}=8.$

**Câu 41.** Một tam giác có ba cạnh là $52,56,60.$ Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

**A.** $\dfrac{65}{8}.$ **B.** $40.$ **C.** $32,5.$ **D.** $\dfrac{65}{4}.$

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{52+56+60}{2}=84.$

Suy ra: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)}=1344$.

Mà $S=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{abc}{4S}=\dfrac{52.56.60}{4.1344}=\dfrac{65}{2}$.

**Câu 42.** Tam giác với ba cạnh là $5;12;13$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?

**A.** $6.$ **B.** $8.$ **C.** $\dfrac{13}{2}.$ **D.** $\dfrac{11}{2}.$

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: $5^2+12^2=13^2\Rightarrow R=\dfrac{13}{2}.$ (Tam giác vuông bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\dfrac{1}{2}$ cạnh huyền ).

**Câu 43.** Tam giác với ba cạnh là $5;12;13$ có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

**A.** $2.$ **B.** $2\sqrt{2}.$ **C.** $2\sqrt{3}.$ **D.** $3.$

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $p=\dfrac{5+12+13}{2}=15$. Mà $5^2+12^2=13^2\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}.5.12=30.$

Mặt khác $S=p.r\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}=2.$

**Câu 44.** Tam giác với ba cạnh là $6;8;10$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?

**A.** $5.$ **B.** $4\sqrt{2}.$ **C.** $5\sqrt{2}.$ **D.** $6.$

**Lời giải**

**Chọn A.**

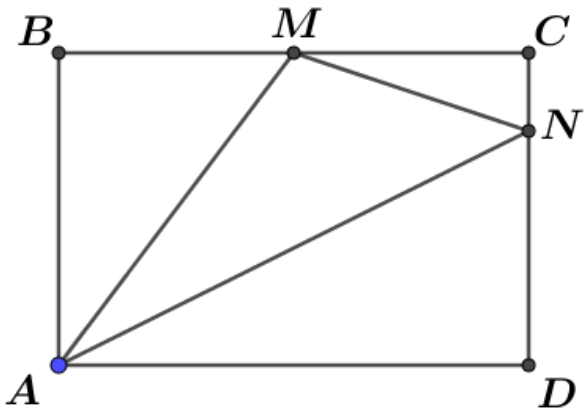
Ta có: $6^2+8^2=10^2 \Rightarrow R=\frac{10}{2}=5$. (Tam giác vuông bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{1}{2}$ cạnh huyền ).

**Câu 45.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB=4, BC=6$, $M$ là trung điểm của $BC, N$ là điểm trên cạnh $CD$ sao cho $ND=3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AMN$ bằng

**A.** $3\sqrt{5}$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta có

$MC=3, NC=1 \Rightarrow MN=\sqrt{10}$

$BM=3, AB=4 \Rightarrow AM=5$

$AD=6, ND=3 \Rightarrow AN=\sqrt{45}$

$p=\frac{AM+AN+MN}{2}=\frac{\sqrt{10}+5+\sqrt{45}}{2}$

$S_{AMN}=\sqrt{p(p-AM)(p-AN)(p-MN)}=\frac{15}{2}$

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác $AMN$ là: $R=\frac{AM.AN.MN}{4S_{AMN}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

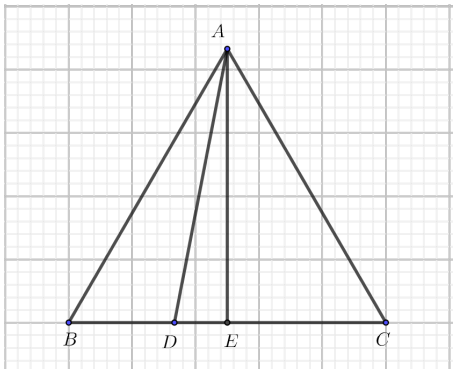
**Câu 46.** Cho tam giác đều $ABC$;gọi $D$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$. Gọi $R$ và $r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác $ADC$. Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

**A.** $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}$. **C.** $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}$. **D.** $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DB}$. Do đó $DC=2DB$.




Gọi $S$ là diện tích của tam giác $ACD$ và $E$ là trung điểm của $BC$.

Đặt $AB=a$. Suy ra $\begin{cases} S=\dfrac{2}{3}S_{ABC}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6} \\ AD=\sqrt{AE^2+ED^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{6}\right)^2}=\dfrac{2a\sqrt{7}}{6} \end{cases}$.

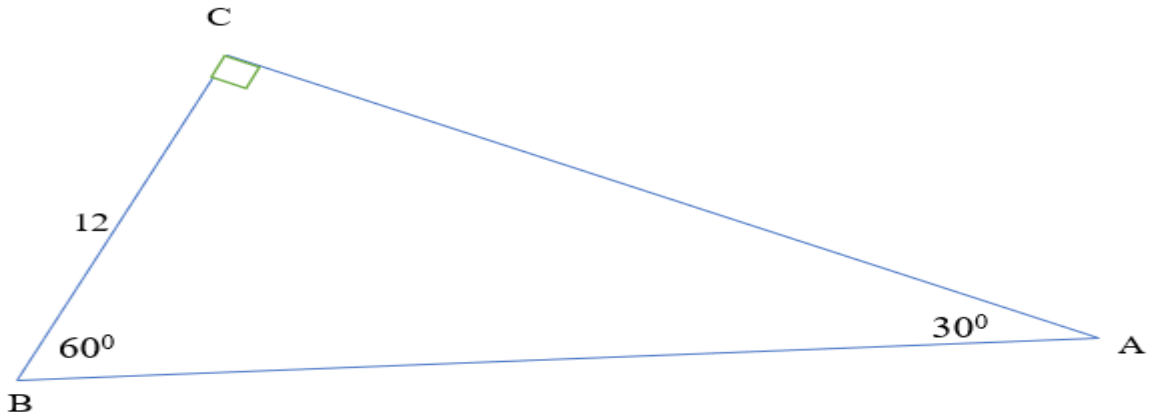
Hơn nữa $\begin{cases} S=\dfrac{AD+DC+AC}{2}.r=\dfrac{5+\sqrt{7}}{6}a.r \\ S=\dfrac{AD.DC.BC}{4R}=\dfrac{2a^3\sqrt{7}}{36R} \end{cases} \Rightarrow S^2=\dfrac{\left(5+\sqrt{7}\right)ar.2a^3\sqrt{7}}{6.36R}=\dfrac{\sqrt{7}\left(5+\sqrt{7}\right)a^4r}{108R}$.

Hay $\dfrac{a^4}{12}=\dfrac{\sqrt{7}\left(5+\sqrt{7}\right)a^4r}{108R}\Leftrightarrow\dfrac{R}{r}=\dfrac{\sqrt{7}\left(5+\sqrt{7}\right).12}{108}\Leftrightarrow\dfrac{R}{r}=\dfrac{\sqrt{7}\left(5+\sqrt{7}\right)}{9}$.

**Câu 47.** Cho tam giác $ABC$ có $\angle B=60^0,\angle A=30^0$, cạnh $BC=12$.Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ gần với số nào nhất?

**A.** $4,6$ **B.** $4,9$. **C.** $4,8$. **D.** $4,7$

**Lời giải**




Ta có $AC=BC.\tan B\Leftrightarrow AC=12.\tan 60=12\sqrt{3}$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.BC.AC=\dfrac{1}{2}.12.12\sqrt{3}=72\sqrt{3}$.

Áp dụng định lý Pi-ta-go ta được $AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{12^2+\left(12\sqrt{3}\right)^2}=24$.

Nửa chu vi tam giác $p=\dfrac{24+12+12\sqrt{3}}{2}=16+6\sqrt{3}$.

Mà $S_{\Delta ABC}=72\sqrt{3}=p.r\Rightarrow r=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}\approx 4,7$.

**Câu 48.** Cho tam giác $ABC$ có góc $A=60°$, cạnh $a=30$, bán kính đường tròn nội tiếp $r=5\sqrt{3}$. Tính chu vi của tam giác $ABC$.

**A.** $60+5\sqrt{3}$. **B.** $30+10\sqrt{3}$. **C.** $80$. **D.** $90$.

**Lời giải**

Gọi $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Theo định lí Sin ta có:

$R=\dfrac{a}{2.\sin A}=\dfrac{30}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=10\sqrt{3}$.

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác và định lí Cosin ta có hệ sau:

$$\begin{cases}\dfrac{abc}{4R}=p.r\\ b^2+c^2-2bc.\cos A=a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{a+b+c}{2}.r\\ b^2+c^2-2bc.\cos 60°=30^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{30.bc}{4.10\sqrt{3}}=\dfrac{30+b+c}{2}.5\sqrt{3}\\ b^2+c^2-bc=900\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}bc=10(30+b+c)\\ (b+c)^2-3bc=900\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases}b+c=S\\ bc=P\end{cases}$ $(S,P>0)$.

Hệ trên trở thành: $\begin{cases}P=10S+300\\ S^2-3P=900\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=10S+300\\ S^2-3(10S+300)=900\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=10S+300\\ S^2-30S-1800=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P=10S+300\\ \left[\begin{array}{l}S=60\\ S=-30\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=60\\ P=900\end{cases}$$

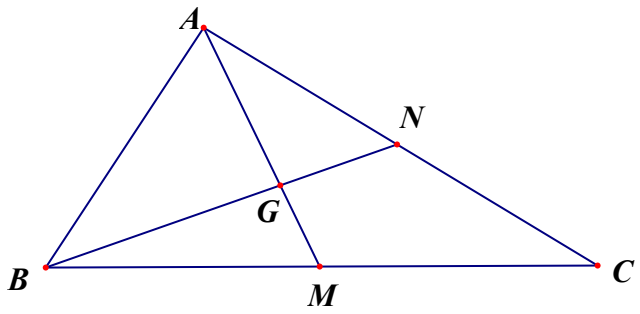
Khi đó: $\begin{cases}b+c=60\\ bc=900\end{cases}\Rightarrow b=c=30.$

Vậy chu vi tam giác $ABC$ là: $a+b+c=30+30+30=90$ (đvđd).

**Câu 49.** Cho tam giác $ABC$ có độ dài ba cạnh $BC=a, CA=b, AB=c$. Biết $a^2+b^2=5c^2$. Góc giữa hai đường trung tuyến $AM, BN$ của tam giác $ABC$ bằng bao nhiêu?.

**A.** $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

**Lời giải**




Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ khi đó ta có

$$\begin{cases}AG^2=\dfrac{4}{9}AM^2=\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}\right)\\ BG^2=\dfrac{4}{9}BN^2=\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2}{4}\right)\end{cases}\Rightarrow AG^2+BG^2=\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow AG^2+BG^2=\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{a^2+b^2}{4}+c^2\right).$$

Theo bài ra $a^2+b^2=5c^2 \Rightarrow AG^2+BG^2=\frac{4}{9}\left(\frac{5c^2}{4}+c^2\right)=c^2=AB^2$

Suy ra tam giác $ABG$ vuông tại $G$. Vậy góc giữa hai đường trung tuyến $AM, BN$ của tam giác $ABC$ bằng $90^\circ$.

## Dạng 3. Bài toán thực tế

**Câu 50.** Hai chiếc tàu thuỷ cùng xuất phát từ vị trí $A$, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc $60^0$. Tàu thứ nhất chạy với tốc độ $30km/h$, tàu thứ hai chạy với tốc độ $40km/h$. Hỏi sau $2$ giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu $km$?

**A.** $13$. **B.** $20\sqrt{13}$. **C.** $10\sqrt{13}$. **D.** $15$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: Sau $2h$ quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $S_1=30.2=60km.$

Sau $2h$ quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2=40.2=80km.$

Vậy: sau $2h$ hai tàu cách nhau là: $S=\sqrt{S_1{}^2+S_2{}^2-2S_1.S_2.\cos 60^0}=20\sqrt{13}.$

**Câu 51.** Khoảng cách từ $A$ đến $B$ không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm $C$ mà từ đó có thể nhìn được $A$ và $B$ dưới một góc $78^o24'$. Biết $CA=250m, CB=120m$. Khoảng cách $AB$ bằng bao nhiêu?

**A.** $266m.$ **B.** $255m.$ **C.** $166m.$ **D.** $298m.$

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $AB^2=CA^2+CB^2-2CB.CA.\cos C=250^2+120^2-2.250.120.\cos 78^o24'\simeq 64835 \Rightarrow AB\simeq 255.$

**Câu 52.** Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD=80m$, người ta nhìn hai điểm $A$ và $B$ trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^012'$ và $34^026'$. Ba điểm $A,B,D$ thẳng hàng. Tính khoảng cách $AB$?

**A.** $71m.$ **B.** $91m.$ **C.** $79m.$ **D.** $40m.$

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: Trong tam giác vuông $CDA$: $\tan 72^012'=\frac{CD}{AD}\Rightarrow AD=\frac{CD}{\tan 72^012'}=\frac{80}{\tan 72^012'}\simeq 25,7.$

Trong tam giác vuông $CDB$: $\tan 34^026'=\frac{CD}{BD}\Rightarrow BD=\frac{CD}{\tan 34^026'}=\frac{80}{\tan 34^026'}\simeq 116,7.$

Suy ra: khoảng cách $AB=116,7-25,7=91m.$

**Câu 53.** Khoảng cách từ $A$ đến $B$ không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm $C$ mà từ đó có thể nhìn được $A$ và $B$ dưới một góc $56^0 16'$. Biết $CA = 200\,m$, $CB = 180\,m$. Khoảng cách $AB$ bằng bao nhiêu?

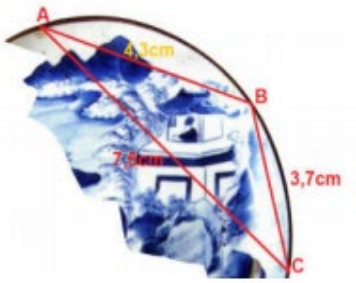
**A.** $180\,m.$ **B.** $224\,m.$ **C.** $112\,m.$ **D.** $168\,m.$

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB.CA.\cos C = 200^2 + 180^2 - 2.200.180.\cos 56^0 16' \simeq 32416 \Rightarrow AB \simeq 180.$

**Câu 54.** Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ( $AB = 4,3\,cm; BC = 3,7\,cm;\ CA = 7,5\ cm$). Bán kính của chiếc đĩa này bằng (*kết quả làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy*).




**A.** $5,73\ cm.$ **B.** $6,01 cm.$ **C.** $5,85 cm.$ **D.** $4,57 cm.$

**Lời giải**

**Chọn A**

Bán kính $R$ của chiếc đĩa bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

Nửa chu vi của tam giác $ABC$ là: $p = \dfrac{AB + BC + CA}{2} = \dfrac{4,3 + 3,7 + 7,5}{2} = \dfrac{31}{4} cm.$

Diện tích tam giác $ABC$ là: $S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - CA)} \approx 5,2\,cm^2.$

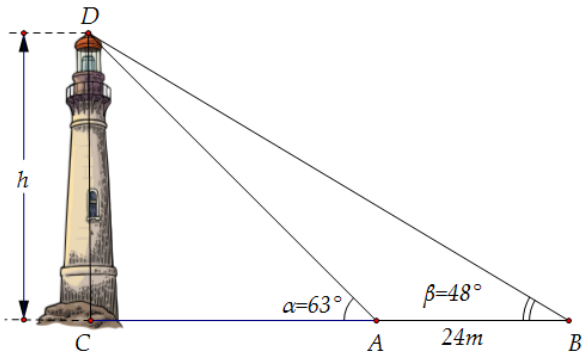
Mà $S = \dfrac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{AB.BC.CA}{4S} \approx 5,73\,cm.$

**Câu 55.** Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó $C$ là chân tháp. Chọn hai điểm $A$, $B$ trên mặt đất sao cho ba điểm $A$, $B$, $C$ thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24m$, $\widehat{CAD} = 63^0$; $\widehat{CBD} = 48^0$. Chiều cao $h$ của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?

**A.** 61,4 m. **B.** 18,5 m. **C.** 60 m. **D.** 18 m.

**Lời giải**

**Chọn A**



Ta có $\widehat{CAD}=63^0 \Rightarrow \widehat{BAD}=117^0 \Rightarrow \widehat{ADB}=180^0-\left(117^0+48^0\right)=15^0$

Áp dụng định lý sin trong tam giác $ABD$ ta có: $\frac{AB}{\sin\widehat{ADB}}=\frac{BD}{\sin\widehat{BAD}} \Rightarrow BD=\frac{AB.\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{ADB}}$

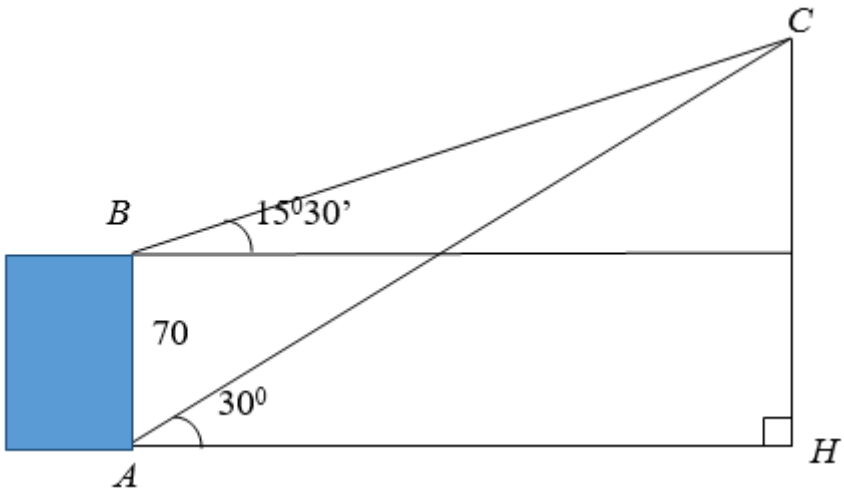
Tam giác $BCD$ vuông tại $C$ nên có: $\sin\widehat{CBD}=\frac{CD}{BD} \Rightarrow CD=BD.\sin\widehat{CBD}$

Vậy $CD=\frac{AB.\sin\widehat{BAD}.\sin\widehat{CBD}}{\sin\widehat{ADB}}=\frac{24.\sin 117^0.\sin 48^0}{\sin 15^0}=61,4m$

**Câu 56.** Từ hai vị trí A, B của một tòa nhà người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao AB bằng $70\,m$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang một góc $30^0$, phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang một góc $15^0 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị

**A.** $195\,m$. **B.** $234\,m$. **C.** $165\,m$. **D.** $135\,m$.

**Lời giải**




Ta có: $\widehat{CBA}=90^0-30^0=60^0$.

$\widehat{ABC}=90^0+15^0 30'=105^0 30'$

$\Rightarrow \widehat{ACB}=180^0-\left(105^0 30'+60^0\right)=14^0 30'$

Áp dụng định lí Sin cho tam giác $ABC$ ta có:

$\frac{AB}{\sin\widehat{ACB}}=\frac{AC}{\sin\widehat{ABC}} \Rightarrow AC=\frac{AB.\sin 105^0 30'}{\sin 14^0 30'}\approx 269,41$.

Xét $\Delta ACH$ có: $\sin 30^0=\frac{CH}{AC} \Rightarrow CH=AC.\sin 30^0=134,71(m)$.

# Bài 3. KHÁI NIỆM VECTƠ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Khái niệm vectơ

Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

Vectơ có điểm đầu là $A$, điểm cuối là $B$ được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ $AB$ ".

Để vẽ vectơ $\overrightarrow{AB}$ ta vẽ đoạn thẳng $AB$ và đánh dấu mũi tên ở đầu mút $B$




Đối với vecto $\overrightarrow{AB}$, ta gọi:

-Đường thẳng $d$ đi qua hai điểm $A,B$ là giá của véc tơ $\overrightarrow{AB}$

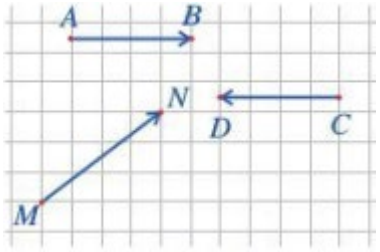



- Độ dài đoạn thẳng $AB$ là độ dái của vecto $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.

***Ví dụ 1***. Cho hai điểm phân biệt $H,K$. Viết hai vectơ mà điểm đầu và điểm cuối là $H$ hoặc $K$.

***Giải.*** Hai vectơ thoả mãn yêu cầu đề bài là $\overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{KH}$.

***Ví dụ 2.*** Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$




biết rằng độ dài cạnh của ô vuông bằng $1cm$.

***Giải***

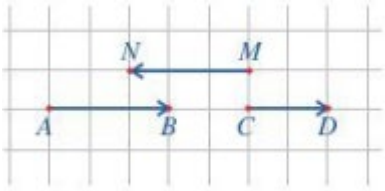
$|\overrightarrow{AB}|=4cm,|\overrightarrow{CD}|=4cm,|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{3^2+4^2}=5(cm).$

### II. Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng

Hai vecto được gọi là cùng phurong nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

*Nhận xét:* Nếu hai vectơ cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng hoặc chúng ngược hướng.

***Ví dụ 3.*** Trong hình bên ,




tìm vectơ cùng hướng với vecto $\overrightarrow{AB}$; ngược hưởng với vecto $\overrightarrow{AB}$.

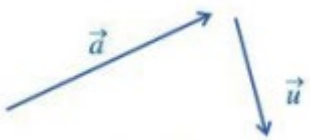
***Giải***

Vectơ $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với vecto $\overrightarrow{AB}$, vecto $\overrightarrow{MN}$ ngược hướng với vecto $\overrightarrow{AB}$.

### III. Hai vectơ bằng nhau

Hai vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\vec{b},\vec{u},\vec{v},\ldots$

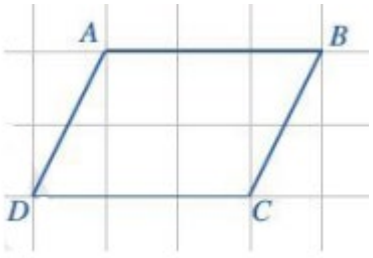


Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

Nhận xét

- Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$.
- Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm $O$, thì ta luôn tìm được một điểm $A$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$.

***Ví dụ 4*** Cho hình bình hành $ABCD$




a) Vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ ?

b) Vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$

***Giải***

a) Vì $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng hướng và $AB=DC$ nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

b) Vì $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$ cùng hướng và $AD=BC$ nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

## IV. Vectơ-không

Cho điểm $A$, ta xét một vectơ đặc biệt, trong đó $A$ vừa là điểm đầu vừa là điểm cuối. Vectở này được ki hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và gọi là vectơ-không.

Vectơ-không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

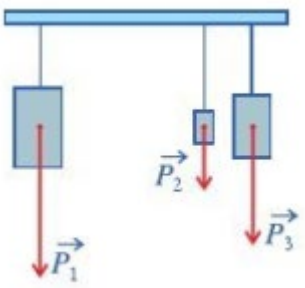
Với các điểm bất kì $A,B,C$ ta có: $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}$.

Vectơ $\overrightarrow{AA}$ nằm trên mọi đường thẳng đi qua $A$. Ta quy ước $\vec{0}$ (vectơ-không) cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ; $|\vec{0}|=0$.

Nhận xét: Hai điểm $A,B$ trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

## V. Biểu thị một số đại lượng có hướng bằng vectơ

***Ví dụ 5.*** Khi treo ba vật, mỗi vật sẽ tác dụng vào thanh treo một lực (trọng lực) như ở hình dưới




Nhận xét đặc điểm về phương, hướng của ba vectơ biểu thị trọng lực.

***Giải***

Trong vật lí, các vectơ trọng lực có cùng hướng nên ba vectơ $\vec{P_1},\vec{P_2},\vec{P_3}$ biểu thị trọng lực có cùng hướng.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Hãy tính số các véc-tơ (khác $\vec{0}$) mà các điểm đầu và điểm cuối được lấy từ các điểm phân biệt đã cho trong các trường hợp sau đây:
a) Hai điểm. b) Ba điểm. c) Bốn điểm.

**Câu 2.** Véc-tơ đối của véc-tơ $\vec{0}$ là véc-tơ nào? Véc-tơ đối của véc-tơ $-\vec{a}$ là véc-tơ nào?

**Câu 3.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $CA$, $AB$.

a) Xác định các véc-tơ khác véc-tơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

b) Xác định các véc-tơ khác véc-tơ - không, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

c) Vẽ các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu $A$, $B$.

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$. Gọi $I$ là trung điểm của $BC$. Dựng điểm $B'$ sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Gọi $J$ là trung điểm của $BB'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$ có $H$ là trực tâm và $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi $B'$ là điểm đối xứng với $B$ qua $O$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

**Câu 6.** Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$. Trên cạnh $AC$ lấy hai điểm $E$ và $F$ sao cho $AE = EF = FC$; $BE$ cắt $AM$ tại $N$. Chứng minh $\overrightarrow{NA}$ và $\overrightarrow{NM}$ là hai vec-tơ đối nhau.

**Câu 7.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M$, $N$, $P$, $Q$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

**Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng $DC$, $AB$ theo thứ tự lấy các điểm $M$, $N$ sao cho $DM = BN$. Gọi $P$ là giao điểm của $AM$, $DB$ và $Q$ là giao điểm của $CN$, $DB$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

**Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $E$ và $F$ lần lượt là trung điểm của hai cạnh $AB$ và $CD$. Nối $AF$ và $CE$, hai đường này cắt đường chéo $BD$ lần lượt tại $M$ và $N$. Chứng minh $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.

**Câu 10.** Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ với $A, D, F$ không thẳng hàng. Dựng các vectơ $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh tứ giác $CDGH$ là hình bình hành.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Vectơ có điểm đầu là $D$, điểm cuối là $E$ được kí hiệu là:

**A.** $DE$. **B.** $\left|\overrightarrow{DE}\right|$. **C.** $\overrightarrow{ED}$. **D.** $\overrightarrow{DE}$.

**Câu 2.** Cho tứ giác $ABCD$. Số các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và cuối là đỉnh của tứ giác bằng:

**A.** 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 12.

**Câu 3.** Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AC$ của tam giác đều $ABC$. Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

**A.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$. **C.** $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$. **D.** $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

**Câu 4.** Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm $C$, có bao nhiêu điểm $D$ thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

**Câu 5.** Xét các mệnh đề sau

(I): Véc tơ – không là véc tơ có độ dài bằng $0$.

(II): Véc tơ – không là véc tơ có nhiều phương.

**A.** Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng. **C.** (I) và (II) đúng. **D.** (I) và (II) sai.

**Câu 6.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$, mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AC} = a$. **C.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = a$.

**Câu 7.** Cho M là một điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho AB = 3AM. Hãy tìm khẳng định sai?

**A.** $\left|\overrightarrow{MB}\right|=2\left|\overrightarrow{MA}\right|$. **B.** $\left|\overrightarrow{MA}\right|=2\left|\overrightarrow{MB}\right|$. **C.** $\left|\overrightarrow{BA}\right|=3\left|\overrightarrow{AM}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BM}\right|$.

**Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

**Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Các véctơ ngược hướng với $\overrightarrow{OB}$ là:

**A.** $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{OD}$. **B.** $\overrightarrow{DB},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{BO}$. **C.** $\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{BO}$

**Câu 10.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3, AD=4$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

**A.** $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$. **B.** $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **C.** $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{BD}\right|=7$.

**Câu 11.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm $I$, $AB=3, BC=4$. Khi đó $\left|\overrightarrow{BI}\right|$ là:

**A. 7.** **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** $\frac{7}{2}$.

**Câu 12.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng.
**B.** Hai vectơ cùng phương thì giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
**C.** Hai vectơ có giá vuông góc thì cùng phương.
**D.** Hai vectơ ngược hướng với 1 vectơ thứ ba thì cùng phương.

**Câu 13.** Cho tam giác đều $ABC$ với đường cao $AH$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HC}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\left|\overrightarrow{HC}\right|$. **C.** $\left|\overrightarrow{AH}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{HC}\right|$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

**Câu 14.** Nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ thì:

**A.** tam giác $ABC$ là tam giác cân **B.** tam giác $ABC$ là tam giác đều
**C.** $A$ là trung điểm đoạn $BC$ **D.** điểm $B$ trùng với điểm $C$

**Câu 15.** Cho ba điểm $M, N, P$ thẳng hàng, trong đó $N$ nằm giữa hai điểm $M$ và $P$. Khi đó cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

**A.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$ **C.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$ **D.** $\overrightarrow{NP}$ và $\overrightarrow{NM}$

**Câu 16.** Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Số các vectơ khác vectơ không, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

**A.** 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 10

**Câu 17.** Cho tứ giác đều $ABCD$. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của $AB, BC, CD, DA$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ **B.** $\left|\overrightarrow{QP}\right|=\left|\overrightarrow{MN}\right|$ **C.** $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$ **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$

**Câu 18.** Cho ba điểm $A, B, C$ phân biệt và thẳng hàng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng hướng
**C.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng **D.** $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương

**Câu 19.** Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AC$ của tam giác đều $ABC$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\left|\overrightarrow{MN}\right|$.

**Câu 20.** Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$?

**A.** $ABCD$ là hình bình hành. **B.** $ABDC$ là hình bình hành.
**C.** $AD$ và $BC$ có cùng trung điểm. **D.** $AB=CD$.

**Câu 21.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm $O$. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AF}\right|$. **C.** $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$.

**Câu 22.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Gọi $P,Q,R$ lần lượt là trung điểm $AB,BC,AD$. Lấy 8 điểm trên làm điểm gốc hoặc điểm ngọn các vectơ. Tìm mệnh đề **sai**:

**A.** Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{PQ}$ **B.** Có 4 vectơ bằng $\overrightarrow{AR}$

**C.** Có 3 vectơ bằng $\overrightarrow{BO}$ **D.** Có 5 vectơ bằng $\overrightarrow{OP}$

**Câu 23.** Cho hai điểm phân biệt $A$ và $B$. Điều kiện để điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ là:

**A.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$. **B.** $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BI}$. **C.** $IA=IB$. **D.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$.

**Câu 24.** Cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I$. Hãy cho biết số khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IO}$

d) $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}$ e) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ f) $2\left|\overrightarrow{IA}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Câu 25.** Điền từ thích hợp vào dấu (…) để được mệnh đề đúng. Hai véc tơ ngược hướng thì (…).

**A.** Bằng nhau. **B.** Cùng phương. **C.** Cùng độ dài. **D.** Cùng điểm đầu.

**Câu 26.** Cho vectơ $\vec{a}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Có vô số vectơ $\vec{u}$ mà $\vec{u}=\vec{a}$. **B.** Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u}=\vec{a}$.

**C.** Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u}=-\vec{a}$. **D.** Không có vectơ $\vec{u}$ nào mà $\vec{u}=\vec{a}$.

**Câu 27.** Cho hình bình hành $ABGE$. Đẳng thức nào sau đây đúng.

**A.** $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{EG}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BE}$. **C.** $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{BE}$. **D.** $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{GE}$.

**Câu 28.** Cho lục giác đều *ABCDEF* tâm *O*. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm *O* sao cho bằng với $\overrightarrow{AB}$?

**A.** $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{FD}$ **B.** $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{ED}$ **C.** $\overrightarrow{BO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{ED}$ **D.** $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{ED}$

**Câu 29.** Cho tam giác *ABC.* Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, CA.* Xác định các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.

**A.** $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CP}$ **B.** $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{AP}$

**C.** $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CP}$ **D.** $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MA},\overrightarrow{PN},\overrightarrow{CP}$

**Câu 30.** Cho ba điểm *A, B, C* cùng nằm trên một đường thẳng. Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ cùng hướng khi và chỉ khi:

**A.** Điểm *B* thuộc đoạn *AC* **B.** Điểm *A* thuộc đoạn *BC*

**C.** Điểm *C* thuộc đoạn *AB* **D.** Điểm *A* nằm ngoài đoạn *BC*

**Câu 31.** Cho tam giác đều cạnh $2a$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AB}=2a$ **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2a$ **D.** $\overrightarrow{AB}=AB$

**Câu 32.** Cho tam giác không cân *ABC.* Gọi *H, O* lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác. *M* là trung điểm của *BC.* Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** Tam giác *ABC* nhọn thì $\overrightarrow{AH},\overrightarrow{OM}$ cùng hướng.

**B.** $\overrightarrow{AH},\overrightarrow{OM}$ luôn cùng hướng.

**C.** $\overrightarrow{AH},\overrightarrow{OM}$ cùng phương nhưng ngược hướng.

**D.** $\overrightarrow{AH},\overrightarrow{OM}$ có cùng giá

**Câu 33.** Cho hình thoi tâm *O*, cạnh bằng *a* và $\widehat{A}=60°$. Kết luận nào sau đây là đúng?

**A.** $\left|\overrightarrow{AO}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=a$ **C.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|$ **D.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

**Câu 34.** Cho 3 điểm $A, B, C$ không thẳng hàng, $M$ là điểm bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\forall M, \overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$. **B.** $\exists M, \overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$.

**C.** $\forall M, \overrightarrow{MA}\neq\overrightarrow{MB}\neq\overrightarrow{MC}$. **D.** $\exists M, \overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$.

**Câu 35.** Cho hai điểm phân biệt $A, B$. Số vectơ ( khác $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm $A, B$ là:

**A.** 2. **B.** 6. **C.** 13. **D.** 12.

**Câu 36.** Gọi $C$ là trung điểm của đoạn $AB$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

**A.** $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

**C.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\overrightarrow{CB}$.

**Câu 37.** Cho hình bình hành $ABCD$. Các vectơ là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$ là

**A.** $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}$.

**Câu 38.** Số vectơ ( khác $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước là

**A.** 42. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 27.

**Câu 39.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$ và $G$ là trọng tâm. Gọi $I$ là trung điểm của $AG$.

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BI}$ là

**A.** $a\dfrac{\sqrt{21}}{6}$. **B.** $a\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **C.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Câu 40.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng $DC, AB$ theo thứ tự lấy các điểm $M, N$ sao cho $DM=BN$. Gọi $P$ là giao điểm của $AM, DB$ và $Q$ là giao điểm của $CN, DB$. Khẳng định nào đúng?

**A.** $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{QB}$. **B.** $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$. **C.** $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\overrightarrow{MN}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$.

**Câu 41.** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh $a$ và $\widehat{BAD}=60°$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$. **B.** $\left|\overrightarrow{BD}\right|=a$. **C.** $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}$.

**Câu 42.** Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

**A.** Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương. **B.** Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.

**C.** Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng độ dài. **D.** Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ chung điểm đầu.

**Câu 43.** Cho tam giác $ABC$ có $M, N, D$ lần lượt là trung điểm của $AB, AC, BC$. Khi đó, các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là:

**A.** $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$. **B.** $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$.

**C.** $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM}$. **D.** $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{ND}$.

**Câu 44.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $DC, AB$; $P$ là giao điểm của $AM, DB$ và $Q$ là giao điểm của $CN, DB$.Khẳng định nào sau đây là đúng nhất.

**A.** $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{NB}$ **B.** $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QB}$ **C.** Cả A, B đều đúng **D.** Cả A, B đều sai

**Câu 45.** Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là $AB$ và $CD$ với $AB=2CD$. Từ C vẽ

$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$. Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

**A.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IC}$ **B.** $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$

**C.** Cả A, B đều đúng **D.** A đúng, B sai

**Câu 46.** Cho tam giác $ABC$ có trực tâm H. Gọi $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. **B.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

**C.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$. **D.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

**Câu 47.** Cho tam giác *ABC* với trực tâm *H*. *D* là điểm đối xứng với *B* qua tâm *O* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ **B.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{HC}$

**C.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ **D.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$

**Câu 48.** Cho $\Delta ABC$ với điểm *M* nằm trong tam giác. Gọi $A', B', C'$ lần lượt là trung điểm của *BC, CA, AB* và *N, P, Q* lần lượt là các điểm đối xứng với *M* qua $A', B', C'$. Câu nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$ và $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{NC}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$ và $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

**C.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QN}$ **D.** $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

**Câu 49.** Cho tam giác *ABC* có *H* là trực tâm và *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi *D* là điểm đối xứng với *B* qua *O*. Câu nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AH}$

**Câu 50.** Cho đường tròn tâm *O*. Từ điểm *A* nằm ngoài $(O)$, kẻ hai tiếp tuyến *AB, AC* tới $(O)$. Xét mệnh đề:

(I) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ (II) $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}$ (III) $\left|\overrightarrow{BO}\right| = \left|\overrightarrow{CO}\right|$

Mệnh đề đúng là:

**A.** Chỉ (I) **B.** (I) và (III) **C.** (I), (II), (III) **D.** Chỉ (III)

**Câu 51.** Cho hình bình hành *ABCD* tâm *O*. Gọi *P, Q, R* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, AD*. Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm mệnh đề sai?

**A.** Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{PR}$ **B.** Có 4 vectơ bằng $\overrightarrow{AR}$ **C.** Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{BO}$ **D.** Có 5 vectơ bằng $\overrightarrow{OP}$

**Câu 52.** Cho hình vuông *ABCD* tâm *O* cạnh *a*. Gọi *M* là trung điểm của *AB*, *N* là điểm đối xứng với *C* qua *D*. Hãy tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}$.

**A.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ **B.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{13}}{2}$ **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

**Câu 53.** Cho tứ giác *ABCD*. Gọi *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB, BC, CD, DA*. Gọi *O* là giao điểm của các đường chéo của tứ giác *MNPQ*, trung điểm của các đoạn thẳng *AC, BD* tương ứng là *I, J*. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OJ}$ **B.** $MP = NQ$ **C.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ **D.** $\overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OJ}$

**Câu 54.** Cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$, $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. **B.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

**C.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HD}$. **D.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

# Bài 3. KHÁI NIỆM VECTƠ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Khái niệm vectơ

Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

Vectơ có điểm đầu là $A$, điểm cuối là $B$ được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ $AB$ ".

Để vẽ vectơ $\overrightarrow{AB}$ ta vẽ đoạn thẳng $AB$ và đánh dấu mũi tên ở đầu mút $B$




Đối với vecto $\overrightarrow{AB}$, ta gọi:

-Đường thẳng $d$ đi qua hai điểm $A,B$ là giá của véc tơ $\overrightarrow{AB}$

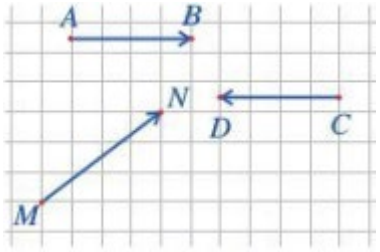



- Độ dài đoạn thẳng $AB$ là độ dái của vecto $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.

***Ví dụ 1***. Cho hai điểm phân biệt $H,K$. Viết hai vectơ mà điểm đầu và điểm cuối là $H$ hoặc $K$.

***Giải.*** Hai vectơ thoả mãn yêu cầu đề bài là $\overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{KH}$.

***Ví dụ 2.*** Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$




biết rằng độ dài cạnh của ô vuông bằng $1cm$.

***Giải***

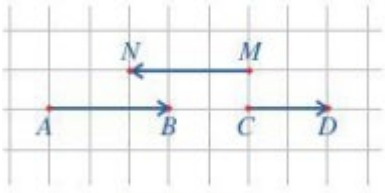
$|\overrightarrow{AB}|=4cm,|\overrightarrow{CD}|=4cm,|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{3^2+4^2}=5(cm).$

### II. Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng

Hai vecto được gọi là cùng phurong nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

*Nhận xét:* Nếu hai vectơ cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng hoặc chúng ngược hướng.

***Ví dụ 3.*** Trong hình bên ,




tìm vectơ cùng hướng với vecto $\overrightarrow{AB}$; ngược hưởng với vecto $\overrightarrow{AB}$.

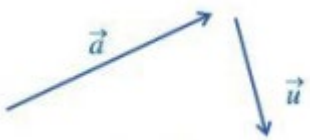
***Giải***

Vectơ $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với vecto $\overrightarrow{AB}$, vecto $\overrightarrow{MN}$ ngược hướng với vecto $\overrightarrow{AB}$.

### III. Hai vectơ bằng nhau

Hai vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\vec{b},\vec{u},\vec{v},\ldots$

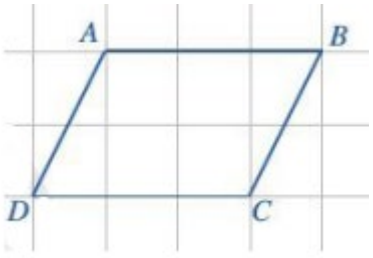


Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

Nhận xét

- Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$.
- Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm $O$, thì ta luôn tìm được một điểm $A$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$.

***Ví dụ 4*** Cho hình bình hành $ABCD$




a) Vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ ?

b) Vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$

***Giải***

a) Vì $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng hướng và $AB=DC$ nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

b) Vì $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$ cùng hướng và $AD=BC$ nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

## IV. Vectơ-không

Cho điểm $A$, ta xét một vectơ đặc biệt, trong đó $A$ vừa là điểm đầu vừa là điểm cuối. Vectở này được ki hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và gọi là vectơ-không.

Vectơ-không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

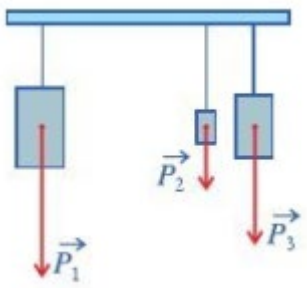
Với các điểm bất kì $A,B,C$ ta có: $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}$.

Vectơ $\overrightarrow{AA}$ nằm trên mọi đường thẳng đi qua $A$. Ta quy ước $\vec{0}$ (vectơ-không) cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ; $|\vec{0}|=0$.

Nhận xét: Hai điểm $A,B$ trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

## V. Biểu thị một số đại lượng có hướng bằng vectơ

***Ví dụ 5.*** Khi treo ba vật, mỗi vật sẽ tác dụng vào thanh treo một lực (trọng lực) như ở hình dưới




Nhận xét đặc điểm về phương, hướng của ba vectơ biểu thị trọng lực.

***Giải***

Trong vật lí, các vectơ trọng lực có cùng hướng nên ba vectơ $\vec{P_1},\vec{P_2},\vec{P_3}$ biểu thị trọng lực có cùng hướng.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Hãy tính số các véc-tơ (khác $\vec{0}$) mà các điểm đầu và điểm cuối được lấy từ các điểm phân biệt đã cho trong các trường hợp sau đây:

a) Hai điểm. b) Ba điểm. c) Bốn điểm.

**Lời giải.**

a) Với hai điểm $A$, $B$ có hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$.

b) Với ba điểm $A$, $B$, $C$ có 6 véc-tơ: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$.

c) Với bốn điểm $A$, $B$, $C$ có 4 cách chọn điểm đầu và có 3 cách chọn điểm cuối khác điểm đầu nên có 4.3 = 12 véc-tơ.

Tổng quát: với n điểm phân biệt thì có $n(n-1)$ véc-tơ khác $\vec{0}$.

**Câu 2.** Véc-tơ đối của véc-tơ $\vec{0}$ là véc-tơ nào? Véc-tơ đối của véc-tơ $-\vec{a}$ là véc-tơ nào?

**Lời giải.**

a) Véc-tơ đối của véc-tơ $\vec{0}$ là $\vec{0}$. b) Véc-tơ đối của véc-tơ $-\vec{a}$ là $\vec{a}$.

**Câu 3.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $CA$, $AB$.

a) Xác định các véc-tơ khác véc-tơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

b) Xác định các véc-tơ khác véc-tơ - không, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

c) Vẽ các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu $A$, $B$.

**Lời giải.**

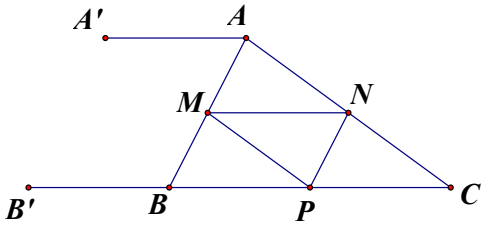
a) Các véc-tơ khác véc-tơ không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{PB}$.

b) Các véc-tơ khác véc-tơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{NM}$.

c) Trên tia $CB$ lấy điểm $B'$ sao cho $BB' = NP$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{BB'}$ là véc-tơ có điểm đầu là $B$ và bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$.

Qua $A$ dựng đường thẳng song song với đường thẳng $NP$.




Trên đường thẳng đó lấy điểm $A'$ sao cho $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NP}$ và $AA' = NP$.

Khi đó ta có là véc-tơ $\overrightarrow{AA'}$ có điểm đầu là $A$ và bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$.

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$. Gọi $I$ là trung điểm của $BC$. Dựng điểm $B'$ sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.

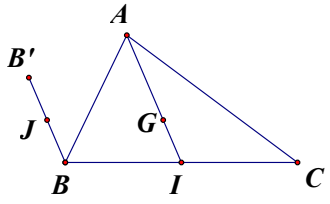
a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Gọi $J$ là trung điểm của $BB'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

**Lời giải.**

a) Vì $I$ là trung điểm của $BC$ nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai véc-tơ $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Ta có $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$ suy ra $B'B = AG$ và $B'B \,//\, AG$. Do đó $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{IG}$ cùng hướng. (1)




Vì $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ nên $IG = \frac{1}{2}AG$

và $J$ là trung điểm $BB'$ suy ra $BJ = \frac{1}{2}BB'$.

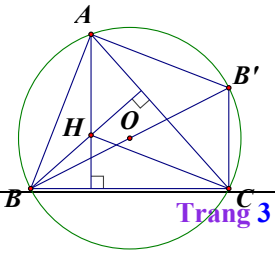
Vì vậy $BJ = IG$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$ có $H$ là trực tâm và $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi $B'$ là điểm đối xứng với $B$ qua $O$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

**Lời giải.**

Vì $BB'$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ nên $\widehat{BAB'} = \widehat{BCB'} = 90°$.

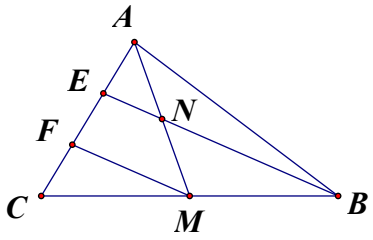


Do đó $CH // B'A$ và $AH // B'C$. Suy ra tứ giác $AB'CH$ là hình bình hành.

Vậy $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

**Câu 6.** Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$. Trên cạnh $AC$ lấy hai điểm $E$ và $F$ sao cho $AE = EF = FC$; $BE$ cắt $AM$ tại $N$. Chứng minh $\overrightarrow{NA}$ và $\overrightarrow{NM}$ là hai vec-tơ đối nhau.

**Lời giải.**




Ta có $FM // BE$ vì $FM$ là đường trung bình của tam giác $CEB$.

Mà $EA = EF$ nên $EN$ là đường trung bình của tam giác AFM.

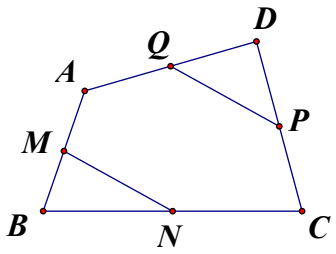
Suy ra $N$ là trung điểm của $AM$.

Vậy $\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NM}$.

**Câu 7.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M$, $N$, $P$, $Q$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

**Lời giải.**

Do $M$, $Q$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $AD$ nên $MQ$ là đường trung bình của tam giác $ABD$.




Suy ra $MQ // BD$ và $MQ = \frac{1}{2}BD$. (1)

Tương tự $NP$ là đường trung bình của tam giác $CBD$.

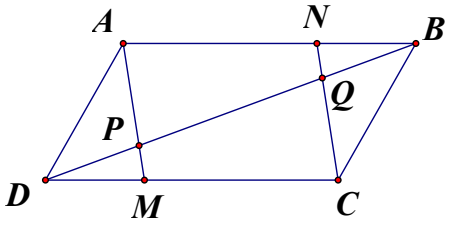
Suy ra $NP // BD$ và $NP = \frac{1}{2}BD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MQ // NP$ và $MQ = NP$ do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Vậy ta có $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

**Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng $DC$, $AB$ theo thứ tự lấy các điểm $M$, $N$ sao cho $DM = BN$. Gọi $P$ là giao điểm của $AM$, $DB$ và $Q$ là giao điểm của $CN$, $DB$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

**Lời giải.**




Ta có $DM = BN \Rightarrow AN = MC$, mặt khác $AN$ song song với $MC$ do tứ giác $ANCM$ là hình bình hành.

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

Xét tam giác $\Delta DMP$ và $\Delta BNQ$ ta có

$\begin{cases} DM = NB & \text{(giả thiết)} \\ \widehat{PDM} = \widehat{QBN} & \text{(so le trong).} \end{cases}$

Mặt khác $\widehat{DMP} = \widehat{APB}$ (đối đỉnh) và $\widehat{APQ} = \widehat{NQB}$ (hai góc đồng vị) suy ra $\widehat{DMP} = \widehat{BNQ}$.

Do đó $\Delta DMP = \Delta BNQ$ (c.g.c) suy ra $DB = QB$.

Dễ thấy $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

**Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $E$ và $F$ lần lượt là trung điểm của hai cạnh $AB$ và $CD$. Nối $AF$ và $CE$, hai đường này cắt đường chéo $BD$ lần lượt tại $M$ và $N$. Chứng minh $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.

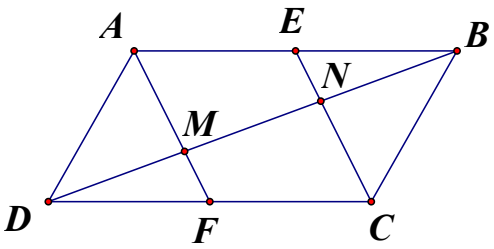
**Lời giải.**

Ta có $AECF$ là hình bình hành nên: $EN \,//\, AM$.

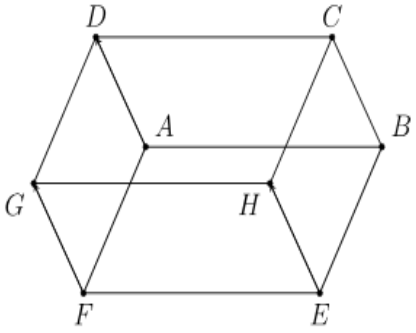
Vì $E$ là trung điểm $AB$ nên $N$ là trung điểm của $BM$, do đó $MN = NB$.

Tương tự, $M$ là trung điểm của $DN$, do đó $DM = MN$.

Hơn nữa, vì các véc-tơ cùng hướng nên $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.




**Câu 10.** Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ với $A, D, F$ không thẳng hàng. Dựng các vectơ $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh tứ giác $CDGH$ là hình bình hành.




**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} \Rightarrow$ Tứ giác $FEHG$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$ (1).

Ta có $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DC}$.

Vậy tứ giác $GHCD$ là hình bình hành.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Vectơ có điểm đầu là $D$, điểm cuối là $E$ được kí hiệu là:

**A.** $DE$. **B.** $\left|\overrightarrow{DE}\right|$. **C.** $\overrightarrow{ED}$. **D.** $\overrightarrow{DE}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 2.** Cho tứ giác $ABCD$. Số các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và cuối là đỉnh của tứ giác bằng:

**A.** 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 12.

**Lời giải**

**Chọn D**

Hai điểm phân biệt, giả sử $A, B$ tạo thành hai vec tơ khác vec tơ- không là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

Vì vậy từ 4 đỉnh $A, B, C, D$ của tam giác ta có 6 cặp điểm phân biệt nên có 12 vec tơ khác vec tơ – không được tạo thành.

**Câu 3.** Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AC$ của tam giác đều $ABC$. Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

**A.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$. **C.** $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$. **D.** $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 4.** Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm $C$, có bao nhiêu điểm $D$ thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tập hợp điểm $D$ là đường tròn tâm $C$, bán kính bằng $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

**Câu 5.** Xét các mệnh đề sau

(I): Véc tơ – không là véc tơ có độ dài bằng 0.

(II): Véc tơ – không là véc tơ có nhiều phương.

**A.** Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng. **C.** (I) và (II) đúng. **D.** (I) và (II) sai.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 6.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$, mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AC} = a$. **C.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = a$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 7.** Cho M là một điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho AB = 3AM. Hãy tìm khẳng định sai?

**A.** $\left|\overrightarrow{MB}\right| = 2\left|\overrightarrow{MA}\right|$. **B.** $\left|\overrightarrow{MA}\right| = 2\left|\overrightarrow{MB}\right|$. **C.** $\left|\overrightarrow{BA}\right| = 3\left|\overrightarrow{AM}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BM}\right|$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$. **D.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Các vécto ngược hướng với $\overrightarrow{OB}$ là:

**A.** $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OD}$. **B.** $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BO}$. **C.** $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BO}$

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 10.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3, AD = 4$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

**A.** $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$. **B.** $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$. **C.** $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{BD}\right| = 7$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 11.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm $I$, $AB = 3, BC = 4$. Khi đó $\left|\overrightarrow{BI}\right|$ là:

**A. 7.** **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** $\frac{7}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 12.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng.

**B.** Hai vectơ cùng phương thì giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

**C.** Hai vectơ có giá vuông góc thì cùng phương.

**D.** Hai vectơ ngược hướng với 1 vectơ thứ ba thì cùng phương.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 13.** Cho tam giác đều $ABC$ với đường cao $AH$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\left|\overrightarrow{HC}\right|$. **C.** $\left|\overrightarrow{AH}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{HC}\right|$. **D.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 14.** Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì:

**A.** tam giác $ABC$ là tam giác cân
**B.** tam giác $ABC$ là tam giác đều
**C.** $A$ là trung điểm đoạn $BC$
**D.** điểm $B$ trùng với điểm $C$

**Lời giải**

**Đáp án D**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow B \equiv C$

**Câu 15.** Cho ba điểm $M, N, P$ thẳng hàng, trong đó $N$ nằm giữa hai điểm $M$ và $P$. Khi đó cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

**A.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$ **C.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$ **D.** $\overrightarrow{NP}$ và $\overrightarrow{NM}$

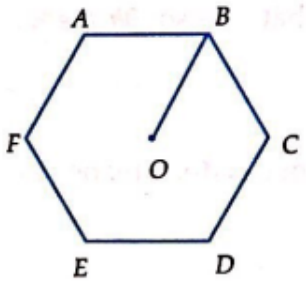
**Lời giải**

**Đáp án A**

**Câu 16.** Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Số các vectơ khác vectơ không, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

**A.** 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 10

**Lời giải**



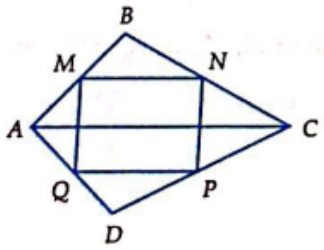

Các vectơ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OB}$ là:
$\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AF}$.

**Đáp án B.**

**Câu 17.** Cho tứ giác đều $ABC$**D.** Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của $AB, BC, CD, D$**A.** Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ **B.** $\left|\overrightarrow{QP}\right| = \left|\overrightarrow{MN}\right|$ **C.** $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$

**Lời giải**




Ta có $\begin{cases} MN // PQ \\ MN = PQ \end{cases}$ (do cùng song song và bằng $\frac{1}{2}AC$).

Do đó MNPQ là hình bình hành.

**Đáp án D.**

**Câu 18.** Cho ba điểm $A, B, C$ phân biệt và thẳng hàng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng hướng

**C.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng **D.** $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương

**Lời giải**

Với ba trường hợp lần lượt $A, B, C$ nằm giữa thì ta luôn có $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương.

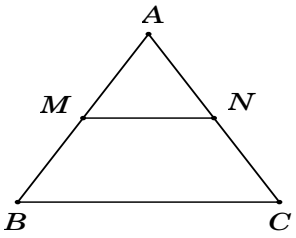
**Đáp án D.**

**Câu 19.** Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AC$ của tam giác đều $ABC$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\left|\overrightarrow{MN}\right|$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta có $MN$ là đường trung bình của tam giác $ABC$.

Do đó $BC=2MN\longrightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\left|\overrightarrow{MN}\right|$.

**Câu 20.** Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$?

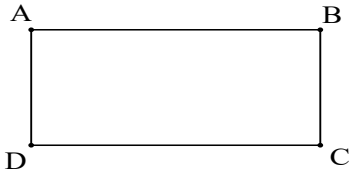
**A.** $ABCD$ là hình bình hành. **B.** $ABDC$ là hình bình hành.

**C.** $AD$ và $BC$ có cùng trung điểm. **D.** $AB=CD$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:




• $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow\begin{cases}AB\ /\!/\ CD\\AB=CD\end{cases}\Rightarrow ABDC$ là hình bình hành.

• Mặt khác, $ABDC$ là hình bình hành

$\Rightarrow\begin{cases}AB\ /\!/\ CD\\AB=CD\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

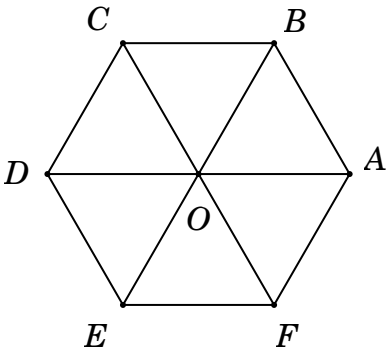
Do đó, điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ là $ABDC$ là hình bình hành.

**Câu 21.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm $O$. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AF}\right|$. **C.** $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Hai vectơ này ngược hướng.

**Câu 22.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Gọi $P,Q,R$ lần lượt là trung điểm $AB,BC,AD$. Lấy 8 điểm trên làm điểm gốc hoặc điểm ngọn các vectơ. Tìm mệnh đề **sai**:

**A.** Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{PQ}$ **B.** Có 4 vectơ bằng $\overrightarrow{AR}$

**C.** Có 3 vectơ bằng $\overrightarrow{BO}$ **D.** Có 5 vectơ bằng $\overrightarrow{OP}$

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 23.** Cho hai điểm phân biệt $A$ và $B$. Điều kiện để điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ là:

**A.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$. **B.** $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BI}$. **C.** $IA=IB$. **D.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$.

**Câu 24.** Cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I$. Hãy cho biết số khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

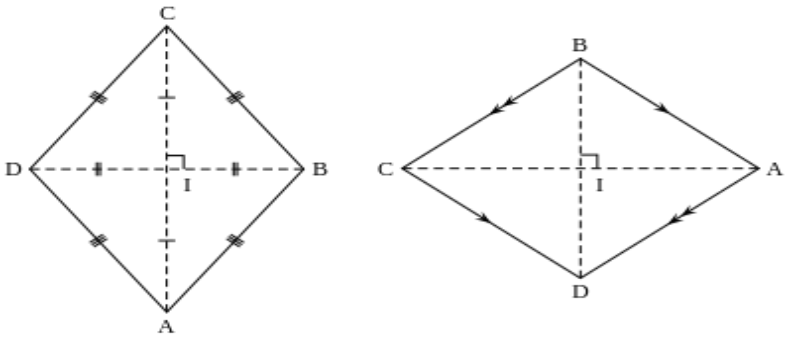
a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IO}$

d) $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}$ e) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ f) $2\left|\overrightarrow{IA}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn A**




**Câu 25.** Điền từ thích hợp vào dấu (…) để được mệnh đề đúng. Hai véc tơ ngược hướng thì (…).

**A.** Bằng nhau. **B.** Cùng phương. **C.** Cùng độ dài. **D.** Cùng điểm đầu.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 26.** Cho vectơ $\vec{a}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Có vô số vectơ $\vec{u}$ mà $\vec{u}=\vec{a}$. **B.** Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u}=\vec{a}$.

**C.** Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u}=-\vec{a}$. **D.** Không có vectơ $\vec{u}$ nào mà $\vec{u}=\vec{a}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Cho vectơ $\vec{a}$, có vô số vectơ $\vec{u}$ cùng hướng và cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$. Nên có vô số vectơ $\vec{u}$ mà $\vec{u}=\vec{a}$.

**Câu 27.** Cho hình bình hành $ABGE$. Đẳng thức nào sau đây đúng.

**A.** $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{EG}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BE}$. **C.** $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{BE}$. **D.** $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{GE}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

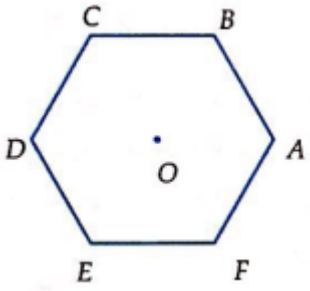
Hình bình hành $ABGE \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GE}$.

**Câu 28.** Cho lục giác đều *ABCDEF* tâm *O*. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm *O* sao cho bằng với $\overrightarrow{AB}$?

**A.** $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FD}$ **B.** $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ED}$ **C.** $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$ **D.** $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

**Lời giải**

**Đáp án D**




Các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

$\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

**Câu 29.** Cho tam giác *ABC.* Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, CA.* Xác định các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.

**A.** $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$ **B.** $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AP}$

**C.** $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$ **D.** $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{CP}$

**Lời giải**

**Đáp án C**

Có 3 đường thẳng song song với *MN* là *AC, AP, PC*

Nên có 7 vectơ

$\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$

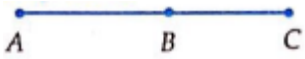
**Câu 30.** Cho ba điểm *A, B, C* cùng nằm trên một đường thẳng. Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng khi và chỉ khi:

**A.** Điểm *B* thuộc đoạn *AC* **B.** Điểm *A* thuộc đoạn *BC*

**C.** Điểm *C* thuộc đoạn *AB* **D.** Điểm *A* nằm ngoài đoạn *BC*

**Lời giải**

**Đáp án A**




**Câu 31.** Cho tam giác đều cạnh $2a$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = 2a$ **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2a$ **D.** $\overrightarrow{AB} = AB$

**Lời giải**

**Đáp án C**

Vì tam giác đều nên $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2a$

**Câu 32.** Cho tam giác không cân *ABC.* Gọi *H, O* lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác. *M* là trung điểm của *BC.* Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** Tam giác *ABC* nhọn thì $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ cùng hướng.

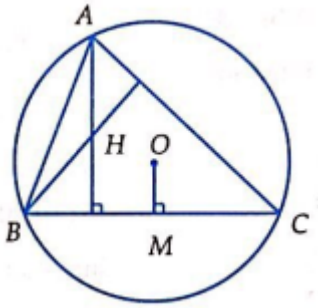
**B.** $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ luôn cùng hướng.

**C.** $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ cùng phương nhưng ngược hướng.

**D.** $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ có cùng giá

**Lời giải**

**Đáp án A**




Thật vậy khi $\Delta ABC$ nhọn thì ta có:

$\begin{cases} AH \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH // OM$

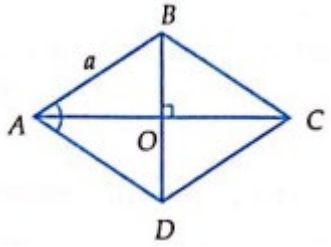
$O$, $H$ nằm trong tam giác $\Rightarrow \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ cùng hướng

**Câu 33.** Cho hình thoi tâm $O$, cạnh bằng $a$ và $\widehat{A} = 60°$. Kết luận nào sau đây là đúng?

**A.** $\left|\overrightarrow{AO}\right| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\left|\overrightarrow{OA}\right| = a$ **C.** $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right|$ **D.** $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

**Lời giải**

**Đáp án A**




Vì $\widehat{A} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AO}\right| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

**Câu 34.** Cho 3 điểm $A, B, C$ không thẳng hàng, $M$ là điểm bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\forall M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$. **B.** $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.

**C.** $\forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$. **D.** $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có 3 điểm $A, B, C$ không thẳng hàng, $M$ là điểm bất kỳ.

Suy ra $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ không cùng phương $\Rightarrow \forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$.

**Câu 35.** Cho hai điểm phân biệt $A, B$. Số vectơ ( khác $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm $A, B$ là:

**A.** 2. **B.** 6. **C.** 13. **D.** 12.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số vectơ ( khác $\vec{0}$ ) là $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{BA}$.

**Câu 36.** Gọi $C$ là trung điểm của đoạn $AB$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

**A.** $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

**C.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \overrightarrow{CB}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $C$ là trung điểm của đoạn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

**Câu 37.** Cho hình bình hành $ABCD$. Các vectơ là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$ là

**A.** $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$ là $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CB}$.

**Câu 38.** Số vectơ ( khác $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ $7$ điểm phân biệt cho trước là

**A.** $42$. **B.** $3$. **C.** $9$. **D.** $27$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số vectơ ( khác $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ $7$ điểm phân biệt cho trước là $7.6=42$

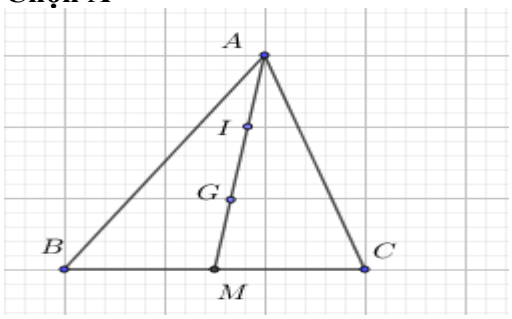
**Câu 39.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$ và $G$ là trọng tâm. Gọi $I$ là trung điểm của $AG$.

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BI}$ là

**A.** $a\dfrac{\sqrt{21}}{6}$. **B.** $a\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **C.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB=a$

Gọi $M$ là trung điểm của $BC$

Ta có $\left|\overrightarrow{AG}\right|=AG=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2}{3}\sqrt{AB^2-BM^2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

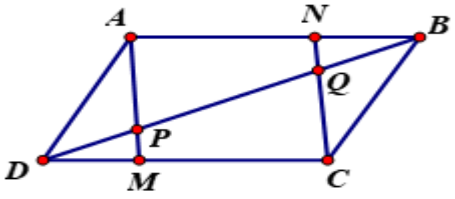
$\left|\overrightarrow{BI}\right|=BI=\sqrt{BM^2+MI^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

**Câu 40.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng $DC$, $AB$ theo thứ tự lấy các điểm $M$, $N$ sao cho $DM=BN$. Gọi $P$ là giao điểm của $AM$, $DB$ và $Q$ là giao điểm của $CN$, $DB$. Khẳng định nào đúng?

**A.** $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{QB}$. **B.** $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$. **C.** $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\overrightarrow{MN}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$.

**Lời giải**

**Chọn A**



Ta có $DM = BN \Rightarrow AN = MC$, mặt khác $AN$ song song với $MC$ do đó tứ giác $ANCM$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

Xét tam giác $\Delta DMP$ và $\Delta BNQ$ ta có $DM = NB$ (giả thiết), $\widehat{PDM} = \widehat{QBN}$ (so le trong)

Mặt khác $\widehat{DMP} = \widehat{APB}$ (đối đỉnh) và $\widehat{APQ} = \widehat{NQB}$ (hai góc đồng vị) suy ra $\widehat{DMP} = \widehat{BNQ}$.

Do đó $\Delta DMP = \Delta BNQ$ (c.g.c) suy ra $DB = QB$.

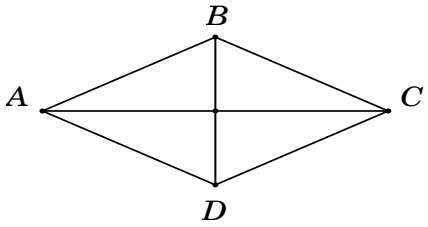
Dễ thấy $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

**Câu 41.** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh $a$ và $\widehat{BAD} = 60°$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. **B.** $\left|\overrightarrow{BD}\right| = a$. **C.** $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Từ giả thiết suy ra tam giác $ABD$ đều cạnh a nên $BD = a \longrightarrow \left|\overrightarrow{BD}\right| = a$.

**Câu 42.** Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

**A.** Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương. **B.** Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.

**C.** Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng độ dài. **D.** Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ chung điểm đầu.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\vec{a} = -\vec{b}$. Do đó, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng độ dài và ngược hướng nhau.

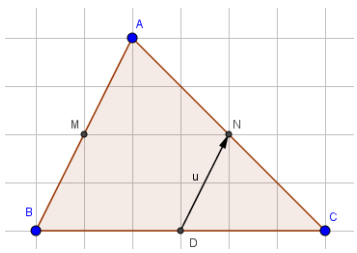
**Câu 43.** Cho tam giác $ABC$ có $M$, $N$, $D$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $AC$, $BC$. Khi đó, các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là:

**A.** $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND}$. **B.** $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND}$.

**C.** $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AM}$. **D.** $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{ND}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Nhìn hình ta thấy vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND}$.

**Câu 44.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $DC, AB$; $P$ là giao điểm của $AM$, $DB$ và $Q$ là giao điểm của $CN$, $DB$.Khẳng định nào sau đây là đúng nhất.

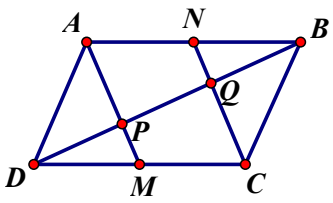
**A.** $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$ **B.** $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$ **C.** Cả A, B đều đúng **D.** Cả A, B đều sai

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có tứ giác $DMBN$ là hình bình hành vì

$DM = NB = \frac{1}{2}AB$, $DM // NB$. Suy ra $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$.




Xét tam giác $CDQ$ có $M$ là trung điểm của $DC$ và $MP // QC$ do đó $P$ là trung điểm của $DQ$. Tương tự xét tam giác $ABP$ suy ra được $Q$ là trung điểm của $PB$

Vì vậy $DP = PQ = QB$ từ đó suy ra $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$.

**Câu 45.** Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là $AB$ và $CD$ với $AB = 2CD$. Từ C vẽ $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$. Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

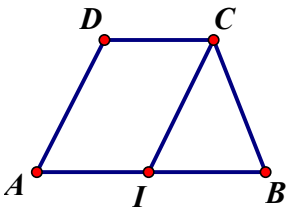
**A.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IC}$ **B.** $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$
**C.** Cả A, B đều đúng **D.** A đúng, B sai

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$ suy ra $AICD$ là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IC}$




Ta có $DC = AI$ mà $AB = 2CD$ do đó $AI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow I$ là trung điểm $AB$

Ta có $DC = IB$ và $DC // IB \Rightarrow$ tứ giác $BCDI$ là hình bình hành

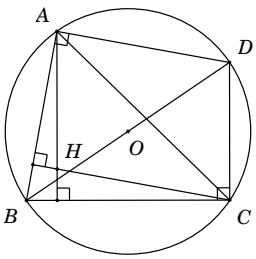
Suy ra $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$

**Câu 46.** Cho tam giác $ABC$ có trực tâm H. Gọi $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. **B.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.
**C.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$. **D.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Ta có $AH \perp BC$ và $DC \perp BC$ (do góc $\widehat{DCB}$ chắn nửa đường tròn). Suy ra $AH \,//\, DC$.

Tương tự ta cũng có $CH \,//\, AD$.

**Câu 47.** Cho tam giác $ABC$ với trực tâm $H$. $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ **B.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{HC}$

**C.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ **D.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$

**Lời giải**

Ta có $BD$ là đường kính $\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.

$AH \perp BC, DC \perp BC \Rightarrow AH \,//\, DC$ (1)

Ta lại có $CH \perp AB, DA \perp AB \Rightarrow CH \,//\, DA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tứ giác $HADC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

**Đáp án C.**

**Câu 48.** Cho $\Delta ABC$ với điểm $M$ nằm trong tam giác. Gọi $A', B', C'$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $CA$, $AB$ và $N$, $P$, $Q$ lần lượt là các điểm đối xứng với $M$ qua $A', B', C'$. Câu nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$ và $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{NC}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$ và $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

**C.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QN}$ **D.** $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

**Lời giải**

Ta có $AMCP$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

Lại có $AQBM$ và $BMCN$ là hình bình hành

$\Rightarrow NC = BM = QA$

$\Rightarrow AQNC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$.

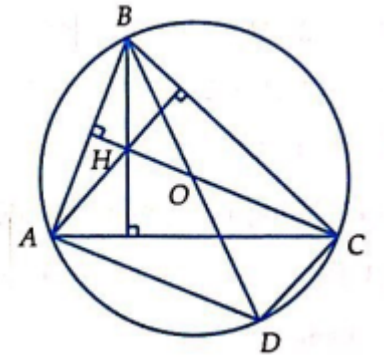
**Đáp án B.**

**Câu 49.** Cho tam giác $ABC$ có $H$ là trực tâm và $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua $O$. Câu nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AH}$

**Lời giải**

**Đáp án A**




Ta có thể chỉ ra được $ADCH$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$

**Câu 50.** Cho đường tròn tâm $O$. Từ điểm $A$ nằm ngoài $(O)$, kẻ hai tiếp tuyến $AB$, $AC$ tới $(O)$. Xét mệnh đề:

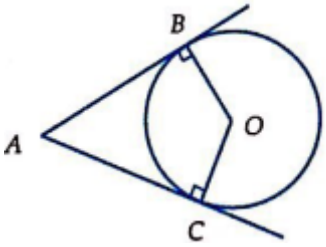
(I) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ (II) $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ (III) $\left|\overrightarrow{BO}\right|=\left|\overrightarrow{CO}\right|$

Mệnh đề đúng là:

**A.** Chỉ (I) **B.** (I) và (III) **C.** (I), (II), (III) **D.** Chỉ (III)

**Lời giải**

**Đáp án D**



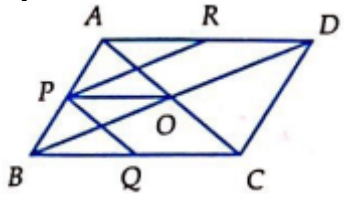

Ta có: $OB=OC=R\Rightarrow\left|\overrightarrow{BO}\right|=\left|\overrightarrow{CO}\right|$

**Câu 51.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Gọi $P, Q, R$ lần lượt là trung điểm của $AB, BC, AD$. Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm mệnh đề sai?

**A.** Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{PR}$ **B.** Có 4 vectơ bằng $\overrightarrow{AR}$ **C.** Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{BO}$ **D.** Có 5 vectơ bằng $\overrightarrow{OP}$

**Lời giải**

**Đáp án D**




Ta có: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$

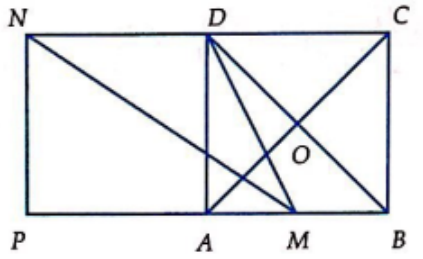
$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{QC},\ \overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{PR},\ \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{DR}=\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{QB}$

**Câu 52.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$ cạnh $a$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB$, $N$ là điểm đối xứng với $C$ qua $D$. Hãy tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}$.

**A.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ **B.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$ **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$

**Lời giải**

**Đáp án C**




Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông $MAD$ ta có:

$$DM^2=AM^2+AD^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2$$

$$=\frac{5a^2}{4}$$

$$\Rightarrow DM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Qua $N$ kẻ đường thẳng song song với $AD$ cắt $AB$ tại $P$.

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông $NPM$ ta có:

$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2$

$= \frac{13a^2}{4}$

$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

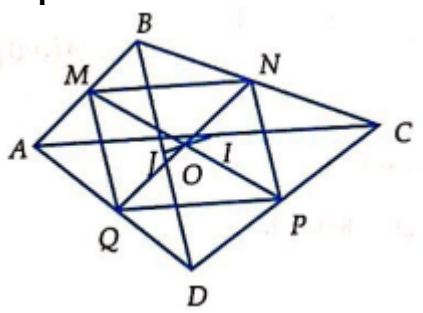
Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

**Câu 53.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, CD, DA$. Gọi $O$ là giao điểm của các đường chéo của tứ giác $MNPQ$, trung điểm của các đoạn thẳng $AC, BD$ tương ứng là $I, J$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OJ}$ **B.** $MP = NQ$ **C.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ **D.** $\overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OJ}$

**Lời giải**

**Đáp án D**




Ta có: $MNPQ$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

Ta có:

$\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$

$= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OJ}$

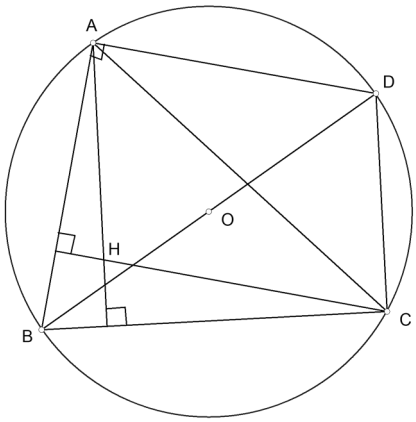
**Câu 54.** Cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$, $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. **B.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

**C.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HD}$. **D.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Ta có: Vì $D$ đối xứng với $B$ qua $O$ nên $D$ thuộc đường tròn $(O)$

$AD//DH$ (cùng vuông góc với $AB$ )

$AH//CD$ (cùng vuông góc với $BC$ )

Suy ra $ADHC$ là hình bình hành

Vậy $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$ .

# Bài 4. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTƠ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

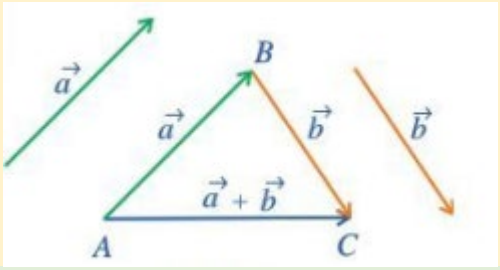
## PHẦN A. LÝ THUYẾT

## I. Tổng của hai vectơ

### 1. Định nghĩa

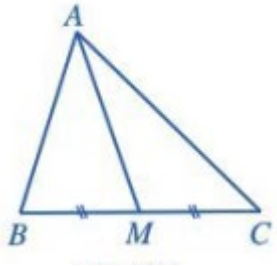
Với ba điểm bất kì $A,B,C$, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$, ki hiệu là $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Lấy một điểm $A$ tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.




Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là phép cộng vectơ.

***Ví dụ 1.*** Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$



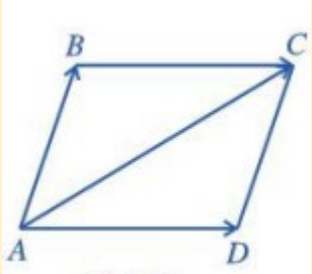

Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}$.

***Giải***

Vì $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BM}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$

### 2. Quy tắc hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.




***Ví dụ 2.*** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Chứng minh $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$.

***Giải***

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.

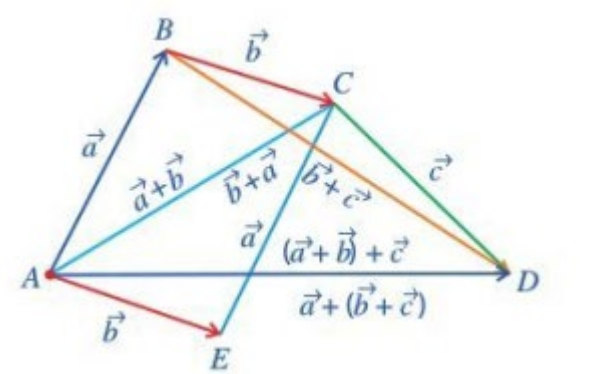
Suy ra $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AC}|=AC,|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BD}|=BD$.

Do $AC=BD$ nên $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$.

### 3. Tính chất

Với ba vectở tuỳ ý $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ta có:

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (tính chất kết hợp);
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (tính chất của vecto-không).




Chú ý: Tổng ba vecto $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ được xác định theo một trong hai cách:
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ hoặc $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

***Ví dụ 3.*** Cho bốn điểm $A,B,C,D$. Chứng minh
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

***Giải***

Ta có:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

## II. Hiệu của hai vec tơ

### 1. Định nghĩa

Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vecto $\vec{a}$ được gọi là vecto đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $-\vec{a}$ được gọi là hai vectơ đối nhau.

*Quy ước*: Vectơ đối của vecto $\vec{0}$ là vecto $\vec{0}$.

*Nhận xét.* $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\left(-\vec{a}\right)+\vec{a}=\vec{0}$

-Hai vecto $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

-Với hai điểm $A,B$ ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

- Với ba điểm $A,B,C$ bất kì, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Cho hai điểm $A,B$. Khi đó, hai vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}$ là hai vectơ đối nhau, tức là $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

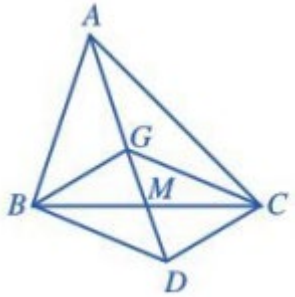
***Ví dụ 4.*** Cho $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$. Chứng tỏ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ là hai vectơ đối nhau. Viết đẳng thức liên hệ giữa hai vectơ đó.

***Giải***

Hai vecto $\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}$ là hai vecto đối nhau vì chúng ngược hướng và cùng độ dài, $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

*Chú ý:* $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

***Ví dụ 5.*** Cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$ và $D$ là điểm đối xứng vơi $G$ qua $M$. Chứng minh:




a) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

***Giải***

a) Vì tứ giác $BGCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên tứ giác $BGCD$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$.

b) Vì hai điểm $A,D$ cùng thuộc đường thẳng $GM$ nên các điểm $A,G,M,D$ thẳng hàng.

Ta có: $GA=GD$. Suy ra $G$ là trung điểm của $AD$.

Vì thế $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Vậy $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

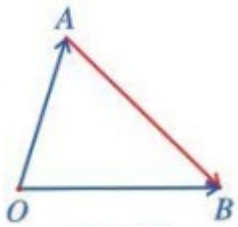
*Chú ý:* $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

## 2. Hiệu của hai vectơ

Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectở đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vectơ còn được gọi là phép trừ vectơ.

***Ví dụ 6.*** Cho ba điểm $A,B,O$.




Vectơ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ là vectơ nào?

***Giải***

Ta có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+(-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$.

*Nhận xét:* Vối ba điểm bất kì $A,B,O$ ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

***Ví dụ 7.*** Cho bốn điểm bất kì $A,B,C,D$. Chứng minh $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

***Giải***

Tacó: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DD}=\vec{0}$

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. CỘNG TRỪ VÉC TƠ

**Câu 1.** Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ sao cho $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

a) Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Chứng minh rằng $O$ là trung điểm của $AB$.

b) Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Chứng minh rằng $B\equiv O$.

**Câu 2.** Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và $AD$. Xác định tổng của hai véc-tơ $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$.

**Câu 3.** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $M$, $N$ và $P$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $AC$ và $BC$. Xác định hiệu $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}$.

**Câu 4.** Chứng minh rằng điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$.

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $M$, $N$ và $P$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $AC$ và $BC$. Chứng minh rằng với điểm $O$ bất kì ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

**Câu 6.** Gọi $O$ là tâm của tam giác đều $ABC$.Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

**Câu 7.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $CA$, $AB$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ với $O$ là điểm bất kì.

**Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$, $M$ là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

**Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $O$ là một điểm bất kì trên đường chéo $AC$. Qua $O$ kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt $AB$ và $DC$ lần lượt tại $M$ và $N$, cắt $AD$ và $BC$ lần lượt tại $E$ và $F$. Chứng minh

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

b) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{FN}$

**Câu 10.** Cho năm điểm $A,B,C,D,E$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$.

**Câu 11.** Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm $O$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

**Câu 12.** Cho các điểm $A,B,C,D,E,F$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

**Câu 13.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn tâm $O$, và $M$ là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$. b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}$.

## DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

**Câu 14.** Cho hai điểm phân biệt $A,B$. Tìm điểm $M$ thỏa mãn điều kiện sau đây:

a) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$ b) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ d) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AM}$

**Câu 15.** Cho tam giác $ABC$. Tìm điểm $M$ thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

**Câu 16.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp các điểm m sao cho

a) $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

b) $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MC}\right|$

**Câu 17.** Cho 2 điểm $A$ và $B$. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$

## DẠNG 3. TÍNH ĐỘ DÀI VÉC TƠ

**Câu 18.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

**Câu 19.** Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$. Trên cạnh $AC=b$ lấy hai điểm $E$ và $F$ sao cho $AE=EF=FC$, $BE$ cắt trung tuyến $AM$ tại $N$. Tính độ dài vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{MN}$

**Câu 20.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $\widehat{ABC}=30^0$ và $BC=a\sqrt{5}$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

**Câu 21.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $b$. Tính $\left|\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}\right|,\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|,\left|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right|$

**Câu 22.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$ có $O$ là giao điểm của hai đường chéo. Hãy tính $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|,\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|$

**Câu 23.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$ có tâm $O$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB$, $N$ là điểm đối xứng với $C$ qua $D$. Hãy tính độ dài của các vec tơ sau $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MN}$.

**Câu 24.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$ có tâm $O$ và $M$ là trung điểm của $AB$. Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

**Câu 25.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm $O$ và cạnh $a$. $M$ là một điểm bất kỳ

a)Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}\right|$, $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|$

b)Tính độ dài vecto $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

**Câu 26.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm $O$ và cạnh $a$ và $M$ là một điểm bất kỳ. Tính

a)Tính $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{AD}\right|$

b)Tính $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|$

c)Tính $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|$

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### DẠNG 1. CỘNG TRỪ VÉC TƠ

**Câu 1.** Cho hình bình hành tâm $O$. Kết quả nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ **C.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{CB}$

**Câu 2.** Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ khác vectơ-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. **B.** $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

**C.** $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. **D.** $\vec{0}+\vec{a}=\vec{0}$.

**Câu 3.** Cho hình bình hành $ABCD$. Vectơ tổng $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ bằng

**A.** $\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{DB}$.

**Câu 4.** Cho ba điểm phân biệt $A, B, C$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

**C.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}$.

**Câu 5.** Cho bốn điểm phân biệt $A, B, C, D$. Vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ bằng

**A.** $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{BA}$.

**Câu 6.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $AB, BC, CA$. Vectơ tổng $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng

**A.** $\overrightarrow{BP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$. **C.** $\overrightarrow{CP}$. **D.** $\overrightarrow{PA}$.

**Câu 7.** Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.

**C.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$.

**Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IB}$. **B.** $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{DI}$.

**C.** $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{IA}$.

**Câu 9.** Cho các điểm phân biệt $M,N,P,Q,R$. Xác định vectơ tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

**A.** $\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$. **C.** $\overrightarrow{MQ}$. **D.** $\overrightarrow{MR}$.

**Câu 10.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
**C.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$.

**Câu 11.** Cho tam giác $ABC$ và $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $BC,CA,AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.
**C.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MP}$.

**Câu 12.** Cho hình vuông $ABCD$, tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{CA}$.
**C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$. **D.** $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

**Câu 13.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm $O$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?.

**A.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$.
**C.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$.

**Câu 14.** Gọi $O$ là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

**A.** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}.$. **B.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}.$.
**C.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}.$. **D.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}.$.

**Câu 15.** Gọi $O$ là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

**A.** $\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{DA}$. **C.** $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$. **D.** $\overrightarrow{AB}$.

**Câu 16.** Cho $O$ là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào?

**A.** $\overrightarrow{BA}$. **B.** $\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}$.

**Câu 17.** Chọn khẳng định sai:

**A.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
**B.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}$.
**C.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
**D.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

**Câu 18.** Cho 4 điểm bất kỳ $A$, $B$, $C$, $D$. Đẳng thức nào sau đây là đúng:

**A.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CO}$. **B.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.
**C.** $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. **D.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.

**Câu 19.** Chỉ ra vectơ tổng $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{RN}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{QR}$ trong các vectơ sau

**A.** $\overrightarrow{MR}$. **B.** $\overrightarrow{MQ}$. **C.** $\overrightarrow{MP}$. **D.** $\overrightarrow{MN}$.

**Câu 20.** Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm $M$ tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$. **B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}$.
**C.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MD}$. **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

**Câu 21.** Cho bốn điểm $A$, $B$, $C$, $D$ phân biệt. Khi đó vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}$ là:

**A.** $\vec{u}=\vec{0}$. **B.** $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$. **C.** $\vec{u}=\overrightarrow{CD}$. **D.** $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$.

**Câu 22.** Cho bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ phân biệt. Khi đó vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$ bằng:

**A.** $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$. **B.** $\vec{u}=\vec{0}$. **C.** $u=\overrightarrow{CD}$. **D.** $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$.

**Câu 23.** Cho 4 điểm $A,\ B,\ C,\ D$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

**C.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CB}$.

**Câu 24.** Cho Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

**C.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

**Câu 25.** Cho Cho lục giác đều $ABCDEF$ và $O$ là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức **sai**?

**A.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{EO}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.

**C.** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.

**Câu 26.** Cho 4 điểm A, B, C, D**.** Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

**C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$.

**Câu 27.** Cho ΔABC, vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành ABEF, ACPQ, BCMN. Xét các mệnh đề:

$(I)$ $\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{MP}$

$(II)$ $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{QP}=-\overrightarrow{MN}$

$(III)$ $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{MC}$

Mệnh đề đúng là :

**A.** Chỉ $(I)$. **B.** Chỉ $(III)$. **C.** $(I)$ và $(II)$. **D.** Chỉ $(II)$.

**Câu 28.** Cho $5$ điểm phân biệt $M,N,P,Q,R$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.

**C.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MR}$. **D.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}$.

**Câu 29.** Cho hình bình hành $ABCD$, đẳng thức véctơ nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

**C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

**Câu 30.** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm $O$. Khẳng định nào sau đây là đúng:

**A.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$. **B.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BO}$.

**C.** $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BD}$.

**Câu 31.** Cho 4 điểm bất kì $A$, $B$, $C$, $O$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$. **B.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}$.

**C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$.

**Câu 32.** Cho 3 điểm phân biệt $A,B,C$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.

**C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$.

**Câu 33.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}$ bằng

**A.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{CD}$.

**Câu 34.** Cho 6 điểm $A,B,C,D,E,F$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}$.

**B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}$.

**C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.

**D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}$.

**Câu 35.** Cho hình bình hành ABCD, gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn BC và A**D.** Tính tổng $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}$.

**A.** $\overrightarrow{AC}$.. **B.** $\overrightarrow{NM}$.. **C.** $\overrightarrow{CA}$.. **D.** $\overrightarrow{MN}$..

**Câu 36.** Cho 6 điểm $A,B,C,D,E,F$. Tổng véc tơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$ bằng

**A.** $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DB}$. **B.** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DF}$.

**C.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}$. **D.** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DF}$.

**Câu 37.** Cho các điểm phân biệt $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$. Đẳng thức nào sau đây ***sai***?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$.

**C.** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EC}$.

**Câu 38.** Cho các điểm phân biệt $A,\ B,\ C,\ D$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$. **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}$.

**C.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

**Câu 39.** **6**Cho tam giác $ABC$, trung tuyến $AM$. Trên cạnh $AC$ lấy điểm $E$ và $F$ sao cho $AE=EF=FC$, $BE$ cắt $AM$ tại $N$. Chọn mệnh đề đúng:

**A.** $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

**C.** $\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NE}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{NF}=\overrightarrow{EF}$.

**Câu 40.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $D,E,F$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC,CA,AB$. Hệ thức nào là đúng?

**A.** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}$. **B.** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

**C.** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$. **D.** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

**Câu 41.** Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, tâm $O$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}$

**C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=6\left|\overrightarrow{AB}\right|$. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

**Câu 42.** Cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$, $G_1$ là điểm đối xứng của $G$ qua $M$. Vectơ tổng $\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}$ bằng

**A.** $\overrightarrow{GA}$. **B.** $\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{G_1A}$. **D.** $\overrightarrow{G_1M}$.

**Câu 43.** Xét tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $O$ thỏa mãn $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

**1)** $\overrightarrow{OG}=\vec{0}$;

**2)** Tam giác $ABC$ là tam giác vuông cân;

**3)** Tam giác $ABC$ là tam giác đều;

**4)** Tam giác $ABC$ là tam giác cân.

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

**Câu 44.** Xét tam giác $ABC$ nội tiếp có $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp, $H$ là trực tâm. Gọi $D$ là điểm đối xứng của $A$ qua $O$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

**1)** $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$;

**2)** $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{HA}$;

**3)** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HH_1}$, với $H_1$ là điểm đối xứng của $H$ qua $O$;

**4)** Nếu $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ thì tam giác $ABC$ là tam giác đều.

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

**Câu 45.** Cho hình bình hành *ABCD.* Hai điểm *M, N* lần lượt là trung điểm của *BC* và *AD.* Tìm đẳng thức sai:

**A.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

**C.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NC}$ **D.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{DB}$

**Câu 46.** Cho 6 điểm *A, B, C, D, E, F* bất kì trên mặt phẳng. Tìm đẳng thức sai trong các đẳng thức sau:

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$

**C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}$ **D.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$

**Câu 47.** Cho $\Delta ABC$, các điểm *M, N, P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB, AC, BC.* Với *O* là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)$ **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$

**C.** $2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ **D.** $2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=3\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)$

**Câu 48.** Cho 4 điểm *M, N, P, Q* bất kì. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng.

**A.** $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MN}$ **B.** $\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{MQ}$

**C.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MQ}$ **D.** $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MQ}$

**Câu 49.** Cho 6 điểm *A, B, C, D, E, F* phân biệt. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{BF}=\vec{0}$

**C.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$ **D.** $\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF}$

**Câu 50.** Cho $n$ điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1, A_2, ..., A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1, B_2, ..., B_n$ ($A_1 \neq B_n$). Vectơ tổng $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}$ bằng

**A.** $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{A_1A_n}$. **C.** $\overrightarrow{B_1B_n}$. **D.** $\overrightarrow{A_1B_n}$.

## DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

**Câu 51.** Cho hai điểm *A, B* phân biệt. Xác định điểm *M* sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

**A.** *M* ở vị trí bất kì

**B.** *M* là trung điểm của *AB*

**C.** Không tìm được *M*

**D.** *M* nằm trên đường trung trực của *AB*

**Câu 52.** Cho đoạn thẳng $AB$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BA}=\vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ là trung điểm $AB$. **B.** $M$ trùng $A$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $A$ là trung điểm $MB$.

**Câu 53.** Cho $\Delta ABC$, $B$. Tìm điểm $I$ để $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng phương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $I$ là trung điểm $AB$. **B.** $I$ thuộc đường trung trực của $AB$.

**C.** Không có điểm $I$. **D.** Có vô số điểm $I$.

**Câu 54.** Cho 2 điểm phân biệt $A$, $B$. Tìm điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ là trung điểm $AB$. **B.** $M$ thuộc đường trung trực của $AB$.

**C.** Không có điểm $M$. **D.** Có vô số điểm $M$.

**Câu 55.** Cho tam giác $ABC$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ là trung điểm $AB$. **B.** $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $A$ là trung điểm $MB$.

**Câu 56.** Cho tứ giác $ABCD$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $D$. **B.** $M$ trùng $A$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $M$ trùng $C$.

**Câu 57.** Cho $ABCD$ là hình bình hành, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $D$. **B.** $M$ trùng $A$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $M$ trùng $C$.

**Câu 58.** Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $O$. **B.** $M$ trùng $A$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $M$ trùng $C$.

**Câu 59.** Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $D$. **B.** $M$ trùng $A$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $M$ trùng $C$.

**Câu 60.** Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $O$. **B.** $M$ trùng $A$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $M$ trùng $C$.

**Câu 61.** Cho tứ giác $PQRN$ có $O$ là giao điểm 2 đường chéo, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{ON}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $P$. **B.** $M$ trùng $Q$.

**C.** $M$ trùng $O$. **D.** $M$ trùng $R$.

**Câu 62.** Cho $\Delta ABC$, tìm điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ là trung điểm $AB$. **B.** $M$ là trung điểm $BC$.

**C.** $M$ là trung điểm $CA$. **D.** $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$.

**Câu 63.** Cho $\Delta DEF$, tìm $M$ thỏa $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{ED}$. **B.** $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{ED}$. **C.** $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{DF}$. **D.** $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{DE}$.

**Câu 64.** Cho $\Delta DEF$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EF}$. **B.** $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{EM}$. **C.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{EM}$. **D.** $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{DE}$.

**Câu 65.** Cho $\Delta ABC$ có $O$ là trung điểm $BC$, tìm $M$ thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $A$. **B.** $M$ trùng $B$.

**C.** $M$ trùng $O$. **D.** $M$ trùng $C$.

**Câu 66.** Cho $\Delta ABC$, tìm điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ là trung điểm $AB$. **B.** $M$ là trung điểm $BC$.

**C.** $M$ là trung điểm $CA$. **D.** $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$.

**Câu 67.** Cho $\Delta ABC$, điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $A$. **B.** $M$ trùng $B$.

**C.** $ACMB$ là hình bình hành. **D.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$.

**Câu 68.** Cho $\Delta ABC$, $D$ là trung điểm $AB$, $E$ là trung điểm $BC$, điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CM}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{ED}$.

**C.** $M$ là trung điểm $BC$. **D.** $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{BD}$.

**Câu 69.** Cho tứ giác $ABCD$, điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ là trung điểm $AB$. **B.** $M$ là trung điểm $BC$.

**C.** $D$ là trung điểm $BM$. **D.** $M$ là trung điểm $DC$.

**Câu 70.** Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vị trí điểm $N$ thỏa mãn:

$\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.

**A.** Điểm $N$ là trung điểm cạnh $AB$ **B.** Điểm $C$ là trung điểm cạnh $BN$

**C.** Điểm $C$ là trung điểm cạnh $AM$ **D.** Điểm $B$ là trung điểm cạnh $NC$

**Câu 71.** Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vị trí điểm $M$ thỏa mãn: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}$.

**A.** Điểm $M$ là trung điểm cạnh $AC$ **B.** Điểm $M$ là trung điểm cạnh $BD$

**C.** Điểm $C$ là trung điểm cạnh $AM$ **D.** Điểm $B$ là trung điểm cạnh $MC$

**Câu 72.** Trên đường tròn $C(O;R)$ lấy điểm cố định $A$; $B$ là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi $M$ là điểm di động sao cho $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Khi đó tập hợp điểm $M$ là:

**A.** đường tròn tâm $O$ bán kính $2R$. **B.** đường tròn tâm $A$ bán kính $R$

**C.** đường thẳng song song với $OA$ **D.** đường tròn tâm $C$ bán kính $R\sqrt{3}$

**Câu 73.** Cho $\Delta ABC$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|=\overrightarrow{MC}$ là:

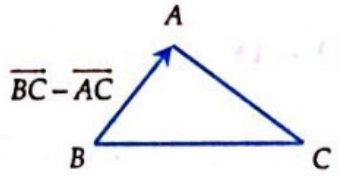
**A.** một đường tròn tâm $C$ **B.** đường tròn tâm $I$ ($I$ là trung điểm của $AB$)

**C.** một đường thẳng song song với $AB$ **D.** là đường thẳng trung trực của $BC$

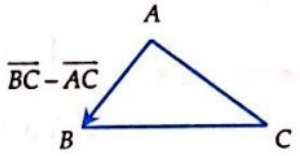
## DẠNG 3. TÍNH ĐỘ DÀI VÉC TƠ

**Câu 74.** Cho $\Delta ABC$. Vectơ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào sau đây?

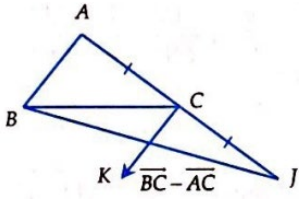
**A.**



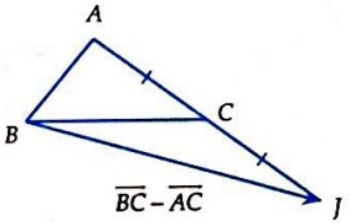

**B.**




**C.**




**D.**



**Câu 75.** Cho tam giác $\Delta ABC$ vuông tại $A$ có $AB = 3cm$, $BC = 5cm$. Khi đó độ dài $\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right|$ là:

**A.** 4 **B.** 8 **C.** $2\sqrt{13}$ **D.** $\sqrt{13}$

**Câu 76.** Cho hình thang cân $ABCD$, có đáy nhỏ và đường cao cùng bằng $2a$ và $\widehat{ABC} = 45°$. Tính $\left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right|$.

**A.** $a\sqrt{3}$ **B.** $2a\sqrt{5}$ **C.** $a\sqrt{5}$ **D.** $a\sqrt{2}$

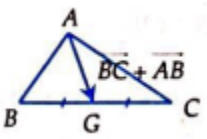
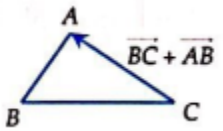
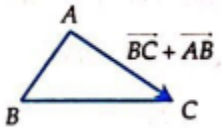
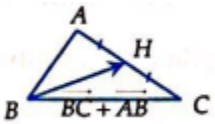
**Câu 77.** Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc 60°. Biết $\left|\vec{a}\right| = 6; \left|\vec{b}\right| = 3$. Tính $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| + \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$

**A.** $3\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)$ **B.** $3\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)$ **C.** $6\left(\sqrt{5} + 3\right)$ **D.** $\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3} + \sqrt{51}\right)$

**Câu 78.** Cho hình thang $ABCD$ có $AB$ song song với $CD$. Cho $AB = 2a$, $CD = a$. Gọi $O$ là trung điểm của $AD$. Khi đó:

**A.** $\left|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right| = 3a$ **B.** $\left|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right| = a$ **C.** $\left|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right| = \frac{3a}{2}$ **D.** $\left|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right| = 0$

**Câu 79.** Cho $\Delta ABC$. Vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ được vẽ đúng ở hình nào dưới đây?

| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |






**Câu 80.** Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60°$ và cạnh là $a$. Tính độ dài $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$.

**A.** $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $2a$

**Câu 81.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là $a$. $O$ là giao điểm của hai đường chéo. Tính $\left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}\right|$.

**A.** $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{2}$

**Câu 82.** Với $\forall \vec{a}, \vec{b}$ độ dài $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$:

**A.** Bao giờ cũng lớn hơn $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$ **B.** Không nhỏ hơn $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$

**C.** Bao giờ cũng nhỏ hơn $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$ **D.** Không lớn hơn $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$

**Câu 83.** Cho $\Delta ABC$ đều cạnh $a$. Khi đó $\left|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}\right|$ bằng:

**A.** 0 **B.** $3a$ **C.** $a$ **D.** $a\left(\sqrt{3} - 1\right)$

**Câu 84.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$, trọng tâm $G$. Tính độ dài vectơ $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}\right|$.

**A.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a}{3}$ **C.** $\frac{2a}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

**Câu 85.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là 3. Tính độ dài $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$:

**A.** 6 **B.** $6\sqrt{2}$ **C.** 12 **D.** 0

**Câu 86.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$, tâm $O$ và $M$ là trung điểm $AB$. Tính độ dài $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|$.

**A.** $a$ **B.** $3a$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $2a$

**Câu 87.** Cho $\Delta ABC$ vuông cân tại $A$ có $BC=a\sqrt{2}$, $M$ là trung điểm $BC$. Tính độ dài vectơ $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right|$.

**A.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

**Câu 88.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh bằng 3. $H$ là trung điểm của $BC$. Tìm mệnh đề sai.

**A.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=3\sqrt{3}$ **B.** $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}\right|=\frac{\sqrt{63}}{2}$ **C.** $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right|=3$ **D.** $\left|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}\right|=\sqrt{3}$

**Câu 89.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $a$. Độ dài $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|$ bằng

**A.** $2a$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

**Câu 90.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$, mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AC}=a$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=a$.

**Câu 91.** Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm $C$.Có bao nhiêu điểm $D$ thỏa $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$?

**A.** Vô số. **B.** 1 điểm. **C.** 2 điểm. **D.** Không có điểm nào.

**Câu 92.** Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

**A.** $\overrightarrow{0}$ cùng hướng với mọi vectơ. **B.** $\overrightarrow{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

**C.** $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|>0$.

**Câu 93.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $I$; $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

**C.** $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|$. **D.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

**Câu 94.** Cho tam giác $ABC$ đều có cạnh $AB=5$, $H$ là trung điểm của $BC$. Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|$.

**A.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=5$.

**C.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{5\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{5\sqrt{7}}{2}$.

**Câu 95.** Gọi $O$ là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

**A.** $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$. **C.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$.

**Câu 96.** Có hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm $O$, biết hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều có cường độ là $50\,(\mathrm{N})$ và chúng hợp với nhau một góc $60°$. Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

**A.** $100\,(\mathrm{N})$. **B.** $50\sqrt{3}\,(\mathrm{N})$.

**C.** $100\sqrt{3}\ (\text{N})$. **D.** Đáp án khác.

**Câu 97.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $ABCD$ là hình thoi.

**C.** $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** $ABCD$ là hình thang cân.

**Câu 98.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$ có $AB=a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

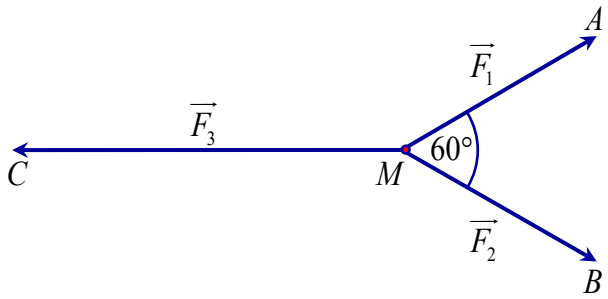
**A.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{2}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

**C.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a$.

**Câu 99.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$, có $AH$ là đường trung tuyến. Tính $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\right|$.

**A.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

**Câu 100.** Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm $M$ và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng $25N$ và góc $\widehat{AMB}=60°$. Khi đó cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ là




**A.** $25\sqrt{3}$ N. **B.** $50\sqrt{3}$ N. **C.** $50\sqrt{2}$ N. **D.** $100\sqrt{3}$ N.

**Câu 101.** Cho tam giác $ABC$ có $G$ là trọng tâm, $I$ là trung điểm $BC$. Tìm khẳng định **sai**.

**A.** $\left|\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}\right|=IA$. **B.** $\left|\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right|=BC$.

**C.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2AI$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=3GA$.

**Câu 102.** Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

**A.** $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$. **B.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}\right|$.

**C.** $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$.

**Câu 103.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.

**A.** $4a\sqrt{2}$. **B.** $4a$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

**Câu 104.** Cho tam giác $ABC$ đều, cạnh $2a$, trọng tâm $G$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}$ là

**A.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 105.** Tam giác $ABC$ thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ thì tam giác $ABC$ là

**A.** Tam giác vuông $A$. **B.** Tam giác vuông $C$.

**C.** Tam giác vuông $B$. **D.** Tam giác cân tại $C$.

**Câu 106.** Cho hai lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm $M$ cường độ hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt là $300(\text{N})$ và $400(\text{N})$. $\widehat{AMB} = 90°$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

**A.** $0\,(\text{N})$. **B.** $700(\text{N})$. **C.** $100(\text{N})$. **D.** $500(\text{N})$.

# Bài 4. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTƠ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

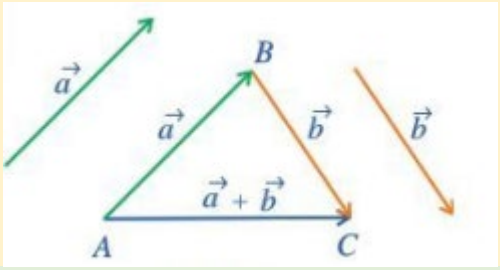
## PHẦN A. LÝ THUYẾT

## I. Tổng của hai vectơ

### 1. Định nghĩa

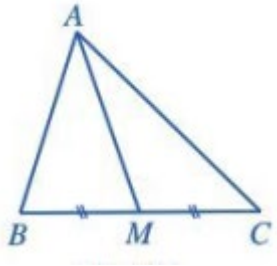
Với ba điểm bất kì $A,B,C$, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$, ki hiệu là $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Lấy một điểm $A$ tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.




Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là phép cộng vectơ.

***Ví dụ 1.*** Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$



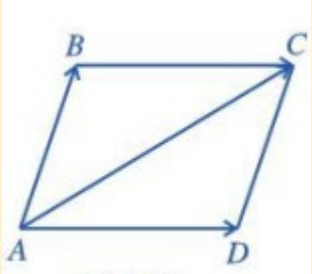

Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}$.

***Giải***

Vì $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BM}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$

### 2. Quy tắc hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.




***Ví dụ 2.*** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Chứng minh $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$.

***Giải***

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.

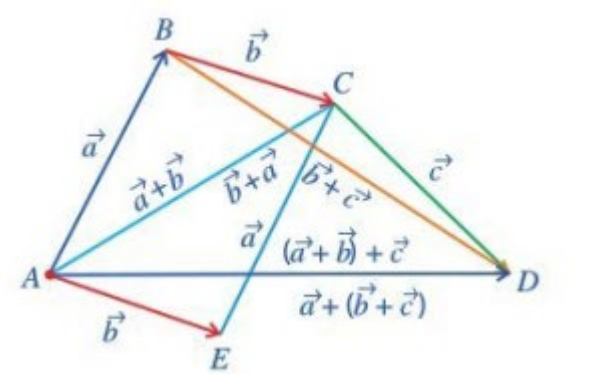
Suy ra $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AC}|=AC,|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BD}|=BD$.

Do $AC=BD$ nên $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$.

### 3. Tính chất

Với ba vectở tuỳ ý $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ta có:

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (tính chất kết hợp);
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (tính chất của vecto-không).




Chú ý: Tổng ba vecto $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ được xác định theo một trong hai cách:
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ hoặc $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

***Ví dụ 3.*** Cho bốn điểm $A,B,C,D$. Chứng minh
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

***Giải***

Ta có:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

## II. Hiệu của hai vec tơ

### 1. Định nghĩa

Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vecto $\vec{a}$ được gọi là vecto đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $-\vec{a}$ được gọi là hai vectơ đối nhau.

*Quy ước*: Vectơ đối của vecto $\vec{0}$ là vecto $\vec{0}$.

*Nhận xét.* $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\left(-\vec{a}\right)+\vec{a}=\vec{0}$

-Hai vecto $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

-Với hai điểm $A,B$ ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

- Với ba điểm $A,B,C$ bất kì, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Cho hai điểm $A,B$. Khi đó, hai vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}$ là hai vectơ đối nhau, tức là $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

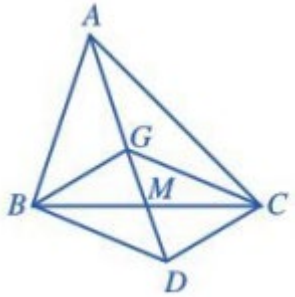
***Ví dụ 4.*** Cho $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$. Chứng tỏ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ là hai vectơ đối nhau. Viết đẳng thức liên hệ giữa hai vectơ đó.

***Giải***

Hai vecto $\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}$ là hai vecto đối nhau vì chúng ngược hướng và cùng độ dài, $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

*Chú ý:* $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

***Ví dụ 5.*** Cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$ và $D$ là điểm đối xứng vơi $G$ qua $M$. Chứng minh:




a) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

***Giải***

a) Vì tứ giác $BGCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên tứ giác $BGCD$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$.

b) Vì hai điểm $A,D$ cùng thuộc đường thẳng $GM$ nên các điểm $A,G,M,D$ thẳng hàng.

Ta có: $GA=GD$. Suy ra $G$ là trung điểm của $AD$.

Vì thế $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Vậy $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

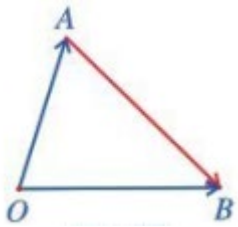
*Chú ý:* $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

## 2. Hiệu của hai vectơ

Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectở đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vectơ còn được gọi là phép trừ vectơ.

***Ví dụ 6.*** Cho ba điểm $A,B,O$.




Vectơ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ là vectơ nào?

***Giải***

Ta có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+(-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$.

*Nhận xét:* Với ba điểm bất kì $A,B,O$ ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

***Ví dụ 7.*** Cho bốn điểm bất kì $A,B,C,D$. Chứng minh $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

***Giải***

Tacó: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DD}=\vec{0}$

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. CỘNG TRỪ VÉC TƠ

**Câu 1.** Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ sao cho $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

a) Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Chứng minh rằng $O$ là trung điểm của $AB$.

b) Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Chứng minh rằng $B\equiv O$.

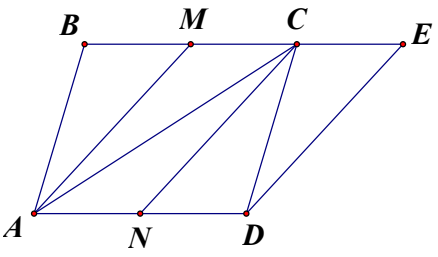
**Lời giải.**

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}\Rightarrow$ $O$ là trung điểm của $AB$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OB}=\vec{0}\Rightarrow B\equiv O$.

**Câu 2.** Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và $AD$. Xác định tổng của hai véc-tơ $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$.

**Lời giải.**




Vì $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AN}$ nên

$\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}$.

Vì $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ nên

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}$.

Vì $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AM}$ nên $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}$, với $E$ là đỉnh của hình bình hành $DAME$.

Vì tứ giác $AMCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$.

**Câu 3.** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $M$, $N$ và $P$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $AC$ và $BC$. Xác định hiệu $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}$.

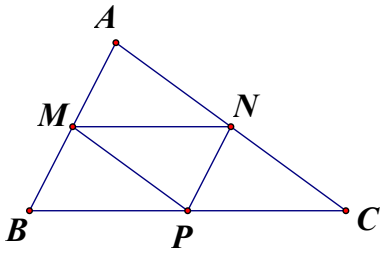
**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NM}$.

Vì $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MP}$ nên $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$.

Vì $-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NP}$ nên $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.

Vì $-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PC}$ nên $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$.




**Câu 4.** Chứng minh rằng điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$.

**Lời giải.**

Nếu $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ thì $IA=IB$ và hai véc-tơ $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng. Vậy $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$

Ngược lại, nếu $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$ thì $IA=IB$ và hai véc-tơ $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng.

Do đó $A$, $I$, $B$ thẳng hàng. Vậy $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$.

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $M$, $N$ và $P$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $AC$ và $BC$. Chứng minh rằng với điểm $O$ bất kì ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

**Lời giải.**

Ta có

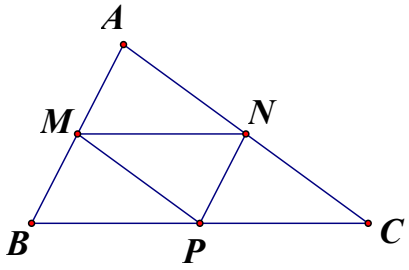
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}$

$=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{NC}$

$=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{AN}$

$=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM}$

$=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\vec{0}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.



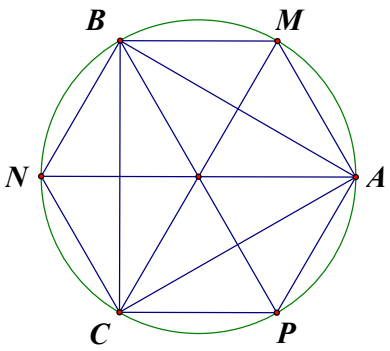

**Câu 6.** Gọi $O$ là tâm của tam giác đều $ABC$.Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

**Lời giải.**

Vẽ lục giác đều $AMBNCP$ nội tiếp đường tròn $(O)$.

Vì $BOCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ON}$.

Do đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$.




**Câu 7.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $CA$, $AB$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ với $O$ là điểm bất kì.

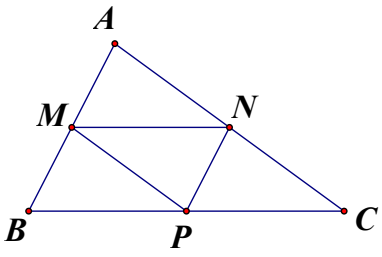
**Lời giải.**

a) Vì $PN$, $MN$ là đường trung bình của tam giác $ABC$ nên $PN \,//\, BM$, $MN \,//\, BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PN}$.

Vì $N$ là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NA}$.

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\left(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}\right)+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$.



b) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ $\Rightarrow \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}$.

Mà $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ do $M$ là trung điểm của $BC$. Vậy $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}\right)$

$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$

$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)-\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}\right).$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

**Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$, $M$ là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

**Lời giải.**

a) Ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=\vec{0}$.

Tương tự: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}.$

**Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $O$ là một điểm bất kì trên đường chéo $AC$. Qua $O$ kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt $AB$ và $DC$ lần lượt tại $M$ và $N$, cắt $AD$ và $BC$ lần lượt tại $E$ và $F$. Chứng minh

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

b) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{FN}$

**Lời giải**

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

b) Tứ giác $AMOE$ và tứ giác $OFCN$ là hình bình hành nên

$\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{FC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{FO}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{FC}\right)=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}\right)+\left(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}\right)$

$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.

**Câu 10.** Cho năm điểm $A,B,C,D,E$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$.

**Lời giải**

a) Biến đổi vế trái ta có

$VT=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\right)=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{DA}$

$=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}=VP$ (đpcm).

b) Đẳng thức tương đương với $\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ (đúng).

**Câu 11.** Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm $O$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

**Lời giải**

Ta chứng minh $\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ có hai giá khác nhau.

Gọi $d$ là đường thẳng chứa $OD$ thì $d$ là một trục đối xứng của ngũ giác đều.

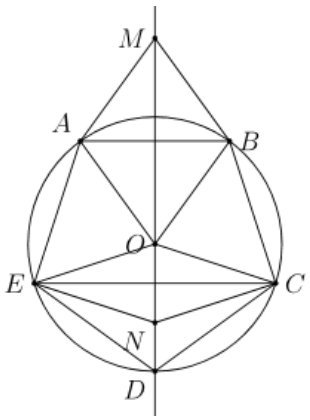
Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}$, trong đó $M$ là đỉnh của hình thoi $OAMB$ và thuộc $d$.

Tương tự $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{ON}$, trong đó $N$ thuộc $d$.

Do đó $\vec{v}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}\right)+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OD}$ có giá là d.

Ta ghép $\vec{v}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OE}$ thì $\vec{v}$ có giá là đường thẳng $OE$.

Vì $\vec{v}$ có $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$ giá khác nhau nên $\vec{v}=\vec{0}$.




**Câu 12.** Cho các điểm $A,B,C,D,E,F$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

**Lời giải**

Cách 1. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BF}\right)+\left(\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$ (đúng).

Cách 2. $VT=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}\right)+\left(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}\right)+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}\right)$

$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}=VP$.

**Câu 13.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn tâm $O$, và $M$ là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$. b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}$.

**Lời giải**

a) Tâm $O$ của lục giác đều là tâm đối xứng của lục giác nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF}\right)=\vec{0}$.

b)

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FE}\right)=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{FE}\right)$

$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}\right)=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)$

$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}+\vec{0}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}$.

## DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

**Câu 14.** Cho hai điểm phân biệt $A,B$. Tìm điểm $M$ thỏa mãn điều kiện sau đây:

a) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$ b) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ d) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AM}$

**Lời giải**

a) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}$. Vậy mọi điểm $M$ đều thỏa mãn.

b) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow A\equiv B$. Vậy không có điểm $M$ nào thỏa mãn

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$. Vậy $M$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$.

d) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow M\equiv A$.

**Câu 15.** Cho tam giác $ABC$. Tìm điểm $M$ thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}$.

Vậy $M$ là điểm xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}$ hay $M$ là đỉnh thứ tư trong hình bình hành $ABCM$

**Câu 16.** Cho tam giác $ABC$**.** Tìm tập hợp các điểm m sao cho

a) $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

b) $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MC}\right|$

**Lời giải.**

a)Ta có $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|\Leftrightarrow MA=BC$

Vậy M cách điểm $A$ một đoạn bằng $BC$ không đổi nên tập hợp các điểm $M$ là đường tròn tâm $A$, bán kính $R=BC$**.**

b)Ta có $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow MA=MC$

Vậy $M$ cách đều 2 điểm $A$ và $C$ nên tập hợp các điểm $M$ là đường trung trực của đoạn $AC$.

**Câu 17.** Cho 2 điểm $A$ và $B$**.** Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$

**Lời giải.**

Vẽ hình bình hành $AMBN$. Gọi $O$ là giao điểm 2 đường chéo, ta có

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MN}\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=MN=2MO$

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|=AB$

Điều kiện tương đương $2MO=AB\Rightarrow MO=\dfrac{1}{2}AB$

Tập hợp các điểm $M$ có tính chất $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là đường tròn đường kính $AB$

## DẠNG 3. TÍNH ĐỘ DÀI VÉC TƠ

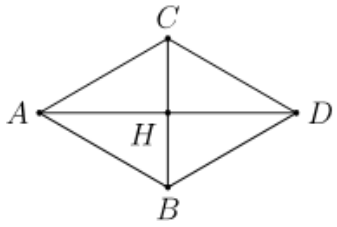
**Câu 18.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

**Lời giải**

Từ tam giác đều $ABC$ cạnh $a$, vẽ hình thoi $BACD$ thì

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ nên $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=AD=2AH=2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

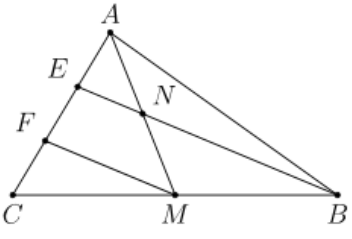
Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ nên $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=CB=a$.




**Câu 19.** Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$. Trên cạnh $AC=b$ lấy hai điểm $E$ và $F$ sao cho $AE=EF=FC$, $BE$ cắt trung tuyến $AM$ tại $N$. Tính độ dài vecto $\vec{u}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{MN}$

**Lời giải**

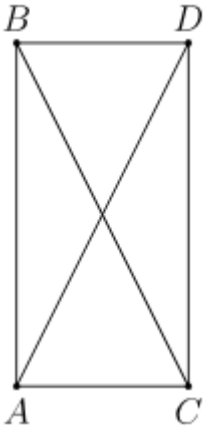
Ta có $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FC}$. Vì $MF\,//\,BE$ nên $N$ là trung điểm của $AM$. Suy ra $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.



Do đó $\vec{u}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}$ nên $\left|\vec{u}\right|=AC=b$.

**Câu 20.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $\widehat{ABC}=30^0$ và $BC=a\sqrt{5}$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

**Lời giải**




Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Mà $\sin\widehat{ABC}=\dfrac{AC}{BC}\Rightarrow AC=BC.\sin\widehat{ABC}=a\sqrt{5}\sin 30°=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

Ta có: $AC^2+AB^2=BC^2\Rightarrow AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{5a^2-\dfrac{5a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Vì vậy $\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Gọi $D$ là điểm sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

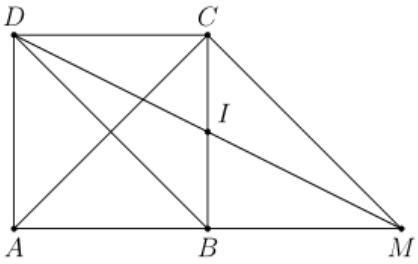
Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

Vì tam giác $ABC$ vuông tại $A$ nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật suy ra $AD=BC=a\sqrt{5}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=AD=a\sqrt{5}$.

**Câu 21.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $b$. Tính $\left|\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}\right|,\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|,\left|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right|$

**Lời giải**




Ta có $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CA}$ nên

$\left|\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=CA=b\sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$ nên

$\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=DB=b\sqrt{2}$.

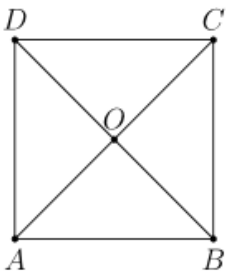
Vẽ hình bình hành $CDBM$ thì $DM$ cắt $BC$ tại trung điểm $I$ của mỗi đường.

Ta có $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}$ nên $\left|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{DM}\right|=DM=2DI$.

Mà $DI^2=b^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}b^2\Rightarrow\left|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right|=b\sqrt{5}$.

**Câu 22.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$ có $O$ là giao điểm của hai đường chéo. Hãy tính $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|,\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|$

**Lời giải**




Ta có $AC=BD=a\sqrt{2}$, $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BO}$. Do đó

$\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=BO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|=2a$.

Ta có $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BD}$. Do đó $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|=BD=a\sqrt{2}$.

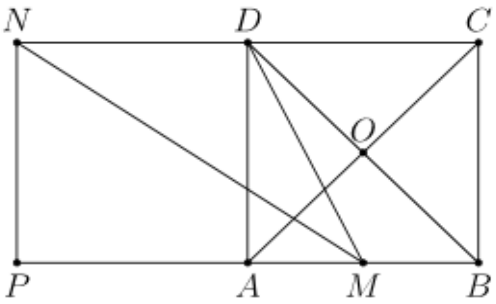
**Câu 23.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$ có tâm $O$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB$, $N$ là điểm đối xứng với $C$ qua $D$. Hãy tính độ dài của các vec tơ sau $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MN}$.

**Lời giải**

Áp dụng đinh lý Pitago trong tam giác vuông $MAD$ ta có

$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{MD}\right| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Qua N kẻ đường thẳng song song với $AD$ cắt $AB$ tại $P$.




Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và

$PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$.

Áp dụng định lý Piatgo trong tam giác vuông $NPM$ ta có

$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4}$

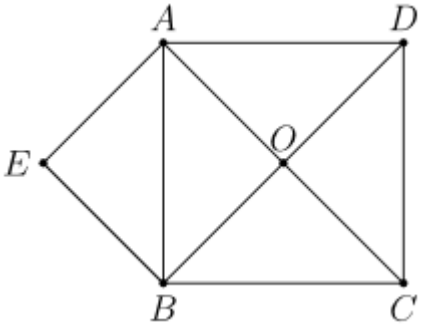
$\Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{13}}{2}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

**Câu 24.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$ có tâm $O$ và $M$ là trung điểm của $AB$. Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

**Lời giải**

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = a$. $\left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

$\left|\overrightarrow{OA}\right| = OA = \frac{1}{2}\text{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \left|\overrightarrow{OM}\right| = OM = \frac{a}{2}$.




Gọi $E$ là điểm sao cho tứ giác $OBEA$ là hình bình hành. Khi đó nó cũng là hình vuông.

Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE} \Rightarrow \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OE}\right| = OE = AB = a$.

**Câu 25.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm $O$ và cạnh $a$. $M$ là một điểm bất kỳ

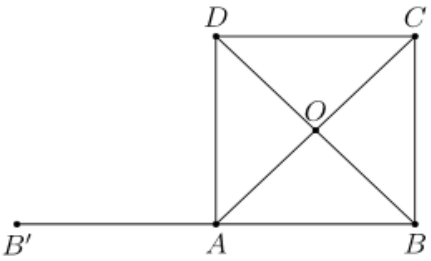
a)Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}\right|$, $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right|$

b)Tính độ dài vecto $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

**Lời giải**

a) Ta có $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$.

$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}\right| = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.




Ta có: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$. Suy ra

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right| = 0$.

b) Áp dụng quy tắc trừ ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) - \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC}$.

Lấy $B'$ là điểm đối xứng của $B$ qua $A$. Khi đó $-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB'} \Rightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BB'}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = \left|\overrightarrow{BB'}\right| = BB' = 2a$.

**Câu 26.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm $O$ và cạnh $a$ và $M$ là một điểm bất kỳ. Tính

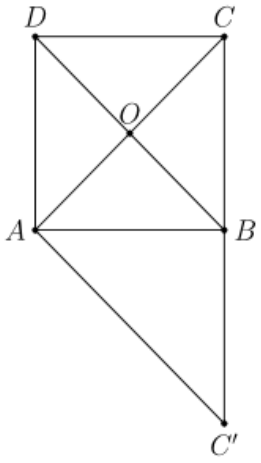
a)Tính $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{AD}\right|$

b)Tính $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|$

c)Tính $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|$

**Lời giải**

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ .Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC$.




Áp dụng định lý Pitago ta có $AC^2=AB^2+BC^2=2a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{2}$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{2}$.

b) Vì $O$ là tâm của hình vuông nên $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$. Suy ra $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}$ .Vậy $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=a$.

c) Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$. Suy ra $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$

Mà $\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{2}$. Suy ra

$\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|=BD=a\sqrt{2}$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

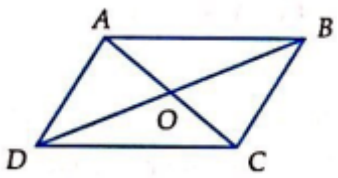
### DẠNG 1. CỘNG TRỪ VÉC TƠ

**Câu 1.** Cho hình bình hành tâm $O$. Kết quả nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ **C.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{CB}$

**Lời giải**

**Đáp án B**




$\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

**Câu 2.** Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ khác vectơ-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. **B.** $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

**C.** $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. **D.** $\vec{0}+\vec{a}=\vec{0}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

**Câu 3.** Cho hình bình hành $ABCD$. Vectơ tổng $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ bằng

**A.** $\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{DB}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}$.

**Câu 4.** Cho ba điểm phân biệt $A,B,C$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

**C.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$.

**Câu 5.** Cho bốn điểm phân biệt $A,B,C,D$. Vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ bằng

**A.** $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{BA}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

**Câu 6.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $AB,BC,CA$. Vectơ tổng $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng

**A.** $\overrightarrow{BP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$. **C.** $\overrightarrow{CP}$. **D.** $\overrightarrow{PA}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BP}$.

**Câu 7.** Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.

**C.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}$.

**Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IB}$. **B.** $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{DI}$.

**C.** $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{IA}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AI}$.

**Câu 9.** Cho các điểm phân biệt $M,N,P,Q,R$. Xác định vectơ tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

**A.** $\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$. **C.** $\overrightarrow{MQ}$. **D.** $\overrightarrow{MR}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{MP}$.

**Câu 10.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

**C.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

**Câu 11.** Cho tam giác $ABC$ và $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $BC,CA,AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

**C.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MP}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PM}$.

**Câu 12.** Cho hình vuông $ABCD$, tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{CA}$.

**C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$. **D.** $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$.

**Câu 13.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm $O$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?.

**A.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$.

**C.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FA}$.

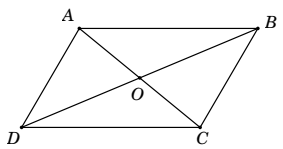
**Câu 14.** Gọi $O$ là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

**A.** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}.$. **B.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}.$.

**C.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}.$. **D.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}.$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Xét các đáp án:

• Đáp án **A.** Ta có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. Vậy A đúng.

• Đáp án **B.** Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}\end{cases}$. Vậy B sai.

• Đáp án **C.** Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}.$ Vậy C đúng.

• Đáp án **D.** Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}\end{cases}$. Vậy D đúng

**Câu 15.** Gọi $O$ là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

**A.** $\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{DA}$. **C.** $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$. **D.** $\overrightarrow{AB}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

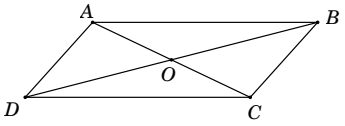
$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

**Câu 16.** Cho $O$ là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào?

**A.** $\overrightarrow{BA}$. **B.** $\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




$\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

**Câu 17.** Chọn khẳng định sai:

**A.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

**B.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}$.

**C.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

**D.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{BA}\neq\vec{0}$.

**Câu 18.** Cho 4 điểm bất kỳ $A,\ B,\ C,\ D$. Đẳng thức nào sau đây là đúng:

**A.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CO}$. **B.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

**C.** $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. **D.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

**Câu 19.** Chỉ ra vectơ tổng $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{RN}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{QR}$ trong các vectơ sau

**A.** $\overrightarrow{MR}$. **B.** $\overrightarrow{MQ}$. **C.** $\overrightarrow{MP}$. **D.** $\overrightarrow{MN}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

**Câu 20.** Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm $M$ tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.
**B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}$.
**C.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MD}$.
**D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.(đúng).

**Câu 21.** Cho bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ phân biệt. Khi đó vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}$ là:

**A.** $\vec{u}=\vec{0}$.
**B.** $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$.
**C.** $\vec{u}=\overrightarrow{CD}$.
**D.** $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

**Câu 22.** Cho bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ phân biệt. Khi đó vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$ bằng:

**A.** $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$.
**B.** $\vec{u}=\vec{0}$.
**C.** $u=\overrightarrow{CD}$.
**D.** $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

**Câu 23.** Cho 4 điểm $A,\ B,\ C,\ D$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.
**B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.
**C.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.
**D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CB}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

**Câu 24.** Cho Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.
**B.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.
**C.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
**D.** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

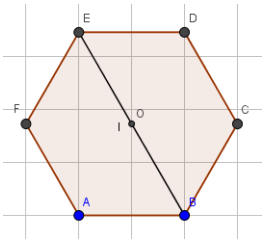
Do $\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{CO}$ đối nhau, $\overrightarrow{BO},\ \overrightarrow{DO}$ đối nhau.

**Câu 25.** Cho Cho lục giác đều $ABCDEF$ và $O$ là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức **sai**?

**A.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{EO}=\vec{0}$.
**B.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.
**C.** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{OC}$.
**D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{AO}\neq\vec{0}$.

**Câu 26.** Cho 4 điểm A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

**C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}$.

**Câu 27.** Cho ΔABC, vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành ABEF, ACPQ, BCMN. Xét các mệnh đề:

$(I)$ $\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{MP}$

$(II)$ $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{QP}=-\overrightarrow{MN}$

$(III)$ $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{MC}$

Mệnh đề đúng là :

**A.** Chỉ $(I)$. **B.** Chỉ $(III)$. **C.** $(I)$ và $(II)$. **D.** Chỉ $(II)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{MP}$.

**Câu 28.** Cho 5 điểm phân biệt $M,N,P,Q,R$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.

**C.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MR}$. **D.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

**Câu 29.** Cho hình bình hành $ABCD$, đẳng thức véctơ nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

**C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Đẳng thức véctơ $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$ đúng theo quy tắc cộng hình bình hành.

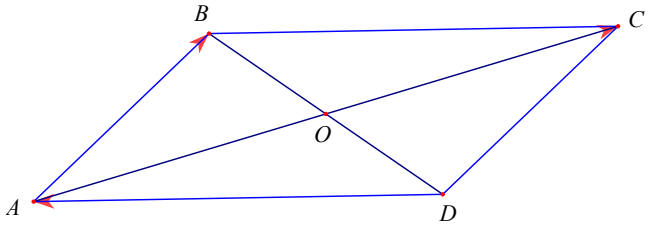
**Câu 30.** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm $O$. Khẳng định nào sau đây là đúng:

**A.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$. **B.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BO}$.

**C.** $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BD}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**




Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ nên $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$.

**Câu 31.** Cho 4 điểm bất kì $A$, $B$, $C$, $O$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$. **B.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}$.

**C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BA}$ nên A sai

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{CO}$ nên B đúng.

**Câu 32.** Cho 3 điểm phân biệt $A,B,C$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.

**C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.

**Câu 33.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}$ bằng

**A.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{CD}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.

**Câu 34.** Cho 6 điểm $A,B,C,D,E,F$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}$.

**B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}$.

**C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.

**D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}$.

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}$

**Câu 35.** Cho hình bình hành ABCD, gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn BC và A**D.** Tính tổng $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}$.

**A.** $\overrightarrow{AC}$.. **B.** $\overrightarrow{NM}$.. **C.** $\overrightarrow{CA}$.. **D.** $\overrightarrow{MN}$..

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}.$

**Câu 36.** Cho 6 điểm $A,B,C,D,E,F$. Tổng véc tơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$ bằng

**A.** $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DB}$. **B.** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DF}$.

**C.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}$. **D.** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DF}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+\left(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FD}\right)+\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}$.

**Câu 37.** Cho các điểm phân biệt $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$. Đẳng thức nào sau đây ***sai***?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$.

**C.** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EC}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ (vô lý).

**Câu 38.** Cho các điểm phân biệt $A,\ B,\ C,\ D$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$. **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}$.

**C.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

**Câu 39.** **6**Cho tam giác $ABC$, trung tuyến $AM$. Trên cạnh $AC$ lấy điểm $E$ và $F$ sao cho $AE=EF=FC$, $BE$ cắt $AM$ tại $N$. Chọn mệnh đề đúng:

**A.** $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

**C.** $\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NE}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{NF}=\overrightarrow{EF}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Trong tam giác $BCE$ có $MF$ là đường trung bình nên $MF//BE\Rightarrow MF//NE$

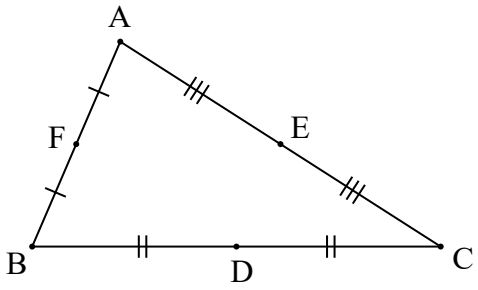
$N$ là trung điểm của $AM$ nên $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}=\vec{0}$.

**Câu 40.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $D,E,F$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC,CA,AB$. Hệ thức nào là đúng?

**A.** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}$. **B.** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

**C.** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$. **D.** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

**Lời giải**




**Chọn A**

Ta có $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}$

$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$

$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{FF}$

$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}+\vec{0}$

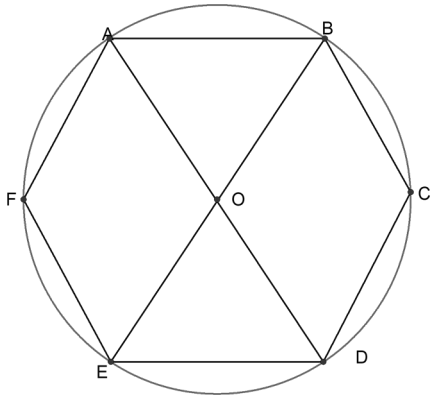
$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}$.

**Câu 41.** Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, tâm $O$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}$

**C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=6\left|\overrightarrow{AB}\right|$. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

**Lời giải**




**Chọn A**

$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$.

**Câu 42.** Cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$, $G_1$ là điểm đối xứng của $G$ qua $M$. Vectơ tổng $\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}$ bằng

**A.** $\overrightarrow{GA}$. **B.** $\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{G_1A}$. **D.** $\overrightarrow{G_1M}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}=\overrightarrow{G_1G}=\overrightarrow{GA}$.

**Câu 43.** Xét tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $O$ thỏa mãn $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

**1)** $\overrightarrow{OG}=\vec{0}$;

**2)** Tam giác $ABC$ là tam giác vuông cân;

**3)** Tam giác $ABC$ là tam giác đều;

**4)** Tam giác $ABC$ là tam giác cân.

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Rightarrow O\equiv G$. Do đó tam giác $ABC$ là tam giác đều.

**Câu 44.** Xét tam giác $ABC$ nội tiếp có $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp, $H$ là trực tâm. Gọi $D$ là điểm đối xứng của $A$ qua $O$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

**1)** $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$;

**2)** $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{HA}$;

**3)** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HH_1}$, với $H_1$ là điểm đối xứng của $H$ qua $O$;

**4)** Nếu $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ thì tam giác $ABC$ là tam giác đều.

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}\Rightarrow\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HH_1}$.

Nếu $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ thì $\overrightarrow{HH_1}=\vec{0}$, suy ra $H\equiv O$.

**Câu 45.** Cho hình bình hành *ABCD.* Hai điểm *M, N* lần lượt là trung điểm của *BC* và *AD.* Tìm đẳng thức sai:

**A.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

**C.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NC}$ **D.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{DB}$

**Lời giải**

+ Tứ giác *AMCN* là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow$ A đúng.

+ *ABCD* là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\Rightarrow$ B đúng.

+ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC},\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MC}\Rightarrow\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NC}\Rightarrow C$ đúng.

**Đáp án D.**

**Câu 46.** Cho 6 điểm *A, B, C, D, E, F* bất kì trên mặt phẳng. Tìm đẳng thức sai trong các đẳng thức sau:

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$

**C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}$ **D.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$

**Lời giải**

**Đáp án D**

Ta có:

$\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}=\vec{0}\Leftrightarrow B\equiv A$. Vì *A, B* bất kì $\Rightarrow D$ sai.

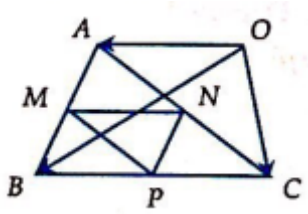
**Câu 47.** Cho $\Delta ABC$, các điểm *M, N, P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB, AC, BC.* Với *O* là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)$ **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$

**C.** $2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ **D.** $2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=3\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)$

**Lời giải**

**Đáp án B**




VT $= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$ Mà $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \Rightarrow$ VT $= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

**Câu 48.** Cho 4 điểm *M, N, P, Q* bất kì. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng.

**A.** $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN}$ **B.** $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ}$

**C.** $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$ **D.** $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$

**Lời giải**

**Đáp án B**

Ta có:

$$\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ} + \left(\overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QN}\right) = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ} = \text{VP}$$

**Câu 49.** Cho 6 điểm *A, B, C, D, E, F* phân biệt. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

**A.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BF} = \vec{0}$

**C.** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$ **D.** $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF}$

**Lời giải**

+ Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \Rightarrow A$ đúng.

+ $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow B$ đúng.

+ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AF}$

$\Rightarrow$ C đúng.

+ $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{FC} = \vec{0} \Leftrightarrow F \equiv C$ (mâu thuẫn giả thiết)

$\Rightarrow$ D sai.

**Đáp án D.**

**Câu 50.** Cho $n$ điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1, A_2, ..., A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1, B_2, ..., B_n$ ( $A_1 \equiv B_n$ ). Vectơ tổng $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n}$ bằng

**A.** $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{A_1A_n}$. **C.** $\overrightarrow{B_1B_n}$. **D.** $\overrightarrow{A_1B_n}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Lấy điểm $O$ bất kì. Khi đó

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n} = \left(\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{A_2O} + ... + \overrightarrow{A_nO}\right) + \left(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + ... + \overrightarrow{OB_n}\right)$$

Vì $\{B_1, B_2, ..., B_n\} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ nên

$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + ... + \overrightarrow{OB_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}$$

Do đó $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n} = \left(\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OA_1}\right) + \left(\overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_2}\right) + ... + \left(\overrightarrow{A_nO} + \overrightarrow{OA_n}\right) = \vec{0}$.

## DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

**Câu 51.** Cho hai điểm $A$, $B$ phân biệt. Xác định điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

**A.** $M$ ở vị trí bất kì

**B.** $M$ là trung điểm của $AB$

**C.** Không tìm được $M$

**D.** $M$ nằm trên đường trung trực của $AB$

**Lời giải**

**Đáp án B**

**Câu 52.** Cho đoạn thẳng $AB$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BA}=\vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ là trung điểm $AB$. **B.** $M$ trùng $A$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $A$ là trung điểm $MB$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BA}=\vec{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{O}\Leftrightarrow A$ là trung điểm $MB$.

**Câu 53.** Cho $\Delta ABC$, $B$. Tìm điểm $I$ để $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng phương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $I$ là trung điểm $AB$. **B.** $I$ thuộc đường trung trực của $AB$.

**C.** Không có điểm $I$. **D.** Có vô số điểm $I$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng phương nên $AI\,//\,CB$. Suy ra có vô số điểm $I$.

**Câu 54.** Cho 2 điểm phân biệt $A$, $B$. Tìm điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ là trung điểm $AB$. **B.** $M$ thuộc đường trung trực của $AB$.

**C.** Không có điểm $M$. **D.** Có vô số điểm $M$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\vec{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\vec{O}$ (vô lý).

**Câu 55.** Cho tam giác $ABC$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ là trung điểm $AB$. **B.** $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $A$ là trung điểm $MB$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{O}$ nên $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$.

**Câu 56.** Cho tứ giác $ABCD$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $D$. **B.** $M$ trùng $A$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $M$ trùng $C$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$.

**Câu 57.** Cho $ABCD$ là hình bình hành, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $D$. **B.** $M$ trùng $A$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $M$ trùng $C$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

**Câu 58.** Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $O$. **B.** $M$ trùng $A$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $M$ trùng $C$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OC}$ suy ra $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}$ ($O$ là trung điểm $AC$) nên $M$ trùng $O$.

**Câu 59.** Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $D$. **B.** $M$ trùng $A$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $M$ trùng $C$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, suy ra $M$ trùng $D$.

**Câu 60.** Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $O$. **B.** $M$ trùng $A$.

**C.** $M$ trùng $B$. **D.** $M$ trùng $C$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB}=\vec{O}$.

**Câu 61.** Cho tứ giác $PQRN$ có $O$ là giao điểm 2 đường chéo, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{ON}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $P$. **B.** $M$ trùng $Q$.

**C.** $M$ trùng $O$. **D.** $M$ trùng $R$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}\Leftrightarrow\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NO}$.

**Câu 62.** Cho $\Delta ABC$, tìm điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ là trung điểm $AB$. **B.** $M$ là trung điểm $BC$.

**C.** $M$ là trung điểm $CA$. **D.** $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{O}$

Suy ra $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$.

**Câu 63.** Cho $\Delta DEF$, tìm $M$ thỏa $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{ED}$. **B.** $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{ED}$. **C.** $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{DF}$. **D.** $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{DE}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\vec{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{MF}=\vec{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{ED}$.

Suy ra $M$ là điểm cuối của vec tơ có điểm đầu là $F$ sao cho $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{ED}$.

**Câu 64.** Cho $\Delta DEF$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EF}$. **B.** $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{EM}$. **C.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{EM}$. **D.** $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{DE}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\vec{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{MF}=\vec{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{ED}$.

Suy ra $DEFM$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EF}$.

**Câu 65.** Cho $\Delta ABC$ có $O$ là trung điểm $BC$, tìm $M$ thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $A$. **B.** $M$ trùng $B$.

**C.** $M$ trùng $O$. **D.** $M$ trùng $C$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}=\vec{O}$

Suy ra $M$ trùng $C$.

**Câu 66.** Cho $\Delta ABC$, tìm điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ là trung điểm $AB$. **B.** $M$ là trung điểm $BC$.

**C.** $M$ là trung điểm $CA$. **D.** $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\vec{O}$

Suy ra $M$ là trung điểm $AC$.

**Câu 67.** Cho $\Delta ABC$, điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ trùng $A$. **B.** $M$ trùng $B$.

**C.** $ACMB$ là hình bình hành. **D.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}$

Suy ra $M$ là điểm thỏa $ABCM$ là hình bình hành. Nên $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$.

**Câu 68.** Cho $\Delta ABC$, $D$ là trung điểm $AB$, $E$ là trung điểm $BC$, điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CM}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{ED}$.

**C.** $M$ là trung điểm $BC$. **D.** $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{BD}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}$

Suy ra $M$ là trung điểm $AC$. Suy ra $BEMD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{BD}$.

**Câu 69.** Cho tứ giác $ABCD$, điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ là trung điểm $AB$. **B.** $M$ là trung điểm $BC$.

**C.** $D$ là trung điểm $BM$. **D.** $M$ là trung điểm $DC$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{BD}$.

**Câu 70.** Cho hình bình hành $ABC\boldsymbol{D}$. Tìm vị trí điểm $N$ thỏa mãn:

$\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.

**A.** Điểm $N$ là trung điểm cạnh $AB$ **B.** Điểm $C$ là trung điểm cạnh $BN$

**C.** Điểm $C$ là trung điểm cạnh $AM$ **D.** Điểm $B$ là trung điểm cạnh $NC$

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{NA}\right)+\overrightarrow{ND}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DN}$

$\Rightarrow ACND$ là hình bình hành $\Rightarrow C$ là trung điểm cạnh $BN$.

**Đáp án B.**

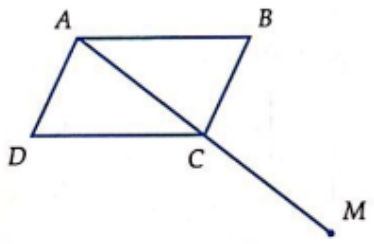
**Câu 71.** Cho hình bình hành $ABC\boldsymbol{D}$. Tìm vị trí điểm $M$ thỏa mãn: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}$.

**A.** Điểm $M$ là trung điểm cạnh $AC$ **B.** Điểm $M$ là trung điểm cạnh $BD$

**C.** Điểm $C$ là trung điểm cạnh $AM$ **D.** Điểm $B$ là trung điểm cạnh $MC$

**Lời giải**

**Đáp án C**



$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}\Rightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$

Vậy $C$ là trung điểm của $AM$

**Câu 72.** Trên đường tròn $C(O;R)$ lấy điểm cố định $A$; $B$ là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi $M$ là điểm di động sao cho $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Khi đó tập hợp điểm $M$ là:

**A.** đường tròn tâm $O$ bán kính $2R$.
**B.** đường tròn tâm $A$ bán kính $R$
**C.** đường thẳng song song với $OA$
**D.** đường tròn tâm $C$ bán kính $R\sqrt{3}$

**Lời giải**

Từ giả thiết $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\Rightarrow$ $O, A, M, B$ theo thứ tự là các đỉnh của hình bình hành. Do $AM=OB=R\Rightarrow$ Tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $A$ bán kính $R$.

**Đáp án B.**

**Câu 73.** Cho $\Delta ABC$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|=\overrightarrow{MC}$ là:

**A.** một đường tròn tâm $C$
**B.** đường tròn tâm $I$ ($I$ là trung điểm của $AB$)
**C.** một đường thẳng song song với $AB$
**D.** là đường thẳng trung trực của $BC$

**Lời giải**

**Đáp án A**

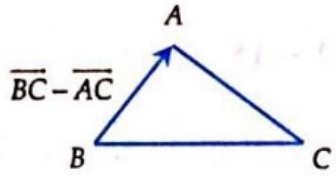
$\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{MC}\right|$

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $C$ bán kính $AB$.

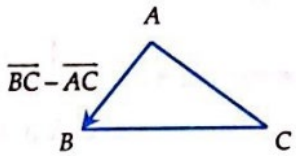
## DẠNG 3. TÍNH ĐỘ DÀI VÉC TƠ

**Câu 74.** Cho $\Delta ABC$. Vectơ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào sau đây?

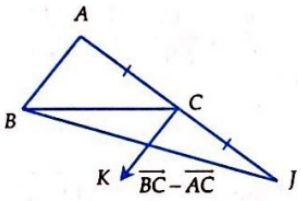
**A.**



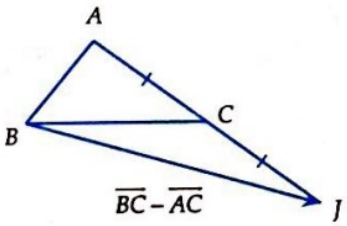

**B.**




**C.**




**D.**




**Lời giải**

Vì $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$

**Đáp án A.**

**Câu 75.** Cho tam giác $\Delta ABC$ vuông tại $A$ có $AB=3cm$, $BC=5cm$. Khi đó độ dài $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|$ là:

**A.** 4
**B.** 8
**C.** $2\sqrt{13}$
**D.** $\sqrt{13}$

**Lời giải**

Ta có:

$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=4\Rightarrow AI=2;\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=2\left|\overrightarrow{BI}\right|=2\sqrt{AB^2+AI^2}=2\sqrt{13}$.

**Đáp án C.**

**Câu 76.** Cho hình thang cân $ABCD$, có đáy nhỏ và đường cao cùng bằng $2a$ và $\widehat{ABC}=45°$. Tính $\left|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right|$.

**A.** $a\sqrt{3}$
**B.** $2a\sqrt{5}$
**C.** $a\sqrt{5}$
**D.** $a\sqrt{2}$

**Lời giải**

$\left|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=\sqrt{BH^2+DH^2}=2a\sqrt{5}$

**Đáp án B.**

**Câu 77.** Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc 60°. Biết $\left|\vec{a}\right|=6;\left|\vec{b}\right|=3$. Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

**A.** $3\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$ **B.** $3\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$ **C.** $6\left(\sqrt{5}+3\right)$ **D.** $\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}+\sqrt{51}\right)$

**Lời giải**

Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a};\overrightarrow{OB}=\vec{b}$

Dựng hình bình hành $OACB \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC};\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại $B \Rightarrow IB=\frac{AB}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$OI=\sqrt{OB^2+IB^2}=\frac{\sqrt{63}}{2}\Rightarrow OC=\sqrt{63}\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{63}+3\sqrt{3}$.

**Đáp án B.**

**Câu 78.** Cho hình thang $ABCD$ có $AB$ song song với $CD$. Cho $AB=2a$, $CD=a$. Gọi $O$ là trung điểm của $AD$. Khi đó:

**A.** $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=3a$ **B.** $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=a$ **C.** $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\frac{3a}{2}$ **D.** $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=0$

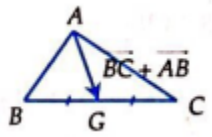
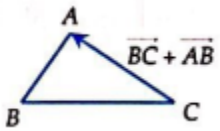
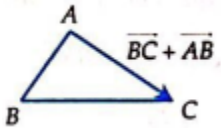
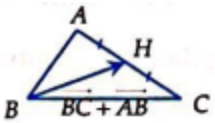
**Lời giải**

$\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|=3a$

(vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng)

**Đáp án A.**

**Câu 79.** Cho $\Delta ABC$. Vectơ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$ được vẽ đúng ở hình nào dưới đây?

| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |






**Lời giải**

**Đáp án C**

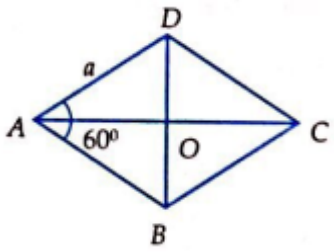
Vì theo quy tắc 3 điểm $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

**Câu 80.** Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}=60°$ và cạnh là $a$. Tính độ dài $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.

**A.** $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $2a$

**Lời giải**

**Đáp án A**



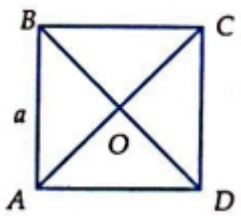

Gọi $O$ là giao của 2 đường chéo $\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=2AD=a\sqrt{3}$

**Câu 81.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là $a$. $O$ là giao điểm của hai đường chéo. Tính $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|$.

**A.** $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{2}$

**Lời giải**

**Đáp án C**




$\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|=\frac{BD}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

**Câu 82.** Với $\forall \vec{a},\vec{b}$ độ dài $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$:

**A.** Bao giờ cũng lớn hơn $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$ **B.** Không nhỏ hơn $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$

**C.** Bao giờ cũng nhỏ hơn $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$ **D.** Không lớn hơn $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$

**Lời giải**

**Đáp án D**

Theo quy tắc 3 điểm độ dài vectơ tổng bao giờ cũng nhỏ hơn hoặc bằng tổng độ dài 2 vectơ thành phần.

**Câu 83.** Cho $\Delta ABC$ đều cạnh $a$. Khi đó $\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}\right|$ bằng:

**A.** 0 **B.** $3a$ **C.** $a$ **D.** $a\left(\sqrt{3}-1\right)$

**Lời giải**

**Đáp án A**

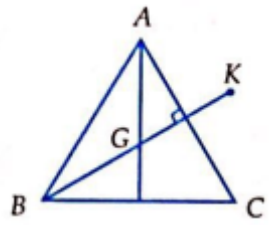
$\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right|=\left|\overrightarrow{AA'}\right|=0$

**Câu 84.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$, trọng tâm $G$. Tính độ dài vectơ $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}\right|$.

**A.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a}{3}$ **C.** $\frac{2a}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

**Lời giải**

**Đáp án A**




Gọi $K$ là điểm đối xứng với $G$ qua $AC$ thì $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{GC}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}\right|$

$=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AK}\right|=\left|\overrightarrow{KB}\right|=2BG=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

**Câu 85.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là 3. Tính độ dài $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$:

**A.** 6 **B.** $6\sqrt{2}$ **C.** 12 **D.** 0

**Lời giải**

**Đáp án A**

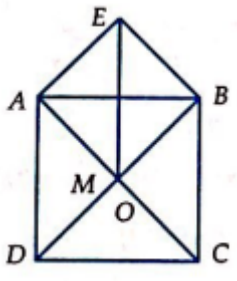
$\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=\left|2\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{OD}\right|=2\left|\overrightarrow{AD}\right|=6$

**Câu 86.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$, tâm $O$ và $M$ là trung điểm $AB$. Tính độ dài $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|$.

**A.** $a$ **B.** $3a$ **C.** $\dfrac{a}{2}$ **D.** $2a$

**Lời giải**

**Đáp án A**




Ta có: $AC=a\sqrt{2}$ và $OA=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

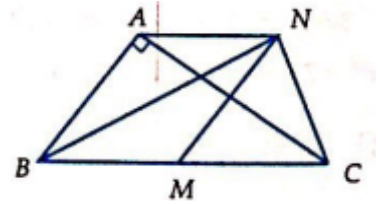
$\Rightarrow OM=\dfrac{a}{2}$. Gọi $E$ là điểm sao cho $OBEA$ là hình bình hành $\Rightarrow\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OE}\right|=AB=a$

**Câu 87.** Cho $\Delta ABC$ vuông cân tại $A$ có $BC=a\sqrt{2}$, $M$ là trung điểm $BC$. Tính độ dài vectơ $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right|$.

**A.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$

**Lời giải**

**Đáp án D**



Dựng hình bình hành $ABMN \Rightarrow \left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=\left|\overrightarrow{BN}\right|=BN$

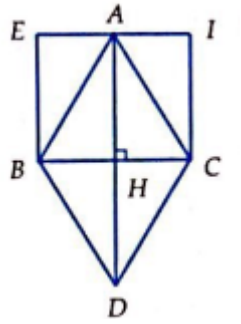
Ta có: $NC=AM=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BN=\sqrt{BC^2+NC^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$

**Câu 88.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh bằng 3. $H$ là trung điểm của $BC$. Tìm mệnh đề sai.

**A.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=3\sqrt{3}$ **B.** $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}\right|=\dfrac{\sqrt{63}}{2}$ **C.** $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right|=3$ **D.** $\left|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}\right|=\sqrt{3}$

**Lời giải**

**Đáp án D**




$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\overrightarrow{AD}=3\sqrt{3} \Rightarrow$ A đúng.

$\left|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}\right|=\left|\overrightarrow{HE}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=3 \Rightarrow$ B đúng.

$\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}\right|=\left|\overrightarrow{BI}\right|=\dfrac{\sqrt{63}}{2} \Rightarrow$ C đúng.

$\left|\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=3 \Rightarrow$ D sai.

**Câu 89.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $a$. Độ dài $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|$ bằng

**A.** $2a$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Theo quy tắc đường chéo hình bình hành, ta có

$$\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}.$$

**Câu 90.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$, mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AC}=a$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=a$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB=a$.

**Câu 91.** Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm $C$.Có bao nhiêu điểm $D$ thỏa $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$?

**A.** Vô số. **B.** 1 điểm. **C.** 2 điểm. **D.** Không có điểm nào.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right| \Leftrightarrow AB=CD$.

Suy ra tập hợp các điểm $D$ là đường tròn tâm $C$ bán kính $AB$.

**Câu 92.** Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

**A.** $\overrightarrow{0}$ cùng hướng với mọi vectơ. **B.** $\overrightarrow{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

**C.** $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| > 0$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Mệnh đề $\left|\overrightarrow{AB}\right| > 0$ là mệnh đề **sai**, vì khi $A \equiv B$ thì $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 0$.

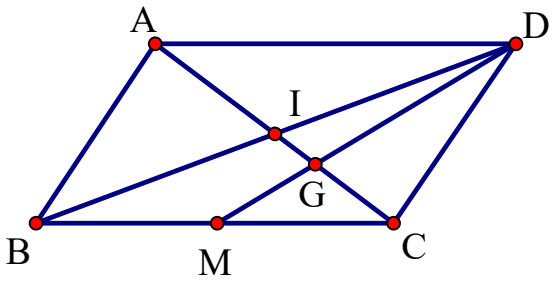
**Câu 93.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $I$; $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

**C.** $\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right|$. **D.** $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**




Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$ (vôlý) $\rightarrow$ A sai.

$G$ là trọng tâm tam giác $BCD$; $A$ là một điểm nằm ngoài tam giác $BCD$ $\rightarrow$ đẳng thức ở đáp án B đúng.

Ta có $\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$ và $\left|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{DB}\right|$. Mà $\left|\overrightarrow{DB}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| \rightarrow$ đáp án C đúng.

Ta có $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IC}$ đối nhau, có độ dài bằng nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$; tương tự $\Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \rightarrow$ đáp án D là đúng.

**Câu 94.** Cho tam giác $ABC$ đều có cạnh $AB = 5$, $H$ là trung điểm của $BC$. Tính $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right|$.

**A.** $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = 5$.

**C.** $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \dfrac{5\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \dfrac{5\sqrt{7}}{2}$.

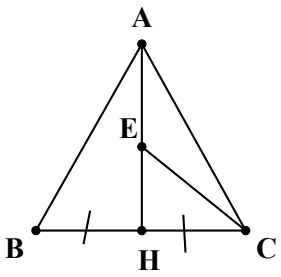
**Lời giải**

**Chọn D.**

Gọi $M$ là điểm sao cho $CHMA$ là hình bình hành.

Ta có: $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \left|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}\right| = \left|\overrightarrow{CM}\right| = CM = 2CE$ ($E$ là tâm cúa hình bình hành $CHMA$).

Ta lại có: $AH = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ ($\Delta ABC$ đều, $AH$ là đường cao).




Trong tam giác $HEC$ vuông tại $H$, có:

$$EC=\sqrt{CH^2+HE^2}=\sqrt{2.5^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{4}\Rightarrow\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=2CE=\frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

**Câu 95.** Gọi $O$ là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

**A.** $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$. **C.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $O$ là trung điểm của $AC$ nên $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$.

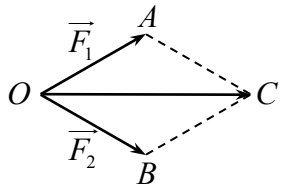
**Câu 96.** Có hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm $O$, biết hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều có cường độ là $50\,(\mathrm{N})$ và chúng hợp với nhau một góc $60°$. Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

**A.** $100\,(\mathrm{N})$. **B.** $50\sqrt{3}\,(\mathrm{N})$.

**C.** $100\sqrt{3}\,(\mathrm{N})$. **D.** Đáp án khác.

**Lời giải**

**Chọn B.**




Giả sử $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{OB}$.

Theo quy tắc hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{OC}$, như hình vẽ.

Ta có $\widehat{AOB}=60°$, $OA=OB=50$, nên tam giác $OAB$ đều, suy ra $OC=50\sqrt{3}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=50\sqrt{3}\,(\mathrm{N})$.

**Câu 97.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $ABCD$ là hình thoi.

**C.** $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** $ABCD$ là hình thang cân.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow$ $ABCD$ là hình bình hành $(1)$, nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Mà $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ $(2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có $ABCD$ là hình thoi nên $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

**Câu 98.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$ có $AB = a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

**A.** $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{2}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

**C.** $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = 2a$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = a$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

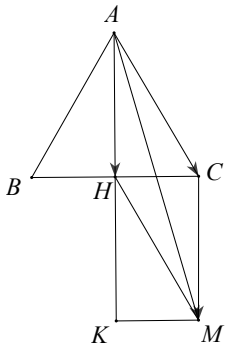
Gọi $D$ là điểm thỏa $ABDC$ là hình bình hành. Tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$ suy ra $ABDC$ là hình vuông. $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = 2AM = BC = a\sqrt{2}$.

**Câu 99.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$, có $AH$ là đường trung tuyến. Tính $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}\right|$.

**A.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**



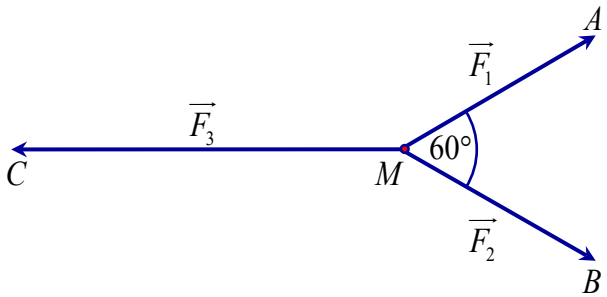

Dựng $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AH} \Rightarrow AHMC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AM} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}\right| = AM$.

Gọi $K$ đối xứng với $A$ qua $BC \Rightarrow \Delta AKM$ vuông tại $K$.

$AK = 2AH = a\sqrt{3}$ ; $KM = CH = \dfrac{a}{2}$.

$AM = \sqrt{AK^2 + KM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

**Câu 100.** Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm $M$ và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng $25N$ và góc $\widehat{AMB} = 60°$. Khi đó cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ là

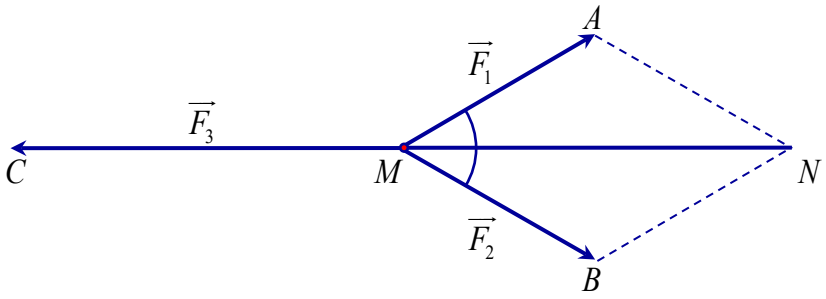



**A.** $25\sqrt{3}$ N. **B.** $50\sqrt{3}$ N. **C.** $50\sqrt{2}$ N. **D.** $100\sqrt{3}$ N.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Vật đứng yên nên ba lực đã cho cân bằng. Ta được $\overrightarrow{F_3}=-\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)$.




Dựng hình bình hành $AMBN$. Ta có $-\overrightarrow{F_1}-\overrightarrow{F_2}=-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MN}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{F_3}\right|=\left|-\overrightarrow{MN}\right|=MN=\dfrac{2\sqrt{3}MA}{2}=25\sqrt{3}$.

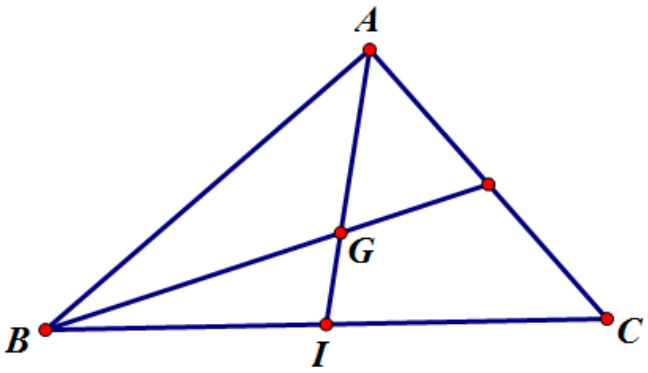
**Câu 101.** Cho tam giác $ABC$ có $G$ là trọng tâm, $I$ là trung điểm $BC$. Tìm khẳng định **sai**.

**A.** $\left|\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}\right|=IA$. **B.** $\left|\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right|=BC$.

**C.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2AI$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=3GA$.

**Lời giải**

**Chọn B.**




$\left|\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}\right|=\left|\vec{0}+\overrightarrow{IA}\right|=\left|\overrightarrow{IA}\right|=IA$ (Do $I$ là trung điểm $BC$) nên khẳng định ở A đúng.

$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=AD=2AI$ (Gọi $D$ là điểm thỏa $ABDC$ là hình bình hành, $I$ là trung điểm $BC$) nên khẳng định ở C đúng.

$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2AI=3GA$ (Do $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$) nên khẳng định ở D đúng.

$\left|\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right|=\left|\vec{0}\right|=0$ (Do $I$ là trung điểm $BC$) nên khẳng định ở B sai.

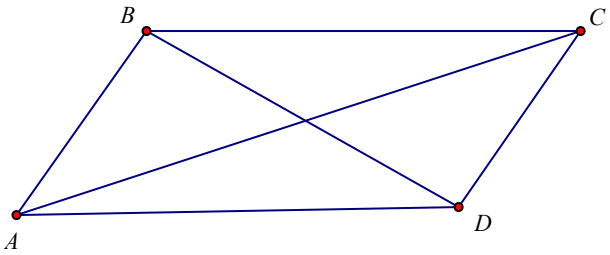
**Câu 102.** Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

**A.** $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$. **B.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}\right|$.

**C.** $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$.

**Lời giải**

**Chọn A.**



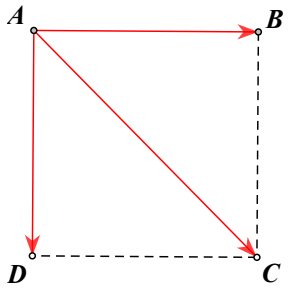

Ta có $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$ là đẳng thức sai vì độ dài hai đường chéo của hình bình hành không bằng nhau.

**Câu 103.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.

**A.** $4a\sqrt{2}$. **B.** $4a$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

**Lời giải**

**Chọn C.**




Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=2a\sqrt{2}$.

**Câu 104.** Cho tam giác $ABC$ đều, cạnh $2a$, trọng tâm $G$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}$ là

**A.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GB}-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}\right)=\overrightarrow{GB}-\left(-\overrightarrow{GB}\right)$ vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{GE}\right|=2GB=2.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$ ( $E$ đối xứng với $G$ qua $M$ ).

**Câu 105.** Tam giác $ABC$ thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ thì tam giác $ABC$ là

**A.** Tam giác vuông $A$. **B.** Tam giác vuông $C$.
**C.** Tam giác vuông $B$. **D.** Tam giác cân tại $C$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

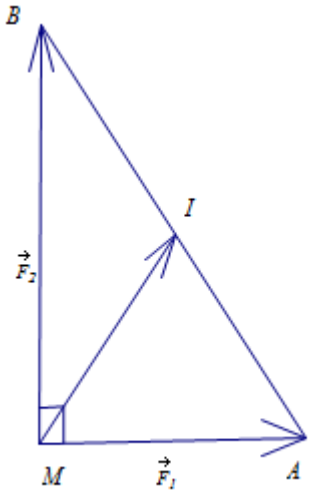
Gọi $E$ là trung điểm $BC$, $M$ là điểm thỏa $ABCM$ là hình bình hành. Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|\Leftrightarrow AE=\dfrac{1}{2}BC$. Trung tuyến kẻ từ $A$ bằng một nửa cạnh $BC$ nên tam giác $ABC$ vuông tại $A$.

**Câu 106.** Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm $M$ cường độ hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt là $300(\mathrm{N})$ và $400(\mathrm{N})$. $\widehat{AMB}=90°$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

**A.** $0\,(\mathrm{N})$. **B.** $700(\mathrm{N})$. **C.** $100(\mathrm{N})$. **D.** $500(\mathrm{N})$.

**Lời giải**

**Chọn D.**




Cường độ lực tổng hợp của $\left|\vec{F}\right|=\left|\vec{F}_1+\vec{F}_2\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2\left|\overrightarrow{MI}\right|=AB$ ($I$ là trung điểm của $AB$).

Ta có $AB=\sqrt{MA^2+MB^2}=500$ suy ra $\left|\vec{F}\right|=500(N)$.

# Bài 5. TÍNH CHẤT CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Định nghĩa

Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số $k$ với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:
- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}, k\vec{0} = \vec{0}$.

Phép lấy tích của một số với một vectơ gọi là phép nhân số với vectơ.

***Ví dụ 1.*** Cho $B$ là trung điểm của đoạn thẳng $AC$.

Tìm số $k$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{AB}$

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ là hai vectơ cùng hương và $\left|\overrightarrow{CA}\right| = 2\left|\overrightarrow{CB}\right|$

Suy ra $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB}$. Vậy $k = 2$.

b) Ta có: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ là hai vectơ ngược hướng và $|\overrightarrow{CA}| = 2|\overrightarrow{AB}|$.

Suy ra $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AB}$. Vậy $k = -2$.

***Ví dụ 2.*** Vật thứ nhất chuyển động thẳng đều từ $A$ đến $B$ với tốc độ là $9m/s$ và vật thứ hai chuyển động thẳng đều từ $B$ đến $A$ với tốc độ là $6m/s$. Gọi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lần lượt là các vectơ vận tốc của vật thứ nhất và vật thứ hai. Có hay không số thực $k$ thoả mãn $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$?

***Giải***

Do tỉ số tốc độ của vật thứ nhất và vật thứ hai là $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ đồng thời hai vật chuyển động ngược hướnng nên hai vectơ vận tốc ngược hướng. Suy ra $\vec{v}_1 = \frac{-3}{2}\vec{v}_2$. Vậy $k = \frac{-3}{2}$.

### II. Tính chất

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực $h, k$, ta có:
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$
- $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}.$

Nhận xét: $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

***Ví dụ 3.*** Cho ba điểm $A, B, C$. Chứng minh:

a) $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$

b) $3(5\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

***Giải***

a) Ta có: $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}$.

b) Ta có: $3(5\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = 15\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC}$

$= 15\overrightarrow{AC} - 14\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.$

## III. Một số ứng dụng

### 1. Trung điểm đoạn thẳng

Nếu $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ với điểm $M$ bất kì.

### 2. Trọng tâm của tam giác

Nếu $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$ thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ với điểm $M$ bất kì.

***Ví dụ 4.*** Cho tứ giác $ABCD$ có $M,N$ lần lượt là trung điểm của hai cạnh $AB$ và $CD$. Gọi $G$ là trung điểm của đoạn thẳng $MN$.

Chứng minh $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

***Giải***

Vì $M$ là trung điểm của $AB$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$.

Vì $N$ là trung điểm của $CD$ nên $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$.

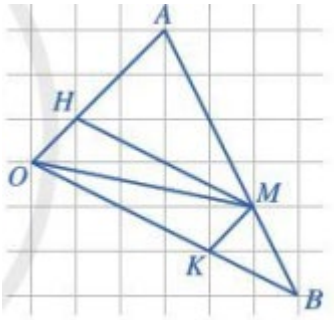
Suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=2(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN})=2.\vec{0}=\vec{0}$.

### 3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$ cùng phương là có một số thực $k$ để $\vec{a}=k\vec{b}$.

Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt $A,B,C$ thẳng hàng là có số thực $k$ để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

***Ví dụ 5***. Cho tam giác $OAB$. Điểm $M$ thuộc cạnh $AB$ sao cho $AM=\frac{2}{3}AB$. Kẻ $MH//OB, MK//OA$




Giả sử $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{OH}$ theo $\vec{a}$ và $\overrightarrow{OK}$ theo $\vec{b}$.

b) Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

***Giải***

a) Ta có: $MK//OA, MH//OB$ suy ra

$\frac{OK}{OB}=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3},\frac{OH}{OA}=\frac{BM}{AB}=\frac{1}{3}.$

Vì $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng và $OH=\frac{1}{3}OA$ nên $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\vec{a}.$

Vì $\overrightarrow{OK}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng và $OK=\frac{2}{3}OB$ nên $\overrightarrow{OK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\vec{b}.$

b) Vì tứ giác $OHMK$ là hình bình hành nên

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}.$

*Nhận xét:* Trong mặt phẳng, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vectơ $\vec{c}$ có duy nhất cặp số $(x;y)$ thoả mãn $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

## DẠNG 1. DỰNG VÀ TÍNH ĐỘ DÀI VÉC – TƠ

**Câu 1.** Cho tam giác ABC cạnh a. Gọi điểm M,N lần lượt là trung điểm của BC,CA**.** Dựng các véc – tơ sau và tính độ dài của chúng

a) $\overrightarrow{AN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$ b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{MN}$

c) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ d) $\frac{1}{4}\overrightarrow{MA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$

**Câu 2.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$. Điểm $M$ là trung điểm $BC$. Dựng các véc-tơ sau và tính độ dài của chúng

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}$. b) $\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ d) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-\frac{5}{2}\overrightarrow{MB}$

**Câu 3.** Cho tam giác vuông cân $OAB$ với $OA=OB=a$. Dựng và tính độ dài các véc-tơ $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}$; $\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

## DẠNG 2. PHÂN TÍCH VÉC-TƠ

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$, trên cạnh $ABC$ lấy $M$ sao cho $BM=3CM$, trên đoạn $AM$ lấy $N$ sao cho $2AN=5MN$. $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$.

a) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$

b) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{GC};\overrightarrow{MN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

**Câu 5.** Cho $\Delta ABC$. Lấy các điểm $M$, $N$, $P$ sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AM}$ theo các vec tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

**Câu 6.** Cho $\Delta ABC$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

a) Hãy dựng các điểm $M$, $N$ thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{BC}$.

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vec tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

**Câu 7.** Cho $\Delta ABC$. Gọi $I$, $J$ là hai điểm được xác định bởi $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0}$.

a) Tính $\vec{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng $IJ$ qua trọng tâm $G$ của tam giác $\Delta ABC$

**Câu 8.** Cho $\Delta ABC$ có trung tuyến $AM$, $M$ là trung điểm của $BC$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

**Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $E$ là trung điểm của $CD$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AE}$ theo $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$.

**Câu 10.** Gọi $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo $\vec{a}=\overrightarrow{GA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{GB}$.

**Câu 11.** Cho $\Delta ABC$. Điểm $M$ trên cạnh $BC$ sao cho $MB=2MC$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vec tơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

**Câu 12.** Cho $\Delta ABC$. Điểm $M$ trung điểm $AB$ và $N$ là một điểm trên cạnh $AC$ sao cho $NA=2NC$. Gọi $K$ là trung điểm $MN$. Phân tích vec tơ $\overrightarrow{AK}$ theo các vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

**Câu 13.** Cho tam giác $OAB$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của cạnh $OA$, $OB$. Tìm các số $m,n$ của mỗi đẳng thức $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MB}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$.

**Câu 14.** Một đường thẳng cắt cạnh $DA, DC$ và đường chéo $DB$ của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm $E, F$ và $M$. Biết rằng $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF} = n\overrightarrow{DC}$ $(m, n > 0)$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{DM}$ qua $\overrightarrow{DB}$ và $m, n$.

**Câu 15.** Điểm $M$ được gọi là điểm chia đoạn thẳng $AB$ theo tỉ số $k \neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng với mọi điểm $O$ thì $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.

## DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÉC-TƠ

**Câu 16.** Gọi I là trung điểm của đoạn $AB$. Chứng minh với điểm $O$ bất kỳ ta có $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

**Câu 17.** Cho đoạn $AB$ và điểm $I$ sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

a) Tìm số $k$ mà $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh với mọi điểm M thì có $\overrightarrow{MI} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{MB}$.

**Câu 18.** Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và đườn tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

c) $\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$.

**Câu 19.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $H$ là điểm đối xứng với $B$ qua $G$ với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CH} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{MH} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}$, với $M$ là trung điểm của $BC$.

**Câu 20.** Cho tam giác ABC có trọng tậm G. Chứng minh

a) Với mọi điểm $M$ thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

b) Nếu $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M là trọng tâm $G$.

**Câu 21.** Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

**Câu 22.** Cho tam giác $ABC$ và một điểm $M$ tùy ý.

a) Hãy xác định các điểm $D, E, F$ sao cho $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$.Chứng minh rằng các điểm $D, E, F$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm $M$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$.

**Câu 23.** Cho tam giác $ABC$ với cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$.

a) Gọi $CM$ là đường phân giác trong của góc $C$. Hãy biểu thị véc-tơ $\overrightarrow{CM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

b) Gọi $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$. Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

**Câu 24.** Cho tam giác ABC đều, tâm O. Gọi M là một điểm tùy ý bên trong tam giác ABC và D, E, F lần lượt là hình chiếu của nó trên các cạnh $BC, CA, AB$. Chứng minh $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

**Câu 25.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD,O$ là trung điểm của $IJ$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kỳ.

**Câu 26.** Cho tứ giác $ABCD$. Hãy xác định vị trí của điểm G sao cho $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Chứng minh với mọi điểm O thì $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$. Điểm G như thế gọi là trọng tâm của tứ giác ABCD

**Câu 27.** Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh

a) Với điểm M bất kì ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$

b) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$

**Câu 28.** Cho tứ giác ABC**D.** Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và C**D.** Chứng minh rằng $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

**Câu 29.** Cho hai điểm A và B**.** Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

**Câu 30.** Xác định các điểm I, J, K, L biết

a) $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ b) $\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{BC}$ d) $2\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

**Câu 31.** Cho tam giác ABC

a) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

**Câu 32.** Cho tứ giác ABCD**.** Xác định điểm M, N, P sao cho

a) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ b) $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

c) $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}$

## DẠNG 4. CHỨNG MINH MỘT BIỂU THỨC VÉC – TƠ KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO ĐIỂM DI ĐỘNG

**Câu 33.** Cho tam giác ABC

a) Với M là điểm bất kì. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$. CD cắt AB tại K. Chứng minh $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CK}$

**Câu 34.** Cho tam giác ABC cố định và điểm M di động. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

**Câu 35.** Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$

**Câu 36.** Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

**Câu 37.** Cho hình vuông ABCD cạnh a. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

## DẠNG 5. CHỨNG MINH HAI ĐIỂM TRÙNG NHAU, HAI TAM GIÁC CÓ CÙNG TRỌNG TÂM

**Câu 38.** Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau

**Câu 39.** Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' là các điểm xác định bởi $2011\overrightarrow{A'B}+2012\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$, $2011\overrightarrow{B'C}+2012\overrightarrow{B'A}=\vec{0}$; $2011\overrightarrow{C'A}+2012\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$. Chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.

**Câu 40.** Hai tam giác ABC và A'B'C' lần lượt có trọng tâm là G, G'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$. Từ đó suy ra " Điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

**Câu 41.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $A'$ là điểm đối xứng với $A$ qua $B$, $B'$ là điểm đối xứng với $B$ qua $C$ và $C'$ là điểm đối xứng với $C$ qua $A$. Chứng minh rằng các tam giác $ABC$ và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

**Câu 42.** Cho tam giác $ABC$. Trên các cạnh $AB$, $BC$, $CA$ ta lấy lần lượt các điểm $M$, $N$, $P$ sao cho $\frac{AM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{CP}{CA}$. Chứng minh rằng hai tâm giác $ABC$ và $MNP$ có cùng trọng tâm.

**Câu 43.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh $A$. Chứng minh rằng hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ có cùng trọng tâm

**Câu 44.** Cho tứ giác $ABCD$ có trọng tâm $G$. Gọi $G_1,G_2,G_3,G_4$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $\Delta ABC, \Delta BCD, \Delta CDA, \Delta DAB$. Chứng minh rằng $G$ cùng là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4$

**Câu 45.** Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm $M,N,P,Q$ lần lượt là trung điểm của $AB,BC,CD$ và $DA$. Chứng minh rằng hai tam giác $ANP$ và $CMQ$ có cùng trọng tâm.

**Câu 46.** Cho điểm $G$ là trọng tâm tứ giác $ABCD$ và $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $BCD$, $ACD$, $ABD$ và $ABC$.

a. Chứng minh rằng $G$ là điểm chung của các đoạn thẳng $AA'$, $BB'$, $CC'$ và $DD'$.

b. Điểm $G$ chia các đoạn thẳng $AA'$, $BB'$, $CC'$ và $DD'$ theo các tỉ số nào?

c. Chứng minh rằng $G$ cũng là trọng tâm của tứ giác $A'B'C'D'$.

**Câu 47.** Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$, $S$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EF$, $FA$. Chứng minh rằng hai tam giác $MPR$ và $NQS$ có cùng trọng tâm.

## DẠNG 6: THẲNG HÀNG, CỐ ĐỊNH, ĐỒNG QUI

**Câu 48.** Cho điểm $O$ cố định và đường thẳng $d$ đi qua hai điểm $A,B$ cố định. Chứng minh rằng điểm $M$ thuộc dường thẳng $d$ khi và chỉ khi có số $\alpha$ sao cho $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}$. Với điều kiện nào của $\alpha$ thì $M$ thuộc đoạn thẳng $AB$?

**Câu 49.** Cho tam giác $ABC$. Điểm $I$ trên cạnh $AC$ sao cho $CI=\frac{1}{4}CA$, $J$ là điểm mà $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ b) Chứng minh $B,I,J$ thẳng hàng

**Câu 50.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp trong đường tròn tâm $O$, $H$ là trực tâm của tam giác, $D$ là điểm đối xứng của $A$ qua $O$.

a) Chứng minh tú giác $HCDB$ là hình bình hành

b) Chứng minh $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$. Suy ra ba điểm $O,H,G$ thẳng hàng ($G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ )

**Câu 51.** Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$. Gọi I là trung điểm của $AM$ và $K$ là điểm trên cạnh $AC$ sao cho $AK=\frac{1}{3}AC.$ Chứng minh ba điểm $B,I,K$ thẳng hàng.

**Câu 52.** Cho tam giác $ABC$. Dựng $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{CA}$. Chứng minh các đường thẳng $AA',BB'$ và $CC'$ đồng quy.

**Câu 53.** Cho tam giác $ABC$ và một điểm $M$ tùy ý không thuộc các đường thẳng $AB,BC,CA$. Gọi $A',B',C'$ theo thứ tự là các điểm đối xứng của $M$ qua trung điểm $I,K,J$ của các cạnh $BC,CA,AB$. Chứng minh rằng

a) Ba đường thẳng $AA',BB',CC'$ đồng quy

b) Đường thẳng $MM_1$ luôn đi qua một điểm cố định khi $M$ di động

**Câu 54.** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $M,N,P$ lần lượt thuộc các đoạn thẳng $AB,BC,CA$ sao cho $\overrightarrow{MA}=m\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{NB}=n\overrightarrow{NC},\ \overrightarrow{PC}=p\overrightarrow{PA}$ ($m,n,p$ đều khác 1). Chứng minh rằng:

a) $M,N,P$ thẳng hàng khi và chỉ khi $mnp=1$ (định lý Mê-nê-la-uýt)

b) $AN,CM,BP$ đồng quy hoặc song song khi và chỉ khi $mnp=-1$ (định lý Xê-va)

**Câu 55.** Cho tam giác $ABC.$ Hai điểm $M,N$ được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0},\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}.$ Chứng minh $MN\ //\ AC.$

**Câu 56.** Cho ngũ giác $ABCDE.$ Gọi $M,N,P,Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB,BC,CD,DE.$ Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm của các đoạn $MP\ \&\ NQ.$ Chứng minh $IJ\ //\ AE\ \&\ IJ=\frac{1}{4}AE.$

**Câu 57.** Trên các cạnh $AB,BC,CA$ của tam giác $ABC$ lấy các điểm tương ứng $C_1;A_1;B_1$ sao cho $AC_1:C_1B=BA_1:A_1C=CB_1:B_1A=\frac{1}{k}$. Trên các cạnh $A_1B_1;B_1C_1;C_1A_1$ của tam giác $A_1B_1C_1$ lấy các điểm tương ứng $C_2;A_2;B_2$ sao cho $A_1C_2:C_2B_1=B_1A_2:A_2C_1=C_1B_2:B_2A_1=k.$ Chứng minh rằng: $A_2C_2\ //\ AC;C_2B_2\ //\ CB;B_2A_2\ //\ BA.$

**Câu 58.** Cho ba dây cung song song $AA_1;BB_1;CC_1$ của đường tròn $(O).$ Chứng minh rằng trực tâm của tam giác $ABC_1;BCA_1\ \&CAB_1$ nằm trên một đường tròn.

## DẠNG 7. XÁC ĐỊNH ĐIỂM, TẬP HỢP ĐIỂM THOẢ MÃN ĐẲNG THỨC VEC TƠ.

Để tìm tập hợp điểm $M$ thoả năm điều kiện vecto ta quy về một trong các dạng sau:

- Nếu $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$, với $A,B$ phân biệt cho trước thì $M$ thuộc đường trung trực của đoạn $AB.$
- Nếu $\left|\overrightarrow{MC}\right|=k\left|\overrightarrow{AB}\right|$, với $A,B,C$ phân biệt cho trước thì $M$ thuộc đường tròn tâm $C,$ bán kính bằng $k\left|\overrightarrow{AB}.\right|$
- Nếu $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{BC},$ với $A,B,C$ phân biệt và $k$ là số thực thay đổi thì:

+ $M$ thuộc đường thẳng qua $A$ song song với $BC$ với $k\in\mathbb{R}.$

+ $M$ thuộc nữa đường thẳng qua $A$ song song với $BC$ và cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$ với $k>0.$

+ $M$ thuộc nữa đường thẳng qua $A$ song song với $BC$ và ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$ với $k<0.$

• Nếu $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{BC}, B\neq C$ với $A,B,C$ thẳng hàng và $k$ thay đổi thì tập hợp điểm $M$ là đường thẳng $BC$.

**Câu 59.** Cho điểm $O$ cố định và hai vecto $\vec{u},\vec{v}$ cố định. Với mỗi số $m$ ta xác định điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{OM}=m.\vec{u}+(1-m)\vec{v}$. Tìm tập hợp các điểm $M$ khi $m$ thay đổi.

**Câu 60.** Cho hai điểm $A,B$. Tập hợp các điểm $M$ sao cho

a) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$. b) $|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}|$

**Câu 61.** Cho tam giác $ABC$. Tập hợp các điểm $M$ thoả mãn điều kiện sau:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)$, với $k$ là số thực thay đổi khác 0.

**Câu 62.** Cho tam giác $ABC$.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm $I$ thoả $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Tìm quỹ tích điểm thoả mãn $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$.

**Câu 63.** Cho $\Delta ABC$. Tập hợp điểm $M$ trong các trường hợp sau:

a) $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$. b) $\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

**Câu 64.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp các điểm $M$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. c) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$.

**Câu 65.** Cho tam giác $ABC$ và ba vecto cố định $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$. Với mỗi số thực $t$, ta lấy các điểm $A',B',C'$ sao cho $\overrightarrow{AA'}=t\vec{u},\overrightarrow{BB'}=t\vec{v},\overrightarrow{CC'}=t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm $G'$ của tam giác $A'B'C'$ khi $t$ thay đổi.

**Câu 66.** Cho tứ giác $ABCD$. Với số $k$ tuỳ ý, lấy các điểm $M,N$ sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm $I$ của đoạn $MN$ khi $k$ thay đổi.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

## DẠNG 1. DỰNG VÀ TÍNH ĐỘ DÀI VÉC – TƠ

**Câu 1.** Khẳng định nào **sai**?

**A.** $1.\vec{a}=\vec{a}$

**B.** $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k>0$

**C.** $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k<0$

**D.** Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$ cùng phương khi có một số $k$ để $\vec{a}=k\vec{b}$

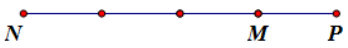
**Câu 2.** Trên đường thẳng $MN$ lấy điểm $P$ sao cho $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$. Điểm $P$ được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



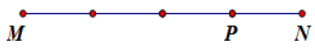

Hình 1




Hình 2




Hình 3




Hình 4

**A.** Hình 3 **B.** Hình 4 **C.** Hình 1 **D.** Hình 2

**Câu 3.** Cho ba điểm phân biệt $A,B,C$. Nếu $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{AC}$

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $I$ là trung điểm của $BC$.Khẳng định nào sau đây đúng

**A.** $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$ **B.** $3\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{IC}$ **C.** $\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{IC}$ **D.** $2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $AC$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}$ **B.** $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CN}$ **C.** $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{NM}$ **D.** $\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

**Câu 6.** Cho $\vec{a}\neq\vec{0}$ và điểm $O$. Gọi $M,N$ lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON}=-4\vec{a}$. Khi đó:

**A.** $\overrightarrow{MN}=7\vec{a}$ **B.** $\overrightarrow{MN}=-5\vec{a}$ **C.** $\overrightarrow{MN}=-7\vec{a}$ **D.** $\overrightarrow{MN}=-5\vec{a}$

**Câu 7.** Tìm giá trị của $m$ sao cho $\vec{a}=m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}|=5,|\vec{b}|=15$

**A.** $m=3$ **B.** $m=-\frac{1}{3}$ **C.** $m=\frac{1}{3}$ **D.** $m=-3$

**Câu 8.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $I$ là trung điểm của $AB$. Tìm điểm $M$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

**A.** $M$ là trung điểm của $BC$

**B.** $M$ là trung điểm của $IC$

**C.** $M$ là trung điểm của $IA$

**D.** $M$ là điểm trên cạnh $IC$ sao cho $IM=2MC$

**Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$, điểm $M$ thõa mãn $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm $M$ là:

**A.** Trung điểm của $AC$ **B.** Điểm $C$

**C.** Trung điểm của $AB$ **D.** Trung điểm của $AD$

**Câu 10.** Cho đoạn thẳng $AB$. Gọi $M$ là một điểm trên $AB$ sao cho $AM=\frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MA}$.

**Câu 11.** Cho đoạn thẳng $AB$ và $M$ là một điểm trên đoạn $AB$ sao cho $MA=\frac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

**A.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$ **C.** $\overrightarrow{MB}=-4\overrightarrow{MA}$ **D.** $\overrightarrow{MB}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

**Câu 12.** Cho ba điểm $A,B,C$ phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

**A.** $AB=AC$ **B.** $\exists k\neq 0:\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\forall$ điểm $M$

**Câu 13.** Cho $\Delta ABC$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{BC},\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Các cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

**A.** $2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}$ **B.** $\vec{a}-2\vec{b},2\vec{a}-\vec{b}$ **C.** $5\vec{a}+\vec{b},-10\vec{a}-2\vec{b}$ **D.** $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$

**Câu 14.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

**A.** $-3\vec{a}+\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a}+6\vec{b}$ **B.** $-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $2\vec{a}+\vec{b}$

**C.** $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ **D.** $\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{a}-2\vec{b}$

**Câu 15.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

**A.** $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$ **B.** $\vec{u}=\frac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$

**C.** $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$ **D.** $\vec{u}=2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

**Câu 16.** Biết rằng hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vec tơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a}+4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của $x$ là:

**A.** $-7$ **B.** $7$ **C.** $5$ **D.** $6$

**Câu 17.** Biết rằng hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vec tơ $2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{a}+(x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của $x$ là:

**A.** $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

**Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ có điểm $O$ thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

**A.** Tam giác $ABC$ đều **B.** Tam giác $ABC$ cân tại $C$

**C.** Tam giác $ABC$ vuông tại $C$ **D.** Tam giác $ABC$ cân tại $B$

**Câu 19.** Cho tam giác $OAB$ vuông cân tạ $O$ với $OA=OB=a$. Độ dài của véc tơ $\vec{u}=\frac{21}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là:

**A.** $\frac{a\sqrt{140}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{321}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{520}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{541}}{4}$

**Câu 20.** Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi $M,N,P,Q$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AB,BC,CD,DE$. Gọi $I$ và $J$ lần lượt là trung điểm các đoạn $MP$ và $NQ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ **B.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ **C.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ **D.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$

**Câu 21.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$ và $N$ là trung điểm $AM$. Đường thẳng $BN$ cắt $AC$ tại $P$. Khi đó $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của $x$ là:

**A.** $-\frac{4}{3}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{5}{3}$

**Câu 22.** Cho tam giác $ABC$. Hai điểm $M,N$ được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

**A.** $MN\perp AC$ **B.** $MN//AC$

**C.** $M$ nằm trên đường thẳng $AC$ **D.** Hai đường thẳng $MN$ và $AC$ trùng nhau

**Câu 23.** Cho tam giác vuông cân $OAB$ với $OA=OB=a$. Tính độ dài vecto $\vec{v}=\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

**A.** $2a$ **B.** $\frac{\sqrt{6073}}{28}a$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

**Câu 24.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Tính độ dài vecto: $\vec{u}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$

**A.** $\left|\vec{u}\right|=4a\sqrt{2}$ **B.** $\left|\vec{u}\right|=a\sqrt{2}$ **C.** $\left|\vec{u}\right|=3a\sqrt{2}$ **D.** $\left|\vec{u}\right|=2a\sqrt{2}$

**Câu 25.** Cho tam giác vuông cân $OAB$ với $OA=OB=a$. Tính độ dài vecto $\vec{u}=\frac{21}{4}\overrightarrow{OA}+2,5\overrightarrow{OB}$

**A.** $\frac{\sqrt{541}}{4}a$ **B.** $\frac{\sqrt{520}}{4}a$ **C.** $\frac{\sqrt{140}}{4}a$ **D.** $\frac{\sqrt{310}}{4}a$

**Câu 26.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$ điểm $M$ là trung điểm của $BC$. Tính độ dài vectơ $\vec{u}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-2,5\overrightarrow{MB}$.

**A.** $\frac{a\sqrt{127}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{127}}{8}$ **C.** $\frac{a\sqrt{127}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{127}}{2}$

**Câu 27.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Tính độ dài vectơ $\vec{u}=4\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$.

**A.** $\left|\vec{u}\right|=a\sqrt{5}$ **B.** $\left|\vec{u}\right|=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **C.** $\left|\vec{u}\right|=3a\sqrt{5}$ **D.** $\left|\vec{u}\right|=2a\sqrt{5}$

**Câu 28.** Cho tam giác $ABC$ có $G$ là trọng tâm. Gọi $H$ là chân đường cao hạ từ $A$ sao cho $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm $M$ di động trên $BC$ sao cho $\overrightarrow{BM}=x.\overrightarrow{BC}$. Tìm $x$ sao cho độ dài vectơ $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $x=\frac{4}{5}$ **B.** $x=\frac{5}{6}$ **C.** $x=\frac{6}{5}$ **D.** $x=\frac{5}{4}$

**Câu 29.** Cho $\Delta ABC$ đều cạnh $a$. $M$ là trung điểm $BC$. Tính độ dài $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|$.

**A.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

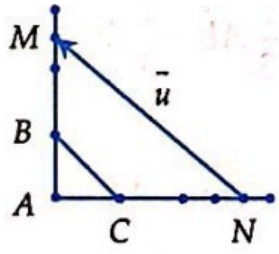
## DẠNG 2. PHÂN TÍCH VÉC-TƠ

**Câu 30.** Cho $AK$ và $BM$ là hai trung tuyến của $\Delta ABC$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AB}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BM}$.

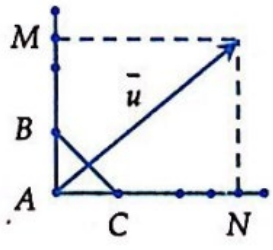
**A.** $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BM}\right)$ **B.** $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BM}\right)$ **C.** $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BM}\right)$ **D.** $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BM}\right)$

**Câu 31.** Cho $\Delta ABC$ vuông cân, $AB=AC$. Khi đó vectơ $\vec{u}=\frac{11}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào sau đây?

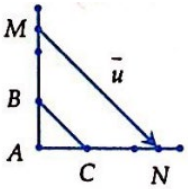
**A.**



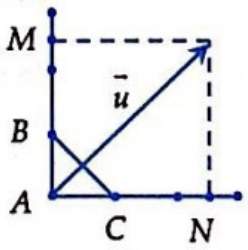

**B.**




**C.**

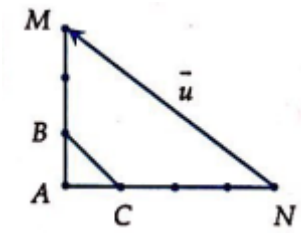


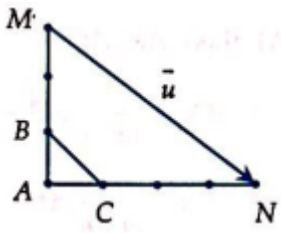

**D.**

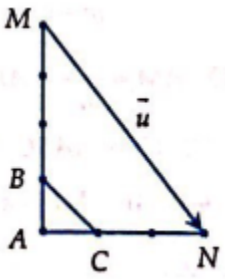


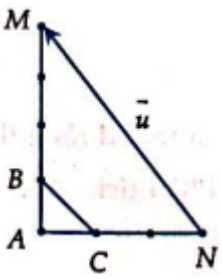

**Câu 32.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$, vectơ $\vec{u}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$ đuược vẽ đúng ở hình nào dưới đây?

**A.** **B.** **C.** **D.**










**Câu 33.** Cho $\Delta ABC$. Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của *BC, CA, AB*. Phân tích $\overrightarrow{AB}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BN}$ là $\overrightarrow{CP}$.

**A.** $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$ **B.** $\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

**C.** $\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$ **D.** $\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{4}{3}\overrightarrow{CP}$

**Câu 34.** Cho $\Delta ABC$. Diểm *M* nằm trên đường thẳng *BC* sao cho $\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MC}\left(k\neq 1\right)$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

**A.** $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{1-k}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}}{1+k}$ **C.** $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}}{1-k}$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{1-k}$

**Câu 35.** Cho $\Delta OAB$ với *M, N* lần lượt là trung điểm của *OA, OB*. Tìm số *m, n* thích hợp để $\overrightarrow{NA}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$.

**A.** $m=-1,n=\frac{1}{2}$ **B.** $m=1,n=-\frac{1}{2}$ **C.** $m=1,n=\frac{1}{2}$ **D.** $m=-1,n=-\frac{1}{2}$

**Câu 36.** Cho hình bình hành *ABCD* có *E, N* lần lượt là trung điểm của *BC, AE*. Tìm các số *p* và *q* sao cho $\overrightarrow{DN}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$.

**A.** $p=\frac{5}{4};q=\frac{3}{4}$ **B.** $p=-\frac{4}{3};q=\frac{2}{3}$ **C.** $p=-\frac{4}{3};q=-\frac{2}{3}$ **D.** $p=\frac{5}{4};q=-\frac{3}{4}$

**Câu 37.** Trên đường thẳng chứa cạnh $BC$ của tam giác $ABC$ lấy một điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

**C.** $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

**Câu 38.** Cho tam giác $ABC$ biết $AB=8,AC=9,BC=11$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$ và $N$ là điểm trên đoạn $AC$ sao cho $AN=x(0<x<9)$. Hệ thức nào sau đây **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{9}\right)\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x}{9}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

**C.** $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x}{9}+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x}{9}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

**Câu 39.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $G$ là trọng tâm và $H$ là điểm đối xứng với $B$ qua $G$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

**C.** $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

**Câu 40.** Cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$. Gọi các điểm $D,E,F$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC,CA$ và $AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$ **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$ **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

**Câu 41.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $D$ là điểm sao cho $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ và $I$ là trung điểm của cạnh $AD$, $M$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Vectơ $\overrightarrow{BI}$ được phân tích theo hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

**A.** $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

**C.** $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.

**Câu 42.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB$, $N$ là điểm thuộc $AC$ sao cho $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$. $K$ là trung điểm của $MN$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

**C.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

**Câu 43.** Cho tứ giác $ABCD$, $O$ là giao điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$. Gọi $G$ theo thứ tự là trọng tâm của tam giác $OAB$ và $OCD$. Khi đó $\overrightarrow{GG'}$ bằng:

**A.** $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **B.** $\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **C.** $3\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **D.** $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

**Câu 44.** Cho tam giác $ABC$ với phân giác trong $AD$. Biết $AB=5$, $BC=6$, $CA=7$. Khi đó $\overrightarrow{AD}$ bằng:

**A.** $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$. **B.** $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. **C.** $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. **D.** $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

**Câu 45.** Cho $AD$ và $BE$ là hai phân giác trong của tam giác $ABC$. Biết $AB=4$, $BC=5$ và $CA=6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng:

**A.** $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **B.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$. **C.** $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **D.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$.

**Câu 46.** Cho hình bình hành $ABC\boldsymbol{D}$. Gọi $K$, $L$ lần lượt là trung điểm $BC$, $C\boldsymbol{D}$. Biết $\overrightarrow{AK}=\vec{a},\overrightarrow{AL}=\vec{b}$. Biểu diễn $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a},\vec{b}$

**A.** $\overrightarrow{BA}=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$ **B.** $\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$

**C.** $\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b},\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$ **D.** $\overrightarrow{BA}=-\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$

**Câu 47.** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm $G$. Gọi $I$ là điểm trên $BC$ sao cho $2CI=3BI$ và $J$ là điểm trên $BC$ kéo dài sao cho $5JB=2JC$. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$

**A.** $\overrightarrow{AG}=\frac{15}{16}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{35}{48}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$

**C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{15}{16}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$ **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{35}{48}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$

**Câu 48.** Cho $\Delta ABC$. Điểm $M$ nằm trên đường thẳng $BC$ sao cho $n\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BC}\left(n, m \neq 0\right)$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

**A.** $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{m+n}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

**C.** $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

**Câu 49.** Một đường thẳng cắt các cạnh $DA$, $DC$ và đường chép $DB$ của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm $E$, $F$ và $M$. Biết rằng $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF} = n\overrightarrow{DC}$ $\left(m, n > 0\right)$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{DM}$ qua $\overrightarrow{DB}$ và $m$, $n$.

**A.** $\overrightarrow{DM} = \frac{m.n}{m+n}\overrightarrow{DB}$ **B.** $\overrightarrow{DM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{DB}$ **C.** $\overrightarrow{DM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}$ **D.** $\overrightarrow{DM} = \frac{m.n}{m-n}\overrightarrow{DB}$

**Câu 50.** Cho $\Delta ABC$. Trên $BC$ lấy điểm $D$ sao cho $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Khi đó phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

**A.** $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

**C.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

**Câu 51.** Cho $\Delta ABC$. Lấy các điểm $M$, $N$, $P$ sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $M$, $N$, $P$ thẳng hàng.

**A.** $\overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{MN}$ **B.** $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$ **C.** $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN}$ **D.** $\overrightarrow{MP} = -3\overrightarrow{MN}$

**Câu 52.** Cho hình bình hành $ABC\boldsymbol{D}$. Gọi $M$, $N$ là các điểm nằm trên cạnh $AB$ và $CD$ sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $CN = \frac{1}{2}CD$. Gọi $G$ là trọng tâm của $\Delta BMN$. Gọi $I$ là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BI} = m\overrightarrow{BC}$. Xác định $m$ để $AI$ đi qua $G$.

**A.** $m = \frac{6}{11}$ **B.** $m = \frac{11}{6}$ **C.** $m = \frac{6}{5}$ **D.** $m = \frac{18}{11}$

**Câu 53.** Cho $\Delta ABC$ có trung tuyến $A\boldsymbol{D}$.Xét các điểm $M$, $N$, $P$ cho bởi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AD}$. Tìm $m$ để $M$, $N$, $P$ thẳng hàng.

**A.** $m = \frac{1}{6}$ **B.** $m = \frac{1}{3}$ **C.** $m = \frac{1}{4}$ **D.** $m = \frac{2}{3}$

**Câu 54.** Cho $\Delta ABC$. $M$ và $N$ là hai điểm xác định thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $M$, $N$, $B$ thẳng hàng?

**A.** $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$ **B.** $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BN}$ **C.** $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$ **D.** $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$

**Câu 55.** Cho $\Delta ABC$ với $H$, $O$, $G$ lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $H$, $O$, $G$ thẳng hàng?

**A.** $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ **B.** $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{OG}$ **C.** $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ **D.** $2\overrightarrow{GO} = -3\overrightarrow{OH}$

**Câu 56.** Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của cạnh $AB, BC, CD, DE$. Gọi $I, J$ lần lượt là trung điểm của các đoạn $MP$ và $NQ$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $IJ//AE$?

**A.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ **B.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AE}$ **C.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ **D.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

**Câu 57.** Cho $\Delta ABC$. Các điểm $I, J$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AC}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $IC//BJ$?

**A.** $\overrightarrow{CI}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ **B.** $\overrightarrow{CI}=3\overrightarrow{BJ}$ **C.** $\overrightarrow{CI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$ **D.** $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$

**Câu 58.** Cho $\Delta ABC$. Trên các cạnh $AB, BC$ lấy các điểm $M, N$ sao cho $AM=\frac{2}{5}MB, \frac{BN}{NC}=\frac{1}{3}$. Gọi $I$ là giao điểm của $AN$ và C$M$. Tính tỉ số $\frac{AI}{AN}$ và $\frac{CI}{IM}$.

**A.** $\frac{AI}{AN}=\frac{3}{7}; \frac{CI}{IM}=\frac{21}{2}$ **B.** $\frac{AI}{AN}=\frac{4}{11}; \frac{CI}{IM}=\frac{7}{2}$

**C.** $\frac{AI}{AN}=\frac{8}{23}; \frac{CI}{IM}=\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{AI}{AN}=\frac{8}{23}; \frac{CI}{IM}=\frac{21}{2}$

**Câu 59.** Cho $\Delta ABC$ và trung tuyến $AM$. Một đường thẳng song song với $AB$ cắt các đoạn thẳng $AM, AC$ và $BC$ lần lượt tại $D, E,$ và $F$. Một điểm $G$ nằm trên cạnh $AB$ sao cho $FG$ song song với $A\boldsymbol{C}$. Tính $\frac{ED}{GB}$.

**A.** $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 1

**Câu 60.** Cho tứ giác $ABCD$ có hai đuường chéo cắt nhau tại $O$. Qua trung điểm $M$ của $AB$ dựng đường thẳng $MO$ cắt $CD$ tại $N$. Biết $OA=1, OB=2, OC=3$, $OD=4$. Tính $\frac{CN}{ND}$.

**A.** 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

**Câu 61.** Cho hình bình hành $ABC\boldsymbol{D}$. Gọi $M, N$ là các điểm nằm trên các cạnh $AB$ và $CD$ sao cho $AM=\frac{1}{3}AB, CN=\frac{1}{2}CD$. Gọi $G$ là trọng tâm của $\Delta BMN$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

**A.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{18}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{18}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$ **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{18}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{18}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

**Câu 62.** Cho $\Delta ABC$. Gọi $I$ là điểm trên cạnh $BC$ sao cho $2CI=3BI$ và $J$ là điểm trên tia đối của $BC$ sao cho $5JB=2JC$. Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

**A.** $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ **B.** $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{a-\frac{2}{3}\vec{b}}$

**C.** $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ **D.** $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

**Câu 63.** Cho tứ giác $ABC\boldsymbol{D}$. Trên $AB$ và $CD$ lần lượt lấy các điểm $M, N$ sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$, $k\neq 1$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

**A.** $\overrightarrow{MN}=k.\overrightarrow{AD}+(1-k).\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{MN}=(1+k).\overrightarrow{AD}+k.\overrightarrow{BC}$

**C.** $\overrightarrow{MN}=(1-k).\overrightarrow{AD}+k.\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{MN}=-k.\overrightarrow{AD}+(k+1).\overrightarrow{BC}$

**Câu 64.** Cho $\Delta ABC$ có trung tuyến $AM$. Gọi $I$ là trung điểm $AM$ và $K$ là điểm trên $AC$ sao cho $AK=\frac{1}{3}AC$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để ba điểm $B, I, K$ thẳng hàng.

**A.** $\overrightarrow{BK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ **B.** $\overrightarrow{BK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$ **C.** $\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{BI}$ **D.** $\overrightarrow{BK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BI}$

**Câu 65.** Cho $\Delta ABC, E$ là trung điểm $BC$, $I$ là trung điểm của $AB$. Gọi $D, I, J, K$ lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{IK}=m\overrightarrow{IJ}$. Tìm $m$ để $A, K, D$ thẳng hàng.

**A.** $m=\frac{5}{6}$ **B.** $m=\frac{1}{3}$ **C.** $m=\frac{1}{2}$ **D.** $m=\frac{2}{5}$

**Câu 66.** Cho $\Delta ABC$. Hai điểm $M, N$ được xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $MN//AC$.

**A.** $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

**Câu 67.** Cho $\Delta ABC; M$ và $N$ xác định bởi $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Trọng tâm $\Delta ABC$ là $G$. Gọi $P$ là điểm trên cạnh $AC$ sao cho $\frac{PA}{PC}=4$. Các đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $M, G, N, P$ thẳng hàng.

**A.** $7\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG}+2\overrightarrow{PN}=\vec{0}$ **B.** $5\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG}+2\overrightarrow{PN}=\vec{0}$

**C.** $7\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}$ và $2\overrightarrow{PQ}-3\overrightarrow{PN}=\vec{0}$ **D.** $3\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG}+2\overrightarrow{PN}=\vec{0}$

**Câu 68.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $I, J$ lần lượt là trọng tâm của $\Delta ADC$ và $\Delta BCD$. Đẳng thức nào là điều kiện cần và đủ để $IJ//AB$.

**A.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

**Câu 69.** Cho $\Delta ABC$. Gọi $M$ là điểm thuộc cạnh $AB; N\in$ cạnh $AC$ sao cho $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Gọi $O$ là giao điểm của $CM$ và $BN$. Tính tỉ số $\frac{ON}{OB}$ và $\frac{OM}{OC}$ tương ứng.

**A.** $\frac{1}{9}$ và $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{6}$ và $\frac{1}{9}$

**Câu 70.** Cho hình bình hành $ABCD$. $M$ thuộc $AC$ sao cho: $AM=kAC$. Trên cạnh $AB, BC$ lấy các điểm $P, Q$ sao cho $MP//BC, MQ//AB$. Gọi $N$ là giao điểm của $AQ$ và $CP$. Tính tỉ số $\frac{AN}{AQ}$ và $\frac{CN}{CP}$ theo $k$.

**A.** $\frac{AN}{AQ}=\frac{k}{k^2+k-1};\frac{CN}{CP}=\frac{1-k}{k^2+k+1}$ **B.** $\frac{AN}{AQ}=\frac{k}{k^2-k+1};\frac{CN}{CP}=\frac{1-k}{k^2-k+1}$

**C.** $\frac{AN}{AQ}=\frac{k}{k^2+k+1};\frac{CN}{CP}=\frac{1-k}{k^2+k-1}$ **D.** $\frac{AN}{AQ}=\frac{k}{k^2+k+1};\frac{CN}{CP}=\frac{1-k}{k^2+k+1}$

## DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÉC-TƠ

**Câu 71.** Cho hai tam giác $\Delta ABC$ và $\Delta A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là $G$ và $G'$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=3\overrightarrow{GG'}$ **B.** $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CA'}=3\overrightarrow{GG'}$

**C.** $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}=3\overrightarrow{GG'}$ **D.** $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$

**Câu 72.** Cho 5 điểm *A, B C, D, E*. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=2\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)$

**C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

**Câu 73.** Cho $\Delta ABC$ và một điểm $M$ tùy ý. Chọn hệ thức đúng?

**A.** $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$ **B.** $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$

**C.** $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ **D.** $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$

**Câu 74.** Cho hình chữ nhật *ABCD, I, K* lần lượt là trung điểm của *BC* và *CD*. Chọn đẳng thức đúng.

**A.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

**C.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{IK}$ **D.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

**Câu 75.** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm $G$. Gọi $A_1, B_1, C_1$ lần lượt là trung điểm của *BC, CA, AB*. Chọn đẳng thức sai.

**A.** $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$ **C.** $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GC_1}$

**Câu 76.** Cho $\Delta ABC$ với *H, O, G* lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp trọng tâm. Hệ thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{OH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ **B.** $\overrightarrow{HO}=3\overrightarrow{OG}$ **C.** $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ **D.** $2\overrightarrow{GO}=-3\overrightarrow{OH}$

**Câu 77.** Cho 4 điểm *A, B, C, D*. Gọi *I, J* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD*. Đẳng thức nào sau đây là sai?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$ **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$ **C.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$ **D.** $2\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

**Câu 78.** Cho $\Delta ABC$, $M$ là một điểm trên cạnh *BC*. Khi đó đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AM}=\frac{MC}{BC}.\overrightarrow{AB}+\frac{MB}{BC}.\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{BM}=\frac{MA}{AB}.\overrightarrow{AC}+\frac{MB}{AB}.\overrightarrow{BC}$

**C.** $3\overrightarrow{CM}=\frac{MB}{AC}.\overrightarrow{AB}+\frac{MA}{AB}.\overrightarrow{AC}$ **D.** $2\overrightarrow{AM}=\frac{MC}{BC}.\overrightarrow{AB}+\frac{MB}{BC}.\overrightarrow{AC}$

**Câu 79.** Cho $\Delta ABC$, *AM, BN, CP* là các trung tuyến. *D, E, F* là trung điểm của *AM, BN* và *CP*. Với *O* là điểm bất kì. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$ **B.** $2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=3\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)$

**C.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)$ **D.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)$

**Câu 80.** Cho tam giác *ABC* đều tâm *O*, *M* là điểm bất kì trong tam giác. Hình chiếu của *M* xuống ba cạnh lần lượt là *D, E, F*. Hệ thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$ **B.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MO}$

**C.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$ **D.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

**Câu 81.** Cho tứ giác *ABCD*. *I, J* lần lượt là trung điểm của *AB* và *DC*. *G* là trung điểm của *IJ*. Xét các mệnh đề:

(I) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AG}$ (II) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IG}$ (III) $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{JI}$

Mệnh đề sai là:

**A.** (I) và (II) **B.** (II) và (III) **C.** Chỉ (I) **D.** Tất cả đều sai

**Câu 82.** Cho tứ giác *ABCD*, các điểm *M, N* lần lượt thuộc các đoạn *AD* và *BC* sao cho $\frac{MA}{MD}=\frac{NB}{NC}=\frac{m}{n}$.

Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{MN}=\frac{n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{DC}}{m+n}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{n\overrightarrow{AC}+m\overrightarrow{AB}}{m+n}$ **C.** $\overrightarrow{BN}=\frac{n\overrightarrow{BC}+m\overrightarrow{CD}}{m+n}$ **D.** $\overrightarrow{DM}=\frac{n\overrightarrow{CD}+m\overrightarrow{AD}}{m+n}$

**Câu 83.** Cho $\Delta ABC$ và một điểm *M* bất kì trong tam giác. Đặt $S_{MBC}=S_a$, $S_{MCA}=S_b$, $S_{MAB}=S_c$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $S_a.\overrightarrow{MA}+S_b.\overrightarrow{MB}+S_c.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ **B.** $S_a.\overrightarrow{AB}+S_b.\overrightarrow{BC}+S_c.\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

**C.** $S_a.\overrightarrow{MC}+S_b.\overrightarrow{MB}+S_c.\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ **D.** $S_a.\overrightarrow{AC}+S_b.\overrightarrow{AB}+S_c.\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

**Câu 84.** Cho $\Delta ABC$ với $BC=a, AC=b, AB=c$. *I* là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$, đường tròn nội tiếp $(I)$ tiếp xúc với các cạnh *BC, CA, AB* lần lượt tại *M, N, P*. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $a.\overrightarrow{IM}+b.\overrightarrow{IN}+c.\overrightarrow{IP}=\vec{0}$ **B.** $a.\overrightarrow{MA}+b.\overrightarrow{NB}+c.\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

**C.** $a.\overrightarrow{AM}+b.\overrightarrow{BN}+c.\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ **D.** $a.\overrightarrow{AB}+b.\overrightarrow{BC}+c.\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

## DẠNG 4. XÁC ĐỊNH ĐIỂM, TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

**Câu 85.** Cho hai điểm *A* và *B*. Tìm điểm *I* sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

**A.** Điểm *I* ngoài đoạn *AB* sao cho $IB=\frac{1}{3}AB$

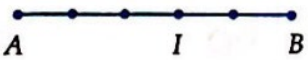
**B.** Điểm *I* thuộc đoạn *AB* sao cho $IB=\frac{1}{3}AB$

**C.** Điểm *I* là trung điểm đoạn *AB*

**D.** Điểm *I* nằm khác phía với *B* đối với *A* và $IB=\frac{1}{3}AB$.

**Câu 86.** Cho đoạn thẳng *AB*. Hình nào sau đây biểu diễn điểm *I* sao cho $\overrightarrow{AI}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$.

**A.** 

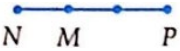

**B.** 


**C.** 


**D.** 


**Câu 87.** Trên đường thẳng *MN* lấy điểm *P* sao cho $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$. Hình vẽ nào sau đây xác định đúng vị trí điểm *M*.

**A.** 


**B.** 

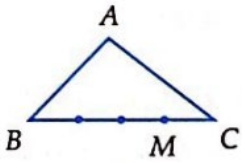

**C.** 

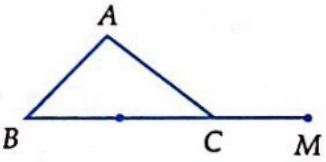

**D.** 

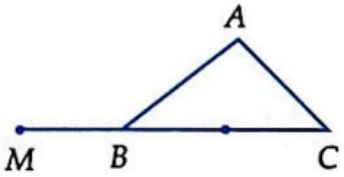
**Câu 88.** Cho đoạn thẳng $AB$ và điểm $M$ là một điểm trong đoạn $AB$ sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm $k$ để $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

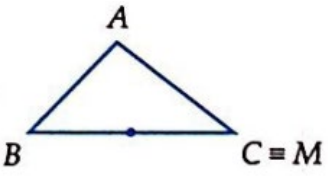
**A.** $k = \frac{1}{4}$ **B.** $k = 4$ **C.** $k = -\frac{1}{4}$ **D.** $k = -4$

**Câu 89.** Cho $\Delta ABC$. Trên đường thẳng $BC$ lấy điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Điểm $M$ được vẽ đúng trong hình nào sau đây?

**A.**



**B.**



**C.**



**D.**



**Câu 90.** Cho $\Delta ABC$ có $G$ là trọng tâm. Xác định điểm $M$ sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

**A.** Điểm $M$ là trung điểm cạnh $AC$.

**B.** Điểm $M$ là trung điểm cạnh $GC$.

**C.** Điểm $M$ chia đoạn $AB$ theo tỉ số 4.

**D.** Điểm $M$ chia đoạn $GC$ thỏa mãn $\overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{GM}$.

**Câu 91.** Cho $\Delta ABC$, $I$ là trung điểm của $AC$. Vị trí điểm $N$ thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$ xác định bởi hệ thức:

**A.** $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ **B.** $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$ **C.** $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ **D.** $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BI}$

**Câu 92.** Cho 2 điểm $A$, $B$ là hai số thực $a$, $b$ sao cho $a + b \neq 0$. Xét các mệnh đề:

(I) Tồn tại duy nhất một điểm $M$ thỏa mãn $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

(II) $\overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

(III) $M$ là điểm nằm trên đường thẳng $AB$.

Trong các mệnh đề trên thì:

**A.** (I) và (III) tương đương nhau **B.** (II) và (III) tương đương nhau

**C.** (I) và (II) tương đương nhau **D.** (I), (II), (III) tương đương nhau

**Câu 93.** Cho $\Delta ABC$ với $BC = a, AC = b, AB = c$. Nếu điểm $I$ thỏa mãn hệ thức $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ thì:

**A.** Điểm $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$.

**B.** Điểm $I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$.

**C.** Điểm $I$ là trực tâm của $\Delta ABC$.

**D.** Điểm $I$ là trọng tâm của $\Delta ABC$.

**Câu 94.** Cho $\Delta ABC$. Xác định điểm $I$ sao cho: $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{BC}$.

**A.** Điểm $I$ là trung điểm của cạnh $AC$

**B.** Điểm $C$ là trung điểm của cạnh $IA$

**C.** Điểm $C$ chia đoạn $IA$ theo tỉ số $-2$

**D.** Điểm $I$ chia đoạn $AC$ theo tỉ số 2

**Câu 95.** Cho $\Delta ABC$ có $M$ là trung điểm $AB$ và $N$ trên cạnh $AC$ sao cho $NC=2NA$. Xác định điểm $K$ sao cho $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AK}=\vec{0}$.

**A.** Điểm $K$ là trung điểm cạnh $AM$

**B.** Điểm $K$ là trung điểm cạnh $BN$

**C.** Điểm $K$ là trung điểm cạnh $BC$

**D.** Điểm $K$ là trung điểm cạnh $MN$

**Câu 96.** Cho $\Delta ABC$. Tìm điểm $N$ sao cho: $2\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

**A.** $N$ là trọng tâm $\Delta ABC$ **B.** $N$ là trung điểm của $BC$

**C.** $N$ là trung điểm của $AK$ với $K$ là trung điểm của $BC$

**D.** $N$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành nhận $AB$ và $AC$ làm 2 cạnh

**Câu 97.** Cho $\Delta ABC$. Xác định điểm $M$ sao cho: $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CB}$.

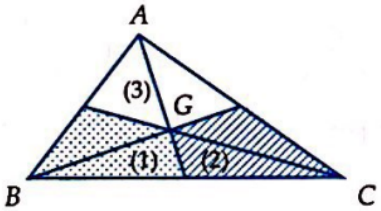
**A.** $M$ là trung điểm cạnh $AB$ **B.** $M$ là trung điểm cạnh $BC$

**C.** $M$ chia đoạn $AB$ theo tỉ số 2 **D.** $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$

**Câu 98.** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm $G$, điểm $M$ thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Khi đó điểm $M$ thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

**A.** $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CA}$ **C.** $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

**Câu 99.** Gọi $G$ là trọng tâm $\Delta ABC$. Nối điểm $M$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ thì $M$ ở vị trí nào trong hình vẽ:




**A.** Miền (1) **B.** Miền (2) **C.** Miền (3) **D.** Ở ngoài $\Delta ABC$

**Câu 100.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $O$ là giao điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$. Điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AM}$. Khi đó điểm $M$ trùng với điểm:

**A.** $O$ **B.** $I$ là trung điểm đoạn $OA$

**C.** $I$ là trung điểm đoạn $OC$ **D.** $C$

**Câu 101.** Cho ba điểm $A, B, C$ không thẳng hàng. Gọi điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}=\alpha\overrightarrow{MB}+\beta\overrightarrow{MC}$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Nếu $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$ thì $\alpha,\beta$ thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

**A.** $\alpha^2-\beta^2=0$ **B.** $\alpha.\beta=1$ **C.** $\alpha-\beta=0$ **D.** Cả A, B, C đều đúng

**Câu 102.** Cho $\Delta ABC$. Nếu điểm $D$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CD}$ với $M$ tùy ý, thì $D$ là đỉnh của hình bình hành:

**A.** $ABCD$ **B.** $ACBD$

**C.** $ABED$ với $E$ là trung điểm của $BC$ **D.** $ACED$ với $B$ là trung điểm của $EC$

**Câu 103.** Cho đoạn $AB$ và điểm $I$ sao cho $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Tìm số $k\in\mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}$.

**A.** $k=\frac{3}{4}$ **B.** $k=\frac{3}{5}$ **C.** $k=\frac{2}{5}$ **D.** $k=\frac{3}{2}$

**Câu 104.** Gọi $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$. Tập hợp điểm $M$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=6$ là:

**A.** Đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. **B.** Đường tròn tâm $G$ bán kính là 1.
**C.** Đường tròn tâm $G$ bán kính là 2. **D.** Đường tròn tâm $G$ bán kính là 6.

**Câu 105.** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm $G$. $I$ là trung điểm của $BC$. Tập hợp điểm $M$ sao cho: $2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ là:

**A.** đường trung trực của đoạn $GI$ **B.** đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$
**C.** đường thẳng $GI$ **D.** đường trung trực của đoạn $AI$

**Câu 106.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm $O$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$ là

**A.** một đoạn thẳng **B.** một đường tròn **C.** một điểm **D.** tập hợp rỗng

**Câu 107.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm $O$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=k, k>0$ là:

**A.** đường tròn tâm $O$ bán kính là $\frac{k}{4}$ **B.** đường tròn đi qua $A, B, C, D$
**C.** đường trung trực của $AB$ **D.** tập rỗng

**Câu 108.** Cho $\Delta ABC$ trọng tâm $G$. Gọi $I, J, K$ lần lượt là trung điểm $BC, AB, CA$. Quỹ tích các điểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right|$ là:

**A.** đường tròn tâm $I$ bán kính $\frac{1}{2}JK$ **B.** đường tròn tâm $G$ bán kính $\frac{1}{3}IJ$
**C.** đường tròn tâm $G$ bán kính $\frac{1}{3}CA$ **D.** trung trực $AC$

**Câu 109.** Cho đường tròn $(O;R)$ và hai điểm $A, B$ cố định. Với mỗi điểm $M$ ta xác định điểm $M'$ sao cho $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$, lúc đó:

**A.** Khi $M$ chạy trên $(O;R)$ thì $M'$ chạy trên đường thẳng $AB$

**B.** Khi $M$ chạy trên $(O;R)$ thì $M'$ chạy trên đường thẳng đối xứng với $AB$ qua $O$

**C.** Khi $M$ chạy trên $(O;R)$ thì $M'$ chạy trên một đường tròn cố định

**D.** Khi $M$ chạy trên $(O;R)$ thì $M'$ chạy trên một đường tròn cố định bán kính $R$

**Câu 110.** Cho $\Delta ABC$. Tìm tập hợp điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{BC}$ với $k\in\mathbb{R}$
**A.** là một đoạn thẳng **B.** là một đường thẳng **C.** là một đường tròn **D.** là một điểm

**Câu 111.** Cho $\Delta ABC$. Tìm tập hợp điểm $M$ thỏa mãn: $\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ là:

**A.** đường thẳng qua $A$ **B.** đường thẳng qua $B$ và $C$
**C.** đường tròn **D.** một điểm duy nhất

**Câu 112.** Tập hợp điểm $M$ mà $k\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}$, $k\neq 1$ là:
**A.** đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ $C$ **B.** đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ $B$
**C.** đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ $A$ **D.** đường trung trực của $AB$

**Câu 113.** Cho $\Delta ABC$. Tìm quỹ tích điểm $M$ thỏa mãn: $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$

**A.** Quỹ tích điểm $M$ là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{3}$

**B.** Quỹ tích điểm $M$ là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{4}$

**C.** Quỹ tích điểm $M$ là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{9}$

**D.** Quỹ tích điểm $M$ là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{2}$

**Câu 114.** Cho $\Delta ABC$. Tìm quỹ tích điểm $M$ thỏa mãn điều kiện: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right), k\in\mathbb{R}$.

**A.** Tập hợp điểm $M$ là đường trung trực của $EF$, với $E, F$ lần lượt là trung điểm của $AB, AC$

**B.** Tập hợp điểm $M$ là đường thẳng qua $A$ và song song với $BC$

**C.** Tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $I$ bán kính $\frac{AB}{9}$

**D.** Với $H$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ thì tập hợp điểm $M$ là đường thẳng đi qua $E$ và song song với $HB$ với $E$ là trung điểm của $AB$

**Câu 115.** Cho tứ giác $ABCD$ với $K$ là số tùy ý. Lấy cá điểm $M, N$ sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp trung điểm $I$ của đoạn $MN$ khi $k$ thay đổi.

**A.** Tập hợp điểm $I$ là đường thẳng $OO'$ với $O$ và $O'$ lần lượt là trung điểm của $AC, BD$

**B.** Tập hợp điểm $I$ là đường thẳng $OO'$ với $O$ và $O'$ lần lượt là trung điểm của $AD, BC$

**C.** Tập hợp điểm $I$ là đường thẳng $OO'$ với $O$ và $O'$ lần lượt là trung điểm của $AB, DC$

**D.** Cả A, B, C đều sai.

**Câu 116.** Cho lục giác đều $ABCDEF$. Tìm tập hợp điểm $M$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right|$ nhận giá trị nhỏ nhất.

**A.** Tập hợp điểm $M$ là một đường thẳng **B.** Tập hợp điểm $M$ là một đoạn thẳng

**C.** Tập hợp điểm $M$ là một đường tròn **D.** Là một điểm

**Câu 117.** Tập hợp điểm $M$ thỏa mãn hệ thức: $2\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}+(1-k)\overrightarrow{MC}=\vec{0}, k\in\mathbb{R}$ là:

**A.** đường thẳng **B.** đường tròn **C.** đoạn thẳng **D.** một điểm

**Câu 118.** Cho $\Delta ABC$ và điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức: $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$.

Tập hợp điểm $M$ là

**A.** một đoạn thẳng **B.** nửa đường tròn **C.** một đường tròn **D.** một đường thẳng

**Câu 119.** Tập hợp điểm $M$ thỏa mãn hệ thức: $\left|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

**A.** là một đường tròn có bán kính là $\frac{AB}{2}$ **B.** là một đường tròn có bán kính là $\frac{BC}{3}$

**C.** là một đường thẳng qua $A$ và song song với $BC$

**D.** là một điểm

**Câu 120.** Tìm tập hợp điểm thỏa mãn hệ thức:

$2\overrightarrow{MA}-(1+k)\overrightarrow{MB}-3k\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, $k$ là giá trị thay đổi trên $\mathbb{R}$.

**A.** Tập hợp điểm $M$ là một đoạn thẳng. **B.** Tập hợp điểm $M$ là một đường tròn.

**C.** Tập hợp điểm $M$ là một đường thẳng. **D.** Tập hợp điểm $M$ là một nửa đường tròn.

# Bài 5. TÍNH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Định nghĩa

Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số $k$ với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:
- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}, k\vec{0} = \vec{0}$.

Phép lấy tích của một số với một vectơ gọi là phép nhân số với vectơ.

***Ví dụ 1.*** Cho $B$ là trung điểm của đoạn thẳng $AC$.

Tìm số $k$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{AB}$

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ là hai vectơ cùng hương và $\left|\overrightarrow{CA}\right| = 2\left|\overrightarrow{CB}\right|$

Suy ra $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB}$. Vậy $k = 2$.

b) Ta có: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ là hai vectơ ngược hướng và $|\overrightarrow{CA}| = 2|\overrightarrow{AB}|$.

Suy ra $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AB}$. Vậy $k = -2$.

***Ví dụ 2.*** Vật thứ nhất chuyển động thẳng đều từ $A$ đến $B$ với tốc độ là $9m/s$ và vật thứ hai chuyển động thẳng đều từ $B$ đến $A$ với tốc độ là $6m/s$. Gọi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lần lượt là các vectơ vận tốc của vật thứ nhất và vật thứ hai. Có hay không số thực $k$ thoả mãn $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$?

***Giải***

Do tỉ số tốc độ của vật thứ nhất và vật thứ hai là $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ đồng thời hai vật chuyển động ngược hướnng nên hai vectơ vận tốc ngược hướng. Suy ra $\vec{v}_1 = \frac{-3}{2}\vec{v}_2$. Vậy $k = \frac{-3}{2}$.

### II. Tính chất

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực $h, k$, ta có:
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$
- $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}.$

Nhận xét: $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

***Ví dụ 3.*** Cho ba điểm $A, B, C$. Chứng minh:

a) $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$

b) $3(5\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

***Giải***

a) Ta có: $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}$.

b) Ta có: $3(5\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = 15\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC}$

$= 15\overrightarrow{AC} - 14\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.$

## III. Một số ứng dụng

### 1. Trung điểm đoạn thẳng

Nếu $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ với điểm $M$ bất kì.

### 2. Trọng tâm của tam giác

Nếu $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$ thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ với điểm $M$ bất kì.

***Ví dụ 4.*** Cho tứ giác $ABCD$ có $M,N$ lần lượt là trung điểm của hai cạnh $AB$ và $CD$. Gọi $G$ là trung điểm của đoạn thẳng $MN$.

Chứng minh $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

***Giải***

Vì $M$ là trung điểm của $AB$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$.

Vì $N$ là trung điểm của $CD$ nên $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$.

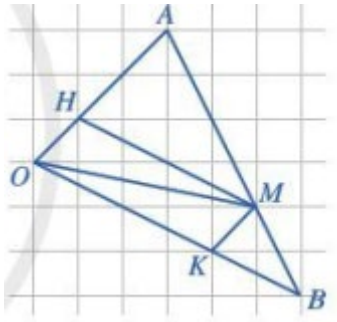
Suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=2(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN})=2.\vec{0}=\vec{0}$.

### 3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$ cùng phương là có một số thực $k$ để $\vec{a}=k\vec{b}$.

Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt $A,B,C$ thẳng hàng là có số thực $k$ để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

***Ví dụ 5***. Cho tam giác $OAB$. Điểm $M$ thuộc cạnh $AB$ sao cho $AM=\frac{2}{3}AB$. Kẻ $MH//OB, MK//OA$




Giả sử $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{OH}$ theo $\vec{a}$ và $\overrightarrow{OK}$ theo $\vec{b}$.

b) Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

***Giải***

a) Ta có: $MK//OA, MH//OB$ suy ra

$\frac{OK}{OB}=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3},\frac{OH}{OA}=\frac{BM}{AB}=\frac{1}{3}.$

Vì $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng và $OH=\frac{1}{3}OA$ nên $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\vec{a}.$

Vì $\overrightarrow{OK}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng và $OK=\frac{2}{3}OB$ nên $\overrightarrow{OK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\vec{b}.$

b) Vì tứ giác $OHMK$ là hình bình hành nên

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}.$

*Nhận xét:* Trong mặt phẳng, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vectơ $\vec{c}$ có duy nhất cặp số $(x;y)$ thoả mãn $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

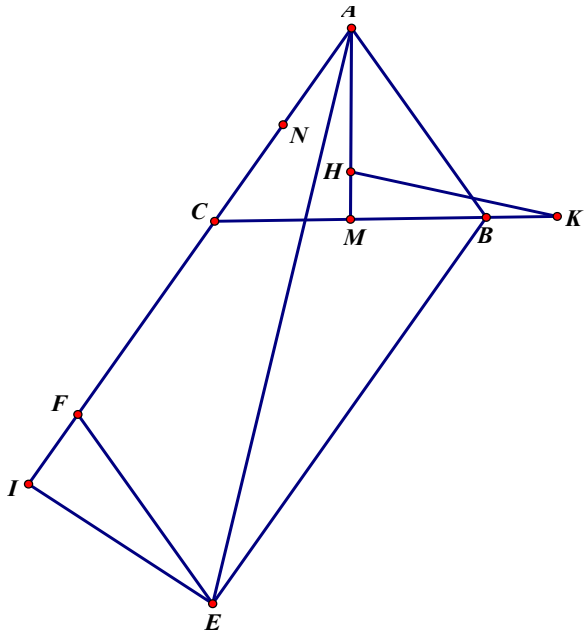
## DẠNG 1. DỰNG VÀ TÍNH ĐỘ DÀI VÉC – TƠ

**Câu 1.** Cho tam giác ABC cạnh a. Gọi điểm M,N lần lượt là trung điểm của BC,CA. Dựng các véc – tơ sau và tính độ dài của chúng

a) $\overrightarrow{AN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$ b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{MN}$

c) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ d) $\frac{1}{4}\overrightarrow{MA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$

**Lời giải.**




a) Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{AN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{NM}$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right|=MN=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$

b) Theo quy tắc trừ ta có

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{MN}\right|=AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Gọi F là điểm đối xứng của A qua C, Điểm E là đỉnh của hình bình hành ABEF,

Theo quy tắc hình bình hành ta có

$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}$

Gọi I là hình chiếu của E lên $AC$.

Vì $AB//\text{EF}\Rightarrow\widehat{EIF}=\widehat{CAB}=60^0$

$\sin\widehat{\text{IFE}}=\frac{IE}{\text{EF}}\Rightarrow IE=\text{EF}\sin\widehat{IFE}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\cos\widehat{\text{IFE}}=\frac{IE}{\text{EF}}\Rightarrow IE=\text{EF}\cos\widehat{IFE}=a\cos 60^0=\frac{a}{2}$

Áp dụng định lí Pitago ta có: $AE=\sqrt{AI^2+IE^2}=\sqrt{(2a+\frac{a}{2})^2+(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{a\sqrt{28}}{2}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=AE=\frac{a\sqrt{28}}{2}$

d) Lấy Lấy các điểm $H,K$ sao cho $\frac{1}{4}\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MH};\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MK}.$

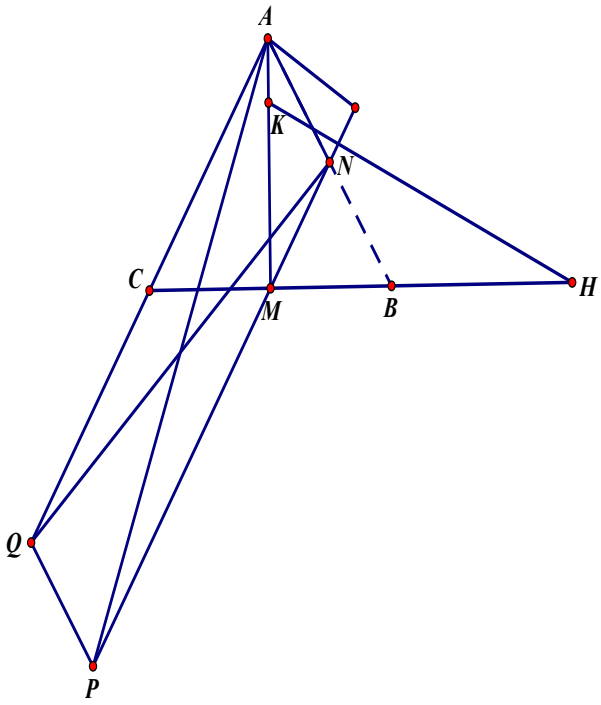
Suy ra $\frac{1}{4}\overrightarrow{MA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{KH}$

Do đó $\left|\frac{1}{4}\overrightarrow{MA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}\right|=KH=\sqrt{\left(\frac{AM}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{2}MB\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{7}}{8}$

**Câu 2.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$. Điểm $M$ là trung điểm $BC$. Dựng các véc-tơ sau và tính độ dài của chúng

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}$. b) $\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ d) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-\frac{5}{2}\overrightarrow{MB}$

**Lời giải.**




a) Do $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}$ nên theo quy tắc ba điểm, ta có

$\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CA}$

Vậy $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}\right|=CA=a$

b) Vì $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$ nên theo quy tắc trừ,

ta có $\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}$

Theo định lí Pitago ta có

$MA=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\left|\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|=MA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Gọi N là trung điểm AB, Q là điểm đối xứng của A qua C và AQP N là hình bình hành.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AN},2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}$

Gọi L là hình chiếu của A lên P N. Vì MN // AC nên $\widehat{ANL}=\widehat{MNB}=\widehat{CAB}=60^o$.

Xét tam giác vuông ANL ta có $\sin ANL=\frac{AL}{AN}\Rightarrow AL=AN\sin ANL=\frac{a}{2}\sin 60^o=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\cos ANL=\frac{NL}{AN}\Rightarrow NL=AN\cos ANL=\frac{a}{2}\cos 60^o=\frac{a}{4}$

Ta lại có $AQ=PN\Rightarrow PL=PN+NL=2a+\frac{a}{4}=\frac{9a}{4}$

Tam giác ALP có $AP^2=AL^2+PL^2=\frac{3a^2}{16}+\frac{81a^2}{16}=\frac{21a^2}{4}\Rightarrow AP=\frac{a\sqrt{21}}{2}$

Vậy $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=AP=\frac{a\sqrt{21}}{2}$

d) Gọi K là điểm nằm trên đoạn AM sao cho $MK=\frac{3}{4}MA$. Gọi H là điểm thuộc tia MB sao cho $MH=\frac{5}{2}MB$.

Khi đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MK};\frac{5}{2}\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MH}.Suy\,ra\ \frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-\frac{5}{2}\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{HK}$

Ta có $MK=\frac{3}{4}AM=\frac{3}{4}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3a\sqrt{3}}{8},MH=\frac{5}{2}MB=\frac{5a}{4}$

Tam giác MKH có $KH=\sqrt{MH^2+MK^2}=\sqrt{\frac{25a^2}{16}+\frac{27a^2}{64}}=\frac{a\sqrt{127}}{8}$.

Vậy $\left|\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-\frac{5}{2}\overrightarrow{MB}\right|=KH=\frac{a\sqrt{128}}{8}$

**Câu 3.** Cho tam giác vuông cân $OAB$ với $OA=OB=a$. Dựng và tính độ dài các véc-tơ $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}$; $\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

**Lời giải.**

Vẽ diểm C, D sao cho $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OB}$, vẽ hình bình hành $CODE$ thì

$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}\Rightarrow\left|3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right|=OE=5a$

Vẽ điểm $H,K$ sao cho $\overrightarrow{OH}=\frac{11}{4}\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OK}=\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$ thì

$\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{KH}$ và $\left|\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right|=KH=\sqrt{\left(\frac{11}{4}a\right)^2+\left(\frac{3}{7}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6037}}{28}a$

## DẠNG 2. PHÂN TÍCH VÉC-TƠ

Sử dụng các tính chất phép toán véc-tơ, ba quy tắc phép toán véc-tơ và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

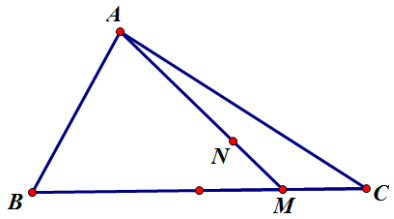
**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$, trên cạnh $ABC$ lấy $M$ sao cho $BM = 3CM$, trên đoạn $AM$ lấy $N$ sao cho $2AN = 5MN$. $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$.

a) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$

b) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{GC};\overrightarrow{MN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

**Lời giải.**

a) Theo giả thiết $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$




Suy ra:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{23}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{15}{28}\overrightarrow{AC}.$$

b) Vì $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{14}\left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}\right) - \frac{3}{14}\left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA}\right)$

$$= -\frac{1}{14}\left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}\right) - \frac{3}{14}\left(-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{GB}.$$

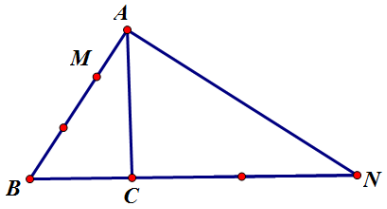
**Câu 5.** Cho $\Delta ABC$. Lấy các điểm $M$, $N$, $P$ sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AM}$ theo các vec tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

**Câu 6.** Cho $\Delta ABC$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

a) Hãy dựng các điểm $M$, $N$ thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.




b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vec tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

**Lời giải.**

a) Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ nên $M$ thuộc cạnh $AB$ và $AM = \frac{1}{3}AB$.

Vì $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$ nên $N$ thuộc tia $BC$ và $CN = 2BC$.

b) Ta có $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.

Và $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Tương tự $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{3}\vec{a}-2\vec{a}+3\vec{b}=-\frac{7}{3}\vec{a}+3\vec{b}$.

**Câu 7.** Cho $\Delta ABC$. Gọi $I$, $J$ là hai điểm được xác định bởi $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng $IJ$ qua trọng tâm $G$ của tam giác $\Delta ABC$

**Lời giải.**

a) Ta có $\overrightarrow{IJ}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{IG}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Suy ra $\overrightarrow{IJ}=\frac{6}{5}\overrightarrow{IG}$. Suy ra $IJ$ qua trọng tâm $G$ của tam giác $\Delta ABC$.

**Câu 8.** Cho $\Delta ABC$ có trung tuyến $AM$, $M$ là trung điểm của $BC$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

**Lời giải.**

$M$ là trung điểm của $BC$ nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

**Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $E$ là trung điểm của $CD$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AE}$ theo $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$.

**Lời giải.**

Do hình bình hành $ABCD$ nên $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Do $E$ là trung điểm của $CD$ nên $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

**Câu 10.** Gọi $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo $\vec{a}=\overrightarrow{GA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{GB}$.

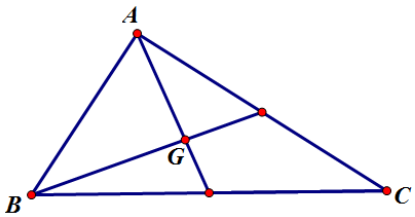
**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}=\vec{b}-\vec{a}$.

Vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}$.

Ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{b}=-\vec{a}-2\vec{b}$.

Và $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}=\vec{a}-\left(-\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}+\vec{b}$.

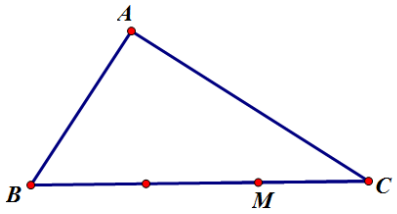



**Câu 11.** Cho $\Delta ABC$. Điểm $M$ trên cạnh $BC$ sao cho $MB=2MC$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vec tơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.




**Câu 12.** Cho $\Delta ABC$. Điểm $M$ trung điểm $AB$ và $N$ là một điểm trên cạnh $AC$ sao cho $NA=2NC$. Gọi $K$ là trung điểm $MN$. Phân tích vec tơ $\overrightarrow{AK}$ theo các vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

**Câu 13.** Cho tam giác $OAB$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của cạnh $OA$, $OB$. Tìm các số $m,n$ của mỗi đẳng thức $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MB}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$.

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+0.\overrightarrow{OB}$, nên $m=\frac{1}{2}$, $n=0$.

Và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, nên $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+1.\overrightarrow{OB}$, nên $m=-\frac{1}{2}$, $n=1$.

**Câu 14.** Một đường thẳng cắt cạnh $DA,DC$ và đường chéo $DB$ của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm $E,F$ và $M$. Biết rằng $\overrightarrow{DE}=m\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF}=n\overrightarrow{DC}$ $(m,n>0)$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{DM}$ qua $\overrightarrow{DB}$ và $m,n$.

**Lời giải**

Đặt $\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EM}=y\overrightarrow{FM}$ thì $\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}$.

Do đó $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}-m\overrightarrow{DA}=(x-m)\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}$.

Và $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{DF}=x\overrightarrow{DA}+(x-n)\overrightarrow{DC}$.

Ta có $\overrightarrow{EM}=y\overrightarrow{FM}\Leftrightarrow(x-m)\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}=xy\overrightarrow{DA}+y(x-n)\overrightarrow{DC}$.

Do $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DC}$ không cùng phương nên $\begin{cases}x-m=xy\\x=y(x-n)=xy-yn\end{cases}$.

Giải hệ trên ta được $y=-\frac{m}{n}$ và $x=\frac{mn}{m+n}$.

Vậy $\overrightarrow{DM}=\frac{mn}{m+n}\overrightarrow{DB}$.

**Câu 15.** Điểm $M$ được gọi là điểm chia đoạn thẳng $AB$ theo tỉ số $k\neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng với mọi điểm $O$ thì $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})\Leftrightarrow(1-k)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}$.

Vì $k\neq 1$ nên $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.

## DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÉC-TƠ

Sử dụng kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng.

- Các tính chất phép toán véc-tơ
- Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ.
- Tính chất trung điểm

o M là trung điểm đoạn thẳng $AB\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

o M là trung điểm đoạn thẳng $AB\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$ (với O là điểm tùy ý).

- Tính chất trọng tâm

o G là trọng tâm của tam giác $ABC\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

o G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ (với O là điểm tùy ý).

**Câu 16.** Gọi I là trung điểm của đoạn $AB$. Chứng minh với điểm $O$ bất kỳ ta có $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

**Lời giải**

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AI}\\ \overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BI}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

Vậy $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

**Câu 17.** Cho đoạn $AB$ và điểm $I$ sao cho $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

a) Tìm số $k$ mà $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh với mọi điểm M thì có $\overrightarrow{MI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$.

**Lời giải**

a) $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

Vậy $k=\frac{3}{5}$.

b) $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI}\right)+3\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MI}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MI}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{MI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$.

**Câu 18.** Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

c) $\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$.

**Lời giải**

a) Dễ thấy $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác ABC vuông.

Nếu tam giác ABC không vuông, gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó:

BH // DC (vì cùng vuông góc với AC);

BD // CH (vì cùng vuông góc với AB).

Suy ra BDCH là hình bình hành, theo quy tắc hình bình hành thì

$\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$. (1)

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

b) Theo câu a) ta có

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}\right)=2\overrightarrow{HO}$.

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ (đpcm).

c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.

Mặt khác theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

Suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GH}\right)-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$ (đpcm).

**Câu 19.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $H$ là điểm đối xứng với $B$ qua $G$ với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CH}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$, với $M$ là trung điểm của $BC$.

**Lời giải**

a) Ta có $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Ta có $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CH}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

**Câu 20.** Cho tam giác ABC có trọng tậm G. Chứng minh

a) Với mọi điểm $M$ thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

b) Nếu $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ thì M là trọng tâm $G$.

**Lời giải**

a) Ta có

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)$

$=3\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=3\overrightarrow{MG}+\vec{0}=3\overrightarrow{MG}$

b) Áp dụng câu a) ta có

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Rightarrow 3\overrightarrow{MG}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{MG}=\vec{0}\Rightarrow M\equiv G$

**Câu 21.** Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

**Lời giải**

***Cách 1***

Vì $M,N,P$ là trung điểm 3 cạnh nên

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}$

***Cách 2***

Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ thì

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$

**Câu 22.** Cho tam giác $ABC$ và một điểm $M$ tùy ý.

a) Hãy xác định các điểm $D,E,F$ sao cho $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$.Chứng minh rằng các điểm $D,E,F$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm $M$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$.

**Lời giải**

a) Ta có: $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$ hay $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.

Vậy D là đỉnh của hình bình hành $BACD$, không phụ thuộc vào vị trí của $M$. Tương tự $E$ và $F$ lần lượt là các đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCE$ và $BCAF$.

b) Ta có

$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$.

Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$.

**Câu 23.** Cho tam giác $ABC$ với cạnh $AB=c,BC=a,CA=b$.

a) Gọi $CM$ là đường phân giác trong của góc $C$. Hãy biểu thị véc-tơ $\overrightarrow{CM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

b) Gọi $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$. Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

**Lời giải**

a) Theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{AM}{BM}=\frac{CA}{CB}=\frac{b}{a}$ suy ra $\overrightarrow{MA}=-\frac{b}{a}\overrightarrow{MB}$.

Do đó $\overrightarrow{CM}=\frac{\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a}\overrightarrow{CB}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}$.

b) Cách 1

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác của tam giác ACM. Bởi vậy theo câu a) ta có thể biểu thị véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AI}=\frac{AC}{AC+AM}\overrightarrow{AM}+\frac{AM}{AC+AM}\overrightarrow{AC}=\frac{b}{b+\frac{bc}{a+b}}.\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}+\frac{\frac{bc}{a+b}}{b+\frac{bc}{a+b}}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\frac{b}{a+b+c}\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA}\right)+\frac{c}{a+b+c}\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}\right)$.

Suy ra $\left(1-\frac{b+c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{IA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{IB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Cách 2

Ta có $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IC}=\frac{-a}{c}\overrightarrow{IA}+\frac{-b}{c}\overrightarrow{IB}$.

Qua đỉnh C, vẽ 2 đường thẳng song song với 2 phân giác AI, BI tạo thành hình bình hành CA'IB'. Sử dụng quy tắc hình bình hành $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}$ và dùng tính chất đường phân giác để suy ra kết quả.

**Câu 24.** Cho tam giác ABC đều, tâm O. Gọi M là một điểm tùy ý bên trong tam giác ABC và D, E, F lần lượt là hình chiếu của nó trên các cạnh $BC,CA,AB$. Chứng minh $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

**Lời giải**

Qua M dựng các đoạn $A_1B_2//AB$; $B_1C_2//BC$; $C_1A_2//CA$ với $A_1,A_2\in AC$; $B_1,B_2\in BC$; $C_1,C_2\in AB$.

Các tam giác $MA_1A_2,MB_1B_2,MC_1C_2$ là những tam giác đều và $E,D,F$ là trung điểm của $A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2$.

Ta có

$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}\right)+\left(\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_2}\right)+\left(\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MC_2}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MC_2}\right)+\left(\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MA_2}\right)+\left(\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MB_2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$

$=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$ (Vì O là trọng tâm của tam giác đều ABC).

**Câu 25.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD,O$ là trung điểm của $IJ$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kỳ.

**Lời giải**

a) Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$

Tương tự $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}$

Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$, $\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}\right)+\left(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}\right)+2\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{IJ}$ (đpcm).

b) Theo hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$.

Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\right)=\vec{0}$ (đpcm).

c) Theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

Do đó với mọi điểm M thì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ (đpcm).

**Câu 26.** Cho tứ giác $ABCD$. Hãy xác định vị trí của điểm G sao cho $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Chứng minh với mọi điểm O thì $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$. Điểm G như thế gọi là trọng tâm của tứ giác ABCD

**Lời giải.**

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD

$\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$ và $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$

Do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow 2\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}\right)=\vec{0}$

Vậy G là trung điểm của đoạn MN

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=2.2\overrightarrow{OG}=4\overrightarrow{OG}$

Vậy $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

**Câu 27.** Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh

a) Với điểm M bất kì ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$

b) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$

**Lời giải.**

a) Vì O là trung điểm của AC, BD nên $\begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}\\ \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}\end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$

b) Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Do đó $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AC}$

**Câu 28.** Cho tứ giác ABC**D.** Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và C**D.** Chứng minh rằng $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

**Lời giải.**

Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$

Vậy $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ ( vì M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD )

Dạng 4. Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức véc tơ

* Ta biến đổi đẳng thức véc – tơ về dạng $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$ trong đó điểm A và $\vec{a}$ đã biết. Khi đó tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, để dựng điểm M ta lấy A làm gốc dựng một véc – tơ bằng véc – tơ $\vec{a}$ suy ra điểm ngọn véc – tơ này chính là điểm M

* Ta biến đổi về đẳng thức véc – tơ đã biết của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

**Câu 29.** Cho hai điểm A và B**.** Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow-\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow3\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Vậy I là điểm thuộc đoạn AB mà $AI=\frac{3}{4}AB$

**Câu 30.** Xác định các điểm I, J, K, L biết

a) $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ b) $\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{BC}$ d) $2\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

**Lời giải.**

a) Ta có $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{IB}$

Vậy I là điểm đối xứng của A qua B

b) Ta có $\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{JC}\Leftrightarrow\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

c) Ta có $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}=2\overrightarrow{BK}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

d) Ta có $2\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=2\overrightarrow{LA}-\left(\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AC}\right)=4\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

nên $2\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow4\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow2\overrightarrow{LA}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

**Câu 31.** Cho tam giác ABC

a) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

**Lời giải.**

a) Ta có $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Vậy K là trọng tâm của tam giác ABC

b) Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ ( I là trung điểm của AB)

Vậy M là trung điểm của BC

**Câu 32.** Cho tứ giác ABCD. Xác định điểm M, N, P sao cho

a) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ b) $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

c) $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}$

**Lời giải.**

a) Gọi I là trung điểm BC suy ra $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

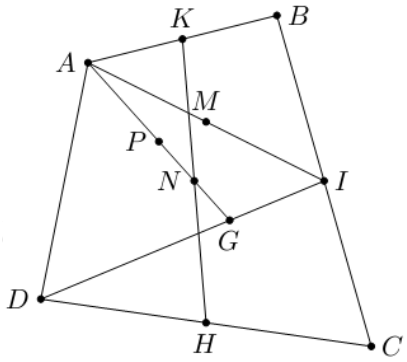
Do đó

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}=\vec{0}$.

Suy ra M là trung điểm AI với I là trung điểm BC

b) Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD ta có

$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{NK}+2\overrightarrow{NH}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{NH}=$




Vậy N là trung điểm của KH

c) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, khi đó ta có $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=3\overrightarrow{PG}$

Suy ra $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PG}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PG}=\vec{0}$

Vậy P là trung điểm AG

## DẠNG 4. CHỨNG MINH MỘT BIỂU THỨC VÉC – TƠ KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO ĐIỂM DI ĐỘNG

**Câu 33.** Cho tam giác ABC

a) Với M là điểm bất kì. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$. CD cắt AB tại K. Chứng minh $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CK}$

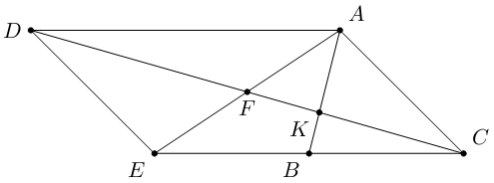
Lời giải.

a) Ta có $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

$=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}\right)+2\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}\right)-3\overrightarrow{MC}$

$=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$ ( không đổi vì A, B, C cố định )

Do đó $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M




b) Gọi E là điểm đối xứng của C qua B, ta có $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{CB}$

Với $\overrightarrow{CD}=\vec{v}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$ nên ACED là hình bình hành

Gọi F là trung điểm của AE, K là trọng tâm của $\Delta ACE$

Ta có $\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CF}=2.\frac{3}{2}.\overrightarrow{CK}=3\overrightarrow{CK}$

**Câu 34.** Cho tam giác ABC cố định và điểm M di động. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Lời giải.

$\vec{v}=\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}\right)+4\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}\right)-5\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+4\overrightarrow{CB}$

Vì A, B, C cố định nên $\vec{v}$ không đổi

Vậy $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

**Câu 35.** Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$

Lời giải.

Ta có $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CO}$

( Với O là trung điểm của AB)

Vậy $\vec{v}=2\overrightarrow{CO}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Vì $\overrightarrow{CD}=\vec{v}=2\overrightarrow{CO}$ nên D là điểm đối xứng của C qua O

**Câu 36.** Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Lời giải.

$\vec{v}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

Vậy $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

**Câu 37.** Cho hình vuông ABCD cạnh a. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông

Theo quy tắc ba điểm ta có

$\vec{v}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)-2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)+3\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)-2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)$

$=\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OD}$

Mà $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}\Rightarrow\vec{v}=-2\overrightarrow{OA}$

Suy ra $\vec{v}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

## DẠNG 5. CHỨNG MINH HAI ĐIỂM TRÙNG NHAU, HAI TAM GIÁC CÓ CÙNG TRỌNG TÂM

Để chứng minh hai điểm $A_1,\ A_2$ trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai cách sau

Cách 1. Chứng minh $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{0}$

Cách 2. Chứng minh $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm tùy ý

Để chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm ta làm như sau

Cách 1. Chứng minh G là trọng tâm $\Delta ABC$ trùng với G' là trọng tâm $\Delta A'B'C'$

Cách 2. Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC$ ( tức là có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$) ta đi chứng minh $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$

**Câu 38.** Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau

**Lời giải.**

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC suy ra $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{ID};\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{JB}$

Do đó $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{ID}\Leftrightarrow\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JI}\Leftrightarrow\overrightarrow{IJ}=\vec{0}$ hay I trùng với J

**Câu 39.** Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' là các điểm xác định bởi $2011\overrightarrow{A'B}+2012\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$, $2011\overrightarrow{B'C}+2012\overrightarrow{B'A}=\vec{0}$; $2011\overrightarrow{C'A}+2012\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$. Chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.

**Lời giải.**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Ta có $2011\overrightarrow{A'B}+2012\overrightarrow{A'C}=\vec{0}\Leftrightarrow 2011\left(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}\right)+2012\left(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4023\overrightarrow{A'A}+2011\overrightarrow{AB}+2012\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Tương tự ta có $4023\overrightarrow{B'B}+2011\overrightarrow{BC}+2012\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

$4023\overrightarrow{C'C}+2011\overrightarrow{CA}+2012\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

Cộng về với vế lại ta được

$4023\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}\Rightarrow \overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$

Do đó G là trọng tâm của tam giác A'B'C'

**Câu 40.** Hai tam giác ABC và A'B'C' lần lượt có trọng tâm là G, G'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$. Từ đó suy ra " Điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}\ (1)$

$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}\ (2)$

$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}\ (3)$

Cộng về với vế ta được

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}\right)=3\overrightarrow{GG'}$

Vì $G$, $G'$ là trọng tâm của tam giác $ABC$, $A'B'C'$ nên $\begin{cases}\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}\\ \overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}=\vec{0}\end{cases}$.

Từ đẳng thức trên ta thấy $G$ trùng $G'$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$ tức là $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

**Câu 41.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $A'$ là điểm đối xứng với $A$ qua $B$, $B'$ là điểm đối xứng với $B$ qua $C$ và $C'$ là điểm đối xứng với $C$ qua $A$. Chứng minh rằng các tam giác $ABC$ và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CA}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$

Vậy hai tam giác $ABC$ và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

**Câu 42.** Cho tam giác $ABC$. Trên các cạnh $AB$, $BC$, $CA$ ta lấy lần lượt các điểm $M$, $N$, $P$ sao cho $\frac{AM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{CP}{CA}$. Chứng minh rằng hai tâm giác $ABC$ và $MNP$ có cùng trọng tâm.

**Lời giải**

Giả sử $\frac{AM}{AB}=k$ suy ra $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{CA}$.

**Cách 1.** Gọi $G$, $G'$ lần lượt là trọng tâm của $\Delta ABC$ và $\Delta MNP$.

Suy ra $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{MG'}+\overrightarrow{NG'}+\overrightarrow{PG'}=\vec{0}\ (*)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'M}=k\overrightarrow{AB}$.

Tương tự $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'N}=k\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'M}=k\overrightarrow{BC}$.

Cộng về theo vế từng đẳng thức trên ta được

$\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{G'M}+\overrightarrow{G'N}+\overrightarrow{G'P}\right)=k\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$.

Kết hợp với $(*)$ ta được $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

**Cách 2.** Gọi $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$ suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

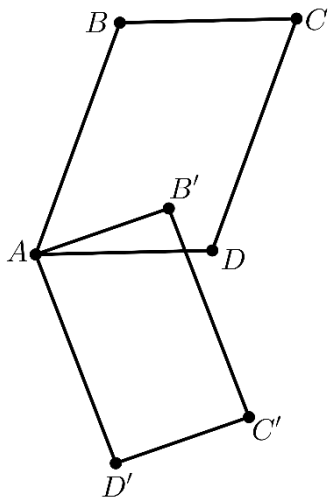
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}&=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}\\&=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}\\&=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{CA}\\&=k\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

Vậy hai tam giác $ABC$ và $NMP$ có cùng trọn tâm.

**Câu 43.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh $A$. Chứng minh rằng hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ có cùng trọng tâm

**Lời giải**




Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $BC'D$ suy ra

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD'}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$. (1)

Mặt khác theo quy tắc phép trừ và hình bình hành ta có

$\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB'}\right)+\left(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD'}\right)$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}\right)+\overrightarrow{AC'}$

$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AC'}$

$=\vec{0}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD'}=\vec{0}$ hay $G$ là trọng tâm tam giác $B'CD'$

**Câu 44.** Cho tứ giác $ABCD$ có trọng tâm $G$. Gọi $G_1,G_2,G_3,G_4$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $\Delta ABC,\Delta BCD,\Delta CDA,\Delta DAB$. Chứng minh rằng $G$ cùng là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4$

**Lời giải**

Ta cần chứng minh

$$\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}+\overrightarrow{GG_4}=\vec{0}.\ (*)$$

Vì $G_1$ là trọng tâm $\Delta ABC$ nên

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GG_1}.$$

Tương tự

$$\begin{cases}\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GG_2}\\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{GG_3}\\ \overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{GG_4}.\end{cases}$$

Do đó

$$(*)\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\ \text{(đpcm)}.$$

**Câu 45.** Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm $M,N,P,Q$ lần lượt là trung điểm của $AB,BC,CD$ và $DA$. Chứng minh rằng hai tam giác $ANP$ và $CMQ$ có cùng trọng tâm.

**Lời giải**

Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $ANP$.

Ta có

$$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PQ}$$

$$=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}\right)+\left(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{PQ}\right)+\overrightarrow{AC}$$

$$=\vec{0}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$$

$$=\vec{0}.$$

Vậy $G$ cũng là trọng tâm của tam giác $CMQ$.

**Câu 46.** Cho điểm $G$ là trọng tâm tứ giác $ABCD$ và $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $BCD$, $ACD$, $ABD$ và $ABC$.

a. Chứng minh rằng $G$ là điểm chung của các đoạn thẳng $AA'$, $BB'$, $CC'$ và $DD'$.

b. Điểm $G$ chia các đoạn thẳng $AA'$, $BB'$, $CC'$ và $DD'$ theo các tỉ số nào?

c. Chứng minh rằng $G$ cũng là trọng tâm của tứ giác $A'B'C'D'$.

**Lời giải**

a. Vì $G$ là trọng tâm tứ giác $ABCD$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Mà $A'$ là trọng tâm tam giác $BCD$ nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{GA'}$

Do đó $\overrightarrow{GA}=-3\overrightarrow{GA'}$ nên $G$, $A$ và $A'$ thẳng hàng

Chứng minh tương tự

$\overrightarrow{GB}=-3\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC}=-3\overrightarrow{GC'}$, $\overrightarrow{GC}=-3\overrightarrow{GC'}$, $\overrightarrow{GD}=-3\overrightarrow{GD'}$

Nên $G$, $B$, $B'$ thẳng hàng; $G$, $C$, $C'$ thẳng hàng; $G$, $D$, $D'$ thẳng hàng.

Vậy $G$ là điểm chung của bốn đoạn $AA'$, $BB'$, $CC'$ và $DD'$.

b. Từ kết quả trên ta có điểm $G$ chia các đoạn $AA'$, $BB'$, $CC'$ và $DD'$ theo tỉ số $k=-3$.

c. Ta có

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-3\left(\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{GD'}\right)=\vec{0}$$

Nên $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{GD'}=\vec{0}$.

Vậy $G$ cũng là trọng tâm của tứ giác $A'B'C'D'$.

**Câu 47.** Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$, $S$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EF$, $FA$. Chứng minh rằng hai tam giác $MPR$ và $NQS$ có cùng trọng tâm.

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$

Nên $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}\right)=\vec{0}$.

Do đó hai tam giác $MPR$ và $NQS$ cùng trọng tâm.

## DẠNG 6: THẲNG HÀNG, CỐ ĐỊNH, ĐỒNG QUI

- Ba điểm $A,B,C$ thẳng hàng khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

- Hai đường thẳng $AB$ và $MN$ song song khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{MN}$ và điểm $A$ không thuộc đường thẳng $MN$

**Chú ý:** Việc chọn cơ sở để biểu diễn là 2 véc- tơ cùng gốc và không cùng phương

**Câu 48.** Cho điểm $O$ cố định và đường thẳng $d$ đi qua hai điểm $A,B$ cố định. Chứng minh rằng điểm $M$ thuộc dường thẳng $d$ khi và chỉ khi có số $\alpha$ sao cho $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}$. Với điều kiện nào của $\alpha$ thì $M$ thuộc đoạn thẳng $AB$?

**Lời giải**

Ta có: $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\alpha\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}=\alpha\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow M\in d$

Vì $\overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BA}$ nên $M$ thuộc đoạn thẳng $AB$ khi và chỉ khi $0\le\alpha\le1$

**Câu 49.** Cho tam giác $ABC$. Điểm $I$ trên cạnh $AC$ sao cho $CI=\frac{1}{4}CA$, $J$ là điểm mà $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ b) Chứng minh $B,I,J$ thẳng hàng

**Lời giải**

a) $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

b) $\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Vậy $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$. Suy ra ba điểm $B,I,J$ thẳng hàng

**Câu 50.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp trong đường tròn tâm $O$, $H$ là trực tâm của tam giác, $D$ là điểm đối xứng của $A$ qua $O$.

a) Chứng minh tú giác $HCDB$ là hình bình hành

b) Chứng minh $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$. Suy ra ba điểm $O,H,G$ thẳng hàng ($G$ là trọng tâm tam giác $ABC$)

**Lời giải**

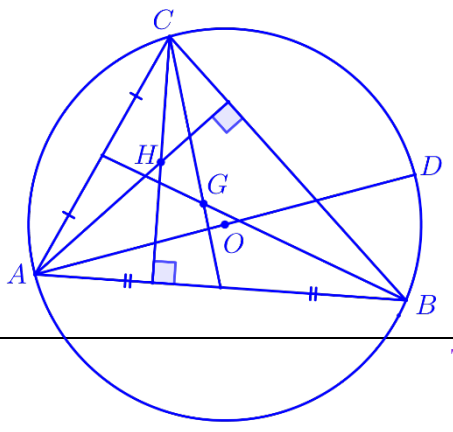
a) Vì $AD$ là đường kính của đường tròn tâm O nên $BD\perp AB, DC\perp AC$. Ta có:

$$\begin{cases}CH\perp AB\\BH\perp AC\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}CH//BD\\BH//DC\end{cases}$$

Vậy tứ giác $HCDB$ là hình bình hành.

b) Vì $HCDB$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$

Do đó, $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$



Theo quy tắc ba điểm:

$\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{HO}$

Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

Vì $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ nên:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}\Rightarrow\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

Vậy ba điểm O, H, G thẳng hàng.

**Câu 51.** Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$. Gọi I là trung điểm của $AM$ và $K$ là điểm trên cạnh $AC$ sao cho $AK=\frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm $B,I,K$ thẳng hàng.

**Lời giải**

Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{BA};\vec{v}=\overrightarrow{BC}$, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BK}&=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\\&=\vec{u}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\&=\vec{u}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)\\&=\vec{u}+\frac{1}{3}\left(\vec{v}-\vec{u}\right)=\frac{2}{3}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\end{aligned}$$

Và

$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$

Do đó $3\overrightarrow{BK}=4\overrightarrow{BI}$ nên $\overrightarrow{BK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$

Vậy ba điểm $B,I,K$ thẳng hàng.

**Câu 52.** Cho tam giác $ABC$. Dựng $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{CA}$. Chứng minh các đường thẳng $AA',BB'$ và $CC'$ đồng quy.

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{CA}$ nên tứ giác $ACBC'$ là hình bình hành.

$\Rightarrow\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$.

$\Rightarrow A$ là trung điểm của $B'C'$

Vì tứ giác $ACBC'$ là hình bình hành nên $CC'$ chứa trung tuyến của tam giác $ABC$ xuất phát từ đỉnh $C$.

Tương tự với $AA',BB'$, do đó $AA',BB',CC'$ đồng quy tại trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$.

**Câu 53.** Cho tam giác $ABC$ và một điểm $M$ tùy ý không thuộc các đường thẳng $AB,BC,CA$. Gọi $A',B',C'$ theo thứ tự là các điểm đối xứng của $M$ qua trung điểm $I,K,J$ của các cạnh $BC,CA,AB$. Chứng minh rằng

a) Ba đường thẳng $AA',BB',CC'$ đồng quy

b) Đường thẳng $MM_1$ luôn đi qua một điểm cố định khi $M$ di động

**Lời giải**

a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{KJ}$ và $\overrightarrow{B'A'}=2\overrightarrow{KJ}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B'A'}$

Vậy $ABB'A'$ là hình bình hành, nên $AA'$ và $BB'$ cắt nhau tại trung điểm chung $M_1$ của chúng.

Tương tự, $BB'$ và $CC'$ cũng cắt nhau tại trung điểm chung $M_1$ của chúng.

b) Ta có $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA'}$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA'}=2\overrightarrow{MM_1}$

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MM_1}=3\overrightarrow{MG}$ ($G$ là trọng tâm $\Delta ABC$) hay $\overrightarrow{MM_1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$

Nên $M,M_1,G$ thẳng hàng. Vậy đường thẳng $MM_1$ luôn đi qua điểm $G$ cố định khi $M$ di động.

**Câu 54.** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $M,N,P$ lần lượt thuộc các đoạn thẳng $AB,BC,CA$ sao cho $\overrightarrow{MA}=m\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NB}=n\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{PC}=p\overrightarrow{PA}$ ($m,n,p$ đều khác 1). Chứng minh rằng:

a) $M,N,P$ thẳng hàng khi và chỉ khi $mnp=1$ (định lý Mê-nê-la-uýt)

b) $AN,CM,BP$ đồng quy hoặc song song khi và chỉ khi $mnp=-1$ (định lý Xê-va)

**Lời giải**

a) Ta chọn gốc $C$. Theo giả thiết thì có

$$\overrightarrow{CM}=\frac{\overrightarrow{CA}-m\overrightarrow{CB}}{1-m};\ \overrightarrow{CN}=\frac{\overrightarrow{CB}}{1-n};\ \overrightarrow{CP}=\frac{-p\overrightarrow{CA}}{1-p}.$$

Nên

$$\overrightarrow{CB}=(1-n)\overrightarrow{CN};\ \overrightarrow{CA}=\frac{p-1}{p}\overrightarrow{CP}$$

Do đó

$$\overrightarrow{CM}=\frac{p-1}{p(1-m)}\overrightarrow{CP}-\frac{m(1-n)}{1-m}\overrightarrow{CN}.$$

Điều kiện cần và đủ để ba điểm $M,N,P$ thẳng hàng là

$$\frac{p-1}{p(1-m)}-\frac{m(1-n)}{1-m}=1\Leftrightarrow p-1-pm(1-n)=p(1-m)\Leftrightarrow mnp=1.$$

b) Ta chuyển về điều kiện thẳng hàng ở trên và điều kiện cùng phương.

**Câu 55.** Cho tam giác $ABC$. Hai điểm $M,N$ được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0},\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Chứng minh $MN\ //\ AC$.

**Lời giải**

Ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

hay $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN})-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MN}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

nên $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC}$

Do đó $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.

mà $M$ không thuộc đường thẳng $AC$ nên $MN\ //\ AC$.

**Câu 56.** Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi $M,N,P,Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB,BC,CD,DE$. Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm của các đoạn $MP\ \&\ NQ$. Chứng minh $IJ\ //\ AE\ \&\ IJ=\frac{1}{4}AE$.

**Lời giải**

Ta có: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD})+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

Do đó: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

Vậy: $IJ\ //\ AE$ và $IJ=\frac{1}{4}AE$

**Câu 57.** Trên các cạnh $AB, BC, CA$ của tam giác $ABC$ lấy các điểm tương ứng $C_1; A_1; B_1$ sao cho $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = \dfrac{1}{k}$. Trên các cạnh $A_1B_1; B_1C_1; C_1A_1$ của tam giác $A_1B_1C_1$ lấy các điểm tương ứng $C_2; A_2; B_2$ sao cho $A_1C_2 : C_2B_1 = B_1A_2 : A_2C_1 = C_1B_2 : B_2A_1 = k$. Chứng minh rằng: $A_2C_2 \,//\, AC; C_2B_2 \,//\, CB; B_2A_2 \,//\, BA$.

**Lời giải**

Lấy điểm $O$ bất kì làm gốc, đặt: $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c} \\ \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{c_1} \\ \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{c_2} \end{cases}$

Theo giả thiết, ta có $(k > 0)$: $\begin{cases} \overrightarrow{c_1} = \dfrac{\vec{b} + k\vec{a}}{1+k}, \overrightarrow{a_1} = \dfrac{\vec{c} + k\vec{b}}{1+k}, \overrightarrow{b_1} = \dfrac{\vec{a} + k\vec{c}}{1+k} \\ \overrightarrow{a_2} = \dfrac{\vec{b_1} + k\vec{c_1}}{1+k}, \overrightarrow{b_2} = \dfrac{\vec{c_1} + k\vec{a_1}}{1+k}, \overrightarrow{c_2} = \dfrac{\vec{a_1} + k\vec{b_1}}{1+k} \end{cases}$

Do đó:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_2C_2} = \overrightarrow{c_2} - \overrightarrow{a_2} &= \frac{1}{1+k}\left[(\overrightarrow{a_1} + k\overrightarrow{b_1}) - (\overrightarrow{b_1} + k\overrightarrow{c_1})\right] \\ &= \frac{1}{k+1}\left[\overrightarrow{a_1} + (k-1)\overrightarrow{b_1} - k\overrightarrow{c_1}\right] \\ &= \frac{1}{(k+1)^2}\left[\vec{c} + k\vec{b} + (k-1)\vec{a} + k(k-1)\vec{c} - k\vec{b} - k^2\vec{a}\right] \\ &= \frac{1}{(k+1)^2}\left[\left(k^2 - k + 1\right)\vec{c} - \left(k^2 - k + 1\right)\vec{a}\right] \\ &= \frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2}(\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Vì $k^2 - k + 1 > 0$ nên $A_2C_2 \,//\, AC$.

Chứng minh tương tự ta được $C_2B_2 \,//\, CB; B_2A_2 \,//\, BA$.

**Câu 58.** Cho ba dây cung song song $AA_1; BB_1; CC_1$ của đường tròn $(O)$. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác $ABC_1; BCA_1$ & $CAB_1$ nằm trên một đường tròn.

**Lời giải**

Gọi $H_1; H_2; H_3$ lần lượt là trực tâm của ba tam giác $ABC_1; BCA_1; CAB_1$. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1} \\ \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1} \\ \overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{AA_1} \\ \overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{BB_1} \end{cases}$

Vì các dây cung $AA_1;BB_1;CC_1$ song song với nhau nên ba vecto $\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{CC_1}$ cùng phương. Do đó hai vecto $\overrightarrow{H_1H_2};\overrightarrow{H_1H_3}$ cùng phương, hay ba điểm $H_1;H_2;H_3$ thẳng hàng.

## DẠNG 7. XÁC ĐỊNH ĐIỂM, TẬP HỢP ĐIỂM THOẢ MÃN ĐẲNG THỨC VEC TƠ.

Để tìm tập hợp điểm $M$ thoả nãm điều kiện vecto ta quy về một trong các dạng sau:

• Nếu $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$, với $A,B$ phân biệt cho trước thì $M$ thuộc đường trung trực của đoạn $AB$.

• Nếu $\left|\overrightarrow{MC}\right|=k\left|\overrightarrow{AB}\right|$, với $A,B,C$ phân biệt cho trước thì $M$ thuộc đường tròn tâm $C$, bán kính bằng $k\left|\overrightarrow{AB}.\right|$

• Nếu $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{BC}$, với $A,B,C$ phân biệt và $k$ là số thực thay đổi thì:

+ $M$ thuộc đường thẳng qua $A$ song song với $BC$ với $k\in\mathbb{R}$.

+ $M$ thuộc nữa đường thẳng qua $A$ song song với $BC$ và cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$ với $k>0$.

+ $M$ thuộc nữa đường thẳng qua $A$ song song với $BC$ và ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$ với $k<0$.

• Nếu $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{BC},B\neq C$ với $A,B,C$ thẳng hàng và $k$ thay đổi thì tập hợp điểm $M$ là đường thẳng $BC$.

**Câu 59.** Cho điểm $O$ cố định và hai vecto $\vec{u},\vec{v}$ cố định. Với mỗi số $m$ ta xác định điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{OM}=m.\vec{u}+(1-m)\vec{v}$. Tìm tập hợp các điểm $M$ khi $m$ thay đổi.

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OM}=m\vec{u}+(1-m)\vec{v}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OA}+(1-m)\overrightarrow{OB}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}=m(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{BM}=m\overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm $M$ là đường thẳng $BC$.

**Câu 60.** Cho hai điểm $A,B$. Tập hợp các điểm $M$ sao cho

a) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$. b) $|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}|$

**Lời giải**

a) Ta có: $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|\Leftrightarrow 2MI=AB\Leftrightarrow MI=\dfrac{AB}{2}$ ( với $I$ là trung điểm của $AB$).

Tập hợp các điểm $M$ là đường tròn tâm $I$ bán kính $\dfrac{AB}{2}$, với $I$ là trung điểm $AB$.

b) Gọi $K$ là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0};L$ là điểm thoả mãn $\overrightarrow{LB}+2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$.

Ta có: $|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|\Leftrightarrow\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{ML}$

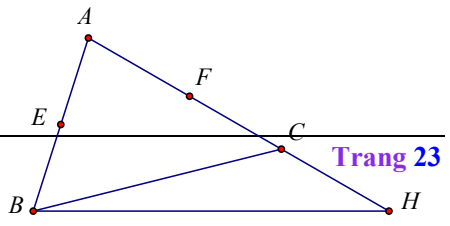
Tập hợp điểm $M$ là đường trung trực của đoạn $KL$.

**Câu 61.** Cho tam giác $ABC$. Tập hợp các điểm $M$ thoả mãn điều kiện sau:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)$, với $k$ là số thực thay đổi khác 0.

**Lời giải**



Gọi $E,F$ lần lượt là trung điểm $AB,AC$ suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME}$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MF}$

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{ME}\right|=\left|2\overrightarrow{MF}\right|\Leftrightarrow ME=MF.$

Vậy tập hợp các điểm $M$ là đường trung trực $EF$.

a) Ta có

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{HB}$ (với H là điểm thỏa mãn $,\overrightarrow{AH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$)

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME}=2k\overrightarrow{HB}\Leftrightarrow\overrightarrow{ME}=k\overrightarrow{HB}.$

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường thẳng đi qua $E$ và song song với $HB$.

**Câu 62.** Cho tam giác $ABC$.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm $I$ thoả $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$

b) Tìm quỹ tích điểm thoả mãn $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|.$

**Lời giải**

a) Ta có $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)+4\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}=-\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{9}$

suy ra $I$ tồn tại và duy nhất.

b) Với $I$ là điểm được xác định ở câu a), ta có

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=9\overrightarrow{MI}+\left(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}\right)=9\overrightarrow{MI}$

và $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$ nên $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|\Leftrightarrow\left|9\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow MI=\frac{AB}{9}.$

Vậy quỹ tích của $M$ là đường tròn tâm $I$ bán kính $\frac{AB}{9}$.

**Câu 63.** Cho $\Delta ABC$. Tập hợp điểm $M$ trong các trường hợp sau:

a) $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$. b) $\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

**Lời giải**

a) Gọi $K$ là điểm thoả $2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}=\vec{0},L$ là điểm thoả mãn $3\overrightarrow{LB}+2\overrightarrow{LC}=\vec{0}.$

Ta có: $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MK}\right|=\left|\overrightarrow{ML}\right|.$

Tập hợp điểm $M$ là đường trung trực của đoạn $KL$.

b) Với $I$ là trung điểm $BC$. Gọi $J$ là điểm thoả $4\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}.$ Ta có:

$\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|6\overrightarrow{MJ}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MI}\right|\Leftrightarrow\left|6\overrightarrow{MJ}\right|=\left|2\overrightarrow{IA}\right|\Leftrightarrow MJ=\frac{1}{3}IA.$

Tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $J$ bán kính $R=\frac{1}{3}IA.$

**Câu 64.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp các điểm $M$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$ c) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|.$

**Lời giải**

a) Ta có: $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow B\equiv A$ trái với giả thiết.

Vậy không có điểm $M$ thoả mãn.

b) Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác $ABC$.

c) Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm của $AB,AC$ ta được:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MJ}$

Nên $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{MJ}\right|\Leftrightarrow MI=MJ$

Như vậy $M$ cách đều 2 điểm cố định $I,J$ nên tập hợp các điểm $M$ thoả điều kiện đề Câu là đường trung trực của $IJ$.

**Câu 65.** Cho tam giác $ABC$ và ba vecto cố định $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$. Với mỗi số thực $t$, ta lấy các điểm $A',B',C'$ sao cho $\overrightarrow{AA'}=t\vec{u},\overrightarrow{BB'}=t\vec{v},\overrightarrow{CC'}=t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm $G'$ của tam giác $A'B'C'$ khi $t$ thay đổi.

**Lời giải**

Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ thì

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{GG'}&=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}\\&=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=t\vec{u}+t\vec{v}+t\vec{w}\\&=t\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right)\end{aligned}$$

Đặt $\vec{\alpha}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ thì vecto $\alpha$ xác định và $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}t\vec{\alpha}$

Suy ra nếu $\vec{\alpha}=\vec{0}$ thì các điểm $G'$ trùng với điểm $G$, còn nếu $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ thì quỹ tích các điểm $G'$ là đường thẳng đi qua $G$ và song song với giá của vecto $\vec{\alpha}$.

**Câu 66.** Cho tứ giác $ABCD$. Với số $k$ tuỳ ý, lấy các điểm $M,N$ sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm $I$ của đoạn $MN$ khi $k$ thay đổi.

**Lời giải**

Gọi $O,O'$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC$, ta có:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'B};\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'C}.$

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{OO'}$

Tương tự vì $O,I$ lần lượt là trung điểm của $AD\,\&\,MN$ nên $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{OI}$

Do đó $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{DC}\right)=k\overrightarrow{OO'}$ Vậy khi $k$ thay đổi, tập hợp điểm $I$ là đường thẳng $OO'$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

## DẠNG 1. DỰNG VÀ TÍNH ĐỘ DÀI VÉC – TƠ

**Câu 1.** Khẳng định nào **sai**?

**A.** $1.\vec{a}=\vec{a}$

**B.** $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k>0$

**C.** $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k<0$

**D.** Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$ cùng phương khi có một số $k$ để $\vec{a}=k\vec{b}$

**Lời giải**

**Chọn C**

(Dựa vào định nghĩa tích của một số với một vectơ)

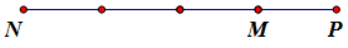
**Câu 2.** Trên đường thẳng $MN$ lấy điểm $P$ sao cho $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$. Điểm $P$ được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



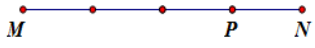

Hình 1




Hình 2




Hình 3




Hình 4

**A.** Hình 3 **B.** Hình 4 **C.** Hình 1 **D.** Hình 2

**Lời giải**

**Chọn A**

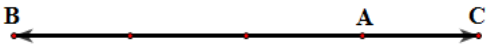
$\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}\Rightarrow\overrightarrow{MN}$ ngược hướng với $\overrightarrow{MP}$ và $\left|\overrightarrow{MN}\right|=3\left|\overrightarrow{MP}\right|$.

**Câu 3.** Cho ba điểm phân biệt $A,B,C$. Nếu $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{AC}$

**Lời giải**

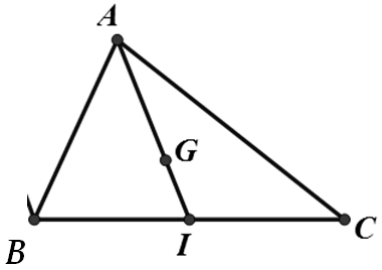
**Chọn D**




**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $I$ là trung điểm của $BC$.Khẳng định nào sau đây đúng

**A.** $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$ **B.** $3\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{IC}$ **C.** $\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{IC}$ **D.** $2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$

**Lời giải**




**Chọn A**

Vì $I$ là trung điểm của $BC$ nên $BI=CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vecto $\overrightarrow{BI},\overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$.

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $AC$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}$ **B.** $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CN}$ **C.** $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{NM}$ **D.** $\overrightarrow{CN}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 6.** Cho $\vec{a}\neq\vec{0}$ và điểm $O$. Gọi $M,N$ lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON}=-4\vec{a}$. Khi đó:

**A.** $\overrightarrow{MN}=7\vec{a}$ **B.** $\overrightarrow{MN}=-5\vec{a}$ **C.** $\overrightarrow{MN}=-7\vec{a}$ **D.** $\overrightarrow{MN}=-5\vec{a}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=-4\vec{a}-3\vec{a}=-7\vec{a}$.

**Câu 7.** Tìm giá trị của $m$ sao cho $\vec{a}=m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng và $\left|\vec{a}\right|=5,\left|\vec{b}\right|=15$

**A.** $m=3$ **B.** $m=-\dfrac{1}{3}$ **C.** $m=\dfrac{1}{3}$ **D.** $m=-3$

**Lời giải**

**Chọn B**

Do $\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng nên $m=-\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=-\dfrac{5}{15}=-\dfrac{1}{3}$.

**Câu 8.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $I$ là trung điểm của $AB$. Tìm điểm $M$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

**A.** $M$ là trung điểm của $BC$

**B.** $M$ là trung điểm của $IC$

**C.** $M$ là trung điểm của $IA$

**D.** $M$ là điểm trên cạnh $IC$ sao cho $IM=2MC$

**Lời giải**

**Chọn B**

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow M$ là trung điểm của $IC$.

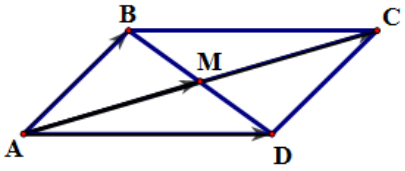
**Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$, điểm $M$ thỏa mãn $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm $M$ là:

**A.** Trung điểm của $AC$ **B.** Điểm $C$

**C.** Trung điểm của $AB$ **D.** Trung điểm của $AD$

**Lời giải**

**Chọn A**




Theo quy tắc hình bình hành, ta có:

**Câu 10.** Cho đoạn thẳng $AB$. Gọi $M$ là một điểm trên $AB$ sao cho $AM=\dfrac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{BM}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MA}$.

**Câu 11.** Cho đoạn thẳng $AB$ và $M$ là một điểm trên đoạn $AB$ sao cho $MA=\dfrac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

**A.** $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MB}$ **C.** $\overrightarrow{MB}=-4\overrightarrow{MA}$ **D.** $\overrightarrow{MB}=-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta thấy $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{MB}=-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$ là sai.

**Câu 12.** Cho ba điểm $A,B,C$ phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

**A.** $AB=AC$ **B.** $\exists k\neq 0:\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\forall$ điểm $M$

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 13.** Cho $\Delta ABC$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{BC},\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Các cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

**A.** $2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}$ **B.** $\vec{a}-2\vec{b},2\vec{a}-\vec{b}$ **C.** $5\vec{a}+\vec{b},-10\vec{a}-2\vec{b}$ **D.** $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $-10\vec{a}-2\vec{b}=-2.(5\vec{a}+\vec{b})\Rightarrow 5\vec{a}+\vec{b}$ và $-10\vec{a}-2\vec{b}$ cùng phương.

**Câu 14.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

**A.** $-3\vec{a}+\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a}+6\vec{b}$ **B.** $-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $2\vec{a}+\vec{b}$

**C.** $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ **D.** $\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{a}-2\vec{b}$

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 15.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

**A.** $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$ **B.** $\vec{u}=\frac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$

**C.** $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$ **D.** $\vec{u}=2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 16.** Biết rằng hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vec tơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a}+4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của $x$ là:

**A.** $-7$ **B.** $7$ **C.** $5$ **D.** $6$

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện để hai vec tơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a}+4\vec{b}$ cùng phương là: $\frac{x+1}{3}=\frac{4}{-2}\Leftrightarrow x=-7$.

**Câu 17.** Biết rằng hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vec tơ $2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{a}+\left(x-1\right)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của $x$ là:

**A.** $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

**Lời giải**

**Chọn C**

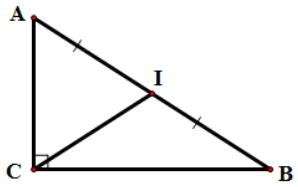
**Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ có điểm $O$ thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

**A.** Tam giác $ABC$ đều **B.** Tam giác $ABC$ cân tại $C$

**C.** Tam giác $ABC$ vuông tại $C$ **D.** Tam giác $ABC$ cân tại $B$

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $I$ là trung điểm của $AB$. Ta có:

$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|=AB$

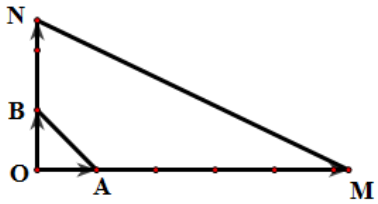
$\Leftrightarrow \left|2.\overrightarrow{CI}\right|=AB \Leftrightarrow 2CI=AB \Leftrightarrow CI=\dfrac{1}{2}AB \Rightarrow$ Tam giác $ABC$ vuông tại $C$.

**Câu 19.** Cho tam giác $OAB$ vuông cân tạ $O$ với $OA=OB=a$. Độ dài của véc tơ $\vec{u}=\dfrac{21}{4}\overrightarrow{OA}-\dfrac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là:

**A.** $\dfrac{a\sqrt{140}}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{321}}{4}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{520}}{4}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{541}}{4}$

**Lời giải**

**Chọn D**




Dựng điểm $M,N$ sao cho: $\overrightarrow{OM}=\dfrac{21}{4}\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{OB}$. Khi đó:

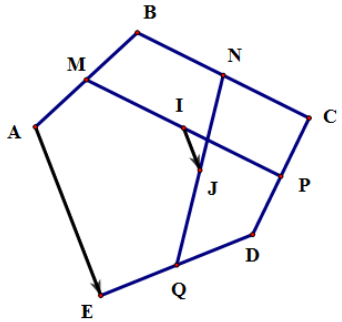
$\left|\vec{u}\right|=\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|=\left|\overrightarrow{NM}\right|=MN=\sqrt{OM^2+ON^2}=\sqrt{\left(\dfrac{21a}{4}\right)^2+\left(\dfrac{5a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{541}}{4}$.

**Câu 20.** Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi $M,N,P,Q$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AB,BC,CD,DE$. Gọi $I$ và $J$ lần lượt là trung điểm các đoạn $MP$ và $NQ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ **B.** $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ **C.** $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ **D.** $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AE}$

**Lời giải**

**Chọn C**




Ta có: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}$

$\begin{cases}\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EQ}\\ \overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DQ}\end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}\right),\ \overrightarrow{PN}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

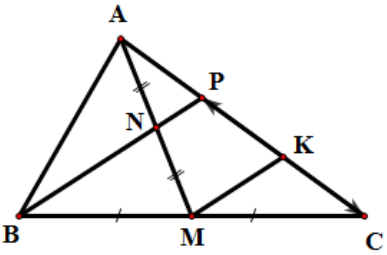
Suy ra: $2\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}\right)-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

**Câu 21.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$ và $N$ là trung điểm $AM$. Đường thẳng $BN$ cắt $AC$ tại $P$. Khi đó $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của $x$ là:

**A.** $-\frac{4}{3}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{5}{3}$

**Lời giải**

**Chọn C**




Kẻ $MK//BP(K\in AC)$. Do $M$ là trung điểm của $BC$ nên suy ra $K$ là trung điểm của $CP$

Vì $MK//BP\Rightarrow MK//NP$ mà $N$ là trung điểm của $AM$ nên suy ra $P$ là trung điểm của $AK$

Do đó: $AP=PK=KC$. Vậy $\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CP}\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$.

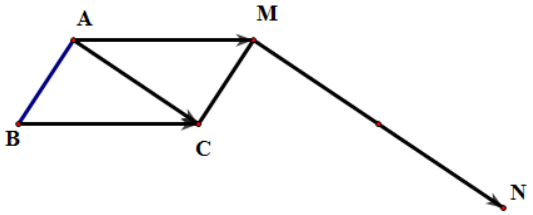
**Câu 22.** Cho tam giác $ABC$. Hai điểm $M,N$ được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

**A.** $MN\perp AC$ **B.** $MN//AC$

**C.** $M$ nằm trên đường thẳng $AC$ **D.** Hai đường thẳng $MN$ và $AC$ trùng nhau

**Lời giải**

**Chọn B**




Ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow M$ là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$ nên $M\notin AC$ (1)

Cộng vế theo vế hai đẳng thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, ta được:

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN//AC$.

**Câu 23.** Cho tam giác vuông cân $OAB$ với $OA=OB=a$. Tính độ dài vectơ $\vec{v}=\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

**A.** $2a$ **B.** $\frac{\sqrt{6073}}{28}a$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

**Lời giải**

Biểu diễn vectơ $\vec{v}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$.

Áp dụng Pitago ta có: $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{\left(\frac{11a}{4}\right)^2+\left(\frac{3a}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{6073}}{28}a$.

**Đáp án** **B.**

**Câu 24.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Tính độ dài vectơ: $\vec{u} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$

**A.** $\left|\vec{u}\right| = 4a\sqrt{2}$ **B.** $\left|\vec{u}\right| = a\sqrt{2}$ **C.** $\left|\vec{u}\right| = 3a\sqrt{2}$ **D.** $\left|\vec{u}\right| = 2a\sqrt{2}$

**Lời giải**

$\left|\vec{u}\right| = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right) - 2\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) + 3\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right) - 2\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}\right)$

$= \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} = -2\overrightarrow{OA} \Rightarrow \left|\vec{u}\right| = 2OA = AC = a\sqrt{2}$.

**Đáp án B.**

**Câu 25.** Cho tam giác vuông cân $OAB$ với $OA = OB = a$. Tính độ dài vectơ $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2,5\overrightarrow{OB}$

**A.** $\frac{\sqrt{541}}{4}a$ **B.** $\frac{\sqrt{520}}{4}a$ **C.** $\frac{\sqrt{140}}{4}a$ **D.** $\frac{\sqrt{310}}{4}a$

**Lời giải**

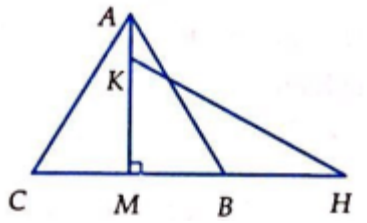
**Đáp án A**

Áp dụng Pitago: $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\left(\frac{21a}{4}\right)^2 + \left(2,5a\right)^2} = \frac{\sqrt{541}}{4}a$

**Câu 26.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$ điểm $M$ là trung điểm của $BC$. Tính độ dài vectơ $\vec{u} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB}$.

**A.** $\frac{a\sqrt{127}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{127}}{8}$ **C.** $\frac{a\sqrt{127}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{127}}{2}$

**Lời giải**




**Đáp án B**

Gọi $K \in AM : MK = \frac{3}{4}MA \qquad H \in MB : MH = 2,5MB$

Do đó: $\left|\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MH}\right| = \left|\overrightarrow{HK}\right|$

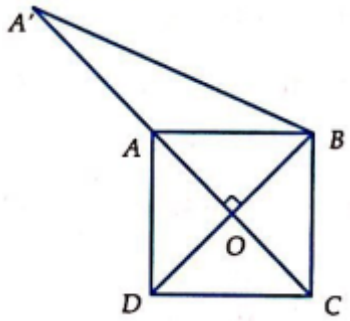
Ta có: $MK = \frac{3}{4}AM = \frac{3\sqrt{3}a}{8}, MH = \frac{5a}{4} \Rightarrow KH = \sqrt{MH^2 + MK^2} = \frac{a\sqrt{127}}{8}$

**Câu 27.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Tính độ dài vectơ $\vec{u} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.

**A.** $\left|\vec{u}\right| = a\sqrt{5}$ **B.** $\left|\vec{u}\right| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ **C.** $\left|\vec{u}\right| = 3a\sqrt{5}$ **D.** $\left|\vec{u}\right| = 2a\sqrt{5}$

**Lời giải**

**Đáp án A**




$\vec{u} = 4\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)-3\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)-2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

Trên $OA$ lấy $A'$ sao cho $OA'=3OA \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OB'} \Rightarrow BA'=\sqrt{OB^2+OA^2}=a\sqrt{5}$

**Câu 28.** Cho tam giác $ABC$ có $G$ là trọng tâm. Gọi $H$ là chân đường cao hạ từ $A$ sao cho $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm $M$ di động trên $BC$ sao cho $\overrightarrow{BM}=x.\overrightarrow{BC}$. Tìm $x$ sao cho độ dài vectơ $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $x=\frac{4}{5}$ **B.** $x=\frac{5}{6}$ **C.** $x=\frac{6}{5}$ **D.** $x=\frac{5}{4}$

**Lời giải**

Dựng hình bình hành $AGCE$. Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ME}$

Kẻ $EF\perp BC, F\in BC \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|ME\right|\geq EF$

Do đó: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ nhỏ nhất khi $M\equiv F$.

Gọi $P$ là trung điểm $AC$, $Q$ là hình chiếu của $B$ trên $BC$. Ta có $BP=\frac{3}{4}BE$

$\Delta BPQ\sim\Delta BEF \Rightarrow \frac{BQ}{BF}=\frac{BP}{BE}=\frac{3}{4}\Rightarrow \overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}$

Mặt khác: $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}\Rightarrow PQ$ là đường trung bình của $\Delta AHC \Rightarrow \overrightarrow{HQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$

$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}=\frac{5}{6}\overrightarrow{HC}=\frac{5}{8}\overrightarrow{BC}\Rightarrow \overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}\Rightarrow x=\frac{5}{6}.$

**Đáp án B.**

**Câu 29.** Cho $\Delta ABC$ đều cạnh $a$. $M$ là trung điểm $BC$. Tính độ dài $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|$.

**A.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

**Lời giải**

Gọi $N$ là trung điểm của $AB$, $Q$ là điểm đối xứng với $A$ qua $C$ và $P$ là đỉnh của hình bình hành $AQPN$.

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}$

Gọi $L$ là hình chiếu của $A$ trên $PN$.

$MN//AC \Rightarrow \widehat{ANL}=\widehat{MNB}=\widehat{CAB}=60°$

Xét tam giác vuông $ANL$ có: $\sin\widehat{ANL}=\frac{AL}{AN}$

$\Rightarrow AL = \frac{a}{2}.\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow NL = AN.\cos \widehat{ANL} = \frac{a}{4} \Rightarrow PL = PN + NL = \frac{9a}{4}$

Xét tam giác vuông $APL$ có: $AP = \sqrt{AL^2 + PL^2} = \frac{a\sqrt{21}}{2}$.

## DẠNG 2. PHÂN TÍCH VÉC-TƠ

**Câu 30.** Cho $AK$ và $BM$ là hai trung tuyến của $\Delta ABC$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AB}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BM}$.

**A.** $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM}\right)$ **B.** $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM}\right)$ **C.** $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM}\right)$ **D.** $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BM}\right)$

**Lời giải**

**Cách 1:**

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BM}$ (vì $KM = \frac{1}{2}AB$)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM}\right)$

**Cách 2:** Giả sử có cặp số $m, n$ sao cho $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AK} + n\overrightarrow{BM}$, với $G = AK \cap BM$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \frac{3}{2}m\overrightarrow{AG} - \frac{3}{2}n\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}m - 1\right)\overrightarrow{AG} = \left(-\frac{3}{2}n - 1\right)\overrightarrow{BG}$ (*)

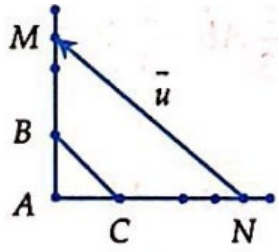
Do $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}$ không cùng phương $\Rightarrow$ (*) $\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}m - 1 = 0 \\ -\frac{}{2}n - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM}\right)$.

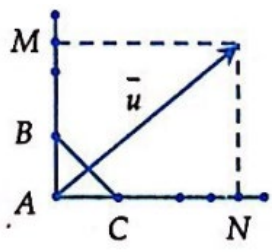
**Đáp án** **A.**

**Câu 31.** Cho $\Delta ABC$ vuông cân, $AB = AC$. Khi đó vectơ $\vec{u} = \frac{11}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào sau đây?

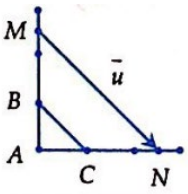
**A.**



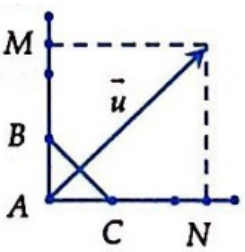

**B.**




**C.**




**D.**

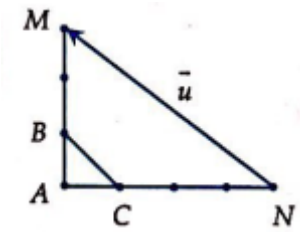


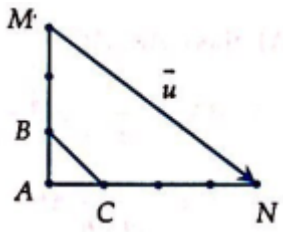

**Lời giải**

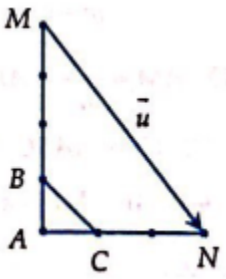
Theo hình vẽ $\overrightarrow{AM} = \frac{11}{4}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ Chọn đáp án **D.**

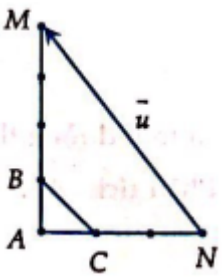
**Đáp án D.**

**Câu 32.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$, vectơ $\vec{u}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$ đuược vẽ đúng ở hình nào dưới đây?

**A.** 


**B.** 


**C.** 


**D.** 


**Lời giải**

**Đáp án A**

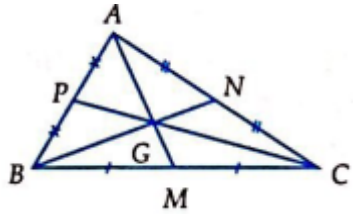
**Câu 33.** Cho $\Delta ABC$. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $BC, CA, AB$. Phân tích $\overrightarrow{AB}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BN}$ là $\overrightarrow{CP}$.

**A.** $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$ **B.** $\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

**C.** $\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$ **D.** $\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{4}{3}\overrightarrow{CP}$

**Lời giải**

**Đáp án C**




$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{GM}+\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GM}\right)=2\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GB}$

$=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

**Câu 34.** Cho $\Delta ABC$. Diểm $M$ nằm trên đường thẳng $BC$ sao cho $\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MC}\left(k\neq 1\right)$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

**A.** $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{1-k}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}}{1+k}$ **C.** $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}}{1-k}$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{1-k}$

**Lời giải**

**Đáp án C**

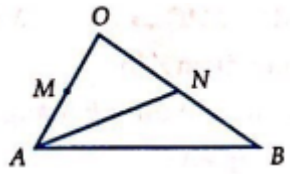
$\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}}{1-k}$

**Câu 35.** Cho $\Delta OAB$ với $M, N$ lần lượt là trung điểm của $OA, OB$. Tìm số $m, n$ thích hợp để $\overrightarrow{NA}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$.

**A.** $m=-1,n=\frac{1}{2}$ **B.** $m=1,n=-\frac{1}{2}$ **C.** $m=1,n=\frac{1}{2}$ **D.** $m=-1,n=-\frac{1}{2}$

**Lời giải**

**Đáp án B**




$\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

**Câu 36.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $E, N$ lần lượt là trung điểm của $BC, AE$. Tìm các số $p$ và $q$ sao cho $\overrightarrow{DN}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$.

**A.** $p=\frac{5}{4};q=\frac{3}{4}$ **B.** $p=-\frac{4}{3};q=\frac{2}{3}$ **C.** $p=-\frac{4}{3};q=-\frac{2}{3}$ **D.** $p=\frac{5}{4};q=-\frac{3}{4}$

**Lời giải**

**Đáp án D**

$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

Vậy $p=\frac{5}{4},q=-\frac{3}{4}$

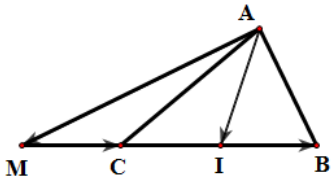
**Câu 37.** Trên đường thẳng chứa cạnh $BC$ của tam giác $ABC$ lấy một điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

**C.** $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $I$ là trung điểm của $BC$. Khi đó $C$ là trung điểm của $MI$. Ta có:

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+2\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

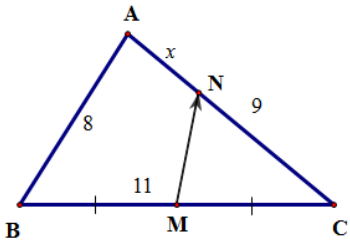
**Câu 38.** Cho tam giác $ABC$ biết $AB=8, AC=9, BC=11$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$ và $N$ là điểm trên đoạn $AC$ sao cho $AN=x(0<x<9)$. Hệ thức nào sau đây **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{9}\right)\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x}{9}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

**C.** $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x}{9}+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x}{9}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{x}{9}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\left(\frac{x}{9}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

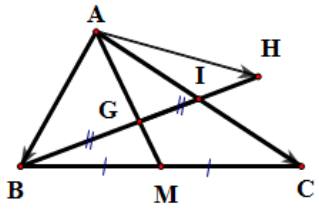
**Câu 39.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $G$ là trọng tâm và $H$ là điểm đối xứng với $B$ qua $G$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

**C.** $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $M,I$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và $AC$.

Ta thấy $AHCG$ là hình bình hành nên

$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AC}$

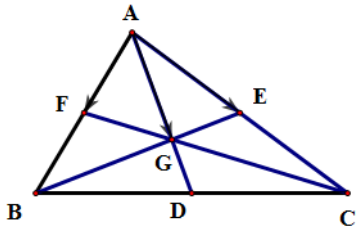
$\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

**Câu 40.** Cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$. Gọi các điểm $D,E,F$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC,CA$ và $AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$ **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$ **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta có: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{AE}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$.

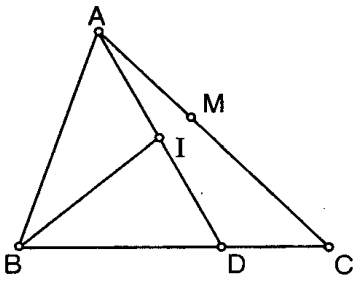
**Câu 41.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $D$ là điểm sao cho $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ và $I$ là trung điểm của cạnh $AD$, $M$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Vectơ $\overrightarrow{BI}$ được phân tích theo hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

**A.** $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

**C.** $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Ta có: $I$ là trung điểm của cạnh $AD$ nên

$$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}BC\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

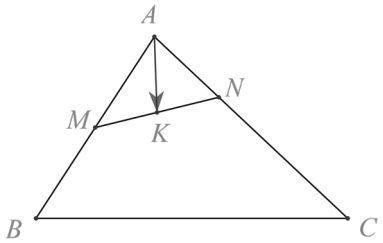
**Câu 42.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB$, $N$ là điểm thuộc $AC$ sao cho $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$. $K$ là trung điểm của $MN$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

**C.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Ta có $M$ là trung điểm $AB$ nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

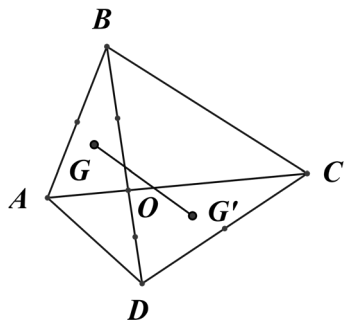
Do đó $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

**Câu 43.** Cho tứ giác $ABCD$, $O$ là giao điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$. Gọi $G$ theo thứ tự là trọng tâm của tam giác $OAB$ và $OCD$. Khi đó $\overrightarrow{GG'}$ bằng:

**A.** $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **B.** $\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **C.** $3\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **D.** $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Vì $G'$ là trọng tâm của tam giác $OCD$ nên $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$. (1)

Vì $G$ là trọng tâm của tam giác $OAB$ nên: $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GO}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}$ (2)

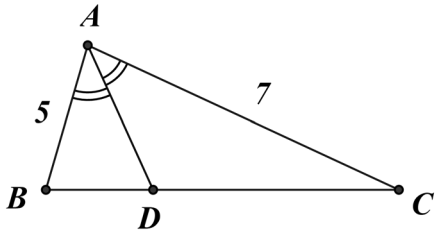
Từ (1) và (2) suy ra: $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

**Câu 44.** Cho tam giác $ABC$ với phân giác trong $AD$. Biết $AB=5$, $BC=6$, $CA=7$. Khi đó $\overrightarrow{AD}$ bằng:

**A.** $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$. **B.** $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. **C.** $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. **D.** $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Vì $AD$ là phân giác trong của tam giác $ABC$ nên:

$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{7}\Rightarrow\overrightarrow{BD}=\frac{5}{7}\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{5}{7}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)$

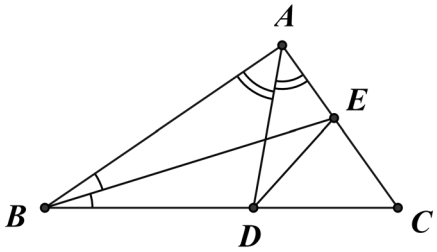
$\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$.

**Câu 45.** Cho $AD$ và $BE$ là hai phân giác trong của tam giác $ABC$. Biết $AB=4$, $BC=5$ và $CA=6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng:

**A.** $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **B.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$. **C.** $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **D.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




$AD$ là phân giác trong của tam giác $ABC$ nên $\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{4}\Rightarrow\frac{CD}{CD+DB}=\frac{6}{6+4}$

$\Rightarrow\frac{CD}{CB}=\frac{6}{10}\Rightarrow\overrightarrow{CD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.

Tương tự: $\frac{CE}{CA}=\frac{5}{9}\Rightarrow\overrightarrow{CE}=\frac{5}{9}\overrightarrow{CA}$.

Vậy $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}=\frac{5}{9}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.

**Câu 46.** Cho hình bình hành *ABCD.* Gọi *K, L* lần lượt là trung điểm *BC, CD.* Biết $\overrightarrow{AK}=\vec{a},\overrightarrow{AL}=\vec{b}$. Biểu diễn $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a},\vec{b}$

**A.** $\overrightarrow{BA}=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$

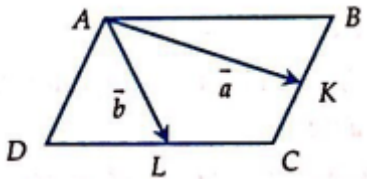
**B.** $\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$

**C.** $\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b},\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$

**D.** $\overrightarrow{BA}=-\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$

**Lời giải**

**Đáp án D**




$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BK}=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)=2\overrightarrow{BA}+2\vec{a}\Leftrightarrow2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}$

$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{LD}=2\left(\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AD}\right)=2\overrightarrow{BC}-2\vec{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BC}=-2\vec{b}$

Từ đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}\\\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BC}=-2\vec{b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{BA}=-\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\\\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}\end{cases}$

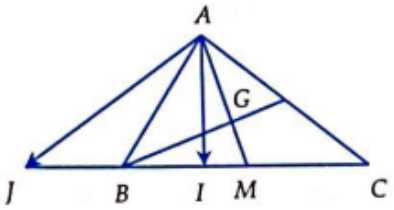
**Câu 47.** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm *G*. Gọi *I* là điểm trên *BC* sao cho $2CI=3BI$ và *J* là điểm trên *BC* kéo dài sao cho $5JB=2JC$. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$

**A.** $\overrightarrow{AG}=\frac{15}{16}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{35}{48}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$

**C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{15}{16}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$ **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{35}{48}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$

**Lời giải**

**Đáp án B**




Gọi $M$ là trung điểm $BC$:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)2\overrightarrow{IC}=-3\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AI}\right)=-3\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

Tương tự: $\Leftrightarrow\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Ta có hệ: $\begin{cases}\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}\\ \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AJ}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AJ}\\ \overrightarrow{AC}=\frac{25}{16}\overrightarrow{AI}-\frac{9}{16}\overrightarrow{AJ}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\begin{array}{l}\frac{5}{8}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AJ}\\ +\frac{25}{16}\overrightarrow{AI}-\frac{9}{16}\overrightarrow{AJ}\end{array}\right)$

$$=\frac{35}{48}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$$

**Câu 48.** Cho $\Delta ABC$. Điểm $M$ nằm trên đường thẳng $BC$ sao cho $n\overrightarrow{BM}=m\overrightarrow{BC}\left(n,m\neq 0\right)$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

**A.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{m+n}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

**C.** $\overrightarrow{AM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

**Lời giải**

**Đáp án D**

$$n\overrightarrow{BM}=m\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow n\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)=m\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}\right)$$

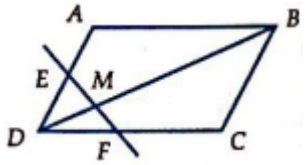
$$\Leftrightarrow\left(m+n\right)\overrightarrow{AM}=n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$$

**Câu 49.** Một đường thẳng cắt các cạnh $DA$, $DC$ và đường chép $DB$ của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm $E$, $F$ và $M$. Biết rằng $\overrightarrow{DE}=m\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF}=n\overrightarrow{DC}$ $\left(m,n>0\right)$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{DM}$ qua $\overrightarrow{DB}$ và $m$, $n$.

**A.** $\overrightarrow{DM}=\frac{m.n}{m+n}\overrightarrow{DB}$ **B.** $\overrightarrow{DM}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{DB}$ **C.** $\overrightarrow{DM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}$ **D.** $\overrightarrow{DM}=\frac{m.n}{m-n}\overrightarrow{DB}$

**Lời giải**

**Đáp án A**




Đặt $\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DB},\overrightarrow{EM}=y\overrightarrow{FM}\Rightarrow\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}$ nên

$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}-m\overrightarrow{DA}=(x-m)\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}$

Ta có: $\overrightarrow{EM}=y\overrightarrow{FM}\Leftrightarrow(x-m)\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}=xy\overrightarrow{DA}+y(x-n)\overrightarrow{DC}$

Do $DA$ và $DC$ không cùng phương nên: $\begin{cases}x-m=xy\\x=y(x-n)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{m.n}{m+n}\\y=-\dfrac{m}{n}\end{cases}\Leftrightarrow\overrightarrow{DM}=\dfrac{m.n}{m+n}\overrightarrow{DB}$

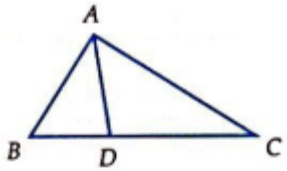
**Câu 50.** Cho $\Delta ABC$. Trên $BC$ lấy điểm $D$ sao cho $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Khi đó phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

**A.** $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

**C.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

**Lời giải**

**Đáp án A**



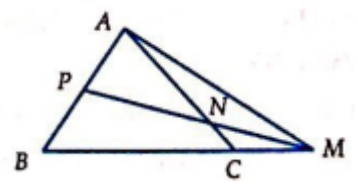

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

**Câu 51.** Cho $\Delta ABC$. Lấy các điểm $M, N, P$ sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0},\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $M, N, P$ thẳng hàng.

**A.** $\overrightarrow{MP}=-2\overrightarrow{MN}$ **B.** $\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{MN}$ **C.** $\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MN}$ **D.** $\overrightarrow{MP}=-3\overrightarrow{MN}$

**Lời giải**

**Đáp án C**




$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Do đó

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}(1)$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}(2)$$

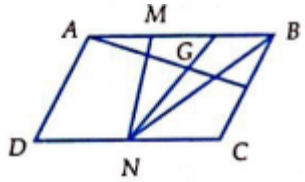
Từ (1), (2) $\Rightarrow \overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow$ *M, N, P* thẳng hàng.

**Câu 52.** Cho hình bình hành *ABCD.* Gọi *M, N* là các điểm nằm trên cạnh *AB* và *CD* sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $CN = \frac{1}{2}CD$. Gọi *G* là trọng tâm của $\Delta BMN$. Gọi *I* là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BI} = m\overrightarrow{BC}$. Xác định *m* để *AI* đi qua *G*.

**A.** $m = \frac{6}{11}$ **B.** $m = \frac{11}{6}$ **C.** $m = \frac{6}{5}$ **D.** $m = \frac{18}{11}$

**Lời giải**

**Đáp án A**




Ta có: $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM}$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + m\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = (1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$$

Để *AI* đi qua *G* thì $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AG}$

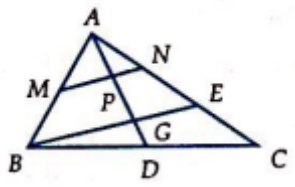
$$\Rightarrow (1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} = k.\frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + k.\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} 1-m = \frac{5k}{18} \\ m = \frac{k}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{6}{11} \\ k = \frac{18}{11} \end{cases}$$

**Câu 53.** Cho $\Delta ABC$ có trung tuyến *AD.*Xét các điểm *M, N, P* cho bởi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AD}$. Tìm *m* để *M, N, P* thẳng hàng.

**A.** $m = \frac{1}{6}$ **B.** $m = \frac{1}{3}$ **C.** $m = \frac{1}{4}$ **D.** $m = \frac{2}{3}$

**Lời giải**

**Đáp án B**




Gọi *E* là trung điểm $AC \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Rightarrow MN // BE \Rightarrow G$ là trọng tâm $\Delta ABE$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ nên $M, N, P$ thẳng hàng $\Rightarrow$ $P$ là trung điểm $AG$. Vậy $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

**Câu 54.** Cho $\Delta ABC$. $M$ và $N$ là hai điểm xác định thỏa mãn: $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $M, N, B$ thẳng hàng?

**A.** $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$ **B.** $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BN}$ **C.** $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$ **D.** $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$

**Lời giải**

**Đáp án B**

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}+3\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}(1)$

Theo bài ra:

$\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BN}-2\overrightarrow{BN}+3\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BN}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}(2)$

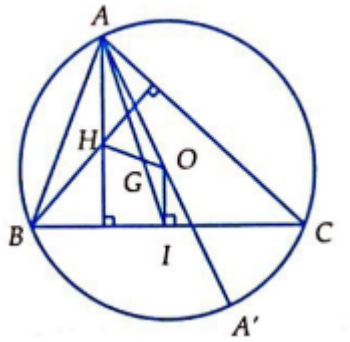
Từ (1), (2) $\Rightarrow 4\overrightarrow{BM}=6\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BN}$

**Câu 55.** Cho $\Delta ABC$ với $H, O, G$ lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $H, O, G$ thẳng hàng?

**A.** $\overrightarrow{OH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ **B.** $\overrightarrow{HO}=3\overrightarrow{OG}$ **C.** $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ **D.** $2\overrightarrow{GO}=-3\overrightarrow{OH}$

**Lời giải**

**Đáp án C**




Lời giải chi tiết ở phần dạng toán 2.

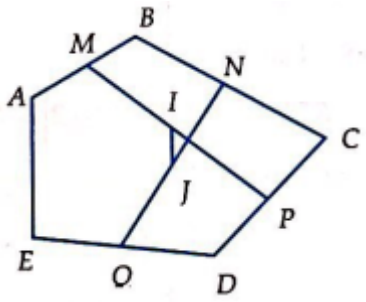
*Nhận xét:* Đường thẳng đi qua 3 điểm trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là đường Ơ – le.

**Câu 56.** Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của cạnh $AB, BC, CD, DE$. Gọi $I, J$ lần lượt là trung điểm của các đoạn $MP$ và $NQ$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $IJ // AE$?

**A.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ **B.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AE}$ **C.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ **D.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

**Lời giải**

**Đáp án C**




$\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{IN}=2\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{IJ}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{IJ}$

**Câu 57.** Cho $\Delta ABC$. Các điểm *I, J* thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AC}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $IC//BJ$ ?

**A.** $\overrightarrow{CI}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ **B.** $\overrightarrow{CI}=3\overrightarrow{BJ}$ **C.** $\overrightarrow{CI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$ **D.** $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$

**Lời giải**

**Đáp án C**

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CI}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}=-\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)(1)$

$\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BJ}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\overrightarrow{CI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$

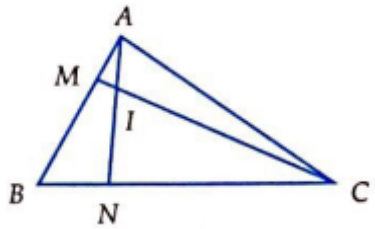
**Câu 58.** Cho $\Delta ABC$. Trên các cạnh *AB, BC* lấy các điểm *M, N* sao cho $AM=\frac{2}{5}MB,\frac{BN}{NC}=\frac{1}{3}$. Gọi *I* là giao điểm của *AN* và C*M*. Tính tỉ số $\frac{AI}{AN}$ và $\frac{CI}{IM}$.

**A.** $\frac{AI}{AN}=\frac{3}{7};\frac{CI}{IM}=\frac{21}{2}$ **B.** $\frac{AI}{AN}=\frac{4}{11};\frac{CI}{IM}=\frac{7}{2}$

**C.** $\frac{AI}{AN}=\frac{8}{23};\frac{CI}{IM}=\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{AI}{AN}=\frac{8}{23};\frac{CI}{IM}=\frac{21}{2}$

**Lời giải**

**Đáp án D**




Đặt $\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CI}=y\overrightarrow{CM}$

Ta có: $\overrightarrow{AI}=x\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)=x\overrightarrow{AB}+\frac{x}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3x}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{x}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{21x}{8}\overrightarrow{AM}+\frac{x}{4}\overrightarrow{AC}$

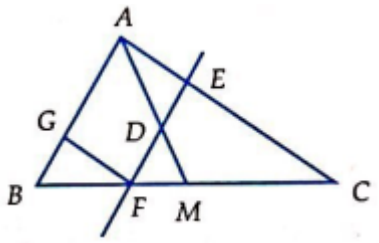
Vì *M, C, I* thẳng hàng $\Rightarrow \frac{21x}{8}+\frac{x}{4}=1\Leftrightarrow x=\frac{8}{23}$. Tương tự ta chưa tìm được $\frac{IC}{IM}=\frac{21}{2}$

**Câu 59.** Cho $\Delta ABC$ và trung tuyến *AM*. Một đường thẳng song song với *AB* cắt các đoạn thẳng *AM, AC* và *BC* lần lượt tại *D, E,* và *F*. Một điểm *G* nằm trên cạnh *AB* sao cho *FG* song song với *A**C.** Tính $\frac{ED}{GB}$.

**A.** $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 1

**Lời giải**

**Đáp án D**




Ta đặt: $\overrightarrow{CA}=\vec{a},\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{CM}=\frac{b}{2}\overrightarrow{CE}=k\overrightarrow{CA}=k\vec{a}$

Vì *E* nằm ngoài *AC* nên có số *k* sao cho: $\overrightarrow{CE}=k\overrightarrow{CA}=k\vec{a}$ với $0<k<1$.

Khi đó $\overrightarrow{CF}=k.\overrightarrow{CB}=k\vec{b}$.

Điểm *D* nằm trên *AM* và *EF* nên có số *x* này:

$\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{CA}+(1-x)\overrightarrow{CM}=y\overrightarrow{CE}+(1-y)\left(\overrightarrow{CF}\right)$

Hay $x\vec{a}+\frac{1-x}{2}\vec{b}=ky\vec{a}+k(1-y)\vec{b}$

Vì $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương nên $x=ky$ và $\frac{1-x}{2}=k(1-y)$

Suy ra $x=2k-1$ do đó

$\overrightarrow{CD}=(2k-1)\vec{a}+(1-k)\vec{b},\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GB}=k\overrightarrow{AB}\Rightarrow(1-k)\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}\Rightarrow\frac{ED}{GB}=1$

**Câu 60.** Cho tứ giác *ABCD* có hai đuường chéo cắt nhau tại *O*. Qua trung điểm *M* của *AB* dựng đường thẳng *MO* cắt *CD* tại *N*. Biết $OA=1,OB=2,OC=3$, $OD=4$. Tính $\frac{CN}{ND}$.

**A.** 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

**Lời giải**

**Đáp án C**

$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}=-2\overrightarrow{OA}$ Vì $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}$ cùng phương $\Rightarrow\exists k$ sao cho

$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}\Rightarrow\overrightarrow{ON}=\frac{k}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ Đặt $\frac{CN}{ND}=k,k>0$

Ta có: $\overrightarrow{ON}=\frac{-3}{1+k}.\overrightarrow{OA}-\frac{2k}{k+1}\overrightarrow{OB}\Rightarrow\frac{-6}{k(k+1)}=\frac{-4k}{k(k+1)}\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$

**Câu 61.** Cho hình bình hành *ABCD*. Gọi *M, N* là các điểm nằm trên các cạnh *AB* và *CD* sao cho $AM=\frac{1}{3}AB,CN=\frac{1}{2}CD$. Gọi *G* là trọng tâm của $\Delta BMN$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

**A.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{18}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{18}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$ **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{18}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{18}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AG}$ mà $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{5}{18}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

**Đáp án C.**

**Câu 62.** Cho $\Delta ABC$. Gọi *I* là điểm trên cạnh *BC* sao cho $2CI=3BI$ và *J* là điểm trên tia đối của *BC* sao cho $5JB=2JC$. Tính $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}$ theo $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

**A.** $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b},\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ **B.** $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b},\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{a-\frac{2}{3}\vec{b}}$

**C.** $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b},\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ **D.** $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b},\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

**Lời giải**

Ta có: $2\overrightarrow{IC}=-3\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AI}\right)=-3\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right)$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

Ta lại có: $5\overrightarrow{JB}=2\overrightarrow{JC}\Leftrightarrow 5\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AJ}\right)=2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AJ}\right)$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ}=5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

**Đáp án A.**

**Câu 63.** Cho tứ giác *ABCD*. Trên *AB* và *CD* lần lượt lấy các điểm *M, N* sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$, $k\neq 1$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

**A.** $\overrightarrow{MN}=k.\overrightarrow{AD}+(1-k).\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{MN}=(1+k).\overrightarrow{AD}+k.\overrightarrow{BC}$

**C.** $\overrightarrow{MN}=(1-k).\overrightarrow{AD}+k.\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{MN}=-k.\overrightarrow{AD}+(k+1).\overrightarrow{BC}$

**Lời giải**

Với điểm *O* bất kì: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}+k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$

Tương tự $\overrightarrow{ON}=(1-k)\overrightarrow{OD}+k\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(1-k)\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)+k\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=(1-k)\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{BC}$

**Đáp án C.**

**Câu 64.** Cho $\Delta ABC$ có trung tuyến $AM$. Gọi $I$ là trung điểm $AM$ và $K$ là điểm trên $AC$ sao cho $AK=\frac{1}{3}AC$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để ba điểm $B, I, K$ thẳng hàng.

**A.** $\overrightarrow{BK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ **B.** $\overrightarrow{BK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$ **C.** $\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{BI}$ **D.** $\overrightarrow{BK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BI}$

**Lời giải**

Ta có: $2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ (1)

$\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{BK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BI}\Leftrightarrow B,I,K$ thẳng hàng.

**Đáp án B.**

**Câu 65.** Cho $\Delta ABC, E$ là trung điểm $BC$, $I$ là trung điểm của $AB$. Gọi $D, I, J, K$ lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{IK}=m\overrightarrow{IJ}$. Tìm $m$ để $A, K, D$ thẳng hàng.

**A.** $m=\frac{5}{6}$ **B.** $m=\frac{1}{3}$ **C.** $m=\frac{1}{2}$ **D.** $m=\frac{2}{5}$

**Lời giải**

Ta có: $A, K, D$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=n\overrightarrow{AK}=n\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IK}\right)$ (1)

$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=3\overrightarrow{AI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AI}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}\right)=\frac{9}{2}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$

Mà $\overrightarrow{IK}=m\overrightarrow{IJ}$ nên $2\overrightarrow{AD}=\frac{9}{2}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{2m}\overrightarrow{IK}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{9}{4}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{4m}\overrightarrow{IK}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{9}{4}=\frac{3}{4m}\Leftrightarrow m=\frac{1}{3}$.

**Đáp án B.**

**Câu 66.** Cho $\Delta ABC$. Hai điểm $M, N$ được xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $MN//AC$.

**A.** $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

**Lời giải**

Ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MN}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC}$

Ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}\Rightarrow ABCM$ là hình bình hành hay $M\notin AC$

$\Rightarrow MN//AC\Rightarrow$ Chọn đáp án **A.**

**Đáp án A.**

**Câu 67.** Cho $\Delta ABC; M$ và $N$ xác định bởi $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Trọng tâm $\Delta ABC$ là $G$. Gọi $P$ là điểm trên cạnh $AC$ sao cho $\frac{PA}{PC}=4$. Các đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $M, G, N, P$ thẳng hàng.

**A.** $7\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG}+2\overrightarrow{PN}=\vec{0}$ **B.** $5\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG}+2\overrightarrow{PN}=\vec{0}$

**C.** $7\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}$ và $2\overrightarrow{PQ}-3\overrightarrow{PN}=\vec{0}$ **D.** $3\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG}+2\overrightarrow{PN}=\vec{0}$

**Lời giải**

+ Ta có: $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+4\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}=7\overrightarrow{GM}$

Tương tự: $\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GB}\right)-3\left(\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}-2\overrightarrow{NG}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GN}$.

Vậy $7\overrightarrow{GM}=-2\overrightarrow{GN}\Leftrightarrow 7\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}$

+ Gọi $E$ là trung điểm $BC\Rightarrow 2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AN}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AN}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ (1)

$\frac{PA}{PC}=4\Leftrightarrow\overrightarrow{PC}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{PA}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AP}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Leftrightarrow\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AP}$

$\Leftrightarrow\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PG}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}\right)=\frac{5}{4}\overrightarrow{AP}\Leftrightarrow\frac{3}{4}\overrightarrow{PG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PN}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{PG}+2\overrightarrow{PN}=\vec{0}$.

**Đáp án A.**

**Câu 68.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $I, J$ lần lượt là trọng tâm của $\Delta ADC$ và $\Delta BCD$. Đẳng thức nào là điều kiện cần và đủ để $IJ//AB$.

**A.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

**Lời giải**

Gọi $M$ là trung điểm $ĐƯỢC$. Ta có: $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$

$\Rightarrow\overrightarrow{MJ}-\overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

**Đáp án A.**

**Câu 69.** Cho $\Delta ABC$. Gọi $M$ là điểm thuộc cạnh $AB; N\in$ cạnh $AC$ sao cho $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Gọi $O$ là giao điểm của $CM$ và $BN$. Tính tỉ số $\frac{ON}{OB}$ và $\frac{OM}{OC}$ tương ứng.

**A.** $\frac{1}{9}$ và $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{6}$ và $\frac{1}{9}$

**Lời giải**

Giả sử: $\overrightarrow{ON}=n\overrightarrow{BN};\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{CM}$

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{AM}-m\overrightarrow{Cm}=\overrightarrow{AM}-m\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}(1-m).\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$

Tương tự: $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{AN}-n\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}(1-n)\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AB}$

Và $\overrightarrow{AO}$ chỉ biểu diễn duy nhất qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}(1-m)=n\\ \frac{3}{4}(1-n)=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{2}{3}\\ n=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{ON}{OB}=\frac{1}{9};\frac{OM}{OC}=\frac{2}{3}.$

**Đáp án A.**

**Câu 70.** Cho hình bình hành $ABCD$. $M$ thuộc $AC$ sao cho: $AM=kAC$. Trên cạnh $AB$, $BC$ lấy các điểm $P$, $Q$ sao cho $MP//BC, MQ//AB$. Gọi $N$ là giao điểm của $AQ$ và $CP$. Tính tỉ số $\frac{AN}{AQ}$ và $\frac{CN}{CP}$ theo $k$.

**A.** $\frac{AN}{AQ}=\frac{k}{k^2+k-1};\frac{CN}{CP}=\frac{1-k}{k^2+k+1}$

**B.** $\frac{AN}{AQ}=\frac{k}{k^2-k+1};\frac{CN}{CP}=\frac{1-k}{k^2-k+1}$

**C.** $\frac{AN}{AQ}=\frac{k}{k^2+k+1};\frac{CN}{CP}=\frac{1-k}{k^2+k-1}$

**D.** $\frac{AN}{AQ}=\frac{k}{k^2+k+1};\frac{CN}{CP}=\frac{1-k}{k^2+k+1}$

**Lời giải**

Đặt $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{CN}=y\overrightarrow{CP}$

Ta có: $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{DA}+x\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}\right)$

$=\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}+x\frac{BQ}{BC}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}-x\frac{BQ}{BC}.\overrightarrow{DA}$

Vì $MQ//AB\Rightarrow\frac{BQ}{BC}=\frac{AM}{AC}=k\Rightarrow\overrightarrow{DN}=(1-kx)\overrightarrow{DA}+x.\overrightarrow{DC}$ (1)

Mặt khác: $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{DC}+y\overrightarrow{DA}+y\frac{BP}{BA}.\overrightarrow{BA}$

Vì: $MP//BC\Rightarrow\frac{BP}{BA}=\frac{CM}{CA}=\frac{CM-AM}{CA}=1-k$

$\Rightarrow\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DC}+y\overrightarrow{DA}-y(1-k)\overrightarrow{DC}=y\overrightarrow{DA}+(1-ky-y)\overrightarrow{DC}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow\begin{cases}y=1-kx\\ x=1+ky-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{k}{k^2-k+1}\\ y=\frac{1-k}{k^2-k+1}\end{cases}$

**Đáp án B.**

## DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÉC-TƠ

**Câu 71.** Cho hai tam giác $\Delta ABC$ và $\Delta A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là $G$ và $G'$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=3\overrightarrow{GG'}$

**B.** $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CA'}=3\overrightarrow{GG'}$

**C.** $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}=3\overrightarrow{GG'}$

**D.** $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$

**Lời giải**

**Đáp án D**

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}=3\overrightarrow{GG'}$

**Câu 72.** Cho 5 điểm *A, B C, D, E*. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=2\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)$

**C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

**Lời giải**

**Đáp án D**

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA'}\right)=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{DA}$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}\right)=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

**Câu 73.** Cho $\Delta ABC$ và một điểm *M* tùy ý. Chọn hệ thức đúng?

**A.** $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$ **B.** $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$

**C.** $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ **D.** $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$

**Lời giải**

**Đáp án C**

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

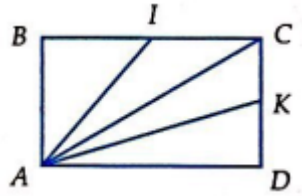
**Câu 74.** Cho hình chữ nhật *ABCD, I, K* lần lượt là trung điểm của *BC* và *CD.* Chọn đẳng thức đúng.

**A.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

**C.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{IK}$ **D.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

**Lời giải**

**Đáp án D**



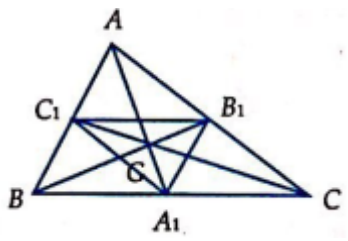

$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

**Câu 75.** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm *G*. Gọi $A_1, B_1, C_1$ lần lượt là trung điểm của *BC, CA, AB.* Chọn đẳng thức sai.

**A.** $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$ **C.** $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GC_1}$

**Lời giải**

**Đáp án D**



**Câu 76.** Cho $\Delta ABC$ với *H, O, G* lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp trọng tâm. Hệ thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{OH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ **B.** $\overrightarrow{HO}=3\overrightarrow{OG}$ **C.** $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ **D.** $2\overrightarrow{GO}=-3\overrightarrow{OH}$

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ (1)

Gọi *I* là trung điểm *BC*, *A'* đối xứng với *A* qua *O*.

Dễ thấy *HBA'C* là hình bình hành

$\Leftrightarrow\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA'}\Leftrightarrow\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA'}=2\overrightarrow{HO}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{HO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GH}=3\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

**Đáp án C.**

**Câu 77.** Cho 4 điểm *A, B, C,**D.*** Gọi *I, J* lần lượt là trung điểm của *AB* và *C**D.*** Đẳng thức nào sau đây là sai?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$ **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$ **C.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$ **D.** $2\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

**Lời giải**

+ B đúng vì $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}$

$=2\overrightarrow{IJ}+\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}\right)+\left(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}\right)=2\overrightarrow{IJ}$

+ C đúng vì $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{IJ}$

+ D đúng vì $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

**Đáp án A.**

**Câu 78.** Cho $\Delta ABC$, *M* là một điểm trên cạnh *B**C.*** Khi đó đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AM}=\frac{MC}{BC}.\overrightarrow{AB}+\frac{MB}{BC}.\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{BM}=\frac{MA}{AB}.\overrightarrow{AC}+\frac{MB}{AB}.\overrightarrow{BC}$

**C.** $3\overrightarrow{CM}=\frac{MB}{AC}.\overrightarrow{AB}+\frac{MA}{AB}.\overrightarrow{AC}$ **D.** $2\overrightarrow{AM}=\frac{MC}{BC}.\overrightarrow{AB}+\frac{MB}{BC}.\overrightarrow{AC}$

**Lời giải**

Kẻ $MN//AC, N\in AB$.

Áp dụng định lí Ta-lét ta có $\overrightarrow{AN}=\frac{AN}{AB}.\overrightarrow{AB}=\frac{MC}{BC}.\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{NM}=\frac{NM}{AC}.\overrightarrow{AC}=\frac{MB}{BC}.\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}=\frac{MC}{BC}.\overrightarrow{AB}+\frac{MB}{BC}.\overrightarrow{AC}$.

**Đáp án A.**

**Câu 79.** Cho $\Delta ABC$, *AM, BN, CP* là các trung tuyến. *D, E, F* là trung điểm của *AM, BN* và *CP*. Với *O* là điểm bất kì. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$ **B.** $2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=3\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)$

**C.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)$ **D.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)$

**Lời giải**

Ta có: $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}=4\overrightarrow{OD}$ (1)

Tương tự $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OE}$ (2)

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OF}$ (3)

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta được đáp án **A.**

**Đáp án A.**

**Câu 80.** Cho tam giác $ABC$ đều tâm $O$, $M$ là điểm bất kì trong tam giác. Hình chiếu của $M$ xuống ba cạnh lần lượt là $D, E, F$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$ **B.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MO}$

**C.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$ **D.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

**Lời giải**

Qua $M$ kẻ các đường thẳng $A_1B_1 // AB, A_2C_1 // AC, B_2C_2 // BC$

$\Rightarrow$ Các tam giác đều $\Delta MB_1C_1, \Delta MA_1C_2, \Delta MA_2B_2$

Ta có: $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}\right), \overrightarrow{ME}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MC_2}\right), \overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB_2}+\overrightarrow{MA_2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_2}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MC_2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$

**Đáp án D.**

**Câu 81.** Cho tứ giác $ABC\boldsymbol{D}$. $I, J$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $D\boldsymbol{C}$. $G$ là trung điểm của $IJ$. Xét các mệnh đề:

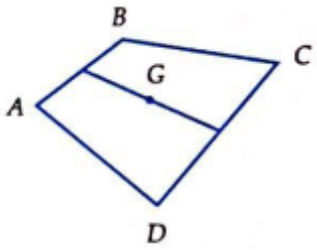
(I) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AG}$ (II) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IG}$ (III) $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{JI}$

Mệnh đề sai là:

**A.** (I) và (II) **B.** (II) và (III) **C.** Chỉ (I) **D.** Tất cả đều sai

**Lời giải**

**Đáp án B**




$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}\right)$

$=3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{GA}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=4\overrightarrow{AG}+2I+2\overrightarrow{GJ}=4\overrightarrow{AG}$

(II) và (III) sai vì $G$ không phải là trung điểm của $AC$ và $B\boldsymbol{D}$.

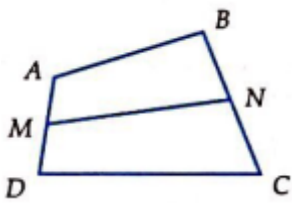
**Câu 82.** Cho tứ giác $ABCD$, các điểm $M, N$ lần lượt thuộc các đoạn $AD$ và $BC$ sao cho $\frac{MA}{MD}=\frac{NB}{NC}=\frac{m}{n}$.

Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{MN}=\frac{n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{DC}}{m+n}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{n\overrightarrow{AC}+m\overrightarrow{AB}}{m+n}$ **C.** $\overrightarrow{BN}=\frac{n\overrightarrow{BC}+m\overrightarrow{CD}}{m+n}$ **D.** $\overrightarrow{DM}=\frac{n\overrightarrow{CD}+m\overrightarrow{AD}}{m+n}$

**Lời giải**

**Đáp án A**




Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}n\overrightarrow{MN}=n\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BN}\\ m\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{MD}+m\overrightarrow{DC}+m\overrightarrow{CN}\end{cases}\Rightarrow(m+n)\overrightarrow{MN}$

$=\left(n\overrightarrow{MA}+m\overrightarrow{MD}\right)+\left(n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{DC}\right)+\left(n\overrightarrow{BN}+m\overrightarrow{CN}\right)=\vec{0}+n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{DC}+\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\dfrac{n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{DC}}{m+n}$

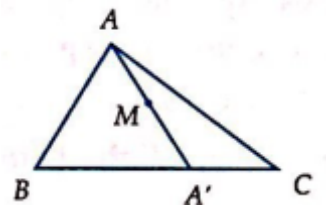
**Câu 83.** Cho $\Delta ABC$ và một điểm $M$ bất kì trong tam giác. Đặt $S_{MBC}=S_a$, $S_{MCA}=S_b$, $S_{MAB}=S_c$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $S_a.\overrightarrow{MA}+S_b.\overrightarrow{MB}+S_c.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ **B.** $S_a.\overrightarrow{AB}+S_b.\overrightarrow{BC}+S_c.\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

**C.** $S_a.\overrightarrow{MC}+S_b.\overrightarrow{MB}+S_c.\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ **D.** $S_a.\overrightarrow{AC}+S_b.\overrightarrow{AB}+S_c.\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

**Lời giải**

**Đáp án A**




Gọi $A'=AM\cap BC$

Ta có $\overrightarrow{MA'}=\dfrac{A'C}{BC}\overrightarrow{MB}+\dfrac{A'B}{BC}\overrightarrow{MC}$

$\dfrac{A'C}{A'B}=\dfrac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}}=\dfrac{S_{MAC}}{S_{MAB}}=\dfrac{S_b}{S_c}\Rightarrow\dfrac{A'C}{BC}=\dfrac{S_b}{S_b+S_c};\dfrac{A'B}{BC}=\dfrac{S_c}{S_b+S_c}$

$\overrightarrow{MA'}=\dfrac{S_b}{S_b+S_c}\overrightarrow{MB}+\dfrac{S_c}{S_b+S_c}\overrightarrow{MC}(*)$ Mặt khác $\dfrac{MA'}{MA}=\dfrac{S_{MA'B}}{S_{MAB}}=\dfrac{S_{MA'C}}{S_{MAC}}=\dfrac{S_{MA'B}+S_{MA'C}}{S_{MAB}+S_{MAC}}=\dfrac{S_a}{S_b+S_c}$

$\Rightarrow\overrightarrow{Ma'}=\dfrac{-S_a}{S_b+S_a}\overrightarrow{MA}$, thay vào (*) ta được: $-S_a\overrightarrow{MA}=S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=0$

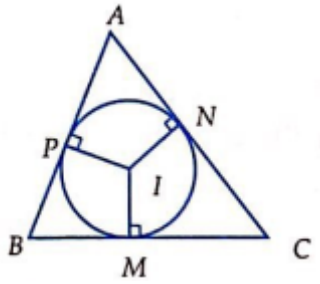
**Câu 84.** Cho $\Delta ABC$ với $BC=a, AC=b, AB=c$. $I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$, đường tròn nội tiếp $(I)$ tiếp xúc với các cạnh $BC, CA, AB$ lần lượt tại $M, N, P$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $a.\overrightarrow{IM}+b.\overrightarrow{IN}+c.\overrightarrow{IP}=\vec{0}$ **B.** $a.\overrightarrow{MA}+b.\overrightarrow{NB}+c.\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

**C.** $a.\overrightarrow{AM}+b.\overrightarrow{BN}+c.\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ **D.** $a.\overrightarrow{AB}+b.\overrightarrow{BC}+c.\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

**Lời giải**

**Đáp án A**




Gọi $p$ là nửa chu vi $\Delta ABC$, ta có:

$AP = AN = p - a$

$BM = BP = p - b$

$CN = CM = p - c$

Ta có $\overrightarrow{IM} = \frac{MB}{BC}.\overrightarrow{IB} + \frac{MB}{BC}.\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IM} = (p-c)\overrightarrow{IB} + (p-b)\overrightarrow{IC}(1)$

Tương tự:

$b\overrightarrow{IN} = (p-a)\overrightarrow{IC} + (p-c)\overrightarrow{IA}(2), c\overrightarrow{IP} = (p-b)\overrightarrow{IA} + (p-a)\overrightarrow{IB}(3)$

Cộng từng vế (1), (2), (3) ta được:

$\Leftrightarrow a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IC}$

$= (2p-b-c)\overrightarrow{IA} + (2p-a-c)\overrightarrow{IB} + (2p-a-b)\overrightarrow{IC} = a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Nhận xét: Áp dụng kết quả nếu $I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$ thì

$\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{BI} + c\overrightarrow{CI} = 0$

## DẠNG 4. XÁC ĐỊNH ĐIỂM, TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

**Câu 85.** Cho hai điểm $A$ và $B$. Tìm điểm $I$ sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

**A.** Điểm $I$ ngoài đoạn $AB$ sao cho $IB = \frac{1}{3}AB$

**B.** Điểm $I$ thuộc đoạn $AB$ sao cho $IB = \frac{1}{3}AB$

**C.** Điểm $I$ là trung điểm đoạn $AB$

**D.** Điểm $I$ nằm khác phía với $B$ đối với $A$ và $IB = \frac{1}{3}AB$.

**Lời giải**

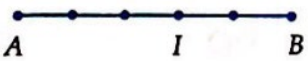
$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB}$.

Vậy $I$ thuộc đoạn $AB$ sao cho $IB = \frac{1}{3}AB$.

**Đáp án** **B.**

**Câu 86.** Cho đoạn thẳng $AB$. Hình nào sau đây biểu diễn điểm $I$ sao cho $\overrightarrow{AI} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$.

**A.** 


**B.** 


**C.** 


**D.** 

**Lời giải**

**Đáp án B.**

**Câu 87.** Trên đường thẳng $MN$ lấy điểm $P$ sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Hình vẽ nào sau đây xác định đúng vị trí điểm $M$.

**A.** 


**B.** 


**C.** 


**D.** 


**Lời giải**

**Đáp án C**

Ta có: $MN = 3MP$ và $P$, $N$ khác đối với $M$

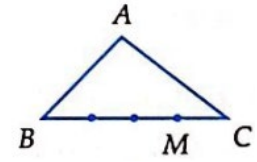
**Câu 88.** Cho đoạn thẳng $AB$ và điểm $M$ là một điểm trong đoạn $AB$ sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm $k$ để $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

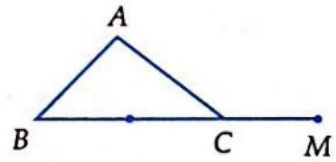
**A.** $k = \frac{1}{4}$ **B.** $k = 4$ **C.** $k = -\frac{1}{4}$ **D.** $k = -4$

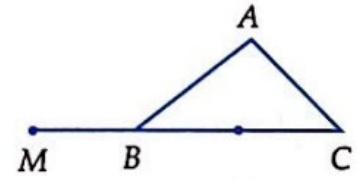
**Lời giải**

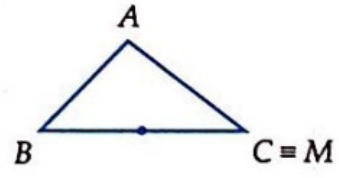
**Đáp án C**

**Câu 89.** Cho $\Delta ABC$. Trên đường thẳng $BC$ lấy điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Điểm $M$ được vẽ đúng trong hình nào sau đây?

**A.** 


**B.** 


**C.** 


**D.** 


**Lời giải**

**Đáp án B**

**Câu 90.** Cho $\Delta ABC$ có $G$ là trọng tâm. Xác định điểm $M$ sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

**A.** Điểm $M$ là trung điểm cạnh $AC$.

**B.** Điểm $M$ là trung điểm cạnh $GC$.

**C.** Điểm $M$ chia đoạn $AB$ theo tỉ số 4.

**D.** Điểm $M$ chia đoạn $GC$ thỏa mãn $\overrightarrow{GC}=4\overrightarrow{GM}$.

**Lời giải**

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GC}=4\overrightarrow{GM}$

**Đáp án** **D.**

**Câu 91.** Cho $\Delta ABC$, $I$ là trung điểm của $AC$. Vị trí điểm $N$ thỏa mãn $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CB}$ xác định bởi hệ thức:

**A.** $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ **B.** $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BI}$ **C.** $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ **D.** $\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{BI}$

**Lời giải**

Ta có: $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}=-\overrightarrow{NB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{NI}=-\overrightarrow{NB}\Rightarrow\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

**Đáp án** **C.**

**Câu 92.** Cho 2 điểm $A$, $B$ là hai số thực $a$, $b$ sao cho $a+b\neq 0$. Xét các mệnh đề:

(I) Tồn tại duy nhất một điểm $M$ thỏa mãn $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

(II) $\overrightarrow{MA}=-\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

(III) $M$ là điểm nằm trên đường thẳng $AB$.

Trong các mệnh đề trên thì:

**A.** (I) và (III) tương đương nhau **B.** (II) và (III) tương đương nhau

**C.** (I) và (II) tương đương nhau **D.** (I), (II), (III) tương đương nhau

**Lời giải**

$a\overrightarrow{AM}+b\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow a\overrightarrow{MA}+b\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}=-\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

Do giả thiết $M$ được xác định duy nhất trên đường thẳng $AB$.

**Đáp án** **C.**

**Câu 93.** Cho $\Delta ABC$ với $BC=a, AC=b, AB=c$. Nếu điểm $I$ thỏa mãn hệ thức $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ thì:

**A.** Điểm $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$.

**B.** Điểm $I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$.

**C.** Điểm $I$ là trực tâm của $\Delta ABC$.

**D.** Điểm $I$ là trọng tâm của $\Delta ABC$.

**Lời giải**

Lấy $A'$ sao cho $\frac{A'B}{A'C}=\frac{c}{b}$ hay $AA'$ là đường phân giác.

Ta có: $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA}+\left(b+c\right)\overrightarrow{IA'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $I$ thuộc đoạn $AA'$ và $\frac{IA}{IA'}=\frac{b+c}{a}=\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{BA}{BA'}$

$\Rightarrow$ $I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$.

**Đáp án** **B.**

**Câu 94.** Cho $\Delta ABC$. Xác định điểm $I$ sao cho: $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{BC}$.

**A.** Điểm $I$ là trung điểm của cạnh $AC$

**B.** Điểm $C$ là trung điểm của cạnh $IA$

**C.** Điểm $C$ chia đoạn $IA$ theo tỉ số $-2$

**D.** Điểm $I$ chia đoạn $AC$ theo tỉ số 2

**Lời giải**

**Đáp án C**

$2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{IC}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IC}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{IC}\Leftrightarrow \overrightarrow{CI}=-2\overrightarrow{CA}$

**Câu 95.** Cho $\Delta ABC$ có $M$ là trung điểm $AB$ và $N$ trên cạnh $AC$ sao cho $NC=2NA$. Xác định điểm $K$ sao cho $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AK}=\vec{0}$.

**A.** Điểm $K$ là trung điểm cạnh $AM$

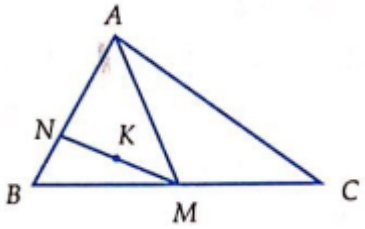
**B.** Điểm $K$ là trung điểm cạnh $BN$

**C.** Điểm $K$ là trung điểm cạnh $BC$

**D.** Điểm $K$ là trung điểm cạnh $MN$

**Lời giải**

**Đáp án D**




$M$ là trung điểm $AB$ nên $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AN}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AK}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AM}+6\overrightarrow{AN}-12\overrightarrow{AK}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)\Rightarrow K$ là trung điểm của $MN$.

**Câu 96.** Cho $\Delta ABC$. Tìm điểm $N$ sao cho: $2\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

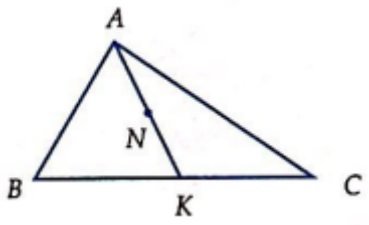
**A.** $N$ là trọng tâm $\Delta ABC$ **B.** $N$ là trung điểm của $BC$

**C.** $N$ là trung điểm của $AK$ với $K$ là trung điểm của $BC$

**D.** $N$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành nhận $AB$ và $AC$ làm 2 cạnh

**Lời giải**

**Đáp án C**




Gọi $K$ là trung điểm $BC\Rightarrow \overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{NK}$

Nên $2\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NK}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NK}=\vec{0}\Rightarrow N$ là trung điểm $AK$

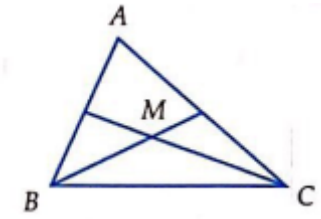
**Câu 97.** Cho $\Delta ABC$. Xác định điểm $M$ sao cho: $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CB}$.

**A.** $M$ là trung điểm cạnh $AB$ **B.** $M$ là trung điểm cạnh $BC$

**C.** $M$ chia đoạn $AB$ theo tỉ số 2 **D.** $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$

**Lời giải**

**Đáp án D**




$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}\Rightarrow$ $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$

**Câu 98.** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm $G$, điểm $M$ thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Khi đó điểm $M$ thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

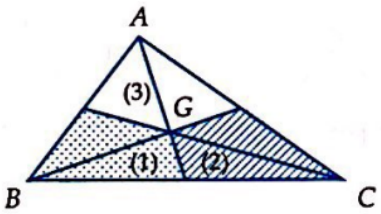
**A.** $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CA}$ **C.** $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

**Lời giải**

**Đáp án A**

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=6\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$

**Câu 99.** Gọi $G$ là trọng tâm $\Delta ABC$. Nối điểm $M$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ thì $M$ ở vị trí nào trong hình vẽ:




**A.** Miền (1) **B.** Miền (2) **C.** Miền (3) **D.** Ở ngoài $\Delta ABC$

**Lời giải**

**Đáp án B**

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-3\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow3\overrightarrow{MG}=-3\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{MC}$

Hay $M$ là trung điểm của $GC$

**Câu 100.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $O$ là giao điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$. Điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AM}$. Khi đó điểm $M$ trùng với điểm:

**A.** $O$ **B.** $I$ là trung điểm đoạn $OA$

**C.** $I$ là trung điểm đoạn $OC$ **D.** $C$

**Lời giải**

**Đáp án A**

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow4\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow M\equiv O$

**Câu 101.** Cho ba điểm $A$, $B$, $C$ không thẳng hàng. Gọi điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}=\alpha\overrightarrow{MB}+\beta\overrightarrow{MC}$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Nếu $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$ thì $\alpha,\beta$ thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

**A.** $\alpha^2-\beta^2=0$ **B.** $\alpha.\beta=1$ **C.** $\alpha-\beta=0$ **D.** Cả A, B, C đều đúng

**Lời giải**

**Đáp án D**

Ta có $M$ là trọng tâm thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

So sánh với $\overrightarrow{MA}=\alpha\overrightarrow{MB}+\beta\overrightarrow{MC}\Rightarrow\alpha=-1;\beta=-1$

**Câu 102.** Cho $\Delta ABC$. Nếu điểm $D$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CD}$ với $M$ tùy ý, thì $D$ là đỉnh của hình bình hành:

**A.** $ABCD$ **B.** $ACBD$

**C.** $ABED$ với $E$ là trung điểm của $BC$ **D.** $ACED$ với $B$ là trung điểm của $EC$

**Lời giải**

**Đáp án D**

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CM}=\left(\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$$

Vậy $D$ là đỉnh của hình bình hành $ACE\boldsymbol{D}$.

**Câu 103.** Cho đoạn $AB$ và điểm $I$ sao cho $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Tìm số $k\in\mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}$.

**A.** $k=\frac{3}{4}$ **B.** $k=\frac{3}{5}$ **C.** $k=\frac{2}{5}$ **D.** $k=\frac{3}{2}$

**Lời giải**

**Đáp án B**

$$2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-3\overrightarrow{IA}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\Rightarrow k=\frac{3}{5}$$

**Câu 104.** Gọi $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$. Tập hợp điểm $M$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=6$ là:

**A.** Đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB\boldsymbol{C}$. **B.** Đường tròn tâm $G$ bán kính là 1.

**C.** Đường tròn tâm $G$ bán kính là 2. **D.** Đường tròn tâm $G$ bán kính là 6.

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}\Rightarrow 3\left|\overrightarrow{MG}\right|=6\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MG}\right|=2$

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $G$ bán kính là 2.

**Đáp án C.**

**Câu 105.** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm $G$. $I$ là trung điểm của $B\boldsymbol{C}$. Tập hợp điểm $M$ sao cho: $2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ là:

**A.** đường trung trực của đoạn $GI$ **B.** đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$

**C.** đường thẳng $GI$ **D.** đường trung trực của đoạn $AI$

**Lời giải**

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG},\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}\Rightarrow 2\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3\left|2\overrightarrow{MI}\right|$

$\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MG}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|\Rightarrow$ Tập hợp điểm $M$ là trung trực của $GI$.

**Đáp án A.**

**Câu 106.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm $O$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$ là

**A.** một đoạn thẳng **B.** một đường tròn **C.** một điểm **D.** tập hợp rỗng

**Lời giải**

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MJ}$ với $I, J$ là trung điểm của $AB, CD$

$\Rightarrow$ Không có điểm $M$ nào thỏa mãn.

**Đáp án D.**

**Câu 107.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm $O$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right| = k, k > 0$ là:

**A.** đường tròn tâm $O$ bán kính là $\frac{k}{4}$

**B.** đường tròn đi qua $A, B, C, D$

**C.** đường trung trực của $AB$

**D.** tập rỗng

**Lời giải**

**Đáp án A**

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right| = \left|4\overrightarrow{MO}\right| = k \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MO}\right| = \frac{k}{4}$

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $O$ bán kính $\frac{k}{4}$

**Câu 108.** Cho $\Delta ABC$ trọng tâm $G$. Gọi $I, J, K$ lần lượt là trung điểm $BC, AB, CA$. Quỹ tích các điểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right|$ là:

**A.** đường tròn tâm $I$ bán kính $\frac{1}{2}JK$

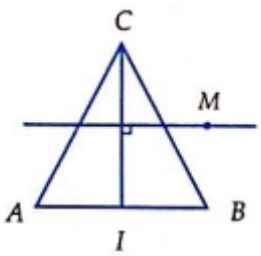
**B.** đường tròn tâm $G$ bán kính $\frac{1}{3}IJ$

**C.** đường tròn tâm $G$ bán kính $\frac{1}{3}CA$

**D.** trung trực $AC$

**Lời giải**

**Đáp án B**




Gọi $I$ là trung điểm của $AB$ thì

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = 2\left|\overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MI}\right| = \left|2\overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow$ Tập hợp điểm $M$ là trung trực của $IC$

**Câu 109.** Cho đường tròn $(O;R)$ và hai điểm $A, B$ cố định. Với mỗi điểm $M$ ta xác định điểm $M'$ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$, lúc đó:

**A.** Khi $M$ chạy trên $(O;R)$ thì $M'$ chạy trên đường thẳng $AB$

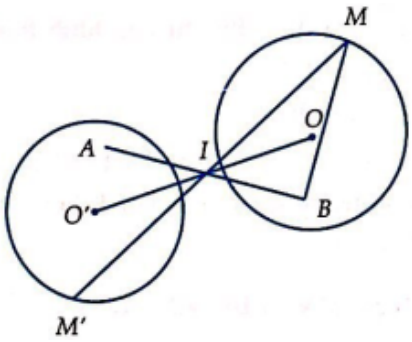
**B.** Khi $M$ chạy trên $(O;R)$ thì $M'$ chạy trên đường thẳng đối xứng với $AB$ qua $O$

**C.** Khi $M$ chạy trên $(O;R)$ thì $M'$ chạy trên một đường tròn cố định

**D.** Khi $M$ chạy trên $(O;R)$ thì $M'$ chạy trên một đường tròn cố định bán kính $R$

**Lời giải**

**Đáp án D**




Gọi $I$ là trung điểm $AB$

$\Rightarrow I$ là điểm cố định: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}\Rightarrow\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MI}\Rightarrow I$ là trung điểm của $MM'$

Gọi $O'$ là điểm đối xứng của $O$ qua điểm $I$ thì $O'$ cố định và $MOM'O'$ là hình bình hành

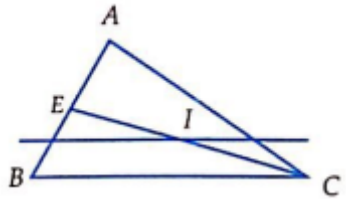
$\Rightarrow OM=OM'=R\Rightarrow M'$ nằm trên đường tròn cố định tâm $O'$ bán kính $R$.

**Câu 110.** Cho $\Delta ABC$. Tìm tập hợp điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{BC}$ với $k\in\mathbb{R}$

**A.** là một đoạn thẳng **B.** là một đường thẳng **C.** là một đường tròn **D.** là một điểm

**Lời giải**

**Đáp án B**




Gọi $E$ là trung điểm của $AB$, $I$ là trung điểm của $EC$

$\Rightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{ME}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MI}\Rightarrow\overrightarrow{MI}=\frac{k}{4}\overrightarrow{BC}$

Do $I$, $B$, $C$ cố định nên tập hợp điểm $M$ là một đường thẳng đi qua $I$ và song song với $BC$.

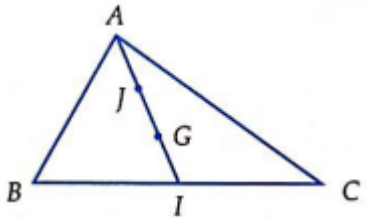
**Câu 111.** Cho $\Delta ABC$. Tìm tập hợp điểm $M$ thỏa mãn: $\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ là:

**A.** đường thẳng qua $A$ **B.** đường thẳng qua $B$ và $C$

**C.** đường tròn **D.** một điểm duy nhất

**Lời giải**

**Đáp án C**




GT đã cho $\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MA}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MI}\right|$

$\Leftrightarrow\left|3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MA}\right)\right|=2\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI}\right|$ ($I$ là trung điểm $AB$)

$\Leftrightarrow 6\left|\overrightarrow{MJ}\right|=2\left|\overrightarrow{IA}\right|\Leftrightarrow MJ=\frac{1}{3}IA$ ($G$ là trọng tâm $\Delta ABC$)

$\Leftrightarrow JM = \frac{1}{2}AG$ ($J$ là trung điểm của $AG$)

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $I$ bán kính $R = \frac{AG}{2}$

**Câu 112.** Tập hợp điểm $M$ mà $k\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}$, $k \neq 1$ là:

**A.** đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ $C$ **B.** đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ $B$

**C.** đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ $A$ **D.** đường trung trực của $AB$

**Lời giải**

**Đáp án A**

$k\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow 2k.\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MI}$ ($I$ là trung điểm $AB$)

$\Rightarrow M$ nằm trên đường thẳng $CI$.

**Câu 113.** Cho $\Delta ABC$. Tìm quỹ tích điểm $M$ thỏa mãn: $\left|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right|$

**A.** Quỹ tích điểm $M$ là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{3}$

**B.** Quỹ tích điểm $M$ là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{4}$

**C.** Quỹ tích điểm $M$ là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{9}$

**D.** Quỹ tích điểm $M$ là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{2}$

**Lời giải**

**Đáp án C**

Vì $A, B, C$ cố định nên ta chọn điểm $I$ thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + 4\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9}$

$\Rightarrow I$ duy nhất từ đó $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 9\overrightarrow{MI} + \left(2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}\right) = 9\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

Từ giả thiết $\Rightarrow \left|9\overrightarrow{MI}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{9}$

**Câu 114.** Cho $\Delta ABC$. Tìm quỹ tích điểm $M$ thỏa mãn điều kiện: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right), k \in \mathbb{R}$.

**A.** Tập hợp điểm $M$ là đường trung trực của $EF$, với $E, F$ lần lượt là trung điểm của $AB, AC$

**B.** Tập hợp điểm $M$ là đường thẳng qua $A$ và song song với $BC$

**C.** Tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $I$ bán kính $\frac{AB}{9}$

**D.** Với $H$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ thì tập hợp điểm $M$ là đường thẳng đi qua $E$ và song song với $HB$ với $E$ là trung điểm của $AB$

**Lời giải**

**Đáp án D**

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

$=\overrightarrow{MA}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$ (với $H$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$)

$=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{HB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME}=2k\overrightarrow{HB}\Leftrightarrow \overrightarrow{ME}=k\overrightarrow{HB}\Rightarrow$ Đáp án D

**Câu 115.** Cho tứ giác $ABCD$ với $K$ là số tùy ý. Lấy cá điểm $M$, $N$ sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp trung điểm $I$ của đoạn $MN$ khi $k$ thay đổi.

**A.** Tập hợp điểm $I$ là đường thẳng $OO'$ với $O$ và $O'$ lần lượt là trung điểm của $AC, BD$

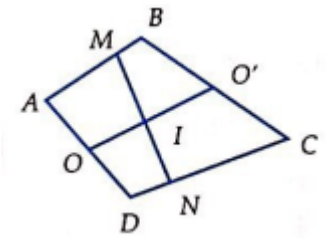
**B.** Tập hợp điểm $I$ là đường thẳng $OO'$ với $O$ và $O'$ lần lượt là trung điểm của $AD, BC$

**C.** Tập hợp điểm $I$ là đường thẳng $OO'$ với $O$ và $O'$ lần lượt là trung điểm của $AB, DC$

**D.** Cả A, B, C đều sai.

**Lời giải**

**Đáp án B**




Gọi $O,O'$ lần lượt là trung điểm $AD$ và $BC$, ta có: $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'B}$

và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'C}\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{OO'}$

Gọi $I$ là trung điểm $MN\Rightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{OI}\Rightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{DC}\right)=k\overrightarrow{OO'}$

Vậy tập hợp điểm $I$ là đường thẳng $OO'$

**Câu 116.** Cho lục giác đều $ABCDEF$. Tìm tập hợp điểm $M$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right|$ nhận giá trị nhỏ nhất.

**A.** Tập hợp điểm $M$ là một đường thẳng **B.** Tập hợp điểm $M$ là một đoạn thẳng

**C.** Tập hợp điểm $M$ là một đường tròn **D.** Là một điểm

**Lời giải**

**Đáp án B**

Gọi $P$, $Q$ lần lượt là trọng tâm $\Delta ABC$ và $\Delta DEF$.

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right|=3\left|\overrightarrow{MP}\right|+3\left|\overrightarrow{MQ}\right|\ge 3\left(MP+MQ\right)\ge 3PQ$

Dấu "=" xảy ra khi $M$ thuộc đoạn $PQ$. Vậy tập hợp điểm $M$ là đoạn thẳng $PQ$.

**Câu 117.** Tập hợp điểm $M$ thỏa mãn hệ thức: $2\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}+\left(1-k\right)\overrightarrow{MC}=\vec{0},k\in\mathbb{R}$ là:

**A.** đường thẳng **B.** đường tròn **C.** đoạn thẳng **D.** một điểm

**Lời giải**

**Đáp án A**

Từ giả thiết $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=k\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{BC}\left(*\right)$

Gọi $I$ là điểm sao cho: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow IC=2IA, I\in AC$

Từ (*): $2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MI}=k\overrightarrow{BC}$

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường thẳng qua $I$ và song song với $BC$.

**Câu 118.** Cho $\Delta ABC$ và điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức: $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$.

Tập hợp điểm $M$ là

**A.** một đoạn thẳng **B.** nửa đường tròn **C.** một đường tròn **D.** một đường thẳng

**Lời giải**

Gọi $E$ là trung điểm của $AC\Rightarrow\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$

$\Leftrightarrow\left|2\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{ME}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Gọi $I$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{EI}$

$\Leftrightarrow\left|2\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{ME}\right)\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow MI=\frac{1}{2}AB$

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $I$ bán kính $\frac{AB}{2}$.

**Đáp án C.**

**Câu 119.** Tập hợp điểm $M$ thỏa mãn hệ thức: $\left|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

**A.** là một đường tròn có bán kính là $\frac{AB}{2}$ **B.** là một đường tròn có bán kính là $\frac{BC}{3}$

**C.** là một đường thẳng qua $A$ và song song với $BC$

**D.** là một điểm

**Lời giải**

Chọn điểm $I$ sao cho

$3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow-3\overrightarrow{AI}+2\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right)-2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AI}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow-3\overrightarrow{AI}+2\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)-2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)=3\overrightarrow{MI}$

$\Rightarrow\left|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow 3MI=CB\Leftrightarrow MI=\frac{1}{3}CB$

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $I$ bán kính $\frac{CB}{3}$.

**Đáp án B.**

**Câu 120.** Tìm tập hợp điểm thỏa mãn hệ thức:

$2\overrightarrow{MA}-(1+k)\overrightarrow{MB}-3k\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, $k$ là giá trị thay đổi trên $\mathbb{R}$.

**A.** Tập hợp điểm $M$ là một đoạn thẳng. **B.** Tập hợp điểm $M$ là một đường tròn.

**C.** Tập hợp điểm $M$ là một đường thẳng. **D.** Tập hợp điểm $M$ là một nửa đường tròn.

**Lời giải**

Từ giả thiết $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)$ (*)

Gọi $I, K$ là các điểm sao cho $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0};\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Thì $I, K$ là các điểm cố định: $I\in AB: IB=2IA; K\in BC: KB=3KC$

Từ (*) $\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=k\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{MK}+3\overrightarrow{KC}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}=4k\overrightarrow{MK}$

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường thẳng.

**Đáp án C.**

# Bài 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

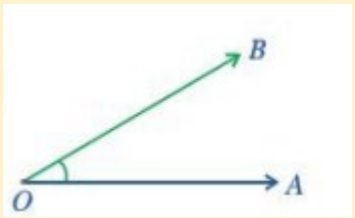
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Định nghĩa

**1. Tích vô hướng của hai vectơ có cùng điểm đầu**

Cho hai vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ khác $\vec{0}$ trong mặt phẳng




- Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia $OA,OB$ và được kí hiệu là $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số, kí hiệu $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức:

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

***Ví dụ 1.*** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$ và $AB=4cm$.

a) Tính độ dài cạnh huyền $BC$.

b) Tính $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

***Giải***

a) $BC=AB\sqrt{2}=4\sqrt{2}(cm)$

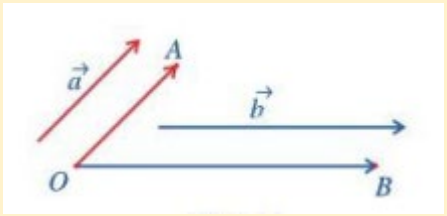
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=4\cdot4\cdot\cos\widehat{BAC}=16\cdot\cos90^\circ=16\cdot0=0$.

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

$=4\cdot4\sqrt{2}\cdot\cos\widehat{ABC}=16\sqrt{2}\cdot\cos45^\circ=16\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=16$

**2. Tích vô hướng của hai vec tơ**

Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm $O$ và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$




- Góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a},\vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$.

*Quy ước:* Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

*Chú ý*

- $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$

- Nếu $(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a}\perp\vec{b}$ hoặc $\vec{b}\perp\vec{a}$. Khi đó $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos90^\circ=0$.

- Tích vô hướng của hai vectơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.

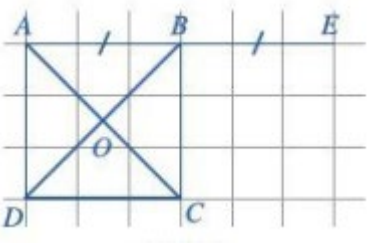
- Tích vô hướng của hai vectơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.

Ta có thể chứng minh chú ý thứ ba như sau:

Nếu $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ (khác $\vec{0}$ ) cùng hướng thì $(\vec{a},\vec{b})=0°$. Do đó, $\cos(\vec{a},\vec{b})=1$. Vì vậy, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Nếu một trong hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ và $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=0$ nên $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$. Chú ý thứ tư được chứng minh tương tự như trên.

***Ví dụ 2.*** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$ có độ dài cạnh bằng $a$. Tính:




a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}$ b) $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}$

***Giải.***

a) Ta có: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})=\widehat{BAO}=45°$.

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{OC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\right)=a.\frac{a}{\sqrt{2}}.\cos 45°=\frac{a^2}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2}{2}$

b) Vẽ vectơ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$. Ta có: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD}\right)=\widehat{EBD}=135°$.

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})$

$=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 135^{\circ}=a^2\sqrt{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}=-a^2$.

c) Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE},\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$ nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OD})=(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BO})=\widehat{EBO}=135°$.

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{OD}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OD})=a\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\cos 135°=\frac{a^2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}=\frac{-a^2}{2}$.

## II. Tính chất

Với hai vectơ bất kì $\vec{a},\vec{b}$ và số thực $k$ tuỳ ý, ta có:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2\geq 0,\vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

Trong đó, kí hiệu $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$ và biểu thức này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

***Ví dụ 3.*** Cho đoạn thẳng $AB$ và $I$ là trung điểm của $AB$. Chứng minh rằng với mỗi điểm $O$ ta có:

a) $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IB}=0$

b) $\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2\right)$.

***Giải***

a) Vì $I$ là trung điểm $AB$ nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{OI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})=\overrightarrow{OI}\cdot\vec{0}=0$

b) Vì $I$ là trung điểm $AB$ nên $2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})$.

Vậy $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot(-\overrightarrow{OA})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2\right)$

***Ví dụ 4.*** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Tính: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$

***Giải***

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos 90^\circ$

$=AB\cdot AC\cdot 0=0$

## III. Một số ứng dụng

### 1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm $A,B$ phân biệt, ta có: $\overrightarrow{AB}^2=|\overrightarrow{AB}|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng $AB$ được tính như sau: $AB=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

***Ví dụ 5.*** (Định lí coossin trong tam giác) Chứng minh rằng trong tam giác $ABC$, ta có;

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A$

***Giải***

Ta có: $\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Suy ra: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A.$

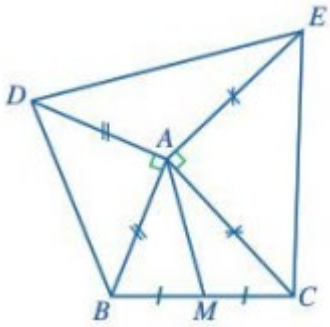
### 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

*Nhận xét:* Cho hai vectơ bất kì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

Hai đường thẳng $AB$ và $CD$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

Cũng như vậy, hai đường đường thẳng $a$ và $b$ vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, trong đó $\vec{u}\neq\vec{0},\vec{v}\neq\vec{0}$, giá của vectơ $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng $a$ và giá của vectơ $\vec{v}$ song song hoặc trùng với đường thẳng $b$.

***Ví dụ 6.*** Cho tam giác $ABC$ có $AB=3,AC=4$, $\widehat{A}=60°$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại $A$ là $ABD$ và $ACE$




a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$;

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$. Từ đó chứng minh $AM\perp DE$.

***Giải***

a) Do $\widehat{BAE}=\widehat{BAC}+\widehat{CAE}=150^\circ,\widehat{CAD}=\widehat{CAB}+\widehat{BAD}=150^\circ$ nên

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=AB\cdot AE\cdot\cos\widehat{BAE}=3\cdot 4\cdot\cos 150^\circ=12\cdot\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-6\sqrt{3}\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=AC\cdot AD\cdot\cos\widehat{CAD}=4\cdot 3\cdot\cos 150^\circ=12\cdot\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-6\sqrt{3}$

b) Ta có:

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})$

Vì $AB\perp AD,AC\perp AE$ ñn $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=0$

Suy ra $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}(-6\sqrt{3}+0-0+6\sqrt{3})=0.\Rightarrow AM\perp DE$

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ, TÍNH GÓC GIỮA HAI VECTƠ

**Câu 1.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$, tâm $O$. Hãy tính:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

c). $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

d). $\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)$

**Câu 2.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$, tâm $O$. Hãy tính:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$; $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)$

b). $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB}$ với $N$ là điểm trên cạnh $BC$.

c). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ với $M$ nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

**Câu 3.** Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC=3a$, đáy nhỏ $AD=a$, đường cao $AB=2a$

a). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

b). Gọi $I$ là trung điểm của $CD$. Hãy tính góc giữa $AI$ và $BD$.

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$, đường cao $AH$. Tính:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AH}$.

b). $\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)\left(2\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AH}\right)$

**Câu 5.** Cho hình thoi $ABCD$ tâm $O$ cạnh bằng $7$, góc $\widehat{BAC}=60^0$. Tính:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}$

**Câu 6.** Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=3$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

**Câu 7.** Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng $60^0$. Xác định cosin góc giữa hai vec tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$.

**Câu 8.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Cho biết $\left|\vec{a}\right|=6,\left|\vec{b}\right|=3,\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^o$. Hãy tính các tích vô hướng $\vec{a}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$, $\left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)$.

**Câu 9.** Cho $\left|\vec{a}\right|=3,\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2},\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|=3$. Tính $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|$

**Câu 10.** Cho hai vectơ đơn vị $\vec{a}$, $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$. Tính $\vec{a}.\vec{b}$; $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

### DẠNG 2. TÍNH ĐỘ DÀI CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

**Câu 11.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=2,AC=3,\widehat{BAC}=60^0$. Cho điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Tính độ dài $AM$.

**Câu 12.** Cho tam giác ABC có $AB=a\sqrt{2},BC=5a,\widehat{ABC}=135^0$. Gọi điểm $M$ thuộc $AC$ sao cho $AM=\frac{3}{2}MC$

a). Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

b). Tìm $x, y$ sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$ và tính $BM$.

**Câu 13.** Cho tam giác $ABC$ có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 120^0$

a). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và độ dài trung tuyến $AM$.

b). Gọi $AD$ là phân giác trong của góc $A$ của tam giác $ABC$. Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài đoạn $AD$.

**Câu 14.** Cho tam giác $ABC$ có $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{7}$, $AC = 3a$. Gọi $M$ trung điểm của $AB, N$ thuộc $AC$ sao cho $AN = 2NC$ và $D$ thuộc $MN$ sao cho $2DM = DN$

a). Tìm $x, y$ sao cho $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

b). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và độ dài đoạn $AD$ theo $a$.

## DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG

Sử dụng định nghĩa $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$

Sử dụng quy tắc chèn điểm, quy tắc công trừ các vectơ và một số quy tắc trung điểm, trọng tâm, tính chất hình bình hành…

Tính chất giao hoán và phân phối về tích vô hướng.

Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng, ta chú ý có thể chuyển về vectơ nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$

**Câu 15.** Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh $AC = a\sqrt{2}$, gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$.

a). Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ theo $a$.

b). Gọi $M$ là trung điểm cạnh $BC$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = 2\left(OC^2 - OM^2\right)$

**Câu 16.** Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD và M là điểm bất kỳ.

a). Tính $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$

b). Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

**Câu 17.** Cho $H$ là trung điểm của $AB$ và $M$ là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$

**Câu 18.** Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì $A, B, C, D$ ta có:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ (hệ thức Ơ – le).

**Câu 19.** Cho tam giác $ABC$. Chứng minh rằng:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

b). $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$

**Câu 20.** Cho tam giác $ABC$ có $I$ trung điểm của $BC$. Chứng minh:

a). $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

b). $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IH}$ (Với H là hình chiếu của A xuống BC).

**Câu 21.** Cho tam giác $ABC$, trung tuyến $AM$. Chứng minh rằng

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2$

b). $AM^2 = \frac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4}$

**Câu 22.** Cho tam giác $ABC$, biết $AB=c, BC=a, AC=b$. Có trọng tâm $G$. Chứng minh rằng $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ (hệ thức Lep – nit).

**Câu 23.** Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có
$MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$

**Câu 24.** Cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$. Chứng minh với điểm $M$ bất kỳ ta luôn có:
$MG^2=\frac{1}{3}\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\frac{1}{9}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$

**Câu 25.** Cho hai điểm $M,N$ nằm trên đường tròn đường kính $AB=2R$. Gọi $I$ là giao điểm hai đường thẳng $AM$ và $BN$. Chứng minh:
a). $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$
b). $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}=4R^2$

**Câu 26.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $O$ và $M$ là một điểm tùy ý. Chứng minh:
a). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$
b). $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$

**Câu 27.** Cho tam giác $ABC$ đều nội tiếp đường tròn tâm $O$ bán kính $R$.
a). Chứng minh $MA^2+MB^2+MC^2=6R^2$ khi và chỉ khi $M$ thuộc $(O)$.
b). Chứng minh với mọi điểm $M$:
$AM^2+2MB^2-3MC^2=2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)$

**Câu 28.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $I,J$ theo thứ tự là trung điểm của $AC,BD$. Chứng minh rằng $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$

**Câu 29.** Cho tam giác $ABC$, biết $AB=c, BC=a, CA=b$, các đường trung tuyến tương ứng $AA', BB', CC'$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Chứng minh rằng với mọi $M$ bất kì, ta có
$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=3MG^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{6}$

**Câu 30.** Cho tam giác $ABC$, gọi $H$ là trực tâm, $M$ là trung điểm của cạnh $BC$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$

**Câu 31.** Cho tam giác $ABC$, có $AD, BE, CF$ lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}=0$

## DẠNG 4. CHỨNG MINH SỰ VUÔNG GÓC CỦA HAI VECTƠ, HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Điều kiện $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.
Điều kiện $AB\perp CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.
Lưu ý chọn gốc, chọn hệ cơ sở để biểu diễn và chứng minh vuông góc.

**Câu 32.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$. Gọi $M,N$ là các điểm sao cho $3\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{BC}$, $5\overrightarrow{AN}=4\overrightarrow{AC}$.
a). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}$
b). Chứng minh $AM$ vuông góc với $BN$.

**Câu 33.** Cho tam giác $ABC$ có góc $A$ nhọn. Vẽ bên ngoài tam giác $ABC$ các tam giác vuông cân đỉnh $A$ là $ABD$ và $ACE$. Gọi $M$ trung điểm của đoạn $BC$. Chứng minh rằng $AM$ vuông góc với $DE$.

**Câu 34.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, đường cao $AH$. Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm của $AH$ và $HC$. Chứng minh $BI \perp AJ$

**Câu 35.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$. Gọi $H$ là trung điểm của đoạn $BC, D$ là hình chiếu vuông góc của $H$ trên $AC, M$ trung điểm của đoạn $HD$. Chứng minh $AM$ vuông góc với $DB$.

**Câu 36.** Cho tứ giác $ABCD$ có $E$ là giao của hai đường chéo $AC$ và $BD$. Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm của $BC, AD$ và $H,K$ là trực tâm của các tam giác $ABE, CDE$.

a). Chứng minh $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

b). Chứng minh $HK \perp IJ$

**Câu 37.** Cho tứ giác $ABC$ có hai đường chéo $AC$ và $BD$ vuông góc với nhau và cắt nhau tại $M$. Gọi $P$ là trung điểm của cạnh $AD$. Chứng minh $MP$ vuông góc với $BC$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

**Câu 38.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ $BH \perp AC$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $AH$ và $DC$. Chứng minh $BM \perp MN$.

**Câu 39.** Cho hình vuông $ABCD$, điểm $M$ thuộc đoạn thẳng $AC$ sao cho $AM = \dfrac{AC}{4}$. Gọi $N$ là trung điểm của đoạn thẳng $BC$. Chứng minh rằng $DMN$ là tam giác vuông cân.

**Câu 40.** Cho tứ giác $ABC$ D có hai đường chéo cắt nhau tại $O$. Gọi $H,K$ lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và $CDO$. Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC$. Chứng minh $HK \perp IJ$.

**Câu 41.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $3a$. Lấy $M,N,P$ lần lượt trên 3 cạnh $BC, CA, AB$ sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x$. Tìm $x$ để $AM$ vuông góc với $PN$.

**Câu 42.** Tam giác $ABC$ cân tại $A$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $D$ là trung điểm của $AB, E$ là trọng tâm tam giác $ACD$. Chứng minh $OE \perp CD$

## DẠNG 5. TẬP HỢP ĐIỂM

**Dạng 1:** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \quad (1)$ (A, B là hai điểm cố định).

– $k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính $AB$.

– $k \neq 0$ : Gọi I trung điểm của $AB$.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

+ Nếu $k + \dfrac{AB^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > -\dfrac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{k + \dfrac{AB^2}{4}}$

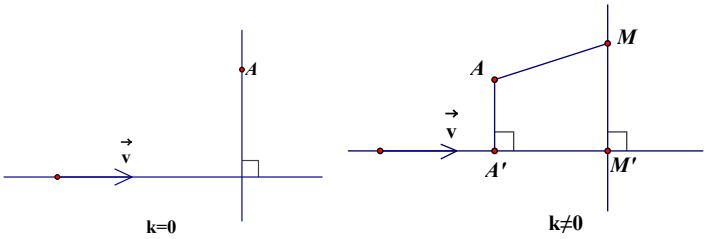
+ Nếu $k + \dfrac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{AB^2}{4}$: Tập hợp điểm M là điểm I.

+ Nếu $k + \dfrac{AB^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < -\dfrac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là rỗng.

**Dạng 2:** $\overrightarrow{AM}.\vec{v} = k \quad (2)$ (A cố định, $\vec{v}$ có hướng, độ dài xác định).

$k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của $\vec{v}$

$k \neq 0$: Gọi $\overrightarrow{A'M'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ trên giá của vecto $\vec{v}$; ta có: $(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'}.\vec{v} = k$ (định lí hình chiếu). A' cố định $\Rightarrow M'$ cố định (M' nằm trên giá của $\vec{v}$ định bởi $\overline{A'M'} = \dfrac{k}{v}$). Tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vecto $\vec{v}$ tại M'.




**Dạng 3:** $\alpha MA^2+\beta MB^2=k$ $(3)$ (A, B cố định $\alpha,\beta$ là hằng số và $\alpha+\beta\neq 0$).

Gọi I là điểm thỏa $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow$ I là điểm cố định.

$(3)\Leftrightarrow\alpha\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\beta\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=k$

$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)MI^2+2\left(\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}\right)\overrightarrow{MI}+\alpha IA^2+\beta IB^2=k$

$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)MI^2=k-\left(\alpha IA^2+\beta IB^2\right)$

$\Leftrightarrow MI^2=\dfrac{k-\left(\alpha IA^2+\beta IB^2\right)}{\alpha+\beta}$

Nếu $\dfrac{k-\left(\alpha IA^2+\beta IB^2\right)}{\alpha+\beta}>0\Leftrightarrow k>\alpha IA^2+\beta IB^2$: Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{\dfrac{k-\left(\alpha IA^2+\beta IB^2\right)}{\alpha+\beta}}$.

Nếu $\dfrac{k-\left(\alpha IA^2+\beta IB^2\right)}{\alpha+\beta}=0\Leftrightarrow k=\alpha IA^2+\beta IB^2$: Tập hợp điểm M là điểm I.

Nếu $\dfrac{k-\left(\alpha IA^2+\beta IB^2\right)}{\alpha+\beta}<0\Leftrightarrow k<\alpha IA^2+\beta IB^2$: Tập hợp điểm M là rỗng.

Chú ý:

Để giải các bài toán thuộc loại trên, ta nên thu gọn biểu thức đã cho bằng cách sử dụng công thức thu gọn vec tơ dưới đây:

– Cho hai điểm A, B cố định $\alpha,\beta$ là hằng số thỏa $\alpha+\beta\neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$.

– Cho ba điểm A, B, C cố định $\alpha,\beta,\chi$ là hằng số thỏa $\alpha+\beta+\chi\neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\chi\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\chi\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\chi)\overrightarrow{MI}$.

**Câu 43.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp các điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

**Câu 44.** Cho tam giác $ABC$, tìm tập hợp điểm $M$ thỏa:

a). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$

b). $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$

c). $\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)=0$

d). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+9\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=3MB^2+4MC^2$

**Câu 45.** Cho tam giác $ABC$, tìm tập hợp những điểm $M$ thỏa mãn điều kiện sau: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

**Câu 46.** Cho tam giác $ABC$, tìm tập hợp những điểm $M$ sao cho: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=AB^2$

**Câu 47.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ có $AB = AC = a, BC = 3a$. Tìm tập hợp những điểm $M$ sao cho $2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0$

**Câu 48.** Cho $A, B, C, D$ là bốn điểm cố định cho trước, tìm tập hợp những điểm $M$ sao cho: $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\right) = 0$

**Câu 49.** Cho đoạn $AB = a > 0$ và số $k$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k$

**Câu 50.** Cho tam giác $ABC$, tìm tập hợp những điểm $M$ sao cho

a) $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$;

b) $\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$.

**Câu 51.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp những điểm $M$ sao cho:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$;

b) $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) = 0$;

c) $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$;

d) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -MA.MB$.

**Câu 52.** Cho hai điểm $A, B$ và $k$ là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm $M$ thoả điều kiện: $MA^2 + MB^2 = k^2$.

**Câu 53.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right) = 0$

**Câu 54.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp điểm $M$ sao cho:

a). $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$

b). $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

**Câu 55.** Cho hai điểm $A, B$ cố định và số $k$ cho trước. Tìm tập hợp những điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$

**Câu 56.** Cho tam giác $ABC$, tìm tập hợp những điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG} = AB^2$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

**Câu 57.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$.

a). Xác định vị trí điểm $P$ thỏa $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

b). Chứng minh $C, G, P$ thẳng hàng.

c). Tìm tập hợp diểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right|$

**Câu 58.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$. Gọi $D$ là điểm đối xứng với $A$ qua $BC$ và $M$ là một điểm thay đổi:

a). Chứng minh $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2$ không đổi.

b). Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = k$ (k là số thực cho trước).

**Câu 59.** Cho tam giác $ABC$. Tìm quỹ tích điểm $M$ thỏa mãn:

a). $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = k$

b). $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = k$

(với k là một số cho trước).

**Câu 60.** Cho tam giác $ABC$ số $a$. Tìm tập hợp các điểm $M$ sao cho $3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a$.

**Câu 61.** Cho tam giác $ABC$ và số $k$. Tìm tập hợp các điểm $M$ sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=-1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

**Câu 2.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc $\alpha$ giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

**A.** $\alpha=180^\circ$. **B.** $\alpha=0^\circ$. **C.** $\alpha=90^\circ$. **D.** $\alpha=45^\circ$.

**Câu 3.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3$. Xác định góc $\alpha$ giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

**A.** $\alpha=30^\circ$. **B.** $\alpha=45^\circ$. **C.** $\alpha=60^\circ$. **D.** $\alpha=120^\circ$.

**Câu 4.** Cho tam giác đều $ABC$ có cạnh bằng $a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\dfrac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$

**Câu 5.** Cho $M$, $N$, $P$, $Q$ là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

**A.** $\overrightarrow{MN}\left(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}\right)=\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}$. **B.** $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.

**C.** $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{MN}$. **D.** $\left(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ}\right)\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}\right)=MN^2-PQ^2$.

**Câu 6.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}a^2$

**Câu 7.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Gọi $E$ là điểm đối xứng của $D$ qua $C$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}a^2$. **C.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=5a^2$.

**Câu 8.** Cho tam giác $ABC$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0$ là:

**A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

**Câu 9.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a=2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=-2$.

**C.** $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{AC}=-4$. **D.** $\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BA}=2$.

**Câu 10.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$, $\hat{A}=120^\circ$ và $AB=a$. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$

**A.** $\dfrac{a^2}{2}$. **B.** $-\dfrac{a^2}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

**Câu 11.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$. **B.** $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC}$.

**C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$.

**Câu 12.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}=a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-a^2$.

**C.** $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{AC}=a^2$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}=0$.

**Câu 13.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=4a$, đáy nhỏ $CD=2a$, đường cao $AD=3a$; $I$ là trung điểm của $AD$. Khi đó $\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right).\overrightarrow{ID}$ bằng :

**A.** $\dfrac{9a^2}{2}$. **B.** $-\dfrac{9a^2}{2}$. **C.** $0$. **D.** $9a^2$.

**Câu 14.** Tam giác $ABC$ vuông ở $A$ và có góc $\widehat{B}=50^{\circ}$. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

**A.** $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right)=130^{\circ}$. **B.** $\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AC}\right)=40^{\circ}$. **C.** $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB}\right)=50^{\circ}$. **D.** $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB}\right)=120^{\circ}$.

**Câu 15.** Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)$

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 16.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$ có $BC=a\sqrt{2}$ .Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

**A.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=a^2$. **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=a$. **C.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=a\sqrt{2}$.

**Câu 17.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $a$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

**A.** $0$. **B.** $a$. **C.** $\frac{a^2}{2}$. **D.** $a^2$.

**Câu 18.** Cho $M$ là trung điểm $AB$, tìm biểu thức sai:

**A.** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=-MA.AB$. **B.** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-MA.MB$.

**C.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=AM.AB$. **D.** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA.MB$.

**Câu 19.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh bằng $a$ và $H$ là trung điểm $BC$. Tính $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CA}$

**A.** $\frac{3a^2}{4}$. **B.** $\frac{-3a^2}{4}$. **C.** $\frac{3a^2}{2}$. **D.** $\frac{-3a^2}{2}$.

**Câu 20.** Biết $\vec{a}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ và $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Câu nào sau đây đúng

**A.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

**B.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nằm trên hai dường thẳng hợp với nhau một góc $120^{\circ}$.

**C.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

**D.** A, B, C đều sai.

**Câu 21.** Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=5$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^{\circ}$.Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

**A.** $\sqrt{21}$. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** $21$. **D.** $61$.

**Câu 22.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $\hat{B}=60^{\circ}$, $AB=a$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$

**A.** $3a^2$. **B.** $-3a^2$. **C.** $3a$. **D.** $0$.

**Câu 23.** Cho 2 vectơ đơn vị $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2$. Hãy xác định $\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)$

**A.** $7$. **B.** $5$. **C.** $-7$. **D.** $-5$.

**Câu 24.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=4a$, đáy nhỏ $CD=2a$, đường cao $AD=3a$ .Tính $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}$

**A.** $-9a^2$. **B.** $15a^2$. **C.** $0$. **D.** $9a^2$

**Câu 25.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $C$ có $AC=9$, $BC=5$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

**A.** $9$. **B.** $81$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Câu 26.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ . Biết $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^{\circ}$.Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

**A.** $\sqrt{7+\sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{7-\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$. **D.** $\sqrt{7+2\sqrt{3}}$.

**Câu 27.** Cho hai điểm $B,C$ phân biệt. Tập hợp những điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}^2$ là :

**A.** Đường tròn đường kính $BC$. **B.** Đường tròn $(B;BC)$.

**C.** Đường tròn $(C;CB)$. **D.** Một đường khác.

**Câu 28.** Cho ba điểm $A,B,C$ phân biệt. Tập hợp những điểm $M$ mà $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ là :

**A.** Đường tròn đường kính $AB$.

**B.** Đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $BC$.

**C.** Đường thẳng đi qua $B$ và vuông góc với $AC$.

**D.** Đường thẳng đi qua $C$ và vuông góc với $AB$.

**Câu 29.** Cho hai điểm $A(2,2)$, $B(5,-2)$. Tìm $M$ trên tia $Ox$ sao cho $\widehat{AMB}=90^o$

**A.** $M(1,6)$. **B.** $M(6,0)$. **C.** $M(1,0)$ hay $M(6,0)$. **D.** $M(0,1)$.

**Câu 30.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)$ **B.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$

**C.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$ **D.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$

**Câu 31.** Cho tam giác đều $ABC$ có cạnh bằng $a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$

**Câu 32.** Cho tam giác đều $ABC$ có cạnh bằng $a$ và chiều cao $AH$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.** $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$ **B.** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HA}\right)=150^0$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\frac{a^2}{2}$

**Câu 33.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ và có $AB=c$, $AC=b$. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

**A.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2$ **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=c^2$ **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2+c^2$ **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2-c^2$

**Câu 34.** Cho ba điểm $A,B,C$ thỏa $AB=2\,\text{cm}$, $BC=3\,\text{cm}$, $CA=5\,\text{cm}$ Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

**A.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=13$ **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=15$ **C.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=17$ **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=19$

**Câu 35.** Cho tam giác $ABC$ có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ Tính $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}$

**A.** $P=b^2-c^2$ **B.** $P=\frac{c^2+b^2}{2}$ **C.** $P=\frac{c^2+b^2+a^2}{3}$ **D.** $P=\frac{c^2+b^2-a^2}{2}$

**Câu 36.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Tính $P=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)$

**A.** $P=-1$ **B.** $P=3a^2$ **C.** $P=-3a^2$ **D.** $P=2a^2$

**Câu 37.** Cho tam giác $ABC$ có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $BC$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{b^2-c^2}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{c^2+b^2}{2}$.

**C.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{c^2+b^2+a^2}{3}$. **D.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{c^2+b^2-a^2}{2}$.

**Câu 38.** Cho ba điểm $O$, $A$, $B$ không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ là

**A.** tam giác $OAB$ đều. **B.** tam giác $OAB$ cân tại $O$.

**C.** tam giác $OAB$ vuông tại $O$. **D.** tam giác $OAB$ vuông cân tại $O$.

**Câu 39.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8$, $AD=5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64$.

**Câu 40.** Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=8$ và $BD=6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=28$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=32$.

**Câu 41.** Cho tam giác $ABC$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$ là:

**A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

**Câu 42.** Tìm tập các hợp điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$ với $A$, $B$, $C$ là ba đỉnh của tam giác.

**A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

**Câu 43.** Cho hai điểm $A$, $B$ cố định có khoảng cách bằng $a$. Tập hợp các điểm $N$ thỏa mãn $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=2a^2$ là:

**A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

**Câu 44.** Cho hai điểm $A$, $B$ cố định và $AB=8$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-16$ là:

**A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

**Câu 45.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=a$, $BC=2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=4a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=-a^2$.

**C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=-4a^2$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=-2a^2$.

**Câu 46.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$.Tính giá trị của biểu thức $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$

**A.** $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=3a^2$. **B.** $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=2a^2$.

**C.** $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=a^2$. **D.** $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=4a^2$.

**Câu 47.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AB=BC=2\sqrt{5}$, $CD=BD=5\sqrt{2}$, $AD=3\sqrt{10}$, $AC=10$. Tìm côsin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DB}$

**A.** $-\dfrac{4}{5\sqrt{2}}$. **B.** $-\dfrac{3}{5\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{4}{5\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{3}{5\sqrt{2}}$.

**Câu 48.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $DA,BC$. Tính góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$ biết $AB=CD=2a$, $MN=a\sqrt{3}$.

**A.** $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=50^0$. **B.** $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=60^0$. **C.** $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=80^0$. **D.** $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=30^0$.

**Câu 49.** Cho tam giác $OAB$ vuông cân tại $O$, cạnh $OA=4$. Tính $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$.

**A.** $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=4$. **B.** $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=2$.

**C.** $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=12$. **D.** $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=4\sqrt{5}$.

**Câu 50.** Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại $A$, $D$; $AB\,//\,CD$; $AB=2a$; $AD=DC=a$. $O$ là trung điểm của $AD$. Độ dài vectơ tổng $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ bằng

**A.** $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $a$. **D.** $3a$.

**Câu 51.** Cho $ABC$ đều cạnh $2a$ với $M$ là trung điểm $BC$. Khẳng định nào đúng?

**A.** $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AM}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AM}\right|=a\sqrt{3}$.

**Câu 52.** Cho tam giác vuông cân $ABC$ với $AB=AC=a$. Khi đó $\left|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ bằng

**A.** $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{5}$. **C.** $5a$. **D.** $2a$.

**Câu 53.** Cho hai vécto $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=4;|\vec{b}|=3;|\vec{a}-\vec{b}|=4$. Gọi $\alpha$ là góc giữa hai vécto $\vec{a},\vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

**A.** $\alpha = 60^0$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{3}{8}$.

**Câu 54.** Cho tam giác đều $ABC$ có cạnh bằng $4a$ .Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

**A.** $8a^2$. **B.** $8a$. **C.** $8\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a$.

**Câu 55.** Cho $\Delta ABC$ đều; $AB = 6$ và $M$ là trung điểm của $BC$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}$ bằng

**A.** $-18$. **B.** $27$. **C.** $18$. **D.** $-27$.

**Câu 56.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $\left|\vec{a}\right| = 2, \left|\vec{b}\right| = \sqrt{3}$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 30^0$. Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

**A.** $\sqrt{11}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{12}$. **D.** $\sqrt{14}$.

**Câu 57.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $\widehat{B} = 30°, AC = 2$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$.

**A.** $P = -2$. **B.** $P = 2\sqrt{3}$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = -2\sqrt{3}$.

**Câu 58.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a, AD = 3a, \widehat{BAD} = 60°$. Điểm $K$ thuộc $AD$ thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$

**A.** $3a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** $0$. **D.** $a^2$.

**Câu 59.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=5, AC=8, BC=7$ thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng:

**A.** -20. **B.** 40. **C.** 10. **D.** 20.

**Câu 60.** Cho hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ và hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

**A.** $120°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

**Câu 61.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi $K$ là trung điểm của cạnh $AD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = 0$. **B.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$. **C.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. **D.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = 2a^2$.

**Câu 62.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, $BC = a\sqrt{3}$, $M$ là trung điểm của $BC$ và có $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. Tính cạnh $AB, AC$.

**A.** $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. **B.** $AB = a, AC = a$.

**C.** $AB = a\sqrt{2}, AC = a$. **D.** $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$.

**Câu 63.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. $M$ là trung điểm của $AB, G$ là trọng tâm tam giác $ADM$. Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{CG}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)$

**A.** $\frac{21a^2}{4}$. **B.** $\frac{11a^2}{4}$. **C.** $\frac{9a^2}{4}$. **D.** $\frac{a^2}{4}$.

**Câu 64.** Cho các véctơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thoả mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right| = \sqrt{7}$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

**A.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{1}{4}$. **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{1}{2}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{1}{3}$.

**Câu 65.** Cho các véctơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc tơ bằng $60^0$. Xác định cosin góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a}-\vec{b}$

**A.** $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right) = -\frac{1}{2}$. **B.** $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right) = -\frac{1}{6}$. **C.** $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right) = -\frac{1}{4}$. **D.** $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right) = -\frac{1}{3}$.

**Câu 66.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh $AB$ lấy điểm $M$ sao cho $BM = 1$, trên cạnh $CD$ lấy điểm $N$ sao cho $DN = 1$ và $P$ là trung điểm $BC$. Tính $\cos\widehat{MNP}$.

**A.** $\cos\widehat{MNP}=\dfrac{13}{5\sqrt{10}}$. **B.** $\cos\widehat{MNP}=\dfrac{13}{4\sqrt{10}}$.

**C.** $\cos\widehat{MNP}=\dfrac{13}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos\widehat{MNP}=\dfrac{13}{45\sqrt{10}}$.

**Câu 67.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$. $M$ là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$, $G$ là trọng tâm tam giác $ADM$. Tính $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}$

**A.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}=\dfrac{5}{8}$. **B.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}=\dfrac{3}{8}$. **C.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}=\dfrac{3}{7}$. **D.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}=\dfrac{1}{8}$.

**Câu 68.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=a$, $BC=2a$ và G là trọng tâm. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

**A.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\dfrac{a^2}{3}$. **B.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\dfrac{2a^2}{3}$.

**C.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\dfrac{4a^2}{3}$. **D.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\dfrac{5a^2}{3}$.

**Câu 69.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm $M$ nằm trên đoạn thẳng $AC$ sao cho $AM=\dfrac{AC}{4}$. Gọi $N$ là trung điểm của đoạn thẳng $DC$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=-4$. **B.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=0$. **C.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=4$. **D.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=16$.

**Câu 70.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh bằng $a$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức $4MA^2+MB^2+MC^2=\dfrac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn $(C)$ có bán kính $R$. Tính $R$.

**A.** $R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $R=\dfrac{a}{4}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

**Câu 71.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $18\,\text{cm}$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là

**A.** Tập rỗng. **B.** Đường tròn cố định có bán kính $R=2\,\text{cm}$.

**C.** Đường tròn cố định có bán kính $R=3\,\text{cm}$. **D.** Một đường thẳng.

**Câu 72.** Cho tam giác $ABC$, điểm $J$ thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$, $I$ là trung điểm của cạnh $AB$,điểm $K$ thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

Một điểm $M$ thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $\left(3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0$.

Tập hợp điểm $M$ là đường nào trong các đường sau.

**A.** Đường tròn đường kính $IJ$. **B.** Đường tròn đường kính $IK$.

**C.** Đường tròn đường kính $JK$. **D.** Đường trung trực đoạn $JK$.

**Câu 73.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$. Lấy $M,N,P$ lần lượt nằm trên ba cạnh $BC,CA,AB$ sao cho $BM=2MC, AC=3AN, AP=x, x>0$. Tìm $x$ để $AM$ vuông góc với $NP$.

**A.** $x=\dfrac{5a}{12}$. **B.** $x=\dfrac{a}{2}$. **C.** $x=\dfrac{4a}{5}$. **D.** $x=\dfrac{7a}{12}$.

**Câu 74.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB=2a$, các cạnh đáy $AD=a$ và $BC=3a$. Gọi $M$ là điểm trên đoạn $AC$ sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}$. Tìm $k$ để $BM\perp CD$

**A.** $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{3}{7}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{5}$.

# Bài 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

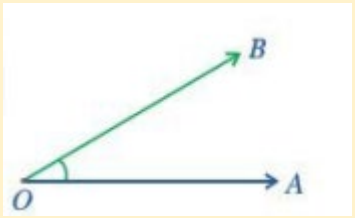
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Định nghĩa

#### 1. Tích vô hướng của hai vectơ có cùng điểm đầu

Cho hai vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ khác $\vec{0}$ trong mặt phẳng




- Góc giữa hai vectở $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia $OA,OB$ và được kí hiệu là $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số, kí hiệu $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức:
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

***Ví dụ 1.*** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$ và $AB=4cm$.

a) Tính độ dài cạnh huyền $BC$.

b) Tính $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

***Giải***

a) $BC=AB\sqrt{2}=4\sqrt{2}(cm)$

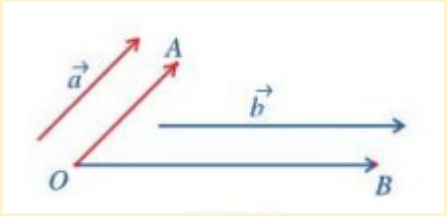
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=4\cdot4\cdot\cos\widehat{BAC}=16\cdot\cos90^\circ=16\cdot0=0$.

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

$=4\cdot4\sqrt{2}\cdot\cos\widehat{ABC}=16\sqrt{2}\cdot\cos45^\circ=16\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=16$

#### 2. Tích vô hướng của hai vec tơ

Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm $O$ và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$




- Góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a},\vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$.

*Quy ước:* Tích vô hướng của một vectở bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

*Chú ý*

- $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$

- Nếu $(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a}\perp\vec{b}$ hoặc $\vec{b}\perp\vec{a}$. Khi đó $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos90^\circ=0$.

- Tích vô hướng của hai vectơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.

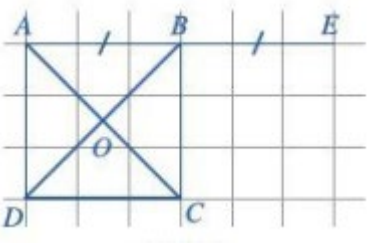
- Tích vô hướng của hai vectơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.

Ta có thể chứng minh chú ý thứ ba như sau:

Nếu $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ (khác $\vec{0}$ ) cùng hướng thì $(\vec{a},\vec{b})=0°$. Do đó, $\cos(\vec{a},\vec{b})=1$. Vì vậy, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Nếu một trong hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ và $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=0$ nên $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$. Chú ý thứ tư được chứng minh tương tự như trên.

***Ví dụ 2.*** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$ có độ dài cạnh bằng $a$. Tính:




a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}$ b) $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}$

***Giải.***

a) Ta có: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})=\widehat{BAO}=45°$.

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{OC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\right)=a.\frac{a}{\sqrt{2}}.\cos 45°=\frac{a^2}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2}{2}$

b) Vẽ vectơ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$. Ta có: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD}\right)=\widehat{EBD}=135°$.

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})$

$=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 135^{\circ}=a^2\sqrt{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}=-a^2$.

c) Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE},\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$ nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OD})=(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BO})=\widehat{EBO}=135°$.

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{OD}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OD})=a\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\cos 135°=\frac{a^2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}=\frac{-a^2}{2}$.

## II. Tính chất

Với hai vectơ bất kì $\vec{a},\vec{b}$ và số thực $k$ tuỳ ý, ta có:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2\geq 0,\vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

Trong đó, kí hiệu $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$ và biểu thức này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

***Ví dụ 3.*** Cho đoạn thẳng $AB$ và $I$ là trung điểm của $AB$. Chứng minh rằng với mỗi điểm $O$ ta có:

a) $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IB}=0$

b) $\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2\right)$.

***Giải***

a) Vì $I$ là trung điểm $AB$ nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{OI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})=\overrightarrow{OI}\cdot\vec{0}=0$

b) Vì $I$ là trung điểm $AB$ nên $2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})$.

Vậy $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot(-\overrightarrow{OA})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2\right)$

***Ví dụ 4.*** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Tính: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$

***Giải***

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos 90^\circ$

$=AB\cdot AC\cdot 0=0$

## III. Một số ứng dụng

### 1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm $A,B$ phân biệt, ta có: $\overrightarrow{AB}^2=|\overrightarrow{AB}|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng $AB$ được tính như sau: $AB=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

***Ví dụ 5.*** (Định lí coossin trong tam giác) Chứng minh rằng trong tam giác $ABC$, ta có;

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A$

***Giải***

Ta có: $\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Suy ra: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A.$

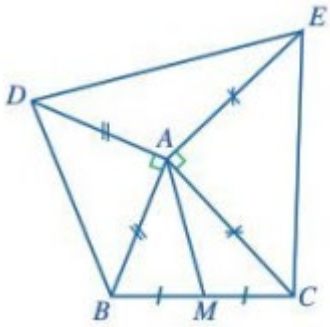
### 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

*Nhận xét:* Cho hai vectơ bất kì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

Hai đường thẳng $AB$ và $CD$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

Cũng như vậy, hai đường đường thẳng $a$ và $b$ vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, trong đó $\vec{u}\neq\vec{0},\vec{v}\neq\vec{0}$, giá của vectơ $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng $a$ và giá của vectơ $\vec{v}$ song song hoặc trùng với đường thẳng $b$.

***Ví dụ 6.*** Cho tam giác $ABC$ có $AB=3,AC=4$, $\widehat{A}=60°$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại $A$ là $ABD$ và $ACE$




a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$;

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$. Từ đó chứng minh $AM\perp DE$.

***Giải***

a) Do $\widehat{BAE}=\widehat{BAC}+\widehat{CAE}=150^\circ,\widehat{CAD}=\widehat{CAB}+\widehat{BAD}=150^\circ$ nên

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=AB\cdot AE\cdot\cos\widehat{BAE}=3\cdot 4\cdot\cos 150^\circ=12\cdot\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-6\sqrt{3}\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=AC\cdot AD\cdot\cos\widehat{CAD}=4\cdot 3\cdot\cos 150^\circ=12\cdot\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-6\sqrt{3}$

b) Ta có:

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})$

Vì $AB\perp AD,AC\perp AE$ ñn $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=0$

Suy ra $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}(-6\sqrt{3}+0-0+6\sqrt{3})=0.\Rightarrow AM\perp DE$

# PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

## DẠNG 1. TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ, TÍNH GÓC GIỮA HAI VECTƠ

**Câu 1.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$, tâm $O$. Hãy tính:

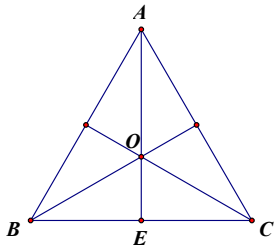
a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

c). $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

d). $\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)$

**Lời giải**




a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=AB.AC.\cos 60^0=a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

b). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$

$=-BA.BC.\cos 60^0=-a.a.\dfrac{1}{2}=-\dfrac{a^2}{2}$

c). Gọi $E$ là trung điểm của $BC$ có $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$;

Do đó $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=2\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CB}=2\left|\overrightarrow{OE}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{CB}\right)$

$=2.\mathrm{OE}.\mathrm{CB}\cos 90^0=0$.

d). Khai triển biểu thức, ta được

$D=\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

Chú ý rằng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\dfrac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2}{2}$

Từ đó $D=a^2+\dfrac{3\mathrm{a}^2}{2}+a^2-3\mathrm{a}^2=\dfrac{a^2}{2}$.

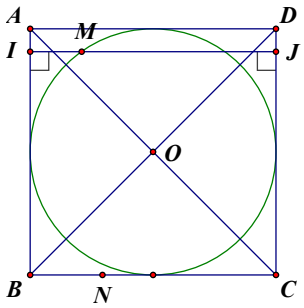
**Câu 2.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$, tâm $O$. Hãy tính:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$; $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)$

b). $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB}$ với $N$ là điểm trên cạnh $BC$.

c). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ với $M$ nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

**Lời giải**




a).

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = -BA.BC.\cos 90^0 = 0$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = -\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right) = -BA.BD.\cos 45^0 = -a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$
- $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

$= 0+\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right) = AC.BC.\cos 45^0 = a^2$

b).

- $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BO}\right).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AB}$ (do $\overrightarrow{BN}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB}=0$)

$= \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BA} = \left|\overrightarrow{BO}\right|.\left|\overrightarrow{BA}\right|.\cos\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2}{2}$

- $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BN}\right)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}^2 = -a^2$

c).

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)$

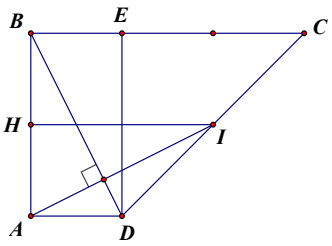
$= \left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{HA}\right) = MH^2-HA^2$

**Câu 3.** Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC=3a$, đáy nhỏ $AD=a$, đường cao $AB=2a$

a). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

b). Gọi $I$ là trung điểm của $CD$. Hãy tính góc giữa $AI$ và $BD$.

**Lời giải**




– Dựng $DE\perp BC, E\in BC\Rightarrow ABED$ là hình chữ nhật. Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CD}$

$= -\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DC} = -\left|\overrightarrow{DE}\right|.\left|\overrightarrow{DC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}\right) = -DE.DC.\cos 45^0 = -2a.2a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -4a^2$

– $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD} = 3.\left|\overrightarrow{BE}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|.\cos\widehat{DBE} = 3BE.BD.\dfrac{BE}{BD} = 3.a^2$

– $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}-\underbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}}_{0}-\underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}}_{0}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}$

$= \left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos 0^0-\overrightarrow{AB}^2 = BC.AD-AB^2 = 3a.a-4a^2 = -a^2$

(Vì $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}=0$; $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}=0$).

b). Gọi H trung điểm của AB, suy ra HI là đường trung bình của hình thang ABCD, do đó

$HI = \dfrac{AD + BC}{2} = 2a$

Có $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AB}}_{0} - \underbrace{\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AD}}_{0} + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB}$

Mà $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AD} = HI.AD.\cos 0^0 = 2a.a = 2a^2$

$\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AB} = 0\left(do\ \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{AB}\right)$; $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AD} = 0\left(do\ \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{AD}\right)$.

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = -2a^2$

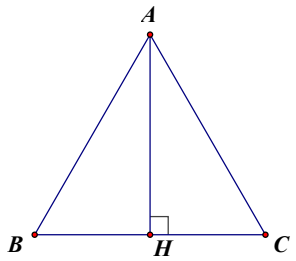
Vậy $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ góc giữa AI và BD bằng $90^0$.

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$, đường cao $AH$. Tính:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AH}$.

b). $\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)\left(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}\right)$

**Lời giải**




a).

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC} = a.a.\cos 60^0 = \dfrac{a^2}{2}$

– $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -AB.AH.\cos\widehat{BAH} = -a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\cos 30^0 = -\dfrac{3a^2}{4}$

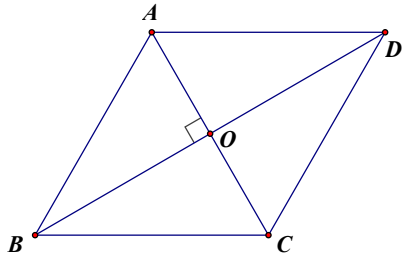
b). $\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)\left(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}\right) = \overrightarrow{AB}\left(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}\right) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

$= -2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -2.\dfrac{a^2}{2} - 3.\dfrac{3a^2}{4} = -\dfrac{13a^2}{4}$

**Câu 5.** Cho hình thoi $ABCD$ tâm $O$ cạnh bằng $7$, góc $\widehat{BAC} = 60^0$. Tính:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}$

**Lời giải**




Do $\widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow AC = 7, BO = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều $= \dfrac{canh.\sqrt{3}}{2}$)

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 7.7.\cos 60^0 = \dfrac{49}{2}$.

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}=-AB.AO.\cos 60^0=-7.\frac{7}{2}.\frac{1}{2}=-\frac{49}{4}$

– $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0\left(do\ \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}\right)$

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BO}=BA.BO.\cos\widehat{ABO}=a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\cos 30^0=\frac{3a^2}{4}$

**Câu 6.** Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=3$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

**Lời giải**

Ta có $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=4\Leftrightarrow\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2=16\Leftrightarrow 4\vec{a}^2-12\vec{a}.\vec{b}+9\vec{b}^2=16$

$\Leftrightarrow 4a^2-12.\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)+9b^2=16$

$\Leftrightarrow 4-12\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)+9=16\Rightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{1}{4}$.

**Câu 7.** Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng $60^0$. Xác định cosin góc giữa hai vec tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b},\ \vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$.

**Lời giải**

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2+\vec{a}.\vec{b}-2\vec{b}^2=a^2+\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)-2b^2=-\frac{1}{2}$.

- $\vec{u}^2=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+4\vec{a}.\vec{b}+4\vec{b}^2=1+4.1.1.\cos 60^0+4.1=7\Rightarrow\left|\vec{u}\right|=\sqrt{7}$
- $\vec{v}^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2.\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=1-2.1.1\cos 60^0+1=1\Rightarrow\left|\vec{v}\right|=1$

$\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\Rightarrow\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\frac{-\frac{1}{2}}{.\sqrt{7}.1}=-\frac{\sqrt{7}}{14}$.

**Câu 8.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Cho biết $\left|\vec{a}\right|=6,\left|\vec{b}\right|=3,\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^o$. Hãy tính các tích vô hướng $\vec{a}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right),\ \left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)$.

Lời giải

Trước hết ta có: $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2=36,\ \vec{b}^2=\left|\vec{b}\right|^2=9,\ \vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 45^o=6.3.\frac{\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}$.

Vậy:

- $\vec{a}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}^2-\vec{a}\vec{b}=2.36-9\sqrt{2}=72-9\sqrt{2}$
- $\left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)=-6\vec{a}^2+12\vec{b}^2+\vec{a}\vec{b}=-6.36+12.9-9\sqrt{2}=-108-9\sqrt{2}$.

**Câu 9.** Cho $\left|\vec{a}\right|=3,\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2},\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|=3$. Tính $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|$

**Lời giải**

– $\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|^2=\vec{a}^2-6\vec{a}.\vec{b}+9\vec{b}^2\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|^2-\vec{a}^2-9\vec{b}^2}{6}=\frac{3^2-3^2-9.\sqrt{2}^2}{6}=-3$

– $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|^2=4\vec{a}^2+\vec{b}^2+4\vec{a}.\vec{b}=4.3^2+\sqrt{2}^2+4.(-3)=26\Rightarrow\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{26}$

**Câu 10.** Cho hai vectơ đơn vị $\vec{a},\ \vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$. Tính $\vec{a}.\vec{b};\ \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

**Lời giải**

$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}\Rightarrow\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)^2=3\Leftrightarrow 4\vec{a}^2-4\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=3\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{3-4-1}{4}=-\dfrac{1}{2}$

Có $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=1+2.\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1=1\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$

## DẠNG 2. TÍNH ĐỘ DÀI CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

**Câu 11.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=2, AC=3, \widehat{BAC}=60^0$. Cho điểm $M$ thỏa $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Tính độ dài $AM$.

**Lời giải**

Ta có: $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)+2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}\right)=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}^2=\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}^2=\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2-2.\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow AM^2=\dfrac{1}{9}AB^2+\dfrac{4}{9}AC^2-\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

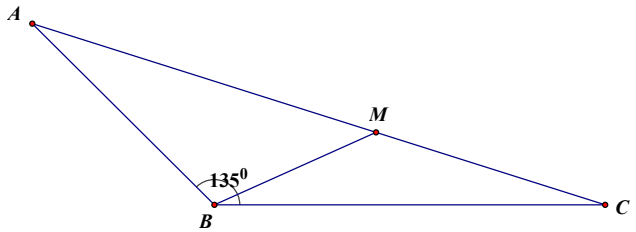
$\Leftrightarrow AM^2=\dfrac{1}{9}.2^2+\dfrac{4}{9}.3^2-\dfrac{4}{9}.3=\dfrac{28}{9}\Rightarrow AM=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

**Câu 12.** Cho tam giác ABC có $AB=a\sqrt{2}, BC=5a, \widehat{ABC}=135^0$. Gọi điểm $M$ thuộc $AC$ sao cho $AM=\dfrac{3}{2}MC$

a). Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

b). Tìm $x, y$ sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$ và tính $BM$.

**Lời giải**




a). $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\widehat{ABC}=a\sqrt{2}.5a.\cos 135^0=-5a^2$

b). Do M thuộc AC sao cho $AM=\dfrac{3}{2}MC\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=\dfrac{3}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}\ (*)$. Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ là hai vectơ không cùng phương nên biểu thức $(*)$ duy nhất $\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\ y=\dfrac{3}{5}\end{cases}$

$\Rightarrow\overrightarrow{BM}^2=\left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}\right)^2\Leftrightarrow BM^2=\dfrac{4}{25}BA^2+\dfrac{9}{25}BC^2+2.\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA}.\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow BM^2=\dfrac{4}{25}BA^2+\dfrac{9}{25}BC^2+\dfrac{12}{25}.\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow BM^2=\dfrac{4}{25}.2a^2+\dfrac{9}{25}.25a^2+\dfrac{12}{25}.\left(-5a^2\right)=\dfrac{173}{25}a^2$

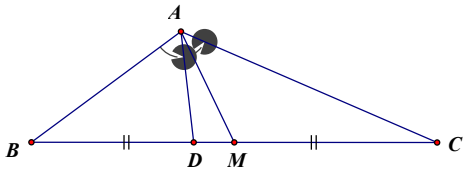
$\Rightarrow BM = \dfrac{a\sqrt{173}}{5}$

**Câu 13.** Cho tam giác $ABC$ có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 120^0$

a). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và độ dài trung tuyến $AM$.

b). Gọi $AD$ là phân giác trong của góc $A$ của tam giác $ABC$. Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài đoạn $AD$.

**Lời giải**




a). Có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos A = 2.3.\cos 120^0 = -3$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \left[\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\right]^2$

$\Leftrightarrow AM^2 = \dfrac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

$\Leftrightarrow AM^2 = \dfrac{1}{4}\left(2^2 + 3^2 + 2.(-3)\right) = \dfrac{7}{4} \Rightarrow AM = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

b).

Theo tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow DB = \dfrac{2}{3}DC$, do $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ là hai vectơ ngược hướng nên có $\overrightarrow{DB} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = -\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) \Leftrightarrow \dfrac{5}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \left(\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)^2 \Leftrightarrow AD^2 = \dfrac{9}{25}AB^2 + \dfrac{4}{25}AC^2 + \dfrac{12}{25}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow AD^2 = \dfrac{9}{25}.2^2 + \dfrac{4}{25}.3^2 + \dfrac{12}{25}.(-3)$

$\Leftrightarrow AD^2 = \dfrac{36}{25}$

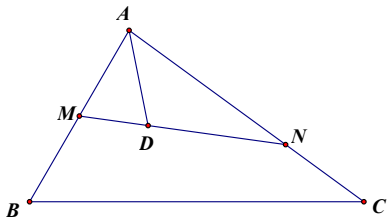
$\Leftrightarrow AD = \dfrac{6}{5}$.

**Câu 14.** Cho tam giác $ABC$ có $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{7}$, $AC = 3a$. Gọi $M$ trung điểm của $AB, N$ thuộc $AC$ sao cho $AN = 2NC$ và $D$ thuộc $MN$ sao cho $2DM = DN$

a). Tìm $x, y$ sao cho $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

b). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và độ dài đoạn $AD$ theo $a$.

**Lời giải**




Do $AN = 2NC \Rightarrow AN = \frac{2}{3}AC \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

- $2DM = DN \Rightarrow 2\overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{DN} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}\right) = -\left(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD}\right)$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{9} \end{cases}$$

b). Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Do đó $\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{(2a)^2 + (3a)^2 - \left(a\sqrt{7}\right)^2}{2} = 3a^2$$

Theo câu a) thì $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}\right)^2$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AC^2 + \frac{4}{27}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{1}{9}(2a)^2 + \frac{4}{9}(3a)^2 + \frac{4}{27}.3a^2$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{44}{9}a^2 \Rightarrow AD = \frac{2a\sqrt{11}}{3}$$

## DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG

Sử dụng định nghĩa $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

Sử dụng quy tắc chèn điểm, quy tắc công trừ các vectơ và một số quy tắc trung điểm, trọng tâm, tính chất hình bình hành…

Tính chất giao hoán và phân phối về tích vô hướng.

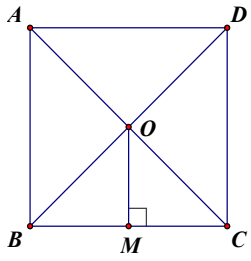
Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng, ta chú ý có thể chuyển về vectơ nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$

**Câu 15.** Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh $AC = a\sqrt{2}$, gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$.

a). Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ theo $a$.

b). Gọi $M$ là trung điểm cạnh $BC$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = 2\left(OC^2 - OM^2\right)$

**Lời giải**



a).

Do ABCD là hình vuông $\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} \Leftrightarrow AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Leftrightarrow AB = a$.

Theo định nghĩa có: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = AD.AC.\cos\widehat{CAD} = a.a\sqrt{2}.\cos 45^0 = a^2$.

b).

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}AB.AC.\cos\widehat{BAC} = \frac{1}{2}a.a\sqrt{2}.\cos 45^0 = \frac{a^2}{2}$ $(1)$
- $2\left(OC^2 - OM^2\right) = 2MC^2 = \frac{BC^2}{2} = \frac{a^2}{2}$ $(2)$

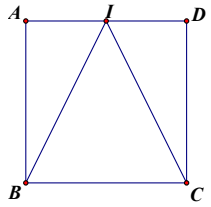
Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = 2\left(OC^2 - OM^2\right)$

**Câu 16.** Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD và M là điểm bất kỳ.

a). Tính $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$

b). Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

**Lời giải**




a).

$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}\right)\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)\left(2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{4}\left[\left(2\overrightarrow{BA}\right)^2 - \overrightarrow{BC}^2\right]$

$= \frac{1}{4}\left(4BA^2 - BC^2\right) = \frac{1}{4}.3AB^2 = \frac{9a^2}{4}$

b). Ta có:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}\right).\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}$ (do $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$)

$= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} + \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{DC}$

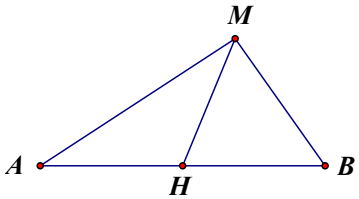
$= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} + \left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}\right)\overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$ (Do $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = 0$)

**Câu 17.** Cho $H$ là trung điểm của $AB$ và $M$ là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$

**Lời giải**




Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}\right) = \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA}\right)$

$= \overrightarrow{MH}^2 - \overrightarrow{HA}^2 = HM^2 - HA^2$ (Do H trung điểm của AB nên có $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HA}$)

**Câu 18.** Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì $A,B,C,D$ ta có:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$ (hệ thức Ơ – le).

**Lời giải**

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

$=\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\right)$

$=\vec{0}$

**Câu 19.** Cho tam giác $ABC$. Chứng minh rằng:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

b). $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A$

**Lời giải**

a).

$BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=AC^2+AB^2-2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)\ (1)$

b). $BC^2=AB^2+AC^2-2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=AB^2+AC^2-2.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A$

$=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos A\ (2)$

**Chú ý:** *Các công thức* $(1)$ *và* $(2)$ *thường xuyên được sử dụng trong khi giải các bài tập khác. Đặc biệt,* $(2)$ *được gọi là định lí hàm số cosin, trong chương sau ta sẽ đề cập nhiều đến định lí này.*

**Câu 20.** Cho tam giác $ABC$ có $I$ trung điểm của $BC$. Chứng minh:

a). $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

b). $AB^2-AC^2=2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IH}$ (Với H là hình chiếu của A xuống BC).

**Lời giải**

a). Ta có: $AB^2+AC^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}\right)^2$ (I trung điểm của BC $\Rightarrow \overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IB}$)

$=2AI^2+2BI^2=2AI^2+2.\left(\frac{BC}{2}\right)^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$ (đpcm).

b). $AB^2-AC^2=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{CB}.2\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{HI}$

$=2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IH}$

**Câu 21.** Cho tam giác $ABC$, trung tuyến $AM$. Chứng minh rằng

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AM^2-\frac{1}{4}BC^2$

b). $AM^2=\frac{2\left(AB^2+AC^2\right)-BC^2}{4}$

**Lời giải**

a). Cách 1:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2}{4}=\frac{\left(2\overrightarrow{AM}\right)^2-\overrightarrow{CB}^2}{4}$$

$$=\frac{4AM^2-BC^2}{4}=AM^2-\frac{BC^2}{4}$$

Cách 2: Gọi I là trung điểm $BC$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=AI^2-IB^2=AI^2-\frac{BC^2}{4}$$

b). $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$$\Rightarrow AM^2=\frac{1}{4}\left(AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[2\left(AB^2+AC^2\right)-\left(AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[2\left(AB^2+AC^2\right)-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2\right]$$

$$=\frac{2\left(AB^2+AC^2\right)-BC^2}{4}$$ (đpcm).

*Đây chính là công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác, sẽ được đề cập nhiều ở phần sau.*

**Câu 22.** Cho tam giác $ABC$, biết $AB=c,\mathrm{B}C=a,AC=b$. Có trọng tâm $G$. Chứng minh rằng $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ (hệ thức Lep – nit).

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$$\Rightarrow\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow GA^2+GB^2+GC^2+2\left(\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}\right)=0$$

$$\Rightarrow 3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)-\left(GA^2+GB^2-2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}\right)$$

$$-\left(GB^2+GC^2-2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}\right)-\left(GC^2+GA^2-2\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}\right)=0$$

$$\Rightarrow 3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)=\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)=AB^2+BC^2+CA^2$$

$$\Rightarrow GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$ (đpcm)

**Câu 23.** Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có $MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$

**Lời giải**

Ta có

$$MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$

$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$

$= 3MG^2 + \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$

**Nhận xét:**

a). Điểm có tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tam giác nhỏ nhất chính là trọng tâm của tam giác.

b). Nếu tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ thì:

$3\left(R^2 - OG^2\right) = GA^2 + GB^2 + GC^2$ (Với $M \equiv O$).

**Câu 24.** Cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$. Chứng minh với điểm $M$ bất kỳ ta luôn có:

$$MG^2 = \frac{1}{3}\left(MA^2+MB^2+MC^2\right) - \frac{1}{9}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$$

**Lời giải**

Theo tính chất trọng tâm, ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

$\Rightarrow 9\overrightarrow{MG}^2 = \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2$

$\Leftrightarrow 9MG^2 = MA^2+MB^2+MC^2+2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow 9MG^2 = MA^2+MB^2+MC^2+\left(MA^2+MB^2-AB^2\right)+\left(MB^2+MC^2-BC^2\right)$

$+\left(MA^2+MC^2-AC^2\right)$

$\Leftrightarrow 9MG^2 = 3\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$

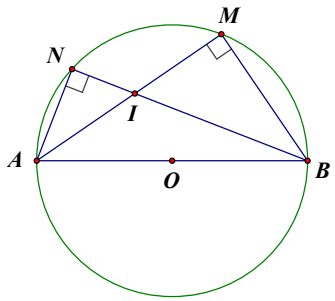
$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\frac{1}{9}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$

**Câu 25.** Cho hai điểm $M, N$ nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi $I$ là giao điểm hai đường thẳng $AM$ và $BN$. Chứng minh:

a). $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$

b). $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = 4R^2$

**Lời giải**




Vì $BM \perp AI$ nên $\overrightarrow{AM}$ là hình chiếu của vec tơ $\overrightarrow{AB}$ trên đường thẳng AI. Vậy ta có:

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$

Chứng minh tương tự $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$

b). Ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IB}$

$= \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4R^2$

**Câu 26.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $O$ và $M$ là một điểm tùy ý. Chứng minh:

a). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

b). $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$

**Lời giải**

a). Vì AC là đường kính, ta có:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}\right)$

$= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - R^2$ (do $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$)

Tương tự: $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = MO^2 - R^2$

Vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

b). $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right) = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$

**Câu 27.** Cho tam giác $ABC$ đều nội tiếp đường tròn tâm $O$ bán kính $R$.

a). Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$ khi và chỉ khi $M$ thuộc $(O)$.

b). Chứng minh với mọi điểm $M$:

$AM^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)$

**Lời giải**

a). Vì tam giác ABC đều nên O cũng là trọng tâm của tam giác, do đó ta có

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{MC}^2 = \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\left(\underbrace{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}_{\vec{0}}\right)$

$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + 3R^2$

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2 \Leftrightarrow 3MO^2 + 3R^2 = 6R^2 \Leftrightarrow MO^2 = R^2 \Leftrightarrow MO = R \Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn (O).

b). $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 - 3\overrightarrow{MC}^2$

$= \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2 - 3\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2$

$= \left(\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2\right) + 2\left(\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2\right) - 3\left(\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2\right)$

$= 2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}\right)$

$= 2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{OM}-3\overrightarrow{MC}\right)$

$= 2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)$ (đpcm).

**Câu 28.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $I, J$ theo thứ tự là trung điểm của $AC, BD$. Chứng minh rằng $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

**Lời giải**

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(AD^2 - AC^2\right) - \left(BD^2 - BC^2\right) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}.2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ (đúng).

**Câu 29.** Cho tam giác $ABC$, biết $AB=c, BC=a, CA=b$, các đường trung tuyến tương ứng $AA', BB', CC'$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Chứng minh rằng với mọi $M$ bất kì, ta có $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=3MG^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{6}$

**Lời giải**

$VT=2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA'}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)$

$=2\left(\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG}\right)+\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MGB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GA'}$

$=3\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{MG}\left(2\overrightarrow{GA'}+2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$

Vì G là trọng tâm nên $2\overrightarrow{GA'}=-\overrightarrow{GA}$

Vậy $VT=3\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{MG}\left(\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}\right)-\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$

Mà:

$\overrightarrow{GA}^2=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\right)^2=\dfrac{4}{9}AA'^2=\dfrac{4}{9}.\left(\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}\right)=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{9}$

$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}=\dfrac{GB^2+GC^2-BC^2}{2}=\dfrac{\dfrac{2a^2+2c^2-b^2}{9}+\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{9}-a^2}{2}$

$=\dfrac{b^2+c^2-5a^2}{18}.$

$\Rightarrow VT=3MG^2-\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{9}+\dfrac{b^2+c^2-5a^2}{18}=3MG^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{6}$

**Câu 30.** Cho tam giác $ABC$, gọi $H$ là trực tâm, $M$ là trung điểm của cạnh $BC$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$

**Lời giải**

$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}\right)\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA}\right)$

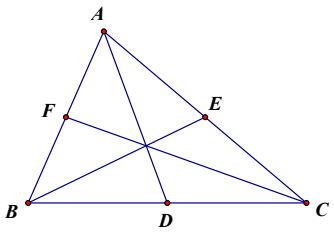
$=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left[\overrightarrow{BH}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)+\overrightarrow{CH}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{CH}\right)=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$

**Câu 31.** Cho tam giác $ABC$, có $AD, BE, CF$ lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}=0$

**Lời giải**




$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}=$

$=\overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{BC}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{CA}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}}_{\vec{0}}\right)+\left(\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}}_{\vec{0}}\right)+\left(\underbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}++\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}}_{\vec{0}}\right)\right]$

$=0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}=0$

## DẠNG 4. CHỨNG MINH SỰ VUÔNG GÓC CỦA HAI VECTƠ, HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Điều kiện $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.

Điều kiện $AB\perp CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

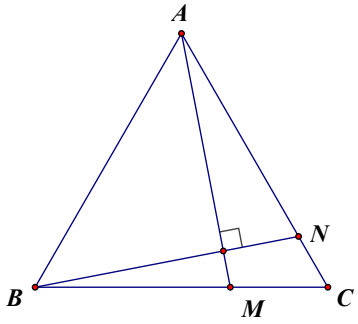
Lưu ý chọn gốc, chọn hệ cơ sở để biểu diễn và chứng minh vuông góc.

**Câu 32.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$. Gọi $M,N$ là các điểm sao cho $3\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{BC}$, $5\overrightarrow{AN}=4\overrightarrow{AC}$.

a). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}$

b). Chứng minh $AM$ vuông góc với $BN$.

**Lời giải**




a).

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\widehat{BAC}=a.a.\cos 60^0=\frac{a^2}{2}$
- $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=CB.CA.\cos\widehat{BCA}=a.a.\cos 60^0=\frac{a^2}{2}$.

b).

- $3\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)=2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
- $5\overrightarrow{AN}=4\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 5\left(\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BA}\right)=4\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$

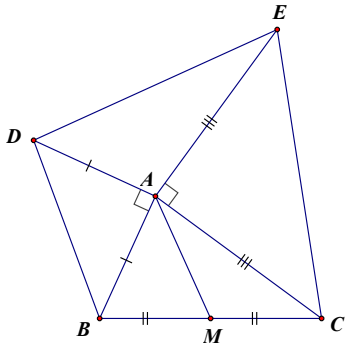
Ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

$=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\frac{8}{15}\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\frac{8}{15}\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2$

$=-\frac{2}{5}.\frac{a^2}{2}+\frac{8}{15}.a^2-\frac{1}{3}a^2=0\Rightarrow\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BN}\Leftrightarrow$ AM vuông góc với BN.

**Câu 33.** Cho tam giác $ABC$ có góc $A$ nhọn. Vẽ bên ngoài tam giác $ABC$ các tam giác vuông cân đỉnh $A$ là $ABD$ và $ACE$. Gọi $M$ trung điểm của đoạn $BC$. Chứng minh rằng $AM$ vuông góc với $DE$.

**Lời giải**



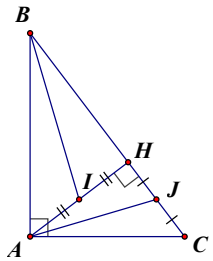

Ta chứng minh $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE}=0$. Thật vậy:

$2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=AB.AE.\cos\left(90^0+A\right)-AC.AD.\cos\left(90^0+A\right)=0$ (do $AB=AD,\ AE=AC$).

**Câu 34.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, đường cao $AH$. Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm của $AH$ và $HC$. Chứng minh $BI\perp AJ$

**Lời giải**




Ta có $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}\right);\ \overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}\right)$

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}\right)$

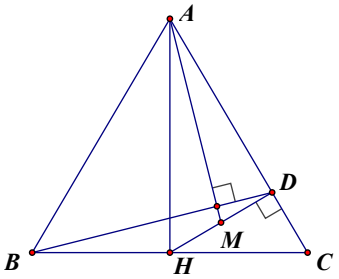
$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BH}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(-\overrightarrow{AH}^2-\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}\right)=\frac{1}{4}\left(-AH^2-HB.HC.\cos\widehat{BHC}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(-AH^2+HB.HC\right)=0$

**Câu 35.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$. Gọi $H$ là trung điểm của đoạn $BC,D$ là hình chiếu vuông góc của $H$ trên $AC,M$ trung điểm của đoạn $HD$. Chứng minh $AM$ vuông góc với $DB$.

**Lời giải**




Vì M trung điểm của HD, nên có $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}$

Ta có $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HD}\right)=\underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}+\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HD}}_{\vec{0}}$

$=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD}+\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD}\right)\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD}+\underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{BH}$

$=\overrightarrow{HD}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}\right)=\overrightarrow{HD}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)=\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{AC}=0$

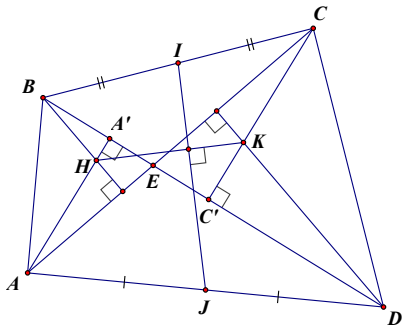
$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BD}$. Vậy AM vuông góc với $BD$.

**Câu 36.** Cho tứ giác $ABCD$ có $E$ là giao của hai đường chéo $AC$ và $BD$. Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm của $BC,AD$ và $H,K$ là trực tâm của các tam giác $ABE,CDE$.

a). Chứng minh $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

b). Chứng minh $HK\perp IJ$

**Lời giải**




a). Hạ $AA',$CC' lần lượt vuông góc BD, ta có:

$\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

b) Tương tự ta cũng có: $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$

suy ra $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BD}$

Thành tử $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{HK}.\left(\dfrac{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC}\right)=0$

Vậy $HK\perp IJ$

**Câu 37.** Cho tứ giác $ABC$ có hai đường chéo $AC$ và $BD$ vuông góc với nhau và cắt nhau tại $M$. Gọi $P$ là trung điểm của cạnh $AD$. Chứng minh $MP$ vuông góc với $BC$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

**Lời giải**

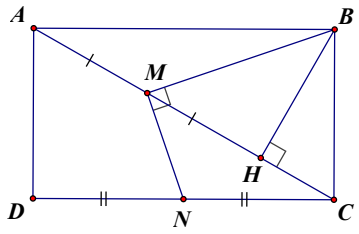
Ta có $2\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)$

$=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\underbrace{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}}_{\vec{0}}-\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$

Do đó $MP\perp BC\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$

**Câu 38.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ $BH \perp AC$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AH$ và $DC$. Chứng minh $BM \perp MN$.

**Lời giải**




Ta có $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}\right)$; $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}\right)$

Nên $\overrightarrow{BM}\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}\right)\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AD} + \underbrace{\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC}}_{\vec{0}}\right)$

Mà $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC} = HA.HC.\cos\widehat{AHC} = HA.HC.\cos 180^0 = -HA.HC = -BH^2$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BH} = BH^2$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{BM}\overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{MN}$.

**Cách 2:**

$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NH}\right) = -\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CH}\right)$

$= -\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CH}\right)$

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH}\right)$

Ta có $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{BM} = \left[-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CH}\right)\right]\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH}\right)$

$= -\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH}\right) + \frac{1}{8}\left(-\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CH}\right)\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH}\right)$

$= -\frac{1}{8}\left(\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} + \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}}_{\vec{0}}\right) + \frac{1}{8}\left(-\overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BH} + 2\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CD} + 2\underbrace{\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BH}}_{\vec{0}}\right)$

$= -\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} + CD^2 + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BH} - 2\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CD}\right)\ (*)$

Ta có:

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BH} = BH^2$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{CD} = \underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -AB^2$

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BH} = BH^2$

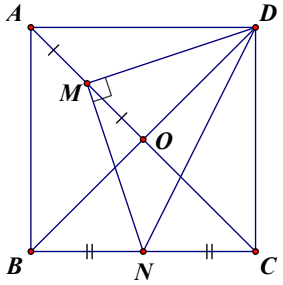
$2\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CH}\left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}\right) = 2\underbrace{\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BH}}_{\vec{0}} + 2\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{HA}$

$= 2\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{HA} = 2CH.AH = 2BH^2$

Do đó $(*) = -\frac{1}{8}\left(BH^2 - AB^2 + CD^2 + BH^2 - 2BH^2\right) = 0$

**Câu 39.** Cho hình vuông $ABCD$, điểm $M$ thuộc đoạn thẳng $AC$ sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi $N$ là trung điểm của đoạn thẳng $BC$. Chứng minh rằng $DMN$ là tam giác vuông cân.

**Lời giải**




Gọi $a > 0$ là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$. Nên có $AC = a\sqrt{2},\ CM = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

Áp dụng định lí hàm số cosin cho các tam giác CMN và CDM:

- $MN^2 = CN^2 + CM^2 - 2CN.CM.\cos\widehat{MCN}$

$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2.\frac{a}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\cos 45^0 = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}\ (1)$

- $MD^2 = CD^2 + CM^2 - 2CD.CM.\cos\widehat{DCM}$

$= a^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2.a.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\cos 45^0 = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow MD = \frac{a\sqrt{10}}{4}\ (2)$

- $DN^2 = CD^2 + CN^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$

Ta có $MN^2 + MD^2 = ND^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow$ DMN vuông tại M $(3)$

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra DMN vuông cân tại M.

**Cách 2:**

Đặt $\overrightarrow{CB} = \vec{a}, \overrightarrow{CD} = \vec{b}$. Vì ABCD là hình vuông nên $\vec{a}.\vec{b} = 0\ \&\ |\vec{a}| = |\vec{b}|$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = -\frac{1}{4}\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right)$

$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \vec{b} - \frac{3}{4}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = -\frac{1}{4}\left(3\vec{a} - \vec{b}\right)$

Ta có $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MD} = \frac{1}{16}\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right)\left(3\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{16}\left(3\vec{a}^2 + 8\vec{a}.\vec{b} - 3\vec{b}^2\right)$

$= \frac{1}{16}\left(3a^2 - 3b^2\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{MD}\ (4).$

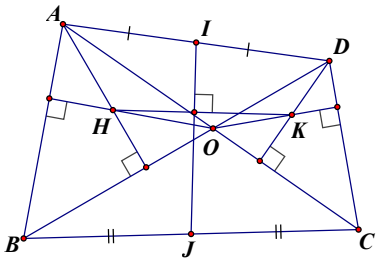
- $\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{16}\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(\vec{a}^2 + 6\vec{a}.\vec{b} + 9\vec{b}^2\right) = \frac{5a^2}{8}\ (5)$

- $\overrightarrow{MD}^2 = \frac{1}{16}\left(3\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(9\vec{a}^2 - 6\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2\right) = \frac{5a^2}{8}\ (6)$

Từ $(4),(5),(6)$ suy ra DMN vuông cân tại M.

**Câu 40.** Cho tứ giác $ABC$D có hai đường chéo cắt nhau tại $O$. Gọi $H, K$ lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và $CDO$. Gọi $I, J$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC$. Chứng minh $HK \perp IJ$.

**Lời giải**




$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}=\underbrace{\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DI}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}}_{\vec{0}}+2\overrightarrow{IJ}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}}{2}$

$2\overrightarrow{IJ}\overrightarrow{HK}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)\left(\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OH}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OH}$

**Câu 41.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $3a$. Lấy $M,N,P$ lần lượt trên 3 cạnh $BC,CA,AB$ sao cho $BM=a,CN=2a,AP=x$. Tìm $x$ để $AM$ vuông góc với $PN$.

**Lời giải**

Chọn hệ vec tơ cơ sở $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{c}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\vec{c}-\dfrac{x}{3a}\vec{b}$

Để $AM\perp PN\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{PN}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{3}\vec{c}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)\left(\dfrac{1}{3}\vec{c}-\dfrac{x}{3a}\vec{b}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\vec{c}+2\vec{b}\right)\left(a\vec{c}-x\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow a.\vec{c}^{\,2}-x\vec{b}.\vec{c}+2a.\vec{b}.\vec{c}-2x.\vec{b}^{\,2}=0$

$\Leftrightarrow a.\vec{c}^{\,2}+\left(2a-x\right)\vec{b}.\vec{c}-2x.\vec{b}^{\,2}=0$

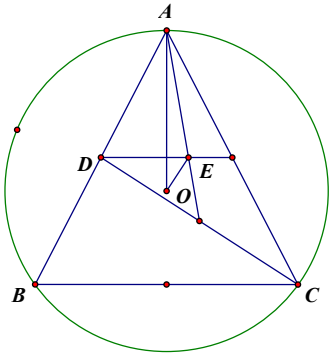
$\Leftrightarrow a.9a^2+\left(2a-x\right).a.a.\cos 60^0-2x.9a^2=0$

$\Leftrightarrow a^2\left(9a+a-\dfrac{x}{2}-2x\right)=0$

$\Leftrightarrow 10a-\dfrac{5}{2}x=0\Leftrightarrow x=4a$

**Câu 42.** Tam giác $ABC$ cân tại $A$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $D$ là trung điểm của $AB,E$ là trọng tâm tam giác $ACD$. Chứng minh $OE\perp CD$

**Lời giải**




Ta có

– $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right)$

– $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}\left[\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OC}\right]$

$=\frac{1}{6}\left(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right)$

Do đó $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{OE}=\frac{1}{12}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right)\left(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right)$

$=\frac{1}{12}\left(3OA^2+OB^2-4OC^2+4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\right)$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{CB}=0$, tức $OE\perp CD$

## DẠNG 5. TẬP HỢP ĐIỂM

**Dạng 1:** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k\ \ (1)$ (A, B là hai điểm cố định).

– $k=0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính $AB$.

– $k\neq 0$ : Gọi I trung điểm của $AB$.

$(1)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=k\Leftrightarrow MI^2-IA^2=k\Leftrightarrow MI^2=k+\frac{AB^2}{4}$

+ Nếu $k+\frac{AB^2}{4}>0\Leftrightarrow k>-\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{k+\frac{AB^2}{4}}$

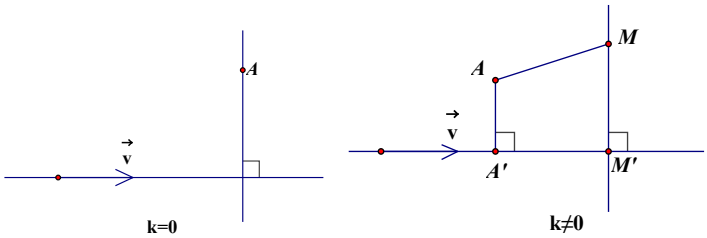
+ Nếu $k+\frac{AB^2}{4}=0\Leftrightarrow k=-\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp điểm M là điểm I.

+ Nếu $k+\frac{AB^2}{4}<0\Leftrightarrow k<-\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là rỗng.

**Dạng 2:** $\overrightarrow{AM}.\vec{v}=k\ \ (2)$ (A cố định, $\vec{v}$ có hướng, độ dài xác định).

$k=0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của $\vec{v}$

$k\neq 0$: Gọi $\overrightarrow{A'M'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ trên giá của vectơ $\vec{v}$; ta có: $(2)\Leftrightarrow\overrightarrow{A'M'}.\vec{v}=k$ (định lí hình chiếu). A' cố định $\Rightarrow M'$ cố định (M' nằm trên giá của $\vec{v}$ định bởi $\overrightarrow{A'M'}=\frac{k}{v}$). Tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vectơ $\vec{v}$ tại M'.




**Dạng 3:** $\alpha MA^2+\beta MB^2=k\ \ (3)$ (A, B cố định $\alpha,\beta$ là hằng số và $\alpha+\beta\neq 0$).

Gọi I là điểm thỏa $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow$ I là điểm cố định.

$(3)\Leftrightarrow\alpha\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\beta\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=k$

$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)MI^2+2\left(\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}\right)\overrightarrow{MI}+\alpha IA^2+\beta IB^2=k$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)MI^2 = k-(\alpha IA^2+\beta IB^2)$

$\Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{k-(\alpha IA^2+\beta IB^2)}{\alpha+\beta}$

Nếu $\dfrac{k-(\alpha IA^2+\beta IB^2)}{\alpha+\beta} > 0 \Leftrightarrow k > \alpha IA^2+\beta IB^2$ : Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{\dfrac{k-(\alpha IA^2+\beta IB^2)}{\alpha+\beta}}$.

Nếu $\dfrac{k-(\alpha IA^2+\beta IB^2)}{\alpha+\beta} = 0 \Leftrightarrow k = \alpha IA^2+\beta IB^2$ : Tập hợp điểm M là điểm I.

Nếu $\dfrac{k-(\alpha IA^2+\beta IB^2)}{\alpha+\beta} < 0 \Leftrightarrow k < \alpha IA^2+\beta IB^2$ : Tập hợp điểm M là rỗng.

Chú ý:

Để giải các bài toán thuộc loại trên, ta nên thu gọn biểu thức đã cho bằng cách sử dụng công thức thu gọn vec tơ dưới đây:

– Cho hai điểm A, B cố định $\alpha,\beta$ là hằng số thỏa $\alpha+\beta \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$.

– Cho ba điểm A, B, C cố định $\alpha,\beta,\chi$ là hằng số thỏa $\alpha+\beta+\chi \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\chi\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\chi\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\chi)\overrightarrow{MI}$.

**Câu 43.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp các điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow AB\perp CM$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua C vuông góc với $AB$.

**Câu 44.** Cho tam giác $ABC$, tìm tập hợp điểm $M$ thỏa:

a). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$

b). $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$

c). $\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)=0$

d). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+9\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=3MB^2+4MC^2$

**Lời giải**

a). Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

Do đó $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.2\overrightarrow{MI}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow MA\perp MI$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp các điểm M là đường là đường tròn đường kính $IA$.

b). $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, nên có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

Do đó $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.3\overrightarrow{MG}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BG.

c). $\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)=0$

Gọi điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)=0\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow I$ là điểm cố định.

Ta có $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=4\overrightarrow{MI}+\underbrace{\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}=4\overrightarrow{MI}$

Gọi điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{JA}+2\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\Rightarrow$ J là điểm cố định.

Ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+2\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)+3\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}\right)$

$=6\overrightarrow{MJ}+\left(\underbrace{\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}}_{\vec{0}}\right)=6\overrightarrow{MJ}$

Do đó $\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)=0\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MI}.6\overrightarrow{MJ}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}\perp\overrightarrow{MJ}$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IJ, với I, J xác định ở trên.

d). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+9\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=3MB^2+4MC^2$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}^2=4\overrightarrow{MB}^2+4\overrightarrow{MC}^2-8\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)+\overrightarrow{MB}.\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\right)=4\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=4\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME}.2\overrightarrow{MF}=4\overrightarrow{CB}^2$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{CB}^2$ (Với E, F lần lượt là trung điểm của BC, AB).

Gọi K trung điểm của EF

$\Leftrightarrow\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{CB}^2\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KE}\right)\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KF}\right)=BC^2$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KE}\right)\left(\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{KE}\right)=BC^2$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MK}^2-\overrightarrow{KE}^2=BC^2$

$\Leftrightarrow MK^2=BC^2+KE^2=BC^2+\frac{1}{4}EF^2=BC^2+\frac{1}{16}AC^2$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm K, bán kính $R=\sqrt{BC^2+\frac{1}{16}AC^2}$

**Câu 45.** Cho tam giác $ABC$, tìm tập hợp những điểm $M$ thỏa mãn điều kiện sau: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CB}=0\Leftrightarrow$ MA vuông góc với $BC$.

Vì A, B, C cố định $\Leftrightarrow$ tập hợp những điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với $BC$.

**Câu 46.** Cho tam giác $ABC$, tìm tập hợp những điểm $M$ sao cho: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=AB^2$

**Lời giải**

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=AB^2 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BC}=AB^2$

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M và G trên BC, thì K cố định và hình chiếu của $\overrightarrow{MG}$ trên BC là $\overrightarrow{HK}$, theo định lí hình chiếu ta có: $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BC}$, suy ra

$(*)\Leftrightarrow 3\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BC}=AB^2$, suy ra H cố định (H thuộc đường thẳng BC định bởi $\overrightarrow{HK}=\frac{AB^2}{3\overline{BC}}$). Vậy tập hợp những điểm M là đường thẳng vuông góc với BC tại H.

**Câu 47.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ có $AB=AC=a, BC=3a$. Tìm tập hợp những điểm $M$ sao cho $2MA^2+3MB^2-MC^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=0$

**Lời giải**

$2MA^2+3MB^2-MC^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=0$

$\Leftrightarrow 2MA^2+4MB^2=MB^2-2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+MC^2$

$\Leftrightarrow 2MA^2+4MB^2=\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)^2=BC^2 \quad (*)$

Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow$ I là điểm cố định và nằm giữa hai điểm $A$ và $B$. Do

$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AI}\right|=\frac{2}{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow AI=\frac{2}{3}AB=\frac{2a}{3}\Rightarrow BI=\frac{a}{3}$

$(*)\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}^2+4\overrightarrow{MB}^2=BC^2\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=BC^2 \quad (*)$

$\Leftrightarrow 6MI^2+2IA^2+4IB^2+4\overrightarrow{MI}\left(\underbrace{\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}\right)=BC^2$

$\Rightarrow 6MI^2=BC^2-\left(2IA^2+4IB^2\right)=9a^2-\left[2.\left(\frac{2a}{3}\right)^2+4.\left(\frac{a}{3}\right)^2\right]=\frac{23a^2}{3}$

$\Rightarrow MI^2=\frac{23a^2}{18}\Leftrightarrow MI=a\sqrt{\frac{23}{18}}$

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $R=a\sqrt{\frac{23}{18}}$.

**Câu 48.** Cho $A,B,C,D$ là bốn điểm cố định cho trước, tìm tập hợp những điểm $M$ sao cho: $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)=0$

**Lời giải**

Gọi I là trung điểm của đoạn AD ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MI}$

Gọi J là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JA}+2\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\Rightarrow J$ là điểm cố định.

Ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+2\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)+3\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}\right)$

$=6\overrightarrow{MJ}+\underbrace{\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}}_{\vec{0}}=6\overrightarrow{MJ}$

Do đó $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)=0\Leftrightarrow 6\overrightarrow{MJ}.2\overrightarrow{MI}=0\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MI}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}\perp\overrightarrow{MI}\Leftrightarrow$ MJ vuông góc với MI.

Do I, J cố định nên tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IJ.

**Câu 49.** Cho đoạn $AB = a > 0$ và số $k$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k$

**Lời giải**

Gọi O là trung điểm của đoạn $AB$.

Ta có $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2$

$= 2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO}\left(\underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}_{\vec{0}}\right) = 2MO^2 + OA^2$

$= 2MO^2 + \dfrac{a^2}{2}$

Do $MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MO^2 + \dfrac{a^2}{2} = k \Leftrightarrow MO^2 = \dfrac{k}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

Nếu $\dfrac{k}{2} - \dfrac{a^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow MO = \sqrt{\dfrac{k}{2} - \dfrac{a^2}{4}}$. Tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{\dfrac{k}{2} - \dfrac{a^2}{4}}$.

Nếu $\dfrac{k}{2} - \dfrac{a^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow MO^2 = 0 \Leftrightarrow MO = 0 \Rightarrow M \equiv O$

Nếu $\dfrac{k}{2} - \dfrac{a^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow MO^2 < 0$ nên tập điểm là rỗng.

**Câu 50.** Cho tam giác $ABC$, tìm tập hợp những điểm $M$ sao cho

a) $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$;

b) $\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$.

**Lời giải**

a) Gọi I là trung điểm đoạn BC. Khi đó $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MI$.

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn đường kính AI.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow CA \perp MG$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua G và vuông góc với $AC$.

**Câu 51.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp những điểm $M$ sao cho:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$;

b) $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) = 0$;

c) $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$;

d) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -MA.MB$.

**Lời giải**

a) Giả sử M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow$ M nằm trên đường tròn đường kính $AB$.

b) Ta có $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC \Leftrightarrow$ M nằm trên đường thẳng qua A và vuông góc với $BC$.

c) Gọi I là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác $ABC$.

Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.3\overrightarrow{MG}=0\Leftrightarrow MI\perp MG\Leftrightarrow$ M nằm trên đường tròn đường kính IG.

d) Giả sử $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-MA.MB\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}\right|\left|\overrightarrow{MB}\right|\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=-MA.MB$

$\Leftrightarrow\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=-1\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=180^0\Leftrightarrow$ M nằm bên trong đoạn thẳng AB

**Câu 52.** Cho hai điểm $A,B$ và $k$ là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm $M$ thoả điều kiện: $MA^2+MB^2=k^2$.

**Lời giải**

Với O là trung điểm $AB$. Ta có:

$MA^2=\overrightarrow{MA}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2=MO^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}+OA^2$

$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2=MO^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}+OB^2$

$\Rightarrow MA^2+MB^2=2MO^2+2\overrightarrow{MO}.\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+OA^2+OB^2$ (1)

Vì O là trung điểm AB nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ và OA = OB, do đó (1) trở thành

$MA^2+MB^2=2MO^2+2OA^2$.

**Gọi tập hợp các điểm M cần tìm là (L). Ta có:**

$MA^2+MB^2=\text{k}^2\Leftrightarrow 2(MO^2+OA^2)=\text{k}^2\Leftrightarrow MO^2=\frac{k^2}{2}-OA^2$ (2)

Đặt $OA^2=\frac{m^2}{2}$. (2) trở thành $MO^2=\frac{1}{2}(k^2-m^2)$. Xảy ra:

i) $\text{k}^2<\text{m}^2$ thì $MO^2<0$ : (L) $=\varnothing$.

ii) $\text{k}^2=\text{m}^2$ thì $\text{MO}^2=0\Leftrightarrow M\equiv O$ : (L) = { O }.

iii) $\text{k}^2>\text{m}^2\Leftrightarrow MO=\sqrt{\frac{1}{2}(k^2-m^2)}$ : (L) là đường tròn tâm O có bán kính là

$R=\sqrt{\frac{1}{2}(k^2-m^2)}$.

**Câu 53.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)=0$

**Lời giải**

Gọi I là trung điểm của BC, D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}=\vec{0}$, E là trung điểm của $DC$. Ta có $\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)=0\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.6\overrightarrow{ME}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ME}=0\Leftrightarrow MI\perp ME$. Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính IE.

**Câu 54.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp điểm $M$ sao cho:

a). $MB^2+MC^2-MA^2=0$

b). $MB^2+MC^2-2MA^2=0$

**Lời giải**

Dựng hình bình hành ABEC, ta có:

$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EA}=\vec{0}$

$\Rightarrow MB^2+MC^2-MA^2=\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2+\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}\right)^2-\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2$

$= ME^2 + 2\overrightarrow{ME}\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA}\right) + EB^2 + EC^2 - EA^2$

Do đó $(1) \Leftrightarrow ME^2 = EA^2 - \left(EB^2 + EC^2\right)$

$\Leftrightarrow ME^2 = \left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}\right)^2 - \left(EB^2 + EC^2\right)$

$\Leftrightarrow ME^2 = 2\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow ME^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow ME^2 = 2AB.AC.\cos A$

Nếu $\widehat{A}$ tù: Tập hợp điểm M là $\varnothing$

Nếu $\widehat{A}$ vuông: Tập hợp điểm M là $\{E\}$

Nếu $\widehat{A}$ nhọn: Tập hợp điểm M là đường tròn $\left(E; \sqrt{2AB.AC.\cos A}\right)$

b).

**Cách 1:** Gọi I trung điểm của BC, J là trung điểm của AI. Ta có $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{BC^2}{2} - 2MA^2 = 0$

$\Leftrightarrow MA^2 - MI^2 = \frac{BC^2}{4}$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường thẳng vuông góc với AI tại điểm H, xác định bởi:

$\overline{JH} = \frac{BC^2}{8\overline{AI}}$

**Cách 2:** Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, G là trọng tâm tam giác $ABC$.

Ta có $(2) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OA}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}\left(3\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OA}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{AG} = 0 \Leftrightarrow MO \perp AG$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường thẳng qua O vuông góc với AG.

**Câu 55.** Cho hai điểm $A, B$ cố định và số $k$ cho trước. Tìm tập hợp những điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right)^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MA}^2 - 2.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2}$ $(*)$

Gọi I trung điểm của AB, khi đó có $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

Thay vào $(*)$ ta được: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k$

$\Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$.

- $k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Rightarrow M$ tập rỗng.
- $k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Rightarrow M \equiv I$

- $k+\dfrac{AB^2}{4}>0\Rightarrow M$ chạy trên đường tròn tâm I bán kính $R=\sqrt{k+\dfrac{AB^2}{4}}$

**Câu 56.** Cho tam giác $ABC$, tìm tập hợp những điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG}=AB^2$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

**Lời giải**

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG}=AB^2\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}.\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MG}\right)=AB^2$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}=AB^2\Leftrightarrow MB.GC.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{GC}}\right)=AB^2\ (*)$

Gọi $B_1$ là hình chiếu vuông góc của B trên $GC$, trên $CB_1$ ta lấy điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{B_1H}=\dfrac{AB^2}{GC}$

$\overrightarrow{B_1H}\uparrow\uparrow\overrightarrow{B_1C}\uparrow\uparrow\overrightarrow{GC}$, vì $B_1$ cố định nên H cố định $\Rightarrow M$ chạy trên đường thẳng CG đi qua H.

**Câu 57.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$.

a). Xác định vị trí điểm $P$ thỏa $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.

b). Chứng minh $C,G,P$ thẳng hàng.

c). Tìm tập hợp diểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$

**Lời giải**

a). Gọi I là trung điểm của AB, theo tính chất đường trung tuyến $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PI}$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}\Leftrightarrow2\overrightarrow{PI}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}\Leftrightarrow2\left(\overrightarrow{CI}-\overrightarrow{CP}\right)-4\overrightarrow{CP}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CI}\ (1)$

b). Theo tính chất trọng tâm ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IG}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{IC}-3\overrightarrow{IG}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IG}\ (2)$

Từ $(1)\&(2)\Rightarrow\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GI}$

c). $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{CI}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{CI}\right|$

$\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{HI}-\overrightarrow{HM}+2\left(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HM}\right)\right|=\left|\overrightarrow{CI}\right|\Leftrightarrow\left|\underbrace{\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{HC}}_{\vec{0}}-3\overrightarrow{HM}\right|=\left|\overrightarrow{CI}\right|$

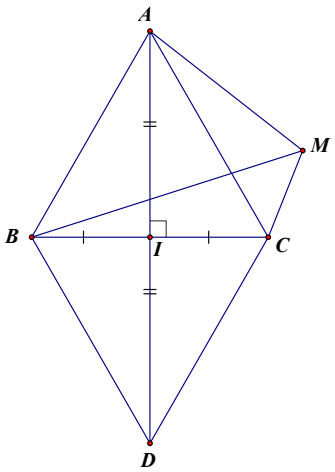
$\Leftrightarrow3\left|\overrightarrow{HM}\right|=\left|\overrightarrow{CI}\right|\Leftrightarrow\Leftrightarrow HM=\dfrac{CI}{3}\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm H bán kính $R=\dfrac{CI}{3}$.

**Câu 58.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$. Gọi $D$ là điểm đối xứng với $A$ qua $BC$ và $M$ là một điểm thay đổi:

a). Chứng minh $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}^2$ không đổi.

b). Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=k$ (k là số thực cho trước).

**Lời giải**




a). Nhận xét: AD và BC có trung điểm I chung.

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IB}^2 = MI^2 - \dfrac{a^2}{4}$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{AM}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD}$

$= -\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right) = -\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 = -MI^2 + \dfrac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2 = \dfrac{a^2}{2}$ không đổi.

b). Theo câu a), ta có:

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = k \Leftrightarrow AM^2 + \dfrac{a^2}{2} = k \Leftrightarrow AM^2 = k - \dfrac{a^2}{2}$

– Nếu $k < \dfrac{a^2}{2}$ thì quỹ tích là tập rỗng.

– Nếu $k = \dfrac{a^2}{2}$ thì quỹ tích chỉ gồm một điểm $A$.

– Nếu $k > \dfrac{a^2}{2}$ thì quỹ tích là đường tròn tâm A, bán kính là $\sqrt{k - \dfrac{a^2}{2}}$.

**Câu 59.** Cho tam giác $ABC$. Tìm quỹ tích điểm $M$ thỏa mãn:

a). $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = k$

b). $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = k$

(với k là một số cho trước).

**Lời giải**

a).

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} - 2\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{CA} + 2\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AM}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AB}\right) + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

(Với D là điểm sao cho $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$).

Do đó điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = k$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = k + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AD} = k + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overline{AM'} = \dfrac{k + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\overline{AD}}$ (Với M' là hình chiếu của M trên AD).

Vậy quỹ tích điểm M là đường thẳng vuông góc với AD tại điểm M' sao cho $\overline{AM'} = \dfrac{k + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\overline{AD}}$.

b).

trước hết ta có

$2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right)^2 = MB^2 + MC^2 - BC^2$ nên

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = \dfrac{MB^2 + MC^2 - BC^2}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \dfrac{3}{2}MB^2 - \dfrac{1}{2}MC^2 - \dfrac{1}{2}BC^2 + CA^2 - AB^2$

Do vậy điểm M thỏa mãn $\dfrac{3}{2}MB^2 - \dfrac{1}{2}MC^2 - \dfrac{1}{2}BC^2 + CA^2 - AB^2 = k$

$\Leftrightarrow 3MB^2 - MC^2 = 2k + BC^2 - 2CA^2 + 2AB^2 \quad (1)$

Gọi G là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + 3GB^2 - GC^2$, mà $GB = \dfrac{BC}{2}, GC = \dfrac{2BC}{2}$ nên

$3MB^2 - MC^2 = 2MG^2 - \dfrac{3}{2}BC^2$

Thành thử điều kiện $(1)$ trở thành: $2MG^2 - \dfrac{3}{2}BC^2 = 2k + BC^2 - 2CA^2 + 2AB^2$

$\Leftrightarrow MG^2 = k + \dfrac{5a^2}{4} - b^2 + c^2$ (với a, b, c là độ dài ba cạnh BC, CA, AB).

– Nếu $k < -\dfrac{5a^2}{4} + b^2 - c^2$ thì quỹ tích là tập rỗng.

– Nếu $k = -\dfrac{5a^2}{4} + b^2 - c^2$ thì quỹ tích chỉ gồm một điểm M.

– Nếu $k > -\dfrac{5a^2}{4} + b^2 - c^2$ thì quỹ tích điểm M là đường tròn tâm G bán kính $\sqrt{k + \dfrac{5a^2}{4} - b^2 + c^2}$.

**Câu 60.** Cho tam giác $ABC$ số $a$. Tìm tập hợp các điểm $M$ sao cho $3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a$.

**Lời giải:**

Chú ý, tổng các hệ số $3 + 1 - 4 = 0$ nên không tồn tại tâm tỉ cự của hệ điểm $A, B, C$.

Gọi $I$ là điểm sao cho $3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{IA} + \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Do đó $I$ cố định và

$3MA^2 + MB^2 = 3\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}.\vec{0}$

$= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2$.

Ta có

$3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a \Leftrightarrow 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 - 4MC^2 = a$

$\Leftrightarrow MC^2 - MI^2 = \dfrac{3IA^2 + IB^2 - a}{4}$.

Đặt $k=\dfrac{3IA^2+IB^2-a}{4}$ không đổi, bài toán đưa về tìm tập hợp các điểm $M$ sao cho $MC^2-MI^2=k.$

Gọi $O$ là trung điểm của $CI$ và $H$ là hình chiếu của $M$ trên $CI$, ta có

$MC^2-MI^2=\overrightarrow{MC}^2-\overrightarrow{MI}^2=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MI}\right)\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MI}\right)=2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{HO}.\overrightarrow{IC}.$

Do đó

$MC^2-MI^2=k\Leftrightarrow 2\overrightarrow{HO}.\overrightarrow{IC}=k\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{CI}=k$

$\Leftrightarrow 2\overline{OH}.\overline{CI}=k\Leftrightarrow 2\overline{OH}.\left(\overline{CI}\right)^2=k.\overline{CI}$

$\Leftrightarrow \overline{OH}=\dfrac{k}{2CI^2}\overline{CI}.$

Nên điểm $H$ cố định. Vậy tập hợp các điểm $M$ là đường thẳng vuông góc với $AB$ tại $H$ xác định ở trên.

**Câu 61.** Cho tam giác $ABC$ và số $k$. Tìm tập hợp các điểm $M$ sao cho $2MA^2+3MB^2+5MC^2=k^2.$

**Lời giải:**

Gọi $I$ là điểm sao cho

$2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow -2\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right)+5\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AI}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}=10\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{10}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Do đó điểm $I$ xác định duy nhất và

$2MA^2+3MB^2+MC^2=2\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2+5\overrightarrow{MC}^2$

$=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+5\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=10MI^2+2IA^2+3IB^2+5IC^2+2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}\right)$

$=10MI^2+2IA^2+3IB^2+5IC^2+2\overrightarrow{MI}.\vec{0}$

$=10MI^2+2IA^2+3IB^2+5IC^2.$

Vậy

$2MA^2+3MB^2+MC^2=k^2\Leftrightarrow 10MI^2+2IA^2+3IB^2+5IC^2=k^2$

$\Leftrightarrow MI^2=\dfrac{1}{10}\left(k^2-2IA^2-3IB^2-5IC^2\right).$

□ Nếu $k^2>2IA^2+3IB^2+5IC^2$ thì tập hợp các điểm $M$ là đường tròn tâm $O$, bán kính $R=\sqrt{\dfrac{1}{10}\left(k^2-2IA^2-3IB^2-5IC^2\right)}.$

□ Nếu $k^2=2IA^2+3IB^2+5IC^2$ thì tập hợp các điểm $M$ gồm chỉ một điểm $O$.

□ Nếu $k^2<2IA^2+3IB^2+5IC^2$ thì tập hợp các điểm $M$ là rỗng.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.$ **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0.$ **C.** $\vec{a}.\vec{b}=-1.$ **D.** $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.$

**Lời giải**

**Chọn A**

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0^0 \longrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

**Câu 2.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc $\alpha$ giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

**A.** $\alpha=180^o$. **B.** $\alpha=0^o$. **C.** $\alpha=90^o$. **D.** $\alpha=45^o$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Mà theo giả thiết $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$, suy ra $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-1\longrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^0$

**Câu 3.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3$. Xác định góc $\alpha$ giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

**A.** $\alpha=30^o$. **B.** $\alpha=45^o$. **C.** $\alpha=60^o$. **D.** $\alpha=120^o$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\longrightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-3}{3.2}=-\dfrac{1}{2}\longrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^0$

**Câu 4.** Cho tam giác đều $ABC$ có cạnh bằng $a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\dfrac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ là góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a.a.\cos 60^0=\dfrac{a^2}{2}$.

**Câu 5.** Cho $M$, $N$, $P$, $Q$ là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

**A.** $\overrightarrow{MN}\left(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}\right)=\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}$. **B.** $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.

**C.** $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{MN}$. **D.** $\left(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ}\right)\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}\right)=MN^2-PQ^2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đáp án A đúng theo tính chất phân phối.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối. **Chọn B**

**Câu 6.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a^2$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45^0$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos 45^0=a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$

**Câu 7.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Gọi $E$ là điểm đối xứng của $D$ qua $C$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}a^2$. **C.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=5a^2$.

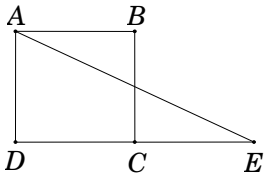
**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $C$ là trung điểm của $DE$ nên $DE=2a$.

Khi đó $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right).\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB}$

$=DE.AB.\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB}\right)=DE.AB.\cos 0^0=2a^2$.




**Câu 8.** Cho tam giác $ABC$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0$ là:

**A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow MA\perp BC$.

Vậy tập hợp các điểm $M$ là đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $BC$.

**Câu 9.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a=2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=-2$.

**C.** $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{AC}=-4$. **D.** $\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BA}=2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta đi tính tích vô hướng ở các phương án. So sánh vế trái với vế phải.

Phương án A: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC\cos 60^\circ=2x\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}$ nên loại **A.**

Phương án B: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=BC.AC\cos 120^\circ=-2$ nên loại **B.**

Phương án C: $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}=4$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=2.2.\cos 120^\circ=-2$ nên chọn **C.**

**Câu 10.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$, $\hat{A}=120^\circ$ và $AB=a$. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$

**A.** $\frac{a^2}{2}$. **B.** $-\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}=BA.CA.\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}a^2$.

**Câu 11.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$. **B.** $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC}$.

**C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương án A: $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ suy ra $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ nên loại **A.**

Phương án B: $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=0$ và $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC}=0$ suy ra $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC}=0$ nên loại **B.**

Phương án C: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos 45^{\circ}=AB.AB\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=AB^2$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=AB.DC.\cos 180^{0}=-AB^2\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ nên chọn **C.**

**Câu 12.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}=a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-a^2$.

**C.** $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{AC}=a^2$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}=0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương án A:Do $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}=DA.CB.cos0^{0}=a^2$ nên loại**A.**

Phương án B:Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=AB.CD.\cos 180^{\circ}=-a^2$ nên chọn **B.**

**Câu 13.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=4a$, đáy nhỏ $CD=2a$, đường cao $AD=3a$; $I$ là trung điểm của $AD$. Khi đó $\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right).\overrightarrow{ID}$ bằng :

**A.** $\frac{9a^2}{2}$. **B.** $-\frac{9a^2}{2}$. **C.** $0$. **D.** $9a^2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right).\overrightarrow{ID}=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{ID}=-\frac{9a^2}{2}$ nên chọn **B.**

**Câu 14.** Tam giác $ABC$ vuông ở $A$ và có góc $\hat{B}=50^{\circ}$. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

**A.** $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right)=130^{\circ}$. **B.** $\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AC}\right)=40^{\circ}$. **C.** $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB}\right)=50^{\circ}$. **D.** $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB}\right)=120^{\circ}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương án A: $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right)=180^{0}-\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB}\right)=130^{\circ}$ nên loại **A.**

Phương án B: $\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CA}\right)=40^{\circ}$ nên loại **B.**

Phương án C: $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC}\right)=50^{\circ}$ nên loại **C.**

Phương án D: $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB}\right)=180^{0}-\left(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right)=140^{\circ}$ nên chọn **D.**

**Câu 15.** Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)$

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đầu tiên ta đi tìm số đo của góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)$ sau đó mới tính $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)$

Vì $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)=180^{\circ}-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)=135^{\circ}\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 16.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$ có $BC = a\sqrt{2}$ .Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

**A.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = a^2$. **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = a$. **C.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

**Câu 17.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $a$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

**A.** $0$. **B.** $a$. **C.** $\dfrac{a^2}{2}$. **D.** $a^2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = a.a.\cos 90^\circ = 0$.

**Câu 18.** Cho $M$ là trung điểm $AB$, tìm biểu thức sai:

**A.** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = -MA.AB$. **B.** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -MA.MB$.

**C.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = AM.AB$. **D.** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA.MB$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương án A: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = MA.AB.\cos 180^\circ = -MA.AB$ nên loại **A.**

Phương án B: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA.MB.\cos 180^\circ = -MA.MB$ nên loại **B.**

Phương án C: $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng suy ra $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = AM.AB.\cos 0^\circ = AM.AB$ nên loại **C.**

Phương án D: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA.MB.\cos 180^\circ = -MA.MB$ nên chọn **D.**

**Câu 19.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh bằng $a$ và $H$ là trung điểm $BC$. Tính $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CA}$

**A.** $\dfrac{3a^2}{4}$. **B.** $\dfrac{-3a^2}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{-3a^2}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CA} = AH.CA.\cos\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a.\cos 150^\circ = -\dfrac{3a^2}{4}$.

**Câu 20.** Biết $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$. Câu nào sau đây đúng

**A.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

**B.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nằm trên hai dường thẳng hợp với nhau một góc $120^\circ$.

**C.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

**D.** A, B, C đều sai.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) = -|\vec{a}|.|\vec{b}| \Leftrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) = -1$ nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng

**Câu 21.** Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a},\vec{b}) = 120^\circ$.Tính $|\vec{a}+\vec{b}|$

**A.** $\sqrt{21}$. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** $21$. **D.** $61$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})} = \sqrt{21}$.

**Câu 22.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $\hat{B}=60^\circ$, $AB=a$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$

**A.** $3a^2$. **B.** $-3a^2$. **C.** $3a$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=AC.BC.\cos 150^\circ=a\sqrt{3}.2a.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3a^2$.

**Câu 23.** Cho 2 vectơ đơn vị $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2$. Hãy xác định $\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)$

**A.** $7$. **B.** $5$. **C.** $-7$. **D.** $-5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2\Leftrightarrow\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=4\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=1$, $\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)=6\vec{a}^2-20\vec{b}^2+7\vec{a}.\vec{b}=-7$.

**Câu 24.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=4a$, đáy nhỏ $CD=2a$, đường cao $AD=3a$. Tính $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}$

**A.** $-9a^2$. **B.** $15a^2$. **C.** $0$. **D.** $9a^2$

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AD}=-9a^2$ nên chọn **A.**

**Câu 25.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $C$ có $AC=9$, $BC=5$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

**A.** $9$. **B.** $81$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn**B

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}=81$ nên chọn **B.**

**Câu 26.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^\circ$. Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

**A.** $\sqrt{7+\sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{7-\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$. **D.** $\sqrt{7+2\sqrt{3}}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b}}=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)}=\sqrt{7-2\sqrt{3}}$.

**Câu 27.** Cho hai điểm $B,C$ phân biệt. Tập hợp những điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}^2$ là :

**A.** Đường tròn đường kính $BC$. **B.** Đường tròn $(B;BC)$.

**C.** Đường tròn $(C;CB)$. **D.** Một đường khác.

**Lời giải**

Chọn A

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}^2\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CM}^2=0\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{MB}=0$.

Tập hợp điểm $M$ là đường tròn đường kính $BC$.

**Câu 28.** Cho ba điểm $A,B,C$ phân biệt. Tập hợp những điểm $M$ mà $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ là :

**A.** Đường tròn đường kính $AB$.

**B.** Đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $BC$.

**C.** Đường thẳng đi qua $B$ và vuông góc với $AC$.

**D.** Đường thẳng đi qua $C$ và vuông góc với $AB$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{CB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB}=0$.

Tập hợp điểm $M$ là đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $BC$.

**Câu 29.** Cho hai điểm $A(2,2)$, $B(5,-2)$. Tìm $M$ trên tia $Ox$ sao cho $\widehat{AMB}=90^{o}$

**A.** $M(1,6)$. **B.** $M(6,0)$. **C.** $M(1,0)$ hay $M(6,0)$. **D.** $M(0,1)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $M(x;0)$, với $x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\overrightarrow{AM}=(x-2;-2),\overrightarrow{BM}=(x-5;2)$. Theo YCBT ta có $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow(x-2)(x-5)-4=x^2-7x+6=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow M(1;0)\\x=6\Rightarrow M(6;0)\end{array}\right.$,nên chọn **C.**

**Câu 30.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$ **B.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$

**C.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$ **D.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$

**Lời giải**

**Chọn C**

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\longrightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right).\frac{1}{4}$ nên thử kiểm tra đáp án C và **D.**

Ta có $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2=4\vec{a}\vec{b}\longrightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$ **Chọn C.**

- A đúng, vì $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b}$
- B đúng, vì $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}.\vec{b}$

$\longrightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$

**Câu 31.** Cho tam giác đều $ABC$ có cạnh bằng $a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\hat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=120^0$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=a.a.\cos120^0=-\frac{a^2}{2}$

**Câu 32.** Cho tam giác đều $ABC$ có cạnh bằng $a$ và chiều cao $AH$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.** $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$ **B.** $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HA})=150^0$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\frac{a^2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=120^0$

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=AC.CB.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=a.a.\cos 120^0=-\dfrac{a^2}{2}$

**Câu 33.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ và có $AB=c,\ AC=b.$ Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}.$

**A.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2$ **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=c^2$ **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2+c^2$ **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2-c^2$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA.BC.\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=BA.BC.\cos\widehat{B}=c.\sqrt{b^2+c^2}.\dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=c^2$

**Cách khác.** Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ suy ra $AB\perp AC\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=AB^2=c^2$

**Câu 34.** Cho ba điểm $A,B,C$ thỏa $AB=2\,\text{cm},\ BC=3\,\text{cm},\ CA=5\,\text{cm}$ Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

**A.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=13$ **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=15$ **C.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=17$ **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=19$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $AB+BC=CA\Rightarrow$ ba điểm $A,\ B,\ C$ thẳng hàng và $AC\longrightarrow I\left(4;-1\right).$ nằm giữa $A,\ C.$

Khi đó $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA.CB.\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=3.5.\cos 0^0=15$

**Cách khác.** Ta có $AB^2=\overrightarrow{AB}^2=\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)^2=CB^2-2\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA}+CA^2$

$\longrightarrow\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA}=\dfrac{1}{2}\left(CB^2+CA^2-AB^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(3^2+5^2-2^2\right)=15$

**Câu 35.** Cho tam giác $ABC$ có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$ Tính $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}$

**A.** $P=b^2-c^2$ **B.** $P=\dfrac{c^2+b^2}{2}$ **C.** $P=\dfrac{c^2+b^2+a^2}{3}$ **D.** $P=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=AC^2-AB^2=b^2-c^2$

**Câu 36.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Tính $P=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)$

**A.** $P=-1$ **B.** $P=3a^2$ **C.** $P=-3a^2$ **D.** $P=2a^2$

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ giả thiết suy ra $AC=a\sqrt{2}$

Ta có $P=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}^2$

$=-CA.CD\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)-AC^2=-a\sqrt{2}.a.\cos 45^0-\left(a\sqrt{2}\right)^2=-3a^2$

**Câu 37.** Cho tam giác $ABC$ có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $BC$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{b^2-c^2}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{c^2+b^2}{2}$.

**C.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{c^2+b^2+a^2}{3}$. **D.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $M$ là trung điểm của $BC$ suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$

Khi đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(AC^2-AB^2\right)=\dfrac{b^2-c^2}{2}$

**Câu 38.** Cho ba điểm $O$, $A$, $B$ không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ là

**A.** tam giác $OAB$ đều. **B.** tam giác $OAB$ cân tại $O$.

**C.** tam giác $OAB$ vuông tại $O$. **D.** tam giác $OAB$ vuông cân tại $O$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2=0\Leftrightarrow OB^2-OA^2=0\Leftrightarrow OB=OA$

**Câu 39.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8$, $AD=5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+0=-AB^2=-64$.

**Câu 40.** Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=8$ và $BD=6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=28$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=32$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $O=AC\cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}+0=\frac{1}{2}AC^2=32$.

**Câu 41.** Cho tam giác $ABC$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$ là:

**A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Gọi $I$ là trung điểm $BC\longrightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.2\overrightarrow{MI}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MI}$. $(*)$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MA\perp MI$ hay $M$ nhìn đoạn $AI$ dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm $M$ là đường tròn đường kính $AI$.

**Câu 42.** Tìm tập các hợp điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$ với $A$, $B$, $C$ là ba đỉnh của tam giác.

**A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC\longrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}.3\overrightarrow{MG}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{MG}$. $(*)$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MB\perp MG$ hay $M$ nhìn đoạn $BG$ dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm $M$ là đường tròn đường kính $BG$.

**Câu 43.** Cho hai điểm $A, B$ cố định có khoảng cách bằng $a$. Tập hợp các điểm $N$ thỏa mãn $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=2a^2$ là:

**A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Gọi $C$ là điểm đối xứng của $A$ qua $B$. Khi đó $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}^2=2a^2$.

Kết hợp với giả thiết, ta có $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CN}=0\Leftrightarrow CN\perp AB$.

Vậy tập hợp các điểm $N$ là đường thẳng qua $C$ và vuông góc với $AB$.

**Câu 44.** Cho hai điểm $A, B$ cố định và $AB=8$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-16$ là:

**A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Gọi $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB\longrightarrow\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)$

$= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}.$

Theo giả thiết, ta có $MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = -16 \Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{AB^2}{4} - 16 = \dfrac{8^2}{4} - 16 = 0 \longrightarrow M \equiv I.$

**Câu 45.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB = a,\ BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = 4a^2$.

**B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -a^2$.

**C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -4a^2$.

**D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -2a^2$.

**Lời giải**

**Cách 1:** Vì tam giác $ABC$ vuông tại $A$ nên $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = 0$ và từ câu a ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -a^2,\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -3a^2$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -4a^2$

**Cách 2:** Từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right) = -4a^2$

**Câu 46.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Tính giá trị của biểu thức $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

**A.** $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 3a^2$.

**B.** $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2a^2$.

**C.** $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$.

**D.** $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 4a^2$.

**Lời giải**

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Do đó $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\widehat{ACB}$

$(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD})$

Mặt khác $\widehat{ACB} = 45^0$ và theo định lý Pitago ta có:

$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Suy ra $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a.a\sqrt{2}\cos 45^0 = a^2$.

**Câu 47.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = 2\sqrt{5},\ CD = BD = 5\sqrt{2},\ AD = 3\sqrt{10},\ AC = 10$. Tìm côsin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DB}$

**A.** $-\dfrac{4}{5\sqrt{2}}$.

**B.** $-\dfrac{3}{5\sqrt{2}}$.

**C.** $\dfrac{4}{5\sqrt{2}}$.

**D.** $\dfrac{3}{5\sqrt{2}}$.

**Lời giải**

Với điểm $O$ bất kỳ ta có:

$2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 2\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}\right) = 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

Mặt khác $2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{BC}^2$

Xây dựng các đẳng thức tương tự thay vào ta tính được

$2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2$

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}\right)=\dfrac{AB^2+CD^2-BC^2-AD^2}{AC.BD}=\dfrac{20+50-20-90}{10.5\sqrt{2}}=-\dfrac{4}{5\sqrt{2}}$.

**Câu 48.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $DA,BC$. Tính góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$ biết $AB=CD=2a,\ MN=a\sqrt{3}$.

**A.** $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=50^0$. **B.** $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=60^0$. **C.** $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=80^0$. **D.** $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=30^0$.

**Lời giải**

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$ suy ra

$MN^2=\dfrac{1}{4}(AB^2+CD^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD})\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=2a^2$.

Do đó $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD}=\dfrac{2a^2}{2a.2a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=60^0$.

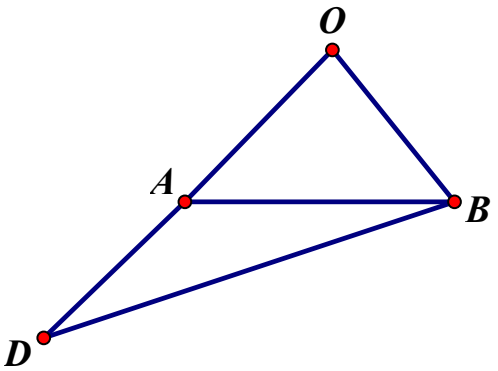
**Câu 49.** Cho tam giác $OAB$ vuông cân tại $O$, cạnh $OA=4$. Tính $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$.

**A.** $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=4$. **B.** $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=2$.

**C.** $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=12$. **D.** $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=4\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $D$ là điểm đối xứng của $O$ qua $A$.

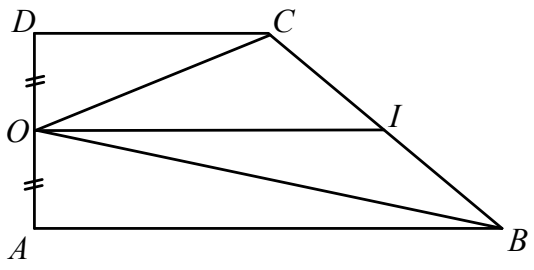
$\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD=\sqrt{OB^2+OD^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$

**Câu 50.** Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại $A$, $D$; $AB\ //\ CD$; $AB=2a$; $AD=DC=a$. $O$ là trung điểm của $AD$. Độ dài vectơ tổng $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ bằng

**A.** $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $a$. **D.** $3a$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $I$ là trung điểm của $BC\ \Rightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OI}\ \Rightarrow\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=2OI$.

Xét hình thang $ABCD$ có $OI$ là đường trung bình $\Rightarrow OI = \dfrac{AB+CD}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right| = 3a$.

**Câu 51.** Cho $ABC$ đều cạnh $2a$ với $M$ là trung điểm $BC$. Khẳng định nào đúng?

**A.** $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AM}\right| = a\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Độ dài đường cao $AM$ trong tam giác đều cạnh $2a$ là: $\dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Vậy khẳng định đúng là $\left|\overrightarrow{AM}\right| = a\sqrt{3}$.

**Câu 52.** Cho tam giác vuông cân $ABC$ với $AB = AC = a$. Khi đó $\left|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ bằng

**A.** $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{5}$. **C.** $5a$. **D.** $2a$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\left(\left|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|\right)^2 = \left(2\overrightarrow{AB}\right)^2 + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = 4AB^2 + AC^2$ ( vì $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ )

$= 4a^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow \left|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{5}$.

**Câu 53.** Cho hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a}-\vec{b}| = 4$. Gọi $\alpha$ là góc giữa hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

**A.** $\alpha = 60^0$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{3}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có

$|\vec{a}-\vec{b}| = 4 \Leftrightarrow \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2 = 16$

$\Leftrightarrow 4^2 - 2.4.3.\cos\alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{3}{8}$

**Câu 54.** Cho tam giác đều $ABC$ có cạnh bằng $4a$.Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

**A.** $8a^2$. **B.** $8a$. **C.** $8\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a$.

**Lời giải**

**Chọn A**

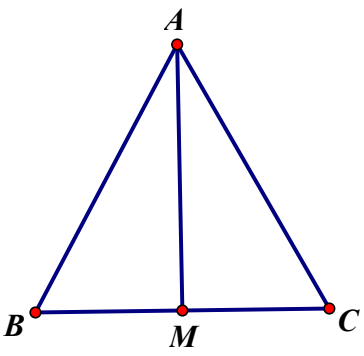
Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 4a.4a.\cos 60° = 4a.4a.\dfrac{1}{2} = 8a^2$.

**Câu 55.** Cho $\Delta ABC$ đều; $AB = 6$ và $M$ là trung điểm của $BC$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}$ bằng

**A.** $-18$. **B.** $27$. **C.** $18$. **D.** $-27$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta có $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)=\widehat{BAM}=30°$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)=-6.\frac{6\sqrt{3}}{2}.\cos 30°=-27$.

**Câu 56.** Cho hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $\left|\vec{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=30^0$. Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

**A.** $\sqrt{11}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{12}$. **D.** $\sqrt{14}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\right)^2=a^2+b^2+2\vec{a}\vec{b}=a^2+b^2+2\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$,

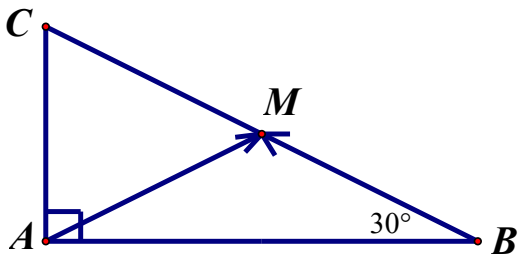
$\Rightarrow\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\right)^2=4+3+2.2.\sqrt{3}.\cos 30^0=13\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{13}$.

**Câu 57.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $\widehat{B}=30°, AC=2$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Tính giá trị của biểu thức $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$.

**A.** $P=-2$. **B.** $P=2\sqrt{3}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Ta có: $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}).\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BM}^2$

$BC=\frac{AC}{\sin 30°}=4;\ AB=AC.\cot 30°=2\sqrt{3};BM=2$

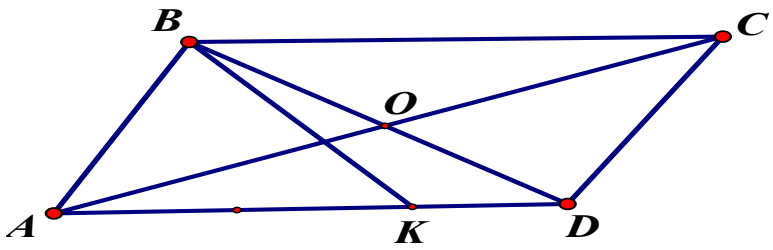
$\Rightarrow\overrightarrow{BM}^2=4;\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}=2\sqrt{3}.2.\cos 150°=-6\ \Rightarrow P=-2\Rightarrow$ Chọn A

**Câu 58.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=2a, AD=3a, \widehat{BAD}=60°$. Điểm $K$ thuộc $AD$ thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$

**A.** $3a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** $0$. **D.** $a^2$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta có $\overrightarrow{BK}=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Khi đó $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=(-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-AB^2+\frac{2}{3}AD^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=-4a^2+\frac{2}{3}.9a^2-\frac{1}{3}2a.3a.cos60°=a^2$

**Câu 59.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=5$, $AC=8$, $BC=7$ thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng:

**A.** -20. **B.** 40. **C.** 10. **D.** 20.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{8^2+5^2-7^2}{2.5.8}=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=5.8.\frac{1}{2}=20$

**Câu 60.** Cho hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right|=2$ và hai véc tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

**A.** $120°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì hai véc tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow 2\vec{a}^2-\vec{b}^2+\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow 2.\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2.\left(\sqrt{2}\right)^2-2^2+\sqrt{2}.2.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90°$.

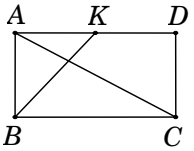
**Câu 61.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi $K$ là trung điểm của cạnh $AD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=0$. **B.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=-a^2\sqrt{2}$. **C.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$. **D.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=2a^2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.




Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\end{cases}$

$\longrightarrow\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=-a^2+0+0+\frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=0.$

$\longrightarrow \cos\widehat{ABC} = \sqrt{1-\sin^2\widehat{ABC}} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$ (vì $\widehat{ABC}$ nhọn).

Mặt khác góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$

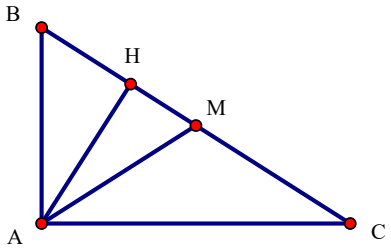
Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = \cos\left(180^0 - \widehat{ABC}\right) = -\cos\widehat{ABC} = -\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

**Câu 62.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, $BC = a\sqrt{3}$, $M$ là trung điểm của $BC$ và có $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. Tính cạnh $AB, AC$.

**A.** $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. **B.** $AB = a, AC = a$.

**C.** $AB = a\sqrt{2}, AC = a$. **D.** $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$.

**Lời giải**




**Chọn A**

Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$.

Có $\overrightarrow{HM}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ lên $BC$.

Suy ra $\overrightarrow{AM}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{BC}$, mà $\overrightarrow{AM}\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$, $BC = a\sqrt{3}$.

Suy ra $\overrightarrow{HM}$ cùng chiều $\overrightarrow{BC}$ và $HM.BC = \frac{a^2}{2}$, $HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Có $BH = BM - HM = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

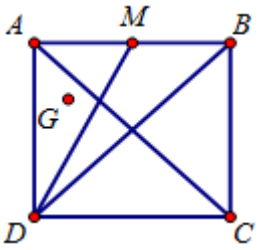
Có $AB^2 = BH.BC = a^2 \Rightarrow AB = a$ và $AC = a\sqrt{2}$.

Vậy $AB = a$ và $AC = a\sqrt{2}$.

**Câu 63.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. $M$ là trung điểm của $AB, G$ là trọng tâm tam giác $ADM$. Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{CG}.\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}\right)$

**A.** $\frac{21a^2}{4}$. **B.** $\frac{11a^2}{4}$. **C.** $\frac{9a^2}{4}$. **D.** $\frac{a^2}{4}$.

**Lời giải**




Vì $G$ là trọng tâm tam giác $ADM$ nên $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$ và

$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{CB}-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\right]=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{CG}=-\overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)=-\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

Ta lại có $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

Nên $\overrightarrow{CG}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)=\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{5}{4}AB^2+4AD^2=\frac{21a^2}{4}$.

**Câu 64.** Cho các véctơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thoả mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{7}$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

**A.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{4}$. **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{2}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{7}\Leftrightarrow 4\vec{a}^2-12\vec{a}.\vec{b}+9\vec{b}^2=7\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{2}$

**Câu 65.** Cho các véctơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc tơ bằng $60^0$. Xác định cosin góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$

**A.** $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=-\frac{1}{2}$. **B.** $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=-\frac{1}{6}$. **C.** $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=-\frac{1}{4}$. **D.** $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=-\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

Có $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|.\cos(\vec{a},\vec{b})=1.1.\cos 60^0=\frac{1}{2}$

$\vec{u}.\vec{v}=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=1-2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

Mặt khác: $\vec{u}^2=\vec{a}^2+4\vec{b}^2+8\vec{a}.\vec{b}=9\Leftrightarrow\left|\vec{u}\right|=3$

$\vec{v}^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}.\vec{b}=1\Leftrightarrow\left|\vec{v}\right|=1$

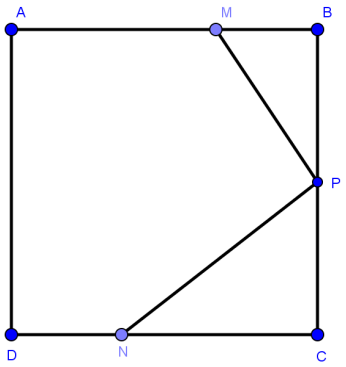
Suy ra $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}=-\frac{1}{6}$

**Câu 66.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh $AB$ lấy điểm $M$ sao cho $BM=1$, trên cạnh $CD$ lấy điểm $N$ sao cho $DN=1$ và $P$ là trung điểm $BC$. Tính $\cos\widehat{MNP}$.

**A.** $\cos\widehat{MNP}=\frac{13}{5\sqrt{10}}$. **B.** $\cos\widehat{MNP}=\frac{13}{4\sqrt{10}}$.

**C.** $\cos\widehat{MNP}=\frac{13}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos\widehat{MNP}=\frac{13}{45\sqrt{10}}$.

**Lời giải**




Ta có $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{NP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP}=\frac{2}{9}+\frac{1}{2}=\frac{13}{18}$

Mặt khác $\left|\overrightarrow{NM}\right|=\sqrt{10},\ \left|\overrightarrow{NP}\right|=\frac{5}{2}\Rightarrow\cos\widehat{MNP}=\frac{13}{45\sqrt{10}}$.

**Câu 67.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$. $M$ là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$, $G$ là trọng tâm tam giác $ADM$. Tính $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}$

**A.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}=\frac{5}{8}$. **B.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}=\frac{3}{8}$. **C.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}=\frac{3}{7}$. **D.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}=\frac{1}{8}$.

**Lời giải**

Ta có $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Vì $G$ là trọng tâm tam giác $ADM$ nên $3\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CM}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{CG}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=-\frac{9}{4}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow\overrightarrow{GC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

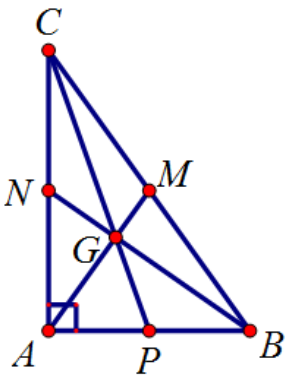
Suy ra $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{8}$.

**Câu 68.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=a,\ BC=2a$ và G là trọng tâm. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

**A.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\frac{a^2}{3}$. **B.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\frac{2a^2}{3}$.

**C.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\frac{4a^2}{3}$. **D.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\frac{5a^2}{3}$.

**Lời giải**




Vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ nên

$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{2}\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$

Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $BC,CA,AB$

Dễ thấy tam giác $ABM$ đều nên $GA^2=\left(\frac{2}{3}AM\right)^2=\frac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có:

$GB^2=\frac{4}{9}BN^2=\frac{4}{9}\left(AB^2+AN^2\right)=\frac{4}{9}\left(a^2+\frac{3a^2}{4}\right)=\frac{7a^2}{9}$

$GC^2=\frac{4}{9}CP^2=\frac{4}{9}\left(AC^2+AP^2\right)=\frac{4}{9}\left(3a^2+\frac{a^2}{4}\right)=\frac{13a^2}{9}$

Suy ra $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9}+\frac{7a^2}{9}+\frac{13a^2}{9}\right)=-\frac{4a^2}{3}$

**Câu 69.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm $M$ nằm trên đoạn thẳng $AC$ sao cho $AM=\frac{AC}{4}$.

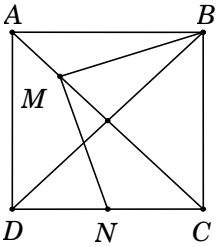
Gọi $N$ là trung điểm của đoạn thẳng $DC$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=-4$. **B.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=0$. **C.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=4$. **D.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=16$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.




- $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Suy ra:

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{16}\left(3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{16}\left(0+3a^2-3a^2-0\right)=0$.

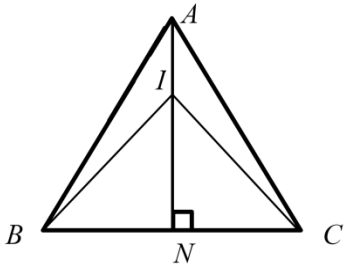
**Câu 70.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh bằng $a$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức

$4MA^2+MB^2+MC^2=\dfrac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn $(C)$ có bán kính $R$. Tính $R$.

**A.** $R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $R=\dfrac{a}{4}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $N$ là trung điểm đoạn $BC$.

Gọi $I$ là điểm thỏa: $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IN}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$, nên điểm $I$ thuộc đoạn thẳng $AN$ sao cho $IN=2IA$.

Khi đó: $IA=\dfrac{1}{3}AN=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, và $IN=\dfrac{2}{3}AN=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$IB^2=IC^2=IN^2+BN^2=\dfrac{a^2}{3}+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{7a^2}{12}$.

Ta có: $4MA^2+MB^2+MC^2=\dfrac{5a^2}{2}\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=\dfrac{5a^2}{2}$.

$\Leftrightarrow 6MI^2+4IA^2+IB^2+IC^2=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow 6MI^2+4.\dfrac{a^2}{12}+2.\dfrac{7a^2}{12}=\dfrac{5a^2}{2}\Leftrightarrow MI=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

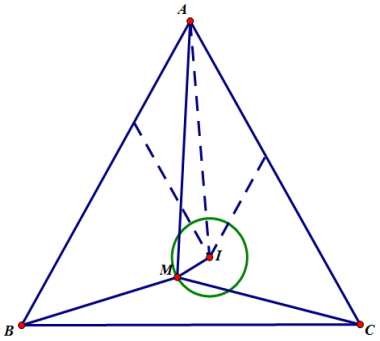
**Câu 71.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $18\,\text{cm}$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là

**A.** Tập rỗng. **B.** Đường tròn cố định có bán kính $R=2\,\text{cm}$.

**C.** Đường tròn cố định có bán kính $R=3\,\text{cm}$. **D.** Một đường thẳng.

**Lời giải**

**Chọn B**




Ta có $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=18$.

Dựng điểm $I$ thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AC}$.

Khi đó: $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow 9\left|\overrightarrow{MI}\right|=18\Leftrightarrow IM=2$.

Do đó tập hợp các điểm $M$ là đường tròn cố định có bán kính $R=2\,\text{cm}$.

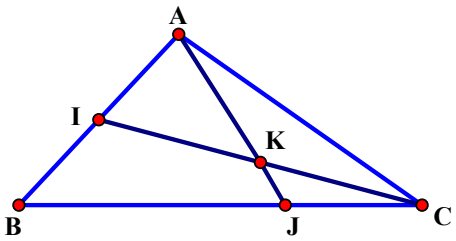
**Câu 72.** Cho tam giác $ABC$, điểm $J$ thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$, $I$ là trung điểm của cạnh $AB$,điểm $K$ thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

Một điểm $M$ thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $\left(3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0$.

Tập hợp điểm $M$ là đường nào trong các đường sau.

**A.** Đường tròn đường kính $IJ$.
**B.** Đường tròn đường kính $IK$.
**C.** Đường tròn đường kính $JK$.
**D.** Đường trung trực đoạn $JK$.

**Lời giải**




**Chọn C**

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm $J$ thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}}{4}+\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$ nên $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{AK}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lại có $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Suy ra $J$ là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng $BC$ xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{MK}+3\overrightarrow{KJ}=3\overrightarrow{MJ}$.

Như vậy $\left(3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0\Leftrightarrow\left(3\overrightarrow{MJ}\right).\left(4\overrightarrow{MK}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MK}=0$.

Từ đó suy ra điểm $M$ thuộc đường tròn đường kính $JK$.

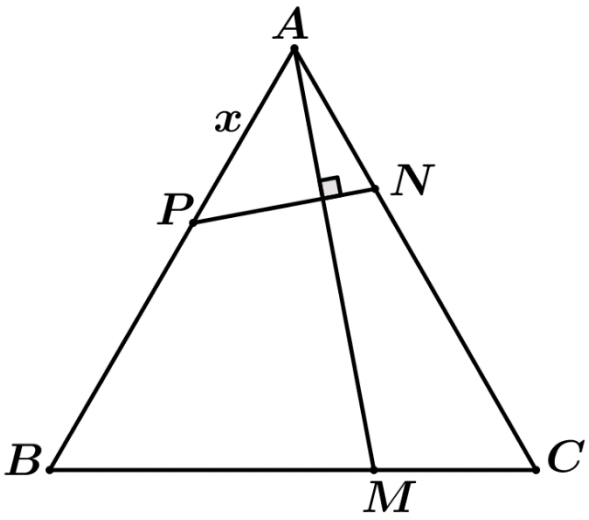
Vì $J$, $K$ là các điểm cố định nên điểm $M$ luôn thuộc một đường tròn đường kính $JK$ là đường tròn cố định (đpcm).

**Câu 73.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$. Lấy $M,N,P$ lần lượt nằm trên ba cạnh $BC,CA,AB$ sao cho $BM=2MC, AC=3AN, AP=x, x>0$. Tìm $x$ để $AM$ vuông góc với $NP$.

**A.** $x=\frac{5a}{12}$.
**B.** $x=\frac{a}{2}$.
**C.** $x=\frac{4a}{5}$.
**D.** $x=\frac{7a}{12}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Đặt $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\vec{b}\\ \overrightarrow{AC}=\vec{c}\end{cases}$, ta có $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=a$ và $\vec{b}.\vec{c}=a.a.cos60^0=\dfrac{a^2}{2}$

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{b}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\dfrac{2}{3}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\vec{b}+2\vec{c}\right)$

$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\dfrac{x}{a}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{x}{a}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3a}\left(-3x\vec{b}+a\vec{c}\right)$

Theo yêu cầu bài toán ta có $AM\perp PN\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{PN}=0\Leftrightarrow\left(\vec{b}+2\vec{c}\right)\left(-3x\vec{b}+a\vec{c}\right)=0$

$\Leftrightarrow-3x\vec{b}^2+a\left(\vec{b}.\vec{c}\right)-6x\left(\vec{b}.\vec{c}\right)+2a\vec{c}^2=0\Leftrightarrow-3xa^2+\dfrac{a^3}{2}-3xa^2+2a^3=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{5a}{12}.$

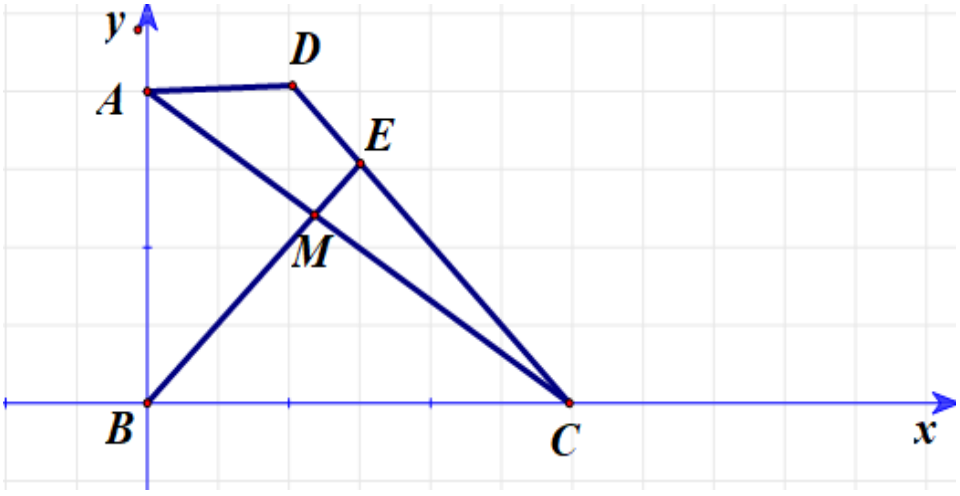
**Câu 74.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB=2a$, các cạnh đáy $AD=a$ và $BC=3a$. Gọi $M$ là điểm trên đoạn $AC$ sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}$. Tìm $k$ để $BM\perp CD$

**A.** $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{3}{7}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm $B$, điểm $A$ thuộc trục $Oy$ và điểm $C$ thuộc trục $Ox$.




Theo bài ra ta có $B(0;0)$, $A(0;2)$, $C(3;0)$, $D(1;2)$

Khi đó $\overrightarrow{AC}=(3;-2)$. Phương trình tham số của đthẳng $AC$ là $\begin{cases}x=3t\\ y=2-2t\end{cases}$

Gọi $M \in AC \Rightarrow M(3t;2-2t)$. Ta có $\overrightarrow{BM} = (3t;2-2t)$ và $\overrightarrow{DC} = (2;-2)$.

Để $BM \perp DC$ thì $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5};\frac{6}{5}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{6}{5};\frac{-4}{5}\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{52}}{5}$ và $\overrightarrow{AC} = (3;-2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$.

Vì $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}$ cùng chiều $\Rightarrow k = \frac{AM}{AC} = \frac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{5}$.

# Bài 1. QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN. SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có $m$ cách thực hiện, hành động thứ hai có $n$ cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m+n$ cách hoàn thành.

***Ví dụ 1.*** Bạn Phương có 7 quyển sách Tiếng Anh và 8 quyển sách Văn học, các quyển sách là khác nhau. Hỏi bạn Phương có bao nhiêu cách chọn một quyển sách để đọc?

***Giải***

Việc chọn một quyển sách để đọc là thực hiện một trong hai hành động sau:

Chọn một quyển sách tiếng anh: có 7 cách chọn.

Chọn một quyển sách Văn học: có 8 cách chọn.

Vậy có $7+8=15$ cách chọn một quyển sách để đọc.

Nhận xét: Tương tự, ta cũng có quy tắc sau:

Một công việc được hoàn thành bởi một trong ba hành động. Nếu hành động thứ nhất có $m$ cách thực hiện, hành động thứ hai có $n$ cách thực hiện, hành động thứ ba có $p$ cách thực hiện (các cách thực hiện của ba hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m+n+p$ cách hoàn thành.

### II. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có $m$ cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có $n$ cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m.n$ cách hoàn thành.

***Ví dụ 2.*** Trong Hoạt động 1, nếu gia đình bạn Liên muốn chọn một địa điểm tham quan trong chương trình 1 , sau đó đi tham quan tiếp một địa điểm trong chương trình 2 thì có bao nhiêu cách chọn hai địa điểm ở hai chương trình khác nhau để tham quan?

***Giải***

Việc chọn hai địa điểm ở hai chương trình khác nhau để tham quan là thực hiện hai hành động liên tiếp: chọn một địa điểm trong chương trình 1 , sau đó chọn một địa điểm trong chương trình 2 .

Có 4 cách chọn địa điểm tham quan trong chương trình 1 .

Với mỗi cách chọn một địa điểm tham quan trong chương trình 1 sẽ có 7 cách chọn địa điểm tham quan trong chương trình 2 .

Vậy có tất cả $4.7=28$ cách chọn hai địa điểm tham quan ở hai chương trình khác nhau.

Nhận xét: Tương tự, ta cũng có quy tắc sau:

Một công việc được hoàn thành bởi ba hành động liên tiếp: Nếu hành động thứ nhất có $m$ cách thực hiện; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có $n$ cách thực hiện

hành động thứ hai; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất và mỗi cách thực hiện hành động thứ hai có $p$ cách thực hiện hành động thứ ba thì công việc đó có $m\cdot n\cdot p$ cách hoàn thành.

***Ví dụ 3.*** Trong kinh doanh nhà hàng, combo là một hình thức gọi món theo thực đơn được kết hợp từ nhiều món ăn hoặc đồ uống. Nếu nhà hàng có 5 món rau, 4 món cá và 3 món thịt thì có bao nhiêu cách tạo ra một combo? Biết mỗi combo có đầy đủ 1 món rau, 1 món cá và 1 món thịt.

***Giải***

Để tạo một combo ta thực hiện ba hành động liên tiếp: chọn 1 món rau, chọn 1 món cá và chọn 1 món thịt.

Chọn 1 món rau: Có 5 cách chọn.

Chọn 1 món cá: Có 4 cách chọn.

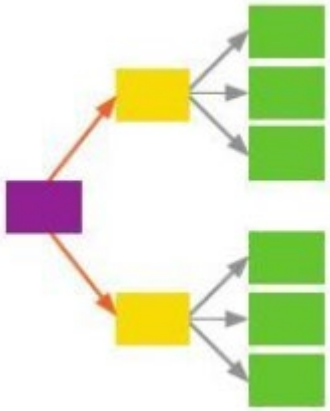
Chọn 1 món thịt: Có 3 cách chọn.

Vậy có $5.4.3=60$ cách tạo ra một combo

### III. Sơ đồ hình cây.

Nhận xét

- Sơ đồ hình cây là sơ đồ bắt đầu tại một nút duy nhất với các nhánh toả ra các nút bổ sung.



- Ta có thể sử dụng sơ đồ hình cây để đếm số cách hoàn thành một công việc khi công việc đó đòi hỏi những hành động liên tiếp.

***Ví dụ 4.*** Bạn Hương có 3 chiếc quần khác màu lần lượt là xám, đen, nâu nhạt và 4 chiếc áo sơ mi cũng khác màu lần lượt là hồng, vàng, xanh, tím. Hãy vẽ sơ đồ hình cây biểu thị số cách chọn:

a) 1 chiếc quần;

b) 1 chiếc áo sơ mi;

c) 1 bộ quần áo.

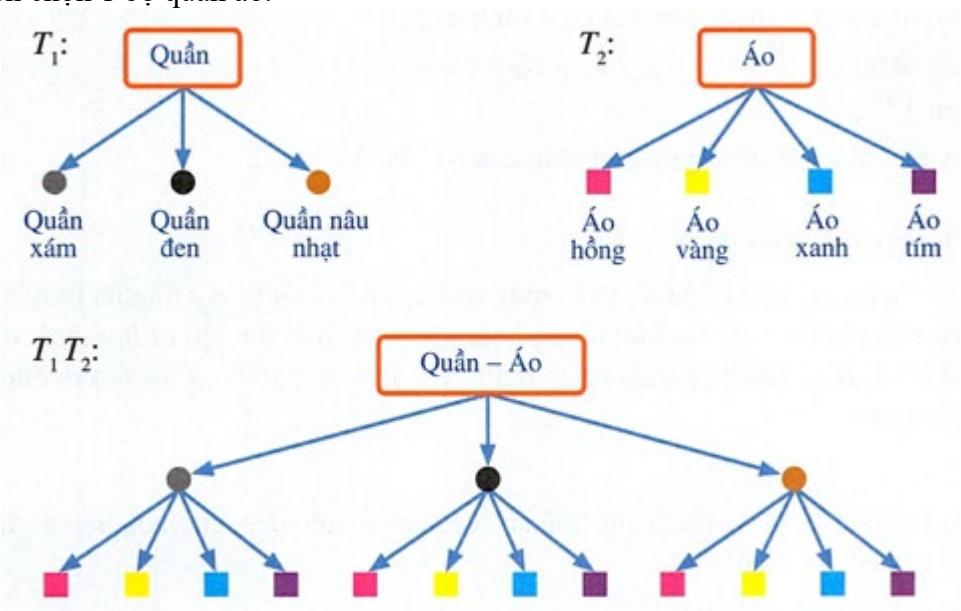
***Giải***

Các sơ đồ hình cây $T_1, T_2, T_1T_2$ trong hình sau lần lượt:

a) Biểu thị số cách chọn 1 chiếc quần;

b) Biểu thị số cách chọn 1 chiếc áo sơ mi;

c) Biểu thị số cách chọn 1 bộ quần áo.




## IV. Vận dụng trong bài toán đếm

### 1. Vận dụng trong giải toán

***Ví dụ 5.*** Cho 10 điểm phân biệt, hỏi lập được bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$? Biết rằng hai đầu mút của mỗi vectơ là hai trong 10 điểm đã cho.

***Giải***

Việc lập vectơ là thực hiện hai hành động liên tiếp: chọn điểm đầu và chọn điểm cuối.

Chọn điểm đầu: có 10 cách chọn. Chọn điểm cuối: có 9 cách chọn.

Vậy có $10 \cdot 9 = 90$ (vectơ).

***Ví dụ 6.*** Phân tích số 10125 ra thừa số nguyên tố rồi tìm số ước nguyên dương của nó.

***Giải***

Ta có: $10125 = 3^4 \cdot 5^3$. Một ước nguyên dương của 10125 thì có dạng $3^m \cdot 5^n$, trong đó $m, n$ là hai số tự nhiên sao cho $0 \le m \le 4, 0 \le n \le 3$.

Như vậy, để tạo ra một ước nguyên dương của 10125 ta làm như sau:

- Chọn số tự nhiên $m$ mà $0 \le m \le 4$ có 5 cách chọn.
- Chọn số tự nhiên $n$ mà $0 \le n \le 3$ có 4 cách chọn.
- Lấy tích $3^m \cdot 5^n$.

Vì vậy, số ước nguyên dương của 10125 là: $5.4 = 20$ (số).

**2. Vận dụng trong thực tiễn**

***Ví dụ 7.*** Từ ba mảng dữ liệu $A, B, C$, máy tính tạo nên một thông tin đưa ra màn hình cho người dùng bằng cách lần lượt lấy một dữ liệu từ $A$, một dữ liệu từ $B$ và một dữ liệu từ $C$. Giả sử $A, B, C$ lần lượt chứa $m, n, p$ dữ liệu. Hỏi máy tính có thể tạo ra được bao nhiêu thông tin?

***Giải***

Việc máy tính tạo ra thông tin là thực hiện ba cách chọn liên tiếp: chọn dữ liệu từ $A$, chọn dữ liệu từ $B$ và chọn dữ liệu từ $C$.

Có $m$ cách chọn một dữ liệu từ $A$.

Có $n$ cách chọn một dữ liệu từ $B$.

Có $p$ cách chọn một dữ liệu từ $C$.

Vậy số thông tin máy tính có thể tạo được là: $m \cdot n \cdot p$.

***Ví dụ 8.*** Gia đình bạn Quân đặt mật mã của chiếc khoá cổng là một dãy gồm bốn chữ số. Hỏi có bao nhiêu cách đặt mật mã nếu:



a) Các chữ số có thể giống nhau?

b) Các chữ số phải đôi một khác nhau?

***Giải***

Gọi dãy số mật mã là $abcd$.

a) Việc chọn mật mã là chọn liên tiếp các chữ số $a, b, c, d$, trong đó các chữ số có thể giống nhau.

Chọn $a$ : Có 10 cách chọn. Chọn b: Có 10 cách chọn.

Chọn $c$ : Có 10 cách chọn. Chọn d: Có 10 cách chọn.

Vậy có $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ cách đặt mật mã.

b) Việc chọn mật mã là chọn liên tiếp các chữ số $a, b, c, d$, trong đó các chữ số đôi một khác nhau.

Chọn a: Có 10 cách chọn.

Chọn $b$ : Có 9 cách chọn (khác chữ số $a$ đã chọn).

Chọn $c$ : Có 8 cách chọn (khác hai chữ số $a, b$ đã chọn).

Chọn $d$ : Có 7 cách chọn (khác ba chữ số $a, b, c$ đã chọn).

Vậy có $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ cách đặt mật mã.

***Ví dụ 9.*** Cho kiểu gen AaBbDdEE.

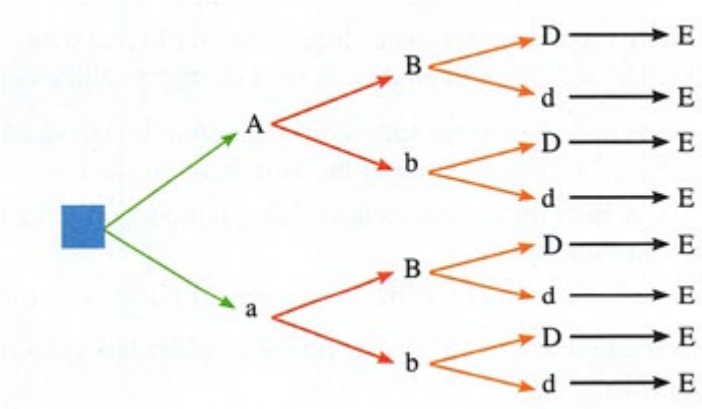
a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử.

b) Từ đó, tính số loại giao tử của kiểu gen AaBbDdEE.

Biết quá trình giảm phân tạo giao tử bình thường, không xảy ra đột biến.

***Giải***

a) Sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử:




b) Từ sơ đồ hình cây, ta có 8 loại giao tử của kiểu gen $AaBbDdEE$

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Một đồng xu có hai mặt sấp và ngửa (Kí hiệu $S$ và $N$). Tung đồng xu ba lần liên tiếp và ghi lại kết quả. Tìm số kết quả có thể xảy ra, theo hai cách sau đây:




Mặt sấp Mặt ngửa

a) Vẽ sơ đồ hình cây.
b) Sử dụng quy tắc nhân.

**Câu 2.** Một bạn muốn đi từ tỉnh $A$ đến tỉnh $B$ trong một ngày nhất định. Biết rằng trong ngày hôm đó từ tỉnh $A$ đến tỉnh $B$ có $14$ chuyến ô tô, $5$ chuyến tàu. Hỏi bạn đó có bao nhiêu sự lựa chọn để đi từ $A$ đến $B$?

**Câu 3.** Một cửa hàng có $10$ bó hoa ly, $14$ bó hoa huệ, $6$ bó hoa lan. Một bạn muốn mua một bó hoa tại cửa hàng này. Hỏi bạn đó có bao nhiêu sự lựa chọn?

**Câu 4.** Một lớp có $25$ học sinh nam và $15$ học sinh nữ. Hỏi giáo viên có bao nhiêu sự lựa chọn ra một bạn trong lớp để làm lớp trưởng?

**Câu 5.** Một nhà hàng có $3$ loại rượu, $4$ loại bia và $5$ loại nước uống. Một thực khách muốn lựa chọn một loại đồ uống thì có bao nhiêu cách chọn?

**Câu 6.** Một giáo viên muốn ra đề kiểm tra $45$ phút môn Toán phần lượng giác. Trong ngân hàng câu hỏi có $5$ chủ đề, mỗi chủ đề có $4$ câu. Để ra đề kiểm tra $45p$ gồm $5$ câu và bao gồm tất cả các chủ đề thì giáo viên có bao nhiêu cách ra đề?

**Câu 7.** Có $3$ bạn nữ và $3$ bạn nam. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các bạn đó vào một hàng dọc sao cho nam nữ đứng xen kẽ nhau?

**Câu 8.** Một lớp có $7$ học sinh giỏi Toán, $5$ học sinh giỏi Văn, $6$ học sinh giỏi Lịch Sử. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra $1$ nhóm:

a/ Gồm $1$ học sinh giỏi bất kỳ?

b/ Gồm $3$ học sinh giỏi trong đó có tất cả học sinh giỏi của cả $3$ môn?

c/ Gồm $2$ học sinh giỏi khác nhau?

**Câu 9.** Cho các số tự nhiên: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

a) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số?
b) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?
c) Hỏi lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau?

**Câu 10.** Cho các số tự nhiên sau : $1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9$.

a) Hỏi lập được bao số lẻ có 3 chữ số khác nhau?
b) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau chia hết
c) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số mà có mặt chữ số 2

**Câu 11.** Cho các số tự nhiên : $0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9$.

a) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?
b) Hỏi lập được bao nhiêu số lẻ có 4 chữ số khác nhau?

**Câu 12.** Cho các số tự nhiên $0,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9$.

a) Hỏi lập được bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số khác nhau?
b) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 3?
c) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên lớn hơn 601?

**Câu 13.** Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ có thể lập được mấy số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

**A.** 9. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 1.

**Câu 2.** Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau. Để chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt thì số cách chọn khác nhau là:

**A.** 13. **B.** 72. **C.** 12. **D.** 30.

**Câu 3.** Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau là:

**A.** 480. **B.** 24. **C.** 48. **D.** 60.

**Câu 4.** Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

**A.** 45. **B.** 280. **C.** 325. **D.** 605.

**Câu 5.** Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp $11A$ hoặc lớp $12B$. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp $11A$ có 31 học sinh tiên tiến và lớp $12B$ có 22 học sinh tiên tiến?

**A.** 31. **B.** 9. **C.** 53. **D.** 682.

**Câu 6.** Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số 7, 8, 9. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

**A.** 27. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 3.

**Câu 7.** Giả sử từ tỉnh $A$ đến tỉnh $B$ có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa, tàu thủy hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa, 3 chuyến tàu thủy và 2 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh $A$ đến tỉnh $B$?

**A.** 20. **B.** 300. **C.** 18. **D.** 15.

**Câu 8.** Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hóa. Mỗi thí sinh được quyền chọn một đề tài. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?

**A.** 20. **B.** 3360. **C.** 31. **D.** 30.

**Câu 9.** Một tổ có 5 học sinh nữ và 6 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên một học sinh của tổ đó đi trực nhật.

**A.** 20. **B.** 11. **C.** 30. **D.** 10.

**Câu 10.** Có bao nhiêu số tự nhiên có chín chữ số mà các chữ số của nó viết theo thứ tự giảm dần:

**A.** 5 . **B.** 15 . **C.** 55 . **D.** 10 .

**Câu 11.** Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và 4 kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

**A.** 4. **B.** 7. **C.** 12. **D.** 16.

**Câu 12.** Một người có 4 cái quần, 6 cái áo, 3 chiếc cà vạt. Để chọn mỗi thứ một món thì có bao nhiêu cách chọn bộ "quần-áo-cà vạt" khác nhau?

**A.** 13. **B.** 72. **C.** 12. **D.** 30.

**Câu 13.** Một thùng trong đó có 12 hộp đựng bút màu đỏ, 18 hộp đựng bút màu xanh. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một hộp màu đỏ, một hộp màu xanh là?

**A.** 13. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 216.

**Câu 14.** Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một cây bút chì, một cây bút bi và một cuốn tập.

**A.** 24. **B.** 48. **C.** 480. **D.** 60.

**Câu 15.** Một bó hoa có 5 hoa hồng trắng, 6 hoa hồng đỏ và 7 hoa hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy ba bông hoa có đủ cả ba màu.

**A.** 240. **B.** 210. **C.** 18. **D.** 120.

**Câu 16.** Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm một món ăn trong năm món, một loại quả tráng miệng trong năm loại quả tráng miệng và một nước uống trong ba loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn.

**A.** 25. **B.** 75. **C.** 100. **D.** 15.

**Câu 17.** Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

**A.** 910000. **B.** 91000. **C.** 910. **D.** 625.

**Câu 18.** Một đội học sinh giỏi của trường THPT, gồm 5 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 3 học sinh khối 10. Số cách chọn ba học sinh trong đó mỗi khối có một em?

**A.** 12. **B.** 220. **C.** 60. **D.** 3.

**Câu 19.** Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tổng số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc phát biểu ý kiến sao cho hai người đó không là vợ chồng?

**A.** 100. **B.** 91. **C.** 10. **D.** 90.

**Câu 20.** An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường?

**A.** 6. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 24.

**Câu 21.** Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần?




**A.** 9. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 24.

**Câu 22.** Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?




**A.** 1296. **B.** 784. **C.** 576. **D.** 324.

**Câu 23.** Có 10 cái bút khác nhau và 8 quyển sách giáo khoa khác nhau. Một bạn học sinh cần chọn 1 cái bút và 1 quyển sách. Hỏi bạn học sinh đó có bao nhiêu cách chọn?

**A.** 80. **B.** 60. **C.** 90. **D.** 70.

**Câu 24.** Một hộp đựng 5 bi đỏ và 4 bi xanh. Có bao nhiêu cách lấy 2 bi có đủ cả 2 màu?

**A.** 20. **B.** 16. **C.** 9. **D.** 36.

**Câu 25.** Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món ăn, 1 loại quả tráng miệng trong 4 loại quả tráng miệng và 1 loại nước uống trong 3 loại nước uống. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thực đơn?

**A.** 75. **B.** 12. **C.** 60. **D.** 3.

**Câu 26.** Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà cả hai chữ số đều lẻ?

**A.** 25. **B.** 20. **C.** 50. **D.** 10.

**Câu 27.** Số các số tự nhiên chẵn, gồm bốn chữ số khác nhau đôi một và không tận cùng bằng 0 là :

**A.** 504. **B.** 1792. **C.** 953088. **D.** 2296.

**Câu 28.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau?

**A.** 1000. **B.** 720. **C.** 729. **D.** 648.

**Câu 29.** Có 10 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 10, 7 quả cầu xanh được đánh số từ 1 đến 7 và 8 quả cầu vàng được đánh số từ 1 đến 8. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu khác màu và khác số.

**A.** 392 **B.** 1023 **C.** 3014 **D.** 391

**Câu 30.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ sáu chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6?

**A.** 120. **B.** 216. **C.** 256. **D.** 20.

**Câu 31.** Cho các số $1,5,6,7$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số với các chữ số khác nhau:

**A.** 12. **B.** 24. **C.** 64. **D.** 256.

**Câu 32.** Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình (thăm một bạn không quá một lần)?

**A.** 3991680. **B.** 12!. **C.** 35831808. **D.** 7!.

**Câu 33.** Nhãn mỗi chiếc ghế trong hội trường gồm hai phần: phần đầu là một chữ cái (trong bảng 24 chữ cái tiếng Việt), phần thứ hai là một số nguyên dương nhỏ hơn 26. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau?

**A.** 624. **B.** 48. **C.** 600. **D.**
$(a,b,c,d) \in A = \{1,\ 5,\ 6,\ 7\}$.

**Câu 34.** Biển số xe máy của tỉnh $A$ (nếu không kể mã số tỉnh) có 6 kí tự, trong đó kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 26 cái tiếng Anh), kí tự ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập $\{1;2;...;9\}$, mỗi kí tự ở bốn vị trí tiếp theo là một chữ số thuộc tập $\{0;1;2;...;9\}$. Hỏi nếu chỉ dùng một mã số tỉnh thì tỉnh $A$ có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu biển số xe máy khác nhau?

**A.** 2340000. **B.** 234000. **C.** 75. **D.** 2600000.

**Câu 35.** Số 253125000 có bao nhiêu ước số tự nhiên?

**A.** 160. **B.** 240. **C.** 180. **D.** 120.

**Câu 36.** Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số (không nhất thiết phải khác nhau)?

**A.** 324. **B.** 256. **C.** 248. **D.** 124.

**Câu 37.** Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số đều chẵn?

**A.** 99. **B.** 50. **C.** 20. **D.** 10.

**Câu 38.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn 100?

**A.** 36. **B.** 62. **C.** 54. **D.** 42.

**Câu 39.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?

**A.** 154. **B.** 145. **C.** 144. **D.** 155.

**Câu 40.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

**A.** 156. **B.** 144. **C.** 96. **D.** 134.

**Câu 41.** Từ các chữ số $0$, $1$, $2$, $3$, $4$, $5$, $6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có ba chữ số?

**A.** $210$. **B.** $105$. **C.** $168$. **D.** $145$.

**Câu 42.** Có bao nhiêu sỗ chẵn gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó chữ số đầu tiên là chữ số lẻ? Câu trả lời nào đúng?

**A.** 40000 số. **B.** 38000 số. **C.** 44000 số. **D.** 42000 số.

**Câu 43.** Cho các chữ số 1, 2, 3,., 9. Từ các số đó có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau và không vượt quá 2011.

**A.** 168 **B.** 170 **C.** 164 **D.** 172

**Câu 44.** Từ các số $1,2,3,4,5,6,7$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và là số lẻ

**A.** 360 **B.** 343 **C.** 480 **D.** 347

**Câu 45.** Có bao nhiêu cách xếp 4 người A,B,C,D lên 3 toa tàu, biết mỗi toa có thể chứa 4 người.

**A.** 81 **B.** 68 **C.** 42 **D.** 98

**Câu 46.** Có 3 nam và 3 nữ cần xếp ngồi vào một hàng ghế. Hỏi có mấy cách xếp sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ?

**A.** 72 **B.** 74 **C.** 76 **D.** 78

**Câu 47.** Có bao nhiêu cách sắp xếp $3$ nữ sinh, $3$ nam sinh thành một hàng dọc sao cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ:

**A.** $6$. **B.** $72$. **C.** $720$. **D.** $144$.

**Câu 48.** Số điện thoại ở Huyện Củ Chi có $7$ chữ số và bắt đầu bởi $3$ chữ số đầu tiên là $790$. Hỏi ở Huyện Củ Chi có tối đa bao nhiêu máy điện thoại:

**A.** $1000$. **B.** $100000$. **C.** $10000$. **D.** $1000000$.

**Câu 49.** Trong một giải thi đấu bóng đá có 20 đội tham gia với thể thức thi đấu vòng tròn. Cứ hai đội thì gặp nhau đúng một lần. Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu xảy ra.

**A.** 190 **B.** 182 **C.** 280 **D.** 194

**Câu 50.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn $100$?

**A.** 36. **B.** 62. **C.** 54. **D.** 42.

**Câu 51.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số **lẻ** gồm 4 chữ số khác nhau?

**A.** 154. **B.** 145. **C.** 144. **D.** 155.

**Câu 52.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số **chẵn** gồm 4 chữ số khác nhau?

**A.** 156. **B.** 144. **C.** 96. **D.** 134.

**Câu 53.** Cho tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ từ tập $A$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có $5$ chữ số và chia hết cho $2$?

**A.** $8232$. **B.** $1230$. **C.** $1260$. **D.** $2880$.

**Câu 54.** Có $6$ học sinh và $3$ thầy giáo $A$, $B$, $C$. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ $9$ người đó ngồi trên một hàng ngang có $9$ chỗ sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh.

**A.** $4320$. **B.** $90$. **C.** $43200$. **D.** $720$.

**Câu 55.** Một liên đoàn bóng đá có $10$ đội, mỗi đội phải đá $4$ trận với mỗi đội khác, $2$ trận ở sân nhà và $2$ trận ở sân khách. Số trận đấu được sắp xếp là:

**A.** 180 **B.** 160. **C.** 90. **D.** 45.

**Câu 56.** Từ tập có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao chữ số đầu chẵn chữ số đứng cuối lẻ.

**A.** 11523 **B.** 11520 **C.** 11346 **D.** 22311

**Câu 57.** Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn $100$ chia hết cho $2$ và $3$.

**A.** 12. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 20.

**Câu 58.** Cho tập $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao các số này lẻ không chia hết cho 5.

**A.** 15120 **B.** 23523 **C.** 16862 **D.** 23145

**Câu 59.** Cho tập $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số và chia hết cho 5.

**A.** 660 **B.** 432 **C.** 679 **D.** 523

**Câu 60.** Số các số tự nhiên gồm $5$ chữ số chia hết cho $10$ là:

**A.** 3260. **B.** 3168. **C.** 9000. **D.** 12070.

**Câu 61.** Cho tập hợp số: $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.Hỏi có thể thành lập bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

**A.** 114 **B.** 144 **C.** 146 **D.** 148

**Câu 62.** Một hộp chứa $16$ quả cầu gồm sáu quả cầu xanh đánh số từ $1$ đến $6$, năm quả cầu đỏ đánh số từ $1$ đến $5$ và năm quả cầu vàng đánh số từ $1$ đến $5$. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra từ hộp đó $3$ quả cầu vừa khác màu vừa khác số.

**A.** 72. **B.** 150. **C.** 60. **D.** 80.

**Câu 63.** Một bàn dài có 2 dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm có 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường $A$ và 6 học sinh trường $B$ vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi sao cho bất kì 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường nhau.

**A.** 1036800 **B.** 234780 **C.** 146800 **D.** 2223500

**Câu 64.** Có bao nhiêu cách sắp xếp $3$ nữ sinh, $3$ nam sinh thành một hàng dọc sao cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẻ:

**A.** 6. **B.** 72. **C.** 720. **D.** 144.

**Câu 65.** Từ các chữ số $0$, $1$, $2$, $3$, $5$, $8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số $3$.

**A.** 36 số. **B.** 108 số. **C.** 228 số. **D.** 144 số.

**Câu 66.** Từ các chữ số $0$, $2$, $3$, $5$, $6$, $8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm $6$ chữ số đôi một khác nhau trong đó hai chữ số $0$ và $5$ không đứng cạnh nhau.

**A.** 384 **B.** 120 **C.** 216 **D.** 600

**Câu 67.** Một phiếu điều tra về đề tự học của học sinh gồm $10$ câu hỏi trắc nghiệm, mỗi câu có bốn lựa chọn để trả lời. Khi tiến hành điều tra, phiếu thu lại được coi là hợp lệ nếu người được hỏi trả lời đủ $10$ câu hỏi, mỗi câu chỉ chọn một phương án. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu phiếu hợp lệ để trong số đó luôn có ít nhất hai phiếu trả lời giống hệt nhau cả $10$ câu hỏi?

**A.** 2097152. **B.** 10001. **C.** 1048577. **D.** 1048576.

**Câu 68.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $5,6,7,8,9$. Tính tổng tất cả các số thuộc tập $S$.

**A.** 9333420. **B.** 46666200. **C.** 9333240. **D.** 46666240.

**Câu 69.** Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có $6$ chữ số khác nhau và trong mỗi số đó tổng của ba chữ số đầu lớn hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị

**A.** $32$. **B.** $72$. **C.** $36$. **D.** $24$.

**Câu 70.** Tô màu các cạnh của hình vuông $ABCD$ bởi $6$ màu khác nhau sao cho mỗi cạnh được tô bởi một màu và hai cạnh kề nhau thì tô bởi hai màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô?

**A.** $360$. **B.** $480$. **C.** $600$. **D.** $630$.

**Câu 71.** Cho $5$ chữ số $1, 2, 3, 4, 6$. Lập các số tự nhiên có $3$ chữ số đôi một khác nhau từ $5$ chữ số đã cho. Tính tổng của các số lập được.

**A.** 12321 **B.** 21312 **C.** 12312 **D.** 21321

**Câu 72.** Có bao nhiêu số có $10$ chữ số được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3$ sao cho bất kì $2$ chữ số nào đứng cạnh nhau cũng hơn kém nhau $1$ đơn vị?

**A.** 32 **B.** 16 **C.** 80 **D.** 64

**Câu 73.** Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho $9$ mà mỗi số $2011$ chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số $9$.

**A.** $\dfrac{9^{2011}-2019.9^{2010}+8}{9}$ **B.** $\dfrac{9^{2011}-2.9^{2010}+8}{9}$ **C.** $\dfrac{9^{2011}-9^{2010}+8}{9}$ **D.** $\dfrac{9^{2011}-19.9^{2010}+8}{9}$

**Câu 74.** Từ các số $1,2,3,4,5,6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có 6 chữ số đồng thời thỏa điều kiện: sáu số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 số sau một đơn vị.

**A.** 104 **B.** 106 **C.** 108 **D.** 112

# Bài 1. QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN. SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có $m$ cách thực hiện, hành động thứ hai có $n$ cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m+n$ cách hoàn thành.

***Ví dụ 1.*** Bạn Phương có 7 quyển sách Tiếng Anh và 8 quyển sách Văn học, các quyển sách là khác nhau. Hỏi bạn Phương có bao nhiêu cách chọn một quyển sách để đọc?

***Giải***

Việc chọn một quyển sách để đọc là thực hiện một trong hai hành động sau:

Chọn một quyển sách tiếng anh: có 7 cách chọn.

Chọn một quyển sách Văn học: có 8 cách chọn.

Vậy có $7+8=15$ cách chọn một quyển sách để đọc.

Nhận xét: Tương tự, ta cũng có quy tắc sau:

Một công việc được hoàn thành bởi một trong ba hành động. Nếu hành động thứ nhất có $m$ cách thực hiện, hành động thứ hai có $n$ cách thực hiện, hành động thứ ba có $p$ cách thực hiện (các cách thực hiện của ba hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m+n+p$ cách hoàn thành.

### II. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có $m$ cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có $n$ cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m.n$ cách hoàn thành.

***Ví dụ 2.*** Trong Hoạt động 1, nếu gia đình bạn Liên muốn chọn một địa điểm tham quan trong chương trình 1 , sau đó đi tham quan tiếp một địa điểm trong chương trình 2 thì có bao nhiêu cách chọn hai địa điểm ở hai chương trình khác nhau để tham quan?

***Giải***

Việc chọn hai địa điểm ở hai chương trình khác nhau để tham quan là thực hiện hai hành động liên tiếp: chọn một địa điểm trong chương trình 1 , sau đó chọn một địa điểm trong chương trình 2 .

Có 4 cách chọn địa điểm tham quan trong chương trình 1 .

Với mỗi cách chọn một địa điểm tham quan trong chương trình 1 sẽ có 7 cách chọn địa điểm tham quan trong chương trình 2 .

Vậy có tất cả $4.7=28$ cách chọn hai địa điểm tham quan ở hai chương trình khác nhau.

Nhận xét: Tương tự, ta cũng có quy tắc sau:

Một công việc được hoàn thành bởi ba hành động liên tiếp: Nếu hành động thứ nhất có $m$ cách thực hiện; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có $n$ cách thực hiện

hành động thứ hai; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất và mỗi cách thực hiện hành động thứ hai có $p$ cách thực hiện hành động thứ ba thì công việc đó có $m\cdot n\cdot p$ cách hoàn thành.

***Ví dụ 3.*** Trong kinh doanh nhà hàng, combo là một hình thức gọi món theo thực đơn được kết hợp từ nhiều món ăn hoặc đồ uống. Nếu nhà hàng có 5 món rau, 4 món cá và 3 món thịt thì có bao nhiêu cách tạo ra một combo? Biết mỗi combo có đầy đủ 1 món rau, 1 món cá và 1 món thịt.

***Giải***

Để tạo một combo ta thực hiện ba hành động liên tiếp: chọn 1 món rau, chọn 1 món cá và chọn 1 món thịt.

Chọn 1 món rau: Có 5 cách chọn.

Chọn 1 món cá: Có 4 cách chọn.

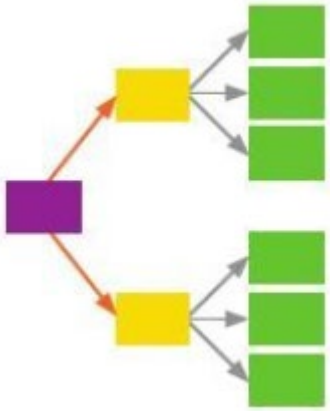
Chọn 1 món thịt: Có 3 cách chọn.

Vậy có $5.4.3=60$ cách tạo ra một combo

### III. Sơ đồ hình cây.

Nhận xét

- Sơ đồ hình cây là sơ đồ bắt đầu tại một nút duy nhất với các nhánh toả ra các nút bổ sung.



- Ta có thể sử dụng sơ đồ hình cây để đếm số cách hoàn thành một công việc khi công việc đó đòi hỏi những hành động liên tiếp.

***Ví dụ 4.*** Bạn Hương có 3 chiếc quần khác màu lần lượt là xám, đen, nâu nhạt và 4 chiếc áo sơ mi cũng khác màu lần lượt là hồng, vàng, xanh, tím. Hãy vẽ sơ đồ hình cây biểu thị số cách chọn:

a) 1 chiếc quần;

b) 1 chiếc áo sơ mi;

c) 1 bộ quần áo.

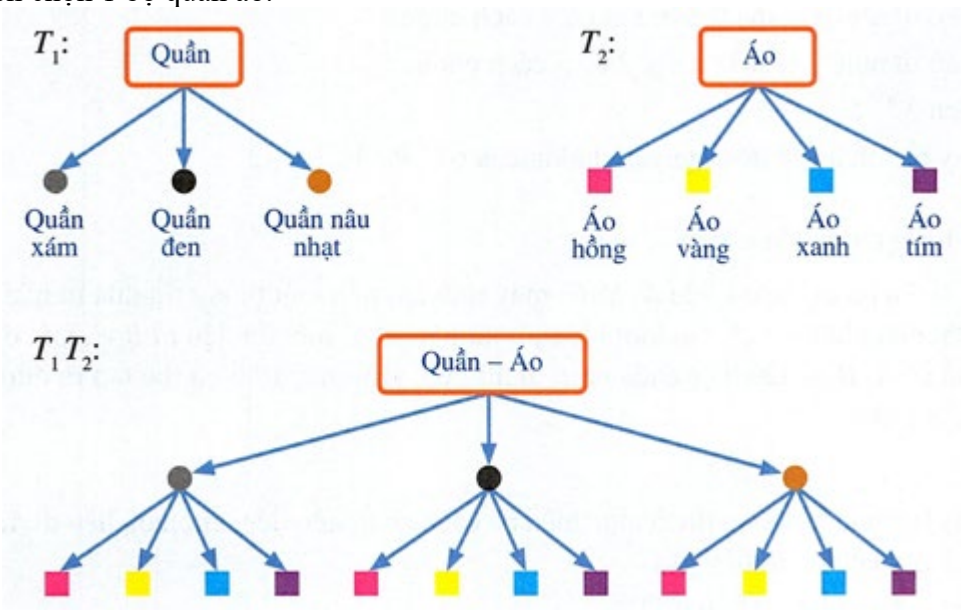
***Giải***

Các sơ đồ hình cây $T_1, T_2, T_1T_2$ trong hình sau lần lượt:

a) Biểu thị số cách chọn 1 chiếc quần;

b) Biểu thị số cách chọn 1 chiếc áo sơ mi;

c) Biểu thị số cách chọn 1 bộ quần áo.




## IV. Vận dụng trong bài toán đếm

### 1. Vận dụng trong giải toán

***Ví dụ 5.*** Cho 10 điểm phân biệt, hỏi lập được bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$? Biết rằng hai đầu mút của mỗi vectơ là hai trong 10 điểm đã cho.

***Giải***

Việc lập vectơ là thực hiện hai hành động liên tiếp: chọn điểm đầu và chọn điểm cuối.

Chọn điểm đầu: có 10 cách chọn. Chọn điểm cuối: có 9 cách chọn.

Vậy có $10 \cdot 9 = 90$ (vectơ).

***Ví dụ 6.*** Phân tích số 10125 ra thừa số nguyên tố rồi tìm số ước nguyên dương của nó.

***Giải***

Ta có: $10125 = 3^4 \cdot 5^3$. Một ước nguyên dương của 10125 thì có dạng $3^m \cdot 5^n$, trong đó $m, n$ là hai số tự nhiên sao cho $0 \le m \le 4, 0 \le n \le 3$.

Như vậy, để tạo ra một ước nguyên dương của 10125 ta làm như sau:

- Chọn số tự nhiên $m$ mà $0 \le m \le 4$ có 5 cách chọn.
- Chọn số tự nhiên $n$ mà $0 \le n \le 3$ có 4 cách chọn.
- Lấy tích $3^m \cdot 5^n$.

Vì vậy, số ước nguyên dương của 10125 là: $5.4 = 20$ (số).

**2. Vận dụng trong thực tiễn**

***Ví dụ 7.*** Từ ba mảng dữ liệu $A, B, C$, máy tính tạo nên một thông tin đưa ra màn hình cho người dùng bằng cách lần lượt lấy một dữ liệu từ $A$, một dữ liệu từ $B$ và một dữ liệu từ $C$. Giả sử $A, B, C$ lần lượt chứa $m, n, p$ dữ liệu. Hỏi máy tính có thể tạo ra được bao nhiêu thông tin?

***Giải***

Việc máy tính tạo ra thông tin là thực hiện ba cách chọn liên tiếp: chọn dữ liệu từ $A$, chọn dữ liệu từ $B$ và chọn dữ liệu từ $C$.

Có $m$ cách chọn một dữ liệu từ $A$.

Có $n$ cách chọn một dữ liệu từ $B$.

Có $p$ cách chọn một dữ liệu từ $C$.

Vậy số thông tin máy tính có thể tạo được là: $m \cdot n \cdot p$.

***Ví dụ 8.*** Gia đình bạn Quân đặt mật mã của chiếc khoá cổng là một dãy gồm bốn chữ số. Hỏi có bao nhiêu cách đặt mật mã nếu:



a) Các chữ số có thể giống nhau?

b) Các chữ số phải đôi một khác nhau?

***Giải***

Gọi dãy số mật mã là $abcd$.

a) Việc chọn mật mã là chọn liên tiếp các chữ số $a, b, c, d$, trong đó các chữ số có thể giống nhau.

Chọn $a$ : Có 10 cách chọn. Chọn b: Có 10 cách chọn.

Chọn $c$ : Có 10 cách chọn. Chọn d: Có 10 cách chọn.

Vậy có $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ cách đặt mật mã.

b) Việc chọn mật mã là chọn liên tiếp các chữ số $a, b, c, d$, trong đó các chữ số đôi một khác nhau.

Chọn a: Có 10 cách chọn.

Chọn $b$ : Có 9 cách chọn (khác chữ số $a$ đã chọn).

Chọn $c$ : Có 8 cách chọn (khác hai chữ số $a, b$ đã chọn).

Chọn $d$ : Có 7 cách chọn (khác ba chữ số $a, b, c$ đã chọn).

Vậy có $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ cách đặt mật mã.

***Ví dụ 9.*** Cho kiểu gen AaBbDdEE.

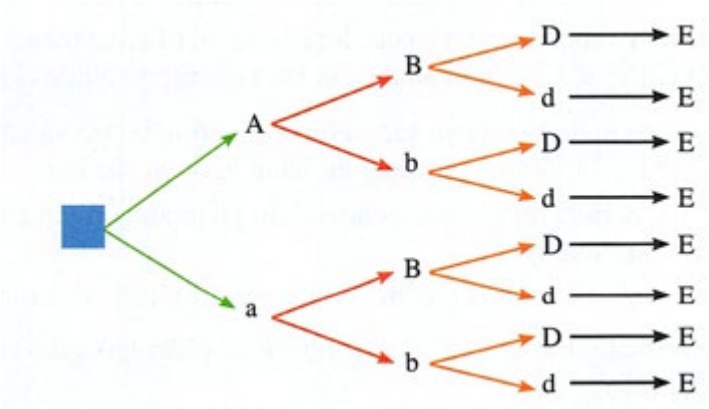
a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử.

b) Từ đó, tính số loại giao tử của kiểu gen AaBbDdEE.

Biết quá trình giảm phân tạo giao tử bình thường, không xảy ra đột biến.

***Giải***

a) Sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử:




b) Từ sơ đồ hình cây, ta có 8 loại giao tử của kiểu gen $AaBbDdEE$

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Một đồng xu có hai mặt sấp và ngửa (Kí hiệu $S$ và $N$). Tung đồng xu ba lần liên tiếp và ghi lại kết quả. Tìm số kết quả có thể xảy ra, theo hai cách sau đây:

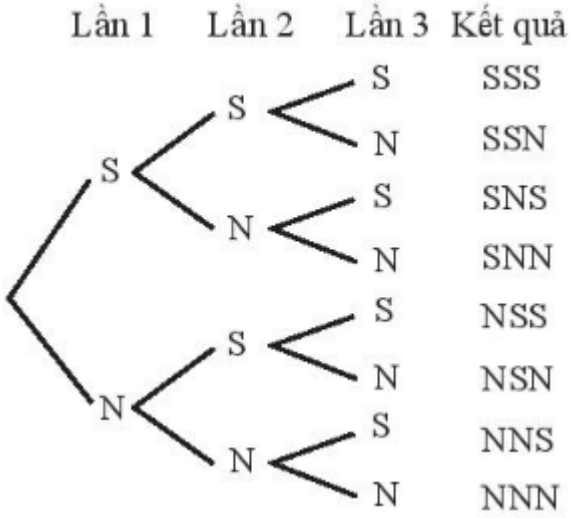



Mặt sấp Mặt ngửa

a) Vẽ sơ đồ hình cây.
b) Sử dụng quy tắc nhân.

**Lời giải**

a) Vẽ sơ đồ hình cây như Hình .




Từ sơ đồ này, ta thấy có 8 kết quả có thể xảy ra.
b) Có thể coi việc tung đồng xu ba lần liên tiếp là một công việc gồm ba công đoạn, mỗi công đoạn tương ứng với một lần tung đồng xu. Mỗi lần tung có hai kết quả, là $S$ hoặc $N$. Do đó, theo quy tắc nhân, số kết quả của việc tung đồng xu ba lần liên tiếp là:
$2.2.2 = 8$ (kết quả).

**Câu 2.** Một bạn muốn đi từ tỉnh $A$ đến tỉnh $B$ trong một ngày nhất định. Biết rằng trong ngày hôm đó từ tỉnh $A$ đến tỉnh $B$ có $14$ chuyến ô tô, $5$ chuyến tàu. Hỏi bạn đó có bao nhiêu sự lựa chọn để đi từ $A$ đến $B$?

**Lời giải.**

Bạn đó đi từ tỉnh $A$ đến tỉnh $B$ bằng tàu có: $14$ cách.
Bạn đó đi từ tỉnh $A$ đến tỉnh $B$ bằng ô tô có: $5$ cách.
Vậy bạn đó có: $14+5=19$ sự lựa chọn.

**Câu 3.** Một cửa hàng có 10 bó hoa ly, 14 bó hoa huệ, 6 bó hoa lan. Một bạn muốn mua một bó hoa tại cửa hàng này. Hỏi bạn đó có bao nhiêu sự lựa chọn?

**Lời giải.**

Bạn đó mua hoa ly có: 10 sự lựa chọn.
Bạn đó mua hoa huệ có: 14 sự lựa chọn.
Bạn đó mua hoa lan có: 6 sự lựa chọn.
Vậy bạn đó có tất cả: $10+14+6=30$ sự lựa chọn để mua một bó hoa.

**Câu 4.** Một lớp có 25 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Hỏi giáo viên có bao nhiêu sự lựa chọn ra một bạn trong lớp để làm lớp trưởng?

**Lời giải.**

Nếu chọn một bạn nam làm lớp trưởng có: 25 sự lựa chọn.
Nếu chọn một bạn nữ làm lớp trưởng có: 15 sự lựa chọn.
Vậy giáo viên có tất cả: $25+15=40$ sự lựa chọn.

**Câu 5.** Một nhà hàng có 3 loại rượu, 4 loại bia và 5 loại nước uống. Một thực khách muốn lựa chọn một loại đồ uống thì có bao nhiêu cách chọn?

**Lời giải.**

Nếu thực khách chọn rượu làm đồ uống thì có: 3 cách chọn.
Nếu thực khách chọn bia làm đồ uống thì có: 4 cách chọn.
Nếu thực khách chọn 5 loại nước uống còn lại làm đồ uống thì có 5 cách chọn.
Như vậy thực khách có tất cả: $3+4+5=12$ cách chọn.

**Câu 6.** Một giáo viên muốn ra đề kiểm tra 45 phút môn Toán phần lượng giác. Trong ngân hàng câu hỏi có 5 chủ đề, mỗi chủ đề có 4 câu. Để ra đề kiểm tra $45p$ gồm 5 câu và bao gồm tất cả các chủ đề thì giáo viên có bao nhiêu cách ra đề?

**Lời giải.**

Vì đề kiểm tra có 5 câu và bao gồm 5 chủ đề nên để thành lập đề kiểm tra mỗi chủ đề ta lấy một câu hỏi.
Chọn 1 câu hỏi trong chủ đề 1 có 4 cách chọn.
Tương tự đối với các chủ đề $2;3;4;5$.

Nên số cách chọn đề ra là: $4.4.4.4.4=4^5$ cách.

**Câu 7.** Có 3 bạn nữ và 3 bạn nam. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các bạn đó vào một hàng dọc sao cho nam nữ đứng xen kẽ nhau?

**Lời giải.**

Vị trí thứ nhất có 6 cách lựa chọn.
Vị trí thứ hai có 3 cách lựa chọn.*(nếu vị trí thứ nhất là nam thì bắt buộc vị trí thứ 2 phải chọn 1 trong 3 bạn nữ và ngược lại)*
Vị trí thứ ba có 2 cách lựa chọn.
Vị trí thứ 4 có 2 cách lựa chọn.
Vị trí thứ 5 có 1 cách lựa chọn.
Vị trí thứ 6 chỉ có 1 cách lựa chọn.
Nên có $6.5.4.3.2.1=72$ cách.

**Câu 8.** Một lớp có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Văn, 6 học sinh giỏi Lịch Sử. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 1 nhóm:

a/ Gồm 1 học sinh giỏi bất kỳ?

b/ Gồm 3 học sinh giỏi trong đó có tất cả học sinh giỏi của cả 3 môn?

c/ Gồm 2 học sinh giỏi khác nhau?

**Lời giải.**

a. Số cách chọn 1 học sinh giỏi trong lớp là: $7+6+5=18$ cách.

b. Số cách chọn 1 học sinh giỏi toán là 7 cách.
Số cách chọn 1 học sinh giỏi văn là 5 cách.

Số cách chọn 1 học sinh giỏi sử là 6 cách.

Nên số cách chọn một nhóm gồm 3 học sinh giỏi trong đó có tất cả các môn là $7.6.5=210$ cách.

c. Số cách chọn 2 học sinh trong đó một giỏi toán; một giỏi văn là $7.5=35$ cách.
Số cách chọn 2 học sinh trong đó một giỏi toán; một giỏi sử là $7.6=42$ cách.

Số cách chọn 2 học sinh trong đó một giỏi văn; một giỏi văn giỏi sử là $5.6=30$ cách.

Vậy số cách chọn ra một nhóm gồm 2 học sinh giỏi khác nhau là $35+30+42=107$ cách.

**Câu 9.** Cho các số tự nhiên: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

a) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số?
b) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?
c) Hỏi lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau?

**Lời giải.**

a) Gọi số tự nhiên cần lập là $\overline{abcde},(a\neq 0)$.

$a$ có 9 cách chọn.
$b$ có 9 cách chọn.
$c$ có 9 cách chọn.
$d$ có 9 cách chọn.
$e$ có 9 cách chọn.

nên số các số tự nhiên có 5 chữ số được thành lập từ các số trên là $9.9.9.9.9=9^5$ cách.

b) Gọi số tự nhiên cần lập là $\overline{abcde},(a\neq 0)$.

$a$ có 9 cách chọn.
$b$ có 8 cách chọn.
$c$ có 7 cách chọn.
$d$ có 6 cách chọn.
$e$ có 9 cách chọn.

nên số các số tự nhiên có 5 chữ số được thành lập từ các số trên là $9.8.7.6.5=15120$ cách.

c) Gọi số tự nhiên cần lập là $\overline{abcde},(a\neq 0)$.

$e$ có 4 cách chọn.
$d$ có 8 cách chọn.
$c$ có 7 cách chọn.
$b$ có 6 cách chọn.
$a$ có 5 cách chọn.

nên số các số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau là $4.8.7.6.5=6720$ cách.

**Câu 10.** Cho các số tự nhiên sau : 1, 2, 5, 6, 7, 9.

a) Hỏi lập được bao số lẻ có 3 chữ số khác nhau?
b) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau chia hết
c) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số mà có mặt chữ số 2

**Lời giải.**

a) Gọi số cần lập là $\overline{abc},(a\neq 0)$.

Vì số cần lập là số lẻ nên c có thể là $1;5;7;9\Rightarrow c$ có 4 cách chọn.
Vì khác $a;\ b;\ c$ nhau nên b có 5 cách chọn và a có 4 cách chọn.
Vậy số số lẻ có 3 chữ số khác nhau được thành lập từ các số trên là $4.5.4=80$ số.

b) Gọi số cần lập là $\overline{abc},(a\neq 0)$.

Vì số cần lập là số chia hết cho 5 nên $c$ có thể là có 1 cách chọn.
Vì $a$; $b$; $c$ khác nhau nên $b$ có 5 cách chọn và $a$ có 4 cách chọn.
Vậy số số có 3 chữ số khác nhau được thành lập từ các số trên là $5.4=20$ số.

c) Các số tự nhiên có 3 chữ số mà có mặt chữ số 2

TH1: Các số tự nhiên có 3 chữ số chỉ có mặt 1 chữ số 2
- Số 2: có 3 vị trí đặt, 5 số còn lại mỗi số có 2 vị trí đặt
- Có 3.5.5 số có 3 chữ số có mặt 1 chữ số 2

TH2: Các số tự nhiên có 3 chữ số chỉ có mặt 2 chữ số 2
- Số 2: có 3 vị trí đặt, 5 số còn lại mỗi số có 1 vị trí đặt
- Có 3.5 số có 3 chữ số có mặt 2 chữ số 2

TH3: Các số tự nhiên có 3 chữ số chỉ có mặt 3 chữ số 2, suy ra có 1 số: 222. Vậy số số tự nhiên có 3 chữ số mà có mặt chữ số 2 thành lập từ các số đã cho là: $3.5.5+3.5+1=91$ số.

**Câu 11.** Cho các số tự nhiên : $0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9$.

a) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?
b) Hỏi lập được bao nhiêu số lẻ có 4 chữ số khác nhau?

**Lời giải.**

a) Gọi số cần lập là $\overline{abcd},(a\neq 0)$.
Vì $a\neq 0$ nên $a$ có 6 cách chọn.
Vì các chữ số khác nhau nên $b$ có 6 cách chọn.
Tương tự $c$ có 5 cách chọn; $d$ có 4 cách chọn.
Nên số số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số trên là $6.6.5.4=720$ số.

b) Gọi số cần lập là $\overline{abcd},(a\neq 0)$.
Vì là số lẻ nên $d=1;5;7;9$. Vậy $d$ có 4 cách chọn.
Vì $a\neq 0$ và các chữ số là khác nhau nên $a$ có 5 cách chọn.
$b$ có 5 cách chọn.
$c$ có 4 cách chọn.
Vậy số số lẻ có 4 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số trên là: $4.5.5.4$ □ 400 .

**Câu 12.** Cho các số tự nhiên $0,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9$.

a) Hỏi lập được bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số khác nhau?
b) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 3?
c) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên lớn hơn 601?

**Lời giải.**

Ta phân các số trên thành 2 nhóm:
Nhóm 1 gồm các số $\{2;5\}$.
Nhóm 2 gồm các số $\{0;3;6;9\}$.

b) Gọi số cần lập là $\overline{abc}$ thỏa mãn $\overline{abc}\vdots 3\Leftrightarrow(a+b+c)\vdots 3$ □ $a$; $b$; $c$ sẽ không đồng thời thuộc cả hai
Số các số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 3 được thành lập từ nhóm 1 là:
Cả 3 chữ số giống nhau: 222, 555
Có 1 chữ số 2 và 2 chữ số 5: 255, 552, 525 (có 3 cách chọn vị trí để chữ số 5 có 1 cách chọn để vị trí 2 chữ số 2, suy ra có 3 số).
Có 1 chữ số 5 và 2 chữ số 2: 522, 225, 252
Vậy từ nhóm 1 ta thành lập được 2 + 3 + 3 = 8 số chia hết cho 3.
Số các số chia hết cho 3 lập được từ nhóm thứ 2 là:
+ Có 3 cách chọn chữ số $a$.
+ Có 4 cách chọn chữ số $b$.
+ Có 4 cách chọn chữ số $c$.
Vậy có tất cả $3.4.4=48$ số có 3 chữ số được thành lập từ nhóm 2 chia hết cho 3.
Vậy số các số có 3 chữ số chia hết cho 3 được thành lập từ các chữ số đã cho là $48+8=56$ số.

c) Gọi số cần lập là $\overline{abc}$ thỏa mãn $\overline{abc} > 600$

Vì $\overline{abc} > 600$ nên a chỉ có 2 cách chọn. ($a = 6$ hoặc $a = 9$).

Chữ số $b$ có 6 cách chọn, chữ số $c$ có 6 cách chọn.

$\Rightarrow$ có $6.6.2 = 72$ số có 3 chữ số lớn hơn 600.

Trong 72 số trên có 1 số là: $600 < 601$.

Vậy có tất cả 71 số lớn hơn 601 được thành lập từ các số trên.

**Câu 13.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được mấy số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

**Lời giải.**

Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ với $a_1 \neq 0$ và các chữ số phân biệt.

+ Bước 1: chữ số $a_1 \neq 0$ nên có 4 cách chọn.

+ Bước 2: sắp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí có $4! = 24$ cách. Vậy có $4.24 = 96$ số.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

**A.** 9. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 1.

**Lời giải.**

- Nếu chọn cỡ áo 39 thì sẽ có 5 cách.
- Nếu chọn cỡ áo 40 thì sẽ có 4 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $5 + 4 = 9$ cách chọn mua áo.

**Câu 2.** Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau. Để chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt thì số cách chọn khác nhau là:

**A.** 13. **B.** 72. **C.** 12. **D.** 30.

**Lời giải.**

- Nếu chọn một cái quần thì sẽ có 4 cách.
- Nếu chọn một cái áo thì sẽ có 6 cách.
- Nếu chọn một cái cà vạt thì sẽ có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $4 + 6 + 3 = 13$ cách chọn.

**Câu 3.** Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau là:

**A.** 480. **B.** 24. **C.** 48. **D.** 60.

**Lời giải.**

- Nếu chọn một cây bút chì thì sẽ có 8 cách.
- Nếu chọn một cây bút bi thì sẽ có 6 cách.
- Nếu chọn một cuốn tập thì sẽ có 10 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8 + 6 + 10 = 24$ cách chọn.

**Câu 4.** Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

**A.** 45. **B.** 280. **C.** 325. **D.** 605.

**Lời giải.**

- Nếu chọn một học sinh nam có 280 cách.
- Nếu chọn một học sinh nữ có 325 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $280 + 325 = 605$ cách chọn.

**Câu 5.** Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp $11A$ hoặc lớp $12B$. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp $11A$ có 31 học sinh tiên tiến và lớp $12B$ có 22 học sinh tiên tiến?

**A.** 31. **B.** 9. **C.** 53. **D.** 682.

**Lời giải.**

- Nếu chọn một học sinh lớp $11A$ có 31 cách.

• Nếu chọn một học sinh lớp $12B$ có $22$ cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $31+22=53$ cách chọn.

**Câu 6.** Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ $1$ đến $6$ và ba quả cầu đen được đánh số $7,\ 8,\ 9$. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

**A.** 27. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 3.

**Lời giải.**

Vì các quả cầu trắng hoặc đen đều được đánh số phân biệt nên mỗi lần lấy ra một quả cầu bất kì là một lần chọn.

• Nếu chọn một quả trắng có $6$ cách.

• Nếu chọn một quả đen có $3$ cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $6+3=9$ cách chọn.

**Câu 7.** Giả sử từ tỉnh $A$ đến tỉnh $B$ có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa, tàu thủy hoặc máy bay. Mỗi ngày có $10$ chuyến ô tô, $5$ chuyến tàu hỏa, $3$ chuyến tàu thủy và $2$ chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh $A$ đến tỉnh $B$?

**A.** 20. **B.** 300. **C.** 18. **D.** 15.

**Lời giải.**

• Nếu đi bằng ô tô có $10$ cách.

• Nếu đi bằng tàu hỏa có $5$ cách.

• Nếu đi bằng tàu thủy có $3$ cách.

• Nếu đi bằng máy bay có $2$ cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $10+5+3+2=20$ cách chọn.

**Câu 8.** Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: $8$ đề tài về lịch sử, $7$ đề tài về thiên nhiên, $10$ đề tài về con người và $6$ đề tài về văn hóa. Mỗi thí sinh được quyền chọn một đề tài. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?

**A.** 20. **B.** 3360. **C.** 31. **D.** 30.

**Lời giải.**

• Nếu chọn đề tài về lịch sử có $8$ cách.

• Nếu chọn đề tài về thiên nhiên có $7$ cách.

• Nếu chọn đề tài về con người có $10$ cách.

• Nếu chọn đề tài về văn hóa có $6$ cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8+7+10+6=31$ cách chọn.

**Câu 9.** Một tổ có $5$ học sinh nữ và $6$ học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên một học sinh của tổ đó đi trực nhật.

**A.** $20$. **B.** $11$. **C.** $30$. **D.** $10$.

**Lời giải**

Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ 11 học sinh, ta có 11 cách chọn.

**Câu 10.** Có bao nhiêu số tự nhiên có chín chữ số mà các chữ số của nó viết theo thứ tự giảm dần:

**A.** $5$. **B.** $15$. **C.** $55$. **D.** $10$.

**Lời giải**

Với một cách chọn $9$ chữ số từ tập $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ta có duy nhất một cách xếp chúng theo thứ tự giảm dần.

Ta có $10$ cách chọn $9$ chữ số từ tập $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Do đó có $10$ số tự nhiên cần tìm.

**Câu 11.** Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và 4 kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

**A.** 4. **B.** 7. **C.** 12. **D.** 16.

**Lời giải.**

Để chọn một chiếc đồng hồ, ta có:

• Có 3 cách chọn mặt.

• Có 4 cách chọn dây.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $3\times4=12$ cách.

**Câu 12.** Một người có 4 cái quần, 6 cái áo, 3 chiếc cà vạt. Để chọn mỗi thứ một món thì có bao nhiêu cách chọn bộ "quần-áo-cà vạt" khác nhau?

**A.** 13. **B.** 72. **C.** 12. **D.** 30.

**Lời giải.**

Để chọn một bộ "quần-áo-cà vạt", ta có:
- Có 4 cách chọn quần.
- Có 6 cách chọn áo.
- Có 3 cách chọn cà vạt.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4\times6\times3=72$ cách.

**Câu 13.** Một thùng trong đó có 12 hộp đựng bút màu đỏ, 18 hộp đựng bút màu xanh. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một hộp màu đỏ, một hộp màu xanh là?

**A.** 13. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 216.

**Lời giải.**

Để chọn một hộp màu đỏ và một hộp màu xanh, ta có:
- Có 12 cách chọn hộp màu đỏ.
- Có 18 cách chọn hộp màu xanh.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12\times18=216$ cách.

**Câu 14.** Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một cây bút chì, một cây bút bi và một cuốn tập.

**A.** 24. **B.** 48. **C.** 480. **D.** 60.

**Lời giải.**

Để chọn "một cây bút chì - một cây bút bi - một cuốn tập", ta có:
- Có 8 cách chọn bút chì.
- Có 6 cách chọn bút bi.
- Có 10 cách chọn cuốn tập.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $8\times6\times10=480$ cách.

**Câu 15.** Một bó hoa có 5 hoa hồng trắng, 6 hoa hồng đỏ và 7 hoa hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy ba bông hoa có đủ cả ba màu.

**A.** 240. **B.** 210. **C.** 18. **D.** 120.

**Lời giải.**

Để chọn ba bông hoa có đủ cả ba màu (nghĩa là chọn một bông hoa hồng trắng- một bông hoa hồng đỏ- hoa hồng vàng), ta có:
- Có 5 cách chọn hoa hồng trắng.
- Có 6 cách chọn hoa hồng đỏ.
- Có 7 cách chọn hoa hồng vàng.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5\times6\times7=210$ cách.

**Câu 16.** Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm một món ăn trong năm món, một loại quả tráng miệng trong năm loại quả tráng miệng và một nước uống trong ba loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn.

**A.** 25. **B.** 75. **C.** 100. **D.** 15.

**Lời giải.**

Để chọn thực đơn, ta có:
- Có 5 cách chọn món ăn.
- Có 5 cách chọn quả tráng miệng.
- Có 3 cách chọn nước uống.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5\times5\times3=75$ cách.

**Câu 17.** Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

**A.** 910000. **B.** 91000. **C.** 910. **D.** 625.

**Lời giải.**

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có $280$ cách chọn học sinh nam.
- Có $325$ cách chọn học sinh nữ.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $280 \times 325 = 91000$ cách.

**Câu 18.** Một đội học sinh giỏi của trường THPT, gồm $5$ học sinh khối 12, $4$ học sinh khối 11, $3$ học sinh khối 10. Số cách chọn ba học sinh trong đó mỗi khối có một em?

**A.** 12. **B.** 220. **C.** 60. **D.** 3.

**Lời giải.**

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có $5$ cách chọn học sinh khối 12.
- Có $4$ cách chọn học sinh khối 11.
- Có $3$ cách chọn học sinh khối 10.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ cách.

**Câu 19.** Có $10$ cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tổng số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc phát biểu ý kiến sao cho hai người đó không là vợ chồng?

**A.** 100. **B.** 91. **C.** 10. **D.** 90.

**Lời giải.**

Để chọn một người đàn ông và một người đàn bà không là vợ chồng, ta có

- Có $10$ cách chọn người đàn ông.
- Có $9$ cách chọn người đàn bà.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $9 \times 10 = 90$ cách.

**Câu 20.** An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có $4$ con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có $6$ con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường?

**A.** 6. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 24.

**Lời giải.**

- Từ An $\longrightarrow$ Bình có $4$ cách.
- Từ Bình $\longrightarrow$ Cường có $6$ cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 6 = 24$ cách.

**Câu 21.** Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần?




**A.** 9. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 24.

**Lời giải.**

- Từ A $\longrightarrow$ B có $4$ cách.
- Từ B $\longrightarrow$ C có $2$ cách.
- Từ C $\longrightarrow$ D có $2$ cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 2 \times 3 = 24$ cách.

**Câu 22.** Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?




**A.** 1296. **B.** 784. **C.** 576. **D.** 324.

**Lời giải.**

Từ kết quả câu trên, ta có:

- Từ A $\longrightarrow$ D có $24$ cách.
- Tương tự, từ D $\longrightarrow$ A có $24$ cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24\times 24=576$ cách.

**Câu 23.** Có $10$ cái bút khác nhau và $8$ quyển sách giáo khoa khác nhau. Một bạn học sinh cần chọn $1$ cái bút và $1$ quyển sách. Hỏi bạn học sinh đó có bao nhiêu cách chọn?

**A.** $80$. **B.** $60$. **C.** $90$. **D.** $70$.

**Lời giải**

Số cách chọn $1$ cái bút có $10$ cách, số cách chọn $1$ quyển sách có $8$ cách.

Vậy theo quy tắc nhân, số cách chọn $1$ cái bút và $1$ quyển sách là: $10.8=80$ cách.

**Câu 24.** Một hộp đựng $5$ bi đỏ và $4$ bi xanh. Có bao nhiêu cách lấy $2$ bi có đủ cả $2$ màu?

**A.** $20$. **B.** $16$. **C.** $9$. **D.** $36$.

**Lời giải**

Lấy $1$ bi đỏ có $5$ cách.
Lấy $1$ bi xanh có $4$ cách.
Theo quy tắc nhân, số cách lấy $2$ bi có đủ cả $2$ màu là $5.4=20$ cách.

**Câu 25.** Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm $1$ món ăn trong $5$ món ăn, $1$ loại quả tráng miệng trong $4$ loại quả tráng miệng và $1$ loại nước uống trong $3$ loại nước uống. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thực đơn?

**A.** $75$. **B.** $12$. **C.** $60$. **D.** $3$.

**Lời giải**

Có $5$ cách chọn $1$ món ăn trong $5$ món ăn, $4$ cách chọn $1$ loại quả tráng miệng trong $4$ loại quả tráng miệng và $3$ cách chọn $1$ loại nước uống trong $3$ loại nước uống.
Theo quy tắc nhân có $5.4.3=60$ cách chọn thực đơn.

**Câu 26.** Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà cả hai chữ số đều lẻ?

**A.** $25$. **B.** $20$. **C.** $50$. **D.** $10$.

**Lời giải**

Gọi số tự nhiên có hai chữ số mà cả hai chữ số đều lẻ là $\overline{ab}$.
Số cách chọn số $a$ là $5$ cách.
Số cách chọn số $b$ là $5$ cách.
Vậy có $5.5=25$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 27.** Số các số tự nhiên chẵn, gồm bốn chữ số khác nhau đôi một và không tận cùng bằng 0 là :

**A.** $504$. **B.** $1792$. **C.** $953088$. **D.** $2296$.

**Lời giải**

Gọi số ần tìm là $\overline{abcd}$
Có 4 cách chọn $d$, 8 cách chọn $a$, 8 cách chọn $b$ và 7 cách chọn $c$. Vậy có tất cả :

$$4.8.8.7=1792 \text{ (số)}$$

**Câu 28.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau?

**A.** $1000$. **B.** $720$. **C.** $729$. **D.** $648$.

**Lời giải**

Gọi số cần lập là $\overline{abc}$ có ba chữ số đôi một khác nhau.
Chữ số $a$ có $9$ cách chọn.
Chữ số $b$ có $9$ cách chọn.
Chữ số $c$ có $8$ cách chọn.
Do đó có $9.9.8=648$ cách lập số.

**Câu 29.** Có 10 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 10, 7 quả cầu xanh được đánh số từ 1 đến 7 và 8 quả cầu vàng được đánh số từ 1 đến 8. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu khác màu và khác số.

**A.** 392 **B.** 1023 **C.** 3014 **D.** 391

**Lời giải**

Ta chọn các quả cầu theo trình tự sau
Chọn quả xanh: 7 cách chọn

Chọn quả cầu vàng: có 7 cách chọn
Chọn quả cầu đỏ: có 8 cách chọn
Vậy có tất cả $7.7.8=392$ cách chọn.

**Câu 30.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ sáu chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$?

**A.** 120. **B.** 216. **C.** 256. **D.** 20.

**Lời giải**

Gọi số tự nhiên có ba chữ số là $\overline{abc}$.

Có 6 cách chọn $a$.

Có 6 cách chọn $b$.

Có 6 cách chọn $c$.

Theo quy tắc nhân có $6.6.6=216$ (số tự nhiên).

**Câu 31.** Cho các số $1,5,6,7$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số với các chữ số khác nhau:

**A.** 12. **B.** 24. **C.** 64. **D.** 256.

***Lời giải***

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số cần tìm là: $\overline{abcd}$, $a\neq 0$, khi đó:

$a$ có 4 cách chọn
$b$ có 3 cách chọn
$c$ có 2 cách chọn
$d$ có 1 cách chọn
Vậy có: $4.3.2.1=24$ số.

**Câu 32.** Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình (thăm một bạn không quá một lần)?

**A.** 3991680. **B.** 12!. **C.** 35831808. **D.** 7!.

**Lời giải.**

Một tuần có bảy ngày và mỗi ngày thăm một bạn.
- Có 12 cách chọn bạn vào ngày thứ nhất.
- Có 11 cách chọn bạn vào ngày thứ hai.
- Có 10 cách chọn bạn vào ngày thứ ba.
- Có 9 cách chọn bạn vào ngày thứ tư.
- Có 8 cách chọn bạn vào ngày thứ năm.
- Có 7 cách chọn bạn vào ngày thứ sáu.
- Có 6 cách chọn bạn vào ngày thứ bảy.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6=3991680$ cách.

**Câu 33.** Nhãn mỗi chiếc ghế trong hội trường gồm hai phần: phần đầu là một chữ cái (trong bảng 24 chữ cái tiếng Việt), phần thứ hai là một số nguyên dương nhỏ hơn 26. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau?

**A.** 624. **B.** 48. **C.** 600. **D.**
$(a,b,c,d)\in A=\{1,\ 5,\ 6,\ 7\}$.

**Lời giải.**

Một chiếc nhãn gồm phần đầu và phần thứ hai $\in\{1;2;...;25\}$.
- Có 24 cách chọn phần đầu.
- Có 25 cách chọn phần thứ hai.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24\times 25=600$ cách.

**Câu 34.** Biển số xe máy của tỉnh $A$ (nếu không kể mã số tỉnh) có 6 kí tự, trong đó kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 26 cái tiếng Anh), kí tự ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập $\{1;2;...;9\}$, mỗi kí

tự ở bốn vị trí tiếp theo là một chữ số thuộc tập $\{0;1;2;...;9\}$. Hỏi nếu chỉ dùng một mã số tỉnh thì tỉnh $A$ có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu biển số xe máy khác nhau?

**A.** 2340000. **B.** 234000. **C.** 75. **D.** 2600000.

**Lời giải.**

Giả sử biển số xe là $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$.

- Có 26 cách chọn $a_1$
- Có 9 cách chọn 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Có 10 cách chọn $a_3$
- Có 10 cách chọn $a_4$
- Có 10 cách chọn $a_5$
- Có 10 cách chọn $a_6$

Vậy theo qui tắc nhân ta có $26\times9\times10\times10\times10\times10=2340000$ biển số xe.

**Câu 35.** Số 253125000 có bao nhiêu ước số tự nhiên?

**A.** 160. **B.** 240. **C.** 180. **D.** 120.

**Lời giải.**

Ta có $253125000=2^3.3^4.5^8$ nên mỗi ước số tự nhiên của số đã cho đều có dạng $2^m\times3^n\times5^p$ trong đó $m,\ n,\ p\in\mathbb{N}$ sao cho $0\le m\le3;\ 0\le n\le4;\ 0\le p\le8$.

- Có 4 cách chọn $m$.

$\overline{abcd}$ Có 5 cách chọn $n$.

- Có 9 cách chọn $p$.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4\times5\times9=180$ ước số tự nhiên.

**Câu 36.** Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số (không nhất thiết phải khác nhau)?

**A.** 324. **B.** 256. **C.** 248. **D.** 124.

**Lời giải.**

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a,b,c,d)\in A=\{1,\ 5,\ 6,\ 7\}$.

Vì số cần tìm có 4 chữ số không nhất thiết khác nhau nên:

- $a$ được chọn từ tập $A$ (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- $b$ được chọn từ tập $A$ (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- $c$ được chọn từ tập $A$ (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- $d$ được chọn từ tập $A$ (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.

Như vậy, ta có $4\times4\times4\times4=256$ số cần tìm.

**Câu 37.** Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số đều chẵn?

**A.** 99. **B.** 50. **C.** 20. **D.** 10.

**Lời giải.**

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{ab}$ với $(a,\ b)\in A=\{0,2,4,6,8\}$ và $a\ne0$.

Trong đó:

- $a$ được chọn từ tập $A\backslash\{0\}$ (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- $b$ được chọn từ tập $A$ (có 5 phần tử) nên có 5 cách chọn.

Như vậy, ta có $4\times5=20$ số cần tìm.

**Câu 38.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn 100?

**A.** 36. **B.** 62. **C.** 54. **D.** 42.

**Lời giải.**

Các số bé hơn 100 chính là các số có một chữ số và hai chữ số được hình thành từ tập $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Từ tập $A$ có thể lập được 6 số có một chữ số.

Gọi số có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $(a,b)\in A$.

Trong đó:

- $a$ được chọn từ tập $A$ (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.
- $b$ được chọn từ tập $A$ (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.

Như vậy, ta có $6\times 6=36$ số có hai chữ số.
Vậy, từ $A$ có thể lập được $36+6=42$ số tự nhiên bé hơn 100.

**Câu 39.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?

**A.** 154. **B.** 145. **C.** 144. **D.** 155.

**Lời giải.**

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a,b,c,d)\in A=\{0,1,2,3,4,5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số lẻ $\Rightarrow d=\{1,3,5\}\Rightarrow d$: có 3 cách chọn.

Khi đó $a$: có 4 cách chọn (khác 0 và $d$), $b$: có 4 cách chọn và $c$: có 3 cách chọn.
Vậy có tất cả $3\times 4\times 4\times 3=144$ số cần tìm.

**Câu 40.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

**A.** 156. **B.** 144. **C.** 96. **D.** 134.

**Lời giải.**

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a,b,c,d)\in A=\{0,1,2,3,4,5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số chẵn $\Rightarrow d=\{0,2,4\}$.

**TH1.** Nếu $d=0$, số cần tìm là $\overline{abc0}$. Khi đó:

- $a$ được chọn từ tập $A\backslash\{0\}$ nên có 5 cách chọn.
- $b$ được chọn từ tập $A\backslash\{0,a\}$ nên có 4 cách chọn.
- $c$ được chọn từ tập $A\backslash\{0,a,b\}$ nên có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $5\times 4\times 3=60$ số có dạng $\overline{abc0}$.
**TH2.** Nếu $d=\{2,4\}\Rightarrow d$: có 2 cách chọn.

Khi đó $a$: có 4 cách chọn (khác 0 và $d$), $b$: có 4 cách chọn và $c$: có 3 cách chọn.
Như vậy, ta có $2\times 4\times 4\times 3=96$ số cần tìm như trên.
Vậy có tất cả $60+96=156$ số cần tìm.

**Câu 41.** Từ các chữ số $0$, $1$, $2$, $3$, $4$, $5$, $6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có ba chữ số?

**A.** $210$. **B.** $105$. **C.** $168$. **D.** $145$.

**Lời giải**

- Gọi số có ba chữ số cần tìm là $n=\overline{abc}$, với $a\neq 0$ và $c$ là số chẵn chọn từ các số đã cho.
- $a\neq 0$ nên có 6 cách chọn, $c$ chẵn nên có 4 cách chọn và $b$ tùy ý nên có 7 cách chọn.
- Vậy số các số cần tìm là $6.4.7=168$.

**Câu 42.** Có bao nhiêu sỗ chẵn gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó chữ số đầu tiên là chữ số lẻ? Câu trả lời nào đúng?

**A.** 40000 số. **B.** 38000 số. **C.** 44000 số. **D.** 42000 số.

**Lời giải**

Gọi số có 6 chữ số đó là $\overline{abcdef}$. Vì $a$ lẻ nên $a\in\{1;3;5;7;9\}$, vậy $a$ có 5 lựa chọn. Vì $f$ chẵn nên $f\in\{0;2;4;6;8\}$, vậy $f$ có 5 lựa chọn. Tiếp theo $b$ có 8 lựa chọn, $c$ có 7 lựa chọn, $d$ có 6 lựa chọn, $e$ có 5 lựa chọn. Vậy có tất cả $5.5.8.7.6.5=42000$ số thỏa mãn.

**Câu 43.** Cho các chữ số 1, 2, 3,., 9. Từ các số đó có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau và không vượt quá 2011.

**A.** 168 **B.** 170 **C.** 164 **D.** 172

**Lời giải**

Gọi số cần lập $x=\overline{abcd}$, $a,b,c,d\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Vì $x$ chẵn nên $d\in\{2,4,6,8\}$. Đồng thời $x\le 2011\Rightarrow a=1$

• $a=1\Rightarrow a$ có 1 cách chọn, khi đó $d$ có 4 cách chọn; $b,c$ có $7.6$ cách

Suy ra có: $1.4.6.7=168$ số

**Câu 44.** Từ các số $1,2,3,4,5,6,7$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và là số lẻ

**A.** 360 **B.** 343 **C.** 480 **D.** 347

**Lời giải**

Gọi số cần lập $x=\overline{abcd}$; $a,b,c,d\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$ và $a,b,c,d$ đôi một khác nhau.

Vì số $x$ cần lập là số lẻ nên $d$ phải là số lẻ. Ta lập $x$ qua các công đoạn sau.

*Bước 1:* Có 4 cách chọn d

*Bước 2:* Có 6 cách chọn a

*Bước 3:* Có 5 cách chọn b

*Bước 4:* Có 4 cách chọn c

Vậy có 480 số thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 45.** Có bao nhiêu cách xếp 4 người A,B,C,D lên 3 toa tàu, biết mỗi toa có thể chứa 4 người.

**A.** 81 **B.** 68 **C.** 42 **D.** 98

**Lời giải**

Để xếp A ta có 3 cách lên một trong ba toa

Với mỗi cách xếp A ta có 3 cách xếp B lên toa tàu

Với mỗi cách xếp A,B ta có 3 cách xếp C lên toa tàu

Với mỗi cách xếp A,B,C ta có 3 cách xếp D lên toa tàu

Vậy có $3.3.3.3=81$ cách xếp 4 người lên toa tàu.

**Câu 46.** Có 3 nam và 3 nữ cần xếp ngồi vào một hàng ghế. Hỏi có mấy cách xếp sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ?

**A.** 72 **B.** 74 **C.** 76 **D.** 78

**Lời giải**

Có 6 cách chọn một người tuỳ ý ngồi vào chỗ thứ nhất. Tiếp đến, có 3 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 2. Lại có 2 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 3, có 2 cách chọn vào chỗ thứ 4, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 5, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 6.

Vậy có: $6.3.2.2.1.1=72$ cách.

**Câu 47.** Có bao nhiêu cách sắp xếp $3$ nữ sinh, $3$ nam sinh thành một hàng dọc sao cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ:

**A.** $6$. **B.** $72$. **C.** $720$. **D.** $144$.

**Lời giải**

Chọn vị trí 3 nam và 3 nữ: $2.1$ cách chọn.

Xếp 3 nam có: $3.2.1$ cách xếp.

Xếp 3 nữ có: $3.2.1$ cách xếp.

Vậy có $2.1.(3.2.1)^2=72$ cách xếp.

**Câu 48.** Số điện thoại ở Huyện Củ Chi có $7$ chữ số và bắt đầu bởi $3$ chữ số đầu tiên là $790$. Hỏi ở Huyện Củ Chi có tối đa bao nhiêu máy điện thoại:

**A.** $1000$. **B.** $100000$. **C.** $10000$. **D.** $1000000$.

**Lời giải**

Gọi số điện thoại cần tìm có dạng $\overline{790abcd}$.

Khi đó: $a$ có 10 cách chọn, $b$ có 10 cách chọn, $c$ có 10 cách chọn, $d$ có 10 cách chọn.

Nên có tất cả $10.10.10.10=10^4$ số.

**Câu 49.** Trong một giải thi đấu bóng đá có 20 đội tham gia với thể thức thi đấu vòng tròn. Cứ hai đội thì gặp nhau đúng một lần. Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu xảy ra.

**A.** 190 **B.** 182 **C.** 280 **D.** 194

**Lời giải**

Cứ mỗi đội phải thi đấu với 19 đội còn lại nên có $19.20$ trận đấu. Tuy nhiên theo cách tính này thì một trận đấu chẳng hạn A gặp B được tính hai lần. Do đó số trận đấu thực tế diễn ra là: $\frac{19.20}{2}=190$ trận.

**Câu 50.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn $100$?

**A.** 36. **B.** 62. **C.** 54. **D.** 42.

**Lời giải**

Các số bé hơn $100$ chính là các số có một chữ số và hai chữ số được hình thành từ tập $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Từ tập $A$ có thể lập được $6$ số có một chữ số.

Gọi số có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $(a,b)\in A$.

Trong đó:

- $a$ được chọn từ tập $A$ (có $6$ phần tử) nên có $6$ cách chọn.
- $b$ được chọn từ tập $A$ (có $6$ phần tử) nên có $6$ cách chọn.

Như vậy, ta có $6\times 6=36$ số có hai chữ số.

Vậy, từ $A$ có thể lập được $36+6=42$ số tự nhiên bé hơn 100.

**Câu 51.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số **lẻ** gồm 4 chữ số khác nhau?

**A.** 154. **B.** 145. **C.** 144. **D.** 155.

**Lời giải**

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a,b,c,d)\in A=\{0,1,2,3,4,5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số lẻ $\Rightarrow d=\{1,3,5\}\Rightarrow d$: có 3 cách chọn.

Khi đó $a$: có 4 cách chọn (khác 0 và $d$), $b$: có 4 cách chọn và $c$: có 3 cách chọn.

Vậy có tất cả $3\times 4\times 4\times 3=144$ số cần tìm.

**Câu 52.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số **chẵn** gồm 4 chữ số khác nhau?

**A.** 156. **B.** 144. **C.** 96. **D.** 134.

**Lời giải**

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a,b,c,d)\in A=\{0,1,2,3,4,5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số chẵn $\Rightarrow d=\{0,2,4\}$.

**TH1.** Nếu $d=0$, số cần tìm là $\overline{abc0}$. Khi đó:

- $a$ được chọn từ tập $A\backslash\{0\}$ nên có 5 cách chọn.
- $b$ được chọn từ tập $A\backslash\{0,a\}$ nên có 4 cách chọn.
- $c$ được chọn từ tập $A\backslash\{0,a,b\}$ nên có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $5\times 4\times 3=60$ số có dạng $\overline{abc0}$.

**TH2.** Nếu $d=\{2,4\}\Rightarrow d$: có 2 cách chọn.

Khi đó $a$: có 4 cách chọn (khác 0 và $d$), $b$: có 4 cách chọn và $c$: có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $2\times 4\times 4\times 3=96$ số cần tìm như trên.

Vậy có tất cả $60+96=156$ số cần tìm.

**Câu 53.** Cho tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ từ tập $A$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và chia hết cho 2?

**A.** 8232. **B.** 1230. **C.** 1260. **D.** 2880.

**Lời giải**

Gọi số có 5 chữ số cần tìm là $x=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$; $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\in A$; $a_1\neq 0$; $a_5\in\{0;2;4;6\}$.

Công việc thành lập số $x$ được chia thành các bước:

- Chọn chữ số $a_1$ có 6 lựa chọn vì khác 0.
- Chọn các chữ số $a_2$, $a_3$, $a_4$, mỗi chữ số có 7 lựa chọn.

- Chọn chữ số $a_5$ có 4 lựa chọn vì số tạo thành chia hết cho 2.

Số số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $6.7^3.4 = 8232$ (số).

**Câu 54.** Có 6 học sinh và 3 thầy giáo $A$, $B$, $C$. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ 9 người đó ngồi trên một hàng ngang có 9 chỗ sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh.

**A.** 4320. **B.** 90. **C.** 43200. **D.** 720.

**Lời giải**

Sắp 6 học sinh thành một hàng ngang, giữa 6 học sinh có 5 khoảng trống, ta chọn 3 khoảng trống và đưa 3 giáo viên vào được cách sắp thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả có : $6!.A_5^3 = 43200$ cách.

**Câu 55.** Một liên đoàn bóng đá có 10 đội, mỗi đội phải đá 4 trận với mỗi đội khác, 2 trận ở sân nhà và 2 trận ở sân khách. Số trận đấu được sắp xếp là:

**A.** 180 **B.** 160. **C.** 90. **D.** 45.

**Lời giải**

Mỗi đội sẽ gặp 9 đội khác trong hai lượt trận sân nhà và sân khách. Có $10.9 = 90$ trận.

Mỗi đội đá 2 trận sân nhà, 2 trận sân khách. Nên số trận đấu là $2.90 = 180$ trận.

**Câu 56.** Từ tập có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao chữ số đầu chẵn chữ số đứng cuối lẻ.

**A.** 11523 **B.** 11520 **C.** 11346 **D.** 22311

***Lời giải***

Vì chữ số đứng đầu chẵn nên $a_1$ có 4 cách chọn, chữ số đứng cuối lẻ nên $a_8$ có 4 cách chọn. Các số còn lại có $6.5.4.3.2.1$ cách chọn

Vậy có $4^2.6.5.4.3.2.1 = 11520$ số thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 57.** Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 100 chia hết cho 2 và 3.

**A.** 12. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 20.

***Lời giải***

Số các số tự nhiên lớn nhất, nhỏ hơn 100 chia hết cho 2 và 3 là 96.

Số các số tự nhiên nhỏ nhất, nhỏ hơn 100 chia hết cho 2 và 3 là 0.

Số các số tự nhiên nhỏ hơn 100 chia hết cho 2 và 3 là $\frac{96-0}{6}+1=17$ nên chọn $C$.

**Câu 58.** Cho tập $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao các số này lẻ không chia hết cho 5.

**A.** 15120 **B.** 23523 **C.** 16862 **D.** 23145

***Lời giải***

Vì $x$ lẻ và không chia hết cho 5 nên $d \in \{1,3,7\} \Rightarrow d$ có 3 cách chọn

Số các chọn các chữ số còn lại là: $7.6.5.4.3.2.1$

Vậy 15120 số thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 59.** Cho tập $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số và chia hết cho 5.

**A.** 660 **B.** 432 **C.** 679 **D.** 523

***Lời giải***

Gọi $x = \overline{abcde}$ là số cần lập, $e \in \{0,5\}, a \neq 0$

• $e = 0 \Rightarrow e$ có 1 cách chọn, cách chọn $a,b,c,d$ : $6.5.4.3$

Trường hợp này có 360 số

$e = 5 \Rightarrow e$ có một cách chọn, số cách chọn $a,b,c,d$ : $5.5.4.3 = 300$

Trường hợp này có 300 số

Vậy có 660 số thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 60.** Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số chia hết cho 10 là:

**A.** 3260. **B.** 3168. **C.** 9000. **D.** 12070.

***Lời giải***

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcde}$ $(a \neq 0)$.

Chọn $e$: có 1 cách $(e=0)$

Chọn $a$: có 9 cách $(a \neq 0)$

Chọn $\overline{bcd}$: có $10^3$ cách

Theo quy tắc nhân, có $1.9.10^3 = 9000$ (số).

**Câu 61.** Cho tập hợp số: $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.Hỏi có thể thành lập bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

**A.** 114 **B.** 144 **C.** 146 **D.** 148

***Lời giải***

Ta có một số chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số chia hết cho 3. Trong tập A có các tập con các chữ số chia hết cho 3 là $\{0,1,2,3\}$, $\{0,1,2,6\}$, $\{0,2,3,4\}$, $\{0,3,4,5\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3,6\}$, $\{1,3,5,6\}$.

Vậy số các số cần lập là: $4(4!-3!)+3.4!=144$ số.

**Câu 62.** Một hộp chứa 16 quả cầu gồm sáu quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6, năm quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5 và năm quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 5. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra từ hộp đó 3 quả cầu vừa khác màu vừa khác số.

**A.** 72. **B.** 150. **C.** 60. **D.** 80.

**Lời giải**

Kí hiệu các quả cầu như hình vẽ.

| Xanh | | | | | | Đỏ | | | | | Vàng | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | Đ1 | Đ2 | Đ3 | Đ4 | Đ5 | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 |

TH1: Có quả xanh X6.

Bước 1: Lấy quả X6 có 1 cách.

Bước 2: Lấy 1 quả đỏ có 5 cách.

Bước 3: Lấy 1 quả vàng có 4 cách. (vì khác số với quả đỏ).

Vậy có $1.5.4=20$ (cách).

TH2: Không có quả xanh X6.

Bước 1: Lấy quả xanh có 5 cách.

Bước 2: Lấy 1 quả đỏ có 4 cách. (vì khác số với quả xanh).

Bước 3: Lấy 1 quả vàng có 3 cách. (vì khác số với quả xanh, đỏ).

Vậy có $5.4.3=60$ (cách).

Vậy có 80 (cách).

**Câu 63.** Một bàn dài có 2 dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm có 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường $A$ và 6 học sinh trường $B$ vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi sao cho bất kì 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường nhau.

**A.** 1036800 **B.** 234780 **C.** 146800 **D.** 2223500

**Lời giải**

Ta đánh số liên tiếp 12 chỗ ngồi bằng các số từ 1 đến 6 thuộc một dãy và từ 7 đến 12 thuộc một dãy

1 2 3 4 5 6

12 11 10 9 8 7

| Vị trí | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số cách xếp | 12 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |

Vậy có $12.6.5^2.4^2.3^2.2^2.1=1036800$ cách xếp.

**Câu 64.** Có bao nhiêu cách sắp xếp $3$ nữ sinh, $3$ nam sinh thành một hàng dọc sao cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẻ:

**A.** $6$. **B.** $72$. **C.** $720$. **D.** $144$.

**Lờigiải**

**Chọn B**

Chọn vị trí $3$ nam và $3$ nữ: $2.1$ cách chọn.

Xếp $3$ nam có: $3.2.1$ cách xếp.

Xếp $3$ nữ có: $3.2.1$ cách xếp.

Vậy có $2.1.(3.2.1)^2=72$ cách xếp.

**Câu 65.** Từ các chữ số $0$, $1$, $2$, $3$, $5$, $8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số $3$.

**A.** $36$ số. **B.** $108$ số. **C.** $228$ số. **D.** $144$ số.

**Lời giải**

Gọi số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau là $\overline{abcd}$. Do số cần lập là số lẻ và phải có mặt chữ số $3$ nên ta có các trường hợp.

TH1: $a=3$ khi đó số có dạng $\overline{3bcd}$.

Có $2$ cách chọn $d$.

Có $4$ cách chọn $a$.

Có $3$ cách chọn $c$.

Theo quy tắc nhân có $1.4.3.2=24$ (số).

TH2: $b=3$ khi đó số có dạng $\overline{a3cd}$.

Có $2$ cách chọn $d$.

Có $3$ cách chọn $a$ (do $a\neq 0$).

Có $3$ cách chọn $c$.

Theo quy tắc nhân có $3.1.3.2=18$ (số).

TH3: $c=3$ khi đó số có dạng $\overline{ab3d}$.

Có $2$ cách chọn $d$.

Có $3$ cách chọn $a$ (do $a\neq 0$).

Có $3$ cách chọn $b$.

Theo quy tắc nhân có $3.1.3.2=18$ (số).

TH4: $d=3$ khi đó số có dạng $\overline{abc3}$.

Có $4$ cách chọn $a$ (do $a\neq 0$).

Có $4$ cách chọn $b$.

Có $3$ cách chọn $c$.

Theo quy tắc nhân có $4.4.3.1=48$ (số).

Theo quy tắc cộng có $24+18+18+48=108$ (số).

**Câu 66.** Từ các chữ số $0$, $2$, $3$, $5$, $6$, $8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm $6$ chữ số đôi một khác nhau trong đó hai chữ số $0$ và $5$ không đứng cạnh nhau.

**A.** $384$ **B.** $120$ **C.** $216$ **D.** $600$

**Lời giải**

Số các số có $6$ chữ số được lập từ các chữ số $0$, $2$, $3$, $5$, $6$, $8$ là $6!-5!$.

Số các số có chữ số $0$ và $5$ đứng cạnh nhau: $2.5!-4!$.

Số các số có chữ số $0$ và $5$ không đứng cạnh nhau là: $6!-5!-(2.5!-4!)=384$.

**Câu 67.** Một phiếu điều tra về đề tự học của học sinh gồm $10$ câu hỏi trắc nghiệm, mỗi câu có bốn lựa chọn để trả lời. Khi tiến hành điều tra, phiếu thu lại được coi là hợp lệ nếu người được hỏi trả lời đủ $10$ câu hỏi, mỗi câu chỉ chọn một phương án. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu phiếu hợp lệ để trong số đó luôn có ít nhất hai phiếu trả lời giống hệt nhau cả $10$ câu hỏi?

**A.** $2097152$. **B.** $10001$. **C.** $1048577$. **D.** $1048576$.

**Lời giải**

Mỗi câu hỏi có 4 lựa chọn.

$\Rightarrow 10$ câu hỏi có $4^{10}=1048576$ phương án trả lời khác nhau.

Vậy nếu có nhiều hơn 1048576 phiếu hợp lệ thì luôn có ít nhất hai phiếu trả lời giống nhau nên số phiếu hợp lệ tối thiểu cần phát là 1048577 phiếu.

**Câu 68.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $5,6,7,8,9$. Tính tổng tất cả các số thuộc tập $S$.

**A.** 9333420. **B.** 46666200. **C.** 9333240. **D.** 46666240.

**Lời giải**

Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ $5,6,7,8,9$ là $5!=120$ số.

Vì vai trò các chữ số như nhau nên mỗi chữ số $5,6,7,8,9$ xuất hiện ở hàng đơn vị là $4!=24$ lần.

Tổng các chữ số ở hàng đơn vị là $24(5+6+7+8+9)=840$.

Tương tự thì mỗi lần xuất hiện ở các hàng chục, trăm, nghìn, chục nghìn của mỗi chữ số là 24 lần.

Vậy tổng các số thuộc tập $S$ là $840\left(1+10+10^2+10^3+10^4\right)=9333240$.

**Câu 69.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 6 chữ số khác nhau và trong mỗi số đó tổng của ba chữ số đầu lớn hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị

**A.** 32. **B.** 72. **C.** 36. **D.** 24.

**Lời giải**

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần tìm

Ta có $a_6\in\{1;3;5\}$ và $(a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5+a_6)=1$

❍ Với $a_6=1$ thì $(a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5)=2 \Rightarrow \begin{cases}a_1,a_2,a_3\in\{2,3,6\}\\ a_4,a_5\in\{4,5\}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a_1,a_2,a_3\in\{2,4,5\}\\ a_4,a_5\in\{3,6\}\end{cases}$

❍ Với $a_6=3$ thì $(a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5)=4 \Rightarrow \begin{cases}a_1,a_2,a_3\in\{2;4;5\}\\ a_4,a_5\in\{1,6\}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a_1,a_2,a_3\in\{1,4,6\}\\ a_4,a_5\in\{2,5\}\end{cases}$

❍ Với $a_6=5$ thì $(a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5)=6 \Rightarrow \begin{cases}a_1,a_2,a_3\in\{2,3,6\}\\ a_4,a_5\in\{1,4\}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a_1,a_2,a_3\in\{1,4,6\}\\ a_4,a_5\in\{2,3\}\end{cases}$

Mỗi trường hợp có $3!.2!=12$ số thỏa mãn yêu cầu

Vậy có tất cả $6.12=72$ số cần tìm.

**Câu 70.** Tô màu các cạnh của hình vuông $ABCD$ bởi 6 màu khác nhau sao cho mỗi cạnh được tô bởi một màu và hai cạnh kề nhau thì tô bởi hai màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô?

**A.** 360. **B.** 480. **C.** 600. **D.** 630.

**Lời giải**

**Trường hợp 1:** Tô cạnh $AB$ và $CD$ khác màu:

- Số cách tô cạnh $AB$: 6 cách.
- Số cách tô cạnh $BC$: 5 cách (tô khác màu với cạnh $AB$).
- Số cách tô cạnh $CD$: 4 cách (tô khác màu với các cạnh $AB$ và $BC$).
- Số cách tô cạnh $AD$: 4 cách (tô khác màu với các cạnh $AB$ và $CD$).

Theo quy tắc nhân ta có: $6.5.4.4=480$ cách tô cạnh $AB$ và $CD$ khác màu.

**Trường hợp 2:** Tô cạnh $AB$ và $CD$ cùng màu:

- Số cách tô cạnh $AB$: 6 cách.
- Số cách tô cạnh $BC$: 5 cách (tô khác màu với cạnh $AB$).
- Số cách tô cạnh $CD$: 1 cách (tô cùng màu với cạnh $AB$).
- Số cách tô cạnh $AD$: 5 cách (tô khác màu với cạnh $AB$).

Theo quy tắc nhân ta có: $6.5.1.5=150$ cách tô cạnh $AB$ và $CD$ cùng màu.

Vậy số cách tô màu thỏa đề bài là: $480+150=630$ cách.

**Câu 71.** Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 6. Lập các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số đã cho. Tính tổng của các số lập được.

**A.** 12321 **B.** 21312 **C.** 12312 **D.** 21321

**Lời giải**

Mỗi số số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 6 là một chỉnh hợp chập 3 của các chữ số này. Do đó, ta lập được $A_5^3 = 60$ số.

Do vai trò các số 1, 2, 3, 4, 6 như nhau, nên số lần xuất hiện của mỗi chữ số trong các chữ số này ở mỗi hàng (hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm) là như nhau và bằng $60:5=12$ lần.

Vậy, tổng các số lập được là:

$S = 12.(1+2+3+4+6)(100+10+1) = 21312$.

**Câu 72.** Có bao nhiêu số có 10 chữ số được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3 sao cho bất kì 2 chữ số nào đứng cạnh nhau cũng hơn kém nhau 1 đơn vị?

**A.** 32 **B.** 16 **C.** 80 **D.** 64

**Lời giải**

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3...a_{10}}$

**Bước 1**: Xếp số 2 ở vị trí lẻ $a_1$, $a_3$, …, $a_9$ hoặc vị trí chẵn $a_2$, $a_2$, …, $a_{10}$ có 2 cách.

**Bước 2**: Xếp các số 1 hoặc 3 vào các vị trí còn lại có $2^5$ cách.

Theo quy tắc nhân ta có $2.2^5 = 64$ cách.

**Câu 73.** Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số 2011 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9.

**A.** $\frac{9^{2011}-2019.9^{2010}+8}{9}$ **B.** $\frac{9^{2011}-2.9^{2010}+8}{9}$ **C.** $\frac{9^{2011}-9^{2010}+8}{9}$ **D.** $\frac{9^{2011}-19.9^{2010}+8}{9}$

***Lời giải***

Đặt $X$ là các số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán.

$A = \{$ các số tự nhiên không vượt quá 2011 chữ số và chia hết cho $9\}$

Với mỗi số thuộc A có $m$ chữ số $(m \le 2008)$ thì ta có thể bổ sung thêm $2011-m$ số 0 vào phía trước thì số có được không đổi khi chia cho 9. Do đó ta xét các số thuộc A có dạng

$\overline{a_1a_2...a_{2011}}$; $a_i \in \{0,1,2,3,...,9\}$

$A_0 = \{a \in A \,|$ mà trong $a$ không có chữ số $9\}$

$A_1 = \{a \in A \,|$ mà trong $a$ có đúng 1 chữ số $9\}$

- Ta thấy tập A có $1+\frac{9^{2011}-1}{9}$ phần tử
- Tính số phần tử của $A_0$

Với $x \in A_0 \Rightarrow x = \overline{a_1...a_{2011}}; a_i \in \{0,1,2,...,8\}$ $i = \overline{1,2010}$ và $a_{2011} = 9-r$ với $r \in [1;9], r \equiv \sum_{i=1}^{2010} a_i$. Từ đó ta suy ra $A_0$ có $9^{2010}$ phần tử

- Tính số phần tử của $A_1$

Để lập số của thuộc tập $A_1$ ta thực hiện liên tiếp hai bước sau

**Bước 1**: Lập một dãy gồm 2010 chữ số thuộc tập $\{0,1,2...,8\}$ và tổng các chữ số chia hết cho 9.

Số các dãy là $9^{2009}$

**Bước 2:** Với mỗi dãy vừa lập trên, ta bổ sung số 9 vào một vị trí bất kì ở dãy trên, ta có 2010 các bổ sung số 9

Do đó $A_1$ có $2010.9^{2009}$ phần tử.

Vậy số các số cần lập là:

$$1+\frac{9^{2011}-1}{9}-9^{2010}-2010.9^{2009}=\frac{9^{2011}-2019.9^{2010}+8}{9}.$$

**Câu 74.** Từ các số $1,2,3,4,5,6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có 6 chữ số đồng thời thỏa điều kiện: sáu số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 số sau một đơn vị.

**A.** 104 **B.** 106 **C.** 108 **D.** 112

***Lời giải***

**Cách 1:** Gọi $x=\overline{a_1a_2...a_6}$, $a_i\in\{1,2,3,4,5,6\}$ là số cần lập

Theo bài ra ta có: $a_1+a_2+a_3+1=a_4+a_5+a_6$ (1)

Mà $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\in\{1,2,3,4,5,6\}$ và đôi một khác nhau nên

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=1+2+3+4+5+6=21$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: $a_1+a_2+a_3=10$

Phương trình này có các bộ nghiệm là: $(a_1,a_2,a_3)=(1,3,6);\ (1,4,5);\ (2,3,5)$

Với mỗi bộ ta có $3!.3!=36$ số.

Vậy có $3.36=108$ số cần lập.

**Cách 2:** Gọi $x=\overline{abcdef}$ là số cần lập

Ta có: $\begin{cases}a+b+c+d+e+f=1+2+3+4+5+6=21\\a+b+c=d+e+f+1\end{cases}$

$\Rightarrow a+b+c=11$. Do $a,b,c\in\{1,2,3,4,5,6\}$

Suy ra ta có các cặp sau: $(a,b,c)=(1,4,6);\ (2,3,6);\ (2,4,5)$

Với mỗi bộ như vậy ta có $3!$ cách chọn $a,b,c$ và $3!$ cách chọn $d,e,f$

Do đó có: $3.3!.3!=108$ số thỏa yêu cầu bài toán.

# Bài 2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Hoán vị

#### 1. Định nghĩa

Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.

Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự $n$ phần tử của tập hợp $A$ được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

***Ví dụ 1.*** Hãy liệt kê tất cả các số gồm ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $1,2,3$.

***Giải***

Các số gồm ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $1,2,3$ là:

$123,132,213,231,312,321$

#### 2. Số các hoán vị

Kí hiệu $P_n$ là số các hoán vị của $n$ phần tử. Ta có: $P_n = n(n-1)\ldots 2\,.\,1$ .

***Quy ước:*** Tích $1\,.\,2\ldots n$ được viết là $n$ ! (đọc là $n$ giai thừa), tức là $n! = 1.2\ldots n$. Như vậy $P_n = n!$.

***Ví dụ 2.*** Tính số cách xếp thứ tự đá luân lưu $11m$ của 5 cầu thủ.

***Giải.***

Mỗi cách xếp thứ tự đá luân lưu 11m của 5 cầu thủ là một hoán vị của 5 cầu thủ. Vậy số cách sắp xếp là:

$P_5 = 5.4.3.2.1 = 120$

### II. Chỉnh hợp

#### 1. Định nghĩa

Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử và một số nguyên $k$ với $1 \le k \le n$.

Kết quả của việc lấy $k$ phần tử từ $n$ phần tử của tập hợp $A$ và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập $k$ của n phần tử đã cho.

***Ví dụ 3.*** Hãy liệt kê tất cả các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ các chữ số $1,2$ ,

***Giải***

Các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ các chữ số $1,2,3,4,5$ là:

$12,13,14,15,21,23,24,25,31,32,34,35,41,42,43,45,51,52,53,54.$

#### 2. Số các chỉnh hợp

Kí hiệu $A_n^k$ là số các chỉnh hợp chập $k$ của $n$ phần tử $(1 \le k \le n)$.

Ta có: $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

***Ví dụ 4.*** Ở các căn hộ chung cư, người ta thường dùng các chữ số để tạo mật mã mở cửa. Gia đình bạn Linh đặt mật mã nhà là một dãy số gồm 6 chữ số đôi một khác nhau. Hỏi gia đình bạn Linh có bao nhiêu cách để tạo mật mã?

***Giải***

Mỗi mật mã của gia đình bạn Linh là một chỉnh hợp chập 6 của 10 chữ số.

Vậy có $A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$ (cách để tạo mật mã).

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. HOÁN VỊ

**Câu 1.** Rút gọn:

$$A=\frac{12!5!}{10!6!}\quad B=\frac{(n-1)!.(n+1)!}{n!(n-2)!}\quad C=\frac{P_n-P_{n-1}}{(n-2)!}$$

**Câu 2.** Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ vào 1 hàng dọc theo 1 thứ tự bất kỳ?

**Câu 3.** Có 3 cuốn sách lý, 4 cuốn sách sinh, 5 cuốn sách địa lý. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các cuốn sách trên vào giá sách nếu:

a. Sắp xếp tùy ý?

b. Các cuốn sách cùng môn học đứng cạnh nhau?

**Câu 4.** (học sinh giải theo 2 cách: quy tắc đếm và hoán vị) Cho các số tự nhiên: 0, 1, 2, 3, 4.

a. Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?

b. Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và chữ số 3 đứng ở chính giữa?

**Câu 5.** Bao nhiêu cách sắp xếp 7 bạn A, B, C, D, E, F, G vào 1 hàng sao cho

a. A đứng chính giữa?

b. A,B ngồi đứng 2 đầu dãy?

**Câu 6.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 10 viên bi đỏ và 10 viên bi xanh vào 1 hàng sao không có 2 viên bi nào cùng màu đứng gần nhau?

**Câu 7.** Tính số các số tự nhiên đôi một khác nhau có 6 chữ số tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 sao cho 2 chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau

### DẠNG 2. CHỈNH HỢP

**Câu 8.** Rút gọn

$$M=\frac{A_n^6+A_n^5}{A_n^4}\quad N=\frac{A_5^2.A_6^3}{P_6}-\frac{A_5^3}{P_6}\quad E=\frac{P_n}{(n-3)!A_n^2}-\frac{P_{n+1}}{(n+2)!}$$

**Câu 9.** Có thể lập được bao nhiêu vecto từ các đỉnh của hình ngũ giác đều?

**Câu 10.** Một nhà hàng có 10 món đặc sản. Mỗi ngày nhà hàng đó chọn ra 2 món ăn khác nhau, trưa 1 món, tối 1 món. Hỏi nhà hàng đó có bao nhiêu cách chọn?

**Câu 11.** (Học sinh giải theo 2 cách: quy tắc đếm và chỉnh hợp) Cho các số tự nhiên 0,1,2,3,4,5,6,7.

a. Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

b. Bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau?

**Câu 12.** Một đội bóng có 22 cầu thủ, cần chọn ra 11 cầu thủ thi đấu chính thức. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

a. Ai cũng có thể chơi ở bất kì vị trí nào?

b. Chỉ có cầu thủ A làm thủ môn còn các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được?

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### DẠNG 1. HOÁN VỊ

**Câu 1.** Từ các chữ số $2,3,4,5,6,7$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm $6$ chữ số khác nhau?

**A.** $256$. **B.** $720$. **C.** $120$. **D.** $24$.

**Câu 2.** Cho các số $1,5,6,7$. Có bao nhiêu số tự nhiên có $4$ chữ số với các số khác nhau lập từ các số đã cho.

**A.** $64$. **B.** $24$. **C.** $256$. **D.** $12$.

**Câu 3.** Cho $A=\{1,2,3,4\}$. Từ $A$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có $4$ chữ số đôi một khác nhau?

**A.** $32$. **B.** $24$. **C.** $256$. **D.** $18$.

**Câu 4.** Từ các chữ số $1,2,3,4,5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm $5$ chữ số đôi một khác nhau:

**A.** $120$. **B.** $720$. **C.** $16$. **D.** $24$.

**Câu 5.** Từ các số $1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có $5$ chữ số khác nhau đôi một?

**A.** $60$. **B.** $120$. **C.** $24$. **D.** $48$.

**Câu 6.** Cho tập hợp $X$ gồm $10$ phần tử. Số các hoán vị của $10$ phần tử của tập hợp $X$ là

**A.** $10!$. **B.** $10^2$. **C.** $2^{10}$. **D.** $10^{10}$.

**Câu 7.** Số các số có $6$ chữ số khác nhau không bắt đầu bởi $12$ được lập từ 1; 2; 3; 4; 5; 6 là

**A.** $720$. **B.** $966$. **C.** $696$. **D.** $669$.

**Câu 8.** Từ các chữ số $0, 2, 3, 5, 6, 8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm $6$ chữ số đôi một khác nhau trong đó hai chữ số $0$ và $5$ không đứng cạnh nhau.

**A.** $384$. **B.** $120$. **C.** $216$. **D.** $600$.

**Câu 9.** Có bao nhiêu cách sắp xếp $5$ học sinh thành một hàng dọc?

**A.** $5^5$. **B.** $5!$. **C.** $4!$. **D.** $5$.

**Câu 10.** Số cách xếp 5 học sinh ngồi vào một bàn dài là

**A.** $120$. **B.** $24$. **C.** $5$. **D.** $1$.

**Câu 11.** Có bao nhiêu các sắp xếp 10 bạn học sinh thành một hàng ngang ?

**A.** $P_{10}$. **B.** $C_{10}^1$. **C.** $A_{10}^1$. **D.** $C_{10}^{10}$.

**Câu 12.** Ban chấp hành chi đoàn lớp 11D có bạn An, Bình, Công. Hỏi có bao nhiêu cách phân công các bạn này vào các chức vụ Bí thư, phó Bí thư và Ủy viên mà không bạn nào kiêm nhiệm?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $9$.

**Câu 13.** Có tất cả bao nhiêu cách xếp $6$ quyển sách khác nhau vào một hàng ngang trên giá sách?

**A.** $5!$ **B.** $6^5$ **C.** $6!$ **D.** $6^6$

**Câu 14.** Trong kỳ thi THPT Quốc gia năm 2017 tại một điểm thi có $5$ sinh viên tình nguyện được phân công trực hướng dẫn thí sinh ở $5$ vị trí khác nhau. Yêu cầu mỗi vị trí có đúng $1$ sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách phân công vị trí trực cho $5$ người đó?

**A.** $120$. **B.** $625$. **C.** $3125$ **D.** $80$.

**Câu 15.** Trong kì thi THPT Quốc gia năm $2017$ tại một Điểm thi có $5$ sinh viên tình nguyện được phân công trực hướng dẫn thi sinh ở $5$ vị trí khác nhau. Yêu cầu mỗi vị trí có đúng $1$ sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách phân công vị trí trực cho $5$ người đó?

**A.** $625$. **B.** $3125$. **C.** $120$. **D.** $80$.

**Câu 16.** Có một con mèo vàng, 1 con mèo đen, 1 con mèo nâu, 1 con mèo trắng, 1 con mèo xanh, 1 con mèo tím. Xếp 6 con mèo thành hàng ngang vào $6$ cái ghế, mỗi ghế một con. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ sao cho mèo vàng và mèo đen ở cạnh nhau.

**A.** $720$. **B.** $120$. **C.** $144$. **D.** $240$.

**Câu 17.** Tính số cách sắp xếp $6$ nam sinh và $4$ nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có $10$ chỗ ngồi sao cho các nữ sinh luôn ngồi cạnh nhau.

**A.** $10!$. **B.** $7!\times 4!$. **C.** $6!\times 4!$. **D.** $6!\times 5!$.

**Câu 18.** Có $6$ học sinh và $2$ thầy giáo được xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho hai thầy giáo không đứng cạnh nhau?

**A.** 30240 cách. **B.** 720 cách. **C.** 362880 cách. **D.** 1440 cách.

**Câu 19.** Cho các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Từ các chữ số đã cho lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có $4$ chữ số và các chữ số đôi một bất kỳ khác nhau.

**A.** $160$. **B.** $156$. **C.** $752$. **D.** $240$.

**Câu 20.** Cho hai dãy ghế được xếp như sau:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Dãy 1 | Ghế số 1 | Ghế số 2 | Ghế số 3 | Ghế số 4 |
| Dãy 2 | Ghế số 1 | Ghế số 2 | Ghế số 3 | Ghế số 4 |

Xếp 4 bạn nam và 4 bạn nữ vào hai dãy ghế trên. Hai người được gọi là ngồi đối diện nhau nếu ngồi ở hai dãy và có cùng vị trí ghế (số ở ghế). Số cách xếp để mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ bằng

**A.** $4!.4!.2^4$. **B.** $4!.4!$. **C.** $4!.2$. **D.** $4!.4!.2$.

**Câu 21.** Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng không ngồi cạnh nhau?

**A.** $24$. **B.** $72$. **C.** $12$. **D.** $48$.

**Câu 22.** Một nhóm học sinh gồm $4$ học sinh nam và $5$ học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp $9$ học sinh trên thành $1$ hàng dọc sao cho nam nữ đứng xen kẽ?

**A.** $5760$. **B.** $2880$. **C.** $120$. **D.** $362880$.

**Câu 23.** Có $3$ viên bi đen khác nhau, $4$ viên bi đỏ khác nhau, $5$ viên bi xanh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các viên bi trên thành dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau?

**A.** $345600$. **B.** $518400$. **C.** $725760$. **D.** $103680$.

**Câu 24.** Có bao nhiêu cách xếp 5 sách Văn khác nhau và 7 sách Toán khác nhau trên một kệ sách dài nếu các sách Văn phải xếp kề nhau?

**A.** $5!.8!$. **B.** $5!.7!$. **C.** $2.5!.7!$. **D.** $12!$.

**Câu 25.** Có bao nhiêu cách sắp xếp $3$ nữ sinh, $3$ nam sinh thành một hàng dọc sao cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ?

**A.** $6$. **B.** $144$. **C.** $720$. **D.** $72$.

**Câu 26.** Xếp $6$ chữ số $1, 1, 2, 2, 3, 4$ thành hàng ngang sao cho hai chữ số giống nhau thì không xếp cạnh nhau. Hỏi có bao nhiêu cách

**A.** $120$ cách. **B.** $96$ cách. **C.** $180$ cách. **D.** $84$ cách.

**Câu 27.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt mà tổng các chữ số là số lẻ?

**A.** $320$. **B.** $144$. **C.** $180$. **D.** $60$.

**Câu 28.** Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có $6$ chữ số khác nhau và trong mỗi số đó tổng của ba chữ số đầu lớn hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị

**A.** $32$. **B.** $72$. **C.** $36$. **D.** $24$.

**Câu 29.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $5,6,7,8,9$. Tính tổng tất cả các số thuộc tập $S$.

**A.** 9333420. **B.** 46666200. **C.** 9333240. **D.** 46666240.

## DẠNG 2. CHỈNH HỢP

**Câu 30.** Cho tập $M=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Số các số tự nhiên gồm $4$ chữ số phân biệt lập từ $M$ là.

**A.** $4!$. **B.** $A_9^4$. **C.** $4^9$. **D.** $C_9^4$.

**Câu 31.** Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau?

**A.** $C_7^2$. **B.** $7^2$. **C.** $A_7^2$. **D.** $2^7$.

**Câu 32.** Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau?.

**A.** $2^8$. **B.** $C_8^2$. **C.** $A_8^2$. **D.** $8^2$.

**Câu 33.** Có bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1,2,3,4,5$?

**A.** $A_5^4$. **B.** $P_5$. **C.** $C_5^4$. **D.** $P_4$.

**Câu 34.** Tính số chỉnh hợp chập 4 của 7 phần tử?

**A.** 24. **B.** 720. **C.** 840. **D.** 35.

**Câu 35.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác 0 và đôi một khác nhau?

**A.** 5!. **B.** $9^5$. **C.** $C_9^5$. **D.** $A_9^5$.

**Câu 36.** Cho tập hợp $S=\{1;2;3;4;5;6\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau lấy từ tập hợp $S$?

**A.** 360. **B.** 120. **C.** 15. **D.** 20.

**Câu 37.** Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số, các chữ số khác nhau và đều khác 0?

**A.** 90. **B.** $9^2$. **C.** $C_9^2$. **D.** $A_9^2$.

**Câu 38.** Từ tập $X=\{2,3,4,5,6\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau?

**A.** 60. **B.** 125. **C.** 10. **D.** 6.

**Câu 39.** Cho tập $A=\{1,2,3,5,7,9\}$. Từ tập $A$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau?

**A.** 720. **B.** 360. **C.** 120. **D.** 24.

**Câu 40.** Cho tập hợp $M$ có 10 phần tử. Số chỉnh hợp chập 2 của 10 phần tử của $M$ là

**A.** $A_{10}^2$. **B.** $C_2^{10}$. **C.** $C_{10}^2$. **D.** $A_2^{10}$.

**Câu 41.** Tính số các chỉnh hợp chập 5 của 7 phần tử.

**A.** 21. **B.** 2520. **C.** 5040. **D.** 120.

**Câu 42.** Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$. Có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau?

**A.** 216. **B.** 120. **C.** 504. **D.** 6.

**Câu 43.** Tính số các chỉnh hợp chập 4 của 7 phần tử.

**A.** 35. **B.** 24. **C.** 720. **D.** 840.

**Câu 44.** Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ có thể lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau

**A.** $C_9^3$. **B.** $A_9^3$. **C.** 9!. **D.** $A_9^3-A_8^2$.

**Câu 45.** Một tổ có 10 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh từ tổ đó để giữ hai chức vụ tổ trưởng và tổ phó.

**A.** $A_{10}^2$. **B.** $C_{10}^2$. **C.** $A_{10}^8$. **D.** $10^2$.

**Câu 46.** Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên của mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả 11 mét. Hỏi huấn luyện viên của mỗi đội sẽ có bao nhiêu cách chọn?

**A.** 55440. **B.** 120. **C.** 462. **D.** 39916800.

**Câu 47.** Một câu lạc bộ có 25 thành viên. Số cách chọn một ban quản lí gồm 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch và 1 thư kí là:

**A.** 13800. **B.** 5600. **C.** Một kết quả khác. **D.** 6900.

**Câu 48.** Trong một lớp có 30 bạn học sinh, hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một bạn để làm lớp trưởng và một bạn khác làm lớp phó?

**A.** $30^2$ **B.** $A_{30}^{28}$ **C.** $A_{30}^2$ **D.** $C_{30}^2$

**Câu 49.** Một câu lạc bộ có 25 thành viên. Số cách chọn một ban quản lí gồm 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch và 1 thư ký là

**A.** 5600. **B.** 13800. **C.** 6900. **D.** Kết quả khác.

**Câu 50.** Một nhóm học sinh có 10 người. Cần chọn 3 học sinh trong nhóm để làm 3 công việc là tưới cây, lau bàn và nhặt rác, mỗi người làm một công việc. Số cách chọn là

**A.** $10^3$. **B.** $3\times 10$. **C.** $C_{10}^3$. **D.** $A_{10}^3$.

**Câu 51.** Số cách sắp xếp 6 học sinh ngồi vào 6 trong 10 ghế trên một hàng ngang là

**A.** $6^{10}$. **B.** $6!$. **C.** $A_{10}^6$. **D.** $C_{10}^6$.

**Câu 52.** Lớp $11A$ có 38 học sinh. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 3 bạn học sinh để sắp xếp làm Lớp trưởng, Lớp phó và Thư kí. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra như vậy?

**A.** 50616. **B.** 8436. **C.** 114. **D.** 41.

**Câu 53.** Có bao nhiêu cách chọn 5 cầu thủ từ 11 trong một đội bóng để thực hiện đá 5 quả luân lưu 11 m, theo thứ tự quả thứ nhất đến quả thứ năm.

**A.** $A_{11}^5$. **B.** $C_{11}^5$. **C.** $A_{11}^2.5!$. **D.** $C_{10}^5$.

**Câu 54.** Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$

**A.** 12. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 8.

**Câu 55.** Cho lục giác $ABCDEF$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ – không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác trên.

**A.** $6^2$. **B.** $2^6$. **C.** $C_6^2$. **D.** $A_6^2$.

**Câu 56.** Số các số gồm 5 chữ số khác nhau chia hết cho 10 là

**A.** 5436. **B.** 3024. **C.** 3260. **D.** 12070.

**Câu 57.** Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau?

**A.** $C_9^3$. **B.** $A_9^3$. **C.** $9!$. **D.** $A_9^3 - A_8^2$.

**Câu 58.** Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

**A.** 15. **B.** 4096. **C.** 360. **D.** 720.

**Câu 59.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên không chia hết cho 5, gồm 4 chữ số khác nhau?

**A.** 120. **B.** 72. **C.** 69. **D.** 54.

**Câu 60.** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 3 chữ số khác nhau.

**A.** 500. **B.** 405. **C.** 360. **D.** 328.

**Câu 61.** Từ các số $0;1;2;3;5$ có thể lập thành bao nhiêu số tự nhiên không chia hết cho 5 gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

**A.** 120. **B.** 54. **C.** 72. **D.** 69.

**Câu 62.** Cho tập hợp $A=\{0;1;2;3;4;5\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và lớn hơn 350?

**A.** 32. **B.** 40. **C.** 43. **D.** 56.

**Câu 63.** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau, sao cho trong mỗi số đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0?

**A.** 7056. **B.** 120. **C.** 5040. **D.** 15120.

**Câu 64.** Có bao nhiêu số chẵn mà mỗi số có 4 chữ số đôi một khác nhau?

**A.** 2520. **B.** 50000. **C.** 4500. **D.** 2296.

**Câu 65.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

**A.** 72. **B.** 120. **C.** 54. **D.** 69.

**Câu 66.** Từ các chữ số của tập hợp $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau mà trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0?

**A.** 504. **B.** 480. **C.** 720. **D.** 120.

**Câu 67.** Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Từ các chữ số đã cho lập được bao nhiêu số chẵn có bốn chữ số và các chữ số phải khác nhau.

**A.** 160. **B.** 156. **C.** 752. **D.** 240.

**Câu 68.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau.

**A.** 648 **B.** 1000 **C.** 729 **D.** 720

**Câu 69.** Cho tập hợp $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Hỏi từ tập $A$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho một trong 3 chữ số đầu tiên phải bằng 1.

**A.** 2802. **B.** 2280. **C.** 65. **D.** 2520.

**Câu 70.** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 3 chữ số khác nhau?

**A.** 500. **B.** 328. **C.** 360. **D.** 405.

**Câu 71.** Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 6. Lập các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số đã cho. Tính tổng của các số lập được.

**A.** 12321. **B.** 21312. **C.** 12312. **D.** 21321.

**Câu 72.** Có bao nhiêu số tự nhiên có bẩy chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3.

**A.** 3204 số. **B.** 249 số. **C.** 2942 số. **D.** 7440 số.

**Câu 73.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau nằm trong khoảng $(300;500)$

**A.** 24. **B.** 25. **C.** 23. **D.** 22.

**Câu 74.** Từ các chữ số $0,1,2,3,4,5,6$ có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho có 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ đứng cạnh nhau.

**A.** 360. **B.** 144. **C.** 252. **D.** 108.

# Bài 2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Hoán vị

#### 1. Định nghĩa

Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.

Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự $n$ phần tử của tập hợp $A$ được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

***Ví dụ 1.*** Hãy liệt kê tất cả các số gồm ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $1,2,3$.

***Giải***

Các số gồm ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $1,2,3$ là:

$123,132,213,231,312,321$

#### 2. Số các hoán vị

Kí hiệu $P_n$ là số các hoán vị của $n$ phần tử. Ta có: $P_n = n(n-1)\ldots 2\,.\,1$ .

***Quy ước:*** Tích $1\,.\,2\ldots n$ được viết là $n$ ! (đọc là $n$ giai thừa), tức là $n! = 1.2\ldots n$. Như vậy $P_n = n!$.

***Ví dụ 2.*** Tính số cách xếp thứ tự đá luân lưu $11m$ của 5 cầu thủ.

***Giải.***

Mỗi cách xếp thứ tự đá luân lưu 11m của 5 cầu thủ là một hoán vị của 5 cầu thủ. Vậy số cách sắp xếp là:

$P_5 = 5.4.3.2.1 = 120$

### II. Chỉnh hợp

#### 1. Định nghĩa

Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử và một số nguyên $k$ với $1 \le k \le n$.

Kết quả của việc lấy $k$ phần tử từ $n$ phần tử của tập hợp $A$ và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập $k$ của n phần tử đã cho.

***Ví dụ 3.*** Hãy liệt kê tất cả các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ các chữ số $1,2$ ,

***Giải***

Các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ các chữ số $1,2,3,4,5$ là:

$12,13,14,15,21,23,24,25,31,32,34,35,41,42,43,45,51,52,53,54.$

#### 2. Số các chỉnh hợp

Kí hiệu $A_n^k$ là số các chỉnh hợp chập $k$ của $n$ phần tử $(1 \le k \le n)$.

Ta có: $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

***Ví dụ 4.*** Ở các căn hộ chung cư, người ta thường dùng các chữ số để tạo mật mã mở cửa. Gia đình bạn Linh đặt mật mã nhà là một dãy số gồm 6 chữ số đôi một khác nhau. Hỏi gia đình bạn Linh có bao nhiêu cách để tạo mật mã?

***Giải***

Mỗi mật mã của gia đình bạn Linh là một chỉnh hợp chập 6 của 10 chữ số.

Vậy có $A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$ (cách để tạo mật mã).

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. HOÁN VỊ

**Câu 1.** Rút gọn:

$A=\dfrac{12!5!}{10!6!}$ $B=\dfrac{(n-1)!.(n+1)!}{n!(n-2)!}$ $C=\dfrac{P_n-P_{n-1}}{(n-2)!}$

**Lời giải**

$A=\dfrac{12!5!}{10!6!}=\dfrac{11.12}{6}=22$

$B=\dfrac{(n-1)!.(n+1)!}{n!(n-2)!}=(n-1)(n+1)=n^2-1$

$C=\dfrac{P_n-P_{n-1}}{(n-2)!}=\dfrac{(n-1)!(n-1)}{(n-2)!}=(n-1)^2$

**Câu 2.** Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ vào 1 hàng dọc theo 1 thứ tự bắt kỳ?

**Lời giải**

Số cách sắp xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ vào 1 hàng dọc theo 1 thứ tự bắt kỳ có 10! **Cách**.

**Câu 3.** Có 3 cuốn sách lý, 4 cuốn sách sinh, 5 cuốn sách địa lý. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các cuốn sách trên vào giá sách nếu:

a. Sắp xếp tùy ý?

b. Các cuốn sách cùng môn học đứng cạnh nhau?

**Lời giải**

a. Có tất cả 12 cuốn sách nên có 12! cách sắp xếp các cuốn sách trên vào giá sách.

b. Ta phân giá sách làm 3 khu để 3 loại sách toán; lý; hóa có tất cả 3! cách phân như vậy.

Có 3! cách sắp xếp 3 cuốn sách lý vào khu đã được phân.

Có 4! cách sắp xếp 4 cuốn sách sinh vào khu đã được phân.

Có 5! cách sắp xếp 5 cuốn sách địa vào khu đã được phân.

Vậy có tất cả 3!3!4!5! = 103680 cách sắp xếp các cuốn sách cùng môn học đứng cạnh nhau trên giá.

**Câu 4.** (học sinh giải theo 2 cách: quy tắc đếm và hoán vị) Cho các số tự nhiên: 0, 1, 2, 3, 4.

a. Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?

b. Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và chữ số 3 đứng ở chính giữa?

**Lời giải**

**Cách 1**

a. Số tự nhiên cần lập có dạng abcde (a ≠0)

Trong đó chữ sổ a có 4 cách chọn.

Chữ số b có 4 cách chọn.

Chữ số c có 3 cách chọn.

Chữ số d có 2 cách chọn.

Chữ số e có 1 cách chọn.

Nên có tất cả 4.4.3.2.1 = 96 số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

b. Số tự nhiên cần lập có dạng *ab3de* (a ≠0).

Chữ số a có 3 cách chọn.

Chữ số b có 3 cách chọn.

Chữ số d có 2 cách chọn.

Chừ sô e có 1 cách chọn.

Vậy thành lập được tất cả 3.3.2 = 18 số có 5 chữ số khác nhau mà số 3 đứng chính giữa từ các số trên.

**Cách 2.**

**a.** Mỗi số có 5 chữ số khác nhau được thành lập từ các số trên là một hoán vị của {0; 1; 2; 3; 4}.

Các số có dạng *0abcd* mà a;b;c;d khác nhau là một hoán vị của các số {1; 2; 3; 4}.

Nên 5 có tất cả 5! - 4! = 96 số có 5 chữ số khác nhau được thành lập từ các số trên.

b. Tương tự phần a; các số có dạng *ab3de* bằng với số hoán vị của 4 số {0; 1; 2; 4}.

Các số có dạng *0a3cd* bằng số hoán vị của 3 số {l;2;4}.

Nên có tất cả 4!—3! = 18 số có 5 chữ số khác nhau có số 3 đứng giữa được thành lập từ các số trên.

**Câu 5.** Bao nhiêu cách sắp xếp 7 bạn A, B, C, D, E, F, G vào 1 hàng sao cho

a. A đứng chính giữa?

b. A,B ngồi đứng 2 đầu dãy?

**Lời giải**

Vì bạn A đứng chính giữa và 6 bạn còn lại sắp xép tùy ý nên có 6! cách sắp xếp một hàng.

Vi bạn A; B đứng 2 đầu dãy nên A;B có 2 cách chọn vị trí đứng. 5 bạn còn lại có 5! Cách sắp xếp. 5!cách sắp xếp.

Vậy có tất cả 2.5! cách sắp xếp 7 bạn thành 1 hàng sao cho A,B đứng 2 đầu dãy.

**Câu 6.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 10 viên bi đỏ và 10 viên bi xanh vào 1 hàng sao không có 2 viên bi nào cùng màu đứng gần nhau?

**Lời giải**

Ta đánh số vị trí của hàng bằng các số 1 đến 20. Vì các viên bi cùng màu không đứng gần nhau nên các viên bi cùng màu được đánh số cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Cách sắp xếp 10 viên bị đỏ vào 10 vị trí cùng chẵn hoặc cùng lẻ có 10! cách.

Cách sắp xếp 10 viên bị đỏ vào 10 vị trí cùng chẵn hoặc cùng lẻ có 10! cách.

Vậy có tất cả 2.10! 10! cách sắp xếp 10 viên bi đỏ và 10 viên bi xanh vào 1 hàng sao cho không có 2 viên bi nào cùng màu đứng gần nhau.

**Câu 7.** Tính số các số tự nhiên đôi một khác nhau có 6 chữ số tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 sao cho 2 chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau

**Lời giải**

Xét số có 5 chữ số gồm 0, 1, 2, 5 và chữ số "kép" là (3,4).

+ Loại 1: chữ số hàng trăm ngàn có thể là 0.

- Bước 1: sắp 5 chữ số vào 5 vị trí có 5! = 120 cách.

- Bước 2: với mỗi cách sắp chữ số kép có 2 hoán vị chữ số 3 và 4.

Suy ra có 120.2 = 240 số.

+ Loại 2: chữ số hàng trăm ngàn là 0.

- Bước 1: sắp 4 chữ số vào 4 vị trí còn lại có 4! = 24 cách.

- Bước 2: với mỗi cách sắp chữ số kép có 2 hoán vị chữ số 3 và 4.

Suy ra có 24.2 = 48 số. Vậy có 240 - 48 = 192 số.

## DẠNG 2. CHỈNH HỢP

**Câu 8.** Rút gọn

$$M=\frac{A_n^6+A_n^5}{A_n^4} \quad N=\frac{A_5^2.A_6^3}{P_6}-\frac{A_5^3}{P_6} \quad E=\frac{P_n}{(n-3)!A_n^2}-\frac{P_{n+1}}{(n+2)!}$$

**Lời giải**

$$M=\frac{A_n^6+A_n^5}{A_n^4}=\frac{\frac{n!}{(n-6)!}+\frac{n!}{(n-5)!}}{\frac{n!}{(n-4)!}}=\frac{\frac{n!}{(n-5)!}.(n-5+1)}{\frac{n!}{(n-4)!}}=\frac{(n-4)}{\frac{1}{(n-4)}}=(n-4)^2$$

$$N=\frac{A_5^2.A_6^3}{P_6}-\frac{A_5^3}{P_6}=\frac{\frac{5!}{3!}.\frac{6!}{3!}}{6!}-\frac{\frac{5!}{2!}}{6!}=\frac{\frac{5!}{2!}\left(\frac{1}{3}.\frac{6!}{3!}-1\right)}{6!}=\frac{5!}{2!6!}\left(\frac{6!}{3.3!}-1\right)=\frac{13}{4}$$

$$E=\frac{P_n}{(n-3)!A_n^2}-\frac{P_{n+1}}{(n+2)!}=\frac{n!}{(n-3)!\frac{n!}{(n-2)!}}-\frac{(n+1)!}{(n+2)!}=n-2-\frac{1}{n+2}$$

**Câu 9.** Có thể lập được bao nhiêu vecto từ các đỉnh của hình ngũ giác đều?

**Lời giải**

Hình ngũ giác đều có tất cả 5 đỉnh. Cứ 2 đỉnh bất kì cho ta 2 vecto. Nên số vecto tạo từ các đỉnh của hình ngũ giác là $A_5^2=20$ vecto.

**Câu 10.** Một nhà hàng có 10 món đặc sản. Mỗi ngày nhà hàng đó chọn ra 2 món ăn khác nhau, trưa 1 món, tối 1 món. Hỏi nhà hàng đó có bao nhiêu cách chọn?

**Lời giải**

Số cách chọn 2 món khác nhau từ 10 món là: $A_{10}^2=90$ cách chọn.

**Câu 11.** (Học sinh giải theo 2 cách: quy tắc đếm và chỉnh hợp) Cho các số tự nhiên 0,1,2,3,4,5,6,7.

a. Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

b. Bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau?

**Lời giải**

**Cách 1:**

a. Gọi số cần lập là $\overline{abcd}$.

Vì $a\neq 0$ nên có 7 cách chọn, b có 7 cách chọn, c có 6 cách chọn, d có 5 cách chọn.

Vậy số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số trên là 7.7.6.5=1470 số.

b. Gọi số cần lập là $\overline{abc}$

Vì số cần lập là số chẵn nên c=0;2;4;6.

- Nếu c=0 thì a có 7 cách chọn, b có 6 cách chọn.

Vậy có tất cả 7.6=42 số có dạng $\overline{ab0}$ được thành lập từ các số trên.

- Nếu c=2;4;6 thì a có 6 cách chọn; b có 6 cách chọn.

Vậy có tất cả 3.6.6=108 số.

Vậy số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau được thành lập từ các số trên là 108+42=150 số.

**Cách 2:**

a. Số có 4 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số trên là: $A_8^4=1680$ số.

Số có dạng $\overline{0abc}(a,b,c)$ khác nhau được thành lập từ các chữ số trên là: $A_7^3=210$ số.

Vậy số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau được thành lập từ các số trên là: $A_8^4-A_7^3=1470$ số.

b. Số số có 3 chữ số được thành lập từ các chữ số trên là: $A_8^3-A_7^2=294$ số.

Gọi số cần lập $\overline{abc}$ là số lẻ. Khi đó c có cách chọn, a có 6 cách chọn, b có 6 cách chọn. Vậy số lẻ được thành lập từ các chữ số trên là: 4.6.6=144 số.

Vậy số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau được thành lập từ các số trên là: 294-144=150 số.

**Câu 12.** Một đội bóng có 22 cầu thủ, cần chọn ra 11 cầu thủ thi đấu chính thức. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

a. Ai cũng có thể chơi ở bất kì vị trí nào?

b. Chỉ có cầu thủ A làm thủ môn còn các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được?

**Lời giải**

a. Số cách chọn 11 cầu thủ trong 22 cầu thủ ra sân thi đấu là $A_{22}^{11}$.

b. Số cách chọn 11 cầu thủ trong đó cầu thủ A làm thủ môn còn các cầu thủ khác vào vị trí nào cũng được là: $A_{21}^{10}$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### DẠNG 1. HOÁN VỊ

**Câu 1.** Từ các chữ số $2,3,4,5,6,7$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm $6$ chữ số khác nhau?

**A.** $256$. **B.** $720$. **C.** $120$. **D.** $24$.

**Lời giải**

Số cách lập số tự nhiên có $6$ chữ số khác nhau từ các chữ số đã cho là số hoán vị của $6$ phần tử, do đó có $6!=720$

**Câu 2.** Cho các số $1,5,6,7$. Có bao nhiêu số tự nhiên có $4$ chữ số với các số khác nhau lập từ các số đã cho.

**A.** $64$. **B.** $24$. **C.** $256$. **D.** $12$.

**Lời giải**

Số các số tự nhiên có $4$ chữ số với các số khác nhau lập từ các số đã cho là: $4!=24$ số.

**Câu 3.** Cho $A=\{1,2,3,4\}$. Từ $A$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có $4$ chữ số đôi một khác nhau?

**A.** $32$. **B.** $24$. **C.** $256$. **D.** $18$.

**Lời giải**

Mỗi số tự nhiên tự nhiên có $4$ chữ số khác nhau được lập từ tập $A$ là hoán vị của $4$ phần tử.

Vậy có $4!=24$ số cần tìm.

**Câu 4.** Từ các chữ số $1$, $2$, $3$, $4$, $5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm $5$ chữ số đôi một khác nhau:

**A.** $120$. **B.** $720$. **C.** $16$. **D.** $24$.

**Lời giải**

Mỗi số tự nhiên gồm $5$ chữ số khác nhau được lập từ các số $1$, $2$, $3$, $4$, $5$ là một hoán vị của $5$ phần tử đó. Nên số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $P_5=5!=120$ (số).

**Câu 5.** Từ các số $1$, $2$, $3$, $4$, $5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có $5$ chữ số khác nhau đôi một?

**A.** $60$. **B.** $120$. **C.** $24$. **D.** $48$.

**Lời giải**

Mỗi cách lập số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau đôi một hoán vị của 5 phần tử.

Vậy có $5!=120$ số cần tìm.

**Câu 6.** Cho tập hợp $X$ gồm $10$ phần tử. Số các hoán vị của $10$ phần tử của tập hợp $X$ là

**A.** $10!$. **B.** $10^2$. **C.** $2^{10}$. **D.** $10^{10}$.

**Lời giải**

Số các hoán vị của $10$ phần tử: $10!$.

**Câu 7.** Số các số có $6$ chữ số khác nhau không bắt đầu bởi $12$ được lập từ 1; 2; 3; 4; 5; 6 là

**A.** $720$. **B.** $966$. **C.** $696$. **D.** $669$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Lập số tự nhiên có $6$ chữ số khác nhau, ta tìm được: $6!$ số.

Lập số tự nhiên có $6$ chữ số khác nhau nhưng bắt đầu bằng $12$, ta tìm được: $4!$ số.

Vậy số các số có $6$ chữ số khác nhau không bắt đầu bởi $12$ là $6!-4!=696$ số.

**Câu 8.** Từ các chữ số $0, 2, 3, 5, 6, 8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm $6$ chữ số đôi một khác nhau trong đó hai chữ số $0$ và $5$ không đứng cạnh nhau.

**A.** $384$. **B.** $120$. **C.** $216$. **D.** $600$.

**Lời giải**

Số các số có $6$ chữ số được lập từ các chữ số $0, 2, 3, 5, 6, 8$ là $6!-5!$.

Số các số có chữ số $0$ và $5$ đứng cạnh nhau: $2.5!-4!$.

Số các số có chữ số $0$ và $5$ không đúng cạnh nhau là: $6!-5!-(2.5!-4!)=384$.

**Câu 9.** Có bao nhiêu cách sắp xếp $5$ học sinh thành một hàng dọc?

**A.** $5^5$. **B.** $5!$. **C.** $4!$. **D.** $5$.

**Lời giải**

Số cách sắp xếp $5$ học sinh thành một hàng dọc là $5!$.

**Câu 10.** Số cách xếp 5 học sinh ngồi vào một bàn dài là

**A.** $120$. **B.** $24$. **C.** $5$. **D.** $1$.

**Lời giải**

Ta có số cách xếp 5 học sinh vào một bàn dài là số các hoán vị của $5$ học sinh đó. Vậy kết quả là: $P_5=5!=120$.

**Câu 11.** Có bao nhiêu các sắp xếp 10 bạn học sinh thành một hàng ngang ?

**A.** $P_{10}$. **B.** $C_{10}^1$. **C.** $A_{10}^1$. **D.** $C_{10}^{10}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Mỗi cách xếp 10 học sinh thành một hàng ngang là một hoán vị của tập hợp có 10 phần tử.

Suy ra số cách sắp xếp là $P_{10}$.

**Câu 12.** Ban chấp hành chi đoàn lớp 11D có bạn An, Bình, Công. Hỏi có bao nhiêu cách phân công các bạn này vào các chức vụ Bí thư, phó Bí thư và Ủy viên mà không bạn nào kiêm nhiệm?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Mỗi cách phân công $3$ bạn An, Bình, Công vào $3$ chức vụ Bí thư, phó Bí thư và Ủy viên mà không bạn nào kiêm nhiệm là một hoán vị của $3$ phần tử. Vậy có $3!=6$ cách.

**Câu 13.** Có tất cả bao nhiêu cách xếp $6$ quyển sách khác nhau vào một hàng ngang trên giá sách?

**A.** $5!$ **B.** $6^5$ **C.** $6!$ **D.** $6^6$

**Lời giải**

**Chọn C**

Mỗi cách sắp xếp $6$ quyển sách khác nhau vào một hàng ngang trên giá sách là một hoán vị của $6$ phần tử. Vậy số cách sáp xếp là $6!$.

**Câu 14.** Trong kỳ thi THPT Quốc gia năm 2017 tại một điểm thi có $5$ sinh viên tình nguyện được phân công trực hướng dẫn thí sinh ở $5$ vị trí khác nhau. Yêu cầu mỗi vị trí có đúng $1$ sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách phân công vị trí trực cho $5$ người đó?

**A.** $120$. **B.** $625$. **C.** $3125$ **D.** $80$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Mỗi cách xếp 5 sinh viên vào 5 vị trí thỏa đề là một hoán vị của 5 phần tử.

Suy ra số cách xếp là $5!=120$ cách.

**Câu 15.** Trong kì thi THPT Quốc gia năm 2017 tại một Điểm thi có 5 sinh viên tình nguyện được phân công trực hướng dẫn thi sinh ở 5 vị trí khác nhau. Yêu cầu mỗi vị trí có đúng 1 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách phân công vị trí trực cho 5 người đó?

**A.** 625. **B.** 3125. **C.** 120. **D.** 80.

**Lời giải**

Số cách phân công 5 vị trí trực khác nhau cho 5 người là: $5!=120$.

**Câu 16.** Có một con mèo vàng, 1 con mèo đen, 1 con mèo nâu, 1 con mèo trắng, 1 con mèo xanh, 1 con mèo tím. Xếp 6 con mèo thành hàng ngang vào 6 cái ghế, mỗi ghế một con. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ sao cho mèo vàng và mèo đen ở cạnh nhau.

**A.** 720. **B.** 120. **C.** 144. **D.** 240.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số cách xếp con mèo vàng và con mèo đen ở cạnh nhau là: 2.

Xem nhóm con mèo vàng và đen này là một phần tử, cùng với 1 con mèo nâu, 1 con mèo trắng, 1 con mèo xanh, 1 con mèo tím, ta được 5 phần tử. Xếp 5 phần tử này là: 5!.

Vậy có: $2.5!=240$.

**Câu 17.** Tính số cách sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ ngồi sao cho các nữ sinh luôn ngồi cạnh nhau.

**A.** $10!$. **B.** $7!\times 4!$. **C.** $6!\times 4!$. **D.** $6!\times 5!$.

**Lời giải:**

**Chọn B**

Sắp xếp 4 nữ sinh vào 4 ghế: 4! cách.

Xem 4 nữ sinh lập thành nhóm X, sắp xếp nhóm X cùng với 6 nam sinh: có 7! cách

vậy có $7!\times 4!$ cách sắp xếp.

**Câu 18.** Có 6 học sinh và 2 thầy giáo được xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho hai thầy giáo không đứng cạnh nhau?

**A.** 30240 cách. **B.** 720 cách. **C.** 362880 cách. **D.** 1440 cách.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xếp 8 người thành hàng ngang có $P_8$ cách.

Xếp 8 người thành hàng ngang sao cho 2 thầy giáo đứng cạnh nhau có 7.2!.6! cách.

Vậy số cách xếp cần tìm là: $P_8-7.2!.6!=30240$ cách.

**Câu 19.** Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Từ các chữ số đã cho lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số và các chữ số đôi một bất kỳ khác nhau.

**A.** 160. **B.** 156. **C.** 752. **D.** 240.

**Lời giải**

Gọi số cần tìm là: $\overline{abcd}$ (với $b,c,d\in\{0;1;2;3;4;5\}$, $a\in\{1;2;3;4;5\}$).

□ **Trường hợp 1:**

Chọn $d=0$, nên có 1 cách chọn.

Chọn $a \in \{1,2,3,4,5\}$ nên có $5$ cách chọn.

Chọn $b$ có $4$ cách chọn.

Chọn $c$ có $3$ cách chọn.

Suy ra, có $1.5.4.3 = 60$ số.

**Trường hợp 2:**

Chọn $d \in \{2,4\}$, nên có $2$ cách chọn.

Chọn $a \neq 0$ nên có $4$ cách chọn.

Chọn $b$ có $4$ cách chọn.

Chọn $c$ có $3$ cách chọn.

Suy ra, có $2.4.4.3 = 96$ số.

Vậy có tất cả: $60 + 96 = 156$ số.

**Câu 20.** Cho hai dãy ghế được xếp như sau:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Dãy 1 | Ghế số 1 | Ghế số 2 | Ghế số 3 | Ghế số 4 |
| Dãy 2 | Ghế số 1 | Ghế số 2 | Ghế số 3 | Ghế số 4 |

Xếp 4 bạn nam và 4 bạn nữ vào hai dãy ghế trên. Hai người được gọi là ngồi đối diện nhau nếu ngồi ở hai dãy và có cùng vị trí ghế (số ở ghế). Số cách xếp để mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ bằng

**A.** $4!.4!.2^4$. **B.** $4!.4!$. **C.** $4!.2$. **D.** $4!.4!.2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xếp 4 bạn nam vào một dãy có $4!$ (cách xếp).

Xếp 4 bạn nữ vào một dãy có $4!$ (cách xếp).

Với mỗi một số ghế có 2 cách đổi vị trí cho bạn nam và bạn nữ ngồi đối diện nhau.

Số cách xếp theo yêu cầu là: $4!.4!.2^4$ (cách xếp).

**Câu 21.** Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng không ngồi cạnh nhau?

**A.** $24$. **B.** $72$. **C.** $12$. **D.** $48$.

**Lời giải**

**Chọn B**

+) Xếp $5$ bạn vào $5$ chỗ ngồi có $5!$ cách.

+) Xếp An và Dũng ngồi cạnh nhau có $2$ cách. Xem An và Dũng là $1$ phần tử cùng với $3$ bạn còn lại là $4$ phần tử xếp vào $4$ chỗ. Suy ra số cách xếp $5$ bạn sao cho An và Dũng luôn ngồi cạnh nhau là: $2.4!$ cách.

Vậy số cách xếp $5$ bạn vào $5$ ghế sao cho An và Dũng không ngồi cạnh nhau là:

$5! - 2.4! = 72$.

**Câu 22.** Một nhóm học sinh gồm $4$ học sinh nam và $5$ học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp $9$ học sinh trên thành $1$ hàng dọc sao cho nam nữ đứng xen kẽ?

**A.** $5760$. **B.** $2880$. **C.** $120$. **D.** $362880$.

**Lời giải**

Xếp $4$ học sinh nam thành hàng dọc có $4!$ cách xếp.

Giữa 4 học sinh nam có 5 khoảng trống ta xếp các bạn nữ vào vị trí đó nên có 5! cách xếp.
Theo quy tắc nhân có $4!5! = 2880$ cách xếp thoả mãn bài ra.

**Câu 23.** Có 3 viên bi đen khác nhau, 4 viên bi đỏ khác nhau, 5 viên bi xanh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các viên bi trên thành dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau?

**A.** 345600. **B.** 518400. **C.** 725760. **D.** 103680.

**Lời giải**

Số cách xếp 3 viên bi đen khác nhau thành một dãy bằng: 3!.
Số cách xếp 4 viên bi đỏ khác nhau thành một dãy bằng: 4!.
Số cách xếp 5 viên bi đen khác nhau thành một dãy bằng: 5!.
Số cách xếp 3 nhóm bi thành một dãy bằng: 3!.
Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu đề bài bằng $3!.4!.5!.3! = 103680$ cách.

**Câu 24.** Có bao nhiêu cách xếp 5 sách Văn khác nhau và 7 sách Toán khác nhau trên một kệ sách dài nếu các sách Văn phải xếp kề nhau?

**A.** 5!.8!. **B.** 5!.7!. **C.** 2.5!.7!. **D.** 12!.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì các sách Văn phải xếp kề nhau nên ta xem 5 cuốn sách Văn là một phần tử.
Xếp 7 cuốn sách toán lên kệ có 7! cách.
Giữa 7 cuốn sách Toán có 8 khoảng trống, ta xếp phần tử chứa 5 cuốn sách Văn vào 8 vị trí đó có 8 cách.
5 cuốn sách Văn có thể hoán đổi vị trí cho nhau ta được 5! cách.
Vậy số cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $8.7!.5! = 8!.5!$.

**Câu 25.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 nữ sinh, 3 nam sinh thành một hàng dọc sao cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ?

**A.** 6. **B.** 144. **C.** 720. **D.** 72.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đánh số thứ tự các vị trí theo hàng dọc từ 1 đến 6.

➢ **Trường hợp 1:** Nam đứng trước, nữ đứng sau.

✍ Xếp nam (vào các vị trí đánh số $1,3,5$): Có $3! = 6$ cách.

✍ Xếp nữ (vào các vị trí đánh số $2,4,6$): Có $3! = 6$ cách.

Vậy trường hợp này có: $6.6 = 36$ cách.

➢ **Trường hợp 2:** Nữ đứng trước, nam đứng sau.

✍ Xếp nữ (vào các vị trí đánh số $1,3,5$): Có $3! = 6$ cách.

✍ Xếp nam (vào các vị trí đánh số $2,4,6$): Có $3! = 6$ cách.

Vậy trường hợp này có: $6.6 = 36$ cách.

Theo quy tắc cộng ta có: $36 + 36 = 72$ cách sắp xếp 3 nữ sinh, 3 nam sinh thành một hàng dọc sao cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ.

**Câu 26.** Xếp 6 chữ số 1, 1, 2, 2, 3, 4 thành hàng ngang sao cho hai chữ số giống nhau thì không xếp cạnh nhau. Hỏi có bao nhiêu cách

**A.** 120 cách. **B.** 96 cách. **C.** 180 cách. **D.** 84 cách.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số cách xếp sáu chữ số thành hàng một cách tùy ý là $\frac{6!}{2!.2!} = 180$.

*) Tìm số cách xếp sáu chữ số sao cho có hai chữ số giống nhau đứng cạnh nhau

+) TH1: Số cách xếp sao cho có hai chữ số 1 đứng cạnh nhau $5.\dfrac{4!}{2!}=60$.

+) TH2: Số cách xếp sao cho có hai chữ số 2 đứng cạnh nhau $5.\dfrac{4!}{2!}=60$.

+) TH3: Số cách xếp sao cho có hai chữ số 1 đứng cạnh nhau và hai chữ số 2 đứng cạnh nhau

-) Nếu hai chữ số 1 ở vị trí $(1;2)$ và $(5;6)$ ta có số cách xếp là $2.3.2=12$.

-) Nếu hai chữ số 1 ở ba vị trí còn lại thì số các xếp là $3.2.2=12$.

Vậy số cách xếp hai chữ số giống nhau đứng cạnh nhau là $60+60-12-12=96$.

$\Rightarrow$ Số cách xếp không có hai chữ số giống nhau nào đứng cạnh nhau là $180-96=84$.

**Câu 27.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt mà tổng các chữ số là số lẻ?

**A.** $320$. **B.** $144$. **C.** $180$. **D.** $60$.

**Lời giải**

**Chọn A**

➢ Trường hợp 1: 3 chữ số đều lẻ. Có $A_5^3=60$ số thỏa mãn.

➢ Trường hợp 2: số đó gồm 2 chữ số chẵn và 1 chữ số lẻ

- Chọn 2 chữ số chẵn khác nhau có $C_5^2=10$ cách.
- Chọn 1 chữ số lẻ có 5 cách.
- Từ 3 số đã chọn đó lập được $3!=6$ số.

Do đó có $10.5.6=300$ dãy gồm 3 chữ số phân biệt, trong đó có 2 chữ số chẵn, 1 chữ số lẻ kể cả chữ số 0 đứng đầu.

Xét dãy số có 3 chữ số phân biệt, gồm 2 chữ số chẵn, 1 chữ số lẻ mà chữ số đầu bằng 0

- Chọn 1 chữ số lẻ có 5 cách.
- Chọn 1 chữ số chẵn khác chữ số 0 có 4 cách.

Vậy có $4.5.2!=40$ số có 3 chữ số phân biệt, gồm 2 chữ số chẵn, 1 chữ số lẻ mà chữ số đầu bằng 0.

Do đó có $60+300-40=320$ số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt mà tổng các chữ số là số lẻ.

**Câu 28.** Từ các chữ số $1$, $2$, $3$, $4$, $5$, $6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có $6$ chữ số khác nhau và trong mỗi số đó tổng của ba chữ số đầu lớn hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị

**A.** $32$. **B.** $72$. **C.** $36$. **D.** $24$.

**Lời giải**

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần tìm

Ta có $a_6\in\{1;3;5\}$ và $(a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5+a_6)=1$

❍ Với $a_6=1$ thì $(a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5)=2$ $\Rightarrow \begin{cases} a_1,a_2,a_3\in\{2,3,6\} \\ a_4,a_5\in\{4,5\} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1,a_2,a_3\in\{2,4,5\} \\ a_4,a_5\in\{3,6\} \end{cases}$

❍ Với $a_6=3$ thì $(a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5)=4$ $\Rightarrow \begin{cases} a_1,a_2,a_3\in\{2;4;5\} \\ a_4,a_5\in\{1,6\} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1,a_2,a_3\in\{1,4,6\} \\ a_4,a_5\in\{2,5\} \end{cases}$

❍ Với $a_6=5$ thì $(a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5)=6$ $\Rightarrow \begin{cases} a_1,a_2,a_3\in\{2,3,6\} \\ a_4,a_5\in\{1,4\} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1,a_2,a_3\in\{1,4,6\} \\ a_4,a_5\in\{2,3\} \end{cases}$

Mỗi trường hợp có $3!.2!=12$ số thỏa mãn yêu cầu

Vậy có tất cả $6.12=72$ số cần tìm.

**Câu 29.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $5,6,7,8,9$. Tính tổng tất cả các số thuộc tập $S$.

**A.** 9333420. **B.** 46666200. **C.** 9333240. **D.** 46666240.

**Lời giải**

Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ $5,6,7,8,9$ là $5!=120$ số.

Vì vai trò các chữ số như nhau nên mỗi chữ số $5,6,7,8,9$ xuất hiện ở hàng đơn vị là $4!=24$ lần.

Tổng các chữ số ở hàng đơn vị là $24(5+6+7+8+9)=840$.

Tương tự thì mỗi lần xuất hiện ở các hàng chục, trăm, nghìn, chục nghìn của mỗi chữ số là 24 lần.

Vậy tổng các số thuộc tập $S$ là $840(1+10+10^2+10^3+10^4)=9333240$.

**DẠNG 2. CHỈNH HỢP**

**Câu 30.** Cho tập $M=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt lập từ $M$ là.

**A.** $4!$. **B.** $A_9^4$. **C.** $4^9$. **D.** $C_9^4$.

**Lời giải**

Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt lập từ $M$ là: $A_9^4$.

**Câu 31.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau?

**A.** $C_7^2$. **B.** $7^2$. **C.** $A_7^2$. **D.** $2^7$.

**Lời giải**

Mỗi số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau thành lập được từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 là một chỉnh hợp chập 2 của 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Vậy số các số tự nhiên thành lập được là $A_7^2$.

**Câu 32.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau?.

**A.** $2^8$. **B.** $C_8^2$. **C.** $A_8^2$. **D.** $8^2$.

**Lời giải**

Số số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau lập được từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 là số cách chọn 2 chữ số khác nhau từ 8 số khác nhau có thứ tự.

Vậy có $A_8^2$ số.

**Câu 33.** Có bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1,2,3,4,5$?

**A.** $A_5^4$. **B.** $P_5$. **C.** $C_5^4$. **D.** $P_4$.

**Lời giải**

Số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1,2,3,4,5$ là một chỉnh hợp chập 4 của 5 phần tử

Vậy có $A_5^4$ số cần tìm.

**Câu 34.** Tính số chỉnh hợp chập 4 của 7 phần tử?

**A.** 24. **B.** 720. **C.** 840. **D.** 35.

**Lời giải**

Ta có: $A_7^4=\dfrac{7!}{3!}=840$.

**Câu 35.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác 0 và đôi một khác nhau?

**A.** $5!$. **B.** $9^5$. **C.** $C_9^5$. **D.** $A_9^5$.

**Lời giải**

Mỗi số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác 0 và đôi một khác nhau là một chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử.

Vậy số các số tự nhiên thỏa đề bài là $A_9^5$ số.

**Câu 36.** Cho tập hợp $S=\{1;2;3;4;5;6\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau lấy từ tập hợp $S$?

**A.** $360$. **B.** $120$. **C.** $15$. **D.** $20$.

**Lời giải**

Từ tập $S$ lập được $A_6^4=360$ số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau.

**Câu 37.** Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số, các chữ số khác nhau và đều khác $0$?

**A.** $90$. **B.** $9^2$. **C.** $C_9^2$. **D.** $A_9^2$.

**Lời giải**

Số tự nhiên cần lập có $2$ chữ số khác nhau được lấy từ các chữ số từ $1$ đến $9$ nên có $A_9^2$ số như vậy.

**Câu 38.** Từ tập $X=\{2,3,4,5,6\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau?

**A.** $60$. **B.** $125$. **C.** $10$. **D.** $6$.

**Lời giải**

Số các số tự nhiên có ba chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập $X$ là số chỉnh hợp chập $3$ của $5$ phần tử $\Rightarrow$ số các số cần lập là $A_5^3=60$ (số).

**Câu 39.** Cho tập $A=\{1,2,3,5,7,9\}$. Từ tập $A$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau?

**A.** $720$. **B.** $360$. **C.** $120$. **D.** $24$.

**Lời giải**

Tập $A$ gồm có $6$ phần tử là những số tự nhiên khác $0$.

Từ tập $A$ có thể lập được $A_6^4=360$ số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau.

**Câu 40.** Cho tập hợp $M$ có $10$ phần tử. Số chỉnh hợp chập $2$ của $10$ phần tử của $M$ là

**A.** $A_{10}^2$. **B.** $C_2^{10}$. **C.** $C_{10}^2$. **D.** $A_2^{10}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số chỉnh hợp chập $2$ của $10$ phần tử của $M$ là: $A_{10}^2$.

**Câu 41.** Tính số các chỉnh hợp chập 5 của 7 phần tử.

**A.** $21$. **B.** $2520$. **C.** $5040$. **D.** $120$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo lý thuyết công thức tính số các chỉnh hợp chập $5$ của $7$: $A_7^5=\dfrac{7!}{(7-5)!}=2520$.

**Câu 42.** Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$. Có thể lập được bao nhiêu số có $3$ chữ số khác nhau?

**A.** $216$. **B.** $120$. **C.** $504$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Mỗi cách lập số là một chỉnh hợp chập 3 của 6.

Vậy có $A_6^3=120$ số.

**Câu 43.** Tính số các chỉnh hợp chập 4 của 7 phần tử.

**A.** $35$. **B.** $24$. **C.** $720$. **D.** $840$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $A_7^4 = \dfrac{7!}{3!} = 840.$

**Câu 44.** Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ có thể lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau

**A.** $C_9^3$. **B.** $A_9^3$. **C.** $9!$. **D.** $A_9^3 - A_8^2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Mỗi số tự nhiên lập được có 3 chữ số đôi một khác nhau từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ là một chỉnh hợp chập 3 của 9.

Vậy lập được $A_9^3$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 45.** Một tổ có $10$ học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra $2$ học sinh từ tổ đó để giữ hai chức vụ tổ trưởng và tổ phó.

**A.** $A_{10}^2$. **B.** $C_{10}^2$. **C.** $A_{10}^8$. **D.** $10^2$.

**Lời giải**

Chọn ra $2$ học sinh từ một tổ có $10$ học sinh và phân công giữ chức vụ tổ trưởng, tổ phó là một chỉnh hợp chập $2$ của 10 phần tử. Số cách chọn là $A_{10}^2$ cách.

**Câu 46.** Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên của mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự $5$ cầu thủ trong 11 cầu thủ để đá luân lưu $5$ quả 11 mét. Hỏi huấn luyện viên của mỗi đội sẽ có bao nhiêu cách chọn?

**A.** $55440$. **B.** $120$. **C.** $462$. **D.** $39916800$.

**Lời giải**

Số cách ủa huấn luyện viên của mỗi đội là $A_{11}^5 = 55440$.

**Câu 47.** Một câu lạc bộ có $25$ thành viên. Số cách chọn một ban quản lí gồm $1$ chủ tịch, $1$ phó chủ tịch và $1$ thư kí là:

**A.** $13800$. **B.** $5600$. **C.** Một kết quả khác. **D.** $6900$.

**Lời giải**

Mỗi cách chọn $3$ người ở $3$ vị trí là một chỉnh hợp chập $3$ của $25$ thành viên.

Số cách chọn là: $A_{25}^3 = 13800$.

**Câu 48.** Trong một lớp có 30 bạn học sinh, hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một bạn để làm lớp trưởng và một bạn khác làm lớp phó?

**A.** $30^2$ **B.** $A_{30}^{28}$ **C.** $A_{30}^2$ **D.** $C_{30}^2$

**Lời giải**

Mỗi cách chọn một bạn làm lớp trưởng và một bạn làm lớp phó là chỉnh hợp chập 2 của 30 phần tử nên số cách chọn là $A_{30}^2$.

**Câu 49.** Một câu lạc bộ có $25$ thành viên. Số cách chọn một ban quản lí gồm $1$ chủ tịch, $1$ phó chủ tịch và $1$ thư ký là

**A.** $5600$. **B.** $13800$. **C.** $6900$. **D.** Kết quả khác.

**Lời giải**

**Chọn B**

Số cách chọn ban quản lí là $A_{25}^3 = 13800$ cách.

**Câu 50.** Một nhóm học sinh có 10 người. Cần chọn 3 học sinh trong nhóm để làm 3 công việc là tưới cây, lau bàn và nhặt rác, mỗi người làm một công việc. Số cách chọn là

**A.** $10^3$. **B.** $3\times 10$. **C.** $C_{10}^3$. **D.** $A_{10}^3$.

**Lời giải**

Số cách chọn 3 em học sinh là số cách chọn 3 phần tử khác nhau trong 10 phần tử có phân biệt thứ tự nên số cách chọn thỏa yêu cầu là $A_{10}^3$.

**Câu 51.** Số cách sắp xếp 6 học sinh ngồi vào 6 trong 10 ghế trên một hàng ngang là

**A.** $6^{10}$. **B.** $6!$. **C.** $A_{10}^6$. **D.** $C_{10}^6$.

**Lời giải**

Mỗi cách chọn 6 ghế từ 10 ghế sắp xếp 6 người là một chỉnh hợp chập 6 của 10 phần tử.

Vậy có $A_{10}^6$ cách chọn.

**Câu 52.** Lớp $11A$ có 38 học sinh. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 3 bạn học sinh để sắp xếp làm Lớp trưởng, Lớp phó và Thư kí. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra như vậy?

**A.** 50616. **B.** 8436. **C.** 114. **D.** 41.

**Lời giải**

**Chọn A**

Chọn 3 học sinh trong 38 học sinh và sắp xếp ba học sinh vào ba chức vụ khác nhau: Lớp trưởng, Lớp phó, Bí thư. Mỗi cách chọn ra 3 học sinh như vậy là một chỉnh hợp chập 3 của 38 phần tử.

Vậy số cách chọn là: $A_{38}^3 = 50616$..

**Câu 53.** Có bao nhiêu cách chọn 5 cầu thủ từ 11 trong một đội bóng để thực hiện đá 5 quả luân lưu 11 m, theo thứ tự quả thứ nhất đến quả thứ năm.

**A.** $A_{11}^5$. **B.** $C_{11}^5$. **C.** $A_{11}^2.5!$. **D.** $C_{10}^5$.

Lời giải

Số cách chọn 5 cầu thủ từ 11 trong một đội bóng để thực hiện đá 5 quả luân lưu 11 m, theo thứ tự quả thứ nhất đến quả thứ năm là số chỉnh hợp chập 5 của 11 phần tử nên số cách chọn là $A_{11}^5$.

**Câu 54.** Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$

**A.** 12. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 8.

**Lời giải**

Số vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$ là số các chỉnh hợp chập 2 của phần tử $\Rightarrow$ số vectơ là $A_4^2 = 12$.

**Câu 55.** Cho lục giác $ABCDEF$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ – không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác trên.

**A.** $6^2$. **B.** $2^6$. **C.** $C_6^2$. **D.** $A_6^2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Mỗi vectơ khác vectơ – không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác $ABCDEF$ là một chỉnh hợp chập 2 của 6 phần tử. Vậy số vectơ thỏa yêu cầu bài toán là $A_6^2$ vectơ.

**Câu 56.** Số các số gồm 5 chữ số khác nhau chia hết cho 10 là

**A.** 5436. **B.** 3024. **C.** 3260. **D.** 12070.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $|X|=9$.

Gọi $x=\overline{abcd0}$ là số cần lập ($a,b,c,d\in X$ và đôi một khác nhau).

Mỗi số cần lập là một chỉnh hợp chập $4$ của $9$ phần tử nên số các số thỏa yêu cầu bài toán là $A_9^4=3024$.

**Câu 57.** Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có $3$ chữ số đôi một khác nhau?

**A.** $C_9^3$. **B.** $A_9^3$. **C.** $9!$. **D.** $A_9^3-A_8^2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $x=\overline{abc}$, trong đó $a$, $b$, $c$ đôi một khác nhau.

Lấy $3$ phần tử từ tập hợp $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ và xếp vào $3$ vị trí. Có $A_9^3$ cách.

Suy ra có $A_9^3$ số thỏa yêu cầu bài.

**Câu 58.** Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

**A.** $15$. **B.** $4096$. **C.** $360$. **D.** $720$.

**Lời giải**

Để được một số có 4 chữ số theo yêu cầu đề bài, ta chọn 4 chữ số trong 6 chữ số đã cho và xếp theo một thứ tự nào đó, nghĩa là ta được một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử.

Vậy số các số cần thành lập là $A_6^4=360$.

**Câu 59.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên không chia hết cho 5, gồm 4 chữ số khác nhau?

**A.** 120. **B.** 72. **C.** 69. **D.** 54.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abcd}$, từ yêu cầu bài toán ta có:

$d\in\{1;2;3\}$: có 3 cách chọn

$a$: có 3 cách chọn $(a\neq 0, a\neq d)$

Trong 3 số còn lại chọn ra 2 số lần lượt đặt vào các vị trí $b,c$ có $A_3^2$ cách.

Số các số thỏa yêu cầu bài toán là $S=3.3.A_3^2=54$ số.

**Câu 60.** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 3 chữ số khác nhau.

**A.** 500. **B.** 405. **C.** 360. **D.** 328.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét hai trường hợp.

TH1: Chữ số tận cùng là 0 có 1 cách chọn chữ số tận cùng.

Có $A_9^2$ cách chọn hai chữ số đầu.

Do đó có 1* $A_9^2$ = 72 số.

TH2: Chữ số tận cùng là 2, 4, 6, 8 có 4 cách chọn chữ số tận cùng.

Có 8 cách chọn chữ số đầu tiên.

Có 8 cách chọn chữ số ở giữa.

Do đó có 4*8*8 = 256 số.

Vậy có $72 + 256 = 328$ số thỏa mãn bài toán. Chon $D$.

**Câu 61.** Từ các số $0;1;2;3;5$ có thể lập thành bao nhiêu số tự nhiên không chia hết cho $5$ gồm $4$ chữ số đôi một khác nhau?

**A.** $120$. **B.** $54$. **C.** $72$. **D.** $69$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Giả sử số tự nhiên có 4 chữ số có dạng $\overline{abcd}$

+ Do số tự nhiên đó không chia hết cho 5 nên d có 3 cách chọn (1; 2; 3)

+ Có 3 cách chọn a (khác d; 0)

+ Số cách chọn 2 chữ số còn lại là số chỉnh hợp chập 2 của 3 $\Rightarrow A_3^2$

Vậy có $3.3.A_3^2 = 54$ số.

**Câu 62.** Cho tập hợp $A = \{0;1;2;3;4;5\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và lớn hơn 350?

**A.** $32$. **B.** $40$. **C.** $43$. **D.** $56$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi số có ba chữ số khác nhau thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{abc}$.

Vì $\overline{abc} > 350$ nên ta xét 2 trường hợp sau:

**TH 1:** Chọn $a \in \{4;5\} \Rightarrow a$ có 2 cách chọn.

Chọn $b$ và $c$ trong số 5 chữ số còn lại có $A_5^2$ cách.

Suy ra TH 1 có $2.A_5^2 = 40$ số được lập.

**TH 2:** Chọn $a = 3, b = 5 \Rightarrow c \in \{1;2;4\}$ nên có 3 số được lập.

Vậy số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $40 + 3 = 43$ số.

**Câu 63.** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau, sao cho trong mỗi số đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0?

**A.** $7056$. **B.** $120$. **C.** $5040$. **D.** $15120$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi số đó có dạng $\overline{abcde}$ ( $a,b,c,d,e \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $a \neq 0$ ).

TH1: e = 0

Số các số tự nhiên thỏa mãn bài toán là: $A_9^4$ ( số).

TH2: $e \neq 0$.

Khi đó e có 4 cách chọn ( vì e được lấy từ các số 2, 4, 6, 8).

Có 3 cách để xếp chữ số 0 vào 3 vị trí b, c, d.

Số cách lấy 3 số trong 8 số còn lại và sắp xếp là $A_8^3$.

Số các số tự nhiên thỏa mãn bài toán là: $4.3.A_8^3$ ( số).

Vậy số các số tự nhiên chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau, sao cho trong mỗi số đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0 là: $A_9^4 + 4.3.A_8^3 = 7056$ ( số)

**Câu 64.** Có bao nhiêu số chẵn mà mỗi số có $4$ chữ số đôi một khác nhau?

**A.** $2520$. **B.** $50000$. **C.** $4500$. **D.** $2296$.

**Lời giải**

↳ Số có 4 chữ số khác nhau đôi một: $9.A_9^3$.

↳ Số có 4 chữ số lẻ khác nhau đôi một: $5.8.A_8^2$.

Vậy số có 4 chữ số chẵn khác nhau đôi một: $9.A_9^3 - 5.8.A_8^2 = 2296$.

**Câu 65.** Từ các chữ số $0$, $1$, $2$, $3$, $5$ có thể lập được bao nhiêu số gồm $4$ chữ số khác nhau và không chia hết cho $5$?

**A.** $72$. **B.** $120$. **C.** $54$. **D.** $69$.

**Lời giải**

Gọi số cần tìm dạng: $\overline{abcd}$, $(a \neq 0)$.

- Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau: $4.A_4^3 = 96$ số.
- Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau chia hết cho 5: $A_4^3 + 3.A_3^2 = 42$.
- Vậy số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau không chia hết cho 5 là: $96 - 42 = 54$ số.

**Câu 66.** Từ các chữ số của tập hợp $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có $5$ chữ số đôi một khác nhau mà trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số $0$?

**A.** $504$. **B.** $480$. **C.** $720$. **D.** $120$.

**Lời giải**

- Cách 1: Gọi số cần tìm là $n = \overline{abcde}$.

✓ Có $4$ vị trí xếp số $0$ vì $a \neq 0$.

✓ - $a$, $b$, $c$, $d$ được chọn trong $5$ số còn lại và sắp, có $A_5^4 = 120$ cách.

✓ Vậy số các số cần tìm là $4.120 = 480$.

- Cách 2: Gọi số cần tìm là $n = \overline{abcde}$.

✓ Có $5$ vị trí xếp số $0$ (kể cả vị trí đầu tiên), $4$ vị trí còn lại chọn $4$ trong $5$ số và sắp, nên có $5.A_5^4 = 600$ số.

✓ Các số có dạng $\overline{0bcde}$ là $A_5^4 = 120$ số.

✓ Vậy số các số cần tìm là $600 - 120 = 480$.

**Câu 67.** Cho các chữ số $0$, $1$, $2$, $3$, $4$, $5$. Từ các chữ số đã cho lập được bao nhiêu số chẵn có bốn chữ số và các chữ số phải khác nhau.

**A.** $160$. **B.** $156$. **C.** $752$. **D.** $240$.

**Lời giải**

Gọi số có bốn chữ số khác nhau là $\overline{abcd}$ $(a,b,c,d \in \{0,1,2,3,4,5\}, a \neq 0)$.

+ TH1: $d = 0$ Số cách ộ số $abc$ là số chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử $\{1,2,3,4,5\}$. Suy ra có $A_5^3 = 60$ (số).

+ TH2: $d \in \{2,4\}$

$d$ có 2 cách chọn

$a$ có 4 cách chọn

$b$ có 4 cách chọn

$c$ có 3 cách chọn

Suy ra có $2.4.4.3=96$ (số)

Áp dụng quy tắc cộng ta có tất cả $60+96=156$ (số)

**Câu 68.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau.

**A.** 648 **B.** 1000 **C.** 729 **D.** 720

**Lời giải**

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abc}$ ($a\neq 0$; a;b;c đôi một khác nhau)

$\Rightarrow$ số có ba chữ số là: $A_{10}^3-A_9^2=648$.

**Câu 69.** Cho tập hợp $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Hỏi từ tập $A$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho một trong 3 chữ số đầu tiên phải bằng 1.

**A.** 2802. **B.** 2280. **C.** 65. **D.** 2520.

**Lời giải**

Gọi số cần lập là $\overline{abcde}$ với $a,b,c,d,e\in A$ và $a>0$, các chữ số khác nhau.

TH1: $a=1$. Số cách ác chữ số còn lại là $A_7^4=840$.

TH2: $a\neq 1$.

Để chọn vị trí cho chữ số 1 có 2 cách.

Để hữ số $a$ có 6 cách.

Để ác chữ số còn lại có $A_6^3$.

Do đó có $2.6.A_6^3$ số lập được.

Vậy có $A_7^4+2.6.A_6^3=2280$ số thỏa mãn đề bài.

**Câu 70.** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 3 chữ số khác nhau?

**A.** 500. **B.** 328. **C.** 360. **D.** 405.

**Lời giải**

Gọi số tự nhiên chẵn cần tìm có dạng $\overline{abc}$, $c\in\{0;2;4;6;8\}$.

Xét các số có dạng $\overline{ab0}$ có tất cả $A_9^2=72$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Xét các số dạng $\overline{abc}$, $c\in\{2;4;6;8\}$ có tất cả: $4.8.8=256$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy số các số tự nhiên chẵn gồm 3 chữ số khác nhau là: $72+256=328$ số.

**Câu 71.** Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 6. Lập các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số đã cho. Tính tổng của các số lập được.

**A.** 12321. **B.** 21312. **C.** 12312. **D.** 21321.

**Lời giải**

Mỗi số số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 6 là một chỉnh hợp chập 3 của các chữ số này. Do đó, ta lập được $A_5^3=60$ số.

Do vai trò các số 1, 2, 3, 4, 6 như nhau, nên số lần xuất hiện của mỗi chữ số trong các chữ số này ở mỗi hàng (hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm) là như nhau và bằng $60:5=12$ lần.

Vậy, tổng các số lập được là:

$S=12.(1+2+3+4+6)(100+10+1)=21312$.

**Câu 72.** Có bao nhiêu số tự nhiên có bẩy chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3.

**A.** 3204 số. **B.** 249 số. **C.** 2942 số. **D.** 7440 số.

**Lời giải**

Vì chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3 nên số cần lập có bộ ba số 123 hoặc 321.

TH1: Số cần lập có bộ ba số 123.

Nếu bộ ba số 123 đứng đầu thì số có dạng $\overline{123abcd}$.

Có $A_7^4 = 840$ cách ốn số $a$, $b$, $c$, $d$ nên có $A_7^4 = 840$ số.

Nếu bộ ba số 123 không đứng đầu thì số có 4 vị trí đặt bộ ba số 123.

Có 6 cách chọn số đứng đầu và có $A_6^3 = 120$ cách a số $b$, $c$, $d$.

Theo quy tắc nhân có $6.4.A_6^3 = 2880$ số

Theo quy tắc cộng có $840 + 2880 = 3720$ số.

TH2: Số cần lập có bộ ba số 321.

Do vai trò của bộ ba số 123 và 321 như nhau nên có $2(840 + 2880) = 7440$

**Câu 73.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau nằm trong khoảng $(300;500)$

**A.** 24. **B.** 25. **C.** 23. **D.** 22.

**Bài làm**

Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$ với $a,b,c \in \{1;2;3;4;5\}$.

Để $\overline{abc} \in (300;500)$ thì $a = 3$ hoặc $a = 4$.

Với $a = 3$, số cách chọn $b,c$ là $A_4^2 = 12$.

Với $a = 4$, số cách chọn $b,c$ là $A_4^2 = 12$.

Vây số các số lập được là 24. Chọn đáp án **A.**

**Câu 74.** Từ các chữ số $0,1,2,3,4,5,6$ có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho có 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ đứng cạnh nhau.

**A.** 360. **B.** 144. **C.** 252. **D.** 108.

**Lời giải**

Giả sử số cần lập có dạng $\overline{abcde}$, với $a,b,c,d,e \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$.

+ **Trường hợp 1:** $a$, $b$ là hai chữ số lẻ: Có $A_3^2 = 6$ cách chọn $\overline{ab}$

Với mỗi $\overline{ab}$, có $A_4^3 = 24$ cách chọn $\overline{cde}$

$\Rightarrow$ có $6.24 = 144$ số thỏa mãn.

+ **Trường hợp 2:** $d$, $e$ là hai chữ số lẻ: Có $A_3^2 = 6$ cách chọn $\overline{de}$

Với mỗi $\overline{de}$, có 3 cách chọn $a$, $A_3^2 = 6$ cách chọn $\overline{bc}$

$\Rightarrow$ có $6.3.6 = 108$ số thỏa mãn.

Vậy có $144 + 108 = 252$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

# Bài 3. TỔ HỢP

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### 1. Định nghĩa

Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử và một số nguyên $k$ với $1 \le k \le n$.
Mỗi tập con gồm $k$ phần tử được lấy ra từ $n$ phần tử của $A$ được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đó.

***Ví dụ 1.*** Bạn Quân có 4 chiếc áo sơ mi khác màu là áo vàng, áo xanh, áo trắng và áo nâu. Bạn muốn chọn 2 chiếc áo để mặc khi đi du lịch. Viết các tổ hợp chập 2 của 4 chiếc áo.

***Giải***

Các tổ hợp chập 2 của 4 chiếc áo là:
{áo vàng; áo xanh}, {áo vàng; áo trắng }, { áo vàng; áo nâu},
{áo xanh; áo trắng}, {áo xanh; áo nâu}, {áo trắng; áo nâu}.

### 2. Số các tổ hợp

***Nhận xét***: Số chỉnh hợp chập $k$ của $n$ phần tử nhiều gấp $k!$ lần số tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử đó.

Kí hiệu $C_n^k$ là số tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử với $1 \le k \le n$. Ta có: $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$.

***Ví dụ 2.*** Chứng minh $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ với $1 \le k \le n$.

***Giải***

Ta có: $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 2.1}{(n-k)\ldots 2.1} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Do đó $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

*Quy ước:* $0! = 1; C_n^0 = 1$.

Với những quy ước trên, ta có công thức sau:

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ với $0 \le k \le n$.

***Ví dụ 3***. Lớp $10A$ có 18 bạn nữ và 20 bạn nam.
a) Có bao nhiêu cách chọn 3 bạn nữ trong 18 bạn nữ?
b) Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn nam trong 20 bạn nam?
c) Có bao nhiêu cách chọn một tổ xung kích gồm 3 bạn nữ và 5 bạn nam?

***Giải***

a) Mỗi cách chọn 3 bạn nữ trong 18 bạn nữ là một tổ hợp chập 3 của 18 phần tử, do đó có $C_{18}^3$ cách chọn.

b) Mỗi cách chọn 5 bạn nam trong 20 bạn nam là một tố hợp chập 5 của 20 phần tử, do đó có $C_{20}^5$ cách chọn.

c) Số cách chọn một tổ xung kích gồm 3 bạn nữ và 5 bạn nam là:
$C_{18}^3 \cdot C_{20}^5 = 816 \cdot 15504 = 12651264$

### 3. Tính chất của các số $C_n^k$

Ta có hai đẳng thức sau: $C_n^k = C_n^{n-k} (0 \le k \le n)$ và $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k (1 \le k < n)$.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. TỔ HỢP

**Câu 1.** Chứng minh rằng: $A = C_n^{k+1} + 2C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+2}^{k+1}$

**Câu 2.** Rút gọn:

$$A = \frac{C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}}$$

**Câu 3.** Một bó hoa có 9 bông hoa màu hồng và 5 bông hoa màu đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 boonh hoa thỏa mãn:

a. Có 2 bông màu hồng?

b. Có ít nhất 1 bông màu hồng?

c. Có đủ cả 2 màu?

**Câu 4.** Một lớp 50 học sinh, có 30 nữ. Cô giáo muốn lấy ra 5 học sinh để lập thành một đội văn nghệ. Hỏi cô có bao nhiêu cách chọn nếu:

a. Chọn bất kỳ?

b. Có hai học sinh nam?

c. Có ít nhất 1 bạn nam?

**Câu 5.** Một hình đa giác đều gồm 20 cạnh. Hỏi có thể lập được

a. Bao nhiêu hình chữ nhật từ các đỉnh của đa giác trên?

b. Bao nhiêu hình tam giác từ các đỉnh của tam giác trên?

c. Bao nhiêu đường chéo?

**Câu 6.** Một tổ có 15 học sinh, thầy giáo có 3 đề kiểm tra khác nhau. Cần chọn 5 học sinh cho mỗi đề kiểm tra. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách?

### DẠNG 2. KẾT HỢP HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP

**Câu 7.** Rút gọn:

$$B = \frac{P_{n+2}}{A_n^k . P_{n-k}} + \frac{C_{15}^5 + 2C_{15}^6 + C_{15}^7}{C_{17}^7}$$

**Câu 8.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ các số $0,1,2,3,4,5,6,7,8$. Trong đó chữ số 3 có mặt đúng 2 lần. Các chữ số khác có mặt 1 lần?

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### DẠNG 1. TỔ HỢP

**Câu 1.** Cho tập hợp $M$ có 10 phần tử. Số tập con gồm hai phần từ của $M$ là

**A.** $C_{10}^2$ **B.** $10^2$ **C.** $A_{10}^8$ **D.** $A_{10}^2$

**Câu 2.** Cho tập hợp $M$ có 30 phần tử. Số tập con gồm 5 phần tử của $M$ là

**A.** $A_{30}^4$. **B.** $30^5$. **C.** $30^5$. **D.** $C_{30}^5$.

**Câu 3.** Số tập hợp con có 3 phần tử của một tập hợp có 7 phần tử là

**A.** $C_7^3$. **B.** $\frac{7!}{3!}$. **C.** $A_7^3$. **D.** $21$.

**Câu 4.** Cho tập hợp $M = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Số tập con gồm 3 phần tử của $M$ không có số 0 là:

**A.** $A_{10}^3$. **B.** $A_9^3$. **C.** $C_{10}^3$. **D.** $C_9^3$.

**Câu 5.** Cho tập hợp $M$ có 30 phần tử. Số tập con gồm 5 phần tử của $M$ là

**A.** $C_{30}^{5}$. **B.** $A_{30}^{5}$. **C.** $30^{5}$. **D.** $A_{30}^{4}$.

**Câu 6.** Có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử được lấy ra từ tập $A=\{a;b;c;d;e;f\}$?

**A.** 10. **B.** 80. **C.** 40. **D.** 20.

**Câu 7.** Cho tập $M$ gồm 10 phần tử. Số tập con gồm 4 phần tử của $M$ là

**A.** 40. **B.** $A_{10}^{4}$. **C.** $C_{10}^{4}$. **D.** $10^{4}$.

**Câu 8.** Cho tập hợp $E$ có 10 phần tử. Hỏi có bao nhiêu tập con có 8 phần tử của tập hợp $E$?

**A.** 100. **B.** 80. **C.** 45. **D.** 90.

**Câu 9.** Cho tập $A$ gồm 12 phần tử. Số tập con có 4 phần tử của tập A là

**A.** $A_{12}^{8}$. **B.** $C_{12}^{4}$. **C.** 4!. **D.** $A_{12}^{4}$.

**Câu 10.** Cho tập hợp $E$ có 10 phần tử. Hỏi có bao nhiêu tập con có 8 phần tử của tập hợp $E$?

**A.** 100. **B.** 90. **C.** 45. **D.** 80.

**Câu 11.** Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số dạng $\overline{abc}$ với $a$, $b$, $c\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$ sao cho $a<b<c$.

**A.** 120. **B.** 30. **C.** 40. **D.** 20.

**Câu 12.** Từ các chữ số 2, 3, 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt 2 lần, chữ số 3 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 4 lần?

**A.** 1260. **B.** 40320. **C.** 120. **D.** 1728.

**Câu 13.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục?

**A.** 48. **B.** 72. **C.** 54. **D.** 36.

**Câu 14.** Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên mỗi số có 4 chữ số khác nhau mà chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đằng trước?

**A.** 4536. **B.** 2513. **C.** 126. **D.** 3913.

**Câu 15.** Số cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là

**A.** $2^{5}$. **B.** $C_{5}^{2}$. **C.** $A_{5}^{2}$. **D.** $5^{2}$.

**Câu 16.** Số cách chọn 2 học sinh từ 6 học sinh là

**A.** $A_{6}^{2}$. **B.** $C_{6}^{2}$. **C.** $2^{6}$. **D.** $6^{2}$.

**Câu 17.** Số cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là

**A.** $2^{7}$. **B.** $A_{7}^{2}$. **C.** $C_{7}^{2}$. **D.** $7^{2}$.

**Câu 18.** Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm 38 học sinh?

**A.** $2^{38}$ **B.** $C_{38}^{2}$ **C.** $38^{2}$ **D.** $A_{38}^{2}$

**Câu 19.** Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh?

**A.** $2^{34}$. **B.** $A_{34}^{2}$. **C.** $34^{2}$. **D.** $C_{34}^{2}$.

**Câu 20.** Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm 38 học sinh?

**A.** $A_{38}^{2}$. **B.** $2^{38}$. **C.** $C_{38}^{2}$. **D.** $38^{2}$.

**Câu 21.** Cho tập hợp $M$ có 10 phần tử. Số tập con gồm hai phần từ của $M$ là

**A.** $C_{10}^{2}$ **B.** $10^{2}$ **C.** $A_{10}^{8}$ **D.** $A_{10}^{2}$

**Câu 22.** Một lớp có 48 học sinh. Số cách chọn 2 học sinh trực nhật là

**A.** 2256. **B.** 2304. **C.** 1128. **D.** 96.

**Câu 23.** Cần phân công ba bạn từ một tổ có 10 bạn để làm trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách phân công khác nhau?

**A.** $720$. **B.** $10^3$. **C.** $120$. **D.** $210$.

**Câu 24.** Một hộp đựng hai viên bi màu vàng và ba viên bi màu đỏ. Có bao nhiêu cách lấy ra hai viên bi trong hộp?

**A.** $10$. **B.** $20$. **C.** $5$. **D.** $6$.

**Câu 25.** Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn 3 học sinh để tham gia vệ sinh công cộng toàn trường, hỏi có bao nhiêu cách chọn như trên?

**A.** 2300. **B.** 59280. **C.** 455 **D.** 9880.

**Câu 26.** Một hộp đựng 50 viên bi gồm 10 viên bi màu trắng, 25 viên bi màu đỏ và 15 viên bi màu xanh. Có bao nhiêu cách chọn 8 viên bi trong hộp đó mà không có viên bi nào màu xanh?

**A.** $C_{50}^8$. **B.** $C_{10}^8 + C_{25}^8$. **C.** $C_{35}^8$. **D.** $C_{50}^8 - C_{15}^8$.

**Câu 27.** Số cách phân 3 học sinh trong 12 học sinh đi lao động là

**A.** $P_{12}$. **B.** $36$. **C.** $A_{12}^3$. **D.** $C_{12}^3$.

**Câu 28.** Có tất cả bao nhiêu cách chia 10 người thành hai nhóm, một nhóm có 6 người và một nhóm có 4 người?

**A.** $210$. **B.** $120$. **C.** $100$. **D.** $140$.

**Câu 29.** Trong một đa giác lồi $n$ cạnh, số đường chéo của đa giác là.

**A.** $C_n^2$. **B.** $A_n^2$. **C.** $A_n^2 - n$. **D.** $C_n^2 - n$.

**Câu 30.** Cho một đa giác đều có 10 cạnh. Có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh thuộc các đỉnh của đa giác đã cho.

**A.** $720$. **B.** $35$. **C.** $120$. **D.** $240$.

**Câu 31.** Cho 8 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được chọn từ 8 điểm trên ?

**A.** $336$. **B.** $56$. **C.** $168$. **D.** $84$.

**Câu 32.** Số đường chéo của đa giác đều có 20 cạnh là bao nhiêu?

**A.** $170$. **B.** $190$. **C.** $360$. **D.** $380$.

**Câu 33.** Lục giác đều $ABCDEF$ có bao nhiêu đường chéo

**A.** $15$. **B.** $5$. **C.** $9$. **D.** $24$.

**Câu 34.** Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là

**A.** $50$. **B.** $100$. **C.** $120$. **D.** $45$.

**Câu 35.** Trong mặt phẳng cho tập hợp $P$ gồm 10 điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số tam giác có 3 điểm đều thuộc $P$ là

**A.** $10^3$. **B.** $A_{10}^3$. **C.** $C_{10}^3$. **D.** $A_{10}^7$.

**Câu 36.** Cho đa giác đều có 20 đỉnh. Số tam giác được tạo nên từ các đỉnh này là

**A.** $A_{20}^3$. **B.** $3!C_{20}^3$. **C.** $10^3$. **D.** $C_{20}^3$.

**Câu 37.** Cho 20 điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm này?

**A.** 8000. **B.** 6480. **C.** 1140. **D.** 600.

**Câu 38.** Trong không gian cho 20 điểm trong đó không có 4 điểm nào cùng nằm trong một mặt phẳng. Hỏi có bao nhiêu cách tạo mặt phẳng từ 3 điểm trong 20 điểm trên?

**A.** $190$. **B.** $6840$. **C.** $380$. **D.** $1140$.

**Câu 39.** Trên đường tròn tâm O cho 12 điểm phân biệt. Từ các điểm đã cho có thể tạo được bao nhiêu tứ giác nội tiếp đường tròn tâm O?

**A.** $C_{12}^4$. **B.** 3. **C.** 4!. **D.** $A_{12}^4$.

**Câu 40.** Cho đa giác đều có 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật có 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho?

**A.** $C_{2018}^4$. **B.** $C_{1009}^4$. **C.** $C_{2018}^2$. **D.** $C_{1009}^2$.

**Câu 41.** Trong mặt phẳng, cho 6 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

**A.** $6^3$. **B.** $3^4$. **C.** $A_6^3$. **D.** $C_6^3$.

**Câu 42.** Số cách chia 12 phần quà cho 3 bạn sao cho ai cũng có ít nhất hai phần quà là

**A.** 28. **B.** 36. **C.** 56. **D.** 72.

**Câu 43.** Từ một nhóm có 10 học sinh nam và 8 học sinh nữ, có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh trong đó có 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ?

**A.** $C_{10}^3 C_8^2$. **B.** $A_{10}^3 A_8^2$. **C.** $A_{10}^3 + A_8^2$. **D.** $C_{10}^3 + C_8^2$.

**Câu 44.** Một nhóm có 6 học sinh gồm 4 nam và 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh trong đó có cả nam và nữ.

**A.** 6. **B.** 16. **C.** 20. **D.** 32.

**Câu 45.** Từ một tập gồm 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lí thuyết và 6 câu bài tập, người ta tạo thành các đề thi. Biết rằng một đề thi phải gồm 3 câu hỏi trong đó có ít nhất một câu lí thuyết và 1 câu bài tập. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu đề khác nhau.

**A.** 100. **B.** 36. **C.** 96. **D.** 60.

**Câu 46.** Một đội xây dựng gồm 3 kĩ sư, 7 công nhân. Có bao nhiêu cách lập từ đó một tổ công tác 5 người gồm 1 kĩ sư làm tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 3 công nhân làm tổ viên:

**A.** 420 cách. **B.** 120 cách. **C.** 252 cách. **D.** 360 cách.

**Câu 47.** Cô giáo chia 4 quả táo, 3 quả cam và 2 quả chuối cho 9 cháu (mỗi cháu 1 quả). Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau?

**A.** 120. **B.** 1260. **C.** 9. **D.** 24.

**Câu 48.** Tại một buổi lễ có 13 cặp vợ chồng tham dự, mỗi ông bắt tay với một người trừ vợ mình, các bà không ai bắt tay nhau. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay.

**A.** 234. **B.** 312. **C.** 78. **D.** 185.

**Câu 49.** Một nhóm có 5 nam và 3 nữ. Chọn ra 3 người trong đó có ít nhất 1 nữ. Số cách chọn là

**A.** 48. **B.** 46. **C.** 15. **D.** 64.

**Câu 50.** Một lớp học có 30 học sinh gồm 20 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một nhóm 3 học sinh sao cho nhóm đó có ít nhất 1 học sinh là nữ.

**A.** 1140. **B.** 2920. **C.** 1900. **D.** 900.

**Câu 51.** Một hộp chứa 20 quả cầu khác nhau trong đó có 12 quả đỏ, 8 quả xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy được 3 quả trong đó có ít nhất 1 quả xanh?

**A.** Đáp án khác. **B.** 220. **C.** 900. **D.** 920.

**Câu 52.** Từ một tập gồm 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 câu bài tập, người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong một đề thi phải gồm 3 câu hỏi trong đó có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 câu hỏi bài tập. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu đề như trên?

**A.** 60. **B.** 96. **C.** 36. **D.** 100.

**Câu 53.** Ngân hàng đề thi gồm 15 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 8 câu hỏi tự luận khác nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi sao cho mỗi đề thi gồm 10 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 4 câu hỏi tự luận khác nhau.

**A.** $C_{15}^{10}.C_8^4$. **B.** $C_{15}^{10}+C_8^4$. **C.** $A_{15}^{10}.A_8^4$. **D.** $A_{15}^{10}+A_8^4$.

**Câu 54.** Một lớp có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 4 em trực cờ đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu ít nhất phải có một nam?

**A.** $C_{40}^4-C_{15}^4$ (cách). **B.** $C_{25}^4$ (cách). **C.** $C_{25}^1C_{15}^3$ (cách). **D.** $C_{40}^4+C_{15}^4$ (cách).

**Câu 55.** Trong một buổi khiêu vũ có 20 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ?

**A.** $C_{38}^2$. **B.** $A_{38}^2$. **C.** $C_{20}^2C_{18}^1$. **D.** $C_{20}^1C_{18}^1$.

**Câu 56.** Một nhóm gồm 6 học sinh nam và 7 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn từ đó ra 3 học sinh tham gia văn nghệ sao cho luôn có ít nhất một học sinh nam.

**A.** 245. **B.** 3480. **C.** 336. **D.** 251.

**Câu 57.** Có 10 quyển sách toán giống nhau, 11 quyển sách lý giống nhau và 9 quyển sách hóa giống nhau. Có bao nhiêu cách trao giải thưởng cho 15 học sinh có kết quả thi cao nhất của khối A trong kì thi thử lần hai của trường THPT Lục Ngạn số 1, biết mỗi phần thưởng là hai quyển sách khác loại?

**A.** $C_{15}^7C_9^3$. **B.** $C_{15}^6C_9^4$. **C.** $C_{15}^3C_9^4$. **D.** $C_{30}^2$.

**Câu 58.** Có 6 học sinh lớp 12, 5 học sinh lớp 11 và 4 học sinh lớp 10. Số cách chọn ra ra 4 học sinh có đủ cả ba khối là

**A.** 1365. **B.** 720. **C.** 280. **D.** 120.

**Câu 59.** Đội ca khúc chính trị của trường THPT Yên lạc 2 gồm có 4 học sinh khối 12, có 3 học sinh khối 11 và 2 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh để biểu diễn tiết mục văn nghệ chào mừng ngày 20/11. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho khối nào cũng có học sinh được chọn.

**A.** 102. **B.** 126. **C.** 100. **D.** 98.

**Câu 60.** Một hộp có 6 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi sao cho có đủ cả ba màu. Số cách chọn là:

**A.** 840 **B.** 3843 **C.** 2170 **D.** 3003

**Câu 61.** Từ 20 câu trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó.người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra?

**A.** 176451. **B.** 176465. **C.** 176415. **D.** 6415.

**Câu 62.** Đội thanh niên xung kích của một trường trung học phổ thông có 10 người, gồm 4 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B, 3 học sinh lớp C. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh đi làm nhiệm vụ mà số học sinh lớp B bằng số học sinh lớp C?

**A.** 36. **B.** 72. **C.** 144. **D.** 108.

**Câu 63.** Một lớp học có 30 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách lập ra một đội văn nghệ gồm 6 người, trong đó có ít nhất 4 nam?

**A.** 412.803. **B.** 2.783.638. **C.** 5.608.890. **D.** 763.806.

**Câu 64.** Một bó hoa có 14 bông hoa gồm: 3 bông màu hồng, 5 bông màu xanh còn lại là màu vàng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 7 bông trong đó phải có đủ ba màu?

**A.** 3058. **B.** 3060. **C.** 3432. **D.** 129.

**Câu 65.** Một hộp đựng 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Bạn Hải rút ngẫu nhiên cùng lúc 3 tấm thẻ. Hỏi có bao nhiêu cách rút sao cho bất kì hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất hai đơn vị.

**A.** 1771. **B.** 1350. **C.** 1768. **D.** 2024.

**Câu 66.** Một hộp chứa 16 quả cầu gồm sáu quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6, năm quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5 và năm quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 5. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra từ hộp đó ba quả cầu vừa khác màu vừa khác số?

**A.** 60. **B.** 72. **C.** 150. **D.** 80.

**Câu 67.** Trong hộp có 5 quả cầu đỏ và 7 quả cầu xanh kích thước giống nhau. Lấy ngẫu nhiên 5 quả cầu từ hộp. Hỏi có bao nhiêu khả năng lấy được số quả cầu đỏ nhiều hơn số quả cầu xanh.

**A.** 245. **B.** 3480. **C.** 246. **D.** 3360.

**Câu 68.** Một trường cấp 3 của tỉnh Đồng Tháp có 8 giáo viên Toán gồm có 3 nữ và 5 nam, giáo viên Vật lý thì có 4 giáo viên nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đoàn thanh tra công tác ôn thi THPTQG gồm 3 người có đủ 2 môn Toán và Vật lý và phải có giáo viên nam và giáo viên nữ trong đoàn?

**A.** 60 (cách). **B.** 120 (cách). **C.** 12960 (cách). **D.** 90 (cách).

**Câu 69.** Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12**C.** Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn?

**A.** 120. **B.** 98. **C.** 150. **D.** 360.

**Câu 70.** Trong kho đèn trang trí đang còn 5 bóng đèn loại I, 7 bóng đèn loại II, các bóng đèn đều khác nhau về màu sắc và hình dáng. Lấy ra 5 bóng đèn bất kỳ. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra số bóng đèn loại I nhiều hơn số bóng đèn loại II?

**A.** 246. **B.** 3480. **C.** 245. **D.** 3360.

**Câu 71.** Có bao nhiêu cách chia 8 đồ vật khác nhau cho 3 người sao cho có một người được 2 đồ vật và hai người còn lại mỗi người được ba đồ vật?

**A.** $3!C_8^2C_6^3$. **B.** $C_8^2C_6^3$. **C.** $A_8^2A_6^3$. **D.** $3C_8^2C_6^3$.

**Câu 72.** Một tổ có 5 học sinh nữ và 6 học sinh nam. Số cách chọn ngẫu nhiên 5 học sinh của tổ trong đó có cả học sinh nam và học sinh nữ là?

**A.** 545. **B.** 462. **C.** 455. **D.** 456.

**Câu 73.** Có 15 học sinh giỏi gồm 6 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

**A.** 4249. **B.** 4250. **C.** 5005. **D.** 805.

**Câu 74.** Bình A chứa 3 quả cầu xanh, 4 quả cầu đỏ và 5 quả cầu trắng. Bình B chứa 4 quả cầu xanh, 3 quả cầu đỏ và 6 quả cầu trắng. Bình C chứa 5 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ và 2 quả cầu trắng. Từ mỗi bình lấy ra một quả cầu. Có bao nhiêu cách lấy để cuối cùng được 3 quả có màu giống nhau.

**A.** 180. **B.** 150. **C.** 120. **D.** 60.

**Câu 75.** Tổ 1 lớp 11A có 6 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 4 học sinh của tổ 1 để lao động vệ sinh cùng cả trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 học sinh trong đó có ít nhất một học sinh nam?

**A.** 600. **B.** 25. **C.** 325. **D.** 30.

**Câu 76.** Một tổ có 5 bạn học sinh nam và 6 bạn học sinh nữ.Giáo viên chọn ngẫu nhiên 3 em đi trực nhật.Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh để có cả nam và nữ?

**A.** 325. **B.** 415. **C.** 810. **D.** 135.

**Câu 77.** Có hai đường thẳng song song $(d)$ và $(d')$. Trên $(d)$ lấy 15 điểm phân biệt, trên $(d')$ lấy 9 điểm phân biệt. Hỏi số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 24 điểm trên là bao nhiêu?

**A.** 1485. **B.** 540. **C.** 1548. **D.** 950.

**Câu 78.** Cho đa giác đều 36 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong 36 đỉnh của đa giác đều?

**A.** 306. **B.** 153. **C.** 9. **D.** 58905.

**Câu 79.** Trên đường tròn tâm $O$ cho 12 điểm phân biệt. Từ các điểm đã cho có thể tạo được bao nhiêu tứ giác nội tiếp đường tròn tâm $O$?

**A.** $C_{12}^4$. **B.** 3. **C.** 4!. **D.** $A_{12}^4$.

**Câu 80.** Cho hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ song song với nhau. Trên $d_1$ lấy 5 điểm phân biệt, trên $d_2$ lấy 7 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó được lấy từ các điểm trên hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$.

**A.** 220. **B.** 175. **C.** 1320. **D.** 7350.

**Câu 81.** Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ lần lượt lấy 1, 2, 3 và $n$ điểm phân biệt $n \geq 3$ $(n \in \mathbb{N})$ khác $A$, $B$, $C$, $D$. Tìm $n$ biết số tam giác lấy từ $n+6$ điểm trên là 439.

**A.** $n = 20$. **B.** $n = 12$. **C.** $n = 8$. **D.** $n = 10$.

**Câu 82.** Cho một đa giác lồi (H) có 10 cạnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó là ba đỉnh của (H), nhưng ba cạnh không phải ba cạnh của (H)?

**A.** 40. **B.** 100. **C.** 60. **D.** 50.

**Câu 83.** Cho hai đường thẳng song song. Trên đường thẳng thứ nhất ta lấy 20 điểm phân biệt. Trên đường thẳng thứ hai ta lấy 18 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ ba điểm trong các điểm nói trên?

**A.** $18C_{20}^2 + 20C_{18}^2$. **B.** $20C_{18}^3 + 18C_{20}^3$. **C.** $C_{38}^3$. **D.** $C_{20}^3.C_{18}^3$.

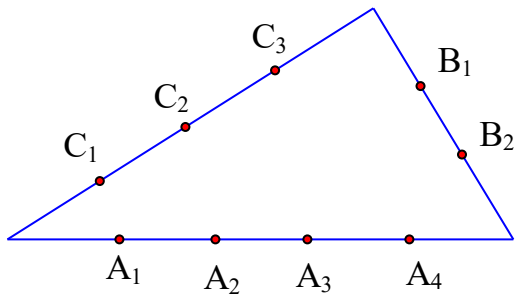
**Câu 84.** Cho một đa giác đều 40 đỉnh $A_1A_2...A_{40}$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Số tam giác có các đỉnh là 3 trong 40 đỉnh trên gấp bao nhiêu lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 40 đỉnh trên?

**A.** 20. **B.** $\frac{4}{37}$. **C.** 52. **D.** 40.

**Câu 85.** Có hai đường thẳng song song $(d)$ và $(d')$. Trên $(d)$ lấy 15 điểm phân biệt, trên $(d')$ lấy 9 điểm phân biệt. Hỏi số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 24 điểm trên là bao nhiêu?

**A.** 1485. **B.** 540. **C.** 1548. **D.** 950.

**Câu 86.** Cho một tam giác, trên ba cạnh của nó lấy 9 điểm như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu tam giác có ba đỉnh thuộc 9 điểm đã cho?




**A.** 79. **B.** 48. **C.** 55. **D.** 24.

**Câu 87.** Cho một đa giác đều $n$ đỉnh $(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$. Tìm $n$ biết số hình chữ nhật được tạo ra từ bốn đỉnh trong số $2n$ đỉnh của đa giác đó là 45.

**A.** $n = 12$. **B.** $n = 10$. **C.** $n = 9$. **D.** $n = 45$.

**Câu 88.** Cho đa giác đều $A_1A_2A_3....A_{30}$ nội tiếp trong đường tròn $(O)$. Tính số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 30 đỉnh của đa giác đó.

**A.** 105. **B.** 27405. **C.** 27406. **D.** 106.

**Câu 89.** Cho đa giác đều 100 nội tiếp một đường tròn. Số tam giác từ được tạo thành từ 3 trong 100 đỉnh của đa giác là:

**A.** 44100. **B.** 78400. **C.** 117600. **D.** 58800.

**Câu 90.** Một đa giác lồi có 10 cạnh, xét các tam giác mà 3 đỉnh là đỉnh của đa giác. Hỏi trong số các tam giác này có bao nhiêu tam giác mà cả 3 cạnh đều không phải là cạnh của đa giác?

**A.** 60. **B.** 70. **C.** 120. **D.** 50.

**Câu 91.** Trên mặt phẳng có 2017 đường thẳng song song với nhau và 2018 đường thẳng song song khác cùng cắt nhóm 2017 đường thẳng đó. Đếm số hình bình hành nhiều nhất được tạo thành có đỉnh là các giao điểm nói trên.

**A.** 2017.2018. **B.** $C_{2017}^4+C_{2018}^4$. **C.** $C_{2017}^2.C_{2018}^2$. **D.** $2017+2018$.

**Câu 92.** Cho đa giác lồi có 40 cạnh. Mỗi đoạn thẳng đi qua hai đỉnh bất kì của nó mà không phải là cạnh được gọi là một đường chéo của nó. Số giao điểm nằm bên trong đa giác (không trùng với đỉnh) được tạo ra do các đường chéo của nó cắt nhau nhiều nhất là bao nhiêu?

**A.** 91390. **B.** 273430. **C.** 740. **D.** 1520.

**Câu 93.** Từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt trong đó có 2 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn?

**A.** 144. **B.** 432. **C.** 696. **D.** 840.

**Câu 94.** Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau trong đó luôn có mặt hai chữ số 1 và 6.

**A.** 408. **B.** 720. **C.** 480. **D.** 120.

**Câu 95.** Từ các chữ số của tập hợp $\{0;1;2;3;4;5\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau mà trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0?

**A.** 120. **B.** 504. **C.** 720. **D.** 480.

**DẠNG 2. KẾT HỢP HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP**

**Câu 96.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 2018 chữ số sao cho trong mỗi số tổng các chữ số bằng 5?

**A.** $1+4C_{2017}^1+2017C_{2017}^2+2A_{2017}^2+C_{2017}^3+C_{2017}^4$.

**B.** $1+2C_{2018}^2+2C_{2018}^3+C_{2018}^4+C_{2018}^5$.

**C.** $1+2A_{2018}^2+2A_{2018}^3+A_{2018}^4+C_{2017}^5$.

**D.** $1+2A_{2018}^2+2\left(C_{2017}^2+A_{2017}^2\right)+\left(C_{2017}^3+A_{2017}^3\right)+C_{2017}^4$.

**Câu 97.** Có bao nhiêu số tự nhiên có tám chữ số trong đó có ba chữ số 0, không có hai chữ số 0 nào đứng cạnh nhau và các chữ số khác chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần.

**A.** 786240. **B.** 846000. **C.** 907200. **D.** 151200.

**Câu 98.** Từ các chữ số của tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số trong đó chữ số 2 xuất hiện đúng ba lần, các chữ số còn lại đôi một khác nhau?

**A.** 31203. **B.** 12600. **C.** 181440. **D.** 27000

**Câu 99.** Một nhóm 6 bạn học sinh mua vé vào rạp chiếu phim. Các bạn mua 6 vé gồm 3 vé mang số ghế chẵn, 3 vé mang số ghế lẻ và không có hai vé nào cùng số. Trong sáu bạn thì hai bạn muốn ngồi bên ghế chẵn, hai bạn muốn ngồi bên ghế lẻ, hai bạn còn lại không có yêu cầu gì. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ để thỏa mãn các yêu cầu của tất cả các bạn đó?

**A.** 36. **B.** 180. **C.** 72. **D.** 18.

**Câu 100.** Có bao nhiêu số tự nhiên có tám chữ số trong đó có ba chữ số $0$, không có hai chữ số $0$ nào đứng cạnh nhau và các chữ số khác chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần.

**A.** $786240$. **B.** $846000$. **C.** $907200$. **D.** $151200$.

**Câu 101.** Từ tập $A=\{1;2;3;4;5\}$ có thể lập được bao nhiêu số có $8$ chữ số sao cho chữ số $2$ xuất hiện $4$ lần, còn các chữ số khác xuất hiện một lần.

**A.** $120$. **B.** $840$. **C.** $576$. **D.** $1680$.

**Câu 102.** Có $5$ tem thư khác nhau và $6$ bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó $3$ tem thư, $3$ bì thư và dán $3$ tem thư đó ấy lên $3$ bì thư đã chọn, mỗi bì thư chỉ dán một tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy?

**A.** 1200. **B.** 1800. **C.** 1000. **D.** 200.

**Câu 103.** Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa có khác nhau vào 5 lọ khác nhau sao cho mỗi lọ cắm không quá một bông?

**A.** $A_5^3$. **B.** $3!$. **C.** $C_5^3$. **D.** $A_5^2$.

**Câu 104.** Có $6$ học sinh và $3$ thầy giáo $A$, $B$, $C$. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ $9$ người đó ngồi trên một hàng ngang có $9$ chỗ sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh.

**A.** $4320$. **B.** $90$. **C.** $43200$. **D.** $720$.

**Câu 105.** Một nhóm $6$ bạn học sinh mua vé vào rạp chiếu phim. Các bạn mua $6$ vé gồm $3$ vé mang số ghế chẵn, $3$ vé mang số ghế lẻ và không có hai vé nào cùng số. Trong $6$ bạn thì hai bạn muốn ngồi bên ghế chẵn, hai bạn muốn ngồi bên ghế lẻ, hai bạn còn lại không có yêu cầu gì. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ để thỏa mãn các yêu cầu của tất cả các bạn đó?

**A.** $72$. **B.** $36$. **C.** $18$. **D.** $180$.

**Câu 106.** Có bao nhiêu cách chia hết $4$ đồ vật khác nhau cho $3$ người, biết rằng mỗi người nhận được ít nhất 1 đồ vật.

**A.** 36 **B.** 18 **C.** 12 **D.** 72

**Câu 107.** Một Thầy giáo có 10 cuốn sách Toán đôi một khác nhau, trong đó có 3 cuốn Đại số, 4 cuốn Giải tích và 3 cuốn Hình học. Ông muốn lấy ra 5 cuốn và tặng cho 5 học sinh sao cho sau khi tặng mỗi loại sách còn lại ít nhất một cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách tặng.

**A.** 24412 **B.** 23314. **C.** 32512. **D.** 24480.

**Câu 108.** Có bao nhiêu số tự nhiên có tám chữ số trong đó có ba chữ số $0$, không có hai chữ số $0$ nào đứng cạnh nhau và các chữ số khác chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần.

**A.** $786240$. **B.** $846000$. **C.** $907200$. **D.** $151200$.

**Câu 109.** Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người,gồm 12 nam và 3 nữ.Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và một nữ?

**A.** 12141421. **B.** 5234234. **C.** 4989600. **D.** 4144880

**Câu 110.** Có hai học sinh lớp $A$, ba học sinh lớp $B$ và bốn học sinh lớp $C$ xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp $A$ không có học sinh nào lớp $B$. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy ?

**A.** $80640$. **B.** $108864$. **C.** $145152$. **D.** $217728$.

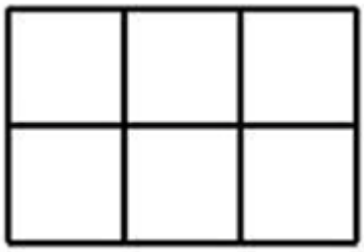
**Câu 111.** Một nhóm học sinh gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một đội cờ đỏ sao cho phải có 1 đội trưởng nam, 1 đội phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội cờ đỏ.

**A.** 141666. **B.** 241561. **C.** 111300. **D.** 131444.

**Câu 112.** Ông và bà An cùng có $6$ đứa con đang lên máy bay theo một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp hàng khác nhau nếu ông An hay bà An đứng ở đầu hoặc cuối hàng:

**A.** $720$. **B.** $1440$. **C.** $18720$. **D.** $40320$.

**Câu 113.** Bé Minh có một bảng hình chữ nhật gồm 6 hình vuông đơn vị, cố định không xoay như hình vẽ. Bé muốn dùng 3 màu để tô tất cả các cạnh của các hình vuông đơn vị, mỗi cạnh tô một lần sao cho mỗi hình vuông đơn vị được tô bởi đúng 2 màu, trong đó mỗi màu tô đúng 2 cạnh. Hỏi bé Minh có tất cả bao nhiêu cách tô màu bảng?



**A.** $4374$. **B.** $139968$. **C.** $576$. **D.** $15552$.

**Câu 114.** Cho đa giác đều $2018$ đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn $100°$?

**A.** $2018.C_{897}^{3}$. **B.** $C_{1009}^{3}$. **C.** $2018.C_{895}^{3}$. **D.** $2018.C_{896}^{3}$.

# Bài 3. TỔ HỢP

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### 1. Định nghĩa

Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử và một số nguyên $k$ với $1 \le k \le n$.
Mỗi tập con gồm $k$ phần tử được lấy ra từ $n$ phần tử của $A$ được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đó.

***Ví dụ 1.*** Bạn Quân có 4 chiếc áo sơ mi khác màu là áo vàng, áo xanh, áo trắng và áo nâu. Bạn muốn chọn 2 chiếc áo để mặc khi đi du lịch. Viết các tổ hợp chập 2 của 4 chiếc áo.

***Giải***

Các tổ hợp chập 2 của 4 chiếc áo là:
{áo vàng; áo xanh}, {áo vàng; áo trắng }, { áo vàng; áo nâu},
{áo xanh; áo trắng}, {áo xanh; áo nâu}, {áo trắng; áo nâu}.

### 2. Số các tổ hợp

***Nhận xét***: Số chỉnh hợp chập $k$ của $n$ phần tử nhiều gấp $k!$ lần số tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử đó.

Kí hiệu $C_n^k$ là số tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử với $1 \le k \le n$. Ta có: $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$.

***Ví dụ 2.*** Chứng minh $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ với $1 \le k \le n$.

***Giải***

Ta có: $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 2.1}{(n-k)\ldots 2.1} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Do đó $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

*Quy ước:* $0! = 1; C_n^0 = 1$.

Với những quy ước trên, ta có công thức sau:

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ với $0 \le k \le n$.

***Ví dụ 3***. Lớp $10A$ có 18 bạn nữ và 20 bạn nam.
a) Có bao nhiêu cách chọn 3 bạn nữ trong 18 bạn nữ?
b) Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn nam trong 20 bạn nam?
c) Có bao nhiêu cách chọn một tổ xung kích gồm 3 bạn nữ và 5 bạn nam?

***Giải***

a) Mỗi cách chọn 3 bạn nữ trong 18 bạn nữ là một tổ hợp chập 3 của 18 phần tử, do đó có $C_{18}^3$ cách chọn.

b) Mỗi cách chọn 5 bạn nam trong 20 bạn nam là một tố hợp chập 5 của 20 phần tử, do đó có $C_{20}^5$ cách chọn.

c) Số cách chọn một tổ xung kích gồm 3 bạn nữ và 5 bạn nam là:
$C_{18}^3 \cdot C_{20}^5 = 816 \cdot 15504 = 12651264$

### 3. Tính chất của các số $C_n^k$

Ta có hai đẳng thức sau: $C_n^k = C_n^{n-k} (0 \le k \le n)$ và $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k (1 \le k < n)$.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. TỔ HỢP

**Câu 1.** Chứng minh rằng: $A = C_n^{k+1} + 2C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+2}^{k+1}$

**Lời giải**

$$A = C_n^{k+1} + 2C_n^k + C_n^{k-1} = \left(C_n^{k+1} + C_n^k\right) + \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) = C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^k = C_{n+2}^{k+1}$$

**Câu 2.** Rút gọn:

$$A = \frac{C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}}$$

**Lời giải**

$$A = \frac{C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}} = \frac{C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}} = \frac{C_{16}^9 + C_{16}^{10}}{C_{17}^{10}} = \frac{C_{17}^{10}}{C_{17}^{10}} = 1$$

**Câu 3.** Một bó hoa có 9 bông hoa màu hồng và 5 bông hoa màu đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 boonh hoa thỏa mãn:

a. Có 2 bông màu hồng?

b. Có ít nhất 1 bông màu hồng?

c. Có đủ cả 2 màu?

**Lời giải**

a. Số cách chọn 2 bông hoa màu hồng trong 9 bông hồng: $C_9^2$

Số cách chọn 1 bông hoa màu đỏ trong 5 bông màu đỏ: 5

Cách lấy ra 3 bông hoa thỏa mãn có 2 bông màu hông là: $5.C_9^2 = 180$.

b. Số cách chọn không có bông màu hồng là: $C_5^3$

Số cách chọn có ít nhất 1 bông màu hồng là: $C_{14}^3 - C_5^3 = 354$.

c. Có hai trường hợp: 2 hồng 1 đỏ hoặc 2 đỏ 1 hồng

Như câu a ta có số cách chọn 2 đỏ 1 hồng là: $9C_5^2$

Số cách chọn đủ cả hai màu là: $5C_9^2 + 9C_5^2 = 270.$

**Câu 4.** Một lớp 50 học sinh, có 30 nữ. Cô giáo muốn lấy ra 5 học sinh để lập thành một đội văn nghệ. Hỏi cô có bao nhiêu cách chọn nếu:

a. Chọn bất kỳ?

b. Có hai học sinh nam?

c. Có ít nhất 1 bạn nam?

**Lời giải**

a. Có $C_{50}^5 = 2118760$ cách chọn.

b. Số cách chọn 2 học sinh nam: $C_{20}^2$

Số cách chọn 3 hs nữ còn lại: $C_{30}^3$

Số cách chọn 5hs trong đó có 2 hs nam là: $C_{20}^2 . C_{30}^3 = 771400$

c. Số cách chọn không có bạn nam nào (tất cả 5 hs đều là nữ): $C_{30}^5$

Số cách chọn 5hs trong đó có ít nhất 1 hs nam là: $C_{50}^5 - C_{30}^5 = 1976254$

**Câu 5.** Một hình đa giác đều gồm 20 cạnh. Hỏi có thể lập được

a. Bao nhiêu hình chữ nhật từ các đỉnh của đa giác trên?

b. Bao nhiêu hình tam giác từ các đỉnh của tam giác trên?

c. Bao nhiêu đường chéo?

**Lời giải**

a. Nhận thấy các hình chữ nhật được tạo thành có 2 đường chéo đi qua tâm $O$ của đa giác. Ta có số đường chéo của đa giác đi qua tâm $O$ là $10$. Chọn $2$ trong $10$ đường chéo thì lập được một hình chữ nhật.

Vậy $C_{10}^2 = 45$ hình chữ nhật.

b. Một tam giác có $3$ đỉnh không sắp thứ tự nên số tam giác: $C_{20}^3 = 1140$.

c. Một đường chéo được tạo thành từ hai điểm và trừ các cạnh của đa giác đó nên số đường chéo:

$$C_{20}^2 - 20 = 170$$

**Câu 6.** Một tổ có $15$ học sinh, thầy giáo có $3$ đề kiểm tra khác nhau. Cần chọn $5$ học sinh cho mỗi đề kiểm tra. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách?

**Lời giải**

+ Số cách chọn ra $5$ hs trong 1 tổ cho đề kiểm tra số 1 là: $C_{15}^5 = 3003$

+ Khi đó số học sinh còn lại chưa được phát đề kiểm tra là $10$ hs

Số cách chọn ra $5$ hs trong $10$ hs còn lại cho đề kiểm tra số $2$ là: $C_{10}^5 = 252$

+ Có $1$ cách chọn cho $5$ hs còn lại cho đề kiểm tra số $3$.

Như vậy thầy giáo có: $3003.252.1 = 750750$ cách

## DẠNG 2. KẾT HỢP HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP

**Câu 7.** Rút gọn:

$$B = \frac{P_{n+2}}{A_n^k . P_{n-k}} + \frac{C_{15}^5 + 2C_{15}^6 + C_{15}^7}{C_{17}^7}$$

**Lời giải**

$$B = \frac{P_{n+2}}{A_n^k . P_{n-k}} + \frac{C_{15}^5 + 2C_{15}^6 + C_{15}^7}{C_{17}^7} = \frac{(n+2)!}{\frac{n!}{(n-k)!}(n-k)!} + 1 = (n+2)(n+1) + 1 = n^2 + 3n + 3$$

**Câu 8.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ các số $0,1,2,3,4,5,6,7,8$. Trong đó chữ số 3 có mặt đúng 2 lần. Các chữ số khác có mặt 1 lần?

**Lời giải**

- Xét TH 1 số $3$ đứng đầu, khi đó số $3$ thứ $2$ có $4$ cách chọn và ba vị trí còn lại có $A_8^3$ cách chọn

Nếu 1 số 3 đứng đầu thì có: $4A_8^3$ cách

- Xét TH 2 không có số $3$ đứng đầu tiên, khi đó

+ Có $C_4^2$ cách chọn $2$ số $3$ vào hai vị trí trong $4$ vị trí còn lại.

+ Có $7$ cách chọn vào vị trí đầu tiên

+ Có $A_7^2$ (Chọn 2 số khác vị trí đầu và số 3) cách chọn vào 2 vị trí còn lại

Nếu không có số 3 đứng đầu thì có $7.A_4^2.A_7^2$.

Như vậy có $4A_8^3+7C_4^2.A_7^2$ cách chọn.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### DẠNG 1. TỔ HỢP

**Câu 1.** Cho tập hợp $M$ có 10 phần tử. Số tập con gồm hai phần từ của $M$ là

**A.** $C_{10}^2$ **B.** $10^2$ **C.** $A_{10}^8$ **D.** $A_{10}^2$

**Lời giải**

**Chọn A**

Mỗi cách lấy ra 2 phần tử trong 10 phần tử của $M$ để tạo thành tập con gồm 2 phần tử là một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử $\Rightarrow$ Số tập con của $M$ gồm 2 phần tử là $C_{10}^2$

**Câu 2.** Cho tập hợp $M$ có 30 phần tử. Số tập con gồm 5 phần tử của $M$ là

**A.** $A_{30}^4$. **B.** $30^5$. **C.** $30^5$. **D.** $C_{30}^5$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số tập con gồm 5 phần tử của $M$ chính là số tổ hợp chập 5 của 30 phần tử, nghĩa là bằng $C_{30}^5$.

**Câu 3.** Số tập hợp con có 3 phần tử của một tập hợp có 7 phần tử là

**A.** $C_7^3$. **B.** $\frac{7!}{3!}$. **C.** $A_7^3$. **D.** 21.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số tập hợp con cần tìm là số tổ hợp chập 3 của 7 phần tử.
Vậy có $C_7^3$ tập con cần tìm.

**Câu 4.** Cho tập hợp $M=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Số tập con gồm 3 phần tử của $M$ không có số 0 là:

**A.** $A_{10}^3$. **B.** $A_9^3$. **C.** $C_{10}^3$. **D.** $C_9^3$.

**Lời giải**

Mỗi tập con gồm 3 phần tử của $M$ không có số 0 là tổ hợp chập 3 của 9 phần tử.
Số tập con gồm 3 phần tử của $M$ không có số 0 là: $C_9^3$.

**Câu 5.** Cho tập hợp $M$ có 30 phần tử. Số tập con gồm 5 phần tử của $M$ là

**A.** $C_{30}^5$. **B.** $A_{30}^5$. **C.** $30^5$. **D.** $A_{30}^4$.

**Lời giải**

Số tập con gồm 5 phần tử của $M$ là $C_{30}^5$.

**Câu 6.** Có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử được lấy ra từ tập $A=\{a;b;c;d;e;f\}$?

**A.** 10. **B.** 80. **C.** 40. **D.** 20.

**Lời giải**

**Chọn D**

Mỗi tập con tập gồm 3 phần tử được lấy ra từ tập $A$ có 6 phần tử là một tổ hợp chập 3 của 6 phần tử.

Vậy số tập con gồm 3 phần tử của $A$ là $C_6^3 = 20$ tập con.

**Câu 7.** Cho tập $M$ gồm 10 phần tử. Số tập con gồm 4 phần tử của $M$ là

**A.** 40. **B.** $A_{10}^4$. **C.** $C_{10}^4$. **D.** $10^4$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số tập con gồm 4 phần tử của $M$ là số cách chọn 4 phần tử bất kì trong 10 phần tử của $M$.

Do đó số tập con gồm 4 phần tử của $M$ là $C_{10}^4$.

**Câu 8.** Cho tập hợp $E$ có 10 phần tử. Hỏi có bao nhiêu tập con có 8 phần tử của tập hợp $E$?

**A.** 100. **B.** 80. **C.** 45. **D.** 90.

**Lời giải**

**Chọn C**

Mỗi tập con có 8 phần tử của tập hợp $E$ là một tổ hợp chập 8 của 10. Vậy số tập con có 8 phần tử của tập hợp $E$ là: $C_{10}^8 = 45$.

**Câu 9.** Cho tập $A$ gồm 12 phần tử. Số tập con có 4 phần tử của tập A là

**A.** $A_{12}^8$. **B.** $C_{12}^4$. **C.** 4!. **D.** $A_{12}^4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo định nghĩa tổ hợp: " Giả sử tập $A$ có $n$ phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi tập con gồm $k$ phần tử của $A$ được gọi là một tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử đã cho".

Do đó theo yêu cầu bài toán số tập con có 4 phần tử của tập A là $C_{12}^4$.

Vậy chọn ý B

**Câu 10.** Cho tập hợp $E$ có 10 phần tử. Hỏi có bao nhiêu tập con có 8 phần tử của tập hợp $E$?

**A.** 100. **B.** 90. **C.** 45. **D.** 80.

**Lời giải**

Mỗi tập con có 8 phần tử của tập hợp $E$ là một tổ hợp chập 8 của 10 phần tử nên số tập con cần tìm là $C_{10}^8 = 45$.

**Câu 11.** Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số dạng $\overline{abc}$ với $a$, $b$, $c \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$ sao cho $a < b < c$.

**A.** 120. **B.** 30. **C.** 40. **D.** 20.

**Lời giải**

Vì số tự nhiên có ba chữ số dạng $\overline{abc}$ với $a$, $b$, $c \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$ sao cho $a < b < c$ nên $a$, $b$, $c \in \{1;2;3;4;5;6\}$. Suy ra số các số có dạng $\overline{abc}$ là $C_6^3 = 20$.

**Câu 12.** Từ các chữ số 2, 3, 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt 2 lần, chữ số 3 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 4 lần?

**A.** 1260. **B.** 40320. **C.** 120. **D.** 1728.

**Lời giải**

Chọn vị trí cho 2 chữ số 2 có $C_9^2$ cách.

Chọn vị trí cho 3 chữ số 3 có $C_7^3$ cách.

Chọn vị trí cho 4 chữ số 4 có $C_4^4$ cách.

Vậy số các số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán là $C_9^2 C_7^3 C_4^4 = 1260$ số.

**Câu 13.** Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục?

**A.** $48$. **B.** $72$. **C.** $54$. **D.** $36$.

**Lời giải**

Cứ hai số được chọn từ trong chín chữ số đã cho chỉ lập được duy nhất một số theo yêu cầu, nghĩa là ta được một tổ hợp chập $2$ của $9$ phần tử.

Vậy số các số cần lập là $C_9^2 = 36$.

**Câu 14.** Từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$, hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên mỗi số có $4$ chữ số khác nhau mà chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đằng trước?

**A.** $4536$. **B.** $2513$. **C.** $126$. **D.** $3913$.

**Lời giải**

Vì chữ số cần lập mà chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đằng trước nên không có chữ số $0$.

Chọn $4$ chữ số khác nhau từ các chữ số $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ có $C_9^4 = 126$ cách chọn.

Ứng với mỗi cách chọn đó chỉ có duy nhất $1$ cách xếp mà chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đằng trước. Do đó có $126$ số thỏa mãn đề bài.

**Câu 15.** Số cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là

**A.** $2^5$. **B.** $C_5^2$. **C.** $A_5^2$. **D.** $5^2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Mỗi cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 5 phần tử. vậy có $C_5^2$ cách.

**Câu 16.** Số cách chọn 2 học sinh từ 6 học sinh là

**A.** $A_6^2$. **B.** $C_6^2$. **C.** $2^6$. **D.** $6^2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Số cách chọn 2 học sinh từ 6 học sinh là: $C_6^2$.

**Câu 17.** Số cách chọn $2$ học sinh từ $7$ học sinh là

**A.** $2^7$. **B.** $A_7^2$. **C.** $C_7^2$. **D.** $7^2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Mỗi cách chọn $2$ học sinh từ $7$ học sinh là một tổ hợp chập $2$ của $7$ phần tử. Số cách chọn $2$ học sinh từ $7$ học sinh là: $C_7^2$.

**Câu 18.** Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm $38$ học sinh?

**A.** $2^{38}$ **B.** $C_{38}^2$ **C.** $38^2$ **D.** $A_{38}^2$

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 19.** Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm $34$ học sinh?

**A.** $2^{34}$. **B.** $A_{34}^2$. **C.** $34^2$. **D.** $C_{34}^2$.

**Lời giải**

Mỗi cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm $34$ học sinh là một tổ hợp chập $2$ của $34$ phần tử nên số cách chọn là $C_{34}^2$.

**Câu 20.** Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm $38$ học sinh?

**A.** $A_{38}^2$. **B.** $2^{38}$. **C.** $C_{38}^2$. **D.** $38^2$.

**Lời giải**

$C_{38}^2$

**Câu 21.** Cho tập hợp $M$ có $10$ phần tử. Số tập con gồm hai phần từ của $M$ là

**A.** $C_{10}^2$ **B.** $10^2$ **C.** $A_{10}^8$ **D.** $A_{10}^2$

**Lời giải**

**Chọn A**

Mỗi cách lấy ra $2$ phần tử trong $10$ phần tử của $M$ để tạo thành tập con gồm $2$ phần tử là một tổ hợp chập $2$ của $10$ phần tử $\Rightarrow$ Số tập con của $M$ gồm $2$ phần tử là $C_{10}^2$

**Câu 22.** Một lớp có $48$ học sinh. Số cách chọn $2$ học sinh trực nhật là

**A.** $2256$. **B.** $2304$. **C.** $1128$. **D.** $96$.

**Lời giải**

Mỗi cách chọn $2$ học sinh trong $48$ là một tổ hợp chập $2$ của $48$ phần tử.

Suy ra số cách chọn là $C_{48}^2 = 1128$.

**Câu 23.** Cần phân công ba bạn từ một tổ có $10$ bạn để làm trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách phân công khác nhau?

**A.** $720$. **B.** $10^3$. **C.** $120$. **D.** $210$.

**Lời giải**

Số cách phân công là: $C_{10}^3 = 120$.

**Câu 24.** Một hộp đựng hai viên bi màu vàng và ba viên bi màu đỏ. Có bao nhiêu cách lấy ra hai viên bi trong hộp?

**A.** $10$. **B.** $20$. **C.** $5$. **D.** $6$.

**Lời giải**

Số cách lấy ra hai viên bi là $C_5^2 = 10$.

**Câu 25.** Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn 3 học sinh để tham gia vệ sinh công cộng toàn trường, hỏi có bao nhiêu cách chọn như trên?

**A.** 2300. **B.** 59280. **C.** 455 **D.** 9880.

**Lời giải**

**Chọn D**

Chọn 3 học sinh trong 40 học sinh nên ta có $C_{40}^3 = 9880$ cách chọn.

**Câu 26.** Một hộp đựng $50$ viên bi gồm 10 viên bi màu trắng, 25 viên bi màu đỏ và 15 viên bi màu xanh. Có bao nhiêu cách chọn 8 viên bi trong hộp đó mà không có viên bi nào màu xanh?

**A.** $C_{50}^8$. **B.** $C_{10}^8 + C_{25}^8$. **C.** $C_{35}^8$. **D.** $C_{50}^8 - C_{15}^8$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số cách chọn $8$ viên bi từ 35 viên bi trắng + đỏ là: $C_{35}^8$.

**Câu 27.** Số cách phân 3 học sinh trong 12 học sinh đi lao động là

**A.** $P_{12}$. **B.** $36$. **C.** $A_{12}^3$. **D.** $C_{12}^3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Mỗi cách phân 3 học sinh trong 12 học sinh đi lao động là tổ hợp chập 3 của 12.

Vậy số cách phân học sinh lao động là $C_{12}^3$ .

**Câu 28.** Có tất cả bao nhiêu cách chia 10 người thành hai nhóm, một nhóm có 6 người và một nhóm có 4 người?

**A.** 210. **B.** 120. **C.** 100. **D.** 140.

**Lời giải**

Số cách phân nhóm 6 người trong 10 người là $C_{10}^6$. Sau khi phân nhóm 6 người còn lại 4 người được phân nhóm vào nhóm còn lại. Vậy có $C_{10}^6 = 210$ cách.

**Câu 29.** Trong một đa giác lồi $n$ cạnh, số đường chéo của đa giác là.

**A.** $C_n^2$. **B.** $A_n^2$. **C.** $A_n^2 - n$. **D.** $C_n^2 - n$.

**Lời giải**

Số đường chéo của đa giác là $C_n^2 - n$.

**Câu 30.** Cho một đa giác đều có 10 cạnh. Có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh thuộc các đỉnh của đa giác đã cho.

**A.** 720. **B.** 35. **C.** 120. **D.** 240.

**Lời giải**

Ta có đa giác đều có 10 cạnh nên đa giác đều có 10 đỉnh.

Mỗi tam giác là một tổ hợp chập 3 của 10 phần tử.

Vậy có $C_{10}^3 = 120$ tam giác.

**Câu 31.** Cho 8 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được chọn từ 8 điểm trên ?

**A.** 336. **B.** 56. **C.** 168. **D.** 84.

**Lời giải**

Ta có số tam giác tạo thành từ 8 điểm trên là số tổ hợp chập 3 điểm của 8 điểm. Suy ra kết quả là: $C_8^3 = 56$.

**Câu 32.** Số đường chéo của đa giác đều có 20 cạnh là bao nhiêu?

**A.** 170. **B.** 190. **C.** 360. **D.** 380.

**Lời giải**

Số đường chéo của đa giác đều $n$ cạnh là $C_n^2 - n$.

Với $n = 20$ thì $C_{20}^2 - 20 = 170$.

**Câu 33.** Lục giác đều $ABCDEF$ có bao nhiêu đường chéo

**A.** 15. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 24.

**Lời giải**

Số đường chéo của lục giác đều (6 cạnh là) : $C_6^2 - 6 = 9$

**Câu 34.** Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là

**A.** 50. **B.** 100. **C.** 120. **D.** 45.

**Lời giải**

Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là $C_{10}^2 = 45$.

**Câu 35.** Trong mặt phẳng cho tập hợp $P$ gồm $10$ điểm phân biệt trong đó không có $3$ điểm nào thẳng hàng. Số tam giác có $3$ điểm đều thuộc $P$ là

**A.** $10^3$. **B.** $A_{10}^3$. **C.** $C_{10}^3$. **D.** $A_{10}^7$.

**Lời giải**

Với $3$ điểm phân biệt không thẳng hàng, tạo thành duy nhất $1$ tam giác.

Vậy, với $10$ điểm phân biệt trong đó không có $3$ điểm nào thẳng hàng, số tam giác tạo thành là $C_{10}^3$.

**Câu 36.** Cho đa giác đều có $20$ đỉnh. Số tam giác được tạo nên từ các đỉnh này là

**A.** $A_{20}^3$. **B.** $3!C_{20}^3$. **C.** $10^3$. **D.** $C_{20}^3$.

**Lời giải**

Số tam giác bằng với số cách chọn $3$ phần tử trong $20$ phần tử. Do đó có $C_{20}^3$ tam giác.

**Câu 37.** Cho $20$ điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm này?

**A.** 8000. **B.** 6480. **C.** 1140. **D.** 600.

**Lời giải**

**Chọn C**

Chọn $3$ điểm từ $20$ điểm ta có một tam giác nên số tam giác tạo thành từ $20$ điểm đã cho là $C_{20}^3 = 1140.$.

**Câu 38.** Trong không gian cho $20$ điểm trong đó không có $4$ điểm nào cùng nằm trong một mặt phẳng. Hỏi có bao nhiêu cách tạo mặt phẳng từ $3$ điểm trong $20$ điểm trên?

**A.** $190$. **B.** $6840$. **C.** $380$. **D.** $1140$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số cách tạo mặt phẳng là $C_{20}^3 = 1140$.

**Câu 39.** Trên đường tròn tâm O cho 12 điểm phân biệt. Từ các điểm đã cho có thể tạo được bao nhiêu tứ giác nội tiếp đường tròn tâm O?

**A.** $C_{12}^4$. **B.** 3. **C.** 4!. **D.** $A_{12}^4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: Số cách lấy 4 điểm phân biệt bất kì từ 12 điểm phân biệt trên đường tròn tâm O sẽ là số tứ giác nội tiếp đường tròn tâm O được tạo thành. Vậy có $C_{12}^4$ tứ giác nội tiếp đường tròn tâm O được tạo thành.

**Câu 40.** Cho đa giác đều có $2018$ đỉnh. Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật có $4$ đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho?

**A.** $C_{2018}^4$. **B.** $C_{1009}^4$. **C.** $C_{2018}^2$. **D.** $C_{1009}^2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số đường chéo qua tâm là $1009$.

Số hình chữ nhật có $4$ đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho bằng số cách lấy hai đường chéo qua tâm, do đó số hình chữ nhật là $C_{1009}^2$.

**Câu 41.** Trong mặt phẳng, cho 6 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

**A.** $6^3$. **B.** $3^4$. **C.** $A_6^3$. **D.** $C_6^3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Lấy 3 điểm trong 6 điểm lập thành tam giác có $C_6^3$ cách.

**Câu 42.** Số cách chia 12 phần quà cho 3 bạn sao cho ai cũng có ít nhất hai phần quà là

**A.** 28. **B.** 36. **C.** 56. **D.** 72.

**Lời giải**

+ Chia trước cho mỗi học sinh một phần quà thì số phần quà còn lại là 9 phần quà.

+ Chia 9 phần quà cho 3 học sinh sao cho học sinh nào cũng có ít nhất một phần quà:

Đặt 9 phần quà theo một hàng ngang, giữa các phần quà sẽ có 8 khoảng trống, chọn 2 khoảng trống trong 8 khoảng trống đó để chia 9 phần quà còn lại thành 3 phần quà mà mỗi phần có ít nhất một phần quà, có $C_8^2$. Vậy tất cả có $C_8^2 = 28$ cách chia.

**Câu 43.** Từ một nhóm có 10 học sinh nam và 8 học sinh nữ, có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh trong đó có 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ?

**A.** $C_{10}^3 C_8^2$. **B.** $A_{10}^3 A_8^2$. **C.** $A_{10}^3 + A_8^2$. **D.** $C_{10}^3 + C_8^2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số cách chọn ra 3 học sinh nam từ 10 học sinh nam là: $C_{10}^3$.

Số cách chọn ra 2 học sinh nữ từ 8 học sinh nữ là: $C_8^2$.

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu là: $C_{10}^3 C_8^2$.

**Câu 44.** Một nhóm có 6 học sinh gồm 4 nam và 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh trong đó có cả nam và nữ.

**A.** 6. **B.** 16. **C.** 20. **D.** 32.

**Lời giải**

**Chọn B**

Chọn 3 học sinh tùy ý từ nhóm 6 học sinh có: $C_6^3$ cách.

Chọn 3 học sinh nam từ 4 học sinh nam có: $C_4^3$ cách.

Do đó, số cách chọn ra 3 học sinh trong đó có cả nam và nữ là: $C_6^3 - C_4^3 = 16$ cách.

**Câu 45.** Từ một tập gồm 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lí thuyết và 6 câu bài tập, người ta tạo thành các đề thi. Biết rằng một đề thi phải gồm 3 câu hỏi trong đó có ít nhất một câu lí thuyết và 1 câu bài tập. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu đề khác nhau.

**A.** 100. **B.** 36. **C.** 96. **D.** 60.

**Lời giải**

**Chọn C**

Trường hợp 1: 2 câu lí thuyết, 1 câu bài tập. Suy ra số đề tạo ra là $C_4^2.C_6^1 = 36$ (đề)

Trường hợp 2: 1 câu lí thuyết, 2 câu bài tập. Suy ra số đề tạo ra là $C_4^1.C_6^2 = 60$ (đề)

Vậy có thể tạo được số đề khác nhau là: $36 + 60 = 96$ (đề)

**Câu 46.** Một đội xây dựng gồm 3 kĩ sư, 7 công nhân. Có bao nhiêu cách lập từ đó một tổ công tác 5 người gồm 1 kĩ sư làm tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 3 công nhân làm tổ viên:

**A.** 420 cách. **B.** 120 cách. **C.** 252 cách. **D.** 360 cách.

**Lời giải**

**Chọn A**

Chọn 1 kĩ sư làm tổ trưởng có 3 cách, 1 công nhân làm tổ phó có 7 cách và 3 công nhân làm tổ viên có $C_6^3$ cách.

Vậy số cách lập tổ công tác theo yêu cầu là: $3\times 7\times C_6^3 = 420$ cách

**Câu 47.** Cô giáo chia 4 quả táo, 3 quả cam và 2 quả chuối cho 9 cháu (mỗi cháu 1 quả). Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau?

**A.** 120. **B.** 1260. **C.** 9. **D.** 24.

**Lời giải**

**Chọn B**

Chọn nhóm 4 cháu để được chia táo thì có $C_9^4$ (cách). Khi đó có một cách chia táo để mỗi cháu trong nhóm này được một quả táo.

Chọn nhóm 3 cháu để được chia cam trong các cháu còn lại thì có $C_5^3$ (cách). Khi đó có một cách chia cam để mỗi cháu trong nhóm này được một quả cam.

Còn lại hai cháu và tương ứng có một cách chia cho mỗi cháu một quả chuối.

Số cách chia thỏa mãn bài toán là : $C_9^4.C_5^3.1 = 1260$ (cách).

**Câu 48.** Tại một buổi lễ có 13 cặp vợ chồng tham dự, mỗi ông bắt tay với một người trừ vợ mình, các bà không ai bắt tay nhau. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay.

**A.** 234. **B.** 312. **C.** 78. **D.** 185.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số cái bắt tay của 13 cặp vợ chồng không có điều kiện gì là $C_{26}^2 = 325$.

Số cái bắt tay của 13 bà vợ với nhau là $C_{13}^2 = 78$.

Số cái bắt tay của 13 cặp vợ chồng với nhau (chồng bắt tay với vợ) là 13.

Số cái bắt tay thỏa mãn yêu cầu bài toán là $325-78-13=234$.

**Câu 49.** Một nhóm có 5 nam và 3 nữ. Chọn ra 3 người trong đó có ít nhất 1 nữ. Số cách chọn là

**A.** 48. **B.** 46. **C.** 15. **D.** 64.

**Lời giải**

**Chọn B**

Số cách chọn ra 3 người từ 8 người là: $C_8^3 = 56$

Số cách chọn ra 3 người không có nữ là $C_5^3 = 10$

$\Rightarrow$ Số cách chọn ra 3 người trong đó có ít nhất 1 nữ là: $56-10=46$.

**Câu 50.** Một lớp học có 30 học sinh gồm 20 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một nhóm 3 học sinh sao cho nhóm đó có ít nhất 1 học sinh là nữ.

**A.** 1140. **B.** 2920. **C.** 1900. **D.** 900.

**Lời giải**

**Chọn B**

Số cách chọn ra 3 học sinh từ 30 học sinh: $C_{30}^3 = 4060$ (cách).

Số cách chọn ra 3 học sinh nam là: $C_{20}^3 = 1140$ (cách).

Số cách chọn một nhóm 3 học sinh sao cho nhóm đó có ít nhất 1 học sinh là nữ:
$4060-1140=2920$ (cách).

**Câu 51.** Một hộp chứa 20 quả cầu khác nhau trong đó có 12 quả đỏ, 8 quả xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy được 3 quả trong đó có ít nhất 1 quả xanh?

**A.** Đáp án khác. **B.** 220. **C.** 900. **D.** 920.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số cách lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ 20 quả là $C_{20}^3$.

Số cách lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu mà không có quả cầu màu xanh là $C_{12}^3$.

Vậy số cách lấy ra 3 quả cầu trong đó có ít nhất 1 quả màu xanh là $C_{20}^3-C_{12}^3=920$ (cách).

**Câu 52.** Từ một tập gồm 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 câu bài tập, người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong một đề thi phải gồm 3 câu hỏi trong đó có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 câu hỏi bài tập. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu đề như trên?

**A.** 60. **B.** 96. **C.** 36. **D.** 100.

**Lời giải**

TH1: chọn 2 câu lý thuyết và 1 câu bài tập có: $C_4^2.C_6^1$ cách.

TH1: chọn 1 câu lý thuyết và 2 câu bài tập có: $C_4^1.C_6^2$ cách.

Vậy số cách lập đề thỏa điều kiện bài toán là: 96 cách.

**Câu 53.** Ngân hàng đề thi gồm 15 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 8 câu hỏi tự luận khác nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi sao cho mỗi đề thi gồm 10 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 4 câu hỏi tự luận khác nhau.

**A.** $C_{15}^{10}.C_8^4$. **B.** $C_{15}^{10}+C_8^4$. **C.** $A_{15}^{10}.A_8^4$. **D.** $A_{15}^{10}+A_8^4$.

**Lời giải**

Để lập được được một đề thi gồm 10 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 4 câu hỏi tự luận khác nhau ta thực hiện qua 2 giai đoạn.

Giai đoạn 1: Chọn 10 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau từ 15 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau có $C_{15}^{10}$ cách chọn.

Giai đoạn 2: Chọn 4 câu hỏi tự luận khác nhau từ 8 câu hỏi tự luận khác nhau có $C_8^4$ cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $C_{15}^{10}.C_8^4$ cách lập đề thi.

**Câu 54.** Một lớp có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 4 em trực cờ đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu ít nhất phải có một nam?

**A.** $C_{40}^4-C_{15}^4$ (cách). **B.** $C_{25}^4$ (cách). **C.** $C_{25}^1C_{15}^3$ (cách). **D.** $C_{40}^4+C_{15}^4$ (cách).

**Lời giải**

Số cách chọn 4 em tùy ý trong lớp: $C_{40}^4$.

Số cách chọn 4 em nữ trong lớp: $C_{15}^4$.

Số cách chọn 4 em trong đó ít nhất phải có một nam: $C_{40}^4-C_{15}^4$.

**Câu 55.** Trong một buổi khiêu vũ có $20$ nam và $18$ nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ?

**A.** $C_{38}^{2}$. **B.** $A_{38}^{2}$. **C.** $C_{20}^{2}C_{18}^{1}$. **D.** $C_{20}^{1}C_{18}^{1}$.

**Lời giải**

Chọn một nam trong $20$ nam có $C_{20}^{1}$ cách.

Chọn một nữ trong $18$ nữ có $C_{18}^{1}$ cách.

Theo quy tắc nhân, số cách chọn một đôi nam nữ là $C_{20}^{1}C_{18}^{1}$.

**Câu 56.** Một nhóm gồm $6$ học sinh nam và $7$ học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn từ đó ra $3$ học sinh tham gia văn nghệ sao cho luôn có ít nhất một học sinh nam.

**A.** $245$. **B.** $3480$. **C.** $336$. **D.** $251$.

**Lời giải**

Chọn ra $3$ học sinh tham gia văn nghệ trong $13$ học sinh tùy ý có $C_{13}^{3}$ cách.

Chọn ra $3$ học sinh tham gia văn nghệ trong $7$ học sinh nữ có $C_{7}^{3}$ cách.

Vậy chọn ra $3$ học sinh tham gia văn nghệ sao cho luôn có ít nhất một học sinh nam có $C_{13}^{3}-C_{7}^{3}=251$.

**Câu 57.** Có $10$ quyển sách toán giống nhau, $11$ quyển sách lý giống nhau và $9$ quyển sách hóa giống nhau. Có bao nhiêu cách trao giải thưởng cho $15$ học sinh có kết quả thi cao nhất của khối A trong kì thi thử lần hai của trường THPT Lục Ngạn số 1, biết mỗi phần thưởng là hai quyển sách khác loại?

**A.** $C_{15}^{7}C_{9}^{3}$. **B.** $C_{15}^{6}C_{9}^{4}$. **C.** $C_{15}^{3}C_{9}^{4}$. **D.** $C_{30}^{2}$.

**Lời giải**

Có duy nhất một cách chia $30$ quyển sách thành $15$ bộ, mỗi bộ gồm hai quyển sách khác loại, trong đó có:

+ $4$ bộ giống nhau gồm $1$ toán và $1$ hóa.

+ $5$ bộ giống nhau gồm $1$ hóa và $1$ lí.

+ $6$ bộ giống nhau gồm $1$ lí và toán.

Số cách trao phần thưởng cho $15$ học sinh được tính như sau:

+ Chọn ra $4$ người (trong $15$ người) để trao bộ sách toán và hóa $\Rightarrow$ có $C_{15}^{4}$ cách.

+ Chọn ra $5$ người (trong $11$ người còn lại) để trao bộ sách hóa và lí $\Rightarrow$ có $C_{11}^{5}$ cách.

+ Còn lại $6$ người trao bộ sách toán và lí $\Rightarrow$ có $1$ cách.

Vậy số cách trao phần thưởng là $C_{15}^{4}.C_{11}^{5}=C_{15}^{6}.C_{9}^{4}=630630$ (cách).

**Câu 58.** Có 6 học sinh lớp 12, 5 học sinh lớp 11 và 4 học sinh lớp 10. Số cách chọn ra ra 4 học sinh có đủ cả ba khối là

**A.** 1365. **B.** 720. **C.** 280. **D.** 120.

**Lời giải**

**Chọn B**

Trường hợp 1: Chọn 2 học sinh khối 12, 1 học sinh khối 11, 1 học sinh khối 10 ta có $C_{6}^{2}C_{5}^{1}C_{4}^{1}$ cách.

Trường hợp 2: Chọn 1 học sinh khối 12, 2 học sinh khối 11, 1 học sinh khối 10 ta có $C_{6}^{1}C_{5}^{2}C_{4}^{1}$ cách.

Trường hợp 3: Chọn 1 học sinh khối 12, 1 học sinh khối 11, 2 học sinh khối 10 ta có $C_{6}^{1}C_{5}^{1}C_{4}^{2}$ cách.

Vậy ta có số cách chọn thoả mãn là $C_{6}^{2}C_{5}^{1}C_{4}^{1}+C_{6}^{1}C_{5}^{2}C_{4}^{1}+C_{6}^{1}C_{5}^{1}C_{4}^{2}=720$ (cách).

**Câu 59.** Đội ca khúc chính trị của trường THPT Yên lạc 2 gồm có 4 học sinh khối 12, có 3 học sinh khối 11 và 2 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh để biểu diễn tiết mục văn nghệ chào mừng ngày 20/11. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho khối nào cũng có học sinh được chọn.

**A.** 102. **B.** 126. **C.** 100. **D.** 98.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số cách chọn 5 học sinh tùy ý là $C_9^5 = 126$.

Số cách chọn 5 học sinh gồm học sinh khối 10 hoặc khối 11 là $C_5^5 = 1$.

Số cách chọn 5 học sinh gồm học sinh khối 11 hoặc khối 12 là $C_7^5 = 21$.

Số cách chọn 5 học sinh gồm học sinh khối 10 hoặc khối 12 là $C_6^5 = 6$.

Vậy số cách chọn 5 học sinh đủ ba khối là $126 - 1 - 21 - 6 = 98$.

**Câu 60.** Một hộp có 6 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi sao cho có đủ cả ba màu. Số cách chọn là:

**A.** 840 **B.** 3843 **C.** 2170 **D.** 3003

**Lời giải**

**Chọn C**

Tổng số có 15 viên bi.

Số cách chọn 5 viên bi tùy ý: $C_{15}^5 = 3003$.

Số cách chọn 5 viên bi chỉ có một màu: $C_6^5 + C_7^5 = 7$

Số cách chọn 5 viên bi chỉ có một hoặc hai màu(xanh+ đỏ; xanh + vàng; đỏ + vàng):
*(Trong số cách chọn này có lặp lại số cách chọn bi một màu)*

$C_{11}^5 + C_{10}^5 + C_9^5 - \left(C_6^5 + C_5^5\right) = 833$.

Vậy số cách chọn 5 viên bi có đủ cả ba màu là: $3003 - 840 = 2170$

**Câu 61.** Từ 20 câu trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó.người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra?

**A.** 176451. **B.** 176465. **C.** 176415. **D.** 6415.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số cách chọn ra 10 câu bất kỳ trong số 20 câu $C_{20}^{10}$

Số cách chọn ra 10 câu mà không có câu dễ: $C_{11}^{10}$

Số cách chọn ra 10 câu mà không có câu khó: $C_{16}^{10}$

Số cách chọn ra 10 câu mà không có câu trung bình: $C_{13}^{10}$

Như vậy: Số cách chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ 3 loại dễ, trung bình và khó là:

$C_{20}^{10} - C_{11}^{10} - C_{16}^{10} - C_{13}^{10} = 176451$

**Câu 62.** Đội thanh niên xung kích của một trường trung học phổ thông có 10 người, gồm 4 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B, 3 học sinh lớp C. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh đi làm nhiệm vụ mà số học sinh lớp B bằng số học sinh lớp C?

**A.** 36. **B.** 72. **C.** 144. **D.** 108.

**Lời giải**

**Chọn B**

Trường hợp 1: Lớp B và lớp C có 1 học sinh, lớp A có 3 học sinh. Khi đó, số cách chọn là

$C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^3 = 36$.

Trường hợp 2: Lớp B và lớp C có 2 học sinh, lớp A có1 học sinh. Khi đó, số cách chọn là $C_3^2 \cdot C_3^2 \cdot C_4^1 = 36$.

Áp dụng quy tắc cộng ta có số cách chọn 5 học sinh đi làm nhiệm vụ mà số học sinh lớp B bằng số học sinh lớp C là $36+36=72$ cách.

**Câu 63.** Một lớp học có 30 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách lập ra một đội văn nghệ gồm 6 người, trong đó có ít nhất 4 nam?

**A.** 412.803. **B.** 2.783.638. **C.** 5.608.890. **D.** 763.806.

**Lời giải**

**Chọn C**

Trường hợp 1: Đội văn nghệ gồm 4 nam, 2 nữ có $C_{30}^4.C_{15}^2$ (cách chọn).

Trường hợp 2: Đội văn nghệ gồm 5 nam, 1 nữ có $C_{30}^5.C_{15}^1$ (cách chọn).

Trường hợp 3: Đội văn nghệ gồm 6 nam, 0 nữ có $C_{30}^6$ (cách chọn).

Vậy có tổng cộng: $C_{30}^4.C_{15}^2 + C_{30}^5.C_{15}^1 + C_{30}^6 = 5.608.809$ cách lập thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 64.** Một bó hoa có 14 bông hoa gồm: 3 bông màu hồng, 5 bông màu xanh còn lại là màu vàng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 7 bông trong đó phải có đủ ba màu?

**A.** 3058. **B.** 3060. **C.** 3432. **D.** 129.

**Lời giải**

**Chọn A**

Chọn 7 bông bất kì từ 14 bông có: $C_{14}^7 = 3432$ cách.

Chọn hai màu hồng, xanh có $C_3^3.C_5^4 + C_3^2.C_5^5 = 8$ cách.

Chọn hai màu hồng, vàng có $C_3^3.C_6^4 + C_3^2.C_6^5 + C_3^1.C_6^6 = 36$ cách.

Chọn hai màu xanh, vàng có $C_5^5.C_6^2 + C_5^4.C_6^3 + C_5^3.C_6^4 + C_5^2.C_6^5 + C_5^1.C_6^6 = 330$ cách.

Vậy có $3432-(8+36+330)=3058$ cách

**Câu 65.** Một hộp đựng 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Bạn Hải rút ngẫu nhiên cùng lúc 3 tấm thẻ. Hỏi có bao nhiêu cách rút sao cho bất kì hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất hai đơn vị.

**A.** 1771. **B.** 1350. **C.** 1768. **D.** 2024.

**Lời giải**

**Chọn D**

Chọn ra 3 tấm thẻ bất kì từ 26 tấm thẻ có $C_{26}^3$ cách.

Chọn ra 3 tấm thẻ ghi số liên tiếp có 24 cách.

Chọn ra 3 tấm thẻ trong đó có đúng 2 tấm thẻ ghi số liên tiếp: $2.23+23.22=552$ cách.

Số cách chọn ra 3 tấm thẻ thỏa yêu cầu bài toán là $C_{26}^3 - 24 - 552 = 2024$.

**Giải thích**: Nếu chọn được 2 số liên tiếp là $1,2$ hoặc $25,26$ thì có 23 cách chọn 1 số thứ ba.

Nếu chọn được hai số liên tiếp khác cặp số trên thì có 22 cách chọn 1 số thứ ba.

**Câu 66.** Một hộp chứa 16 quả cầu gồm sáu quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6, năm quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5 và năm quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 5. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra từ hộp đó ba quả cầu vừa khác màu vừa khác số?

**A.** 60. **B.** 72. **C.** 150. **D.** 80.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số cách chọn ba quả cầu khác màu là $C_6^1.C_5^1.C_5^1 = 150$.

Số cách chọn ba quả cầu khác màu cùng một số là: 5 cách chọn.

Số cách chọn ba quả cầu khác màu nhưng có 2 quả cầu cùng số là: $5.5+5.4+5.4=65$.

Vậy có $150-(5+65)=80$

**Câu 67.** Trong hộp có 5 quả cầu đỏ và 7 quả cầu xanh kích thước giống nhau. Lấy ngẫu nhiên 5 quả cầu từ hộp. Hỏi có bao nhiêu khả năng lấy được số quả cầu đỏ nhiều hơn số quả cầu xanh.

**A.** 245. **B.** 3480. **C.** 246. **D.** 3360.

**Lời giải**

**Chọn C**

Lấy ngẫu nhiên 5 quả cầu từ hộp 12 quả cầu, để số quả cầu đỏ nhiều hơn số quả cầu xanh, những trường hợp có thể xảy ra là

*Trường hợp 1:* 5 cầu đỏ

Số khả năng: $C_5^5=1$ khả năng.

*Trường hợp 1:* 4 cầu đỏ, 1 cầu xanh

Số khả năng: $C_5^4.C_7^1=35$ khả năng.

*Trường hợp 2:* 3 cầu đỏ, 2 cầu xanh

Số khả năng: $C_5^3.C_7^2=210$ khả năng.

Áp dụng quy tắc cộng: có tất cả: $35+210+1=246$ khả năng.

**Câu 68.** Một trường cấp 3 của tỉnh Đồng Tháp có 8 giáo viên Toán gồm có 3 nữ và 5 nam, giáo viên Vật lý thì có 4 giáo viên nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đoàn thanh tra công tác ôn thi THPTQG gồm 3 người có đủ 2 môn Toán và Vật lý và phải có giáo viên nam và giáo viên nữ trong đoàn?

**A.** 60 (cách). **B.** 120 (cách). **C.** 12960 (cách). **D.** 90 (cách).

**Lời giải**

Vì chọn ra 3 người mà yêu cầu phải có giáo viên nam và giáo viên nữ trong đoàn nên số giáo viên nữ được chọn chỉ có thể bằng 1 hoặc 2. Ta xét hai trường hợp:

* Trường hợp 1: Chọn 1 giáo viên nữ: Có $C_3^1$ cách. Khi đó:

- Chọn 1 giáo viên nam môn Toán và 1 nam môn Vật lý: Có $C_5^1\times C_4^1$ cách.

- Chọn 2 giáo viên nam môn Vật lý: Có $C_4^2$ cách.

Trường hợp này có $C_3^1\left(C_5^1\times C_4^1+C_4^2\right)$ cách chọn.

* Trường hợp 2: Chọn 2 giáo viên nữ: Có $C_3^2$ cách chọn. Khi đó chọn thêm 1 giáo viên nam môn Vật lý: Có $C_4^1$ cách. Trường hợp này có $C_3^2\times C_4^1$ cách chọn.

Vậy tất cả có $C_3^1\left(C_5^1\times C_4^1+C_4^2\right)+C_3^2\times C_4^1=90$ cách chọn.

**Câu 69.** Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn?

**A.** 120. **B.** 98. **C.** 150. **D.** 360.

**Lời giải**

↳ Số cách chọn ngẫu nhiên 5 học sinh $C_9^5$ cách.

↳ Số cách chọn 5 học sinh chỉ có 2 lớp: $C_7^5+C_6^5+C_5^5$

Vậy số cách chọn 5 học sinh có cả 3 lớp là $C_9^5-\left(C_7^5+C_6^5+C_5^5\right)=98$.

**Câu 70.** Trong kho đèn trang trí đang còn 5 bóng đèn loại I, 7 bóng đèn loại II, các bóng đèn đều khác nhau về màu sắc và hình dáng. Lấy ra 5 bóng đèn bất kỳ. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra số bóng đèn loại I nhiều hơn số bóng đèn loại II?

**A.** 246. **B.** 3480. **C.** 245. **D.** 3360.

**Lời giải**

Có 3 trường hợp xảy ra:

TH1: Lấy được 5 bóng đèn loại I: có 1 cách

TH2: Lấy được 4 bóng đèn loại I, 1 bóng đèn loại II: có $C_5^4.C_7^1$ cách

TH3: Lấy được 3 bóng đèn loại I, 2 bóng đèn loại II: có $C_5^3.C_7^2$ cách

Theo quy tắc cộng, có $1+C_5^4.C_7^1+C_5^3.C_7^2=246$ cách

**Câu 71.** Có bao nhiêu cách chia 8 đồ vật khác nhau cho 3 người sao cho có một người được 2 đồ vật và hai người còn lại mỗi người được ba đồ vật?

**A.** $3!C_8^2C_6^3$. **B.** $C_8^2C_6^3$. **C.** $A_8^2A_6^3$. **D.** $3C_8^2C_6^3$.

**Lời giải**

Việc chia đồ vật trong bài toán được tiến hành theo các bước sau

- Bước 1: Chia 8 đồ vật thành 3 nhóm đồ vật nhỏ ( một nhóm có 2 vật, hai nhóm còn lại mỗi nhóm có 3 đồ vật ), có $C_8^2C_6^3C_3^3=C_8^2C_6^3$ cách
- Bước 2 : Chia 3 nhóm đồ ở bước 1 cho 3 người,có 3! cách

Vậy có $3!C_8^2C_6^3$ cách.

**Câu 72.** Một tổ có 5 học sinh nữ và 6 học sinh nam. Số cách chọn ngẫu nhiên 5 học sinh của tổ trong đó có cả học sinh nam và học sinh nữ là?

**A.** 545. **B.** 462. **C.** 455. **D.** 456.

**Lời giải**

Chọn 5 học sinh bất kỳ từ tổ 11 học sinh có số cách chọn là $C_{11}^5$.

Số cách chọn 5 học sinh mà chỉ toàn nữ hoặc toàn nam là $C_5^5+C_6^5$.

Số cách chọn ngẫu nhiên 5 học sinh của tổ trong đó có cả học sinh nam và học sinh nữ là $C_{11}^5-\left(C_5^5+C_6^5\right)=455$.

**Câu 73.** Có 15 học sinh giỏi gồm 6 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

**A.** 4249. **B.** 4250. **C.** 5005. **D.** 805.

**Lời giải**

Số cách chọn 6 học sinh bất kỳ trong 15 học sinh là $C_{15}^6=5005$.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 12 là $C_6^6=1$ cách.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 10 và 11 là $C_9^6=84$ cách.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 10 và 12 là $C_{11}^6-C_6^6=461$ cách.

Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 11 và 12 là $C_{10}^6-C_6^6=209$ cách.

Do đó số cách chọn 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh là $5005-1-84-461-209=4250$ cách.

**Câu 74.** Bình A chứa 3 quả cầu xanh, 4 quả cầu đỏ và 5 quả cầu trắng. Bình B chứa 4 quả cầu xanh, 3 quả cầu đỏ và 6 quả cầu trắng. Bình C chứa 5 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ và 2 quả cầu trắng. Từ mỗi bình lấy ra một quả cầu. Có bao nhiêu cách lấy để cuối cùng được 3 quả có màu giống nhau.

**A.** 180. **B.** 150. **C.** 120. **D.** 60.

**Lời giải**

Trường hợp 1: Lấy được 3 quả cầu xanh từ 3 bình: Số cách lấy: $C_3^1C_4^1C_5^1=60$ (cách)

Trường hợp 2: Lấy được 3 quả cầu đỏ từ 3 bình: Số cách lấy: $C_4^1C_3^1C_5^1=60$ (cách)

Trường hợp 3: Lấy được 3 quả cầu trắng từ 3 bình: Số cách lấy: $C_5^1C_6^1C_2^1=60$ (cách)

Vậy có $60.3=180$ cách lấy được 3 quả cùng màu từ 3 bình.

**Câu 75.** Tổ 1 lớp 11A có 6 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 4 học sinh của tổ 1 để lao động vệ sinh cùng cả trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 học sinh trong đó có ít nhất một học sinh nam?

**A.** 600. **B.** 25. **C.** 325. **D.** 30.

**Lời giải**

Trường hợp 1: Chọn 1 nam và 3 nữ.

Trường hợp 2: Chọn 2 nam và 2 nữ.

Trường hợp 3: Chọn 3 nam và 1 nữ.

Trường hợp 4: Chọn 4 nam.

Số cách chọn cần tìm là $C_6^1C_5^3+C_6^2C_5^2+C_6^3C_5^1+C_6^4=325$ cách chọn.

**Câu 76.** Một tổ có 5 bạn học sinh nam và 6 bạn học sinh nữ.Giáo viên chọn ngẫu nhiên 3 em đi trực nhật.Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh để có cả nam và nữ?

**A.** 325. **B.** 415. **C.** 810. **D.** 135.

**Lời giải.**

Từ 5 bạn học sinh nam và 6 bạn học sinh nữ chọn ngẫu nhiên 3 em có $C_{11}^3$ cách chọn.

Trong số $C_{11}^3$ cách chọn trên xảy ra trường hợp sau:

Chỉ có nam có $C_5^3$ hoặc chỉ có nữ có $C_6^3$ hoặc có cả nam và nữ.

Vậy số cách chọn 3 học sinh để có cả nam và nữ là: $C_{11}^3-C_5^3-C_6^3=135$.

**Câu 77.** Có hai đường thẳng song song $(d)$ và $(d')$. Trên $(d)$ lấy 15 điểm phân biệt, trên $(d')$ lấy 9 điểm phân biệt. Hỏi số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 24 điểm trên là bao nhiêu?

**A.** 1485. **B.** 540. **C.** 1548. **D.** 950.

**Lời giải**

**Chọn A**

Có $C_{15}^1.C_9^2=540$ tam giác có 3 đỉnh được tạo thành từ 1 điểm thuộc $(d)$ và 2 điểm thuộc $(d')$.

Có $C_{15}^2.C_9^1=945$ tam giác có 3 đỉnh được tạo thành từ 2 điểm thuộc $(d)$ và 1 điểm thuộc $(d')$.

Vậy có tất cả 1485 tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 78.** Cho đa giác đều 36 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong 36 đỉnh của đa giác đều?

**A.** 306. **B.** 153. **C.** 9. **D.** 58905.

**Lời giải**

**Chọn B**

Do đa giác đều 36 đỉnh có 18 đường chéo qua tâm.

Mặt khác cứ 2 đường chéo qua tâm ứng với một hình chữ nhật có 4 đỉnh là đỉnh của đa giác.

Vậy số hình chữ nhật là $C_{18}^2=153$.

**Bài toán tổng quát:**

Do đa giác đều $2n$ $(n\in\mathbb{N},n\geq 2)$ đỉnh có $n$ đường chéo qua tâm.

Mặt khác cứ 2 đường chéo qua tâm ứng với một hình chữ nhật có 4 đỉnh là đỉnh của đa giác.

Vậy số hình chữ nhật là $C_n^2$.

**Câu 79.** Trên đường tròn tâm $O$ cho 12 điểm phân biệt. Từ các điểm đã cho có thể tạo được bao nhiêu tứ giác nội tiếp đường tròn tâm $O$?

**A.** $C_{12}^4$. **B.** $3$. **C.** $4!$. **D.** $A_{12}^4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Chọn đỉnh thứ nhất: có 12 cách chọn.

Chọn đỉnh thứ hai: có 11 cách chọn.

Chọn đỉnh thứ ba: có 11 cách chọn.

Chọn đỉnh thứ tư: có 9 cách chọn.

Vì một tứ giác không kể đến thứ tự của các đỉnh nên số tứ giác được tạo nên:

$$\frac{12\times11\times10\times9}{4!}=\frac{12\times11\times10\times9\times8!}{4!8!}=\frac{12!}{4!(12-4)!}=C_{12}^4$$

**Câu 80.** Cho hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ song song với nhau. Trên $d_1$ lấy 5 điểm phân biệt, trên $d_2$ lấy 7 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó được lấy từ các điểm trên hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$.

**A.** $220$. **B.** $175$. **C.** $1320$. **D.** $7350$.

**Lời giải**

TH1: Hai đỉnh thuộc $d_1$ và một đỉnh thuộc $d_2$: Có $C_5^2C_7^1$ tam giác.

TH2: Hai đỉnh thuộc $d_2$ và một đỉnh thuộc $d_1$: Có $C_7^2.C_5^1$ tam giác.

Vậy số tam giác được tạo thành là $C_5^2C_7^1+C_7^2.C_5^1=175$.

**Câu 81.** Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ lần lượt lấy 1, 2, 3 và $n$ điểm phân biệt $n\ge3\ (n\in\mathbb{N})$ khác $A$, $B$, $C$, $D$. Tìm $n$ biết số tam giác lấy từ $n+6$ điểm trên là $439$.

**A.** $n=20$. **B.** $n=12$. **C.** $n=8$. **D.** $n=10$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1:** Do mỗi tam giác được tạo thành từ 3 điểm không thẳng hàng.

Trên cạnh $CD$ chọn ra được $C_3^3$ bộ 3 điểm thẳng hàng. Trên cạnh $DA$ chọn ra được $C_n^3$ bộ 3 điểm thẳng hàng. Do đó số tam giác tạo thành là $C_{n+6}^3-C_n^3-C_3^3$.

Theo giả thiết ta có $C_{n+6}^n-C_n^3-C_3^3=439$. Sử dụng máy tính kiểm tra thấy $n=10$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

**Cách 2:**

Số tam giác tạo thành có đỉnh nằm trên $AB$ và $BC$ là $C_1^1.C_2^2=1$.

Số tam giác tạo thành có đỉnh nằm trên $AB$ và $CD$ là $C_1^1.C_3^2=3$.

Số tam giác tạo thành có đỉnh nằm trên $AB$ và $AD$ là $C_1^1.C_n^2=C_n^2$.

Số tam giác tạo thành có đỉnh nằm trên $BC$ và $DC$ là $C_2^1.C_3^2+C_2^2.C_3^1=9$.

Số tam giác tạo thành có đỉnh nằm trên $BC$ và $AD$ là $C_2^1.C_n^2+C_2^2.C_n^1=2C_n^2+1C_n^1$.

Số tam giác tạo thành có đỉnh nằm trên $BC$ và $AD$ là $C_3^1.C_n^2+C_3^2.C_n^1=3C_n^2+3C_n^1$.

Số tam giác tạo thành có đỉnh nằm trên $BC$ và $AD$ là $C_3^1.C_n^2+C_3^2.C_n^1=3C_n^2+3C_n^1$.

Số tam giác tạo thành có 3 đỉnh nằm trên ba cạnh $AB$, $BC$ và $CD$ là $C_1^1C_2^1C_3^1=6$.

Số tam giác tạo thành có 3 đỉnh nằm trên ba cạnh $AB$, $BC$ và $DA$ là $C_1^1C_2^1C_n^1=2C_n^1$.

Số tam giác tạo thành có 3 đỉnh nằm trên ba cạnh $AB$, $CD$ và $DA$ là $C_1^1C_3^1C_n^1=3C_n^1$.

Số tam giác tạo thành có 3 đỉnh nằm trên ba cạnh $BC$, $CD$ và $DA$ là $C_2^1C_3^1C_n^1 = 6C_n^1$.

Vậy số tam giác tạo thành là:

$1+3+C_n^2+9+2C_n^2+C_n^1+3C_n^2+3C_n^1+6+2C_n^1+3C_n^1+6C_n^1 = 19+6C_n^2+15C_n^1 = 439$

$\Leftrightarrow 6\dfrac{n(n-1)}{2}+15n = 420 \Leftrightarrow 3n^2+12n-420 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -14(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 10.$

**Câu 82.** Cho một đa giác lồi (H) có 10 cạnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó là ba đỉnh của (H), nhưng ba cạnh không phải ba cạnh của (H)?

**A.** 40. **B.** 100. **C.** 60. **D.** 50.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số tam giác được tạo thành từ 10 đỉnh của đa giác lồi (H) là: $C_{10}^3$.

Xét trường hợp số tam giác chỉ chứa hai cạnh của đa giác, là số tam giác có 3 đỉnh liên tiếp của đa giác. Có 10 tam giác như vậy.

Xét trường hợp số tam giác chứa đúng một cạnh của đa giác, là số tam giác có 2 đỉnh là 2 đỉnh liên tiếp của đa giác và đỉnh còn lại không kề với hai đỉnh kia. Khi đó, xét một cạnh bất kỳ ta có $C_{10-4}^1$ cách chọn đỉnh còn lại của tam giác (trừ hai đỉnh đã chọn và hai đỉnh kề nó). Trường hợp này có $10.C_6^1$ tam giác.

Vậy số tam giác không chứa cạnh của đa giác (H) là: $C_{10}^3 - 10 - 10.C_6^1 = 50$ tam giác.

**Câu 83.** Cho hai đường thẳng song song. Trên đường thẳng thứ nhất ta lấy 20 điểm phân biệt. Trên đường thẳng thứ hai ta lấy 18 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ ba điểm trong các điểm nói trên?

**A.** $18C_{20}^2 + 20C_{18}^2$. **B.** $20C_{18}^3 + 18C_{20}^3$. **C.** $C_{38}^3$. **D.** $C_{20}^3.C_{18}^3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Chọn 2 điểm trên đường thẳng thứ 2 và 1 điểm trên đường thẳng thứ nhất. Số tam giác được tạo thành từ ba điểm trên là: $20C_{18}^2$ (tam giác).

Chọn 2 điểm trên đường thẳng thứ 1 và 1 điểm trên đường thẳng thứ hai. Số tam giác được tạo thành từ ba điểm trên là: $18C_{20}^2$ (tam giác).

Vậy số tam giác được tạo thành theo ycbt là: $20C_{18}^2 + 18C_{20}^2$.

**Câu 84.** Cho một đa giác đều 40 đỉnh $A_1A_2...A_{40}$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Số tam giác có các đỉnh là 3 trong 40 đỉnh trên gấp bao nhiêu lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 40 đỉnh trên?

**A.** 20. **B.** $\dfrac{4}{37}$. **C.** 52. **D.** 40.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 40 đỉnh trên là: $C_{40}^3$.

Đa giác đều đã cho có 40 đỉnh nên nó có 20 đường chéo đi qua tâm O. Mỗi hình chữ nhật thỏa đề bài tương ứng với một tổ hợp chập 2 của 20 đường chéo này và ngược lại.

Vậy số hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 trong 40 đỉnh của đa giác là: $C_{20}^2$. Suy ra số tam giác gấp số hình chữ nhật là: $C_{40}^3 : C_{20}^2 = 52.$

**Câu 85.** Có hai đường thẳng song song $(d)$ và $(d')$. Trên $(d)$ lấy 15 điểm phân biệt, trên

$(d')$ lấy 9 điểm phân biệt. Hỏi số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 24 điểm trên là bao nhiêu?

**A.** 1485. **B.** 540. **C.** 1548. **D.** 950.

**Lời giải**

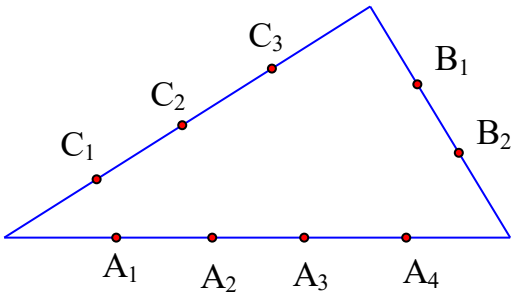
**Chọn A**

Có $C_{15}^1.C_9^2 = 540$ tam giác có 3 đỉnh được tạo thành từ 1 điểm thuộc $(d)$ và 2 điểm thuộc $(d')$.

Có $C_{15}^2.C_9^1 = 945$ tam giác có 3 đỉnh được tạo thành từ 2 điểm thuộc $(d)$ và 1 điểm thuộc $(d')$.

Vậy có tất cả 1485 tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 86.** Cho một tam giác, trên ba cạnh của nó lấy 9 điểm như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu tam giác có ba đỉnh thuộc 9 điểm đã cho?




**A.** 79. **B.** 48. **C.** 55. **D.** 24.

**Lời giải**

Bộ 3 điểm bất kỳ được chọn từ 9 điểm đã cho có $C_9^3$ bộ.

Bộ 3 điểm không tạo thành tam giác có $C_3^3 + C_4^3$ bộ.

Vậy số tam giác tạo thành từ 9 điểm đã cho có: $C_9^3 - \left(C_3^3 + C_4^3\right) = 79$.

**Câu 87.** Cho một đa giác đều $n$ đỉnh $(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$. Tìm $n$ biết số hình chữ nhật được tạo ra từ bốn đỉnh trong số $2n$ đỉnh của đa giác đó là 45.

**A.** $n = 12$. **B.** $n = 10$. **C.** $n = 9$. **D.** $n = 45$.

**Lời giải**

Do đa giác đều nên đa giác đó nội tiếp trong một đường tròn và có $n$ đường chéo đi qua tâm $O$ của đường tròn. Chọn 2 đường chéo khác nhau đi qua tâm thì 4 đỉnh của đường chéo cho ta một hình chữ nhật. Vậy có $C_n^2$ hình chữ nhật.

Theo đề bài ta có: $C_n^2 = 45 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} = 45 \Leftrightarrow n = 10$.

**Câu 88.** Cho đa giác đều $A_1A_2A_3....A_{30}$ nội tiếp trong đường tròn $(O)$. Tính số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 30 đỉnh của đa giác đó.

**A.** 105. **B.** 27405. **C.** 27406. **D.** 106.

**Lời giải**

Trong đa giác đều $A_1A_2A_3....A_{30}$ nội tiếp trong đường tròn $(O)$ cứ mỗi điểm $A_1$ có một điểm $A_i$ đối xứng với $A_1$ qua $O$ $(A_1 \neq A_i)$ ta được một đường kính, tương tự với $A_2$, $A_3$,.., $A_{30}$. Có tất cả 15 đường kính mà các điểm là đỉnh của đa giác đều $A_1A_2A_3....A_{30}$. Cứ hai đường kính đó ta được một hình chữ nhật mà bốn điểm là các đỉnh của đa giác đều: có $C_{15}^2 = 105$ hình chữ nhật tất cả.

**Câu 89.** Cho đa giác đều 100 nội tiếp một đường tròn. Số tam giác từ được tạo thành từ 3 trong 100 đỉnh của đa giác là:

**A.** 44100. **B.** 78400. **C.** 117600. **D.** 58800.

**Lời giải**

Xét đường kính $A_1A_{51}$ của đường tròn ngoại tiếp đa giác. Với điểm $A_1$ có $2.C_{49}^2$ cách chọn hai đỉnh thuộc cùng nửa đường tròn đường kính $A_1A_{51}$ để tạo thành tam giác tù có góc $A_1$. Như vậy có $100.2.C_{49}^2$ tam giác, trong đó mỗi tam giác bị đếm hai lần.

Vậy số tam giác tù là $100.C_{49}^2 = 117600$.

**Câu 90.** Một đa giác lồi có 10 cạnh, xét các tam giác mà 3 đỉnh là đỉnh của đa giác. Hỏi trong số các tam giác này có bao nhiêu tam giác mà cả 3 cạnh đều không phải là cạnh của đa giác?

**A.** 60. **B.** 70. **C.** 120. **D.** 50.

**Lời giải**

* Số tam giác tạo thành từ 3 đỉnh của đa giác là $C_{10}^3$.

* Số tam giác tạo thành từ 3 đỉnh của đa giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác:

Chọn 2 đỉnh kề nhau: có 10 cách chọn.

Chọn đỉnh còn lại không kề với 1 trong 2 đỉnh đã chọn: có 6 cách.

Vậy có $10.6 = 60$ tam giác.

* Số tam giác tạo thành từ 3 đỉnh của đa giác có 2 cạnh là cạnh của đa giác

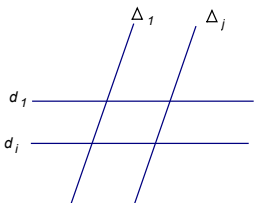
Chọn 2 cạnh kề nhau: có 10 cách.

Vậy số tam giác cần tìm là $C_{10}^3 - 60 - 10 = 50$ tam giác.

**Câu 91.** Trên mặt phẳng có 2017 đường thẳng song song với nhau và 2018 đường thẳng song song khác cùng cắt nhóm 2017 đường thẳng đó. Đếm số hình bình hành nhiều nhất được tạo thành có đỉnh là các giao điểm nói trên.

**A.** 2017.2018. **B.** $C_{2017}^4 + C_{2018}^4$. **C.** $C_{2017}^2.C_{2018}^2$. **D.** $2017 + 2018$.

**Lời giải**




Với hai đường thẳng bất kì từ 2017 đường thẳng $d_i$ song song đã cho và với hai đường thẳng bất kì từ 2018 đường thẳng $\Delta_j$ song song đã cho, xác định cho ta một hình bình hành.

Vậy số hình bình hành nhiều nhất thỏa đề bài là $C_{2017}^2.C_{2018}^2$.

**Câu 92.** Cho đa giác lồi có 40 cạnh. Mỗi đoạn thẳng đi qua hai đỉnh bất kì của nó mà không phải là cạnh được gọi là một đường chéo của nó. Số giao điểm nằm bên trong đa giác (không trùng với đỉnh) được tạo ra do các đường chéo của nó cắt nhau nhiều nhất là bao nhiêu?

**A.** 91390. **B.** 273430. **C.** 740. **D.** 1520.

**Lời giải**

Đa giác lồi có 40 cạnh sẽ có 40 đỉnh.

Số đường chéo của đa giác là: $C_{40}^2 - 40 = 740$ đường chéo.

Số giao điểm nằm bên trong đa giác (không trùng với đỉnh) được tạo ra do các đường chéo của nó cắt nhau nhiều nhất là $C_{740}^2 = 273430$.

**Câu 93.** Từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt trong đó có 2 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn?

**A.** 144. **B.** 432. **C.** 696. **D.** 840.

**Lời giải**

**Chọn B**

+ Chọn 2 chữ số lẻ từ 7 chữ số đã cho có $C_4^2$ cách.

+ Chọn 2 chữ số chẵn từ 7 chữ số đã cho có $C_3^2$ cách.

+ Với 4 chữ số đã chọn ta xếp vào 4 vị trí có $4!$ cách.

Do đó có $C_4^2.C_3^2.4! = 432$ số.

**Câu 94.** Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có $5$ chữ số đôi một khác nhau trong đó luôn có mặt hai chữ số $1$ và $6$.

**A.** 408. **B.** 720. **C.** 480. **D.** 120.

**Lời giải**

**Chọn C**

Chọn 3 chữ số khác nhau từ các số trong tập hợp $\{2;3;4;5\}$ : có $C_4^3$ cách;

Sau đó, sắp xếp 5 chữ số đã chọn: có 5! cách;

Vậy có $C_4^3.5! = 480$ số có 5 chữ số khác nhau và luôn có mặt số 1 và số 6.

**Câu 95.** Từ các chữ số của tập hợp $\{0;1;2;3;4;5\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có $5$ chữ số đôi một khác nhau mà trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số $0$?

**A.** $120$. **B.** $504$. **C.** $720$. **D.** $480$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Giả sử số tự nhiên có $5$ chữ số đôi một khác nhau có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

Chọn một số cho $a_1$ ta có $5$ cách chọn.

Tiếp theo ta bỏ số $a_1$ và số $0$ thì từ tập hợp đã cho chúng ta còn lại $4$ số. Ta chọn $3$ số từ $4$ số đó ta có $C_4^3$ cách chọn.

Chúng ta xếp số $0$ và $3$ số vừa mới chọn vào $4$ vị trí $a_2,a_3,a_4,a_5$ ta được $4!$ cách xếp.

Chọn cho các số cho $a_2,a_3,a_4,a_5$ có mặt chữ số $0$ ta có $C_5^3.4!$ cách chọn.

Số số tự nhiên thỏa yêu cầu đề bài có thể lập được là: $5.4!.C_4^3 = 480$.

## DẠNG 2. KẾT HỢP HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP

**Câu 96.** Có bao nhiêu số tự nhiên có $2018$ chữ số sao cho trong mỗi số tổng các chữ số bằng $5$?

**A.** $1+4C_{2017}^1+2017C_{2017}^2+2A_{2017}^2+C_{2017}^3+C_{2017}^4$.

**B.** $1+2C_{2018}^2+2C_{2018}^3+C_{2018}^4+C_{2018}^5$.

**C.** $1+2A_{2018}^2+2A_{2018}^3+A_{2018}^4+C_{2017}^5$.

**D.** $1+2A_{2018}^2+2\left(C_{2017}^2+A_{2017}^2\right)+\left(C_{2017}^3+A_{2017}^3\right)+C_{2017}^4$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Gọi a là số thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Như vậy các chữ số của a thỏa mãn các trường hợp sau:

a chứa năm chữ số 1 và 2013 chữ số 0: $C_{2017}^4$

a chứa ba chữ số 1, một chữ số 2 và 2014 chữ số 0: $C_{2017}^3+2015C_{2017}^2$

a chứa hai chữ số 1, một chữ số 3 và 2015 chữ số 0: $C_{2017}^2+A_{2017}^2$

a chứa một chữ số 1, một chữ số 4 và 2016 chữ số 0: $2C_{2017}^1$

a chứa một chữ số 5 và 2017 chữ số 0: 1

a chứa một chữ số 1, hai chữ số 2 và 2015 chữ số 0: $C_{2017}^2+A_{2017}^2$

a chứa một chữ số 2, một chữ số 3 và 2016 chữ số 0: $2C_{2017}^1$

Vậy có $1+4C_{2017}^1+2017C_{2017}^2+C_{2017}^3+C_{2017}^4+2A_{2017}^2$

**Câu 97.** Có bao nhiêu số tự nhiên có tám chữ số trong đó có ba chữ số 0, không có hai chữ số 0 nào đứng cạnh nhau và các chữ số khác chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần.

**A.** 786240. **B.** 846000. **C.** 907200. **D.** 151200.

**Lời giải**

Chọn ra 5 chữ số khác 0 trong 9 chữ số (từ 1 đến 9) và sắp xếp chúng theo thứ tự có $A_9^5$ cách.

Để hai chữ số 0 không đứng cạnh nhau ta có 6 vị trí để xếp (do 5 chữ số vừa chọn tạo ra 6 vị trí).

Do chữ số 0 không thể xếp ở đầu nên còn 5 vị trí để xếp số 0.

Khi đó xếp 3 số 0 vào 5 vị trí nên có $C_5^3$ cách.

Vậy có $A_9^5C_5^3=151200$ số cần tìm.

**Câu 98.** Từ các chữ số của tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số trong đó chữ số 2 xuất hiện đúng ba lần, các chữ số còn lại đôi một khác nhau?

**A.** 31203. **B.** 12600. **C.** 181440. **D.** 27000

**Lời giải**

**Chọn D**

*Ý tưởng:* Đầu tiên, ta chọn 7 chữ số gồm 3 chữ số 2 và 4 chữ số bất kì từ tập $\{0;1;3;4;5;6;7\}$ rồi xếp vào 7 vị trí. Sau đó, ta trừ đi những trường hợp mà chữ số 0 đứng đầu.

**Bước 1:** Ta xếp 3 chữ số 2 vào 3 trong 7 vị trí $\Rightarrow$ Có $C_7^3$ cách.

Chọn 4 chữ số còn lại từ tập $\{0;1;3;4;5;6;7\}$ và xếp vào 4 vị trí còn lại $\Rightarrow$ Có $A_7^4$ cách.

**Bước 2:** Chọn chữ số đầu tiên bên trái là 0.

Ta xếp 3 chữ số 2 vào 3 trong 6 vị trí còn lại $\Rightarrow$ Có $C_6^3$ cách 3 chữ số còn lại có $A_6^3$ cách chọn.

**Kết luận:** tổng cộng có $C_7^3\times A_7^4-C_6^3\times A_6^3=27000$ số tự nhiên thỏa mãn đề bài.

**Câu 99.** Một nhóm 6 bạn học sinh mua vé vào rạp chiếu phim. Các bạn mua 6 vé gồm 3 vé mang số ghế chẵn, 3 vé mang số ghế lẻ và không có hai vé nào cùng số. Trong sáu bạn thì hai bạn muốn ngồi bên ghế chẵn, hai bạn muốn ngồi bên ghế lẻ, hai bạn còn lại không có yêu cầu gì. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ để thỏa mãn các yêu cầu của tất cả các bạn đó?

**A.** 36. **B.** 180. **C.** 72. **D.** 18.

**Lời giải**

Xếp hai bạn vào ghế mang số chẵn có $A_3^2$ cách.

Xếp hai bạn vào ghế mang số lẻ có $A_3^2$ cách.

Số cách xếp hai bạn còn lại vào hai vị trí còn lại là $2!$ cách.

Vậy số cách xếp chỗ để thỏa mãn các yêu cầu của tất cả các bạn đó là $A_3^2.A_3^2.2!=72$ (cách).

**Câu 100.** Có bao nhiêu số tự nhiên có tám chữ số trong đó có ba chữ số $0$, không có hai chữ số $0$ nào đứng cạnh nhau và các chữ số khác chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần.

**A.** $786240$. **B.** $846000$. **C.** $907200$. **D.** $151200$.

**Lời giải**

Chọn ra $5$ chữ số khác $0$ trong $9$ chữ số (từ $1$ đến $9$) và sắp xếp chúng theo thứ tự có $A_9^5$ cách.

Để hai chữ số $0$ không đứng cạnh nhau ta có $6$ vị trí để xếp (do $5$ chữ số vừa chọn tạo ra $6$ vị trí).

Do chữ số $0$ không thể xếp ở đầu nên còn $5$ vị trí để xếp số $0$.

Khi đó xếp $3$ số $0$ vào $5$ vị trí nên có $C_5^3$ cách.

Vậy có $A_9^5 C_5^3 = 151200$ số cần tìm.

**Câu 101.** Từ tập $A = \{1;2;3;4;5\}$ có thể lập được bao nhiêu số có $8$ chữ số sao cho chữ số $2$ xuất hiện $4$ lần, còn các chữ số khác xuất hiện một lần.

**A.** $120$. **B.** $840$. **C.** $576$. **D.** $1680$.

**Lời giải**

Chọn $4$ trong $8$ vị trí để xếp số $2$: có $C_8^4$ cách chọn.

Xếp các chữ số $1;3;4;5$ vào $4$ vị trí còn lại: có $4!$ cách chọn.

Vậy có $C_8^4.4! = 1680$ (số).

**Câu 102.** Có $5$ tem thư khác nhau và $6$ bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó $3$ tem thư, $3$ bì thư và dán $3$ tem thư đó ấy lên $3$ bì thư đã chọn, mỗi bì thư chỉ dán một tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy?

**A.** $1200$. **B.** $1800$. **C.** $1000$. **D.** $200$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Chọn $3$ bì thư có $C_6^3$.

Chọn $3$ tem thư và dán nó vào $3$ bì thư có $A_5^3$.

Số cách chọn cần tìm là $C_6^3.A_5^3 = 1200$.

**Câu 103.** Có bao nhiêu cách cắm $3$ bông hoa có khác nhau vào $5$ lọ khác nhau sao cho mỗi lọ cắm không quá một bông?

**A.** $A_5^3$. **B.** $3!$. **C.** $C_5^3$. **D.** $A_5^2$.

**Lời giải**

Chọn ra $3$ lọ trong $5$ lọ để cắm hoa. Số cách chọn lọ là: $C_5^3$

Số cách cắm $3$ bông hoa vào $3$ lọ được chọn là: $3!$

Số cách cắm $3$ bông hoa vào $5$ lọ là: $C_5^3.3! = \mathrm{A}_5^3$.

**Câu 104.** Có $6$ học sinh và $3$ thầy giáo $A$, $B$, $C$. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ $9$ người đó ngồi trên một hàng ngang có $9$ chỗ sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh.

**A.** $4320$. **B.** $90$. **C.** $43200$. **D.** $720$.

**Lời giải**

Sắp $6$ học sinh thành một hàng ngang, giữa $6$ học sinh có $5$ khoảng trống, ta chọn $3$ khoảng trống và đưa $3$ giáo viên vào được cách sắp thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả có : $6!.A_5^3 = 43200$ cách.

**Câu 105.** Một nhóm 6 bạn học sinh mua vé vào rạp chiếu phim. Các bạn mua 6 vé gồm 3 vé mang số ghế chẵn, 3 vé mang số ghế lẻ và không có hai vé nào cùng số. Trong 6 bạn thì hai bạn muốn ngồi bên ghế chẵn, hai bạn muốn ngồi bên ghế lẻ, hai bạn còn lại không có yêu cầu gì. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ để thỏa mãn các yêu cầu của tất cả các bạn đó?

**A.** 72. **B.** 36. **C.** 18. **D.** 180.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số cách chọn 2 vé cho hai bạn muốn ngồi ghế bên chẵn là $A_3^2$.

Số cách chọn 2 vé cho hai bạn muốn ngồi ghế bên lẻ là $A_3^2$.

Còn lại 2 vé cho hai bạn còn lại có 2! cách.

Vậy số cách chọn là: $A_3^2.A_3^2.2! = 72$ cách.

**Câu 106.** Có bao nhiêu cách chia hết 4 đồ vật khác nhau cho 3 người, biết rằng mỗi người nhận được ít nhất 1 đồ vật.

**A.** 36 **B.** 18 **C.** 12 **D.** 72

**Lời giải**

**Chọn A**

Có hai người mà mỗi người nhận một đồ vật và một người nhận hai đồ vật.

Chọn hai người để mỗi người nhận một đồ vật: có $C_3^2$ cách chọn.

Chọn hai đồ vật trao cho hai người: có $A_4^2$ cách chọn.

Hai đồ vật còn lại trao cho người cuối cùng.

Vậy số cách chia là : $C_3^2.A_4^2 = 36$ cách.

**Câu 107.** Một Thầy giáo có 10 cuốn sách Toán đôi một khác nhau, trong đó có 3 cuốn Đại số, 4 cuốn Giải tích và 3 cuốn Hình học. Ông muốn lấy ra 5 cuốn và tặng cho 5 học sinh sao cho sau khi tặng mỗi loại sách còn lại ít nhất một cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách tặng.

**A.** 24412 **B.** 23314. **C.** 32512. **D.** 24480.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số cách lấy 5 cuốn sách và đem tặng cho 5 học sinh: $S = A_{10}^5 = 30240$ cách.

Số cách chọn sao cho không còn sách Đại số: $S_1 = C_7^2.5! = 2520$ cách

Số cách chọn sao cho không còn sách Giải tích: $S_2 = C_6^1.5! = 720$ cách

Số cách chọn sao cho không còn sách Hình học: $S_3 = C_7^2.5! = 2520$ cách.

Vậy số cách tặng thỏa yêu cầu bài toán:: $S - S_1 - S_2 - S_3 = 24480$ cách tặng.

**Câu 108.** Có bao nhiêu số tự nhiên có tám chữ số trong đó có ba chữ số 0, không có hai chữ số 0 nào đứng cạnh nhau và các chữ số khác chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần.

**A.** 786240. **B.** 846000. **C.** 907200. **D.** 151200.

**Lời giải**

**Chọn D**

Chọn ra 5 chữ số khác 0 trong 9 chữ số (từ 1 đến 9) và sắp xếp chúng theo thứ tự có $A_9^5$ cách.

Để hai chữ số 0 không đứng cạnh nhau ta có 6 vị trí để xếp (do 5 chữ số vừa chọn tạo ra 6 vị trí).

Do chữ số 0 không thể xếp ở đầu nên còn 5 vị trí để xếp số 0.

Khi đó xếp 3 số 0 vào 5 vị trí nên có $C_5^3$ cách.

Vậy có $A_9^5 C_5^3 = 151200$ số cần tìm.

**Câu 109.** Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người,gồm 12 nam và 3 nữ.Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và một nữ?

**A.** 12141421. **B.** 5234234. **C.** 4989600. **D.** 4144880

**Lời giải**

**Chọn C**

Có $C_{12}^4$ cách phân công 4 nam về tỉnh thứ nhất

Với mỗi cách phân công trên thì có $C_8^4$ cách phân công 4 nam về tỉnh thứ hai và có $C_4^4$ cách phân công 4 nam còn lại về tỉnh thứ ba.

Khi phân công nam xong thì có $3!$ cách phân công ba nữ về ba tỉnh đó.

Vậy có tất cả $C_{12}^4.C_8^4.C_4^4.3! = 4989600$ cách phân công.

**Câu 110.** Có hai học sinh lớp $A$, ba học sinh lớp $B$ và bốn học sinh lớp $C$ xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp $A$ không có học sinh nào lớp $B$. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy ?

**A.** 80640. **B.** 108864. **C.** 145152. **D.** 217728.

**Lời giải**

Xét các trường hợp sau :

TH1: Hai học sinh lớp A đứng cạnh nhau có $2!.8!$ cách.

TH2: Giữa hai học sinh lớp A có một học sinh lớp C có $2!.A_4^1.7!$ cách.

TH3: Giữa hai học sinh lớp A có hai học sinh lớp C có $2!.A_4^2.6!$ cách.

TH4: Giữa hai học sinh lớp A có ba học sinh lớp C có $2!.A_4^3.5!$ cách.

TH5: Giữa hai học sinh lớp A có bốn học sinh lớp C có $2!.A_4^4.4!$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng có $2!\left(8!+A_4^1 7!+A_4^2 6!+A_4^3 5!+A_4^4 4!\right)=145152$ cách.

**Câu 111.** Một nhóm học sinh gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một đội cờ đỏ sao cho phải có 1 đội trưởng nam, 1 đội phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội cờ đỏ.

**A.** 141666. **B.** 241561. **C.** 111300. **D.** 131444.

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì trong 5 người được chọn phải có ít nhất 1 nữ và ít nhất phải có 2 nam nên số học sinh nữ gồm 1 hoặc 2 hoặc 3 nên ta có các trường hợp sau:

- chọn 1 nữ và 4 nam.

+) Số cách chọn 1 nữa: 5 cách

+) Số cách chọn 2 nam làm đội trưởng và đội phó: $A_{15}^2$

+) Số cách chọn 2 nam còn lại: $C_{13}^2$

Suy ra có $5A_{15}^2.C_{13}^2$ cách chọn cho trường hợp này.

- chọn 2 nữ và 3 nam.

+) Số cách chọn 2 nữ: $C_5^2$ cách.

+) Số cách chọn 2 nam làm đội trưởng và đội phó: $A_{15}^2$ cách.

+) Số cách chọn 1 còn lại: 13 cách.

Suy ra có $13A_{15}^2.C_5^2$ cách chọn cho trường hợp này.

- Chọn 3 nữ và 2 nam.

+) Số cách chọn 3 nữ: $C_5^3$ cách.

+) Số cách chọn 2 làm đội trưởng và đội phó: $A_{15}^2$ cách.

Suy ra có $A_{15}^2.C_5^3$ cách chọn cho trường hợp 3.

Vậy có $5A_{15}^2.C_{13}^2+13A_{15}^2.C_5^2+A_{15}^2.C_5^3=111300$ cách.

**Câu 112.** Ông và bà An cùng có 6 đứa con đang lên máy bay theo một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp hàng khác nhau nếu ông An hay bà An đứng ở đầu hoặc cuối hàng:

**A.** 720. **B.** 1440. **C.** 18720. **D.** 40320.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta dùng phần bù.

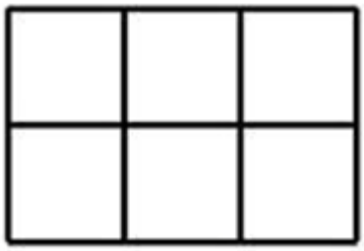
Sắp 8 người vào 8 vị trí theo hàng dọc có 8! cách sắp xếp.

Sắp ông và bà An vào 2 trong 6 vị trí (trừ vị trí đầu và cuối hàng) có $A_6^2$ cách.

Sắp 6 người con vào 6 vị trí còn lại có 6! cách.

Vậy có $8!-A_6^2.6!=18720$ cách sắp xếp.

**Câu 113.** Bé Minh có một bảng hình chữ nhật gồm 6 hình vuông đơn vị, cố định không xoay như hình vẽ. Bé muốn dùng 3 màu để tô tất cả các cạnh của các hình vuông đơn vị, mỗi cạnh tô một lần sao cho mỗi hình vuông đơn vị được tô bởi đúng 2 màu, trong đó mỗi màu tô đúng 2 cạnh. Hỏi bé Minh có tất cả bao nhiêu cách tô màu bảng?



**A.** 4374. **B.** 139968. **C.** 576. **D.** 15552.

**Lời giải**

Tô màu theo nguyên tắc:

Tô 1 ô vuông 4 cạnh: chọn 2 trong 3 màu, ứng với 2 màu được chọn có 6 cách tô. Do đó, có $6.C_3^2$ cách tô.

Tô 3 ô vuông 3 cạnh (có một cạnh đã được tô trước đó): ứng với 1 ô vuông có 3 cách tô màu 1 trong 3 cạnh theo màu của cạnh đã tô trước đó, chọn 1 trong 2 màu còn lại tô 2 cạnh còn lại, có $3.C_2^1=6$ cách tô. Do đó có $6^3$ cách tô.

Tô 2 ô vuông 2 cạnh (có 2 cạnh đã được tô trước đó): ứng với 1 ô vuông có 2 cách tô màu 2 cạnh (2 cạnh tô trước cùng màu hay khác nhau không ảnh hưởng số cách tô). Do đó có $2^2$ cách tô.

Vậy có: $6.C_3^2.6^3.4=15552$ cách tô.

**Câu 114.** Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn $100°$?

**A.** $2018.C_{897}^3$. **B.** $C_{1009}^3$. **C.** $2018.C_{895}^3$. **D.** $2018.C_{896}^3$.

**Lời giải**

Gọi $A_1, A_2, \ldots, A_{2018}$ là các đỉnh của đa giác đều 2018 đỉnh.

Gọi $(O)$ là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều $A_1A_2...A_{2018}$.

Các đỉnh của đa giác đều chia $(O)$ thành $2018$ cung tròn bằng nhau, mỗi cung tròn có số đo bằng $\frac{360^\circ}{2018}$.

Vì tam giác cần đếm có đỉnh là đỉnh của đa giác nên các góc của tam giác là các góc nội tiếp của $(O)$.

Suy ra góc lớn hơn $100^\circ$ sẽ chắn cung có số đo lớn hơn $200^\circ$.

Cố định một đỉnh $A_i$. Có $2018$ cách chọn $A_i$.

Gọi $A_i, A_j, A_k$ là các đỉnh sắp thứ tự theo chiều kim đồng hồ sao cho $\overset{\frown}{A_iA_k} < 160^\circ$ thì $\overset{\frown}{A_iA_jA_k} > 100^\circ$ và tam giác $A_iA_jA_k$ là tam giác cần đếm.

Khi đó $\overset{\frown}{A_iA_k}$ là hợp liên tiếp của nhiều nhất $\left[\frac{160}{\frac{360}{2018}}\right] = 896$ cung tròn nói trên.

$896$ cung tròn này có $897$ đỉnh. Trừ đi đỉnh $A_i$ thì còn $896$ đỉnh. Do đó có $C_{896}^2$ cách chọn hai đỉnh $A_j, A_k$.

Vậy có tất cả $2018.C_{896}^2$ tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

# Bài 4. NHỊ THỨC NEWTON

- | FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

$(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5$

$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Những công thức khai triển nói trên là công thức nhị thức Newton $(a+b)^n$ ứng với $n = 4; n = 5$.

Bằng cách như thế, ta có thể khai triển được $(a+b)^n$ với $n$ là số nguyên dương lớn hơn 5 . Công thức khai triển cụ thể được trình bày trong Chuyên đề học tập Toán 10 .

***Ví dụ 1.*** Khai triển $(x+1)^4$.

***Giải***

Ta có: $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 \cdot 1 + 6x^2 \cdot 1^2 + 4x \cdot 1^3 + 1^4$

$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$

***Ví dụ 2.*** Khai triển $(x-1)^4$.

***Giải***

Ta có: $(x-1)^4 = [x+(-1)]^4 = x^4 + 4x^3 \cdot (-1) + 6x^2 \cdot (-1)^2 + 4x \cdot (-1)^3 + (-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$

***Ví dụ 3.*** Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x-2y)^4$

b) $(3x-y)^5$.

***Giải***

a) Ta có:

$(x-2y)^4 = [x+(-2y)]^4 = x^4 + 4x^3(-2y) + 6x^2(-2y)^2 + 4x(-2y)^3 + (-2y)^4$

$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4.$

b) Ta có:

$(3x-y)^5 = [3x+(-y)]^5 = (3x)^5 + 5(3x)^4(-y) + 10(3x)^3(-y)^2 + 10(3x)^2(-y)^3 + 5(3x)(-y)^4 + (-y)^5$

$= 243x^5 - 405x^4y^3 + 270x^3y^2 - 90x^2y^3 + 15xy^4 - y^5$

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Khai triển nhị thức Newton sau

| STT | Cho khai triển nhị thức sau | Yêu cầu | ĐA | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Số hạng tổng quát | Số hạng thứ k |
| 1 | $(3x+5)^7$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 4 | $T_{k+1} = C_7^k 3^{7-k} 5^k . x^{7-k}$ | Thứ 4 $\rightarrow$ k=3 $\rightarrow$ $T_4$ |
| 2 | $(1-5x)^9$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 5 | $T_{k+1} = C_9^k (-1)^k 5^k . x^k$ | Các ý còn lại tương tự. |
| 3 | $(2\sqrt{x}-1)^{18}$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 9 | $T_{k+1} = C_{18}^k (-1)^k 2^{18-k} . x^{\frac{18-k}{2}}$ | |
| 4 | $(6x-y)^6$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ | $T_{k+1} = C_6^k (-1)^k 6^{6-k} . x^{6-k} . y^k$ | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 3 | | |
| 5 | $\left(\frac{1}{x}-x\right)^{10}$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 7 | $T_{k+1}=C_{10}^{k}\left(-1\right)^{k}.x^{2k-10}$ | |
| 6 | $\left(2x+y^{2}\right)^{28}$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 25 | $T_{k+1}=C_{28}^{k}2^{28-k}.x^{28-k}.y^{2k}$ | |
| 7 | $\left(2\sqrt{x}-4y\right)^{30}$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 16 | $T_{k+1}=C_{30}^{k}\left(-1\right)^{k}2^{30+k}.x^{\frac{30-k}{2}}.y^{k}$ | |
| 8 | $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^{2}}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{9}$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 8 | $T_{k+1}=C_{9}^{k}\left(-1\right)^{k}2^{9-k}.x^{\frac{7k-36}{6}}$ | |

**Câu 2.** Tìm hệ số của $x^{8}$ trong khai triển $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{12}$

**Câu 3.** Tìm hệ số của $x^{21}$ trong khai triển $\left(2-3x\right)^{25}$

**Câu 4.** Viết 3 số hạng đầu tiên theo lũy thừa tăng dần của x của các đa thức sau

a) $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{10}$ b) $\left(3-2x\right)^{8}$

**Câu 5.** Tìm số hạng thứ tư trong khai triển $\left(a-2x\right)^{20}$ theo lũy thừa tăng dần của $x$.

**Câu 6.** Viết 4 số hạng đầu tiên theo lũy thừa tăng dần của $x$ của các đa thức sau

a) $\left(1-3x\right)^{12}$ b) $\left(1-2x\right)^{9}$ c) $\left(1-\frac{x}{3}\right)^{20}$

**Câu 7.** Tìm

a) Số hạng thứ 8 trong khai triển $\left(1-2x\right)^{12}$

b) Số hạng thứ 6 trong khai triển $\left(2-\frac{x}{2}\right)^{9}$

c) Số hạng thứ 12 trong khai triển $\left(2-x\right)^{15}$

**Câu 8.** Tìm số hạng đứng giữa trong khai triển $\left(x^{3}-xy\right)^{15}$

**Câu 9.** Tìm hệ số của:

1. Số hạng chứa $x^{5}$ trong khai triển: $\left(2x-1\right)^{12}$.

2. Số hạng chứa $x^{11}$ trong khai triển: $\left(x^{2}-\frac{1}{x}\right)^{10}$.

3. Số hạng chứa $x^{7}$ trong khai triển: $\left(x^{2}+x\right)^{14}$.

4. Số hạng chứa $x^{25}.y^{10}$ trong khai triển: $\left(x^{3}+xy\right)^{15}$.

**Câu 10.** Tìm hệ số của số hạng không chứa $x$ trong khai triển sau:

1. $\left(x^{2}+\frac{1}{x^{4}}\right)^{12}$.

2. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$.

3. $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$.

**Câu 11.** Trong khai triển $\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$ hãy tìm số hạng không phụ thuộc vào $x$.

**Câu 12.** Tìm số hạng hữu tỷ của khai triển $\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^6$

**Câu 13.** Tìm hệ số của số hạng trong khai triển sau:

1. Tìm hệ số của $x^6$ trong khai triển của biểu thức: $A=(2x-1)^{11}+\left(x^2+1\right)^7$.

2. Tìm hệ số của $x^3$ trong khai triển của biểu thức: $A=(x+1)^{10}+(x-1)^5$.

3. Khai triển $P(x)$ dưới dạng: $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$

a) Tìm hệ số $a_9$: $P(x)=(1+x)^9+(1+x)^{10}+(1+x)^{11}+...+(1+x)^{14}$.

b) Tìm hệ số $a_{15}$: $P(x)=(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+...+20(1+x)^{20}$.

**Câu 14.** Cho khai triển: $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=a_0+a_1x+...+a_{10}x^{10}$. Hãy tìm số hạng $a_k$ lớn nhất.

**Câu 15.** Tìm hệ số của $x^8$ trong khai triển đa thức của: $\left[1+x^2(1-x)^8\right]$.

**Câu 16.** Khai triển đa thức $P(x)=(1+2x)^{12}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{12}x^{12}$. Tìm $\max\left(a_0,a_1,a_2,...,a_{12}\right)$.

**Câu 17.** Tìm số hạng đứng giữa trong các khai triển sau:

a) $\left(x^3+xy\right)^{21}$.

b) $\left(x\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{(xy)^2}}\right)^{20}$.

**Câu 18.** Tìm hệ số của số hạng không chứa $x$ trong khai triển $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x>0$.

**Câu 19.** Cho khai triển đa thức $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{10}x^{10}$. Hãy tìm số hạng $a_k$ lớn nhất.

**Câu 20.** Cho $n$ số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1}=C_n^3$. Tìm số hạng chứa $x^5$ trong khai triển nhị thức niu tơn $\left(\frac{nx^2}{14}-\frac{1}{x}\right)^{14}, x\neq 0$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Số số hạng trong khai triển $(x+2)^{50}$ là

**A.** 49. **B.** 50. **C.** 52. **D.** 51.

**Câu 2.** Có bao nhiêu số hạng trong khai triển nhị thức $(2x-3)^{2018}$

**A.** 2019. **B.** 2017. **C.** 2018. **D.** 2020.

**Câu 3.** Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu-tơn $(x-y)^5$.

**A.** $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$. **B.** $x^5-5x^4y-10x^3y^2-10x^2y^3-5xy^4+y^5$.

**C.** $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$. **D.** $x^5+5x^4y-10x^3y^2+10x^2y^3-5xy^4+y^5$.

**Câu 4.** Trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(3-2x)^{2019}$ có bao nhiêu số hạng?

**A.** 2019. **B.** 2018. **C.** 2020. **D.** 2021.

**Câu 5.** Từ khai triển biểu thức $(x+1)^{10}$ thành đa thức. Tổng các hệ số của đa thức là

**A.** 1023. **B.** 512. **C.** 1024. **D.** 2048.

**Câu 6.** Từ khai triển biểu thức $(x+1)^{10}$ thành đa thức. Tổng các hệ số của đa thức là

**A.** 1023. **B.** 512. **C.** 1024. **D.** 2048.

**Câu 7.** Tính tổng các hệ số trong khai triển $(1-2x)^{2018}$.

**A.** $-1$. **B.** 1. **C.** $-2018$. **D.** 2018.

**Câu 8.** Khai triển $(\sqrt{5}-\sqrt[4]{7})^{124}$. Có bao nhiêu số hạng hữu tỉ trong khai triển trên?

**A.** 30. **B.** 31. **C.** 32. **D.** 33.

**Câu 9.** Trong khai triển nhị thức newton của $P(x)=(\sqrt[3]{2}x+3)^{2018}$ thành đa thức,có tất cả có bao nhiêu số hạng có hệ số nguyên dương?

**A.** 673. **B.** 675. **C.** 674. **D.** 672.

**Câu 10.** Trong khai triển $(1-2x)^{20}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{20}x^{20}$. Giá trị của $a_0-a_1+a_2$ bằng

**A.** 801. **B.** 800. **C.** 1. **D.** 721.

**Câu 11.** Có bao nhiêu số hạng là số nguyên trong khai triển của biểu thức $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}\right)^{2019}$?

**A.** 136. **B.** 403. **C.** 135. **D.** 134.

**Câu 12.** Trong khai triển của $\left(x^{\frac{1}{15}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{5}}\right)^{2019}$, số hạng mà lũy thừa của $x$ và $y$ bằng nhau là số hạng thứ bao nhiêu của khai triển?

**A.** 1348. **B.** 1346. **C.** 1345. **D.** 1347.

**Câu 13.** Trong khai triển $\left(x+\frac{8}{x^2}\right)^9$, số hạng không chứa $x$ là

**A.** 40096. **B.** 43008. **C.** 512. **D.** 84.

**Câu 14.** Số hạng độc lập với $x$ trong khai triển $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^8$ là

**A.** 1792. **B.** 792. **C.** 972. **D.** 1972.

**Câu 15.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{12}$.

**A.** $-220$. **B.** 220. **C.** 924. **D.** $-924$.

**Câu 16.** Cho $x$ là số thực dương, số hạng không chứa $x$ trong khai triển nhị thức $\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30}$ là

**A.** $2^{20}$. **B.** $2^{20}C_{30}^{10}$. **C.** $2^{10}C_{30}^{20}$. **D.** $C_{30}^{20}$.

**Câu 17.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{45}$ là

**A.** $C_{45}^{5}$. **B.** $-C_{45}^{5}$. **C.** $C_{45}^{15}$. **D.** $-C_{45}^{15}$.

**Câu 18.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(x+\frac{2}{x}\right)^{10}$ là

**A.** $C_{10}^{5}$. **B.** $-C_{10}^{5}.2^5$. **C.** $-C_{10}^{5}$. **D.** $C_{10}^{5}.2^5$.

**Câu 19.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{7}$ là:

**A.** 5. **B.** 35. **C.** 45. **D.** 7.

**Câu 20.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^{6}, x\neq 0$.

**A.** 240. **B.** 15. **C.** −240. **D.** −15.

**Câu 21.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển biểu thức $A=\left(\frac{1}{x}-x^2\right)^{12}$ là

**A.** −924. **B.** 495. **C.** −495. **D.** 924.

**Câu 22.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{45}$ là

**A.** $C_{45}^{15}$. **B.** $C_{45}^{30}$. **C.** $-C_{45}^{5}$. **D.** $-C_{45}^{15}$.

**Câu 23.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{5}$.

**A.** 10. **B.** 20. **C.** 5. **D.** 1.

**Chọn A**

**Câu 24.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{7}$ là

**A.** 5. **B.** 35. **C.** 45. **D.** 7.

**Câu 25.** Cho $x$ là số thực dương, số hạng không chứa $x$ trong khai triển nhị thức $\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30}$ là

**A.** $2^{20}$. **B.** $2^{20}.C_{30}^{10}$. **C.** $2^{10}.C_{30}^{20}$. **D.** $C_{30}^{20}$.

**Câu 26.** Cho khai triển $(1-2x)^{20}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{20}x_{20}$. Giá trị của $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}$ bằng:

**A.** 1. **B.** $3^{20}$. **C.** 0. **D.** −1.

**Câu 27.** Hệ số của số hạng chứa $x^7$ trong khai triển nhị thức $\left(x-\frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{12}$ là:

**A.** 376. **B.** −264. **C.** 264. **D.** 260.

**Câu 28.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^7$ trong khai triển nhị thức $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{13}$,.

**A.** 1716. **B.** 68. **C.** $-176$. **D.** 286.

**Câu 29.** Hệ số của $x^{31}$ trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}, x\neq 0$ là.

**A.** $C_{40}^4$. **B.** $C_{40}^2$. **C.** $C_{40}^3$. **D.** $C_{40}^5$.

**Câu 30.** Hệ số lớn nhất trong khai triển $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4$

**A.** $\frac{27}{128}$. **B.** $\frac{9}{32}$. **C.** $\frac{27}{32}$. **D.** $\frac{27}{64}$.

**Câu 31.** Cho biết hệ số của $x^2$ *trong khai triển* $(1+2x)^n$ *bằng* 180 *.Tìm* $n$.

***A.*** $n=8$. ***B.*** $n=12$. ***C.*** $n=14$. ***D.*** $n=10$.

**Câu 32.** Tìm hệ số $h$ của số hạng chứa $x^5$ trong khai triển$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^7$.

**A.** $h=84$. **B.** $h=672$. **C.** $h=560$. **D.** $h=280$.

**Câu 33.** Hệ số của số hạng chứa $x^6$ trong khai triển Newton $\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$ là

**A.** $-3640$. **B.** 3640. **C.** 455. **D.** $-1863680$

**Câu 34.** Tìm hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $\left(x^3+xy\right)^{15}$.

**A.** 58690. **B.** 4004. **C.** 3003. **D.** 5005.

**Câu 35.** Cho khai triển $\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ với $x>0$. Tìm hệ số của số hạng chứa $x^3$ trong khai triển trên

**A.** 80. **B.** 160. **C.** 240. **D.** 60.

**Câu 36.** Cho khai triển $\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ với $x>0$. Tìm hệ số của số hạng chứa $x^3$ trong khai triển trên

**A.** 80. **B.** 160. **C.** 240. **D.** 60.

**Câu 37.** Biết hệ số của $x^2$ trong khai triển của $(1-3x)^n$ là 90. Tìm $n$.

**A.** $n=7$. **B.** $n=6$. **C.** $n=8$. **D.** $n=5$.

**Câu 38.** Số hạng thứ 13 trong khai triển $(2-x)^{15}$ bằng?

**A.** $3640x^{13}$. **B.** $3640x^{12}$. **C.** $-420x^{12}$. **D.** 3640.

**Câu 39.** Tìm số hạng chứa $x^3$ trong khai triển $\left(x-\frac{1}{2x}\right)^9$.

**A.** $-\frac{1}{8}C_9^3x^3$. **B.** $\frac{1}{8}C_9^3\cdot x^3$. **C.** $-C_9^3\cdot x^3$. **D.** $C_9^3x^3$.

**Câu 40.** Tìm số hạng chứa $x^7$ trong khai triển $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}$.

**A.** $-C_{13}^3$. **B.** $-C_{13}^3x^7$. **C.** $-C_{13}^4x^7$. **D.** $-C_{13}^4$.

**Câu 41.** Tìm số hạng chứa $x^{31}$ trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$ ?

**A.** $C_{40}^{4}x^{31}$. **B.** $-C_{40}^{37}x^{31}$. **C.** $C_{40}^{37}x^{31}$. **D.** $C_{40}^{3}x^{31}$.

**Câu 42.** Số hạng chứa $x^{34}$ trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{40}$ là

**A.** $-C_{40}^{37}x^{34}$. **B.** $C_{40}^{3}x^{34}$. **C.** $C_{40}^{2}x^{34}$. **D.** $C_{40}^{4}x^{34}$.

**Câu 43.** Biết hệ số của số hạng chứa $x^2$ trong khai triển $(1+4x)^n$ là 3040. Số tự nhiên $n$ bằng bao nhiêu?

**A.** 28. **B.** 26. **C.** 24. **D.** 20.

**Câu 44.** Biết hệ số của $x^2$ trong khai triển của $(1-3x)^n$ là 90. Tìm $n$.

**A.** $n=5$. **B.** $n=8$. **C.** $n=6$. **D.** $n=7$.

**Câu 45.** Cho biết hệ số của $x^2$ trong khai triển $(1+2x)^n$ bằng 180. Tìm $n$.

**A.** $n=12$. **B.** $n=14$. **C.** $n=8$. **D.** $n=10$.

**Câu 46.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^{10}$ trong khai triển của biểu thức $\left(3x^3-\frac{2}{x^2}\right)^5$.

**A.** $-810$. **B.** 826. **C.** 810. **D.** 421.

**Câu 47.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^{31}$ trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

**A.** $C_{40}^{37}$. **B.** $C_{40}^{31}$. **C.** $C_{40}^{4}$. **D.** $C_{40}^{2}$.

**Câu 48.** Trong khai triển $\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$, hệ số của $x^3\,(x>0)$ là:

**A.** 80. **B.** 160. **C.** 240. **D.** 60.

**Câu 49.** Cho $n$ là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^0+2.C_n^1+2^2.C_n^2+\ldots+2^n.C_n^n=59049$. Biết số hạng thứ 3 trong khai triển Newton của $\left(x^2-\frac{3}{x}\right)^n$ có giá trị bằng $\frac{81}{2}n$. Khi đó giá trị của $x$ bằng

**A.** 1 **B.** 2. **C.** $\pm1$ **D.** $\pm2$.

**Câu 50.** Cho nhị thức $\left(2x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$, trong đó số nguyên dương $n$ thỏa mãn $A_n^3=72n$. Tìm số hạng chứa $x^5$ trong khai triển.

**A.** $2^6C_{10}^{4}x^5$. **B.** $2^5C_{10}^{5}x^5$. **C.** $2^7C_{10}^{3}x^5$. **D.** $2^6C_{10}^{7}x^5$.

**Câu 51.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển nhị thức Newton của $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^n\,(x\neq0)$, biết rằng $1.C_n^1+2.C_n^2+3.C_n^3+\ldots+n.C_n^n=256n$ ($C_n^k$ là số tổ hợp chập k của n phần tử).

**A.** 489888 **B.** 49888. **C.** 48988. **D.** 4889888.

**Câu 52.** Cho khai triển $(1+3x)^n=a_0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n$ trong đó $n\in\mathbb{N}^*$ và các hệ số thỏa mãn hệ thức $a_0+\frac{a_1}{3}+\ldots+\frac{a_n}{3^n}=4096$. Tìm hệ số $a_i$ lớn nhất.

**A.** 1732104. **B.** 3897234. **C.** 4330260. **D.** 3247695.

**Câu 53.** Tìm hệ số của $x^6$ trong khai triển $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^{3n+1}$ với $x\neq 0$, biết $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $3C_{n+1}^2+nP_2=4A_n^2$.

**A.** $210x^6$. **B.** $210$. **C.** $120x^6$. **D.** $120$.

**Câu 54.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^6$ trong khai triển $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^n\ (x\neq 0)$, biết rằng $\frac{2}{C_n^2}+\frac{14}{3C_n^3}=\frac{1}{n}$ ($C_n^k$ là số tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử).

**A.** $326592$. **B.** $3265922$ **C.** $3265592$ **D.** $32692$.

**Câu 55.** Tìm số hạng chứa $x^{26}$ trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$ biết $n$ là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$.

**A.** $325$. **B.** $210$. **C.** $200$. **D.** $152$.

**Câu 56.** Với $n$ là số tự nhiên thỏa mãn $C_{n-4}^{n-6}+nA_n^2=454$, hệ số của số hạng chứa $x^4$ trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\frac{2}{x}-x^3\right)^n$

bằng

**A.** $1972$. **B.** $786$. **C.** $1692$. **D.** $-1792$.

**Câu 57.** Với $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1+C_n^3=13n$, hệ số của số hạng chứa $x^5$ trong khai triển của biểu thức $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$ bằng.

**A.** $120$. **B.** $252$. **C.** $45$. **D.** $210$.

**Câu 58.** Cho $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2=C_n^2+C_n^1+4n+6$. Hệ số của số hạng chứa $x^9$ của khai triển biểu thức $P(x)=\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^n$ bằng:

**A.** $18564$. **B.** $64152$. **C.** $192456$. **D.** $194265$.

**Câu 59.** Biết $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=78$, số hạng chứa $x^8$ trong khai triển $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^n$ là

**A.** $-101376x^8$. **B.** $-101376$. **C.** $-112640$. **D.** $101376x^8$.

**Câu 60.** Với $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $3C_{n+1}^3-3A_n^2=52(n-1)$. Trong khai triển biểu thức $\left(x^3+2y^2\right)^n$, gọi $T_k$ là số hạng mà tổng số mũ của $x$ và $y$ của số hạng đó bằng $34$. Hệ số của $T_k$ là

**A.** $54912$. **B.** $1287$. **C.** $2574$. **D.** $41184$.

**Câu 61.** Cho $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^1-C_n^2=5$. Tìm hệ số $a$ của $x^4$ trong khai triển của biểu thức $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^n$.

**A.** $a=11520$. **B.** $a=256$. **C.** $a=45$. **D.** $a=3360$.

**Câu 62.** Với $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $3A_n^{n-2}+C_n^3=40$. Hệ số của $x^6$ trong khai triển $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ là

**A.** $1024$. **B.** $-1024$. **C.** $-1042$. **D.** $1042$.

**Câu 63.** Với $n$ là số nguyên dương thoả mãn $A_n^2+3C_n^1=120$, số hạng không chứa $x$ trong khai triển của biểu thức $\left(x^4-\frac{3}{x}\right)^n$ bằng

**A.** 295245. **B.** 245295. **C.** 292545. **D.** 259254.

**Câu 64.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^8$ trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\frac{n}{2x}+\frac{x}{2}\right)^{2n}, (x\neq 0)$, biết số nguyên dương $n$ thỏa mãn $C_n^3+A_n^2=50.$

**A.** $\frac{97}{12}$. **B.** $\frac{29}{51}$. **C.** $\frac{297}{512}$. **D.** $\frac{279}{215}$.

**Câu 65.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển nhị thức Newton của $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^n\ (x\neq 0)$, biết rằng $1.C_n^1+2.C_n^2+3.C_n^3+...+nC_n^n=256n$ ($C_n^k$ là số tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử).

**A.** 489888. **B.** 49888. **C.** 48988. **D.** 4889888.

**Câu 66.** Giả sử có khai triển $(1-2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Tìm $a_5$ biết $a_0+a_1+a_2=71.$

**A.** $-672$. **B.** 672. **C.** 627. **D.** $-627$.

**Câu 67.** Với $n$ là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $A_n^2-C_n^3=10$, tìm hệ số $a_5$ của số hạng chứa $x^5$ trong khai triển $\left(x^2-\frac{2}{x^3}\right)^n$ với $x\neq 0$.

**A.** $a_5=10$. **B.** $a_5=-10x^5$. **C.** $a_5=10x^5$. **D.** $a_5=-10$.

**Câu 68.** Tìm hệ số của $x^5$ trong khai triển $(1+3x)^{2n}$ biết $A_n^3+2A_n^2=100$

**A.** 61236. **B.** 63216. **C.** 61326. **D.** 66321.

**Câu 69.** Cho $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-.....+(-1)^nC_n^n=2048$. Hệ số của $x^{10}$ trong khai triển $(x+2)^n$ là:

**A.** 11264. **B.** 22. **C.** 220. **D.** 24.

**Câu 70.** Trong khai triển $\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ biết hệ số của $x^3$ là $3^4C_n^5$. Giá trị $n$ có thể nhận là

**A.** 9. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 16.

**Câu 71.** Hệ số của số hạng chứa $x^8$ trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n;(x>0)$ biết $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=7(n+3)$ là

**A.** 1303. **B.** 313. **C.** 495. **D.** 13129.

**Câu 72.** Tìm hệ số của $x^4$ trong khai triển nhị thức Newton $\left(2x+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^n$ với $x>0$, biết $n$ là số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn $A_n^5\leq 18A_{n-2}^4$.

**A.** 8064. **B.** 3360. **C.** 13440. **D.** 15360.

**Câu 73.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^n$ biết $A_n^2-C_n^2=105.$

**A.** $-3003$. **B.** $-5005$. **C.** 5005. **D.** 3003.

**Câu 74.** Tìm hệ số của $x^5$ trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^4+...+C_{2n+1}^{2n}=1024$.

**A.** 2099529. **B.** −2099520. **C.** −1959552. **D.** 1959552.

**Câu 75.** Biết $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=78$, số hạng chứa $x^8$ trong khai triển $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^n$ là

**A.** $-101376x^8$. **B.** $-101376$. **C.** $-112640$. **D.** $101376x^8$.

**Câu 76.** Tìm số hạng chứa $x^5$ trong khai triển $\left(x-\frac{2}{x}\right)^n$, biết $n$ là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^3=\frac{4}{3}n+2C_n^2$

**A.** 134 **B.** 144 **C.** 115 **D.** 141

**Câu 77.** Tìm hệ số không chứa $x$ trong khai triển $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^n$, biết $n$ là sô nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=78$.

**A.** 112640. **B.** 112643. **C.** −112640. **D.** −112643.

**Câu 78.** Cho biểu thức $P=\left(\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}-\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\right)^{10}$ với $x>0$, $x\neq 1$. Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển Niu-tơn của $P$.

**A.** 200. **B.** 160. **C.** 210. **D.** 100.

**Câu 79.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $f(x)=\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^9$, $x\neq 0$ bằng

**A.** 5376. **B.** −5376. **C.** 672. **D.** −672.

**Câu 80.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển của $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^{14}$ với $x>0$ là:

**A.** $2^6C_{14}^8$. **B.** $2^6C_{14}^6$. **C.** $2^8C_{14}^8$. **D.** $-2^8C_{14}^8$.

**Câu 81.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển của $x^{11}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^5}\right)^{11}$ với $x>0$.

**A.** 485. **B.** 238. **C.** 165. **D.** 525.

**Câu 82.** Với $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1+C_n^2=55$, số hạng không chứa $x$ trong khai triển của biểu thức $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

**A.** 13440 **B.** 3360 **C.** 80640 **D.** 322560

**Câu 83.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển của $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$ với $x>0$, nếu biết rằng $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^2-C_n^1=44$.

**A.** 485. **B.** 525. **C.** 165. **D.** 238

**Câu 84.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển của $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$, với $x>0$, nếu biết rằng $C_n^2-C_n^1=44$.

**A.** 165. **B.** 238. **C.** 485. **D.** 525.

**Câu 85.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(2x-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}$ với $x\neq 0$, biết $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^3+2n=A_{n+1}^2$ là:

**A.** $-C_{16}^{12}.2^4.3^{12}$. **B.** $C_{16}^{0}.2^{16}$. **C.** $C_{16}^{12}.2^4.3^{12}$. **D.** $C_{16}^{16}.2^0$.

**Câu 86.** Với số nguyên dương $n$ thỏa mãn $C_n^2-n=27$, trong khai triển $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^n$ số hạng không chứa $x$ là

**A.** 84. **B.** 672. **C.** 8. **D.** 5376.

**Câu 87.** Cho khai triển $\left(1-3x+2x^2\right)^{2017}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{4034}x^{4034}$. Tìm $a_2$.

**A.** 9136578 **B.** 16269122. **C.** 8132544. **D.** 18302258.

**Câu 88.** Tìm hệ số của $x^7$ trong khai triển $f\left(x\right)=\left(1-3x+2x^3\right)^{10}$ thành đa thức.

**A.** 204120. **B.** −262440. **C.** −4320. **D.** −62640.

**Câu 89.** Cho khai triển $\left(3-2x+x^2\right)^9=a_0x^{18}+a_1x^{17}+a_2x^{16}+...+a_{18}$. Giá trị $a_{15}$ bằng

**A.** 218700. **B.** 489888. **C.** −804816. **D.** −174960.

**Câu 90.** Tìm hệ số của $x^3$ sau khi khai triển và rút gọn các đơn thức đồng dạng của $\left(\frac{1}{x}-x+2x^2\right)^9$, $x\neq 0$.

**A.** −2940. **B.** 3210. **C.** 2940. **D.** −3210.

**Câu 91.** Hệ số của số hạng chứa $x^7$ trong khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6$ bằng

**A.** −6432. **B.** −4032. **C.** −1632. **D.** −5418.

**Câu 92.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^5$ trong khai triển $\left(1+x+x^2+x^3\right)^{10}$.

**A.** 582. **B.** 1902. **C.** 7752. **D.** 252.

**Câu 93.** Cho $n$ là số tự nhiên thỏa mãn $3C_n^0+4C_n^1+5C_n^2+...+(n+3)C_n^n=3840$. Tổng tất cả các hệ số của các số hạng trong khai triển $(1+x-x^2+x^3)^n$ là

**A.** $4^{10}$. **B.** $4^9$. **C.** $2^{10}$. **D.** $2^9$.

**Câu 94.** Giả sử $\left(1+x+x^2+x^3+...+x^{10}\right)^{11}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_{110}x^{110}$ với $a_0$, $a_1$, $a_2$,..., $a_{110}$ là các hệ số. Giá trị của tổng $T=C_{11}^0a_{11}-C_{11}^1a_{10}+C_{11}^2a_9-C_{11}^3a_8+...+C_{11}^{10}a_1-C_{11}^{11}a_0$ bằng

**A.** $T=-11$. **B.** $T=11$. **C.** $T=0$. **D.** $T=1$.

**Câu 95.** Sau khi khai triển và rút gọn thì $P(x)=(1+x)^{12}+\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{18}$ có tất cả bao nhiêu số hạng

**A.** 27. **B.** 28. **C.** 30. **D.** 25

**Câu 96.** Cho đa thức $P\left(x\right)=\left(x-2\right)^{2017}+\left(3-2x\right)^{2018}=a_{2018}x^{2018}+a_{2017}x^{2017}+...+a_1x+a_0$. Khi đó $S=a_{2018}+a_{2017}+...+a_1+a_0$ bằng

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2018. **D.** 2017.

**Câu 97.** Sau khi khai triển và rút gọn biểu thức $f(x)=\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^{12}+\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)^{21}$ thì $f(x)$ có bao nhiêu số hạng?

**A.** 30. **B.** 32. **C.** 29. **D.** 35.

**Câu 98.** Tìm hệ số của $x^5$ trong khai triển $P(x)=(x+1)^6+(x+1)^7+...+(x+1)^{12}$.

**A.** 1716. **B.** 1715. **C.** 1287. **D.** 1711.

**Câu 99.** Cho đa thức: $P(x)=(1+x)^8+(1+x)^9+(1+x)^{10}+(1+x)^{11}+(1+x)^{12}$. Khai triển và rút gọn ta được đa thức: $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số $a_8$.

**A.** 720. **B.** 700. **C.** 715. **D.** 730.

**Câu 100.** Cho đa thức $P(x)=(1+x)^8+(1+x)^9+(1+x)^{10}+(1+x)^{11}+(1+x)^{12}$. Khai triển và rút gọn ta được đa thức $P(x)=a_0+a_1x+...+a_{12}x^{12}$. Tính tổng các hệ số $a_i$, $i=0;1;2;...;12$.

**A.** 5. **B.** 7936. **C.** 0. **D.** 7920.

**Câu 101.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^9$ trong khai triển nhị thức Newton $(1+2x)(3+x)^{11}$.

**A.** 4620. **B.** 1380. **C.** 9405. **D.** 2890.

**Câu 102.** Cho khai triển $(1+2x)^{10}\left(3+4x+4x^2\right)^2=a_0x+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{14}x^{14}$. Tìm giá trị của $a_6$.

**A.** 482496. **B.** 529536. **C.** 278016. **D.** 453504.

**Câu 103.** Hệ số của $x^6$ trong khai triển $(2x+1)^6\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^4$ thành đa thức là

**A.** $\frac{1}{2}C_{14}^6$. **B.** $\frac{1}{4}C_{14}^6$. **C.** $C_{14}^6$. **D.** $4C_{14}^8$.

**Câu 104.** Hệ số của $x^5$ trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6+(x-3)^8$ bằng

**A.** 1752 **B.** $-1272$ **C.** 1272 **D.** $-1752$

**Câu 105.** Hệ số của $x^5$ trong khai triển $x(3x-1)^6+(2x-1)^8$ bằng

**A.** $-3007$ **B.** $-577$ **C.** 3007 **D.** 577

**Câu 106.** Hệ số của $x^5$ trong khai triển biểu thức $x(x-2)^6+(3x-1)^8$ bằng

**A.** $-13548$ **B.** 13668 **C.** $-13668$ **D.** 13548

**Câu 107.** Hệ số của $x^5$ trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6+(3x-1)^8$ bằng

**A.** 13848 **B.** 13368 **C.** $-13848$ **D.** $-13368$

**Câu 108.** Hệ số của $x^5$ trong khai triển $x(x-2)^6+(3x-1)^8$ bằng

**A.** $-13548$. **B.** 13548. **C.** $-13668$. **D.** 13668.

**Câu 109.** Tìm hệ số của $x^5$ trong khai triển đa thức $f(x)=x(1-x)^5+x^2(1+2x)^{10}$.

**A.** 965. **B.** 263. **C.** 632. **D.** 956.

**Câu 110.** Tìm hệ số của $x^5$ trong khai triển $P(x)=x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$.

**A.** 3240. **B.** 3320. **C.** 80. **D.** 259200.

**Câu 111.** Khai triển đa thức $P(x)=(1+2x)^{12}=a_0+a_1x+...+a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số $a_k$ $(0\le k\le 12)$ lớn nhất trong khai triển trên.

**A.** $C_{12}^8 2^8$. **B.** $C_{12}^9 2^9$. **C.** $C_{12}^{10} 2^{10}$. **D.** $1+C_{12}^8 2^8$.

**Câu 112.** Hệ số có giá trị lớn nhất khi khai triển $P(x)=\left(1+2x^2\right)^{12}$ thành đa thức là

**A.** $162270$. **B.** $162720$. **C.** $126270$. **D.** $126720$.

# Bài 4. NHỊ THỨC NEWTON

- | FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

$(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5$

$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Những công thức khai triển nói trên là công thức nhị thức Newton $(a+b)^n$ ứng với $n = 4; n = 5$.

Bằng cách như thế, ta có thể khai triển được $(a+b)^n$ với $n$ là số nguyên dương lớn hơn 5 . Công thức khai triển cụ thể được trình bày trong Chuyên đề học tập Toán 10 .

***Ví dụ 1.*** Khai triển $(x+1)^4$.

***Giải***

Ta có: $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 \cdot 1 + 6x^2 \cdot 1^2 + 4x \cdot 1^3 + 1^4$

$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$

***Ví dụ 2.*** Khai triển $(x-1)^4$.

***Giải***

Ta có: $(x-1)^4 = [x+(-1)]^4 = x^4 + 4x^3 \cdot (-1) + 6x^2 \cdot (-1)^2 + 4x \cdot (-1)^3 + (-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$

***Ví dụ 3.*** Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x-2y)^4$

b) $(3x-y)^5$.

***Giải***

a) Ta có:

$(x-2y)^4 = [x+(-2y)]^4 = x^4 + 4x^3(-2y) + 6x^2(-2y)^2 + 4x(-2y)^3 + (-2y)^4$

$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4.$

b) Ta có:

$(3x-y)^5 = [3x+(-y)]^5 = (3x)^5 + 5(3x)^4(-y) + 10(3x)^3(-y)^2 + 10(3x)^2(-y)^3 + 5(3x)(-y)^4 + (-y)^5$

$= 243x^5 - 405x^4y^3 + 270x^3y^2 - 90x^2y^3 + 15xy^4 - y^5$

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Khai triển nhị thức Newton sau

| STT | Cho khai triển nhị thức sau | Yêu cầu | ĐA | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Số hạng tổng quát | Số hạng thứ k |
| 1 | $(3x+5)^7$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 4 | $T_{k+1} = C_7^k 3^{7-k} 5^k . x^{7-k}$ | Thứ 4 $\rightarrow$ k=3 $\rightarrow$ $T_4$ |
| 2 | $(1-5x)^9$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 5 | $T_{k+1} = C_9^k (-1)^k 5^k . x^k$ | Các ý còn lại tương tự. |
| 3 | $(2\sqrt{x}-1)^{18}$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 9 | $T_{k+1} = C_{18}^k (-1)^k 2^{18-k} . x^{\frac{18-k}{2}}$ | |
| 4 | $(6x-y)^6$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ | $T_{k+1} = C_6^k (-1)^k 6^{6-k} . x^{6-k} . y^k$ | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 3 | | |
| 5 | $\left(\frac{1}{x}-x\right)^{10}$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 7 | $T_{k+1}=C_{10}^{k}\left(-1\right)^{k}.x^{2k-10}$ | |
| 6 | $\left(2x+y^{2}\right)^{28}$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 25 | $T_{k+1}=C_{28}^{k}2^{28-k}.x^{28-k}.y^{2k}$ | |
| 7 | $\left(2\sqrt{x}-4y\right)^{30}$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 16 | $T_{k+1}=C_{30}^{k}\left(-1\right)^{k}2^{30+k}.x^{\frac{30-k}{2}}.y^{k}$ | |
| 8 | $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^{2}}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{9}$ | Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 8 | $T_{k+1}=C_{9}^{k}\left(-1\right)^{k}2^{9-k}.x^{\frac{7k-36}{6}}$ | |

**Lời giải**

Khai triển nhị thức Newton sau

**1.** $\left(3x+5\right)^{7}$

Theo công thức nhị thức Newton ta có

$$\left(3x+5\right)^{7}=\sum_{k=0}^{7}C_{7}^{k}3^{7-k}5^{k}.x^{7-k}$$

Số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_{7}^{k}3^{7-k}5^{k}.x^{7-k}$

Số hạng thứ 4(k=3) là $T_{4}=C_{7}^{3}3^{7-3}5^{3}.x^{7-3}=35375x^{4}$

**2.** $\left(1-5x\right)^{9}$

Theo công thức nhị thức Newton ta có

$$\left(1-5x\right)^{9}=\sum_{k=0}^{9}C_{9}^{k}\left(-1\right)^{k}5^{k}.x^{k}$$

Số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_{9}^{k}\left(1\right)^{9-k}\left(-5\right)^{k}=C_{9}^{k}\left(-1\right)^{k}5^{k}.x^{k}$

Số hạng thứ 5(k=4) là $T_{5}=C_{9}^{4}\left(-1\right)^{4}5^{4}.x^{4}=78750x^{4}$

**3.** $\left(2\sqrt{x}-1\right)^{18}$

Theo công thức nhị thức Newton ta có

$$\left(2\sqrt{x}-1\right)^{18}=\left(2x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{18}=\sum_{k=0}^{18}C_{18}^{k}\left(-1\right)^{k}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^{18-k}=\sum_{k=0}^{18}C_{18}^{k}\left(-1\right)^{k}2^{18-k}.x^{\frac{18-k}{2}}$$

Số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_{18}^{k}\left(-1\right)^{k}2^{18-k}.x^{\frac{18-k}{2}}$

Số hạng thứ 9 là $T_{9}=C_{18}^{8}\left(-1\right)^{8}2^{18-8}.x^{\frac{18-8}{2}}=2^{10}.C_{18}^{8}x^{5}$

**4.** $\left(6x-y\right)^{6}$

Theo công thức nhị thức Newton ta có

$$\left(6x-y\right)^{6}=\sum_{k=0}^{6}C_{6}^{k}\left(-1\right)^{k}6^{6-k}.x^{6-k}.y^{k}$$

Số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_{6}^{k}\left(-1\right)^{k}6^{6-k}.x^{6-k}.y^{k}$

Số hạng thứ 3 (k=2) là $T_{3}=C_{6}^{k}\left(-1\right)^{k}6^{6-k}.x^{6-k}.y^{k}=C_{6}^{2}6^{4}x^{4}y^{2}$

**5.** $\left(\frac{1}{x}-x\right)^{10}$

Theo công thức nhị thức Newton ta có

$\left(\frac{1}{x}-x\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}\left(-1\right)^{k}.x^{2k-10}$

Số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_{10}^{k}\left(-1\right)^{k}.x^{2k-10}$

Số hạng thứ 7 (k=6) là $T_7=C_{10}^{6}\left(-1\right)^{6}.x^{2.6-10}=C_{10}^{6}x^{2}$

**6.** $\left(2x+y^2\right)^{28}$

Theo công thức nhị thức Newton ta có

$\left(2x+y^2\right)^{28}=\sum_{k=0}^{28}C_{28}^{k}2^{28-k}.x^{28-k}.y^{2k}$

Số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_{28}^{k}2^{28-k}.x^{28-k}.y^{2k}$

Số hạng thứ 25(k=24) là $T_{24}=C_{28}^{24}2^{28-24}.x^{28-24}.y^{224}=2^4C_{28}^{24}x^4y^{48}$

**7.** $\left(2\sqrt{x}-4y\right)^{30}$

Theo công thức nhị thức Newton ta có

$\left(2\sqrt{x}-4y\right)^{30}\left(2x^{\frac{1}{2}}-4y\right)^{30}=\sum_{k=0}^{30}C_{30}^{k}.\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^{30-k}.\left(-4y\right)^{k}=\sum_{k=0}^{30}C_{30}^{k}\left(-1\right)^{k}2^{30+k}.x^{\frac{30-k}{2}}.y^{k}$

Số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_{30}^{k}\left(-1\right)^{k}2^{30+k}.x^{\frac{30-k}{2}}.y^{k}$

Số hạng thứ 16(k=15) là $T_{16}=C15\left(-1\right)^{15}2^{30+15}.x^{\frac{30-15}{2}}.y^{15}=-2^{45}C_{30}^{15}x^{\frac{15}{2}}y^{15}$

**8.** $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{9}$

Theo công thức nhị thức Newton ta có

$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{9}\left(\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}--\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{9}=\sum_{k=0}^{9}C_{9}^{k}\left(\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{9-k}\left(-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{9}C_{9}^{k}\left(-1\right)^{k}2^{9-k}.x^{\frac{7k-36}{6}}$

Số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_{9}^{k}\left(-1\right)^{k}2^{9-k}.x^{\frac{7k-36}{6}}$

Số hạng thứ 8(k=7) là $T_8=C_{9}^{k}\left(-1\right)^{7}2^{9-7}.x^{\frac{7.7-36}{6}}=-\frac{1}{2^5}C_{9}^{7}x^{\frac{13}{6}}$

**Câu 2.** Tìm hệ số của $x^8$ trong khai triển $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{12}$

**Lời giải**

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là:

$a_k=C_{12}^{k}x^{12-k}\left(\frac{1}{x}\right)^{k}=C_{12}^{k}x^{12-2k}\ \ \left(0\le x\le 12\right)$

Ta chọn $12-2k=8\Leftrightarrow k=2$

Vậy số hạng thứ 3 trong khai triển chứa $x^8$ và có hệ số là: $C_{12}^{2}=66$.

**Câu 3.** Tìm hệ số của $x^{21}$ trong khai triển $\left(2-3x\right)^{25}$

**Lời giải**

Số hạng thứ 21 trong khai triển $C_{25}^{20}2^5\left(-3x\right)^{20}=C_{25}^{20}2^53^{20}x^{20}$.

**Câu 4.** Viết 3 số hạng đầu tiên theo lũy thừa tăng dần của x của các đa thức sau

a) $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{10}$ b) $(3-2x)^8$

**Lời giải**

a) $1-5x+\frac{45}{4}x^2$ b) $3^8-C_8^1 3^7 2x+C_8^2 3^6 4x^2$

**Câu 5.** Tìm số hạng thứ tư trong khai triển $(a-2x)^{20}$ theo lũy thừa tăng dần của $x$.

**Lời giải**

Áp dụng công thức nhị thức Newton số hạng thứ 4 trong khai triển là $-C_{20}^3 2^3 a^{17} x^3$

**Câu 6.** Viết 4 số hạng đầu tiên theo lũy thừa tăng dần của $x$ của các đa thức sau

a) $(1-3x)^{12}$ b) $(1-2x)^9$ c) $\left(1-\frac{x}{3}\right)^{20}$

**Lời giải**

a) $1-36x+594x^2-5940x^3$

b) $1-18x+144x^2-8C_9^3 x^3=1-18x+144x^2-672x^3$

c) $1-\frac{20}{3}x+\frac{190}{9}x^2-\frac{1140}{27}x^3$

**Câu 7.** Tìm

a) Số hạng thứ 8 trong khai triển $(1-2x)^{12}$

b) Số hạng thứ 6 trong khai triển $\left(2-\frac{x}{2}\right)^9$

c) Số hạng thứ 12 trong khai triển $(2-x)^{15}$

**Lời giải**

a) $-C_{12}^7 2^7 x^7$ b) $-\frac{1}{2}C_9^5 x^5$ c) $-16C_{15}^{11}x^{11}$

**Câu 8.** Tìm số hạng đứng giữa trong khai triển $\left(x^3-xy\right)^{15}$

**Lời giải**

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^3-xy\right)^{15}$ là $T_{k+1}=C_{15}^k\left(x^3\right)^{15-k}.(-xy)^k$

Trong khai triển trên có $n=15$ nên có 16 số hạng nên số hạng đứng giữa là số hạng thứ 8 và thứ 9.

$T_8=T_{7+1}=C_{15}^7\left(x^3\right)^{15-7}.(-xy)^7=-6435x^{31}y^7$

$T_9=T_{8+1}=C_{15}^8\left(x^3\right)^{15-8}.(-xy)^8=6435x^{29}y^8$

**Câu 9.** Tìm hệ số của:

1. Số hạng chứa $x^5$ trong khai triển: $(2x-1)^{12}$.

2. Số hạng chứa $x^{11}$ trong khai triển: $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{10}$.

3. Số hạng chứa $x^7$ trong khai triển: $\left(x^2+x\right)^{14}$.

4. Số hạng chứa $x^{25}.y^{10}$ trong khai triển: $\left(x^3+xy\right)^{15}$.

**Lời giải**

1. $(2x-1)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}(2x)^{12-k}(-1)^{k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}2^{12-k}(-1)^{k}x^{12-k}$

Tại số hạng chứa $x^5$ thì tương ứng với $12-k=5\Rightarrow k=7$.

Vậy hệ số của $x^5$ là: $C_{12}^{7}2^{5}(-1)^{7}=-25344$.

2. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}\left(x^2\right)^{10-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}x^{2(10-k)-k}(-1)^{k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}(-1)^{k}x^{20-3k}$

Tại số hạng chứa $x^{11}$ thì tương ứng với $20-3k=11\Rightarrow k=3$.

Vậy hệ số của $x^{11}$ là: $C_{10}^{3}(-1)^{3}=-120$.

3. $\left(x^2+x\right)^{14}=x^{14}(x+1)^{14}$

$\Rightarrow$ Không tồn tại số hạng chứa $x^7$.

Vậy hệ số của $x^7$ là: $0$.

4. $\left(x^3+xy\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^{k}\left(x^3\right)^{15-k}(xy)^{k}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^{k}x^{3(15-k)+k}y^{k}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^{k}x^{45-2k}y^{k}$

Tại số hạng chứa $x^{25}.y^{10}$ thì tương ứng với $\begin{cases}45-2k=25\\k=0\end{cases}\Rightarrow k=10$.

Vậy hệ số của $x^{11}$ là: $C_{15}^{10}=3003$.

**Câu 10.** Tìm hệ số của số hạng không chứa $x$ trong khai triển sau:

1. $\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)^{12}$.
2. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{6}$.
3. $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{7}$.

**Lời giải**

1. $\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}x^{2(12-k)}.\frac{1}{x^{4k}}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}x^{24-6k}$

Tại số hạng không chứa $x$ thì tương ứng với $24-6k=0\Rightarrow k=4$.

Vậy số hạng tự do là: $C_{12}^{4}=495$.

2. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{6}=\sum_{k=0}^{6}C_{6}^{k}x^{2(6-k)}.\left(-\frac{1}{x}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{6}C_{6}^{k}(-1)^{k}x^{2(6-k)-k}=\sum_{k=0}^{6}C_{6}^{k}(-1)^{k}x^{12-3k}$

Tại số hạng không chứa $x$ thì tương ứng với $12-3k=0\Rightarrow k=4$.

Vậy số hạng tự do là: $C_6^4 = 15$.

3. $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 = \left(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k x^{\frac{1}{3}(7-k)}.x^{\frac{-k}{4}} = \sum_{k=0}^{7} C_7^k x^{\frac{1}{3}(7-k)-\frac{k}{4}} = \sum_{k=0}^{7} C_7^k x^{\frac{7}{3}-\frac{7k}{12}}$

Tại số hạng không chứa $x$ thì tương ứng với $\frac{7}{3}-\frac{7k}{12}=0 \Rightarrow k=4$.

Vậy số hạng tự do là: $C_7^4 = 35$.

**Câu 11.** Trong khai triển $\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$ hãy tìm số hạng không phụ thuộc vào $x$.

**Lời giải**

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$ là $T_{k+1} = C_{10}^k \left(2x^3\right)^{10-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k = C_{10}^k 2^{10-k} x^{30-5k}$

$T_{k+1}$ không phụ thuộc vào $x$ $30-5k=0 \Rightarrow k=6$

Số hạng không phụ thuộc vào $x$ là số hạng thứ 7 ứng với k=6: $T_7 = C_{10}^6 2^4$.

**Câu 12.** Tìm số hạng hữu tỷ của khai triển $\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^6$

**Lời giải**

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^6$ là:

$T_{k+1} = C_6^k \left(\sqrt{3}\right)^{6-k}\left(-\sqrt{15}\right)^k = (-1)^k C_6^k 3^3 5^{\frac{k}{2}} \quad (0 \le k \le 6)$

$T_{k+1}$ là số hạng hữ tỉ $\Leftrightarrow \frac{k}{2}$ là một số tự nhiên $\Leftrightarrow k$ chia hết cho 2 $\Leftrightarrow k \in \{0;2;4;6\}$ (vì $0 \le k \le 6$)

Vậy trong khai triển các số hạng hữu tỉ x là số hạng thứ 1; 3; 5; 7

$T_1 = (-1)^0 C_6^0 3^3 5^{\frac{0}{2}} = 27$ $T_2 = (-1)^2 C_6^2 3^3 5^{\frac{2}{2}} = 2025$

$T_5 = (-1)^4 C_6^4 3^3 5^{\frac{4}{2}} = 10125$ $T_7 = (-1)^6 C_6^6 3^3 5^{\frac{6}{2}} = 3375$

**Câu 13.** Tìm hệ số của số hạng trong khai triển sau:

1. Tìm hệ số của $x^6$ trong khai triển của biểu thức: $A = (2x-1)^{11} + \left(x^2+1\right)^7$.

2. Tìm hệ số của $x^3$ trong khai triển của biểu thức: $A = (x+1)^{10} + (x-1)^5$.

3. Khai triển $P(x)$ dưới dạng: $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

a) Tìm hệ số $a_9$: $P(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + ... + (1+x)^{14}$.

b) Tìm hệ số $a_{15}$: $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + ... + 20(1+x)^{20}$.

**Lời giải**

1. $A = (2x-1)^{11} + \left(x^2+1\right)^7 = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (2x)^{11-k}(-1)^k + \sum_{k=0}^{7} C_7^k \left(x^2\right)^{7-k}.1^k =$

$= \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k.(-1)^k.2^{11-k}.x^{11-k} + \sum_{k=0}^{7} C_7^k.x^{14-2k}$

Ta có hệ số của $x^6$ trong $(2x-1)^{11}$ thì tương ứng với $11-k=6 \Rightarrow k=5$ là $(-1)^5.2^6.C_{11}^5$.

Ta có hệ số của $x^6$ trong $\left(x^2+1\right)^7$ thì tương ứng với $14-2k=6\Rightarrow k=4$ là $C_7^4$.

Vậy hệ số của $x^6$ là: $(-1)^5.2^6.C_{11}^5+C_7^4$.

2. $A=(x+1)^{10}+(x-1)^5=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k x^{10-k}.1^k+\sum_{k=0}^{5}C_5^k x^{5-k}.(-1)^k=$

$=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.x^{10-k}+\sum_{k=0}^{5}C_5^k.(-1)^k.x^{5-k}$

Ta có hệ số của $x^3$ trong $(x+1)^{10}$ thì tương ứng với $10-k=3\Rightarrow k=7$ là $C_{10}^7$.

Ta có hệ số của $x^3$ trong $(x-1)^5$ thì tương ứng với $5-k=3\Rightarrow k=2$ là $(-1)^2.C_5^2=C_5^2$.

Vậy hệ số của $x^3$ là: $C_{10}^7+C_5^2=130$.

3.

a) $P(x)=(1+x)^9+(1+x)^{10}+(1+x)^{11}+...+(1+x)^{14}=$

$=\sum_{k=0}^{9}C_9^k.x^k+\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.x^k+...+\sum_{k=0}^{14}C_{14}^k.x^k$

Hệ số của $a_9$ là hệ số của $x^9$ tương ứng với $k=9$: $C_9^9+C_{10}^9+...+C_{14}^9=3003$

b) Tương tự như câu a ta có hệ số của $a_{15}$ là hệ số của $x^{15}$: $15C_{15}^{15}+16C_{16}^{15}+...+20C_{20}^{15}=400995$.

**Câu 14.** Cho khai triển: $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=a_0+a_1x+...+a_{10}x^{10}$. Hãy tìm số hạng $a_k$ lớn nhất.

**Lời giải**

$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k 2^k x^k$

Như vậy số hạng $a_k$ lớn nhất khi $C_{10}^k.2^k$ là lớn nhất $\Rightarrow k\geq 5$

Với $k=5,6,7,8,9,10$ ta có:

$\left.\begin{array}{l}2^5C_{10}^5=8064\\2^6C_{10}^6=13440\\2^7C_{10}^7=15360\\2^8C_{10}^8=11520\\.....\end{array}\right\}\Rightarrow C_{10}^k.2^k$ là lớn nhất tại $k=7$, vậy số hạng $a_k$ lớn nhất tại

$k=7\Rightarrow a_k=\left(\frac{1}{3}\right)^{10}.15360$

**Câu 15.** Tìm hệ số của $x^8$ trong khai triển đa thức của: $\left[1+x^2(1-x)^8\right]$.

**Lời giải**

$f(x)=C_8^0+...+C_8^3\left[x^2(1-x)\right]^3+C_8^4\left[x^2(1-x)\right]^4+...+C_8^8\left[x^2(1-x)\right]^8$

Nhận thấy: $x^8$ chỉ có trong các số hạng:

□ Số hạng thứ 4: $C_8^3\left[x^2(1-x)\right]^3$

□ Số hạng thứ 5: $C_8^4\left[x^2(1-x)\right]^4$

Vậy hệ số tương đương với: $A_8 = C_8^3 C_3^2 + C_8^4 C_4^0 = 238$

**Câu 16.** Khai triển đa thức $P(x) = (1+2x)^{12} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{12} x^{12}$. Tìm $\max(a_0, a_1, a_2, ..., a_{12})$.

**Lời giải**

Gọi $a_k$ là hệ số lớn nhất của khai triển suy ra $a_k > a_{k-1}$

Từ đây ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^k C_{12}^k \ge 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \\ 2^k C_{12}^k \ge 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{k} \ge \frac{1}{12-k+1} \\ \frac{1}{12-k} \ge \frac{2}{k+1} \end{cases}$$

$\Rightarrow \max(a_0, a_1, a_2, ..., a_{12}) = a_8 = C_{12}^8 . 2^8 = 126720$

**Câu 17.** Tìm số hạng đứng giữa trong các khai triển sau:

a) $\left(x^3 + xy\right)^{21}$.

b) $\left(x\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{(xy)^2}}\right)^{20}$.

**Lời giải**

a) Khai triển $\left(x^3 + xy\right)^{21}$ có $21+1 = 22$ số hạng nên có hai số hạng đứng giữa là số thứ 11 và 12.

□ Số hạng thứ 11 là: $C_{21}^{10}\left(x^3\right)^{11}(xy)^{10} = C_{21}^{10} x^{43} y^{10}$

□ Số hạng thứ 12 là: $C_{21}^{11}\left(x^3\right)^{10}(xy)^{11} = C_{21}^{10} x^{41} y^{11}$

b) Khai triển $\left(x\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{(xy)^2}}\right)^{20}$ có $20+1 = 21$ số hạng nên có hai số hạng đứng giữa là số thứ

$\frac{21+1}{2} = 11$: $C_{20}^{10}\left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{10}\left[(xy)^{\frac{-2}{3}}\right]^{10} = C_{20}^{10} x^{\frac{65}{6}} y^{\frac{-20}{3}}$.

**Câu 18.** Tìm hệ số của số hạng không chứa $x$ trong khai triển $f(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x > 0$.

**Lời giải**

Số hạng tổng quát trong khai triển: $T_{k+1} = C_7^k \left(\sqrt[3]{x}\right)^{7-k}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = C_7^k x^{\frac{7}{3} - \frac{7}{12}k}$ với $k \in \mathbb{N}, k \le 7$

Ứng với số hạng không chứa $x$ ta có: $\frac{7}{3} - \frac{7}{12}k = 0 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy số hạng không chứa $x$ trong khai triển $f(x)$ là: $C_7^4 = 35$.

**Câu 19.** Cho khai triển đa thức $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{10}x^{10}$. Hãy tìm số hạng $a_k$ lớn nhất.

**Lời giải**

Ta có: $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=\frac{1}{3^{10}}(1+2x)^{10}=\frac{1}{3^{10}}\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(2x)^k\Rightarrow a_k=\frac{1}{3^{10}}C_{10}^k2^k$

$\Rightarrow\begin{cases}a_k\ge a_{k+1}\\a_k\ge a_{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_{10}^k2^k\ge C_{10}^{k+1}2^{k+1}\\C_{10}^k2^k\ge C_{10}^{k-1}2^{k-1}\end{cases}$

Ta có $a_k$ đạt được max $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2^k.10!}{k!.(10-k)!}\ge\frac{2^{k+1}.10!}{(k+1)!.(9-k)!}\\\frac{2^k.10!}{k!.(10-k)!}\ge\frac{2^{k-1}.10!}{(k-1)!.(11-k)!}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{10-k}\ge\frac{2}{k+1}\\\frac{2}{k}\ge\frac{2}{11-k}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{19}{3}\le k\le\frac{22}{3}$

$\Rightarrow k=7\ \left(k\in\mathbb{N},k\in[0;10]\right)$

Vậy $\max a_k=a_7=\frac{2^7}{3^{10}}C_{10}^7$.

**Câu 20.** Cho $n$ số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1}=C_n^3$. Tìm số hạng chứa $x^5$ trong khai triển nhị thức niu tơn $\left(\frac{nx^2}{14}-\frac{1}{x}\right)^{14}$, $x\ne0$.

**Lời giải**

$5C_n^{n-1}=C_n^3\Leftrightarrow5n=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\Leftrightarrow(n-1)(n-2)=30\Rightarrow n=7$ (do $n>0$)

Gọi $a$ là hệ số của $x^5$ ta có: $C_7^{7-k}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{7-k}.\left(-\frac{1}{x}\right)^k=ax^5\Leftrightarrow(-1)^k.C_7^{7-k}.\left(\frac{1}{2}\right)^{7-k}.x^{14-3k}=ax^5$

$\Rightarrow14-3k=5\Leftrightarrow k=3$ và $-C_7^{7-k}.\left(\frac{1}{2}\right)^{7-k}=a\Rightarrow a=\frac{-35}{16}$.

Vậy số hạng chứa $x^5$ là $\frac{-35}{16}.x^5$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Số số hạng trong khai triển $(x+2)^{50}$ là

**A.** 49. **B.** 50. **C.** 52. **D.** 51.

**Lời giải**

Số số hạng trong khai triển là: $n+1=50+1=51$.

**Câu 2.** Có bao nhiêu số hạng trong khai triển nhị thức $(2x-3)^{2018}$

**A.** 2019. **B.** 2017. **C.** 2018. **D.** 2020.

**Lời giải**

Trong khai triển nhị thức $(a+b)^n$ thì số các số hạng là $n+1$ nên trong khai triển $(2x-3)^{2018}$ có 2019 số hạng.

**Câu 3.** Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu-tơn $(x-y)^5$.

**A.** $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$. **B.** $x^5-5x^4y-10x^3y^2-10x^2y^3-5xy^4+y^5$.

**C.** $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$. **D.** $x^5+5x^4y-10x^3y^2+10x^2y^3-5xy^4+y^5$.

**Lời giải**

Ta có:

$(x-y)^5=\left[x+(-y)\right]^5=C_5^0x^5+C_5^1x^4(-y)^1+C_5^2x^3(-y)^2+C_5^3x^2(-y)^3+C_5^4x^1(-y)^4+C_5^5(-y)^5$

Hay $(x-y)^5=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$.

**Câu 4.** Trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(3-2x)^{2019}$ có bao nhiêu số hạng?

**A.** 2019. **B.** 2018. **C.** 2020. **D.** 2021.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: Khai triển nhị thức Niu-tơn $(a+b)^n$ có $n+1$ số hạng.

Vậy trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(3-2x)^{2019}$ có 2020 số hạng.

**Câu 5.** Từ khai triển biểu thức $(x+1)^{10}$ thành đa thức. Tổng các hệ số của đa thức là

**A.** 1023. **B.** 512. **C.** 1024. **D.** 2048.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét khai triển $f(x)=(x+1)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.x^k$.

Gọi $S$ là tổng các hệ số trong khai triển thì ta có $S=f(1)=(1+1)^{10}=2^{10}=1024$.

**Câu 6.** Từ khai triển biểu thức $(x+1)^{10}$ thành đa thức. Tổng các hệ số của đa thức là

**A.** 1023. **B.** 512. **C.** 1024. **D.** 2048.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét khai triển $f(x)=(x+1)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.x^k$.

Gọi $S$ là tổng các hệ số trong khai triển thì ta có $S=f(1)=(1+1)^{10}=2^{10}=1024$.

**Câu 7.** Tính tổng các hệ số trong khai triển $(1-2x)^{2018}$.

**A.** $-1$. **B.** 1. **C.** $-2018$. **D.** 2018.

**Lời giải**

Xét khai triển $(1-2x)^{2018}=C_{2018}^0-2x.C_{2018}^1+(-2x)^2.C_{2018}^2+(-2x)^3.C_{2018}^3+...+(-2x)^{2018}.C_{2018}^{2018}$

Tổng các hệ số trong khai triển là: $S=C_{2018}^0-2.C_{2018}^1+(-2)^2.C_{2018}^2+(-2)^3.C_{2018}^3+...+(-2)^{2018}.C_{2018}^{2018}$

Cho $x=1$ ta có:

$(1-2.1)^{2018}=C_{2018}^0-2.1.C_{2018}^1+(-2.1)^2.C_{2018}^2+(-2.1)^3.C_{2018}^3+...+(-2.1)^{2018}.C_{2018}^{2018}$

$\Leftrightarrow(-1)^{2018}=S\Leftrightarrow S=1$

**Câu 8.** Khai triển $(\sqrt{5}-\sqrt[4]{7})^{124}$. Có bao nhiêu số hạng hữu tỉ trong khai triển trên?

**A.** 30. **B.** 31. **C.** 32. **D.** 33.

**Lời giải**

Ta có $(\sqrt{5}-\sqrt[4]{7})^{124}=\sum_{k=0}^{124}C_{124}^{k}.(-1)^{k}.5^{\frac{124-k}{2}}.7^{\frac{k}{4}}$

Số hạng hữu tỉ trong khai triển tương ứng với $\begin{cases}\dfrac{124-k}{2}\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{k}{4}\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow k\in\{0;4;8;12;...;124\}$.

Vậy số các giá trị $k$ là: $\dfrac{124-0}{4}+1=32$.

**Câu 9.** Trong khai triển nhị thức newton của $P(x)=(\sqrt[3]{2}x+3)^{2018}$ thành đa thức,có tất cả có bao nhiêu số hạng có hệ số nguyên dương?

**A.** 673. **B.** 675. **C.** 674. **D.** 672.

**Lời giải**

**Chọn A**

$P(x)=(\sqrt[3]{2}x+3)^{2018}=\sum_{k=0}^{2018}\left(\sqrt[3]{2}x\right)^{2018-k}3^{k}=\sum_{k=0}^{2018}2^{\frac{2018-k}{3}}.3^{k}x^{2018-k}$

Để hệ số nguyên dương thì $(2018-k)\vdots 3\Leftrightarrow 2018-k=3t\Leftrightarrow k=2018-3t$ ,do $0\le k\le 2018$ nên ta có $0\le 2018-3t\le 2018\Leftrightarrow 0\le t\le\dfrac{2018}{3}\approx 672,6$ vậy t=0,1,2….672 nên có 673 giá trị

**Câu 10.** Trong khai triển $(1-2x)^{20}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{20}x^{20}$. Giá trị của $a_0-a_1+a_2$ bằng

**A.** 801. **B.** 800. **C.** 1. **D.** 721.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $(1-2x)^{20}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^{k}(-2)^{k}x^{k},\ (k\in Z)\Rightarrow a_0=C_{20}^{0},\ a_1=-2.C_{20}^{1},\ a_2=(-2)^{2}C_{20}^{2}=4C_{20}^{2}.$

Vậy $a_0-a_1+a_2=C_{20}^{0}+2C_{20}^{1}+4C_{20}^{2}=801.$

**Câu 11.** Có bao nhiêu số hạng là số nguyên trong khai triển của biểu thức $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}\right)^{2019}$ ?

**A.** 136. **B.** 403. **C.** 135. **D.** 134.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}\right)^{2019}=\sum_{k=0}^{2019}C_{2019}^{k}.\left(\sqrt[3]{3}\right)^{2019-k}.\left(\sqrt[5]{5}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{2019}C_{2019}^{k}.3^{\frac{2019-k}{3}}.5^{\frac{k}{5}}$.

Để trong khai triển có số hạng là số nguyên thì $\begin{cases}k\in\mathbb{N}\\ 0\le k\le 2019\\ \dfrac{2019-k}{3}\in\mathbb{N}\\ \dfrac{k}{5}\in\mathbb{N}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\in\mathbb{N}\\ 0\le k\le 2019\\ 673-\dfrac{k}{3}\in\mathbb{N}\\ \dfrac{k}{5}\in\mathbb{N}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le 2019 \\ k \vdots 15 \end{cases}.$

Ta có $k \vdots 15 \Rightarrow k = 15m$ mà $0 \le k \le 2019 \Leftrightarrow 0 \le 15m \le 2019 \Leftrightarrow 0 \le m \le 134,6$. Suy ra có $135$ số hạng là số nguyên trong khai triển của biểu thức.

**Câu 12.** Trong khai triển của $\left( x^{\frac{1}{15}} y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{5}} \right)^{2019}$, số hạng mà lũy thừa của $x$ và $y$ bằng nhau là số hạng thứ bao nhiêu của khai triển?

**A.** $1348$. **B.** $1346$. **C.** $1345$. **D.** $1347$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có số hạng thứ $k+1$ là : $C_{2019}^{k} \left( x^{\frac{1}{15}} y^{\frac{1}{3}} \right)^{2019-k} \left( x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{5}} \right)^{k} = C_{2019}^{k} x^{\frac{2019}{15} + \frac{4}{15}k} y^{\frac{2019}{3} - \frac{2}{15}k}$

Theo đề bài ta có; $\frac{2019}{15} + \frac{4}{15}k = \frac{2019}{3} - \frac{2}{15}k \Leftrightarrow k = 1346$

Vậy số hạng thỏa yêu cầu bài toán là số hạng thứ $1347$.

**Câu 13.** Trong khai triển $\left( x + \frac{8}{x^2} \right)^9$, số hạng không chứa $x$ là

**A.** $40096$. **B.** $43008$. **C.** $512$. **D.** $84$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_9^k .8^k .x^{9-3k}, 0 \le k \le 9$.

Số hạng không chứa $x$ ứng với $9 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng không chứa $x$ trong khai triển là $T_4 = C_9^3 .8^3 = 43008$.

**Câu 14.** Số hạng độc lập với $x$ trong khai triển $\left( x^3 - \frac{2}{x} \right)^8$ là

**A.** $1792$. **B.** $792$. **C.** $972$. **D.** $1972$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = C_8^k \left( x^3 \right)^{8-k} . \left( -\frac{2}{x} \right)^k = C_8^k x^{24-4k} . (-2)^k$.

Do tìm số hạng độc lập với $x$ suy ra $24 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 6 \Rightarrow T_7 = C_8^6 . (-2)^6 = 1792$.

**Câu 15.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left( x^3 - \frac{1}{x} \right)^{12}$.

**A.** $-220$. **B.** $220$. **C.** $924$. **D.** $-924$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Công thức số hạng thứ $(k+1)$ của khai triển $\left( x^3 - \frac{1}{x} \right)^{12}$ là:

$T_k = C_{12}^k (-1)^k \left(x^3\right)^{12-k} \cdot \dfrac{1}{x^k} = C_{12}^k (-1)^k x^{36-4k}, 0 \le k \le 12, k \in \mathbb{N}$.

Số hạng không chứa $x$ ứng với $36-4k=0 \Leftrightarrow k=9$.

Suy ra $T_7 = C_{12}^9 (-1)^9 = -220$.

**Câu 16.** Cho $x$ là số thực dương, số hạng không chứa $x$ trong khai triển nhị thức $\left(x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30}$ là

**A.** $2^{20}$. **B.** $2^{20} C_{30}^{10}$. **C.** $2^{10} C_{30}^{20}$. **D.** $C_{30}^{20}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\left(x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30} = \left(x+2x^{-\frac{1}{2}}\right)^{30} = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k x^{30-k} \left(2x^{\frac{-1}{2}}\right)^k = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k 2^k x^{30-\frac{3}{2}k}$

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = C_{30}^k 2^k x^{30-\frac{3}{2}k}$.

Số hạng này không chứa $x$ tương ứng với trường hợp $30-\dfrac{3k}{2}=0 \Leftrightarrow k=20$.

Vậy số hạng không chứa $x$ trong khai triển là $T_{21} = C_{30}^{20} 2^{20} = 2^{20} C_{30}^{10}$.

**Câu 17.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{45}$ là

**A.** $C_{45}^5$. **B.** $-C_{45}^5$. **C.** $C_{45}^{15}$. **D.** $-C_{45}^{15}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số hạng tổng quát trong khai triển là $T_{k+1} = C_{45}^k . x^{45-k} . \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^k = C_{45}^k . (-1)^k x^{45-3k}$

Số hạng không chứa $x$ trong khai triển ứng với $45-3k=0 \Leftrightarrow k=15$.

Vậy số hạng cần tìm là $C_{45}^{15} . (-1)^{15} = -C_{45}^{15}$.

**Câu 18.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{10}$ là

**A.** $C_{10}^5$. **B.** $-C_{10}^5 . 2^5$. **C.** $-C_{10}^5$. **D.** $C_{10}^5 . 2^5$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{10}$ là:

$T_{k+1} = C_{10}^k x^{10-k} . \left(\dfrac{2}{x}\right)^k = C_{10}^k . 2^k x^{10-2k}$

Số hạng không chứa $x$ trong khai triển tương ứng với $10-2k=0 \Leftrightarrow k=5$ (thỏa mãn).

Vậy số hạng không chứa $x$ trong khai triển là: $C_{10}^5 . 2^5$.

**Câu 19.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là:

**A.** 5. **B.** 35. **C.** 45. **D.** 7.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{7-k}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k}$.

Số hạng không chứa $x$ trong khai triển ứng với $\begin{cases}\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k=0\\0\le k\le 7,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow k=4.$

Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là: $C_7^4=35.$

**Câu 20.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^6, x\neq 0$.

**A.** 240. **B.** 15. **C.** −240. **D.** −15.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}C_6^k.(2x)^{6-k}.(-1)^k\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{6}C_6^k.2^{6-k}.(-1)^k.x^{6-3k}$

Số hạng không chứa $x$ xảy ra khi: $6-3k=0\Leftrightarrow k=2$

Số hạng đó là $C_6^2.2^4.(-1)^2=240$

Vậy số hạng không chứa $x$ trong khai triển trên là 240

**Câu 21.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển biểu thức $A=\left(\frac{1}{x}-x^2\right)^{12}$ là

**A.** −924. **B.** 495. **C.** −495. **D.** 924.

**Lời giải**

**Chọn B**

Số hạng tổng quát trong khai triển là $T_{k+1}=C_{12}^k\left(\frac{1}{x}\right)^{12-k}\left(-x^2\right)^k=C_{12}^k(-1)^k x^{3k-12}$.

Theo đề bài ta có $3k-12=0\Leftrightarrow k=4$.

Vậy số hạng không chứa $x$ trong khai triển là $C_{12}^4(-1)^4=495$.

**Câu 22.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{45}$ là

**A.** $C_{45}^{15}$. **B.** $C_{45}^{30}$. **C.** $-C_{45}^{5}$. **D.** $-C_{45}^{15}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Có $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{45}=\sum_{k=0}^{45}C_{45}^k.x^{45-k}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k=(-1)^k\sum_{k=0}^{45}C_{45}^k.x^{45-3k}$.

Tìm số hạng không chứa $x$ thì $45-3k=0\Leftrightarrow k=15$.

Vậy số hạng không không chứa $x$ là $-C_{45}^{15}$.

**Câu 23.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^5$.

**A.** $10$. **B.** $20$. **C.** $5$. **D.** $1$.

**Chọn A**

**Lời giải.**

Số hạng tổng quát trong khai trển $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^5$ là: $T_k=C_5^k\left(x^2\right)^{5-k}.\left(\frac{1}{x^3}\right)^k=C_5^k x^{10-5k}$.

Số hạng cần tìm không chứa $x$ nên ta có: $10-5k=0\Leftrightarrow k=2$.

Vậy số hạng không chứa $x$ trong khai triển là $T_2=C_5^2=10$.

**Câu 24.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là

**A.** 5. **B.** 35. **C.** 45. **D.** 7.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{7-k}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k}$.

Số hạng không chứa $x$ trong khai triển ứng với $\begin{cases}\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k=0\\ 0\le k\le 7,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow k=4$.

Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là: $C_7^4=35$.

**Câu 25.** Cho $x$ là số thực dương, số hạng không chứa $x$ trong khai triển nhị thức $\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30}$ là

**A.** $2^{20}$. **B.** $2^{20}.C_{30}^{10}$. **C.** $2^{10}.C_{30}^{20}$. **D.** $C_{30}^{20}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30}=\sum_{k=0}^{30}C_{30}^k\left(x\right)^{30-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k=\sum_{k=0}^{30}C_{30}^k\left(2\right)^k\left(x\right)^{\frac{60-3k}{2}}$.

Số hạng không chứa $x$ tương ứng $\frac{60-3k}{2}=0\Leftrightarrow k=20$.

Vậy số hạng không chứa $x$ là: $2^{20}.C_{30}^{20}=2^{20}.C_{30}^{10}$.

**Câu15.** Cho khai triển $(2x-1)^{20}=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_{20}x^{20}$. Tìm $a_1$

**A.** 20. **B.** 40. **C.** -40. **D.** -760.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $a_1$ là hệ số của $x$

Hạng tử chứa x trong khai triển là: $-C_{20}^{19}2x\Rightarrow a_1=-40$

**Câu 26.** Cho khai triển $\left(1-2x\right)^{20}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{20}x_{20}$. Giá trị của $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}$ bằng:

**A.** $1$. **B.** $3^{20}$. **C.** $0$. **D.** $-1$.

**Lời giải**

$\left(1-2x\right)^{20}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{20}x_{20}\ (1)$.

Thay $x=1$ vào $(1)$ ta có: $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}=\left(-1\right)^{20}=1$.

**Câu 27.** Hệ số của số hạng chứa $x^7$ trong khai triển nhị thức $\left(x-\frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{12}$ là:

**A.** $376$. **B.** $-264$. **C.** $264$. **D.** $260$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x-\frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{12}$ (với $x>0$) là

$T_{k+1}=C_{12}^{k}.x^{12-k}.\left(-\frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{k}=(-2)^{k}.C_{12}^{k}.x^{12-k}.x^{-\frac{3k}{2}}=(-2)^{k}.C_{12}^{k}.x^{12-\frac{5k}{2}}$.

Số hạng trên chứa $x^7$ suy ra $12-\frac{5k}{2}=7\Leftrightarrow k=2$.

Vậy hệ số của số hạng chứa $x^7$ trong khai triển trên là $=(-2)^2.C_{12}^{2}=264$.

**Câu 28.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^7$ trong khai triển nhị thức $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{13}$,.

**A.** 1716. **B.** 68. **C.** $-176$. **D.** 286.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{13}$.

$T_{k+1}=C_{13}^{k}x^{13-k}\left(\frac{1}{x}\right)^{k}=C_{13}^{k}x^{13-2k}$.

$T_{k+1}$ chứa $x^7\Leftrightarrow 13-2k=7\Leftrightarrow k=3$.

Vậy hệ số của số hạng chứa $x^7$ trong khai triển nhị thức $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{13}$ bằng: $C_{13}^{3}=286$.

**Câu 29.** Hệ số của $x^{31}$ trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$, $x\neq 0$ là.

**A.** $C_{40}^{4}$. **B.** $C_{40}^{2}$. **C.** $C_{40}^{3}$. **D.** $C_{40}^{5}$.

**Lời giải.**

**Chọn C**

$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}=\sum_{k=0}^{40}C_{40}^{k}x^{40-k}.x^{-2k}=\sum_{k=0}^{40}C_{40}^{k}x^{40-3k}$

Theo giả thiết: $40-3k=31\Rightarrow k=3$.

Vậy hệ số của $x^{31}$ là $C_{40}^{3}=9880$.

**Câu 30.** Hệ số lớn nhất trong khai triển $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^{4}$

**A.** $\frac{27}{128}$. **B.** $\frac{9}{32}$. **C.** $\frac{27}{32}$. **D.** $\frac{27}{64}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4=\sum_{k=0}^{4}C_4^k.\left(\frac{1}{4}\right)^{4-k}.\left(\frac{3}{4}\right)^k$

$=\frac{1}{256}+\frac{3}{64}x+\frac{27}{128}x^2+\frac{27}{64}x^3+\frac{81}{256}x^4$

Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển là $\frac{27}{64}$.

**Câu 31.** Cho biết hệ số của $x^2$ *trong khai triển* $(1+2x)^n$ *bằng* $180$. *Tìm* $n$.

**A.** $n=8$. **B.** $n=12$. **C.** $n=14$. **D.** $n=10$.

**Lời giải**

**Chọn D**

*Ta có:* $T_{k+1}=C_n^k.2^k x^k$.

*Hệ số của* $x^2$ *trong khai triển bằng* $180$

$C_n^2.2^2=180\Leftrightarrow\frac{n!}{(n-2).2}.2^2=180\Leftrightarrow n(n-1)=90\Leftrightarrow n^2-n-90=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=10\\n=-9(l)\end{array}\right.$

**Câu 32.** Tìm hệ số $h$ của số hạng chứa $x^5$ trong khai triển $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^7$.

**A.** $h=84$. **B.** $h=672$. **C.** $h=560$. **D.** $h=280$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k\left(x^2\right)^k\left(\frac{2}{x}\right)^{7-k}=\sum_{k=0}^{7}C_7^k.2^{7-k}.x^{3k-7}$.

Cần tìm $k$ sao cho $3k-7=5$, suy ra $k=4$.

Vậy hệ số $h$ của số hạng chứa $x^5$ trong khai triển $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^7$ là $h=C_7^4.2^3=280$.

**Câu 33.** Hệ số của số hạng chứa $x^6$ trong khai triển Newton $\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$ là

**A.** $-3640$. **B.** $3640$. **C.** $455$. **D.** $-1863680$

**Lời giải**

**Chọn A**

$\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k x^{15-k}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k x^{15-k}(-2)^k\left(x^{-2}\right)^k=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k(-2)^k x^{15-3k}$

Số hạng tổng quát của khai triển $T_{k+1}=C_{15}^k(-2)^k x^{15-3k}$

Số của số hạng chứa $x^6$: $15-3k=6\Leftrightarrow k=3$. Hệ số của số hạng chứa

$x^6$ $C_{15}^k(-2)^k=C_{15}^3(-2)^3=-3640$

**Câu 34.** Tìm hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $\left(x^3+xy\right)^{15}$.

**A.** 58690. **B.** 4004. **C.** 3003. **D.** 5005.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số hạng tổng quát của khai triển đã cho là $C_{15}^k.\left(x^3\right)^{15-k}.(xy)^k = C_{15}^k.x^{45-2k}.y^k$,

với $0 \le k \le 15$, $k \in \mathbb{N}$. Số hạng này chứa $x^{25}y^{10}$ khi và chỉ khi $k = 10$.

Vậy hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $\left(x^3 + xy\right)^{15}$ là $C_{15}^{10} = 3003$.

**Câu 35.** Cho khai triển $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ với $x > 0$. Tìm hệ số của số hạng chứa $x^3$ trong khai triển trên

**A.** $80$. **B.** $160$. **C.** $240$. **D.** $60$.

**Lời giải**:

**Chọn D**

Ta có: $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k x^{6-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{6} 2^k C_6^k x^{6-\frac{3k}{2}}$.

Số hạng chứa $x^3$ ứng với $6 - \frac{3k}{2} = 3 \Rightarrow k = 2$. Vậy hệ số của số hạng chứa $x^3$ bằng $2^2.C_6^2 = 60$.

**Câu 36.** Cho khai triển $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ với $x > 0$. Tìm hệ số của số hạng chứa $x^3$ trong khai triển trên

**A.** $80$. **B.** $160$. **C.** $240$. **D.** $60$.

**Lời giải**:

**Chọn D**

Ta có: $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k x^{6-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{6} 2^k C_6^k x^{6-\frac{3k}{2}}$.

Số hạng chứa $x^3$ ứng với $6 - \frac{3k}{2} = 3 \Rightarrow k = 2$. Vậy hệ số của số hạng chứa $x^3$ bằng $2^2.C_6^2 = 60$.

**Câu 37.** Biết hệ số của $x^2$ trong khai triển của $(1-3x)^n$ là $90$. Tìm $n$.

**A.** $n = 7$. **B.** $n = 6$. **C.** $n = 8$. **D.** $n = 5$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển của $(1-3x)^n$ là: $T_{k+1} = C_n^k(-3)^k x^k$.

Số hạng chứa $x^2$ ứng với $k = 2$.

Ta có: $C_n^2(-3)^2 = 90 \Leftrightarrow C_n^2 = 10$

$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 10 \Leftrightarrow n(n-1) = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = -4\,(L) \end{array}\right.$. Vậy $n = 5$.

**Câu 38.** Số hạng thứ 13 trong khai triển $(2-x)^{15}$ bằng?

**A.** $3640x^{13}$. **B.** $3640x^{12}$. **C.** $-420x^{12}$. **D.** $3640$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $(2-x)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k.2^{15-k}.(-x)^k$

Số hạng thứ 13 trong khai triển tương ứng với $k = 12$. $\Rightarrow C_{15}^{12}.2^{15-12}.(-x)^{12} = 3640x^{12}$.

**Câu 39.** Tìm số hạng chứa $x^3$ trong khai triển $\left(x-\frac{1}{2x}\right)^9$.

**A.** $-\frac{1}{8}C_9^3x^3$. **B.** $\frac{1}{8}C_9^3\cdot x^3$. **C.** $-C_9^3\cdot x^3$. **D.** $C_9^3x^3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là: $T_{k+1}=C_9^kx^{9-k}\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right)^k=C_9^k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^kx^{9-2}$.

Số hạng chứa $x^3$ có giá trị $k$ thỏa mãn: $9-2k=3\Leftrightarrow k=3$.

Vậy số hạng chứa $x^3$ trong khai triển là: $-\frac{1}{8}C_9^3x^3$.

**Câu 40.** Tìm số hạng chứa $x^7$ trong khai triển $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}$.

**A.** $-C_{13}^3$. **B.** $-C_{13}^3x^7$. **C.** $-C_{13}^4x^7$. **D.** $-C_{13}^4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có công thức của số hạng tổng quát:

$T_{k+1}=C_{13}^kx^{13-k}.\left(-\frac{1}{x}\right)^k=C_{13}^kx^{13-k}\left(-1\right)^kx^{-k}=C_{13}^k.\left(-1\right)^kx^{13-2k}$

Số hạng chứa $x^7$ khi và chỉ khi $13-2k=7\Leftrightarrow k=3$.

Vậy số hạng chứa $x^7$ trong khai triển là $-C_{13}^3x^7$.

**Câu 41.** Tìm số hạng chứa $x^{31}$ trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$?

**A.** $C_{40}^4x^{31}$. **B.** $-C_{40}^{37}x^{31}$. **C.** $C_{40}^{37}x^{31}$. **D.** $C_{40}^3x^{31}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có khai triển: $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}=\sum_{k=0}^{40}C_{40}^kx^{40-k}\left(x^{-2}\right)^k=\sum_{k=0}^{40}C_{40}^kx^{40-3k}$

Số hạng tổng quát trong khai triển: $C_{40}^kx^{40-3k}$

Số hạng chứa $x^{31}$ ứng với: $40-3k=31\Leftrightarrow k=3$

Vậy số hạng chứa $x^{31}$ là: $C_{40}^3x^{31}$

**Câu 42.** Số hạng chứa $x^{34}$ trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{40}$ là

**A.** $-C_{40}^{37}x^{34}$. **B.** $C_{40}^3x^{34}$. **C.** $C_{40}^2x^{34}$. **D.** $C_{40}^4x^{34}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{40}$ là:

$a_{k+1}=C_{40}^kx^{40-k}.\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_{40}^kx^{40-k}x^{-k}=C_{40}^kx^{40-2k}$.

Số hạng chứa $x^{34}$ trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{40}$ tương ứng với: $40-2k=34 \Leftrightarrow k=3$.

Vậy số hạng chứa $x^{34}$ trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{40}$ là: $C_{40}^{3}x^{34}$.

**Câu 43.** Biết hệ số của số hạng chứa $x^2$ trong khai triển $(1+4x)^n$ là $3040$. Số tự nhiên $n$ bằng bao nhiêu?

**A.** $28$. **B.** $26$. **C.** $24$. **D.** $20$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $(1+4x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(4x)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k4^kx^k$.

Hệ số của số hạng chứa $x^2$ là: $C_n^24^2$.

Giả thiết suy ra $C_n^24^2=3040 \Leftrightarrow C_n^2=190 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}=190 \Leftrightarrow n^2-n-380=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=20\ (\text{t/m}) \\ n=-19(\text{loai}) \end{array}\right.$.

**Câu 44.** Biết hệ số của $x^2$ trong khai triển của $(1-3x)^n$ là $90$. Tìm $n$.

**A.** $n=5$. **B.** $n=8$. **C.** $n=6$. **D.** $n=7$.

**Lời giải**

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ là $T_{k+1}=C_n^k(-3x)^k=C_n^k(-3)^kx^k$.

Vì hệ số của $x^2$ nên cho $k=2$.

Khi đó ta có $C_n^2(-3)^2=90 \Leftrightarrow C_n^2=10 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n=5 & (n) \\ n=-4 & (l) \end{array}\right.$.

Vậy $n=5$.

**Câu 45.** Cho biết hệ số của $x^2$ trong khai triển $(1+2x)^n$ bằng $180$. Tìm $n$.

**A.** $n=12$. **B.** $n=14$. **C.** $n=8$. **D.** $n=10$.

**Lời giải**

Ta có $(1+2x)^n=C_n^0+C_n^1.2x+C_n^2.(2x)^2+...+C_n^n(2x)^n$.

Hệ số của $x^2$ bằng $180 \Leftrightarrow 4.C_n^2=180 \Leftrightarrow 4\frac{n!}{2!(n-2)!}=180 \Leftrightarrow n(n-1)=90$

$\Leftrightarrow n^2-n-90=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-9(l) \\ n=10 \end{array}\right.$.

Vậy $n=10$.

**Câu 46.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^{10}$ trong khai triển của biểu thức $\left(3x^3-\frac{2}{x^2}\right)^5$.

**A.** $-810$. **B.** $826$. **C.** $810$. **D.** $421$.

**Lời giải**

Ta có $\left(3x^3-\frac{2}{x^2}\right)^5=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k.C_5^k.(3x^3)^{5-k}.\left(\frac{2}{x^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k.C_5^k.3^{5-k}.2^kx^{15-5k}$.

Số hạng chứa $x^{10}$ ứng với $15-5k=10 \Leftrightarrow k=1$.

Hệ số của số hạng chứa $x^{10}$ là $(-1)^1 C_5^1.3^4.2^1=-810$.

**Câu 47.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^{31}$ trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

**A.** $C_{40}^{37}$. **B.** $C_{40}^{31}$. **C.** $C_{40}^{4}$. **D.** $C_{40}^{2}$.

**Lời giải**

Ta có: $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}=\sum_{k=0}^{40} C_{40}^k.x^{40-k}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{40} C_{40}^k.x^{40-3k}$.

Số hạng tổng quát của khai triển là: $T_{k+1}=C_{40}^k.x^{40-3k}$.

Số hạng chứa $x^{31}$ trong khai triển tương ứng với $40-3k=31 \Leftrightarrow k=3$.

Vậy hệ số cần tìm là: $C_{40}^3=C_{40}^{37}$.

**Câu 48.** Trong khai triển $\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$, hệ số của $x^3\left(x>0\right)$ là:

**A.** 80. **B.** 160. **C.** 240. **D.** 60.

**Lời giải**

Ta có: $\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6=\left(x+2x^{-\frac{1}{2}}\right)^6=\sum_{k=0}^{6} C_6^k\left(x\right)^{6-k}\left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)^k=\sum_{k=0}^{6} C_6^k.2^k\left(x\right)^{6-k}\left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)^k=\sum_{k=0}^{6} C_6^k.2^k x^{6-\frac{3}{2}k}$

Theo đề bài, $x^{6-\frac{3}{2}k}=x^3 \Leftrightarrow 6-\frac{3}{2}k=3 \Leftrightarrow k=2$

Hệ số của $x^3\left(x>0\right)$ là: $C_6^2.2^2=60$.

**Câu 49.** Cho $n$ là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^0+2.C_n^1+2^2.C_n^2+...+2^n.C_n^n=59049$. Biết số hạng thứ 3 trong khai triển Newton của $\left(x^2-\frac{3}{x}\right)^n$ có giá trị bằng $\frac{81}{2}n$. Khi đó giá trị của $x$ bằng

**A.** 1 **B.** 2. **C.** $\pm 1$ **D.** $\pm 2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $C_n^0+2.C_n^1+2^2.C_n^2+...+2^n.C_n^n=59049 \Rightarrow \left(2+1\right)^n=59049 \Leftrightarrow 3^n=3^{10} \Leftrightarrow n=10$.

Ta được nhị thức $\left(x^2-\frac{3}{x}\right)^{10}$.

Số hạng thứ ba của khai triển là $T_3=C_{10}^2.\left(x^2\right)^8.\left(-\frac{3}{x}\right)^2=405x^{14}$.

Theo giả thiết ta có: $405x^{14}=\frac{81}{2}n \Leftrightarrow 405x^{14}=405 \Leftrightarrow x^{14}=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

**Câu 50.** Cho nhị thức $\left(2x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$, trong đó số nguyên dương $n$ thỏa mãn $A_n^3=72n$. Tìm số hạng chứa $x^5$ trong khai triển.

**A.** $2^6 C_{10}^4 x^5$. **B.** $2^5 C_{10}^5 x^5$. **C.** $2^7 C_{10}^3 x^5$. **D.** $2^6 C_{10}^7 x^5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $A_n^3 = 72n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-3)!} = 72n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 72n \Leftrightarrow n = 10$.

Xét khai triển:

$\left(2x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(2x^2\right)^{10-k} \left(\dfrac{1}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k .2^{10-k} x^{20-2k} .x^{-3k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k .2^{10-k} x^{20-5k}$.

Số hạng chứa $x^5$ trong khai triển tương đương với: $20-5k = 5 \Leftrightarrow k = 3$.

Suy ra số hạng chứa $x^5$ trong khai triển là: $2^7 C_{10}^3 x^5$.

**Câu 51.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển nhị thức Newton của $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^n \ (x \neq 0)$, biết rằng $1.C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + ... + n.C_n^n = 256n$ ($C_n^k$ là số tổ hợp chập k của n phần tử).

**A.** 489888 **B.** 49888. **C.** 48988. **D.** 4889888.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tìm $n$.

Trước hết ta chứng minh công thức $\dfrac{k}{n} C_n^k = C_{n-1}^{k-1}$ với $1 \le k \le n$ và $n \ge 2$.

Thật vậy, $\dfrac{k}{n} C_n^k = \dfrac{k}{n} . \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = C_{n-1}^{k-1}$.

Áp dụng công thức trên ta có

$1.C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + ... + n.C_n^n = n\left(\dfrac{1}{n}.C_n^1 + \dfrac{2}{n}.C_n^2 + \dfrac{3}{n}.C_n^3 + ... + \dfrac{n}{n}.C_n^n\right)$

$= n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + ... + C_{n-1}^{n-1}\right) = n2^{n-1}$

Theo đề $1.C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + ... + n.C_n^n = 256n \Leftrightarrow n2^{n-1} = 256n \Leftrightarrow 2^{n-1} = 256 \Leftrightarrow n = 9$.

**Chọn A.**

**Câu 52.** Cho khai triển $(1+3x)^n = a_0 + a_1 x^1 + ... + a_n x^n$ trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số thỏa mãn hệ thức $a_0 + \dfrac{a_1}{3} + ... + \dfrac{a_n}{3^n} = 4096$. Tìm hệ số $a_i$ lớn nhất.

**A.** 1732104. **B.** 3897234. **C.** 4330260. **D.** 3247695.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét khai triển $(1+3x)^n = a_0 + a_1 x^1 + ... + a_n x^n$.

Cho $x = \dfrac{1}{3}$ ta được $\left(1 + 3.\dfrac{1}{3}\right)^n = a_0 + \dfrac{a_1}{3^1} + ... + \dfrac{a_n}{3^n} \Rightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$.

Khi đó $(1+3x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k .3^k .x^k$.

Ta có hệ số $a_k = 3^k C_{12}^k = 3^k . \dfrac{12!}{k!.(12-k)!}$

Hệ số $a_k$ lớn nhất nên $\begin{cases} a_k \ge a_{k-1} \\ a_k \ge a_{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^k . \dfrac{12!}{k!.(12-k)!} \ge 3^{k-1} . \dfrac{12!}{(k-1)!.(12-k+1)!} \\ 3^k . \dfrac{12!}{k!.(12-k)!} \ge 3^{k+1} . \dfrac{12!}{(k+1)!.(12-k-1)!} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{k} \ge \dfrac{1}{13-k} \\ \dfrac{1}{12-k} \ge \dfrac{3}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 39-3k \ge k \\ k+1 \ge 36-3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \le \dfrac{39}{4} \\ k \ge \dfrac{35}{4} \end{cases}$$

Vì $k \in \mathbb{N}$ nên nhận $k = 9$.

Vậy hệ số lớn nhất $a_9 = 3^9.C_{12}^9 = 4330260$.

**Câu 53.** Tìm hệ số của $x^6$ trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^{3n+1}$ với $x \ne 0$, biết $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2$.

**A.** $210x^6$. **B.** 210. **C.** $120x^6$. **D.** 120.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đk: $n \ge 2$, $n \in \mathbb{N}$.

$$3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} + 2!n = 4\frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}n(n+1) + 2n = 4n(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}n^2 - \frac{15}{2}n = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \ (L) \\ n = 3 \end{array}\right.$$

Với $n = 3$, nhị thức trở thành $\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^{10}$.

Số hạng tổng quát là $C_{10}^k.\left(\dfrac{1}{x}\right)^{10-k}.\left(x^3\right)^k = C_{10}^k.x^{4k-10}$

Từ yêu cầu bài toán ta cần có: $4k-10 = 6 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy hệ số của số hạng chứa $x^6$ là $C_{10}^4 = 210$.

**Câu 54.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^6$ trong khai triển $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^n \ (x \ne 0)$, biết rằng $\dfrac{2}{C_n^2} + \dfrac{14}{3C_n^3} = \dfrac{1}{n}$ ($C_n^k$ là số tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử).

**A.** 326592. **B.** 3265922 **C.** 3265592 **D.** 32692.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét phương trình $\dfrac{2}{C_n^2} + \dfrac{14}{3C_n^3} = \dfrac{1}{n}$ (1)

Điều kiện: $n \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2.(n-2)!.2!}{n!} + \frac{14(n-3)!.3!}{3.n!} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{4}{n(n-1)} + \frac{28}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{n-1} + \frac{28}{(n-1)(n-2)} = 1 \Leftrightarrow 4(n-2) + 28 = (n-1)(n-2) \Leftrightarrow n^2 - 7n - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 9 \\ n = -2 \ (l) \end{array}\right.$$

Với $n=9$ ta có: $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k.\left(2x^2\right)^{9-k}.\left(-\frac{3}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{9}C_9^k.2^{9-k}.(-3)^k.x^{18-3k}$

Số hạng tổng quát của khai triển là $C_9^k.2^{9-k}.(-3)^k.x^{18-3k}$

Cho $18-3k=6\Rightarrow k=4\Rightarrow$ hệ số của số hạng chứa $x^6$ trong khai triển là $C_9^4.2^5.(-3)^4=326592$.

**Câu 55.** Tìm số hạng chứa $x^{26}$ trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$ biết $n$ là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$.

**A.** 325. **B.** 210. **C.** 200. **D.** 152.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết ta suy ra $C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}$.

Mặt khác: $C_{2n+1}^k=C_{2n+1}^{2n+1-k}$, $\forall k\in\mathbb{N},0\le k\le 2n+1$ nên ta có:

$$C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=\frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^{2n+1}\right)=\frac{1}{2}(1+1)^{2n+1}=2^{2n}.$$

Suy ra: $2^{2n}=2^{20}\Leftrightarrow n=10$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^{10}$ là: $T_{k+1}=C_{10}^k\left(\frac{1}{x^4}\right)^{10-k}\left(x^7\right)^k=C_{10}^kx^{11k-40}$.

Hệ số của $x^{26}$ là $C_{10}^k$ với $k$ thỏa mãn: $11k-40=26\Leftrightarrow k=6$.

Vậy hệ số của $x^{26}$ là $C_{10}^6=210$.

**Câu 56.** Với $n$ là số tự nhiên thỏa mãn $C_{n-4}^{n-6}+nA_n^2=454$, hệ số của số hạng chứa $x^4$ trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\frac{2}{x}-x^3\right)^n$

bằng

**A.** 1972. **B.** 786. **C.** 1692. **D.** $-1792$.

**Lời giải**

Điều kiện $n\ge 6$ và $n\in\mathbb{N}$.

$C_{n-4}^{n-6}+nA_n^2=454\Leftrightarrow\frac{(n-4)!}{(n-6)!2!}+n\cdot\frac{n!}{(n-2)!}=454\Leftrightarrow\frac{(n-5)(n-4)}{2}+n^2(n-1)=454$

$\Leftrightarrow 2n^3-n^2-9n-888=0\Leftrightarrow n=8$ (Vì $n\in\mathbb{N}$).

Khi đó ta có khai triển: $\left(\frac{2}{x}-x^3\right)^8$.

Số hạng tổng quát của khai triển là $C_8^k\left(\frac{2}{x}\right)^{8-k}\left(-x^3\right)^k=C_8^k(-1)^k2^{8-k}x^{4k-8}$.

Hệ số của số hạng chứa $x^4$ ứng với $k$ thỏa mãn: $4k-8=4\Leftrightarrow k=3$.

Vậy hệ số của số hạng chứa $x^4$ là: $C_8^3(-1)^3 2^5 = -1792$.

**Câu 57.** Với $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1 + C_n^3 = 13n$, hệ số của số hạng chứa $x^5$ trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n$ bằng.

**A.** 120. **B.** 252. **C.** 45. **D.** 210.

**Lời giải**

$C_n^1 + C_n^3 = 13n \Leftrightarrow n + \frac{n!}{3!(n-3)!} = 13n \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 13n \Leftrightarrow 6 + n^2 - 3n + 2 = 78.$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -7 \\ n = 10 \end{array}\right.$. Vì $n$ là số nguyên dương nên $n = 10$.

Ta có khai triển: $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$.

Số hạng tổng quát của khai triển: $T_{k+1} = C_{10}^k x^{2(10-k)} \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = C_{10}^k x^{20-5k}$.

Số hạng chứa $x^5$ ứng với $20 - 5k = 5 \Leftrightarrow k = 3$. Vậy hệ số của số hạng chứa $C_{10}^3 = 120$.

**Câu 58.** Cho $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2 = C_n^2 + C_n^1 + 4n + 6$. Hệ số của số hạng chứa $x^9$ của khai triển biểu thức $P(x) = \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^n$ bằng:

**A.** 18564. **B.** 64152. **C.** 192456. **D.** 194265.

**Lời giải**

$A_n^2 = C_n^2 + C_n^1 + 4n + 6 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-2)!.2!} + \frac{n!}{(n-1)!.1!} + 4n + 6$

$\Leftrightarrow n(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + n + 4n + 6 \Leftrightarrow n^2 - 11n - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -1 \ (l) \\ n = 12 \ (n) \end{array}\right.$.

Khi đó $P(x) = \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{12}$.

Công thức số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_{12}^k \cdot \left(x^2\right)^{12-k} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^k = C_{12}^k .3^k .x^{24-3k}$.

Số hạng chứa $x^9 \Rightarrow 24 - 3k = 9 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy hệ số của số hạng chứa $x^9$ trong khai triển là $C_{12}^5 .3^5 = 192456$.

**Câu 59.** Biết $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78$, số hạng chứa $x^8$ trong khai triển $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^n$ là

**A.** $-101376x^8$. **B.** $-101376$. **C.** $-112640$. **D.** $101376x^8$.

**Lời giải**

Ta có: $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!.1!} + \frac{n!}{(n-2)!.2!} = 78 \Leftrightarrow n + \frac{(n-1)n}{2} = 78$

$\Leftrightarrow n^2+n-156=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=12 \\ n=-13 \end{array}\right. \Leftrightarrow n=12$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^{12}$ là: $(-1)^k C_{12}^k \left(x^3\right)^{12-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k=(-1)^k C_{12}^k.2^k.x^{36-4k}$.

Cho $36-4k=8 \Leftrightarrow k=7$.

Vậy số hạng chứa $x^8$ trong khai triển $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^{12}$ là $-C_{12}^7.2^7.x^8=-101376x^8$.

**Câu 60.** Với $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $3C_{n+1}^3-3A_n^2=52(n-1)$. Trong khai triển biểu thức $\left(x^3+2y^2\right)^n$, gọi $T_k$ là số hạng mà tổng số mũ của $x$ và $y$ của số hạng đó bằng 34. Hệ số của $T_k$ là

**A.** 54912. **B.** 1287. **C.** 2574. **D.** 41184.

**Lời giải**

Điều kiện: $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $3C_{n+1}^3-3A_n^2=52(n-1) \Leftrightarrow 3.\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}-3\frac{n!}{(n-2)!}=52(n-1)$

$\Leftrightarrow \frac{(n-1)n(n+1)}{2}-3n(n-1)=52(n-1) \Leftrightarrow n^2+n-6n=104$

$\Leftrightarrow n^2-5n-104=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=13 \\ n=-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow n=13$.

$\left(x^3+2y^2\right)^{13}=\sum_0^{13} C_{13}^k\left(x^3\right)^{13-k}\left(2y^2\right)^k=\sum_0^{13} C_{13}^k 2^k x^{39-3k}y^{2k}$.

Ta có: $39-3k+2k=34 \Leftrightarrow k=5$. Vậy hệ số $C_{13}^5 2^5=41184$.

**Câu 61.** Cho $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^1-C_n^2=5$. Tìm hệ số $a$ của $x^4$ trong khai triển của biểu thức $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^n$.

**A.** $a=11520$. **B.** $a=256$. **C.** $a=45$. **D.** $a=3360$.

**Lời giải**

Điều kiện $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Có $5C_n^1-C_n^2=5 \Rightarrow 5n-\frac{n(n-1)}{2}=5 \Leftrightarrow n^2-11n+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=10 \end{array}\right.$

Do $n\geq 2 \Rightarrow n=10$.

Xét khai triển: $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k(2x)^{10-k}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 2^{10-k}x^{10-3k}$

Hệ số $a$ của $x^4$ trong khai triển tương ứng với $10-3k=4 \Leftrightarrow k=2$.

Vậy hệ số cần tìm là $a=C_{10}^2.2^8=11520$.

**Câu 62.** Với $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $3A_n^{n-2}+C_n^3=40$. Hệ số của $x^6$ trong khai triển $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ là

**A.** 1024. **B.** $-1024$. **C.** $-1042$. **D.** 1042.

**Lời giải**

Điều kiện $n \ge 3, n \in \mathbb{N}$.

Ta có $3A_n^{n-2} + C_n^3 = 40 \Leftrightarrow 3\dfrac{n!}{2!} + \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 40 \Leftrightarrow n!\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{6(n-3)!}\right) = 40$.

Vì $\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{6(n-3)!} > 1$ nên $n! < 40$. Lần lượt thử các giá trị $n = 3, 4$ ta có $n = 4$ thỏa mãn.

Với $n = 4$, số hạng tổng quát trong khai triển $\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)^8$ là $C_8^k (2x)^{8-k}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^k = C_8^k 2^{8-k}(-1)^k x^{8-2k}$.

Số hạng chứa $x^6$ tương ứng với $8 - 2k = 6 \Leftrightarrow k = 1$. Do đó hệ số cần tìm là $C_8^1 2^{8-1}(-1)^1 = -1024$.

**Câu 63.** Với $n$ là số nguyên dương thoả mãn $A_n^2 + 3C_n^1 = 120$, số hạng không chứa $x$ trong khai triển của biểu thức $\left(x^4 - \dfrac{3}{x}\right)^n$ bằng

**A.** 295245. **B.** 245295. **C.** 292545. **D.** 259254.

**Lời giải**

Giải phương trình: $A_n^2 + 3C_n^1 = 120$, Đk: $n \ge 2, n \in \mathbb{N}$.

$A_n^2 + 3C_n^1 = 120 \Leftrightarrow n(n-1) + 3n = 120 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -12\,(l) \end{array}\right.$

Có $\left(x^4 - \dfrac{3}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-3)^k x^{40-5k}$.

Số hạng không chứa $x$ khi $40 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Vậy số hạng không chứa $x$ trong khai triển là $C_{10}^8 \cdot (-3)^8 = 295245$.

**Câu 64.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^8$ trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\dfrac{n}{2x} + \dfrac{x}{2}\right)^{2n}, (x \ne 0)$, biết số nguyên dương $n$ thỏa mãn $C_n^3 + A_n^2 = 50$.

**A.** $\dfrac{97}{12}$. **B.** $\dfrac{29}{51}$. **C.** $\dfrac{297}{512}$. **D.** $\dfrac{279}{215}$.

**Lời giải**

điều kiện $n \in N, n \ge 3$.

$C_n^3 + A_n^2 = 50 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{3!(n-3)!} + \dfrac{n!}{(n-2)!} = 50$

$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) - 300 = 0$

$\Leftrightarrow n^3 + 3n^2 - 4n - 300 = 0 \Leftrightarrow n = 6$.

Ta có nhị thức $\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{2}\right)^{12}$.

Số hạng tổng quát $C_{12}^k \left(\dfrac{3}{x}\right)^{12-k} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^k = \dfrac{C_{12}^k \cdot 3^{12-k}}{2^k} \cdot x^{2k-12}$

Cho $2k - 12 = 8 \Rightarrow k = 10$.

Hệ số cần tìm là $\frac{C_{12}^{10}.3^2}{2^{10}}=\frac{297}{512}$.

**Câu 65.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển nhị thức Newton của $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^n$ $(x\neq 0)$, biết rằng $1.C_n^1+2.C_n^2+3.C_n^3+...+nC_n^n=256n$ ($C_n^k$ là số tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử).

**A.** 489888. **B.** 49888. **C.** 48988. **D.** 4889888.

**Lời giải**

Xét khai triển $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+...+C_n^nx^n$ $(1)$

Đạo hàm hai vế của $(1)$ ta được: $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+...+nC_n^nx^{n-1}$ $(2)$

Trong công thức $(2)$ ta cho $x=1$ ta được:

$n2^{n-1}=C_n^1+2.C_n^2+3.C_n^3+...+nC_n^n \Leftrightarrow n.2^{n-1}=256n \Leftrightarrow 2^{n-1}=256 \Leftrightarrow n=9$.

Khi đó, $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^n=\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^9=\sum_{n=0}^{9}C_9^k(-3)^k2^{9-k}.x^{18-3k}$.

Do đó số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^9$ nếu $18-3k=0$ hay $k=6$.

Suy ra số hạng cần tìm là $C_9^6(-3)^6.2^3=489888$.

**Câu 66.** Giả sử có khai triển $(1-2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Tìm $a_5$ biết $a_0+a_1+a_2=71$.

**A.** $-672$. **B.** 672. **C.** 627. **D.** $-627$.

**Lời giải**

Ta có $(1-2x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-2x)^k$. Vậy $a_0=1$; $a_1=-2C_n^1$; $a_2=4C_n^2$.

Theo bài ra $a_0+a_1+a_2=71$ nên ta có:

$1-2C_n^1+4C_n^2=71 \Leftrightarrow 1-2\frac{n!}{1!(n-1)!}+4\frac{n!}{2!(n-2)!}=71 \Leftrightarrow 1-2n+2n(n-1)=71$

$\Leftrightarrow 2n^2-4n-70=0 \Leftrightarrow n^2-2n-35=0 \Leftrightarrow n=7$ hoặc $n=-5$ (loại).

Từ đó ta có $a_5=C_7^5(-2)^5=-672$.

**Câu 67.** Với $n$ là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $A_n^2-C_n^3=10$, tìm hệ số $a_5$ của số hạng chứa $x^5$ trong khai triển $\left(x^2-\frac{2}{x^3}\right)^n$ với $x\neq 0$.

**A.** $a_5=10$. **B.** $a_5=-10x^5$. **C.** $a_5=10x^5$. **D.** $a_5=-10$.

**Lời giải**

Ta có

$A_n^2-C_n^3=10 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!}-\frac{n!}{3!(n-3)!}=10$, $(n\in\mathbb{N},n\geq 3)$

$\Leftrightarrow n(n-1)-\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)=10 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{4}{3}n-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-2 \\ n=6 \\ n=5 \end{array}\right.$.

So điều kiện nhận $n=6$ hay $n=5$.

Khi $n=6$, ta có $\left(x^2-\frac{2}{x^3}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}C_6^k x^{2(6-k)}\left(\frac{-2}{x^3}\right)^k=\sum_{k=0}^{6}C_6^k(-2)^k x^{12-5k}$.

Để có $x^5$ thì $12-5k=5\Leftrightarrow k=\frac{7}{5}$.

Khi $n=5$, ta có $\left(x^2-\frac{2}{x^3}\right)^5=\sum_{k=0}^{5}C_5^k x^{2(5-k)}\left(\frac{-2}{x^3}\right)^k=\sum_{k=0}^{5}C_5^k(-2)^k x^{10-5k}$.

Để có $x^5$ thì $10-5k=5\Leftrightarrow k=1$.

Vậy $a_5=C_5^1(-2)=-10$.

**Câu 68.** Tìm hệ số của $x^5$ trong khai triển $(1+3x)^{2n}$ biết $A_n^3+2A_n^2=100$

**A.** 61236. **B.** 63216. **C.** 61326. **D.** 66321.

**Lời giải**

Ta có: $A_n^3+2A_n^2=100\Leftrightarrow\frac{n!}{(n-3)!}+2\frac{n!}{(n-2)!}=100\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)+2n(n-1)=100$

$\Leftrightarrow n^3-n^2-100=0\Leftrightarrow n=5$.

Ta có: $(1+3x)^{2n}=(1+3x)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(3x)^k$.

Hệ số $x^5$ sẽ là $C_{10}^5 3^5=61236$.

**Câu 69.** Cho $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-.....+(-1)^nC_n^n=2048$. Hệ số của $x^{10}$ trong khai triển $(x+2)^n$ là:

**A.** 11264. **B.** 22. **C.** 220. **D.** 24.

**Lời giải**

Ta có $(3-1)^n=3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-.....+(-1)^nC_n^n$

$\Leftrightarrow 2^n=2048\Leftrightarrow 2^n=2^{11}\Leftrightarrow n=11$.

Xét khai triển $(x+2)^{11}=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^k x^{11-k}.2^k$

Tìm hệ số của $x^{10}\Leftrightarrow$ tìm $k\in\mathbb{N}\ (k\le 11)$ thỏa mãn $11-k=10\Leftrightarrow k=1$.

Vậy hệ số của $x^{10}$ trong khai triển $(x+2)^{11}$ là $C_{11}^1.2=22$.

**Câu 70.** Trong khai triển $\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ biết hệ số của $x^3$ là $3^4C_n^5$. Giá trị $n$ có thể nhận là

**A.** 9. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 16.

**Lời giải**

Ta có $\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(3x^2)^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k 3^{n-k}x^{2n-3k}$.

Biết hệ số của $x^3$ là $3^4C_n^5$ nên $\begin{cases}2n-3k=3\\ n-k=4\\ k=5\\ 0\le k\le n,(k,n\in N)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=5\\ n=9\end{cases}$.

Vậy $n=9$.

**Câu 71.** Hệ số của số hạng chứa $x^8$ trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n;(x>0)$ biết $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$ là

**A.** $1303$. **B.** $313$. **C.** $495$. **D.** $13129$.

**Lời giải**

Điều kiện: $n\in\mathbb{N}$

Ta có

$$C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)\Leftrightarrow\frac{(n+4)!}{(n+1)!3!}-\frac{(n+3)!}{n!3!}=7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow\frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6}-\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}=7(n+3)$$

$\Leftrightarrow 3n=36\Leftrightarrow n=12$.

Xét khai triển

$$\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}\left(\frac{1}{x^3}\right)^k\left(\sqrt{x^5}\right)^{12-k}\quad(0\le k\le 12,k\in\mathbb{N})$$

$$=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}x^{\frac{60-11k}{2}}.$$

Để số hạng chứa $x^8$ thì $\frac{60-11k}{2}=8\Leftrightarrow k=4$.

Vậy hệ số chứa $x^8$ trong khai triển trên là $C_{12}^{4}=495$.

**Câu 72.** Tìm hệ số của $x^4$ trong khai triển nhị thức Newton $\left(2x+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^n$ với $x>0$, biết $n$ là số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn $A_n^5\le 18A_{n-2}^4$.

**A.** $8064$. **B.** $3360$. **C.** $13440$. **D.** $15360$.

**Lời giải**

Điều kiện: $\begin{cases}n\ge 6\\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Khi đó $A_n^5\le 18A_{n-2}^4\Leftrightarrow\frac{n!}{(n-5)!}\le 18.\frac{(n-2)!}{(n-6)!}$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\le 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)\le 18(n-5)\ \Leftrightarrow n^2-19n+90\le 0\ \Leftrightarrow 9\le n\le 10\xrightarrow{n\to\max}n=10.$$

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(2x+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{10}$ là $T_{k+1}=C_{10}^{k}.(2x)^{10-k}.\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^k$

$$=C_{10}^{k}.2^{10-k}.x^{10-k}.x^{-\frac{k}{5}}=C_{10}^{k}.2^{10-k}.x^{\frac{50-6k}{5}}.$$

Tìm $k$ sao cho $\frac{50-6k}{5}=4\ \Leftrightarrow k=5$.

Vậy hệ số của số hạng chứa $x^4$ là $C_{10}^{5}.2^{10-5}=8064.$

**Câu 73.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^n$ biết $A_n^2-C_n^2=105$.

**A.** $-3003$. **B.** $-5005$. **C.** $5005$. **D.** $3003$.

**Lời giải**

Ta có: $A_n^2-C_n^2=105 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!}-\frac{n!}{2!(n-2)!}=105 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n(n-1)=105 \Leftrightarrow n^2-n-210=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=15 \\ n=-14\ (L) \end{array}\right.$.

Suy ra số hạng tổng quát trong khai triển: $T_{k+1}=C_{15}^k.\left(x^2\right)^{15-k}.\left(-\frac{1}{x}\right)^k=C_{15}^k.(-1)^k.x^{30-3k}$.

Tìm $30-3k=0 \Leftrightarrow k=10$.

Vậy hệ số của số hạng không chứa $x$ trong khai triển là: $C_{15}^{10}.(-1)^{10}=3003$.

**Câu 74.** Tìm hệ số của $x^5$ trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^4+...+C_{2n+1}^{2n}=1024$.

**A.** $2099529$. **B.** $-2099520$. **C.** $-1959552$. **D.** $1959552$.

**Lời giải**

Ta có $(x+1)^{2n+1}=C_{2n+1}^0.x^{2n+1}+C_{2n+1}^1.x^{2n}+...+C_{2n+1}^{2n}.x+C_{2n+1}^{2n+1}\ (1)$

Thay $x=1$ vào $(1)$: $2^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+...+C_{2n+1}^{2n}+C_{2n+1}^{2n+1}\ (2)$

Thay $x=-1$ vào $(1)$: $0=-C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1-...-C_{2n+1}^{2n}+C_{2n+1}^{2n+1}\ (3)$

Phương trình $(2)$ trừ $(3)$ theo vế: $2^{2n+1}=2\left(C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^{2n}\right)$

Theo đề ta có $2^{2n+1}=2.1024 \Leftrightarrow n=5$

Số hạng tổng quát của khai triển $(2-3x)^{10}$:

$T_{k+1}=C_{10}^k.2^{10-k}.(-3x)^k=C_{10}^k.2^{10-k}.(-3)^k.x^k$

Theo giả thiết ta có $k=5$.

Vậy hệ số cần tìm $C_{10}^5.2^5.(-3)^5=-1959552$.

**Câu 75.** Biết $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=78$, số hạng chứa $x^8$ trong khai triển $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^n$ là

**A.** $-101376x^8$. **B.** $-101376$. **C.** $-112640$. **D.** $101376x^8$.

**Lời giải**

Ta có: $C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=78 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!.1!}+\frac{n!}{(n-2)!.2!}=78 \Leftrightarrow n+\frac{(n-1)n}{2}=78$

$\Leftrightarrow n^2+n-156=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=12 \\ n=-13 \end{array}\right. \Leftrightarrow n=12$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^{12}$ là: $(-1)^k C_{12}^k\left(x^3\right)^{12-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k=(-1)^k C_{12}^k.2^k.x^{36-4k}$.

Cho $36-4k=8 \Leftrightarrow k=7$.

Vậy số hạng chứa $x^8$ trong khai triển $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^{12}$ là $-C_{12}^7.2^7.x^8=-101376x^8$.

**Câu 76.** Tìm số hạng chứa $x^5$ trong khai triển $\left(x-\frac{2}{x}\right)^n$, biết $n$ là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^3=\frac{4}{3}n+2C_n^2$

**A.** 134 **B.** 144 **C.** 115 **D.** 141

**Lời giải:**

Điều kiện : $n\ge 3, n\in\mathbb{Z}$.

Ta có $C_n^3=\frac{4}{3}n+2C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{4}{3}n+\frac{n!}{(n-2)!}\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)=8n+6n(n-1)$

$\Leftrightarrow n^2-3n+2=8+6n-6\Leftrightarrow n^2-9n=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=0\\ n=9\end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện ta được $n=9$.

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x-\frac{2}{x}\right)^9$, là : $C_9^k x^{9-k}.\frac{(-2)^k}{x^k}=(-2)^k C_9^k x^{9-2k}$

Số hạng này chứa $x^5$ ứng với $9-2k=5\Leftrightarrow k=2$.

Vậy hệ số của số hạng đó là $4.C_9^2=144$.

**Câu 77.** Tìm hệ số không chứa $x$ trong khai triển $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^n$, biết $n$ là sô nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=78$.

**A.** 112640. **B.** 112643. **C.** −112640. **D.** −112643.

**Lời giải**

$C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=78\Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}=78\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=12\\ n=-13(l)\end{array}\right.$.

$\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^n=\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k\left(x^3\right)^{12-k}(-2)^k\left(\frac{1}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k(-2)^k x^{36-4k}$.

Số hạng không chứa $x$ ứng với $36-4k=0\Leftrightarrow k=9$ là $C_{12}^9(-2)^9=-112640$.

**Câu 78.** Cho biểu thức $P=\left(\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}-\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\right)^{10}$ với $x>0$, $x\ne 1$. Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển Niu-tơn của $P$.

**A.** 200. **B.** 160. **C.** 210. **D.** 100.

**Lời giải**

Ta có $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}-\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{x}+1-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Nên $P=\left(\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}-\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\right)^{10}=\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

Số hạng tổng quát của khai triển là: $C_{10}^k x^{\frac{10-k}{3}}.\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right)^k=(-1)^k C_{10}^k x^{\frac{20-5k}{6}}$.

Khi $k=4$ thì số hạng không chứa $x$ là $(-1)^4 C_{10}^4=210$.

**Câu 79.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $f(x)=\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^9$, $x\ne 0$ bằng

**A.** $5376$. **B.** $-5376$. **C.** $672$. **D.** $-672$.

**Lời giải**

Ta có $f(x)=\left(x-2x^{-2}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k\left(-2x^{-2}\right)^k x^{9-k}=\sum_{k=0}^{9}C_9^k(-2)^k x^{-2\times k}x^{9-k}$

$=\sum_{k=0}^{9}C_9^k(-2)^k x^{-2k+9-k}=\sum_{k=0}^{9}C_9^k(-2)^k x^{9-3k}$

Số hạng không chứa $x$ của khai triển $f(x)$ ứng với $9-3k=0\Leftrightarrow k=3$

Vậy hệ số không chứa $x$ là $C_9^3.(-2)^3=-672$.

**Câu 80.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển của $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^{14}$ với $x>0$ là:

**A.** $2^6C_{14}^8$. **B.** $2^6C_{14}^6$. **C.** $2^8C_{14}^8$. **D.** $-2^8C_{14}^8$.

**Lời giải**

Số hạng tổng quát trong khai triển là: $(-1)^k C_{14}^k.\left(\sqrt[3]{x}\right)^{14-k}.\left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^k=(-1)^k C_{14}^k.2^k.x^{\frac{56-7k}{12}}$

Cho $\frac{56-7k}{12}=0\Leftrightarrow k=8$.

Vậy số hạng không chứa $x$ trong khai triển là: $2^8C_{14}^8$.

**Câu 81.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển của $x^{11}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^5}\right)^{11}$ với $x>0$.

**A.** $485$. **B.** $238$. **C.** $165$. **D.** $525$.

**Lời giải**

Ta có $x^{11}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^5}\right)^{11}=x^{11}\sum_{k=0}^{11}C_{11}^k.x^{\frac{11-k}{2}}.x^{-5k}=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^k.x^{\frac{33-11k}{2}}$.

Số hạng không chứa $x$ trong khai triển ứng với $33-11k=0\Leftrightarrow k=3$.

Số hạng cần tìm là $C_{11}^3=165$.

**Câu 82.** Với $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1+C_n^2=55$, số hạng không chứa $x$ trong khai triển của biểu thức $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

**A.** 13440 **B.** 3360 **C.** 80640 **D.** 322560

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $C_n^1+C_n^2=55$

$\Leftrightarrow\frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{n!}{2!(n-2)!}=55\Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}=55\Leftrightarrow n^2+n-110=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=10\\n=-11\end{array}\right.\Rightarrow n=10$

Với $n=10$ thì ta có:

$\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^n=\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.x^{3k}.\left(\frac{2}{x^2}\right)^{10-k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.x^{3k}.2^{10-k}.x^{2k-20}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.2^{10-k}.x^{5k-20}$

Để có số hạng không chứa $x$ thì $5k-20=0\Leftrightarrow k=4$.

Do đó hệ số của số hạng không chứa $x$ trong khai triển là: $C_{10}^4.2^6=13440$.

**Câu 83.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển của $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$ với $x>0$, nếu biết rằng $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^2-C_n^1=44$.

**A.** 485. **B.** 525. **C.** 165. **D.** 238

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$

$$C_n^2-C_n^1=44\Leftrightarrow\frac{n(n-1)}{2}-n=44\Leftrightarrow\begin{bmatrix}n=11\ (tm)\\ n=-8\end{bmatrix}$$

Ta có $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^{11}=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^k\left(x\sqrt{x}\right)^{11-k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^k=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^k x^{\frac{33-11k}{2}}$

Số hạng không chứa $x$ trong khai triển ứng với $\frac{33-11k}{2}=0\Leftrightarrow k=3$

Vậy số hạng không chứa $x$ trong khai triểnlà $C_{11}^3=165$.

**Câu 84.** Tìm số hạng không chứa $x$ trong khai triển của $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$, với $x>0$, nếu biết rằng $C_n^2-C_n^1=44$.

**A.** 165. **B.** 238. **C.** 485. **D.** 525.

**Lời giải**

ĐK: $\begin{cases}n\geq 2\\ n\in\mathbb{N}\end{cases}(*)$.

Ta có $C_n^2-C_n^1=44\Leftrightarrow\frac{n(n-1)}{2}-n=44\Leftrightarrow n=11$ hoặc $n=-8$.

Với $n=11$, số hạng thứ $k+1$ trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^{11}$ là

$$C_{11}^k\left(x\sqrt{x}\right)^{11-k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^k=C_{11}^k x^{\frac{33}{2}-\frac{11}{2}k}.$$

Theo giả thiết, ta có $\frac{33}{2}-\frac{11k}{2}=0$ hay $k=3$.

Vậy, số hạng không chứa $x$ trong khai triển đã cho là $C_{11}^3=165$.

**Câu 85.** Số hạng không chứa $x$ trong khai triển $\left(2x-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}$ với $x\neq 0$, biết $n$ là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^3+2n=A_{n+1}^2$ là:

**A.** $-C_{16}^{12}.2^4.3^{12}$. **B.** $C_{16}^0.2^{16}$. **C.** $C_{16}^{12}.2^4.3^{12}$. **D.** $C_{16}^{16}.2^0$.

**Lời giải**

Với điều kiện $n\geq 3,\ n\in\mathbb{N}$, ta có

$$C_n^3+2n=A_{n+1}^2\Leftrightarrow\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+2n=(n+1)n\Leftrightarrow(n-1)(n-2)+12=6(n+1)$$

$$\Leftrightarrow n^2-9n+8=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}n=1(\text{loại})\\ n=8(\text{thỏa})\end{bmatrix}.$$

Với $n=8$, ta có số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $\left(2x-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$ là

$C_{16}^{k}(2x)^{16-k}\left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{k}=C_{16}^{k}2^{16-k}(-3)^{k}x^{16-\frac{4}{3}k}$.

Theo đề bài ta cần tìm $k$ sao cho $16-\frac{4}{3}k=0 \Leftrightarrow k=12$.

Do đó số hạng không chứa $x$ trong khai triển là $C_{16}^{12}.2^{4}.3^{12}$.

**Câu 86.** Với số nguyên dương $n$ thỏa mãn $C_n^2-n=27$, trong khai triển $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^n$ số hạng không chứa $x$ là

**A.** 84. **B.** 672. **C.** 8. **D.** 5376.

**Lời giải**

$C_n^2-n=27 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!}-n=27 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}-n=27$

$\Leftrightarrow n^2-3n-54=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=9\ (TM) \\ n=-6\ (L)\end{array}\right.$

Xét khai triển $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^9$ có số hạng tổng quát

$T_{k+1}=C_9^k x^{9-k}.\left(\frac{2}{x^2}\right)^k=C_9^k.2^k x^{9-3k}$

Số hạng không chứa $x$ nên $9-3k=0 \Leftrightarrow k=3$.

Vậy số hạng không chứa $x$ là: $T_4=C_9^3.2^3=672$.

**Câu 87.** Cho khai triển $\left(1-3x+2x^2\right)^{2017}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{4034}x^{4034}$. Tìm $a_2$.

**A.** 9136578 **B.** 16269122. **C.** 8132544. **D.** 18302258.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $A=\left(1-3x+2x^2\right)^{2017}=\left[(1-3x)+2x^2\right]^{2017}$

$\Rightarrow A=C_{2017}^0(1-3x)^{2017}+C_{2017}^1(1-3x)^{2016}\left(2x^2\right)+C_{2017}^2(1-3x)^{2015}\left(2x^2\right)^2+...+C_{2017}^{2017}\left(2x^2\right)^{2017}$.

Trong khai triển trên chỉ có hai số hạng $C_{2017}^0(1-3x)^{2017}$, $C_{2017}^1(1-3x)^{2016}\left(2x^2\right)$ xuất hiện biểu thức chứa $x^2$

• $C_{2017}^0(1-3x)^{2017}=C_{2017}^0\left[C_{2017}^0-C_{2017}^1(3x)+C_{2017}^2(3x)^2-C_{2017}^3(3x)^3+...-C_{2017}^{2017}(3x)^{2017}\right]$

$\Rightarrow$Hệ số chứa $x^2$ trong số hạng $C_{2017}^0(1-3x)^{2017}$ là: $C_{2017}^0C_{2017}^2(3)^2$

• $C_{2017}^1(1-3x)^{2016}\left(2x^2\right)=C_{2017}^1\left(2x^2\right)\left[C_{2016}^0-C_{2016}^1(3x)+C_{2016}^2(3x)^2+...+C_{2016}^{2016}(3x)^{2016}\right]$

$\Rightarrow$Hệ số chứa $x^2$ trong số hạng $C_{2017}^1(1-3x)^{2016}\left(2x^2\right)$ là: $2C_{2017}^1C_{2016}^0$.

Vậy hệ số $a_2=C_{2017}^0C_{2017}^2(3)^2+2C_{2017}^1C_{2016}^0=18302258$

**Câu 88.** Tìm hệ số của $x^7$ trong khai triển $f(x)=\left(1-3x+2x^3\right)^{10}$ thành đa thức.

**A.** 204120. **B.** −262440. **C.** −4320. **D.** −62640.

**Lời giải**

$f(x)=\left(1-3x+2x^3\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}\left(1-3x\right)^{10-k}.\left(2x^3\right)^{k}=\sum_{k=0}^{10}\sum_{i=0}^{10-k}C_{10}^{k}C_{10-k}^{i}\left(-3x\right)^{i}.\left(2x^3\right)^{k}.$

$=\sum_{k=0}^{10}\sum_{i=0}^{10-k}C_{10}^{k}C_{10-k}^{i}\left(-3\right)^{i}.2^{k}.x^{i+3k}\quad\left(i,k\in\mathbb{N},0\le k\le 10,0\le i\le 10-k\right).$

Số hạng chứa $x^7$ ứng với $i+3k=7$.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 2 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| | T/m | Không t/m | Không t/m | T/m | Không t/m | Không t/m | T/m |

Vậy hệ số của $x^7$ là: $C_{10}^{2}.C_{8}^{1}.(-3).2^2+C_{10}^{1}.C_{9}^{4}.(-3)^4.2+C_{10}^{0}.C_{10}^{7}.(-3)^7=-62640$.

**Câu 89.** Cho khai triển $\left(3-2x+x^2\right)^9=a_0x^{18}+a_1x^{17}+a_2x^{16}+...+a_{18}$. Giá trị $a_{15}$ bằng

**A.** 218700. **B.** 489888. **C.** −804816. **D.** −174960.

**Lời giải**

Ta có: $\left(3-2x+x^2\right)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k.x^{18-2k}.(3-2x)^k=\sum_{k=0}^{9}C_9^k.x^{18-2k}\sum_{i=0}^{k}C_k^i.3^{k-i}\left(-2x\right)^i\quad(0\le i\le k\le 9)$

Giá trị $a_{15}$ ứng với: $18-2k+i=3\Rightarrow\begin{cases}i=1\\k=8\end{cases}\vee\begin{cases}i=3\\k=9\end{cases}$.

Vậy: $a_{15}=C_9^8.C_8^1.3^7.(-2)^1+C_9^9.C_9^3.3^6.(-2)^3=-804816.$

**Câu 90.** Tìm hệ số của $x^3$ sau khi khai triển và rút gọn các đơn thức đồng dạng của $\left(\frac{1}{x}-x+2x^2\right)^9$, $x\neq 0$.

**A.** −2940. **B.** 3210. **C.** 2940. **D.** −3210.

**Lời giải**

Ta có

$\left(\frac{1}{x}-x+2x^2\right)^9=\left[\frac{1}{x}+x(2x-1)\right]^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k\left(\frac{1}{x}\right)^{9-k}.x^k.(2x-1)^k=\sum_{k=0}^{9}\sum_{i=0}^{k}C_k^iC_9^k\left(-1\right)^{k-i}2^i.x^{2k+i-9}.$

Theo yêu cầu bài toán ta có $2k+i-9=3\Leftrightarrow 2k+i=12$; $0\le i\le k\le 9$; $i,k\in\mathbb{N}$

Ta có các cặp $(i;k)$ thỏa mãn là: $(0;6),(2;5),(4;4)$.

Từ đó hệ số của $x^3$ là : $C_6^0C_9^6\left(-1\right)^{6-0}.2^0+C_5^2C_9^5\left(-1\right)^{5-2}.2^2+C_4^4C_9^4\left(-1\right)^{4-4}.2^4=-2940$.

**Câu 91.** Hệ số của số hạng chứa $x^7$ trong khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6$ bằng

**A.** −6432. **B.** −4032. **C.** −1632. **D.** −5418.

**Lời giải**

$\left(x^2-3x+2\right)^6=(x-1)^6(x-2)^6$

Số hạng tổng quát trong khai triển $(x-1)^6$ là $C_6^k.x^k\left(-1\right)^{6-k}$ với $k=0;1;2...;6$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $(x-2)^6$ là $C_6^i.x^i\left(-2\right)^{6-i}$ với $i=0;1;2...;6$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6=(x-1)^6(x-2)^6$ là $C_6^kx^k\left(-1\right)^{6-k}.C_6^ix^i\left(-2\right)^{6-i}$

$=C_6^kC_6^ix^{i+k}\left(-1\right)^{12-i-k}.(2)^{6-i}$

Số hạng chứa $x^7$ ứng với $i+k=7$. Kết hợp với điều kiện ta được các nghiệm

$i=1\Rightarrow k=6\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^6C_6^1(-1)^5.(2)^5=-192$

$i=2\Rightarrow k=5\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^5C_6^2(-1)^5.(2)^4=-1440$

$i=3\Rightarrow k=4\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^4C_6^3(-1)^5.(2)^3=-2400$

$i=4\Rightarrow k=3\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^3C_6^4(-1)^5.(2)^2=-1200$

$i=5\Rightarrow k=2\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^2C_6^5(-1)^5.(2)^1=-180$

$i=6\Rightarrow k=1\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^1C_6^6(-1)^5.(2)^0=-6$

Vậy hệ số của số hạng chứa $x^7$ trong khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6$ bằng $-5418$

Cách 2.

$\left(x^2-3x+2\right)^6=\left(x^2+(-3x+2)\right)^6$

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $C_6^k.\left(x^2\right)^{6-k}(-3x+2)^k$ với $k=0;1;2...;6$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $(-3x+2)^k$ là $C_k^i.2^{k-i}(-3x)^i$ với $0\le i\le k$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6$ là $C_6^k.\left(x^2\right)^{6-k}C_k^i.2^{k-i}(-3x)^i$

$=C_6^kC_k^i.2^{k-i}(-3)^i.\left(x^{12-2k+i}\right)$

Số hạng chứa $x^7$ ứng với $12-2k+i=7\Leftrightarrow 2k-i=5$. Kết hợp với điều kiện ta được các nghiệm

$k=3\Rightarrow i=1\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^3C_3^12^2(-3)^1=-720$

$k=4\Rightarrow i=3\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^4C_4^3(-3)^3.(2)^1=-3240$

$k=5\Rightarrow i=5\Rightarrow$ hệ số là $=C_6^5C_5^5(2)^0.(-3)^5=-1458$

Vậy hệ số của số hạng chứa $x^7$ trong khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6$ bằng $-5418$.

**Câu 92.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^5$ trong khai triển $\left(1+x+x^2+x^3\right)^{10}$.

**A.** $582$. **B.** $1902$. **C.** $7752$. **D.** $252$.

**Lời giải**

Ta có: $\left(1+x+x^2+x^3\right)^{10}=\left(1+x^2\right)^{10}(1+x)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.x^{2k}.\sum_{i=0}^{10}C_{10}^i.x^i=\sum_{k=0}^{10}\sum_{i=0}^{10}C_{10}^k.C_{10}^i.x^{2k+i}$

Hệ số của số hạng chứa $x^5$ nên $2k+i=5$.

Trường hợp 1: $k=0$, $i=5$ nên hệ số chứa $x^5$ là $C_{10}^0.C_{10}^5$.

Trường hợp 2: $k=1$, $i=3$ nên hệ số chứa $x^5$ là $C_{10}^1.C_{10}^3$.

Trường hợp 3: $k=2$, $i=1$ nên hệ số chứa $x^5$ là $C_{10}^2.C_{10}^1$.

Vậy hệ số của số hạng chứa $x^5$ là $C_{10}^0.C_{10}^5+C_{10}^1.C_{10}^3+C_{10}^2.C_{10}^1=1902$.

**Câu 93.** Cho $n$ là số tự nhiên thỏa mãn $3C_n^0+4C_n^1+5C_n^2+...+(n+3)C_n^n=3840$. Tổng tất cả các hệ số của các số hạng trong khai triển $(1+x-x^2+x^3)^n$ là

**A.** $4^{10}$. **B.** $4^9$. **C.** $2^{10}$. **D.** $2^9$.

**Lời giải**

$3C_n^0+4C_n^1+5C_n^2+...+(n+3)C_n^n=3840$

$\Leftrightarrow(0+3)C_n^0+(1+3)C_n^1+(2+3)C_n^2+...+(n+3)C_n^n=3840$

$\Leftrightarrow \left(C_n^1+2C_n^2+...+nC_n^n\right)+3\left(C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n\right)=3840$

$\Leftrightarrow n.2^{n-1}+3.2^n=3840 \Leftrightarrow n=9$

Cho $x=1 \Rightarrow (1+x-x^2+x^3)^9=\left(1+1-1^2+1^3\right)^9=2^9$.

**Câu 94.** Giả sử $\left(1+x+x^2+x^3+...+x^{10}\right)^{11}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_{110}x^{110}$ với $a_0$, $a_1$, $a_2$,..., $a_{110}$ là các hệ số. Giá trị của tổng $T=C_{11}^0a_{11}-C_{11}^1a_{10}+C_{11}^2a_9-C_{11}^3a_8+...+C_{11}^{10}a_1-C_{11}^{11}a_0$ bằng

**A.** $T=-11$. **B.** $T=11$. **C.** $T=0$. **D.** $T=1$.

**Lời giải**

Ta có: $A=\left(1+x+x^2+x^3+...+x^{10}\right)^{11} \Leftrightarrow (1-x)^{11}A=\left(1-x^{11}\right)^{11}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{11}C_{11}^k(-x)^k.\sum_{i=0}^{110}a_ix^i}_{P}=\underbrace{\sum_{m=0}^{11}C_{11}^m\left(-x^{11}\right)^m}_{Q}$.

Hệ số của $x^{11}$ trong $P$ là: $C_{11}^0a_{11}-C_{11}^1a_{10}+C_{11}^2a_9-C_{11}^3a_8+...+C_{11}^{10}a_1-C_{11}^{11}a_0=T$

Hệ số của $x^{11}$ trong $Q$ là: $-C_{11}^1$

Vậy $T=-C_{11}^1=-11$.

**Câu 95.** Sau khi khai triển và rút gọn thì $P(x)=(1+x)^{12}+\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{18}$ có tất cả bao nhiêu số hạng

**A.** 27. **B.** 28. **C.** 30. **D.** 25

**Lời giải**

Chọn A

Đặt $A=(1+x)^{12}$; $B=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{18}$

Ta có khai triển $A=(1+x)^{12}=\sum_{k=}^{12}C_{12}^kx^k$ có 13 số hạng.

Và khai triển $B=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{18}=\sum_{l=0}^{18}C_{18}^lx^{36-3l}$ có 19 số hạng.

Ta đi tìm các số hạng có cùng lũy thừa, mà giản ước được trong khai triển $P(x)$, ta phải có :

$$36-3l=k \Leftrightarrow k+3l=36 \quad (1)$$

Phương trình cho ta ta 5 cặp nghiệm thỏa mãn $(k;l)=\{(0;12),(3;11),(6;10),(9;9),(12;8)\}$ tương ứng với 5 số hạng.

Vậy sau khi khai triển và rút gọn $P(x)$ ta có $13+19-5=27$ số hạng.

**Câu 96.** Cho đa thức $P(x)=(x-2)^{2017}+(3-2x)^{2018}=a_{2018}x^{2018}+a_{2017}x^{2017}+...+a_1x+a_0$. Khi đó $S=a_{2018}+a_{2017}+...+a_1+a_0$ bằng

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2018. **D.** 2017.

**Lời giải**

Ta có $P(x)=a_{2018}x^{2018}+a_{2017}x^{2017}+...+a_1x+a_0$

Cho $x=1 \Rightarrow P(1)=a_{2018}+a_{2017}+...+a_1+a_0=(1-2)^{2017}+(3-2.1)^{2018}=0$.

**Câu 97.** Sau khi khai triển và rút gọn biểu thức $f(x)=\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^{12}+\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)^{21}$ thì $f(x)$ có bao nhiêu số hạng?

**A.** 30. **B.** 32. **C.** 29. **D.** 35.

**Lời giải**

$\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}\left(x^2\right)^{12-k}\left(\frac{3}{x}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}3^{k}x^{24-3k}$

$\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)^{21}=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^{k}\left(2x^3\right)^{21-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^{k}2^{21-k}x^{63-5k}$

Ta cho $k$ chạy từ 0 đến 12 thì các số mũ của $x$ không bằng nhau.

Với khai triển $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^{12}$ ta có 13 số hạng; Với khai triển $\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)^{21}$ ta có 22 số hạng. Vậy tổng số hạng là: 35.

**Câu 98.** Tìm hệ số của $x^5$ trong khai triển $P(x)=(x+1)^6+(x+1)^7+...+(x+1)^{12}$.

**A.** 1716. **B.** 1715. **C.** 1287. **D.** 1711.

**Lời giải**

Xét nhị thức $(x+1)^n=(1+x)^n$ có số hạng tổng quát là $C_n^k x^k$. Ta có:

Hệ số của $x^5$ trong $(1+x)^6$ là $C_6^5$.

Hệ số của $x^5$ trong $(1+x)^7$ là $C_7^5$

Hệ số của $x^5$ trong $(1+x)^{12}$ là $C_{12}^5$.

Vậy hệ số của $x^5$ trong khai triển $P(x)$ là $C_6^5+C_7^5+...+C_{12}^5=1715$.

**Câu 99.** Cho đa thức: $P(x)=(1+x)^8+(1+x)^9+(1+x)^{10}+(1+x)^{11}+(1+x)^{12}$. Khai triển và rút gọn ta được đa thức: $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số $a_8$.

**A.** 720. **B.** 700. **C.** 715. **D.** 730.

**Lời giải**

Ta có $(1+x)^8=C_8^0+C_8^1x+...+C_8^8x^8$ suy ra hệ số chứa $x^8$ là $C_8^8$.

Lại có $(1+x)^9=C_9^0+C_9^1x+...+C_9^8x^8+C_9^9x^9$ suy ra hệ số của $x^8$ là $C_9^8$.

Tương tự trong khai triển $(1+x)^{10}$ có hệ số của $x^8$ là $C_{10}^8$.

$(1+x)^{11}$ có hệ số của $x^8$ là $C_{11}^8$.

$(1+x)^{12}$ có hệ số của $x^8$ là $C_{12}^8$.

Suy ra hệ số của $x^8$ trong $P(x)$ là $a_8=C_8^8+C_9^8+C_{10}^8+C_{11}^8+C_{12}^8=715$.

**Câu 100.** Cho đa thức $P(x)=(1+x)^8+(1+x)^9+(1+x)^{10}+(1+x)^{11}+(1+x)^{12}$. Khai triển và rút gọn ta được đa thức $P(x)=a_0+a_1x+...+a_{12}x^{12}$. Tính tổng các hệ số $a_i$, $i=0;1;2;...;12$.

**A.** 5. **B.** 7936. **C.** 0. **D.** 7920.

**Lời giải**

Ta có

$P(x)=(1+x)^8+(1+x)^9+(1+x)^{10}+(1+x)^{11}+(1+x)^{12}$.

Áp dụng khai triển

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$.

Cho $x = 1$, ta có $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Do đó ta có tổng hệ số của $P(x)$ là:

$S = 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12} = 2^8(1+2+4+8+16) = 31.2^8 = 7936$.

**Câu 101.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^9$ trong khai triển nhị thức Newton $(1+2x)(3+x)^{11}$.

**A.** 4620. **B.** 1380. **C.** 9405. **D.** 2890.

**Lời giải**

$(1+2x)(3+x)^{11} = (3+x)^{11} + 2x(3+x)^{11}$

$= \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k .3^{11-k}.x^k + 2x\sum_{k=0}^{11} C_{11}^k .3^{11-k}.x^k$

$= \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k .3^{11-k}.x^k + \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k .2.3^{11-k}.x^{k+1}$

Suy ra hệ số của $x^9$ khi triển khai nhị thức trên là: $C_{11}^9 .3^2 + C_{11}^8 .2.3^3 = 9045$.

**Câu 102.** Cho khai triển $(1+2x)^{10}(3+4x+4x^2)^2 = a_0 x + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{14} x^{14}$. Tìm giá trị của $a_6$.

**A.** 482496. **B.** 529536. **C.** 278016. **D.** 453504.

**Lời giải**

Ta có: $(1+2x)^{10}(3+4x+4x^2)^2 = \left(\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k .2^k .x^k\right).(16x^4 + 32x^3 + 40x^2 + 24x + 9)$

Do đó $a_6 = C_{10}^2 .2^2 .16 + C_{10}^3 .2^3 .32 + C_{10}^4 .2^4 .40 + C_{10}^5 .2^5 .24 + C_{10}^6 .2^6 .9 = 482496$.

**Câu 103.** Hệ số của $x^6$ trong khai triển $(2x+1)^6\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^4$ thành đa thức là

**A.** $\frac{1}{2}C_{14}^6$. **B.** $\frac{1}{4}C_{14}^6$. **C.** $C_{14}^6$. **D.** $4C_{14}^8$.

**Lời giải**

Xét khai triển $(2x+1)^6 = (1+2x)^6 = \sum_{k=0}^{n} C_6^k 1^{6-k}(2x)^k = \sum_{k=0}^{n} C_6^k 2^k x^k$

$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^8 = \sum_{j=0}^{8} C_j^8 \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^j$

Vậy $(2x+1)^6\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^4 = \sum_{k=0}^{n} C_6^k 2^k x^k . \sum_{j=0}^{8} C_8^J \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^j = \sum_{k=0}^{n} C_6^k 2^k . \sum_{j=0}^{8} C_8^J \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^{j+k}$

Số hạng của khai triển chứa $x^6$ khi $j + k = 6$

Xét bảng:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $j$ | 6 | 5 | 4 | 3 |
| $C_6^k 2^k . C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}$ | $C_6^0 2^0 . C_8^6 \left(\frac{1}{2}\right)^2$ | $C_6^1 2^1 . C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3$ | $C_6^2 2^2 . C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4$ | $C_6^3 2^3 . C_8^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5$ |
| $k$ | 4 | 5 | 6 | |
| $j$ | 2 | 1 | 0 | |
| $C_6^k 2^k . C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}$ | $C_6^4 2^4 . C_8^2 \left(\frac{1}{2}\right)^6$ | $C_6^5 2^5 . C_8^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5$ | $C_6^6 2^6 . C_8^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2$ | |

Vậy hệ số $x^6$ trong khai triển $(2x+1)^6\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^4$ thành đa thức là $\frac{3003}{4}=\frac{1}{4}C_{14}^6$.

**Câu 104.** Hệ số của $x^5$ trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6+(x-3)^8$ bằng

**A.** 1752 **B.** $-1272$ **C.** 1272 **D.** $-1752$

**Lời giải**

**Chọn B**

Hệ số của $x^5$ trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6$ là $C_6^4 2^4 (-1)^2 = 240$.

Hệ số của $x^5$ trong khai triển biểu thức $(x-3)^8$ là $C_8^5 (-3)^3 = -1512$.

Suy ra hệ số của $x^5$ trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6+(x-3)^8$ là $240-1512=-1272$.

**Câu 105.** Hệ số của $x^5$ trong khai triển $x(3x-1)^6+(2x-1)^8$ bằng

**A.** $-3007$ **B.** $-577$ **C.** 3007 **D.** 577

**Lời giải**

**Chọn B**

$$x(3x-1)^6+(2x-1)^8 = x\sum_{k=0}^{6} C_6^k .(3x)^k (-1)^{6-k} + \sum_{m=0}^{8} C_8^m .(2x)^m (-1)^{8-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{6} C_6^k .3^k (-1)^{6-k} x^{k+1} + \sum_{m=0}^{8} C_8^m .2^m (-1)^{8-k} x^m .$$

Hệ số $x^5$ ứng với $k=4$; $m=5$.

Hệ số cần tìm là $C_6^4 .3^4 (-1)^2 + C_8^5 .2^5 (-1)^3 = -577$.

**Câu 106.** Hệ số của $x^5$ trong khai triển biểu thức $x(x-2)^6+(3x-1)^8$ bằng

**A.** $-13548$ **B.** 13668 **C.** $-13668$ **D.** 13548

**Lời giải**

**Chọn A**

Hệ số của $x^4$ trong khai triển nhị thức $(x-2)^6$ là $C_6^4 2^2 = 60$.

Hệ số của $x^5$ trong khai triển nhị thức $(3x-1)^8$ là $C_8^5 (-3)^5 = -13608$.

Vậy hệ số của $x^5$ trong khai triển biểu thức $x(x-2)^6+(3x-1)^8$ bằng $-13608+60=-13548$.

**Câu 107.** Hệ số của $x^5$ trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6+(3x-1)^8$ bằng

**A.** 13848 **B.** 13368 **C.** $-13848$ **D.** $-13368$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $x(2x-1)^6+(3x-1)^8=x.\sum_{k=0}^{6}C_6^k(2x)^{6-k}(-1)^k+\sum_{m=0}^{8}C_8^m(3x)^{8-m}(-1)^m$

$=\sum_{k=0}^{6}C_6^k(2)^{6-k}(-1)^k.x^{7-k}+\sum_{m=0}^{8}C_8^m(3)^{8-m}(-1)^m.x^{8-m}$

Để có số hạng của $x^5$ trong khai triển thì $k=2;m=3$

Do đó hệ số của $x^5$ trong khai triển bằng: $C_6^2.2^4+C_8^3.(3)^5(-1)^3=-13368.$

**Câu 108.** Hệ số của $x^5$ trong khai triển $x(x-2)^6+(3x-1)^8$ bằng

**A.** $-13548$. **B.** $13548$. **C.** $-13668$. **D.** $13668$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số hạng tổng quát trong khai triển trên có dạng:

$x.C_6^k.x^k(-2)^{6-k}+C_8^m.(3x)^m.(-1)^{8-m}=C_6^k.x^{k+1}(-2)^{6-k}+C_8^m.3^m.(-1)^{8-k}.x^m$.

Để tìm hệ số của $x^5$ ta cần tìm $k,m$ sao cho $\begin{cases}k+1=5\\m=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=4\\m=5\end{cases}$.

Hệ số của $x^5$ cần tìm bằng: $C_6^4.(-2)^2+C_8^5.3^5.(-1)^3=-13548$.

**Câu 109.** Tìm hệ số của $x^5$ trong khai triển đa thức $f(x)=x(1-x)^5+x^2(1+2x)^{10}$.

**A.** $965$. **B.** $263$. **C.** $632$. **D.** $956$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hệ số của $x^5$ là

$C_5^4.1^1.(-1)^4+C_{10}^3.1^7.2^3=965.$

**Câu 110.** Tìm hệ số của $x^5$ trong khai triển $P(x)=x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$.

**A.** $3240$. **B.** $3320$. **C.** $80$. **D.** $259200$.

**Lời giải**

Khai triển $P(x)$ có số hạng tổng quát $xC_5^k(-2x)^k+x^2C_{10}^m(3x)^m=(-2)^kC_5^kx^{k+1}+3^mC_{10}^mx^{m+2}$

$(k\in\mathbb{N},\ k\le 5,\ m\in\mathbb{N},\ m\le 10)$

Hệ số của $x^5$ ứng với $k$, $m$ thỏa hệ $\begin{cases}k+1=5\\m+2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=4\\m=3\end{cases}$.

Vậy hệ số cần tìm là $(-2)^4C_5^4+3^3C_{10}^3=3320$.

**Câu 111.** Khai triển đa thức $P(x)=(1+2x)^{12}=a_0+a_1x+\ldots+a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số $a_k$ $(0\le k\le 12)$ lớn nhất trong khai triển trên.

**A.** $C_{12}^8.2^8$. **B.** $C_{12}^9.2^9$. **C.** $C_{12}^{10}.2^{10}$. **D.** $1+C_{12}^8.2^8$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+2x)^{12}$, ta có

$$(1+2x)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k(2x)^k=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k2^kx^k.$$

Suy ra $a_k=C_{12}^k2^k$.

Hệ số $a_k$ lớn nhất khi $\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k C_{12}^k \ge 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \\ 2^k C_{12}^k \ge 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{12-k} \ge \dfrac{2}{k+1} \\ \dfrac{2}{k} \ge \dfrac{1}{12-k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{23}{3} \le k \le \dfrac{26}{3}.$

$\xrightarrow[k \in \mathbb{N}]{0 \le k \le 12} k = 8$. Vậy hệ số lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 2^8$.

**Câu 112.** Hệ số có giá trị lớn nhất khi khai triển $P(x) = \left(1 + 2x^2\right)^{12}$ thành đa thức là

**A.** 162270. **B.** 162720. **C.** 126270. **D.** 126720.

**Lời giải**

**Chọn D**

Khai triển: $P(x) = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{12} a_k x^{2k}$ với $a_k = C_{12}^k 2^k$.

$a_{k+1} > a_k \ 90^o \ C_{12}^{k+1} 2^{k+1} > C_{12}^k 2^k \ 90^o \ \dfrac{2}{k+1} > \dfrac{1}{12-k} \Leftrightarrow k < \dfrac{23}{3} \Leftrightarrow k \le 7$.

Như vậy $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_8$.

$a_{k+1} < a_k \ 90^o \ C_{12}^{k+1} 2^{k+1} < C_{12}^k 2^k \ 90^o \ \dfrac{2}{k+1} < \dfrac{1}{12-k} \Leftrightarrow k > \dfrac{23}{3} \Leftrightarrow k \ge 8$.

Như vậy $a_8 > a_9 > a_{10} > ... > a_{12}$.

Vậy hệ số có giá trị lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 2^8 = 126720$.

# Bài 1. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

**PHẦN A. LÝ THUYẾT**

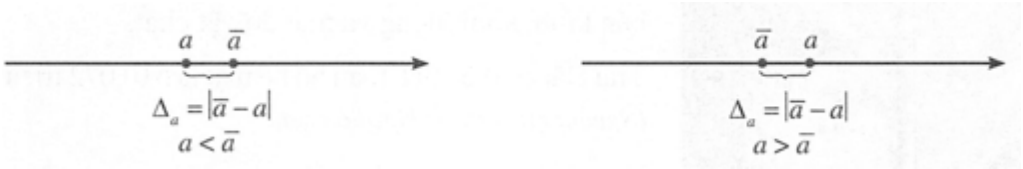
## I. Số gần đúng

Trong đo đạc và tính toán, ta thường chỉ nhận được các số gần đúng

## II. Sai số của số gần đúng

### 1. Sai số tuyệt đối

Nếu $a$ là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là *sai số tuyệt đối* của số gần đúng $a$.




***Ví dụ 1.*** Một bồn hoa có dạng hình tròn với bán kính là $0,8m$. Hai bạn Ngân và Ánh cùng muốn tính diện tích $S$ của bồn hoa đó. Bạn Ngân lấy một giá trị gần đúng của $\pi$ là 3,1 và được kết quả là $S_1$. Bạn Ánh lấy một giá trị gần đúng của $\pi$ là 3,14 và được kết quả là $S_2$. So sánh sai số tuyệt đối $\Delta_{S_1}$ của số gần đúng $S_1$ và sai số tuyệt đối $\Delta_{S_2}$ của số gần đúng $S_2$. Bạn nào cho kết quả chính xác hơn?

***Giải***

Ta có: $S_1 = 3,1 \cdot (0,8)^2 = 1,984\left(m^2\right)$

$S_2 = 3,14.(0,8)^2 = 2,0096\left(m^2\right)$.

Ta thấy: $3,1 < 3,14 < \pi$ nên $3,1 \cdot (0,8)^2 < 3,14 \cdot (0,8)^2 < \pi . (0,8)^2$ tức là $S_1 < S_2 < S$.

Suy ra $\Delta_{S_2} = |S - S_2| < |S - S_1| = \Delta_{S_1}$. Vậy bạn Ánh cho kết quả chính xác hơn.

***Chú ý:*** Sai số tuyệt đối của số gần đúng nhận được trong một phép đo đạc, tính toán càng bé thì kết quả của phép đo đạc, tính toán đó càng chinh xác.

### 2. Độ chính xác của một số gần đúng

***Nhận xét:*** Giả sử $a$ là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ sao cho $\Delta_a = |\overline{a} - a| \le d$.

Khi đó: $\Delta_a = |\overline{a} - a| \le d \Leftrightarrow -d \le \overline{a} - a \le d \Leftrightarrow a - d \le \overline{a} \le a + d$.

Một cách tổng quát:

Ta nói $a$ là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ với độ chính xác $d$ nếu $\Delta_a = |\overline{a} - a| \le d$ và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.

*Nhận xét*: Nếu $\Delta_a \le d$ thì số đúng $\overline{a}$ nằm trong đoạn $[a-d; a+d]$. Bởi vậy, $d$ càng nhỏ thì độ sai lệch của số gần đúng $a$ so với số đúng $\overline{a}$ càng ít. Điều đó giải thích vì sao $d$ được gọi là độ chính xác của số gần đúng.

***Ví dụ 2.*** Hãy ước lượng sai số tuyệt đối $\Delta_{S_2}$ ở ***Ví dụ 1*** **.**

***Giải***

Do $3,14 < \pi < 3,15$ nên $3,14.(0,8)^2 < \pi . (0,8)^2 < 3,15 . (0,8)^2$. Suy ra $2,0096 < S < 2,016$.

Vậy $\Delta_{S_2} = |S - S_2| < 2,016 - 2,0096 = 0,0064$.

Ta nói: Kết quả của bạn Ánh có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0064 hay có độ chính xác là 0,0064 . Khi đó ta có thể viết $S = 2,0096 \pm 0,0064$.

## 3. Sai số tương đối

Tỉ số $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$ được gọi *là sai số tương đối* của số gần đúng $a$.

*Nhận xét*

- Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \le d$. Do đó $\delta_a \le \dfrac{d}{|a|}$. Vì vậy, nếu $\dfrac{d}{|a|}$ càng bé thì chất lượng của phép đo đạc hay tính toán càng cao.
- Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm. Chẳng hạn, trong phép đo thời gian Trái Đất quay một vòng xung quanh Mặt Trời thì sai số tương đối không vượt quá

$$\frac{\frac{1}{4}}{365} = \frac{1}{1460} \approx 0,068\%.$$

## III. Số quy tròn. Quy tròn số gần đúng

*Nhận xét:* Khi quy tròn số 123456 đến hàng trăm ta được số 123500. Số 123500 gọi là số quy tròn của số ban đầu.

Khi quy tròn một số nguyên hoặc một số thập phân đến một hàng nào đó thì số nhận được gọi là *số quy tròn* của số ban đầu.

*Nhận xét*: Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn. Như vậy, độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.

Từ nhận xét trên ta có thể viết số quy tròn của số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước.

***Ví dụ 3.*** Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác $d$ :

a) 2841331 với $d = 400$;

b) 4,1463 với $d = 0,01$;

c) $1,4142135\ldots$ với $d = 0,001$.

***Giải***

a) Vì độ chính xác $d = 400$ thoả mãn $100 < 400 < 500$ nên

ta quy tròn số 2841331 đến hàng nghìn theo quy tắc ở trên

Vậy số quy tròn của số 2841331 với độ chính xác $d = 400$ là 2841000.

b) Vì độ chính xác $d = 0,01$ thoả mãn $0,01 < 0,05$ nên ta quy tròn số 4,1463 đến hàng phần mười theo quy tắc ở trên.

Vậy số quy tròn của số 4,1463 với độ chính xác $d = 0,01$ là 4,1.

c) Vì độ chính xác $d = 0,001$ thoả mãn $0,001 < 0,005$ nên ta quy tròn số $1,4142135\ldots$ đến hàng phần trăm theo quy tắc ở trên.

Vậy số quy tròn của số $1,4142135\ldots$ với độ chính xác $d = 0,001$ là 1,41.

***Ví dụ 4.*** Một tờ giấy A4 có dạng hình chữ nhật với chiều dài, chiều rộng lần lượt là $29,7\,cm$ và $21cm$. Tính độ dài đường chéo của tờ giấy $A4$ đó và xác định độ chính xác của kết quả tìm được.

***Giải***

Gọi $x$ là độ dài đường chéo của tờ giấy $A4$ đã cho. Theo định li Pythagore, ta có:

$x = \sqrt{29,7^2 + 21^2} = \sqrt{882,09 + 441} = \sqrt{1323,09} = 36,3743\ldots$

Nếu lấy giá trị gần đúng của $x$ là 36,37 ta có: $36,37 < x < 36,375$.

Suy ra $|x - 36,37| < 36,375 - 36,37 = 0,005$.

Vậy độ dài đường chéo của tờ giấy $A4$ đã cho là $x \approx 36,37$ và độ chính xác của kết quả tìm được là 0,005, hay nói cách khác $x = 36,37 \pm 0,005$.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Kết quả đo chiều dài của một cây cầu được ghi là $152m \pm 0.2m$, điều đó có nghĩa là gì?

**Câu 2.** Độ dài của cái cầu bến thủy hai (Nghệ An) người ta đo được là $996m \pm 0,5m$. Sai số tương đối tối đa trong phép đo là bao nhiêu.

**Câu 3.** Hãy xác định sai số tuyệt đối của các số gần đúng $a$, $b$ biết sai số tương đối của chúng.

a) $a = 123456$, $\delta_a = 0,2\%$ b) $a = 1,24358$, $\delta_a = 0,5\%$

**Câu 4.** Làm tròn các số sau với độ chính xác cho trước.

a) $a = 2,235$ với độ chính xác $d = 0,002$

b) $a = 23748023$ với độ chính xác $d = 101$

**Câu 5.** a) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn biết $\sqrt{8} = 2,8284...$. Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

b) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ chính xác đến hàng chục và hàng trăm biết $\sqrt[3]{2015^4} = 25450,71...$. Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

**Câu 6.** Một cái ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x = 23m \pm 0,01m$ và chiều rộng là $y = 15m \pm 0,01m$. Chứng minh rằng

a) Chu vi của ruộng là $P = 76m \pm 0,04m$

b) Diện tích của ruộng là $S = 345m \pm 0,3801m$

**Câu 7.** Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của mỗi số sau, chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn:

a) $\sqrt{3}$ ; b) $\pi^2$.

**Câu 8.** Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác d được cho sau đây:

a) $\overline{a} = 17658 \pm 16$ ; b) $\overline{a} = 15,318 \pm 0,056$.

**Câu 9.** Cho số $x = \frac{2}{7}$. Cho các giá trị gần đúng của $x$ là: $0,28$ ; $0,29$ ; $0,286$. Hãy xác định sai số tuyệt đối trong từng trường hợp và cho biết giá trị gần đúng nào là tốt nhất.

**Câu 10.** Một miếng đất hình chữ nhật có chiều rộng $x = 43m \pm 0,5m$ và chiều dài $y = 63m \pm 0,5m$. Chứng minh rằng chu vi P của miếng đất là $P = 212m \pm 2m$.

**Câu 11.** Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh đo được như sau:

$a = 12\,cm \pm 0,2\,cm$; $b = 10,2\,cm \pm 0,2\,cm$ ; $c = 8\,cm \pm 0,1\,cm$.

Tính chu vi P của tam giác và đánh giá sai số tuyệt đối, sai số tương đối của số gần đúng của chu vi qua phép đo.

**Câu 12.** Tìm số chắc và viết dạng chuẩn của số gần đúng $a$ biết

a) Số người dân tỉnh Nghệ An là $a = 3214056$ người với độ chính xác $d = 100$ người.

b) $a = 1,3462$ sai số tương đối của $a$ bằng $1\%$.

**Câu 13.** Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn

a) $a = 467346 \pm 12$ b) $b = 2,4653245 \pm 0,006$

**Câu 14.** Các nhà khoa học Mỹ đang nghiên cứu liệu một máy bay có thể có tốc độ gấp bảy lần tốc độ ánh sáng. Với máy bay đó trong một năm(giả sử một năm có 365 ngày) nó bay được bao nhiêu? Biết vận tốc ánh sáng là 300 nghìn km/s. Viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học.

**Câu 15.** Một hình lập phương có thể tích $V = 180,57cm^3 \pm 0,05cm^3$. Xác định các chữ số chắc chắn của V.

**Câu 16.** Số dân của một tỉnh là A = $1034258 \pm 300$ (người). Hãy tìm các chữ số chắc và viết A dưới dạng chuẩn.

**Câu 17.** Người ta đo chu vi của một khu vườn là $P = 213,7m \pm 1,2m$. Hãy đánh giá sai số tương đối của phép đo trên và viết kết quả tìm được dưới dạng khoa học.

**Câu 18.** Khi xây một hồ cá hình tròn người ta đo được đường kính của hồ là 8,52m với độ chính xác đến 1cm. Hãy đánh giá sai số tương đối của phép đo trên và viết kết quả tìm được dưới dạng khoa học.

**Câu 19.** Đo chiều dài của một con dốc, ta được số đo $a = 192,55\ m$, với sai số tương đối không vượt quá 0,3%. Hãy tìm các chữ số chắc của d và nêu cách viết chuẩn giá trị gần đúng của $a$.

**Câu 20.** Cho $3,141592 < \pi < 3,141593$. Hãy viết giá trị gần đúng của số $\pi$ dưới dạng chuẩn và đánh giá sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng này trong mỗi trường hợp sau:

a) Giá trị gần đúng của $\pi$ có 5 chữ số chắc ;
b) Giá trị gần đúng của $\pi$ có 6 chữ số chắc ;
c) Giá trị gần đúng của $\pi$ có 3 chữ số chắc.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Cho hình chữ nhật *ABCD*. Gọi *AL* và *CI* tương ứng là đường cao của các tam giác *ADB* và *BCD*. Cho biết $DL = LI = IB = 1$. Diện tích của hình chữ nhật *ABCD* (chính xác đến hàng phần trăm) là:

**A.** 4,24 **B.** 2,242 **C.** 4,2 **D.** 4,2426

**Câu 2.** Biết số gần đúng $a = 37975421$ có độ chính xác $d = 150$. Hãy xác định các chữ số đáng tin của *a*.

**A.** 3, 7, 9 **B.** 3, 7, 9, 7 **C.** 3, 7, 9, 7, 5 **D.** 3, 7, 9, 7, 5, 4

**Câu 3.** Biết số gần đúng $a = 7975421$ có độ chính xác $d = 150$. Hãy ước lượng sai số tương đối của *a*.

**A.** $\delta_a \le 0,0000099$ **B.** $\delta_a \le 0,000039$ **C.** $\delta_a \ge 0,0000039$ **D.** $\delta_a < 0,000039$

**Câu 4.** Biết số gần đúng $a = 173,4592$ có sai số tương đối không vượt quá $\frac{1}{10000}$, hãy ước lượng sai số tuyệt đối của *a* và viết *a* dưới dạng chuẩn.

**A.** $\Delta_a \le 0,17; a = 173,4$ **B.** $\Delta_a \le 0,017; a = 173,5$

**C.** $\Delta_a \le 0,4592; a = 173,5$ **D.** $\Delta_a \le 0,017; a = 173,4$

**Câu 5.** Tính chu vi của hình chữ nhật có các cạnh là $x = 3,456 \pm 0,01$ $(m)$ và $y = 12,732 \pm 0,015$ $(m)$ và ước lượng sai số tuyệt đối mắc phải.

**A.** $L = 32,376 \pm 0,025; \Delta_L \le 0,05$ **B.** $L = 32,376 \pm 0,05; \Delta_L \le 0,025$

**C.** $L = 32,376 \pm 0,5; \Delta_L \le 0,5$ **D.** $L = 32,376 \pm 0,05; \Delta_L \le 0,05$

**Câu 6.** Tính diện tích *S* của hình chữ nhật có các cạnh là $x = 3,456 \pm 0,01$ $(m)$ và $y = 12,732 \pm 0,015$ $(m)$ và ước lượng sai số tuyệt đối mắc phải.

**A.** $S = 44,002\ (m^2);\ \Delta_S \le 0,176$ **B.** $S = 44,002\ (m^2);\ \Delta_S \le 0,0015$

**C.** $S = 44,002\ (m^2);\ \Delta_S \le 0,025$ **D.** $S = 44,002\ (m^2);\ \Delta_S < 0,0025$

**Câu 7.** Xấp xỉ số π bởi số $\frac{355}{113}$. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối biết: $3,14159265 < \pi < 3,14159266$.

**A.** $\Delta_a \le 2,8.10^{-7}$ **B.** $\Delta_a \le 28.10^{-7}$ **C.** $\Delta_a \le 1.10^{-7}$ **D.** $\Delta_a \le 2,8.10^{-6}$

**Câu 8.** Độ cao của một ngọn núi đo được là $h = 1372,5m$. Với sai số tương đối mắc phải là $0,5‰$. Hãy xác định sai số tuyệt đối của kết quả đo trên và viết *h* dưới dạng chuẩn.

**A.** $\Delta_h = 0,68625; h = 1373(m)$ **B.** $\Delta_h = 0,68626; h = 1372(m)$

**C.** $\Delta_h = 0,68625; h = 1372(m)$ **D.** $\Delta_h = 0,68626; h = 1373(m)$

**Câu 9.** Kết quả đo chiều dài một cây cầu có độ chính xác là $0,75m$ với dụng cụ đo đảm bảo sai số tương đối không vượt quá $1,5‰$. Tính độ dài gần đúng của cầu.

**A.** $500,1m$ **B.** $499,9m$ **C.** $500\ m$ **D.** $501\ m$

**Câu 10.** Theo thống kê, dân số Việt Nam năm 2002 là 79715675 người. Giả sử sai số tuyệt đối của thống kê này không vượt quá 10000 người, hãy viết số trên dưới dạng chuẩn và ước lượng sai số tương đối của số liệu thống kê trên.

**A.** $a = 797.10^5, \delta_a = 0,0001254$ **B.** $a = 797.10^4, \delta_a = 0,000012$

**C.** $a = 797.10^6, \delta_a = 0,001254$ **D.** $a = 797.10^5,\ \delta_a < 0,00012$

**Câu 11.** Độ cao của một ngọn núi đo được là $h = 2373,5m$ với sai số tương đối mắc phải là $0,5‰$. Hãy viết $h$ dưới dạng chuẩn.

**A.** $2373\ m$ **B.** $2370\ m$ **C.** $2373,5\ m$ **D.** $2374\ m$

**Câu 12.** Trong một phòng thí nghiệm, hằng số $c$ được xác định gần đúng là 3,54965 với độ chính xác $d = 0,00321$. Dựa vào $d$, hãy xác định chữ số chắc chắn của $c$.

**A.** 3; 5; 4 **B.** 3; 5; 4; 9 **C.** 3; 5; 4; 9; 6 **D.** 3; 5; 4; 9; 6; 5

**Câu 13.** Cho giá trị gần đúng của $\frac{8}{17}$ là $0,47$. Sai số tuyệt đối của số $0,47$ là:

**A.** $0,001$. **B.** $0,002$. **C.** $0,003$. **D.** $0,004$.

**Câu 14.** Cho giá trị gần đúng của $\frac{3}{7}$ là $0,429$. Sai số tuyệt đối của số $0,429$ là:

**A.** $0,0001$. **B.** $0,0002$. **C.** $0,0004$. **D.** $0,0005$.

**Câu 15.** Qua điều tra dân số kết quả thu được số đân ở tỉnh B là $2.731.425$ người với sai số ước lượng không quá $200$ người. Các chữ số **không** đáng tin ở các hàng là:

**A.** Hàng đơn vị. **B.** Hàng chục. **C.** Hàng trăm. **D.** Cả A, B, **C.**

**Câu 16.** Nếu lấy $3,14$ làm giá trị gần đúng của $\pi$ thì sai số là:

**A.** $0,001$. **B.** $0,002$. **C.** $0,003$. **D.** $0,004$.

**Câu 17.** Nếu lấy $3,1416$ làm giá trị gần đúng của $\pi$ thì có số chữ số chắc là:

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 18.** Số gần đúng của $a = 2,57656$ có ba chữ số đáng tin viết dưới dạng chuẩn là:

**A.** $2,57$. **B.** $2,576$. **C.** $2,58$. **D.** $2,577$.

**Câu 19.** Trong số gần đúng $a$ dưới đây có bao nhiêu chữ số chắc $a = 174325$ với $\Delta_a = 17$

**A.** $6$. **B.** $5$. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Câu 20.** Trái đất quay một vòng quanh mặt trời là 365 ngày. Kết quả này có độ chính xác là $\frac{1}{4}$ ngày. Sai số tuyệt đối là:

**A.** $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{365}$. **C.** $\frac{1}{1460}$. **D.** Đáp án khác.

**Câu 21.** Độ dài các cạnh của một đám vườn hình chữ nhật là $x = 7,8m \pm 2cm$ và $y = 25,6m \pm 4cm$. Số đo chu vi của đám vườn dưới dạng chuẩn là:

**A.** $66m \pm 12cm$. **B.** $67m \pm 11cm$. **C.** $66m \pm 11cm$. **D.** $67m \pm 12cm$.

**Câu 22.** Độ dài các cạnh của một đám vườn hình chữ nhật là $x = 7,8m \pm 2cm$ và $y = 25,6m \pm 4cm$. Cách viết chuẩn của diện tích (sau khi quy tròn) là:

**A.** $199m^2 \pm 0,8m^2$. **B.** $199m^2 \pm 1m^2$. **C.** $200m^2 \pm 1cm^2$. **D.** $200m^2 \pm 0,9m^2$.

**Câu 23.** Một hình chữ nhật cố các cạnh: $x = 4,2m \pm 1cm$, $y = 7m \pm 2cm$. Chu vi của hình chữ nhật và sai số tuyệt đối của giá trị đó.

**A.** $22,4m$ và $3cm$. **B.** $22,4m$ và $1cm$. **C.** $22,4m$ và $2cm$. **D.** $22,4m$ và $6cm$.

**Câu 24.** Hình chữ nhật có các cạnh: $x = 2m \pm 1cm$, $y = 5m \pm 2cm$. Diện tích hình chữ nhật và sai số tuyệt đối của giá trị đó là:

**A.** $10m^2$ và $900cm^2$. **B.** $10m^2$ và $500cm^2$. **C.** $10m^2$ và $400cm^2$. **D.** $10m^2$ và $1404\,cm^2$.

**Câu 25.** Trong bốn lần cân một lượng hóa chất làm thí nghiệm ta thu được các kết quả sau đây với độ chính xác $0,001g$: $5,382g$; $5,384g$; $5,385g$; $5,386g$. Sai số tuyệt đối và số chữ số chắc của kết quả là:

**A.** Sai số tuyệt đối là $0,001g$ và số chữ số chắc là $3$ chữ số.

**B.** Sai số tuyệt đối là $0,001g$ và số chữ số chắc là $4$ chữ số.

**C.** Sai số tuyệt đối là $0,002g$ và số chữ số chắc là $3$ chữ số.

**D.** Sai số tuyệt đối là $0,002g$ và số chữ số chắc là $4$ chữ số.

**Câu 26.** Một hình chữ nhật cố diện tích là $S = 180,57cm^2 \pm 0,6cm^2$. Kết quả gần đúng của $S$ viết dưới dạng chuẩn là:

**A.** $180,58cm^2$. **B.** $180,59cm^2$. **C.** $0,181cm^2$. **D.** $181,01cm^2$.

**Câu 27.** Đường kính của một đồng hồ cát là $8,52m$ với độ chính xác đến $1cm$. Dùng giá trị gần đúng của $\pi$ là 3,14 cách viết chuẩn của chu vi (sau khi quy tròn) là:

**A.** 26,6. **B.** 26,7. **C.** 26,8. **D.** Đáp án khác.

**Câu 28.** Một hình lập phương có cạnh là $2,4m \pm 1cm$. Cách viết chuẩn của diện tích toàn phần (sau khi quy tròn) là:

**A.** $35m^2 \pm 0,3m^2$. **B.** $34m^2 \pm 0,3m^2$. **C.** $34,5m^2 \pm 0,3m^2$. **D.** $34,5m^2 \pm 0,1m^2$.

**Câu 29.** Một vật thể có thể tích $V = 180,37cm^3 \pm 0,05cm^3$. Sai số tương đối của gia trị gần đúng ấy là:

**A.** $0,01\%$. **B.** $0,03\%$. **C.** $0,04\%$. **D.** $0,05\%$.

**Câu 30.** Cho giá trị gần đúng của $\frac{23}{7}$ là 3,28. Sai số tuyệt đối của số 3,28 là:

**A.** 0,04. **B.** $\frac{0,04}{7}$. **C.** 0,06. **D.** Đáp án khác.

**Câu 31.** Trong các thí nghiệm hằng số $C$ được xác định là 5,73675 với cận trên sai số tuyệt đối là $d = 0,00421$. Viết chuẩn giá trị gần đúng của $C$ là:

**A.** 5,74. **B.** 5,736. **C.** 5,737. **D.** 5,7368.

**Câu 32.** Cho số $a = 1754731$, trong đó chỉ có chữ số hàng trăm trở lên là đáng tin. Hãy viết chuẩn số gần đúng của $a$.

**A.** $17547.10^2$. **B.** $17548.10^2$. **C.** $1754.10^3$. **D.** $1755.10^2$.

**Câu 33.** Hình chữ nhật có các cạnh: $x = 2m \pm 1cm$, $y = 5m \pm 2cm$. Diện tích hình chữ nhật và sai số tương đối của giá trị đó là:

**A.** $10m^2$ và $5‰$. **B.** $10m^2$ và $4‰$. **C.** $10m^2$ và $9‰$. **D.** $10m^2$ và $20‰$.

**Câu 34.** Hình chữ nhật có các cạnh: $x = 2m \pm 1cm$, $y = 5m \pm 2cm$. Chu vi hình chữ nhật và sai số tương đối của giá trị đó là:

**A.** $22,4$ và $\frac{1}{2240}$. **B.** $22,4$ và $\frac{6}{2240}$. **C.** $22,4$ và $6cm$. **D.** Một đáp số khác.

**Câu 35.** Một hình chữ nhật có diện tích là $S=108,57cm^2\pm0,06cm^2$. Số các chữ số chắc của $S$ là:

**A.** 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 36.** Ký hiệu khoa học của số $-0,000567$ là:

**A.** $-567.10^{-6}$. **B.** $-5,67.10^{-5}$. **C.** $-567.10^{-4}$. **D.** $-567.10^{-3}$.

**Câu 37.** Khi sử dụng máy tính bỏ túi với 10 chữ số thập phân ta được: $\sqrt{8}=2,828427125$ .Giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ chính xác đến hàng phần trăm là:

**A.** $2,80$. **B.** $2,81$. **C.** $2,82$. **D.** $2,83$.

**Câu 38.** Viết giá trị gần đúng của $\sqrt{10}$ đến hàng phần trăm (dùng MTBT):

**A.** $3,16$. **B.** $3,17$. **C.** $3,10$. **D.** $3,162$.

**Câu 39.** Độ dài của một cây cầu người ta đo được là $996\text{m}\pm0,5\text{m}$. Sai số tương đối tối đa trong phép đo là bao nhiêu.

**A.** $0,05\%$ **B.** $0,5\%$ **C.** $0,25\%$ **D.** $0,025\%$

**Câu 40.** Số $\overline{a}$ được cho bởi số gần đúng $a=5,7824$ với sai số tương đối không vượt quá $0,5\%$. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của $\overline{a}$.

**A.** $2,9\%$ **B.** $2,89\%$ **C.** $2,5\%$ **D.** $0,5\%$

**Câu 41.** Cho số $x=\frac{2}{7}$ và các giá trị gần đúng của $x$ là $0,28$ ; $0,29$ ; $0,286$ ; $0,3$. Hãy xác định sai số tuyệt đối trong từng trường hợp và cho biết giá trị gần đúng nào là tốt nhất.

**A.** $0,28$ **B.** $0,29$ **C.** $0,286$ **D.** $0,3$

**Câu 42.** Một cái ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x=23\text{m}\pm0,01\text{m}$ và chiều rộng là $y=15\text{m}\pm0,01\text{m}$. Chu vi của ruộng là:

**A.** $P=76\text{m}\pm0,4\text{m}$ **B.** $P=76\text{m}\pm0,04\text{m}$ **C.** $P=76\text{m}\pm0,02\text{m}$ **D.** $P=76\text{m}\pm0,08\text{m}$

**Câu 43.** Một cái ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x=23\text{m}\pm0,01\text{m}$ và chiều rộng là $y=15\text{m}\pm0,01\text{m}$. Diện tích của ruộng là:

**A.** $S=345\text{m}\pm0,3801\text{m}$. **B.** $S=345\text{m}\pm0,38\text{m}$.

**C.** $S=345\text{m}\pm0,03801\text{m}$. **D.** $S=345\text{m}\pm0,3801\text{m}$.

**Câu 44.** Cho tam giác $ABC$ có độ dài ba cạnh đo được như sau $a=12\,\text{cm}\pm0,2\,\text{cm}$; $b=10,2\,\text{cm}\pm0,2\,\text{cm}$; $c=8\,\text{cm}\pm0,1\text{cm}$. Tính chu vi $P$ của tam giác và đánh giá sai số tuyệt đối, sai số tương đối của số gần đúng của chu vi qua phép đo.

**A.** $1,6\%$ **B.** $1,7\%$ **C.** $1,662\%$ **D.** $1,66\%$

**Câu 45.** Viết giá trị gần đúng của số $\sqrt{3}$, chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn

**A.** $1,73;1,733$ **B.** $1,7;1,73$ **C.** $1,732;1,7323$ **D.** $1,73;1,732$.

**Câu 46.** Viết giá trị gần đúng của số $\pi^2$, chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.

**A.** $9,9$, $9,87$ **B.** $9,87$, $9,870$ **C.** $9,87$, $9,87$ **D.** $9,870$, $9,87$.

**Câu 47.** Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác $d$ được cho sau đây $\overline{a}=17658\pm16$.

**A.** 18000 **B.** 17800 **C.** 17600 **D.** 17700.

**Câu 48.** Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác $d$ được cho sau đây
$\overline{a}=17658\pm 16$ $\overline{a}=15,318\pm 0,056$.

**A.** 15 **B.** $15,5$ **C.** $15,3$ **D.** 16.

**Câu 49.** Các nhà khoa học Mỹ đang nghiên cứu liệu một máy bay có thể có tốc độ gấp bảy lần tốc độ ánh sáng. Với máy bay đó trong một năm (giả sử một năm có 365 ngày) nó bay được bao nhiêu? Biết vận tốc ánh sáng là 300 nghìn km/s. Viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học.

**A.** $9,5.10^9$. **B.** $9,4608.10^9$. **C.** $9,461.10^9$. **D.** $9,46080.10^9$.

**Câu 50.** Số dân của một tỉnh là $A=1034258\pm 300$ (người). Hãy tìm các chữ số chắc.

**A.** 1, 0, 3, 4, 5. **B.** 1, 0, 3, 4. **C.** 1, 0, 3, 4. **D.** 1, 0, 3.

**Câu 51.** Đo chiều dài của một con dốc, ta được số đo $a=$ 192,55 m, với sai số tương đối không vượt quá $0,3\%$. Hãy tìm các chữ số chắc của $d$ và nêu cách viết chuẩn giá trị gần đúng của $a$.

**A.** 193 m. **B.** 192 m. **C.** 192,6 m. **D.** 190 m.

**Câu 52.** Viết dạng chuẩn của số gần đúng $a$ biết số người dân tỉnh Lâm Đồng là $a=3214056$ người với độ chính xác $d=100$ người.

**A.** $3214.10^3$. **B.** 3214000. **C.** $3.10^6$. **D.** $32.10^5$.

**Câu 53.** Tìm số chắc và viết dạng chuẩn của số gần đúng $a$ biết $a=1,3462$ sai số tương đối của $a$ bằng $1\%$.

**A.** $1,3$. **B.** $1,34$. **C.** $1,35$. **D.** $1,346$.

**Câu 54.** Một hình lập phương có thể tích $V=180,57\text{cm}^3\pm 0,05\text{cm}^3$. Xác định các chữ số chắc chắn của $V$.

**A.** $1,8$. **B.** $1,8,0$. **C.** $1,8,0,5$. **D.** $1,8,0,5,7$.

**Câu 55.** Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn $a=467346\pm 12$.

**A.** 46735.10. **B.** $47.10^4$. **C.** $467.10^3$. **D.** $4673.10^2$.

**Câu 56.** Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn $b=2,4653245\pm 0,006$.

**A.** $2,46$. **B.** $2,47$. **C.** $2,5$. **D.** $2,465$.

**Câu 57.** Quy tròn số $7216,4$ đến hàng đơn vị, được số $7216$. Sai số tuyệt đối là:

**A.** $0,2$. **B.** $0,3$. **C.** $0,4$. **D.** $0,6$.

**Câu 58.** Quy tròn số $2,654$ đến hàng phần chục, được số $2,7$. Sai số tuyệt đối là:.

**A.** $0,05$. **B.** $0,04$. **C.** $0,046$. **D.** $0,1$.

**Câu 59.** Trong 5 lần đo độ cao một đạp nước, người ta thu được các kết quả sau với độ chính xác 1dm: 15,6m; 15,8m; 15,4m; 15,7m; 15,9m. Hãy xác định độ cao của đập nước.

**A.** $\Delta_{h'}=3dm$. **B.** $16m\pm 3dm$. **C.** $15,5m\pm 1dm$. **D.** $15,6m\pm 0,6dm$.

# Bài 1. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

**PHẦN A. LÝ THUYẾT**

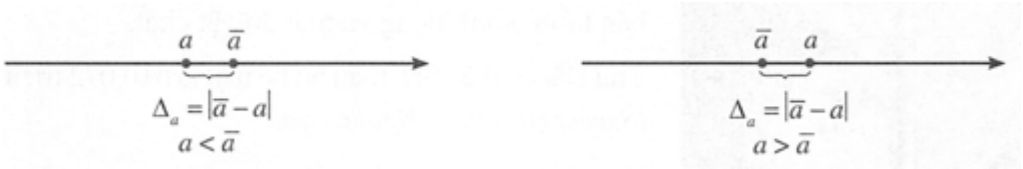
## I. Số gần đúng

Trong đo đạc và tính toán, ta thường chỉ nhận được các số gần đúng

## II. Sai số của số gần đúng

### 1. Sai số tuyệt đối

Nếu $a$ là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là *sai số tuyệt đối* của số gần đúng $a$.




***Ví dụ 1.*** Một bồn hoa có dạng hình tròn với bán kính là $0,8m$. Hai bạn Ngân và Ánh cùng muốn tính diện tích $S$ của bồn hoa đó. Bạn Ngân lấy một giá trị gần đúng của $\pi$ là 3,1 và được kết quả là $S_1$. Bạn Ánh lấy một giá trị gần đúng của $\pi$ là 3,14 và được kết quả là $S_2$. So sánh sai số tuyệt đối $\Delta_{S_1}$ của số gần đúng $S_1$ và sai số tuyệt đối $\Delta_{S_2}$ của số gần đúng $S_2$. Bạn nào cho kết quả chính xác hơn?

***Giải***

Ta có: $S_1 = 3,1 \cdot (0,8)^2 = 1,984\left(m^2\right)$

$S_2 = 3,14.(0,8)^2 = 2,0096\left(m^2\right)$.

Ta thấy: $3,1 < 3,14 < \pi$ nên $3,1 \cdot (0,8)^2 < 3,14 \cdot (0,8)^2 < \pi . (0,8)^2$ tức là $S_1 < S_2 < S$.

Suy ra $\Delta_{S_2} = |S - S_2| < |S - S_1| = \Delta_{S_1}$. Vậy bạn Ánh cho kết quả chính xác hơn.

***Chú ý:*** Sai số tuyệt đối của số gần đúng nhận được trong một phép đo đạc, tính toán càng bé thì kết quả của phép đo đạc, tính toán đó càng chinh xác.

### 2. Độ chính xác của một số gần đúng

***Nhận xét:*** Giả sử $a$ là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ sao cho $\Delta_a = |\overline{a} - a| \le d$.

Khi đó: $\Delta_a = |\overline{a} - a| \le d \Leftrightarrow -d \le \overline{a} - a \le d \Leftrightarrow a - d \le \overline{a} \le a + d$.

Một cách tổng quát:

Ta nói $a$ là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ với độ chính xác $d$ nếu $\Delta_a = |\overline{a} - a| \le d$ và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.

*Nhận xét*: Nếu $\Delta_a \le d$ thì số đúng $\overline{a}$ nằm trong đoạn $[a-d; a+d]$. Bởi vậy, $d$ càng nhỏ thì độ sai lệch của số gần đúng $a$ so với số đúng $\overline{a}$ càng ít. Điều đó giải thích vì sao $d$ được gọi là độ chính xác của số gần đúng.

***Ví dụ 2.*** Hãy ước lượng sai số tuyệt đối $\Delta_{S_2}$ ở ***Ví dụ 1*** **.**

***Giải***

Do $3,14 < \pi < 3,15$ nên $3,14.(0,8)^2 < \pi . (0,8)^2 < 3,15 . (0,8)^2$. Suy ra $2,0096 < S < 2,016$.

Vậy $\Delta_{S_2} = |S - S_2| < 2,016 - 2,0096 = 0,0064$.

Ta nói: Kết quả của bạn Ánh có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0064 hay có độ chính xác là 0,0064 . Khi đó ta có thể viết $S = 2,0096 \pm 0,0064$.

## 3. Sai số tương đối

Tỉ số $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$ được gọi *là sai số tương đối* của số gần đúng $a$.

*Nhận xét*

- Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \le d$. Do đó $\delta_a \le \frac{d}{|a|}$. Vì vậy, nếu $\frac{d}{|a|}$ càng bé thì chất lượng của phép đo đạc hay tính toán càng cao.
- Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm. Chẳng hạn, trong phép đo thời gian Trái Đất quay một vòng xung quanh Mặt Trời thì sai số tương đối không vượt quá

$$\frac{\frac{1}{4}}{365} = \frac{1}{1460} \approx 0,068\%.$$

## III. Số quy tròn. Quy tròn số gần đúng

*Nhận xét:* Khi quy tròn số 123456 đến hàng trăm ta được số 123500. Số 123500 gọi là số quy tròn của số ban đầu.

Khi quy tròn một số nguyên hoặc một số thập phân đến một hàng nào đó thì số nhận được gọi là *số quy tròn* của số ban đầu.

*Nhận xét*: Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn. Như vậy, độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.

Từ nhận xét trên ta có thể viết số quy tròn của số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước.

***Ví dụ 3.*** Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác $d$ :

a) 2841331 với $d = 400$;

b) 4,1463 với $d = 0,01$;

c) $1,4142135\ldots$ với $d = 0,001$.

***Giải***

a) Vì độ chính xác $d = 400$ thoả mãn $100 < 400 < 500$ nên

ta quy tròn số 2841331 đến hàng nghìn theo quy tắc ở trên

Vậy số quy tròn của số 2841331 với độ chính xác $d = 400$ là 2841000.

b) Vì độ chính xác $d = 0,01$ thoả mãn $0,01 < 0,05$ nên ta quy tròn số 4,1463 đến hàng phần mười theo quy tắc ở trên.

Vậy số quy tròn của số 4,1463 với độ chính xác $d = 0,01$ là 4,1.

c) Vì độ chính xác $d = 0,001$ thoả mãn $0,001 < 0,005$ nên ta quy tròn số $1,4142135\ldots$ đến hàng phần trăm theo quy tắc ở trên.

Vậy số quy tròn của số $1,4142135\ldots$ với độ chính xác $d = 0,001$ là 1,41.

***Ví dụ 4.*** Một tờ giấy A4 có dạng hình chữ nhật với chiều dài, chiều rộng lần lượt là $29,7\,cm$ và $21cm$. Tính độ dài đường chéo của tờ giấy $A4$ đó và xác định độ chính xác của kết quả tìm được.

***Giải***

Gọi $x$ là độ dài đường chéo của tờ giấy $A4$ đã cho. Theo định li Pythagore, ta có:

$x = \sqrt{29,7^2 + 21^2} = \sqrt{882,09 + 441} = \sqrt{1323,09} = 36,3743\ldots$

Nếu lấy giá trị gần đúng của $x$ là 36,37 ta có: $36,37 < x < 36,375$.

Suy ra $|x - 36,37| < 36,375 - 36,37 = 0,005$.

Vậy độ dài đường chéo của tờ giấy $A4$ đã cho là $x \approx 36,37$ và độ chính xác của kết quả tìm được là 0,005, hay nói cách khác $x = 36,37 \pm 0,005$.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Kết quả đo chiều dài của một cây cầu được ghi là $152m \pm 0.2m$, điều đó có nghĩa là gì?

**Lời giải**

Có nghĩa là chiều dài của cây cầu nằm trong khoảng 151,8m đến 152,2m

**Câu 2.** Độ dài của cái cầu bến thủy hai (Nghệ An) người ta đo được là $996m \pm 0,5m$. Sai số tương đối tối đa trong phép đo là bao nhiêu.

**Lời giải**

Ta có độ dài gần đúng của cầu là $a = 996$ với độ chính xác $\mathrm{d} = 0,5$

Vì sai số tuyệt đối $\Delta_a \le d = 0,5$ nên sai số tương đối $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} \le \dfrac{d}{|a|} = \dfrac{0,5}{996} \approx 0,05\%$

Vậy sai số tương đối tối đa trong phép đo trên là $0,05\%$.

**Câu 3.** Hãy xác định sai số tuyệt đối của các số gần đúng $a$, $b$ biết sai số tương đối của chúng.

a) $a = 123456$, $\delta_a = 0,2\%$ b) $a = 1,24358$, $\delta_a = 0,5\%$

**Lời giải**

Ta có $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} \Leftrightarrow \Delta_a = |a|\delta_a$

a) Với $a = 123456$, $\delta_a = 0,2\%$ ta có sai số tuyệt đối là

$\Delta_a = 123456.0,2\% = 146,912$

b) Với $a = 1,24358$, $\delta_a = 0,5\%$ ta có sai số tuyệt đối là

$\Delta_a = 1,24358.0,5\% = 0,0062179$.

**Câu 4.** Làm tròn các số sau với độ chính xác cho trước.

a) $a = 2,235$ với độ chính xác $d = 0,002$

b) $a = 23748023$ với độ chính xác $d = 101$

**Lời giải**

a) Ta có $0,001 < 0,002 < 0,01$ nên hàng cao nhất mà $d$ nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần trăm

Do đó ta phải quy tròn số $a = 2,235$ đến hàng phần trăm suy ra $\bar{a} \approx 2,24$.

b) Ta có $100 < 101 < 1000$ nên hàng cao nhất mà $d$ nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng nghìn

Do đó ta phải quy tròn số $a = 23748023$ đến hàng nghìn suy ra $\bar{a} \approx 23748000$.

**Câu 5.** a) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn biết $\sqrt{8} = 2,8284\ldots$. Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

b) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ chính xác đến hàng chục và hàng trăm biết $\sqrt[3]{2015^4} = 25450,71\ldots$. Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

**Lời giải**

a) Ta có $\sqrt{8} = 2,8284\ldots$ do đó giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ đến hàng phần trăm là $2,83$

Ta có $\left|\sqrt{8} - 2,83\right| = 2,83 - \sqrt{8} \le 2,83 - 2,8284 = 0,0016$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng $2,83$ không vượt quá $0,0016$.

Giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ đến hàng phần nghìn là $2,828$

Ta có $\left|\sqrt{8} - 2,828\right| = \sqrt{8} - 2,828 \le 2,8284 - 2,828 = 0,0004$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng $2,828$ không vượt quá $0,0004$.

b) Sử dụng máy tính bỏ túi ta có $\sqrt[3]{2015^4} = 25450,71966\ldots$

Do đó giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ đến hàng chục là $25450$

Ta có $\left|\sqrt[3]{2015^4} - 25450\right| = \sqrt[3]{2015^4} - 25450 \le 25450,72 - 25450 = 0,72$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng $25450$ không vượt quá $0,72$.

Giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ đến hàng trăm là $25500$.

Ta có $\left|\sqrt[3]{2015^4}-25500\right|=25500-\sqrt[3]{2015^4}\le 25500-25450,71=49,29$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng $25500$ không vượt quá $49,29$.

**Câu 6.** Một cái ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x=23m\pm 0,01m$ và chiều rộng là $y=15m\pm 0,01m$. Chứng minh rằng

a) Chu vi của ruộng là $P=76m\pm 0,04m$

b) Diện tích của ruộng là $S=345m\pm 0,3801m$

**Lời giải**

a) Giả sử $x=23+a,\ y=15+b$ với $-0,01\le a,\ b\le 0,01$

Ta có chu vi ruộng là $P=2\left(x+y\right)=2\left(38+a+b\right)=76+2\left(a+b\right)$

Vì $-0,01\le a,\ b\le 0,01$ nên $-0,04\le 2\left(a+b\right)\le 0,04$

Do đó $\left|P-76\right|=\left|2\left(a+b\right)\right|\le 0,04$

Vậy $P=76m\pm 0,04m$

b) Diện tích ruộng là $S=x.y=\left(23+a\right)\left(15+b\right)=345+23b+15a+ab$

Vì $-0,01\le a,\ b\le 0,01$ nên $\left|23b+15a+ab\right|\le 23.0,01+15.0,01+0,01.0,01$

hay $\left|23b+15a+ab\right|\le 0,3801$ suy ra $\left|S-345\right|\le 0,3801$

Vậy $S=345m\pm 0,3801m$.

**Câu 7.** Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của mỗi số sau, chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn:

a) $\sqrt{3}$ ; b) $\pi^2$.

**Lời giải**

a) Sử dụng máy tính bỏ túi ta có $\sqrt{3}=1,732050808...$ Do đó: Giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần trăm là 1,73. Giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần nghìn là 1,732.

b) Sử dụng máy tính bỏ túi ta có giá trị của $\pi^2$ là 9,8696044. Do đó: Giá trị gần đúng của $\pi^2$ chính xác đến hàng phần trăm là 9,87. Giá trị gần đúng của $\pi^2$ chính xác đến hàng phần nghìn là 9,870.

**Câu 8.** Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác d được cho sau đây:

a) $\overline{a}=17658\pm 16$ ; b) $\overline{a}=15,318\pm 0,056$.

**Lời giải**

a) Vì 10 < 16 < 100 nên hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng trăm. Nên ta phải quy tròn số 17638 đến hàng trăm. Vậy số quy tròn là 17700 (hay viết $\overline{a}\approx 17700$).

b) Ta có 0,01 < 0,056 < 0,1 nên hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần chục. Do đó phải quy tròn số 15,318 đến hàng phần chục. Vậy số quy tròn là 15,3 (hay viết $\overline{a}\approx 15,3$).

**Câu 9.** Cho số $x=\frac{2}{7}$. Cho các giá trị gần đúng của $x$ là: $0,28$ ; $0,29$ ; $0,286$. Hãy xác định sai số tuyệt đối trong từng trường hợp và cho biết giá trị gần đúng nào là tốt nhất.

**Lời giải**

Ta có các sai số tuyệt đối là:

$\Delta_a=\left|\frac{2}{7}-0,28\right|=\frac{1}{175}$ ; $\Delta_b=\left|\frac{2}{7}-0,29\right|=\frac{3}{700}$; $\Delta_c=\left|\frac{2}{7}-0,286\right|=\frac{1}{3500}$.

Vì $\Delta_c<\Delta_b<\Delta_a$ nên c = 0,286 là số gần đúng tốt nhất.

**Câu 10.** Một miếng đất hình chữ nhật có chiều rộng $x = 43m \pm 0,5m$ và chiều dài $y = 63m \pm 0,5m$. Chứng minh rằng chu vi P của miếng đất là $P = 212m \pm 2m$.

**Lời giải**

Giả sử $x = 43 + u,\ y = 63 + v.$

Ta có $P = 2x + 2y = 2\left(43 + 63\right) + 2u + 2v = 212 + 2\left(u + v\right).$

Theo giả thiết $-0,5 \le u \le 0,5$ và $-0,5 \le v \le 0,5$ nên $-2 \le 2\left(u + v\right) \le 2.$

Do đó $P = 212m \pm 2m.$

**Câu 11.** Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh đo được như sau:

$a = 12\,cm \pm 0,2\,cm$; $b = 10,2\,cm \pm 0,2\,cm$ ; $c = 8\,cm \pm 0,1\,cm.$

Tính chu vi P của tam giác và đánh giá sai số tuyệt đối, sai số tương đối của số gần đúng của chu vi qua phép đo.

**Lời giải**

Giả sử $a = 12 + d_1,\ b = 10,2 + d_2,\ c = 8 + d_3.$

Ta có $P = a + b + c + d_1 + d_2 + d_3 = 30,2 + d_1 + d_2 + d_3.$

theo giả thiết: $-0,2 \le d_1 \le 0,2; -0,2 \le d_2 \le 0,2; -0,1 \le d_3 \le 0,1.$

Suy ra $-0,5 \le d_1 + d_2 + d_3 \le 0,5$. Do đó:

$P = 30,2\ cm \pm 0,5\ cm.$

Sai số tuyệt đối: $\Delta_P \le 0,5$. Sai số tương đối: $\delta_P \le \dfrac{d}{P} \approx 1,66\%.$

**Câu 12.** Tìm số chắc và viết dạng chuẩn của số gần đúng $a$ biết

a) Số người dân tỉnh Nghệ An là $a = 3214056$ người với độ chính xác $d = 100$ người.

b) $a = 1,3462$ sai số tương đối của $a$ bằng $1\%$.

**Lời giải**

a) Vì $\dfrac{100}{2} = 50 < 100 < \dfrac{1000}{2} = 500$ nên chữ số hàng trăm(số 0) không là số chắc, còn chữ số hàng nghìn(số 4) là chữ số chắc.

Vậy chữ số chắc là $1,2,3,4$.

Cách viết dưới dạng chuẩn là $3214.10^3$.

b) Ta có $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} \Rightarrow \Delta_a = \delta_a.|a| = 1\%.1,3462 = 0,013462$

Suy ra độ chính xác của số gần đúng $a$ không vượt quá $0,013462$ nên ta có thể xem độ chính xác là $d = 0,013462$.

Ta có $\dfrac{0,01}{2} = 0,005 < 0,013462 < \dfrac{0,1}{2} = 0,05$ nên chữ số hàng phần trăm(số 4) không là số chắc, còn chữ số hàng phần chục(số 3) là chữ số chắc.

Vậy chữ số chắc là $1$ và $3$.

Cách viết dưới dạng chuẩn là $1,3$.

**Câu 13.** Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn

a) $a = 467346 \pm 12$ b) $b = 2,4653245 \pm 0,006$

**Lời giải**

a) Ta có $\dfrac{10}{2} = 5 < 12 < \dfrac{100}{2} = 50$ nên chữ số hàng trăm trở đi là chữ số chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là $4673.10^2$.

b) Ta có $\dfrac{0,01}{2} = 0,005 < 0,006 < \dfrac{0,1}{2} = 0,05$ nên chữ số hàng phần chục trở đi là chữ số chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là $2,5$.

**Câu 14.** Các nhà khoa học Mỹ đang nghiên cứu liệu một máy bay có thể có tốc độ gấp bảy lần tốc độ ánh sáng. Với máy bay đó trong một năm(giả sử một năm có 365 ngày) nó bay được bao nhiêu? Biết vận tốc ánh sáng là 300 nghìn km/s. Viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học.

**Lời giải**

Ta có một năm có 365 ngày, một ngày có 24 giờ, một giờ có 60 phút và một phút có 60 giây

Vậy một năm có $24.365.60.60 = 31536000$ giây.

Vì vận tốc ánh sáng là 300 nghìn km/s nên trong vòng một năm nó đi được

$31536000.300 = 9,4608.10^9$ km.

**Câu 15.** Một hình lập phương có thể tích $V = 180,57cm^3 \pm 0,05cm^3$. Xác định các chữ số chắc chắn của V.

**Lời giải**

Kq : $\frac{0,01}{2} \le 0,05 \le \frac{0,1}{2} \Rightarrow 1,8,0,5$ là chữ số chắc chắn.

**Câu 16.** Số dân của một tỉnh là A = $1034258 \pm 300$ (người). Hãy tìm các chữ số chắc và viết A dưới dạng chuẩn.

**Lời giải**

Ta có: $\frac{100}{2} = 50 < 300 < 500 = \frac{1000}{2}$ nên các chữ số 8 (hàng đơn vị), 5 (hàng chục) và 2 ( hàng trăm) đều là các chữ số không chắc.

Các chữ số còn lại 1, 0, 3, 4 là chữ số chắc.

Do đó cách viết chuẩn của số A là $A \approx 1034.10^3$ (người).

**Câu 17.** Người ta đo chu vi của một khu vườn là $P = 213,7m \pm 1,2m$. Hãy đánh giá sai số tương đối của phép đo trên và viết kết quả tìm được dưới dạng khoa học.

**Lời giải**

$$\text{P} = 213,7m \pm 1,2m \Rightarrow \begin{cases} a = 213,7 \\ d = 1,2 \end{cases} \text{ nên } \delta \le \frac{d}{a} = \frac{1,2}{213,7} = 5,62.10^{-3}$$

**Câu 18.** Khi xây một hồ cá hình tròn người ta đo được đường kính của hồ là 8,52m với độ chính xác đến 1cm. Hãy đánh giá sai số tương đối của phép đo trên và viết kết quả tìm được dưới dạng khoa học.

**Lời giải**

$$R = 8,52m \pm 0,01m \Rightarrow \begin{cases} a = 852cm \\ d = 1cm \end{cases} \text{ nên } \delta \le \frac{d}{a} = \frac{1}{852} = 1,174.10^{-3}$$

**Câu 19.** Đo chiều dài của một con dốc, ta được số đo $a = 192,55\ m$, với sai số tương đối không vượt quá 0,3%. Hãy tìm các chữ số chắc của d và nêu cách viết chuẩn giá trị gần đúng của $a$.

**Lời giải**

Ta có sai số tuyệt đối của số đo chiều dài con dốc là:

$\Delta_a = a.\delta_a \le 192,55.0,2\% = 0,3851$

Vì $0,05 < \Delta_a < 0,5$. Do đó chữ số chắc của d là 1, 9, 2.

Vậy cách viết chuẩn của $a$ là 193 $m$ (quy tròn đến hàng đơn vị).

**Câu 20.** Cho $3,141592 < \pi < 3,141593$. Hãy viết giá trị gần đúng của số $\pi$ dưới dạng chuẩn và đánh giá sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng này trong mỗi trường hợp sau:

a) Giá trị gần đúng của $\pi$ có 5 chữ số chắc ;

b) Giá trị gần đúng của $\pi$ có 6 chữ số chắc ;

c) Giá trị gần đúng của $\pi$ có 3 chữ số chắc.

**Lời giải**

a) Vì có 5 chữ số chắc nên số gần đúng của $\pi$ được viết dưới dạng chuẩn là $3,1416$ (hay $\pi \approx 3,1416$ ).

Sai số tuyệt đối của số gần đúng là $\Delta_\pi = |3,1416 - \pi| \le 0,000008.$

b) Vì có 6 chữ số chắc nên $\pi \approx 3,14159$ và sai số tuyệt đối của số gần đúng này là $\Delta_\pi = |3,14159 - \pi| \le 0,000003$.

c) Vì có 3 chữ số chắc nên $\pi \approx 3,14$ và $\Delta_\pi |3,14 - \pi| \le 0,001593$.

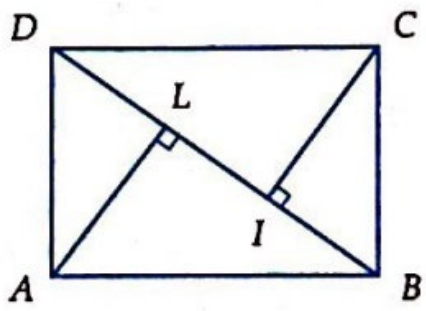
## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Cho hình chữ nhật *ABCD*. Gọi *AL* và *CI* tương ứng là đường cao của các tam giác *ADB* và *BCD*. Cho biết $DL = LI = IB = 1$. Diện tích của hình chữ nhật *ABCD* (chính xác đến hàng phần trăm) là:

**A.** 4,24 **B.** 2,242 **C.** 4,2 **D.** 4,2426

**Lời giải**

**Đáp án A.**




Ta có: $AL^2 = BL.LD = 2$

do đó $AL = \sqrt{2}$.

Lại có $BD = 3$

Suy ra diện tích của hình chữ nhật là:

$3\sqrt{2} = 3.1,41421356... \approx 4,24264... \approx 4,24$

**Câu 2.** Biết số gần đúng $a = 37975421$ có độ chính xác $d = 150$. Hãy xác định các chữ số đáng tin của *a*.

**A.** 3, 7, 9 **B.** 3, 7, 9, 7 **C.** 3, 7, 9, 7, 5 **D.** 3, 7, 9, 7, 5, 4

**Lời giải**

Vì sai số tuyệt đối đến hàng trăm nên các chữ số hàng nghìn trở lên của *a* là đáng tin.

Vậy các chữ số đáng tin của *a* là 3, 7, 9, 7, 5.

**Đáp án C.**

**Câu 3.** Biết số gần đúng $a = 7975421$ có độ chính xác $d = 150$. Hãy ước lượng sai số tương đối của *a*.

**A.** $\delta_a \le 0,0000099$ **B.** $\delta_a \le 0,000039$ **C.** $\delta_a \ge 0,0000039$ **D.** $\delta_a < 0,000039$

**Lời giải**

Theo Ví dụ 1 ta có các chữ số đáng tin của *a* là 3, 7, 9, 7, 5

$\Rightarrow$ Cách viết chuẩn của $a = 37975.10^3$

Sai số tương đối thỏa mãn: $\delta_a \le \dfrac{150}{37975421} = 0,0000039$ (tức là không vượt quá $0,0000039$).

**Câu 4.** Biết số gần đúng $a = 173,4592$ có sai số tương đối không vượt quá $\dfrac{1}{10000}$, hãy ước lượng sai số tuyệt đối của *a* và viết *a* dưới dạng chuẩn.

**A.** $\Delta_a \le 0,17; a = 173,4$ **B.** $\Delta_a \le 0,017; a = 173,5$

**C.** $\Delta_a \le 0,4592; a = 173,5$ **D.** $\Delta_a \le 0,017; a = 173,4$

**Lời giải**

Từ công thức $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$, ta có $\Delta_a \le 173,4592.\dfrac{1}{10000} = 0,017$

Vậy chữ số đáng tin là 1, 7, 3, 4.

Dạng chuẩn của $a$ là $a = 173,5$.

**Đáp án** **B.**

**Câu 5.** Tính chu vi của hình chữ nhật có các cạnh là $x = 3,456 \pm 0,01$ $(m)$ và $y = 12,732 \pm 0,015$ $(m)$ và ước lượng sai số tuyệt đối mắc phải.

**A.** $L = 32,376 \pm 0,025; \Delta_L \le 0,05$ **B.** $L = 32,376 \pm 0,05; \Delta_L \le 0,025$

**C.** $L = 32,376 \pm 0,5; \Delta_L \le 0,5$ **D.** $L = 32,376 \pm 0,05; \Delta_L \le 0,05$

**Lời giải**

Chu vi $L = 2(x+y) = 2(3,456+12,732) = 32,376$ $(m)$

Sai số tuyệt đối $\Delta_L \le 2(0,01+0,015) = 0,05$

Vậy $L = 32,376 \pm 0,05$ $(m)$.

**Đáp án** **D.**

**Câu 6.** Tính diện tích $S$ của hình chữ nhật có các cạnh là $x = 3,456 \pm 0,01$ $(m)$ và $y = 12,732 \pm 0,015$ $(m)$ và ước lượng sai số tuyệt đối mắc phải.

**A.** $S = 44,002$ $(m^2)$; $\Delta_S \le 0,176$ **B.** $S = 44,002$ $(m^2)$; $\Delta_S \le 0,0015$

**C.** $S = 44,002$ $(m^2)$; $\Delta_S \le 0,025$ **D.** $S = 44,002$ $(m^2)$; $\Delta_S < 0,0025$

**Lời giải**

Diện tích $S = xy = 3,456.12,732 = 44,002$ $(m^2)$

Sai số tương đối $\delta_S$ không vượt quá: $\dfrac{0,01}{3,456} + \dfrac{0,015}{12,732} = 0,004$

Sai số tuyệt đối $\Delta_S$ không vượt quá: $S.\delta_S = 44,002.0,004 \approx 0,176$.

**Đáp án** **A.**

**Câu 7.** Xấp xỉ số π bởi số $\dfrac{355}{113}$. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối biết: $3,14159265 < \pi < 3,14159266$.

**A.** $\Delta_a \le 2,8.10^{-7}$ **B.** $\Delta_a \le 28.10^{-7}$ **C.** $\Delta_a \le 1.10^{-7}$ **D.** $\Delta_a \le 2,8.10^{-6}$

**Lời giải**

**Đáp án** **A.**

Ta có (sử dụng máy tính bỏ túi)

$\dfrac{355}{113} \approx 3,14159292... < 3,1415929293$

Do vậy

$0 < \dfrac{355}{113} - \pi < 3,14159293 - 3,14159265$

$\approx 0,00000028$

Vậy sai số tuyệt đối nhỏ hơn $2,8.10^{-7}$.

**Câu 8.** Độ cao của một ngọn núi đo được là $h = 1372,5\,m$. Với sai số tương đối mắc phải là $0,5‰$. Hãy xác định sai số tuyệt đối của kết quả đo trên và viết $h$ dưới dạng chuẩn.

**A.** $\Delta_h = 0,68625; h = 1373(m)$ **B.** $\Delta_h = 0,68626; h = 1372(m)$

**C.** $\Delta_h = 0,68625; h = 1372(m)$ **D.** $\Delta_h = 0,68626; h = 1373(m)$

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Theo công thức $\delta_h = \frac{\Delta_h}{|h|}$ ta có:

$\Delta_h = h.\delta_h = 1372.5.\frac{0,5}{1000} = 0,68625$

Và $h$ viết dưới dạng chuẩn là $h = 1373\ (m)$

**Câu 9.** Kết quả đo chiều dài một cây cầu có độ chính xác là $0,75m$ với dụng cụ đo đảm bảo sai số tương đối không vượt quá $1,5‰$. Tính độ dài gần đúng của cầu.

**A.** $500,1m$ **B.** $499,9m$ **C.** $500\ m$ **D.** $501\ m$

**Lời giải**

**Đáp án C.**

Độ dài $h$ của cây cầu là:

$d \approx \frac{0,75}{1,5}.1000 = 500\ (m)$

**Câu 10.** Theo thống kê, dân số Việt Nam năm 2002 là 79715675 người. Giả sử sai số tuyệt đối của thống kê này không vượt quá 10000 người, hãy viết số trên dưới dạng chuẩn và ước lượng sai số tương đối của số liệu thống kê trên.

**A.** $a = 797.10^5, \delta_a = 0,0001254$ **B.** $a = 797.10^4, \delta_a = 0,000012$

**C.** $a = 797.10^6, \delta_a = 0,001254$ **D.** $a = 797.10^5,\ \delta_a < 0,00012$

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Vì các chữ số đáng tin là 7; 9; 7. Dạng chuẩn của số đã cho là $797.10^5$ (Bảy mươi chín triệu bảy trăm nghìn người). Sai số tương đối mắc phải là:

$\delta_a = \frac{\Delta a}{a} = \frac{10000}{79715675} = 0,0001254$

**Câu 11.** Độ cao của một ngọn núi đo được là $h = 2373,5m$ với sai số tương đối mắc phải là $0,5‰$. Hãy viết $h$ dưới dạng chuẩn.

**A.** $2373\ m$ **B.** $2370\ m$ **C.** $2373,5\ m$ **D.** $2374\ m$

**Lời giải**

**Đáp án B.**

$\delta_h = \frac{\Delta h}{|h|}$, ta có:

$\Delta h = h.\delta_h = 2373,5.\frac{0,5}{1000} = 1,18675$

$h$ viết dưới dạng chuẩn là $h = 2370\ m$.

**Câu 12.** Trong một phòng thí nghiệm, hằng số $c$ được xác định gần đúng là 3,54965 với độ chính xác $d = 0,00321$. Dựa vào $d$, hãy xác định chữ số chắc chắn của $c$.

**A.** 3; 5; 4 **B.** 3; 5; 4; 9 **C.** 3; 5; 4; 9; 6 **D.** 3; 5; 4; 9; 6; 5

**Lời giải**

**Đáp án A.**

Ta có: $0,00321 < 0,005$ nên chữ số 4 (hàng phần trăm) là chữ số chắc chắn, do đó $c$ có 3 chữ số chắc chắn là 3; 5; 4.

**Câu 13.** Cho giá trị gần đúng của $\frac{8}{17}$ là $0,47$. Sai số tuyệt đối của số $0,47$ là:

**A.** $0,001$. **B.** $0,002$. **C.** $0,003$. **D.** $0,004$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $\frac{8}{17}=0,470588235294...$ nên sai số tuyệt đối của $0,47$ là

$\Delta=\left|0,47-\frac{8}{17}\right|<\left|0,47-4,471\right|=0,001$.

**Câu 14.** Cho giá trị gần đúng của $\frac{3}{7}$ là $0,429$. Sai số tuyệt đối của số $0,429$ là:

**A.** $0,0001$. **B.** $0,0002$. **C.** $0,0004$. **D.** $0,0005$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có $\frac{3}{7}=0,428571...$ nên sai số tuyệt đối của $0,429$ là

$\Delta=\left|0,429-\frac{3}{7}\right|<\left|0,429-4,4285\right|=0,0005$.

**Câu 15.** Qua điều tra dân số kết quả thu được số đân ở tỉnh B là $2.731.425$ người với sai số ước lượng không quá $200$ người. Các chữ số **không** đáng tin ở các hàng là:

**A.** Hàng đơn vị. **B.** Hàng chục. **C.** Hàng trăm. **D.** Cả A, B, **C.**

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có $\frac{100}{2}=50<d=200<500=\frac{1000}{2}$ các chữ số đáng tin là các chữ số hàng nghìn trở đi.

**Câu 16.** Nếu lấy $3,14$ làm giá trị gần đúng của $\pi$ thì sai số là:

**A.** $0,001$. **B.** $0,002$. **C.** $0,003$. **D.** $0,004$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $\pi=3,141592654...$ nên sai số tuyệt đối của $3,14$ là

$\Delta=\left|3,14-\pi\right|<\left|3,14-3,141\right|=0,001$.

**Câu 17.** Nếu lấy $3,1416$ làm giá trị gần đúng của $\pi$ thì có số chữ số chắc là:

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $\pi=3,141592654...$ nên sai số tuyệt đối của $3,1416$ là

$\Delta=\left|3,1416-\pi\right|<\left|3,1416-3,1415\right|=0,0001$.

Mà $d=0,0001<0,0005=\frac{0,001}{2}$ nên có 4 chữ số chắc.

**Câu 18.** Số gần đúng của $a=2,57656$ có ba chữ số đáng tin viết dưới dạng chuẩn là:

**A.** $2,57$. **B.** $2,576$. **C.** $2,58$. **D.** $2,577$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Vì $a$ có 3 chữ số đáng tin nên dạng chuẩn là $2,57$.

**Câu 19.** Trong số gần đúng $a$ dưới đây có bao nhiêu chữ số chắc $a=174325$ với $\Delta_a=17$

**A.** $6$. **B.** $5$. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $\Delta_a=17<50=\dfrac{100}{2}$ nên $a$ có 4 chữ số chắc.

**Câu 20.** Trái đất quay một vòng quanh mặt trời là 365 ngày. Kết quả này có độ chính xác là $\dfrac{1}{4}$ ngày. Sai số tuyệt đối là:

**A.** $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{365}$. **C.** $\dfrac{1}{1460}$. **D.** Đáp án khác.

**Lời giải**

**Chọn A.**

**Câu 21.** Độ dài các cạnh của một đám vườn hình chữ nhật là $x=7,8m\pm 2cm$ và $y=25,6m\pm 4cm$. Số đo chu vi của đám vườn dưới dạng chuẩn là:

**A.** $66m\pm 12cm$. **B.** $67m\pm 11cm$. **C.** $66m\pm 11cm$. **D.** $67m\pm 12cm$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $x=7,8m\pm 2cm\Rightarrow 7,78m\le x\le 7,82m$ và $y=25,6m\pm 4cm\Rightarrow 25,56m\le y\le 25,64m$.

Do đó chu vi hình chữ nhật là $P=2(x+y)\in[66,68;66,92]\Rightarrow P=66,8m\pm 12cm$.

Vì $d=12cm=0,12m<0,5=\dfrac{1}{2}$ nên dạng chuẩn của chu vi là $66m\pm 12cm$.

**Câu 22.** Độ dài các cạnh của một đám vườn hình chữ nhật là $x=7,8m\pm 2cm$ và $y=25,6m\pm 4cm$. Cách viết chuẩn của diện tích (sau khi quy tròn) là:

**A.** $199m^2\pm 0,8m^2$. **B.** $199m^2\pm 1m^2$. **C.** $200m^2\pm 1cm^2$. **D.** $200m^2\pm 0,9m^2$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $x=7,8m\pm 2cm\Rightarrow 7,78m\le x\le 7,82m$ và $y=25,6m\pm 4cm\Rightarrow 25,56m\le y\le 25,64m$.

Do đó diện tích hình chữ nhật là $S=xy$ và $198,8568\le S\le 200,5048\Rightarrow S=199,6808\pm 0,824$.

**Câu 23.** Một hình chữ nhật cố các cạnh: $x=4,2m\pm 1cm$, $y=7m\pm 2cm$. Chu vi của hình chữ nhật và sai số tuyệt đối của giá trị đó.

**A.** $22,4m$ và $3cm$. **B.** $22,4m$ và $1cm$. **C.** $22,4m$ và $2cm$. **D.** $22,4m$ và $6cm$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có chu vi hình chữ nhật là $P=2(x+y)=22,4m\pm 6cm$.

**Câu 24.** Hình chữ nhật có các cạnh: $x=2m\pm 1cm$, $y=5m\pm 2cm$. Diện tích hình chữ nhật và sai số tuyệt đối của giá trị đó là:

**A.** $10m^2$ và $900cm^2$. **B.** $10m^2$ và $500cm^2$. **C.** $10m^2$ và $400cm^2$. **D.** $10m^2$ và $1404\,cm^2$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có $x=2m\pm 1cm\Rightarrow 1,98m\le x\le 2,02m$ và $y=5m\pm 2cm\Rightarrow 4,98m\le y\le 5,02m$.

Do đó diện tích hình chữ nhật là $S=xy$ và $9,8604\le S\le 10,1404\Rightarrow S=10\pm 0,1404$.

**Câu 25.** Trong bốn lần cân một lượng hóa chất làm thí nghiệm ta thu được các kết quả sau đây với độ chính xác $0,001g$ : $5,382g$ ; $5,384g$ ; $5,385g$ ; $5,386g$ . Sai số tuyệt đối và số chữ số chắc của kết quả là:

**A.** Sai số tuyệt đối là $0,001g$ và số chữ số chắc là $3$ chữ số.

**B.** Sai số tuyệt đối là $0,001g$ và số chữ số chắc là $4$ chữ số.

**C.** Sai số tuyệt đối là $0,002g$ và số chữ số chắc là $3$ chữ số.

**D.** Sai số tuyệt đối là $0,002g$ và số chữ số chắc là $4$ chữ số.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $d = 0,001 < 0,005 = \dfrac{0,01}{2}$ nên có 3 chữ số chắc.

**Câu 26.** Một hình chữ nhật cố diện tích là $S = 180,57cm^2 \pm 0,6cm^2$ . Kết quả gần đúng của $S$ viết dưới dạng chuẩn là:

**A.** $180,58cm^2$. **B.** $180,59cm^2$. **C.** $0,181cm^2$. **D.** $181,01cm^2$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $d = 0,6 < 5 = \dfrac{10}{2}$ nên $S$ có 3 chữ số chắc.

**Câu 27.** Đường kính của một đồng hồ cát là $8,52m$ với độ chính xác đến $1cm$ . Dùng giá trị gần đúng của $\pi$ là 3,14 cách viết chuẩn của chu vi (sau khi quy tròn) là:

**A.** 26,6. **B.** 26,7. **C.** 26,8. **D.** Đáp án khác.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Gọi $d$ là đường kính thì $d = 8,52m \pm 1cm \Rightarrow 8,51m \le d \le 8,53m$ .

Khi đó chu vi là $C = \pi d$ và $26,7214 \le C \le 26,7842 \Rightarrow C = 26,7528 \pm 0,0314$ .

Ta có $0,0314 < 0,05 = \dfrac{0,1}{2}$ nên cách viết chuẩn của chu vi là 26,7.

**Câu 28.** Một hình lập phương có cạnh là $2,4m \pm 1cm$ . Cách viết chuẩn của diện tích toàn phần (sau khi quy tròn) là:

**A.** $35m^2 \pm 0,3m^2$. **B.** $34m^2 \pm 0,3m^2$. **C.** $34,5m^2 \pm 0,3m^2$. **D.** $34,5m^2 \pm 0,1m^2$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Gọi $a$ là độ dài cạnh của hình lập phương thì $a = 2,4m \pm 1cm \Rightarrow 2,39m \le a \le 2,41m$ .

Khi đó diện tích toàn phần của hình lập phương là $S = 6a^2$ nên $34,2726 \le S \le 34,8486$ .

Do đó $S = 34,5606m^2 \pm 0,288m^2$ .

**Câu 29.** Một vật thể có thể tích $V = 180,37cm^3 \pm 0,05cm^3$ . Sai số tương đối của gia trị gần đúng ấy là:

**A.** $0,01\%$. **B.** $0,03\%$. **C.** $0,04\%$. **D.** $0,05\%$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Sai số tương đối của giá trị gần đúng là $\delta = \dfrac{|\Delta|}{V} = \dfrac{0,05}{180,37} \approx 0,03\%$ .

**Câu 30.** Cho giá trị gần đúng của $\dfrac{23}{7}$ là 3,28. Sai số tuyệt đối của số 3,28 là:

**A.** 0,04. **B.** $\frac{0,04}{7}$. **C.** 0,06. **D.** Đáp án khác.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $\frac{23}{7}=3,(285714)\Rightarrow\left|\frac{23}{7}-3,28\right|=0,00(571428)=\frac{0,04}{7}$.

**Câu 31.** Trong các thí nghiệm hằng số $C$ được xác định là 5,73675 với cận trên sai số tuyệt đối là $d=0,00421$. Viết chuẩn giá trị gần đúng của $C$ là:

**A.** 5,74. **B.** 5,736. **C.** 5,737. **D.** 5,7368.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $C-0,00421\le 5,73675\Rightarrow C\approx 5,74096$.

**Câu 32.** Cho số $a=1754731$, trong đó chỉ có chữ số hàng trăm trở lên là đáng tin. Hãy viết chuẩn số gần đúng của $a$.

**A.** $17547.10^2$. **B.** $17548.10^2$. **C.** $1754.10^3$. **D.** $1755.10^2$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

**Câu 33.** Hình chữ nhật có các cạnh: $x=2m\pm 1cm,\ y=5m\pm 2cm$. Diện tích hình chữ nhật và sai số tương đối của giá trị đó là:

**A.** $10m^2$ và $5\%$. **B.** $10m^2$ và $4\%$. **C.** $10m^2$ và $9\%$. **D.** $10m^2$ và $20\%$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Diên tích hình chữ nhật là $S_o=x_o.y_o=2.5=10m^2$.

Cận trên của diện tích: $(2+0,01)(5+0,02)=10,0902$

Cận dưới của diện tích: $(2-0,01)(5-0,02)=9,9102$.

$\Rightarrow 9,9102\le S\le 10,0902$

Sai số tuyệt đối của diện tích là: $\Delta S=|S-S_o|\le 0,0898$

Sai số tương đối của diện tích là: $\frac{\Delta S}{|S|}=\frac{0,0898}{10}\approx 9\%$

**Câu 34.** Hình chữ nhật có các cạnh: $x=2m\pm 1cm,\ y=5m\pm 2cm$. Chu vi hình chữ nhật và sai số tương đối của giá trị đó là:

**A.** 22,4 và $\frac{1}{2240}$. **B.** 22,4 và $\frac{6}{2240}$. **C.** 22,4 và $6cm$. **D.** Một đáp số khác.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Chu vi hình chữ nhật là: $P_o=2(x_o+y_o)=2(2+5)=20m$

**Câu 35.** Một hình chữ nhật có diện tích là $S=108,57cm^2\pm 0,06cm^2$. Số các chữ số chắc của $S$ là:

**A.** 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn B.**

**Nhắc lại định nghĩa số chắc:**

Trong cách ghi thập phân của a, ta bảo chữ số k cuả a là chữ số đáng tin (hay chữ số chắc) nếu sai số tuyệt đối $\Delta_a$ không vượt quá một đơn vị của hàng có chữ số k.

+ Ta có sai số tuyệt đối bằng $0,06 > 0,01 \Rightarrow$ chữ số 7 là số không chắc, $0,06 < 0,1 \Rightarrow$ chữ số 5 là số chắc.

+ Chữ số k là số chắc thì tất cả các chữ số đứng bên trái k đều là các chữ số chắc $\Rightarrow$ các chữ số $1,0,8$ là các chữ số chắc. Như vậy ta có số các chữ số chắc của $S$ là: $1,0,8,5$.

**Câu 36.** Ký hiệu khoa học của số $-0,000567$ là:

**A.** $-567.10^{-6}$. **B.** $-5,67.10^{-5}$. **C.** $-567.10^{-4}$. **D.** $-567.10^{-3}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

+ Mỗi số thập phân đều viết được dưới dạng $\alpha.10^n$ trong đó $1 \le \alpha < 10, n \in Z$. Dạng như thế được gọi là kí hiệu khoa học của số đó.

+ Dựa vào quy ước trên ta thấy chỉ có phương án **C** là đúng.

**Câu 37.** Khi sử dụng máy tính bỏ túi với 10 chữ số thập phân ta được: $\sqrt{8} = 2,828427125$ .Giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ chính xác đến hàng phần trăm là:

**A.** $2,80$. **B.** $2,81$. **C.** $2,82$. **D.** $2,83$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

+ Cần lấy chính xác đến hàng phần trăm nên ta phải lấy 2 chữ số thập phân. Vì đứng sau số 2 ở hàng phần trăm là số $8 > 5$ nên theo nguyên lý làm tròn ta được kết quả là $2,83$.

**Câu 38.** Viết giá trị gần đúng của $\sqrt{10}$ đến hàng phần trăm (dùng MTBT):

**A.** $3,16$. **B.** $3,17$. **C.** $3,10$. **D.** $3,162$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

+ Ta có: $\sqrt{10} = 3,16227766$.

+ Cần lấy chính xác đến hàng phần trăm nên ta phải lấy 2 chữ số thập phân. Vì đứng sau số 6 ở hàng phần trăm là số $2 < 5$ nên theo nguyên lý làm tròn ta được kết quả là $3,16$.

**Câu 39.** Độ dài của một cây cầu người ta đo được là $996\text{m} \pm 0,5\text{m}$. Sai số tương đối tối đa trong phép đo là bao nhiêu.

**A.** $0,05\%$ **B.** $0,5\%$ **C.** $0,25\%$ **D.** $0,025\%$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có độ dài gần đúng của cầu là $a = 996$ với độ chính xác $d = 0,5$.

Vì sai số tuyệt đối $\Delta_a \le d = 0,5$ nên sai số tương đối $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} \le \dfrac{d}{|a|} = \dfrac{0,5}{996} \approx 0,05\%$.

Vậy sai số tương đối tối đa trong phép đo trên là $0,05\%$.

**Câu 40.** Số $\overline{a}$ được cho bởi số gần đúng $a = 5,7824$ với sai số tương đối không vượt quá $0,5\%$. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của $\overline{a}$.

**A.** $2,9\%$ **B.** $2,89\%$ **C.** $2,5\%$ **D.** $0,5\%$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$ suy ra $\Delta_a = \delta_a.|a|$. Do đó $\Delta_a \le \dfrac{0,5}{100}.5,7824 = 0,028912 \approx 2,89\%$.

**Câu 41.** Cho số $x=\dfrac{2}{7}$ và các giá trị gần đúng của $x$ là $0,28$ ; $0,29$ ; $0,286$ ; $0,3$. Hãy xác định sai số tuyệt đối trong từng trường hợp và cho biết giá trị gần đúng nào là tốt nhất.

**A.** $0,28$ **B.** $0,29$ **C.** $0,286$ **D.** $0,3$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có các sai số tuyệt đối là

$\Delta_a=\left|\dfrac{2}{7}-0,28\right|=\dfrac{1}{175}$, $\Delta_b=\left|\dfrac{2}{7}-0,29\right|=\dfrac{3}{700}$, $\Delta_c=\left|\dfrac{2}{7}-0,286\right|=\dfrac{1}{3500}$, $\Delta_d=\left|\dfrac{2}{7}-0,3\right|=\dfrac{1}{70}$.

Vì $\Delta_c<\Delta_b<\Delta_a<\Delta_d$ nên $c=0,286$ là số gần đúng tốt nhất.

**Câu 42.** Một cái ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x=23\text{m}\pm0,01\text{m}$ và chiều rộng là $y=15\text{m}\pm0,01\text{m}$. Chu vi của ruộng là:

**A.** $P=76\text{m}\pm0,4\text{m}$ **B.** $P=76\text{m}\pm0,04\text{m}$ **C.** $P=76\text{m}\pm0,02\text{m}$ **D.** $P=76\text{m}\pm0,08\text{m}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Giả sử $x=23+a,\ y=15+b$ với $-0,01\le a,\ b\le 0,01$.

Ta có chu vi ruộng là $P=2(x+y)=2(38+a+b)=76+2(a+b)$.

Vì $-0,01\le a,\ b\le 0,01$ nên $-0,04\le 2(a+b)\le 0,04$.

Do đó $|P-76|=|2(a+b)|\le 0,04$.

Vậy $P=76\text{m}\pm0,04\text{m}$.

**Câu 43.** Một cái ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x=23\text{m}\pm0,01\text{m}$ và chiều rộng là $y=15\text{m}\pm0,01\text{m}$. Diện tích của ruộng là:

**A.** $S=345\text{m}\pm0,3801\text{m}$. **B.** $S=345\text{m}\pm0,38\text{m}$.

**C.** $S=345\text{m}\pm0,03801\text{m}$. **D.** $S=345\text{m}\pm0,3801\text{m}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Diện tích ruộng là $S=x.y=(23+a)(15+b)=345+23b+15a+ab$.

Vì $-0,01\le a,\ b\le 0,01$ nên $|23b+15a+ab|\le 23.0,01+15.0,01+0,01.0,01$ hay $|23b+15a+ab|\le 0,3801$.

Suy ra $|S-345|\le 0,3801$.

Vậy $S=345\text{m}\pm0,3801\text{m}$.

**Câu 44.** Cho tam giác $ABC$ có độ dài ba cạnh đo được như sau $a=12\,\text{cm}\pm0,2\,\text{cm}$; $b=10,2\,\text{cm}\pm0,2\,\text{cm}$; $c=8\,\text{cm}\pm0,1\,\text{cm}$. Tính chu vi $P$ của tam giác và đánh giá sai số tuyệt đối, sai số tương đối của số gần đúng của chu vi qua phép đo.

**A.** $1,6\%$ **B.** $1,7\%$ **C.** $1,662\%$ **D.** $1,66\%$

**Lời giải**

**Chọn D**

Giả sử $a=12+d_1,\ b=10,2+d_2,\ c=8+d_3$.

Ta có $P=a+b+c+d_1+d_2+d_3=30,2+d_1+d_2+d_3$.

Theo giả thiết, ta có $-0,2\le d_1\le 0,2;\ -0,2\le d_2\le 0,2;\ -0,1\le d_3\le 0,1$.

Suy ra $-0,5\le d_1+d_2+d_3\le 0,5$.

Do đó $P = 30,2\ \text{cm} \pm 0,5\ \text{cm}$.

Sai số tuyệt đối $\Delta_P \le 0,5$. Sai số tương đối $\delta_P \le \frac{d}{P} \approx 1,66\%$.

**Câu 45.** Viết giá trị gần đúng của số $\sqrt{3}$, chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn

**A.** $1,73;1,733$ **B.** $1,7;1,73$ **C.** $1,732;1,7323$ **D.** $1,73;1,732$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Sử dụng máy tính bỏ túi ta có $\sqrt{3} = 1,732050808...$

Do đó giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần trăm là 1,73;

giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần nghìn là 1,732.

**Câu 46.** Viết giá trị gần đúng của số $\pi^2$, chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.

**A.** $9,9$, $9,87$ **B.** $9,87$, $9,870$ **C.** $9,87$, $9,87$ **D.** $9,870$, $9,87$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Sử dụng máy tính bỏ túi ta có giá trị của $\pi^2$ là 9,8696044.

Do đó giá trị gần đúng của $\pi^2$ chính xác đến hàng phần trăm là 9,87;

giá trị gần đúng của $\pi^2$ chính xác đến hàng phần nghìn là 9,870.

**Câu 47.** Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác $d$ được cho sau đây $\overline{a} = 17658 \pm 16$.

**A.** 18000 **B.** 17800 **C.** 17600 **D.** 17700.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có $10 < 16 < 100$ nên hàng cao nhất mà $d$ nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng trăm. Do đó ta phải quy tròn số 17638 đến hàng trăm. Vậy số quy tròn là 17700 (hay viết $\overline{a} \approx 17700$).

**Câu 48.** Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác $d$ được cho sau đây

$\overline{a} = 17658 \pm 16$ $\overline{a} = 15,318 \pm 0,056$.

**A.** 15 **B.** 15,5 **C.** 15,3 **D.** 16.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $0,01 < 0,056 < 0,1$ nên hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần chục. Do đó phải quy tròn số 15,318 đến hàng phần chục. Vậy số quy tròn là 15,3 (hay viết $\overline{a} \approx 15,3$).

**Câu 49.** Các nhà khoa học Mỹ đang nghiên cứu liệu một máy bay có thể có tốc độ gấp bảy lần tốc độ ánh sáng. Với máy bay đó trong một năm (giả sử một năm có 365 ngày) nó bay được bao nhiêu? Biết vận tốc ánh sáng là 300 nghìn km/s. Viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học.

**A.** $9,5.10^9$. **B.** $9,4608.10^9$. **C.** $9,461.10^9$. **D.** $9,46080.10^9$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có một năm có 365 ngày, một ngày có 24 giờ, một giờ có 60 phút và một phút có 60 giây. Do đó một năm có: $24.365.60.60 = 31536000$ giây.

Vì vận tốc ánh sáng là 300 nghìn km/s nên trong vòng một năm nó đi được

$31536000.300 = 9,4608.10^9$ km.

**Câu 50.** Số dân của một tỉnh là $A = 1034258 \pm 300$ (người). Hãy tìm các chữ số chắc.

**A.** 1, 0, 3, 4, 5. **B.** 1, 0, 3, 4. **C.** 1, 0, 3, 4. **D.** 1, 0, 3.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $\frac{100}{2}=50<300<500=\frac{1000}{2}$ nên các chữ số 8 (hàng đơn vị), 5 (hàng chục) và 2 ( hàng trăm ) đều là các chữ số không chắc. Các chữ số còn lại 1, 0, 3, 4 là chữ số chắc.

Do đó cách viết chuẩn của số $A$ là $A\approx 1034.10^3$ (người).

**Câu 51.** Đo chiều dài của một con dốc, ta được số đo $a=$ 192,55 m, với sai số tương đối không vượt quá $0,3\%$. Hãy tìm các chữ số chắc của $d$ và nêu cách viết chuẩn giá trị gần đúng của $a$.

**A.** 193 m. **B.** 192 m. **C.** 192,6 m. **D.** 190 m.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có sai số tuyệt đối của số đo chiều dài con dốc là $\Delta_a=a.\delta_a\le 192,55.0,2\%=0,3851$.

Vì $0,05<\Delta_a<0,5$. Do đó chữ số chắc của $d$ là 1, 9, 2.

Vậy cách viết chuẩn của $a$ là 193 m (quy tròn đến hàng đơn vị).

**Câu 52.** Viết dạng chuẩn của số gần đúng $a$ biết số người dân tỉnh Lâm Đồng là $a=3214056$ người với độ chính xác $d=100$ người.

**A.** $3214.10^3$. **B.** 3214000. **C.** $3.10^6$. **D.** $32.10^5$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $\frac{100}{2}=50<100<\frac{1000}{2}=500$ nên chữ số hàng trăm (số 0) không là số chắc, còn chữ số hàng nghìn (số 4) là chữ số chắc.

Vậy chữ số chắc là $1,2,3,4$.

Cách viết dưới dạng chuẩn là $3214.10^3$.

**Câu 53.** Tìm số chắc và viết dạng chuẩn của số gần đúng $a$ biết $a=1,3462$ sai số tương đối của $a$ bằng $1\%$.

**A.** 1,3. **B.** 1,34. **C.** 1,35. **D.** 1,346.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $\delta_a=\frac{\Delta_a}{|a|}$ suy ra $\Delta_a=\delta_a.|a|=1\%.1,3462=0,013462$.

Suy ra độ chính xác của số gần đúng $a$ không vượt quá $0,013462$ nên ta có thể xem độ chính xác là $d=0,013462$.

Ta có $\frac{0,01}{2}=0,005<0,013462<\frac{0,1}{2}=0,05$ nên chữ số hàng phần trăm (số 4) không là số chắc, còn chữ số hàng phần chục (số 3) là chữ số chắc.

Vậy chữ số chắc là 1 và 3.

Cách viết dưới dạng chuẩn là 1,3.

**Câu 54.** Một hình lập phương có thể tích $V=180,57\text{cm}^3\pm 0,05\text{cm}^3$. Xác định các chữ số chắc chắn của $V$.

**A.** 1,8. **B.** 1,8,0. **C.** 1,8,0,5. **D.** 1,8,0,5,7.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $\frac{0,01}{2} \le 0,05 \le \frac{0,1}{2}$. Suy ra $1,8,0,5$ là chữ số chắc chắn.

**Câu 55.** Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn $a = 467346 \pm 12$.

**A.** $46735.10$. **B.** $47.10^4$. **C.** $467.10^3$. **D.** $4673.10^2$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có $\frac{10}{2} = 5 < 12 < \frac{100}{2} = 50$ nên chữ số hàng trăm trở đi là chữ số chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là $4673.10^2$.

**Câu 56.** Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn $b = 2,4653245 \pm 0,006$.

**A.** $2,46$. **B.** $2,47$. **C.** $2,5$. **D.** $2,465$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $\frac{0,01}{2} = 0,005 < 0,006 < \frac{0,1}{2} = 0,05$ nên chữ số hàng phần chục trở đi là chữ số chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là $2,5$.

**Câu 57.** Quy tròn số $7216,4$ đến hàng đơn vị, được số $7216$. Sai số tuyệt đối là:

**A.** $0,2$. **B.** $0,3$. **C.** $0,4$. **D.** $0,6$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Quy tròn số $7216,4$ đến hàng đơn vị, được số $7216$. Sai số tuyệt đối là:

$|7216,4 - 7216| = 0,4$

**Câu 58.** Quy tròn số $2,654$ đến hàng phần chục, được số $2,7$. Sai số tuyệt đối là:.

**A.** $0,05$. **B.** $0,04$. **C.** $0,046$. **D.** $0,1$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Quy tròn số $2,654$ đến hàng phần chục, được số $2,7$. Sai số tuyệt đối là: $|2,7 - 2,654| = 0,046$.

**Câu 59.** Trong 5 lần đo độ cao một đạp nước, người ta thu được các kết quả sau với độ chính xác 1dm: 15,6m; 15,8m; 15,4m; 15,7m; 15,9m. Hãy xác định độ cao của đập nước.

**A.** $\Delta_{h'} = 3dm$. **B.** $16m \pm 3dm$. **C.** $15,5m \pm 1dm$. **D.** $15,6m \pm 0,6dm$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Giá trị trung bình là: 15,68m.

Vì độ chính xác là 1dm nên ta có $h' = 15,7m$. Mà $\Delta_{h'} = 3dm$ Nên $15,7m \pm 3dm$.

# Bài 2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

- | FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Số trung bình cộng (số trung bình)

#### 1. Định nghĩa

*Số trung bình cộng* của một mẫu $n$ số liệu thống kê bằng tổng của các số liệu chia cho số các số liệu đó. Số trung bình cộng của mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bằng

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

***Ví dụ 1.*** Kết quả 4 lần kiểm tra môn Toán của bạn Hoa là $7; 9; 8; 9$. Tính số trung bình cộng $\overline{x}$ của mẫu số liệu trên.

***Giải***

*Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là* $\overline{x} = \frac{7+9+8+9}{4} = \frac{33}{4} = 8,25$

Nhận xét: Công thức tính số trung bình cộng $\overline{x}$ khi có các số liệu thống kê bằng nhau có thể viết lại ở dạng:

$$\overline{x} = \frac{7+8+2.9}{1+1+2} = \frac{33}{4} = 8,25.$$

Ta có thể tính số trung bình cộng theo các công thức sau:

- Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là:

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}.$$

| Giá trị | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| Tần số | $n_1$ | $n_2$ | $\cdots$ | $n_k$ |

- Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối là:

$$\overline{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_k x_k,$$

| Giá trị | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| Tần số tương đối | $f_1$ | $f_2$ | $\cdots$ | $f_k$ |

trong đó $f_1 = \frac{n_1}{n}, f_2 = \frac{n_2}{n}, \ldots, f_k = \frac{n_k}{n}$, với $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

#### 2. Ý nghĩa

Trong thực tiễn, để tìm hiểu một đối tượng thống kê ta đưa ra tiêu chí thống kê và tiến hành thu thập nhiều lần số liệu thống kê theo tiêu chí đó, tạo thành mẫu số liệu. Căn cứ vào mẫu số liệu đó, ta rút ra những kết luận có ích về đối tượng thống kê. Để kết luận rút ra phản ánh đúng đắn bản chất của đối tượng, ta cần nhận biết được hình thái và xu thế thay đổi của mẫu số liệu. Với cách nhìn nhận như thế, số trung bình cộng của mẫu số liệu có ý nghĩa sau:

*Khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình công, ta có thể giải quyết được vấn đề trên bằng cách lấy số trung bình cộng làm đại diện cho mẫu số liệu.*

Chẳng hạn, để dự báo lượng mưa trong tháng 8 tại Hà Nội người ta tiến hành đo lượng mưa của từng ngày trong tháng 8 tại Hà Nội, ta được mẫu số liệu gồm 31 số liệu. Số trung bình cộng của mẫu số liệu đó được xem như lượng mưa trung bình tháng 8 của Hà Nội. Thống kê lượng mưa trung bình tháng 8 của Hà Nội trong nhiều năm liên tiếp sẽ cho ta những dự báo (ngày càng chính xác hơn) lượng mưa trung bình tháng 8 của Hà Nội trong những năm sắp tới.

### II. Trung vị

#### 1. Định nghĩa

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm $n$ số liệu thành một dãy không giảm (hoặc không tăng).

- Nếu $n$ là lẻ thì số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n+1}{2}$ (số đứng chính giữa) gọi là *trung vị.*

- Nếu $n$ là chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2}+1$ gọi là *trung vị.*

Trung vị kí hiệu là $M_e$.

***Ví dụ 2.*** Thời gian (tính theo phút) mà 10 người đợi ở bến xe buýt là:

$2,8$ $1,2$ $3,4$ $14,6$ $1,3$ $2,5$ $4,2$ $1,9$ $3,5$ $0,8$

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên

***Giải***

Bước 1. Sắp xếp các số liệu của mẫu theo thứ tự không giảm

$0,8$ $1,2$ $1,3$ $1,9$ $2,5$ $2,8$ $3,4$ $3,5$ $4,2$ $14,6$

Bước 2. Xác định xem số các số liệu là số chẵn hay số lẻ để tìm trung vị:

Mẫu số liệu trên có 10 số. Số thứ năm và số thứ sáu lần lượt là 2,5 và 2,8 .

Vì vậy $M_e=\frac{2,5+2,8}{2}=2,65$ (phút).

*Nhận xét*

- Trung vị không nhất thiết là một số trong mẫu số liệu và dễ tính toán.
- Khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệch lớn thì số trung bình cộng và trung vị xấp xỉ nhau.

**2. Ý nghĩa**

Nếu những số liệu trong mẫu có sự chênh lệch lớn thì ta nên chọn thêm trung vị làm đại diện cho mẫu số liệu đó nhằm điều chỉnh một số hạn chế khi sử dụng số trung bình cộng. Những kết luận về đối tượng thống kê rút ra khi đó sẽ tin cậy hơn.

Chẳng hạn, số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong ***Ví dụ 2*** là:

$$\overline{x}=\frac{2,8+1,2+3,4+14,6+1,3+2,5+4,2+1,9+3,5+0,8}{10}=3,62 \text{ (phút)}$$

Vì thế, nếu chọn thêm trung vị $M_e=2,65$ (phút) làm đại diện cho mẫu số liệu đó thì kết luận về thời gian đợi ở bến xe buýt sẽ tin cậy hơn.

**III. Tứ phân vị**

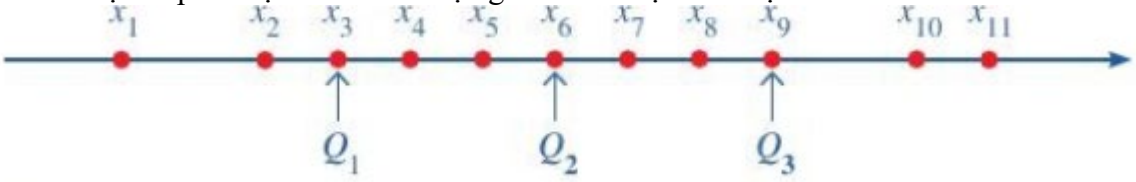
**1. Định nghĩa**

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm $N$ số liệu thành một dãy không giảm.

Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là bộ ba giá trị: tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai và tứ phân vị thứ ba; ba giá trị này chia mẫu số liệu thành bốn phần có số lượng phần tử bằng nhau.

- Tứ phân vị thứ hai $Q_2$ bằng trung vị.
- Nếu $N$ là số chẵn thì tứ phân vị thứ nhất $Q_1$ bằng trung vị của nửa dãy phía dưới và tứ phân vị thứ ba $Q_3$ bằng trung vị của nửa dãy phía trên.
- Nếu $N$ là số lẻ thì tứ phân vị thứ nhất $Q_1$ bằng trung vị của nửa dãy phía dưới (không bao gồm $Q_2$) và tứ phân vị thứ ba $Q_3$ bằng trung vị của nửa dãy phía trên (không bao gồm $Q_2$).

Ta minh họa tứ phân vị của mẫu số liệu gồm 11 số liệu trên trục số như sau:




***Ví dụ 3.*** Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu: $21$ $35$ $17$ $43$ $8$ $59$ $72$ $119$

Biểu diễn tứ phân vị đó trên trục số.

***Giải***

Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần như sau: 8 17 21 35 43 59 72 119

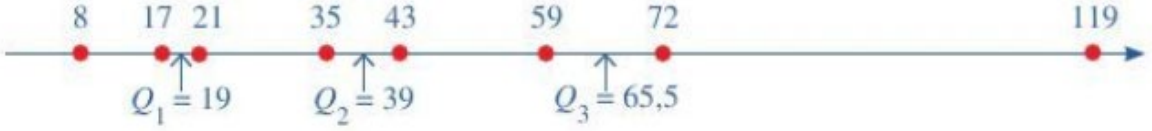
Trung vị của mẫu số liệu trên là $\frac{35+43}{2}=39$.

Trung vị của dãy 8 17 21 35 là $\frac{17+21}{2}=19$.

Trung vị của dãy 43 59 72 119 là: $\frac{59+72}{2}=65,5$.

Vậy $Q_1=19, Q_2=39, Q_3=65,5$.

Tứ phân vị đó được biểu diễn trên trục số như sau:




**2. Ý nghĩa**

- Trong thực tiễn, có những mẫu số liệu mà nhiều số liệu trong mẫu đó vẫn còn sự chênh lệch lớn so với trung vị. Ta nên chọn thêm những số khác cùng làm đại diện cho mẫu đó. Bằng cách lấy thêm trung vị của từng dãy số liệu tách ra bởi trung vị của mẫu nói trên, ta nhận được tứ phân vị đại diện cho mẫu số liệu đó.
- Bộ ba giá trị $Q_1, Q_2, Q_3$ trong tứ phân vị phản ánh độ phân tán của mẫu số liệu. Nhưng mỗi giá trị $Q_1, Q_2, Q_3$ lại đo xu thế trung tâm của phần số liệu tương ứng của mẫu đó.

## IV. Mốt

**1. Định nghĩa**

Mốt của mẫu số liệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số và kí hiệu là $M_o$.

Chú ý: Một mẫu số liệu có thể có một hoặc nhiều mốt.

***Ví dụ 4.*** Mốt trong bảng tần số thống kê số áo bán ra trong tháng đầu tiên của cửa hàng Bác Tâm là bao nhiêu?

| Cỡ áo | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số (Số áo bán được) | 15 | 46 | 62 | 81 | 51 | 20 | 3 |

***Giải.***

Vì tần số lớn nhất là $81$ và $81$ tương ứng với cỡ áo $40$ nên mốt của bảng trên là $40$

**2. Ý nghĩa**

Mốt của một mẫu số liệu đặc trưng cho số lần lặp đi lặp lại nhiều nhất tại một vị trí của mẫu số liệu đó. Dựa vào mốt, ta có thể đưa ra những kết luận (có ích) về đối tượng thống kê.

Chẳng hạn, trong Ví dụ 4, mốt trong bảng tần số thống kê số áo bán ra trong tháng đầu tiên của cửa hàng là $40$ . Do vậy, bác Tâm nên nhập về nhiều hơn cỡ áo 40 để bán trong tháng tiếp theo.

## V. Tính hợp lí của số liệu thống kê

***Ví dụ 5.*** Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 40 học sinh lớp 10 của một trường trung học phổng thông (đơn vị: ki-lô-gam):

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 32 | 45 | 45 | 45 | 47 | 48 | 44 | 44 | 49 |
| 49 | 49 | 52 | 51 | 50 | 50 | 53 | 55 | 54 | 54 |
| 54 | 56 | 57 | 57 | 58 | 58,5 | 58,5 | 60 | 60 | 60 |
| 60 | 63,5 | 63 | 62 | 69 | 58,5 | 88 | 85 | 72 | 71 |

a) Xác định trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Từ kết quả câu a), bước đầu xác định những số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

***Giải***

a) Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần như sau:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 32 | 44 | 44 | 45 | 45 | 45 | 47 | 48 | 49 |
| 49 | 49 | 50 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 54 | 54 |
| 55 | 56 | 57 | 57 | 58 | 58,5 | 58,5 | 60 | 60 | 60 |
| 60 | 62 | 63 | 63,5 | 68,5 | 69 | 71 | 72 | 85 | 88 |

- Trung vị của mẫu số liệu trên là: $\frac{54+55}{2} = 54,5$.

- Trung vị của nửa dãy phía dưới

30 32 44 44 45 45 45 47 48 49 49 49 50 50 51 52 53 54 54 54 là: $\frac{49+49}{2} = 49.$

- Trung vị của nửa dãy phía trên 55 56 57 57 58 58,5 58,5 60 60 60

60 62 63 63,5 68,5 69 71 72 85 88 là: $\frac{60+60}{2}=60$.

Vậy $Q_1=49; Q_2=54,5; Q_3=60$.

b) Dựa vào trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho, bước đầu ta có thể thấy những số liệu bất thường trong mẫu số liệu đó là: 30 32 85 88.

Chú ý: Trong thực tiễn, những số liệu bất thường của mẫu số liệu được xác định bằng những công cụ toán học sâu sắc hơn.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** điểm thi HKI môn toán của tổ học sinh lớp 10C ( quy ước làm tròn đến 0,5 điểm) liệt kê như sau: 2; 5; 7,5; 8; 5; 7; 6,5; 9; 4,5; 10.

Tính điểm trung bình của 10 học sinh đó ( quy tròn đến chữ thập phân thứ nhất)

**Câu 2.** Cho các số liệu thống kê về sản lượng chè thu được trong 1năm ( kg/sào) của 20 hộ gia đình

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 111 | 112 | 112 | 113 | 114 | 114 | 115 | 114 | 115 | 116 |
| 112 | 113 | 113 | 114 | 115 | 114 | 116 | 117 | 113 | 115 |

Tính số trung vị

**Câu 3.** điểm điều tra về chất lượng sản phẩm mới ( thang điểm 100) như sau:

80 65 51 48 45 61 30 35 84 83 60 58 75

72 68 39 41 54 61 72 75 72 61 50 65

Hãy tìm các tứ phân vị.

**Câu 4.** Cho các số liệu thống kê về sản lượng chè thu được trong 1năm ( kg/sào) của 20 hộ gia đình

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 111 | 112 | 112 | 113 | 114 | 114 | 115 | 114 | 115 | 116 |
| 112 | 113 | 113 | 114 | 115 | 114 | 116 | 117 | 113 | 115 |

**Câu 5.** điểm điều tra về chất lượng sản phẩm mới ( thang điểm 100) như sau:

80 65 51 48 45 61 30 35 84 83 60 58 75

72 68 39 41 54 61 72 75 72 61 50 65

Tìm mốt của bảng số liệu trên.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Số áo bán được trong một quý ở cửa hàng bán áo sơ mi nam được thống kê như sau:

| Cỡ áo | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số (Số áo bán được) | 13 | 45 | 126 | 125 | 110 | 40 | 12 |

Giá trị mốt của bảng phân bố tần số trên bằng

**A.** 38. **B.** 126. **C.** 42. **D.** 12.

**Câu 2.** Tiền lương hàng tháng của 7 nhân viên trong một công ty du lịch lần lượt là: 6,5; 8,4; 6,9; 7,2; 2,5; 6,7; 3,0 (đơn vị: triệu đồng). Số trung vị của dãy số liệu thống kê trên bằng

**A.** 6,7 triệu đồng. **B.** 7,2 triệu đồng. **C.** 6,8 triệu đồng. **D.** 6,9 triệu đồng.

**Câu 3.** Điểm kiểm tra môn Toán cuối năm của một nhóm gồm 9 học sinh lớp 6 lần lượt là 1; 1; 3; 6; 7; 8; 8; 9; 10. Điểm trung bình của cả nhóm gần nhất với số nào dưới đây?

**A.** $7,5$. **B.** $7$. **C.** $6,5$. **D.** $5,9$.

**Câu 4.** Các giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu số liệu được gọi là

**A.** Mốt. **B.** Số trung bình. **C.** Số trung vị. **D.** Độ lệch chuẩn.

**Câu 5.** Thời gian chạy 50m của 20 học sinh được ghi lại trong bảng dưới đây:

| Thời gian (giây) | 8,3 | 8,4 | 8,5 | 8,7 | 8,8 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 2 | 3 | 9 | 5 | 1 |

Hỏi trung bình mỗi học sinh chạy 50m hết bao lâu ?

**A.** 8,54. **B.** 4. **C.** 8,50. **D.** 8,53.

**Câu 6.** Một tổ học sinh gồm 10 học sinh có điểm kiểm tra giữa học kì 2 môn toán như sau: $5;6;7;5;8;8;10;9;7;8$. Tính điểm trung bình của tổ học sinh đó.

**A.** $7$. **B.** $8$. **C.** $7,3$. **D.** $7,5$.

**Câu 7.** Một tổ học sinh gồm 10 học sinh có điểm kiểm tra cuối học kì 1 môn toán như sau: $7;5;6;6;6;8;7;5;6;9$. Tìm mốt của dãy trên.

**A.** $M_0 = 6$. **B.** $M_0 = 7$. **C.** $M_0 = 5$. **D.** $M_0 = 8$.

**Câu 8.** Một tổ học sinh gồm 10 học sinh có điểm kiểm tra giữa học kì 2 môn toán như sau: $5;6;7;5;8;8;10;9;7;8$. Tính điểm trung bình của tổ học sinh đó.

**A.** $7$. **B.** $8$. **C.** $7,3$. **D.** $7,5$.

**Câu 9.** Cân nặng của 40 học sinh lớp 10 trường THPT A được cho bởi bảng sau

| **Lớp cân nặng (kg)** | $[35;37)$ | $[37;39)$ | $[39;41)$ | $[41;43]$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Tần số** | 6 | 9 | 11 | 14 | $N = 40$ |

Tính số trung bình cộng của mẫu số liệu trên.

**A.** $\overline{x} = 38,26$. **B.** $\overline{x} = 40,25$. **C.** $\overline{x} = 39,65$. **D.** $\overline{x} = 40,83$.

***Câu 10.*** Kết quả điểm kiểm tra 15' môn Toán của 100 em học sinh được trình bày ở bảng sau:

| Điểm | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 3 | 5 | 11 | 17 | 30 | 19 | 10 | 5 | 100 |

Số trung bình cộng của bảng phân bố tần số nói trên là

**A.** $6,88$. **B.** $7,12$. **C.** $6,5$. **D.** $7,22$.

**Câu 11.** Một học sinh có điểm các bài kiểm tra Toán như sau: $8;4;9;8;6;6;9;9;9$. Điểm trung bình môn Toán của học sinh đó (làm tròn đến 1 chữ số thập phân) là

**A.** $7,3$. **B.** $6,8$. **C.** $8,5$. **D.** $7,6$.

**Câu 12.** Thống kê điểm kiểm tra môn Lịch Sử của 45 học sinh lớp 10A như sau:

| Điểm | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 2 | 11 | 9 | 16 | 4 | 3 |

Số trung vị trong điểm các bài kiểm tra đó là

**A.** 8,1 điểm. **B.** 7,4 điểm. **C.** 7,5 điểm. **D.** 8 điểm.

**Câu 13.** Cho mẫu số liệu thống kê $\{2;4;6;8;10\}$. Số trung bình của mẫu số liệu trên là:

**A.** $7$. **B.** $12$. **C.** $6.5$. **D.** $6$.

**Câu 14.** Điểm kiểm tra của 24 học sinh được ghi lại trong bảng sau:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 2 | 3 | 5 | 8 | 2 |
| 8 | 5 | 8 | 4 | 9 | 6 |
| 6 | 1 | 9 | 3 | 6 | 7 |
| 3 | 6 | 6 | 7 | 2 | 9 |

Tìm mốt của điểm điều tra.

**A.** 2. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

***Câu 15.*** Kết quả điểm kiểm tra 45 phút môn Hóa Học của 100 em học sinh được trình bày ở bảng sau:

| Điểm | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 3 | 5 | 14 | 14 | 30 | 22 | 7 | 5 | 100 |

Số trung bình cộng của bảng phân bố tần số nói trên là

**A.** 6,82. **B.** 4. **C.** 6,5. **D.** 7,22.

**Câu 16.** Điều tra tiền lương một tháng của 100 người lao động trên địa bàn một xã ta có bảng phân bố tần số sau:

| Tiền lương (VND) | 5.000.000 | 6.000.000 | 7.000.000 | 8.000.000 | 9.000.000 | 9.500.000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 26 | 34 | 20 | 10 | 5 | 5 |

Tìm **mốt** của bảng phân bố tần số trên.

**A.** 5.000.000. **B.** 6.000.000. **C.** 7.500.000. **D.** 9.500.000.

**Câu 17.** Cho bảng phân bố tần số sau: *khối lượng* 20 *học sinh lớp* $10A$

| **Khối lượng (kg)** | **Tần số** |
|---|---|
| 50 | 4 |
| 51 | 5 |
| 52 | 6 |
| 55 | 3 |
| 56 | 2 |

Số trung bình cộng $\overline{x}$ của bảng số liệu đã cho là

**A.** $\overline{x}=53$. **B.** $\overline{x}=52,8$. **C.** $\overline{x}=52,2$. **D.** $\overline{x}=52$.

**Câu 18.** Kết quả thi môn Toán giữa kì 11 của lớp $10A_3$ trường THPT Ba Vì được thống kê như sau:

| **Điểm thi** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | **Cộng** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Tần số** | 5 | 7 | 8 | 12 | 8 | 5 | 45 |

Giá trị mốt $M_0$ của bảng phân bố tần số trên bằng

**A.** 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 12.

**Câu 19.** Điểm thi toán cuối năm của một nhóm gồm 7 học sinh lớp 11 là 1; 3; 4; 5; 7; 8; 9. Số trung vị của dãy số liệu đã cho là

**A.** 6. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 5.

**Câu 20.** Điểm thi toán cuối năm của một nhóm gồm 7 học sinh lớp 11 là 1; 3; 4; 5; 7; 8; 9. Số trung vị trên của dãy số liệu đã cho là

**A.** 8. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

**Câu 21.** Cho dãy số liệu thống kê 5,7,8,11,14,15,17,20. Số trung bình cộng của dãy số liệu trên là

**A.** 11. **B.** 12. **C.** 12.5. **D.** 12.125

**Câu 22.** Thời gian chạy $50m$ của 20 học sinh được ghi lại trong bảng dưới đây:

| Thời gian (giây) | 8,3 | 8,4 | 8,5 | 8,7 | 8,8 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 2 | 3 | 9 | 5 | 1 |

Số trung bình cộng thời gian chạy của học sinh là

**A.** 8,54. **B.** 4. **C.** 8,50. **D.** 8,53.

**Câu 23.** Cho mẫu số liệu 10, 8, 6, 2, 4. Số trung bình cộng của mẫu là

**A.** 2,8. **B.** 2,4. **C.** 6. **D.** 8.

**Câu 24.** Mốt của một bảng phân bố tần số là

**A.** tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số.

**B.** giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số.

**C.** giá trị có tần số nhỏ nhất trong bảng phân bố tần số.

**D.** tần số nhỏ nhất trong bảng phân bố tần số.

**Câu 25.** Cho bảng số liệu thống kê chiều cao của một nhóm học sinh như sau:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 150 | 153 | 153 | 154 | 154 | 155 | 160 | 160 | 162 | 162 | 163 | 163 | 163 | 165 | 165 | 167 |

Số trung vị của bảng số liệu nói trên là

**A.** 161. **B.** 153. **C.** 163. **D.** 156.

**Câu 26.** Cho bảng số liệu thống kê chiều cao của một nhóm học sinh như sau:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 150 | 153 | 153 | 154 | 154 | 155 | 160 | 160 | 162 | 162 | 163 | 163 | 163 | 165 | 165 | 167 |

Số trung vị dưới của bảng số liệu nói trên là

**A.** 161. **B.** 154. **C.** 163. **D.** 156.

**Câu 27.** Cho bảng phân bố tần số như sau:

| Giá trị | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 15 | $9n-1$ | 12 | $n^2+7$ | 14 | 10 | $9n-20$ | 17 |

Tìm $n$ để $M_o^{(1)} = x_2; M_o^{(2)} = x_4$ là hai mốt của bảng số liệu trên.

**A.** $n=1; n=8$. **B.** $n=8$. **C.** $n=1$. **D.** $n=9$.

**Câu 28.** Nhiệt độ trung bình hàng tháng trong một năm được ghi lại trong bảng sau

| Tháng | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nhiệt độ | 16 | 20 | 25 | 28 | 30 | 30 | 28 | 25 | 25 | 20 | 18 | 16 |

Mốt của dấu hiệu là

**A.** 20. **B.** 25. **C.** 28. **D.** 30.

**Câu 29.** Cho bảng số liệu điểm kiểm tra môn Toán của 20 học sinh.

| Điểm | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 1 | 20 |

Số trung vị của bảng số liệu trên là

**A.** 7. **B.** 8. **C.** 7,5. **D.** 7,3.

**Câu 30.** Cho bảng số liệu điểm kiểm tra môn Toán của 20 học sinh.

| Điểm | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 1 | 20 |

Số trung vị trên của bảng số liệu trên là

**A.** $7$. **B.** $8$. **C.** $8,5$. **D.** $7,3$.

# Bài 2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

- | FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Số trung bình cộng (số trung bình)

#### 1. Định nghĩa

*Số trung bình cộng* của một mẫu $n$ số liệu thống kê bằng tổng của các số liệu chia cho số các số liệu đó. Số trung bình cộng của mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bằng

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

***Ví dụ 1.*** Kết quả 4 lần kiểm tra môn Toán của bạn Hoa là $7; 9; 8; 9$. Tính số trung bình cộng $\overline{x}$ của mẫu số liệu trên.

***Giải***

*Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là* $\overline{x} = \frac{7+9+8+9}{4} = \frac{33}{4} = 8,25$

Nhận xét: Công thức tính số trung bình cộng $\overline{x}$ khi có các số liệu thống kê bằng nhau có thể viết lại ở dạng:

$$\overline{x} = \frac{7+8+2.9}{1+1+2} = \frac{33}{4} = 8,25.$$

Ta có thể tính số trung bình cộng theo các công thức sau:

- Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là:

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}.$$

| Giá trị | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| Tần số | $n_1$ | $n_2$ | $\cdots$ | $n_k$ |

- Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối là:

$$\overline{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_k x_k,$$

| Giá trị | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| Tần số tương đối | $f_1$ | $f_2$ | $\cdots$ | $f_k$ |

trong đó $f_1 = \frac{n_1}{n}, f_2 = \frac{n_2}{n}, \ldots, f_k = \frac{n_k}{n}$, với $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

#### 2. Ý nghĩa

Trong thực tiễn, để tìm hiểu một đối tượng thống kê ta đưa ra tiêu chí thống kê và tiến hành thu thập nhiều lần số liệu thống kê theo tiêu chí đó, tạo thành mẫu số liệu. Căn cứ vào mẫu số liệu đó, ta rút ra những kết luận có ích về đối tượng thống kê. Để kết luận rút ra phản ánh đúng đắn bản chất của đối tượng, ta cần nhận biết được hình thái và xu thế thay đổi của mẫu số liệu. Với cách nhìn nhận như thế, số trung bình cộng của mẫu số liệu có ý nghĩa sau:

*Khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình công, ta có thể giải quyết được vấn đề trên bằng cách lấy số trung bình cộng làm đại diện cho mẫu số liệu.*

Chẳng hạn, để dự báo lượng mưa trong tháng 8 tại Hà Nội người ta tiến hành đo lượng mưa của từng ngày trong tháng 8 tại Hà Nội, ta được mẫu số liệu gồm 31 số liệu. Số trung bình cộng của mẫu số liệu đó được xem như lượng mưa trung bình tháng 8 của Hà Nội. Thống kê lượng mưa trung bình tháng 8 của Hà Nội trong nhiều năm liên tiếp sẽ cho ta những dự báo (ngày càng chính xác hơn) lượng mưa trung bình tháng 8 của Hà Nội trong những năm sắp tới.

### II. Trung vị

#### 1. Định nghĩa

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm $n$ số liệu thành một dãy không giảm (hoặc không tăng).

- Nếu $n$ là lẻ thì số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n+1}{2}$ (số đứng chính giữa) gọi là *trung vị.*

- Nếu $n$ là chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2}+1$ gọi là *trung vị.*

Trung vị kí hiệu là $M_e$.

***Ví dụ 2.*** Thời gian (tính theo phút) mà 10 người đợi ở bến xe buýt là:

$2,8$ $1,2$ $3,4$ $14,6$ $1,3$ $2,5$ $4,2$ $1,9$ $3,5$ $0,8$

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên

***Giải***

Bước 1. Sắp xếp các số liệu của mẫu theo thứ tự không giảm

$0,8$ $1,2$ $1,3$ $1,9$ $2,5$ $2,8$ $3,4$ $3,5$ $4,2$ $14,6$

Bước 2. Xác định xem số các số liệu là số chẵn hay số lẻ để tìm trung vị:

Mẫu số liệu trên có 10 số. Số thứ năm và số thứ sáu lần lượt là 2,5 và 2,8 .

Vì vậy $M_e=\frac{2,5+2,8}{2}=2,65$ (phút).

*Nhận xét*

- Trung vị không nhất thiết là một số trong mẫu số liệu và dễ tính toán.
- Khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệch lớn thì số trung bình cộng và trung vị xấp xỉ nhau.

**2. Ý nghĩa**

Nếu những số liệu trong mẫu có sự chênh lệch lớn thì ta nên chọn thêm trung vị làm đại diện cho mẫu số liệu đó nhằm điều chỉnh một số hạn chế khi sử dụng số trung bình cộng. Những kết luận về đối tượng thống kê rút ra khi đó sẽ tin cậy hơn.

Chẳng hạn, số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong ***Ví dụ 2*** là:

$$\overline{x}=\frac{2,8+1,2+3,4+14,6+1,3+2,5+4,2+1,9+3,5+0,8}{10}=3,62 \text{ (phút)}$$

Vì thế, nếu chọn thêm trung vị $M_e=2,65$ (phút) làm đại diện cho mẫu số liệu đó thì kết luận về thời gian đợi ở bến xe buýt sẽ tin cậy hơn.

**III. Tứ phân vị**

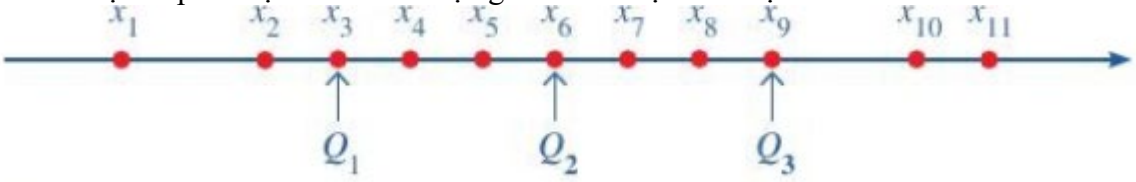
**1. Định nghĩa**

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm $N$ số liệu thành một dãy không giảm.

Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là bộ ba giá trị: tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai và tứ phân vị thứ ba; ba giá trị này chia mẫu số liệu thành bốn phần có số lượng phần tử bằng nhau.

- Tứ phân vị thứ hai $Q_2$ bằng trung vị.
- Nếu $N$ là số chẵn thì tứ phân vị thứ nhất $Q_1$ bằng trung vị của nửa dãy phía dưới và tứ phân vị thứ ba $Q_3$ bằng trung vị của nửa dãy phía trên.
- Nếu $N$ là số lẻ thì tứ phân vị thứ nhất $Q_1$ bằng trung vị của nửa dãy phía dưới (không bao gồm $Q_2$) và tứ phân vị thứ ba $Q_3$ bằng trung vị của nửa dãy phía trên (không bao gồm $Q_2$).

Ta minh họa tứ phân vị của mẫu số liệu gồm 11 số liệu trên trục số như sau:




***Ví dụ 3.*** Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu: $21$ $35$ $17$ $43$ $8$ $59$ $72$ $119$

Biểu diễn tứ phân vị đó trên trục số.

***Giải***

Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần như sau: 8 17 21 35 43 59 72 119

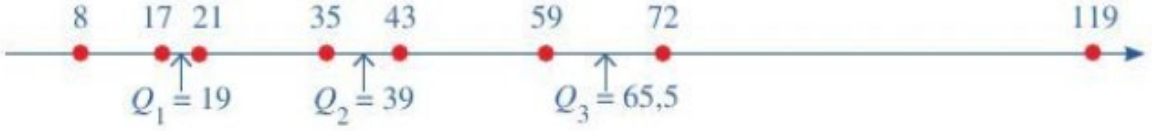
Trung vị của mẫu số liệu trên là $\frac{35+43}{2}=39$.

Trung vị của dãy 8 17 21 35 là $\frac{17+21}{2}=19$.

Trung vị của dãy 43 59 72 119 là: $\frac{59+72}{2}=65,5$.

Vậy $Q_1=19, Q_2=39, Q_3=65,5$.

Tứ phân vị đó được biểu diễn trên trục số như sau:




**2. Ý nghĩa**

- Trong thực tiễn, có những mẫu số liệu mà nhiều số liệu trong mẫu đó vẫn còn sự chênh lệch lớn so với trung vị. Ta nên chọn thêm những số khác cùng làm đại diện cho mẫu đó. Bằng cách lấy thêm trung vị của từng dãy số liệu tách ra bởi trung vị của mẫu nói trên, ta nhận được tứ phân vị đại diện cho mẫu số liệu đó.
- Bộ ba giá trị $Q_1, Q_2, Q_3$ trong tứ phân vị phản ánh độ phân tán của mẫu số liệu. Nhưng mỗi giá trị $Q_1, Q_2, Q_3$ lại đo xu thế trung tâm của phần số liệu tương ứng của mẫu đó.

## IV. Mốt

**1. Định nghĩa**

Mốt của mẫu số liệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số và kí hiệu là $M_o$.

Chú ý: Một mẫu số liệu có thể có một hoặc nhiều mốt.

***Ví dụ 4.*** Mốt trong bảng tần số thống kê số áo bán ra trong tháng đầu tiên của cửa hàng Bác Tâm là bao nhiêu?

| Cỡ áo | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số (Số áo bán được) | 15 | 46 | 62 | 81 | 51 | 20 | 3 |

***Giải.***

Vì tần số lớn nhất là $81$ và $81$ tương ứng với cỡ áo $40$ nên mốt của bảng trên là $40$

**2. Ý nghĩa**

Mốt của một mẫu số liệu đặc trưng cho số lần lặp đi lặp lại nhiều nhất tại một vị trí của mẫu số liệu đó. Dựa vào mốt, ta có thể đưa ra những kết luận (có ích) về đối tượng thống kê.

Chẳng hạn, trong Ví dụ 4, mốt trong bảng tần số thống kê số áo bán ra trong tháng đầu tiên của cửa hàng là $40$ . Do vậy, bác Tâm nên nhập về nhiều hơn cỡ áo 40 để bán trong tháng tiếp theo.

## V. Tính hợp lí của số liệu thống kê

***Ví dụ 5.*** Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 40 học sinh lớp 10 của một trường trung học phổng thông (đơn vị: ki-lô-gam):

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 32 | 45 | 45 | 45 | 47 | 48 | 44 | 44 | 49 |
| 49 | 49 | 52 | 51 | 50 | 50 | 53 | 55 | 54 | 54 |
| 54 | 56 | 57 | 57 | 58 | 58,5 | 58,5 | 60 | 60 | 60 |
| 60 | 63,5 | 63 | 62 | 69 | 58,5 | 88 | 85 | 72 | 71 |

a) Xác định trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Từ kết quả câu a), bước đầu xác định những số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

***Giải***

a) Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần như sau:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 32 | 44 | 44 | 45 | 45 | 45 | 47 | 48 | 49 |
| 49 | 49 | 50 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 54 | 54 |
| 55 | 56 | 57 | 57 | 58 | 58,5 | 58,5 | 60 | 60 | 60 |
| 60 | 62 | 63 | 63,5 | 68,5 | 69 | 71 | 72 | 85 | 88 |

- Trung vị của mẫu số liệu trên là: $\frac{54+55}{2} = 54,5$.

- Trung vị của nửa dãy phía dưới

30 32 44 44 45 45 45 47 48 49 49 49 50 50 51 52 53 54 54 54 là: $\frac{49+49}{2} = 49.$

- Trung vị của nửa dãy phía trên 55 56 57 57 58 58,5 58,5 60 60 60

60 62 63 63,5 68,5 69 71 72 85 88 là: $\frac{60+60}{2}=60$.

Vậy $Q_1=49; Q_2=54,5; Q_3=60$.

b) Dựa vào trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho, bước đầu ta có thể thấy những số liệu bất thường trong mẫu số liệu đó là: 30 32 85 88.

Chú ý: Trong thực tiễn, những số liệu bất thường của mẫu số liệu được xác định bằng những công cụ toán học sâu sắc hơn.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** điểm thi HKI môn toán của tổ học sinh lớp 10C ( quy ước làm tròn đến 0,5 điểm) liệt kê như sau: 2; 5; 7,5; 8; 5; 7; 6,5; 9; 4,5; 10.

Tính điểm trung bình của 10 học sinh đó ( quy tròn đến chữ thập phân thứ nhất)

**Lời giải**

Điểm trung bình của 10 HS là

$$\bar{x}=\frac{1}{10}(2+2.5+7,5+8+6,5+7+9+4,5+10)=\frac{64,5}{10}=6,5.$$

**Câu 2.** Cho các số liệu thống kê về sản lượng chè thu được trong 1năm ( kg/sào) của 20 hộ gia đình

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 111 | 112 | 112 | 113 | 114 | 114 | 115 | 114 | 115 | 116 |
| 112 | 113 | 113 | 114 | 115 | 114 | 116 | 117 | 113 | 115 |

Tính số trung vị

**Lời giải**

Do kích thước mẫu n = 20 là một số chẵn nên số trung vị là trung bình cộng của hai giá trị đứng thứ $\frac{n}{2}=10$

và $\frac{n}{2}+1=11$ $M_e=\frac{116+112}{2}=114$

Vậy $M_e=114$

**Câu 3.** điểm điều tra về chất lượng sản phẩm mới ( thang điểm 100) như sau:

80 65 51 48 45 61 30 35 84 83 60 58 75

72 68 39 41 54 61 72 75 72 61 50 65

Hãy tìm các tứ phân vị.

**Lời giải**

Sắp sếp lại số liệu trên theo thứ tự tăng dần của điểm số

| Điểm | 30 | 35 | 39 | 41 | 45 | 48 | 50 | 51 | 54 | 58 | 60 | 61 | 65 | 68 | 72 | 75 | 80 | 83 | 87 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 |

Vì n = 25 là số lẻ nên số trung vị là số đứng ở vị trí thứ $\frac{25+1}{2}=13$

Do đó số trung vị là: $M_e=61$

Tứ phân vị dưới $\frac{50+48}{2}=49$

Tứ phân vị trên là 72

**Câu 4.** Cho các số liệu thống kê về sản lượng chè thu được trong 1năm ( kg/sào) của 20 hộ gia đình

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 111 | 112 | 112 | 113 | 114 | 114 | 115 | 114 | 115 | 116 |
| 112 | 113 | 113 | 114 | 115 | 114 | 116 | 117 | 113 | 115 |

**Lời giải**

Do giá trị 114 có tần số lớn nhất là 5 nên ta có: $M_0 = 114$.

**Câu 5.** điểm điều tra về chất lượng sản phẩm mới ( thang điểm 100) như sau:

80 65 51 48 45 61 30 35 84 83 60 58 75

72 68 39 41 54 61 72 75 72 61 50 65

Tìm mốt của bảng số liệu trên.

**Lời giải**

Ta có bảng phân bố tần số:

| Điểm | 30 | 35 | 39 | 41 | 45 | 48 | 50 | 51 | 54 | 58 | 60 | 61 | 65 | 68 | 72 | 75 | 80 | 83 | 87 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 |

Bảng trên có 2 số có tần số lớn nhất là 61 và 72. Vậy phân bố trên có hai mốt là $M_0 = 61, M_0 = 72$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Số áo bán được trong một quý ở cửa hàng bán áo sơ mi nam được thống kê như sau:

| Cỡ áo | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số (Số áo bán được) | 13 | 45 | 126 | 125 | 110 | 40 | 12 |

Giá trị mốt của bảng phân bố tần số trên bằng

**A.** 38. **B.** 126. **C.** 42. **D.** 12.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì giá trị $x_3 = 38$ có tần số $n_3 = 126$ lớn nhất.

**Câu 2.** Tiền lương hàng tháng của 7 nhân viên trong một công ty du lịch lần lượt là: 6,5; 8,4; 6,9; 7,2; 2,5; 6,7; 3,0 (đơn vị: triệu đồng). Số trung vị của dãy số liệu thống kê trên bằng

**A.** 6,7 triệu đồng. **B.** 7,2 triệu đồng. **C.** 6,8 triệu đồng. **D.** 6,9 triệu đồng.

**Lời giải**

**Chọn A**

Sắp xếp thứ tự các số liệu thống kê, ta thu dược dãy tăng các số liệu sau: 2,5; 3,0; 6,5; 6,7; 6,9; 7,2; 8,4 (đơn vị: triệu đồng).

Số trung vị $M_e = 6,7$ triệu đồng.

Số các số liệu thống kê quá ít ($n = 7 < 10$), do đó không nên chọn số trung bình cộng làm đại diện cho các số liệu đã cho. Trong trường hợp này ta chọn số trung vị $M_e = 6,7$ triệu đồng làm đại diện cho tiền lương hàng tháng của 7 nhân viên.

**Câu 3.** Điểm kiểm tra môn Toán cuối năm của một nhóm gồm 9 học sinh lớp 6 lần lượt là 1; 1; 3; 6; 7; 8; 8; 9; 10. Điểm trung bình của cả nhóm gần nhất với số nào dưới đây?

**A.** 7,5. **B.** 7. **C.** 6,5. **D.** 5,9.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điểm trung bình của cả nhóm là $\frac{1+1+3+6+7+8+8+9+10}{9}=\frac{53}{9}=5,(8)\approx 5,9$.

**Câu 4.** Các giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu số liệu được gọi là

**A.** Mốt. **B.** Số trung bình. **C.** Số trung vị. **D.** Độ lệch chuẩn.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 5.** Thời gian chạy 50m của 20 học sinh được ghi lại trong bảng dưới đây:

| Thời gian (giây) | 8,3 | 8,4 | 8,5 | 8,7 | 8,8 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 2 | 3 | 9 | 5 | 1 |

Hỏi trung bình mỗi học sinh chạy 50m hết bao lâu ?

**A.** 8,54. **B.** 4. **C.** 8,50. **D.** 8,53.

**Lời giải**

**Chọn D**

Thời gian trung bình để mỗi học sinh chạy được 50m là

$\overline{x}=\frac{8,3.2+8,4.3+8,5.9+8,7.5+8,8}{20}=8,53$.

**Câu 6.** Một tổ học sinh gồm 10 học sinh có điểm kiểm tra giữa học kì 2 môn toán như sau: $5;6;7;5;8;8;10;9;7;8$. Tính điểm trung bình của tổ học sinh đó.

**A.** $7$. **B.** $8$. **C.** $7,3$. **D.** $7,5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điểm trung bình của tổ học sinh đó là: $\overline{x}=\frac{5.2+6+7.2+8.3+9+10}{10}=7,3$.

**Câu 7.** Một tổ học sinh gồm 10 học sinh có điểm kiểm tra cuối học kì 1 môn toán như sau: $7;5;6;6;6;8;7;5;6;9$. Tìm mốt của dãy trên.

**A.** $M_0=6$. **B.** $M_0=7$. **C.** $M_0=5$. **D.** $M_0=8$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Giá trị $x=6$ là giá trị có tần số lớn nhất $n=4$. Vậy mốt của điều tra trên là: $M_0=6$.

**Câu 8.** Một tổ học sinh gồm 10 học sinh có điểm kiểm tra giữa học kì 2 môn toán như sau: $5;6;7;5;8;8;10;9;7;8$. Tính điểm trung bình của tổ học sinh đó.

**A.** $7$. **B.** $8$. **C.** $7,3$. **D.** $7,5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điểm trung bình của tổ học sinh đó là: $\overline{x}=\frac{5.2+6+7.2+8.3+9+10}{10}=7,3$.

**Câu 9.** Cân nặng của 40 học sinh lớp 10 trường THPT A được cho bởi bảng sau

| Lớp cân nặng (kg) | [35; 37) | [37; 39) | [39; 41) | [41; 43] | |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 6 | 9 | 11 | 14 | N = 40 |

Tính số trung bình cộng của mẫu số liệu trên.

**A.** $\overline{x}=38,26$. **B.** $\overline{x}=40,25$. **C.** $\overline{x}=39,65$. **D.** $\overline{x}=40,83$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Giá trị đại diện của từng lớp cân nặng là: $36$, $38$, $40$, $42$.

Khi đó số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là:

$$\overline{x}=\frac{36.6+38.9+40.11+42.14}{40}=39,65.$$

***Câu 10.*** Kết quả điểm kiểm tra 15' môn Toán của 100 em học sinh được trình bày ở bảng sau:

| Điểm | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 3 | 5 | 11 | 17 | 30 | 19 | 10 | 5 | 100 |

Số trung bình cộng của bảng phân bố tần số nói trên là

**A.** $6,88$. **B.** $7,12$. **C.** $6,5$. **D.** $7,22$.

**Lời giải**

Số trung bình cộng của bảng phân bố tần số nói trên là:

$$\frac{3.3+4.5+5.11+6.17+7.30+8.19+9.10+10.5}{100}=6,88$$

**Câu 11.** Một học sinh có điểm các bài kiểm tra Toán như sau: $8;4;9;8;6;6;9;9;9$. Điểm trung bình môn Toán của học sinh đó (làm tròn đến 1 chữ số thập phân) là

**A.** $7,3$. **B.** $6,8$. **C.** $8,5$. **D.** $7,6$.

**Lời giải**

Ta có $\overline{X}=\frac{8.2+4.1+9.4+6.2}{9}\approx 7,6$.

**Câu 12.** Thống kê điểm kiểm tra môn Lịch Sử của 45 học sinh lớp 10A như sau:

| Điểm | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 2 | 11 | 9 | 16 | 4 | 3 |

Số trung vị trong điểm các bài kiểm tra đó là

**A.** $8,1$ điểm. **B.** $7,4$ điểm. **C.** $7,5$ điểm. **D.** $8$ điểm.

**Lời giải**

Số trung vị là số ở vị trí thứ 23, đó là $8$ điểm.

**Câu 13.** Cho mẫu số liệu thống kê $\{2;4;6;8;10\}$. Số trung bình của mẫu số liệu trên là:

**A.** $7$. **B.** $12$. **C.** $6.5$. **D.** $6$.

**Lời giải**

Số trung bình của mẫu số liệu trên là: $\overline{x}=\frac{2+4+6+8+10}{5}=6$.

**Câu 14.** Điểm kiểm tra của 24 học sinh được ghi lại trong bảng sau:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 2 | 3 | 5 | 8 | 2 |
| 8 | 5 | 8 | 4 | 9 | 6 |
| 6 | 1 | 9 | 3 | 6 | 7 |
| 3 | 6 | 6 | 7 | 2 | 9 |

Tìm mốt của điểm điều tra.

**A.** $2$. **B.** $7$. **C.** $6$. **D.** $9$.

**Lời giải**

Ta có bảng thống kê sau:

| Điểm | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 | 5 | 3 | 3 | 3 | N=24 |

Ta thấy điểm 6 có tần số lớn nhất nên mốt của điểm điều tra là: $M_0 = 6$.

***Câu 15.*** Kết quả điểm kiểm tra 45 phút môn Hóa Học của 100 em học sinh được trình bày ở bảng sau:

| Điểm | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 3 | 5 | 14 | 14 | 30 | 22 | 7 | 5 | 100 |

Số trung bình cộng của bảng phân bố tần số nói trên là

**A.** $6,82$. **B.** $4$. **C.** $6,5$. **D.** $7,22$.

**Lời giải**

Số trung bình cộng của bảng phân bố tần số nói trên là

$$\overline{x} = \frac{3.3+4.5+5.14+6.14+7.30+8.22+9.7+10.5}{100} = 6,82.$$

**Câu 16.** Điều tra tiền lương một tháng của 100 người lao động trên địa bàn một xã ta có bảng phân bố tần số sau:

| Tiền lương (VND) | 5.000.000 | 6.000.000 | 7.000.000 | 8.000.000 | 9.000.000 | 9.500.000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 26 | 34 | 20 | 10 | 5 | 5 |

Tìm **mốt** của bảng phân bố tần số trên.

**A.** 5.000.000. **B.** 6.000.000. **C.** 7.500.000. **D.** 9.500.000.

**Lời giải**

Ta có giá trị 6.000.000 có tần số lớn nhất nên là **mốt** của bảng phân bố tần số trên.

**Câu 17.** Cho bảng phân bố tần số sau: *khối lượng* $20$ *học sinh lớp* $10A$

| Khối lượng (kg) | Tần số |
|---|---|
| 50 | 4 |
| 51 | 5 |
| 52 | 6 |
| 55 | 3 |
| 56 | 2 |

Số trung bình cộng $\overline{x}$ của bảng số liệu đã cho là

**A.** $\overline{x} = 53$. **B.** $\overline{x} = 52,8$. **C.** $\overline{x} = 52,2$. **D.** $\overline{x} = 52$.

**Lời giải**

Giá trị trung bình $\overline{x} = \frac{50.4+51.5+52.6+55.3+56.2}{20} = 52,2$.

**Câu 18.** Kết quả thi môn Toán giữa kì 11 của lớp $10A_3$ trường THPT Ba Vì được thống kê như sau:

| Điểm thi | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 5 | 7 | 8 | 12 | 8 | 5 | 45 |

Giá trị mốt $M_0$ của bảng phân bố tần số trên bằng

**A.** 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 12.

**Lời giải**

Mốt của bảng phân bố tần suất là giá trị có tần số lớn nhất nên ta có $M_0 = 8$.

**Câu 19.** Điểm thi toán cuối năm của một nhóm gồm 7 học sinh lớp 11 là 1; 3; 4; 5; 7; 8; 9. Số trung vị của dãy số liệu đã cho là

**A.** 6. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 5.

**Lời giải**

Mẫu số liệu đã cho có 7 phần tử, đã sắp theo thứ tự không giảm. Nên số trung vị là số đứng giữa dãy. Vậy số trung vị là 5.

**Câu 20.** Điểm thi toán cuối năm của một nhóm gồm 7 học sinh lớp 11 là 1; 3; 4; 5; 7; 8; 9. Số trung vị trên của dãy số liệu đã cho là

**A.** 8. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn A.**

**Câu 21.** Cho dãy số liệu thống kê $5,7,8,11,14,15,17,20$. Số trung bình cộng của dãy số liệu trên là

**A.** $11$. **B.** $12$. **C.** $12.5$. **D.** $12.125$

**Lời giải**

Trung bình cộng của dãy số liệu đã cho là:

$\overline{x}=\dfrac{5+7+8+11+14+15+17+20}{8}=12.125$.

**Câu 22.** Thời gian chạy $50m$ của $20$ học sinh được ghi lại trong bảng dưới đây:

| Thời gian (giây) | $8,3$ | $8,4$ | $8,5$ | $8,7$ | $8,8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 2 | 3 | 9 | 5 | 1 |

Số trung bình cộng thời gian chạy của học sinh là

**A.** $8,54$. **B.** $4$. **C.** $8,50$. **D.** $8,53$.

**Lời giải**

Số trung bình cộng thời gian chạy của học sinh là

$\dfrac{2.8,3+3.8,4+9.8,5+5.8,7+1.8,8}{20}=8,53$.

**Câu 23.** Cho mẫu số liệu $10$, $8$, $6$, $2$, $4$. Số trung bình cộng của mẫu là

**A.** $2,8$. **B.** $2,4$. **C.** $6$. **D.** $8$.

**Lời giải**

Số trung bình $\overline{x}=\dfrac{2+4+6+8+10}{5}=6$.

**Câu 24.** Mốt của một bảng phân bố tần số là

**A.** tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số.

**B.** giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số.

**C.** giá trị có tần số nhỏ nhất trong bảng phân bố tần số.

**D.** tần số nhỏ nhất trong bảng phân bố tần số.

**Lời giải**

Mốt của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất.

**Câu 25.** Cho bảng số liệu thống kê chiều cao của một nhóm học sinh như sau:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 150 | 153 | 153 | 154 | 154 | 155 | 160 | 160 | 162 | 162 | 163 | 163 | 163 | 165 | 165 | 167 |

Số trung vị của bảng số liệu nói trên là

**A.** $161$. **B.** $153$. **C.** $163$. **D.** $156$.

**Lời giải**

Ta có trong bảng số liệu thống kê có tất cả $16$ giá trị. Do đó số trung vị bằng trung bình cộng của hai số đứng thứ $8$ và $9$ trong bảng số liệu thống kê.

Ta có $M_e=\dfrac{160+162}{2}=161$.

**Câu 26.** Cho bảng số liệu thống kê chiều cao của một nhóm học sinh như sau:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 150 | 153 | 153 | 154 | 154 | 155 | 160 | 160 | 162 | 162 | 163 | 163 | 163 | 165 | 165 | 167 |

Số trung vị dưới của bảng số liệu nói trên là

**A.** 161. **B.** 154. **C.** 163. **D.** 156.

**Lời giải**

Chọn B.

**Câu 27.** Cho bảng phân bố tần số như sau:

| Giá trị | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 15 | $9n-1$ | 12 | $n^2+7$ | 14 | 10 | $9n-20$ | 17 |

Tìm $n$ để $M_o^{(1)}=x_2; M_o^{(2)}=x_4$ là hai mốt của bảng số liệu trên.

**A.** $n=1; n=8$. **B.** $n=8$. **C.** $n=1$. **D.** $n=9$.

**Lời giải**

Ta có $M_o^{(1)}=x_2; M_o^{(2)}=x_4$ là hai mốt của bảng phân bố tần số nên

$$\begin{cases} n^2+7=9n-1 \\ 9n-1>17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2-9n+8=0 \\ n>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} n=1(l) \\ n=8(tm) \end{array}\right. \Rightarrow n=8. \\ n>2 \end{cases}$$

**Câu 28.** Nhiệt độ trung bình hàng tháng trong một năm được ghi lại trong bảng sau

| Tháng | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nhiệt độ | 16 | 20 | 25 | 28 | 30 | 30 | 28 | 25 | 25 | 20 | 18 | 16 |

Mốt của dấu hiệu là

**A.** 20. **B.** 25. **C.** 28. **D.** 30.

**Lời giải**

Ta có bảng tần số sau

| Nhiệt độ | 16 | 18 | 20 | 25 | 28 | 30 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | $n=12$ |

Mốt của dấu hiệu là 25.

**Câu 29.** Cho bảng số liệu điểm kiểm tra môn Toán của 20 học sinh.

| Điểm | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 1 | 20 |

Số trung vị của bảng số liệu trên là

**A.** 7. **B.** 8. **C.** 7,5. **D.** 7,3.

**Lời giải**

Sắp 20 điểm của bài kiểm tra trong bảng số liệu đã cho theo thứ tự tăng dần như sau

| STT | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Điểm | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 |

| STT | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Điểm | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 |

Ta thấy điểm 7 và điểm 8 là hai điểm đứng giữa (đứng ở vị trí thứ 10 và 11) của bảng xếp thứ tự(n =20).

Vậy số trung vị là $M_e=\dfrac{7+8}{2}=7,5$.

**Câu 30.** Cho bảng số liệu điểm kiểm tra môn Toán của 20 học sinh.

| Điểm | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số học sinh | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 1 | 20 |

Số trung vị trên của bảng số liệu trên là

**A.** $7$. **B.** $8$. **C.** $8,5$. **D.** $7,3$.

**Lời giải**

Chọn C. $\frac{9+8}{2}=8.5$

# Bài 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

**PHẦN A. LÝ THUYẾT**

## I. Khoảng biến thiên. Khoảng tứ phân vị

### 1. Định nghĩa

- Trong một mẫu số liệu, khoảng biến thiên là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

Ta có thể tính khoảng biến thiên $R$ của mẫu số liệu theo công thức sau: $R = x_{\max} - x_{\min}$, trong đó $x_{\max}$ là giá trị lớn nhất, $x_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

- Giả sử $Q_1, Q_2, Q_3$ là tứ phân vị của mẫu số liệu. Ta gọi hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ phân vị, của mẫu số liệu đó.

*Chú ý:* Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu còn gọi là khoảng trải giữa (tiếng Anh là InterQuartile Range - $IQR$ ) của mẫu số liệu đó.

***Ví dụ 1.*** Mẫu số liệu thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của 15 cây bạch đàn là:

6,3 6,6 7,5 8,2 8,3 7,8 7,9 9,0 8,9 7,2 7,5 8,7 7,7 8,8 7,6 (2)

a) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu (2).

b) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (2).

***Giải***

a) Trong mẫu số liệu (2), số lớn nhất là 9,0 và số bé nhất là 6,3. Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu (2) là:

$R = x_{\max} - x_{\min} = 9,0 - 6,3 = 2,7(m).$

b) Sắp xếp các số liệu của mẫu (2) theo thứ tự tăng dần, ta được:

6,3 6,6 7,2 7,5 7,5 7,6 7,7 7,8 7,9 8,2 8,3 8,7 8,8 8,9 9,0

Do đó $Q_1 = 7,5(m); Q_2 = 7,8(m); Q_3 = 8,7(m)$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (2) là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 8,7 - 7,5 = 1,2(m)$.

### 2. Ý nghĩa

a) **Ý nghĩa của khoảng biến thiên:** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu phản ánh sự "dao động", "sự dàn trải" của các số liệu trong mẫu đó. Khoảng biến thiên được sử dụng trong nhiều tình huống thực tiễn, chẳng hạn: tìm ra sự phân tán điểm kiểm tra của một lớp học hay xác định phạm vi giá cả của một dịch vụ ...

Theo cách nhìn như ở trong vật lí, ở đó biên độ dao động phản ánh khoảng cách từ điểm cân bằng đến điểm xa nhất của dao động, nếu coi số trung bình cộng là "điểm cân bằng" của mẫu số liệu thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu có thể xem như hai lần biên độ dao động của các số trong mẫu đó quanh điểm cân bằng.

Trong các đại lượng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán và tương đối tốt đối với các mẫu số liệu nhỏ. Tuy nhiên, do khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị $x_{\max}$ và $x_{\min}$ của mẫu số liệu nên đại lượng đó chưa diễn giải đầy đủ sự phân tán của các số liệu trong mẫu. Ngoài ra, giá trị của khoảng biến thiên sẽ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường của mẫu số liệu đó. Trong những trường hợp như vậy, khoảng biến thiên của mẫu số liệu không phản ánh chính xác độ dàn trải của mẫu số liệu.

b) **Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị:** Khoảng tứ phân vị là một đại lượng cho biết mức độ phân tán của nữa giữa mẫu số liệu và có thể giúp xác định các giá trị bất thường của mẫu số liệu đó. Khoảng tứ phân vị thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên vì nó loại trừ hầu hết giá trị bất thường của mẫu số liệu.

## II. Phương sai

### 1. Định nghĩa

Cho mẫu số liệu thống kê có $n$ giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và số trung bình cộng là $\overline{x}$.

Ta gọi số $s^2=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}$ là phương sai của mẫu số liệu trên.

*Nhận xét*

- Khi có các số liệu bằng nhau, ta có thể tính phương sai theo công thức sau:

+ Phương sai của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là:

$s^2=\frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+n_k(x_k-\overline{x})^2}{n}$,

| Giá trị | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| Tần số | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_k$ |

trong đó $n=n_1+n_2+\ldots+n_k;\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

+ Phương sai của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối là:

$s^2=f_1(x_1-\overline{x})^2+f_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+f_k(x_k-\overline{x})^2$,

| Giá trị | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| Tần số tương đối | $f_1$ | $f_2$ | ... | $f_k$ |

trong đó $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

- Trong thực tế, người ta còn dùng công thức sau để tính phương sai của một mẫu số liệu:

$\hat{s}^2=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n-1}$, trong đó: $x_i$ là giá trị của quan sát thứ $i$; $\overline{x}$ là giá trị trung bình và $n$ là số quan sát trong mẫu số liệu đó.

## 2. ý nghĩa

*Nhận xét:* Phương sai $s^2$ đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình cộng). Phương sai là số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.

***Ví dụ 2.*** Xét mẫu số liệu thống kê kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của bạn Huy là:

6 7 7 8 7 (4) . Còn của bạn Dũng là 8 6 7 5 9 (3)

Số trung bình cộng của mẫu số liệu (4) là: $\overline{x}=7$.

a) Tính phương sai của mẫu số liệu (4).

b) So sánh phương sai của mẫu số liệu (4) với phương sai của mẫu số liệu (3) Từ đó cho biết bạn nào có kết quả kiểm tra môn Toán đồng đều hơn.

***Giải***

a) Gọi phương sai của hai mẫu số liệu (3) và (4) lần lượt là $s_D^2,s_H^2$. Ta có: $s_D^2=2$;

$s_H^2=\frac{(6-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2+(8-7)^2+(7-7)^2}{5}=\frac{2}{5}=0,4.$

b) Do $s_H^2=0,4<s_D^2=2$ nên bạn Huy có kết quả kiểm tra môn Toán đồng đều hơn bạn Dũng.

# III. Độ lệch chuẩn

## 1. Định nghĩa

Căn bậc hai của phương sai gọi là *độ lệch chuẩn* của mẫu số liệu thống kê.

*Nhận xét*: Vì đơn vị đo của phương sai là bình phương đơn vị đo của số liệu thống kê, trong khi độ lệch chuẩn lại có cùng đơn vị đo với số liệu thống kê, nên khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta sử dụng độ lệch chuẩn.

***Ví dụ 3.*** Bảng sau thống kê nhiệt độ (đơn vị: $^\circ C$) ở Thành phố Hồ Chí Minh ngày 03/6/2021 sau một số lần đo.

| Giờ đo | **1***h* | **4***h* | **7h** | **10***h* | **13***h* | **16***h* | 19*h* | **22***h* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nhiệt độ $(^\circ C)$ | 27 | 26 | 28 | 32 | 34 | 35 | 30 | 28 |

a) Viết mẫu số liệu thống kê nhiệt độ nhận được từ bảng .
b) Tính số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

***Giải***

a) Mẫu số liệu thống kê nhiệt độ nhận được từ bảng là: 27 26 28 32 34 35 30 28

b) Nhiệt độ trung bình là:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8} = \frac{27 + 26 + 28 + 32 + 34 + 35 + 30 + 28}{8} = 30\left(^\circ C\right).$$

Phương sai của mẫu số liệu đó là:

$$s^2 = \frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_3 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_4 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_5 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_6 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_7 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_8 - \overline{x}\right)^2}{8}$$

$$= \frac{(-3)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 0^2 + (-2)^2}{8} = \frac{78}{8} = 9,75.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó là: $s = \sqrt{9,75} \approx 3,12\left(^\circ C\right)$.

## 2. Ý nghĩa

Cũng như phương sai, khi hai mẫu số liệu thống kê có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn. Độ lệch chuẩn là số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu thống kê có cùng đơn vị đo.

## IV. Tính hợp lí của số liệu thống kê

Ta có thể sử dụng các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm để chỉ ra được những số liệu bất thường của mẫu số liệu đó. Ta thường sử dụng khoảng tứ phân vị để xác định số liệu bất thường của mẫu số liệu. Cụ thể như sau:

Giả sử $Q_1, Q_2, Q_3$ là tứ phân vị của mẫu số liệu và hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Một giá trị trong mẫu số liệu được coi là một giá trị bất thường nếu nó nhỏ hơn $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q$ hoặc lớn hơn $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q$. Như vậy, khoảng tứ phân vị cho ta cách nhận ra giá trị bất thường của mẫu số liệu.

***Ví dụ 4.*** Nêu các giá trị bất thường của mẫu số liệu (7) thống kê sau:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 19 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| | 33 | 34 | 48 | 49 | | | | | | | | | | |

***Giải***

Mẫu số liệu (7) có tứ phân vị là $Q_1 = 22; Q_2 = 27; Q_3 = 32$.

Suy ra $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 32 - 22 = 10.$

Các giá trị 5,6 (nhỏ hơn $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q = 22 - \frac{3}{2}\cdot 10 = 7$ ) và các giá trị 48,49 (lớn hơn $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q = 32 + \frac{3}{2}\cdot 10 = 47$ ) là các giá trị bất thường của mẫu số liệu (7).

*Chú ý:* Ta cũng có thể xác định số liệu bất thường của mẫu số liệu bằng số trung bình cộng và độ lệch chuẩn. Cụ thể như sau:

Giả sử $\overline{x}, s$ lần lượt là số trung bình cộng và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu. Một giá trị trong mẫu số liệu cũng được coi là một giá trị bất thường nếu nó nhỏ hơn $\overline{x} - 3s$ hoặc lớn hơn $\overline{x} + 3s$. Như vậy, số trung bình cộng và độ lệch chuẩn cho ta cách nhận ra giá trị bất thường của mẫu số liệu.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Mẫu số liệu sau đây cho biết sản lượng lúa ( đv tạ) của 5 thửa ruộng thí nghệm có cùng diện tích

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |

a) Tìm sản lượng trung bình
b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.
c) Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị

**Câu 2.** Người ta tiến hành phỏng vấn một số người về chất lượng của một loại sản phẩm mới. người điều tra yêu cầu cho điểm sản phẩm ( thang điểm 100) kết quả như sau:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 65 | 51 | 48 | 45 | 61 | 30 | 35 | 84 | 83 | 60 | 58 | 75 |
| 72 | 68 | 39 | 41 | 54 | 61 | 72 | 75 | 72 | 61 | 58 | 65 | |

a) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn. Nhận xét gì về các kết quả nhận được.
b) Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị
c) Tìm giá trị bất thường

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Năng suất lúa hè thu (tạ/ha) năm 1998 của 31 tỉnh ở Việt Nam được thống kê trong bảng sau:

| Năng suất lúa (tạ/ha) | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 4 | 7 | 9 | 6 | 5 |

Giá trị $x_3 = 35$ có tần số bằng

**A.** 6. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 9.

**Câu 2.** Chọn khẳng định ***sai*** trong các khẳng định sau:

**A.** Phương sai luôn là một số không âm.
**B.** Phương sai là bình phương của độ lệch chuẩn.
**C.** Phương sai càng lớn thì độ phân tán quanh số trung bình càng lớn.
**D.** Phương sai luôn lớn hơn độ lệch chuẩn.

**Câu 3.** Để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê so với số trung bình, ta dùng đại lượng nào sau đây?

**A.** Số trung bình. **B.** Số trung vị **C.** Mốt. **D.** Phương sai.

**Câu 4.** Chọn câu đúng trong các câu trả lời sau đây: Phương sai bằng:

**A.** Một nửa của độ lệch chuẩn **B.** Căn bậc hai của độ lệch chuẩn.
**C.** Hai lần của độ lệch chuẩn. **D.** Bình phương của độ lệch chuẩn.

**Câu 5.** Cho phương sai của các số liệu bằng 4. Tìm độ lệch chuẩn.

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 8.

**Câu 6.** Độ lệch chuẩn là

**A.** Căn bậc hai của phương sai. **B.** Bình phương của phương sai.

**C.** Một nửa của phương sai. **D.** Không phải các công thức trên.

**Câu 7.** Nếu đơn vị đo của số liệu là kg thì đơn vị của độ lệch chuẩn là

**A.** kg. **B.** $\text{kg}^2$. **C.** Không có đơn vị. **D.** $\frac{\text{kg}}{2}$.

**Câu 8.** Tìm phát biểu đúng về phương sai của một mẫu số liệu.

**A.** Phương sai được sử dụng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
**B.** Phương sai được sử dụng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình).
**C.** Phương sai được tính bằng tổng số phần tử của một mẫu số liệu.
**D.** Phương sai là số liệu xuất hiện nhiều nhất (số liệu có tần số lớn nhất) trong bảng các số

liệu thống kê.

**Câu 9.** Theo kết quả thống kê điểm thi giữa kỳ 2 môn toán khối 11 của một trường THPT, người ta tính được phương sai của bảng thống kê đó là $s_x^2 = 0,573$. Độ lệch chuẩn của bảng thống kê đó bằng

**A.** $0,812$. **B.** $0,757$. **C.** $0,936$. **D.** $0,657$.

**Câu 10.** Cho mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_N$ có số trung bình là $\overline{x}$. Phương sai được tính theo công thức nào trong các công thức sau

**A.** $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$. **B.** $\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}\right)}$. **C.** $\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}$. **D.** $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$.

**Câu 11.** Phương sai của dãy số $2;3;4;5;6$ là

**A.** $S_x^2 = 4$. **B.** $S_x^2 = \sqrt{2}$. **C.** $S_x^2 = 2$. **D.** $S_x^2 = -2$.

**Câu 12.** Khoảng tứ phân vị của dãy số $2;3;4;5;6$ là

**A.** $\Delta_Q = 3$. **B.** $\Delta_Q = \sqrt{2}$. **C.** $\Delta_Q = 2$. **D.** $\Delta_Q = -2$.

**Câu 13.** Thống kê điểm kiểm tra môn toán (thang điểm 10) của một nhóm gồm 6 học sinh ta có bảng số liệu sau:

| Tên học sinh | Kim | Sơn | Ninh | Bình | Việt | Nam |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Điểm | 9 | 8 | 7 | 10 | 8 | 9 |

Tìm độ lệch chuẩn δ của bảng số liệu trên (làm tròn đến hàng phần trăm).

**A.** $\delta \approx 0,92$. **B.** $\delta \approx 0,95$. **C.** $\delta \approx 0,96$. **D.** $\delta \approx 0,91$.

**Câu 14.** Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm 20). Kết quả cho trong bảng sau:

| Điểm $(x)$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 1 | 1 | 3 | 5 | 8 | 13 | 19 | 24 | 14 | 10 | 2 |

Khi đó **độ lệch chuẩn** là

**A.** $1,98$. **B.** $3,96$. **C.** $15,23$ **D.** $1,99$.

**Câu 15.** Điểm thi của lớp 10C của một trường Trung học Phổ Thông được trình bày ở bảng phân bố tần số sau:

| Điểm thi | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 7 | 5 | 10 | 12 | 4 | 2 | $n = 40$ |

Phương sai của bảng phân bố tần số đã cho là:

**A.** $0,94$ **B.** $3,94$. **C.** $2,94$. **D.** $1,94$.

**Câu 16.** Theo dõi thời gian làm một bài toán (tính bằng phút) của $40$ học sinh, giáo viên lập được bảng sau:

| Thời gian $(x)$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $(n)$ | 6 | 3 | 4 | 2 | 7 | 5 | 5 | 7 | 1 | $N = 40$ |

Phương sai của mẫu số liệu trên gần với số nào nhất?

**A.** $6$. **B.** $12$. **C.** $40$. **D.** $9$.

**Câu 17.** Cho dãy số liệu thống kê: $1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$. Phương sai của các số liệu thống kê là

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Câu 18.** Cho dãy số liệu thống kê: $1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$. Khoảng biến thiên là

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $6$.

**Câu 19.** Số liệu thống kê $100$ học sinh tham gia kì thi học sinh giỏi toán (thang điểm 20). Kết quả được thống kê trong bảng sau:

| Điểm | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 1 | 1 | 3 | 5 | 8 | 13 | 19 | 24 | 14 | 10 | 2 | $N = 100$ |

Tính độ lệch chuẩn của bảng số liệu thống kê.

**A.** $2,01$. **B.** $1,89$. **C.** $1,98$. **D.** $1,99$.

**Câu 20.** Cho mẫu số liệu thống kê $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.Tính (gần đúng) độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên?

**A.** $2,45$. **B.** $2,58$. **C.** $6,67$. **D.** $6,0$.

**Câu 21.** Cho mẫu số liệu thống kê $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên?

**A.** $2$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Câu 22.** Một cửa hàng bán gạo, thống kê số kg gạo mà cửa hàng bán mỗi ngày trong 30 ngày, được bảng tần số:

| **Bảng tần số** | |
|---|---|
| *Số kg gạo* | *Tần số* |
| *100* | *7* |
| *120* | *4* |
| *130* | *2* |
| *160* | *8* |
| *180* | *3* |
| *200* | *2* |
| *250* | *4* |
| ***Tổng*** | ***30*** |

Phương sai của bảng số liệu gần đúng với giá trị nào dưới đây nhất?

**A.** $155$. **B.** $2318$. **C.** $3325$. **D.** $1234$.

**Câu 23.** Sản lượng lúa (tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng phân bố tần số sau đây:

| Sản lượng | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 5 | 8 | 11 | 10 | 6 |

Phương sai của mẫu số liệu là:

**A.** $s_x^2 = 1,5$ **B.** $s_x^2 = 1,24$. **C** $1,54$ **D.** $22,1$

**Câu 24.** Điểm kiểm tra giữa kỳ 2 của một học sinh lớp 10 như sau: $2,4,6,8,10$. Phương sai của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

**A.** $6$ **B.** $8$ **C.** $10$ **D.** $40$

**Câu 25.** Điểm kiểm tra giữa kỳ 2 của một học sinh lớp 10 như sau: $2,4,6,8,10$. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

**A.** $6$ **B.** $8$ **C.** $10$ **D.** $40$

**Câu 26.** Cho thống kê điểm thi môn toán trong một kì thi của $400$ em học sinh. Người ta thấy có $72$ bài được điểm $5$. Hỏi tần suất của giá trị $x_i = 5$ là bao nhiêu

**A.** $72\%$. **B.** $36\%$. **C.** $10\%$. **D.** $18\%$.

**Câu 27.** Cho bảng số liệu điểm thi học kì 2 của 40 học sinh lớp 10A (thang điểm là 10):

| Điểm | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 5 | 12 | 8 | 9 | 4 | 2 | N=40 |

Tính phương sai $S_x^2$

**A.** $S_x^2 = 1,784$. **B.** $S_x^2 = 1,874$. **C.** $S_x^2 = 1,847$. **D.** $S_x^2 = 1,748$.

**Câu 28.** Điểm thi môn Toán lớp $10A_2$ của một Trường trung học phổ thông được trình bày ở bảng phân bố tần số sau

| Điểm thi | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 7 | 5 | 10 | 12 | 4 | 2 | $n = 40$ |

Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào gần nhất với phương sai của bảng phân bố tần số trên?

**A.** $0,94$. **B.** $3,94$. **C.** $2,94$. **D.** $1,94$.

# Bài 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

**PHẦN A. LÝ THUYẾT**

## I. Khoảng biến thiên. Khoảng tứ phân vị

### 1. Định nghĩa

- Trong một mẫu số liệu, khoảng biến thiên là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

Ta có thể tính khoảng biến thiên $R$ của mẫu số liệu theo công thức sau: $R = x_{\max} - x_{\min}$, trong đó $x_{\max}$ là giá trị lớn nhất, $x_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

- Giả sử $Q_1, Q_2, Q_3$ là tứ phân vị của mẫu số liệu. Ta gọi hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ phân vị, của mẫu số liệu đó.

*Chú ý:* Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu còn gọi là khoảng trải giữa (tiếng Anh là InterQuartile Range - $IQR$ ) của mẫu số liệu đó.

***Ví dụ 1.*** Mẫu số liệu thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của 15 cây bạch đàn là:

6,3 6,6 7,5 8,2 8,3 7,8 7,9 9,0 8,9 7,2 7,5 8,7 7,7 8,8 7,6 (2)

a) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu (2).

b) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (2).

***Giải***

a) Trong mẫu số liệu (2), số lớn nhất là 9,0 và số bé nhất là 6,3. Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu (2) là:

$R = x_{\max} - x_{\min} = 9,0 - 6,3 = 2,7(m).$

b) Sắp xếp các số liệu của mẫu (2) theo thứ tự tăng dần, ta được:

6,3 6,6 7,2 7,5 7,5 7,6 7,7 7,8 7,9 8,2 8,3 8,7 8,8 8,9 9,0

Do đó $Q_1 = 7,5(m); Q_2 = 7,8(m); Q_3 = 8,7(m)$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (2) là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 8,7 - 7,5 = 1,2(m)$.

### 2. Ý nghĩa

a) **Ý nghĩa của khoảng biến thiên:** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu phản ánh sự "dao động", "sự dàn trải" của các số liệu trong mẫu đó. Khoảng biến thiên được sử dụng trong nhiều tình huống thực tiễn, chẳng hạn: tìm ra sự phân tán điểm kiểm tra của một lớp học hay xác định phạm vi giá cả của một dịch vụ ...

Theo cách nhìn như ở trong vật lí, ở đó biên độ dao động phản ánh khoảng cách từ điểm cân bằng đến điểm xa nhất của dao động, nếu coi số trung bình cộng là "điểm cân bằng" của mẫu số liệu thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu có thể xem như hai lần biên độ dao động của các số trong mẫu đó quanh điểm cân bằng.

Trong các đại lượng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán và tương đối tốt đối với các mẫu số liệu nhỏ. Tuy nhiên, do khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị $x_{\max}$ và $x_{\min}$ của mẫu số liệu nên đại lượng đó chưa diễn giải đầy đủ sự phân tán của các số liệu trong mẫu. Ngoài ra, giá trị của khoảng biến thiên sẽ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường của mẫu số liệu đó. Trong những trường hợp như vậy, khoảng biến thiên của mẫu số liệu không phản ánh chính xác độ dàn trải của mẫu số liệu.

b) **Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị:** Khoảng tứ phân vị là một đại lượng cho biết mức độ phân tán của nữa giữa mẫu số liệu và có thể giúp xác định các giá trị bất thường của mẫu số liệu đó. Khoảng tứ phân vị thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên vì nó loại trừ hầu hết giá trị bất thường của mẫu số liệu.

## II. Phương sai

### 1. Định nghĩa

Cho mẫu số liệu thống kê có $n$ giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và số trung bình cộng là $\overline{x}$.

Ta gọi số $s^2=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}$ là phương sai của mẫu số liệu trên.

*Nhận xét*

- Khi có các số liệu bằng nhau, ta có thể tính phương sai theo công thức sau:

+ Phương sai của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là:

$s^2=\frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+n_k(x_k-\overline{x})^2}{n}$,

| Giá trị | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| Tần số | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_k$ |

trong đó $n=n_1+n_2+\ldots+n_k;\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

+ Phương sai của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối là:

$s^2=f_1(x_1-\overline{x})^2+f_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+f_k(x_k-\overline{x})^2$,

| Giá trị | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| Tần số tương đối | $f_1$ | $f_2$ | ... | $f_k$ |

trong đó $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

- Trong thực tế, người ta còn dùng công thức sau để tính phương sai của một mẫu số liệu:

$\hat{s}^2=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n-1}$, trong đó: $x_i$ là giá trị của quan sát thứ $i$; $\overline{x}$ là giá trị trung bình và $n$ là số quan sát trong mẫu số liệu đó.

## 2. ý nghĩa

*Nhận xét:* Phương sai $s^2$ đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình cộng). Phương sai là số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.

***Ví dụ 2.*** Xét mẫu số liệu thống kê kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của bạn Huy là:

6 7 7 8 7 (4) . Còn của bạn Dũng là 8 6 7 5 9 (3)

Số trung bình cộng của mẫu số liệu (4) là: $\overline{x}=7$.

a) Tính phương sai của mẫu số liệu (4).

b) So sánh phương sai của mẫu số liệu (4) với phương sai của mẫu số liệu (3) Từ đó cho biết bạn nào có kết quả kiểm tra môn Toán đồng đều hơn.

***Giải***

a) Gọi phương sai của hai mẫu số liệu (3) và (4) lần lượt là $s_D^2,s_H^2$. Ta có: $s_D^2=2$;

$s_H^2=\frac{(6-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2+(8-7)^2+(7-7)^2}{5}=\frac{2}{5}=0,4.$

b) Do $s_H^2=0,4<s_D^2=2$ nên bạn Huy có kết quả kiểm tra môn Toán đồng đều hơn bạn Dũng.

# III. Độ lệch chuẩn

## 1. Định nghĩa

Căn bậc hai của phương sai gọi là *độ lệch chuẩn* của mẫu số liệu thống kê.

*Nhận xét*: Vì đơn vị đo của phương sai là bình phương đơn vị đo của số liệu thống kê, trong khi độ lệch chuẩn lại có cùng đơn vị đo với số liệu thống kê, nên khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta sử dụng độ lệch chuẩn.

***Ví dụ 3.*** Bảng sau thống kê nhiệt độ (đơn vị: $^\circ C$) ở Thành phố Hồ Chí Minh ngày 03/6/2021 sau một số lần đo.

| Giờ đo | **1***h* | **4***h* | **7h** | **10***h* | **13***h* | **16***h* | 19*h* | **22***h* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nhiệt độ $(^\circ C)$ | 27 | 26 | 28 | 32 | 34 | 35 | 30 | 28 |

a) Viết mẫu số liệu thống kê nhiệt độ nhận được từ bảng .
b) Tính số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

***Giải***

a) Mẫu số liệu thống kê nhiệt độ nhận được từ bảng là: 27 26 28 32 34 35 30 28

b) Nhiệt độ trung bình là:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8} = \frac{27 + 26 + 28 + 32 + 34 + 35 + 30 + 28}{8} = 30\left(^\circ C\right).$$

Phương sai của mẫu số liệu đó là:

$$s^2 = \frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_3 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_4 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_5 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_6 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_7 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_8 - \overline{x}\right)^2}{8}$$

$$= \frac{(-3)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 0^2 + (-2)^2}{8} = \frac{78}{8} = 9,75.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó là: $s = \sqrt{9,75} \approx 3,12\left(^\circ C\right)$.

## 2. Ý nghĩa

Cũng như phương sai, khi hai mẫu số liệu thống kê có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn. Độ lệch chuẩn là số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu thống kê có cùng đơn vị đo.

## IV. Tính hợp lí của số liệu thống kê

Ta có thể sử dụng các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm để chỉ ra được những số liệu bất thường của mẫu số liệu đó. Ta thường sử dụng khoảng tứ phân vị để xác định số liệu bất thường của mẫu số liệu. Cụ thể như sau:

Giả sử $Q_1, Q_2, Q_3$ là tứ phân vị của mẫu số liệu và hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Một giá trị trong mẫu số liệu được coi là một giá trị bất thường nếu nó nhỏ hơn $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q$ hoặc lớn hơn $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q$. Như vậy, khoảng tứ phân vị cho ta cách nhận ra giá trị bất thường của mẫu số liệu.

***Ví dụ 4.*** Nêu các giá trị bất thường của mẫu số liệu (7) thống kê sau:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 19 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| | 33 | 34 | 48 | 49 | | | | | | | | | | |

***Giải***

Mẫu số liệu (7) có tứ phân vị là $Q_1 = 22; Q_2 = 27; Q_3 = 32$.

Suy ra $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 32 - 22 = 10.$

Các giá trị 5,6 (nhỏ hơn $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q = 22 - \frac{3}{2}\cdot 10 = 7$ ) và các giá trị 48,49 (lớn hơn $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q = 32 + \frac{3}{2}\cdot 10 = 47$ ) là các giá trị bất thường của mẫu số liệu (7).

*Chú ý:* Ta cũng có thể xác định số liệu bất thường của mẫu số liệu bằng số trung bình cộng và độ lệch chuẩn. Cụ thể như sau:

Giả sử $\overline{x}, s$ lần lượt là số trung bình cộng và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu. Một giá trị trong mẫu số liệu cũng được coi là một giá trị bất thường nếu nó nhỏ hơn $\overline{x} - 3s$ hoặc lớn hơn $\overline{x} + 3s$. Như vậy, số trung bình cộng và độ lệch chuẩn cho ta cách nhận ra giá trị bất thường của mẫu số liệu.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Mẫu số liệu sau đây cho biết sản lượng lúa ( đv tạ) của 5 thửa ruộng thí nghệm có cùng diện tích

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |

a) Tìm sản lượng trung bình
b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.
c) Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị

**Lời giải**

a) Số trung bình của mẫu số liệu là: $\overline{x} = \dfrac{20+21+22+23+24}{5} = 22$.

b) Ta có bảng sau:

| Giá tị | Độ lệch | Bình phương độ lệch |
|---|---|---|
| 20 | $20-22=-2$ | 4 |
| 21 | $21-22=-1$ | 1 |
| 22 | $22-22=0$ | 0 |
| 23 | $23-22=1$ | 1 |
| 24 | $24-22=2$ | 4 |
| | Tổng | 10 |

Mẫu số liệu gồm 5 giá trị nên $n=5$. Do đó phương sai là: $s^2 = \dfrac{10}{5} = 2$.

Độ lệch chuẩn là: $s = \sqrt{2} \approx 1,41$.

c) Khoảng biến thiên bằng $24-20=4$

Khoảng tứ phân vị $23,5-20,5=3$

**Câu 2.** Người ta tiến hành phỏng vấn một số người về chất lượng của một loại sản phẩm mới. người điều tra yêu cầu cho điểm sản phẩm ( thang điểm 100) kết quả như sau:

80 65 51 48 45 61 30 35 84 83 60 58 75
72 68 39 41 54 61 72 75 72 61 58 65

a) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn. Nhận xét gì về các kết quả nhận được.

b) Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị

c) Tìm giá trị bất thường

**Lời giải**

**a) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn. Nhận xét gì về các kết quả nhận được.**

Ta lập bảng phân bố tần số như sau:

| Điểm | 30 | 35 | 39 | 41 | 45 | 48 | 50 | 51 | 54 | 58 | 60 | 61 | 65 | 68 | 72 | 75 | 80 | 83 | 84 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 |

Ta

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k\right)$$

có: $= \dfrac{1}{25}\left(1.30+1.35+1.39+1.41+1.45+1.48+....+1.60+3.61+2.65+1.68+3.72+2.75+1.80+1.83+1.84\right)$

$= 60,2$

Phương sai: $s_x^2 = \dfrac{1}{n}\left[n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + ... + n_k(x_k-\overline{x})^2\right] = 216,8$

Độ lệch chuẩn $s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{216,8} = 14,724$

Nhận xét: mức độ chênh lệch điểm giữa các giá trị là khá lớn

**b) Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị**

Khoảng biến thiên $84-30=54$

Nửa số liệu bên trái là $30,35,39,41,45,\boxed{48,50},51,54,58,60,61$ gồm 12 giá trị, hai phần tử chính giữa là $48,50$.

Do đó, $Q_1 = (48+50):2 = 49$.

Nửa số liệu bên phải là $61,65,65,68,72,\boxed{72,72},75,75,80,83,84$ gồm 4 giá tri, hai phần tử chính giữa là 72,72.

Do đó, $Q_3=(72+72):2=72$.

Vậy khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu là $\Delta_Q=72-49=23$.

**c) Tìm giá trị bất thường**

Không có giá trị bất thường

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Năng suất lúa hè thu (tạ/ha) năm 1998 của 31 tỉnh ở Việt Nam được thống kê trong bảng sau:

| Năng suất lúa (tạ/ha) | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 4 | 7 | 9 | 6 | 5 |

Giá trị $x_3=35$ có tần số bằng

**A.** 6. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 2.** Chọn khẳng định ***sai*** trong các khẳng định sau:

**A.** Phương sai luôn là một số không âm.

**B.** Phương sai là bình phương của độ lệch chuẩn.

**C.** Phương sai càng lớn thì độ phân tán quanh số trung bình càng lớn.

**D.** Phương sai luôn lớn hơn độ lệch chuẩn.

**Lời giải**

**Chọn D**

◆ Phương sai $S_x^2$ còn độ lệch chuẩn $S_x=\sqrt{S_x^2}$ nhưng không thể khẳng định phương sai luôn lớn hơn độ lệch chuẩn.

**Câu 3.** Để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê so với số trung bình, ta dùng đại lượng nào sau đây?

**A.** Số trung bình. **B.** Số trung vị **C.** Mốt. **D.** Phương sai.

**Lời giải**

**Chọn D**

◆ Dựa vào ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn để đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình.

**Câu 4.** Chọn câu đúng trong các câu trả lời sau đây: Phương sai bằng:

**A.** Một nửa của độ lệch chuẩn **B.** Căn bậc hai của độ lệch chuẩn.

**C.** Hai lần của độ lệch chuẩn. **D.** Bình phương của độ lệch chuẩn.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có phương sai là: $s_x^2$

Độ lệch chuẩn: $s_x=\sqrt{s_x^2}$

Suy ra phương sai bằng bình phương của độ lệch chuẩn

**Câu 5.** Cho phương sai của các số liệu bằng 4. Tìm độ lệch chuẩn.

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 8.

**Lời giải**

Ta có độ lệch chuẩn là căn bậc hai của phương sai

Nên $s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{4} = 2$.

**Câu 6.** Độ lệch chuẩn là

**A.** Căn bậc hai của phương sai. **B.** Bình phương của phương sai.

**C.** Một nửa của phương sai. **D.** Không phải các công thức trên.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 7.** Nếu đơn vị đo của số liệu là kg thì đơn vị của độ lệch chuẩn là

**A.** kg. **B.** $\text{kg}^2$. **C.** Không có đơn vị. **D.** $\frac{\text{kg}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 8.** Tìm phát biểu đúng về phương sai của một mẫu số liệu.

**A.** Phương sai được sử dụng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.

**B.** Phương sai được sử dụng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình).

**C.** Phương sai được tính bằng tổng số phần tử của một mẫu số liệu.

**D.** Phương sai là số liệu xuất hiện nhiều nhất (số liệu có tần số lớn nhất) trong bảng các số liệu thống kê.

**Lời giải**

Ý nghĩa của phương sai: Phương sai được sử dụng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình). (SGK)

**Câu 9.** Theo kết quả thống kê điểm thi giữa kỳ 2 môn toán khối 11 của một trường THPT, người ta tính được phương sai của bảng thống kê đó là $s_x^2 = 0,573$. Độ lệch chuẩn của bảng thống kê đó bằng

**A.** $0,812$. **B.** $0,757$. **C.** $0,936$. **D.** $0,657$.

**Lời giải**

Ta có công thức tính độ lệch chuẩn là $s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{0,573} \approx 0,757$.

**Câu 10.** Cho mẫu số liệu $x_1$, $x_2$,..., $x_N$ có số trung bình là $\overline{x}$. Phương sai được tính theo công thức nào trong các công thức sau

**A.** $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$. **B.** $\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)}$. **C.** $\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$. **D.** $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$.

**Lời giải**

Phương sai được tính theo công thức $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ hoặc $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$.

**Câu 11.** Phương sai của dãy số $2;3;4;5;6$ là

**A.** $S_x^2 = 4$. **B.** $S_x^2 = \sqrt{2}$. **C.** $S_x^2 = 2$. **D.** $S_x^2 = -2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

◆ Ta có: $\overline{x} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = 4$.

◆ Suy ra: $S_x^2 = \frac{1}{5}\left[(2-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2\right] = 2$.

**Câu 12.** Khoảng tứ phân vị của dãy số $2;3;4;5;6$ là

**A.** $\Delta_Q = 3$. **B.** $\Delta_Q = \sqrt{2}$. **C.** $\Delta_Q = 2$. **D.** $\Delta_Q = -2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{11}{2} - \frac{5}{2} = 3$

**Câu 13.** Thống kê điểm kiểm tra môn toán (thang điểm 10) của một nhóm gồm 6 học sinh ta có bảng số liệu sau:

| Tên học sinh | Kim | Sơn | Ninh | Bình | Việt | Nam |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Điểm | 9 | 8 | 7 | 10 | 8 | 9 |

Tìm độ lệch chuẩn δ của bảng số liệu trên (làm tròn đến hàng phần trăm).

**A.** $\delta \approx 0,92$. **B.** $\delta \approx 0,95$. **C.** $\delta \approx 0,96$. **D.** $\delta \approx 0,91$.

**Lời giải**

**Chọn C**

◆ Ta có: $\overline{x} = \frac{9+8+7+10+8+9}{6} = \frac{51}{6} = 8,5$.

◆ Suy ra: $\delta^2 = \frac{1}{6}\left(2(9-8,5)^2+2(8-8,5)^2+(7-8,5)^2+(10-8,5)^2\right) = \frac{11}{12}$.

◆ Do đó $\delta = \sqrt{\frac{11}{12}} \approx 0,96$.

**Câu 14.** Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm 20). Kết quả cho trong bảng sau:

| Điểm $(x)$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 1 | 1 | 3 | 5 | 8 | 13 | 19 | 24 | 14 | 10 | 2 |

Khi đó **độ lệch chuẩn** là

**A.** $1,98$. **B.** $3,96$. **C.** $15,23$ **D.** $1,99$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:

$\overline{x} = \frac{1.9+1.10+3.11+5.12+8.13+13.14+19.15+24.16+14.17+10.18+2.19}{100} = 15,23$

$\overline{x^2} = \frac{1.9^2+1.10^2+3.11^2+5.12^2+8.13^2+13.14^2+19.15^2+24.16^2+14.17^2+10.18^2+2.19^2}{100} = 235,91$ Phư

ơng sai của bảng số liệu là: $s^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = 235,91 - 15,23^2 = 3,9571$.

Độ lệch chuẩn là: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3,9571} = 1,99$.

**Câu 15.** Điểm thi của lớp 10C của một trường Trung học Phổ Thông được trình bày ở bảng phân bố tần số sau:

| Điểm thi | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 7 | 5 | 10 | 12 | 4 | 2 | $n = 40$ |

Phương sai của bảng phân bố tần số đã cho là:

**A.** 0,94 **B.** 3,94. **C.** 2,94. **D.** 1,94.

**Lời giải**

**Chọn D**

Trong dãy số liệu về điểm thi của lớp 10C ta có:

$\bar{x}=\frac{1}{n}\cdot\left(n_1x_1+n_2x_2+...+n_6x_6\right)=\frac{1}{40}\cdot\left(7.5+5.6+10.7+12.8+4.9+2.10\right)=7,175$

Phương sai:

$s^2=\frac{1}{n}\cdot\left(n_1.\left(x_1-\bar{x}\right)^2+n_2.\left(x_2-\bar{x}\right)^2+...+n_6.\left(x_6-\bar{x}\right)^2\right)$

$=\frac{1}{40}\cdot\left(7.\left(5-7,175\right)^2+5.\left(6-7,175\right)^2+10.\left(7-7,175\right)^2\right.$

$\left.+12.\left(8-7,175\right)^2+4.\left(9-7,175\right)^2+2.\left(10-7,175\right)^2\right)$

$\approx 1,94$

**Câu 16.** Theo dõi thời gian làm một bài toán (tính bằng phút) của 40 học sinh, giáo viên lập được bảng sau:

| Thời gian $(x)$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $(n)$ | 6 | 3 | 4 | 2 | 7 | 5 | 5 | 7 | 1 | $N=40$ |

Phương sai của mẫu số liệu trên gần với số nào nhất?

**A.** 6. **B.** 12. **C.** 40. **D.** 9.

**Lời giải**

Ta có giá trị trung bình của mẫu số liệu là $\bar{x}=\frac{x_1.n_1+x_2.n_2+...+x_k.n_k}{N}=\frac{317}{40}$.

Phương sai của mẫu số liệu là $s^2=\frac{\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\left(x_2-\bar{x}\right)^2+...+\left(x_n-\bar{x}\right)^2}{N}=6.$

**Câu 17.** Cho dãy số liệu thống kê: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Phương sai của các số liệu thống kê là

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

Giá trị trung bình của dãy số liệu thống kê đã cho là: $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$.

Phương sai của các số liệu thống kê là

$S_x^2=\frac{\left(\bar{x}-1\right)^2+\left(\bar{x}-1\right)^2+\left(\bar{x}-2\right)^2+\left(\bar{x}-3\right)^2+\left(\bar{x}-4\right)^2+\left(\bar{x}-5\right)^2+\left(\bar{x}-6\right)^2+\left(\bar{x}-7\right)^2}{7}$

$=\frac{\left(4-1\right)^2+\left(4-2\right)^2+\left(4-3\right)^2+\left(4-4\right)^2+\left(4-5\right)^2+\left(4-6\right)^2+\left(4-7\right)^2}{7}=\frac{28}{7}=4$.

**Câu 18.** Cho dãy số liệu thống kê: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Khoảng biến thiên là

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn D**

$7-1=6$

**Câu 19.** Số liệu thống kê 100 học sinh tham gia kì thi học sinh giỏi toán (thang điểm 20). Kết quả được thống kê trong bảng sau:

| Điểm | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 1 | 1 | 3 | 5 | 8 | 13 | 19 | 24 | 14 | 10 | 2 | $N=100$ |

Tính độ lệch chuẩn của bảng số liệu thống kê.

**A.** $2,01$. **B.** $1,89$. **C.** $1,98$. **D.** $1,99$.

**Lời giải**

Điểm số trung bình của các học sinh tham gia thi học sinh giỏi là

$$\overline{x}=\frac{1.9+1.10+3.11+5.12+8.13+13.14+19.15+24.16+14.17+10.18+2.19}{100}\approx 15,23.$$

Phương sai của số liệu thống kê là

$$S_x^2=\frac{\left(\overline{x}-9\right)^2+\left(\overline{x}-10\right)^2+3\left(\overline{x}-11\right)^2+5\left(\overline{x}-12\right)^2+...+2\left(\overline{x}-19\right)^2}{100}\approx 3,96.$$

Suy ra độ lệch chuẩn của bảng số liệu thống kê là $S_x=\sqrt{S_x^2}\approx 1,99$

**Câu 20.** Cho mẫu số liệu thống kê $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.Tính (gần đúng) độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên?

**A.** $2,45$. **B.** $2,58$. **C.** $6,67$. **D.** $6,0$.

**Lời giải**

Ta có giá trị trung bình $\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9}=5$.

Do đó độ lệch chuẩn

$$s=\sqrt{\frac{(1-5)^2+(2-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2}{9}}$$

$$s=\frac{2\sqrt{15}}{3}\approx 2,58.$$

**Câu 21.** Cho mẫu số liệu thống kê $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên?

**A.** $2$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Ta có** $Q_1=2,5, Q_3=7,5\Rightarrow \Delta_Q=5$

**Câu 22.** Một cửa hàng bán gạo, thống kê số kg gạo mà cửa hàng bán mỗi ngày trong 30 ngày, được bảng tần số:

| **Bảng tần số** | |
|---|---|
| *Số kg gạo* | *Tần số* |
| *100* | *7* |
| *120* | *4* |
| *130* | *2* |
| *160* | *8* |
| *180* | *3* |
| *200* | *2* |
| *250* | *4* |
| ***Tổng*** | ***30*** |

Phương sai của bảng số liệu gần đúng với giá trị nào dưới đây nhất?

**A.** $155$. **B.** $2318$. **C.** $3325$. **D.** $1234$.

**Lời giải**

Ta có số trung bình của bảng số liệu là:

$$\overline{x}=\frac{7.100+4.120+2.130+8.160+3.180+2.200+4.250}{30}\approx 155$$

Phương sai của bảng số liệu:

$$s_x^2\approx\frac{7(100-155)^2+4(120-155)^2+2(130-155)^2+8(160-155)+3(180-155)^2+2(200-155)^2+4(250-155)^2}{30}$$

$\approx 2318$.

**Câu 23.** Sản lượng lúa (tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng phân bố tần số sau đây:

| Sản lượng | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 5 | 8 | 11 | 10 | 6 |

Phương sai của mẫu số liệu là:

**A.** $s_x^2=1,5$ **B.** $s_x^2=1,24$. **C** 1,54 **D.** 22,1

**Lời giải**

Ta có sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng là:

$$\overline{x}=\frac{1}{40}(5.20+8.21+11.22+10.23+6.24)=22,1\text{ (tạ)}$$

Phương sai:

$$s_x^2=\frac{1}{n}\left[n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+...+n_k(x_k-\overline{x})^2\right]=1,54$$

**Câu 24.** Điểm kiểm tra giữa kỳ 2 của một học sinh lớp 10 như sau: $2,4,6,8,10$. Phương sai của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

**A.** 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 40

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\overline{x}=\frac{2+4+6+8+10}{5}=6.$$

$$s^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=8.$$

**Câu 25.** Điểm kiểm tra giữa kỳ 2 của một học sinh lớp 10 như sau: $2,4,6,8,10$. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

**A.** 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 40

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 26.** Cho thống kê điểm thi môn toán trong một kì thi của 400 em học sinh. Người ta thấy có 72 bài được điểm 5. Hỏi tần suất của giá trị $x_i=5$ là bao nhiêu

**A.** 72%. **B.** 36%. **C.** 10%. **D.** 18%.

**Lời giải**

Ta có tần số của giá trị $x_i$ là $n_i=72$, suy ra tần suất của giá trị $x_i$ là: $f_i=\frac{n_i}{N}=\frac{72}{400}=18\%$

Vậy $f_i=18\%$.

**Câu 27.** Cho bảng số liệu điểm thi học kì 2 của 40 học sinh lớp 10A (thang điểm là 10):

| Điểm | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 5 | 12 | 8 | 9 | 4 | 2 | N=40 |

Tính phương sai $S_x^2$

**A.** $S_x^2 = 1,784$. **B.** $S_x^2 = 1,874$. **C.** $S_x^2 = 1,847$. **D.** $S_x^2 = 1,748$.

**Lời giải**

Ta có điểm trung bình của 40 em học sinh là:

$$\overline{x} = \frac{5x5 + 12x6 + 8x7 + 9x8 + 4x9 + 2x10}{40} = \frac{281}{40} = 7,025$$

$$S_x^2 = \frac{5(5-7,025)^2 + 12(6-7,025)^2 + 8(7-7,025)^2 + 9(8-7,025)^2 + 4(9-7,025)^2 + 2(10-7,025)^2}{40}$$

$$= 1,874$$

**Câu 28.** Điểm thi môn Toán lớp $10A_2$ của một Trường trung học phổ thông được trình bày ở bảng phân bố tần số sau

| Điểm thi | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | 7 | 5 | 10 | 12 | 4 | 2 | $n = 40$ |

Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào gần nhất với phương sai của bảng phân bố tần số trên?

**A.** $0,94$. **B.** $3,94$. **C.** $2,94$. **D.** $1,94$.

**Lời giải**

Trong dãy số liệu về điểm thi môn Toán lớp $10A_2$ ta có

$$\overline{x} = \frac{1}{n}.\left(n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_6x_6\right) = \frac{1}{40}.\left(7.5 + 5.6 + 10.7 + 12.8 + 4.9 + 2.10\right) = 7,175.$$

Phương sai là:

$$s^2 = \frac{1}{n}.\left(n_1.\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + n_2.\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + ... + n_6.\left(x_6 - \overline{x}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{40}.\left(7.\left(5 - 7,175\right)^2 + 5.\left(6 - 7,175\right)^2 + 10.\left(7 - 7,175\right)^2\right.$$

$$\left. + 12.\left(8 - 7,175\right)^2 + 4.\left(9 - 7,175\right)^2 + 2.\left(10 - 7,175\right)^2\right)$$

$$\approx 1,94.$$

# Bài 4. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ TRÒ CHƠI ĐƠN GIẢN

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## A. LÝ THUYẾT

### I. Xác suất của biến cố trong trò chơi tung đồng xu

Xác suất của biến cố $A$, kí hiệu $P(A)$, là tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố $A$ và số phần tử của không gian mẫu $\Omega$ :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

ở đó $n(A), n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp $A$ và $\Omega$.

***Ví dụ 1.*** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

a) Viết tập hợp $\Omega$ là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Xét biến cố $B$ : "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa". Tính xác suất của biến cố $B$.

***Giải***

a) Không gian mẫu trong trò chơi trên là tập hợp

$\Omega=\{SS;SN;NS;NN\}$.

b) Có ba kết quả thuận lợi cho biến cố $B$ là: $SN, NS, NN$, tức là $B=\{SN;NS;NN\}$.

Vì thế, xác suất của biến cố $B$ là $\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{3}{4}$.

### II. Xác suất của biến cố trong trò chơi gieo xúc xắc

Xác suất của biến cố $C$, kí hiệu $P(C)$, là tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố $C$ và số phần tử của không gian mẫu $\Omega$ :

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)},$$

ở đó $n(C), n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp $C$ và $\Omega$.

***Ví dụ 2.*** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp.

a) Viết tập hợp $\Omega$ là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Xét biến cố $D$ : "Số chấm trong hai lần gieo đều là số lẻ". Tính xác suất của biến cố $D$.

***Giải***

a) Không gian mẫu trong trò chơi trên là tập hợp

$\Omega=\{(i;j)\,|\,i,j=1,2,3,4,5,6\}$,

trong đó $(i;j)$ là kết quả "Lần đầu xuất hiện mặt $i$ chấm, lần sau xuất hiện mặt $j$ chấm". Tập hợp $\Omega$ có 36 phần tử.

b) Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố $D$ là: $(1;1);(1;3);(1;5);(3;1);(3;3)$ ; $(3;5);(5;1);(5;3);(5;5)$, tức là $D=\{(1;1);(1;3);(1;5);(3;1);(3;3)$ ; $(3;5);(5;1);(5;3);(5;5)\}$. Tập hợp $D$ có 9 phần tử.

Vậy xác suất của biến cố nói trên là: $\frac{n(D)}{n(\Omega)}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

## B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng **1. Xác suất của biến cố trong trò chơi tung một đồng xu hai lần liên tiếp**

**Câu 1.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Tính xác xuất của biến cố "Kết quả của hai lần tung là khác nhau".

**Câu 2.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10 ";

b) "Mặt 1 chấm xuất hiện ít nhất một lần".

**Câu 3.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện:

a) $A = \{NS; SS\}$;

b) $B = \{NN; NS; SN; SS\}$.

**Câu 4.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố "Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa".

**Câu 5.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện:

a) $C = \{(1;1)\}$;

b) $D = \{(1;6);(6;1)\}$;

c) $G = \{(3;3);(3;6)$; $(6;3);(6;6)\}$;

d) $E = \{(1;1);(1;3);(1;5);(3;3);(3;1);(3;5);(5;5);(5;1);(5;3)\}$.

**Câu 6.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) $A$ : "Lần thứ hai xuất hiện mặt 5 chấm";

b) $B$ : "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo bằng 7 ";

c) C: "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo chia hết cho 3";

d) $D$ : "Số chấm xuất hiện lần thứ nhất là số nguyên tố";

e) E: "Số chấm xuất hiện lần thứ nhất nhỏ hơn số chấm xuất hiện lần thứ hai".

**Câu 7.** Tung một đồng xu ba lần liên tiếp.

a) Tìm số phần tử của tập hợp $\Omega$ là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Xác định mỗi biến cố:

$A$ : "Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa";

B: "Mặt sấp xuất hiện đúng hai lần".

## C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

a) Xác xuất của biến cố "Kết quả của hai lần tung là khác nhau" là:

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $\frac{1}{4}$.

**C.** $\frac{3}{4}$.

**D.** $\frac{1}{3}$.

b) Xác xuất của biến cố "Hai lần tung đều xuất hiện mặt sấp" là:

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $\frac{1}{4}$.

**C.** $\frac{3}{4}$.

**D.** $\frac{1}{3}$.

c) Xác xuất của biến cố "Lần thứ nhất xuất hiện mặt sấp" là:

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $\frac{1}{4}$.

**C.** $\frac{3}{4}$.

**D.** $\frac{1}{3}$.

d) Xác xuất của biến cố "Mặt sấp xuất hiện đúng một lần" là:

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $\frac{1}{4}$.

**C.** $\frac{3}{4}$.

**D.** $\frac{1}{3}$.

**Câu 2.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp.

a) Xác suất của biến cố "Lần thứ nhất xuất hiện mặt 1 chấm, lần thứ hai xuất hiện mặt 3 chấm" là:

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $\frac{1}{6}$.

**C.** $\frac{1}{36}$.

**D.** $\frac{1}{4}$.

b) Xác suất của biến cố "Lần thứ nhất xuất hiện mặt 6 chấm" là:

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $\frac{1}{6}$.

**C.** $\frac{1}{36}$.

**D.** $\frac{1}{4}$.

c) Xác suất của biến cố "Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là giống nhau" là:

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $\frac{1}{6}$.

**C.** $\frac{1}{36}$.

**D.** $\frac{1}{4}$.

d) Xác suất của biến cố "Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là số chẵn" là:

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $\frac{1}{6}$.

**C.** $\frac{1}{36}$.

**D.** $\frac{1}{4}$.

# Bài 4. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ TRÒ CHƠI ĐƠN GIẢN

- | FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## A. LÝ THUYẾT

### I. Xác suất của biến cố trong trò chơi tung đồng xu

Xác suất của biến cố $A$, kí hiệu $P(A)$, là tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố $A$ và số phần tử của không gian mẫu $\Omega$ :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

ở đó $n(A), n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp $A$ và $\Omega$.

***Ví dụ 1.*** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

a) Viết tập hợp $\Omega$ là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Xét biến cố $B$ : "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa". Tính xác suất của biến cố $B$.

***Giải***

a) Không gian mẫu trong trò chơi trên là tập hợp

$\Omega=\{SS;SN;NS;NN\}$.

b) Có ba kết quả thuận lợi cho biến cố $B$ là: $SN, NS, NN$, tức là $B=\{SN;NS;NN\}$.

Vì thế, xác suất của biến cố $B$ là $\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{3}{4}$.

### II. Xác suất của biến cố trong trò chơi gieo xúc xắc

Xác suất của biến cố $C$, kí hiệu $P(C)$, là tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố $C$ và số phần tử của không gian mẫu $\Omega$ :

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)},$$

ở đó $n(C), n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp $C$ và $\Omega$.

***Ví dụ 2.*** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp.

a) Viết tập hợp $\Omega$ là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Xét biến cố $D$ : "Số chấm trong hai lần gieo đều là số lẻ". Tính xác suất của biến cố $D$.

***Giải***

a) Không gian mẫu trong trò chơi trên là tập hợp

$\Omega=\{(i;j)\,|\,i,j=1,2,3,4,5,6\}$,

trong đó $(i;j)$ là kết quả "Lần đầu xuất hiện mặt $i$ chấm, lần sau xuất hiện mặt $j$ chấm". Tập hợp $\Omega$ có 36 phần tử.

b) Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố $D$ là: $(1;1);(1;3);(1;5);(3;1);(3;3);(3;5);(5;1);(5;3);(5;5)$, tức là $D=\{(1;1);(1;3);(1;5);(3;1);(3;3);(3;5);(5;1);(5;3);(5;5)\}$. Tập hợp $D$ có 9 phần tử.

Vậy xác suất của biến cố nói trên là: $\frac{n(D)}{n(\Omega)}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

## B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng **1. Xác suất của biến cố trong trò chơi tung một đồng xu hai lần liên tiếp**

**Câu 1.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Tính xác xuất của biến cố "Kết quả của hai lần tung là khác nhau".

**Giải**

- Không gian mẫu trong trò chơi trên là tập hợp $\Omega=\{SS;SN;NS;NN\}$. Do đó, $n(\Omega)=4$.
- Gọi $A$ là biến cố "Kết quả của hai lần tung là khác nhau". Các kết quả thuận lợi cho biến cố $A$ là: $SN, NS$, tức là $A=\{SN;NS\}$. Vì thế, $n(A)=2$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

**Câu 2.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10 ";

b) "Mặt 1 chấm xuất hiện ít nhất một lần".

**Giải**

Không gian mẫu trong trò chơi trên là tập hợp $\Omega=\{(i;j)\ \ i,j=1,2,3,4,5,6\}$.

Vậy $n(\Omega)=36$.

a) Gọi $E$ là biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10 ". Các kết quả thuận lợi cho biến cố $E$ là: $(5;5),(5;6),(6;5),(6;6)$, tức là $E=\{(5;5),(5;6),(6;5),(6;6)\}$. Vì thế, $n(E)=4$.

Vậy xác suất của biến cố $E$ là: $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$.

b) Gọi $G$ là biến cố "Mặt 1 chấm xuất hiện ít nhất một lần". Các kết quả thuận lợi cho biến cố $G$ là: $(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),(2;1),(3;1),(4;1)$, $(5;1),(6;1)$, tức là

$G=\{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),(2;1),(3;1)$, $(4;1),(5;1),(6;1)\}$. Vì thế, $n(G)=11$.

Vậy xác suất của biến cố $G$ là: $P(G)=\dfrac{n(G)}{n(\Omega)}=\dfrac{11}{36}$.

**Câu 3.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện:

a) $A=\{NS;SS\}$;

b) $B=\{NN;NS;SN;SS\}$.

**Lời giải**

a) $A$ : "Lần thứ hai xuất hiện mặt sấp".

b) B: "Lần thứ nhất xuất hiện mặt sấp hoặc mặt ngửa".

**Câu 4.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố "Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa".

**Lời giải**

$\dfrac{1}{2}$.

**Câu 5.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện:

a) $C=\{(1;1)\}$;

b) $D=\{(1;6);(6;1)\}$;

c) $G=\{(3;3);(3;6)$; $(6;3);(6;6)\}$;

d) $E=\{(1;1);(1;3);(1;5);(3;3);(3;1);(3;5);(5;5);(5;1);(5;3)\}$.

**Lời giải**

a) $C$ : "Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo đều là 1 ".

b) $D$ : "Giá trị tuyệt đối của hiệu số chấm giữa hai lần gieo là 5".

c) $E$ : "Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo chia hết cho 3".

d) $G$ : "Tích số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là số lẻ".

**Câu 6.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) $A$ : "Lần thứ hai xuất hiện mặt 5 chấm";

b) $B$ : "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo bằng 7 ";

c) C: "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo chia hết cho 3";

d) $D$ : "Số chấm xuất hiện lần thứ nhất là số nguyên tố";

e) E: "Số chấm xuất hiện lần thứ nhất nhỏ hơn số chấm xuất hiện lần thứ hai".

**Lời giải**

Không gian mẫu có 36 phần tử.

a) $A=\{(i;5)\ \ i=1,2,3,4,5,6\}$. Suy ra $n(A)=6$. Vậy $P(A)=\dfrac{1}{6}$.

b) $B=\{(1;6);(6;1);(2;5);(5;2);(3;4);(4;3)\}$. Suy ra $n(B)=6$.

Vậy $P(B)=\dfrac{1}{6}$.

c) $C=\{(1;2);(2;1);(1;5);(5;1);(2;4);(4;2);(3;3);(3;6);(6;3);(4;5);\ (5;4);(6;6)\}$.

Suy ra $n(C)=12$. Vậy $P(C)=\dfrac{1}{3}$.

d) $D=\{(2;1);(2;2);(2;3);(2;4);(2;5);(2;6);(3;1);(3;2);(3;3);(3;4);$
$(3;5);(3;6);(5;1);(5;2);(5;3);(5;4);(5;5);(5;6)\}$.

Suy ra $n(D)=18$. Vậy $P(D)=\dfrac{1}{2}$.

e) $E=\{(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(1;6);(2;3);(2;4);(2;5);(2;6);(3;4);$
$(3;5);(3;6);(4;5);(4;6);(5;6)\}$.

Suy ra $n(E)=15$. Vậy $P(E)=\dfrac{5}{12}$.

**Câu 7.** Tung một đồng xu ba lần liên tiếp.

a) Tìm số phần tử của tập hợp $\Omega$ là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Xác định mỗi biến cố:

$A$ : "Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa";

B: "Mặt sấp xuất hiện đúng hai lần".

**Lời giải**

a) $\Omega=\{NNN;NNS;NSS;NSN;SNN$ ; SNS; SSN; SSS $\}$. Suy ra $n(\Omega)=8$.

b) $A=\{NNN;NNS;SNN;SNS\}.B=\{NSS;SNS;SSN\}$.

## C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

a) Xác xuất của biến cố "Kết quả của hai lần tung là khác nhau" là:

**A.** $\dfrac{1}{2}$.

**B.** $\dfrac{1}{4}$.

**C.** $\dfrac{3}{4}$.

**D.** $\dfrac{1}{3}$.

b) Xác xuất của biến cố "Hai lần tung đều xuất hiện mặt sấp" là:

**A.** $\dfrac{1}{2}$.

**B.** $\dfrac{1}{4}$.

**C.** $\dfrac{3}{4}$.

**D.** $\dfrac{1}{3}$.

c) Xác xuất của biến cố "Lần thứ nhất xuất hiện mặt sấp" là:

**A.** $\dfrac{1}{2}$.

**B.** $\dfrac{1}{4}$.

**C.** $\frac{3}{4}$.

**D.** $\frac{1}{3}$.

41

d) Xác xuất của biến cố "Mặt sấp xuất hiện đúng một lần" là:

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $\frac{1}{4}$.

**C.** $\frac{3}{4}$.

**D.** $\frac{1}{3}$.

**Câu 2.** Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp.

a) Xác suất của biến cố "Lần thứ nhất xuất hiện mặt 1 chấm, lần thứ hai xuất hiện mặt 3 chấm" là:

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $\frac{1}{6}$.

**C.** $\frac{1}{36}$.

**D.** $\frac{1}{4}$.

b) Xác suất của biến cố "Lần thứ nhất xuất hiện mặt 6 chấm" là:

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $\frac{1}{6}$.

**C.** $\frac{1}{36}$.

**D.** $\frac{1}{4}$.

c) Xác suất của biến cố "Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là giống nhau" là:

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $\frac{1}{6}$.

**C.** $\frac{1}{36}$.

**D.** $\frac{1}{4}$.

d) Xác suất của biến cố "Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là số chẵn" là:

**A.** $\frac{1}{2}$.

**B.** $\frac{1}{6}$.

**C.** $\frac{1}{36}$.

**D.** $\frac{1}{4}$.

## LỜI GIẢI TRẮC NGHIỆM

**Câu 1** a) A. b) B. c) A. d) A.
**Câu 2** a) C. b) B. c) B. d) D.

# Bài 5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Một số khái niệm về xác suất

#### 1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Có những phép thử mà ta không thể đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó. Những phép thử như thế gọi là phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử).
Tập hợp $\Omega$ các kết quả có thể xảy ra của một phép thử gọi là không gian mẫu của phép thử đó.

***Ví dụ 1.*** Một hộp có 3 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1,2,3$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ được rút ra và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Xét phép thử "Rút ngẫu nhiên liên tiếp hai chiếc thẻ trong hộp". Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó.

***Giải***

Không gian mẫu của phép thử trên là tập hợp $\Omega=\{(1;1);(1;2);(1;3);(2;1);(2;2);(2;3);(3;1);(3;2);(3;3)\}$, ở đó, chẳng hạn $(1;2)$ là kết quả "Lần thứ nhất rút ra thẻ ghi số 1, lần thứ hai rút ra thẻ ghi số 2".

***Ví dụ 2***. Một hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng; các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ trong hộp, ghi lại màu của quả bóng được lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Xét phép thử "Lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai quả bóng trong hộp". Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó.

***Giải***

Không gian mẫu của phép thử trên là tập hợp $\Omega=\{XX;XĐ,XV;ĐĐ;ĐV;ĐX;VV;VX;VĐ\}$, ở đó, chẳng hạn $XĐ$ là kết quả "Lần thứ nhất lấy ra quả bóng xanh, lần thứ hai lấy ra quả bóng đỏ".

#### 2. Biến cố

##### a) Định nghĩa

*Nhận xét*

- Mỗi sự kiện liên quan đến phép thử $T$ tương ứng với một (và chỉ một) tập con $A$ của không gian mẫu $\Omega$.
- Ngược lại, mỗi tập con $A$ của không gian mẫu $\Omega$ có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện liên quan đến phép thử $T$.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Biến cố ngẫu nhiên (gọi tắt là biến cố) là một tập con của không gian mẫu.

*Chú ý*: Vì sự kiện chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của một biến cố nên ta cũng gọi sự kiện là biến cố. Chẳng hạn: Sự kiện "Kết quả của hai lần tung là giống nhau" trong phép thử "Tung một đồng xu hai lần liên tiếp" là một biến cố.

***Ví dụ 3.*** Xét phép thử "Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp".

a) Sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 5 " tương ứng với biến cố nào của phép thử trên?

b) Phát biểu biến cố $D=\{(1;5);(5;1);(2;4);(4;2);(3;3);(6;6)\}$ của không gian mẫu (của phép thử trên) dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

***Giải***

a) Sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 5" tương ứng với biến cố:
$C=\{(1;4);(4;1);(2;3);(3;2);(4;6);(6;4);(5;5)\}$
của phép thử trên.

b) Tập con $D$ bao gồm tất cả các phần tử của không gian mẫu có tính chất đặc trưng là tổng hai số trong mỗi cặp chia hết cho 6 . Vậy biến cố $D$ có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 6".

**b) Biến cố không. Biến cố chắc chắn**

Xét phép thử $T$ với không gian mẫu $\Omega$. Mỗi biến cố là một tập con của tập hợp $\Omega$. Vì thế, tập rỗng $\varnothing$ cũng là một biến cố, gọi là biến cố không thể (gọi tắt là biến cố không). Còn tập hợp $\Omega$ gọi là biến cố chắc chắn.

Chẳng hạn, khi gieo một xúc xắc, biến cố "Mặt xuất hiện có 7 chấm" là biến cố không, còn biến cố "Mặt xuất hiện có số chấm không vượt quá 6" là biến cố chắc chắn.

**c) Biến cố đối**

Xét phép thử $T$ với không gian mẫu là $\Omega$. Giả sử $A$ là một biến cố. Như vậy, $A$ là tập con của tập hợp $\Omega$. Ta xét tập con $\Omega \setminus A$ là phần bù của $A$ trong $\Omega$.

Tập con $\Omega \setminus A$ xác định một biến cố, gọi là biến cố đối của biến cố $A$, kí hiệu là $\overline{A}$.

Chẳng hạn, khi gieo ngẫu nhiên một xúc xắc một lần, biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số lẻ" là biến cố đối của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn".

*Chú ý:* Nếu biến cố $A$ được mô tả dưới dạng mệnh đề toán học $Q$ thì biến cố đối $\overline{A}$ được mô tả bằng mệnh đề phủ định của mệnh đề $Q$ (tức là mệnh đề $\overline{Q}$ ).

**3. Xác suất của biến cố**

Xác suất của biến cố $A$, kí hiệu là $P(A)$, bằng tỉ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, ở đó $n(A), n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp $A$ và $\Omega$. Như vậy: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

***Ví dụ 4.*** Một hộp có 5 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1,2,3$, 4, 5; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc thẻ từ trong hộp.

a) Gọi $\Omega$ là không gian mẫu trong trò chơi trên. Tính số phần tử của tập hợp $\Omega$.

b) Tính xác suất của biến cố $E$ : "Tổng các số trên hai thẻ là số lẻ"..

***Giải***

a) Mỗi phần tử của không gian mẫu $\Omega$ là một tổ hợp chập 2 của 5 phần tử trong tập hợp $\{1;2;3;4;5\}$. Vì thế

$$n(\Omega)=C_5^2=\frac{5!}{2!.3!}=\frac{5.4}{2}=10.$$

b) Biến cố $E$ gồm các cách chọn ra hai chiếc thẻ ghi số là: 1 và $2;1$ và $4;2$ và $3;2$ và 5 ; 3 và $4;4$ và 5 . Vì thế $n(E)=6$. Vậy xác suất của biến cố $E$ là

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(\Omega)}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

***Ví dụ 5.*** Từ một hộp chứa 5 quả cầu trắng và 5 quả cầu đỏ; các quả cầu có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả cầu. Tính xác suất lấy được hai quả cầu khác màu.

***Giải***

Mỗi lần lấy ra đồng thời hai quả cầu cho ta một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử. Do đó, không gian mẫu $\Omega$ gồm các tổ hợp chập 2 của 10 phần tử và

$$n(\Omega)=C_{10}^2=\frac{10!}{2!.8!}=\frac{10\cdot 9}{2}=45.$$

Xét biến cố $G$ : "Hai quả cầu lấy ra khác màu".

Khi hai quả cầu lấy ra khác màu thì một quả cầu lấy ra có màu trắng, quả cầu còn lại có màu đỏ. Có 5 cách lấy ra một quả cầu màu trắng và cũng có 5 cách lấy ra một quả cầu màu đỏ. Theo quy tắc nhân, ta có $n(G)=5.5=25$.

Vậy xác suất của biến cố $G$ là

$$P(G)=\frac{n(G)}{n(\Omega)}=\frac{25}{45}=\frac{5}{9}.$$

***Ví dụ 6.*** Một đội văn nghệ có 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên phụ trách đội muốn chọn ra một đội tốp ca gồm ba bạn sao cho có cả bạn nam và bạn nữ cùng tham gia.

a) Giáo viên phụ trách đội có bao nhiêu cách chọn một đội tốp ca như vậy?

b) Tính xác suất của biến cố $H$ : "Ba bạn chọn ra có cả nam và nữ".

***Giải***

a) Khi ba bạn chọn ra có cả nam và nữ thì chỉ có hai khả năng:

- Chọn ra một bạn nam và hai bạn nữ;
- Chọn ra hai bạn nam và một bạn nữ.
- Xét khả năng thứ nhất: Chọn ra một bạn nam và hai bạn nữ.
Có 4 cách chọn ra một bạn nam.
Mỗi lần chọn ra hai bạn nữ cho ta một tổ hợp chập 2 của 5 phần tử. Do đó, số cách chọn ra hai bạn nữ là $C_5^2 = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{5.4}{2} = 10.$
Theo quy tắc nhân, ta có số cách chọn ra một bạn nam và hai bạn nữ là $4.10 = 40$.
- Xét khả năng thứ hai: Chọn ra hai bạn nam và một bạn nữ.
Có 5 cách chọn ra một bạn nữ.
Mỗi lần chọn ra hai bạn nam cho ta một tổ hợp chập 2 của 4 phần tử. Do đó, số cách chọn ra hai bạn nam là $C_4^2 = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3}{2} = 6$
Theo quy tắc nhân, ta có số cách chọn ra hai bạn nam và một bạn nữ là $5.6 = 30$.
Theo quy tắc cộng, số cách chọn ra một đội tốp ca gồm ba bạn sao cho có cả bạn nam và bạn nữ cùng tham gia là $40 + 30 = 70$ (cách).
b) Mỗi lần chọn ra đồng thời ba bạn học sinh cho ta một tổ hợp chập 3 của 9 phần tử. Do đó, không gian mẫu $\Omega$ gồm các tổ hợp chập 3 của 9 phần tử và
$n(\Omega) = C_9^3 = \frac{9!}{3!.6!} = \frac{9.8.7}{6} = 84.$
Theo câu a), ta có $n(H) = 70$. Vậy xác suất của biến cố $H$ là
$P(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)} = \frac{70}{84} = \frac{5}{6}.$

## II. TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

Xét phép thử $T$ với không gian mẫu là $\Omega$. Khi đó, ta có các tính chất sau:
- $P(\varnothing) = 0; P(\Omega) = 1$;
- $0 \le P(A) \le 1$ với mỗi biến cố $A$;
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ với mỗi biến cố $A$.

*Chứng minh*

- Xác suất của biến cố không là $P(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} = \frac{0}{n(\Omega)} = 0$;

Xác suất của biến cố chắc chắn là $P(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$.

- Do $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ và $0 \le n(A) \le n(\Omega)$ nên $0 \le P(A) \le 1$ với mỗi biến cố $A$.

- Do $n(\Omega \setminus A) = n(\Omega) - n(A)$ nên xác suất của biến cố $\overline{A}$ là:
$P(\overline{A}) = \frac{n(\Omega \setminus A)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega) - n(A)}{n(\Omega)} = 1 - \frac{n(A)}{n(\Omega)} = 1 - P(A).$

***Ví dụ 7.*** Một hộp có 10 quả bóng trắng và 10 quả bóng đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 9 quả bóng trong hộp. Tính xác suất để trong 9 quả bóng được lấy ra có ít nhất một quả bóng màu đỏ.

***Giải***

Mỗi lần lấy ra đồng thời 9 quả bóng cho ta một tổ hợp chập 9 của 20 phần tử. Do đó, không gian mẫu $\Omega$ gồm các tổ hợp chập 9 của 20 phần tử và $n(\Omega) = C_{20}^9$.
Xét biến cố $K$ : "Trong 9 quả bóng được lấy ra có ít nhất một quả bóng màu đỏ".
Khi đó biến cố đối của biến cố $K$ là biến cố $\overline{K}$ : "Trong 9 quả bóng được lấy ra không có quả bóng màu đỏ nào", tức là cả 9 quả bóng được lấy ra có màu trắng.
Mỗi lần lấy ra đồng thời 9 quả bóng màu trắng cho ta một tổ hợp chập 9 của 10 phần tử. Do đó
$n(\overline{K}) = C_{10}^9 = \frac{10!}{9!.1!} = 10$. Suy ra $P(\overline{K}) = \frac{n(\overline{K})}{n(\Omega)} = \frac{10}{C_{20}^9}$.

Vậy $P(K)=1-P(\overline{K})=1-\dfrac{10}{C_{20}^{9}}$

## III. NGUYÊN LÍ XÁC SUẤT BÉ

Qua thực nghiệm và quan sát thực tế, người ta thấy rằng các biến cố có xác suất bé sẽ gần như không xảy ra trong phép thử. Chẳng hạn, mỗi chuyến bay đều có một xác suất rất bé bị xảy ra tai nạn. Nhưng trên thực tế, tai nạn của một chuyến bay sẽ không xảy ra. Từ đó, ta thừa nhận nguyên lí sau đây, gọi là nguyên lí xác suất bé: Nếu một biến cố ngẫu nhiên có xác suất rất bé thì thực tế có thể cho rằng trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra.

Tuy nhiên, một xác suất như thế nào được xem là bé phải tuỳ thuộc vào từng bài toán cụ thể. Ví dụ như xác suất để dù không mở là 0,01 (dùng cho nhảy dù) thì cũng không thể coi là bé và không thể dùng loại dù đó. Nhưng nếu xác suất để tàu về ga chậm là 0,01 thì lại có thể xem là tàu về ga đúng giờ.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Gọi $A$ là tập hợp các số tự nhiên có $2$ chữ số nhỏ hơn $20$. Lấy ra $1$ số tự nhiên bất kỳ trong $A$.

**a.** a. Mô tả không gian mẫu $\Omega$?

**b.** b. Tính xác suất để lấy được số tự nhiên lẻ?

**c.** c. Tính xác suất để lấy được số tự nhiên chia hết cho $3$?

**Câu 2.** Tung $1$ con súc sắc.

**a.** Mô tả không gian mẫu?

**b.** Tính xác suất để thu được mặt có số chấm chia hết cho $2$?

**c.** Tính xác suất để thu được mặt có số chấm nhỏ hơn $4$?

**Câu 3.** Tung $3$ đồng xu đồng chất (giả thiết các đồng xu hoàn toàn giống nhau gồm $2$ mặt: sấp và ngửa).

**a.** Mô tả không gian mẫu các kết quả đạt được?

**b.** Tính xác suất thu được $3$ mặt giống nhau?

**Câu 4.** Trong hòm có $10$ chi tiết, trong đó có $2$ chi tiết hỏng. Tìm xác suất để khi lấy ngẫu nhiên $6$ chi tiết thì có không quá $1$ chi tiết hỏng.

**Câu 5.** Tính số tập hợp con của $X=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ chưa $1$ mà không chứa $0$.

**Câu 6.** Một lớp có $30$ học sinh trong đó gồm $8$ học sinh giỏi, $15$ học sinh khá và $7$ học sinh trung bình. Người ta muốn chọn ngẫu nhiên $3$ em để đi dự Đại Hội. Tính xác suất để chọn được:

a) Ba học sinh được chọn đều là học sinh giỏi?

b) b. Có ít nhất $1$ học sinh giỏi?

**Câu 7.** Một hộp bóng có $12$ bóng đèn, trong đó có $7$ bóng tốt, lấy ngẫu nhiên $3$ bóng. Tính xác suất để được:

a. Ít nhất $2$ bóng tốt b. Cả $3$ bóng đều không tốt

**Câu 8.** Cho các số $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có $5$ chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên ra $1$ số. Tính xác suất để số đó là:

a. Số lẻ b. Số đó chia hết cho $10$ c. Số đó lớn hơn $59.000$

**Câu 9.** Gieo đồng thời $2$ con súc sắc cân đối đồng chất.Tính xác suất để:

a) Tổng số chấm ở mặt trên $2$ con súc sắc bằng $6$

b) Hiệu số nốt ở mặt trên $2$ hai con súc sắc có giá trị tuyệt đối bằng $2$

**Câu 10.** Lớp học môn xác suất gồm $70$ học sinh, trong đó có $25$ nữ. Chọn ngẫu nhiên ra một nhóm gồm $10$ học sinh.Tính xác suất để trong nhóm chọn ra có $4$ học sinh nữ.

**Câu 11.** Một lớp có $40$ học sinh, được đánh số từ $1-40$. Chọn ngẫu nhiên ra một bạn học sinh. Tính xác suất để bạn được chọn:

a. Mang số chẵn b. Mang số chia hết cho 3

**Câu 12.** Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:

**a.** Biến cố $A$: "Trong hai lần gieo ít nhất một lần xuất hiện mặt một chấm"

**b.** Biến cố $B$: "Trong hai lần giao tổng số chấm trong hai lần giao là một số nhỏ hơn 11"

**Câu 13.** Một sọt Cam có 10 trái trong đó có 4 trái hư.Lấy ngẫu nhiên ra 4 trái

a. Tính xác suất để lấy được 3 trái hư

b. Tính xác suất để lấy được 1 trái hư

c. Tính xác suất để lấy được ít nhất 1 trái hư.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Xét phép thử gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất 6 mặt hai lần. Xét biến cố A: "Số chấm xuất hiện ở cả hai lần gieo giống nhau". Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $n(A)=6$. **B.** $n(A)=12$. **C.** $n(A)=16$. **D.** $n(A)=36$.

**Câu 2.** Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất liên tiếp ba lần. Gọi $A$ là biến cố "Có ít nhất hai mặt sấp xuất hiện liên tiếp" và $B$ là biến cố "Kết quả ba lần gieo là như nhau". Xác định biến cố $A \cup B$.

**A.** $A \cup B = \{SSS, SSN, NSS, SNS, NNN\}$. **B.** $A \cup B = \{SSS, NNN\}$.

**C.** $A \cup B = \{SSS, SSN, NSS, NNN\}$. **D.** $A \cup B = \Omega$.

**Câu 3.** Gieo ngẫu nhiên một đồng tiền cân đối và đồng chất 5 lần. Tính số phần tử không gian mẫu.

**A.** 64. **B.** 10. **C.** 32. **D.** 16.

**Câu 4.** Xét phép thử gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Gọi A là biến cố "Lần đầu xuất hiện mặt 6 chấm" và B là biến cố "Lần thứ hai xuất hiện mặt 6 chấm".

Khẳng định nào **sai** trong các khẳng định sau?

**A.** A và B là hai biến cố xung khắc.

**B.** $A \cup B$ là biến cố "Ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm".

**C.** $A \cap B$ là biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần gieo bằng 12.

**D.** A và B là hai biến cố độc lập.

**Câu 5.** Rút ngẫu nhiên cùng lúc ba con bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con thì $n(\Omega)$ bằng bao nhiêu?

**A.** 140608. **B.** 156. **C.** 132600. **D.** 22100.

**Câu 6.** Gieo ngẫu nhiên hai con xúc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố " Có ít nhất một con xúc sắc xuất hiện mặt một chấm" là

**A.** $\frac{11}{36}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{25}{36}$. **D.** $\frac{15}{36}$.

**Câu 7.** Gieo một con súc sắc. Xác suất để mặt 6 chấm xuất hiện.

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

**Câu 8.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất 2 lần. Tính xác suất để tổng số chấm trong hai lần gieo nhỏ hơn 6.

**A.** $\frac{2}{9}$. **B.** $\frac{11}{36}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{5}{18}$.

**Câu 9.** Gieo ngẫu nhiên 2 con xúc sắc cân đối đồng chất. Tìm xác suất của biến cố: " Hiệu số chấm xuất hiện trên 2 con xúc sắc bằng 1".

**A.** $\frac{2}{9}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $\frac{5}{18}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

**Câu 10.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố nào sau đây bằng $\frac{1}{6}$?

**A.** Xuất hiện mặt có số chấm lẻ.
**B.** Xuất hiện mặt có số chấm chẵn.
**C.** Xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho $2$ và $3$.
**D.** Xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn $3$.

**Câu 11.** Gieo ngẫu nhiên một con xúc sắc cân đối đồng chất $2$ lần. Tính xác suất để số chấm của hai lần gieo là bằng nhau

**A.** $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{7}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

## TÍNH XÁC SUẤT SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP.

**Câu 12.** Một hộp chứa $11$ quả cầu gồm $5$ quả màu xanh và $6$ quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời $2$ quả cầu từ hộp đó. Xác suất để $2$ quả cầu chọn ra cùng màu bằng

**A.** $\frac{5}{22}$ **B.** $\frac{6}{11}$ **C.** $\frac{5}{11}$ **D.** $\frac{8}{11}$

**Câu 13.** Từ một hộp chứa $11$ quả cầu màu đỏ và $4$ quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời $3$ quả cầu. Xác suất để lấy được $3$ quả cầu màu xanh

**A.** $\frac{33}{91}$ **B.** $\frac{24}{455}$ **C.** $\frac{4}{165}$ **D.** $\frac{4}{455}$

**Câu 14.** Từ một hộp chứa $7$ quả cầu màu đỏ và $5$ quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời $3$ quả cầu. Xác suất để lấy được $3$ quả cầu màu xanh bằng

**A.** $\frac{1}{22}$ **B.** $\frac{2}{7}$ **C.** $\frac{5}{12}$ **D.** $\frac{7}{44}$

**Câu 15.** Từ một hộp chứa $9$ quả cầu đỏ và $6$ quả cầu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời $3$ quả cầu. Xác suất để lấy được $3$ quả cầu màu xanh bằng?

**A.** $\frac{24}{91}$ **B.** $\frac{4}{91}$ **C.** $\frac{12}{65}$ **D.** $\frac{5}{21}$

**Câu 16.** Từ một hộp chứa $10$ quả cầu màu đỏ và $5$ quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời $3$ quả cầu. Xác suất để lấy được $3$ quả cầu màu xanh bằng

**A.** $\frac{2}{91}$ **B.** $\frac{12}{91}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{24}{91}$

**Câu 17.** Một lớp có $40$ học sinh, trong đó có $4$ học sinh tên Anh. Trong một lần kiểm tra bài cũ, thầy giáo gọi ngẫu nhiên hai học sinh trong lớp lên bảng. Xác suất để hai học sinh tên Anh lên bảng bằng

**A.** $\frac{1}{10}$. **B.** $\frac{1}{20}$. **C.** $\frac{1}{130}$. **D.** $\frac{1}{75}$.

**Câu 18.** Hộp $A$ có $4$ viên bi trắng, $5$ viên bi đỏ và $6$ viên bi xanh. Hộp $B$ có $7$ viên bi trắng, $6$ viên bi đỏ và $5$ viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi, tính xác suất để hai viên bi được lấy ra có cùng màu.

**A.** $\frac{91}{135}$. **B.** $\frac{44}{135}$. **C.** $\frac{88}{135}$. **D.** $\frac{45}{88}$.

**Câu 19.** Một tổ có $6$ học sinh nam và $4$ học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên $4$ học sinh. Xác suất để trong $4$ học sinh được chọn luôn có học sinh nữ là

**A.** $\frac{1}{14}$. **B.** $\frac{1}{210}$. **C.** $\frac{13}{14}$. **D.** $\frac{209}{210}$.

**Câu 20.** Một hộp đèn có 12 bóng, trong đó có 4 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để trong 3 bóng có 1 bóng hỏng.

**A.** $\frac{11}{50}$. **B.** $\frac{13}{112}$. **C.** $\frac{28}{55}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

**Câu 21.** Trong một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 bạn trong tổ tham gia đội tình nguyện của trường. Tính xác suất để 3 bạn được chọn toàn là nam.

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Câu 22.** Trong một đợt kiểm tra định kỳ, giáo viên chuẩn bị một hộp đựng 15 câu hỏi gồm 5 *câu hỏi Hình học và* 10 *câu hỏi Đại số khác nhau. Mỗi học sinh bốc ngẫu nhiên từ hộp đó* 3 *câu hỏi để làm đề thi cho mình. Tính xác suất để một học sinh bốc được đúng một câu hình học.*

*A.* $\frac{45}{91}$. *B.* $\frac{3}{4}$. *C.* $\frac{200}{273}$. *D.* $\frac{2}{3}$.

**Câu 23.** Một người chọn ngẫu nhiên 2 chiếc giày từ 5 đôi giày cỡ khác nhau. Tính xác suất để 2 chiếc giày được chọn tạo thành một đôi.

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{10}$. **C.** $\frac{7}{9}$. **D.** $\frac{1}{9}$.

**Câu 24.** Giải bóng chuyền VTV Cúp có 16 đội tham gia trong đó có 12 đội nước ngoài và 4 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 4 bảng đấu $A, B, C, D$ mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 4 đội của Việt Nam nằm ở 4 bảng đấu khác nhau.

**A.** $\frac{391}{455}$. **B.** $\frac{8}{1365}$. **C.** $\frac{32}{1365}$. **D.** $\frac{64}{455}$.

**Câu 25.** Trong một hộp có 12 bóng đèn, trong đó có 4 bóng đèn hỏng. Lấy ngẫu nhiên cùng lúc 3 bóng đèn. Tính xác suất để lấy được 3 bóng tốt.

**A.** $\frac{28}{55}$. **B.** $\frac{14}{55}$. **C.** $\frac{1}{55}$. **D.** $\frac{28}{55}$.

**Câu 26.** Có 4 hành khách bước lên một đoàn tàu gồm 4 toa. Mỗi hành khách độc lập với nhau và chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất để 1 toa có 3 người, một toa có 1 người, 2 toa còn lại không có ai.

**A.** $\frac{5}{16}$. **B.** $\frac{7}{16}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{3}{16}$.

**Câu 27.** Một hộp chứa 35 quả cầu gồm 20 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 20 và 15 quả cầu xanh được đánh số từ 1 đến 15. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó một quả cầu. Tính xác suất để lấy được quả màu đỏ hoặc ghi số lẻ.

**A.** $\frac{5}{7}$. **B.** $\frac{28}{35}$. **C.** $\frac{4}{7}$. **D.** $\frac{27}{35}$.

**Câu 28.** Có hai hộp, mỗi hộp chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp một tấm thẻ. Tính xác suất để 2 thẻ rút ra đều ghi số chẵn.

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{21}{25}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{4}{25}$.

**Câu 29.** Bình có bốn đôi giầy khác nhau gồm bốn màu: đen, trắng, xanh và đỏ. Một buổi sáng đi học, vì vội vàng, Bình đã lấy ngẫu nhiên hai chiếc giầy từ bốn đôi giầy đó. Tính xác suất để Bình lấy được hai chiếc giầy cùng màu?

**A.** $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{14}$. **D.** $\frac{2}{7}$.

**Câu 30.** Có 5 học sinh không quen biết nhau cùng đến một cửa hàng kem có 6 quầy phục vụ. Xác suất để có 3 học sinh cùng vào một quầy và 2 học sinh còn lại vào một quầy khác là

**A.** $\frac{C_5^3.C_6^1.5!}{6^5}$. **B.** $\frac{C_5^3.C_6^1.C_5^1}{6^5}$. **C.** $\frac{C_5^3.C_6^1.5!}{5^6}$. **D.** $\frac{C_5^3.C_6^1.C_5^1}{5^6}$.

**Câu 31.** Một hộp có 4 quả cầu xanh, 3 quả cầu đỏ và 2 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu. Tính xác suất để chọn được 2 quả cầu khác màu.

**A.** $\frac{17}{18}$. **B.** $\frac{1}{18}$. **C.** $\frac{5}{18}$. **D.** $\frac{13}{18}$.

**Câu 32.** Trong một đợt kiểm tra định kì, giáo viên chuẩn bị một chiếc hộp đựng 15 câu hỏi gồm 5 câu hỏi Hình học và 10 câu hỏi Đại số khác nhau. Mỗi học sinh bốc ngẫu nhiên từ hộp đó 3 câu hỏi để làm đề thi cho mình. Tính xác suất để một học sinh bốc được đúng 1 câu hỏi Hình học.

**A.** $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{45}{91}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{200}{273}$.

**Câu 33.** Một người làm vườn có 12 cây giống gồm 6 cây xoài, 4 cây mít và 2 cây ổi. Người đó muốn chọn ra 6 cây giống để trồng. Tính xác suất để 6 cây được chọn, mỗi loại có đúng 2 cây.

**A.** $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{10}$. **C.** $\frac{15}{154}$. **D.** $\frac{25}{154}$.

**Câu 34.** Một hộp đựng 7 quả cầu màu trắng và 3 quả cầu màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 quả cầu. Tính xác suất để trong 4 quả cầu lấy được có đúng 2 quả cầu đỏ.

**A.** $\frac{21}{71}$. **B.** $\frac{20}{71}$. **C.** $\frac{62}{211}$. **D.** $\frac{21}{70}$.

**Câu 35.** Một hộp đựng 9 viên bi trong đó có 4 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp 3 viên bi. Tìm xác suất để 3 viên bi lấy ra có ít nhất 2 viên bi màu xanh.

**A.** $\frac{10}{21}$. **B.** $\frac{5}{14}$. **C.** $\frac{25}{42}$. **D.** $\frac{5}{42}$.

**Câu 36.** Trong một hộp đựng 7 bi màu đỏ, 5 bi màu xanh và 3 bi vàng, lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để 3 viên bi lấy được đều có màu đỏ.

**A.** $\frac{1}{13}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{7}{15}$.

**Câu 37.** Một lớp có 35 đoàn viên trong đó có 15 nam và 20 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 đoàn viên trong lớp để tham dự hội trại 26 tháng 3. Tính xác suất để trong 3 đoàn viên được ó cả nam và nữ.

**A.** $\frac{90}{119}$. **B.** $\frac{30}{119}$. **C.** $\frac{125}{7854}$. **D.** $\frac{6}{119}$.

**Câu 38.** Lớp 11B có 25 đoàn viên, trong đó có 10 nam và 15 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 đoàn viên trong lớp để tham dự hội trại ngày 26 tháng 3. Tính xác suất để 3 đoàn viên được chọn có 2 nam và 1 nữ.

**A.** $\frac{7}{920}$. **B.** $\frac{27}{92}$. **C.** $\frac{3}{115}$. **D.** $\frac{9}{92}$.

**Câu 39.** Một tổ học sinh có 6 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho hai người được chọn đều là nữ.

**A.** $\frac{2}{15}$. **B.** $\frac{7}{15}$. **C.** $\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

**Câu 40.** Một lô hàng có 20 sản phẩm, trong đó 4 phế phẩm. Lấy tùy ý 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm lấy ra có không quá 1 phế phẩm.

**A.** $\frac{91}{323}$. **B.** $\frac{637}{969}$. **C.** $\frac{7}{9}$. **D.** $\frac{91}{285}$.

**Câu 41.** Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 5 quyển sách lý, 6 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển sách được lấy ra có ít nhất một quyển sách toán.

**A.** $\frac{24}{91}$. **B.** $\frac{58}{91}$. **C.** $\frac{24}{455}$. **D.** $\frac{33}{91}$.

**Câu 42.** Có 8 cái bút khác nhau và 9 quyển vở khác nhau được gói trong 17 hộp. Một học sinh được chọ bất kỳ hai hộp. Xác suất để học sinh đó chọn được một cặp bút và vở là

**A.** $\frac{1}{17}$. **B.** $\frac{9}{17}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{9}{34}$.

**Câu 43.** Lớp $12A2$ có 10 học sinh giỏi, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Cần chọn ra 3 học sinh đi dự hội nghị "Đổi mới phương pháp dạy và học" của nhà trường. Tính xác suất để có đúng hai học sinh nam và một học sinh nữ được chọn. Giả sử tất cả các học sinh đó đều xứng đáng được đi dự đại hội như nhau.

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Câu 44.** Một đội gồm 5 nam và 8 nữ. Lập một nhóm gồm 4 người hát tốp ca. Tính xác suất để trong bốn người được chọn có ít nhất ba nữ.

**A.** $\frac{70}{143}$. **B.** $\frac{73}{143}$. **C.** $\frac{56}{143}$. **D.** $\frac{87}{143}$.

**Câu 45.** Một bình đựng 8 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để có được ít nhất hai viên bi xanh là bao nhiêu?

**A.** $\frac{41}{55}$. **B.** $\frac{14}{55}$. **C.** $\frac{28}{55}$. **D.** $\frac{42}{55}$.

**Câu 46.** Một túi đựng 6 bi xanh và 4 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 bi. Xác suất để cả hai bi đều đỏ là.

**A.** $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{7}{45}$. **C.** $\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{2}{15}$.

**Câu 47.** Một đoàn tình nguyện, đến một trường tiểu học miền núi để trao tặng 20 suất quà cho 10 em học sinh nghèo học giỏi. Trong 20 suất quà đó gồm 7 chiếc áo mùa đông, 9 thùng sữa tươi và 4 chiếc cặp sách. Tất cả các suất quà đều có giá trị tương đương nhau. Biết rằng mỗi em được nhận 2 suất quà khác loại (ví dụ: 1 chiếc áo và 1 thùng sữa tươi). Trong số các em được nhận quà có hai em Việt và Nam. Tính xác suất để hai em Việt và Nam đó nhận được suất quà giống nhau?

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Câu 48.** Một tổ chuyên môn tiếng Anh của trường đại học $X$ gồm 7 thầy giáo và 5 cô giáo, trong đó thầy *Xuân* và cô *Hạ* là vợ chồng. Tổ chọn ngẫu nhiên 5 người để lập hội đồng chấm thi vấn đáp tiếng Anh B1 khung châu Âu. Xác suất sao cho hội đồng có 3 thầy, 2 cô và nhất thiết phải có thầy *Xuân* hoặc cô *Hạ* nhưng không có cả hai là

**A.** $\frac{5}{44}$. **B.** $\frac{5}{88}$. **C.** $\frac{85}{792}$. **D.** $\frac{85}{396}$.

**Câu 49.** Đội tuyển học sinh giỏi Toán 12 trường THPT Yên Dũng số 3 gồm 8 học sinh, trong đó có 5 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh đi thi học sinh giỏi cấp Huyện. Tính xác suất để 5 học sinh được chọn đi thi có cả nam và nữ và học sinh nam nhiều hơn học sinh nữ

**A.** $p=\frac{11}{56}$. **B.** $p=\frac{45}{56}$. **C.** $p=\frac{46}{56}$. **D.** $p=\frac{55}{56}$.

**Câu 50.** Một đoàn tình nguyện đến một trường tiểu học miền núi để trao tặng 20 suất quà cho 10 em học sinh nghèo học giỏi. Trong 20 suất quà đó gồm 7 chiếc áo mùa đông, 9 thùng sữa tươi và 4 chiếc cặp sách. Tất cả các suất quà đều có giá trị tương đương nhau. Biết rằng mỗi em nhận hai suất quà khác loại (ví dụ một chiếc áo và một thùng sữa tươi). Trong số các em được nhận quà có hai em Việt và Nam. Tính xác suất để hai em Việt và Nam đó nhận được suất quà giống nhau?

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Câu 51.** Một cái hộp chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy lần lượt 2 viên bi từ cái hộp đó. Tính xác suất để viên bi được lấy lần thứ 2 là bi xanh.

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{7}{24}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{7}{9}$.

**Câu 52.** Một cái hộp chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy lần lượt 2 viên bi từ cái hộp đó. Tính xác suất để viên bi được lấy lần thứ 2 là bi xanh.

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{7}{24}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{7}{9}$.

**Câu 53.** Một tổ gồm 9 học sinh gồm 4 học sinh nữ và 5 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên từ tổ đó ra 3 học sinh. Xác suất để trong 3 học sinh chọn ra có số học sinh nam nhiều hơn số học sinh nữ bằng:

**A.** $\frac{17}{42}$. **B.** $\frac{5}{42}$. **C.** $\frac{25}{42}$. **D.** $\frac{10}{21}$.

**Câu 54.** Đội thanh niên xung kích của trường THPT Chuyên Biên Hòa có 12 học sinh gồm 5 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 3 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh để làm nhiệm vụ mỗi buổi sáng. Tính xác suất sao cho 4 học sinh được chọn thuộc không quá hai khối.

**A.** $\frac{5}{11}$. **B.** $\frac{6}{11}$. **C.** $\frac{21}{22}$. **D.** $\frac{15}{22}$.

**Câu 55.** Chọn ngẫu nhiên một số có 2 chữ số từ các số 00 đến 99. Xác suất để có một con số tận cùng là 0 là

**A.** $0,2$. **B.** $0,1$. **C.** $0,3$. **D.** $0,4$.

**Câu 56.** Gọi $S$ là tập các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được tạo từ tập $E=\{1;2;3;4;5\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập $S$. Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn.

**A.** $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $BD\ \frac{3}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Câu 57.** Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;5;6\}$. Gọi $B$ là tập hợp các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau được lập từ $A$. Chọn thứ tự 2 số thuộc tập $B$. Tính xác suất để 2 số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 3.

**A.** $\frac{156}{360}$. **B.** $\frac{160}{359}$. **C.** $\frac{80}{359}$. **D.** $\frac{161}{360}$.

**Câu 58.** Một hộp đựng tám thẻ được ghi số từ 1 đến 8. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó ba thẻ, tính xác suất để tổng các số ghi trên ba thẻ đó bằng 11.

**A.** $\frac{5}{56}$. **B.** $\frac{4}{56}$. **C.** $\frac{3}{56}$. **D.** $\frac{1}{28}$.

**Câu 59.** Thầy Bình đặt lên bàn 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Bạn An chọn ngẫu nhiên 10 tấm thẻ. Tính xác suất để trong 10 tấm thẻ lấy ra có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm mang số chẵn trong đó chỉ có một tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

**A.** $\frac{99}{667}$. **B.** $\frac{8}{11}$. **C.** $\frac{3}{11}$. **D.** $\frac{99}{167}$.

**Câu 60.** Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên $A$ có bốn chữ số. Gọi $N$ là số thỏa mãn $3^N = A$. Xác suất để $N$ là số tự nhiên bằng:

**A.** $\frac{1}{4500}$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2500}$. **D.** $\frac{1}{3000}$.

**Câu 61.** Có hai hộp, mỗi hộp chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 tấm thẻ. Tính xác suất để 2 thẻ rút ra đều ghi số chẵn.

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{21}{25}$. **C.** $\frac{4}{25}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

**Câu 62.** Một người gọi điện thoại, quên hai chữ số cuối và chỉ nhớ rằng hai chữ số đó phân biệt. Tính xác suất để người đó gọi một lần đúng số cần gọi.

**A.** $\frac{83}{90}$. **B.** $\frac{1}{90}$. **C.** $\frac{13}{90}$. **D.** $\frac{89}{90}$.

**Câu 63.** Trong một hòm phiếu có 9 lá phiếu ghi các số tự nhiên từ 1 đến 9 (mỗi lá ghi một số, không có hai lá phiếu nào được ghi cùng một số). Rút ngẫu nhiên cùng lúc hai lá phiếu. Tính xác suất để tổng hai số ghi trên hai lá phiếu rút được là một số lẻ lớn hơn hoặc bằng 15.

**A.** $\frac{5}{18}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{1}{9}$.

**Câu 64.** Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số $1,2,3,4...,9$. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ lại với nhau. Tính xác suất để tích nhận được là số chẵn.

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{5}{18}$. **C.** $\frac{8}{9}$. **D.** $\frac{13}{18}$.

**Câu 65.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số của tập hợp $A=\{1;2;3;4;5;6\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp $S$. Tính xác suất để số được chọn có 2 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ.

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{1}{40}$. **D.** $\frac{1}{10}$.

**Câu 66.** Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

**A.** $\frac{11}{21}$. **B.** $\frac{221}{441}$. **C.** $\frac{10}{21}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Câu 67.** Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

**A.** $\frac{365}{729}$. **B.** $\frac{14}{27}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{13}{27}$.

**Câu 68.** Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 23 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

**A.** $\frac{265}{529}$. **B.** $\frac{12}{23}$. **C.** $\frac{11}{23}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Câu 69.** Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn là

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{13}{25}$. **C.** $\frac{12}{25}$. **D.** $\frac{313}{625}$.

**Câu 70.** Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;16]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng.

**A.** $\frac{683}{2048}$ **B.** $\frac{1457}{4096}$ **C.** $\frac{19}{56}$ **D.** $\frac{77}{512}$

**Câu 71.** Ba bạn $A$, $B$, $C$ mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;17]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

**A.** $\frac{1637}{4913}$ **B.** $\frac{1079}{4913}$ **C.** $\frac{23}{68}$ **D.** $\frac{1728}{4913}$

**Câu 72.** Ba bạn $A$, $B$, $C$ mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;19]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

**A.** $\frac{109}{323}$ **B.** $\frac{1027}{6859}$ **C.** $\frac{2539}{6859}$ **D.** $\frac{2287}{6859}$

**Câu 73.** Ba bạn $A,B,C$ viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;14]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

**A.** $\frac{31}{91}$ **B.** $\frac{307}{1372}$ **C.** $\frac{207}{1372}$ **D.** $\frac{457}{1372}$

**Câu 74.** Có 100 tấm thẻ được đánh số từ 801 đến 900 (mỗi tấm thẻ được đánh một số khác nhau). Lấy ngẫu nhiên 3 tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để lấy được 3 tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ là số chia hết cho 3.

**A.** $\frac{817}{2450}$. **B.** $\frac{248}{3675}$. **C.** $\frac{2203}{7350}$. **D.** $\frac{2179}{7350}$.

**Câu 75.** Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;5;6\}$. Gọi $B$ là tập tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau từ tập $A$. Chọn thứ tự 2 số thuộc tập $B$. Tính xác suất để trong 2 số vừa chọn có đúng một số có mặt chữ số 3.

**A.** $\frac{159}{360}$. **B.** $\frac{160}{359}$. **C.** $\frac{80}{359}$. **D.** $\frac{161}{360}$.

**Câu 76.** Cho tập $X=\{1;2;3;.....;8\}$. Lập từ $X$ số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để lập được số chia hết cho 1111 là

**A.** $\frac{A_8^2A_6^2A_4^2}{8!}$. **B.** $\frac{4!4!}{8!}$. **C.** $\frac{C_8^2C_6^2C_4^2}{8!}$. **D.** $\frac{384}{8!}$.

**Câu 77.** Cho tập hợp X gồm các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau có dạng $\overline{abcdef}$. Từ X lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số lấy ra là số lẻ và thỏa mãn $a<b<c<d<e<f$?

**A.** $\frac{33}{68040}$. **B.** $\frac{1}{2430}$. **C.** $\frac{31}{68040}$. **D.** $\frac{29}{68040}$.

**Câu 78.** Gọi $A$ là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc tập $A$. Tính xác suất để chọn được một số thuộc $A$ và số đó chia hết cho 5.

**A.** $P=\frac{11}{27}$. **B.** $P=\frac{53}{243}$. **C.** $P=\frac{2}{9}$. **D.** $P=\frac{17}{81}$.

**Câu 79.** Có hai dãy ghế đối diện nhau,mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh,gồm 3 nam và 3 nữ,ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng.

**A.** $\frac{1}{10}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{20}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Câu 80.** Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

**A.** $\frac{11}{630}$ **B.** $\frac{1}{126}$ **C.** $\frac{1}{105}$ **D.** $\frac{1}{42}$

**Câu 81.** Hai bạn lớp $A$ và hai bạn lớp $B$ được xếp vào $4$ ghế sắp thành hàng ngang. Xác suất sao cho các bạn cùng lớp không ngồi cạnh nhau bằng

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

**Câu 82.** Có 13 tấm thẻ phân biệt trong đó có một tấm thẻ ghi chữ ĐỖ, một tấm thẻ ghi chữ ĐẠI, một tấm thẻ ghi chữ HỌC và mười tấm thẻ đánh số từ 0 đến 9. Lấy ngẫu nhiên từ đó ra 7 tấm thẻ. Tính xác suất để rút được 7 tấm thẻ theo thứ tự: ĐỖ, ĐẠI, HỌC, $2,0,1,9$.

**A.** $\frac{1}{1260}$. **B.** $\frac{1715}{1716}$. **C.** $\frac{1}{A_{13}^7}$. **D.** $\frac{1}{1716}$.

**Câu 83.** Xếp ngẫu nhiên $3$ người đàn ông, hai người đàn bà và một đứa bé ngồi và $6$ cái ghế xếp thành hàng ngang. Xác suất sao cho đứa bé ngồi giữa và cạnh hai người đàn bà này là:

**A.** $\frac{1}{30}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{15}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

**Câu 84.** Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có bốn ghế. Xếp ngẫu nhiên $8$, gồm $4$ nam và $4$ nữ, ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

**A.** $\frac{8}{35}$. **B.** $\frac{1}{70}$. **C.** $\frac{1}{35}$. **D.** $\frac{1}{840}$.

**Câu 85.** Kỳ thi có $10$ học sinh, xếp ngồi hai dãy ghế trên và dưới, mỗi dãy có $5$ ghế. Thầy giáo có $2$ loại đề, gồm $5$ đề chẵn và $5$ đề lẻ. Tính xác suất để mỗi học sinh đều nhận $1$ đề và $2$ bạn ngồi kề trên, dưới là khác loại đề.

**A.** $\frac{8}{63}$. **B.** $\frac{1}{126}$. **C.** $\frac{1}{252}$. **D.** $\frac{1}{15120}$.

**Câu 86.** Có $5$ học sinh lớp $A$, $5$ học sinh lớp $B$ được xếp ngẫu nhiên vào hai dãy ghế đối diện nhau mỗi dãy $5$ ghế (xếp mỗi học sinh một ghế). Tính xác suất để $2$ học sinh bất kì ngồi đối diện nhau khác lớp

**A.** $\frac{(5!)^2}{10!}$. **B.** $\frac{5!}{10!}$. **C.** $\frac{2(5!)^2}{10!}$. **D.** $\frac{2^5.(5!)^2}{10!}$.

**Câu 87.** Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 được xếp ngẫu nhiên vào 9 ghế thành một dãy. Tính xác suất để xếp được 3 học sinh lớp 12 xen kẽ 6 học sinh lớp 11.

**A.** $\frac{1}{84}$. **B.** $\frac{15}{32}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{5}{72}$.

**Câu 88.** Gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Xác suất để cả hai lần xuất hiện mặt sáu chấm là

**A.** $\frac{1}{36}$. **B.** $\frac{11}{36}$. **C.** $\frac{6}{36}$. **D.** $\frac{8}{36}$.

**Câu 89.** Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Tính xác suất để tích số chấm xuất hiện trên hai mặt là số lẻ.

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

**Câu 90.** Gieo con xúc xắc được chế tạo cân đối đồng chất hai lần. Gọi $a$ là số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ nhất, $b$ là số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ hai. Xác suất để phương trình $x^2+ax+b=0$ có nghiệm bằng

**A.** $\frac{17}{36}$. **B.** $\frac{19}{36}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

**Câu 91.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất xảy ra của biến cố "tích hai số nhận được sau hai lần gieo là một số chẵn".

**A.** $0,25$. **B.** $0,75$. **C.** $0,5$. **D.** $0,85$.

**Câu 92.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất, xác suất để mặt có số chấm chẵn xuất hiện là

**A.** $1$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Câu 93.** Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc đó không vượt quá $5$ bằng

**A.** $\frac{5}{12}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{5}{18}$.

**Câu 94.** Kết quả $(b;c)$ của việc gieo một con súc sắc cân đối hai lần liên tiếp, trong đó $b$ là số chấm xuất hiện của lần gieo thứ nhất, $c$ là số chấm xuất hiện lần gieo thứ hai được thay vào phương trình bậc hai $x^2+bx+c=0$. Tính xác suất để phương trình bậc hai đó vô nghiệm?

**A.** $\frac{7}{12}$. **B.** $\frac{23}{36}$. **C.** $\frac{17}{36}$. **D.** $\frac{5}{36}$.

**Câu 95.** Cho hai đường thẳng song song $d_1$, $d_2$. Trên $d_1$ có 6 điểm phân biệt được tô màu đỏ, trên $d_2$ có 4 điểm phân biệt được tô màu xanh. Xét tất cả các tam giác được tạo thành khi nối các điểm đó với nhau. Chọn ngẫu nhiên một tam giác, khi đó xác suất để thu được tam giác có hai đỉnh màu đỏ là.

**A.** $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{2}{9}$.

**Câu 96.** Cho năm đoạn thẳng có độ dài: $1\,cm$, $3\,cm$, $5\,cm$, $7\,cm$, $9\,cm$. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng đó. Xác suất để ba đoạn thẳng lấy ra là ba cạnh của một tam giác là

**A.** $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{3}{10}$. **D.** $\frac{7}{10}$.

**Câu 97.** Cho đa giác đều 20 đỉnh nội tiếp trong đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác. Xác suất để 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của một hình chữ nhật bằng

**A.** $\frac{7}{216}$. **B.** $\frac{2}{969}$. **C.** $\frac{3}{323}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

**Câu 98.** Cho đa giác đều có $14$ đỉnh. Chọn ngẫu nhiên $3$ đỉnh trong số $14$ đỉnh của đa giác. Tìm xác suất để $3$ đỉnh được chọn là $3$ đỉnh của một tam giác vuông.

**A.** $\frac{3}{13}$. **B.** $\frac{5}{13}$. **C.** $\frac{4}{13}$. **D.** $\frac{2}{13}$.

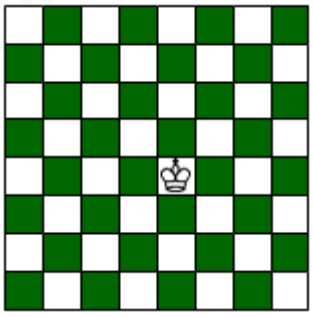
**Câu 99.** Một bảng vuông gồm $100\times100$ ô vuông đơn vị. Chọn ngẫu nhiên một ô hình chữ nhật. Tính xác suất để ô được chọn là hình vuông *(trong kết quả lấy 4 chữ số ở phần thập phân)*.

**A.** $0,0134$. **B.** $0,0133$. **C.** $0,0136$. **D.** $0,0132$.

**Câu 100.** Cho một đa giác $(H)$ có $60$ đỉnh nội tiếp một đường tròn $(O)$. Người ta lập một tứ giác tùy ý có bốn đỉnh là các đỉnh của $(H)$. Xác suất để lập được một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của $(H)$ gần với số nào nhất trong các số sau?

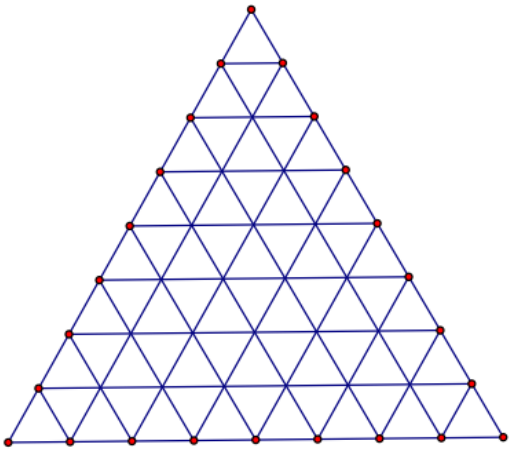
**A.** $85,40\%$. **B.** $13,45\%$. **C.** $40,35\%$. **D.** $80,70\%$.

**Câu 101.** Một quân vua được đặt trên một ô giữa bàn cờ vua. Mỗi bước di chuyển, quân vua được chuyển sang một ô khác chung cạnh hoặc chung đỉnh với ô đang đứng (xem hình minh họa). Bạn An di chuyển quân vua ngẫu nhiên $3$ bước. Tính xác suất sau $3$ bước quân vua trở về ô xuất phát.



**A.** $\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{1}{32}$. **C.** $\frac{3}{32}$. **D.** $\frac{3}{64}$.

**Câu 102.** Cho tam giác đều $H$ có cạnh bằng $8$. Chia tam giác này đều thành $64$ tam giác đều có cạnh bằng $1$ bởi các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác đều đã cho. Gọi $S$ là tập hợp các đỉnh của $64$ tam giác đều có cạnh bằng $1$. Chọn Ngẫu nhiên $4$ đỉnh của tập $S$. Tính xác suất để $4$ đỉnh chọn được là bốn đỉnh của một hình bình hành nằm trong miền trong tam giác đều $H$.



**A.** $\frac{2}{473}$. **B.** $\frac{6}{935}$. **C.** $\frac{2}{1419}$. **D.** $\frac{2}{935}$.

**Câu 103.** Một đề trắc nghiệm gồm $20$ câu, mỗi câu có $4$ đáp án và chỉ có một đáp án đúng. Bạn Anh làm đúng $12$ câu, còn $8$ câu bạn Anh đánh hú họa vào đáp án mà Anh cho là đúng. Mỗi câu đúng được $0,5$ điểm. Tính xác suất để Anh được $9$ điểm.

**A.** $\frac{9}{20}$. **B.** $\frac{9}{10}$. **C.** $\frac{63}{16384}$. **D.** $\frac{9}{65536}$.

**Câu 104.** Một đề thi trắc nghiệm gồm $50$ câu, mỗi câu có bốn phương án trả lời trong đó chỉ có một phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được $0,2$ điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên $1$ trong $4$ phương án ở mỗi câu. Tính xác suất để thí sinh đó được $6$ điểm.

**A.** $0,25^{30}.0,75^{20}$. **B.** $0,25^{20}.0,75^{30}$. **C.** $0,25^{30}.0,75^{20}.C_{50}^{20}$. **D.** $1-0,25^{20}.0,75^{30}$.

**Câu 105.** Một bộ đề thi Olympic Toán lớp 11 của Trường THPT Kim Liên mà mỗi đề gồm 5 câu được chọn từ 15 câu mức dễ, 10 câu mức trung bình và 5 câu mức khó. Một đề thi được gọi là "Tốt" nếu trong đề thi phải có cả mức dễ, mức trung bình và khó, đồng thời số câu mức khó không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt".

**A.** $\frac{1000}{5481}$. **B.** $\frac{3125}{23751}$. **C.** $\frac{1}{150}$. **D.** $\frac{10}{71253}$.

## TÍNH XÁC SUẤT SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIÁN TIẾP.

**Câu 106.** Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 biên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự) ra khỏi hộp. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên màu đỏ.

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{418}{455}$. **C.** $\frac{1}{13}$. **D.** $\frac{12}{13}$.

**Câu 107.** Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ và nhân hai số trên hai thẻ lại với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là một số chẵn.

**A.** $\frac{5}{18}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{8}{9}$. **D.** $\frac{13}{18}$.

**Câu 108.** Gieo 5 đồng xu cân đối, đồng chất. Xác suất để được ít nhất 1 đồng xu lật sấp bằng

**A.** $\frac{5}{11}$. **B.** $\frac{8}{11}$. **C.** $\frac{31}{32}$. **D.** $\frac{1}{32}$.

**Câu 109.** Bạn A có 7 cái kẹo vị hoa quả và 6 cái kẹo vị socola. A lấy ngẫu nhiên 5 cái kẹo cho vào hộp để tặng cho em gái. Tính xác suất để 5 cái kẹo có cả vị hoa quả và vị socola.

**A.** $P=\frac{140}{143}$. **B.** $P=\frac{79}{156}$. **C.** $P=\frac{103}{117}$. **D.** $P=\frac{14}{117}$.

**Câu 110.** Một hộp đèn có 12 bóng, trong đó có 4 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để trong 3 bóng có ít nhất 1 bóng hỏng.

**A.** $\frac{40}{51}$. **B.** $\frac{55}{112}$. **C.** $\frac{41}{55}$. **D.** $\frac{3}{7}$.

**Câu 111.** Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển được lấy ra có ít nhất một quyển là toán.

**A.** $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{37}{42}$. **C.** $\frac{10}{21}$. **D.** $\frac{2}{7}$.

**Câu 112.** Trên giá sách có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Vật Lí và 2 quyển sách Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất sao cho ba quyển lấy ra có ít nhất một quyển sách Toán.

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{37}{42}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{19}{21}$.

**Câu 113.** Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để trong ba quyển sách lấy ra có ít nhất một quyển là toán.

**A.** $\frac{2}{7}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{37}{42}$. **D.** $\frac{10}{21}$.

**Câu 114.** Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

**A.** $\frac{4615}{5236}$. **B.** $\frac{4651}{5236}$. **C.** $\frac{4615}{5263}$. **D.** $\frac{4610}{5236}$.

**Câu 115.** Một hộp chứa 35 quả cầu gồm 20 quả màu đỏ được đánh số từ 1 đến 20 và 15 quả màu xanh được đánh số từ 1 đến 15. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó một quả cầu. Tính xác suất để lấy được quả màu đỏ hoặc ghi số lẻ.

**A.** $\frac{28}{35}$. **B.** $\frac{4}{7}$. **C.** $\frac{5}{7}$. **D.** $\frac{27}{35}$.

**Câu 116.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất xảy ra của biến cố "Tích hai số nhận được sau hai lần gieo là một số chẵn".

**A.** $0,75$. **B.** $0,5$. **C.** $0,25$. **D.** $0,85$.

**Câu 117.** Một hộp đựng $9$ tấm thẻ được đánh số từ $1$ đến $9$. Hỏi phải rút ít nhất bao nhiêu thẻ để xác suất "có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho $4$" phải lớn hơn $\frac{5}{6}$.

**A.** $7$. **B.** $6$. **C.** $5$. **D.** $4$.

**Câu 118.** Một nhóm gồm $6$ học sinh nam và $4$ học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời $3$ học sinh trong nhóm đó. Xác suất để trong $3$ học sinh được chọn luôn có học sinh nữ bằng

**A.** $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

**Câu 119.** Một lô hàng gồm $30$ sản phẩm trong đó có $20$ sản phẩm tốt và $10$ sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên $3$ sản phẩm trong lô hàng. Tính xác suất để $3$ sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt.

**A.** $\frac{6}{203}$. **B.** $\frac{197}{203}$. **C.** $\frac{153}{203}$. **D.** $\frac{57}{203}$.

**Câu 120.** Một nhóm gồm $10$ học sinh trong đó có $7$ học sinh nam và $3$ học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên $3$ học sinh từ nhóm $10$ học sinh đi lao động. Tính xác suất để $3$ học sinh được ó ít nhất một học sinh nữ?

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{17}{48}$. **C.** $\frac{17}{24}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

**Câu 121.** Một tổ học sinh có $7$ nam và $3$ nữ. Chọn ngẫu nhiên $2$ người. Tính xác suất sao cho $2$ người được ó ít nhất một người nữ là:

**A.** $\frac{2}{15}$. **B.** $\frac{7}{15}$. **C.** $\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{1}{15}$.

**Câu 122.** Cho tập hợp $A=\{1,2,3,...,10\}$. Chọn ngẫu nhiên ba số từ $A$. Tìm xác suất để trong ba số chọn ra không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp.

**A.** $P=\frac{7}{90}$. **B.** $P=\frac{7}{24}$. **C.** $P=\frac{7}{10}$. **D.** $P=\frac{7}{15}$.

**Câu 123.** Một hộp chứa $20$ viên bi xanh và $15$ viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên $4$ bi. Tính xác suất để $4$ bi lấy được có đủ hai màu.

**A.** $\frac{4610}{5236}$. **B.** $\frac{4615}{5236}$. **C.** $\frac{4651}{5236}$. **D.** $\frac{4615}{5236}$.

**Câu 124.** Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng bia của hai xạ thủ lần lượt là $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$. Tính xác suất của biến cố có ít nhất một xạ thủ không bắn trúng bia.

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Câu 125.** Một người bỏ ngẫu nhiên ba lá thư vào ba chiếc phong bì đã ghi địa chỉ. Xác suất để có ít nhất một lá thư được bỏ đúng phong bì là

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

**Câu 126.** Có $9$ tấm thẻ đánh số từ $1$ đến $9$. Chọn ngẫu nhiên ra hai tấm thẻ. Tính xác suất để tích của hai số trên hai tấm thẻ là một số chẵn.

**A.** $\frac{13}{18}$. **B.** $\frac{55}{56}$. **C.** $\frac{5}{28}$. **D.** $\frac{1}{56}$.

**Câu 127.** Chi đoàn lớp $12A$ có $20$ đoàn viên trong đó có $12$ đoàn viên nam và $8$ đoàn viên nữ. Tính xác suất khi chọn $3$ đoàn viên có ít nhất $1$ đoàn viên nữ.

**A.** $\frac{11}{7}$. **B.** $\frac{110}{570}$. **C.** $\frac{46}{57}$. **D.** $\frac{251}{285}$.

**Câu 128.** Một hộp đựng $10$ viên bi có kích thước khá nhau, trong đó có $7$ viên bi màu đỏ và $3$ viên bi màu xanh. Chọn ngẫu nhiên $2$ viên. Xác suất để $2$ viên bi được ó ít nhất một viên bi màu xanh bằng

A. $\frac{1}{15}$. B. $\frac{2}{15}$. C. $\frac{7}{15}$. **D.** $\frac{8}{15}$.

**Câu 129.** Một hộp đựng $9$ quả cầu xanh và $5$ quả cầu trắng (các quả cầu khác nhau về kích thước). Lấy ngẫu nhiên $3$ quả cầu. Xác suất để được $3$ quả cầu có đủ hai loại cầu xanh và cầu trắng là

**A.** $\frac{135}{182}$. **B.** $\frac{14}{182}$. **C.** $\frac{47}{182}$. **D.** $\frac{113}{182}$.

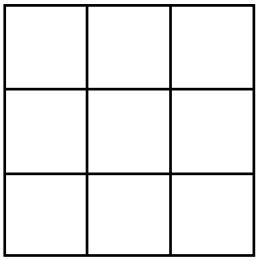
**Câu 130.** Một hộp đựng $10$ thẻ được đánh số từ $1$ đến $10$. Phải rút ra ít nhất $k$ thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho $4$ lớn hơn $\frac{13}{15}$. Giá trị của $k$ bằng:

**A.** $9$. **B.** $8$. **C.** $7$. **D.** $6$.

**Câu 131.** Chọn ngẫu nhiên 3 số tự nhiên từ tập hợp $M=\{1;2;3;...;2019\}$. Tính xác suất $P$ để trong 3 số tự nhiên được chọn không có 2 số tự nhiên liên tiếp.

**A.** $P=\frac{677040}{679057}$. **B.** $P=\frac{2017}{679057}$. **C.** $P=\frac{2016}{679057}$. **D.** $P=\frac{1}{679057}$.

**Câu 132.** Cho một bảng ô vuông $3\times 3$.



Điền ngẫu nhiên các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào bảng trên (mỗi ô chỉ điền một số). Gọi $A$ là biến cố "mỗi hàng, mỗi cột bất kì đều có ít nhất một số lẻ". Xác suất của biến cố $A$ bằng

**A.** $P(A)=\frac{10}{21}$. **B.** $P(A)=\frac{1}{3}$. **C.** $P(A)=\frac{5}{7}$. **D.** $P(A)=\frac{1}{56}$.

**Câu 133.** Gọi $X$ là tập các số tự nhiên có 5 chữ số. Lấy ngẫu nhiên hai số từ tập $X$. Xác suất để nhận được ít nhất một số chia hết cho 4 gần nhất với số nào dưới đây?

**A.** $0,63$. **B.** $0,23$. **C.** $0,44$. **D.** $0,12$.

# Bài 5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Một số khái niệm về xác suất

#### 1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Có những phép thử mà ta không thể đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó. Những phép thử như thế gọi là phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử).
Tập hợp $\Omega$ các kết quả có thể xảy ra của một phép thử gọi là không gian mẫu của phép thử đó.

***Ví dụ 1.*** Một hộp có 3 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1,2,3$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ được rút ra và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Xét phép thử "Rút ngẫu nhiên liên tiếp hai chiếc thẻ trong hộp". Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó.

***Giải***

Không gian mẫu của phép thử trên là tập hợp $\Omega=\{(1;1);(1;2);(1;3);(2;1);(2;2);(2;3);(3;1);(3;2);(3;3)\}$, ở đó, chẳng hạn $(1;2)$ là kết quả "Lần thứ nhất rút ra thẻ ghi số 1, lần thứ hai rút ra thẻ ghi số 2".

***Ví dụ 2***. Một hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng; các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ trong hộp, ghi lại màu của quả bóng được lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Xét phép thử "Lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai quả bóng trong hộp". Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó.

***Giải***

Không gian mẫu của phép thử trên là tập hợp $\Omega=\{XX;XĐ,XV;ĐĐ;ĐV;ĐX;VV;VX;VĐ\}$, ở đó, chẳng hạn $XĐ$ là kết quả "Lần thứ nhất lấy ra quả bóng xanh, lần thứ hai lấy ra quả bóng đỏ".

#### 2. Biến cố

##### a) Định nghĩa

*Nhận xét*

- Mỗi sự kiện liên quan đến phép thử $T$ tương ứng với một (và chỉ một) tập con $A$ của không gian mẫu $\Omega$.
- Ngược lại, mỗi tập con $A$ của không gian mẫu $\Omega$ có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện liên quan đến phép thử $T$.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Biến cố ngẫu nhiên (gọi tắt là biến cố) là một tập con của không gian mẫu.

*Chú ý*: Vì sự kiện chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của một biến cố nên ta cũng gọi sự kiện là biến cố. Chẳng hạn: Sự kiện "Kết quả của hai lần tung là giống nhau" trong phép thử "Tung một đồng xu hai lần liên tiếp" là một biến cố.

***Ví dụ 3.*** Xét phép thử "Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp".

a) Sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 5 " tương ứng với biến cố nào của phép thử trên?

b) Phát biểu biến cố $D=\{(1;5);(5;1);(2;4);(4;2);(3;3);(6;6)\}$ của không gian mẫu (của phép thử trên) dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

***Giải***

a) Sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 5" tương ứng với biến cố:
$C=\{(1;4);(4;1);(2;3);(3;2);(4;6);(6;4);(5;5)\}$
của phép thử trên.

b) Tập con $D$ bao gồm tất cả các phần tử của không gian mẫu có tính chất đặc trưng là tổng hai số trong mỗi cặp chia hết cho 6 . Vậy biến cố $D$ có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 6".

**b) Biến cố không. Biến cố chắc chắn**

Xét phép thử $T$ với không gian mẫu $\Omega$. Mỗi biến cố là một tập con của tập hợp $\Omega$. Vì thế, tập rỗng $\varnothing$ cũng là một biến cố, gọi là biến cố không thể (gọi tắt là biến cố không). Còn tập hợp $\Omega$ gọi là biến cố chắc chắn.

Chẳng hạn, khi gieo một xúc xắc, biến cố "Mặt xuất hiện có 7 chấm" là biến cố không, còn biến cố "Mặt xuất hiện có số chấm không vượt quá 6" là biến cố chắc chắn.

**c) Biến cố đối**

Xét phép thử $T$ với không gian mẫu là $\Omega$. Giả sử $A$ là một biến cố. Như vậy, $A$ là tập con của tập hợp $\Omega$. Ta xét tập con $\Omega \setminus A$ là phần bù của $A$ trong $\Omega$.

Tập con $\Omega \setminus A$ xác định một biến cố, gọi là biến cố đối của biến cố $A$, kí hiệu là $\overline{A}$.

Chẳng hạn, khi gieo ngẫu nhiên một xúc xắc một lần, biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số lẻ" là biến cố đối của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn".

*Chú ý:* Nếu biến cố $A$ được mô tả dưới dạng mệnh đề toán học $Q$ thì biến cố đối $\overline{A}$ được mô tả bằng mệnh đề phủ định của mệnh đề $Q$ (tức là mệnh đề $\overline{Q}$ ).

**3. Xác suất của biến cố**

Xác suất của biến cố $A$, kí hiệu là $P(A)$, bằng tỉ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, ở đó $n(A), n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp $A$ và $\Omega$. Như vậy: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

***Ví dụ 4.*** Một hộp có 5 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1,2,3$, 4, 5; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc thẻ từ trong hộp.

a) Gọi $\Omega$ là không gian mẫu trong trò chơi trên. Tính số phần tử của tập hợp $\Omega$.

b) Tính xác suất của biến cố $E$ : "Tổng các số trên hai thẻ là số lẻ"..

***Giải***

a) Mỗi phần tử của không gian mẫu $\Omega$ là một tổ hợp chập 2 của 5 phần tử trong tập hợp $\{1;2;3;4;5\}$. Vì thế

$$n(\Omega)=C_5^2=\frac{5!}{2!.3!}=\frac{5.4}{2}=10.$$

b) Biến cố $E$ gồm các cách chọn ra hai chiếc thẻ ghi số là: 1 và $2;1$ và $4;2$ và $3;2$ và 5 ; 3 và $4;4$ và 5 . Vì thế $n(E)=6$. Vậy xác suất của biến cố $E$ là

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(\Omega)}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

***Ví dụ 5.*** Từ một hộp chứa 5 quả cầu trắng và 5 quả cầu đỏ; các quả cầu có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả cầu. Tính xác suất lấy được hai quả cầu khác màu.

***Giải***

Mỗi lần lấy ra đồng thời hai quả cầu cho ta một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử. Do đó, không gian mẫu $\Omega$ gồm các tổ hợp chập 2 của 10 phần tử và

$$n(\Omega)=C_{10}^2=\frac{10!}{2!.8!}=\frac{10\cdot 9}{2}=45.$$

Xét biến cố $G$ : "Hai quả cầu lấy ra khác màu".

Khi hai quả cầu lấy ra khác màu thì một quả cầu lấy ra có màu trắng, quả cầu còn lại có màu đỏ. Có 5 cách lấy ra một quả cầu màu trắng và cũng có 5 cách lấy ra một quả cầu màu đỏ. Theo quy tắc nhân, ta có $n(G)=5.5=25$.

Vậy xác suất của biến cố $G$ là

$$P(G)=\frac{n(G)}{n(\Omega)}=\frac{25}{45}=\frac{5}{9}.$$

***Ví dụ 6.*** Một đội văn nghệ có 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên phụ trách đội muốn chọn ra một đội tốp ca gồm ba bạn sao cho có cả bạn nam và bạn nữ cùng tham gia.

a) Giáo viên phụ trách đội có bao nhiêu cách chọn một đội tốp ca như vậy?

b) Tính xác suất của biến cố $H$ : "Ba bạn chọn ra có cả nam và nữ".

***Giải***

a) Khi ba bạn chọn ra có cả nam và nữ thì chỉ có hai khả năng:

- Chọn ra một bạn nam và hai bạn nữ;
- Chọn ra hai bạn nam và một bạn nữ.
- Xét khả năng thứ nhất: Chọn ra một bạn nam và hai bạn nữ.
Có 4 cách chọn ra một bạn nam.
Mỗi lần chọn ra hai bạn nữ cho ta một tổ hợp chập 2 của 5 phần tử. Do đó, số cách chọn ra hai bạn nữ là $C_5^2 = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{5.4}{2} = 10.$
Theo quy tắc nhân, ta có số cách chọn ra một bạn nam và hai bạn nữ là $4.10 = 40$.
- Xét khả năng thứ hai: Chọn ra hai bạn nam và một bạn nữ.
Có 5 cách chọn ra một bạn nữ.
Mỗi lần chọn ra hai bạn nam cho ta một tổ hợp chập 2 của 4 phần tử. Do đó, số cách chọn ra hai bạn nam là $C_4^2 = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3}{2} = 6$
Theo quy tắc nhân, ta có số cách chọn ra hai bạn nam và một bạn nữ là $5.6 = 30$.
Theo quy tắc cộng, số cách chọn ra một đội tốp ca gồm ba bạn sao cho có cả bạn nam và bạn nữ cùng tham gia là $40 + 30 = 70$ (cách).
b) Mỗi lần chọn ra đồng thời ba bạn học sinh cho ta một tổ hợp chập 3 của 9 phần tử. Do đó, không gian mẫu $\Omega$ gồm các tổ hợp chập 3 của 9 phần tử và
$n(\Omega) = C_9^3 = \frac{9!}{3!.6!} = \frac{9.8.7}{6} = 84.$
Theo câu a), ta có $n(H) = 70$. Vậy xác suất của biến cố $H$ là
$P(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)} = \frac{70}{84} = \frac{5}{6}.$

## II. TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

Xét phép thử $T$ với không gian mẫu là $\Omega$. Khi đó, ta có các tính chất sau:
- $P(\varnothing) = 0; P(\Omega) = 1$;
- $0 \le P(A) \le 1$ với mỗi biến cố $A$;
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ với mỗi biến cố $A$.

*Chứng minh*

- Xác suất của biến cố không là $P(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} = \frac{0}{n(\Omega)} = 0$;

Xác suất của biến cố chắc chắn là $P(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$.

- Do $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ và $0 \le n(A) \le n(\Omega)$ nên $0 \le P(A) \le 1$ với mỗi biến cố $A$.

- Do $n(\Omega \setminus A) = n(\Omega) - n(A)$ nên xác suất của biến cố $\overline{A}$ là:
$P(\overline{A}) = \frac{n(\Omega \setminus A)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega) - n(A)}{n(\Omega)} = 1 - \frac{n(A)}{n(\Omega)} = 1 - P(A).$

***Ví dụ 7.*** Một hộp có 10 quả bóng trắng và 10 quả bóng đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 9 quả bóng trong hộp. Tính xác suất để trong 9 quả bóng được lấy ra có ít nhất một quả bóng màu đỏ.

***Giải***

Mỗi lần lấy ra đồng thời 9 quả bóng cho ta một tổ hợp chập 9 của 20 phần tử. Do đó, không gian mẫu $\Omega$ gồm các tổ hợp chập 9 của 20 phần tử và $n(\Omega) = C_{20}^9$.
Xét biến cố $K$ : "Trong 9 quả bóng được lấy ra có ít nhất một quả bóng màu đỏ".
Khi đó biến cố đối của biến cố $K$ là biến cố $\overline{K}$ : "Trong 9 quả bóng được lấy ra không có quả bóng màu đỏ nào", tức là cả 9 quả bóng được lấy ra có màu trắng.
Mỗi lần lấy ra đồng thời 9 quả bóng màu trắng cho ta một tổ hợp chập 9 của 10 phần tử. Do đó
$n(\overline{K}) = C_{10}^9 = \frac{10!}{9!.1!} = 10$. Suy ra $P(\overline{K}) = \frac{n(\overline{K})}{n(\Omega)} = \frac{10}{C_{20}^9}$.

Vậy $P(K)=1-P(\overline{K})=1-\dfrac{10}{C_{20}^{9}}$

## III. NGUYÊN LÍ XÁC SUẤT BÉ

Qua thực nghiệm và quan sát thực tế, người ta thấy rằng các biến cố có xác suất bé sẽ gần như không xảy ra trong phép thử. Chẳng hạn, mỗi chuyến bay đều có một xác suất rất bé bị xảy ra tai nạn. Nhưng trên thực tế, tai nạn của một chuyến bay sẽ không xảy ra. Từ đó, ta thừa nhận nguyên lí sau đây, gọi là nguyên lí xác suất bé: Nếu một biến cố ngẫu nhiên có xác suất rất bé thì thực tế có thể cho rằng trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra.

Tuy nhiên, một xác suất như thế nào được xem là bé phải tuỳ thuộc vào từng bài toán cụ thể. Ví dụ như xác suất để dù không mở là 0,01 (dùng cho nhảy dù) thì cũng không thể coi là bé và không thể dùng loại dù đó. Nhưng nếu xác suất để tàu về ga chậm là 0,01 thì lại có thể xem là tàu về ga đúng giờ.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Gọi $A$ là tập hợp các số tự nhiên có $2$ chữ số nhỏ hơn $20$. Lấy ra $1$ số tự nhiên bất kỳ trong $A$.

**a.** a. Mô tả không gian mẫu $\Omega$?

**b.** b. Tính xác suất để lấy được số tự nhiên lẻ?

**c.** c. Tính xác suất để lấy được số tự nhiên chia hết cho $3$?

**Giải**

**a.** a. $\Omega=\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}\Rightarrow|\Omega|=10$

**b.** b. Gọi $A$ là biến cố "số tự nhiên lẻ" $\Rightarrow\Omega(A)=\{11,13,15,17,19\}\Rightarrow|\Omega(A)|=5\Rightarrow P(A)=\dfrac{5}{10}=0,5$

**c.** c. Gọi $B$ là biến cố "số tự nhiên chia hết cho $3$". $\Omega(B)=\{12,15,18\}\Rightarrow|\Omega(B)|=3\Rightarrow P(B)=\dfrac{3}{10}$

**Câu 2.** Tung $1$ con súc sắc.

**a.** Mô tả không gian mẫu?

**b.** Tính xác suất để thu được mặt có số chấm chia hết cho $2$?

**c.** Tính xác suất để thu được mặt có số chấm nhỏ hơn $4$?

**Giải**

**a.** $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}\Rightarrow n(\Omega)=6$

**b.** Gọi $A$ là biến cố "số chấm chia hết cho $2$ ".

$\Omega(A)=\{2,4,6\}\Rightarrow|\Omega(A)|=3\Rightarrow P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

**c.** Gọi $B$ là biến cố "số chấm nhỏ hơn $4$ ", $\Omega(B)=\{1,2,3\}\Rightarrow|\Omega(B)|=3\Rightarrow P(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

**Câu 3.** Tung $3$ đồng xu đồng chất (giả thiết các đồng xu hoàn toàn giống nhau gồm $2$ mặt: sấp và ngửa).

**a.** Mô tả không gian mẫu các kết quả đạt được?

**b.** Tính xác suất thu được $3$ mặt giống nhau?

**Giải**

| Lần 1 | Lần 2 | Lần 3 | Kết quả |
|---|---|---|---|
| $s$ | $s$ | $s$ | $SSS$ |
| $s$ | $s$ | $n$ | $SSN$ |
| $s$ | $n$ | $s$ | $SNS$ |
| $s$ | $n$ | $n$ | $SNN$ |
| $n$ | $s$ | $s$ | $NSS$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $n$ | $s$ | $n$ | $NSN$ |
| $n$ | $n$ | $s$ | $NNS$ |
| $n$ | $n$ | $n$ | $NNN$ |

**a.** $\Omega=\{SSS, SSN, SNS, SNN, NNN, NNS, NSS, NSN\} \Rightarrow |\Omega|=8$.

**b.** Gọi $A$ là biến cố "có 3 mặt giống nhau". $\Omega(A)=\{SSS, NNN\} \Rightarrow |\Omega(A)|=2 \Rightarrow P(A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

**Câu 4.** Trong hòm có 10 chi tiết, trong đó có 2 chi tiết hỏng. Tìm xác suất để khi lấy ngẫu nhiên 6 chi tiết thì có không quá 1 chi tiết hỏng.

**Giải**

+ Số cách lấy ra 6 chi tiết từ 10 chi tiết là $C_{10}^6$

$\Rightarrow n(\Omega)=C_{10}^6=210$

+ Gọi $A_1$ là biến cố "Trong 6 chi tiết lấy ra không có chi tiết nào hỏng"

$A_2$ là biến cố "Trong 6 chi tiết lấy ra có 1 chi tiết hỏng"

$A$ là biến cố "Trong 6 chi tiết lấy ra có không quá 1 chi tiết hỏng"

+ Khi đó $A=A_1 \cup A_2$. Do $A_1$ và $A_2$ xung khắc nhau nên

$P(A)=P(A_1)+P(A_2)$

+ Có 8 chi tiết không bị hỏng nên

$n(A_1)=C_8^6=28$

+ Số cách lấy 5 chi tiết từ 8 chi tiết KHÔNG bị hỏng là $C_8^5$

+ Số cách lấy 1 chi tiết từ 2 chi tiết hỏng là $C_2^1$

+ Theo quy tắc nhân ta có

$n(A_2)=C_8^5.C_2^1=112$

+ Do vậy ta có:

$$P(A_1)=\frac{n(A_1)}{n(\Omega)}=\frac{28}{210}=\frac{2}{15}$$

$$P(A_2)=\frac{n(A_2)}{n(\Omega)}=\frac{112}{210}=\frac{8}{15}$$

$$\Rightarrow P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{8}{15}+\frac{2}{15}=\frac{2}{3}$$

**Câu 5.** Tính số tập hợp con của $X=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ chưa 1 mà không chứa 0.

**Giải**

+ Số tập hợp con không chưa phần tử nào của $X \setminus 0;1$ là $C_5^0$.

+ Số tập hợp con chứa 1 phần tử của $X \setminus 0;1$ là $C_5^1$.

+ Số tập hợp con chứa 2 phần tử của $X \setminus 0;1$ là $C_5^2$.

+ Số tập hợp con chứa 3 phần tử của $X \setminus 0;1$ là $C_5^3$.

+ Số tập hợp con chứa 4 phần tử của $X \setminus 0;1$ là $C_5^4$.

+ Số tập hợp con chứa 5 phần tử của $X \setminus 0;1$ là $C_5^5$.

Suy ra số tập hợp con của $X \setminus 0;1$ là $C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=32$. Ta hợp các tập hợp con này với $\{1\}$ thì được 32 tập hợp thỏa bài toán.

**Câu 6.** Một lớp có 30 học sinh trong đó gồm 8 học sinh giỏi, 15 học sinh khá và 7 học sinh trung bình. Người ta muốn chọn ngẫu nhiên 3 em để đi dự Đại Hội. Tính xác suất để chọn được:

a) Ba học sinh được chọn đều là học sinh giỏi?

b) b. Có ít nhất 1 học sinh giỏi?

**Bài giải:**

a) $A$ 'Chọn 3 học sinh là học sinh giỏi $\Rightarrow P(A)=\dfrac{C_8^3}{C_{30}^3}$

b) $B$ ="Chọn 3 học sinh có ít nhất một học sinh giỏi".

$\Rightarrow \overline{B}$ = " Chọn 3 học sinh không có học sinh giỏi nào"

$\Rightarrow P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{C_{22}^3}{C_{30}^3} \Rightarrow P(\overline{B})=\dfrac{C_{22}^3}{C_{30}^3}$

**Câu 7.** Một hộp bóng có 12 bóng đèn, trong đó có 7 bóng tốt, lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để được:

a. Ít nhất 2 bóng tốt b. Cả 3 bóng đều không tốt

**Bài giải:**

a. $A$ ="Lấy được ít nhất 2 bóng tốt"

$A_1$ ="Lấy được 2 bóng tốt" $\Rightarrow P(A_1)=\dfrac{C_7^2C_5^1}{C_{12}^3}$.

$A_2$ ="Lấy được 3 bóng tốt" $\Rightarrow P(A_2)=\dfrac{C_7^3}{C_{12}^3}$.

$A=A_1\cup A_2 \Rightarrow P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\dfrac{C_7^2C_5^1}{C_{30}^3}+\dfrac{C_7^3}{C_{30}^3}$.

b. $B$ =" Cả 3 bóng đều không tốt" $\Rightarrow P(B)=\dfrac{C_5^3}{C_{12}^3}$.

**Câu 8.** Cho các số $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên ra 1 số. Tính xác suất để số đó là:

a. Số lẻ b. Số đó chia hết cho 10 c. Số đó lớn hơn 59.000

**Bài giải:**

Số các số tự nhiên lẻ có 5 chữ số là: $9.9.8.7.6=27216$

a. $A$ = "số lẻ có 5 chữ số"

Để là số lẻ thì chữ số cuối cùng phải là các số $1,3,5,7,9$. Như vậy có 5 cách chọn chữ số cuối cùng.

Số các số là số lẻ khác nhau có 5 chữ số: $8.8.7.6.5=13440$.

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{13440}{27216}=\dfrac{40}{81}$

b. $B$ ="Số có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 10"

$\Rightarrow n(B)=9.8.7.6=3024$

$\Rightarrow P(B)=\dfrac{9.8.7.6}{9.9.8.7.6}=\dfrac{1}{9}$

c. $C$ = "Số có 5 chữ số khác nhau lớn hơn 59000"

gọi số có 5 chữ số khác nhau lớn hơn 59000 là: $\overline{abcde}$ khi đó

nếu $a=5$ thì $b=9$ còn $c$ có 8 cách chọn, $d$ có 7 cách chọn, $e$ có 6 cách chọn

$\Rightarrow$ có $8.7.6=366$ cách chọn

Nếu $a>5 \Rightarrow a$ có 4 cách chọn, $b$ có 9 cách chọn, $c$ có 8 cách chọn, $d$ có 7 cách chọn, $e$ có 6 cách chọn $\Rightarrow$ có $4.9.8.7.6=12096$ cách chọn.

Vậy số các số có 5 chữ số khác nhau lớn hơn 59000 là: 12432

$\Rightarrow P(C)=\dfrac{12432}{27216}=\dfrac{37}{81}$

**Câu 9.** Gieo đồng thời 2 con súc sắc cân đối đồng chất.Tính xác suất để:

a) Tổng số chấm ở mặt trên 2 con súc sắc bằng 6

b) Hiệu số nốt ở mặt trên 2 hai con súc sắc có giá trị tuyệt đối bằng 2

**Bài giải:**

a. Gọi $A=$ "Tổng số chấm ở mặt trên hai con súc sắc bằng 6"

$\Rightarrow A=\{(1,5);(2,4);(3,3);(5,1);(4,2)\} \Rightarrow n(A)=5$

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{5}{36}$

b. $B=$ "Hiệu số nốt ở mặt trên 2 hai con súc sắc có giá trị tuyệt đối bằng 2"

$\Rightarrow B=\{(1,3);(2,4);(3,5);(4,6);(3,1);(4,2);(5,3);(6,4)\} \Rightarrow n(B)=8 \Rightarrow P(B)=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

**Câu 10.** Lớp học môn xác suất gồm 70 học sinh, trong đó có 25 nữ. Chọn ngẫu nhiên ra một nhóm gồm 10 học sinh.Tính xác suất để trong nhóm chọn ra có 4 học sinh nữ.

**Bài giải:**

Gọi $A=$"Chọn 4 học sinh nữ và 6 học sinh nam"

$\Rightarrow n(A)=C_{45}^{6}C_{25}^{4} \Rightarrow P(A)=\dfrac{C_{45}^{6}C_{25}^{4}}{C_{70}^{10}}$

**Câu 11.** Một lớp có 40 học sinh, được đánh số từ $1-40$. Chọn ngẫu nhiên ra một bạn học sinh. Tính xác suất để bạn được chọn:

a. Mang số chẵn b. Mang số chia hết cho 3

**Bài giải:**

a. Gọi $A=$"Học sinh mang số chẵn"

$\Rightarrow n(A)=20 \Rightarrow P(A)=\dfrac{20}{40}=0,5$

b. Gọi $B=$"Học sinh mang số chia hết cho 3"

là các số là bội của 3 nhưng không vượt quá 40

$\Rightarrow B=\{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39\} \Rightarrow n(B)=13 \Rightarrow P(B)=\dfrac{13}{40}$

**Câu 12.** Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:

**a.** Biến cố $A$: "Trong hai lần gieo ít nhất một lần xuất hiện mặt một chấm"

**b.** Biến cố $B$: "Trong hai lần giao tổng số chấm trong hai lần giao là một số nhỏ hơn 11"

**Giải**

+ Không gian mẫu

$\Omega=\{(i,j)\,|\,i,j\in\{1,2,...,6\}\} \Rightarrow n(\Omega)=6.6=36$

**a.** Ta có biến cố đối

$\overline{A}=\{(i,j)\,|\,i,j\in\{2,...,6\}\} \Rightarrow n(\overline{A})=25$

$P(\overline{A})=\dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\dfrac{25}{36} \Rightarrow P(A)=1-P(\overline{A})=\dfrac{11}{36}$

**b.** Ta có:

$\overline{B}=\{(i,j)\,|\,i,j\in\{12,...,6\},i+j\geq 11\} \Rightarrow \overline{B}=\{(5,6);(6,5);(6,6)\}$

$$\Rightarrow n(\overline{B})=3\Rightarrow P(\overline{B})=\frac{n(\overline{B})}{n(\Omega)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\Rightarrow P(B)=1-P(\overline{B})=\frac{11}{12}$$

**Câu 13.** Một sọt Cam có 10 trái trong đó có 4 trái hư.Lấy ngẫu nhiên ra 4 trái

a. Tính xác suất để lấy được 3 trái hư

b. Tính xác suất để lấy được 1 trái hư

c. Tính xác suất để lấy được ít nhất 1 trái hư.

**Bài giải:**

a. Gọi $A=$"Lấy được 3 trái hư và 1 trái tốt "

$$\Rightarrow n(A)=C_4^3.C_6^1\Rightarrow P(A)=\frac{C_4^3.C_6^1}{C_{10}^4}$$

b. Gọi $B=$" Lấy được 1 trái hư và 3 trái tốt "

$$\Rightarrow n(B)=C_4^1.C_6^3\Rightarrow P(B)=\frac{C_4^1.C_6^3}{C_{10}^4}$$

c. Gọi $C=$" Lấy được ít nhất 1 trái hư "

$\Rightarrow \overline{C}=$" Không có trái hư nào "

$$\Rightarrow n(\overline{C})=C_6^4\Rightarrow P(\overline{C})=\frac{C_6^4}{C_{10}^4}\Rightarrow P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{C_6^4}{C_{10}^4}$$

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Xét phép thử gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất 6 mặt hai lần. Xét biến cố A: "Số chấm xuất hiện ở cả hai lần gieo giống nhau". Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $n(A)=6$. **B.** $n(A)=12$. **C.** $n(A)=16$. **D.** $n(A)=36$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi cặp số $(x;y)$ là số chấm xuất hiện ở hai lần gieo.

Xét biến cố A: "Số chấm xuất hiện ở cả hai lần gieo giống nhau".

Các kết quả của biến cố A là: $\{(1;1);(2;2);(3;3);(4;4);(5;5);(6;6)\}$.

Suy ra $n(A)=6$.

**Câu 2.** Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất liên tiếp ba lần. Gọi $A$ là biến cố "Có ít nhất hai mặt sấp xuất hiện liên tiếp" và $B$ là biến cố "Kết quả ba lần gieo là như nhau". Xác định biến cố $A\cup B$.

**A.** $A\cup B=\{SSS,SSN,NSS,SNS,NNN\}$. **B.** $A\cup B=\{SSS,NNN\}$.

**C.** $A\cup B=\{SSS,SSN,NSS,NNN\}$. **D.** $A\cup B=\Omega$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$A=\{SSS,SSN,NSS\}$, $B=\{SSS,NNN\}$. Suy ra $A\cup B=\{SSS,SSN,NSS,NNN\}$.

**Câu 3.** Gieo ngẫu nhiên một đồng tiền cân đối và đồng chất 5 lần. Tính số phần tử không gian mẫu.

**A.** 64. **B.** 10. **C.** 32. **D.** 16.

**Lời giải**

**Chọn C**

Mỗi lần gieo có hai khả năng nên gieo 5 lần theo quy tắc nhân ta có $2^5=32$.

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=32$.

**Câu 4.** Xét phép thử gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Gọi $A$ là biến cố "Lần đầu xuất hiện mặt 6 chấm" và $B$ là biến cố "Lần thứ hai xuất hiện mặt 6 chấm".

Khẳng định nào **sai** trong các khẳng định sau?

**A.** A và B là hai biến cố xung khắc.
**B.** $A \cup B$ là biến cố "Ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm".
**C.** $A \cap B$ là biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần gieo bằng 12.
**D.** $A$ và $B$ là hai biến cố độc lập.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hai biến cố A và B có thể cùng xảy ra.

**Câu 5.** Rút ngẫu nhiên cùng lúc ba con bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con thì $n(\Omega)$ bằng bao nhiêu?

**A.** $140608$. **B.** $156$. **C.** $132600$. **D.** $22100$.

**Lời giải**

Ta có $n(\Omega) = C_{52}^3 = 22100$.

**Câu 6.** Gieo ngẫu nhiên hai con xúc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố " Có ít nhất một con xúc sắc xuất hiện mặt một chấm" là

**A.** $\frac{11}{36}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{25}{36}$. **D.** $\frac{15}{36}$.

***Lời giải***

**Đáp án A.**

Gọi $A$ là biến cố: "Có ít nhất một con xúc sắc xuất hiện mặt một chấm".

**Bước 1:** Tìm số phần tử không gian mẫu.

Do mỗi xúc sắc có thể xảy ra 6 trường hợp nên số kết quả có thể xảy ra là $|\Omega| = 6.6 = 36$.

**Bước 2:** Tìm số kết quả thuận lợi cho $A$.

Ta có các trường hợp sau:

$\{(1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(1;6);(2;1);(3;1);(4;1);(5;1);(6;1)\} \Rightarrow |\Omega_A| = 11$

**Bước 3:** Xác suất của biến cố $A$ là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}$.

**Câu 7.** Gieo một con súc sắc. Xác suất để mặt 6 chấm xuất hiện.

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gieo một con súc sắc có không gian mẫu $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

Xét biến cố $A$: "mặt 6 chấm xuất hiện". $A = \{6\} \Rightarrow n(A) = 1$.

Do đó $P(A)=\frac{1}{6}$.

**Câu 8.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất 2 lần. Tính xác suất để tổng số chấm trong hai lần gieo nhỏ hơn 6.

**A.** $\frac{2}{9}$. **B.** $\frac{11}{36}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{5}{18}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=6^2=36$.

Gọi A là biến cố "Tổng số chấm trong hai lần gieo nhỏ hơn 6".

Tập hợp các quả của biến cố A là:

$A=\{(1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(2;1);(2;2);(2;3);(3;1);(3;2);(4;1)\}$.

Số phần tử của biến cố A là: $n(A)=10$.

Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

**Câu 9.** Gieo ngẫu nhiên 2 con xúc sắc cân đối đồng chất. Tìm xác suất của biến cố: " Hiệu số chấm xuất hiện trên 2 con xúc sắc bằng 1".

**A.** $\frac{2}{9}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $\frac{5}{18}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=6.6=36$.

Gọi $A$ là biến cố thỏa mãn yêu cầu bài toán:

$A=\{(1;2),(2;1),(3;2),(2;3),(3;4),(4;3),(4;5),(5;4),(5;6),(6;5)\}$ nên $n(A)=10$.

Vậy $P(A)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

**Câu 10.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố nào sau đây bằng $\frac{1}{6}$?

**A.** Xuất hiện mặt có số chấm lẻ.
**B.** Xuất hiện mặt có số chấm chẵn.
**C.** Xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 2 và 3.
**D.** Xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn 3.

**Lời giải**

Gọi $\Omega$ là không gian mẫu của phép thử, ta có $n(\Omega)=6$.

Gọi $A$: "Xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 2 và 3". Khi đó $n(A)=1$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{1}{6}$.

**Câu 11.** Gieo ngẫu nhiên một con xúc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Tính xác suất để số chấm của hai lần gieo là bằng nhau

**A.** $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{7}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

**Lời giải**

Gọi $A$ là biến cố "Số chấm trong hai lần gieo là bằng nhau"

$n(\Omega)=36$.

$A=\{(1,1);(2,2);...;(6,6)\}$, $n(A)=6$.

Vậy $P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

## TÍNH XÁC SUẤT SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP.

**Câu 12.** Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để 2 quả cầu chọn ra cùng màu bằng

**A.** $\dfrac{5}{22}$ **B.** $\dfrac{6}{11}$ **C.** $\dfrac{5}{11}$ **D.** $\dfrac{8}{11}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Số cách lấy ra 2 quả cầu trong 11 quả là $C_{11}^2$, Suy ra $n(\Omega)=C_{11}^2$

Gọi A là biến cố lấy được 2 quả cùng màu. Suy ra $n(A)=C_5^2+C_6^2$

Xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{C_5^2+C_6^2}{C_{11}^2}=\dfrac{5}{11}$

**Câu 13.** Từ một hộp chứa 11 quả cầu màu đỏ và 4 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh

**A.** $\dfrac{33}{91}$ **B.** $\dfrac{24}{455}$ **C.** $\dfrac{4}{165}$ **D.** $\dfrac{4}{455}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{15}^3=455$.

Gọi $A$ là biến cố "3 quả cầu lấy được đều là màu xanh". Suy ra $n(A)=C_4^3=4$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{4}{455}$.

**Câu 14.** Từ một hộp chứa 7 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

**A.** $\dfrac{1}{22}$ **B.** $\dfrac{2}{7}$ **C.** $\dfrac{5}{12}$ **D.** $\dfrac{7}{44}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $A$ là biến cố: "lấy được 3 quả cầu màu xanh"

Ta có $P(A)=\dfrac{C_5^3}{C_{12}^3}=\dfrac{1}{22}$.

**Câu 15.** Từ một hộp chứa 9 quả cầu đỏ và 6 quả cầu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng?

**A.** $\frac{24}{91}$ **B.** $\frac{4}{91}$ **C.** $\frac{12}{65}$ **D.** $\frac{5}{21}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu từ 15 quả cầu đã cho có $C_{15}^3$ cách.

Lấy được 3 quả cầu màu xanh từ 6 quả cầu xanh đã cho có $C_6^3$ cách.

Vậy xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh là $P=\frac{C_6^3}{C_{15}^3}=\frac{4}{91}$.

**Câu 16.** Từ một hộp chứa 10 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

**A.** $\frac{2}{91}$ **B.** $\frac{12}{91}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{24}{91}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{15}^3=455$ (phần tử).

Gọi $A$ là biến cố: " lấy được 3 quả cầu màu xanh".

Khi đó, $n(A)=C_5^3=10$ (phần tử ).

Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}$.

**Câu 17.** Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 4 học sinh tên Anh. Trong một lần kiểm tra bài cũ, thầy giáo gọi ngẫu nhiên hai học sinh trong lớp lên bảng. Xác suất để hai học sinh tên Anh lên bảng bằng

**A.** $\frac{1}{10}$. **B.** $\frac{1}{20}$. **C.** $\frac{1}{130}$. **D.** $\frac{1}{75}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{40}^2=780$.

Gọi $A$ là biến cố gọi hai học sinh tên Anh lên bảng, ta có $n(A)=C_4^2=6$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\frac{6}{780}=\frac{1}{130}$.

**Câu 18.** Hộp $A$ có 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Hộp $B$ có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi, tính xác suất để hai viên bi được lấy ra có cùng màu.

**A.** $\frac{91}{135}$. **B.** $\frac{44}{135}$. **C.** $\frac{88}{135}$. **D.** $\frac{45}{88}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Số phần tử của không gian mẫu: $15.18=270$.

Số cách chọn từ mỗi hộp 1 viên bi sau cho 2 viên bi cùng màu là: $4.7+5.6+6.5=88$.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{88}{270}=\frac{44}{135}$.

**Câu 19.** Một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh. Xác suất để trong 4 học sinh được chọn luôn có học sinh nữ là

**A.** $\frac{1}{14}$. **B.** $\frac{1}{210}$. **C.** $\frac{13}{14}$. **D.** $\frac{209}{210}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$n(\Omega)=C_{10}^4=210$.

Gọi $A$ là biến cố:" trong 4 học sinh được chọn luôn có học sinh nữ" $\Rightarrow n(A)=C_{10}^4-C_6^4=195$

Vậy xác suất của biến cố $A$ là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{195}{210}=\frac{13}{14}$.

**Câu 20.** Một hộp đèn có 12 bóng, trong đó có 4 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để trong 3 bóng có 1 bóng hỏng.

**A.** $\frac{11}{50}$. **B.** $\frac{13}{112}$. **C.** $\frac{28}{55}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

**Lời giải.**

**Chọn C**

Trong 3 bóng có 1 bóng hỏng

Ta có $n(\Omega)=C_{12}^3=220$.

Gọi biến cố $A$ : "Trong 3 bóng lấy ra có 1 bóng hỏng".

Tính được $n(\Omega_A)=C_4^1.C_8^2=112$

Vậy $P(A)=\frac{112}{220}=\frac{28}{55}$

**Câu 21.** Trong một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 bạn trong tổ tham gia đội tình nguyện của trường. Tính xác suất để 3 bạn được chọn toàn là nam.

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét phép thử: Chọn ngẫu nhiên 3 trong 10 bạn trong tổ, ta có $n(\Omega)=C_{10}^3$.

Gọi $A$ là biến cố: " 3 bạn được chọn toàn nam", ta có $n(A)=C_6^3$.

Xác suất của biến cố $A$: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$.

**Câu 22.** Trong một đợt kiểm tra định kỳ, giáo viên chuẩn bị một hộp đựng 15 câu hỏi gồm 5 *câu hỏi Hình học và* 10 *câu hỏi Đại số khác nhau. Mỗi học sinh bốc ngẫu nhiên từ hộp đó* 3 *câu hỏi để làm đề thi cho mình. Tính xác suất để một học sinh bốc được đúng một câu hình học.*

*A.* $\frac{45}{91}$. *B.* $\frac{3}{4}$. *C.* $\frac{200}{273}$. *D.* $\frac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét phép thử: " Chọn 3 câu hỏi từ 15 câu hỏi" $\Rightarrow n(\Omega)=C_{15}^{3}=455.$

Gọi A là biến cố: " Chọn được đúng 1 câu hình" $n(\Omega_A)=C_5^1.C_{10}^2=225\Rightarrow P_A=\dfrac{45}{91}.$

**Câu 23.** Một người chọn ngẫu nhiên 2 chiếc giày từ 5 đôi giày cỡ khác nhau. Tính xác suất để 2 chiếc giày được chọn tạo thành một đôi.

**A.** $\dfrac{1}{2}.$ **B.** $\dfrac{1}{10}.$ **C.** $\dfrac{7}{9}.$ **D.** $\dfrac{1}{9}.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Phép thử "Chọn ngẫu nhiên 2 chiếc giày từ 5 đôi giày cỡ khác nhau" có không gian mẫu là $\Omega$ $\Rightarrow n(\Omega)=\mathrm{C}_{10}^{2}=45$.

A là biến cố "Chọn ngẫu nhiên 2 chiếc giày từ 5 đôi giày cỡ khác nhau sao cho 2 chiếc giày tạo thành một đôi giày".

Chọn đồng thời 2 chiếc giày để tạo thành một đôi $\Rightarrow$ Có 5 khả năng.

Số khả năng thuận lợi cho biến cố A là: $n(\mathrm{A})=5$

Vậy xác suất để chọn ngẫu nhiên 2 chiếc giày từ 5 đôi giày cỡ khác nhau sao cho 2 chiếc giày tạo thành một đôi giày là $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\dfrac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)}=\dfrac{5}{45}=\dfrac{1}{9}.$

**Câu 24.** Giải bóng chuyền VTV Cúp có 16 đội tham gia trong đó có 12 đội nước ngoài và 4 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 4 bảng đấu $A,B,C,D$ mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 4 đội của Việt Nam nằm ở 4 bảng đấu khác nhau.

**A.** $\dfrac{391}{455}.$ **B.** $\dfrac{8}{1365}.$ **C.** $\dfrac{32}{1365}.$ **D.** $\dfrac{64}{455}.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{16}^{4}.C_{12}^{4}.C_{8}^{4}.1=63063000.$

Gọi $A$: "Mỗi đội Việt Nam ở 4 bảng khác nhau".

Ta có: $n(A)=4.C_{12}^{3}.3.C_{9}^{3}.2.C_{6}^{3}.1=8870400.$

Xác suất cần tìm là: $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{8870400}{63063000}=\dfrac{64}{455}.$

**Câu 25.** Trong một hộp có 12 bóng đèn, trong đó có 4 bóng đèn hỏng. Lấy ngẫu nhiên cùng lúc 3 bóng đèn. Tính xác suất để lấy được 3 bóng tốt.

**A.** $\dfrac{28}{55}.$ **B.** $\dfrac{14}{55}.$ **C.** $\dfrac{1}{55}.$ **D.** $\dfrac{28}{55}.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Không gian mẫu của phép thử lấy ngẫu nhiên cùng lúc 3 bóng đèn từ hộp có 12 bóng đèn là $n(\Omega)=C_{12}^{3}=220.$

Gọi $A$ là biến cố: "3 bóng đèn lấy ra là 3 bóng tốt".

Ta có: $n(A)=C_{8}^{3}=56.$

Xác suất để lấy được 3 bóng tốt là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{56}{220}=\dfrac{14}{55}.$

**Câu 26.** Có 4 hành khách bước lên một đoàn tàu gồm 4 toa. Mỗi hành khách độc lập với nhau và chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất để 1 toa có 3 người, một toa có 1 người, 2 toa còn lại không có ai.

**A.** $\frac{5}{16}$. **B.** $\frac{7}{16}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{3}{16}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Không gian mẫu: $n(\Omega)=4.4.4.4=256$

Chọn 1 toa để xếp 3 người có 4 cách chọn

Xếp 3 người vào toa đó có: $C_4^3=4$ cách

Chọn 1 toa để xếp 1 người có 3 cách chọn

Tổng số cách chọn thỏa mãn là: $n(A)=4.4.3=48$ cách

Vậy xác suất là: $P(A)=\frac{n(\Omega)}{n(A)}=\frac{48}{256}=\frac{3}{16}$.

**Câu 27.** Một hộp chứa 35 quả cầu gồm 20 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 20 và 15 quả cầu xanh được đánh số từ 1 đến 15. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó một quả cầu. Tính xác suất để lấy được quả màu đỏ hoặc ghi số lẻ.

**A.** $\frac{5}{7}$. **B.** $\frac{28}{35}$. **C.** $\frac{4}{7}$. **D.** $\frac{27}{35}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó một quả cầu có 35 cách.

Lấy được một quả cầu màu đỏ có 20 cách, lấy được một quả cầu màu xanh ghi số lẻ có 8 cách.

Do đó để lấy được quả màu đỏ hoặc ghi số lẻ có 28 cách.

Do đó xác suất cần tìm là: $\frac{28}{35}$.

**Câu 28.** Có hai hộp, mỗi hộp chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp một tấm thẻ. Tính xác suất để 2 thẻ rút ra đều ghi số chẵn.

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{21}{25}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{4}{25}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega)=5.5=25$.

Gọi $A$: "2 lấy ra đều ghi số chẵn"

$n(A)=2.2=4$.

Vậy $P(A)=\frac{4}{25}$.

**Câu 29.** Bình có bốn đôi giầy khác nhau gồm bốn màu: đen, trắng, xanh và đỏ. Một buổi sáng đi học, vì vội vàng, Bình đã lấy ngẫu nhiên hai chiếc giầy từ bốn đôi giầy đó. Tính xác suất để Bình lấy được hai chiếc giầy cùng màu?

**A.** $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{14}$. **D.** $\frac{2}{7}$.

**Lời giải**

Ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_8^2=28$.

Gọi $A$:" Bình lấy được hai chiếc giầy cùng màu" suy ra $n(A)=4$.

Suy ra $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{7}$.

Vậy xác suất để Bình lấy được hai chiếc giầy cùng màu là $\dfrac{1}{7}$.

**Câu 30.** Có 5 học sinh không quen biết nhau cùng đến một cửa hàng kem có 6 quầy phục vụ. Xác suất để có 3 học sinh cùng vào một quầy và 2 học sinh còn lại vào một quầy khác là

**A.** $\dfrac{C_5^3.C_6^1.5!}{6^5}$. **B.** $\dfrac{C_5^3.C_6^1.C_5^1}{6^5}$. **C.** $\dfrac{C_5^3.C_6^1.5!}{5^6}$. **D.** $\dfrac{C_5^3.C_6^1.C_5^1}{5^6}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có mỗi học sinh có 6 cách chọn quầy phục vụ nên $n(\Omega)=6^5$.

Gọi $A$ là biến cố thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn 3 học sinh trong 5 học sinh để vào cùng một quầy $C_5^3$.

Sau đó chọn 1 quầy trong 6 quầy để các em vào là $C_6^1$.

Còn 2 học sinh còn lại có $C_5^1$ cách chọn quầy để vào cùng.

Nên $n(A)=C_5^3.C_6^1.C_5^1$.

Vậy $P(A)=\dfrac{C_5^3.C_6^1.C_5^1}{6^5}$.

**Câu 31.** Một hộp có 4 quả cầu xanh, 3 quả cầu đỏ và 2 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu. Tính xác suất để chọn được 2 quả cầu khác màu.

**A.** $\dfrac{17}{18}$. **B.** $\dfrac{1}{18}$. **C.** $\dfrac{5}{18}$. **D.** $\dfrac{13}{18}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số phần tử không gian mẫu là $|\Omega|=C_9^2$.

Gọi $A$ là biến cố chọn được hai quả cầu khác màu.

Khi đó $\overline{A}$ là biến cố chọn được hai quả cầu cùng màu.

Ta có: $|\overline{A}|=C_4^2+C_3^2+C_2^2=10\Rightarrow|A|=|\Omega|-|\overline{A}|=26$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}=\dfrac{26}{36}=\dfrac{13}{18}$.

**Câu 32.** Trong một đợt kiểm tra định kì, giáo viên chuẩn bị một chiếc hộp đựng 15 câu hỏi gồm 5 câu hỏi Hình học và 10 câu hỏi Đại số khác nhau. Mỗi học sinh bốc ngẫu nhiên từ hộp đó 3 câu hỏi để làm đề thi cho mình. Tính xác suất để một học sinh bốc được đúng 1 câu hỏi Hình học.

**A.** $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{45}{91}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{200}{273}$.

**Lời giải**

Xác suất để một học sinh bốc được đúng 1 câu hỏi Hình học là $P=\dfrac{C_5^1.C_{10}^2}{C_{15}^3}=\dfrac{45}{91}$.

**Câu 33.** Một người làm vườn có 12 cây giống gồm 6 cây xoài, 4 cây mít và 2 cây ổi. Người đó muốn chọn ra 6 cây giống để trồng. Tính xác suất để 6 cây được chọn, mỗi loại có đúng 2 cây.

**A.** $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{10}$. **C.** $\frac{15}{154}$. **D.** $\frac{25}{154}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_{12}^{6}=924$.

Gọi $A$ là biến cố: "6 cây được chọn, mỗi loại có đúng 2 cây".

Ta có: $n(A)=C_{6}^{2}.C_{4}^{2}.C_{2}^{2}=15.6.1=90$.

Vậy: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{90}{924}=\frac{15}{154}$.

**Câu 34.** Một hộp đựng 7 quả cầu màu trắng và 3 quả cầu màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 quả cầu. Tính xác suất để trong 4 quả cầu lấy được có đúng 2 quả cầu đỏ.

**A.** $\frac{21}{71}$. **B.** $\frac{20}{71}$. **C.** $\frac{62}{211}$. **D.** $\frac{21}{70}$.

**Lời giải**

Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 quả cầu nên số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_{10}^{4}=210$.

Gọi $A$ là biến cố "4 quả cầu lấy được có đúng 2 quả cầu đỏ".

Số kết quả thuận lợi của $A$ là: $n(A)=C_{3}^{2}.C_{7}^{2}=63$ nên: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{63}{210}=\frac{21}{70}$.

**Câu 35.** Một hộp đựng 9 viên bi trong đó có 4 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp 3 viên bi. Tìm xác suất để 3 viên bi lấy ra có ít nhất 2 viên bi màu xanh.

**A.** $\frac{10}{21}$. **B.** $\frac{5}{14}$. **C.** $\frac{25}{42}$. **D.** $\frac{5}{42}$.

**Lời giải**

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{9}^{3}$.

Gọi biến cố $A$: " lấy được ít nhất 2 viên bi màu xanh". Suy ra $n(A)=C_{5}^{2}.C_{4}^{1}+C_{5}^{3}$.

Vậy $P(A)=\frac{25}{42}$.

**Câu 36.** Trong một hộp đựng 7 bi màu đỏ, 5 bi màu xanh và 3 bi vàng, lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để 3 viên bi lấy được đều có màu đỏ.

**A.** $\frac{1}{13}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{7}{15}$.

**Lời giải**

Tổng số có $7+5+3=15$ viên bi.

Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ 15 viên có $C_{15}^{3}=455$ (cách lấy).

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=455$.

Gọi $A$: 3 viên bi lấy được đều có màu đỏ".

Lấy 3 viên bi màu đỏ từ 7 viên bi màu đỏ có $C_{7}^{3}=35\Rightarrow n(A)=35$.

Vậy xác suất để 3 viên bi lấy được đều có màu đỏ là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{45}{455}=\dfrac{1}{13}$.

**Câu 37.** Một lớp có 35 đoàn viên trong đó có 15 nam và 20 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 đoàn viên trong lớp để tham dự hội trại 26 tháng 3. Tính xác suất để trong 3 đoàn viên được ó cả nam và nữ.

**A.** $\dfrac{90}{119}$. **B.** $\dfrac{30}{119}$. **C.** $\dfrac{125}{7854}$. **D.** $\dfrac{6}{119}$.

**Lời giải**

Số kết quả có thể xảy ra $|\Omega|=C_{35}^3$.

Gọi $A$ là biến cố "trong 3 đoàn viên được ó cả nam và nữ".

Ta có: $|\Omega_A|=C_{15}^2C_{20}^1+C_{15}^1C_{20}^2$. Vậy: $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{90}{119}$.

**Câu 38.** Lớp 11B có 25 đoàn viên, trong đó có 10 nam và 15 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 đoàn viên trong lớp để tham dự hội trại ngày 26 tháng 3. Tính xác suất để 3 đoàn viên được chọn có 2 nam và 1 nữ.

**A.** $\dfrac{7}{920}$. **B.** $\dfrac{27}{92}$. **C.** $\dfrac{3}{115}$. **D.** $\dfrac{9}{92}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{25}^3$.

Gọi $A$ là biến cố "3 đoàn viên được chọn có 2 nam và 1 nữ".

Số phần tử của $A$ là $n(A)=C_{10}^2.C_{15}^1$.

Vậy xác xuất của biến cố $A$ là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_{10}^2.C_{15}^1}{C_{25}^3}=\dfrac{27}{92}$.

**Câu 39.** Một tổ học sinh có 6 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho hai người được chọn đều là nữ.

**A.** $\dfrac{2}{15}$. **B.** $\dfrac{7}{15}$. **C.** $\dfrac{8}{15}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

Chọn ngẫu nhiên 2 người trong 10 người có $C_{10}^2$ cách chọn.

Hai người được chọn đều là nữ có $C_4^2$ cách.

Xác suất để hai người được chọn đều là nữ là: $\dfrac{C_4^2}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{15}$.

**Câu 40.** Một lô hàng có 20 sản phẩm, trong đó 4 phế phẩm. Lấy tùy ý 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm lấy ra có không quá 1 phế phẩm.

**A.** $\dfrac{91}{323}$. **B.** $\dfrac{637}{969}$. **C.** $\dfrac{7}{9}$. **D.** $\dfrac{91}{285}$.

**Lời giải**

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=38760$.

Kết quả trong 6 sản phẩm lấy ra có không quá 1 phế phẩm là $n(A)=C_{16}^5.C_4^1+C_{16}^6=25480$.

Xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{25480}{38760}=\dfrac{637}{969}$.

**Câu 41.** Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 5 quyển sách lý, 6 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển sách được lấy ra có ít nhất một quyển sách toán.

**A.** $\frac{24}{91}$. **B.** $\frac{58}{91}$. **C.** $\frac{24}{455}$. **D.** $\frac{33}{91}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{15}^3$.

Gọi $A$ là biến cố " quyển sách được lấy ra có ít nhất một quyển sách toán".

Ta có $n(A)=C_{15}^3-C_{11}^3$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{C_{15}^3-C_{11}^3}{C_{15}^3}=\frac{58}{91}$.

**Câu 42.** Có 8 cái bút khác nhau và 9 quyển vở khác nhau được gói trong 17 hộp. Một học sinh được chọ bất kỳ hai hộp. Xác suất để học sinh đó chọn được một cặp bút và vở là

**A.** $\frac{1}{17}$. **B.** $\frac{9}{17}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{9}{34}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{17}^2=136$.

Số cách chọn được một cặp bút và vở là: $n(A)=C_8^1.C_9^1=72$.

Xác suất để học sinh đó chọn được một cặp bút và vở là: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{72}{136}=\frac{9}{17}$.

**Câu 43.** Lớp $12A2$ có 10 học sinh giỏi, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Cần chọn ra 3 học sinh đi dự hội nghị "Đổi mới phương pháp dạy và học" của nhà trường. Tính xác suất để có đúng hai học sinh nam và một học sinh nữ được chọn. Giả sử tất cả các học sinh đó đều xứng đáng được đi dự đại hội như nhau.

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

Số cách chọn ba học sinh tùy ý từ 10 học sinh giỏi là $C_{10}^3=120$ cách.

Số cách chọn để có đúng hai học sinh nam và một học sinh nữ là $C_6^2.C_4^1=60$ cách.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$.

**Câu 44.** Một đội gồm 5 nam và 8 nữ. Lập một nhóm gồm 4 người hát tốp ca. Tính xác suất để trong bốn người được chọn có ít nhất ba nữ.

**A.** $\frac{70}{143}$. **B.** $\frac{73}{143}$. **C.** $\frac{56}{143}$. **D.** $\frac{87}{143}$.

**Lời giải**

Không gian mẫu $n(\Omega)=C_{13}^4=715$ (cách chọn).

Gọi $A$ là biến cố "Bốn người được chọn có ít nhất ba nữ".

Ta có $n(A)=C_8^3C_5^1+C_8^4=350$ (cách chọn).

Suy ra $P(A)=\frac{350}{715}=\frac{70}{143}$.

**Câu 45.** Một bình đựng $8$ viên bi xanh và $4$ viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên $3$ viên bi. Xác suất để có được ít nhất hai viên bi xanh là bao nhiêu?

**A.** $\frac{41}{55}$. **B.** $\frac{14}{55}$. **C.** $\frac{28}{55}$. **D.** $\frac{42}{55}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{12}^{3}=220$ (cách chọn).

Gọi $A$ là biến cố " Lấy được ít nhất hai viên bi xanh ".

Ta có $n(A)=C_{8}^{2}C_{4}^{1}+C_{8}^{3}C_{4}^{0}=168$ (cách chọn).

Vậy xác suất $P(A)=\frac{168}{220}=\frac{42}{55}$.

**Câu 46.** Một túi đựng $6$ bi xanh và $4$ bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên $2$ bi. Xác suất để cả hai bi đều đỏ là.

**A.** $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{7}{45}$. **C.** $\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{2}{15}$.

**Lời giải**

Ta có số phần từ của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{10}^{2}=45$.

Gọi $A$ : "Hai bi lấy ra đều là bi đỏ".

Khi đó $n(A)=C_{4}^{2}=6$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{2}{15}$.

**Câu 47.** Một đoàn tình nguyện, đến một trường tiểu học miền núi để trao tặng $20$ suất quà cho $10$ em học sinh nghèo học giỏi. Trong $20$ suất quà đó gồm $7$ chiếc áo mùa đông, $9$ thùng sữa tươi và $4$ chiếc cặp sách. Tất cả các suất quà đều có giá trị tương đương nhau. Biết rằng mỗi em được nhận $2$ suất quà khác loại (ví dụ: 1 chiếc áo và 1 thùng sữa tươi). Trong số các em được nhận quà có hai em Việt và Nam. Tính xác suất để hai em Việt và Nam đó nhận được suất quà giống nhau?

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta chia các suất quà như sau: 6 áo và 6 thùng sữa, 3 thùng sữa và 3 cặp, 1 cặp và 1 áo.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{10}^{2}=45$.

***TH1:*** Nam và Việt nhận một thùng sữa và một chiếc áo: $C_{6}^{2}$.

***TH2:*** Nam và Việt nhận một thùng sữa và một chiếc cặp: $C_{3}^{2}$.

Gọi $A$ là biến cố để hai em Việt và Nam nhận được suất quà giống nhau.

$\Rightarrow n(A)=C_{6}^{2}+C_{3}^{2}=18$.

Vậy: $p(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{18}{45}=\frac{2}{5}$.

**Câu 48.** Một tổ chuyên môn tiếng Anh của trường đại học $X$ gồm $7$ thầy giáo và $5$ cô giáo, trong đó thầy *Xuân* và cô *Hạ* là vợ chồng. Tổ chọn ngẫu nhiên $5$ người để lập hội đồng chấm thi vấn đáp tiếng Anh B1 khung châu Âu. Xác suất sao cho hội đồng có 3 thầy, 2 cô và nhất thiết phải có thầy *Xuân* hoặc cô *Hạ* nhưng không có cả hai là

**A.** $\frac{5}{44}$. **B.** $\frac{5}{88}$. **C.** $\frac{85}{792}$. **D.** $\frac{85}{396}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số cách chọn ngẫu nhiên 5 người từ 12 người là $n(\Omega)=C_{12}^5$.

**Trường hợp 1.** Trong hội đồng gồm thầy *Xuân*, 2 thầy giáo trong số 6 thầy giáo còn lại, và 2 cô giáo trong số 4 cô giáo (cô *Hạ* không được chọn). Có $C_6^2.C_4^2$ cách chọn.

**Trường hợp 2.** Trong hội đồng gồm cô *Hạ*, 1 cô giáo trong số 4 cô giáo còn lại, và 3 thầy giáo trong số 6 thầy giáo (thầy *Xuân* không được chọn). Có $C_4^1.C_6^3$ cách chọn.

Vậy xác suất cần tìm là $P=\dfrac{C_6^2.C_4^2+C_4^1.C_6^3}{C_{12}^5}=\dfrac{85}{396}$.

**Câu 49.** Đội tuyển học sinh giỏi Toán 12 trường THPT Yên Dũng số 3 gồm 8 học sinh, trong đó có 5 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh đi thi học sinh giỏi cấp Huyện. Tính xác suất để 5 học sinh được chọn đi thi có cả nam và nữ và học sinh nam nhiều hơn học sinh nữ

**A.** $p=\dfrac{11}{56}$. **B.** $p=\dfrac{45}{56}$. **C.** $p=\dfrac{46}{56}$. **D.** $p=\dfrac{55}{56}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_8^5=56$

Gọi $A$ là biến cố: "5 học sinh được chọn đi thi có cả nam và nữ và học sinh nam nhiều hơn học sinh nữ".

Xét các khả năng xảy ra của $A$

Trường hợp 1: 5 học sinh được chọn gồm 4 nam và 1 nữ. Số cách chọn là $C_5^4.C_3^1=15$

Trường hợp 2: 5 học sinh được chọn gồm 3 nam và 2 nữ. Số cách chọn là $C_5^3.C_3^2=30$

Số phần tử của biến cố $A$ là $n(A)=45$

Xác suất của biến cố $A$ là $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{45}{56}$

**Câu 50.** Một đoàn tình nguyện đến một trường tiểu học miền núi để trao tặng 20 suất quà cho 10 em học sinh nghèo học giỏi. Trong 20 suất quà đó gồm 7 chiếc áo mùa đông, 9 thùng sữa tươi và 4 chiếc cặp sách. Tất cả các suất quà đều có giá trị tương đương nhau. Biết rằng mỗi em nhận hai suất quà khác loại (ví dụ một chiếc áo và một thùng sữa tươi). Trong số các em được nhận quà có hai em Việt và Nam. Tính xác suất để hai em Việt và Nam đó nhận được suất quà giống nhau?

**A.** $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{15}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $x$ là số bạn học sinh nhận quà là 1 chiếc áo mùa đông và 1 thùng sữa tươi.

Gọi $y$ là số bạn học sinh nhận quà là 1 chiếc áo mùa đông và 1 chiếc cặp sách.

Gọi $z$ là số bạn học sinh nhận quà là 1 thùng sữa và 1 chiếc cặp sách.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=7 \\ x+z=9 \\ y+z=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$.

Không gian mẫu $\Omega$ là: " Chọn 2 suất quà trong 10 suất quà " $\Rightarrow n(\Omega)=C_{10}^2$.

Biến cố $A$ là: "Bạn Việt và Nam nhận được phần quà giống nhau" $\Rightarrow n(A)=C_6^2+C_3^2$.

Xác suất xảy ra biến cố $A$ là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{2}{5}$.

**Câu 51.** Một cái hộp chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy lần lượt 2 viên bi từ cái hộp đó. Tính xác suất để viên bi được lấy lần thứ 2 là bi xanh.

**A.** $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{7}{24}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{7}{9}$.

**Lời giải**

Ta có: Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{10}^{1}.C_{9}^{1}$.

Gọi $A$ là biến cố: " Viên bi được lấy lần thứ 2 là bi xanh".

- Trường hợp 1: Lần 1 lấy viên đỏ, lần 2 lấy viên xanh: Có $C_{6}^{1}.C_{4}^{1}$ cách chọn

- Trường hợp 2: Lần 1 lấy viên xanh, lần 2 lấy viên xanh: Có $C_{4}^{1}.C_{3}^{1}$ cách chọn

$n(A)=C_{6}^{1}.C_{4}^{1}+C_{4}^{1}.C_{3}^{1}$.

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{24+12}{10.9}=\dfrac{2}{5}$.

**Câu 52.** Một cái hộp chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy lần lượt 2 viên bi từ cái hộp đó. Tính xác suất để viên bi được lấy lần thứ 2 là bi xanh.

**A.** $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{7}{24}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{7}{9}$.

**Lời giải**

Ta có: Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{10}^{1}.C_{9}^{1}$.

Gọi $A$ là biến cố: " Viên bi được lấy lần thứ 2 là bi xanh".

- Trường hợp 1: Lần 1 lấy viên đỏ, lần 2 lấy viên xanh: Có $C_{6}^{1}.C_{4}^{1}$ cách chọn

- Trường hợp 2: Lần 1 lấy viên xanh, lần 2 lấy viên xanh: Có $C_{4}^{1}.C_{3}^{1}$ cách chọn

$n(A)=C_{6}^{1}.C_{4}^{1}+C_{4}^{1}.C_{3}^{1}$.

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{24+12}{10.9}=\dfrac{2}{5}$.

**Câu 53.** Một tổ gồm 9 học sinh gồm 4 học sinh nữ và 5 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên từ tổ đó ra 3 học sinh. Xác suất để trong 3 học sinh chọn ra có số học sinh nam nhiều hơn số học sinh nữ bằng:

**A.** $\dfrac{17}{42}$. **B.** $\dfrac{5}{42}$. **C.** $\dfrac{25}{42}$. **D.** $\dfrac{10}{21}$.

**Lời giải**

Có $C_{9}^{3}=84$ cách chọn 3 học sinh bất kì.

Chọn 3 học sinh mà số học sinh nam nhiều hơn số học sinh nữ có các trường hợp

+ Có 3 học sinh nam: Có $C_{5}^{3}=10$ cách chọn

+ Có 2 học sinh nam, 1 học sinh nữ: Có $C_{5}^{2}.C_{4}^{1}=40$ cách chọn

Xác suất cần tìm là $P=\dfrac{10+40}{84}=\dfrac{25}{42}$.

**Câu 54.** Đội thanh niên xung kích của trường THPT Chuyên Biên Hòa có 12 học sinh gồm 5 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 3 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh để làm nhiệm vụ mỗi buổi sáng. Tính xác suất sao cho 4 học sinh được chọn thuộc không quá hai khối.

**A.** $\dfrac{5}{11}$. **B.** $\dfrac{6}{11}$. **C.** $\dfrac{21}{22}$. **D.** $\dfrac{15}{22}$.

**Lời giải**

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{12}^4=495$.

Số cách chọn ra 4 học sinh thuộc cả ba khối là: $C_5^2.C_4^1.C_3^1+C_5^1.C_4^2.C_3^1+C_5^1.C_4^1.C_3^2=270$

Số cách chọn ra 4 học sinh thuộc không quá hai khối là $C_{12}^4-270=225$

Xác suất để chọn ra 4 học sinh thuộc không quá hai khối là $P=\dfrac{225}{495}=\dfrac{5}{11}$.

**Câu 55.** Chọn ngẫu nhiên một số có 2 chữ số từ các số 00 đến 99. Xác suất để có một con số tận cùng là 0 là

**A.** $0,2$. **B.** $0,1$. **C.** $0,3$. **D.** $0,4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Không gian mẫu $\Omega=100$

Gọi $A$ là biến cố số được chọn có con số tận cùng là 0

$\Rightarrow n(A)=10\Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{\Omega}=\dfrac{10}{100}=0,1$

**Câu 56.** Gọi $S$ là tập các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được tạo từ tập $E=\{1;2;3;4;5\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập $S$. Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn.

**A.** $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $BD\,\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $A$ là biến cố chọn ngẫu nhiên một số từ tập $S$ sao cho số đó là số chẵn.

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega)=A_5^4$

Gọi số có 4 chữ số khác nhau là số chẵn có dạng $\overline{abcd}$

Chọn $d=\{2;4\}$ có 2 cách. Chọn ba số xếp vào ba vị trí $a,b,c$ có $A_4^3$

Vậy có $2.A_4^3=48$ số chẵn có 4 chữ số khác nhau $\Rightarrow n(A)=48\Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{48}{120}=\dfrac{2}{5}$.

**Câu 57.** Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;5;6\}$. Gọi $B$ là tập hợp các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau được lập từ $A$. Chọn thứ tự 2 số thuộc tập $B$. Tính xác suất để 2 số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 3.

**A.** $\dfrac{156}{360}$. **B.** $\dfrac{160}{359}$. **C.** $\dfrac{80}{359}$. **D.** $\dfrac{161}{360}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Chọn 4 số khác nhau và xếp có thứ tự từ tập hợp có 6 chữ số, có $A_6^4=360$ số.

Vì vậy số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=360.359=129240$.

Trong các số thuộc tập $B$ có $4!C_5^3=240$ số luôn có mặt chữ số 3. Và trong tập $B$ có 120 số không có mặt chữ số 3.

Chọn 2 số thuộc tập $B$ có thứ tự, trong đó có đúng một số có mặt chữ số 3 có $2!C_{240}^1.C_{120}^1=57600$ cách.

Do đó: $P=\dfrac{57600}{129240}=\dfrac{160}{359}$.

**Câu 58.** Một hộp đựng tám thẻ được ghi số từ 1 đến 8. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó ba thẻ, tính xác suất để tổng các số ghi trên ba thẻ đó bằng 11.

**A.** $\dfrac{5}{56}$. **B.** $\dfrac{4}{56}$. **C.** $\dfrac{3}{56}$. **D.** $\dfrac{1}{28}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số phần tử của không gian mẫu là số cách lấy 3 thẻ từ 8 thẻ, do đó ta có $n(\Omega)=C_8^3=56$.

Gọi $A$ là biến cố ba thẻ lấy ra có tổng bằng 11.

Ta có $11=1+2+8=1+3+7=1+4+6=2+3+6=2+4+5$.

Như vậy có 5 kết quả thuận lợi xảy ra biến cố $A$, tức là: $n(A)=5$.

Vậy xác suất cần để tổng các số ghi trên ba thẻ lấy ra bằng 11 là: $P(A)=\dfrac{5}{56}$.

**Câu 59.** Thầy Bình đặt lên bàn 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Bạn An chọn ngẫu nhiên 10 tấm thẻ. Tính xác suất để trong 10 tấm thẻ lấy ra có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm mang số chẵn trong đó chỉ có một tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

**A.** $\dfrac{99}{667}$. **B.** $\dfrac{8}{11}$. **C.** $\dfrac{3}{11}$. **D.** $\dfrac{99}{167}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{30}^{10}$.

Gọi $A$ là biến cố thỏa mãn bài toán.

- Lấy 5 tấm thẻ mang số lẻ: có $C_{15}^5$ cách.

- Lấy 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10: có $C_3^1$ cách.

- Lấy 4 tấm thẻ mang số chẵn không chia hết cho 10: có $C_{12}^4$.

Vậy $P(A)=\dfrac{C_{15}^5.C_3^1.C_{12}^4}{C_{30}^{10}}=\dfrac{99}{667}$.

**Câu 60.** Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên $A$ có bốn chữ số. Gọi $N$ là số thỏa mãn $3^N=A$. Xác suất để $N$ là số tự nhiên bằng:

**A.** $\dfrac{1}{4500}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2500}$. **D.** $\dfrac{1}{3000}$.

**Lời giải**

Ký hiệu $B$ là biến cố lấy được số tự nhiên $A$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có: $3^N = A \Leftrightarrow N = \log_3 A$.

Để $N$ là số tự nhiên thì $A = 3^m$ $(\mathrm{m} \in \mathbb{N})$.

Những số $A$ dạng có 4 chữ số gồm $3^7 = 2187$ và $3^8 = 6561$

$n(\Omega) = 9000;\ \ n(B) = 2$

Suy ra: $P(B) = \dfrac{1}{4500}$.

**Câu 61.** Có hai hộp, mỗi hộp chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 tấm thẻ. Tính xác suất để 2 thẻ rút ra đều ghi số chẵn.

**A.** $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{21}{25}$. **C.** $\dfrac{4}{25}$. **D.** $\dfrac{4}{9}$.

**Lời giải**

Thẻ thứ nhất có 5 cách rút, thẻ thứ hai có 5 cách rút do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 5 \cdot 5 = 25$.

Gọi $A$ là biến cố "Hai thẻ rút ra đều mang số chẵn".

Rút được thẻ thứ nhất mang số chẵn có 2 cách (rút được 2 hoặc 4), tương tự với thẻ thứ hai. Vậy $n(A) = 2.2 = 4$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{4}{25}$.

**Câu 62.** Một người gọi điện thoại, quên hai chữ số cuối và chỉ nhớ rằng hai chữ số đó phân biệt. Tính xác suất để người đó gọi một lần đúng số cần gọi.

**A.** $\dfrac{83}{90}$. **B.** $\dfrac{1}{90}$. **C.** $\dfrac{13}{90}$. **D.** $\dfrac{89}{90}$.

**Lời giải**

Gọi $A = \{0;1;2;...;9\}$.

Gọi $\overline{ab}$ là hai chữ số cuối của số điện thoại $(a \neq b)$.

Số phần tử không gian mẫu là: $n(\Omega) = A_{10}^2 = 90$.

Gọi $A$ là biến cố "Người đó gọi một lần đúng số cần gọi" $\Rightarrow n(A) = 1$.

Vậy xác suất để người đó gọi một lần đúng số cần gọi là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{90}$.

**Câu 63.** Trong một hòm phiếu có 9 lá phiếu ghi các số tự nhiên từ 1 đến 9 (mỗi lá ghi một số, không có hai lá phiếu nào được ghi cùng một số). Rút ngẫu nhiên cùng lúc hai lá phiếu. Tính xác suất để tổng hai số ghi trên hai lá phiếu rút được là một số lẻ lớn hơn hoặc bằng 15.

**A.** $\dfrac{5}{18}$. B. $\dfrac{1}{6}$. C. $\dfrac{1}{12}$. D. $\dfrac{1}{9}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_9^2 = 36$.

Gọi $A =$ "tổng hai số ghi trên hai lá phiếu rút được là một số lẻ lớn hơn hoặc bằng 15"

Ta có các cặp số có tổng là số lẻ và lớn hơn hoặc bằng 15.là $(6;9);(7;8);(9;7) \Rightarrow n(A) = 3$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là $P(A)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

**Câu 64.** Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số $1,2,3,4...,9$. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ lại với nhau. Tính xác suất để tích nhận được là số chẵn.

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{5}{18}$. **C.** $\frac{8}{9}$. **D.** $\frac{13}{18}$.

**Lời giải**

Có bốn thẻ chẵn $\{2;4;6;8\}$ và 5 thẻ lẻ $\{1;3;5;7;9\}$.

Rút ngẫu nhiên hai thẻ, số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_9^2=36$

Gọi $A$ là biến cố "tích nhận được là số chẵn", số phần tử của biến cố $A$ là $n(A)=C_4^2+C_4^1.C_5^1=26$

Xác suất của biến cố $A$ là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$.

**Câu 65.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số của tập hợp $A=\{1;2;3;4;5;6\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp $S$. Tính xác suất để số được chọn có 2 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ.

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{1}{40}$. **D.** $\frac{1}{10}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=A_6^4=360$.

Gọi A là biến cố: "Số được chọn có 2 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ".

Chọn hai chữ số chẵn: $C_3^2$ cách.

Chọn hai chữ số lẻ: $C_3^2$ cách.

Sắp xếp 4 chữ số được chọn thành một số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt: $4!$ cách.

Suy ra $n(A)=C_3^2.C_3^2.4!=216$.

Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{216}{360}=\frac{3}{5}$.

**Câu 66.** Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

**A.** $\frac{11}{21}$. **B.** $\frac{221}{441}$. **C.** $\frac{10}{21}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

* Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{21}^2=210$.

* Gọi biến cố A="Chọn được hai số có tổng là một số chẵn", trong 21 số nguyên dương đầu tiên có 11 số lẻ và 10 số chẵn, để hai số chọn được có tổng là một số chẵn điều kiện là cả hai số cùng chẵn hoặc cùng lẻ $\Rightarrow$ Số phần tử của biến cố A là: $n(A)=C_{10}^2+C_{11}^2=100$.

* Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{10}{21}$.

**Câu 67.** Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

**A.** $\dfrac{365}{729}$. **B.** $\dfrac{14}{27}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{27}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $A$ là tập tất cả các số nguyên dương đầu tiên.

$A=\{1;2;3;.....;26;27\}$

Chọn hai số khác nhau từ $A$ có: $n(\Omega)=C_{27}^2=351$.

Tổng hai số là số chẵn khi cả hai số đó đều chẵn hoặc đều lẻ,

Do đó:

Chọn hai số chẵn khác nhau từ tập $A$ có: $C_{13}^2=78$.

Chọn hai số lẻ khác nhau từ tập $A$ có: $C_{14}^2=91$.

Số cách chọn là: $78+91=169$.

Xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{169}{351}=\dfrac{13}{27}$.

**Câu 68.** Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 23 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

**A.** $\dfrac{265}{529}$. **B.** $\dfrac{12}{23}$. **C.** $\dfrac{11}{23}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Trong 23 số nguyên dương đầu tiên, có 12 số lẻ và 11 số chẵn.

Chọn 2 số khác nhau từ 23 số, có $C_{23}^2$ cách chọn nên số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{23}^2$.

Gọi $A$ là biến cố: "Chọn được hai số có tổng là một số chẵn".

Để hai số được chọn có tổng là một số chẵn thì hai số đó phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

+ Trường hợp 1: Chọn hai số chẵn khác nhau từ 11 số chẵn, có $C_{11}^2$ cách chọn.

+ Trường hợp 2: Chọn hai số lẻ khác nhau từ 12 số lẻ, có $C_{12}^2$ cách chọn.

Do đó $n(A)=C_{11}^2+C_{12}^2$.

Xác suất cần tính là $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_{11}^2+C_{12}^2}{C_{23}^2}=\dfrac{11}{23}$.

**Câu 69.** Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn là

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{13}{25}$. **C.** $\dfrac{12}{25}$. **D.** $\dfrac{313}{625}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số cách chọn hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên là $C_{25}^2=300\Rightarrow n(\Omega)=300$.

Gọi $A$ là biến cố "Tổng hai số được chọn là một số chẵn". Ta có hai trường hợp:

+ TH 1: Chọn 2 số chẵn từ 12 số chẵn có $C_{12}^2 = 66$ cách.

+ TH 2: Chọn 2 số lẻ từ 13 số lẻ có $C_{13}^2 = 78$ cách.

Do đó $n(A) = 66 + 78 = 144$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{144}{300} = \frac{12}{25}$.

**Câu 70.** Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;16]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng.

**A.** $\frac{683}{2048}$ **B.** $\frac{1457}{4096}$ **C.** $\frac{19}{56}$ **D.** $\frac{77}{512}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi 3 số cần viết ra là $a,b,c$. Ta có $n(\Omega) = 16^3$.

Phân đoạn $[1;16]$ ra thành 3 tập:

$X = \{3,6,9,12,15\}$ là những số chia hết cho 3 dư 0, có 5 số.

$Y = \{1,4,7,10,13,16\}$ là những số chia hết cho 3 dư 1, có 6 số.

$Z = \{2,5,8,11,14\}$ là những số chia hết cho 3 dư 2, có 5 số.

Ta thấy 3 số $a,b,c$ do A, B, C viết ra có tổng chia hết cho 3 ứng với 2 trường hợp sau:

TH1: cả 3 số $a,b,c$ cùng thuộc một tập, số cách chọn là $6^3 + 5^3 + 6^3 = 466$.

TH2: cả 3 số $a,b,c$ thuộc ba tập khác nhau, số cách chọn là $3!.5.5.6 = 900$.

Xác suất cần tìm $P(A) = \frac{466 + 900}{16^3} = \frac{683}{2048}$.

**Câu 71.** Ba bạn $A$, $B$, $C$ mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;17]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

**A.** $\frac{1637}{4913}$ **B.** $\frac{1079}{4913}$ **C.** $\frac{23}{68}$ **D.** $\frac{1728}{4913}$

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A**

Ta có $n(\Omega) = 17^3$.

Trong các số tự nhiên thuộc đoạn $[1;17]$ có 5 số chia hết cho 3 là $\{3;6;9;12;15\}$, có 6 số chia cho 3 dư 1 là $\{1;4;7;10;13;16\}$, có 6 số chia cho 3 dư 2 là $\{2;5;8;11;14;17\}$.

Để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 cần phải xảy ra các trường hợp sau:

TH1. Cả ba số viết ra đều chia hết cho 3. Trong trường hợp này có: $5^3$ cách viết.

TH2. Cả ba số viết ra đều chia cho 3 dư 1. Trong trường hợp này có: $6^3$ cách viết.

TH3. Cả ba số viết ra đều chia cho 3 dư 2. Trong trường hợp này có: $6^3$ cách viết.

TH4. Trong ba số được viết ra có 1 số chia hết cho 3, có một số chia cho 3 dư 1, có một số chia cho 3 dư 2. Trong trường hợp này có: 5.6.6.3! cách viết.

Vậy xác suất cần tìm là: $p(A) = \frac{5^3 + 6^3 + 6^3 + 5.6.6.3!}{17^3} = \frac{1637}{4913}$.

**Câu 72.** Ba bạn $A$, $B$, $C$ mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;19]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

**A.** $\frac{109}{323}$ **B.** $\frac{1027}{6859}$ **C.** $\frac{2539}{6859}$ **D.** $\frac{2287}{6859}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $n(\Omega)=19^3$.

Trong các số tự nhiên thuộc đoạn $[1;19]$ có 6 số chia hết cho 3 là $\{3;6;9;12;15;18\}$, có 7 số chia cho 3 dư 1 là $\{1;4;7;10;13;16;19\}$, có 6 số chia cho 3 dư 2 là $\{2;5;8;11;14;17\}$.

Để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 cần phải xảy ra các trường hợp sau:

TH1. Cả ba số viết ra đều chia hết cho 3. Trong trường hợp này có: $6^3$ cách viết.

TH2. Cả ba số viết ra đều chia cho 3 dư 1. Trong trường hợp này có: $7^3$ cách viết.

TH3. Cả ba số viết ra đều chia cho 3 dư 2. Trong trường hợp này có: $6^3$ cách viết.

TH4. Trong ba số được viết ra có 1 số chia hết cho 3, có một số chia cho 3 dư 1, có một số chia cho 3 dư 2. Trong trường hợp này có: $6.7.6.3!$ cách viết.

Vậy xác suất cần tìm là: $p(A)=\frac{6^3+7^3+6^3+6.7.6.3!}{19^3}=\frac{2287}{6859}$.

**Câu 73.** Ba bạn $A,B,C$ viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;14]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

**A.** $\frac{31}{91}$ **B.** $\frac{307}{1372}$ **C.** $\frac{207}{1372}$ **D.** $\frac{457}{1372}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=14^3$.

Vì trong 14 số tự nhiên thuộc đoạn $[1;14]$ có: 5 số chia cho 3 dư 1; 5 số chia cho 3 dư 2; 4 số chia hết cho 3.Để tổng 3 số chia hết cho 3 ta có các trường hợp sau:

TH1: Cả 3 chữ số đều chia hết cho 3 có: $4^3$ (cách)

TH2: Cả 3 số chia cho 3 dư 1 có: $5^3$ (cách)

TH3: Cả 3 số chia cho 3 dư 2 có: $5^3$ (cách)

TH4: Trong 3 số có một số chia hết cho 3; một số chia cho 3 dư 1; một số chia 3 dư 2 được ba người viết lên bảng nên có: $4.5.5.3!$ (cách)

Gọi biến cố E:" Tổng 3 số chia hết cho 3"

Ta có: $n(E)=4^3+5^3+5^3+4.5.5.3!=914$.

Vậy xác suất cần tính: $P(E)=\frac{914}{14^3}=\frac{457}{1372}$.

**Câu 74.** Có 100 tấm thẻ được đánh số từ 801 đến 900 (mỗi tấm thẻ được đánh một số khác nhau). Lấy ngẫu nhiên 3 tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để lấy được 3 tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ là số chia hết cho 3.

**A.** $\frac{817}{2450}$. **B.** $\frac{248}{3675}$. **C.** $\frac{2203}{7350}$. **D.** $\frac{2179}{7350}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số cách lấy ra 3 tấm thẻ trong 100 tấm thẻ là $C_{100}^3=161700 \Rightarrow n(\Omega)=161700$.

Trong 100 tấm thẻ từ 801 đến 900, số các tấm thẻ chia hết cho 3, chia 3 dư 1, chia 3 dư 2 lần lượt là 34 tấm, 33 tấm, 33 tấm.

Gọi A là biến cố "Lấy được ba tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3".

Trường hợp 1: Cả ba tấm thẻ lấy ra đều chia hết cho 3.

Số cách lấy là: $C_{34}^3 = 5984$ (cách).

Trường hợp 2: Cả ba tấm thẻ lấy ra đều chia 3 dư 1.

Số cách lấy là: $C_{33}^3 = 5456$ (cách).

Trường hợp 3: Cả ba tấm thẻ lấy ra đều chia 3 dư 2.

Số cách lấy là: $C_{33}^3 = 5456$ (cách).

Trường hợp 4: Ba tấm thẻ lấy ra có 1 tấm chia hết cho 3; 1 tấm chia 3 dư 1 và 1 tấm chia 3 dư 2.

Số cách lấy là: $34.33.33 = 37026$ (cách).

Vậy số các trường hợp thuận lợi của biến cố A là: $n(A) = 5984 + 5456 + 5456 + 37026 = 53922$ (cách).

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{53922}{161700} = \dfrac{817}{2450}$.

**Câu 75.** Cho tập hợp $A = \{1;2;3;4;5;6\}$. Gọi $B$ là tập tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau từ tập $A$. Chọn thứ tự 2 số thuộc tập $B$. Tính xác suất để trong 2 số vừa chọn có đúng một số có mặt chữ số 3.

**A.** $\dfrac{159}{360}$. **B.** $\dfrac{160}{359}$. **C.** $\dfrac{80}{359}$. **D.** $\dfrac{161}{360}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Có tất cả $A_6^4 = 360$ số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau từ tập $A$.

Tập hợp $B$ có 360 số.

Ta xét phép thử "chọn thứ tự 2 số thuộc tập $B$".

Khi đó $n(\Omega) = A_{360}^2$

Trong tập hợp $B$ ta thấy

*/ có tất cả $4.A_5^3 = 240$ số có mặt chữ số 3.

*/ có $A_5^4 = 120$ số không có mặt chữ số 3.

Gọi $A$ là biến cố "trong 2 số vừa chọn có đúng một số có mặt chữ số 3"

Khi đó $n(A) = C_{240}^1.C_{120}^1.2!$

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{C_{240}^1.C_{120}^1.2!}{A_{360}^2} = \dfrac{160}{359}$.

**Câu 76.** Cho tập $X = \{1;2;3;.....;8\}$. Lập từ $X$ số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để lập được số chia hết cho 1111 là

**A.** $\dfrac{A_8^2 A_6^2 A_4^2}{8!}$. **B.** $\dfrac{4!4!}{8!}$. **C.** $\dfrac{C_8^2 C_6^2 C_4^2}{8!}$. **D.** $\dfrac{384}{8!}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Không gian mẫu : $|\Omega| = 8!$

Gọi số cần lập có dạng $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ , $a_i \in X, a_i \neq a_j$ với $i \neq j$.

Nhận xét $X$ có 8 phần tử và tổng các phần tử là 36 nên $A$ chia hết cho 9, do $(9,11)=1$ nên $A$ chia hết cho 9999.

$A=\overline{a_1a_2a_3a_4}.10^4+\overline{a_5a_6a_7a_8}=\overline{a_1a_2a_3a_4}.(9999+1)+\overline{a_5a_6a_7a_8}$

$=\overline{a_1a_2a_3a_4}.9999+\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}$

Do $A$ chia hết cho 9999 nên $\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}$ chia hết cho 9999.

$a_i\in X$ nên $\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}<2.9999$, từ đó $\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}=9999$

Với mỗi cách chọn $a_i$ sẽ có duy nhất cách chọn $a_{i+4}$ sao cho $a_i+a_{i+4}=9$ với $i\in\{1,2,3,4\}$.

Chọn $a_1$ có 8 cách, chọn $a_2$ có 6 cách, chọn $a_3$ có 4 cách, chọn $a_4$ có 2 cách.

Vậy xác suất để lập được số chia hết cho 1111 là: $\frac{8.6.4.2}{8!}=\frac{384}{8!}$.

**Câu 77.** Cho tập hợp X gồm các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau có dạng $\overline{abcdef}$. Từ X lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số lấy ra là số lẻ và thỏa mãn $a<b<c<d<e<f$?

**A.** $\frac{33}{68040}$. **B.** $\frac{1}{2430}$. **C.** $\frac{31}{68040}$. **D.** $\frac{29}{68040}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

+) Chọn a có 9 cách.

+) Chọn các chữ số còn lại có $A_9^5$ cách.

Suy ra có $9.A_9^5=136080\Rightarrow n(X)=136080\Rightarrow n(\Omega)=136080$.

Gọi A là biến cố số lấy ra từ X là số lẻ và thỏa mãn $a<b<c<d<e<f$.

Ta thấy $f\in\{7;9\}$.

*Trường hợp 1:* $f=7$.

Xét dãy gồm 6 ký tự $abcde7$ thỏa mãn $a<b<c<d<e<7$ (*).

Chọn 5 chữ số từ X và nhỏ hơn 7 có $C_7^5$. Khi đó mỗi cách chọn có duy nhất 1 cách xếp thỏa (*).

Suy ra có $C_7^5$ dãy thỏa mãn (*).

Xét dãy gồm 6 ký tự $0bcde7$ thỏa mãn $0<b<c<d<e<7$ (**).

Chọn 4 chữ số từ X lớn hơn 0 và nhỏ hơn 7 có $C_6^4$. Khi đó mỗi cách chọn có duy nhất 1 cách xếp thỏa (**).

Suy ra có $C_6^4$ dãy thỏa mãn (**).

Do đó có $C_7^5-C_6^4=6$ dãy gồm 6 ký tự $abcde7$ thỏa mãn $a<b<c<d<e<7;\ a\neq 0$.

Hay có 6 số.

*Trường hợp 2:* $f=9$.

Xét dãy gồm 6 ký tự $abcde9$ thỏa mãn $a<b<c<d<e<9$ (1).

Chọn 5 chữ số từ X và nhỏ hơn 9 có $C_9^5$. Khi đó mỗi cách chọn có duy nhất 1 cách xếp thỏa (1).

Suy ra có $C_9^5$ dãy thỏa mãn (1).

Xét dãy gồm 6 ký tự $0bcde9$ thỏa mãn $0<b<c<d<e<9$ (2).

Chọn 4 chữ số từ X lớn hơn 0 và nhỏ hơn 9 có $C_8^4$. Khi đó mỗi cách chọn có duy nhất 1 cách xếp thỏa (**).

Suy ra có $C_8^4$ dãy thỏa mãn (2).

Do đó có $C_9^5-C_8^4=56$ dãy gồm 6 ký tự $abcde9$ thỏa mãn $a<b<c<d<e<9;\ a\neq 0$.

Hay có 56 số.

Suy ra $n(A)=6+56=62$.

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{62}{136080}=\dfrac{31}{68040}$.

**Câu 78.** Gọi $A$ là tập hợp các số tự nhiên có $5$ chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc tập $A$. Tính xác suất để chọn được một số thuộc $A$ và số đó chia hết cho $5$.

**A.** $P=\dfrac{11}{27}$. **B.** $P=\dfrac{53}{243}$. **C.** $P=\dfrac{2}{9}$. **D.** $P=\dfrac{17}{81}$.

**Lời giải**

$A$ là tập hợp các số tự nhiên có $5$ chữ số đôi một khác nhau $\Rightarrow n(A)=9.A_9^4=27216$

Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập $A$ có $27216$ cách chọn $\Rightarrow n(\Omega)=27216$

Gọi $B$ là biến cố "Chọn được một số thuộc $A$ và số đó chia hết cho $5$"

Gọi số chia hết cho $5$ thuộc tập $A$ là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$

*Trường hợp 1*: Chữ số tận cùng là $0$

Có $A_9^4$ cách chọn $4$ chữ số còn lại.

*Trường hợp 2*: Chữ số tận cùng là $5$

Chọn chữ số $a_1$ có $8$ cách

Chọn $3$ chữ số còn lại có $A_8^3$

$\Rightarrow n(B)=A_9^4+8.A_8^3=5712$.

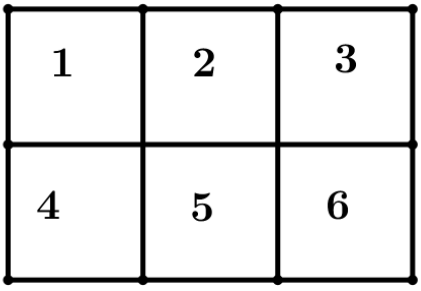
Vậy $P=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{17}{81}$.

**Câu 79.** Có hai dãy ghế đối diện nhau,mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh,gồm 3 nam và 3 nữ,ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng.

**A.** $\dfrac{1}{10}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{20}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=6!$

Gọi $A$ là biến cố xếp $3$ học sinh nam và $3$ học sinh nữ vào hai dãy ghế sao cho nam nữ ngồi đối diện nhau.

Xếp một học sinh vào ghế số $1$ có $6$ cách

Xếp một học sinh vào ghế số $4$ có $3$ cách

Xếp một học sinh vào ghế số $2$ có $4$ cách

Xếp một học sinh vào ghế số $5$ có $2$ cách

Xếp một học sinh vào ghế số $3$ có $2$ cách

Xếp một học sinh vào ghế số 6 có 1 cách

Vậy số phần tử biến cố $A$ là $n(A)=6.3.4.2.2.1=288$

Xác suất cần tính là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{288}{6!}=\dfrac{2}{5}$. Chọn B

**Câu 80.** Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

**A.** $\dfrac{11}{630}$ **B.** $\dfrac{1}{126}$ **C.** $\dfrac{1}{105}$ **D.** $\dfrac{1}{42}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$n(\Omega)=10!$

Gọi $H$ là biến cố "không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau"

+ Đầu tiên xếp 5 học sinh lớp 12C thì có $5!$ cách xếp

+ Giữa 5 học sinh lớp C và ở hai đầu có 6 khoảng trống

TH1: Xếp 5 học sinh của hai lớp A và B vào 4 khoảng trống ở giữa và 1 khoảng trống ở 1 đầu thì có $2.5!$ cách xếp

TH2: Xếp 5 học sinh vào 4 khoảng trống giữa 5 học sinh lớp C sao cho có đúng một khoảng trống có 2 học sinh thuộc 2 lớp A, B thì có $2!.2.3.4!$ cách xếp.

Suy ra, $n(H)=5!(2.5!+2!.2.3.4!)\Rightarrow p(H)=\dfrac{11}{630}$.

**Câu 81.** Hai bạn lớp $A$ và hai bạn lớp $B$ được xếp vào 4 ghế sắp thành hàng ngang. Xác suất sao cho các bạn cùng lớp không ngồi cạnh nhau bằng

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Có $4!$ cách xếp bất kỳ 4 bạn thành hàng ngang.

Có $2.2!2!$ cách xếp 4 bạn sao cho các bạn cùng lớp không ngồi cạnh nhau.

Xác suất cần tìm là $P=\dfrac{2.2!2!}{4!}=\dfrac{1}{3}$.

**Câu 82.** Có 13 tấm thẻ phân biệt trong đó có một tấm thẻ ghi chữ ĐỖ, một tấm thẻ ghi chữ ĐẠI, một tấm thẻ ghi chữ HỌC và mười tấm thẻ đánh số từ 0 đến 9. Lấy ngẫu nhiên từ đó ra 7 tấm thẻ. Tính xác suất để rút được 7 tấm thẻ theo thứ tự: ĐỖ, ĐẠI, HỌC, $2,0,1,9$.

**A.** $\dfrac{1}{1260}$. **B.** $\dfrac{1715}{1716}$. **C.** $\dfrac{1}{A_{13}^7}$. **D.** $\dfrac{1}{1716}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Lấy ngẫu nhiên 7 tấm thẻ từ 13 tấm thẻ $\Rightarrow n(\Omega)=C_{13}^7=1716$

Gọi biến cố A "rút được 7 tấm thẻ theo thứ tự: ĐỖ, ĐẠI, HỌC, $2,0,1,9$."

Để rút được 7 tấm thẻ theo thứ tự: ĐỖ, ĐẠI, HỌC, $2,0,1,9$ ta rút 7 tấm thẻ từ 7 tấm thẻ ĐỖ, ĐẠI, HỌC, 2,0,1,9 nên có 1 cách.

Do đó $P(A)=\dfrac{1}{1716}$

**Câu 83.** Xếp ngẫu nhiên 3 người đàn ông, hai người đàn bà và một đứa bé ngồi và 6 cái ghế xếp thành hàng ngang. Xác suất sao cho đứa bé ngồi giữa và cạnh hai người đàn bà này là:

**A.** $\frac{1}{30}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{15}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số phần tử của không gian mẫu: $|\Omega| = P_6 = 6! = 720$

Gọi $\alpha$ là một nhóm gồm 3 người trong đó đứa bé được xếp ở giữa 2 người đàn bà: Có 2 phần tử $\alpha$

Có 4 phần tử gồm $\alpha$ và 3 người đàn ông. Xếp 4 người vào 4 vị trí, số cách xếp là:

$|\Omega_A| = 4!.2 = 48.$

Xác suất xếp thỏa yêu cầu bài: $P = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}.$

**Câu 84.** Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có bốn ghế. Xếp ngẫu nhiên 8, gồm 4 nam và 4 nữ, ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

**A.** $\frac{8}{35}$. **B.** $\frac{1}{70}$. **C.** $\frac{1}{35}$. **D.** $\frac{1}{840}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 8! = 40320$.

Gọi $A$ là biến cố mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ.

Ta có:

Xếp 4 học sinh nữ vào cùng 1 dãy ghế có 4! cách.

Xếp 4 học sinh nam vào cùng 1 dãy ghế có 4! cách.

Ở các cặp ghế đối diện nhau hai bạn nam và nữ có thể đổi chỗ cho nhau nên có $2^4$ cách.

Suy ra $|A| = 4!.4!.2^4 = 9216$.

Vậy $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9216}{40320} = \frac{8}{35}$.

**Câu 85.** Kỳ thi có 10 học sinh, xếp ngồi hai dãy ghế trên và dưới, mỗi dãy có 5 ghế. Thầy giáo có 2 loại đề, gồm 5 đề chẵn và 5 đề lẻ. Tính xác suất để mỗi học sinh đều nhận 1 đề và 2 bạn ngồi kề trên, dưới là khác loại đề.

**A.** $\frac{8}{63}$. **B.** $\frac{1}{126}$. **C.** $\frac{1}{252}$. **D.** $\frac{1}{15120}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 10!$.

Gọi $A$ là biến cố mỗi học sinh đều nhận 1 đề và 2 bạn ngồi kề trên, dưới là khác loại đề.

Ta có:

Xếp 5 đề lẻ vào cùng 1 dãy ghế có 5! cách.

Xếp 5 đề chẵn vào cùng 1 dãy ghế có 5! cách.

Ở các cặp đề trên, dưới có thể đổi đề cho nhau nên có $2^5$ cách.

Suy ra $|A|=5!.5!.2^5$.

Vậy $P(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}=\dfrac{5!.5!.2^5}{10!}=\dfrac{8}{63}$.

**Câu 86.** Có 5 học sinh lớp $A$, 5 học sinh lớp $B$ được xếp ngẫu nhiên vào hai dãy ghế đối diện nhau mỗi dãy 5 ghế (xếp mỗi học sinh một ghế). Tính xác suất để 2 học sinh bất kì ngồi đối diện nhau khác lớp

**A.** $\dfrac{(5!)^2}{10!}$. **B.** $\dfrac{5!}{10!}$. **C.** $\dfrac{2(5!)^2}{10!}$. **D.** $\dfrac{2^5.(5!)^2}{10!}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xếp 10 học sinh vào 10 ghế có 10! cách

Xếp 2 học sinh bất kì ngồi đối diện nhau khác lớp ta thực hiện như sau.

**Cách 1:** Ghép 5 cặp gồm 1 học sinh lớp $A$ và 1 học sinh lớp $B$ có 5! Cách, xếp 5 cặp này vào 5 cặp ghế đối diện, mỗi cặp có 2 hoán vị nên có $2^5.5!$

Do đó xếp 2 học sinh bất kì ngồi đối diện nhau khác lớp có $2^5.5!.5!$ cách

**Câu 87.** Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 được xếp ngẫu nhiên vào 9 ghế thành một dãy. Tính xác suất để xếp được 3 học sinh lớp 12 xen kẽ 6 học sinh lớp 11.

**A.** $\dfrac{1}{84}$. **B.** $\dfrac{15}{32}$. **C.** $\dfrac{5}{12}$. **D.** $\dfrac{5}{72}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xếp ngẫu nhiên 9 học sinh thành một dãy nên số cách xếp là 9!. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=9!$.

Gọi $A$ là biến cố xếp 9 học sinh sao cho 3 học sinh lớp 12 xen kẽ 6 học sinh lớp 11.

Xếp 6 học sinh lớp 11 thành một hàng ngang có 6! cách xếp.

Với mỗi cách xếp 6 học sinh lớp 11 nói trên: cứ giữa mỗi hai học sinh có một khoảng trống, tính cả khoảng trống hai đầu hàng ta có được 7 khoảng trống. Chọn 3 khoảng trống trong số 7 khoảng trống để mỗi khoảng trống xếp một học sinh lớp 12 có $A_7^3$ cách xếp.

Vậy có $n(A)=6!.A_7^3$ cách xếp.

Xác suất là $P(A)=\dfrac{6!.A_7^3}{9!}=\dfrac{5}{12}$.

**Câu 88.** Gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Xác suất để cả hai lần xuất hiện mặt sáu chấm là

**A.** $\dfrac{1}{36}$. **B.** $\dfrac{11}{36}$. **C.** $\dfrac{6}{36}$. **D.** $\dfrac{8}{36}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

* Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_6^1.C_6^1=36$.

* Gọi $A$ = "Cả hai lần xuất hiện mặt sáu chấm". Số phần tử của biến cố $A$ là $n(A)=1$.

* Xác suất của biến cố $A$ là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{36}$.

**Câu 89.** Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Tính xác suất để tích số chấm xuất hiện trên hai mặt là số lẻ.

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Không gian mẫu của phép thử $\Omega=\{(i,j)|1\le i,j\le 6\}$, ở đó $(i,j)$ là kết quả "Lần đầu xuất hiện mặt $i$ chấm, lần sau xuất hiện mặt $j$ chấm".

Ta có $n(\Omega)=36$.

Gọi $A$: " Tích số chấm xuất hiện trên hai mặt là số lẻ".

Để tích các số trong hai lần gieo là lẻ thì cả 2 lần gieo đều xuất hiện số chấm là lẻ, khi đó có: $3.3=9$ kết quả.

$\Rightarrow n(A)=9$.

Vậy xác suất của biến cố $A: P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

**Câu 90.** Gieo con xúc xắc được chế tạo cân đối đồng chất hai lần. Gọi $a$ là số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ nhất, $b$ là số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ hai. Xác suất để phương trình $x^2+ax+b=0$ có nghiệm bằng

**A.** $\frac{17}{36}$. **B.** $\frac{19}{36}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn** B

Có $a,b\in\{1;2;3;4;5;6\}$. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=6^2=36$.

$x^2+ax+b=0$ có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta\ge 0\Leftrightarrow a^2-4b\ge 0\Leftrightarrow a^2\ge 4b\ (1)$, có $a,b\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Suy ra $(1)$ có các nghiệm $(a;b)$ là: $(2;1),(3;1),(3;2),\ (4;1),(4;2)(4;3),(4;4),$

$(5;1),(5;2),\ (5,3),(5;4),(5;5),\ (5;6)\ (6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6)$

Suy ra số phần tử của biến cố $|\Omega_A|=19$

Vậy xác suất cần tìm là: $P=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{19}{36}$.

**Câu 91.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất xảy ra của biến cố "tích hai số nhận được sau hai lần gieo là một số chẵn".

**A.** $0,25$. **B.** $0,75$. **C.** $0,5$. **D.** $0,85$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gieo một con súc sắc hai lần được $6^2=36$ kết quả.

Để tích hai số nhận được sau hai lần gieo là lẻ thì cả hai lần gieo đều được mặt lẻ.

Do đó để tích hai số nhận được sau hai lần gieo là một số lẻ thì có $3^2=9$ kết quả.

Để tích hai số nhận được sau hai lần gieo là một số chẵn thì có $36-9=27$ kết quả.

Xác suất cần tìm là: $\frac{27}{36}=\frac{3}{4}=0,75$.

**Câu 92.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất, xác suất để mặt có số chấm chẵn xuất hiện là

**A.** $1$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Lời giải**

Ta có: Không gian mẫu $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ suy ra $n(\Omega)=6$

Gọi biến cố $A$: "Con súc sắc có số chấm chẵn xuất hiện" hay $A=\{2;4;6\}$ suy ra $n(A)=3$

Từ đó suy ra $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

Vậy xác suất để mặt có số chấm chẵn xuất hiện là $\dfrac{1}{2}$.

**Câu 93.** Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc đó không vượt quá $5$ bằng

**A.** $\dfrac{5}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{9}$. **D.** $\dfrac{5}{18}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=6.6=36$.

Gọi $A$ là biến cố: ''Tổng số chấm xuất hiện trên mặt hai con súc sắc không vượt quá $5$".

Các phần tử của $A$ là: $(1;1)$, $(1;2)$, $(1;3)$, $(1;4)$, $(2;1)$, $(2;2)$, $(2;3)$, $(3;1)$, $(3;2)$, $(4;1)$.

Như vậy số phần tử của $A$ là: $n(A)=10$.

Vậy xác suất cần tìm là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{5}{18}$.

**Câu 94.** Kết quả $(b;c)$ của việc gieo một con súc sắc cân đối hai lần liên tiếp, trong đó $b$ là số chấm xuất hiện của lần gieo thứ nhất, $c$ là số chấm xuất hiện lần gieo thứ hai được thay vào phương trình bậc hai $x^2+bx+c=0$. Tính xác suất để phương trình bậc hai đó vô nghiệm?

**A.** $\dfrac{7}{12}$. **B.** $\dfrac{23}{36}$. **C.** $\dfrac{17}{36}$. **D.** $\dfrac{5}{36}$.

**Lời giải**

Để phương trình $x^2+bx+c=0$ vô nghiệm thì: $\Delta=b^2-4c<0$.

Gọi $\Omega$ là không gian mẫu của phép thử gieo hai lần liên tiếp một con súc sắc cân đối.

$\Rightarrow |\Omega|=6.6=36$

Gọi $A$ là biến cố của phép thử để kết quả $(b;c)$ trong đó $b$ là số chấm xuất hiện của lần gieo thứ nhất, $c$ là số chấm xuất hiện lần gieo thứ hai thỏa mãn $b^2-4c<0$

Trường hợp 1: $b=1\Rightarrow c=\{1;2;3;4;5;6\}$

Trường hợp 2: $b=2\Rightarrow c=\{2;3;4;5;6\}$

Trường hợp 3: $b=3\Rightarrow c=\{3;4;5;6\}$

Trường hợp 4: $b=4\Rightarrow c=\{5;6\}$

$\Rightarrow |\Omega_A|=17$

Vậy xác suất để phương trình bậc hai vô nghiệm là $P_A=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{17}{36}$.

**Câu 95.** Cho hai đường thẳng song song $d_1$, $d_2$. Trên $d_1$ có 6 điểm phân biệt được tô màu đỏ, trên $d_2$ có 4 điểm phân biệt được tô màu xanh. Xét tất cả các tam giác được tạo thành khi nối các điểm đó với nhau. Chọn ngẫu nhiên một tam giác, khi đó xác suất để thu được tam giác có hai đỉnh màu đỏ là.

**A.** $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{2}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Mỗi tam giác được tạo thành khi lấy 2 điểm trên $d_1$ và 1 điểm trên $d_2$, hoặc 2 điểm trên $d_2$ và 1 điểm trên $d_1$. Số tam giác được tạo thành là: $C_6^2.4+C_4^2.6=96$.

Số tam giác có hai đỉnh màu đỏ là $C_6^2.4=60$. Vậy xác suất để thu được tam giác có hai đỉnh màu đỏ là: $\frac{60}{96}=\frac{5}{8}$.

**Câu 96.** Cho năm đoạn thẳng có độ dài: $1\,cm$, $3\,cm$, $5\,cm$, $7\,cm$, $9\,cm$. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng đó. Xác suất để ba đoạn thẳng lấy ra là ba cạnh của một tam giác là

**A.** $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{3}{10}$. **D.** $\frac{7}{10}$.

**Lời giải:**

**Chọn C**

* Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng đã cho có $C_5^3=10$ cách.

Suy ra $n(\Omega)=10$.

* Gọi $A$ là biến cố "lấy được ba đoạn thẳng là ba cạnh của một tam giác".

Các trường hợp ba đoạn thẳng là ba cạnh của một tam giác là:

$\{3;5;7\},\{3;7;9\},\{5;7;9\}$ (thỏa mãn: hiệu hai cạnh bé hơn cạnh còn lại, tổng hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại).

Do đó $n(A)=3$. Vậy sác xuất cần tìm là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3}{10}$.

**Câu 97.** Cho đa giác đều 20 đỉnh nội tiếp trong đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác. Xác suất để 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của một hình chữ nhật bằng

**A.** $\frac{7}{216}$. **B.** $\frac{2}{969}$. **C.** $\frac{3}{323}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét phép thử: "Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác đều 20 đỉnh nội tiếp trong đường tròn tâm $O$"
$\Rightarrow n(\Omega)=C_{20}^4=4845$.

Gọi A là biến cố:" 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của một hình chữ nhật"

Đa giác có 20 đỉnh sẽ có 10 đường chéo đi qua tâm mà cứ 2 đường chéo qua tâm sẽ có 1 hình chữ nhật nên số HCN là: $n(A)=C_{10}^2=45$.

$P(A)=\frac{45}{4845}=\frac{3}{323}$

**Câu 98.** Cho đa giác đều có 14 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh trong số 14 đỉnh của đa giác. Tìm xác suất để 3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác vuông.

**A.** $\frac{3}{13}$. **B.** $\frac{5}{13}$. **C.** $\frac{4}{13}$. **D.** $\frac{2}{13}$.

**Lời giải**

Số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = C_{14}^3$.

Giả sử tam giác cần lập là $ABC$ vuông tại $A$.

Chọn đỉnh $A$ của tam giác có 14 cách.

Để tam giác vuông tại $A$ thì cung $BC$ có số đo là $\pi$, hay $BC$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác, do đó có 6 cách chọn $BC$.

Gọi $E$ là biến cố "3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác vuông"

Số phần tử của $E$ là $14.6 = 84$.

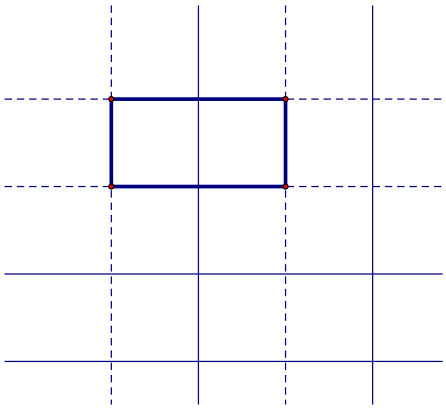
Xác suất cần tìm là $P(E) = \frac{84}{C_{14}^3} = \frac{3}{13}$.

**Câu 99.** Một bảng vuông gồm $100 \times 100$ ô vuông đơn vị. Chọn ngẫu nhiên một ô hình chữ nhật. Tính xác suất để ô được chọn là hình vuông *(trong kết quả lấy 4 chữ số ở phần thập phân)*.

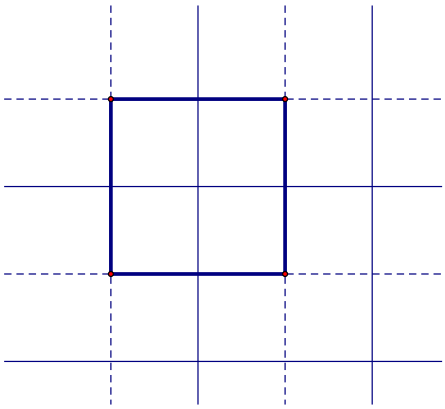
**A.** $0,0134$. **B.** $0,0133$. **C.** $0,0136$. **D.** $0,0132$.

**Lời giải**

**Chọn B**



chọn 2 dọc, 2 ngang cho 1 HCN



chọn 2 dọc, 2 ngang có cùng bề rộng cho 1 HV

Để có một ô hình chữ nhật ta cần chọn 2 đường dọc trong tổng số 101 đường dọc, và hai đường ngang trong tổng số 101 đường ngang. Vậy có tất cả: $C_{101}^2 \times C_{101}^2 = 25502500$ ô hình chữ nhật.

Ta gọi phần mặt phẳng nằm giữa hai đường dọc hoặc hai đường ngang là một dải.

Một hình vuông bất kì chính là giao của hai dải có cùng độ rộng (một dải dọc, một dải ngang)

Số dải có độ rộng $k (k \in Z, 1 \le k \le 100)$ là: $101 - k$

Vậy có tất cả: $\sum_{k=1}^{100} (101-k)^2 = 100^2 + 99^2 + ... + 1^2 = \frac{100(100+1)(2.100+1)}{6} = 338350$ hình vuông.

Xác suất cần tìm là: $\frac{338350}{25502500} = 0,013267... \approx 0,0133$

Chọn đáp án **B.**

**Câu 100.** Cho một đa giác $(H)$ có $60$ đỉnh nội tiếp một đường tròn $(O)$. Người ta lập một tứ giác tùy ý có bốn đỉnh là các đỉnh của $(H)$. Xác suất để lập được một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của $(H)$ gần với số nào nhất trong các số sau?

**A.** $85,40\%$. **B.** $13,45\%$. **C.** $40,35\%$. **D.** $80,70\%$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_{60}^{4}$.

Gọi $E$ là biến cố "lập được một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của $(H)$".

Để chọn ra một tứ giác thỏa mãn đề bài ta làm như sau:

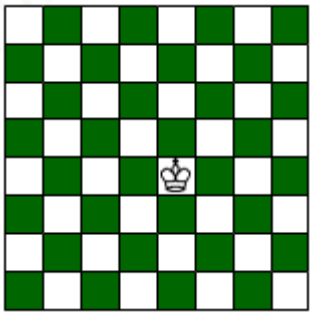
Bước 1: Chọn đỉnh đầu tiên của tứ giác, có $60$ cách.

Bước 2: Chọn $3$ đỉnh còn lại sao cho hai đỉnh bất kỳ của tứ giác cách nhau ít nhất 1 đỉnh. Điều này tương đương với việc ta phải chia $m=60$ chiếc kẹo cho $n=4$ đứa trẻ sao cho mỗi đứa trẻ có ít nhất $k=2$ cái, có $C_{m-n(k-1)-1}^{n-1}=C_{55}^{3}$ cách, nhưng làm như thế mỗi tứ giác lặp lại 4 lần.

$\Rightarrow$ Số phần tử của biến cố $E$ là: $n(E)=\dfrac{60.C_{55}^{3}}{4}$.

Xác suất của biến cố $E$ là: $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(\Omega)}=\dfrac{60.C_{55}^{3}}{4.C_{60}^{4}}\approx 80,7\%$.

**Câu 101.** Một quân vua được đặt trên một ô giữa bàn cờ vua. Mỗi bước di chuyển, quân vua được chuyển sang một ô khác chung cạnh hoặc chung đỉnh với ô đang đứng (xem hình minh họa). Bạn An di chuyển quân vua ngẫu nhiên $3$ bước. Tính xác suất sau $3$ bước quân vua trở về ô xuất phát.



**A.** $\dfrac{1}{16}$. **B.** $\dfrac{1}{32}$. **C.** $\dfrac{3}{32}$. **D.** $\dfrac{3}{64}$.

**Lời giải**

Tại mọi ô đang đứng, ông vua có $8$ khả năng lựa chọn để bước sang ô bên cạnh.

Do đó không gian mẫu $n(\Omega)=8^3$.

Gọi $A$ là biến cố "sau 3 bước quân vua trở về ô xuất phát". Sau ba bước quân vua muốn quay lại ô ban đầu khi ông vua đi theo đường khép kín tam giác. Chia hai trường hợp:

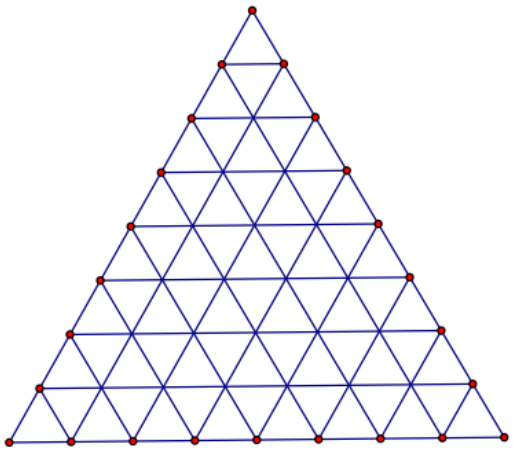
+ Từ ô ban đầu đi đến ô đen, đến đây có $4$ cách để đi bước hai rồi về lại vị trí ban đầu.

+ Từ ô ban đầu đi đến ô trắng, đến đây có $2$ cách để đi bước hai rồi về lại vị trí ban đầu.

Do số phần tử của biến cố A là $n(A)=4.4+2.4=24$.

Vậy xác suất $P(A)=\dfrac{24}{8^3}=\dfrac{3}{64}$.

**Câu 102.** Cho tam giác đều $H$ có cạnh bằng $8$. Chia tam giác này đều thành $64$ tam giác đều có cạnh bằng $1$ bởi các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác đều đã cho. Gọi $S$ là tập hợp các đỉnh của $64$ tam giác đều có cạnh bằng $1$. Chọn Ngẫu nhiên $4$ đỉnh của tập $S$. Tính xác suất để $4$ đỉnh chọn được là bốn đỉnh của một hình bình hành nằm trong miền trong tam giác đều $H$.

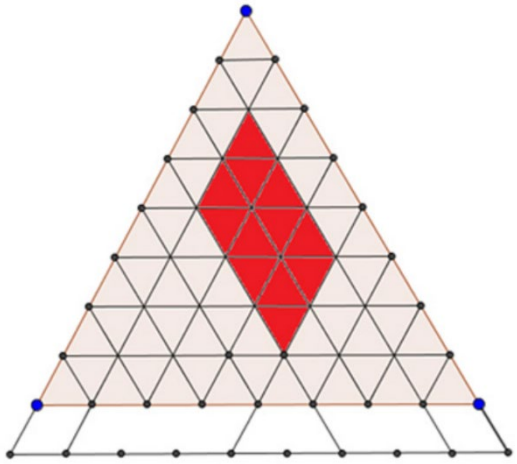


**A.** $\frac{2}{473}$. **B.** $\frac{6}{935}$. **C.** $\frac{2}{1419}$. **D.** $\frac{2}{935}$.

**Lời giải**

**Cách 1:**

Ta thấy có $3$ loại hình bình hành dựa vào cách chọn phương của hai cạnh của hình bình hành. Số hình bình hành của mỗi loại là bằng nhau nên chỉ cần tính một loại rồi nhân với $3$.



Dựng thêm một đường thẳng song song với cạnh đáy và cách cạnh đáy một khoảng bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song kề nhau, tạo thành một tam giác đều mở rộng như hình vẽ. Ta chia cạnh mới thành $9$ phần bằng nhau bởi $8$, cộng thêm $2$ đầu mút nữa thành $10$ điểm. Các điểm được đánh số từ trái sang phải từ $1$ đến $10$.

Khi đó, với $1$ hình bình hành có hai cạnh song song với hai cạnh bên tương ứng với bốn số $1\le a<b<c<d\le 10$ theo quy tắc sau: Nối dài các cạnh của hình bình hành, cắt các cạnh mới tại $4$ điểm có số thứ tự là $a$, $b$, $c$, $d$. Ví dụ với hình bình hành màu đỏ trên ta có bộ $(2,5,7,9)$.

Ngược lại nếu có một bộ số $1\le a<b<c<d\le 10$ ta sẽ kẻ các đường thẳng từ điểm $a$, $b$ song song với cạnh bên trái và từ $c$, $d$ song song với cạnh bên phải giao nhau ra một hình bình hành.

Vậy số hình bình hành loại này là số cách lấy ra bốn số phân biệt $(a;b;c;d)$ từ $10$ số tự nhiên $\{1,2,3,...,10\}$ và ta được $C_{10}^4=210$.

Vậy kết quả là $3.C_{10}^4=630$ hình bình hành.

Ta thấy có $1+2+3+...+9=45$ giao điểm giữa các đường thẳng nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{45}^4$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A)=\frac{3C_{10}^4}{C_{45}^4}=\frac{2}{473}$.

**Cách 2:** Để chọn được một hình bình hành mà 4 đỉnh chọn được là bốn đỉnh của một hình bình hành nằm trong miền trong tam giác đều $H$ ta làm như sau:

Chọn 2 trong 7 điểm trên một cạnh ( trừ hai điểm đầu mút của cạnh), cùng với hai điểm trong 5 điểm nằm tương ứng trên một cạnh trong hai cạnh còn lại của tam giác ( trừ mỗi đầu cạnh đi 2 điểm). Qua 4 điểm này có 4 đường thẳng tương ứng của đầu bài sẽ cắt nhau tạo thành một hình bình hành thỏa mãn bài toán.

Vì vài trò các cạnh như nhau nên số hình bình hành thu được là: $C_7^2.C_5^2.3=630$ (hình).

Ta thấy có $1+2+3+...+9=45$ giao điểm giữa các đường thẳng nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{45}^4$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A)=\dfrac{3C_{10}^4}{C_{45}^4}=\dfrac{2}{473}$.

**Câu 103.** Một đề trắc nghiệm gồm 20 câu, mỗi câu có 4 đáp án và chỉ có một đáp án đúng. Bạn Anh làm đúng 12 câu, còn 8 câu bạn Anh đánh hú họa vào đáp án mà Anh cho là đúng. Mỗi câu đúng được $0,5$ điểm. Tính xác suất để Anh được 9 điểm.

**A.** $\dfrac{9}{20}$. **B.** $\dfrac{9}{10}$. **C.** $\dfrac{63}{16384}$. **D.** $\dfrac{9}{65536}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Bạn Anh đã làm đúng 12 câu nên đã có 6 điểm. Để Anh được 9 điểm thì bạn cần làm đúng 6 câu trong 8 câu còn lại.

Số phần tử của không gian mẫu là $4^8$.

Chọn 6 câu đúng trong 8 câu còn lại có $C_8^6$ cách chọn.

Hai câu còn lại chọn đáp án sai có $3^2$ cách.

Vậy xác suất để được 9 điểm là $\dfrac{3^2.C_8^6}{4^8}=\dfrac{63}{16384}$.

**Câu 104.** Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có bốn phương án trả lời trong đó chỉ có một phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được $0,2$ điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án ở mỗi câu. Tính xác suất để thí sinh đó được 6 điểm.

**A.** $0,25^{30}.0,75^{20}$. **B.** $0,25^{20}.0,75^{30}$. **C.** $0,25^{30}.0,75^{20}.C_{50}^{20}$. **D.** $1-0,25^{20}.0,75^{30}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Không gian mẫu của phép thử trên có số phần tử là $|\Omega|=4^{50}$.

Gọi $A$ là biến cố: " Thí sinh đó được 6 điểm"

Tìm $|\Omega_A|$**:** Để được 6 điểm, thí sinh đó phải làm đúng 30 câu và làm sai 20 câu.

**Công đoạn 1:** Chọn 30 câu từ 50 câu để làm câu đúng. Có $C_{50}^{30}$ cách.

**Công đoạn 2**: Chọn phương án đúng của mỗi câu từ 30 câu đã chọn. Có $1^{30}$ cách.

**Công đoạn 3**: Chọn một phương án sai trong ba phương án sai của mỗi câu từ 20 còn lại. Có $3^{20}$ cách.

Theo quy tắc nhân, số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $|\Omega_A|=C_{50}^{30}.1^{30}.3^{20}$.

Vậy xác suất để học sinh đó được 6 điểm

là: $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{C_{50}^{30}.1^{30}.3^{20}}{4^{50}}=C_{50}^{30}.0,25^{30}.0,75^{20}=C_{50}^{20}.0,25^{30}.0,75^{20}$.

**Câu 105.** Một bộ đề thi Olympic Toán lớp 11 của Trường THPT Kim Liên mà mỗi đề gồm 5 câu được chọn từ 15 câu mức dễ, 10 câu mức trung bình và 5 câu mức khó. Một đề thi được gọi là "Tốt" nếu trong đề thi phải có cả mức dễ, mức trung bình và khó, đồng thời số câu mức khó không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt".

**A.** $\dfrac{1000}{5481}$. **B.** $\dfrac{3125}{23751}$. **C.** $\dfrac{1}{150}$. **D.** $\dfrac{10}{71253}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Chọn 5 câu trong tổng số 30 câu nên ta có không gian mẫu $n(\Omega)=C_{30}^{5}$.

Gọi A là biến cố "Lấy ra được một đề thi "Tốt"".

*TH1:* 5 câu lấy ra có 2 câu khó, 1 câu dễ, 2 câu trung bình $C_5^2.C_{15}^1.C_{10}^2$ (cách).

*TH2:* 5 câu lấy ra có 2 câu khó, 2 câu dễ, 1 câu trung bình $C_5^2.C_{15}^2.C_{10}^1$ (cách).

*TH3:* 5 câu lấy ra có 3 câu khó, 1 câu dễ, 1 câu trung bình $C_5^3.C_{15}^1.C_{10}^1$ (cách).

Số kết quả thuận lợi của biến cố A là: $n(A)=C_5^2.C_{15}^1.C_{10}^2+C_5^2.C_{15}^2.C_{10}^1+C_5^3.C_{15}^1.C_{10}^1$.

Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{3125}{23751}$.

## TÍNH XÁC SUẤT SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIÁN TIẾP.

**Câu 106.** Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 biên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự) ra khỏi hộp. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên màu đỏ.

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{418}{455}$. **C.** $\dfrac{1}{13}$. **D.** $\dfrac{12}{13}$.

***Lời giải***

Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ 15 viên bi thì số cách chọn là $C_{15}^3=445$.

Gọi $A$ là biến cố "trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên màu đỏ" thì là biến cố $\overline{A}$ " cả ba viên bi lấy ra đều không có màu đỏ" ( tức là lấy ra cả ba viên bi đều màu xanh"

Số cách chọn ra 3 viên bi mà 3 viên bi đó đều màu xanh là $C_7^3=35\Rightarrow n(\overline{A})=35$

$\Rightarrow$ Số cách chọn ra 3 viên bi mà trong đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là $455-35=420$ cách $\Rightarrow n(A)=420$

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{420}{455}=\dfrac{12}{13}$

**Câu 107.** Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ và nhân hai số trên hai thẻ lại với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là một số chẵn.

**A.** $\dfrac{5}{18}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $\dfrac{13}{18}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_9^2=36$.

Gọi $A$ là biến cố "tích hai số ghi trên thẻ là số chẵn", suy ra $\overline{A}$ là biến cố "tích hai số ghi trên thẻ là số lẻ" $\Rightarrow n(\overline{A})=C_5^2=10$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\dfrac{13}{18}$.

**Câu 108.** Gieo 5 đồng xu cân đối, đồng chất. Xác suất để được ít nhất 1 đồng xu lật sấp bằng

**A.** $\dfrac{5}{11}$. **B.** $\dfrac{8}{11}$. **C.** $\dfrac{31}{32}$. **D.** $\dfrac{1}{32}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $A$ là biến cố: "Trong 5 đồng xu có ít nhất 1 đồng xu lật sấp"

Khi đó $\overline{A}$ là biến cố: "5 đồng xu đều lật ngữa"

Vậy $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{31}{32}$.

**Câu 109.** Bạn A có 7 cái kẹo vị hoa quả và 6 cái kẹo vị socola. A lấy ngẫu nhiên 5 cái kẹo cho vào hộp để tặng cho em gái. Tính xác suất để 5 cái kẹo có cả vị hoa quả và vị socola.

**A.** $P=\dfrac{140}{143}$. **B.** $P=\dfrac{79}{156}$. **C.** $P=\dfrac{103}{117}$. **D.** $P=\dfrac{14}{117}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Chọn 5 cái kẹo trong 13 cái kẹo nên $n(\Omega)=C_{13}^5$.

Đặt $A$ là biến cố "chọn được 5 cái kẹo có đủ hai vị".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố "chọn 5 cái kẹo chỉ có một vị" $\Rightarrow n(\overline{A})=C_7^5+C_6^5$.

Vậy $P(A)=1-\dfrac{C_7^5+C_6^5}{C_{13}^5}=\dfrac{140}{143}$

**Câu 110.** Một hộp đèn có 12 bóng, trong đó có 4 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để trong 3 bóng có ít nhất 1 bóng hỏng.

**A.** $\dfrac{40}{51}$. **B.** $\dfrac{55}{112}$. **C.** $\dfrac{41}{55}$. **D.** $\dfrac{3}{7}$.

**Lời giải.**

**Chọn C**

Gọi $B$ là biến cố "Trong 3 bóng lấy ra đều là bóng tốt".

Ta có: $n(\Omega_B)=C_8^3=\dfrac{8!}{3!.5!}=56$

Gọi C là biến cố "Trong 3 bóng lấy ra có ít nhất 1 bóng hỏng"

khi đó $C=\overline{B}$.

$P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)=1-\dfrac{56}{220}=\dfrac{41}{55}$

**Câu 111.** Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển được lấy ra có ít nhất một quyển là toán.

**A.** $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{37}{42}$. **C.** $\frac{10}{21}$. **D.** $\frac{2}{7}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Trên giá có tất cả: $4+3+2=9$ (quyển sách) bao gồm cả 3 môn: toán, lý và hóa.

Lấy 3 quyển sách từ 9 quyển sách, số cách lấy ra là $C_9^3=84 \Rightarrow n(\Omega)=84$

Gọi $A$ là biến cố: "3 quyển lấy ra có ít nhất 1 quyển toán".

Suy ra $\overline{A}$: "3 quyển lấy ra không có quyển toán nào" $\Rightarrow n(\overline{A})=C_5^3=10$.

Vậy xác suất để 3 quyển được lấy ra có ít nhất một quyển sách toán là:

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10}{84}=\frac{37}{42}$.

**Câu 112.** Trên giá sách có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Vật Lí và 2 quyển sách Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất sao cho ba quyển lấy ra có ít nhất một quyển sách Toán.

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{37}{42}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{19}{21}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_9^3=84$.

Gọi $A$ là biến cố sao cho ba quyển lấy ra có ít nhất một quyển sách Toán

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố sao cho ba quyển lấy ra không có sách Toán $\Rightarrow n(\overline{A})=C_5^3=10$.

$\Rightarrow P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10}{84}=\frac{37}{42}$.

**Câu 113.** Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để trong ba quyển sách lấy ra có ít nhất một quyển là toán.

**A.** $\frac{2}{7}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{37}{42}$. **D.** $\frac{10}{21}$.

**Lời giải**

Số kết quả có thể khi chọn bất kì 3 quyển sách trong 9 quyển sách là $C_9^3=84$.

Gọi $A$ là biến cố ' Lấy được ít nhất 1 sách toán trong 3 quyển sách.'

$\overline{A}$ là biến cố ' Không lấy được sách toán trong 3 quyển sách.'

Ta có xác sút để xảy ra $A$ là $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^3}{84}=\frac{37}{42}$.

**Câu 114.** Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

**A.** $\frac{4615}{5236}$. **B.** $\frac{4651}{5236}$. **C.** $\frac{4615}{5263}$. **D.** $\frac{4610}{5236}$.

**Lời giải**

Số cách chọn 4 học sinh lên bảng: $n(\Omega)=C_{35}^4$.

Số cách chọn 4 học sinh chỉ có nam hoặc chỉ có nữ: $C_{20}^4+C_{15}^4$.

Xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ: $1-\dfrac{C_{20}^4+C_{15}^4}{C_{35}^4}=\dfrac{4615}{5236}$

**Câu 115.** Một hộp chứa 35 quả cầu gồm 20 quả màu đỏ được đánh số từ 1 đến 20 và 15 quả màu xanh được đánh số từ 1 đến 15. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó một quả cầu. Tính xác suất để lấy được quả màu đỏ hoặc ghi số lẻ.

**A.** $\dfrac{28}{35}$. **B.** $\dfrac{4}{7}$. **C.** $\dfrac{5}{7}$. **D.** $\dfrac{27}{35}$.

**Lời giải**

Chọn ngẫu nhiên 1 quả cầu có $C_{35}^1=35$ cách. Suy ra $n(\Omega)=35$.

Gọi $E$ là biến cố "Chọn được một quả cầu đỏ hoặc ghi số lẻ" thì $\overline{E}$ là biến cố "Chọn được một quả cầu xanh ghi số chẵn".

Do đó $n(\overline{E})=7$.

Suy ra $p(E)=1-p(\overline{E})=1-\dfrac{7}{35}=\dfrac{28}{35}$.

**Câu 116.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất xảy ra của biến cố "Tích hai số nhận được sau hai lần gieo là một số chẵn".

**A.** $0,75$. **B.** $0,5$. **C.** $0,25$. **D.** $0,85$.

**Lời giải**

Lần gieo thứ nhất có 6 kết quả, lần gieo thứ hai có 6 kết quả.

Do đó không gian mẫu $n(\Omega)=36$.

Gọi $A$ là biến cố "tích hai số nhận được sau hai lần gieo là một số chẵn" thì $\overline{A}$ là biến cố "tích hai số nhận được sau hai lần gieo là một số lẻ". Ta có $n(\overline{A})=3.3=9$.

Xác suất cần tìm $p(A)=1-p(\overline{A})=1-\dfrac{9}{36}=\dfrac{3}{4}$.

**Câu 117.** Một hộp đựng 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải rút ít nhất bao nhiêu thẻ để xác suất "có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4" phải lớn hơn $\dfrac{5}{6}$.

**A.** 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

**Lời giải**

Giả sử rút $x$ $(1\le x\le 9;x\in\mathbb{N})$ thẻ, số cách chọn $x$ thẻ từ 9 thẻ trong hộp là $C_9^x\Rightarrow n(\Omega)=C_9^x$.

Gọi $A$ là biến cố: "Trong số $x$ thẻ rút ra, có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4"

$\Rightarrow n(\overline{A})=C_7^x$. Ta có $P(\overline{A})=\dfrac{C_7^x}{C_9^x}\Rightarrow P(A)=1-\dfrac{C_7^x}{C_9^x}$.

Do đó $P(A)>\dfrac{5}{6}\Leftrightarrow 1-\dfrac{C_7^x}{C_9^x}>\dfrac{5}{6}\Leftrightarrow x^2-17x+60<0\Rightarrow 5<x<12\Rightarrow 6\le x\le 7$.

Vậy số thẻ ít nhất phải rút là 6.

**Câu 118.** Một nhóm gồm 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 học sinh trong nhóm đó. Xác suất để trong 3 học sinh được chọn luôn có học sinh nữ bằng

**A.** $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{10}^3=120$.

Gọi $A$ là biến cố sao cho 3 học sinh được chọn có học sinh nữ,

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố sao cho 3 học sinh được chọn không có học sinh nữ $\Rightarrow n\left(\overline{A}\right)=C_6^3=20$.

Vậy xác suất cần tìm $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\dfrac{n\left(\overline{A}\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{5}{6}$.

**Câu 119.** Một lô hàng gồm 30 sản phẩm trong đó có 20 sản phẩm tốt và 10 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm trong lô hàng. Tính xác suất để 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt.

**A.** $\dfrac{6}{203}$. **B.** $\dfrac{197}{203}$. **C.** $\dfrac{153}{203}$. **D.** $\dfrac{57}{203}$.

**Lời giải**

Ta có $n\left(\Omega\right)=C_{30}^3=4060$

Gọi $A$ là biến cố 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt.

Ta có $\overline{A}$ là biến cố 3 sản phẩm lấy ra không có sản phẩm tốt, hay 3 sản phẩm lấy ra đều là sản phẩm xấu.

$n\left(\overline{A}\right)=C_{10}^3=120$.

Suy ra $P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{n\left(\overline{A}\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{120}{4060}=\dfrac{6}{203}$.

Vậy $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\dfrac{6}{203}=\dfrac{197}{203}$.

**Câu 120.** Một nhóm gồm 10 học sinh trong đó có 7 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ nhóm 10 học sinh đi lao động. Tính xác suất để 3 học sinh được ó ít nhất một học sinh nữ?

**A.** $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{17}{48}$. **C.** $\dfrac{17}{24}$. **D.** $\dfrac{4}{9}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu: $n\left(\Omega\right)=C_{10}^3$.

Gọi $A$ là biến cố: *"3 học sinh được ó ít nhất một học sinh nữ"*.

Suy ra: $\overline{A}$ là biến cố: *"3 học sinh được chọn không có học sinh nữ"*.

Khi đó $n\left(\overline{A}\right)=C_7^3\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{C_7^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{24}$. Vậy $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{17}{24}$.

**Câu 121.** Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được ó ít nhất một người nữ là:

**A.** $\dfrac{2}{15}$. **B.** $\dfrac{7}{15}$. **C.** $\dfrac{8}{15}$. **D.** $\dfrac{1}{15}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu là: $n\left(\Omega\right)=C_{10}^2$.

Gọi biến cố $A$: "Hai người được ó ít nhất một người nữ".

$\Rightarrow \overline{A}$: "Hai người được chọn không có nữ" $\Rightarrow n\left(\overline{A}\right)=C_7^2$.

Vậy xác suất cần tìm là: $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\dfrac{n\left(\Omega\right)}{n\left(\overline{A}\right)}=1-\dfrac{C_7^2}{C_{10}^2}=\dfrac{8}{15}$.

**Câu 122.** Cho tập hợp $A=\left\{1,2,3,...,10\right\}$. Chọn ngẫu nhiên ba số từ $A$. Tìm xác suất để trong ba số chọn ra không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp.

**A.** $P=\frac{7}{90}$. **B.** $P=\frac{7}{24}$. **C.** $P=\frac{7}{10}$. **D.** $P=\frac{7}{15}$.

**Lời giải**

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{10}^{3}=120$.

Gọi $B$ là biến cố "Ba số chọn ra không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp".

$\Rightarrow$ $\overline{B}$ là biến cố "Ba số được chọn có ít nhất hai số là các số tự nhiên liên tiếp".

+ Bộ ba số dạng $(1,2,a_1)$, với $a_1\in A\setminus\{1,2\}$: có $8$ bộ ba số.

+ Bộ ba số có dạng $(2,3,a_2)$, với $a_2\in A\setminus\{1,2,3\}$: có $7$ bộ ba số.

+ Tương tự mỗi bộ ba số dạng $(3,4,a_3)$, $(4,5,a_4)$, $(5,6,a_5)$, $(6,7,a_6)$, $(7,8,a_7)$, $(8,9,a_8)$, $(9,10,a_9)$ đều có $7$ bộ.

$\Rightarrow n(\overline{B})=8+8.7=64$.

$\Rightarrow P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{64}{120}=\frac{7}{15}$.

**Câu 123.** Một hộp chứa $20$ viên bi xanh và $15$ viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên $4$ bi. Tính xác suất để $4$ bi lấy được có đủ hai màu.

**A.** $\frac{4610}{5236}$. **B.** $\frac{4615}{5236}$. **C.** $\frac{4651}{5236}$. **D.** $\frac{4615}{5236}$.

**Lời giải**

Số phần tử không gian mẫu là $|\Omega|=C_{35}^{4}=5236$.

Số phần phần tử của biến cố lấy được $4$ bi màu xanh là $C_{20}^{4}$.

Số phần phần tử của biến cố lấy được $4$ bi màu đỏ là $C_{15}^{4}$.

Suy ra xác suất của biến cố $4$ bi lấy được có đủ hai màu là $p=1-\frac{C_{20}^{4}+C_{15}^{4}}{5236}=\frac{4615}{5236}$.

**Câu 124.** Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng bia của hai xạ thủ lần lượt là $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$. Tính xác suất của biến cố có ít nhất một xạ thủ không bắn trúng bia.

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Lời giải**

Gọi $A$ là biến cố: '' có ít nhất một xạ thủ không bắn trúng bia ''.

Khi đó $\overline{A}$ là biến cố: '' cả hai xạ thủ đều bắn trúng bia ''.

$P(\overline{A})=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\Rightarrow P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

**Câu 125.** Một người bỏ ngẫu nhiên ba lá thư vào ba chiếc phong bì đã ghi địa chỉ. Xác suất để có ít nhất một lá thư được bỏ đúng phong bì là

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

**Lời giải**

Số phần tử không gian mẫu là: $n(\Omega)=3!=6$.

Gọi $A$ là biến cố "Có ít nhất một lá thư được bỏ đúng phong bì".

Ta xét các trường hợp sau:

Nếu lá thứ nhất bỏ đúng phong bì, hai lá còn lại để sai thì có duy nhất 1 cách.

Nếu lá thứ hai bỏ đúng phong bì, hai lá còn lại để sai thì có duy nhất 1 cách.

Nếu lá thứ ba bỏ đúng phong bì, hai lá còn lại để sai thì có duy nhất 1 cách.

Không thể có trường hợp hai lá thư bỏ đúng và một lá thư bỏ sai.

Cả ba lá thư đều được bỏ đúng có duy nhất 1 cách.

$\Rightarrow n(A)=4$.

Vậy xác suất để có ít nhất một lá thư được bỏ đúng phong bì là: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

**Cách 2:**

Gọi $B$ là biến cố "Không có lá thư nào được bỏ đúng phong bì".

$\Rightarrow n(B)=2 \Rightarrow P(A)=1-P(B)=1-\frac{n(B)}{n(\Omega)}=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$.

**Câu 126.** Có 9 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 9. Chọn ngẫu nhiên ra hai tấm thẻ. Tính xác suất để tích của hai số trên hai tấm thẻ là một số chẵn.

**A.** $\frac{13}{18}$. **B.** $\frac{55}{56}$. **C.** $\frac{5}{28}$. **D.** $\frac{1}{56}$.

**Lời giải**

Chọn ngẫu nhiên ra hai tấm thẻ từ 9 tấm thẻ nên số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_9^2=36$.

Gọi $A$ là biến cố: "Tích hai số trên hai tấm thẻ là một số chẵn", khi đó ta có:

$\overline{A}$: "Tích hai số trên hai tấm thẻ là một số lẻ", $n(\overline{A})=C_5^2=10 \Rightarrow P(\overline{A})=\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

Xác suất cần tìm là: $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$.

**Câu 127.** Chi đoàn lớp $12A$ có 20 đoàn viên trong đó có 12 đoàn viên nam và 8 đoàn viên nữ. Tính xác suất khi chọn 3 đoàn viên có ít nhất 1 đoàn viên nữ.

**A.** $\frac{11}{7}$. **B.** $\frac{110}{570}$. **C.** $\frac{46}{57}$. **D.** $\frac{251}{285}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu: $C_{20}^3=1140$.

Gọi $A$ là biến cố chọn được 3 đoàn viên là nam: $C_{12}^3=220$.

Xác suất của biến cố $A$ là: $P(A)=\frac{220}{1140}=\frac{11}{57}$.

Vậy xác suất cần tìm là: $1-\frac{11}{57}=\frac{46}{57}$.

**Câu 128.** Một hộp đựng $10$ viên bi có kích thước khá nhau, trong đó có $7$ viên bi màu đỏ và $3$ viên bi màu xanh. Chọn ngẫu nhiên $2$ viên. Xác suất để $2$ viên bi được ó ít nhất một viên bi màu xanh bằng

A. $\frac{1}{15}$. B. $\frac{2}{15}$. C. $\frac{7}{15}$. **D.** $\frac{8}{15}$.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{10}^{2}=45$.

Gọi $A$:"$2$ viên bi được ó ít nhất một viên bi màu xanh".

$\Rightarrow \overline{A}$ :"$2$ viên bi được ó màu đỏ".

Ta có $n\left(\overline{A}\right)=C_{7}^{2}=21\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$.

Vậy xác suất để $2$ viên bi được ó ít nhất một viên bi màu xanh là $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$.

**Câu 129.** Một hộp đựng $9$ quả cầu xanh và $5$ quả cầu trắng (các quả cầu khác nhau về kích thước). Lấy ngẫu nhiên $3$ quả cầu. Xác suất để được $3$ quả cầu có đủ hai loại cầu xanh và cầu trắng là

**A.** $\frac{135}{182}$. **B.** $\frac{14}{182}$. **C.** $\frac{47}{182}$. **D.** $\frac{113}{182}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{14}^{3}$.

Gọi $A$ là biến cố lấy được $3$ quả cầu có đủ hai loại cầu xanh và cầu trắng.

Xác suất lấy được $3$ quả cầu chỉ có màu xanh hoặc màu trắng là $\frac{C_{5}^{3}+C_{9}^{3}}{C_{14}^{3}}$.

Do đó xác suất cần tìm $P(A)=1-\frac{C_{5}^{3}+C_{9}^{3}}{C_{14}^{3}}=\frac{135}{182}$.

**Câu 130.** Một hộp đựng $10$ thẻ được đánh số từ $1$ đến $10$. Phải rút ra ít nhất $k$ thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho $4$ lớn hơn $\frac{13}{15}$. Giá trị của $k$ bằng:

**A.** $9$. **B.** $8$. **C.** $7$. **D.** $6$.

**Lời giải**

Gọi biến cố A : Lấy $k$ tấm thẻ có ít nhất một tấm thẻ chia hết cho $4$. Với $1\le k\le 10$.

Suy ra $\overline{\text{A}}$ : Lấy $k$ tấm thẻ không có tấm thẻ nào chia hết cho $4$.

Ta có: $P\left(\overline{A}\right)=\frac{C_{8}^{k}}{C_{10}^{k}}\Rightarrow P(A)=1-\frac{C_{8}^{k}}{C_{10}^{k}}=1-\frac{(10-k)(9-k)}{90}$.

Theo đề: $1-\frac{(10-k)(9-k)}{90}>\frac{13}{15}\Leftrightarrow k^{2}-19k+78<0\Leftrightarrow 6<k<13$.

Vậy $k=7$ là giá trị cần tìm.

**Câu 131.** Chọn ngẫu nhiên 3 số tự nhiên từ tập hợp $M=\{1;2;3;...;2019\}$. Tính xác suất $P$ để trong 3 số tự nhiên được chọn không có 2 số tự nhiên liên tiếp.

**A.** $P=\frac{677040}{679057}$. **B.** $P=\frac{2017}{679057}$. **C.** $P=\frac{2016}{679057}$. **D.** $P=\frac{1}{679057}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Có tất cả $C_{2019}^3$ cách chọn 3 số tự nhiên từ tập hợp $M=\{1;2;3;...;2019\}$.

Suy ra $n(\Omega)=C_{2019}^3$.

Xét biến cố $A$: "Chọn 3 số tự nhiên sao cho không có 2 số tự nhiên liên tiếp".

Ta có $\overline{A}$: "Chọn 3 số tự nhiên sao luôn có 2 số tự nhiên liên tiếp".

Xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Trong ba số chọn được chỉ có 2 số liên tiếp:

- Nếu 2 số liên tiếp là $\{1;2\}$ hoặc $\{2018;2019\}$ thì số thứ ba có $2019-3=2016$ cách chọn (do không tính số liên tiếp sau và trước mỗi cặp số đó).

- Nếu 2 số liên tiếp là $\{2;3\}$, $\{3;4\}$,.,$\{2017;2018\}$ thì số thứ ba có $2019-4=2015$ cách chọn (do không tính 2 số liền trước và sau mỗi cặp số đó).

Trường hợp này có $2.2016+2016.2015=4066272$ cách chọn.

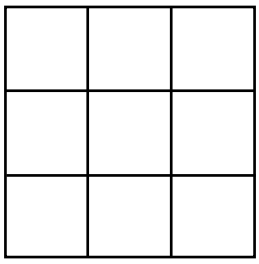
+ Trường hợp 2: Chọn được 3 số liên tiếp.

Tức là chọn các bộ $\{1;2;3\}$, $\{2;3;4\}$,.,$\{2017,2018,2019\}$: có tất cả 2017 cách.

Suy ra $n(\overline{A})=4066272+2017=4068289$.

Vậy $P=P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{4068289}{C_{2019}^3}=\dfrac{1365589680}{1369657969}=\dfrac{677040}{679057}$.

**Câu 132.** Cho một bảng ô vuông $3\times 3$.



Điền ngẫu nhiên các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào bảng trên (mỗi ô chỉ điền một số). Gọi $A$ là biến cố "mỗi hàng, mỗi cột bất kì đều có ít nhất một số lẻ". Xác suất của biến cố $A$ bằng

**A.** $P(A)=\dfrac{10}{21}$. **B.** $P(A)=\dfrac{1}{3}$. **C.** $P(A)=\dfrac{5}{7}$. **D.** $P(A)=\dfrac{1}{56}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=9!=362880$.

Xét biến cố đối $\overline{A}$ "tồn tại một hàng hoặc một cột chứa toàn số chẵn". Để biến cố $\overline{A}$ xảy ra ta lần lượt thực hiện các bước sau.

Bước 1: chọn một hàng hoặc một cột chứa toàn số chẵn. Bước này có 6 cách.

Bước 2: chọn ba số chẵn trong các số 2, 4, 6, 8 và xếp vào hàng hoặc cột này. Bước này có $A_4^3$ cách.

Bước 3: xếp 6 số còn lại vào 6 ô còn lại. Bước này có $6!$ cách.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố $\overline{A}$ là $n\left(\overline{A}\right)=6.A_4^3.6!=103680$.

Vậy xác suất của biến cố $A$ là $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\dfrac{n\left(\overline{A}\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{5}{7}$.

**Câu 133.** Gọi $X$ là tập các số tự nhiên có 5 chữ số. Lấy ngẫu nhiên hai số từ tập $X$. Xác suất để nhận được ít nhất một số chia hết cho 4 gần nhất với số nào dưới đây?

**A.** $0,63$. **B.** $0,23$. **C.** $0,44$. **D.** $0,12$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có số phần tử của tập $X$ là $\left|X\right|=9.10^4=90000$, trong đó có $\dfrac{99996-10000}{4}+1=22500$ số chia hết cho 4 và $90000-22500=67500$ số không chia hết cho 4.

Gọi $A$ là biến cố nhận được ít nhất một số chia hết cho 4.

Số phần tử của không gian mẫu là $\left|\Omega\right|=C_{90000}^2$.

Số phần tử của không gian thuận lợi cho biến cố $\overline{A}$ (cả hai đều không chia hết cho 4) là $\left|\Omega_{\overline{A}}\right|=C_{67500}^2$.

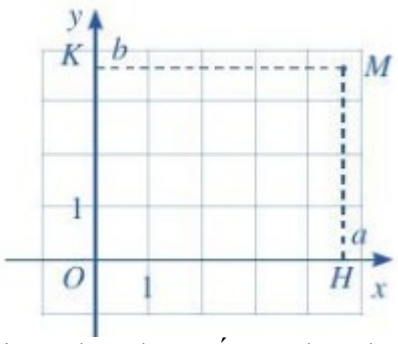
Vậy xác suất của biến cố $A$ là $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\dfrac{C_{67500}^2}{C_{90000}^2}\approx 0,44$.

# Bài 1. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## A. LÝ THUYẾT

### I. Tọa độ của một điểm

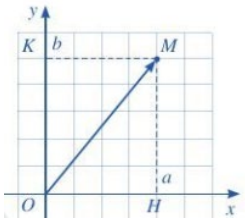



- Từ $M$ kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành và cắt trục hoành tại điểm $H$ ứng với số $a$. Số $a$ là hoành độ của điểm $M$.
- Từ $M$ kẻ đường thẳng vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm $K$ ứng với số $b$. Số $b$ là tung độ của điểm $M$.

Cặp số $(a;b)$ là toạ độ của điểm $M$ trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$. Ta kí hiệu là $M(a;b)$.

### II. Tọa độ của một vectơ

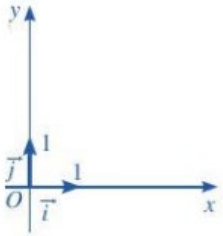
Toạ độ của điểm $M$ được gọi là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.




Nếu $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(a;b)$ thì ta viết $\overrightarrow{OM}=(a;b)$, trong đó $a$ gọi là hoành độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $b$ gọi là tung độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$

***Chú ý:*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, ta có:

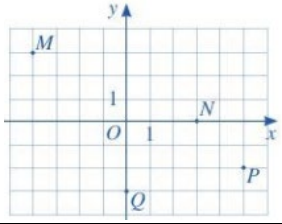
- $\overrightarrow{OM}=(a;b)\Leftrightarrow M(a;b)$.




- Vectơ $\vec{i}$ có điểm gốc là $O$ và có toạ độ $(1;0)$ gọi là vectơ đơn vị trên trục $Ox$.

Vectơ $\vec{j}$ có điểm gốc là $O$ và có tọa độ $(0;1)$ gọi là vectơ đơn vị trên trục $Oy$

***Ví dụ 1.*** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho các điểm $M,N,P,Q$. Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}$.



***Giải***

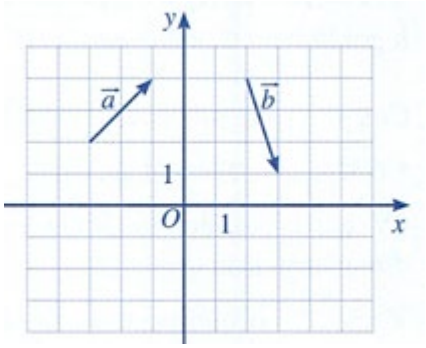
Từ hình trên ta có: $M(-4;3), N(3;0), P(5;-2), Q(0;-3)$.

Do đó: $\overrightarrow{OM}=(-4;3), \overrightarrow{ON}=(3;0)$ $\overrightarrow{OP}=(5;-2), \overrightarrow{OQ}=(0;-3)$

Với mỗi vectơ $\vec{u}$ trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là toạ độ của điểm $A$ sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$.

Nếu $\vec{u}$ có toạ độ $(a;b)$ thì ta viết $\vec{u}=(a;b)$, trong đó $a$ gọi là hoành độ của vectơ $\vec{u}$ và $b$ gọi là tung độ của vectơ $\vec{u}$.

***Ví dụ 2.*** Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ ở hình

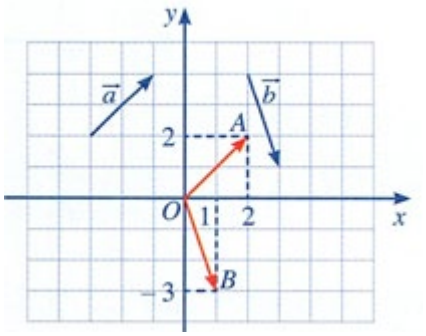



***Giải***

Trong hình, ta có:

+) $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ và $A(2;2)$; toạ độ vectơ $\overrightarrow{OA}$ chính là toạ độ điểm $A$ nên $\vec{a}=(2;2)$.

+) $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ và $B(1;-3)$; toạ độ vectơ $\overrightarrow{OB}$ chính là toạ độ điểm $B$ nên $\vec{b}=(1;-3)$.




Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, nếu $\vec{u}=(a;b)$ thì $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$. Ngược lại, nếu $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ thì $\vec{u}=(a;b)$.

*Chú ý:* Với $\vec{a}=\left(x_1;y_1\right)$ và $\vec{b}=\left(x_2;y_2\right)$, ta có: $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$. Như vậy, mỗi vectơ hoàn toàn được xác định khi biết tọa độ của nó.

***Ví dụ 3.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho điểm $A(1;2)$ và vectơ $\vec{u}=(3;-4)$.

a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OA}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Biểu diễn vectơ $\vec{u}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

***Giải***

a) Vì điểm $A$ có toạ độ là $(1;2)$ nên $\overrightarrow{OA}=(1;2)$. Do đó:

$\overrightarrow{OA}=1\vec{i}+2\vec{j}=\vec{i}+2\vec{j}$.

b) Vì $\vec{u}=(3;-4)$ nên $\vec{u}=3\vec{i}+(-4)\vec{j}=3\vec{i}-4\vec{j}$.

**III. Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ**

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho hai điểm $A\left(x_A;y_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)$.

***Ví dụ 4.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho ba điểm $A(1;1), B(4;3), C(-1;-2)$ không thẳng hàng.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm toạ độ của điểm $D$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

***Giải***

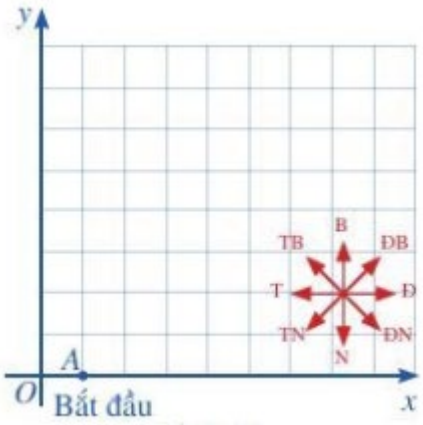
a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4-1;3-1)$. Vậy $\overrightarrow{AB}=(3;2)$.

b) Gọi tọa độ của điểm $D$ là $\left(x_D;y_D\right)$, ta có: $\overrightarrow{DC}=\left(-1-x_D;-2-y_D\right)$. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}=(3;2)\Leftrightarrow\begin{cases}-1-x_D=3\\-2-y_D=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-4\\y_D=-4\end{cases}$$

Vậy $D(-4;-4)$.

***Ví dụ 5.*** Trong một bài luyện tập của các cầu thủ bóng nước, huấn luyện viên cho các cầu thủ di chuyển theo ba đoạn liên tiếp. Đoạn thứ nhất di chuyển về hướng Đông Bắc với quãng đường là $20m$; đoạn thứ hai di chuyển về hướng Tây Bắc với quãng đường là $10m$ và đoạn thứ ba di chuyển theo hướng Đông Bắc với quãng đường $5m$.

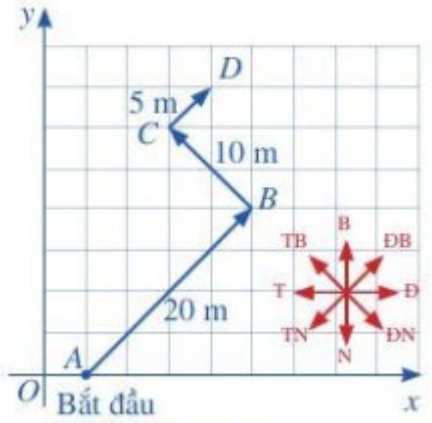



a) Vẽ các vectơ biểu diễn sự di chuyển của các cầu thủ trong hệ trục toạ độ $Oxy$ với vị trí bắt đầu như hình, trong đó ta quy ước độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là $5m$.

b) Tìm toạ độ của các vectơ trên.

***Giải***

a) Trong hình, ta thấy các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$ lần lượt biểu diễn sự di chuyển theo đoạn thứ nhất; đoạn thứ hai; đoạn thứ ba của các cầu thủ.




b) Do độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là $5m$ nên độ dài cạnh của mỗi ô vuông là $\frac{5\sqrt{2}}{2}m$. Dựa vào số ô vuông, ta có:

$A\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};0\right)$; $B\left(\frac{25\sqrt{2}}{2};10\sqrt{2}\right)$;

$C\left(\frac{15\sqrt{2}}{2};15\sqrt{2}\right)$; $D\left(10\sqrt{2};\frac{35\sqrt{2}}{2}\right)$.

Do đó

$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{25\sqrt{2}}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2};10\sqrt{2}-0\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(10\sqrt{2};10\sqrt{2})$

$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{15\sqrt{2}}{2}-\frac{25\sqrt{2}}{2};15\sqrt{2}-10\sqrt{2}\right)\Rightarrow\overrightarrow{BC}=(-5\sqrt{2};5\sqrt{2})$

$\overrightarrow{CD}=\left(10\sqrt{2}-\frac{15\sqrt{2}}{2};\frac{35\sqrt{2}}{2}-15\sqrt{2}\right)\Rightarrow\overrightarrow{CD}=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{5\sqrt{2}}{2}\right).$

**Tìm hiểu thêm**

Chứng minh công thức tính toạ độ của vectơ qua tọa độ của điểm đầu và điểm cuối

Trong Mục III, ta đã phát biểu khẳng định sau:

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Ta có

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A).$$

Khẳng định trên có thể chứng minh như sau:

Vì $\overrightarrow{OA}=(x_A;y_A)$ nên $\overrightarrow{OA}=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}$.

Vì $\overrightarrow{OB}=(x_B;y_B)$ nên $\overrightarrow{OB}=x_B\vec{i}+y_B\vec{j}$

Do đó

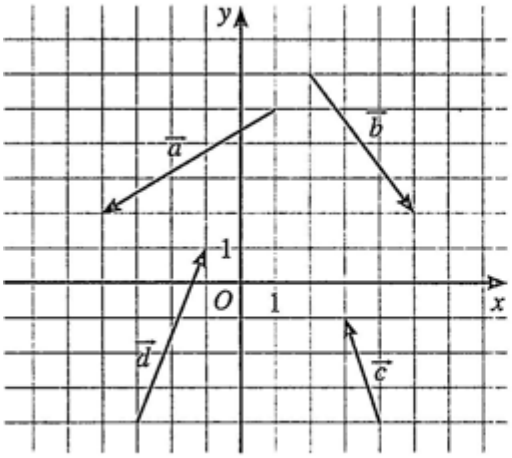
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}\right)-\left(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}\right)=\left(x_B\vec{i}-x_A\vec{i}\right)+\left(y_B\vec{j}-y_A\vec{j}\right)=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}$

Vậy $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

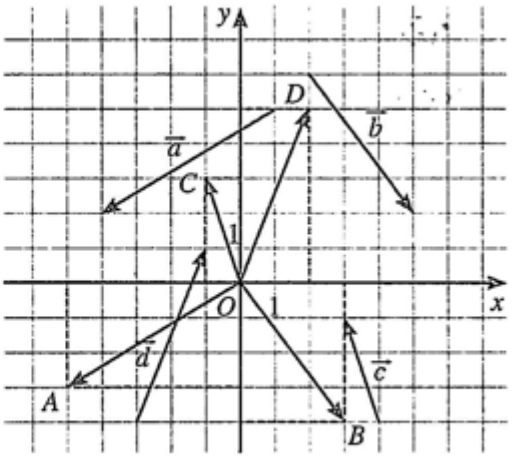
## B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1 . Tìm toạ độ của vectơ

**Câu** 1 Tìm toạ độ của các vectơ trong Hình 2.




Hình 2




Hình 3

**Giải**

Trong Hình 3 , ta có:

- Vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, ta có: $A(-5;-3)$ nên $\vec{a}=(-5;-3)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, ta có: $B(3;-4)$ nên $\vec{b}=(3;-4)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, ta có: $C(-1;3)$ nên $\vec{c}=(-1;3)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$, ta có: $D(2;5)$ nên $\vec{d}=(2;5)$.

**Câu 1.** Tìm toạ độ của các vectơ sau:

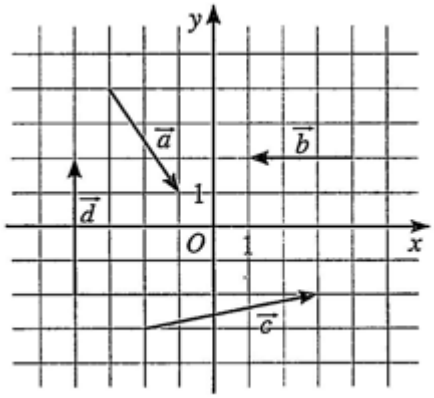
a) $\vec{a}=-2\vec{i}$

b) $\vec{b}=3\vec{j}$;

c) $\vec{c} = -4\vec{i} + \vec{j}$

d) $\vec{d} = \sqrt{5}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$.

**Câu 2.** Tìm toạ độ của các vectơ trong Hình 4 .




*Hình 4*

**Câu 3.** Viết tọa độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j};\ \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j};\ \vec{c} = 3\vec{i};\ \vec{d} = -2\vec{j}.$

b) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j};\ \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j};\ \vec{c} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j};\ \vec{d} = -4\vec{j};\ \vec{e} = 3\vec{i}$

**Câu 4.** Viết dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ khi biết tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là:

a) $\vec{u} = (2;-3);\ \vec{u} = (-1;4);\ \vec{u} = (2;0);\ \vec{u} = (0;-1).$

b) $\vec{u} = (1;3);\ \vec{u} = (4;-1);\ \vec{u} = (1;0);\ \vec{u} = (0;0).$

## Dạng 2 . Tìm điều kiện để hai vectơ bằng nhau, chứng minh hai vectơ bằng nhau

**Câu 5.** Tìm các số thực $a$ và $b$ sao cho mỗi cặp vectơ sau bằng nhau:

a) $\vec{m} = (3a-1;2b+1)$ và $\vec{n} = (-4;2)$;

b) $\vec{u} = (2a-1;-3)$ và $\vec{v} = (3;4b+1)$;

c) $\vec{x} = (a+b;-2a+3b)$ và $\vec{y} = (2a-3;4b)$.

**Câu 6.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho bốn điểm $A(-2;1), B(2;3), C(1;0)$,

**Câu 7.** Tìm các số thực $a$ và $b$ sao cho mỗi cặp vectơ sau bằng nhau:

a) $\vec{m} = (2a+3;b-1)$ và $\vec{n} = (1;-2)$;

b) $\vec{u} = (3a-2;5)$ và $\vec{v} = (5;2b+1)$;

c) $\vec{x} = (2a+b;2b)$ và $\vec{y} = (3+2b;b-3a)$.

## Dạng 3. Tìm toạ độ của một điểm thoả mãn điều kiện cho trước

**Câu 8.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho ba điểm $A(2;3), B(-1;1), C(3;-1)$.

a) Tìm toạ độ điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

b) Tìm toạ độ trung điểm $N$ của đoạn thẳng $AC$. Chứng minh $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NM}$.

**Câu 9.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$. Các điểm $M(1;-2)$, $N(4;-1)$ và $P(6;2)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, CA, AB$. Tìm toạ độ của các điểm $A, B, C$.

**Câu 10.** Cho ba điểm $A(1;-2), B(2;3), C(-1;-2)$.

a) Tìm toạ độ điểm $D$ đối xứng với $A$ qua $C$.

b) Tìm tọa độ điểm $E$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là $A, B, C$.

c) Tìm tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$.

## C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Toạ độ của vectơ $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ là:

**A.** $(-3;2)$.

**B.** $(2;-3)$.

**C.** $(-3\vec{i};2\vec{j})$.

**D.** $(3;2)$.

**Câu 2.** Tọa độ của vectơ $\vec{u} = 5\vec{j}$ là:

**A.** $(5;0)$.

**B.** $(5;\vec{j})$.

**C.** $(0;5\vec{j})$.

**D.** $(0;5)$.

**Câu 3.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $A(2;-5)$. Toạ độ của vecto $\overrightarrow{OA}$ là:

**A.** $(2;5)$.

**B.** $(2;-5)$.

**C.** $(-2;-5)$.

**D.** $(-2;5)$.

**Câu 4.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $A(-1;3), B(2;-1)$. Tọ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

**A.** $(1;-4)$.

**B.** $(-3;4)$.

**C.** $(3;-4)$.

**D.** $(1;-2)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 5.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $\vec{u} = (-2;-4), \vec{v} = (2x-y;y)$. Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng nhau nếu:

**A.** $\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$

**B.** $\begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$

**C.** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4. \end{cases}$

**D.** $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$

**Câu 6.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1;-2)$, $B(3;2), C(4;-1)$. Toạ độ của đỉnh $D$ là:

**A.** $(8;3)$.

**B.** $(3;8)$.

**C.** $(-5;0)$.

**D.** $(0;-5)$.

**Câu 7.** Trên trục $x'Ox$ cho bốn điểm *A, B, C, D* có tọa độ lần lượt là $3;5;-7;9$. Mệnh đề nào sau đây sai?

**A.** $\overline{AB} = 2$ **B.** $\overline{AC} = -10$ **C.** $\overline{CD} = -16$ **D.** $\overline{AB} + \overline{AC} = -8$

**Câu 8.** Trên trục $x'Ox$ cho tọa độ các điểm $A$, $B$ lần lượt là $a$, $b$. Khi đó tọa độ điểm $A'$ đối xứng với $A$ qua $B$ là:

**A.** $b-a$ **B.** $\dfrac{a+b}{2}$ **C.** $2a-b$ **D.** $2b-a$

**Câu 9.** Cho 4 điểm $A$, $B$, $C$, $D$ trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ thỏa mãn $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$. Khi sso mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $\dfrac{2}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{\overline{AB}}+\dfrac{1}{\overline{AD}}$ **B.** $\dfrac{2}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{\overline{AC}}+\dfrac{1}{\overline{DA}}$ **C.** $\dfrac{2}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{\overline{AC}}+\dfrac{1}{\overline{AD}}$ **D.** $\dfrac{2}{\overline{AD}}=\dfrac{1}{\overline{AB}}+\dfrac{1}{\overline{AC}}$

**Câu 10.** Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm $A$, $B$, $C$ có tọa độ lần lượt là $2;1;-2$. Khi đó tọa độ điểm $M$ nguyên dương thỏa mãn $\dfrac{1}{MA}=\dfrac{1}{MB}+\dfrac{1}{MC}$ là:

**A.** 0 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

**Câu 11.** Trong hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, tọa độ của véc tơ $2\vec{i}+3\vec{j}$ là:

**A.** $(2;3)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;0)$. **D.** $(3;2)$.

**Câu 12.** Trên mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho vectơ $\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là

**A.** $\vec{u}=(3;-4)$. **B.** $\vec{u}=(3;4)$. **C.** $\vec{u}=(-3;-4)$. **D.** $\vec{u}=(-3;4)$.

**Câu 13.** Trong hệ tọa độ $Oxy$ cho $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$. Tọa độ của vecto $\vec{u}$ là

**A.** $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{2};5\right)$. **B.** $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{2};-5\right)$. **C.** $\vec{u}=(-1;10)$. **D.** $\vec{u}=(1;-10)$.

**Câu 14.** Trong hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $M(1;1)$, $N(4;-1)$. Tính độ dài vécto $\overrightarrow{MN}$.

**A.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{13}$. **B.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=5$. **C.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{29}$. **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=3$.

**Câu 15.** Trong hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(2;-1), B(4;3)$. Tọa độ của vécto $\overrightarrow{AB}$ bằng

**A.** $\overrightarrow{AB}=(8;-3)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=(-2;-4)$. **C.** $\overrightarrow{AB}=(2;4)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=(6;2)$.

**Câu 16.** Trong hệ trục toạ độ $Oxy$, toạ độ của vectơ $\vec{a}=8\vec{j}-3\vec{i}$ bằng

**A.** $\vec{a}=(-3;8)$. **B.** $\vec{a}=(3;-8)$. **C.** $\vec{a}=(8;3)$. **D.** $\vec{a}=(8;-3)$.

**Câu 17.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$ bằng

**A.** 6. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{5}$.

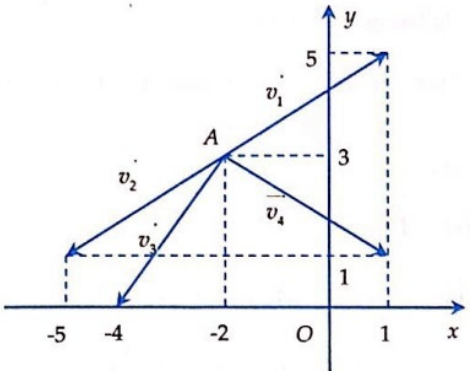
**Câu 18.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho điểm $A(1;3)$ và $B(0;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}=(5;-3)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=(1;-3)$. **C.** $\overrightarrow{AB}=(3;-5)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=(-1;3)$.

**Câu 19.** Vectơ $\vec{a}=(5;0)$ biểu diễn dạng $\vec{a}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$ được kết quả nào sau đây?

**A.** $\vec{a}=5\vec{i}-\vec{j}$ **B.** $\vec{a}=5\vec{i}$ **C.** $\vec{a}=\vec{i}-5\vec{j}$ **D.** $\vec{a}=-\vec{i}+5\vec{j}$

**Câu 20.** Cho điểm $A(-2;3)$ và vectơ $\overrightarrow{AM}=3\vec{i}-2\vec{j}$. Vectơ nào trong hình là vectơ $\overrightarrow{AM}$?




**A.** $\vec{V_1}$ **B.** $\vec{V_2}$ **C.** $\vec{V_3}$ **D.** $\vec{V_4}$

**Câu 21.** Trong các cặp vectơ sau, cặp vectơ nào không cùng phương?

**A.** $\vec{a}=(2;3);\vec{b}=(-10;-15)$ **B.** $\vec{u}=(0;5);\vec{v}=(0;8)$

**C.** $\vec{m}=(-2;1);\vec{n}=(-6;3)$ **D.** $\vec{c}=(3;4);\vec{d}=(6;9)$

**Câu 22.** Trong các cặp vectơ sau, cặp vectơ nào không cùng phương?

**A.** $\vec{a}=(2;3),\vec{b}=(6;9)$ **B.** $\vec{u}=(0;5),\vec{v}=(0;-1)$

**C.** $\vec{m}=(-2;1),\vec{b}=(1;2)$ **D.** $\vec{c}=(3;4),\vec{d}=(-6;-8)$

**Câu 23.** Cho $\vec{u}=(m^2+3;2m),\vec{v}=(5m-3;m^2)$. Vectơ $\vec{u}=\vec{v}$ khi và chỉ khi $m$ thuộc tập hợp:

**A.** $\{2\}$ **B.** $\{0;2\}$ **C.** $\{0;2;3\}$ **D.** $\{3\}$

**Câu 24.** Cho 2 vectơ $\vec{u}=(2m-1)\vec{i}+(3-m)\vec{j}$ và $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$. Tìm $m$ để hai vectơ cùng phương.

**A.** $m=\dfrac{5}{11}$ **B.** $m=\dfrac{11}{5}$ **C.** $m=\dfrac{9}{8}$ **D.** $m=\dfrac{8}{9}$

**Câu 25.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho $A(m-1;2);B(2;5-2m);C(m-3;4)$. Tìm $m$ để $A$, $B$, $C$ thẳng hàng.

**A.** $m=3$ **B.** $m=2$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=1$

**Câu 26.** Cho $\vec{a}=(4;-m),\vec{v}=(2m+6;1)$. Tập giá trị của $m$ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương là:

**A.** $\{-1;1\}$ **B.** $\{-1;2\}$ **C.** $\{-2;-1\}$ **D.** $\{-2;1\}$

**Câu 27.** Cho 4 điểm $A(1;-2),B(0;3),C(-3;4),\ D(-1;8)$. Ba điểm nào trong bốn điểm dã cho thẳng hàng?

**A.** $A$, $B$, $C$ **B.** $B$, $C$, $D$ **C.** $A$, $B$, $D$ **D.** $A$, $C$, $D$

**Câu 28.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, $\vec{a}=(5;2)$, $\vec{b}=(10;6-2x)$. Tìm $x$ để $\vec{a};\vec{b}$ cùng phương?

**A.** 1. **B.** $-1$. **C.** 2. **D.** $-2$.

**Câu 29.** Trong hệ trục $Oxy$, cho 4 điểm $A(3;-2),B(7;1),C(0;1),D(-8;-5)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ đối nhau **B.** $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ ngược hướng

**C.** $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ cùng hướng **D.** $A$, $B$, $C$, $D$ thẳng hàng

**Câu 30.** Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

**A.** $\vec{u}=2\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{v}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$ **B.** $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$

Nguyễn Bảo Vương

**C.** $\vec{u}=\frac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$ **D.** $\vec{u}=2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$

**Câu 31.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho $A(m-1;2), B(2;5-2m)$ và $C(m-3;4)$. Tìm giá trị m để A, B, C thẳng hàng.

**A.** $m=-2$.

**B.** $m=2$.

**C.** $m=1$.

**D.** $m=3$.

**Câu 32.** Cho $A(-1;1), B(1;3), C(-2;0)$. Tìm $x$ sao cho $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{BC}$

**A.** $x=\frac{2}{3}$ **B.** $x=-\frac{2}{3}$ **C.** $x=\frac{3}{2}$ **D.** $x=-\frac{3}{2}$

**Câu 33.** Cho $\vec{A}=(3;-2), \vec{B}=(-5;4), \vec{C}=\left(\frac{1}{3};0\right)$. Tìm $\vec{x}$ thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}$.

**A.** $x=3$ **B.** $x=-3$ **C.** $x=2$ **D.** $x=-4$

**Câu 34.** Vectơ $\vec{a}=(2;-1)$ biểu diễn dưới dạng $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ được kết quả nào sau đây?

**A.** $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ **B.** $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$ **C.** $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}$ **D.** $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}$

***Câu 35.*** Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho $\Delta ABC$ có $M(2;3), N(0;4), P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh *BC, CA, AB*. Tìm tọa độ đỉnh ***A***.

**A.** $A(1;5)$ **B.** $A(-3;7)$ **C.** $A(-2;-7)$ **D.** $A(1;-10)$

**Câu 36.** Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $M(2;0); N(2;2); P(-1;3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh *BC, CA, AB* của $\Delta ABC$.Tọa độ điểm *B* là:

**A.** $B(1;1)$ **B.** $B(-1;-1)$ **C.** $B(-1;1)$ **D.** $B(1;-1)$

**Câu 37.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho $A(-1;1), B(1;3), C(5;2)$. Tìm tọa độ điểm $D$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

**A.** $(3;0)$. **B.** $(5;0)$. **C.** $(7;0)$. **D.** $(5;-2)$.

**Câu 38.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-2;3)$, $B(0;4)$, $C(5;-4)$. Tọa độ đỉnh $D$ là

**A.** $\left(3;\sqrt{2}\right)$. **B.** $(3;7)$. **C.** $\left(\sqrt{7};2\right)$. **D.** $(3;-5)$.

**Câu 39.** Trong mặt phẳng $Oxy$ ;cho hai điểm $A(1;4), B(-4;2)$. Tọa độ giao điểm của đường thẳng đi qua hai điểm $A, B$ với trục hoành là

**A.** $(-9;0)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(9;0)$. **D.** $(0;-9)$.

**Câu 40.** Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho 3 điểm $A(2;1); B(0;-3); C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm *D* để *ABCD* là hình bình hành.

**A.** $D(5;5)$ **B.** $D(5;-2)$ **C.** $D(5;-4)$ **D.** $D(-1;-4)$

**Câu 41.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho tam giác $ABC$ có $A(2;1), B(-1;2), C(3;0)$. Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành khi tọa độ $E$ là cặp số nào sau đây?

**A.** $(6;-1)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(1;6)$ **D.** $(6;1)$

**Câu 42.** Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $A(-3;1), B(1;4), C(5;3)$. Tìm tọa độ điểm *D* sao cho *ABCD* là hình bình hành.

**A.** $D(-1;0)$ **B.** $D(1;0)$ **C.** $D(0;-1)$ **D.** $D(0;1)$

**Câu 43.** Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $A(2;-3), B(3;4)$. Tìm tọa độ điểm *M* trên trục hoành sao cho *A, B, M* thẳng hàng.

**A.** $M(1;0)$ **B.** $M(4;0)$ **C.** $M\left(-\frac{5}{3};0\right)$ **D.** $M\left(\frac{17}{7};0\right)$

**Câu 44.** Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $A(2;1); B(6;-1)$. Tìm điểm *M* trên *Ox* sao cho *A, B, M* thẳng hàng.

**A.** $M(2;0)$ **B.** $M(8;0)$ **C.** $M(-4;0)$ **D.** $M(4;0)$

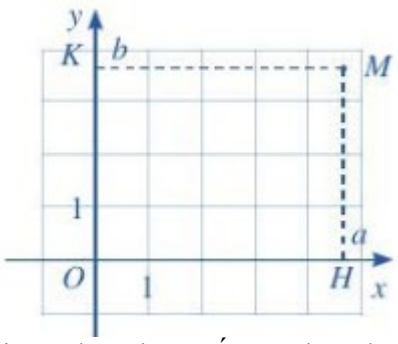
Nguyễn Bảo Vương

# Bài 1. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## A. LÝ THUYẾT

I. Tọa độ của một điểm

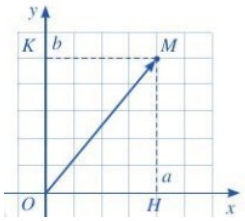



- Từ $M$ kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành và cắt trục hoành tại điểm $H$ ứng với số $a$. Số $a$ là hoành độ của điểm $M$.
- Từ $M$ kẻ đường thẳng vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm $K$ ứng với số $b$. Số $b$ là tung độ của điểm $M$.

Cặp số $(a;b)$ là toạ độ của điểm $M$ trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$. Ta kí hiệu là $M(a;b)$.

**II. Tọa độ của một vectơ**

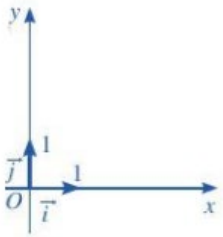
Toạ độ của điểm $M$ được gọi là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.




Nếu $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(a;b)$ thì ta viết $\overrightarrow{OM}=(a;b)$, trong đó $a$ gọi là hoành độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $b$ gọi là tung độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$

***Chú ý:*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, ta có:

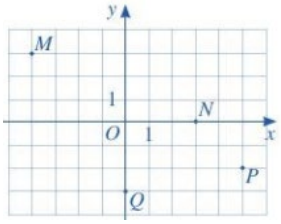
- $\overrightarrow{OM}=(a;b)\Leftrightarrow M(a;b)$.




- Vectơ $\vec{i}$ có điểm gốc là $O$ và có toạ độ $(1;0)$ gọi là vectơ đơn vị trên trục $Ox$.

Vectơ $\vec{j}$ có điểm gốc là $O$ và có tọa độ $(0;1)$ gọi là vectơ đơn vị trên trục $Oy$

***Ví dụ 1.*** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho các điểm $M,N,P,Q$. Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}$.



***Giải***

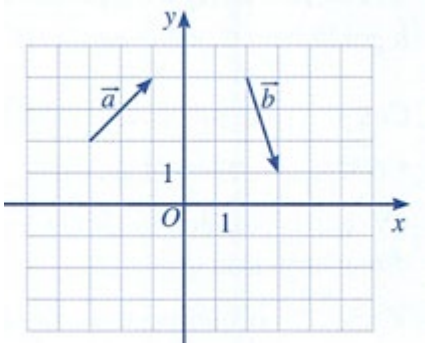
Từ hình trên ta có: $M(-4;3), N(3;0), P(5;-2), Q(0;-3)$.

Do đó: $\overrightarrow{OM}=(-4;3), \overrightarrow{ON}=(3;0)$ $\overrightarrow{OP}=(5;-2), \overrightarrow{OQ}=(0;-3)$

Với mỗi vectơ $\vec{u}$ trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là toạ độ của điểm $A$ sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$.

Nếu $\vec{u}$ có toạ độ $(a;b)$ thì ta viết $\vec{u}=(a;b)$, trong đó $a$ gọi là hoành độ của vectơ $\vec{u}$ và $b$ gọi là tung độ của vectơ $\vec{u}$.

***Ví dụ 2.*** Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ ở hình

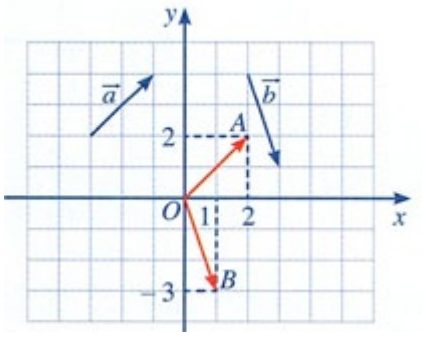



***Giải***

Trong hình, ta có:

+) $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ và $A(2;2)$; toạ độ vectơ $\overrightarrow{OA}$ chính là toạ độ điểm $A$ nên $\vec{a}=(2;2)$.

+) $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ và $B(1;-3)$; toạ độ vectơ $\overrightarrow{OB}$ chính là toạ độ điểm $B$ nên $\vec{b}=(1;-3)$.




Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, nếu $\vec{u}=(a;b)$ thì $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$. Ngược lại, nếu $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ thì $\vec{u}=(a;b)$.

*Chú ý:* Với $\vec{a}=(x_1;y_1)$ và $\vec{b}=(x_2;y_2)$, ta có: $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$. Như vậy, mỗi vectơ hoàn toàn được xác định khi biết tọa độ của nó.

***Ví dụ 3.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho điểm $A(1;2)$ và vectơ $\vec{u}=(3;-4)$.

a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OA}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Biểu diễn vectơ $\vec{u}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

***Giải***

a) Vì điểm $A$ có toạ độ là $(1;2)$ nên $\overrightarrow{OA}=(1;2)$. Do đó:

$\overrightarrow{OA}=1\vec{i}+2\vec{j}=\vec{i}+2\vec{j}$.

b) Vì $\vec{u}=(3;-4)$ nên $\vec{u}=3\vec{i}+(-4)\vec{j}=3\vec{i}-4\vec{j}$.

**III. Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ**

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

***Ví dụ 4.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho ba điểm $A(1;1), B(4;3), C(-1;-2)$ không thẳng hàng.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm toạ độ của điểm $D$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

***Giải***

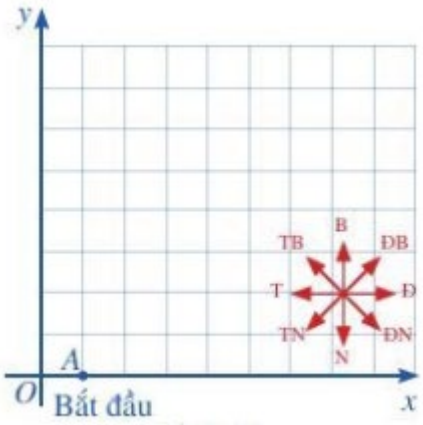
a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4-1;3-1)$. Vậy $\overrightarrow{AB}=(3;2)$.

b) Gọi tọa độ của điểm $D$ là $(x_D;y_D)$, ta có: $\overrightarrow{DC}=(-1-x_D;-2-y_D)$. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}=(3;2)\Leftrightarrow\begin{cases}-1-x_D=3\\-2-y_D=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-4\\y_D=-4\end{cases}$$

Vậy $D(-4;-4)$.

***Ví dụ 5.*** Trong một bài luyện tập của các cầu thủ bóng nước, huấn luyện viên cho các cầu thủ di chuyển theo ba đoạn liên tiếp. Đoạn thứ nhất di chuyển về hướng Đông Bắc với quãng đường là $20m$; đoạn thứ hai di chuyển về hướng Tây Bắc với quãng đường là $10m$ và đoạn thứ ba di chuyển theo hướng Đông Bắc với quãng đường $5m$.

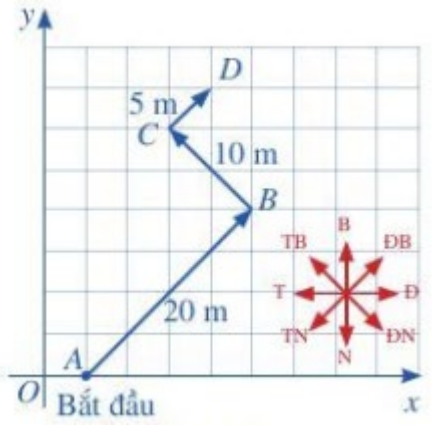



a) Vẽ các vectơ biểu diễn sự di chuyển của các cầu thủ trong hệ trục toạ độ $Oxy$ với vị trí bắt đầu như hình, trong đó ta quy ước độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là $5m$.

b) Tìm toạ độ của các vectơ trên.

***Giải***

a) Trong hình, ta thấy các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$ lần lượt biểu diễn sự di chuyển theo đoạn thứ nhất; đoạn thứ hai; đoạn thứ ba của các cầu thủ.




b) Do độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là $5m$ nên độ dài cạnh của mỗi ô vuông là $\frac{5\sqrt{2}}{2}m$. Dựa vào số ô vuông, ta có:

$A\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};0\right)$; $B\left(\frac{25\sqrt{2}}{2};10\sqrt{2}\right)$;

$C\left(\frac{15\sqrt{2}}{2};15\sqrt{2}\right)$; $D\left(10\sqrt{2};\frac{35\sqrt{2}}{2}\right)$.

Do đó

$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{25\sqrt{2}}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2};10\sqrt{2}-0\right)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(10\sqrt{2};10\sqrt{2})$

$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{15\sqrt{2}}{2}-\frac{25\sqrt{2}}{2};15\sqrt{2}-10\sqrt{2}\right)\Rightarrow \overrightarrow{BC}=(-5\sqrt{2};5\sqrt{2})$

$\overrightarrow{CD}=\left(10\sqrt{2}-\frac{15\sqrt{2}}{2};\frac{35\sqrt{2}}{2}-15\sqrt{2}\right)\Rightarrow \overrightarrow{CD}=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{5\sqrt{2}}{2}\right).$

**Tìm hiểu thêm**

Chứng minh công thức tính toạ độ của vectơ qua tọa độ của điểm đầu và điểm cuối

Trong Mục III, ta đã phát biểu khẳng định sau:

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Ta có

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A).$$

Khẳng định trên có thể chứng minh như sau:

Vì $\overrightarrow{OA}=(x_A;y_A)$ nên $\overrightarrow{OA}=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}$.

Vì $\overrightarrow{OB}=(x_B;y_B)$ nên $\overrightarrow{OB}=x_B\vec{i}+y_B\vec{j}$

Do đó

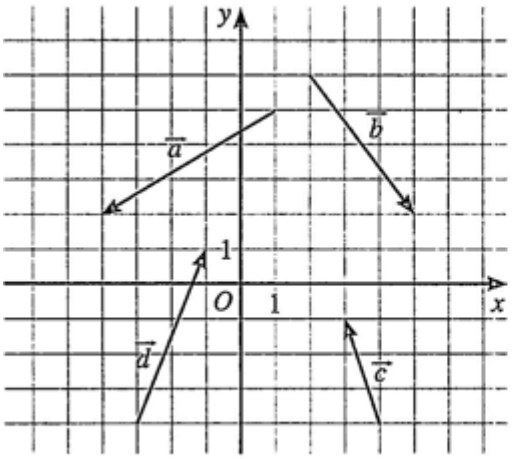
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_B\vec{i}+y_B\vec{j})-(x_A\vec{i}+y_A\vec{j})=(x_B\vec{i}-x_A\vec{i})+(y_B\vec{j}-y_A\vec{j})=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}$

Vậy $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

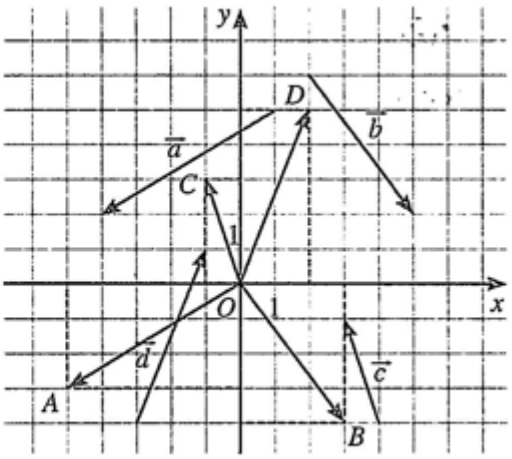
## B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1 . Tìm toạ độ của vectơ

**Câu** 1 Tìm toạ độ của các vectơ trong Hình 2.




Hình 2




Hình 3

**Giải**

Trong Hình 3 , ta có:

- Vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, ta có: $A(-5;-3)$ nên $\vec{a}=(-5;-3)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, ta có: $B(3;-4)$ nên $\vec{b}=(3;-4)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, ta có: $C(-1;3)$ nên $\vec{c}=(-1;3)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$, ta có: $D(2;5)$ nên $\vec{d}=(2;5)$.

**Câu 1.** Tìm toạ độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a}=-2\vec{i}$

b) $\vec{b}=3\vec{j}$;

c) $\vec{c}=-4\vec{i}+\vec{j}$

d) $\vec{d}=\sqrt{5}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$.

**Giải**

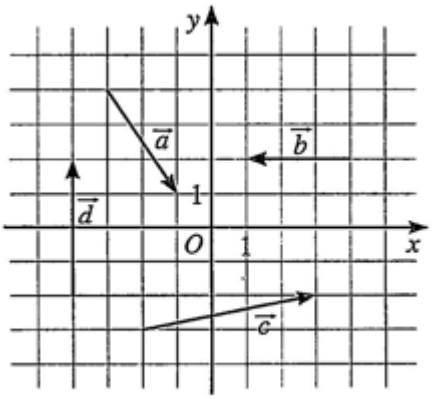
a) $\vec{a}=(-2;0)$;

b) $\vec{b}=(0;3)$

c) $\vec{c}=(-4;1)$;

d) $\vec{d}=\left(\sqrt{5};\frac{1}{2}\right)$.

**Câu 2.** Tìm toạ độ của các vectơ trong Hình 4 .




*Hình 4*

Lời giải

$\vec{a}=(2;-3),\vec{b}=(-3;0),\vec{c}=(5;1),\vec{d}=(0;4)$.

**Câu 3.** Viết tọa độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j};\ \vec{b}=\frac{1}{3}\vec{i}-5\vec{j};\ \vec{c}=3\vec{i};\ \vec{d}=-2\vec{j}.$

b) $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j};\ \vec{b}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j};\ \vec{c}=-\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j};\ \vec{d}=-4\vec{j};\ \vec{e}=3\vec{i}$

***Lời giải***

a) $\vec{a}=(2;3);\vec{b}=\left(\frac{1}{3};-5\right);\vec{c}=(3;0);\vec{d}=(0;-2)$

b) $\vec{a}=(1;-3);\vec{b}=\left(\frac{1}{2};1\right);\vec{c}=\left(-1;\frac{3}{3}\right);\vec{d}=(0;-4);\vec{e}(3;0)$

**Câu 4.** Viết dưới dạng $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ khi biết tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là:

a) $\vec{u}=(2;-3);\ \vec{u}=(-1;4);\ \vec{u}=(2;0);\ \vec{u}=(0;-1).$

b) $\vec{u}=(1;3);\ \vec{u}=(4;-1);\ \vec{u}=(1;0);\ \vec{u}=(0;0).$

***Lời giải***

a) Ta có: $\vec{u}=(2;-3)\Rightarrow\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j};\vec{u}=(-1;4)\Rightarrow\vec{u}=-\vec{i}+4\vec{j};\vec{u}=(2;0)\Rightarrow\vec{u}=2\vec{i}+0\vec{j};\vec{u}=(0;-1)\Rightarrow\vec{u}=0\vec{i}-\vec{j}$

b) Ta có: $\vec{u}=(1;3)\Rightarrow\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j};\vec{u}=(4;-1)\Rightarrow\vec{u}=4\vec{i}-\vec{j};\vec{u}=(1;0)\Rightarrow\vec{u}=\vec{i}+0\vec{j};\vec{u}=(0;0)\Rightarrow\vec{u}=0\vec{i}+0\vec{j}$

.

## Dạng 2 . Tìm điều kiện để hai vectơ bằng nhau, chứng minh hai vectơ bằng nhau

**Câu 5.** Tìm các số thực $a$ và $b$ sao cho mỗi cặp vectơ sau bằng nhau:

a) $\vec{m}=(3a-1;2b+1)$ và $\vec{n}=(-4;2)$;

b) $\vec{u}=(2a-1;-3)$ và $\vec{v}=(3;4b+1)$;

c) $\vec{x}=(a+b;-2a+3b)$ và $\vec{y}=(2a-3;4b)$.

**Giải**

a) $\vec{m}=\vec{n}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-1=-4\\2b+1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

b) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-1=3\\-3=4b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$

c) $\vec{x}=\vec{y}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2a-3\\-2a+3b=4b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=3\\b=-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a=3\\b=-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2.\end{cases}$

**Câu 6.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho bốn điểm $A(-2;1),B(2;3),C(1;0)$,

**Giải**

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4;2),\overrightarrow{DC}=(4;2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

**Câu 7.** Tìm các số thực $a$ và $b$ sao cho mỗi cặp vectơ sau bằng nhau:

a) $\vec{m}=(2a+3;b-1)$ và $\vec{n}=(1;-2)$;

b) $\vec{u}=(3a-2;5)$ và $\vec{v}=(5;2b+1)$;

c) $\vec{x}=(2a+b;2b)$ và $\vec{y}=(3+2b;b-3a)$.

Lời giải

a) $a=-1,b=-1$.

b) $a=\dfrac{7}{3},b=2$.

c) $a=\dfrac{3}{5},b=\dfrac{-9}{5}$.

## Dạng 3. Tìm toạ độ của một điểm thoả mãn điều kiện cho trước

**Câu 8.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho ba điểm $A(2;3),B(-1;1),C(3;-1)$.

a) Tìm toạ độ điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm $N$ của đoạn thẳng $AC$. Chứng minh $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NM}$.

**Giải**

a) Giả sử $M(x;y)$. Ta có: $\overrightarrow{AM}=(x-2;y-3),\overrightarrow{BC}=(4;-2)$.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=4\\y-3=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=1.\end{cases}$ Vậy $M(6;1)$.

b) Giả sử $N(x;y)$. Ta có: $\overrightarrow{AN}=(x-2;y-3),\overrightarrow{NC}=(3-x;-1-y)$.

Vì $N$ là trung điểm của đoạn thẳng $AC$ nên ta có:

Ta có: $\overrightarrow{BN}=\left(\dfrac{7}{2};0\right),\overrightarrow{NM}=\left(\dfrac{7}{2};0\right)$. Suy ra $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NM}$.

**Câu 9.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$. Các điểm $M(1;-2)$, $N(4;-1)$ và $P(6;2)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC,CA,AB$. Tìm toạ độ của các điểm $A,B,C$.

**Giải**

Vì $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $BC,CA,AB$ nên tứ giác $ANMP$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{PM}$. Giả sử $A\left(x_A;y_A\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AN}=\left(4-x_A;-1-y_A\right);\overrightarrow{PM}=(-5;-4)$.

Suy ra: $\begin{cases}4-x_A=-5\\-1-y_A=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=9\\y_A=3.\end{cases}$ Vậy $A(9;3)$.

Tương tự, từ $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{MN},\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{NP}$, ta tính được $B(3;1),C(-1;-5)$.

**Câu 10.** Cho ba điểm $A(1;-2),B(2;3),C(-1;-2)$.

a) Tìm tọa độ điểm $D$ đối xứng với $A$ qua $C$.

b) Tìm tọa độ điểm $E$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là $A,B,C$.

c) Tìm tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$.

***Lời giải***

a) $D$ đối xứng với $A$ qua $C$ hay $C$ là trung điểm của $AD$

$\Rightarrow\begin{cases}x_D=2x_C-x_A=-3\\y_D=2y_C-y_A=-2\end{cases}\Rightarrow D(-3;-2).$

**b)** $ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow(x_E-1;y_E+2)=(-3;-5)\Leftrightarrow\begin{cases}x_E-1=-3\\y_E+2=-5\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=-2\\y_E=-7\end{cases}\Rightarrow E(-2;-7).$

**c)** $G$ là trọng tâm tam giác $ABC\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2}{3}\\y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow G\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right).$

## C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Toạ độ của vectơ $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ là:

**A.** $(-3;2)$.

**B.** $(2;-3)$.

**C.** $(-3\vec{i};2\vec{j})$.

**D.** $(3;2)$.

Lời giải

**Chọn A**

**Câu 2.** Tọa độ của vectơ $\vec{u}=5\vec{j}$ là:

**A.** $(5;0)$.

**B.** $(5;\vec{j})$.

**C.** $(0;5\vec{j})$.

**D.** $(0;5)$.

Lời giải

**Chọn D**

**Câu 3.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $A(2;-5)$. Toạ độ của vecto $\overrightarrow{OA}$ là:

**A.** $(2;5)$.

**B.** $(2;-5)$.

**C.** $(-2;-5)$.

**D.** $(-2;5)$.

Lời giải

**Chọn B**

**Câu 4.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $A(-1;3), B(2;-1)$. Tọ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

**A.** $(1;-4)$.

**B.** $(-3;4)$.

**C.** $(3;-4)$.

**D.** $(1;-2)$.

Lời giải

**Chọn C**

**Câu 5.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $\vec{u}=(-2;-4), \vec{v}=(2x-y;y)$. Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng nhau nếu:

**A.** $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$

**B.** $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$

**C.** $\begin{cases} x=1 \\ y=4. \end{cases}$

**D.** $\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$

Lời giải

**Chọn B**

**Câu 6.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1;-2)$, $B(3;2), C(4;-1)$. Toạ độ của đỉnh $D$ là:

**A.** $(8;3)$.

**B.** $(3;8)$.

**C.** $(-5;0)$.

**D.** $(0;-5)$.

Lời giải

**Chọn D**

**Câu 7.** Trên trục $x'Ox$ cho bốn điểm *A, B, C, D* có tọa độ lần lượt là $3;5;-7;9$. Mệnh đề nào sau đây sai?

**A.** $\overline{AB}=2$ **B.** $\overline{AC}=-10$ **C.** $\overline{CD}=-16$ **D.** $\overline{AB}+\overline{AC}=-8$

**Lời giải**

**Đáp án C**

Ta có: $\overline{CD}=x_D-x_C=9-(-7)=16$

**Câu 8.** Trên trục $x'Ox$ cho tọa độ các điểm *A, B* lần lượt là *a, b*. Khi đó tọa độ điểm $A'$ đối xứng với *A* qua *B* là:

**A.** $b-a$ **B.** $\frac{a+b}{2}$ **C.** $2a-b$ **D.** $2b-a$

**Lời giải**

**Đáp án D**

$A'$ đối xứng với *A* qua *B* nên *B* là trung điểm của $AA' \Rightarrow x_{A'}+x_A=2x_B \Leftrightarrow x_{A'}=2b-a$

**Câu 9.** Cho 4 điểm *A, B, C, D* trên trục $(O;\vec{i})$ thỏa mãn $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$. Khi sso mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}$ **B.** $\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{DA}$ **C.** $\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$ **D.** $\frac{2}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$

**Lời giải**

Gọi *a, b, c, d* lần lượt là tọa độ của *A, B, C,* ***D.*** Ta có:

$+\ \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}\Leftrightarrow\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}\Leftrightarrow(c-b)(b-d)=(b-c)(a-d)$

$\Leftrightarrow ac+bd+bc+ad=2ab+2cd=(a+b)(c+d)=2(ad+cb)$

$+\ \frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}\Leftrightarrow\frac{2}{b-c}=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{d-a}\Leftrightarrow(a+b)(c+d)=2(ab+cd)$

**Đáp án C**

**Câu 10.** Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm *A, B, C* có tọa độ lần lượt là $2;1;-2$. Khi đó tọa độ điểm *M* nguyên dương thỏa mãn $\frac{1}{MA}=\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}$ là:

**A.** 0 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

**Lời giải**

**Đáp án B**

Gọi tọa độ điểm *M* là $x\Rightarrow\frac{1}{2-x}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{-2-x}\Rightarrow -x^2-4x=0\Rightarrow x=4$

**Câu 11.** Trong hệ trục tọa độ $(O;\vec{i},\vec{j})$, tọa độ của véc tơ $2\vec{i}+3\vec{j}$ là:

**A.** $(2;3)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;0)$. **D.** $(3;2)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tọa độ của véc tơ $2\vec{i}+3\vec{j}$ là: $(2;3)$.

**Câu 12.** Trên mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* cho vecto $\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}$. Tọa độ của vecto $\vec{u}$ là

**A.** $\vec{u}=(3;-4)$. **B.** $\vec{u}=(3;4)$. **C.** $\vec{u}=(-3;-4)$. **D.** $\vec{u}=(-3;4)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}\Rightarrow\vec{u}=(3;-4)$.

**Câu 13.** Trong hệ tọa độ *Oxy* cho $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$. Tọa độ của vecto $\vec{u}$ là

**A.** $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};5\right)$. **B.** $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};-5\right)$. **C.** $\vec{u}=(-1;10)$. **D.** $\vec{u}=(1;-10)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Có $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}\Rightarrow\vec{u}=\left(\frac{1}{2};-5\right)$.

**Câu 14.** Trong hệ trục tọa độ *Oxy*, cho hai điểm $M(1;1)$, $N(4;-1)$. Tính độ dài véctơ $\overrightarrow{MN}$.

**A.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{13}$. **B.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=5$. **C.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{29}$. **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{MN}=(3;-2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$.

**Câu 15.** Trong hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(2;-1), B(4;3)$. Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{AB}$ bằng

**A.** $\overrightarrow{AB}=(8;-3)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=(-2;-4)$. **C.** $\overrightarrow{AB}=(2;4)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=(6;2)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2;4)$.

**Câu 16.** Trong hệ trục toạ độ $Oxy$, toạ độ của vectơ $\vec{a}=8\vec{j}-3\vec{i}$ bằng

**A.** $\vec{a}=(-3;8)$. **B.** $\vec{a}=(3;-8)$. **C.** $\vec{a}=(8;3)$. **D.** $\vec{a}=(8;-3)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\vec{a}=8\vec{j}-3\vec{i}=-3\vec{i}+8\vec{j} \Rightarrow \vec{a}=(-3;8)$.

**Câu 17.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$ bằng

**A.** $6$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $2$. **D.** $\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC}=(4;-2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right|=BC=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. Vậy $\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt{5}$.

**Câu 18.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho điểm $A(1;3)$ và $B(0;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}=(5;-3)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=(1;-3)$. **C.** $\overrightarrow{AB}=(3;-5)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=(-1;3)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)=(-1;3)$.

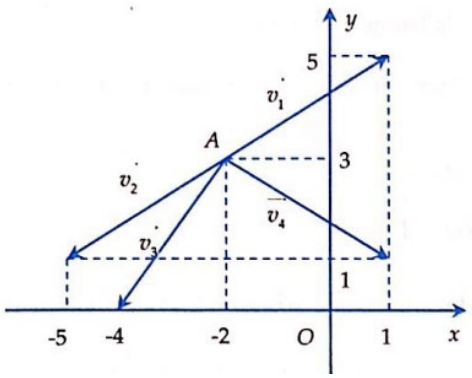
**Câu 19.** Vectơ $\vec{a}=(5;0)$ biểu diễn dạng $\vec{a}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$ được kết quả nào sau đây?

**A.** $\vec{a}=5\vec{i}-\vec{j}$ **B.** $\vec{a}=5\vec{i}$ **C.** $\vec{a}=\vec{i}-5\vec{j}$ **D.** $\vec{a}=-\vec{i}+5\vec{j}$

**Lời giải**

**Đáp án B**

**Câu 20.** Cho điểm $A(-2;3)$ và vectơ $\overrightarrow{AM}=3\vec{i}-2\vec{j}$ .Vectơ nào trong hình là vectơ $\overrightarrow{AM}$ ?




**A.** $\overrightarrow{V_1}$ **B.** $\overrightarrow{V_2}$ **C.** $\overrightarrow{V_3}$ **D.** $\overrightarrow{V_4}$

**Lời giải**

**Đáp án D**

Ta có: $\overrightarrow{V_4}=3\vec{i}-2\vec{j}$

**Câu 21.** Trong các cặp vectơ sau, cặp vectơ nào không cùng phương?

**A.** $\vec{a}=(2;3);\vec{b}=(-10;-15)$ **B.** $\vec{u}=(0;5);\vec{v}=(0;8)$

**C.** $\vec{m}=(-2;1);\vec{n}=(-6;3)$ **D.** $\vec{c}=(3;4);\vec{d}=(6;9)$

**Lời giải**

Ta có: $\frac{3}{6}\neq\frac{4}{9}\Rightarrow\vec{c}$ và $\vec{d}$ không cùng phương.

**Đáp án D**

**Câu 22.** Trong các cặp vectơ sau, cặp vectơ nào không cùng phương?

**A.** $\vec{a}=(2;3),\vec{b}=(6;9)$ **B.** $\vec{u}=(0;5),\vec{v}=(0;-1)$

**C.** $\vec{m}=(-2;1),\vec{b}=(1;2)$ **D.** $\vec{c}=(3;4),\vec{d}=(-6;-8)$

**Lời giải**

**Đáp án C**

**Câu 23.** Cho $\vec{u}=\left(m^2+3;2m\right),\vec{v}=\left(5m-3;m^2\right)$. Vectơ $\vec{u}=\vec{v}$ khi và chỉ khi $m$ thuộc tập hợp:

**A.** $\{2\}$ **B.** $\{0;2\}$ **C.** $\{0;2;3\}$ **D.** $\{3\}$

**Lời giải**

**Đáp án A**

Theo bài ra $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+3=5m-3\\2m=m^2\end{cases}\Leftrightarrow m=2$

**Câu 24.** Cho 2 vectơ $\vec{u}=(2m-1)\vec{i}+(3-m)\vec{j}$ và $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$. Tìm $m$ để hai vectơ cùng phương.

**A.** $m=\frac{5}{11}$ **B.** $m=\frac{11}{5}$ **C.** $m=\frac{9}{8}$ **D.** $m=\frac{8}{9}$

**Lời giải**

Để 2 vectơ cùng phương thì $\frac{2m-1}{2}=\frac{3-m}{3}\Leftrightarrow m=\frac{9}{8}$.

**Đáp án C**

**Câu 25.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho $A(m-1;2); B(2;5-2m); C(m-3;4)$. Tìm $m$ để $A, B, C$ thẳng hàng.

**A.** $m=3$ **B.** $m=2$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=1$

**Lời giải**

$A, B, C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \dfrac{3-m}{m-5}=\dfrac{3-2m}{2m-1} \Leftrightarrow (3-m)(2m-1)=(3-2m)(m-5) \Leftrightarrow m=2$

**Đáp án B**

**Câu 26.** Cho $\vec{a}=(4;-m), \vec{v}=(2m+6;1)$. Tập giá trị của $m$ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương là:

**A.** $\{-1;1\}$ **B.** $\{-1;2\}$ **C.** $\{-2;-1\}$ **D.** $\{-2;1\}$

**Lời giải**

**Đáp án C**

$\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}=k\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 4=k(2m+6) \\ -m=k \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$

**Câu 27.** Cho 4 điểm $A(1;-2), B(0;3), C(-3;4), D(-1;8)$. Ba điểm nào trong bốn điểm dã cho thẳng hàng?

**A.** $A, B, C$ **B.** $B, C, D$ **C.** $A, B, D$ **D.** $A, C, D$

**Lời giải**

**Đáp án C**

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(-1;5), \overrightarrow{DA}=(2;-10) \Rightarrow \overrightarrow{DA}=-2\overrightarrow{AB} \Rightarrow A, B, D$ thẳng hàng.

**Câu 28.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, $\vec{a}=(5;2)$, $\vec{b}=(10;6-2x)$. Tìm $x$ để $\vec{a};\vec{b}$ cùng phương?

**A.** 1. **B.** $-1$. **C.** 2. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\vec{a};\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi: $\dfrac{10}{5}=\dfrac{6-2x}{2} \Leftrightarrow x=1$. Chọn đáp án **A.**

**Câu 29.** Trong hệ trục $Oxy$, cho 4 điểm $A(3;-2), B(7;1), C(0;1), D(-8;-5)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ đối nhau **B.** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng

**C.** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng **D.** $A, B, C, D$ thẳng hàng

**Lời giải**

$\overrightarrow{AB}=(4;3), \overrightarrow{CD}=(-8;-6) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng

**Đáp án B**

**Câu 30.** Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

**A.** $\vec{u}=2\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{v}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$ **B.** $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$

**C.** $\vec{u}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-\dfrac{3}{5}\vec{b}$ **D.** $\vec{u}=2\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{4}\vec{b}$

**Lời giải**

**Đáp án D**

$2\vec{u}=4\vec{a}-3\vec{b},-12\vec{v}=4\vec{a}-3\vec{b}\Rightarrow\vec{u}=-6\vec{v}$

**Câu 31.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho $A(m-1;2),B(2;5-2m)$ và $C(m-3;4)$. Tìm giá trị m để A, B, C thẳng hàng.

**A.** $m=-2$.

**B.** $m=2$.

**C.** $m=1$.

**D.** $m=3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3-m;3-2m),\overrightarrow{AC}=(-2;2)$

Do A, B, C thẳng hàng nên tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}3-m=-2k\\3-2m=2k\end{cases}\Rightarrow m=2$.

**Câu 32.** Cho $A(-1;1),B(1;3),C(-2;0)$. Tìm $x$ sao cho $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{BC}$

**A.** $x=\frac{2}{3}$ **B.** $x=-\frac{2}{3}$ **C.** $x=\frac{3}{2}$ **D.** $x=-\frac{3}{2}$

**Lời giải**

**Đáp án D**

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(2;2),\overrightarrow{BC}=(-3;-3)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$

**Câu 33.** Cho $\vec{A}=(3;-2),\vec{B}=(-5;4),\vec{C}=\left(\frac{1}{3};0\right)$. Tìm $\vec{x}$ thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}$.

**A.** $x=3$ **B.** $x=-3$ **C.** $x=2$ **D.** $x=-4$

**Lời giải**

$\overrightarrow{AB}=(-8;6);\overrightarrow{AC}=\left(\frac{-8}{3};2\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

**Đáp án A**

**Câu 34.** Vectơ $\vec{a}=(2;-1)$ biểu diễn dưới dạng $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ được kết quả nào sau đây?

**A.** $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ **B.** $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$ **C.** $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}$ **D.** $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}$

**Lời giải**

Ta có: $\vec{a}=(2;-1)\Leftrightarrow\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$

**Đáp án A**

***Câu 35.*** Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho $\Delta ABC$ có $M(2;3),N(0;4),P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh *BC, CA, AB.* Tìm tọa độ đỉnh ***A***.

**A.** $A(1;5)$ **B.** $A(-3;7)$ **C.** $A(-2;-7)$ **D.** $A(1;-10)$

**Lời giải**

**Đáp án B**

Gọi $A(x;y)$, ta có: $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=-2\\y-6=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=7\end{cases}\Rightarrow A(-3;7)$

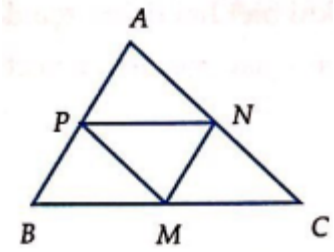
$\Rightarrow\overrightarrow{OM_1}=3,\overrightarrow{OM_2}=-4,\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=2\overrightarrow{OI}=(3;-4)$, với $I$ là trung điểm của $M_1M_2$

**Câu 36.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $M(2;0);N(2;2);P(-1;3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh $BC, CA, AB$ của $\Delta ABC$.Tọa độ điểm $B$ là:

**A.** $B(1;1)$ **B.** $B(-1;-1)$ **C.** $B(-1;1)$ **D.** $B(1;-1)$

**Lời giải**

Ta có $BPMN$ là hình bình hành nên




$\begin{cases}x_B+x_N=x_P+x_M\\y_B+y_N=y_P+y_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B+2=(-1)+2\\y_B+2=3+0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_B=-1\\y_B=1\end{cases}$

**Đáp án C**

**Câu 37.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho $A(-1;1),B(1;3),C(5;2)$. Tìm tọa độ điểm $D$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

**A.** $(3;0)$. **B.** $(5;0)$. **C.** $(7;0)$. **D.** $(5;-2)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $D(x,y)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2)$, $\overrightarrow{DC}=(5-x;2-y)$.

$ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}5-x=2\\2-y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$.

Vậy $D(3;0)$.

**Câu 38.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-2;3)$, $B(0;4)$, $C(5;-4)$. Tọa độ đỉnh $D$ là

**A.** $(3;\sqrt{2})$. **B.** $(3;7)$. **C.** $(\sqrt{7};2)$. **D.** $(3;-5)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $D(x;y)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;1)$, $\overrightarrow{DC}=(5-x;-4-y)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}5-x=2\\-4-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-5\end{cases}$. Vậy $D(3;-5)$.

**Câu 39.** Trong mặt phẳng $Oxy$ ;cho hai điểm $A(1;4),B(-4;2)$. Tọa độ giao điểm của đường thẳng đi qua hai điểm $A,B$ với trục hoành là

**A.** $(-9;0)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(9;0)$. **D.** $(0;-9)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $M(m;0)$ là giao điểm của đường thẳng $AB$ và trục hoành. Khi đó; $A,B,M$ thẳng hàng.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-5;-2), \overrightarrow{AM}=(m-1;-4)$.

$A,B,M$ thẳng hang $\Leftrightarrow \dfrac{m-1}{-5}=\dfrac{-4}{-2}\Leftrightarrow m=-9$.

Vậy $M(-9;0)$.

**Câu 40.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho 3 điểm $A(2;1);B(0;-3);C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm $D$ để $ABCD$ là hình bình hành.

**A.** $D(5;5)$ **B.** $D(5;-2)$ **C.** $D(5;-4)$ **D.** $D(-1;-4)$

**Lời giải**

Gọi $D(x;y)$. Ta có: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=3\\y-1=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}\Rightarrow D(5;5)$

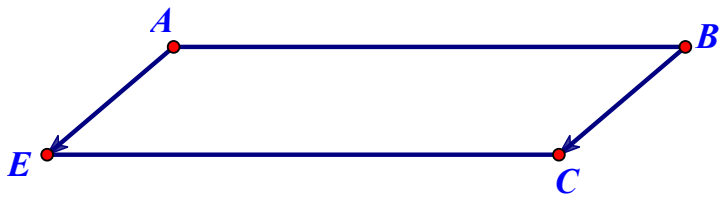
**Đáp án A**

**Câu 41.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho tam giác $ABC$ có $A(2;1),B(-1;2),C(3;0)$. Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành khi tọa độ $E$ là cặp số nào sau đây?

**A.** $(6;-1)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(1;6)$ **D.** $(6;1)$

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $E(x;y)$.

Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=4\\y-1=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=-1\end{cases}$

Vậy $E(6;-1)$.

**Câu 42.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $A(-3;1),B(1;4),\ C(5;3)$. Tìm tọa độ điểm $D$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

**A.** $D(-1;0)$ **B.** $D(1;0)$ **C.** $D(0;-1)$ **D.** $D(0;1)$

**Lời giải**

**Đáp án B**

$\overrightarrow{AB}=(4;3),\overrightarrow{DC}=(5-x;3-y)$ với $D(x;y),\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}5-x=4\\3-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\Rightarrow D(1;0)$

**Câu 43.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $A(2;-3),B(3;4)$. Tìm tọa độ điểm $M$ trên trục hoành sao cho $A$, $B$, $M$ thẳng hàng.

**A.** $M\left(1;0\right)$ **B.** $M\left(4;0\right)$ **C.** $M\left(-\frac{5}{3};0\right)$ **D.** $M\left(\frac{17}{7};0\right)$

**Lời giải**

**Đáp án D**

$M\in Ox\Rightarrow M\left(x;0\right),\overrightarrow{AB}=\left(1;7\right),\overrightarrow{AM}=\left(m-2;3\right)$

Để *A, B, M* thẳng hàng $\Leftrightarrow\frac{m-2}{1}=\frac{3}{7}\Leftrightarrow m=\frac{17}{7}$

**Câu 44.** Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $A\left(2;1\right);B\left(6;-1\right)$. Tìm điểm *M* trên *Ox* sao cho *A, B, M* thẳng hàng.

**A.** $M\left(2;0\right)$ **B.** $M\left(8;0\right)$ **C.** $M\left(-4;0\right)$ **D.** $M\left(4;0\right)$

**Lời giải**

$M\in Ox\Rightarrow M\left(x;0\right),\overrightarrow{AB}=\left(4;-2\right),\overrightarrow{AM}=\left(x-2;-1\right)$

Để *A, B, M* thẳng hàng $\Rightarrow\frac{x-2}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=4$

**Đáp án D**

# Bài 2. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ

Nếu $\vec{u}=(x_1;y_1)$ và $\vec{v}=(x_2;y_2)$ thì

$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2;y_1+y_2)$

$\vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_2;y_1-y_2)$

$k\vec{u}=(kx_1;ky_1),\ k\in\mathbb{R}.$

*Nhận xét:* Hai vectơ $\vec{u}=(x_1;y_1),\vec{v}=(x_2;y_2)(\vec{v}\neq\vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực $k$ sao cho $x_1=kx_2$ và $y_1=ky_2$.

***Ví dụ 1.*** Cho $\vec{u}=(2;-1),\vec{v}=(1;5)$. Tìm tọa độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{u}+\vec{v}$;

b) $\vec{u}-\vec{v}$.

***Giải***

Do $\vec{u}=(2;-1),\vec{v}=(1;5)$ nên ta có:

a) $\vec{u}+\vec{v}=(2+1;-1+5)$. Vậy $\vec{u}+\vec{v}=(3;4)$.

b) $\vec{u}-\vec{v}=(2-1;-1-5)$. Vậy $\vec{u}-\vec{v}=(1;-6)$.

***Ví dụ 2.*** Cho $\vec{a}=(-2;3),\vec{b}=(2;1),\vec{c}=(1;2)$. Tính tọa độ của mỗi vectơ sau: $3\vec{a};2\vec{a}-\vec{b};\vec{a}+2\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{c}$.

***Giải***

Do $\vec{a}=(-2;3),\vec{b}=(2;1),\vec{c}=(1;2)$ nên ta có:

+) $3\vec{a}=(3\cdot(-2);3.3)$. Vậy $3\vec{a}=(-6;9)$.

+) $2\vec{a}=(-4;6)$.

Do đó $2\vec{a}-\vec{b}=(-4-2;6-1)$, vì vậy $2\vec{a}-\vec{b}=(-6;5)$.

+) $2\vec{b}=(4;2),\vec{a}+2\vec{b}=(2;5)$ và $-\frac{3}{2}\vec{c}=\left(-\frac{3}{2};-3\right)$.

Do đó $\vec{a}+2\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{c}=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

***Ví dụ 3.*** Cho ba điểm $A(-1;-3),B(2;3)$ và $C(3;5)$. Chứng minh ba điểm $A,B,C$ thẳng hàng.

***Giải***

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;6),\overrightarrow{BC}=(1;2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BC}$. Vậy ba điểm $A,B,C$ thẳng hàng.

### II. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm tam giác

Cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Nếu $M(x_M;y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ thì

$x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2}.$

Cho tam giác $ABC$ có $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B),C(x_C;y_C)$. Nếu $G(x_G;y_G)$ là trọng tâm tam giác $ABC$ thì

$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$

***Ví dụ 4.*** Cho tam giác $ABC$ có $A(-2;1),B(2;5),C(5;2)$. Tìm toạ độ trung điểm $M$ của đoạn thẳng $AB$ và trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$.

***Giải***

Do $M(x_M;y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ nên

$x_M = \frac{-2+2}{2} = 0; y_M = \frac{1+5}{2} = 3.$

Vậy $M(0;3)$.

Do $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác $ABC$ nên $x_G = \frac{(-2)+2+5}{3}; y_G = \frac{1+5+2}{3}$. Vậy $G\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$.

**III. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng**

Nếu $\vec{u} = (x_1; y_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2)$ thì $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$.

*Nhận xét*

a) Nếu $\vec{a} = (x; y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Nếu $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thì $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

c) Với hai vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2)$ khác $\vec{0}$, ta có:

- $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

$$\cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

***Ví dụ 5.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;2), B(1;-1), C(8;0)$.

a) Tính $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ và $\cos\widehat{ABC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Giải tam giác $ABC$.

***Giải***

a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (1;3), \overrightarrow{BC} = (7;1)$. Do đó $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 10$.

Mặt khác, ta cũng có:

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50},$

$$\cos\widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{50}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

b) Do $\overrightarrow{AB} = (-1;-3)$ và $\overrightarrow{AC} = (6;-2)$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot 6 + (-3) \cdot (-2) = 0$. Vậy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Do $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$, tức là tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Mà $\cos\widehat{ABC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ nên $\widehat{ABC} \approx 63^\circ$.

Vì thế $\widehat{ACB} \approx 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$.

Mặt khác, ta có: $AB = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{10}$,

$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, CA = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{10}$

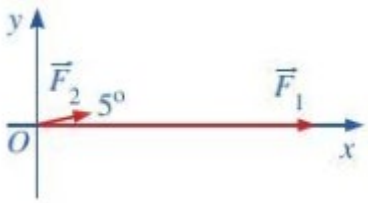
***Ví dụ 6.*** Một chiếc xe ô tô con bị mắc kẹt trong bùn lầy. Để kéo xe ra, người ta dùng xe tải kéo bằng cách gắn một đầu dây cáp kéo xe vào đầu xe ô tô con và móc đầu còn lại vào phía sau của xe tải kéo. Khi kéo, xe tải tạo ra một lực $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn (cường độ) là $2000\,N$ theo phương ngang lên xe ô tô con.




Ngoài ra, có thêm một người đẩy phía sau xe ô tô con, tạo ra lực $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là $300\,N$ lên xe. Các lực này được biểu diễn bằng vectơ như hình sao cho $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 5^\circ$. Độ lớn lực tổng hợp tác động lên xe ô tô con là bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

***Giải***

Chọn hệ trục toạ độ $Oxy$ như hình bên, mỗi đơn vị trên trục ứng với $1\,N$.




Ta có:

- $\overrightarrow{F_1} = (2000;0)$;

- $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right) = 5^\circ$ nên toạ độ của $\overrightarrow{F_2}$ là:

$\overrightarrow{F_2} = \left(300\cdot\cos 5^\circ; 300\cdot\sin 5^\circ\right)$.

Do đó, lực $\vec{F}$ tổng hợp các lực tác động lên xe ô tô con có toạ độ là:

$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \left(2000 + 300\cdot\cos 5^\circ; 300\cdot\sin 5^\circ\right)$.

Độ lớn lực tổng hợp $\vec{F}$ tác động lên xe ô tô con là:

$|\vec{F}| = \sqrt{\left(2000 + 300\cdot\cos 5^\circ\right)^2 + \left(300\cdot\sin 5^\circ\right)^2} \approx 2299(N)$.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. TRỤC TỌA ĐỘ

**Câu 1.** Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm *A, B* có tọa độ lần lượt là -2 và 5.

a) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm *I* của đoạn thẳng ***AB.***

c) Tìm tọa độ của điểm *M* sao cho $2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

d) Tìm tọa độ điểm *N* sao cho $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = -1$.

**Câu 2.** Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm *A, B* có tọa độ lần lượt là -3 và 1.

a) Tìm tọa độ của điểm *M* sao cho $3\overline{MA} - 2\overline{MB} = 1$.

Tìm tọa độ điểm *N* sao cho $\overline{NA} + 3\overline{NB} = \overline{AB}$.

**Câu 3.** Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm $A(-2), B(2), C(1), D(6)$.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}}$.

b) Gọi *I* là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng $\overline{IC}.\overline{ID} = \overline{IA}^2$.

Gọi *J* là trung điểm của *CD*. Chứng minh rằng $\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AJ}$.

**Câu 4.** Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm *A, B, C* có tọa độ lần lượt là *a, b, c.*

a) Tìm tọa độ trung điểm *I* của *AB.*

b) Tìm tọa độ điểm *M* sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

c) Tìm tọa độ điểm *N* sao cho $2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NC}$.

**Câu 5.** Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm *A, B, C, D* tùy ý.

a) Chứng minh rằng: $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{DA}.\overline{BC} = 0$.

b) Gọi *I, J, K, L* lần lượt là trung điểm của các đoạn *AC, BD, AB, CD.* Chứng minh rằng các đoạn *IJ và KL* có chung trung điểm.

### DẠNG 2. TỌA ĐỘ VÉC TƠ

**Câu 6.** Cho $\vec{a} = (1;-2)$; $\vec{b} = (0;3)$ tìm tọa độ của các vectơ sau:

a) $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}\ ;\ \vec{y}=\vec{a}-\vec{b}\ ;\ \vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}.$

b) $\vec{u}=3\vec{a}-2\vec{b}\ ;\ \vec{v}=2+\vec{b}\ ;\ \vec{w}=4\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}.$

**Câu 7.** Cho $\vec{a}=(2;0);\ \vec{b}=\left(-1;\frac{1}{2}\right);\ \vec{c}=(4;-6)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}.$

b) Tìm 2 số *m, n* sao cho $m\vec{a}+\vec{b}-n\vec{c}=\vec{0}.$

*c)* Biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo $\vec{a},\vec{b}.$

## DẠNG 3. TỌA ĐỘ ĐIỂM

**Câu 8.** Cho hai điểm $A(3;-5), B(1;0)$.

a) Tìm tọa độ điểm $C$ sao cho: $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm điểm $D$ đối xứng với $A$ qua $C$.

c) Tìm điểm $M$ chia đoạn $AB$ theo tỉ số $k=-3$.

**Câu 9.** Cho ba điểm $A(-1;1), B(1;3), C(-2;0)$.

a) Chứng minh ba điểm $A,B,C$ thẳng hàng.

b) Tìm các tỉ số mà điểm $A$ chia đoạn $BC$, điểm $B$ chia đoạn $AC$, điểm $C$ chia đoạn $AB$.

**Câu 10.** Cho ba điểm $A(1;-2), B(0;4), C(3;2)$.

a) Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm $I$ của đoạn thẳng $AB$.

c) Tìm tọa độ điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.

d) Tìm tọa độ điểm $N$ sao cho $\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{BN}-4\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

**Câu 11.** Cho ba điểm $A(-1;1), B(2;1), C(-1;-3)$.

a) CMR: Tồn tại tam giác $ABC$.

b) Tính chu vi tam giác.

c) Tìm tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$.

d) Xác định điểm $D$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

e) Tìm điểm $M$ thuộc trục $Ox$ sao cho $M$ cách đều $A,B$.

f) Tìm điểm $N$ thuộc trục $Oy$ sao cho $N$ cách đều $B,C$.

**Câu 12.** Cho tam giác $ABC$ có $A(4;1), B(2;4), C(2;-2)$.

a) Tính chu vi tam giác.

b) Xác định điểm $D$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

c) Xác định tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$.

d) Xác định tọa độ trực tâm $H$ của tam giác.

e) Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

**Câu 13.** Cho $A(1;3), B(2;5)$ và $C(4;-1)$.

a) Tìm chu vi của tam giác $ABC$.

b) Tìm tọa độ trung điểm của các đoạn thẳng $AB$, $AC$.

c) Tìm tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$.

d) Tìm tọa độ điểm $D$ để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

e) Tìm tọa độ trực tâm $H$ của tam giác.

f) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

## DẠNG 4. ỨNG DỤNG

**Câu 14.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$

a). Chứng minh rằng $ABC$ là tam giác vuông.

b). Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ suy ra cosB

**Câu 15.** Cho ba điểm $A\left(4\sqrt{3};-1\right)$, $B(0;3)$, $C\left(8\sqrt{3};3\right)$.

a) Tìm đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.

b) Tìm $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$

**Câu 16.** Cho $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$. Tìm $k$ để

a) $\vec{u}\perp\vec{v}$ b) $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|$

**Câu 17.** Cho các véc-tơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$.

a) Tìm các số $k$ và $m$ sao cho $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ vuông góc với véc-tơ $\vec{a}+\vec{b}$.

b) Tìm véc-tơ $\vec{d}$ biết $\vec{a}.\vec{d}=4$ và $\vec{b}.\vec{d}=-2$.

**Câu 18.** Tính góc giữa hai véc-tơ và $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau

a) $\vec{a}=(1;-2)$, $\vec{b}=(-2;-6)$

b) $\vec{a}=(-3;4)$, $\vec{b}=(4;3)$.

c) $\vec{a}=(2;5)$, $\vec{b}=(3;-7)$.

**Câu 19.** Cho $\vec{u}=(4;1)$ và $\vec{v}=(1;4)$.

a) Tìm m để $\vec{a}=\vec{u}+m.\vec{v}$ vuông góc với trục hoành.

b) Tìm n để $\vec{b}=n.\vec{u}+\vec{v}$ tạo với véc-tơ $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}$ một góc $45^{\circ}$.

**Câu 20.** Cho các điểm $A\left(4\sqrt{3};-1\right)$, $B(0;3)$, $C\left(8\sqrt{3};3\right)$.

a) Tính các cạnh của tam giác $ABC$.

b) Tính các góc của tam giác $ABC$.

**Câu 21.** Cho tam giác $ABC$ có ba đỉnh $A(-3;0)$, $B(3;0)$, $C(2;6)$. Tìm tọa độ trọng tâm $G$ và trực tâm $H$ của tam giác.

**Câu 22.** Cho điểm $A(1;1)$, $B(2;4)$ và $C(10;-2)$.

a) Chứng minh tam giác $ABC$ vuông tại $A$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ và tính $\cos B$, $\cos C$.

**Câu 23.** Cho hai điểm $A(2;4)$ và $B(1;1)$. Tìm tọa độ điểm $C$ sao cho tam giác $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$.

**Câu 24.** Cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$, $D(0;-2)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

**Câu 25.** Biết $A(1;-1)$ và $B(3;0)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm tọa độ các đỉnh $C$ và $D$.

**Câu 26.** Cho tam giác $ABC$ với $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$.

a) Tìm điểm $D$ để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

b) Tìm chân $A'$ của đường cao vẽ từ đỉnh $A$ của tam giác $ABC$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm $A$, $B$ lần lượt có tọa độ là $a$, $b$. $M$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}, k\neq 1$. Khi đó tọa độ của điểm $M$ là:

**A.** $\dfrac{ka-b}{k-1}$ **B.** $\dfrac{kb-a}{k-1}$ **C.** $\dfrac{a-kb}{k+1}$ **D.** $\dfrac{kb+a}{k-1}$

**Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai vectơ $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=-30$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=3$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=30$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=43$.

**Câu 3.** Trên trục $(O;\vec{i})$ cho ba điểm $A$, $B$, $C$. Nếu biết $\overline{AB}=5, \overline{AC}=7$ thì $\overline{CB}$ bằng:

**A.** $-2$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

**Câu 4.** Tên trục $(O;\vec{i})$ cho hai điểm $A$, $B$ lần lượt có tọa độ 1 và 5. Khi đó tọa độ điểm $M$ thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ là:

**A.** 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

**Câu 5.** Trên trục $x'Ox$ có vectơ đơn vị $\vec{i}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

**A.** $x_A$ là tọa độ điểm $A \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}=x_A.\vec{i}$

**B.** $x_B, x_C$ là tọa độ của điểm $B$ và $C$ thì $\overline{BC}=x_B-x_C$

**C.** $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$

**D.** $M$ là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \overline{OM}=\dfrac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}$

**Câu 6.** Trên trục $x'Ox$, cho tọa độ của $A$, $B$ lần lượt là $-2;3$. Khi đó tọa độ điểm $M$ thỏa mãn: $OM^2=\overline{MA}.\overline{MB}$ là:

**A.** 6 **B.** $\sqrt{6}$ **C.** $-6$ **D.** 4

**Câu 7.** Trên trục $(O;\vec{i})$ tìm tọa độ $x$ của điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, với $A$, $C$ có tọa độ tương ứng là $-1$ và 3

**A.** $x=\dfrac{5}{3}$ **B.** $x=\dfrac{2}{3}$ **C.** $x=\dfrac{2}{5}$ **D.** $x=\dfrac{5}{2}$

**Câu 8.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. **B.** $M\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$. và $\vec{v}$ cùng phương.

**C.** $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. **D.** $\vec{u}=-\vec{v}$.

**Câu 9.** Trong mp $Oxy$ cho $A(4;6)$, $B(1;4)$, $C\left(7;\dfrac{3}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây sai

**A.** $\overrightarrow{AB}=(-3;-2)$, $\overrightarrow{AC}=\left(3;-\dfrac{9}{2}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.

**C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{13}$. **D.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

**Câu 10.** Cho các vectơ $\vec{a}=(1;-2)$, $\vec{b}=(-2;-6)$. Khi đó góc giữa chúng là

**A.** $45^{\circ}$. **B.** $60^{\circ}$. **C.** $30^{\circ}$. **D.** $135^{\circ}$.

**Câu 11.** Cho $\overrightarrow{OM}=(-2;-1)$, $\overrightarrow{ON}=(3;-1)$. Tính góc của $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)$

**A.** $135^{\circ}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-135^{\circ}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 12.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho $\vec{a}=(1;3)$, $\vec{b}=(-2;1)$. Tích vô hướng của 2 vectơ $\vec{a}.\vec{b}$ là:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 13.** Cặp vectơ nào sau đây vuông góc?

**A.** $\vec{a}=(2;-1)$ và $\vec{b}=(-3;4)$. **B.** $\vec{a}=(3;-4)$ và $\vec{b}=(-3;4)$.

**C.** $\vec{a}=(-2;-3)$ và $\vec{b}=(-6;4)$. **D.** $\vec{a}=(7;-3)$ và $\vec{b}=(3;-7)$.

**Câu 14.** Cho 2 vec tơ $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$, tìm biểu thức sai:

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

**C.** $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{a^2}+\overrightarrow{b^2}-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2\right]$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\overrightarrow{a^2}-\overrightarrow{b^2}\right]$.

**Câu 15.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-1)$.Tính $\cos A$

**A.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$.

**Câu 16.** Trong mặt phẳng $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ cho 2 vectơ : $\vec{a}=3\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=8\vec{i}-4\vec{j}$. Kết luận nào sau đây sai?

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **B.** $\vec{a}\perp\vec{b}$. **C.** $\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|=0$. **D.** $\left|\vec{a}.\vec{b}\right|=0$.

**Câu 17.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho $A(1;2)$, $B(4;1)$, $C(5;4)$. Tính $\widehat{BAC}$ ?

**A.** $60^{\circ}$. **B.** $45^{\circ}$. **C.** $90^{\circ}$. **D.** $120^{\circ}$.

**Câu 18.** Cho các vectơ $\vec{a}=(1;-3)$, $\vec{b}=(2;5)$. Tính tích vô hướng của $\vec{a}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$

**A.** 16. **B.** 26. **C.** 36. **D.** $-16$.

**Câu 19.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$ và $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ với $k$, $m\in\mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $2k=2m$ **B.** $3k=2m$ **C.** $2k+3m=0$ **D.** $3k+2m=0$.

**Câu 20.** Trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ cho 4 điểm *A, B, C, D* có tọa độ lần lượt là *a, b, c, d*. Gọi *E, F, G, H* (có tọa độ lần lượt là *e, f, g, h*) theo thứ tự là trung điểm của *AB, BC, CD, DA*. Xét các mệnh đề:

I. $e+f+g+h=a+b+c+d$

II. $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}$

III. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$

Trong các mệnh đề trên mệnh đề nào đúng?

**A.** Chỉ I **B.** II và III **C.** I, II, III **D.** Chỉ III

**Câu 21.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho $\vec{a}=(2;-1)$ và $\vec{b}=(-3;4)$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

**A.** Tích vô hướng của hai vectơ đã cho là $-10$. **B.** Độ lớn của vectơ $\vec{a}$ là $\sqrt{5}$.

**C.** Độ lớn của vectơ $\vec{b}$ là 5. **D.** Góc giữa hai vectơ là $90^{\circ}$.

**Câu 22.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-1)$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

**A.** $7$. **B.** $5$. **C.** $-7$. **D.** $-5$.

**Câu 23.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây đúng.

**A.** $\overrightarrow{AB}=(4;2)$, $\overrightarrow{BC}=(2;-4)$. **B.** $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$.

**C.** Tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$. **D.** Tam giác $ABC$ vuông cân tại $B$.

**Câu 24.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=40$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-40$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-26$

**Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}$

**A.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-4$. **B.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=0$. **C.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=4$. **D.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=16$.

**Câu 26.** Trên trục $(\Delta)$ cho bốn điểm *A, B, C, D* bất kì. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AC}.\overline{DB}+\overline{AD}.\overline{BC}=0$ **B.** $\overline{AB}.\overline{DB}+\overline{AC}.\overline{BC}+\overline{AD}.\overline{CD}=0$

**C.** $\overline{AB}.\overline{AC}+\overline{AD}.\overline{BC}+\overline{BC}.\overline{CD}=0$ **D.** $\overline{BD}.\overline{BC}+\overline{AD}.\overline{AC}+\overline{CB}.\overline{CA}=0$

**Câu 27.** Trên trục $(O;\vec{i})$ cho ba điểm *A, B, C* có tọa độ lần lượt là $-5;2;4$. Khi đó tọa độ điểm *M* thảo mãn $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ là:

**A.** $\frac{10}{3}$ **B.** $\frac{10}{9}$ **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{5}{4}$

**Câu 28.** Trên trục $x'Ox$ cho tọa độ các điểm *B, C* lần lượt là $m-2$ và $m^2+3m+2$. Tìm *m* để đoạn thẳng *BC* có độ dài nhỏ nhất.

**A.** $m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=-2$

**Câu 29.** Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm *A, B, C,* ***D.*** Gọi *I, J, K, L* lần lượt là trung điểm của *AC, DB, AD, BC.* Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{IJ}$ **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{KI}$

**C.** Trung điểm các đoạn *IJ* và *KL* trùng nhau **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IK}$

**Câu 30.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai vectơ $\vec{a}=(-3;2)$ và $\vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c}.\vec{a}=9$ và $\vec{c}.\vec{b}=-20$

**A.** $\vec{c}=(-1;-3)$ **B.** $\vec{c}=(-1;3)$ **C.** $\vec{c}=(1;-3)$ **D.** $\vec{c}=(1;3)$

**Câu 31.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(2;3)$.

Tính $P=\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})$.

**A.** $P=0$ **B.** $P=18$ **C.** $P=20$ **D.** $P=28$

**Câu 32.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

**A.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}$

**Câu 33.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm $C$ thuộc trục tung sao cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$.

**A.** $C(0;6)$. **B.** $C(5;0)$. **C.** $C(3;1)$. **D.** $C(0;-6)$.

**Câu 34.** Tìm x để hai vectơ $\vec{a}=(x;2)$ và $\vec{b}=(2;-3)$ có giá vuông góc với nhau.

**A.** 3. **B.** 0. **C.** $-3$. **D.** 2.

**Câu 35.** Cho tam giác $ABC$ có $A(-1;2), B(0;3), C(5;-2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh $A$ của tam giác $ABC$.

**A.** $(0;3)$. **B.** $(0;-3)$. **C.** $(3;0)$. **D.** $(-3;0)$.

**Câu 36.** Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm *A, B, C,* ***D.*** Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overline{DA}^2.\overline{BC}+\overline{DB}^2.\overline{CA}+\overline{DC}^2.\overline{AB}+\overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}=0$

**B.** $\overline{DA}^2.\overline{BC}+\overline{DB}^2.\overline{CA}+\overline{DC}^2.\overline{AB}=0$

**C.** $\overline{AB}^2.\overline{BC}+\overline{CD}^2.\overline{DB}+\overline{DB}^2.\overline{CA}=0$

**D.** $\overline{DA}.\overline{BC}+\overline{DB}.\overline{CA}+\overline{CD}.\overline{AB}+\overline{BC}.\overline{AB}=0$

**Câu 37.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;2)$ và $\vec{v}=(4m;2m-2)$. Tìm $m$ để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

**A.** $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

**Câu 38.** Xác định tọa độ của vectơ $\vec{c}=\vec{a}+3\vec{b}$ biết $\vec{a}=(2;-1), \vec{b}=(3;4)$

**A.** $\vec{c}=(11;11)$ **B.** $\vec{c}=(11;-13)$ **C.** $\vec{c}=(11;13)$ **D.** $\vec{c}=(7;13)$

**Câu 39.** Cho $\vec{a}=(2;1), \vec{b}=(3;4), \vec{c}=(-7;2)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x}-2\vec{a}=\vec{b}-3\vec{c}$.

**A.** $\vec{x}=(28;2)$ **B.** $\vec{x}=(13;5)$ **C.** $\vec{x}=(16;4)$ **D.** $\vec{x}=(28;0)$

**Câu 40.** Xác định tọa độ vectơ $\vec{c}=5\vec{a}-2\vec{b}$ biết $\vec{a}=(3;-2), \vec{b}=(1;4)$

**A.** $\vec{c}=(2;-11)$ **B.** $\vec{c}=(-2;11)$ **C.** $\vec{c}=(2;11)$ **D.** $\vec{c}=(11;2)$

**Câu 41.** Cho $\vec{a}=(3;-1), \vec{b}=(0;4), \vec{c}=(5;3)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x}-\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}=\vec{0}$.

**A.** $(18;0)$ **B.** $(-8;18)$ **C.** $(8;18)$ **D.** $(8;-18)$

**Câu 42.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $(O;\vec{i},\vec{j})$, cho hai vectơ $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$ và $\vec{b}=(-4;2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng. **B.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

**C.** $\vec{a}=(-1;2)$. **D.** $\vec{a}=(2;1)$.

**Câu 43.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm $A$ sao cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$.

**A.** $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$. **B.** $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

**C.** $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$. **D.** $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

**Câu 44.** Cho véc tơ $\vec{a}(1;-2)$. Với giá trị nào của $y$ thì véc tơ $\vec{b}=(3;y)$ tạo với véctơ $\vec{a}$ một góc $45^\circ$

**A.** $y=-9$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=9 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-9 \end{array}\right.$. **D.** $y=-1$.

**Câu 45.** Cho hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$ và hai véc tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

**A.** $120°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

**Câu 46.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(3;4)$, $\vec{c}=(7;2)$. Cho biết $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ khi đó.

**A.** $m=\frac{22}{5};\ n=\frac{3}{5}$. **B.** $m=-\frac{22}{5};\ n=-\frac{3}{5}$. **C.** $m=\frac{1}{5};\ n=\frac{-3}{5}$. **D.** $m=\frac{22}{5};\ n=\frac{-3}{5}$.

**Câu 47.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho các điểm $A(4;2), B(-2;1), C(0;3), M(-3;7)$. Giả sử $\overrightarrow{AM}=x.\overrightarrow{AB}+y.\overrightarrow{AC}(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó $x+y$ bằng

**A.** $\frac{12}{5}$. **B.** $5$. **C.** $-\frac{12}{5}$. **D.** $-5$.

**Câu 48.** Trong mặt phẳng $Oxy$ ;cho các véc tơ $\vec{a}=(2;-1);\vec{b}=(0;4)$ và $\vec{c}=(3;3)$. Gọi $m$ và $n$ là hai số thực sao cho $\vec{c}=m\vec{a}-n\vec{b}$. Tính giá trị biểu thức $P=m^2+n^2$.

**A.** $P=\frac{225}{64}$. **B.** $P=\frac{100}{81}$. **C.** $P=\frac{97}{64}$. **D.** $P=\frac{193}{64}$.

**Câu 49.** Cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(-3;4)$, $\vec{c}=(-4;9)$. Hai số thực $m$, $n$ thỏa mãn $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{c}$. Tính $m^2+n^2$?

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $1$.

**Câu 50.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho $\vec{a}=(2;1);\vec{b}=(3;4);\vec{c}(7;2)$. Tìm $m$, n để $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

**A.** $m=-\frac{22}{5},n=-\frac{3}{5}$ **B.** $m=\frac{1}{5},n=-\frac{3}{5}$ **C.** $m=\frac{22}{5},n=-\frac{3}{5}$ **D.** $m=\frac{22}{5},n=\frac{3}{5}$

**Câu 51.** Cho các vectơ $\vec{a}=(4;-2),\vec{b}=(-1;-1)$, $\vec{c}=(2;5)$ Phân tích vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ ta được:

**A.** $\vec{b}=-\frac{1}{8}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{c}$ **B.** $\vec{b}=\frac{1}{8}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{c}$ **C.** $\vec{b}=-\frac{1}{8}\vec{a}-4\vec{c}$ **D.** $\vec{b}=-\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}$

**Câu 52.** Cho vectơ $\vec{a}=(2;1),\vec{b}=(3;4)$, $\vec{c}=(7;2)$. Khi đó $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{c}$. Tính tổng $m+n$ bằng:

**A.** 5 **B.** 3,8 **C.** $-5$ **D.** $-3,8$

**Câu 53.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho 4 điểm $A(1;-2), B(0;3), C(-3;4), \mathrm{D}(-1;8)$. Phân tích $\overrightarrow{CD}$ qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

**Câu 54.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho $\Delta ABC$ biết $A(2;-3), B(4;7), C(1;5)$. Tọa độ trọng tâm $G$ của $\Delta ABC$ là

**A.** $(7;15)$. **B.** $\left(\frac{7}{3};5\right)$. **C.** $(7;9)$. **D.** $\left(\frac{7}{3};3\right)$.

**Câu 55.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho $A(2;-3), B(4;7)$. Tìm tọa độ trung điểm $I$ của $AB$.

**A.** $(3;2)$. **B.** $(2;10)$. **C.** $(6;4)$. **D.** $(8;-21)$.

**Câu 56.** Cho $\Delta ABC$ có $A(4;9)$, $B(3;7)$, $C(x-1;y)$. Để $G(x;y+6)$ là trọng tâm $\Delta ABC$ thì giá trị $x$ và $y$ là

**A.** $x=3,\ y=1$. **B.** $x=-3,\ y=-1$. **C.** $x=-3,\ y=1$. **D.** $x=3,\ y=-1$.

**Câu 57.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $A(2;-3);B(4;7)$. Tìm tọa độ trung điểm $I$ của đoạn $AB$.

**A.** $I(6;4)$ **B.** $I(2;10)$ **C.** $I(3;2)$ **D.** $I(8;-21)$

**Câu 58.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(-3;2)$. Tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$ là

**A.** $G\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $G\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **C.** $G\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $G\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

**Câu 59.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có ba đỉnh $A(-1;2)$, $B(2;0)$, $C(-3;1)$. Toạ độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$ là

**A.** $G\left(-\frac{2}{3};1\right)$. **B.** $G\left(\frac{2}{3};-1\right)$. **C.** $G\left(-\frac{4}{3};1\right)$. **D.** $G\left(\frac{4}{3};-1\right)$.

**Câu 60.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $A(-4;1);B(2;4);C(2;-2)$. Tìm tọa độ điểm $D$ sao cho C là trọng tâm $\Delta ABD$

**A.** $D(8;11)$ **B.** $D(12;11)$ **C.** $D(8;-11)$ **D.** $D(-8;-11)$

**Câu 61.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $\Delta ABC$ có $A(3;5)$, $B(1;2),C(5;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác.

**A.** $G(-3;4)$ **B.** $G(4;0)$ **C.** $G(2;3)$ **D.** $G(3;3)$

**Câu 62.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho bốn điểm $A(3;-5),B(-3;3),C(-1;-2),D(5;-10)$. Hỏi $G\left(\frac{1}{3};-3\right)$ là trọng tâm của tam giác nào dưới đây?

**A.** $ABC$. **B.** $BCD$. **C.** $ACD$. **D.** $ABD$.

**Câu 63.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho tam giác $ABC$ có $D(3;4),E(6;1),F(7;3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AB,BC,CA$. Tính tổng tung độ ba đỉnh của tam giác $ABC$.

**A.** $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $8$. **D.** $16$.

**Câu 64.** Cho tam giác $ABC$. Biết trung điểm của các cạnh $BC$, $CA$, $AB$ có tọa độ lần lượt là $M(1;-1)$, $N(3;2)$, $P(0;-5)$. Khi đó tọa độ của điểm $A$ là:

**A.** $(2;-2)$. **B.** $(5;1)$. **C.** $\left(\sqrt{5};0\right)$. **D.** $\left(2;\sqrt{2}\right)$.

**Câu 65.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho $\Delta MNP$ có $M(1;-1);N(5;-3)$ và $P$ thuộc trục $Oy$. Trọng tâm $G$ của tam giác nằm trên trục $Ox$. Tọa độ của điểm $P$ là:

**A.** $P(0;4)$ **B.** $P(2;0)$ **C.** $P(2;4)$ **D.** $P(0;2)$

**Câu 66.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $M(3;-4)$. Gọi $M_1,M_2$ làn lượt là hình chiếu vuông góc của $M$ trên $Ox$, $Oy$. Khẳng định nào đúng?

**A.** $\overline{OM_1}=-3$ **B.** $\overline{OM_2}=4$

**C.** $\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}=(-3;4)$ **D.** $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=(3;-4)$

**Câu 67.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho tam giác $MNP$ có $M(1;\ -1)$, $N(5;\ -3)$ và $P$ là điểm thuộc trục $Oy$, trọng tâm $G$ của tam giác $MNP$ nằm trên trục $Ox$. Tọa độ điểm $P$ là

**A.** $(2;\ 4)$. **B.** $(0;\ 4)$. **C.** $(0;\ 2)$. **D.** $(2;\ 0)$.

**Câu 68.** Trên mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho hai điểm $A(1;1), B(2;4)$. Tìm tọa độ điểm $M$ để tứ giác $OBMA$ là một hình bình hành.

**A.** $M(-3;-3)$. **B.** $M(3;-3)$. **C.** $M(3;3)$. **D.** $M(-3;3)$.

**Câu 69.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;5), B(1;1), C(3;3)$, một điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. Tọa độ của E là

**A.** $(-3;3)$. **B.** $(-3;-3)$. **C.** $(3;-3)$. **D.** $(-2;-3)$.

**Câu 70.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G\left(\frac{2}{3};\ 0\right)$, biết $M(1;-1)$ là trung điểm của cạnh $BC$. Tọa độ đỉnh $A$ là

**A.** $(2;\ 0)$. **B.** $(-2;\ 0)$. **C.** $(0;-2)$. **D.** $(0;\ 2)$.

**Câu 71.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho $A(2;3)$, $B(-2;1)$. Điểm $C$ thuộc tia $Ox$ sao cho tam giác $ABC$ vuông tại $C$ có tọa độ là:

**A.** $C(3;0)$. **B.** $C(-3;0)$. **C.** $C(-1;0)$. **D.** $C(2;0)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có : $C \in Ox \Rightarrow C(x;0)$. Khi đó : $\overrightarrow{AC} = (x-2;-3)$ ; $\overrightarrow{BC} = (x+2;-1)$.

Tam giác $ABC$ vuông tại $C \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy $C(-1;0)$ hoặc $C(1;0)$.

**~!Câu 72.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho $A(3;3)$, $B(-1;-9)$, $C(5;-1)$. Gọi $I$ là trung điểm của $AB$. Tìm tọa độ $M$ sao cho $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$.

**A.** $(5;4)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-6;-1)$. **D.** $(2;1)$.

**Câu 73.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $\Delta ABC$ có $A(-3;3), B(1;4), C(2;-5)$. Tọa độ điểm $M$ thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM}$ là:

**A.** $M\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$ **B.** $M\left(-\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right)$ **C.** $M\left(\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right)$ **D.** $M\left(\frac{5}{6};-\frac{1}{6}\right)$

**Câu 74.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $A(2;1), B(1;-3)$. Tìm tọa độ giao điểm $I$ của hai đường chéo hình bình hành $OAB$**C.**

**A.** $I\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ **B.** $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ **C.** $I(2;6)$ **D.** $I\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

**Câu 75.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $A(1;3), B(4;0)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

**A.** $M(1;18)$ **B.** $M(-1;18)$ **C.** $M(-18;1)$ **D.** $M(1;-18)$

**Câu 76.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho 3 điểm $A(2;5); B(1;1); C(3;3)$. Tìm điểm $E$ thuộc mặt phẳng tọa độ thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$?

**A.** $E(3;-3)$ **B.** $E(-3;3)$ **C.** $E(-3;-3)$ **D.** $E(-2;-3)$

**Câu 77.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $\Delta ABC$ có $A(3;4), B(2;1), C(-1;-2)$. Tìm điểm $M$ có tung độ dương trên đường thẳng $BC$ sao cho $S_{ABC} = 3S_{ABM}$.

**A.** $M(2;2)$ **B.** $M(3;2)$ **C.** $M(-3;2)$ **D.** $M(3;3)$

**Câu 78.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho 3 điểm $A(-1;-1), B(0;1), C(3;0)$. Xác định tọa độ giao điểm $I$ của $AD$ và $BG$ với $D$ thuộc $BC$ và $2BD = 5DC$, $G$ là trọng tâm $\Delta ABC$

**A.** $I\left(\frac{5}{9};1\right)$ **B.** $I\left(\frac{1}{9};1\right)$ **C.** $I\left(\frac{35}{9};2\right)$ **D.** $I\left(\frac{35}{9};1\right)$

**Câu 79.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có ba đỉnh $A(-1;2)$, $B(2;0)$, $C(-3;1)$. Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp $I$ của tam giác $ABC$ là

**A.** $I\left(\frac{11}{14};\frac{13}{14}\right)$. **B.** $I\left(\frac{11}{14};-\frac{13}{14}\right)$. **C.** $I\left(-\frac{11}{14};\frac{13}{14}\right)$. **D.** $I\left(-\frac{11}{14};-\frac{13}{14}\right)$.

**Câu 80.** Tam giác $ABC$ có đỉnh $A(-1;2)$, trực tâm $H(3;0)$, trung điểm của $BC$ là $M(6;1)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là

**A.** $5$. **B.** $\sqrt{5}$ **C.** $3$. **D.** $4$.

# Bài 2. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ

Nếu $\vec{u}=(x_1;y_1)$ và $\vec{v}=(x_2;y_2)$ thì

$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2;y_1+y_2)$

$\vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_2;y_1-y_2)$

$k\vec{u}=(kx_1;ky_1),\ k\in\mathbb{R}.$

*Nhận xét:* Hai vectơ $\vec{u}=(x_1;y_1),\vec{v}=(x_2;y_2)(\vec{v}\neq\vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực $k$ sao cho $x_1=kx_2$ và $y_1=ky_2$.

***Ví dụ 1.*** Cho $\vec{u}=(2;-1),\vec{v}=(1;5)$. Tìm tọa độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{u}+\vec{v}$;

b) $\vec{u}-\vec{v}$.

***Giải***

Do $\vec{u}=(2;-1),\vec{v}=(1;5)$ nên ta có:

a) $\vec{u}+\vec{v}=(2+1;-1+5)$. Vậy $\vec{u}+\vec{v}=(3;4)$.

b) $\vec{u}-\vec{v}=(2-1;-1-5)$. Vậy $\vec{u}-\vec{v}=(1;-6)$.

***Ví dụ 2.*** Cho $\vec{a}=(-2;3),\vec{b}=(2;1),\vec{c}=(1;2)$. Tính tọa độ của mỗi vectơ sau: $3\vec{a};2\vec{a}-\vec{b};\vec{a}+2\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{c}$.

***Giải***

Do $\vec{a}=(-2;3),\vec{b}=(2;1),\vec{c}=(1;2)$ nên ta có:

+) $3\vec{a}=(3\cdot(-2);3.3)$. Vậy $3\vec{a}=(-6;9)$.

+) $2\vec{a}=(-4;6)$.

Do đó $2\vec{a}-\vec{b}=(-4-2;6-1)$, vì vậy $2\vec{a}-\vec{b}=(-6;5)$.

+) $2\vec{b}=(4;2),\vec{a}+2\vec{b}=(2;5)$ và $-\frac{3}{2}\vec{c}=\left(-\frac{3}{2};-3\right)$.

Do đó $\vec{a}+2\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{c}=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

***Ví dụ 3.*** Cho ba điểm $A(-1;-3),B(2;3)$ và $C(3;5)$. Chứng minh ba điểm $A,B,C$ thẳng hàng.

***Giải***

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;6),\overrightarrow{BC}=(1;2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BC}$. Vậy ba điểm $A,B,C$ thẳng hàng.

### II. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm tam giác

Cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Nếu $M(x_M;y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ thì

$x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2}.$

Cho tam giác $ABC$ có $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B),C(x_C;y_C)$. Nếu $G(x_G;y_G)$ là trọng tâm tam giác $ABC$ thì

$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$

***Ví dụ 4.*** Cho tam giác $ABC$ có $A(-2;1),B(2;5),C(5;2)$. Tìm toạ độ trung điểm $M$ của đoạn thẳng $AB$ và trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$.

***Giải***

Do $M(x_M;y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ nên

$x_M = \frac{-2+2}{2} = 0; y_M = \frac{1+5}{2} = 3.$

Vậy $M(0;3)$.

Do $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác $ABC$ nên $x_G = \frac{(-2)+2+5}{3}; y_G = \frac{1+5+2}{3}$. Vậy $G\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$.

**III. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng**

Nếu $\vec{u} = (x_1; y_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2)$ thì $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$.

*Nhận xét*

a) Nếu $\vec{a} = (x; y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Nếu $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thì $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

c) Với hai vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2)$ khác $\vec{0}$, ta có:

- $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

$$\cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

***Ví dụ 5.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;2), B(1;-1), C(8;0)$.

a) Tính $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ và $\cos\widehat{ABC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Giải tam giác $ABC$.

***Giải***

a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (1;3), \overrightarrow{BC} = (7;1)$. Do đó $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 10$.

Mặt khác, ta cũng có:

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50},$

$$\cos\widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{50}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

b) Do $\overrightarrow{AB} = (-1;-3)$ và $\overrightarrow{AC} = (6;-2)$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot 6 + (-3) \cdot (-2) = 0$. Vậy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Do $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$, tức là tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Mà $\cos\widehat{ABC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ nên $\widehat{ABC} \approx 63^\circ$.

Vì thế $\widehat{ACB} \approx 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$.

Mặt khác, ta có: $AB = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{10}$,

$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, CA = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{10}$

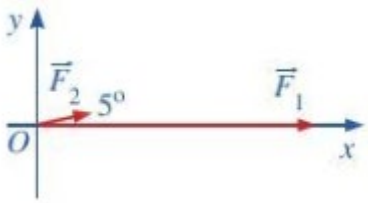
***Ví dụ 6.*** Một chiếc xe ô tô con bị mắc kẹt trong bùn lầy. Để kéo xe ra, người ta dùng xe tải kéo bằng cách gắn một đầu dây cáp kéo xe vào đầu xe ô tô con và móc đầu còn lại vào phía sau của xe tải kéo. Khi kéo, xe tải tạo ra một lực $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn (cường độ) là $2000\,N$ theo phương ngang lên xe ô tô con.




Ngoài ra, có thêm một người đẩy phía sau xe ô tô con, tạo ra lực $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là $300\,N$ lên xe. Các lực này được biểu diễn bằng vectơ như hình sao cho $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 5^\circ$. Độ lớn lực tổng hợp tác động lên xe ô tô con là bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

***Giải***

Chọn hệ trục toạ độ $Oxy$ như hình bên, mỗi đơn vị trên trục ứng với $1\,N$.




Ta có:

- $\overrightarrow{F_1} = (2000;0)$;

- $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right) = 5^\circ$ nên toạ độ của $\overrightarrow{F_2}$ là:

$\overrightarrow{F_2} = \left(300\cdot\cos 5^\circ; 300\cdot\sin 5^\circ\right)$.

Do đó, lực $\vec{F}$ tổng hợp các lực tác động lên xe ô tô con có toạ độ là:

$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \left(2000 + 300\cdot\cos 5^\circ; 300\cdot\sin 5^\circ\right)$.

Độ lớn lực tổng hợp $\vec{F}$ tác động lên xe ô tô con là:

$|\vec{F}| = \sqrt{\left(2000 + 300\cdot\cos 5^\circ\right)^2 + \left(300\cdot\sin 5^\circ\right)^2} \approx 2299(N)$.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. TRỤC TỌA ĐỘ

**Câu 1.** Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm $A$, $B$ có tọa độ lần lượt là -2 và 5.

a) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm $I$ của đoạn thẳng $AB$.

c) Tìm tọa độ của điểm $M$ sao cho $2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

d) Tìm tọa độ điểm $N$ sao cho $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = -1$.

**Lời giải**

a) Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$:

Ta có: $x_A = -2;\ x_B = 5 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = x_B - x_A = 7 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 7\vec{i}$ ($\vec{i}$ là vectơ đơn vị)

b) Vì $I$ là trung điểm của đoạn AB nên tọa độ của $I$ là :

$x_I = \dfrac{-2+5}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x_I = \dfrac{3}{2}$

c) $M(m)$ là điểm xác định bởi hệ thức: $2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = 2,5\overrightarrow{BM}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\vec{i} = 2,5.\overrightarrow{BM}.\vec{i} \Leftrightarrow -2 - m = 2,5(m-5) \Leftrightarrow 3,5m = 10,5 \Leftrightarrow m = 3 \Rightarrow x_m = 3$

d) $N(n)$ là điểm xác định bởi hệ thức: $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = -1 \Leftrightarrow 5\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = -1$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{AB} = -1 \Leftrightarrow 5\overrightarrow{NA} = -1 - 3.7 = -22 \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} = -\dfrac{22}{5} \Leftrightarrow -2 - n = -\dfrac{22}{5} \Leftrightarrow N = \dfrac{12}{5}$.

**Câu 2.** Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm $A$, $B$ có tọa độ lần lượt là -3 và 1.

a) Tìm tọa độ của điểm $M$ sao cho $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 1$.

Tìm tọa độ điểm $N$ sao cho $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}$.

**Lời giải**

Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm $A$, $B$ có tọa độ lần lượt là -3 và $1 \Rightarrow A(-3); B(1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 4$

a) Tọa độ điểm $M$ sao cho $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \overline{MA}=1+2\overline{AB}=9\Leftrightarrow -3-m=9\Rightarrow m=-12\Rightarrow M(-12)$

b) Tọa độ điểm $N$ sao cho $\overline{NA}+3\overline{NB}=\overline{AB}\Leftrightarrow \overline{NA}-\overline{NB}+4\overline{NB}=4$

$\Leftrightarrow 4\overline{NB}=4+\overline{AB}=8\Leftrightarrow \overline{NB}=2\Leftrightarrow 1-n=2\Rightarrow n=-1\Rightarrow N(-1)$

**Câu 3.** Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm $A(-2),B(2),C(1),D(6)$.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}=\frac{2}{\overline{AB}}$.

b) Gọi $I$ là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng $\overline{IC}.\overline{ID}=\overline{IA}^2$.

Gọi $J$ là trung điểm của $CD$. Chứng minh rằng $\overline{AC}.\overline{AD}=\overline{AB}.\overline{AJ}$.

***Lời giải***

Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm $A(-2;\overline{AD}=6),B(2),C(1),D(6)\Rightarrow \overline{AC}=3;\overline{AB}=4$

a) **Ta có** $\frac{1}{\overline{AC}}=\frac{1}{\overline{AD}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}=\frac{2}{\overline{AB}}$

b) $I(i)$ là trung điểm của $AB\Rightarrow i=\frac{-2+2}{2}=0\Rightarrow \overline{IA}=2;\overline{IC}=1;\overline{ID}=4$

$\Rightarrow \overline{IC}.\overline{ID}=1.4=2^2=\overline{IA}^2$

c) $I(j)$ là trung điểm của $CD\Rightarrow j=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow \overline{\text{AJ}}=\frac{9}{2}$

Ta có: $\left.\begin{array}{l}\overline{AC}.\overline{AD}=3.6=18\\ \overline{AB}.\overline{AJ}=4.\frac{9}{2}=18\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{AC}.\overline{AD}=\overline{AB}.\overline{AJ}$

**Câu 4.** Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm *A, B, C* có tọa độ lần lượt là *a, b, c.*

a) Tìm tọa độ trung điểm $I$ của *AB.*

b) Tìm tọa độ điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

c) Tìm tọa độ điểm $N$ sao cho $2\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NC}$.

***Lời giải***

Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm *A, B, C* có tọa độ lần lượt là *a, b, c*

a) Tọa độ trung điểm $I(i)$ *cầu AB:* $i=\frac{a+b}{2}$

b) Tọa độ điểm $M(m)$ thỏa mãn:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow a-m=c-b\Rightarrow m=a+b-c$

c) Tọa độ điểm $N(n)$ thỏa mãn: $2\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NC}\Rightarrow \left(2\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}\right)-\left(\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}\right)=2\overrightarrow{NC}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{NC}\Rightarrow \overrightarrow{NC}=\frac{2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}\Rightarrow n-c=a-b+\frac{c-b}{2}\Rightarrow n=a-\frac{3b}{2}+\frac{3a}{2}$

**Câu 5.** Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm *A, B, C, D* tùy ý.

a) Chứng minh rằng: $\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AC}.\overline{DB}+\overline{DA}.\overline{BC}=0$.

b) Gọi *I, J, K, L* lần lượt là trung điểm của các đoạn *AC, BD, AB, CD.* Chứng minh rằng các đoạn *IJ và KL* có chung trung điểm.

***Lời giải***

Gọi $a,b,c,d$ lần lượt là tọa độ các điểm $A,B,C,D$.

a) Ta có: $\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AC}.\overline{DB}+\overline{AD}.\overline{BC}$

$=(b-a)(d-c)+(c-a)(b-d)+(d-a)(c-b)$

$=(bd-bc-ad+ac)+(bc-cd-ab-ad)+(dc-bd-ac+ab)=0$

b) $I(i), J(j) K(k), L(l)$ lần lượt là trung điểm của các đoạn $AC, BD, AB, CD$

$\Rightarrow i=\dfrac{a+c}{2}; \mathrm{j}=\dfrac{b+d}{2}; \mathrm{k}=\dfrac{a+b}{2}; \mathrm{l}=\dfrac{c+d}{2}$

Khi đó, trung điểm của $IJ$ có tọa độ là: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{b+d}{2}\right)$

Trung điểm của $KL$ có tọa độ là: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}\right)$

Vậy hai trung điểm có cùng tọa độ bằng $\dfrac{1}{4}(a+b+c+d)$ nên chúng trùng nhau.

## DẠNG 2. TỌA ĐỘ VÉC TƠ

**Câu 6.** Cho $\vec{a}=(1;-2);\ \vec{b}=(0;3)$ tìm tọa độ của các vectơ sau:

a) $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}\ ;\ \vec{y}=\vec{a}-\vec{b}\ ;\ \vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}.$

b) $\vec{u}=3\vec{a}-2\vec{b}\ ;\ \vec{v}=2+\vec{b}\ ;\ \vec{w}=4\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}.$

***Lời giải***

a) $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}=(1+0;-2+3)=(1;1),\ \vec{y}=\vec{a}-\vec{b}=(1-0;-2-3)=(1;-5),$

$\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}=(3.1+3.0;2.(-2)-3.3)=(2;-13).$

*b)* $\vec{u}=3\vec{a}-2\vec{b}=(3;-12), \vec{u}=2\vec{a}+\vec{b}=(2;-1), \mathrm{w}=4\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}=4\left(3;-\dfrac{11}{2}\right)$

**Câu 7.** Cho $\vec{a}=(2;0);\ \vec{b}=\left(-1;\dfrac{1}{2}\right);\ \vec{c}=(4;-6)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}.$

b) Tìm 2 số *m, n* sao cho $m\vec{a}+\vec{b}-n\vec{c}=\vec{0}.$

*c)* Biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo $\vec{a},\vec{b}.$

***Lời giải***

a) $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}=\left(2.2-3.(-1)+5.4;2.0-3.\dfrac{1}{2}+5.(6)\right)=\left(27;-\dfrac{63}{2}\right)$

b) Ta có: $m\vec{a}+\vec{b}-n\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow m.2\vec{i}+\left(-\vec{i}+\dfrac{1}{2}\vec{j}\right)-n\left(4\vec{i}-6\vec{j}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-1-4n=0\\ \dfrac{1}{2}+6n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{3}\\ n=-\dfrac{1}{12}\end{cases}$

c) Giả sử: $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}\ (x;y\in R)$ ta có: $\begin{cases}4=x.2+y(-1)\\ -6=x.0+y.\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=-12\end{cases}$

Vậy $\vec{c}=8\vec{a}-12\vec{b}$

## DẠNG 3. TỌA ĐỘ ĐIỂM

**Câu 8.** Cho hai điểm $A(3;-5), B(1;0)$.

a) Tìm tọa độ điểm $C$ sao cho: $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm điểm $D$ đối xứng với $A$ qua $C$.

c) Tìm điểm $M$ chia đoạn $AB$ theo tỉ số $k = -3$.

***Lời giải.***

**a)** Gọi $C(x_C; y_C)$.

Theo bài $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x_C; y_C) = -3(-2;5) = (6;-15) \Rightarrow C(6;-15)$

**b)** $D$ đối xứng với $A$ qua $C$ hay $C$ là trung điểm của $AD \Rightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{x_A + x_D}{2} \\ y_C = \dfrac{y_A + y_D}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_C - x_A = 2.6 - 3 = 12 \\ y_D = 2y_C - y_A = 2(-15) - (-5) = -25 \end{cases} \Rightarrow D(12;-25)$.

**c)** $M$ chia đoạn $AB$ theo tỉ số $k = -3 \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + 3x_B}{1+3} = \dfrac{3+3.1}{4} = \dfrac{3}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + 3y_B}{1+3} = \dfrac{-5+3.0}{4} = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{5}{4}\right)$.

**Câu 9.** Cho ba điểm $A(-1;1), B(1;3), C(-2;0)$.

a) Chứng minh ba điểm $A, B, C$ thẳng hàng.

b) Tìm các tỉ số mà điểm $A$ chia đoạn $BC$, điểm $B$ chia đoạn $AC$, điểm $C$ chia đoạn $AB$.

***Lời giải:***

a) Từ tọa độ các điểm ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2;2) \\ \overrightarrow{BC} = (-3;-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = -\dfrac{3}{2}.\overrightarrow{AB}$ nên 3 điểm $A$, $B$ và $C$ thẳng hàng.

b) Ta có:

+ $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2;2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1;-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -2.\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ $A$ chia đoạn $BC$ theo tỉ số $k = -2$.

+ $\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (-2;-2) \\ \overrightarrow{AC} = (-3;-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \dfrac{2}{3}.\overrightarrow{BC} \Rightarrow$ $B$ chia đoạn $AC$ theo tỉ số $k = \dfrac{2}{3}$.

+ $\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (1;1) \\ \overrightarrow{CB} = (3;3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{3}.\overrightarrow{CB} \Rightarrow$ $C$ chia đoạn $AB$ theo tỉ số $k = \dfrac{1}{3}$.

**Câu 10.** Cho ba điểm $A(1;-2), B(0;4), C(3;2)$.

a) Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm $I$ của đoạn thẳng $AB$.

c) Tìm tọa độ điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

d) Tìm tọa độ điểm $N$ sao cho $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

***Lời giải:***

a) $\overrightarrow{AB} = (-1;6), \overrightarrow{AC} = (2;4), \overrightarrow{BC} = (3;-2)$.

b) $I$ là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

c) Ta có: $\overrightarrow{CM} = (x_M - 3; y_M - 2)$, $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2(-1;6) - 3(2;4) = (-8;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 3 = -8 \\ y_M - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -5 \\ y_M = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-5;2)$.

d) $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0} \Rightarrow (x_N - 1; y_N + 2) + 2(x_N; y_N - 4) - 4(x_N - 3; y_N - 2) = (0;0)$

$\Leftrightarrow (-x_N + 11; -y_N + 2) = (0;0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 11 \\ y_N = 2 \end{cases} \Rightarrow N(11;2)$.

**Câu 11.** Cho ba điểm $A(-1;1), B(2;1), C(-1;-3)$.

a) CMR: Tồn tại tam giác $ABC$.

b) Tính chu vi tam giác.

c) Tìm tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$.

d) Xác định điểm $D$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

e) Tìm điểm $M$ thuộc trục $Ox$ sao cho $M$ cách đều $A, B$.

f) Tìm điểm $N$ thuộc trục $Oy$ sao cho $N$ cách đều $B, C$.

***Lời giải.***

a) Ta có phương trình đường thẳng $AB$: $y = ax + b$

$\begin{cases} A \in d \\ B \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -a + b \\ 1 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow d: y = 1$

Do $C$ không thuộc $d$ nên ba điểm $A$, $B$, C không thẳng hàng, tức là tam giác tồn tại.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;0)$, $\overrightarrow{BC} = (-3;-4)$, $\overrightarrow{AC} = (0;-4)$

$\Rightarrow AB = 3$; $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $AC = 4 \Rightarrow P_{ABC} = 3 + 5 + 4 = 12$.

c) Tọa độ trọng tâm $G$: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 0 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(0;-\dfrac{1}{3}\right)$.

d) Gọi $D(x; y)$, $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x = 3 \\ -3 - y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow D(-4;-3)$.

e) Phương trình trung trực của đoạn thẳng $AB$ là $x = \dfrac{1}{2}$. $M$ là giao của trung trực này với trục $Ox$ hay $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

f) Gọi $N(0; x) \Rightarrow \begin{cases} CN^2 = 1 + (x+3)^2 \\ BN^2 = 2^2 + (1-x)^2 \end{cases}$.

$N$ cách đều $B$ và $C$ khi $CN^2 = BN^2 \Leftrightarrow 1 + (x+3)^2 = 2^2 + (1-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 10 = x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{8} \Rightarrow N\left(0; -\dfrac{5}{8}\right)$.

**Câu 12.** Cho tam giác $ABC$ có $A(4;1), B(2;4), C(2;-2)$.

a) Tính chu vi tam giác.

b) Xác định điểm $D$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

c) Xác định tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$.

d) Xác định tọa độ trực tâm $H$ của tam giác.

e) Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

***Lời giải.***

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;3)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-6)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-3)$

$\Rightarrow AB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$; $BC=6$, $AC=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13} \Rightarrow P_{ABC}=2\sqrt{13}$

b) Gọi $D(x;y)$, $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases}2-x=-2\\-2-y=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=-5\end{cases} \Rightarrow D(4;-5)$.

c) Tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác $x_G=\dfrac{4+2+2}{3}=\dfrac{8}{3}$; $y_G=\dfrac{1+4-2}{3}=1 \Rightarrow G\left(\dfrac{8}{3};1\right)$.

d) Ta có phương trình đường thẳng $AC$: $y=\dfrac{3}{2}x-5$. Suy ra đường cao $BF$ qua $B$ và vuông góc với $AC$ là $y=\dfrac{-2}{3}(x-2)+4 \Leftrightarrow y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{16}{3}$.

Phương trình đường thẳng $AB$ là $y=-\dfrac{3}{2}x+7$ suy ra đường cao $CK$ đi qua $C$ và vuông góc với $AB$ là $y=\dfrac{2}{3}(x-2)-2 \Leftrightarrow y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{10}{3}$.

Tọa độ trực tâm $H$ là giao điểm của $BF$ và $CK$ nên $\begin{cases}y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{10}{3}\\y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{16}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{13}{2}\\y=1\end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{13}{2};1\right)$.

e) Trung điểm đoạn $AB$ và $BC$ lần lượt là $M\left(3;\dfrac{5}{2}\right)$, $N(2;1)$

Phương trình trung trực của $AB$ đi qua $M$ và vuông góc với $AB$ là: $y=\dfrac{2}{3}(x-3)+\dfrac{5}{2}$.

Phương trình trung trực của $BC$ là $y=1$

Tâm đường tròn ngoại tiếp $I$ là giao điểm của hai trung trực nên $I\left(\dfrac{3}{4};1\right)$.

**Câu 13.** Cho $A(1;3), B(2;5)$ và $C(4;-1)$.

a) Tìm chu vi của tam giác $ABC$.

b) Tìm tọa độ trung điểm của các đoạn thẳng $AB$, $AC$.

c) Tìm tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$.

d) Tìm tọa độ điểm $D$ để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

e) Tìm tọa độ trực tâm $H$ của tam giác.

f) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

***Lời giải***

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2)$, $\overrightarrow{BC}=(2;-6)$, $\overrightarrow{AC}=(3;-4)$

$\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$; $BC=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}$; $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5 \Rightarrow P_{ABC}=\sqrt{5}+5+\sqrt{40}$.

b) Tọa độ trung điểm $M$ của đoạn $AB$: $x_M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$; $y_M = \frac{3+5}{2} = 4 \Rightarrow M\left(\frac{3}{2};4\right)$

Trung điểm của $N$ của đoạn $AC$: $x_n = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$; $y_N = \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow N\left(\frac{5}{2};1\right)$

c) Tọa độ trọng tâm $G$ tương tự như các bài toán trước $G\left(\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$.

d) Gọi $D(x;y)$, $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x=1 \\ -1-y=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow D(3;-3)$.

e) Ta có phương trình đường thẳng $AB$: $y = 2x+1$. Suy ra đường cao $CH$ là $y = -\frac{1}{2}(x-4)-1$.

Phương trình đường thẳng $AC$ là $y = -\frac{4}{3}x + \frac{13}{3}$. Suy ra đường cao $BE$ là $y = \frac{3}{4}(x-2)+5$

Tọa độ trực tâm $H$ thỏa mãn $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}(x-4)-1. \\ y = \frac{3}{4}(x-2)+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow H(-2;2)$.

f) Phương trình trung trực của $AB$ đi qua $M$ và vuông góc với $AB$ là: $y = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)+4$.

Phương trình trung trực của $BC$ là: $y = \frac{3}{4}\left(x-\frac{5}{2}\right)+1$

Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp $I$ là giao điểm của hai trung trực nên thỏa mãn $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)+4. \\ y = \frac{3}{4}\left(x-\frac{5}{2}\right)+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{9}{2};\frac{5}{2}\right)$.

## DẠNG 4. ỨNG DỤNG

**Câu 14.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$

a). Chứng minh rằng $ABC$ là tam giác vuông.

b). Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ suy ra cosB

**Lời giải**

a). $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \sqrt{10}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = \sqrt{90}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = BC = \sqrt{100}$

Có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 100 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $A$.

b). Có $\overrightarrow{BA} = (-1;-3)$, $\overrightarrow{BC} = (8;-6) \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = (-1).8 + (-3)(-6) = 10$

Ngoài ra $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{10}{\sqrt{10}.\sqrt{100}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

**Câu 15.** Cho ba điểm $A\left(4\sqrt{3};-1\right)$, $B(0;3)$, $C\left(8\sqrt{3};3\right)$.

a) Tìm đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.

b) Tìm $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$

**Lời giải**

a) Tú giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Gọi tọa độ điểm $D$ là $D(x;y)$ thì $\overrightarrow{AD}=\left(x-4\sqrt{3};y+1\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(8\sqrt{3};0\right)$

Từ đó suy ra $x=12\sqrt{3}$, $y=-1$. Vậy ta có $D\left(12\sqrt{3};-1\right)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)^2-\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)^2\right]=\frac{1}{4}(64-448)=-\frac{187}{2}$;

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}^2=192$.

**Câu 16.** Cho $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$. Tìm $k$ để

a) $\vec{u}\perp\vec{v}$ b) $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|$

**Lời giải.**

Ta có $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};-5\right)$, $\vec{v}=(k;-4)$

a) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\frac{1}{2}.k+(-5).(-4)=0\Leftrightarrow k=-40$.

b) Ta có $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+25}=\frac{1}{2}\sqrt{101}$, $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{k^2+16}$.

Do đó $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|\Leftrightarrow\sqrt{k^2+16}=\frac{1}{2}\sqrt{101}\Leftrightarrow k^2+16=\frac{101}{4}\Leftrightarrow k^2=\frac{37}{4}\Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{37}}{2}$.

**Câu 17.** Cho các véc-tơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$.

a) Tìm các số $k$ và $m$ sao cho $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ vuông góc với véc-tơ $\vec{a}+\vec{b}$.

b) Tìm véc-tơ $\vec{d}$ biết $\vec{a}.\vec{d}=4$ và $\vec{b}.\vec{d}=-2$.

**Lời giải.**

a) Ta có $\vec{c}=k.\vec{a}+m.\vec{b}=(-2k+4m;3k+m)$

Để $\vec{c}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\Leftrightarrow\vec{c}.\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow2(-2k+4m)+4(3k+m)=0\Leftrightarrow2k+3m=0$

Vậy với $2k+3m=0$ thì $\vec{c}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

b) Gọi $\vec{d}=(x;y)$

Khi đó từ $\vec{a}.\vec{d}=4$ và $\vec{b}.\vec{d}=-2$, ta có hệ phương trình và $\begin{cases}-2x+3y=4\\4x+y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{5}{7}\\y=\frac{6}{7}\end{cases}$.

Vậy và $\vec{d}=\left(-\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right)$.

**Câu 18.** Tính góc giữa hai véc-tơ và $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau

a) $\vec{a}=(1;-2)$, $\vec{b}=(-2;-6)$

b) $\vec{a}=(-3;4)$, $\vec{b}=(4;3)$.

c) $\vec{a}=(2;5)$, $\vec{b}=(3;-7)$.

**Lời giải.**

a) Áp dụng công thức $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{1.(-2)+(-2).(-6)}{\sqrt{1+4}.\sqrt{4+36}}=\dfrac{10}{\sqrt{200}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

Vậy $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^\circ$.

b) Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{(-3).4+4.3}{\sqrt{9+16}.\sqrt{16+9}}=\dfrac{0}{25}=0$,

Vậy $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^\circ$.

c) Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{2.3+5.(-7)}{\sqrt{4+25}.\sqrt{9+49}}=\dfrac{-29}{29\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

Vậy $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=135^\circ$.

**Câu 19.** Cho $\vec{u}=(4;1)$ và $\vec{v}=(1;4)$.

a) Tìm m để $\vec{a}=\vec{u}+m.\vec{v}$ vuông góc với trục hoành.

b) Tìm n để $\vec{b}=n.\vec{u}+\vec{v}$ tạo với véc-tơ $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}$ một góc $45^\circ$.

**Lời giải.**

a) Ta có $\vec{i}=(1;0)$, $\vec{a}=(4+m;1+4m)$.

Véc-tơ $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành khi và chỉ khi $\vec{a}.\vec{i}=0\Leftrightarrow 4+m=0\Leftrightarrow m=-4$

b) Ta có $\vec{b}=(4n+1;n+4)$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}=(1;1)$.

Góc giữa hai véc-tơ $\vec{b}$, $\vec{c}$ là $45^\circ$ khi

$$\cos 45^\circ=\frac{(4n+1)+(n+4)}{\sqrt{2}.\sqrt{(4n+1)^2+(n+4)^2}}\Leftrightarrow\frac{5(n+1)}{\sqrt{2}.\sqrt{17n^2+16n+17}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 5(n+1)=\sqrt{17n^2+16n+17}\Leftrightarrow\begin{cases}n+1\ge 0\\25n^2+50n+25=17n^2+16n+17\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}n\ge -1\\4n^2+17n+4=0\end{cases}\Leftrightarrow n=-\frac{1}{4}.$$

Vậy $n=-\dfrac{1}{4}$.

**Câu 20.** Cho các điểm $A\left(4\sqrt{3};-1\right)$, $B(0;3)$, $C\left(8\sqrt{3};3\right)$.

a) Tính các cạnh của tam giác $ABC$.

b) Tính các góc của tam giác $ABC$.

**Lời giải.**

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-4\sqrt{3};4\right)\Rightarrow AB=\sqrt{48+16}=8$.

$\overrightarrow{BC}=\left(8\sqrt{3};0\right)\Rightarrow BC=8\sqrt{3}$

$\overrightarrow{CA}=\left(-4\sqrt{3};-4\right)\Rightarrow AB=8$

b) Ta có $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\dfrac{128-192}{128}=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\widehat{A}=120^\circ$ và vì tam giác cân tại $A$ nên $\widehat{B}=\widehat{C}=30^\circ$.

**Câu 21.** Cho tam giác $ABC$ có ba đỉnh $A(-3;0)$, $B(3;0)$, $C(2;6)$. Tìm tọa độ trọng tâm $G$ và trực tâm $H$ của tam giác.

**Lời giải.**

Trọng tâm $G$ có tọa độ $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{2}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = 2 \end{cases}$. Vậy $G\left(\dfrac{2}{3};2\right)$.

Gọi $H(x;y)$ là trực tâm ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(2-3)+(y-0)(6-0)=0 \\ (x-3)(-3-2)+(y-0)(0-6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+6y=3 \\ -5x-6y=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{5}{6} \end{cases}.$$

Vậy $H\left(2;\dfrac{5}{6}\right)$.

**Câu 22.** Cho điểm $A(1;1)$, $B(2;4)$ và $C(10;-2)$.

a) Chứng minh tam giác $ABC$ vuông tại $A$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ và tính $\cos B$, $\cos C$.

**Lời giải.**

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;3)$ và $\overrightarrow{AC} = (9;-3)$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 9-9 = 0$.

Vậy tam giác $ABC$ vuông tại $A$.

b) Ta có $\overrightarrow{BA} = (-1;-3)$, $\overrightarrow{BC} = (8;-6)$. Do đó $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -8+8 = 10$.

$BA = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{8^2+6^2} = 10$, mà $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA.BC.\cos B$

Suy ra $10 = \sqrt{10}.\cos B$. Vậy $\cos B = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Tương tự ta có $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 90 \Rightarrow \cos C = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

**Câu 23.** Cho hai điểm $A(2;4)$ và $B(1;1)$. Tìm tọa độ điểm $C$ sao cho tam giác $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$.

**Lời giải.**

Gọi $C(x;y)$ thì $\overrightarrow{BA} = (1;3)$ và $\overrightarrow{BC} = (x-1;y-1)$.

Điều kiện tam giác $ABC$ vuông cân tại $B$ là

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ BA = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.(x-1)+3.(y-1)=0 \\ 1^2+3^2 = (x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4-y \\ (3-3y)^2+(y-1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4-y \\ 10y^2-20y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=4 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ x=-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm $C$ có tọa độ $(4;0)$, $(-2;2)$.

**Câu 24.** Cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$, $D(0;-2)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

**Lời giải.**

Ta chứng minh $ABCD$ là hình thoi có một góc vuông.

$\overrightarrow{AB}=(1;7)\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC}=(-7;1)\Rightarrow BC=5\sqrt{2}$

$\overrightarrow{CD}=(-1;-7)\Rightarrow CD=5\sqrt{2}$

$\overrightarrow{DA}=(7;-1)\Rightarrow CD=5\sqrt{2}$

Vậy $AB=BC=CD=DA=5\sqrt{2}$ và vì $A,B,C,D$ phân biệt nên $ABCD$ là hình thoi.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=1.(-7)+7.1=0$ nên $AB\perp BC$

Vậy $ABCD$ là hình vuông.

**Câu 25.** Biết $A(1;-1)$ và $B(3;0)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm tọa độ các đỉnh $C$ và $D$.

**Lời giải.**

Gọi $C(x;y)$. Khi đó $\overrightarrow{AB}=(2;1)$, $\overrightarrow{BC}=(x-3;y)$.

Điều kiện $ABCD$ là hình vuông ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}\\ AB=BC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-3)+1.y=0\\ (x-3)^2+y^2=5\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2(3-x)\\ 5(x-3)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2(3-x)\\ (x-3)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\ y=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}\end{array}\right.$.

Với $C(4;-2)$ ta tính được đỉnh $D(2;-3)$.

Với $C(2;2)$ ta tính được đỉnh $D(0;1)$.

**Câu 26.** Cho tam giác $ABC$ với $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$.

a) Tìm điểm $D$ để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

b) Tìm chân $A'$ của đường cao vẽ từ đỉnh $A$ của tam giác $ABC$.

**Lời giải.**

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-2=3+3\\ y_D-4=-1-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=8\\ y_D=2\end{cases}$.

Vậy $D(8;2)$.

b) Gọi $A'(x;y)$ là chân đường cao $AA'$ của tam giác $ABC$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AA'}\perp BC\\ A'\in BC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BA'}=k.\overrightarrow{BC}\end{cases}$.

Mà $\overrightarrow{AA'}=(x-2;y-4)$, $\overrightarrow{BC}=(6;-2)$, $\overrightarrow{BA'}=(x+3;y-1)$ nên $\begin{cases}6x-2y=4\\ -2x-6y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\ y=-\dfrac{1}{5}\end{cases}$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm $A$, $B$ lần lượt có tọa độ là $a$, $b$. $M$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}, k\neq 1$. Khi đó tọa độ của điểm $M$ là:

**A.** $\dfrac{ka-b}{k-1}$ **B.** $\dfrac{kb-a}{k-1}$ **C.** $\dfrac{a-kb}{k+1}$ **D.** $\dfrac{kb+a}{k-1}$

**Lời giải**

Gọi $x$ là độ của điểm $M$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow a-x=k\left(b-x\right)\Leftrightarrow\left(k-1\right)x=kb-a\Leftrightarrow x=\dfrac{kb-a}{k-1},k\neq1$

**Đáp án B.**

**Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai vectơ $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=-30$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=3$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=30$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=43$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ giả thiết suy ra $\vec{a}=\left(4;6\right)$ và $\vec{b}=\left(3;-7\right)$

Suy ra $\vec{a}.\vec{b}=4.3+6.\left(-7\right)=-30$

**Câu 3.** Trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ cho ba điểm *A, B, C*. Nếu biết $\overline{AB}=5,\overline{AC}=7$ thì $\overline{CB}$ bằng:

**A.** $-2$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

**Lời giải**

Ta có: $\overline{CB}=\overline{AB}-\overline{AC}=5-7=-2$

**Đáp án A.**

**Câu 4.** Tên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ cho hai điểm *A, B* lần lượt có tọa độ 1 và 5. Khi đó tọa độ điểm $M$ thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ là:

**A.** 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

**Lời giải**

**Đáp án D**

$2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow2\left(x_A-x_M\right)=3\left(x_B-x_M\right)\Leftrightarrow x_M=13$

**Câu 5.** Trên trục $x'Ox$ có vectơ đơn vị $\vec{i}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

**A.** $x_A$ là tọa độ điểm $A\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=x_A.\vec{i}$

**B.** $x_B,x_C$ là tọa độ của điểm $B$ và $C$ thì $\overline{BC}=x_B-x_C$

**C.** $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$

**D.** $M$ là trung điểm của $AB\Leftrightarrow\overline{OM}=\dfrac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}$

**Lời giải**

**Đáp án B**

Ta có $\overline{BC}=x_B-x_C$

**Câu 6.** Trên trục $x'Ox$, cho tọa độ của *A, B* lần lượt là $-2;3$. Khi đó tọa độ điểm $M$ thỏa mãn: $OM^2=\overline{MA}.\overline{MB}$ là:

**A.** 6 **B.** $\sqrt{6}$ **C.** $-6$ **D.** 4

**Lời giải**

**Đáp án C**

Gọi $M$ có tọa độ là $x\Rightarrow x^2=\left(-2-x\right)\left(3-x\right)\Rightarrow x=-6$

**Câu 7.** Trên trục $(O;\vec{i})$ tìm tọa độ $x$ của điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, với $A$, $C$ có tọa độ tương ứng là $-1$ và $3$

**A.** $x=\frac{5}{3}$ **B.** $x=\frac{2}{3}$ **C.** $x=\frac{2}{5}$ **D.** $x=\frac{5}{2}$

**Lời giải**

Từ $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}+2\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}\right)=0$.

Hay $-1-x+2(3-x)=0\Leftrightarrow 3x=5\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$

**Đáp án** **A.**

**Câu 8.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. **B.** $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$. và $\vec{v}$ cùng phương.

**C.** $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. **D.** $\vec{u}=-\vec{v}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=3.(-8)+4.6=0$ suy ra $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

**Câu 9.** Trong mp $Oxy$ cho $A(4;6)$, $B(1;4)$, $C\left(7;\frac{3}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây sai

**A.** $\overrightarrow{AB}=(-3;-2)$, $\overrightarrow{AC}=\left(3;-\frac{9}{2}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.

**C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{13}$. **D.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương án A: $\overrightarrow{AB}=(-3;-2)$, nên loại **A.**

Phương án B: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ nên loại **B.**

Phương án C: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{13}$ nên loại **C.** $\overrightarrow{AC}=\left(3;-\frac{9}{2}\right)$

Phương án D: Ta có $\overrightarrow{BC}=\left(6;-\frac{5}{2}\right)$ suy ra $BC=\sqrt{6^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{13}{2}$ nên chọn **D.**

**Câu 10.** Cho các vectơ $\vec{a}=(1;-2)$, $\vec{b}=(-2;-6)$. Khi đó góc giữa chúng là

**A.** $45^\circ$. **B.** $60^\circ$. **C.** $30^\circ$. **D.** $135^\circ$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\vec{a}=(1;-2)$, $\vec{b}=(-2;-6)$, suy ra $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{10}{\sqrt{5}.\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\vec{a};\vec{b}\right)=45^\circ$.

**Câu 11.** Cho $\overrightarrow{OM}=(-2;-1)$, $\overrightarrow{ON}=(3;-1)$. Tính góc của $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)$

**A.** $135^\circ$. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-135^\circ$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)=\dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}.\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)=135^{\circ}$.

**Câu 12.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho $\vec{a}=(1;3),\vec{b}=(-2;1)$. Tích vô hướng của 2 vectơ $\vec{a}.\vec{b}$ là:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\vec{a}=(1;3),\vec{b}=(-2;1)$, suy ra $\vec{a}.\vec{b}=1.(-2)+3.1=1$.

**Câu 13.** Cặp vectơ nào sau đây vuông góc?

**A.** $\vec{a}=(2;-1)$ và $\vec{b}=(-3;4)$. **B.** $\vec{a}=(3;-4)$ và $\vec{b}=(-3;4)$.

**C.** $\vec{a}=(-2;-3)$ và $\vec{b}=(-6;4)$. **D.** $\vec{a}=(7;-3)$ và $\vec{b}=(3;-7)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương án A: $\vec{a}.\vec{b}=2.(-3)+(-1).4=-10\neq 0$ suy ra A sai.

Phương án B: $\vec{a}.\vec{b}=3.(-3)+(-4).4\neq 0$ suy ra B sai.

Phương án C: $\vec{a}.\vec{b}=-2.(-6)-3.4=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ suy ra C đúng.

Phương án D: $\vec{a}.\vec{b}=7.3+(-3).(-7)=42\neq 0$ suy ra D sai.

**Câu 14.** Cho 2 vec tơ $\vec{a}=(a_1;a_2),\vec{b}=(b_1;b_2)$, tìm biểu thức sai:

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

**C.** $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{a^2}+\overrightarrow{b^2}-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2\right]$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\overrightarrow{a^2}-\overrightarrow{b^2}\right]$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương án A: biểu thức tọa độ tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2$ nên loại A

Phương án B: Công thức tích vô hướng của hai véc tơ $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ nên loại B

Phương án C: $\dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{a^2}+\overrightarrow{b^2}-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2\right]=\dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{a^2}+\overrightarrow{b^2}-\left(\overrightarrow{a^2}+\overrightarrow{b^2}+2\vec{a}\vec{b}\right)\right]=-\vec{a}\vec{b}$ nên chọn **C.**

**Câu 15.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-1)$.Tính $\cos A$

**A.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-3)$ suy ra

$\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\dfrac{(-2).4+(-1).(-3)}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}.\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{25}}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

**Câu 16.** Trong mặt phẳng $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ cho 2 vectơ : $\vec{a}=3\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=8\vec{i}-4\vec{j}$. Kết luận nào sau đây sai?

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **B.** $\vec{a}\perp\vec{b}$. **C.** $\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|=0$. **D.** $\left|\vec{a}.\vec{b}\right|=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\vec{a}=(3;6);\vec{b}=(8;-4)$

Phương án A: $\vec{a}.\vec{b}=24-24=0$ nên loại A

Phương án B: $\vec{a}.\vec{b}=0$ suy ra $\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$ nên loại B

Phương án C: $|\vec{a}|.|\vec{b}|=\sqrt{3^2+6^2}.\sqrt{8^2+(-4)^2}\neq 0$ nên chọn **C.**

**Câu 17.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho $A(1;2), B(4;1), C(5;4)$. Tính $\widehat{BAC}$ ?

**A.** $60^\circ$. **B.** $45^\circ$. **C.** $90^\circ$. **D.** $120^\circ$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;2)$ suy ra

$\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\dfrac{10}{\sqrt{10}.\sqrt{20}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=45^\circ$.

**Câu 18.** Cho các vectơ $\vec{a}=(1;-3), \vec{b}=(2;5)$. Tính tích vô hướng của $\vec{a}(\vec{a}+2\vec{b})$

**A.** $16$. **B.** $26$. **C.** $36$. **D.** $-16$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\vec{a}.\vec{a}=10$, $\vec{a}.\vec{b}=-13$ suy ra $\vec{a}(\vec{a}+2\vec{b})=-16$.

**Câu 19.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$ và $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ với $k, m\in\mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $(\vec{a}+\vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $2k=2m$ **B.** $3k=2m$ **C.** $2k+3m=0$ **D.** $3k+2m=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\begin{cases}\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}=(-2k+4m;3k+m)\\ \vec{a}+\vec{b}=(2;4)\end{cases}$.

Để $\vec{c}\perp(\vec{a}+\vec{b})\Leftrightarrow\vec{c}(\vec{a}+\vec{b})=0\Leftrightarrow 2(-2k+4m)+4(3k+m)=0\Leftrightarrow 2k+3m=0$.

**Câu 20.** Trên trục $(O;\vec{i})$ cho 4 điểm *A, B, C, D* có tọa độ lần lượt là *a, b, c, d*. Gọi *E, F, G, H* (có tọa độ lần lượt là *e, f, g, h*) theo thứ tự là trung điểm của *AB, BC, CD, DA*. Xét các mệnh đề:

I. $e+f+g+h=a+b+c+d$

II. $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}$

III. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$

Trong các mệnh đề trên mệnh đề nào đúng?

**A.** Chỉ I **B.** II và III **C.** I, II, III **D.** Chỉ III

**Lời giải**

+ Áp dụng công thức tọa độ trung điểm $\Rightarrow I$ đúng.

+ Lấy *E* làm gốc trục thì $x_E=e=0\Rightarrow g=f+h\Rightarrow$ II đúng.

+ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB})$ chỉ bằng $\vec{0}$ khi *B* là trung điểm của *AB* nên III sai.

**Đáp án B**

**Câu 21.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho $\vec{a}=(2;-1)$ và $\vec{b}=(-3;4)$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

**A.** Tích vô hướng của hai vectơ đã cho là $-10$. **B.** Độ lớn của vectơ $\vec{a}$ là $\sqrt{5}$.

**C.** Độ lớn của vectơ $\vec{b}$ là $5$. **D.** Góc giữa hai vectơ là $90^{\circ}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ nên B đúng.

$|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$ nên C đúng.

$\vec{a}.\vec{b}=2.(-3)+(-1).4=-10\neq 0$ nên A đúng, D sai.

**Câu 22.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-1)$.Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

**A.** $7$. **B.** $5$. **C.** $-7$. **D.** $-5$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2).4+(-1).(-3)=-5$.

**Câu 23.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây đúng.

**A.** $\overrightarrow{AB}=(4;2)$, $\overrightarrow{BC}=(2;-4)$. **B.** $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$.

**C.** Tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$. **D.** Tam giác $ABC$ vuông cân tại $B$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương án A: do $\overrightarrow{AB}=(2;2)$ nên loại **A.**

Phương án B: $\overrightarrow{AB}=(2;2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-4)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-8$ suy ra $\overrightarrow{AB}$ không vuông góc $\overrightarrow{BC}$ nên loại **B.**

Phương án C: Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-4)$, suy ra $AB=AC=\sqrt{8}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.Nên Tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$.Do đó chọn **C.**

**Câu 24.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=40$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-40$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-26$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;11)$, $\overrightarrow{AC}=(-7;3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-1).(-7)+11.3=40$

**Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}$

**A.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-4$. **B.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=0$. **C.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=4$. **D.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=16$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\overrightarrow{AO}=(-3;1)$, $\overrightarrow{OB}=(2;10)$.Suy ra $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-3.2+1.10=4$.

**Câu 26.** Trên trục $(\Delta)$ cho bốn điểm *A, B, C, D* bất kì. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AC}.\overline{DB}+\overline{AD}.\overline{BC}=0$ **B.** $\overline{AB}.\overline{DB}+\overline{AC}.\overline{BC}+\overline{AD}.\overline{CD}=0$

**C.** $\overline{AB}.\overline{AC}+\overline{AD}.\overline{BC}+\overline{BC}.\overline{CD}=0$ **D.** $\overline{BD}.\overline{BC}+\overline{AD}.\overline{AC}+\overline{CB}.\overline{CA}=0$

**Lời giải**

Chọn gốc tọa độ $O\equiv A\Rightarrow x_A=0, x_B=\overline{AB}, x_C=\overline{AC}, x_D=\overline{AD}$

Từ đáp án A: $VT=x_B\left(x_D-x_C\right)+x_C\left(x_B-x_D\right)+x_D\left(x_C-x_B\right)=0$

**Đáp án A**

**Câu 27.** Trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ cho ba điểm *A, B, C* có tọa độ lần lượt là $-5;2;4$. Khi đó tọa độ điểm *M* thảo mãn $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ là:

**A.** $\frac{10}{3}$ **B.** $\frac{10}{9}$ **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{5}{4}$

**Lời giải**

**Đáp án B**

$$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(-5-x_M\right)+3\left(4-x_M\right)+4\left(2-x_M\right)=0\Leftrightarrow x_M=\frac{10}{9}$$

**Câu 28.** Trên trục $x'Ox$ cho tọa độ các điểm *B, C* lần lượt là $m-2$ và $m^2+3m+2$. Tìm *m* để đoạn thẳng *BC* có độ dài nhỏ nhất.

**A.** $m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=-2$

**Lời giải**

**Đáp án C**

$BC=\left|\overline{BC}\right|=\left|m^2+2m+4\right|=\left(m+1\right)^2+3\geq 3\ \forall \mathrm{m}\in\mathbb{R}$. *BC* nhỏ nhất khi $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$

**Câu 29.** Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm *A, B, C,* ***D.*** Gọi *I, J, K, L* lần lượt là trung điểm của *AC, DB, AD, BC.* Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.** $\overline{AD}+\overline{CB}=2\overline{IJ}$ **B.** $\overline{AC}+\overline{DB}=2\overline{KI}$

**C.** Trung điểm các đoạn *IJ* và *KL* trùng nhau **D.** $\overline{AB}+\overline{CD}=2\overline{IK}$

**Lời giải**

**Đáp án D**

Ta có:

$$x_D-x_A+x_B-x_C=x_B+x_D-\left(x_A+x_C\right)=2x_J-2x_I=2\left(x_J-x_I\right)$$

Là tọa độ của $2\overline{IJ}$ nên A đúng.

Tương tự:

$\left(x_C-x_A\right)+\left(x_B-x_D\right)=2\left(x_L-x_K\right)$ là tọa độ của $2\overline{KL}\Rightarrow$ B đúng.

Gọi *E, F* là trung điểm của *IJ* và *KL*

$$\left.\begin{aligned}x_E&=\frac{1}{2}\left(x_I+x_J\right)=\frac{1}{4}\left(x_A+x_C\right)+\frac{1}{4}\left(x_D+x_B\right)\\x_F&=\frac{1}{2}\left(x_K+x_L\right)=\frac{1}{4}\left(x_A+x_D\right)+\frac{1}{4}\left(x_C+x_B\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_E=x_F\Rightarrow \text{C đúng.}$$

Vậy đáp án D sai.

**Câu 30.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai vectơ $\vec{a}=(-3;2)$ và $\vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c}.\vec{a}=9$ và $\vec{c}.\vec{b}=-20$

**A.** $\vec{c}=(-1;-3)$ **B.** $\vec{c}=(-1;3)$ **C.** $\vec{c}=(1;-3)$ **D.** $\vec{c}=(1;3)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $\vec{c}=(x;y)$

Ta có $\begin{cases}\vec{c}.\vec{a}=9\\ \vec{c}.\vec{b}=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+2y=9\\ -x-7y=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}\longrightarrow\vec{c}=(-1;3)$

**Câu 31.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(2;3)$.

Tính $P=\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})$.

**A.** $P=0$ **B.** $P=18$ **C.** $P=20$ **D.** $P=28$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\vec{b}+\vec{c}=(6;6)$. Suy ra $P=\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=1.6+2.6=18$.

**Câu 32.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

**A.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{1}{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

**Câu 33.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm $C$ thuộc trục tung sao cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$.

**A.** $C(0;6)$. **B.** $C(5;0)$. **C.** $C(3;1)$. **D.** $C(0;-6)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $C\in Oy$ nên $C(0;c)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-4;-1)\\ \overrightarrow{AC}=(-1;c-2)\end{cases}$.

Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(-4).(-1)+(-1)(c-2)=0\Leftrightarrow c=6$.

Vậy $C(0;6)$.

**Câu 34.** Tìm x để hai vectơ $\vec{a}=(x;2)$ và $\vec{b}=(2;-3)$ có giá vuông góc với nhau.

**A.** 3. **B.** 0. **C.** $-3$. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vectơ $\vec{a}=(x;2)$ và $\vec{b}=(2;-3)$ có giá vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

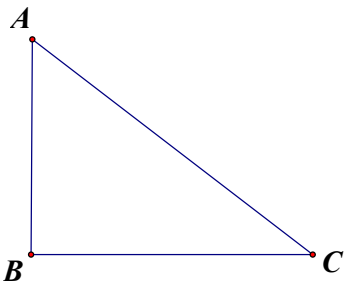
Vậy $x=3$.

**Câu 35.** Cho tam giác $ABC$ có $A(-1;2), B(0;3), C(5;-2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh $A$ của tam giác $ABC$.

**A.** $(0;3)$. **B.** $(0;-3)$. **C.** $(3;0)$. **D.** $(-3;0)$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1); \overrightarrow{AC}=(6;-4); \overrightarrow{BC}=(5;-5)$.

Nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=1.5+1.(-5)=0$ nên tam giác $ABC$ vuông tại $B$.

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh $A$ của tam giác $ABC$ trùng với đỉnh $B(0;3)$.

**Câu 36.** Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm $A$, $B$, $C$, **D.** Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overline{DA}^2.\overline{BC}+\overline{DB}^2.\overline{CA}+\overline{DC}^2.\overline{AB}+\overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}=0$

**B.** $\overline{DA}^2.\overline{BC}+\overline{DB}^2.\overline{CA}+\overline{DC}^2.\overline{AB}=0$

**C.** $\overline{AB}^2.\overline{BC}+\overline{CD}^2.\overline{DB}+\overline{DB}^2.\overline{CA}=0$

**D.** $\overline{DA}.\overline{BC}+\overline{DB}.\overline{CA}+\overline{CD}.\overline{AB}+\overline{BC}.\overline{AB}=0$

**Lời giải**

**Đáp án A**

Chọn $D$ là gốc tọa độ và $a$, $b$, $c$ lần lượt là tọa độ của $A$, $B$, **C.**

Ta có:

$\overline{DA}^2.\overline{CB}+\overline{DB}^2.\overline{CA}+\overline{DC}^2.\overline{AB}+\overline{AB}.\overline{CA}.\overline{AB}=0$

$=a^2(c-b)+b^2(c-a)+c^2(b-a)+(c-b)(a-c)(b-a)$

$=a^2c-a^2b+b^2a-b^2c+c^2b-c^2a+c^2b-c^2a+abc-c^2b-b^2a+b^2c-a^2c+c^2a+a^2b-abc=0$

**Câu 37.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;2)$ và $\vec{v}=(4m;2m-2)$. Tìm $m$ để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

**A.** $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hai vectơ $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow 4m+2.(2m-2)=0 \Leftrightarrow 8m-4=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

**Câu 38.** Xác định tọa độ của vecto $\vec{c}=\vec{a}+3\vec{b}$ biết $\vec{a}=(2;-1),\vec{b}=(3;4)$

**A.** $\vec{c}=(11;11)$ **B.** $\vec{c}=(11;-13)$ **C.** $\vec{c}=(11;13)$ **D.** $\vec{c}=(7;13)$

**Lời giải**

$\vec{c}=\vec{a}+3\vec{b}=(2;-1)+(9;12)=(11;11)$

**Đáp án A**

**Câu 39.** Cho $\vec{a}=(2;1),\vec{b}=(3;4),\vec{c}=(-7;2)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x}-2\vec{a}=\vec{b}-3\vec{c}$.

**A.** $\vec{x}=(28;2)$ **B.** $\vec{x}=(13;5)$ **C.** $\vec{x}=(16;4)$ **D.** $\vec{x}=(28;0)$

**Lời giải**

$\vec{x}-2\vec{a}=\vec{b}-3\vec{c}\Leftrightarrow\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}=(28;0)$

**Đáp án D**

**Câu 40.** Xác định tọa độ vecto $\vec{c}=5\vec{a}-2\vec{b}$ biết $\vec{a}=(3;-2),\vec{b}=(1;4)$

**A.** $\vec{c}=(2;-11)$ **B.** $\vec{c}=(-2;11)$ **C.** $\vec{c}=(2;11)$ **D.** $\vec{c}=(11;2)$

**Lời giải**

**Đáp án D**

$\vec{c}=3(3;-2)+2(1;4)=(11;2)$

**Câu 41.** Cho $\vec{a}=(3;-1),\vec{b}=(0;4),\vec{c}=(5;3)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x}-\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}=\vec{0}$.

**A.** $(18;0)$ **B.** $(-8;18)$ **C.** $(8;18)$ **D.** $(8;-18)$

**Lời giải**

**Đáp án A**

$\vec{x}-\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}=(18;0)$

**Câu 42.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $(O;\vec{i},\vec{j})$, cho hai vecto $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$ và $\vec{b}=(-4;2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng. **B.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

**C.** $\vec{a}=(-1;2)$. **D.** $\vec{a}=(2;1)$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

**Ta có** $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}\Rightarrow\vec{a}=(2;-1)\Rightarrow\vec{b}=-2\vec{a}$

$\Rightarrow\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

**Câu 43.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm $A$ sao cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$.

**A.** $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$. **B.** $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

**C.** $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$. **D.** $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Tìm tọa độ điểm $A$ sao cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$.

Gọi $A(x;y)$. Tam giác $ABC$ vuông cân tại $A\Leftrightarrow\begin{cases}AB=AC\\AB\perp AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AB^2=AC^2\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1-x)^2+(3-y)^2=(3-x)^2+(1-y)^2 \\ (-1-x)(3-x)+(3-y)(1-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y \\ x^2+y^2-2x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y \\ x^2-2x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\ y=0 \\ x=2,\ y=4 \end{array}\right.$$

Vậy $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

**Câu 44.** Cho véc tơ $\vec{a}(1;-2)$. Với giá trị nào của $y$ thì véc tơ $\vec{b}=(3;y)$ tạo với véctơ $\vec{a}$ một góc $45^\circ$

**A.** $y=-9$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=9 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-9 \end{array}\right.$. **D.** $y=-1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{3-2y}{\sqrt{5}.\sqrt{9+y^2}}$.

Góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $45^\circ$ suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{3-2y}{\sqrt{5}.\sqrt{9+y^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1).

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{90+10y^2}=6-4y \Leftrightarrow \begin{cases} 6-4y\ge 0 \\ 90+10y^2=(6-4y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\le \dfrac{3}{2} \\ y^2-8y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-1.$$

**Câu 45.** Cho hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$ và hai véc tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

**A.** $120^\circ$. **B.** $60^\circ$. **C.** $90^\circ$. **D.** $30^\circ$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì hai véc tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$$(\vec{a}+\vec{b}).(2\vec{a}-\vec{b})=0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2-\vec{b}^2+\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow 2.|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2+|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})=0$$

$$\Leftrightarrow 2.(\sqrt{2})^2-2^2+\sqrt{2}.2.\cos(\vec{a},\vec{b})=0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b})=0 \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b})=90^\circ.$$

**Câu 46.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(3;4)$, $\vec{c}=(7;2)$. Cho biết $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ khi đó.

**A.** $m=\dfrac{22}{5};\ n=\dfrac{3}{5}$. **B.** $m=-\dfrac{22}{5};\ n=-\dfrac{3}{5}$. **C.** $m=\dfrac{1}{5};\ n=\dfrac{-3}{5}$. **D.** $m=\dfrac{22}{5};\ n=\dfrac{-3}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $m\vec{a}+n\vec{b}=(2m+3n;m+4n)$.

Có $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3n=7 \\ m+4n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{22}{5} \\ n=\dfrac{-3}{5} \end{cases}$.

**Câu 47.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho các điểm $A(4;2), B(-2;1), C(0;3), M(-3;7)$. Giả sử $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC}(x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó $x + y$ bằng

**A.** $\frac{12}{5}$. **B.** $5$. **C.** $-\frac{12}{5}$. **D.** $-5$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{AM}(-7;5)$, $\overrightarrow{AB}(-6;-1), \overrightarrow{AC}(-4;1)$.

Giả sử $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC}(x, y \in \mathbb{R})$.

Hệ phương trình $\begin{cases} 6x + 4y = 7 \\ x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{10} \\ y = \frac{37}{10} \end{cases}$.

**Câu 48.** Trong mặt phẳng $Oxy$ ;cho các véc tơ $\vec{a} = (2;-1); \vec{b} = (0;4)$ và $\vec{c} = (3;3)$. Gọi $m$ và $n$ là hai số thực sao cho $\vec{c} = m\vec{a} - n\vec{b}$. Tính giá trị biểu thức $P = m^2 + n^2$.

**A.** $P = \frac{225}{64}$. **B.** $P = \frac{100}{81}$. **C.** $P = \frac{97}{64}$. **D.** $P = \frac{193}{64}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $m\vec{a} - n\vec{b} = (2m; -m - 4n)$.

Khi đó $\vec{c} = m\vec{a} - n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 3 \\ -m - 4n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{-9}{8} \end{cases}$.

Vậy $P = m^2 + n^2 = \frac{225}{64}$.

**Câu 49.** Cho $\vec{a} = (2;1)$, $\vec{b} = (-3;4)$, $\vec{c} = (-4;9)$. Hai số thực $m$, $n$ thỏa mãn $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$. Tính $m^2 + n^2$?

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3n = -4 \\ m + 4n = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}$.

**Câu 50.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho $\vec{a} = (2;1); \vec{b} = (3;4); \vec{c}(7;2)$. Tìm $m$, n để $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

**A.** $m = -\frac{22}{5}, n = -\frac{3}{5}$ **B.** $m = \frac{1}{5}, n = -\frac{3}{5}$ **C.** $m = \frac{22}{5}, n = -\frac{3}{5}$ **D.** $m = \frac{22}{5}, n = \frac{3}{5}$

**Lời giải**

Ta có $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3n = 7 \\ m + 4n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{22}{5} \\ n = -\frac{3}{5} \end{cases}$

**Đáp án C**

**Câu 51.** Cho các vectơ $\vec{a} = (4;-2), \vec{b} = (-1;-1)$, $\vec{c} = (2;5)$ Phân tích vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ ta được:

**A.** $\vec{b}=-\frac{1}{8}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{c}$ **B.** $\vec{b}=\frac{1}{8}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{c}$ **C.** $\vec{b}=-\frac{1}{8}\vec{a}-4\vec{c}$ **D.** $\vec{b}=-\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}$

**Lời giải**

**Đáp án A**

Giả sử $\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{c}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=4m+2n\\-1=-2m+5n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\frac{1}{8}\\m=-\frac{1}{4}\end{cases}$

**Câu 52.** Cho vectơ $\vec{a}=(2;1),\vec{b}=(3;4),\ \vec{c}=(7;2)$. Khi đó $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{c}$. Tính tổng $m+n$ bằng:

**A.** 5 **B.** 3,8 **C.** $-5$ **D.** $-3,8$

**Lời giải**

**Đáp án B**

$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}7=2m+3n\\2=m+4n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=4,4\\n=-0\end{cases}\Rightarrow m+n=3,8$

**Câu 53.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho 4 điểm $A(1;-2),B(0;3),C(-3;4),\mathrm{D}(-1;8)$. Phân tích $\overrightarrow{CD}$ qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

**Lời giải**

**Đáp án B**

$\overrightarrow{CD}=(2;4),\overrightarrow{AB}=(-1;5),\overrightarrow{AC}=(-4;6),\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-x-4y=2\\5x+6y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

**Câu 54.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho $\Delta ABC$ biết $A(2;-3),B(4;7),C(1;5)$. Tọa độ trọng tâm $G$ của $\Delta ABC$ là

**A.** $(7;15)$. **B.** $\left(\frac{7}{3};5\right)$. **C.** $(7;9)$. **D.** $\left(\frac{7}{3};3\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Do $G$ là trọng tâm $\Delta ABC$ nên $\begin{cases}x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\frac{7}{3}\\y_G=3\end{cases}\Rightarrow G\left(\frac{7}{3};3\right)$.

**Câu 55.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho $A(2;-3),B(4;7)$. Tìm tọa độ trung điểm $I$ của $AB$.

**A.** $(3;2)$. **B.** $(2;10)$. **C.** $(6;4)$. **D.** $(8;-21)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Áp dụng công thức: $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

Do đó: $\begin{cases} x_I = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ y_I = \dfrac{-3+7}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(3;2)$.

**Câu 56.** Cho $\Delta ABC$ có $A(4;9)$, $B(3;7)$, $C(x-1;y)$. Để $G(x;y+6)$ là trọng tâm $\Delta ABC$ thì giá trị $x$ và $y$ là

**A.** $x=3,\ y=1$. **B.** $x=-3,\ y=-1$. **C.** $x=-3,\ y=1$. **D.** $x=3,\ y=-1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\begin{cases} 3x = 4+3+x-1 \\ 3(y+6) = 9+7+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$.

**Câu 57.** Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $A(2;-3); B(4;7)$. Tìm tọa độ trung điểm *I* của đoạn ***AB.***

**A.** $I(6;4)$ **B.** $I(2;10)$ **C.** $I(3;2)$ **D.** $I(8;-21)$

**Lời giải**

Ta có $I\left(\dfrac{2+4}{2};\dfrac{-3+7}{2}\right) = (3;2)$.

**Đáp án C**

**Câu 58.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(-3;2)$. Tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$ là

**A.** $G\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. **B.** $G\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. **C.** $G\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $G\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$ là $G\left(\dfrac{2-1-3}{3};\dfrac{1-2+2}{3}\right) \Rightarrow G\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

**Câu 59.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có ba đỉnh $A(-1;2)$, $B(2;0)$, $C(-3;1)$. Toạ độ trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$ là

**A.** $G\left(-\dfrac{2}{3};1\right)$. **B.** $G\left(\dfrac{2}{3};-1\right)$. **C.** $G\left(-\dfrac{4}{3};1\right)$. **D.** $G\left(\dfrac{4}{3};-1\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Giả sử $G(x;y)$ khi đó: $\begin{cases} x = \dfrac{-1+2-3}{3} \\ y = \dfrac{2+0+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = 1 \end{cases}$.

Suy ra: $G\left(-\frac{2}{3};1\right)$.

**Câu 60.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $A(-4;1);B(2;4);C(2;-2)$. Tìm tọa độ điểm $D$ sao cho C là trọng tâm $\Delta ABD$

**A.** $D(8;11)$ **B.** $D(12;11)$ **C.** $D(8;-11)$ **D.** $D(-8;-11)$

**Lời giải**

Gọi $D(x;y)$. $C$ là trọng tâm $\Delta ABD$ khi đó: $\begin{cases} 2=\frac{-4+2+x}{3} \\ -2=\frac{1+4+y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-11 \end{cases} \Rightarrow D(8;-11)$

**Đáp án C**

**Câu 61.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $\Delta ABC$ có $A(3;5)$, $B(1;2),C(5;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm $G$ của tam giác.

**A.** $G(-3;4)$ **B.** $G(4;0)$ **C.** $G(2;3)$ **D.** $G(3;3)$

**Lời giải**

**Đáp án D**

Ta có $G=\left(\frac{3+1+5}{3};\frac{5+2+2}{3}\right)=(3;3)$

**Câu 62.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho bốn điểm $A(3;-5),B(-3;3),C(-1;-2),D(5;-10)$. Hỏi $G\left(\frac{1}{3};-3\right)$ là trọng tâm của tam giác nào dưới đây?

**A.** $ABC$. **B.** $BCD$. **C.** $ACD$. **D.** $ABD$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta thấy $\overrightarrow{BC}=(2;-5),\overrightarrow{BD}=(8;-13)$ nên chúng không cùng phương $\Rightarrow B,C,D$ là 3 đỉnh của một tam giác.

Mặt khác, ta lại có $\begin{cases} \frac{x_B+x_C+x_D}{3}=\frac{-3-1+5}{3}=\frac{1}{3} \\ \frac{y_B+y_C+y_D}{3}=\frac{3-2-10}{3}=-3 \end{cases}$

Vậy $G\left(\frac{1}{3};-3\right)$ là trọng tâm của tam giác $BCD$

**Câu 63.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho tam giác $ABC$ có $D(3;4),E(6;1),F(7;3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AB,BC,CA$ .Tính tổng tung độ ba đỉnh của tam giác $ABC$.

**A.** $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $8$. **D.** $16$.

**Lời giải**

**Chọn C**

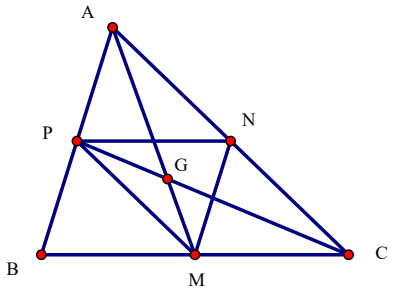
Ta có $\begin{cases} y_A + y_B = 2y_D = 2.4 = 8 \\ y_A + y_C = 2y_F = 2.3 = 6 \\ y_B + y_C = 2y_E = 2.1 = 2 \end{cases} \Rightarrow 2\left(y_A + y_B + y_C\right) = 8 + 6 + 2 = 16$

$\Rightarrow y_A + y_B + y_C = 8$. Chọn **C.**

**Câu 64.** Cho tam giác $ABC$. Biết trung điểm của các cạnh $BC$, $CA$, $AB$ có tọa độ lần lượt là $M\left(1;-1\right)$, $N\left(3;2\right)$, $P\left(0;-5\right)$. Khi đó tọa độ của điểm $A$ là:

**A.** $\left(2;-2\right)$. **B.** $\left(5;1\right)$. **C.** $\left(\sqrt{5};0\right)$. **D.** $\left(2;\sqrt{2}\right)$.

**Lời giải**




**Chọn A**

Có tam giác $\Delta ABC$ và $\Delta MNP$ có cùng trọng tâm $G$.

Có $G\left(\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{GM} = \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, gọi $A\left(x;y\right)$.

Có $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} - x = -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} - y = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$. Vậy $A\left(2;-2\right)$.

**Câu 65.** Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho $\Delta MNP$ có $M\left(1;-1\right); N\left(5;-3\right)$ và $P$ thuộc trục $Oy$. Trọng tâm $G$ của tam giác nằm trên trục $Ox$. Tọa độ của điểm $P$ là:

**A.** $P\left(0;4\right)$ **B.** $P\left(2;0\right)$ **C.** $P\left(2;4\right)$ **D.** $P\left(0;2\right)$

**Lời giải**

**Đáp án C**

Ta có $P$ thuộc $Oy \Rightarrow \left(0;y\right)$, $G$ thuộc trục $Ox \Rightarrow G\left(x;0\right)$

Vì $G$ là trọng tâm $\Delta MNP \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+5+0}{3} \\ 0 = \frac{-1-3+y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

**Câu 66.** Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $M\left(3;-4\right)$. Gọi $M_1, M_2$ làn lượt là hình chiếu vuông góc của $M$ trên $Ox$, $Oy$. Khẳng định nào đúng?

**A.** $\overline{OM_1} = -3$ **B.** $\overline{OM_2} = 4$

**C.** $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = \left(-3;4\right)$ **D.** $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \left(3;-4\right)$

**Lời giải**

**Đáp án D**

Ta có $M_1(3;0), M_2(0;-4)$

**Câu 67.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho tam giác $MNP$ có $M(1;\ -1)$, $N(5;\ -3)$ và $P$ là điểm thuộc trục $Oy$, trọng tâm $G$ của tam giác $MNP$ nằm trên trục $Ox$. Tọa độ điểm $P$ là

**A.** $(2;\ 4)$. **B.** $(0;\ 4)$. **C.** $(0;\ 2)$. **D.** $(2;\ 0)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$P \in Oy \Rightarrow P(0;\ y)$.

$G \in Ox \Rightarrow G(x;\ 0)$.

Điểm $G$ là trọng tâm của tam giác $MNP \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+5+0}{3} \\ 0 = \dfrac{(-1)+(-3)+y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$.

**Câu 68.** Trên mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho hai điểm $A(1;1), B(2;4)$. Tìm tọa độ điểm $M$ để tứ giác $OBMA$ là một hình bình hành.

**A.** $M(-3;-3)$. **B.** $M(3;-3)$. **C.** $M(3;3)$. **D.** $M(-3;3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $M(x;y)$. Khi đó $\overrightarrow{OB}(2;4), \overrightarrow{AM}(x-1;y+1)$

Tứ giác $OBMA$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy $M(3;3)$

**Câu 69.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;5), B(1;1), C(3;3)$, một điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. Tọa độ của E là

**A.** $(-3;3)$. **B.** $(-3;-3)$. **C.** $(3;-3)$. **D.** $(-2;-3)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\overrightarrow{AB}(-1;-4)$; $\overrightarrow{AC}(1;-2)$. Gọi $E(x;y)$.

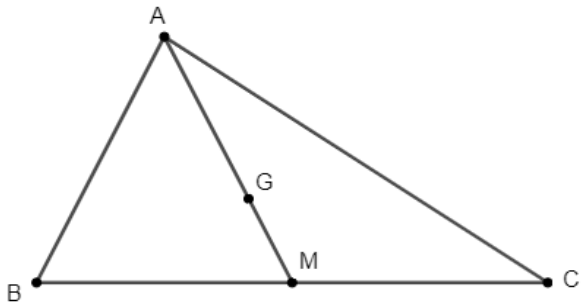
$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3(-1) - 2.1 \\ y-5 = 3(-4) - 2(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow E(-3;-3)$

**Câu 70.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G\left(\dfrac{2}{3};\ 0\right)$, biết $M(1;-1)$ là trung điểm của cạnh $BC$. Tọa độ đỉnh $A$ là

**A.** $(2;\ 0)$. **B.** $(-2;\ 0)$. **C.** $(0;-2)$. **D.** $(0;\ 2)$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $A(x_A;y_A)$. Ta tính được $\overrightarrow{AM}=(1-x_A;-1-y_A)$, $\overrightarrow{GM}=\left(\frac{1}{3};-1\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{GM}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x_A=1\\-1-y_A=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=0\\y_A=2\end{cases}$. Vậy $A(0;\ 2)$.

**Câu 71.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho $A(2;3)$, $B(-2;1)$. Điểm $C$ thuộc tia $Ox$ sao cho tam giác $ABC$ vuông tại $C$ có tọa độ là:

**A.** $C(3;0)$. **B.** $C(-3;0)$. **C.** $C(-1;0)$. **D.** $C(2;0)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có : $C\in Ox\Rightarrow C(x;0)$. Khi đó : $\overrightarrow{AC}=(x-2;-3)$ ; $\overrightarrow{BC}=(x+2;-1)$.

Tam giác $ABC$ vuông tại $C\Rightarrow\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow x^2-4+3=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Vậy $C(-1;0)$ hoặc $C(1;0)$.

**Câu 72.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho $A(3;3)$, $B(-1;-9)$, $C(5;-1)$. Gọi $I$ là trung điểm của $AB$. Tìm tọa độ $M$ sao cho $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$.

**A.** $(5;4)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-6;-1)$. **D.** $(2;1)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Giả sử $M(x;y)$. Ta có $I(1;-3),\overrightarrow{CI}(-4;-2),\overrightarrow{AM}=(x-3;y-3)$.

$\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=2\\y-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$. Vậy $M(5;4)$.

**Câu 73.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $\Delta ABC$ có $A(-3;3),B(1;4),C(2;-5)$. Tọa độ điểm $M$ thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{CM}$ là:

**A.** $M\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$ **B.** $M\left(-\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right)$ **C.** $M\left(\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right)$ **D.** $M\left(\frac{5}{6};-\frac{1}{6}\right)$

**Lời giải**

**Đáp án C**

Ta có $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{CM}\Leftrightarrow\begin{cases}2(-3-x_M)-(2-1)=4(x_M-2)\\2(3-y_M)-(5-4)=4(y_M+5)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\frac{1}{6}\\y_M=-\frac{5}{6}\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right)$

**Câu 74.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $A(2;1), B(1;-3)$. Tìm tọa độ giao điểm $I$ của hai đường chéo hình bình hành $OABC$.

**A.** $I\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ **B.** $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ **C.** $I(2;6)$ **D.** $I\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

**Lời giải**

**Đáp án D**

$I$ là trung điểm của $OB = I\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

**Câu 75.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $A(1;3), B(4;0)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

**A.** $M(1;18)$ **B.** $M(-1;18)$ **C.** $M(-18;1)$ **D.** $M(1;-18)$

**Lời giải**

**Đáp án D**

Ta có

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(1-x_M)+(4-x_M)-3(2-x_M)=0\\ 3-y_M+(0-y_M)-3(-5-y_M)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_M=1\\ y_M=-18\end{cases}$$

**Câu 76.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho 3 điểm $A(2;5); B(1;1); C(3;3)$. Tìm điểm $E$ thuộc mặt phẳng tọa độ thỏa mãn $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$?

**A.** $E(3;-3)$ **B.** $E(-3;3)$ **C.** $E(-3;-3)$ **D.** $E(-2;-3)$

**Lời giải**

Gọi $E(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{AE}=(x-2;y-5), \overrightarrow{AB}=(-1;-4), \overrightarrow{AC}=(1;-2)$

$$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=-5\\ y-5=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\ y=-3\end{cases} \Rightarrow E(-3;-3)$$

**Đáp án C**

**Câu 77.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho $\Delta ABC$ có $A(3;4), B(2;1), C(-1;-2)$. Tìm điểm $M$ có tung độ dương trên đường thẳng $BC$ sao cho $S_{ABC}=3S_{ABM}$.

**A.** $M(2;2)$ **B.** $M(3;2)$ **C.** $M(-3;2)$ **D.** $M(3;3)$

**Lời giải**

Gọi $M(x;y)$. Ta có: $S_{ABC}=3S_{ABM} \Leftrightarrow BC=3BM \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\pm 3\overrightarrow{BM}$

$\overrightarrow{BM}=(x-2;y-1); \overrightarrow{BC}=(-3;3)$

- TH1: $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BM} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$ (loại)

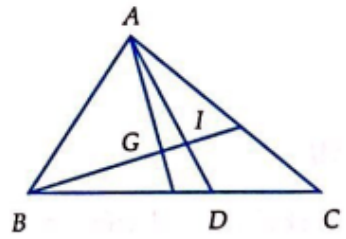
- TH2: $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{BM} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$ (nhận) $\Rightarrow M(3;2)$

**Đáp án B**

**Câu 78.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho 3 điểm $A(-1;-1), B(0;1), C(3;0)$. Xác định tọa độ giao điểm $I$ của $AD$ và $BG$ với $D$ thuộc $BC$ và $2BD=5DC$, $G$ là trọng tâm $\Delta ABC$

**A.** $I\left(\frac{5}{9};1\right)$ **B.** $I\left(\frac{1}{9};1\right)$ **C.** $I\left(\frac{35}{9};2\right)$ **D.** $I\left(\frac{35}{9};1\right)$

**Lời giải**




Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2),\overrightarrow{AC}=(4;1)\Rightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Ta có $2\overrightarrow{BD}=5\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_D=5(3-x_D)\\2(y_D-1)=5(-y_D)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_D=\frac{15}{7}\\y_D=\frac{2}{7}\end{cases}\Rightarrow D\left(\frac{15}{7};\frac{2}{7}\right)$

Trọng tâm $G\left(\frac{2}{3};0\right)$. Gọi $I(x;y)$ là giao điểm của $AD$ và $BG$

Ta có $\overrightarrow{AI}=(x+1;y+1),\overrightarrow{AD}=\left(\frac{22}{7};\frac{9}{7}\right)$ cùng phương $\Rightarrow\frac{7(x+1)}{22}=\frac{7(y+1)}{9}\Leftrightarrow 9x-22y-13=0$

Ta lại có $\overrightarrow{BI}=(x;y-1),\overrightarrow{BG}=\left(-\frac{1}{3};0\right)$ cùng phương $\Rightarrow$ tồn tại số $k\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{BI}=k\overrightarrow{BG}\Rightarrow y=1\Rightarrow I\left(\frac{35}{9};1\right)$

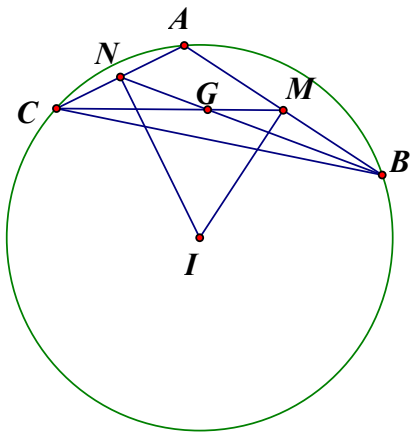
**Đáp án D**

**Câu 79.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có ba đỉnh $A(-1;2)$, $B(2;0)$, $C(-3;1)$. Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp $I$ của tam giác $ABC$ là

**A.** $I\left(\frac{11}{14};\frac{13}{14}\right)$. **B.** $I\left(\frac{11}{14};-\frac{13}{14}\right)$. **C.** $I\left(-\frac{11}{14};\frac{13}{14}\right)$. **D.** $I\left(-\frac{11}{14};-\frac{13}{14}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**



Giả sử $I(a;b)$ khi đó: $\begin{cases}\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{IN}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}(*)$

$M\left(\frac{1}{2};1\right)$, $N\left(-2;\frac{3}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm $AB$, $AC$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-1)$, $\overrightarrow{IM}=\left(\frac{1}{2}-a;1-b\right)$, $\overrightarrow{IN}=\left(-2-a;\frac{3}{2}-b\right)$.

Do đó: $\begin{cases}3\left(\frac{1}{2}-a\right)-2(1-b)=0\\ -2(-2-a)-1\left(\frac{3}{2}-b\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{11}{14}\\ b=-\frac{13}{14}\end{cases}$.

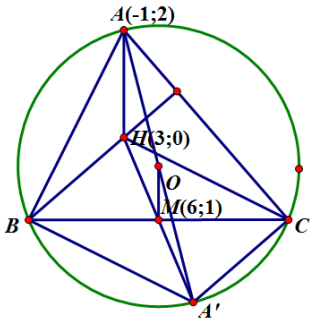
Suy ra: $I\left(-\frac{11}{14};-\frac{13}{14}\right)$.

**Câu 80.** Tam giác $ABC$ có đỉnh $A(-1;2)$, trực tâm $H(3;0)$, trung điểm của $BC$ là $M(6;1)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là

**A.** $5$. **B.** $\sqrt{5}$ **C.** $3$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Kẻ đường kính $AA'$ của đường tròn khi đó ta có $\widehat{ABA'}=\widehat{ACA'}=90^\circ$ hay $A'B\perp AB$ và $A'C\perp AC$.

Vì $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$ nên $BH\perp AC$ và $CH\perp AB\Rightarrow BH\parallel A'C$ và $CH\parallel A'B$, do đó $A'BHC$ là hình bình hành. Mà điểm $M$ là trung điểm của đường chéo $BC$ nên nó cũng là trung điểm của $A'H$. Từ đó suy ra $OM$ là đường trung bình của tam giác $AHA'$ nên: $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\begin{cases}4=2(6-x_O)\\ -2=2(1-y_O)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_O=4\\ y_O=2\end{cases}\Leftrightarrow O(4;2)$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ có độ dài bằng $OA=\sqrt{(-1-4)^2+(2-2)^2}=5$.

# Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

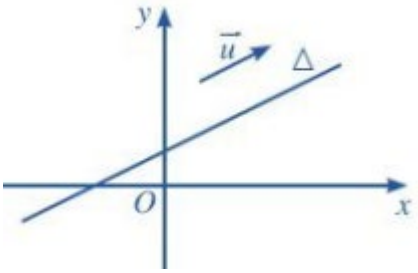
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Phương trình tham số của đường thẳng

#### 1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chi phương của đường thẳng $\Delta$ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với $\Delta$.

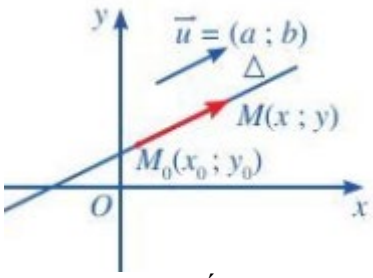



Nhận xét

- Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của $\Delta$ thì $k\vec{u}(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của $\Delta$.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

#### 2. Phương trình tham số của đường thẳng

Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, trong đó $t$ là tham số, được gọi là phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a;b)(\vec{u} \neq \vec{0})$ làm vectơ chỉ phương.




Nhận xét: Cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình tham số là

$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}\left(a^2 + b^2 > 0\right), t$ là tham số.

- Với mỗi giá trị cụ thể của $t$, ta xác định được một điểm trên đường thẳng $\Delta$. Ngược lại, với mỗi điểm trên đường thẳng $\Delta$, ta xác định được một giá trị cụ thể của $t$.
- Vectơ $\vec{u} = (a;b)$ là một vectơ chỉ phương của $\Delta$.

***Ví dụ 1.***

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A(-1;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(2; \frac{1}{2}\right)$.

b) Cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 8 - 2t \end{cases}$. Chỉ ra tọa độ một vectơ chỉ phương của $\Delta$ và một điểm thuộc đường thẳng $\Delta$.

***Giải***

a) Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là:

$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + \dfrac{1}{2}t \end{cases}$ ($t$ là tham số).

b) Toạ độ của một vectơ chỉ phương của $\Delta$ là $\vec{u} = (3;-2)$.

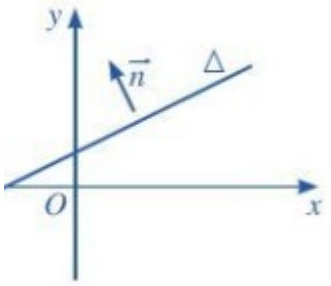
Ứng với $t = 0$ ta có $\begin{cases} x = (-5) + 3.0 = -5 \\ y = 8 - 2 \cdot 0 = 8. \end{cases}$

Điểm $B(-5;8)$ thuộc đường thẳng $\Delta$.

## II. Phương trình tổng quát của đường thẳng

### 1. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng $\Delta$ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với $\Delta$.

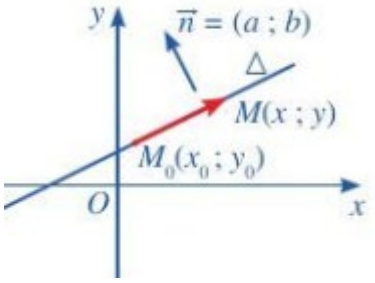



***Nhận xét***

- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của $\Delta$ thì $k\vec{n}(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của $\Delta$.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đó.
- Nếu đường thẳng $\Delta$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a;b)$ thì vectơ $\vec{n} = (-b;a)$ là một vectơ pháp tuyến của $\Delta$.

### 2. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Phương trình $ax + by + c = 0 (a$ và $b$ không đồng thời bằng 0 ) được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.




*Nhận xét*

- Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ và nhận $\vec{n} = (a;b)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0.$

- Mỗi phương trình $ax + by + c = 0$ ( $a$ và $b$ không đồng thời bằng 0 ) đều xác định một đường thẳng $\Delta$ trên mặt phẳng toạ độ nhận một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b)$.

***Ví dụ 2.*** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A(-2;4)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3;2)$.

***Giải***

Phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ là

$3(x+2) + 2(y-4) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 2y - 2 = 0$

### 3. Những dạng đặc biệt của phương trình tổng quát

*Nhận xét*

- Đường thẳng $\Delta$ có phương trình tổng quát $ax+by+c=0$ ( $a$ hoặc $b$ khác 0 ) là đồ thị hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $a\neq 0$ và $b\neq 0$.
- Phương trình trục hoành là $y=0$, phương trình trục tung là $x=0$.

**III. Lập phương trình đường thẳng**

Khi lập phương trình đường thẳng, ta thường gặp ba trường hợp như sau:
- Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết vectơ pháp tuyến.
- Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết vectơ chỉ phương.
- Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cho trước.

**1. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến**

Phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ và nhận $\vec{n}=(a;b)(\vec{n}\neq\vec{0})$ làm vectơ pháp tuyến là $a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0$.

**2. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ chỉ phương**

Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ và nhận $\vec{u}=(a;b)$ $(\vec{u}\neq\vec{0})$ làm vectơ chỉ phương là $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$ ( là tham số).

Nếu $a\neq 0$ và $b\neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng $\Delta$ ở dạng:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}.$$

**3. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm**

Đường thẳng $\Delta$ đi quahai điểm $A\left(x_0;y_0\right),B\left(x_1;y_1\right)$ nên nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=\left(x_1-x_0;y_1-y_0\right)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó, phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là:

$\begin{cases}x=x_0+(x_1-x_0)t\\y=y_0+(y_1-y_0)t\end{cases}$ ($t$ là tham số).

Nếu $x_1-x_0\neq 0$ và $y_1-y_0\neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng $\Delta$ ở dạng:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

***Ví dụ 3.*** Lập phương trình đường thẳng $\Delta$ thoả mãn mỗi điều kiện sau:

a) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M(-2;-3)$ và có $\vec{n}=(2;5)$ là vectơ pháp tuyến;

b) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M(3;-5)$ và có $\vec{u}=(2;-4)$ là vectơ chỉ phương;

c) Đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm $A(-3;4)$ và $B(1;-1)$.

***Giải***

a) Phương trình $\Delta$ là $2(x+2)+5(y+3)=0\Leftrightarrow 2x+5y+19=0$.

b) Phương trình $\Delta$ là $\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{-4}\Leftrightarrow 4x+2y-2=0\Leftrightarrow 2x+y-1=0$.

c) Phương trình $\Delta$ là $\frac{x+3}{1-(-3)}=\frac{y-4}{(-1)-4}\Leftrightarrow\frac{x+3}{4}=\frac{y-4}{-5}\Leftrightarrow 5x+4y-1=0$.

***Ví dụ 4.*** Lập phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ với $a^2+b^2>0$

***Giải***

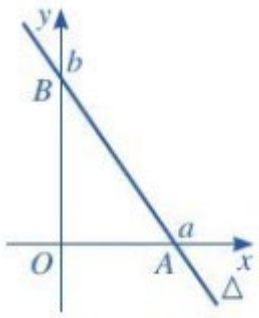
Đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm $A,B$ nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(-a;b)$. Suy ra $\Delta$ nhận vectơ $\vec{n}=(b;a)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy đường thẳng $\Delta$ có phương trình tổng quát là:

$b(x-a)+a(y-0)=0$ hay $bx+ay-ab=0$ (1)

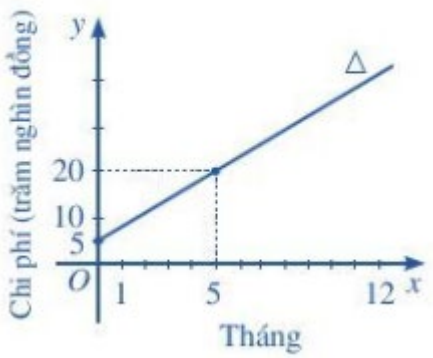
*Chú ý:* Trong trường hợp $ab\neq 0$, chia hai vế của phương trình (1) cho $ab$ ta được:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Phương trình dạng (2) được gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn, đường thẳng này cắt $Ox$ và $Oy$ lần lượt tại $A(a;0)$ và $B(0;b)$




***Ví dụ 5.*** Đường thẳng $\Delta$ ở hình biểu thị tổng chi phí lắp đặt và tiền cước sử dụng dịch vụ Internet (đơn vị: trăm nghìn đồng) theo thời gian của một gia đình (đơn vị: tháng).




a) Viết phương trình của đường thẳng $\Delta$.
b) Cho biết giao điểm của đường thẳng $\Delta$ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì.
c) Tính tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên.

***Giải***

a) Đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm lần lượt có tọ độ $(0;5)$ và $(5;20)$ nên $\Delta$ có phương trình là:

$$\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-5}{20-5}\Leftrightarrow\frac{x}{5}=\frac{y-5}{15}\Leftrightarrow\frac{x}{1}=\frac{y-5}{3}\Leftrightarrow 3x-y+5=0\Leftrightarrow y=3x+5.$$

b) Giao điểm của đường thẳng $\Delta$ với trục $Oy$ ứng với $x=0$. Thời điểm $x=0$ cho biết mức phí ban đầu lắp đặt để sử dụng Internet. Khi $x=0$ thì $y=5$, vì vậy chi phí lắp đặt ban đầu là 500000 đồng.

c) 12 tháng đầu tiên ứng với $x=12$. Do đó: $y=3\cdot 12+5=41$.

Vậy tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên là 4100000 đồng.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

Tìm một điểm $I\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đường thẳng.

Tìm một VTPT $\vec{n}\left(a;b\right)$ của đường thẳng.

Viết phương trình $a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0$ rồi suy ra dạng tổng quát $ax+by+c=0$.

Hoặt viết phương trình tổng quát $ax+by+c=0$, tìm $c$ nhờ đường thẳng đã cho đi qua điểm $I$

**Đặc biệt**

- $d'//d:ax+by+c=0\Rightarrow d':ax+by+c'=0$ (với $c\neq c'$).
- $d''\perp d:ax+by+c=0\Rightarrow d'':bx-ay+c''=0$.
- $y=kx+m\Rightarrow kx-y+m=0$.
- $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\Rightarrow bx+ay-ab=0$.

**Câu 1.** Viết phương trình tổng quát của

a) Đường thẳng $Ox$ b) Đường thẳng $Oy$ c) Các đường phân giác của góc $xOy$

**Câu 2.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

a) Đi qua $M\left(x_0;y_0\right)$ và song song với $Ox$.

b) Đi qua $M\left(x_0;y_0\right)$ và vuông góc với $Ox$.

c) Đi qua $M\left(x_0;y_0\right)$ khác gốc $O$ và điểm $O$.

**Câu 3.** Cho hai điểm $M_1\left(x_1;y_1\right)$, $M_2\left(x_2;y_2\right)$. Lập phương trình tổng quát của

a) Đường thẳng đi qua $M_1$, $M_2$.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng $M_1M_2$.

**Câu 4.** Chứng minh rằng đường thẳng đi qua hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ với $a\neq 0$ và $b\neq 0$ có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

**Câu 5.** Một đường thẳng đi qua điểm $M\left(5;-3\right)$ cắt trục $Ox$ và $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ sao cho $M$ là trung điểm của $AB$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đó.

**Câu 6.** Cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình $Ax+By+C=0$ và điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M_0$ và

a) Song song với dường thẳng $\Delta$.

b) Vuông góc với đường thẳng $\Delta$.

**Câu 7.** Lập phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua $M\left(3;4\right)$ và có VTPT $\vec{n}=\left(-2;1\right)$

**Câu 8.** Lập phương trình tổng quát của đường thẳng

a) qua $A(2;0)$ và $B(0;3)$.

b) qua $M\left(-5;-8\right)$ và có hệ số góc $k=-3$.

**Câu 9.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $d$

a) qua $M\left(-1;-4\right)$ và song song với đường thẳng $3x+5y-2=0$.

b) qua $N\left(1;1\right)$ và vuông góc với đường thẳng $2x+3y+7=0$.

**Câu 10.** Cho hai điểm $P\left(4;0\right)$ và $Q\left(0;-2\right)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

a) Qua điểm $S$ và song song với đường thẳng $PQ$.

b) Trung trực của $PQ$.

**Câu 11.** Viết phương trình các đường trung trực của tam giác $ABC$ biết $M\left(-1;1\right)$, $N\left(1;9\right)$, $P\left(9;1\right)$ là các trung điểm ba cạnh của tam giác.

**Câu 12.** Cho điểm $M\left(1;2\right)$. Hãy lập phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M$ và chắn trên hai trục tọa độ hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

**Câu 13.** Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(2;5\right)$ và cách đều hai điểm $P\left(-1;2\right)$, $Q\left(5;4\right)$.

**Câu 14.** Đường thẳng $d:2x-y+8=0$ cắt các trục tọa độ $Ox$ và $Oy$ lần lượt tại các điểm $A$ và $B$. Gọi $M$ là điểm chia đoạn $AB$ theo tỉ số $-3$. Viết phương trình đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $d$.

**Câu 15.** Cho đường thẳng $d_1: 2x-y-2=0$; $d_2: x+y+3=0$ và điểm $M(3;0)$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M$, cắt $d_1$ và $d_2$ lần lượt tại $A$ và $B$ sao cho $M$ là trung điểm của đoạn $AB$.

**Câu 16.** Cho tam giác $ABC$ biết $A(2;\ 1)$, $B(-1;\ 0)$, $C(0;\ 3)$

a)Viết phương trình tổng quát của đường cao $AH$.

b)Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng $AB$.

c)Viết phương trình tổng quát đường thẳng $BC$.

d)Viết phương trình tổng quát đường thẳng qua $A$ và song song với $BC$.

**Dạng 2. Phương trình tham số của đường thẳng**

Tìm một điểm $I(x_0;y_0)$ thuộc đường thẳng.

Tìm một VTPT $\vec{n}(a;b)$ của đường thẳng.

Phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + at \end{cases}, (a^2+b^2 \neq 0).$

Đặc biệt, d qua A, B thì có VTPT $\vec{u}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

d' $\perp$ d: ax + by + c = 0 thì VTPT $\vec{u'}(a;b)$.

d" // d: ax + by + c = 0 thì VTPT $\vec{u''} = (-b;a)$ hay (b; –a).

d có hệ số góc k' thì VTPT $\vec{u} = (1;k)$.

**Câu 17.** Viết phương trình tham số của đường thẳng qua:

a) $M_0(x_0;y_0)$ và vuông góc với đường thẳng $Ax + By + C = 0$.

b) $M_0(x_0;y_0)$ và song song với đường thẳng $Ax + By + C = 0$.

**Câu 18.** Lập phương trình tham số của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(2;1)$ và có VTCP $\vec{u} = (3;7)$.

**Câu 19.** Lập phương trình tham số của đường thẳng $d$:

a)Đi qua điểm $M(5;1)$ và có hệ số góc $k = 8$.

b)Đi qua hai điểm $A(3;4)$ và $B(4;2)$.

**Câu 20.** Viết phương trình tham số của đường thẳng:

a) $2x+3y-6=0$.

b) $y = -4x+5$.

**Câu 21.** Viết phương trình tham số của đường thẳng:

a) $d: x = 3$.

b)d: $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+1}{-3}$.

**Dạng 3. Phương trình chính tắc của đường thẳng**

*Tìm một điểm $I(x_0;y_0)$ thuộc đường thẳng.*

*Tìm một VTCP $\vec{n}(a;b)$ của đường thẳng.*

*Nếu a, b ≠ 0 thì có dạng chính tắc:* $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$.

*d' ⊥ d: ax + by + c = 0 thì VTCP* $\vec{u'}=(a;b)$.

*d'' // d: ax + by + c = 0 thì VTCP* $\vec{u''}=(-b;a)$ *hay (b; –a).*

*d có hệ số góc k' thì VTCP* $\vec{u}=(1;k)$.

**Câu 22.** Lập phương trình chính tắc của đường thẳng:

a)Qua $A(-4;1)$ và $B(1;4)$.

b)Qua $A(4;1)$ và $B(4;2)$.

**Câu 23.** Cho điểm $A(-5;2)$ và đường thẳng d: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-2}$. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng d':

a)Qua A và song song với d.

b)Qua A và vuông góc với d.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Xác định véctơ chỉ phương, véc tơ pháp tuyến của đường thẳng, hệ số góc của đường thẳng

**Câu 1.** Trong mặt phẳng $Oxy$, đường thẳng $(d): ax+by+c=0,\ (a^2+b^2\neq 0)$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng $(d)$?

**A.** $\vec{n}=(a;-b)$. **B.** $\vec{n}=(b;a)$. **C.** $\vec{n}=(b;-a)$. **D.** $\vec{n}=(a;b)$.

**Câu 2.** Cho đường thẳng $d$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)$, $a,b\in\mathbb{R}$. Xét các khẳng định sau:

1. Nếu $b=0$ thì đường thẳng $d$ không có hệ số góc.

2. Nếu $b\neq 0$ thì hệ số góc của đường thẳng $d$ là $\frac{a}{b}$.

3. Đường thẳng $d$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(b;-a)$.

4. Vectơ $k\vec{n}$, $k\in\mathbb{R}$ là vectơ pháp tuyến của $d$.

Có bao nhiêu khẳng định **sai**?

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

**Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-2y+3=0$. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng $d$ là

**A.** $\vec{n}=(1;-2)$ **B.** $\vec{n}=(2;1)$ **C.** $\vec{n}=(-2;3)$ **D.** $\vec{n}=(1;3)$

**Câu 4.** Cho đường thẳng $(d): 3x+2y-10=0$. Véc tơ nào sau đây là véctơ chỉ phương của $(d)$?

**A.** $\vec{u}=(3;2)$. **B.** $\vec{u}=(3;-2)$. **C.** $\vec{u}=(2;-3)$. **D.** $\vec{u}=(-2;-3)$.

**Câu 5.** Cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=5-\frac{1}{2}t\\ y=-3+3t\end{cases}$ một vectơ pháp tuyến của đường thẳng $\Delta$ có tọa độ

**A.** $(5;-3)$. **B.** $(6;1)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};3\right)$. **D.** $(-5;3)$.

**Câu 6.** Trong hệ trục tọa độ $Oxy$, Véctơ nào là một véctơ pháp tuyến của đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2-t\\y=-1+2t\end{cases}$?

**A.** $\vec{n}(-2;-1)$. **B.** $\vec{n}(2;-1)$. **C.** $\vec{n}(-1;2)$. **D.** $\vec{n}(1;2)$.

**Câu 7.** Vectơ chỉ phương của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-4t\\y=-2+3t\end{cases}$ là:

**A.** $\vec{u}=(-4;3)$. **B.** $\vec{u}=(4;3)$. **C.** $\vec{u}=(3;4)$. **D.** $\vec{u}=(1;-2)$.

**Câu 8.** Vector nào dưới đây là 1 vector chỉ phương của đường thẳng song song với trục $Ox$:

**A.** $\vec{u}=(1;0)$. **B.** $\vec{u}=(1;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;1)$. **D.** $\vec{u}=(0;1)$.

**Câu 9.** Cho đường thẳng $d:7x+3y-1=0$. Vectơ nào sau đây là Vectơ chỉ phương của $d$?

**A.** $\vec{u}=(7;3)$. **B.** $\vec{u}=(3;7)$. **C.** $\vec{u}=(-3;7)$. **D.** $\vec{u}=(2;3)$.

**Câu 10.** Cho đường thẳng $d:2x+3y-4=0$. Véctơ nào sau đây là véctơ pháp tuyến của đường thẳng $d$?

**A.** $\overrightarrow{n_1}=(3;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_1}=(-4;-6)$. **C.** $\overrightarrow{n_1}=(2;-3)$. **D.** $\overrightarrow{n_1}=(-2;3)$.

**Câu 11.** Cho đường thẳng $d:\ 5x+3y-7=0.$ Vectơ nào sau đây là một vec tơ chỉ phương của đường thẳng $d$?

**A.** $\overrightarrow{n_1}=(3;5)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(3;-5)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(5;3)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(-5;-3)$.

**Câu 12.** Cho đường thẳng $\Delta:x-2y+3=0$. Véc tơ nào sau đây **không là** véc tơ chỉ phương của $\Delta$?

**A.** $\vec{u}=(4;-2)$. **B.** $\vec{v}=(-2;-1)$. **C.** $\vec{m}=(2;1)$. **D.** $\vec{q}=(4;2)$.

**Câu 13.** Cho hai điểm $A=(1;2)$ và $B=(5;4)$. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng $AB$ là

**A.** $(-1;-2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-1;2)$.

**Câu 14.** Cho đường thẳng $d:7x+3y-1=0$. Vectơ nào sau đây là Vectơ chỉ phương của đường thẳng $d$?

**A.** $\vec{u}=(7;3)$. **B.** $\vec{u}=(3;7)$. **C.** $\vec{u}=(-3;7)$. **D.** $\vec{u}=(2;3)$.

**Câu 15.** Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của $d:x-2y+2018=0$?

**A.** $\vec{n}_1(0;-2)$. **B.** $\vec{n}_3(-2;0)$. **C.** $\vec{n}_4(2;1)$. **D.** $\vec{n}_2(1;-2)$.

**Câu 16.** Vectơ nào trong các vectơ dưới đây là vectơ pháp tuyến của đường thẳng $y+2x-1=0$?

**A.** $(2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

**Câu 17.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường thẳng $d:2x-y+1=0$, một véctơ pháp tuyến của $d$ là

**A.** $(-2;-1)$. **B.** $(2;-1)$. **C.** $(-1;-2)$. **D.** $(1;-2)$.

**Câu 18.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho đường thẳng $d:2x-3y+4=0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của $d$.

**A.** $\overrightarrow{u_4}=(3;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(2;3)$.

**C.** $\overrightarrow{u_1}=(2;-3)$. **D.** $\overrightarrow{u_3}=(3;2)$

**Câu 19.** Vectơ nào sau đây là một Vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta:6x-2y+3=0$?

**A.** $\vec{u}(1;3)$. **B.** $\vec{u}(6;2)$. **C.** $\vec{u}(-1;3)$. **D.** $\vec{u}(3;-1)$.

**Câu 20.** Cho hai điểm $M(2;3)$ và $N(-2;5)$. Đường thẳng $MN$ có một vectơ chỉ phương là:

**A.** $\vec{u}=(4;2)$. **B.** $\vec{u}=(4;-2)$. **C.** $\vec{u}=(-4;-2)$. **D.** $\vec{u}=(-2;4)$.

**Câu 21.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x-2y+1=0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng $d$ là

**A.** $\vec{u}=(1;-2)$. **B.** $\vec{u}=(2;1)$. **C.** $\vec{u}=(2;-1)$. **D.** $\vec{u}=(1;2)$.

**Câu 22.** Đường thẳng $d$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào là một vectơ pháp tuyến của $d$?

**A.** $\overrightarrow{n_1}=(-1;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(1;-2)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-3;6)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;6)$.

**Câu 23.** Đường thẳng $d$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;-2)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào là một vectơ chỉ phương của $d$?

**A.** $\overrightarrow{u_1}=(2;-4)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-2;4)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;2)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;1)$.

**Câu 24.** Đường thẳng $d$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-4)$. Đường thẳng $\Delta$ vuông góc với $d$ có một vectơ pháp tuyến là:

**A.** $\overrightarrow{n_1}=(4;3)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-4;-3)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;4)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;-4)$.

**Câu 25.** Đường thẳng $d$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-2;-5)$. Đường thẳng $\Delta$ vuông góc với $d$ có một vectơ chỉ phương là:

**A.** $\overrightarrow{u_1}=(5;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-5;2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-5)$.

**Câu 26.** Đường thẳng $d$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-4)$. Đường thẳng $\Delta$ song song với $d$ có một vectơ pháp tuyến là:

**A.** $\overrightarrow{n_1}=(4;3)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-4;3)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;4)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;-4)$.

**Câu 27.** Đường thẳng $d$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-2;-5)$. Đường thẳng $\Delta$ song song với $d$ có một vectơ chỉ phương là:

**A.** $\overrightarrow{u_1}=(5;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-5;-2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-5)$.

**Câu 28.** Cho đường thẳng $d: 3x+5y+2018=0$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

**A.** $d$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;5)$. **B.** $d$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(5;-3)$.

**C.** $d$ có hệ số góc $k=\dfrac{5}{3}$. **D.** $d$ song song với đường thẳng $\Delta: 3x+5y=0$.

**Câu 29.** Cho đường thẳng $(d): x-7y+15=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $(d)$ có hệ số góc $k=\dfrac{1}{7}$ **B.** $(d)$ đi qua hai điểm $M\left(-\dfrac{1}{3};2\right)$ và $M(5;0)$

**C.** $\vec{u}=(-7;1)$ là vecto chỉ phương của $(d)$ **D.** $(d)$ đi qua gốc tọa độ

## Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng (tổng quát, tham số, chính tắc)

**Câu 30.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(-2;3)$ và $B(4;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng $AB$?

**A.** $x+y-3=0$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $\frac{x-4}{6}=\frac{y-1}{-4}$. **D.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=1-2t\end{cases}$.

**Câu 31.** Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2;-1)$ và $B(2;5)$ là

**A.** $\begin{cases}x=2t\\y=-6t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+t\\y=5+6t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1\\y=2+6t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2\\y=-1+6t\end{cases}$.

**Câu 32.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(-6;2)$. Phương trình nào dưới đây không phải là phương trình tham số của đường thẳng $AB$?

**A.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-3t\\y=t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-6-3t\\y=2+t\end{cases}$.

**Câu 33.** Phương trình tham số của đường thẳng qua $M(1;-2)$, $N(4;3)$ là

**A.** $\begin{cases}x=4+t\\y=3-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+5t\\y=-2-3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=4+5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=-2+5t\end{cases}$.

**Câu 34.** Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;-1), B(-6;2)$ là

**A.** $\begin{cases}x=-1+3t\\y=2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-6-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1+t\end{cases}$.

**Câu 35.** Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai điểm $A(3;0), B(0;2)$ và đường thẳng $d: x+y=0$. Lập phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ qua $A$ và song song với $d$.

**A.** $\begin{cases}x=t\\y=3-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=3+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-t\\y=3-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-t\\y=3+t\end{cases}$.

**Câu 36.** Cho đường thẳng $d$ có phương trình tham số $\begin{cases}x=5+t\\y=-9-2t\end{cases}$. Phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ là

**A.** $2x+y-1=0$. **B.** $-2x+y-1=0$. **C.** $x+2y+1=0$. **D.** $2x+3y-1=0$.

**Câu 37.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho điểm $M(1;2)$. Gọi $A, B$ là hình chiếu của $M$ lên $Ox, Oy$. Viết phương trình đường thẳng $AB$.

**A.** $x+2y-1=0$. **B.** $2x+y+2=0$. **C.** $2x+y-2=0$. **D.** $x+y-3=0$.

**Câu 38.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: \begin{cases}x=3-5t\\y=1+4t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ là

**A.** $4x-5y-7=0$.. **B.** $4x+5y-17=0$.. **C.** $4x-5y-17=0$.. **D.** $4x+5y+17=0$.

**Câu 39.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d$ cắt hai trục $Ox$ và $Oy$ lần lượt tại hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ $(a\neq 0; b\neq 0)$. Viết phương trình đường thẳng $d$.

**A.** $d: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$. **B.** $d: \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$. **C.** $d: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. **D.** $d: \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$..

**Câu 40.** Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(0;4), B(-6;0)$ là:

**A.** $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$. **B.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}=1$. **C.** $\frac{-x}{4}+\frac{y}{-6}=1$. **D.** $\frac{-x}{6}+\frac{y}{4}=1$.

**Câu 41.** Phương trình đường thẳng $d$ đi qua $A(1;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 3x-2y+1=0$ là:

**A.** $3x-2y-7=0$. **B.** $2x+3y+4=0$. **C.** $x+3y+5=0$. **D.** $2x+3y-3=0$.

**Câu 42.** Cho đường thẳng $d: 8x-6y+7=0$. Nếu đường thẳng $\Delta$ đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $d$ thì $\Delta$ có phương trình là

**A.** $4x-3y=0$. **B.** $4x+3y=0$. **C.** $3x+4y=0$. **D.** $3x-4y=0$.

**Câu 43.** Đường thẳng đi qua điểm $A(1;11)$ và song song với đường thẳng $y=3x+5$ có phương trình là

**A.** $y=3x+11$. **B.** $y=(-3x+14)$. **C.** $y=3x+8$. **D.** $y=x+10$.

**Câu 44.** Lập phương trình đường đi qua $A(2;5)$ và song song với đường thẳng $(d): y=3x+4$?

**A.** $(\Delta): y=3x-2$. **B.** $(\Delta): y=3x-1$. **C.** $(\Delta): y=-\frac{1}{3}x-1$. **D.** $(\Delta): y=-3x-1$.

**Câu 45.** Trong hệ trục $Oxy$, đường thẳng $d$ qua $M(1;1)$ và song song với đường thẳng $d': x+y-1=0$ có phương trình là

**A.** $x+y-1=0$. **B.** $x-y=0$. **C.** $-x+y-1=0$. **D.** $x+y-2=0$.

**Câu 46.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $I(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình $2x-y+4=0$.

**A.** $x+2y=0$. **B.** $x+2y-3=0$. **C.** $x+2y+3=0$. **D.** $x-2y+5=0$.

**Câu 47.** Trong hệ trục tọa độ Trong hệ trục tọa độ $Oxy$ cho hai điểm $M(1;0)$ và $N(0;2)$. Đường thẳng đi qua $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ và song song với đường thẳng $MN$ có phương trình là

**A.** Không tồn tại đường thẳng như đề bài yêu cầu.

**B.** $2x+y-2=0$.

**C.** $4x+y-3=0$.

**D.** $2x-4y+3=0$.

**Câu 48.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(2;0)$, $B(0;3)$ và $C(-3;-1)$. Đường thẳng đi qua điểm $B$ và song song với $AC$ có phương trình tham số là:

**A.** $\begin{cases}x=5t\\y=3+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=5\\y=1+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=3-5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+5t\\y=t\end{cases}$.

**Câu 49.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(3;2)$, $P(4;0)$ và $Q(0;-2)$. Đường thẳng đi qua điểm $A$ và song song với $PQ$ có phương trình tham số là:

**A.** $\begin{cases}x=3+4t\\y=2-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3-2t\\y=2+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2+t\end{cases}$.

**Câu 50.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A(-2;1)$ và phương trình đường thẳng chứa cạnh $CD$ là $\begin{cases}x=1+4t\\y=3t\end{cases}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa cạnh $AB$.

**A.** $\begin{cases}x=-2+3t\\y=-2-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2-4t\\y=1-3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2-3t\\y=1-4t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2-3t\\y=1+4t\end{cases}$.

**Câu 51.** Viết phương trình tham số của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-3;5)$ và song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

**A.** $\begin{cases} x=-3+t \\ y=5-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-3+t \\ y=5+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-5+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=5-t \\ y=-3+t \end{cases}$.

**Câu 52.** Viết phương trình tham số của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(4;-7)$ và song song với trục $Ox$.

**A.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=4 \\ y=-7+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-7+t \\ y=4 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=-7 \end{cases}$.

**Câu 53.** Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(1;2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: 2x+3y-12=0$ có phương trình tổng quát là:

**A.** $2x+3y-8=0$. **B.** $2x+3y+8=0$. **C.** $4x+6y+1=0$. **D.** $4x-3y-8=0$.

**Câu 54.** Phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua $O$ và song song với đường thẳng $\Delta: 6x-4x+1=0$ là:

**A.** $3x-2y=0$. **B.** $4x+6y=0$. **C.** $3x+12y-1=0$. **D.** $6x-4y-1=0$.

**Câu 55.** Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x+y-3=0$ có phương trình tổng quát là:

**A.** $2x+y=0$. **B.** $x-2y-3=0$. **C.** $x+y-1=0$. **D.** $x-2y+5=0$.

**Câu 56.** Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A(4;-3)$ và song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x=3-2t \\ y=1+3t \end{cases}$.

**A.** $3x+2y+6=0$. **B.** $-2x+3y+17=0$.

**C.** $3x+2y-6=0$. **D.** $3x-2y+6=0$.

**Câu 57.** Cho tam giác $ABC$ có $A(2;0)$, $B(0;3)$, $C(-3;1)$. Đường thẳng $d$ đi qua $B$ và song song với $AC$ có phương trình tổng quát là:

**A.** $5x-y+3=0$. **B.** $5x+y-3=0$. **C.** $x+5y-15=0$. **D.** $x-15y+15=0$.

**Câu 58.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-1;0)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-2t \end{cases}$.

**A.** $2x+y+2=0$. **B.** $2x-y+2=0$. **C.** $x-2y+1=0$. **D.** $x+2y+1=0$.

**Câu 59.** Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-2;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1-3t \\ y=-2+5t \end{cases}$ có phương trình tham số là:

**A.** $\begin{cases} x=-2-3t \\ y=1+5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2+5t \\ y=1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2+5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+5t \\ y=2+3t \end{cases}$.

**Câu 60.** Viết phương trình tham số của đường thẳng $d$ đi qua điểm $A(-1;2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: 3x-13y+1=0$.

**A.** $\begin{cases} x=-1+13t \\ y=2+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+13t \\ y=-2+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1-13t \\ y=2+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-13t \end{cases}$.

**Câu 61.** Viết phương trình tham số của đường thẳng $d$ qua điểm $A(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x-y+4=0$.

**A.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=4+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \end{cases}$.

**Câu 62.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-2;-5)$ và song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

**A.** $x+y-3=0$. **B.** $x-y-3=0$. **C.** $x+y+3=0$. **D.** $2x-y-1=0$.

**Câu 63.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(3;-1)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai.

**A.** $x+y-4=0$. **B.** $x-y-4=0$. **C.** $x+y+4=0$. **D.** $x-y+4=0$.

**Câu 64.** Viết phương trình tham số của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-4;0)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai.

**A.** $\begin{cases} x=t \\ y=-4+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-4+t \\ y=-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=4+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=4-t \end{cases}$.

**Câu 65.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-1;2)$ và song song với trục $Ox$.

**A.** $y+2=0$. **B.** $x+1=0$. **C.** $x-1=0$. **D.** $y-2=0$.

**Câu 66.** Viết phương trình tham số của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(6;-10)$ và vuông góc với trục $Oy$.

**A.** $\begin{cases} x=10+t \\ y=6 \end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases} x=2+t \\ y=-10 \end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases} x=6 \\ y=-10-t \end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases} x=6 \\ y=-10+t \end{cases}$.

**Câu 67.** Đường trung trực của đoạn $AB$ với $A(1;-4)$ và $B(5;2)$ có phương trình là:

**A.** $2x+3y-3=0$. **B.** $3x+2y+1=0$. **C.** $3x-y+4=0$. **D.** $x+y-1=0$.

**Câu 68.** Đường trung trực của đoạn $AB$ với $A(4;-1)$ và $B(1;-4)$ có phương trình là:

**A.** $x+y=1$. **B.** $x+y=0$. **C.** $y-x=0$. **D.** $x-y=1$.

**Câu 69.** Đường trung trực của đoạn $AB$ với $A(1;-4)$ và $B(1;2)$ có phương trình là:

**A.** $y+1=0$. **B.** $x+1=0$. **C.** $y-1=0$. **D.** $x-4y=0$.

**Câu 70.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $I(1;-1)$ và hai đường thẳng $d_1: x+y-3=0, d_2: x-2y-6=0$. Hai điểm $A, B$ lần lượt thuộc hai đường thẳng $d_1, d_2$ sao cho $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$. Đường thẳng $AB$ có một véctơ chỉ phương là

**A.** $\overrightarrow{u_1}=(1;2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(2;1)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;-2)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-1)$.

# Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

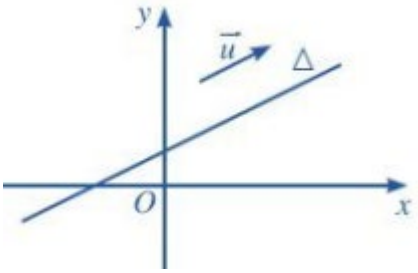
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Phương trình tham số của đường thẳng

#### 1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chi phương của đường thẳng $\Delta$ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với $\Delta$.

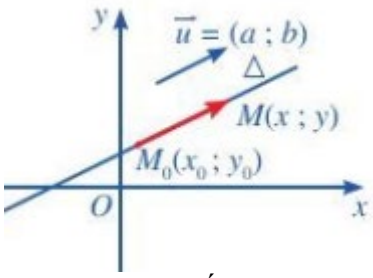



Nhận xét

- Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của $\Delta$ thì $k\vec{u}(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của $\Delta$.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

#### 2. Phương trình tham số của đường thẳng

Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, trong đó $t$ là tham số, được gọi là phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a;b)(\vec{u} \neq \vec{0})$ làm vectơ chỉ phương.




Nhận xét: Cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình tham số là

$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}\left(a^2 + b^2 > 0\right), t$ là tham số.

- Với mỗi giá trị cụ thể của $t$, ta xác định được một điểm trên đường thẳng $\Delta$. Ngược lại, với mỗi điểm trên đường thẳng $\Delta$, ta xác định được một giá trị cụ thể của $t$.
- Vectơ $\vec{u} = (a;b)$ là một vectơ chỉ phương của $\Delta$.

***Ví dụ 1.***

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A(-1;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(2; \frac{1}{2}\right)$.

b) Cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 8 - 2t \end{cases}$. Chỉ ra tọa độ một vectơ chỉ phương của $\Delta$ và một điểm thuộc đường thẳng $\Delta$.

***Giải***

a) Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là:

$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + \dfrac{1}{2}t \end{cases}$ ($t$ là tham số).

b) Toạ độ của một vectơ chỉ phương của $\Delta$ là $\vec{u} = (3;-2)$.

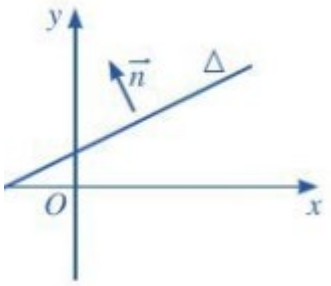
Ứng với $t = 0$ ta có $\begin{cases} x = (-5) + 3.0 = -5 \\ y = 8 - 2 \cdot 0 = 8. \end{cases}$

Điểm $B(-5;8)$ thuộc đường thẳng $\Delta$.

## II. Phương trình tổng quát của đường thẳng

### 1. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng $\Delta$ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với $\Delta$.

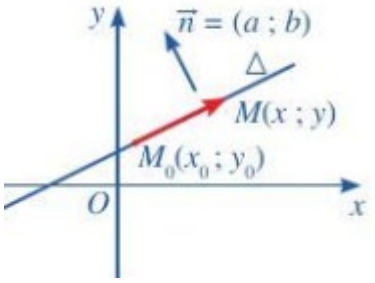



***Nhận xét***

- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của $\Delta$ thì $k\vec{n}(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của $\Delta$.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đó.
- Nếu đường thẳng $\Delta$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a;b)$ thì vectơ $\vec{n} = (-b;a)$ là một vectơ pháp tuyến của $\Delta$.

### 2. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Phương trình $ax + by + c = 0 (a$ và $b$ không đồng thời bằng 0 ) được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.




*Nhận xét*

- Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ và nhận $\vec{n} = (a;b)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0.$

- Mỗi phương trình $ax + by + c = 0$ ( $a$ và $b$ không đồng thời bằng 0 ) đều xác định một đường thẳng $\Delta$ trên mặt phẳng toạ độ nhận một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b)$.

***Ví dụ 2.*** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A(-2;4)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3;2)$.

***Giải***

Phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ là

$3(x+2) + 2(y-4) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 2y - 2 = 0$

### 3. Những dạng đặc biệt của phương trình tổng quát

*Nhận xét*

- Đường thẳng $\Delta$ có phương trình tổng quát $ax+by+c=0$ ( $a$ hoặc $b$ khác 0 ) là đồ thị hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $a\neq 0$ và $b\neq 0$.
- Phương trình trục hoành là $y=0$, phương trình trục tung là $x=0$.

**III. Lập phương trình đường thẳng**

Khi lập phương trình đường thẳng, ta thường gặp ba trường hợp như sau:
- Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết vectơ pháp tuyến.
- Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết vectơ chỉ phương.
- Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cho trước.

**1. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến**

Phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ và nhận $\vec{n}=(a;b)(\vec{n}\neq\vec{0})$ làm vectơ pháp tuyến là $a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0$.

**2. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ chỉ phương**

Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ và nhận $\vec{u}=(a;b)$ $(\vec{u}\neq\vec{0})$ làm vectơ chỉ phương là $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$ ( là tham số).

Nếu $a\neq 0$ và $b\neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng $\Delta$ ở dạng:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}.$$

**3. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm**

Đường thẳng $\Delta$ đi quahai điểm $A\left(x_0;y_0\right),B\left(x_1;y_1\right)$ nên nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=\left(x_1-x_0;y_1-y_0\right)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó, phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là:

$\begin{cases}x=x_0+(x_1-x_0)t\\y=y_0+(y_1-y_0)t\end{cases}$ ($t$ là tham số).

Nếu $x_1-x_0\neq 0$ và $y_1-y_0\neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng $\Delta$ ở dạng:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

***Ví dụ 3.*** Lập phương trình đường thẳng $\Delta$ thoả mãn mỗi điều kiện sau:

a) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M(-2;-3)$ và có $\vec{n}=(2;5)$ là vectơ pháp tuyến;

b) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M(3;-5)$ và có $\vec{u}=(2;-4)$ là vectơ chỉ phương;

c) Đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm $A(-3;4)$ và $B(1;-1)$.

***Giải***

a) Phương trình $\Delta$ là $2(x+2)+5(y+3)=0\Leftrightarrow 2x+5y+19=0$.

b) Phương trình $\Delta$ là $\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{-4}\Leftrightarrow 4x+2y-2=0\Leftrightarrow 2x+y-1=0$.

c) Phương trình $\Delta$ là $\frac{x+3}{1-(-3)}=\frac{y-4}{(-1)-4}\Leftrightarrow\frac{x+3}{4}=\frac{y-4}{-5}\Leftrightarrow 5x+4y-1=0$.

***Ví dụ 4.*** Lập phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ với $a^2+b^2>0$

***Giải***

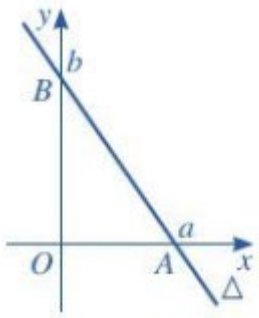
Đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm $A,B$ nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(-a;b)$. Suy ra $\Delta$ nhận vectơ $\vec{n}=(b;a)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy đường thẳng $\Delta$ có phương trình tổng quát là:

$b(x-a)+a(y-0)=0$ hay $bx+ay-ab=0$ (1)

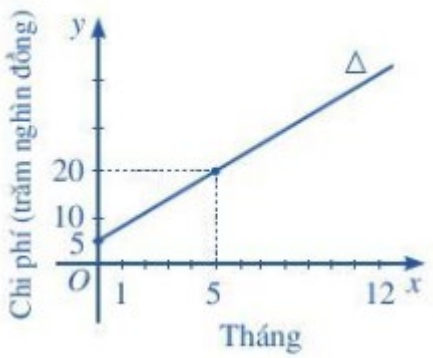
*Chú ý:* Trong trường hợp $ab\neq 0$, chia hai vế của phương trình (1) cho $ab$ ta được:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Phương trình dạng (2) được gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn, đường thẳng này cắt $Ox$ và $Oy$ lần lượt tại $A(a;0)$ và $B(0;b)$




***Ví dụ 5.*** Đường thẳng $\Delta$ ở hình biểu thị tổng chi phí lắp đặt và tiền cước sử dụng dịch vụ Internet (đơn vị: trăm nghìn đồng) theo thời gian của một gia đình (đơn vị: tháng).




a) Viết phương trình của đường thẳng $\Delta$.
b) Cho biết giao điểm của đường thẳng $\Delta$ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì.
c) Tính tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên.

***Giải***

a) Đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm lần lượt có tọ độ $(0;5)$ và $(5;20)$ nên $\Delta$ có phương trình là:

$$\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-5}{20-5}\Leftrightarrow\frac{x}{5}=\frac{y-5}{15}\Leftrightarrow\frac{x}{1}=\frac{y-5}{3}\Leftrightarrow 3x-y+5=0\Leftrightarrow y=3x+5.$$

b) Giao điểm của đường thẳng $\Delta$ với trục $Oy$ ứng với $x=0$. Thời điểm $x=0$ cho biết mức phí ban đầu lắp đặt để sử dụng Internet. Khi $x=0$ thì $y=5$, vì vậy chi phí lắp đặt ban đầu là 500000 đồng.

c) 12 tháng đầu tiên ứng với $x=12$. Do đó: $y=3\cdot 12+5=41$.

Vậy tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên là 4100000 đồng.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

Tìm một điểm $I\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đường thẳng.

Tìm một VTPT $\vec{n}\left(a;b\right)$ của đường thẳng.

Viết phương trình $a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0$ rồi suy ra dạng tổng quát $ax+by+c=0$.

Hoặt viết phương trình tổng quát $ax+by+c=0$, tìm $c$ nhờ đường thẳng đã cho đi qua điểm $I$

**Đặc biệt**

- $d'//d:ax+by+c=0\Rightarrow d':ax+by+c'=0$ (với $c\neq c'$).
- $d''\perp d:ax+by+c=0\Rightarrow d'':bx-ay+c''=0$.
- $y=kx+m\Rightarrow kx-y+m=0$.
- $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\Rightarrow bx+ay-ab=0$.

**Câu 1.** Viết phương trình tổng quát của

a) Đường thẳng $Ox$ b) Đường thẳng $Oy$ c) Các đường phân giác của góc $xOy$

**Lời giải**

a) Đường thẳng $Ox$ đi qua gốc tọa độ $O$ và có VTPT $\vec{j}=(0;1)$ nên có phương trình

$0(x-0)+1(y-0)=0 \Leftrightarrow y=0$.

b) Đường thẳng $Oy$ đi qua gốc tọa độ $O$ và có VTPT $\vec{i}=(1;0)$ nên có phương trình

$1(x-0)+0(y-0)=0 \Leftrightarrow x=0$.

c) Phân giác của góc phần tư thứ $I$ và $II$ đi qua gốc tọa độ $O$ và hợp thành với trục hoành góc nhọn $45°$ nên có hai phương trình $y=(\tan 45°)x \Leftrightarrow x-y=0$ và $y=(\tan 135°)x \Leftrightarrow x+y=0$.

**Câu 2.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

a) Đi qua $M(x_0;y_0)$ và song song với $Ox$.

b) Đi qua $M(x_0;y_0)$ và vuông góc với $Ox$.

c) Đi qua $M(x_0;y_0)$ khác gốc $O$ và điểm $O$.

**Lời giải**

a) Đường thẳng đi qua $M(x_0;y_0)$ và song song với $Ox$ có VTPT $\vec{j}=(0;1)$ nên có phương trình: $0(x-x_0)+1(y-y_0)=0 \Leftrightarrow y-y_0=0$ với điều kiện $M \notin Ox \Leftrightarrow y_0 \neq 0$.

b) Đường thẳng đi qua $M(x_0;y_0)$ và vuông góc với $Ox$ có VTPT $\vec{i}=(1;0)$ nên có phương trình: $1(x-x_0)+0(y-y_0)=0 \Leftrightarrow x-x_0=0$ với điều kiện $M \notin Ox \Leftrightarrow x_0 \neq 0$.

c) Đường thẳng $OM$ đi qua $O$ nên có phương trình dạnh $ax+by=0$, $a^2+b^2 \neq 0$. Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ nên $ax_0+by_0=0$. Chọn $a=y_0$, $b=-x_0$ thỏa điềuu kiện $a^2+b^2=x_0^2+y_0^2 \neq 0$ nên có phương trình $y_0x-x_0y=0$.

**Câu 3.** Cho hai điểm $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$. Lập phương trình tổng quát của

a) Đường thẳng đi qua $M_1$, $M_2$.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng $M_1M_2$.

**Lời giải**

a) Đường thẳng đi qua điểm $M_1$, $M_2$ có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$ nên VTPT $\vec{n}=(y_2-y_1;-(x_2-x_1))$ có phương trình $(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$.

Đặc biệt, nếu $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ thì có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

b) Đường trung trực của đoạn $M_1M_2$ đi qua trung điểm $M_0\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ và có VTPT là $\overrightarrow{M_1M_2}$ nên có phương trình $(x_2-x_1)\left(x-\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)+(y_2-y_1)\left(y-\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y-x_2^2+x_1^2+y_1^2-y_2^2=0$.

**Câu 4.** Chứng minh rằng đường thẳng đi qua hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ với $a\neq 0$ và $b\neq 0$ có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

**Lời giải**

Vì $\overrightarrow{AB}=(-a;b)$ nên $\vec{n}=(b;a)$ vuông góc với $AB$ là VTPT.

Đường thẳng cần tìm có phương trình $b(x-a)+a(y-0)=0$ hay $bx+ay=ab$.

Chia cả hai vế cho $ab$ ta được $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

**Câu 5.** Một đường thẳng đi qua điểm $M(5;-3)$ cắt trục $Ox$ và $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ sao cho $M$ là trung điểm của $AB$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đó.

**Lời giải**

Giả sử $A=(a;0)$, $B=(0;b)$. Vì $M(5;-3)$ là trung điểm của $AB$ nên $\begin{cases}5=\frac{a+0}{2}\\-3=\frac{0+b}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=10\\b=-6\end{cases}$

Phương trình của đường thẳng đi qua $A$, $B$ là $\frac{x}{10}+\frac{y}{-6}=1$ hay $3x-5y-30=0$.

**Câu 6.** Cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình $Ax+By+C=0$ và điểm $M_0(x_0;y_0)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M_0$ và

a) Song song với dường thẳng $\Delta$.

b) Vuông góc với đường thẳng $\Delta$.

**Lời giải**

a) $\Delta$ có VTPT $\vec{n}=(A;B)$.

Vì $\Delta'//\Delta$ nên chọn VTPT $\overrightarrow{n'}=\vec{n}=(A;B)$.

$\Rightarrow \Delta': A(x-x_0)+B(y-y_0)=0\Leftrightarrow Ax+By-(Ax_0+By_0)=0$.

b) Vì $\Delta'\perp\Delta$ nên chọn VTPT $\overrightarrow{n''}=(B;-A)$.

$\Rightarrow \Delta'': B(x-x_0)-A(y-y_0)=0\Leftrightarrow Bx+Ay-(Bx_0-Ay_0)=0$.

**Câu 7.** Lập phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua $M(3;4)$ và có VTPT $\vec{n}=(-2;1)$

**Lời giải**

Đường thẳng $d$ đi qua $M(3;4)$ và có VTPT $\vec{n}=(-2;1)$.

Phương trình tổng quát của $d$ có dạng $Ax+By+C=0$. Thay $A=-2$, $B=1$ vào ta có: $-2x+y+C=0$.

$M\in d\Rightarrow -6+4+C=0\Rightarrow C=2$.

Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ là: $-2x+y+2=0$ hay $2x-y-2=0$.

**Câu 8.** Lập phương trình tổng quát của đường thẳng

a) qua $A(2;0)$ và $B(0;3)$.

b) qua $M(-5;-8)$ và có hệ số góc $k=-3$.

**Lời giải**

a) Phương trình theo đoạn chắn $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1\Leftrightarrow 3x-2y-6=0$

b) Phương trình theo hệ số góc: $y=kx+m=-3x+m$.

Đường thẳng đi qua $M(-5;-8)$ nên $-8=15+m\Leftrightarrow m=-23$.

Do đó phương trình tổng quát: $y=-3x-23\Leftrightarrow 3x+y+23=0$.

**Câu 9.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $d$

a) qua $M(-1;-4)$ và song song với đường thẳng $3x+5y-2=0$.

b) qua $N(1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $2x+3y+7=0$.

**Lời giải**

a) VTPT của đường thẳng $3x+5y-2=0$ cũng là VTPT của đường thẳng $d$ nên phương trình của $d$ có dạng $3x+5y+c=0$ $(c\neq -2)$.

Vì $d$ đi qua điểm $M(-1;-4)$ nên $-3-20+c=0\Rightarrow c=23$.

Vậy phương trình tổng quát của $d:3x+5y+23=0$.

b) Đường thẳng $d$ vuông góc với đường thẳng $2x+3y+7=0$ nên lấy VTCP $(3;-2)$ làm VTPT của $d$

$\Rightarrow d:3(x-1)-2(y-1)=0\Leftrightarrow 3x-2y-1=0$.

**Câu 10.** Cho hai điểm $P(4;0)$ và $Q(0;-2)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

a) Qua điểm $S$ và song song với đường thẳng $PQ$.

b) Trung trực của $PQ$.

**Lời giải**

a) Đường thẳng $PQ$ có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1\Leftrightarrow x-2y-4=0$.

Đường thẳng $d$ song song với $PQ$ có phương trình $x-2y+c=0$ với $c\neq 4$.

Vì $d$ qua $A$ nên $3-2.2+c=0\Rightarrow c=1$.

Vậy phương trình của đường thẳng $d:x-2y+1=0$.

b) Đường trung trực của đoạn $PQ$ đi qua trung điểm $I$ của $PQ$ là $I(2;-1)$ và vuông góc với đường thẳng $PQ$ nên nhận $\overrightarrow{PQ}=(-4;-2)$ là VTPT. Phương trình đường trung trực của $PQ$ là $-4(x-2)-2(y+1)=0\Leftrightarrow 2x+y-3=0$.

**Câu 11.** Viết phương trình các đường trung trực của tam giác $ABC$ biết $M(-1;1)$, $N(1;9)$, $P(9;1)$ là các trung điểm ba cạnh của tam giác.

**Lời giải**

Giả sử $M,N,P$ theo thứ tự đó là trung điểm các cạnh $AB$, $AC$ và $BC$ của tam giác $ABC$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(2;8)$; $\overrightarrow{NP}=(8;-8)$; $\overrightarrow{MP}=(10;0)$.

Đường trung trực của cạnh $BC$ đi qua $P$ nhận $\overrightarrow{MN}$ làm véc tơ chỉ phương nên có phương trình $2(x-9)+8(y-1)=0$ hay $x+4y-13=0$.

Tương tự, ta được phương trình các đường trung trực các cạnh $AB$, $AC$ lần lượt là $x-y+2=0$ và $x-1=0$.

**Câu 12.** Cho điểm $M(1;2)$. Hãy lập phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M$ và chắn trên hai trục tọa độ hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

**Lời giải**

• Xét $d$ qua gốc $O$ thì $d: y=kx \Rightarrow y=2x$.

• Xét $d$ không qua gốc $O$ thì $a,b\neq 0$ khi đó $d: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Theo giả thiết thì $|a|=|b|$.

+ Nếu $b=a$ thì $d: x+y=a$. Vì $d$ qua điểm $M(1;2)$ nên $a=3$, do đó $d: x+y=3$.

+ Nếu $b=-a$ thì $d: x-y=a$. Vì $d$ qua điểm $M(1;2)$ nên $a=-1$, do đó $d: x-y=-1$.

Vậy có 3 đường thẳng: $2x-y=0$, $x+y-3=0$, $x-y+1=0$.

**Câu 13.** Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2;5)$ và cách đều hai điểm $P(-1;2)$, $Q(5;4)$.

**Lời giải**

Xét $d//PQ$ thì thỏa mãn điều kiện cách đều $P$ và $Q$.

VTCP $\overrightarrow{PQ}=(6;2)$ nên $d: \begin{cases} x=2+3t \\ y=5+t \end{cases}$

Xét $d'$ không song song với $PQ$, để $d'$ cách đều $P,Q$ thì $d'$ đi qua trung điểm $I(2;3)$ của $PQ$

VTCP $\overrightarrow{MI}=(0;-2)$ nên $d': \begin{cases} x=2 \\ y=5-2t \end{cases}$.

**Câu 14.** Đường thẳng $d: 2x-y+8=0$ cắt các trục tọa độ $Ox$ và $Oy$ lần lượt tại các điểm $A$ và $B$. Gọi $M$ là điểm chia đoạn $AB$ theo tỉ số $-3$. Viết phương trình đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $d$.

**Lời giải**

Cho $x=0 \Rightarrow y=8$, $y=0 \Rightarrow x=-4$. Do đó $A(-4;0)$, $B(0;8)$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ thì $x_0=\frac{x_1-kx_2}{1-k}=\frac{-4-0}{4}=-1$. Vậy $M(-1;6)$.

VTCP của $d: 2x-y+8=0$ là $\vec{u}=(1;2)$. Do đó phương trình đường thẳng $d'$ qua điểm $M$ và vuông góc với $d$ là $d': 1(x+1)+2(y-6)=0$ hay $x+2y-11=0$.

**Câu 15.** Cho đường thẳng $d_1: 2x-y-2=0$; $d_2: x+y+3=0$ và điểm $M(3;0)$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M$, cắt $d_1$ và $d_2$ lần lượt tại $A$ và $B$ sao cho $M$ là trung điểm của đoạn $AB$.

**Lời giải**

$A(x_A;y_A)\in d_1 \Rightarrow y_A=2x_A-2$.

$B(x_B;y_B)\in d_2 \Rightarrow y_B=-x_B-3$.

Vì M là trung điểm của AB nên:

$$\begin{cases} x_A+x_B=2x_M \\ y_A+y_B=2y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A+x_B=6 \\ 2x_A-2-x_B-3=0 \end{cases} \Rightarrow x_A=\frac{11}{3} \Rightarrow y_A=\frac{16}{3}.$$

Vậy A = $\left(\frac{11}{3};\frac{16}{3}\right)$.

Đường thẳng Δ là đường thẳng qua A và M. Từ đó suy ra Δ: 8x – y – 24 = 0.

**Câu 16.** Cho tam giác $ABC$ biết $A(2;\ 1),\ B(-1;\ 0),\ C(0;\ 3)$

a)Viết phương trình tổng quát của đường cao $AH$.

b)Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng $AB$.

c)Viết phương trình tổng quát đường thẳng $BC$.

d)Viết phương trình tổng quát đường thẳng qua $A$ và song song với $BC$.

**Lời giải.**

a)Ta có đường cao $AH$ đi qua $A$ và nhận $\overrightarrow{BC}(1;3)$ là VTPT nên có phương trình tổng quát là $1.(x-2)+3.(y-1)=0$ hay $x+3y-5=0.$

b)Gọi I là trung điểm AB khi đó $x_1=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Đường trung trực đoạn thẳng AB đi qua I và nhận $\overrightarrow{AB}(-3;-1)$ làm VTPT nên có phương trình tổng quát là:

$-3.\left(x-\frac{1}{2}\right)-1.\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$ hay $3x+y+2=0$.

c)Phương trình tổng quát của đường thẳng BC có dạng $\frac{x}{-1}+\frac{y}{3}=1$ hay $3x-y+3=0$.

d)Đường thẳng $BC$ có VTPT là $\vec{n}(3;-1)$ do đó vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng AB nên nhận $\vec{n}(3;-1)$ làm VTPT do đó có phương trình tổng quát là:

$3.(x-2)-1.(y-1)=0$ hay $3x-y-5=0.$

**Dạng 2. Phương trình tham số của đường thẳng**

Tìm một điểm $I(x_0;y_0)$ thuộc đường thẳng.

Tìm một VTPT $\vec{n}(a;b)$ của đường thẳng.

Phương trình tham số: $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+at \end{cases},(a^2+b^2\neq 0).$

Đặc biệt, d qua A, B thì có VTPT $\vec{u}(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

d' ⊥ d: ax + by + c = 0 thì VTPT $\vec{u'}(a;b)$.

d" // d: ax + by + c = 0 thì VTPT $\vec{u''}=(-b;a)$ hay (b; –a).

d có hệ số góc k' thì VTPT $\vec{u}=(1;k)$.

**Câu 17.** Viết phương trình tham số của đường thẳng qua:

a) $M_0(x_0;y_0)$ và vuông góc với đường thẳng $Ax + By + C = 0.$

b) $M_0(x_0;y_0)$ và song song với đường thẳng $Ax + By + C = 0$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $Ax + By + C = 0$ có VTPT $\vec{n} = (A;B)$, VTCP $\vec{u} = (-B;A)$.

a)Đường thẳng vuông góc với đường thẳng $Ax + By + C = 0$ có VTPT là $\vec{u} = (A;B)$. Vậy phương trìnhm tha số của đường thẳng là: $\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \end{cases}$.

b)Đường thẳng song song với đường thẳng $Ax + By + C = 0$ có VTCP là $\vec{u} = (-B;A)$. Vậy phương trình tham số của đường thẳng là: $\begin{cases} x = x_0 - Bt \\ y = y_0 + At \end{cases}$.

**Câu 18.** Lập phương trình tham số của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(2;1)$ và có VTCP $\vec{u} = (3;7)$.

**Lời giải.**

Phường trình tham số của $d$ là $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 7t \end{cases}$.

**Câu 19.** Lập phương trình tham số của đường thẳng $d$:
a)Đi qua điểm $M(5;1)$ và có hệ số góc $k = 8$.

b)Đi qua hai điểm $A(3;4)$ và $B(4;2)$.

**Lời giải.**

a) $d$ có hệ số góc $k = 8$ nên có VTCP $\vec{u} = (1;8)$. Vậy phương trình tham số của $d$ là: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + 8t \end{cases}$.

b) $d$ đi qua $A$ và $B$ nên $d$ có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1;-2)$. Vậy phương trình tham số của $d$ là: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$.

**Câu 20.** Viết phương trình tham số của đường thẳng:
a) $2x + 3y - 6 = 0$.

b) $y = -4x + 5$.

**Lời giải.**

a) $d: 2x + 3yn6 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (2;3) \Rightarrow$ VTCP $\vec{u} = (-3;2)$.

Cho $x = 0$ thì $y = 2$ nên $d$ đi qua điểm $M(0;2)$.

Vậy phương trình tham số của $d$ là: $\begin{cases} x = -3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$.

b) $y = -4x + 5$ có hệ số $k = -4$ nên có VTCP $\vec{u} = (1;-4)$.

Cho $x=0 \Rightarrow y=5$ nên $d$ đi qua $I(0;5)$.

Vậy phương trình tham số của $d$ là: $\begin{cases} x=t \\ y=5-4t \end{cases}$.

**Câu 21.** Viết phương trình tham số của đường thẳng:

a) $d: x = 3$.

b)d: $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{-3}$.

**Lời giải.**

a) $d: x-3=0$ đi qua $I(3;0)$ và có VTCP $\vec{u}=(0;1)$.

Vậy phương trình tham số của $d$ là: $\begin{cases} x=3 \\ y=t \end{cases}$.

b)Đặt $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{-3}=t$ thì $x-2=5t$, $y+1=-3t$.

Vậy phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x=2+5t \\ y=-1-3t \end{cases}$.

**Dạng 3. Phương trình chính tắc của đường thẳng**

*Tìm một điểm $I(x_0;y_0)$ thuộc đường thẳng.*

*Tìm một VTCP $\vec{n}(a;b)$ của đường thẳng.*

*Nếu a, b ≠ 0 thì có dạng chính tắc:* $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$.

*d' ⊥ d: ax + by + c = 0 thì VTCP* $\vec{u'}=(a;b)$.

*d'' // d: ax + by + c = 0 thì VTCP* $\vec{u''}=(-b;a)$ *hay (b; –a).*

*d có hệ số góc k' thì VTCP* $\vec{u}=(1;k)$.

**Câu 22.** Lập phương trình chính tắc của đường thẳng:

a)Qua $A(-4;1)$ và $B(1;4)$.

b)Qua $A(4;1)$ và $B(4;2)$.

**Lời giải.**

a)VTCP $\overrightarrow{AB}=(5;3)$ nên có phương trình tham số Δ: $\begin{cases} x=-4+5t \\ y=1+3t \end{cases}$.

Vì a, b ≠ 0 nên có phương trình chính tắc Δ: $\frac{x+4}{5}=\frac{y-1}{3}$.

b)VTCP $\overrightarrow{AB}=(0;1)$ nên có phương trình tham số Δ: $\begin{cases} x=4 \\ y=1+t \end{cases}$.

Vì a = 0 không có phương trình chính tắc.

**Câu 23.** Cho điểm $A(-5;2)$ và đường thẳng d: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-2}$. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng d':

a)Qua A và song song với d.

b)Qua A và vuông góc với d.

**Lời giải.**

a)d có VTCP $\vec{u}=(1;-2)$ cũng là VTCP của d'. Vậy d': $\frac{x+5}{1}=\frac{y-2}{-2}$.

b)d vuông góc với d' nên có VTCP là $A(2;1)$.

Vậy d': $\frac{x+5}{2}=\frac{y-2}{1}$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Xác định véctơ chỉ phương, véc tơ pháp tuyến của đường thẳng, hệ số góc của đường thẳng

**Câu 1.** Trong mặt phẳng $Oxy$, đường thẳng $(d): ax+by+c=0,\ (a^2+b^2\neq 0)$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng $(d)$?

**A.** $\vec{n}=(a;-b)$. **B.** $\vec{n}=(b;a)$. **C.** $\vec{n}=(b;-a)$. **D.** $\vec{n}=(a;b)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có một vectơ pháp tuyến của đường thẳng $(d)$ là $\vec{n}=(a;b)$.

Do đó chọn đáp án **D.** $\vec{n_1}=(-a;b)$.

**Câu 2.** Cho đường thẳng $d$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)$, $a,b\in\mathbb{R}$. Xét các khẳng định sau:

1. Nếu $b=0$ thì đường thẳng $d$ không có hệ số góc.

2. Nếu $b\neq 0$ thì hệ số góc của đường thẳng $d$ là $\frac{a}{b}$.

3. Đường thẳng $d$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(b;-a)$.

4. Vectơ $k\vec{n}$, $k\in\mathbb{R}$ là vectơ pháp tuyến của $d$.

Có bao nhiêu khẳng định **sai**?

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn B.**

$d$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)\Rightarrow$ phương trình $d: ax+by+c=0$.

Nếu $b=0$ thì đường thẳng $d: ax+c=0$ không có hệ số góc $\Rightarrow$khẳng định 1 đúng.

Nếu $b\neq 0$ thì đường thẳng $d: y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ có hệ số góc là $-\frac{a}{b}\Rightarrow$khẳng định 2 sai.

Với $\vec{u}=(b;-a)\Rightarrow \vec{u}.\vec{n}=0\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{n}\Rightarrow\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của $d\Rightarrow$khẳng định 3 đúng.

Chọn $k=0\in\mathbb{R}\Rightarrow k\vec{n}=(0;0)$ không phải là vectơ pháp tuyến của $d\Rightarrow$khẳng định 4 sai.

Vậy có 2 mệnh đề sai.

**Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-2y+3=0$. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng $d$ là

**A.** $\vec{n}=(1;-2)$ **B.** $\vec{n}=(2;1)$ **C.** $\vec{n}=(-2;3)$ **D.** $\vec{n}=(1;3)$

**Lời giải**

**Chọn A.**

**Câu 4.** Cho đường thẳng $(d): 3x+2y-10=0$. Véc tơ nào sau đây là véctơ chỉ phương của $(d)$?

**A.** $\vec{u}=(3;2)$. **B.** $\vec{u}=(3;-2)$. **C.** $\vec{u}=(2;-3)$. **D.** $\vec{u}=(-2;-3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đường thẳng $(d)$ có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;2)$ nên $(d)$ có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-3)$.

**Câu 5.** Cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=5-\frac{1}{2}t\\ y=-3+3t\end{cases}$ một vectơ pháp tuyến của đường thẳng $\Delta$ có tọa độ

**A.** $(5;-3)$. **B.** $(6;1)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};3\right)$. **D.** $(-5;3)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\Delta:\begin{cases}x=5-\frac{1}{2}t\\ y=-3+3t\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left(-\frac{1}{2};3\right)$ suy ra có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left(3;\frac{1}{2}\right)$. Do đó đường thẳng $\Delta$ cũng có một vectơ pháp tuyến có tọa độ $(6;1)$.

**Câu 6.** Trong hệ trục tọa độ $Oxy$, Véctơ nào là một véctơ pháp tuyến của đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2-t\\ y=-1+2t\end{cases}$?

**A.** $\vec{n}(-2;-1)$. **B.** $\vec{n}(2;-1)$. **C.** $\vec{n}(-1;2)$. **D.** $\vec{n}(1;2)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Một VTCP của đường thẳng $d$ là $\vec{u}(-1;2)$ $\Rightarrow$ một VTPT của $d$ là $\vec{n}(-2;-1)$.

**Câu 7.** Vectơ chỉ phương của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-4t\\ y=-2+3t\end{cases}$ là:

**A.** $\vec{u}=(-4;3)$. **B.** $\vec{u}=(4;3)$. **C.** $\vec{u}=(3;4)$. **D.** $\vec{u}=(1;-2)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-4t\\ y=-2+3t\end{cases}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-4;3)$.

**Câu 8.** Vector nào dưới đây là 1 vector chỉ phương của đường thẳng song song với trục $Ox$:

**A.** $\vec{u}=(1;0)$. **B.** $\vec{u}=(1;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;1)$. **D.** $\vec{u}=(0;1)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vector $\vec{i}=(1;0)$ là một vector chỉ phương của trục $Ox$

Các đường thẳng song song với trục $Ox$ có 1 vector chỉ phương là $\vec{u}=\vec{i}=(1;0)$

**Câu 9.** Cho đường thẳng $d:7x+3y-1=0$. Vectơ nào sau đây là Vectơ chỉ phương của $d$?

**A.** $\vec{u}=(7;3)$. **B.** $\vec{u}=(3;7)$. **C.** $\vec{u}=(-3;7)$. **D.** $\vec{u}=(2;3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đường thẳng $d$ có 1 VTPT là $\vec{n}=(7;3)$ nên $d$ có 1 VTCP là $\vec{u}=(-3;7)$.

**Câu 10.** Cho đường thẳng $d:2x+3y-4=0$. Véctơ nào sau đây là véctơ pháp tuyến của đường thẳng $d$ ?

**A.** $\overrightarrow{n_1}=(3;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_1}=(-4;-6)$. **C.** $\overrightarrow{n_1}=(2;-3)$. **D.** $\overrightarrow{n_1}=(-2;3)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Véctơ pháp tuyến của đường thẳng $d$ : $\overrightarrow{n_1}=(-4;-6)$.

**Câu 11.** Cho đường thẳng $d$ : $5x+3y-7=0$. Vectơ nào sau đây là một vec tơ chỉ phương của đường thẳng $d$ ?

**A.** $\overrightarrow{n_1}=(3;5)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(3;-5)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(5;3)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(-5;-3)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đường thẳng $d$ : $5x+3y-7=0$ có vec tơ pháp tuyến là: $\vec{n}=(5;3)$.

Ta có: $\vec{n}.\overrightarrow{n_2}=0$.

$\Rightarrow d$ có một vec tơ chỉ phương là $\overrightarrow{n_2}=(3;-5)$.

**Câu 12.** Cho đường thẳng $\Delta:x-2y+3=0$. Véc tơ nào sau đây **không là** véc tơ chỉ phương của $\Delta$?

**A.** $\vec{u}=(4;-2)$. **B.** $\vec{v}=(-2;-1)$. **C.** $\vec{m}=(2;1)$. **D.** $\vec{q}=(4;2)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Nếu $\vec{u}$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ thì $k.\vec{u},\forall k\neq 0$ cũng là véc tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$.

Từ phương trình đường thẳng $\Delta$ ta thấy đường thẳng $\Delta$ có một véc tơ chỉ phương có toạ độ là $(2;1)$. Do đó véc tơ $\vec{u}=(4;-2)$ không phải là véc tơ chỉ phương của $\Delta$.

**Câu 13.** Cho hai điểm $A=(1;2)$ và $B=(5;4)$. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng $AB$ là

**A.** $(-1;-2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-1;2)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;2)=2(2;1)$ suy ra vectơ pháp tuyến của đường thẳng $AB$ là $\overrightarrow{n_{AB}}=(-1;2)$.

**Câu 14.** Cho đường thẳng $d:7x+3y-1=0$. Vectơ nào sau đây là Vectơ chỉ phương của đường thẳng $d$?

**A.** $\vec{u}=(7;3)$. **B.** $\vec{u}=(3;7)$. **C.** $\vec{u}=(-3;7)$. **D.** $\vec{u}=(2;3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đường thẳng $d$ có 1 VTPT là $\vec{n}=(7;3)$ nên $d$ có 1 VTCP là $\vec{u}=(-3;7)$

**Câu 15.** Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của $d: x-2y+2018=0$?

**A.** $\vec{n}_1(0;-2)$. **B.** $\vec{n}_3(-2;0)$. **C.** $\vec{n}_4(2;1)$. **D.** $\vec{n}_2(1;-2)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đường thẳng $d: x-2y+2018=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2(1;-2)$.

**Câu 16.** Vectơ nào trong các vectơ dưới đây là vectơ pháp tuyến của đường thẳng $y+2x-1=0$?

**A.** $(2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn** **D.**

$(d): y+2x-1=0 \Leftrightarrow 2x+y-1=0$; $(d)$ có VTPT là $\vec{n}=(2;1)$ hay $\vec{n}'=(-2;-1)$

**Câu 17.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường thẳng $d: 2x-y+1=0$, một véctơ pháp tuyến của $d$ là

**A.** $(-2;-1)$. **B.** $(2;-1)$. **C.** $(-1;-2)$. **D.** $(1;-2)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Một véctơ pháp tuyến của đường thẳng $d$ là $\vec{n}=(2;-1)$.

**Câu 18.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho đường thẳng $d: 2x-3y+4=0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của $d$.

**A.** $\overrightarrow{u_4}=(3;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(2;3)$.

**C.** $\overrightarrow{u_1}=(2;-3)$. **D.** $\overrightarrow{u_3}=(3;2)$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta thấy đường thẳng $d$ có một vectơ pháp tuyến là $(2;-3)$. Do đó $\overrightarrow{u_3}=(3;2)$ là một vectơ chỉ phương của $d$.

**Câu 19.** Vectơ nào sau đây là một Vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta: 6x-2y+3=0$?

**A.** $\vec{u}(1;3)$. **B.** $\vec{u}(6;2)$. **C.** $\vec{u}(-1;3)$. **D.** $\vec{u}(3;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

+) Một véctơ pháp tuyến của đường thẳng $\Delta$ là $\vec{n}(6;-2)$ nên véctơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ là $\vec{u}(1;3)$.

**Câu 20.** Cho hai điểm $M(2;3)$ và $N(-2;5)$. Đường thẳng $MN$ có một vectơ chỉ phương là:

**A.** $\vec{u}=(4;2)$. **B.** $\vec{u}=(4;-2)$. **C.** $\vec{u}=(-4;-2)$. **D.** $\vec{u}=(-2;4)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\overrightarrow{MN}=(-4;2)$. Do đó vectơ chỉ phương của $MN$ là $\vec{u}=(4;-2)$.

**Câu 21.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x-2y+1=0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng $d$ là

**A.** $\vec{u}=(1;-2)$. **B.** $\vec{u}=(2;1)$. **C.** $\vec{u}=(2;-1)$. **D.** $\vec{u}=(1;2)$.

**Lời giải**

**Chọn** B

Đường thẳng $d: x-2y+1=0$. có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2)\Rightarrow$ Vectơ chỉ phương của $d$ là $\vec{u}=(2;1)$.

**Câu 22.** Đường thẳng $d$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào là một vectơ pháp tuyến của $d$ ?

**A.** $\overrightarrow{n_1}=(-1;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(1;-2)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-3;6)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;6)$.

**Lời giải**

Đường thẳng $d$ có VTCP: $\vec{u}(2;-1)\longrightarrow$ VTPT $\vec{n}(1;2)$ hoặc $3\vec{n}=(3;6)$. **Chọn D.**

**Câu 23.** Đường thẳng $d$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;-2)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào là một vectơ chỉ phương của $d$ ?

**A.** $\overrightarrow{u_1}=(2;-4)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-2;4)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;2)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;1)$.

**Lời giải**

Đường thẳng $d$ có VTPT: $\vec{n}(4;-2)\longrightarrow$ VTCP $\vec{u}(2;4)$ hoặc $\frac{1}{2}\vec{u}=(1;2)$. **Chọn C.**

**Câu 24.** Đường thẳng $d$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-4)$. Đường thẳng $\Delta$ vuông góc với $d$ có một vectơ pháp tuyến là:

**A.** $\overrightarrow{n_1}=(4;3)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-4;-3)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;4)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;-4)$.

**Lời giải**

$\begin{cases}\vec{u}_d=(3;-4)\\ \Delta\perp d\end{cases}\longrightarrow\vec{n}_\Delta=\vec{u}_d=(3;-4)$. **Chọn D.**

**Câu 25.** Đường thẳng $d$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-2;-5)$. Đường thẳng $\Delta$ vuông góc với $d$ có một vectơ chỉ phương là:

**A.** $\overrightarrow{u_1}=(5;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-5;2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-5)$.

**Lời giải**

$\begin{cases}\vec{n}_d=(-2;-5)\\ \Delta\perp d\end{cases}\longrightarrow\vec{u}_\Delta=\vec{n}_d=(-2;-5)$ hay chọn $-\vec{n}_\Delta=(2;5)$. **Chọn C.**

**Câu 26.** Đường thẳng $d$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-4)$. Đường thẳng $\Delta$ song song với $d$ có một vectơ pháp tuyến là:

**A.** $\overrightarrow{n_1}=(4;3)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-4;3)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;4)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;-4)$.

**Lời giải**

$\begin{cases}\vec{u}_d=(3;-4)\\ \Delta\parallel d\end{cases}\longrightarrow\vec{u}_\Delta=\vec{u}_d=(3;-4)\longrightarrow\vec{n}_\Delta=(4;3)$. **Chọn A.**

**Câu 27.** Đường thẳng $d$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-2;-5)$. Đường thẳng $\Delta$ song song với $d$ có một vectơ chỉ phương là:

**A.** $\overrightarrow{u_1}=(5;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-5;-2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-5)$.

**Lời giải**

$\begin{cases}\vec{n}_d=(-2;-5)\\ \Delta \parallel d\end{cases}\longrightarrow \vec{n}_\Delta=\vec{u}_d=(-2;-5)\longrightarrow \vec{u}_\Delta=(5;-2)$. **Chọn A.**

**Câu 28.** Cho đường thẳng $d:3x+5y+2018=0$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

**A.** $d$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;5)$.

**B.** $d$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(5;-3)$.

**C.** $d$ có hệ số góc $k=\dfrac{5}{3}$.

**D.** $d$ song song với đường thẳng $\Delta:3x+5y=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $d:3x+5y+2018=0\Leftrightarrow d:y=-\dfrac{3}{5}x-\dfrac{2018}{5}$, nên $d$ có hệ số góc $k=-\dfrac{3}{5}$.

**Câu 29.** Cho đường thẳng $(d):x-7y+15=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $(d)$ có hệ số góc $k=\dfrac{1}{7}$

**B.** $(d)$ đi qua hai điểm $M\left(-\dfrac{1}{3};2\right)$ và $M(5;0)$

**C.** $\vec{u}=(-7;1)$ là vecto chỉ phương của $(d)$

**D.** $(d)$ đi qua gốc tọa độ

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $(d):x-7y+15=0$ hay $y=\dfrac{1}{7}x+\dfrac{15}{7}$

Suy ra hệ số góc của đường thẳng là $k=\dfrac{1}{7}$ (đúng)

## Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng (tổng quát, tham số, chính tắc)

**Câu 30.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(-2;3)$ và $B(4;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng $AB$?

**A.** $x+y-3=0$.

**B.** $y=2x+1$.

**C.** $\dfrac{x-4}{6}=\dfrac{y-1}{-4}$.

**D.** $\begin{cases}x=1+3t\\ y=1-2t\end{cases}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Bốn phương trình đã cho trong bốn phương án đều là phương trình của đường thẳng.

Thay lần lượt tọa độ của ***A***, ***B*** vào từng phương án ta thấy tọa độ của cả ***A*** và ***B*** đều thỏa phương án ***D***.

**Câu 31.** Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2;-1)$ và $B(2;5)$ là

**A.** $\begin{cases}x=2t\\ y=-6t\end{cases}$.

**B.** $\begin{cases}x=2+t\\ y=5+6t\end{cases}$.

**C.** $\begin{cases}x=1\\ y=2+6t\end{cases}$.

**D.** $\begin{cases}x=2\\ y=-1+6t\end{cases}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(0;6)$.

Phương trình đường thẳng $AB$ đi qua $A$ và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(0;6)$ là $\begin{cases}x=2\\ y=-1+6t\end{cases}$

**Câu 32.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(-6;2)$. Phương trình nào dưới đây không phải là phương trình tham số của đường thẳng $AB$?

**A.** $\begin{cases} x=3+3t \\ y=-1-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+3t \\ y=-1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-3t \\ y=t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-6-3t \\ y=2+t \end{cases}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

• **Cách 1:** Thay tọa độ các điểm $A$, $B$ lần lượt vào các phương trình trong các phương án trên thì thấy phương án B không thỏa mãn.

• **Cách 2:** Nhận thấy rằng các phương trình ở các phương án A, C, D thì vectơ chỉ phương của các đường thẳng đó cùng phương, riêng chỉ có phương án B thì không. Do đó lựa chọn **B.**

**Câu 33.** Phương trình tham số của đường thẳng qua $M(1;-2)$, $N(4;3)$ là

**A.** $\begin{cases} x=4+t \\ y=3-2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+5t \\ y=-2-3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+3t \\ y=4+5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2+5t \end{cases}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đường thẳng có véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN}=(3;5)$ và đi qua $M(1;-2)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2+5t \end{cases}$.

**Câu 34.** Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;-1), B(-6;2)$ là

**A.** $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+3t \\ y=-1-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+3t \\ y=-6-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+3t \\ y=-1+t \end{cases}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-9;3)\Rightarrow \overrightarrow{u_{AB}}=(3;-1)$.

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng $AB$ là $\begin{cases} x=3+3t \\ y=-1-t \end{cases}$.

**Câu 35.** Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai điểm $A(3;0), B(0;2)$ và đường thẳng $d: x+y=0$. Lập phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ qua $A$ và song song với $d$.

**A.** $\begin{cases} x=t \\ y=3-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=3+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-t \\ y=3-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-t \\ y=3+t \end{cases}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\Delta$ song song với $d$ nên $\Delta: x+y+C=0 (C\neq 0)$.

$\Delta$ qua $A(3;0)$, suy ra $3+0+C=0\Leftrightarrow C=-3$ ( nhận)

Như vậy $\Delta: x+y-3=0$

Vậy $\Delta$ có phương trình tham số: $\begin{cases} x=t \\ y=3-t \end{cases}$.

**Câu 36.** Cho đường thẳng $d$ có phương trình tham số $\begin{cases} x=5+t \\ y=-9-2t \end{cases}$. Phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ là

**A.** $2x+y-1=0$. **B.** $-2x+y-1=0$. **C.** $x+2y+1=0$. **D.** $2x+3y-1=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đường thẳng $(d):\begin{cases}x=5+t\\y=-9-2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=x-5\\y=-9-2t\end{cases}\Rightarrow y=-9-2(x-5)\Leftrightarrow 2x+y-1=0$.

**Câu 37.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho điểm $M(1;2)$. Gọi $A,B$ là hình chiếu của $M$ lên $Ox,Oy$. Viết phương trình đường thẳng $AB$.

**A.** $x+2y-1=0$. **B.** $2x+y+2=0$. **C.** $2x+y-2=0$. **D.** $x+y-3=0$.

**Lời giải:**

**Chọn C.**

Ta có hình chiếu của điểm $M(1;2)$ lên $Ox,Oy$ lần lượt là A(1;0) và B(0;2). Do đó phương trình đường thẳng AB là $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1\Leftrightarrow 2x+y-2=0$.

**Câu 38.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=3-5t\\y=1+4t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ là

**A.** $4x-5y-7=0.$. **B.** $4x+5y-17=0.$. **C.** $4x-5y-17=0.$. **D.** $4x+5y+17=0$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

$$d:\begin{cases}x=3-5t\\y=1+4t\end{cases}(t\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{3-x}{5}\\t=\frac{y-1}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{3-x}{5}=\frac{y-1}{4}\Leftrightarrow 4x+5y-17=0$$

**Câu 39.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d$ cắt hai trục $Ox$ và $Oy$ lần lượt tại hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ $(a\neq 0;b\neq 0)$. Viết phương trình đường thẳng $d$.

**A.** $d:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$. **B.** $d:\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$. **C.** $d:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. **D.** $d:\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1.$.

**Lời giải**

Phương trình đoạn chắn của đường thẳng $d:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

**Câu 40.** Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(0;4),B(-6;0)$ là:

**A.** $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$. **B.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}=1$. **C.** $\frac{-x}{4}+\frac{y}{-6}=1$. **D.** $\frac{-x}{6}+\frac{y}{4}=1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $M(a;0),N(0;b)$ với $a,b\neq 0$ là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Áp dụng phương trình trên ta chọn phương án D.

**Câu 41.** Phương trình đường thẳng $d$ đi qua $A(1;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:3x-2y+1=0$ là:

**A.** $3x-2y-7=0$. **B.** $2x+3y+4=0$. **C.** $x+3y+5=0$. **D.** $2x+3y-3=0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Do $d\perp\Delta\Rightarrow\overrightarrow{n_d}(2;3)$

Mà đường thẳng $d$ đi qua $A(1;-2)$ nên ta có phương trình: $2(x-1)+3(y+2)=0 \Leftrightarrow 2x+3y+4=0$.

Vậy phương trình đường thẳng $d: 2x+3y+4=0$.

**Câu 42.** Cho đường thẳng $d: 8x-6y+7=0$. Nếu đường thẳng $\Delta$ đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $d$ thì $\Delta$ có phương trình là

**A.** $4x-3y=0$. **B.** $4x+3y=0$. **C.** $3x+4y=0$. **D.** $3x-4y=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì $\Delta$ vuông góc với đường thẳng $d: 8x-6y+7=0$ nên phương trình $\Delta: 6x+8y+C=0$

Mà $\Delta$ đi qua gốc tọa độ nên ta có: $6.0+8.0+C=0 \Leftrightarrow C=0$.

Vậy phương trình $\Delta: 6x+8y=0$ hay $\Delta: 3x+4y=0$

**Câu 43.** Đường thẳng đi qua điểm $A(1;11)$ và song song với đường thẳng $y=3x+5$ có phương trình là

**A.** $y=3x+11$. **B.** $y=(-3x+14)$. **C.** $y=3x+8$. **D.** $y=x+10$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $(d)$ là đường thẳng cần tìm. Vì $(d)$ song song với đường thẳng $y=3x+5$ nên $(d)$ có phương trình $y=3x+a$, $a\neq 5$.

Vì $(d)$ đi qua điểm $A(1;11)$ nên ta có $11=3\cdot 1+a \Rightarrow a=8$.

Vậy phương trình đường thẳng $(d)$ cần tìm là $y=3x+8$.

**Câu 44.** Lập phương trình đường đi qua $A(2;5)$ và song song với đường thẳng $(d): y=3x+4$?

**A.** $(\Delta): y=3x-2$. **B.** $(\Delta): y=3x-1$. **C.** $(\Delta): y=-\frac{1}{3}x-1$. **D.** $(\Delta): y=-3x-1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $(\Delta)$ là đường thẳng cần tìm.

+) $(\Delta)//(d): y=3x+4$. Suy ra phương trình $(\Delta)$ có dạng $y=3x+b$, $b\neq 4$.

Có $A(2;5)\in\Delta \Leftrightarrow 5=6+b \Leftrightarrow b=-1$ (thoả $b\neq 4$)

Vậy $(\Delta): y=3x-1$.

**Câu 45.** Trong hệ trục $Oxy$, đường thẳng $d$ qua $M(1;1)$ và song song với đường thẳng $d': x+y-1=0$ có phương trình là

**A.** $x+y-1=0$. **B.** $x-y=0$. **C.** $-x+y-1=0$. **D.** $x+y-2=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Do đường thẳng $d$ song song với đường thẳng $d': x+y-1=0$ nên đường thẳng $d$ nhận véc tơ $\vec{n}=(1;1)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Khi đó đường thẳng $d$ qua $M(1;1)$ và nhận véc tơ $\vec{n}=(1;1)$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình là $x+y-2=0$.

**Câu 46.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $I(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình $2x-y+4=0$.

**A.** $x+2y=0$. **B.** $x+2y-3=0$. **C.** $x+2y+3=0$. **D.** $x-2y+5=0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có đường thẳng vuông góc với $2x-y+4=0$ có phương trình $x+2y+m=0$, mà đường thẳng này đi qua điểm $I(-1;2)$, suy ra $-1+2.2+m=0 \Leftrightarrow m=-3$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $x+2y-3=0$.

**Câu 47.** Trong hệ trục tọa độ Trong hệ trục tọa độ $Oxy$ cho hai điểm $M(1;0)$ và $N(0;2)$. Đường thẳng đi qua $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ và song song với đường thẳng $MN$ có phương trình là

**A.** Không tồn tại đường thẳng như đề bài yêu cầu.

**B.** $2x+y-2=0$.

**C.** $4x+y-3=0$.

**D.** $2x-4y+3=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Có $\overrightarrow{MN}=(-1;2)$.

Đường thẳng $(d)$ đi qua $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ nhận $\overrightarrow{MN}=(-1;2)$ làm vec tơ chỉ phương:

$(d):2\left(x-\frac{1}{2}\right)+y-1=0 \Leftrightarrow 2x+y-2=0(1)$.

Thử lại: thay tọa độ của $M$ vào $(1)$ thì nghiệm đúng $(1)$. Suy ra loại $(1)$.

Vậy không tồn tại đường thẳng như đề bài yêu cầu.

**Câu 48.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(2;0)$, $B(0;3)$ và $C(-3;-1)$. Đường thẳng đi qua điểm $B$ và song song với $AC$ có phương trình tham số là:

**A.** $\begin{cases}x=5t\\y=3+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=5\\y=1+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=3-5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+5t\\y=t\end{cases}$.

**Lời giải**

Gọi $d$ là đường thẳng qua $B$ và song song với $AC$. Ta có

$\begin{cases}B(0;3)\in d\\ \vec{u}_d=\overrightarrow{AC}=(-5;-1)=-1.(5;1)\end{cases} \longrightarrow d:\begin{cases}x=5t\\y=3+t\end{cases}(t\in\mathbb{R}) \longrightarrow$ **Chọn A.**

**Câu 49.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(3;2)$, $P(4;0)$ và $Q(0;-2)$. Đường thẳng đi qua điểm $A$ và song song với $PQ$ có phương trình tham số là:

**A.** $\begin{cases}x=3+4t\\y=2-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3-2t\\y=2+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2+t\end{cases}$.

**Lời giải**

Gọi $d$ là đường thẳng qua $A$ và song song với $PQ$.

Ta có: $\begin{cases}A(3;2)\in d\\ \vec{u}_d=\overrightarrow{PQ}=(-4;-2)=-2(2;1)\end{cases} \to d:\begin{cases}x=3+2t\\y=2+t\end{cases}$

$\xrightarrow{t=-2} M(-1;0)\in d \to d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **Chọn C.**

**Câu 50.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A(-2;1)$ và phương trình đường thẳng chứa cạnh $CD$ là $\begin{cases} x=1+4t \\ y=3t \end{cases}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa cạnh $AB$.

**A.** $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=-2-2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=1-3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2-3t \\ y=1-4t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-2-3t \\ y=1+4t \end{cases}$.

**Lời giải**

$\begin{cases} A(-2;1)\in AB,\ \vec{u}_{CD}=(4;3) \\ AB \parallel CD \to \vec{u}_{AB}=-\vec{u}_{CD}=(-4;-3) \end{cases} \longrightarrow AB: \begin{cases} x=-2-4t \\ y=1-3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. **Chọn B.**

**Câu 51.** Viết phương trình tham số của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-3;5)$ và song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

**A.** $\begin{cases} x=-3+t \\ y=5-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-3+t \\ y=5+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-5+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=5-t \\ y=-3+t \end{cases}$.

**Lời giải**

Góc phần tư (I) : $x-y=0 \longrightarrow VTCP: \vec{u}(1;1)=\vec{u}_d \longrightarrow d: \begin{cases} x=-3+t \\ y=5+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

**Chọn B.**

**Câu 52.** Viết phương trình tham số của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(4;-7)$ và song song với trục $Ox$.

**A.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=4 \\ y=-7+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-7+t \\ y=4 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=-7 \end{cases}$.

**Lời giải**

$\vec{u}_{Ox}=(1;0) \longrightarrow \vec{u}_d=(1;0) \longrightarrow d: \begin{cases} x=4+t \\ y=-7 \end{cases} \xrightarrow{t=-4} A(0;-7)\in d \to d: \begin{cases} x=t \\ y=-7 \end{cases}$.

**Chọn D.**

**Câu 53.** Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(1;2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: 2x+3y-12=0$ có phương trình tổng quát là:

**A.** $2x+3y-8=0$. **B.** $2x+3y+8=0$. **C.** $4x+6y+1=0$. **D.** $4x-3y-8=0$.

**Lời giải**

$\begin{cases} M(1;2)\in d \\ d \parallel \Delta: 2x+3y-12=0 \end{cases} \to \begin{cases} M(1;2)\in d \\ d: 2x+3y+c=0 (c\neq -12) \end{cases}$

$\to 2.1+3.2+c=0 \Leftrightarrow c=-8$. Vậy $d: 2x+3y-8=0$. **Chọn A.**

**Câu 54.** Phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua $O$ và song song với đường thẳng $\Delta: 6x-4x+1=0$ là:

**A.** $3x-2y=0$. **B.** $4x+6y=0$. **C.** $3x+12y-1=0$. **D.** $6x-4y-1=0$.

**Lời giải**

$\begin{cases} O(0;0)\in d \\ d \parallel \Delta: 6x-4x+1=0 \end{cases} \to \begin{cases} O(0;0)\in d \\ d: 6x-4x+c=0\ (c\neq 1) \end{cases} \longrightarrow 6.0-4.0+c=0 \Leftrightarrow c=0.$

Vậy $d: 6x-4y=0 \Leftrightarrow d: 3x-2y=0$. **Chọn A.**

**Câu 55.** Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x+y-3=0$ có phương trình tổng quát là:

**A.** $2x+y=0$. **B.** $x-2y-3=0$. **C.** $x+y-1=0$. **D.** $x-2y+5=0$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} M(-1;2)\in d \\ d\perp\Delta: 2x+y-3=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M(-1;2)\in d \\ d: x-2y+c=0 \end{cases} \longrightarrow -1-2.2+c=0 \Leftrightarrow c=5.$$

Vậy $d: x-2y+5=0$. **Chọn D.**

**Câu 56.** Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A(4;-3)$ và song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x=3-2t \\ y=1+3t \end{cases}$.

**A.** $3x+2y+6=0$. **B.** $-2x+3y+17=0$.

**C.** $3x+2y-6=0$. **D.** $3x-2y+6=0$.

**Lời giải**

Ta có: $\begin{cases} A(4;-3)\in d \\ \vec{u}_d=(-2;3) \\ \Delta \parallel d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(4;-3)\in d \\ \vec{u}_\Delta=(-2;3)\rightarrow \vec{n}_\Delta=(3;2) \end{cases}$

$\rightarrow \Delta: 3(x-4)+2(y+3)=0 \Leftrightarrow \Delta: 3x+2y-6=0.$

**Câu 57.** Cho tam giác $ABC$ có $A(2;0)$, $B(0;3)$, $C(-3;1)$. Đường thẳng $d$ đi qua $B$ và song song với $AC$ có phương trình tổng quát là:

**A.** $5x-y+3=0$. **B.** $5x+y-3=0$. **C.** $x+5y-15=0$. **D.** $x-15y+15=0$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} B(0;3)\in d \\ \vec{u}_{AC}=\overrightarrow{AC}=(-5;1) \\ d \parallel AC \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B(0;3)\in d \\ \vec{n}_d=(1;5) \end{cases}$$

$\rightarrow d: 1(x-0)+5(y-3)=0 \Leftrightarrow d: x+5y-15=0.$

**Câu 58.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-1;0)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-2t \end{cases}$.

**A.** $2x+y+2=0$. **B.** $2x-y+2=0$. **C.** $x-2y+1=0$. **D.** $x+2y+1=0$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} M(-1;0)\in d \\ \vec{u}_\Delta=(1;-2) \\ d\perp\Delta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M(-1;0)\in d \\ \vec{n}_d=(1;-2) \end{cases} \rightarrow d: 1(x+1)-2(y-0)=0 \Leftrightarrow d: x-2y+1=0.$$

**Chọn C.**

**Câu 59.** Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-2;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1-3t \\ y=-2+5t \end{cases}$ có phương trình tham số là:

**A.** $\begin{cases} x=-2-3t \\ y=1+5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2+5t \\ y=1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2+5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+5t \\ y=2+3t \end{cases}$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} M(-2;1)\in d \\ \vec{u}_{\Delta}=(-3;5) \\ d\perp\Delta \end{cases}\rightarrow\begin{cases} M(-2;1)\in d \\ \vec{n}_d=(-3;5)\rightarrow\vec{u}_d=(5;3) \end{cases}\rightarrow d:\begin{cases} x=-2+5t \\ y=1+3t \end{cases}(t\in\mathbb{R}).$$ **Chọn B.**

**Câu 60.** Viết phương trình tham số của đường thẳng $d$ đi qua điểm $A(-1;2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: 3x-13y+1=0$.

**A.** $\begin{cases} x=-1+13t \\ y=2+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+13t \\ y=-2+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1-13t \\ y=2+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-13t \end{cases}$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} A(-1;2)\in d \\ \vec{n}_{\Delta}=(3;-13)\rightarrow \end{cases}\begin{cases} A(-1;2)\in d \\ \vec{n}_d=(3;-13)\rightarrow\vec{u}_d=(13;3) \end{cases}\rightarrow d:\begin{cases} x=-1+13t \\ y=2+3t \end{cases}(t\in\mathbb{R}).$$ **Chọn A.**

**Câu 61.** Viết phương trình tham số của đường thẳng $d$ qua điểm $A(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x-y+4=0$.

**A.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=4+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \end{cases}$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} A(-1;2)\in d \\ \vec{n}_{\Delta}=(2;-1) \\ d\perp\Delta \end{cases}\rightarrow\begin{cases} A(-1;2)\in d \\ \vec{u}_d=(2;-1) \end{cases}\rightarrow d:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-t \end{cases}(t\in\mathbb{R}).$$ **Chọn A.**

**Câu 62.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-2;-5)$ và song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

**A.** $x+y-3=0$. **B.** $x-y-3=0$. **C.** $x+y+3=0$. **D.** $2x-y-1=0$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} M(-2;-5)\in d \\ (\mathrm{I}): x-y=0\ (\Delta) \\ d\parallel\Delta \end{cases}\rightarrow\begin{cases} M(-2;-5)=0 \\ d: x-y+c=0\ (c\neq 0) \end{cases}\rightarrow -2-(-5)+c=0\Leftrightarrow c=-3.$$

Vậy $d: x-y-3=0$. **Chọn B.**

**Câu 63.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(3;-1)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai.

**A.** $x+y-4=0$. **B.** $x-y-4=0$. **C.** $x+y+4=0$. **D.** $x-y+4=0$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} M(3;-1)\in d \\ (\mathrm{II}): x+y=0\ (\Delta) \\ d\perp\Delta \end{cases}\rightarrow\begin{cases} M(3;-1) \\ d: x-y+c=0 \end{cases}$$

$\rightarrow 3-(-1)+c=0\Leftrightarrow c=-4\rightarrow d: x-y-4=0.$

**Câu 64.** Viết phương trình tham số của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-4;0)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai.

**A.** $\begin{cases} x=t \\ y=-4+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-4+t \\ y=-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=4+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=4-t \end{cases}$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} M(-4;0)\in d \\ (\text{II}): x+y=0\ (\Delta)\to \vec{n}_{\Delta}=(1;1) \\ d\perp\Delta\to \vec{u}_d=(1;1) \end{cases} \to \begin{cases} x=-4+t \\ y=t \end{cases} \xrightarrow{t=4} A(0;4)\in d$$

$$\to d:\begin{cases} x=t \\ y=4+t \end{cases}(t\in\mathbb{R}).$$

**Câu 65.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(-1;2)$ và song song với trục $Ox$.

**A.** $y+2=0$. **B.** $x+1=0$. **C.** $x-1=0$. **D.** $y-2=0$.

**Lời giải**

$\begin{cases} M(-1;2)\in d \\ d\,||\,Ox: y=0 \end{cases} \longrightarrow d: y=2.$ **Chọn D.**

**Câu 66.** Viết phương trình tham số của đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(6;-10)$ và vuông góc với trục $Oy$.

**A.** $\begin{cases} x=10+t \\ y=6 \end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases} x=2+t \\ y=-10 \end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases} x=6 \\ y=-10-t \end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases} x=6 \\ y=-10+t \end{cases}$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} M(6;-10)\in d \\ d\perp Oy: x=0\to \vec{u}_d=(1;0) \end{cases} \longrightarrow d:\begin{cases} x=6+t \\ y=-10 \end{cases} \xrightarrow{t=-4} A(2;-10)\in d$$

$$\to d:\begin{cases} x=2+t \\ y=-10 \end{cases}.$$

**Câu 67.** Đường trung trực của đoạn $AB$ với $A(1;-4)$ và $B(5;2)$ có phương trình là:

**A.** $2x+3y-3=0$. **B.** $3x+2y+1=0$. **C.** $3x-y+4=0$. **D.** $x+y-1=0$.

**Lời giải**

Gọi $I$ là trung điểm của $AB$ và $d$ là trung trực đoạn $AB$. Ta có

$$\begin{cases} A(1;-4), B(5;2)\to I(3;-1)\in d \\ d\perp AB\to \vec{n}_d=\overrightarrow{AB}=(4;6)=2(2;3) \end{cases} \longrightarrow d: 2x+3y-3=0.$$ **Chọn A.**

**Câu 68.** Đường trung trực của đoạn $AB$ với $A(4;-1)$ và $B(1;-4)$ có phương trình là:

**A.** $x+y=1$. **B.** $x+y=0$. **C.** $y-x=0$. **D.** $x-y=1$.

**Lời giải**

Gọi $I$ là trung điểm của $AB$ và $d$ là trung trực đoạn $AB$. Ta có

$$\begin{cases} A(4;-1), B(1;-4)\to I\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)\in d \\ d\perp AB\to \vec{n}_d=\overrightarrow{AB}=(-3;-3)=-3(1;1) \end{cases} \longrightarrow d: x+y=0.$$ **Chọn B.**

**Câu 69.** Đường trung trực của đoạn $AB$ với $A(1;-4)$ và $B(1;2)$ có phương trình là:

**A.** $y+1=0$. **B.** $x+1=0$. **C.** $y-1=0$. **D.** $x-4y=0$.

**Lời giải**

Gọi $I$ là trung điểm của $AB$ và $d$ là trung trực đoạn $AB$. Ta có

$\begin{cases} A(1;-4), B(1;2) \to I(1;-1) \in d \\ d \perp AB \to \vec{n}_d = \overrightarrow{AB} = (0;6) = 6(0;1) \end{cases} \longrightarrow d: y+1=0$. **Chọn A.**

**Câu 70.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $I(1;-1)$ và hai đường thẳng $d_1: x+y-3=0, d_2: x-2y-6=0$. Hai điểm $A, B$ lần lượt thuộc hai đường thẳng $d_1, d_2$ sao cho $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$. Đường thẳng $AB$ có một véctơ chỉ phương là

**A.** $\overrightarrow{u_1} = (1;2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2} = (2;1)$. **C.** $\overrightarrow{u_3} = (1;-2)$. **D.** $\overrightarrow{u_4} = (2;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $A \in d_1$, giả sử $A(a;3-a)$; Vì $B \in d_2$, giả sử $B(2b+6;b)$

$I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{a+2b+6}{2}=1 \\ \dfrac{3-a+b}{2}=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=-4 \\ a-b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow A(2;1); B(0;-3) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (2;4) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = 2.\overrightarrow{u_1}$.

Vậy đường thẳng $AB$ có một véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1;2)$.

# Bài 4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH



## PHẦN A. LÝ THUYẾT

## I. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ lần lượt có vectở chỉ phương là $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. Khi đó

a) $\Delta_1$ cắt $\Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ không cùng phương.

b) $\Delta_1$ song song với $\Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc một đường thẳng mà không thuộc đường thẳng còn lại.

c) $\Delta_1$ trùng với $\Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc cả hai đường thẳng đó.

*Chú ý*

- $\Delta_1$ vuông góc với $\Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ vuông góc với nhau.
- Khi xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, có thể dựa vào cặp vectơ pháp tuyến của hai đường thẳng đó.

***Ví dụ 1.*** Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau

a) $\Delta_1 : 2x - y + 1 = 0$ và $\Delta_2 : -x + 2y + 2 = 0$.

b) $\Delta_3 : x - y - 1 = 0$ và $\Delta_4 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

***Giải***

a) Đường thẳng $\Delta_1$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1;2)$, đường thẳng $\Delta_2$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-2;-1)$. Do $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{-1}$ nên $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ không cùng phương, suy ra $\Delta_1$ cắt $\Delta_2$.

b) Đường thẳng $\Delta_3, \Delta_4$ lần lượt có vectơ chỉ phương $\vec{u}_3 = (1;1), \vec{u}_4 = (2;2)$. Suy ra $\vec{u}_4 = 2\vec{u}_3$. Chọn $t = 0$, ta có điểm $M(1;3) \in \Delta_4$. Do $1 - 3 - 1 \neq 0$ nên $M(1;3) \notin \Delta_3$. Vậy $\Delta_3$ song song với $\Delta_4$.

Ta có thể xét vị trí tương đối của hai đường thẳng dựa vào số giao điểm của chúng.

*Nhận xét:* Cho hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ có phương trình lần lượt là $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Khi đó

a) $\Delta_1$ cắt $\Delta_2$ khi và chỉ khi hệ (I) có nghiệm duy nhất.

b) $\Delta_1$ song song với $\Delta_2$ khi và chỉ khi hệ (I) vô nghiệm.

c) $\Delta_1$ trùng với $\Delta_2$ khi và chỉ khi hệ (I) có vô số nghiệm.

***Ví dụ 2.*** Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$\Delta_1 : x - 2y + 1 = 0$ ; $\Delta_2 : 2x - 4y + 2 = 0$.

***Giải***

Tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta_1$ và đường thẳng $\Delta_2$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

Hệ trên có vô số nghiệm.

Như vậy, $\Delta_1$ và $\Delta_2$ có vô số điểm chung, tức là $\Delta_1$ trùng với $\Delta_2$.

## II. Góc giữa hai đường thẳng




Hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ cắt nhau tạo thành bốn góc.

- Nếu hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ không vuông góc với nhau thì góc nhọn trong bốn góc tạo thành được gọi là góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$.
- Nếu hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ vuông góc với nhau thì ta nói góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ bằng $90^\circ$.

Góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ được kí hiệu là $\left(\widehat{\Delta_1,\Delta_2}\right)$ hoặc $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)$.

*Quy ước:* Khi $\Delta_1$ song song hoặc trùng với $\Delta_2$, ta nói góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ bằng $0^\circ$.

*Nhận xét:* Góc giữa hai đường thẳng luôn bé hơn hoặc bằng $90^\circ$, tức là $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)\le 90^\circ$.

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=\left(a_1;b_1\right),\vec{u}_2=\left(a_2;b_2\right)$. Ta có: $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\dfrac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

*Nhận xét*

- $\Delta_1\perp\Delta_2\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$.
- Cho hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1,\vec{n}_2$. Ta cũng có:

$$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|=\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}.$$

***Ví dụ 3.*** Tính số đo góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1:\begin{cases}x=-1+\sqrt{3}t_1\\y=1+t_1\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=-1+\sqrt{3}t_2\\y=4-t_2\end{cases}$

b) $\Delta_1:3x+y-10=0$ và $\Delta_2:-2x+y-7=0$.

***Giải***

a) $\Delta_1$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(\sqrt{3};1)$.

$\Delta_2$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(\sqrt{3};-1)$.

Do đó, ta có: $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\dfrac{\left|\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+1\cdot(-1)\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{2}$. Vậy $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=60^\circ$.

b) $\Delta_1$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(3;1),\Delta_2$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(-2;1)$. Do đó, ta có:

$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}=\dfrac{\left|3\cdot(-2)+1\cdot1\right|}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=45^\circ$.

## III. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình $ax+by+c=0\ \left(a^2+b^2>0\right)$ và điểm $M\left(x_0;y_0\right)$. Khoảng cách từ điểm $M$ đến đường thẳng $\Delta$, kí hiệu là $d(M,\Delta)$, được tính bởi công thức sau:

$$d(M,\Delta)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

*Chú ý:* Nếu $M\in\Delta$ thì $d(M,\Delta)=0$.

***Ví dụ 4.*** Tính khoảng cách từ điểm $M$ đến đường thẳng $\Delta$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $M(-2;1)$ và $\Delta: 2x-3y+5=0$.

b) $M(1;-3)$ và $\Delta: \begin{cases} x=-2+3t \\ y=2-4t \end{cases}$

***Giải***

a) Ta có:

$$d(M,\Delta)=\frac{|2\cdot(-2)-3\cdot 1+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

b) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $N(-2;2)$, có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;3)$. Phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ là

$4(x+2)+3(y-2)=0$ hay $4x+3y+2=0$.

$$\Rightarrow d(M,\Delta)=\frac{|4\cdot 1+3\cdot(-3)+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5}.$$

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

*Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ ta xét số nghiệm của hệ phương trình* $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$.

- *Hệ có một nghiệm: $\Delta_1$ cắt $\Delta_2$.*
- *Hệ vô nghiệm: $\Delta_1 \,//\, \Delta_2$.*
- *Hệ có vô số nghiệm: $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.*

*Đặc biệt: Nếu $a_2b_2c_2\neq 0$ thì:*

$$\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2},\ \Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2},\ \Delta_1=\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

*Để tim giao điểm của 2 đường thẳng ta giải hệ phương trình trên.*

*Tìm hình chiếu của điểm A lên đường thẳng d.*

*Cách 1: lập phương trình đường thẳng d' qua A vuông góc với d. Hình chiếu H là giao điểm của d và d'.*

*Cách 2: điểm H thuộc d có tọa độ theo tham số t (hoặc x, hoặc y), cho điều kiện $AH\perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ để tìm t.*

*Tìm điểm đối xứng A' của A qua đường thẳng d: tìm hình chiếu H, dùng công thức tọa độ trung điểm để suy ra A'.*

*Tìm đường thẳng d' đối xứng của đường thẳng d qua điểm I cho trước.*

*Cách 1: d' song song hoặc trùng với d nên có cùng VTPT. Lấy điểm A thuộc d rồi tìm điểm B đối xứng qua I thì B thuộc d'.*

*Cách 2: Lấy M(x; y) bất kỳ thuộc d. Gọi M'(x'; y') là điểm đối xứng của M qua I, ta có:*

$x+x'=2x_0,\ y+y'=2y_0 \Rightarrow x=2x_0-x',\ y=2y_0-y'$.

*Thế vào phương trình d thành phương trình d'.*

**Câu 1.** Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của hai đường thẳng:

a) $2x-5y+3=0$ và $5x+2y-3=0$.

b) $x-3y+4=0$ và $0,5x-1,5y+4=0$.

c) $10x+2y-3=0$ và $5x+y-1,5=0$.

**Câu 2.** Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của cặp đường thẳng:

a) $d: \begin{cases} x=-1-5t \\ y=2+4t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=-6+5t' \\ y=2-4t' \end{cases}$.

b) $d:\begin{cases}x=1-4t\\y=2+2t\end{cases}$ và $d': 2x+4y-10=0$.

c) $d:\begin{cases}x=-2+t\\y=2+2t\end{cases}$ và $d': \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-2}$

**Câu 3.** Biện luận theo tham số m vị trí tương đối của hai đường thẳng:
$mx+y+2=0$ và $x+my+m-1=0$.

**Câu 4.** Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng sau đây vuông góc $\Delta_1: mx+y+8=0$ và $\Delta_2: x-y+m=0$.

**Câu 5.** Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy:
$d_1: 2x+y-4=0$, $d_2: 5x-2y+3=0$ và $d_3: mx+3y-2=0$.

**Câu 6.** Cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=x_1+at\\y=y_1+bt\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=x_2+ct'\\y=y_2+dt'\end{cases}$ ($x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ là các hằng số). Tìm điều kiện của a, b, c, d để hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$:

a)Cắt nhau.

b)Song song với nhau.

c)Vuông góc với nhau.

**Câu 7.** Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt $M_1(x_1;x_2)$ và $M_2(x_2;y_2)$. Chắng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng $Ax+By+C=0$ song song với d là $Ax_1+By_1+C=Ax_2+By_2+C\neq 0$.

**Câu 8.** Cho hai đường thẳng:
$\Delta_1: (m+1)x-2y-m-1=0$; $\Delta_2: x+(m-1)y-m^2=0$.

a)Tìm tọa độ giao điểm của $\Delta_1$ và $\Delta_2$.

b)Tìm điều kiện của m để giao điểm đó nằm trên trục Oy.

**Câu 9.** Cho đường thẳng $\Delta: 3x-y+1=0$ và điểm $I(1;2)$. Tìm phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua điểm I.

**Câu 10.** Cho hai đường thẳng $d_1: x+y-1=0$ và $d_2: x-3y+3=0$. Hãy lập phương trình của đường thẳng $d_3$ đối xứng với $d_1$ qua $d_2$.

**Câu 11.** Cho đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với đường thẳng Δ:

a)Qua trục hoành.

b)Qua trục tung.

c)Qua gốc tọa độ.

**Câu 12.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $M(-1;2)$ và hai đường thẳng $d_1: x+2y+1=0$, $d_2: 2x+y+2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt $d_1$ tại A, cắt $d_2$ tại B sao cho $MA=2MB$.

**Câu 13.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;1)$ và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

**Câu 14.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phuong trình đường $\Delta$ thẳng song song với đường thẳng d: $2x-y+2015=0$ và cắt hai trục tọa độ tại $M$ và $N$ sao cho $MN=3\sqrt{5}$.

**Câu 15.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua $M(3;2)$ và cắt tia $Ox$ tại $A$, cắt tia $Oy$ tại $B$ sao cho $OA+OB=12$.

## Dạng 2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

*Để tính khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng $\Delta$: ax + by + c = 0 ta dùng công thức:*

$$d\left(M_0,\Delta=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

**Câu 16.** Cho đường thẳng $\Delta$: $5x+3y-5=0$.

a)Tính khoảng cách từ điểm $A(-1;3)$ đến đường thẳng $\Delta$.

b)Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $\Delta$ và $\Delta$': $5x+3y+8=0$.

**Câu 17.** Cho ba điểm $A(2;0),B(3;4)$ và $P(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B.

**Câu 18.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$ cách điểm $A(1;1)$ một hoảng bằng 2 vá cách điểm $B(2;3)$ một khoảng bằng 4.

**Câu 19.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(-2;4),B(3;5)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $I(0;1)$ sao cho khoảng cách từ điểm $A$ đến đường thẳng $\Delta$ gấp hai lần khoảng cách từ $B$ đến $\Delta$.

**Câu 20.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$ song song với đường thẳng $d:3x-4y+1=0$ và cách $d$ một khoảng bằng 1.

**Câu 21.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d:x-\sqrt{3}y-2=0$ và hai điểm phân biệt $A\left(1;\sqrt{3}\right)$, $B$ không thuộc $d$. Viết phương trình đường thẳng $AB$, biết rằng khoảng cách từ $B$ đến giao điểm của đường thẳng $AB$ với $d$ bằng hai lần khoảng cách từ điểm $B$ đến $d$.

## Dạng 3: Góc giữa hai đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1;\Delta_2$ có phương trình $\Delta_1:a_1x+b_1y+c_1=0,\left(a_1^2+b_1^2\neq 0\right)$, $\Delta_2:a_2x+b_2y+c_2=0,\left(a_2^2+b_2^2\neq 0\right)$ được xác định bởi công thức $\cos\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

Để xác định góc giữa hai đường thẳng ta chỉ cần biết véctơ chỉ phương (hoặc véctơ pháp tuyến) của chúng: $\cos\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{u}_1;\vec{u}_2\right)\right|=\left|\cos\left(\vec{n}_1;\vec{n}_2\right)\right|$.

**Câu 22.** Xác định góc giữa hai đường thẳng sau: $\Delta_1:3x-2y+1=0$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=t\\y=7-5t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

**Câu 23.** Tìm $m$ để góc hợp bởi hai đường thẳng $\Delta_1:\sqrt{3}x-y+7=0$ và $\Delta_2:mx+y+1=0$ một góc bằng $30^0$.

**Câu 24.** Cho đường thẳng $d:3x-2y+1=0$ và $M\left(1;2\right)$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua $M$ và tạo với $d$ một góc $45^0$.

**Câu 25.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: 2x-y-2=0$ và điểm $I(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ cách điểm $I$ một khoảng bằng $\sqrt{10}$ và tạo với đường thẳng $d$ một góc bằng $45^0$.

**Câu 26.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $M(0;1)$ và hai đường thẳng $d_1: x-7y+17=0$, $d_2: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M$ và tạo với $d_1, d_2$ một tam giác cân tại giao điểm của $d_1$ và $d_2$.

**Dạng 4. Tìm điểm thỏa mãn điều kiện cho trước.**

Để xác định tọa độ điểm thuộc đường thẳng ta dựa vào nhận xét sau :

Điểm $A$ thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ (hoặc $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$) có tọa độ dạng $A(x_0+at; y_0+bt)$.

**Câu 27.** Cho đường thẳng $\Delta: 4x-3y+5=0$.

a. Tìm tọa độ điểm $A$ thuộc đường thẳng $\Delta$ và cách gốc tọa độ một khoảng bằng 4.

b. Tìm điểm $B$ thuộc đường thẳng $\Delta$ và cách đều hai điểm $E(5;0), F(3;-2)$.

**Câu 28.** Cho đường thẳng $d: x-2y+4=0$ và điểm $A(4;1)$.

a. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của $A$ lên $d$.

b. Tìm tọa độ điểm $A'$ đối xứng của $A$ qua $d$.

**Câu 29.** Với điều kiện nào thì các điểm $M(x_1, y_1)$ và $N(x_2; y_2)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$?

**Câu 30.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $d: x-2y+2=0$. Tìm trên đường thẳng $d$ hai điểm $B, C$ sao cho tam giác $ABC$ vuông ở $B$ và thỏa mãn $AB=2BC$.

**Câu 31.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;1), B(4;-3)$ và dr $d: x-2y-1=0$. Tìm tọa độ điểm $C$ thuộc $d$ sao cho khoảng cách từ $C$ đến đường thẳng $AB$ bằng 6.

**Câu 32.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x-3y-6=0$ và điểm $N(3;4)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $d$ sao cho tam giác $OMN$ có diện tích vằng $\dfrac{15}{2}$ (với $O$ là gốc tọa độ)

**Dạng 5. Các yếu tố về tam giác.**

**Câu 33.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có tọa độ đỉnh $A(1;0)$ và hai đường thẳng chứa các đường cao kẻ từ $B, C$ có phương trình lần lượt là : $d_1: x-2y+1=0, d_2: 3x+y-1=0$. Tìm tọa độ đỉnh $B$ và $C$.

**Câu 34.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có phương trình cạnh $BC: x+y-9=0$, đường cao qua đỉnh $B$ và $C$ lần lượt có phương trình $d_1: x+2y-13=0; d_2: 7x+5y-49=0$. Tìm tọa độ đỉnh $A$.

**Câu 35.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(1;3)$ và hai đường trung tuyến là $BB': x-2y+1=0, CC': y-1=0$. Xác định tọa độ đỉnh $B$ và $C$.

**Câu 36.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với $Oxy$, cho tam giác $ABC$ biết phương trình cạnh $BC: x-2y=5=0$, phương trình đường trung tuyến $BB': y-2=0$ và phương trình đường trung tuyến $CC': 2x-y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

**Câu 37.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(1;5), B(-4;-5)$ và $C(4;-1)$. Viết phương trình đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc $A$.

**Câu 38.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;-4)$ và hai đường phân giác trong của góc $B$ và $C$ có phương trình lần lượt là $d_1: x+y-2=0, d_2: x-3y-6=0$. Tìm tọa độ điểm $B$ và $C$.

**Câu 39.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ biết trung điểm các cạnh $AB, BC$ và $CA$ lần lượt là : $M(-1;1), N(0;-3)$ và $P(3;-1)$. Viết phương trình đường trung trực của đoạn $BC$.

**Câu 40.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(-2;4), B(4;1)$ và $C(-2;-1)$. Tìm tọa độ trực tâm $H$ của tam giác.

**Câu 41.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có các đường trung bình nằm trên các đường thẳng có phương trình $d_1: 2x-y+1=0, d_2: x+4y-13=0, d_3: x-3y-1=0$. Viết phương trình cạnh $AB$.

**Câu 42.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có hai đường trung bình kẻ từ trung điểm $M$ của $AB$ nằm trên các đường thẳng có phương trình $d_1: x-4y+7=0, d_2: 3x-2y-9=0$ và tọa độ điểm $B(7;1)$. Tìm tọa độ điểm $C$.

**Câu 43.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $C(4;-1)$, đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh $A$ có phương trình lần lượt là $d_1: 2x-3y+12=0, d_2: 2x+3y=0$. Tìm tọa độ điểm $B$.

**Câu 44.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;1)$, đường cao qua đỉnh $B$ và đường trung tuyến qua đỉnh $C$ lần lượt có phương trình $d_1: x-3y-7=0, d_2: x+y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh $B$ và $C$.

**Dạng 6. Các yếu tố về tứ giác.**

**Câu 45.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(10;5)$, $B(15;-5), D(-20;0)$ là các đỉnh của hình thang cân $ABCD$ trong đó $AB$ song song với $CD$. Tìm tọa độ điểm $C$.

**Câu 46.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình thang cân $ABCD$ với $AB$ song song $CD$ và $AB<CD$. Biết các đỉnh $A(0;2), D(-2;2)$, giao điểm $I$ của hai đường chéo $AC$ và $BD$ nằm trên các đường thẳng $d: x+y-4=0$ sao cho $\widehat{AID}=45^0$. Tìm tọa độ điểm $B$ và $C$.

**Câu 47.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình bình hành $ABCD$, biết hai đường chéo $AC$ và $CD$ lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x-3y+9=0$, $d_2: x+3y-3=0$ và phương trình đường thẳng $AB: x-y+9=0$. Tìm tọa độ điểm $C$.

**Câu 48.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $d_1: x-y-4=0$, $d_2: 2x+y-2=0$, và hai điểm $A(7;5)$, $B(2;3)$. Tìm điểm trên đường thẳng $d_1$ và điểm trên đường thẳng $d_2$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

**Câu 49.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình thoi $ABCD$ có $A(0;-1), B(2;1)$ và tâm $I$ thuộc đường thẳng $d: x+y-1=0$. Tìm tọa độ điểm $C$.

**Câu 50.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình thoi $ABCD$ có phương trình cạnh

$AB: x-2y+4=0$, phương trình cạnh $AD: 2x-y+2=0$. Điểm $M(2;2)$ thuộc đường thẳng $BD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi.

**Câu 51.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$. Phương trình đường thẳng $AB: x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết đỉnh $A$ có hoành độ âm.

**Câu 52.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường thẳng $AC$ và $BD$. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng $AB$ và trung điểm $E$ của cạnh $CD$ thuộc đường thẳng $d: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng $AB$.

**Câu 53.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;1)$ và $M(4;2)$ là trung điểm cạnh $BC$. Tìm tọa độ điểm $B$.

**Câu 54.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$ trong đó thuộc đường thẳng $d_1: x+y-1=0$ và $C, D$ nằm trên đường thẳng $d_2: 2x-y+3=0$. Tìm tọa độ điểm $C$, biết hình vuông có diện tích bằng $5$ và có hoành độ dương.

**Dạng 7: Câu toán cực trị**

**Câu 55.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và điểm $A(1;4)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $MA$ nhỏ nhất.

**Câu 56.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;4)$ và $B(3;5)$. Viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $A$ và cách $B$ một khoảng lớn nhất.

**Câu 57.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và $A(1;4)$, $B(8;3)$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

**Câu 58.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(8;3)$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho tam giác $ABM$ có chu vi nhỏ nhất.

**Câu 59.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(3;2)$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất.

**Câu 60.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(9;0)$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

**Câu 61.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B\left(8;\frac{1}{2}\right)$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $5MA^2+2MB^2$ nhỏ nhất.

**Câu 62.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x-2y-2=0$ và hai điểm $A(3;4)$, $B(-1;2)$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $MA^2-2MB^2$ lớn nhất.

**Câu 63.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm $B$ thuộc $Ox$ có hoành độ

không âm và điểm $C$ thuộc $Oy$ có tung độ không âm sao cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Tìm tọa
độ điểm $B$ và $C$ sao cho diện tích tam giác $ABC$.
a)Lớn nhất

b) Nhỏ nhất.

**Câu 64.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng đi qua $M(3;2)$ cắt tia $Ox$ tại $A$ và tia $Oy$ tại $B$ sao cho diện tích tam giác $OAB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 65.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $M(4;1)$ và cắt chiều dương các trục $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ sao cho $OA+OB$ nhỏ nhất.

**Câu 66.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $M(3;1)$ và cắt chiều dương các trục $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ sao cho $12OA+9OB$ nhỏ nhất.

**Câu 67.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $M(-4;3)$ và cắt các trục $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ khác $O$ sao cho $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

**Câu 68.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $M(2;-1)$ và cắt các trục $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ khác $O$ sao cho $\dfrac{9}{OA^2}+\dfrac{4}{OB^2}$ nhỏ nhất.

**Câu 69.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $M(0;2)$ và hai đường $d_1: 3x+y+2=0$, $d_2: x-3y+4=0$. Gọi $A$ là giao điểm của $d_1$ và $d_2$. Viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $M$ và cắt hai đường thẳng $d_1$, $d_2$ lần lượt tại $B$, $C$ ($B$ và $C$ khác $A$) sao cho $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 70.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$ và $C(7;10)$. Viết phương trình đường thẳng $d$ qua $A$ sao cho tổng khoảng cách từ $B$ và $C$ đến $d$ là lớn nhất.

**Câu 71.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ có phương trình cạnh $AB$: $x+2y-2=0$, phương trình cạnh $AC$: $2x+y+1=0$, điểm $M(1;2)$ thuộc đoạn $BC$. Tìm tọa độ điểm $D$ sao cho $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

**Câu 72.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(0;1)$, $B(2;-1)$ và hai đường thẳng có phương trình $d_1: (m-1)x+(m-2)y+2-m=0$, $d_2: (2-m)x+(m-1)y+3m-5=0$. Chứng minh $d_1$ và $d_2$ luôn cắt nhau tại $P$. Tìm $m$ sao cho $PA+PB$ lớn nhất.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

**Câu 1.** Có bao nhiêu cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng sau?

$$(d_1): y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x-2;\ (d_2): y=-\frac{1}{2}x+3;\ (d_3): y=\frac{1}{2}x+3;\ (d_4): y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-2$$

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

**Câu 2.** Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng **không** song song với đường thẳng $d: y=3x-2$

**A.** $-3x+y=0$. **B.** $3x-y-6=0$.

**C.** $3x-y+6=0$. **D.** $3x+y-6=0$.

**Câu 3.** Trong mặt phẳng $Oxy$, đường thẳng $d: x-2y-1=0$ song song với đường thẳng có phương trình nào sau đây?

**A.** $x+2y+1=0$. **B.** $2x-y=0$. **C.** $-x+2y+1=0$. **D.** $-2x+4y-1=0$.

**Câu 4.** Cho các đường thẳng sau.

$d_1: y=\frac{3}{\sqrt{3}}x-2$ $d_2: y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+1$ $d_3: y=-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x+2$ $d_4: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$

Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

**A.** $d_2, d_3, d_4$ song song với nhau. **B.** $d_2$ và $d_4$ song song với nhau.

**C.** $d_1$ và $d_4$ vuông góc với nhau. **D.** $d_2$ và $d_3$ song song với nhau.

**Câu 5.** Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để đường thẳng $y=\left(m^2-3\right)x+3m+1$ song song với đường thẳng $y=x-5$.

**A.** $m=\pm 2$. **B.** $m=\pm\sqrt{2}$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

**Câu 6.** Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y-6=0$ và $3x+4y-1=0$ là

**A.** $\left(\frac{27}{13};-\frac{17}{13}\right)$. **B.** $(-27;17)$. **C.** $\left(-\frac{27}{13};\frac{17}{13}\right)$. **D.** $(27;-17)$.

**Câu 7.** Cho đường thẳng $d_1: 2x+3y+15=0$ và $d_2: x-2y-3=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $d_1$ và $d_2$ cắt nhau và không vuông góc với nhau.

**B.** $d_1$ và $d_2$ song song với nhau.

**C.** $d_1$ và $d_2$ trùng nhau.

**D.** $d_1$ và $d_2$ vuông góc với nhau.

**Câu 8.** Hai đường thẳng $d_1: mx+y=m-5, d_2: x+my=9$ cắt nhau khi và chỉ khi

**A.** $m\neq -1$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m\neq \pm 1$. **D.** $m\neq 2$.

**Câu 9.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1: 3x+4y+10=0$ và $d_2: \left(2m-1\right)x+m^2y+10=0$ trùng nhau?

**A.** $m\pm 2$. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

**Câu 10.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1: mx+\left(m-1\right)y+2m=0$ và $d_2: 2x+y-1=0$. Nếu $d_1$ song song $d_2$ thì:

**A.** $m=2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=1$.

**Câu 11.** Tìm $m$ để hai đường thẳng $d_1: 2x-3y+4=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2-3t \\ y=1-4mt \end{cases}$ cắt nhau.

**A.** $m\neq -\frac{1}{2}$. **B.** $m\neq 2$. **C.** $m\neq \frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

**Câu 12.** Với giá trị nào của $a$ thì hai đường thẳng

$d_1: 2x-4y+1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=-1+at \\ y=3-\left(a+1\right)t \end{cases}$ vuông góc với nhau?

**A.** $a=-2$. **B.** $a=2$. **C.** $a=-1$. **D.** $a=1$.

**Câu 13.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=-2+2t\\y=-3t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=2+mt\\y=-6+(1-2m)t\end{cases}$ trùng nhau?

**A.** $m=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m\neq\pm2$.

**Câu 14.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=2+2t\\y=1+mt\end{cases}$ và $d_2:4x-3y+m=0$ trùng nhau.

**A.** $m=-3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\dfrac{4}{3}$. **D.** $m\in\varnothing$.

**Câu 15.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1:2x+y+4-m=0$ và $d_2:(m+3)x+y+2m-1=0$ song song?

**A.** $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

**Câu 16.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hai đường thẳng

$\Delta_1:2x-3my+10=0$ và $\Delta_2:mx+4y+1=0$ cắt nhau.

**A.** $1<m<10$. **B.** $m=1$. **C.** Không có $m$. **D.** Với mọi $m$.

**Câu 17.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$\Delta_1:mx+y-19=0$ và $\Delta_2:(m-1)x+(m+1)y-20=0$ vuông góc?

**A.** Với mọi $m$. **B.** $m=2$. **C.** Không có $m$. **D.** $m=\pm1$.

**Câu 18.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1:3mx+2y+6=0$ và $d_2:(m^2+2)x+2my+6=0$ cắt nhau?

**A.** $m\neq-1$. **B.** $m\neq1$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\neq1$ và $m\neq-1$.

**Câu 19.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1:2x-3y-10=0$ và $d_2:\begin{cases}x=2-3t\\y=1-4mt\end{cases}$ vuông góc?

**A.** $m=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=\dfrac{9}{8}$. **C.** $m=-\dfrac{9}{8}$. **D.** $m=-\dfrac{5}{4}$.

**Câu 20.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1:4x-3y+3m=0$ và $d_2:\begin{cases}x=1+2t\\y=4+mt\end{cases}$ trùng nhau?

**A.** $m=-\dfrac{8}{3}$. **B.** $m=\dfrac{8}{3}$. **C.** $m=-\dfrac{4}{3}$. **D.** $m=\dfrac{4}{3}$.

**Câu 21.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1:3mx+2y-6=0$ và $d_2:(m^2+2)x+2my-3=0$ song song?

**A.** $m=1;m=-1$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-1$.

**Câu 22.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=8-(m+1)t\\y=10+t\end{cases}$ và $d_2:mx+2y-14=0$ song song?

**A.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m\in\varnothing$.

**Câu 23.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng $d_1:(m-3)x+2y+m^2-1=0$ và $d_2:-x+my+m^2-2m+1=0$ cắt nhau?

**A.** $m\neq 1$. **B.** $\begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{cases}$. **C.** $m\neq 2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{array}\right.$.

**Câu 24.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases} x=m+2t \\ y=1+(m^2+1)t \end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases} x=1+mt \\ y=m+t \end{cases}$ trùng nhau?

**A.** Không có $m$. **B.** $m=\dfrac{4}{3}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-3$.

**Câu 25.** Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $7x-3y+16=0$ và $x+10=0$.

**A.** $(-10;-18)$. **B.** $(10;18)$. **C.** $(-10;18)$. **D.** $(10;-18)$.

**Câu 26.** Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng $d_1:\begin{cases} x=-3+4t \\ y=2+5t \end{cases}$ và $d_2:\begin{cases} x=1+4t' \\ y=7-5t' \end{cases}$.

**A.** $(1;7)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(2;-3)$. **D.** $(5;1)$.

**Câu 27.** Cho hai đường thẳng $d_1:2x+3y-19=0$ và $d_2:\begin{cases} x=22+2t \\ y=55+5t \end{cases}$. Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho.

**A.** $(2;5)$. **B.** $(10;25)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $(5;2)$.

**Câu 28.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(-2;0)$, $B(1;4)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=-t \\ y=2-t \end{cases}$. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $AB$ và $d$.

**A.** $(2;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;-2)$.

**Câu 29.** Xác định $a$ để hai đường thẳng $d_1:ax+3y-4=0$ và $d_2:\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+3t \end{cases}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

**A.** $a=1$. **B.** $a=-1$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-2$.

**Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hai đường thẳng $d_1:4x+3my-m^2=0$ và $d_2:\begin{cases} x=2+t \\ y=6+2t \end{cases}$ cắt nhau tại một điểm thuộc trục tung.

**A.** $m=0$ hoặc $m=-6$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$.
**C.** $m=0$ hoặc $m=-2$. **D.** $m=0$ hoặc $m=6$.

**Câu 31.** Cho ba đường thẳng $d_1:3x-2y+5=0$, $d_2:2x+4y-7=0$, $d_3:3x+4y-1=0$. Phương trình đường thẳng $d$ đi qua giao điểm của $d_1$ và $d_2$, và song song với $d_3$ là:

**A.** $24x+32y-53=0$. **B.** $24x+32y+53=0$.
**C.** $24x-32y+53=0$. **D.** $24x-32y-53=0$.

**Câu 32.** Lập phương trình của đường thẳng $\Delta$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1:x+3y-1=0$, $d_2:x-3y-5=0$ và vuông góc với đường thẳng $d_3:2x-y+7=0$.

**A.** $3x+6y-5=0$. **B.** $6x+12y-5=0$.

**C.** $6x+12y+10=0$. **D.** $x+2y+10=0$.

**Câu 33.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho ba đường thẳng lần lượt có phương trình $d_1:3x-4y+15=0$, $d_2:5x+2y-1=0$ và $d_3:mx-(2m-1)y+9m-13=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để ba đường thẳng đã cho cùng đi qua một điểm.

**A.** $m=\frac{1}{5}$. **B.** $m=-5$. **C.** $m=-\frac{1}{5}$. **D.** $m=5$.

**Câu 34.** Nếu ba đường thẳng

$d_1:\ 2x+y-4=0$, $d_2:5x-2y+3=0$ và $d_3:mx+3y-2=0$

đồng quy thì $m$ nhận giá trị nào sau đây?

**A.** $\frac{12}{5}$. **B.** $-\frac{12}{5}$. **C.** $12$. **D.** $-12$.

**Câu 35.** Với giá trị nào của $m$ thì ba đường thẳng $d_1:3x-4y+15=0$, $d_2:5x+2y-1=0$ và $d_3:mx-4y+15=0$ đồng quy?

**A.** $m=-5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-3$.

**Câu 36.** Với giá trị nào của $m$ thì ba đường thẳng $d_1:2x+y-1=0$, $d_2:x+2y+1=0$ và $d_3:mx-y-7=0$ đồng quy?

**A.** $m=-6$. **B.** $m=6$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=5$.

**Câu 37.** Đường thẳng $d:51x-30y+11=0$ đi qua điểm nào sau đây?

**A.** $M\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$. **B.** $N\left(-1;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $P\left(1;\frac{3}{4}\right)$. **D.** $Q\left(-1;-\frac{3}{4}\right)$.

## Dạng 2. Góc của hai đường thẳng

**Câu 38.** Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta:x-\sqrt{3}y+2=0$ và $\Delta':x+\sqrt{3}y-1=0$.

**A.** $90^\circ$. **B.** $120^\circ$. **C.** $60^\circ$. **D.** $30^\circ$.

**Câu 39.** Góc giữa hai đường thẳng $a:\sqrt{3}x-y+7=0$ và $b:x-\sqrt{3}y-1=0$ là:

**A.** $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

**Câu 40.** Cho hai đường thẳng $d_1:2x+5y-2=0$ và $d_2:3x-7y+3=0$. Góc tạo bởi đường thẳng $d_1$ và $d_2$ bằng

**A.** $30^0$. **B.** $135^0$. **C.** $45^0$. **D.** $60^0$.

**Câu 41.** Tìm côsin góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1:2x+y-1=0$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\end{cases}$

**A.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{3}{10}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

**Câu 42.** Tìm góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1:x-2y+15=0$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=2-t\\y=4+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

**A.** $5^\circ$. **B.** $60^\circ$. **C.** $0^\circ$. **D.** $90^\circ$.

**Câu 43.** Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $d_1:x+2y-7=0, d_2:2x-4y+9=0$.

**A.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Câu 44.** Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta: x-\sqrt{3}y+2=0 và \Delta': x+\sqrt{3}y-1=0$ ?

**A.** $90^\circ$. **B.** $120^\circ$. **C.** $60^\circ$. **D.** $30^\circ$.

**Câu 45.** Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1: 2x-y-10=0$ và $d_2: x-3y+9=0.$

**A.** $30^\circ$. **B.** $45^\circ$. **C.** $60^\circ$. **D.** $135^\circ$.

**Câu 46.** Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1: 7x-3y+6=0$ và $d_2: 2x-5y-4=0.$

**A.** $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3\pi}{4}$.

**Câu 47.** Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: 2x+2\sqrt{3}y+5=0$ và $d_2: y-6=0.$

**A.** $30^\circ$. **B.** $45^\circ$. **C.** $60^\circ$. **D.** $90^\circ$.

**Câu 48.** Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: x+\sqrt{3}y=0$ và $d_2: x+10=0.$

**A.** $30^\circ$. **B.** $45^\circ$. **C.** $60^\circ$. **D.** $90^\circ$.

**Câu 49.** Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1: 6x-5y+15=0$ và $d_2: \begin{cases} x=10-6t \\ y=1+5t \end{cases}$.

**A.** $30^\circ$. **B.** $45^\circ$. **C.** $60^\circ$. **D.** $90^\circ$.

**Câu 50.** Cho đường thẳng $d_1: x+2y-7=0$ và $d_2: 2x-4y+9=0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

**A.** $-\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

**Câu 51.** Cho đường thẳng $d_1: x+2y-2=0$ và $d_2: x-y=0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

**A.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Câu 52.** Cho đường thẳng $d_1: 10x+5y-1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases}$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

**A.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{3}{10}$.

**Câu 53.** Cho đường thẳng $d_1: 3x+4y+1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=15+12t \\ y=1+5t \end{cases}$.

Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

**A.** $\frac{56}{65}$. **B.** $-\frac{33}{65}$. **C.** $\frac{6}{65}$. **D.** $\frac{33}{65}$.

**Câu 54.** Xác định tất cả các giá trị của $a$ để góc tạo bởi đường thẳng $\begin{cases} x = 9 + at \\ y = 7 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và đường thẳng $3x + 4y - 2 = 0$ bằng $45°$.

**A.** $a = 1,\ a = -14$. **B.** $a = \frac{2}{7},\ a = -14$. **C.** $a = -2,\ a = -14$. **D.** $a = \frac{2}{7},\ a = 14$.

**Câu 55.** Đường thẳng $\Delta$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1 : 2x + y - 3 = 0$ và $d_2 : x - 2y + 1 = 0$ đồng thời tạo với đường thẳng $d_3 : y - 1 = 0$ một góc $45^0$ có phương trình:

**A.** $x + (1 - \sqrt{2})y = 0$ hoặc $\Delta : x - y - 1 = 0$. **B.** $\Delta : x + 2y = 0$ hoặc $\Delta : x - 4y = 0$.

**C.** $\Delta : x - y = 0$ hoặc $\Delta : x + y - 2 = 0$. **D.** $\Delta : 2x + 1 = 0$ hoặc $y + 5 = 0$..

**Câu 56.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $A(2;0)$ và tạo với trục hoành một góc $45°$?

**A.** Có duy nhất. **B.** 2.

**C.** Vô số. **D.** Không tồn tại.

**Câu 57.** Đường thẳng $\Delta$ tạo với đường thẳng $d : x + 2y - 6 = 0$ một góc $45^0$. Tìm hệ số góc $k$ của đường thẳng $\Delta$.

**A.** $k = \frac{1}{3}$ hoặc $k = -3$. **B.** $k = \frac{1}{3}$ hoặc $k = 3$.

**C.** $k = -\frac{1}{3}$ hoặc $k = -3$. **D.** $k = -\frac{1}{3}$ hoặc $k = 3$.

**Câu 58.** Biết rằng có đúng hai giá trị của tham số $k$ để đường thẳng $d : y = kx$ tạo với đường thẳng $\Delta : y = x$ một góc $60^0$. Tổng hai giá trị của $k$ bằng:

**A.** $-8$. **B.** $-4$. **C.** $-1$. **D.** $-1$.

**Câu 59.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho điểm $M(1;-1)$ và hai đường thẳng có phương trình $(d_1) : x - y - 1 = 0, (d_2) : 2x + y - 5 = 0$. Gọi $A$ là giao điểm của hai đường thẳng trên. Biết rằng có hai đường thẳng $(d)$ đi qua $M$ cắt hai đường thẳng trên lần lượt tại hai điểm $B, C$ sao cho $ABC$ là tam giác có $BC = 3AB$ có dạng: $ax + y + b = 0$ và $cx + y + d = 0$, giá trị của $T = a + b + c + d$ là

**A.** $T = 5$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 0$.

## Dạng 3. Khoảng cách

**Câu 60.** Khoảng cách từ điểm $A(1;1)$ đến đường thẳng $5x - 12y - 6 = 0$ là

**A.** 13. **B.** $-13$. **C.** $-1$. **D.** 1.

**Câu 61.** Khoảng cách từ điểm $M(5;-1)$ đến đường thẳng $3x + 2y + 13 = 0$ là:

**A.** $2\sqrt{13}$. **B.** $\frac{28}{\sqrt{13}}$. **C.** 26. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

**Câu 62.** Khoảng cách từ điểm $M(1;-1)$ đến đường thẳng $\Delta : 3x + y + 4 = 0$ là

**A.** 1. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

**Câu 63.** Trong mặt phẳng $Oxy$, khoảng cách từ điểm $M(3;-4)$ đến đường thẳng $\Delta : 3x - 4y - 1 = 0$.

**A.** $\frac{8}{5}$. **B.** $\frac{24}{5}$. **C.** $\frac{12}{5}$. **D.** $-\frac{24}{5}$.

**Câu 64.** Khoảng cách từ điểm $A(-3;2)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x-y+1=0$ bằng:

**A.** $\sqrt{10}$. **B.** $\frac{11\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{10\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{11}{\sqrt{10}}$.

**Câu 65.** Trong mặt phẳng $Oxy$, khoảng cách từ gốc tọa độ $O$ đến đường thẳng $d: 4x-3y+1=0$ bằng

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $1$. **D.** $\frac{1}{5}$.

**Câu 66.** Một đường tròn có tâm $I(3;-2)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-5y+1=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{14}{\sqrt{26}}$. **B.** $\frac{7}{13}$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $6$.

**Câu 67.** Trong mặt phẳng $Oxy$, khoảng cách từđiểm $M(0;4)$ đến đường thẳng $\Delta: x\cos\alpha + y\sin\alpha + 4(2-\sin\alpha)=0$ bằng

**A.** $\sqrt{8}$. **B.** $4\sin\alpha$. **C.** $\frac{4}{\cos\alpha+\sin\alpha}$. **D.** $8$.

**Câu 68.** Khoảng cách từ $I(1;-2)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x-4y-26=0$ bằng

**A.** $3$. **B.** $12$. **C.** $5$. **D.** $\frac{5}{3}$.

**Câu 69.** Khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y+4=0$ và $2x+3y-1=0$ đến đường thẳng $\Delta: 3x+y+4=0$ bằng:

**A.** $2\sqrt{10}$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** $2$.

**Câu 70.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(1;2)$, $B(0;3)$ và $C(4;0)$. Chiều cao của tam giác kẻ từ đỉnh $A$ bằng:

**A.** $\frac{1}{5}$. **B.** $3$. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Câu 71.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(3;-4)$, $B(1;5)$ và $C(3;1)$. Tính diện tích tam giác $ABC$.

**A.** $10$. **B.** $5$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

**Câu 72.** Khoảng cách từ điểm $M(0;3)$ đến đường thẳng $\Delta: x\cos\alpha + y\sin\alpha + 3(2-\sin\alpha)=0$ bằng:

**A.** $\sqrt{6}$. **B.** $6$. **C.** $3\sin\alpha$. **D.** $\frac{3}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

**Câu 73.** Khoảng cách từ điểm $M(2;0)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \end{cases}$ bằng:

**A.** $2$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{10}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

**Câu 74.** Khoảng cách nhỏ nhất từ điểm $M(15;1)$ đến một điểm bất kì thuộc đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+3t\\y=t\end{cases}$ bằng:

**A.** $\sqrt{10}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $\frac{16}{\sqrt{5}}$. **D.** $\sqrt{5}$.

**Câu 75.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để khoảng cách từ điểm $A(-1;2)$ đến đường thẳng $\Delta: mx+y-m+4=0$ bằng $2\sqrt{5}$.

**A.** $m=2$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=\frac{1}{2}\end{array}\right.$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại $m$.

**Câu 76.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=2-t\end{cases}$ và $d_2: x-2y+m=0$ đến gốc toạ độ bằng $2$.

**A.** $\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-2\end{array}\right.$.

**Câu 77.** Đường tròn $(C)$ có tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 8x+6y+100=0$. Bán kính $R$ của đường tròn $(C)$ bằng:

**A.** $R=4$. **B.** $R=6$. **C.** $R=8$. **D.** $R=10$.

**Câu 78.** Đường tròn $(C)$ có tâm $I(-2;-2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 5x+12y-10=0$. Bán kính $R$ của đường tròn $(C)$ bằng:

**A.** $R=\frac{44}{13}$. **B.** $R=\frac{24}{13}$. **C.** $R=44$. **D.** $R=\frac{7}{13}$.

**Câu 79.** Cho đường thẳng $d: 21x-11y-10=0$. Trong các điểm $M(21;-3)$, $N(0;4)$, $P(-19;5)$ và $Q(1;5)$ điểm nào gần đường thẳng $d$ nhất?

**A.** $M$. **B.** $N$. **C.** $P$. **D.** $Q$.

**Câu 80.** Cho đường thẳng $d: 7x+10y-15=0$. Trong các điểm $M(1;-3)$, $N(0;4)$, $P(-19;5)$ và $Q(1;5)$ điểm nào cách xa đường thẳng $d$ nhất?

**A.** $M$. **B.** $N$. **C.** $P$. **D.** $Q$.

**Câu 81.** Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $\Delta_1: 6x-8y+3=0$ và $\Delta_2: 3x-4y-6=0$ bằng:

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $2$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Câu 82.** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d: 7x+y-3=0$ và $\Delta:\begin{cases}x=-2+t\\y=2-7t\end{cases}$.

**A.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $15$. **C.** $9$. **D.** $\frac{9}{\sqrt{50}}$.

**Câu 83.** Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $d_1: 6x-8y-101=0$ và $d_2: 3x-4y=0$ bằng:

**A.** $10,1$. **B.** $1,01$. **C.** $101$. **D.** $\sqrt{101}$.

**Câu 84.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(2;3)$ và $B(1;4)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều hai điểm $A$ và $B$?

**A.** $x-y+2=0$. **B.** $x+2y=0$. **C.** $2x-2y+10=0$. **D.** $x-y+100=0$.

**Câu 85.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(0;1)$, $B(12;5)$ và $C(-3;0)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều ba điểm $A$, $B$ và $C$.

**A.** $x-3y+4=0$. **B.** $-x+y+10=0$. **C.** $x+y=0$. **D.** $5x-y+1=0$.

**Câu 86.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;1)$, $B(-2;4)$ và đường thẳng $\Delta: mx-y+3=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để $\Delta$ cách đều hai điểm $A$, $B$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

**Câu 87.** Đường thẳng $\Delta$ song song với đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$ và cách $d$ một khoảng bằng 1 có phương trình:

**A.** $3x-4y+6=0$ hoặc $3x-4y-4=0$.

**B.** $3x-4y-6=0$ hoặc $3x-4y+4=0$.

**C.** $3x-4y+6=0$ hoặc $3x-4y+4=0$.

**D.** $3x-4y-6=0$ hoặc $3x-4y-4=0$.

**Câu 88.** Tập hợp các điểm cách đường thẳng $\Delta: 3x-4y+2=0$ một khoảng bằng $2$ là hai đường thẳng có phương trình nào sau đây?

**A.** $3x-4y+8=0$ hoặc $3x-4y+12=0$.

**B.** $3x-4y-8=0$ hoặc $3x-4y+12=0$.

**C.** $3x-4y-8=0$ hoặc $3x-4y-12=0$.

**D.** $3x-4y+8=0$ hoặc $3x-4y-12=0$.

**Câu 89.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $d_1: 5x+3y-3=0$ và $d_2: 5x+3y+7=0$ song song nhau. Đường thẳng vừa song song và cách đều với $d_1$, $d_2$ là:

**A.** $5x+3y-2=0$. **B.** $5x+3y+4=0$.

**C.** $5x+3y+2=0$. **D.** $5x+3y-4=0$.

**Câu 90.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, gọi $d$ là đường thẳng đi qua $M(4;2)$ và cách điểm $A(1;0)$ khoảng cách $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. Biết rằng phương trình đường thẳng $d$ có dạng $x+by+c=0$ với $b,c$ là hai số nguyên. Tính $b+c$.

**A.** $4$. **B.** $5$. **C.** $-1$. **D.** $-5$.

**Câu 91.** Đường thẳng $12x+5y=60$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác. Tổng độ dài các đường cao của tam giác đó là

**A.** $\frac{60}{13}$. **B.** $\frac{281}{13}$. **C.** $\frac{360}{17}$. **D.** $20$.

**Dạng 4. Một số bài toán liên quan đến diện tích**

**Câu 92.** Đường thẳng $\Delta: 5x+3y=15$ tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng bao nhiêu?

**A.** $7,5$. **B.** $5$. **C.** $15$. **D.** $3$.

**Câu 93.** Cho hai đường thẳng $d_1: y=mx-4; d_2: -mx-4$. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để tam giác tạo thành bởi $d_1$, $d_2$ và trục hoành có diện tích lớn hơn $8$. Số phần tử của tập $S$ là

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Câu 94.** Tìm phương trình đường thẳng $d: y=ax+b.$ Biết đường thẳng $d$ đi qua điểm $I(1;3)$ và tạo với hai tia $Ox, Oy$ một tam giác có diện tích bằng $6$?

**A.** $y=\left(9+\sqrt{72}\right)x-\sqrt{72}-6$ . **B.** $y=\left(9-\sqrt{72}\right)x+\sqrt{72}-6$.

**C.** $y=3x+6$. **D.** $y=-3x+6.$

**Câu 95.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho điểm $M(2;1)$. Đường thẳng $d$ đi qua $M$, cắt các tia $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ ($A, B$ khác $O$) sao cho tam giác $OAB$ có diện tích nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng $d$ là.

**A.** $2x-y-3=0$. **B.** $x-2y=0$. **C.** $x+2y-4=0$. **D.** $x-y-1=0$.

**Câu 96.** Đường thẳng $d$: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $(a\neq 0; b\neq 0)$ đi qua $M(-1;6)$ tạo với tia $Ox, Oy$ một tam giác có diện tích bằng 4. Tính $S=a+2b.$

**A.** $S=\frac{-5+7\sqrt{5}}{3}$. **B.** $S=-\frac{38}{3}$. **C.** $S=10$. **D.** $S=6$.

**Dạng 5. Xác định điểm**

**Câu 97.** Cho đường thẳng $d: 3x+5y-15=0$. Trong các điểm sau đây, điểm nào **không** thuộc đường thẳng $d$

**A.** $M_1(5;0)$. **B.** $M_4(-5;6)$. **C.** $M_2(0;3)$. **D.** $M_3(5;3)$.

**Câu 98.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(4;3)$, $B(2;7)$, $C(-3;-8)$. Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh $A$ xuống cạnh $BC$ là:

**A.** $(-1;4)$. **B.** $(1;-4)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;1)$.

**Câu 99.** Cho đường thẳng $d: -3x+y-5=0$ và điểm $M(-2;1)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của $M$ trên $d$ là

**A.** $\left(\frac{7}{5};-\frac{4}{5}\right)$. **B.** $\left(-\frac{7}{5};\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\left(-\frac{7}{5};-\frac{4}{5}\right)$. **D.** $\left(-\frac{5}{7};\frac{4}{5}\right)$.

**Câu 100.** Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2)$ lên đường thẳng $\Delta: x-y=0$ là

**A.** $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(2;2)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

**Câu 101.** Cho hai điểm $A(3;-1), B(0;3)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $Ox$ sao khoảng cách từ $M$ đến đường thẳng $AB$ bằng 1.

**A.** $M\left(\frac{7}{2};0\right)$ và $M(1;0)$. **B.** $M\left(\sqrt{13};0\right)$.

**C.** $M(4;0)$. **D.** $M(2;0)$.

**Câu 102.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;1)$, $B(4;-3)$ và đường thẳng $d: x-2y-1=0$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ có tọa độ nguyên và thỏa mãn khoảng cách từ $M$ đến đường thẳng $AB$ bằng 6.

**A.** $M(3;7)$. **B.** $M(7;3)$. **C.** $M(-43;-27)$. **D.** $M\left(3;-\frac{27}{11}\right)$.

**Câu 103.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $A(0;1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+2t \\ y=3+t \end{cases}$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ và cách $A$ một khoảng bằng 5, biết $M$ có hoành độ âm.

**A.** $M(4;4)$. **B.** $\left[\begin{array}{l} M(-4;4) \\ M\left(-\frac{24}{5};-\frac{2}{5}\right) \end{array}\right.$. **C.** $M\left(-\frac{24}{5};-\frac{2}{5}\right)$. **D.** $M(-4;4)$.

**Câu 104.** Biết rằng có đúng hai điểm thuộc trục hoành và cách đường thẳng $\Delta: 2x-y+5=0$ một khoảng bằng $2\sqrt{5}$. Tích hoành độ của hai điểm đó bằng:

**A.** $-\frac{75}{4}$. **B.** $-\frac{25}{4}$. **C.** $-\frac{225}{4}$. **D.** Đáp số khác.

**Câu 105.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(0;3)$. Tìm điểm $M$ thuộc trục hoành sao cho khoảng cách từ $M$ đến đường thẳng $AB$ bằng 1.

**A.** $\left[\begin{array}{l} M\left(\frac{7}{2};0\right) \\ M(1;0) \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} M\left(\frac{14}{3};0\right) \\ M\left(\frac{4}{3};0\right) \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} M\left(-\frac{7}{2};0\right) \\ M(-1;0) \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} M\left(-\frac{14}{3};0\right) \\ M\left(-\frac{4}{3};0\right) \end{array}\right.$.

**Câu 106.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(3;0)$ và $B(0;-4)$. Tìm điểm $M$ thuộc trục tung sao cho diện tích tam giác $MAB$ bằng 6.

**A.** $\left[\begin{array}{l} M(0;0) \\ M(0;-8) \end{array}\right.$. **B.** $M(0;-8)$. **C.** $M(6;0)$. **D.** $\left[\begin{array}{l} M(0;0) \\ M(0;6) \end{array}\right.$.

**Câu 107.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : 3x-2y-6=0$ và $\Delta_2 : 3x-2y+3=0$. Tìm điểm $M$ thuộc trục hoành sao cho $M$ cách đều hai đường thẳng đã cho.

**A.** $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};0\right)$. **C.** $M\left(-\frac{1}{2};0\right)$. **D.** $M\left(\sqrt{2};0\right)$.

**Câu 108.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(-2;2)$, $B(4;-6)$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x=t \\ y=1+2t \end{cases}$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $M$ cách đều hai điểm $A$, $B$.

**A.** $M(3;7)$. **B.** $M(-3;-5)$. **C.** $M(2;5)$. **D.** $M(-2;-3)$

**Câu 109.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(-1;2)$, $B(-3;2)$ và đường thẳng $d : 2x-y+3=0$. Tìm điểm $C$ thuộc $d$ sao cho tam giác $ABC$ cân tại $C$.

**A.** $C(-2;-1)$. **B.** $C\left(-\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $C(-1;1)$. **D.** $C(0;3)$

**Câu 110.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;2)$, $B(0;3)$ và đường thẳng $d : y=2$. Tìm điểm $C$ thuộc $d$ sao cho tam giác $ABC$ cân tại $B$.

**A.** $C(1;2)$. **B.** $C(4;2)$. **C.** $\left[\begin{array}{l} C(1;2) \\ C(-1;2) \end{array}\right.$. **D.** $C(-1;2)$.

**Câu 111.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, giả sử điểm $A(a;b)$ thuộc đường thẳng $d : x-y-3=0$ và cách $\Delta : 2x-y+1=0$ một khoảng bằng $\sqrt{5}$. Tính $P=ab$ biết $a>0$.

**A.** 4. **B.** $-2$ **C.** 2. **D.** $-4$.

**Câu 112.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho biết điểm $M(a;b)$ $(a>0)$ thuộc đường thẳng $d : \begin{cases} x=3+t \\ y=2+t \end{cases}$ và cách đường thẳng $\Delta : 2x-y-3=0$ một khoảng $2\sqrt{5}$. Khi đó $a+b$ là.

**A.** 21. **B.** 23. **C.** 22 **D.** 20.

**Câu 113.** Điểm $A(a;b)$ thuộc đường thẳng $d : \begin{cases} x=3-t \\ y=2-t \end{cases}$ và cách đường thẳng $\Delta : 2x-y-3=0$ một khoảng bằng $2\sqrt{5}$ và $a<0$. Tính $P=a.b$.

**A.** $P=-72$. **B.** $P=72$. **C.** $P=132$. **D.** $P=-132$.

**Câu 114.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho điểm $I(1;2)$ và đường thẳng $(d): 2x+y-5=0$. Biết rằng có hai điểm $M_1, M_2$ thuộc (*d*) sao cho $IM_1 = IM_2 = \sqrt{10}$. Tổng các hoành độ của $M_1$ và $M_2$ là

**A.** $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{14}{5}$. **C.** 2. **D.** 5.

**Câu 115.** Trong hệ tọa độ $Oxy$ cho $A(1;1)$, $B(4;-3)$. Gọi $C(a;b)$ thuộc đường thẳng $d: x-2y-1=0$ sao cho khoảng cách từ $C$ đến đường thẳng $AB$ bằng 6. Biết rằng $C$ có hoành độ nguyên, tính $a+b$?

**A.** $a+b=10$. **B.** $a+b=7$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a+b=-4$

**Câu 116.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho điểm hai điểm $A(-4;2)$, $B(2;6)$ và điểm $C$ nằm trên đường thẳng $d: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2}$ sao cho $CA = CB$. Khi đó tọa độ điểm C là

**A.** $\left(\frac{2}{5};\frac{8}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{-1}{5};\frac{12}{5}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{5};\frac{11}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{5}\right)$.

**Câu 117.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho $A(-3;5), B(1;3)$ và đường thẳng $d: 2x-y-1=0$, đường thẳng $AB$ cắt $d$ tại $I$. Tính tỉ số $\frac{IA}{IB}$.

**A.** 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

**Câu 118.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $B(-2;3)$ và $C(3;-2)$. Điểm $I(a;b)$ thuộc $BC$ sao cho với mọi điểm $M$ không nằm trên đường thẳng $BC$ thì $\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MC}$. Tính $S = a^2 + b^2$.

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 4.

**Dạng 6. Bài toán liên quan quan đến tam giác**

**Câu 119.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(1;2), B(3;1), C(5;4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao kẻ từ $A$ của tam giác $ABC$?

**A.** $2x+3y-8=0$. **B.** $2x+3y+8=0$. **C.** $3x-2y+1=0$. **D.** $2x+3y-2=0$.

**Câu 120.** Cho $\Delta ABC$ có $A(2;-1), B(4;5), C(-3;2)$. Đường cao $AH$ của $\Delta ABC$ có phương trình là

**A.** $7x+3y-11=0$. **B.** $-3x+7y+13=0$. **C.** $3x+7y+17=0$. **D.** $7x+3y+10=0$.

**Câu 121.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác $ABC$ có $A(1;2), B(3;1), C(5;4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao kẻ từ $A$ của tam giác $ABC$?

**A.** $2x+3y-8=0$. **B.** $2x+3y+8=0$.

**C.** $3x-2y+1=0$. **D.** $2x+3y-2=0$.

**Câu 122.** Trong mặt phẳng cho tam giác $ABC$ cân tại $C$ có $B(2;-1)$, $A(4;3)$. Phương trình đường cao $CH$ là

**A.** $x-2y-1=0$. **B.** $x-2y+1=0$. **C.** $2x+y-2=0$. **D.** $x+2y-5=0$.

**Câu 123.** Cho $\Delta ABC$ có $A(2;-1), B(4;5), C(-3;2)$. Phương trình tổng quát của đường cao $BH$ là

**A.** $3x+5y-37=0$. **B.** $5x-3y-5=0$. **C.** $3x-5y-13=0$. **D.** $3x+5y-20=0$.

**Câu 124.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;1)$, $B(0;-2)$, $C(4;2)$. Lập phương trình đường trung tuyến của tam giác $ABC$ kẻ từ $A$.

**A.** $x+y-2=0.$ **B.** $2x+y-3=0.$ **C.** $x+2y-3=0.$ **D.** $x-y=0.$

**Câu 125.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác $ABC$ kẻ từ $A$.

**A.** $7x+3y-11=0.$ **B.** $-3x+7y+13=0.$

**C.** $3x+7y+1=0.$ **D.** $7x+3y+13=0.$

**Câu 126.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác $ABC$ kẻ từ $B$.

**A.** $3x-5y-13=0.$ **B.** $3x+5y-20=0.$

**C.** $3x+5y-37=0.$ **D.** $5x-3y-5=0.$

**Câu 127.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác $ABC$ kẻ từ $C$.

**A.** $x+y-1=0.$ **B.** $x+3y-3=0.$ **C.** $3x+y+11=0.$ **D.** $3x-y+11=0.$

**Câu 128.** Cho tam giác $ABC$ với $A(1;1)$, $B(0;-2)$, $C(4;2)$. Phương trình tổng quát của đường trung tuyến đi qua điểm $B$ của tam giác $ABC$ là

**A.** $7x+7y+14=0.$ **B.** $5x-3y+1=0.$ **C.** $3x+y-2=0.$ **D.** $-7x+5y+10=0.$

**Câu 129.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;3)$, $B(1;0)$, $C(-1;-2)$. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh $A$ của tam giác $ABC$ là:

**A.** $2x-y-1=0.$ **B.** $x-2y+4=0.$ **C.** $x+2y-8=0.$ **D.** $2x+y-7=0.$

**Câu 130.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(1;4)$, $B(3;2)$ và $C(7;3)$. Viết phương trình tham số của đường trung tuyến $CM$ của tam giác.

**A.** $\begin{cases} x=7 \\ y=3+5t \end{cases}.$ **B.** $\begin{cases} x=3-5t \\ y=-7 \end{cases}.$ **C.** $\begin{cases} x=7+t \\ y=3 \end{cases}.$ **D.** $\begin{cases} x=2 \\ y=3-t \end{cases}.$

**Câu 131.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;4)$, $B(5;0)$ và $C(2;1)$. Trung tuyến $BM$ của tam giác đi qua điểm $N$ có hoành độ bằng $20$ thì tung độ bằng:

**A.** $-12.$ **B.** $-\dfrac{25}{2}.$ **C.** $-13.$ **D.** $-\dfrac{27}{2}.$

**Câu 132.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh $AB$. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh $A$ lần lượt có phương trình là $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$. Phương trình đường thẳng $AC$ là

**A.** $3x-4y-5=0.$ **B.** $3x+4y+5=0.$ **C.** $3x-4y+5=0.$ **D.** $3x+4y-5=0.$

**Câu 133.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có phương trình cạnh $AB$ là $x-y-2=0,$ phương trình cạnh $AC$ là $x+2y-5=0$. Biết trọng tâm của tam giác là điểm $G(3;2)$ và phương trình đường thẳng $BC$ có dạng $x+my+n=0.$ Tìm $m+n.$

**A.** $3.$ **B.** $2.$ **C.** $5.$ **D.** $4.$

**Câu 134.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A\left(\dfrac{7}{4};3\right)$, $B(1;2)$ và $C(-4;3)$.

Phương trình đường phân giác trong của góc $A$ là:

**A.** $4x+2y-13=0.$ **B.** $4x-8y+17=0.$ **C.** $4x-2y-1=0.$ **D.** $4x+8y-31=0.$

**Câu 135.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(1;5)$, $B(-4;-5)$ và $C(4;-1)$. Phương trình đường phân giác ngoài của góc $A$ là:

**A.** $y+5=0$. **B.** $y-5=0$. **C.** $x+1=0$. **D.** $x-1=0$.

**Câu 136.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $d_1: 3x-4y-3=0$ và $d_2: 12x+5y-12=0$. Phương trình đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ là:

**A.** $3x+11y-3=0$. **B.** $11x-3y-11=0$. **C.** $3x-11y-3=0$. **D.** $11x+3y-11=0$.

**Câu 137.** Cho tam giác ABC có phương trình cạnh $AB: 3x-4y-9=0$, cạnh $AC: 8x-6y+1=0$, cạnh $BC: x+y-5=0$. Phương trình đường phân giác trong của góc $A$ là:

**A.** $14x+14y-17=0$. **B.** $2x-2y-19=0$. **C.** $2x+2y+19=0$. **D.** $14x-14y-17=0$.

**Câu 138.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ với $A(1;-2)$, $B(2;-3)$, $C(3;0)$. Phương trình đường phân giác ngoài góc $A$ của tam giác $ABC$ là

**A.** $x=1$. **B.** $y=-2$. **C.** $2x+y=0$. **D.** $4x+y-2=0$.

**Câu 139.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ với đỉnh $A(2;4)$, trọng tâm $G\left(2;\frac{2}{3}\right)$. Biết rằng đỉnh $B$ nằm trên đường thẳng $(d)$ có phương trình $x+y+2=0$ và đỉnh $C$ có hình chiếu vuông góc trên $(d)$ là điểm $H(2;-4)$. Giả sử $B(a;b)$, khi đó $T=a-3b$ bằng

**A.** $T=4$. **B.** $T=-2$. **C.** $T=2$. **D.** $T=0$.

**Câu 140.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác cân $ABC$ có cạnh đáy $BC: x-3y-1=0$, cạnh bên $AB: x-y-5=0$. Đường thẳng $AC$ đi qua $M(-4;1)$. Giả sử toạ độ đỉnh $C(m,n)$.Tính $T=m+n$.

**A.** $T=\frac{5}{9}$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=\frac{9}{5}$. **D.** $T=-\frac{9}{5}$.

**Câu 141.** Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): 2x-y+5=0$ và $(d_2): x+y-3=0$ cắt nhau tại $I$. Phương trình đường thẳng đi qua $M(-2;0)$ cắt $(d_1),(d_2)$ tại $A$ và $B$ sao cho tam giác $IAB$ cân tại $A$ có phương trình dạng $ax+by+2=0$. Tính $T=a-5b$.

**A.** $T=-1$. **B.** $T=9$. **C.** $T=-9$. **D.** $T=11$.

**Câu 142.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có đỉnh $A(2;1)$, $B(2;-3)$, $C(-2;-1)$. Trực tâm $H$ của tam giác $ABC$ có tọa độ $(a;b)$. Biểu thức $S=3a+2b$ bằng bao nhiêu?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $5$. **D.** $-1$.

**Câu 143.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ ,cho tam giác $ABC$ có đỉnh $A(2;2)$ và trung điểm của $BC$ là $I(-1;-2)$. Điểm $M(a;b)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Tính $S=a+b$.

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $1$.

**Câu 144.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;1)$, đường cao $BH$ có phương trình $x-3y-7=0$ và trung tuyến $CM$ có phương trình $x+y+1=0$. Tìm tọa độ đỉnh $C$?

**A.** $(-1;0)$. **B.** $(4;-5)$. **C.** $(1;-2)$. **D.** $(1;4)$.

**Câu 145.** Trong hệ trục tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $B(-4;1)$, trọng tâm $G(1;1)$ và đường thẳng phân giác trong góc $A$ có phương trình $d: x-y-1=0$. Biết điểm $A(m;n)$. Tính tích $m.n$.

**A.** $m.n=20$. **B.** $m.n=12$. **C.** $m.n=-12$. **D.** $m.n=6$.

**Câu 146.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, điểm M thuộc cạnh AC, sao cho $AB=3AM$, đường tròn tâm I đường kính CM cắtBM tại D, đường thẳng CD có phương trình $x-3y-6=0$. Biết điểm I(1;-1), điểm $E\left(\frac{4}{3};0\right)$ thuộc đường thẳng BC, $x_C\in\mathbb{Z}$. Gọi B là điểm có tọa độ *(a, b)*. Khi đó:

**A.** $a+b=1$. **B.** $a+b=0$. **C.** $a+b=-1$. **D.** $a+b=2$.

**Câu 147.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có phương trình đường thẳng $BC:x+7y-13=0$. Các chân đường cao kẻ từ $B,C$ lần lượt là $E(2;5),F(0;4)$. Biết tọa độ đỉnh A là $A(a;b)$. Khi đó:

**A.** $a-b=5$. **B.** $2a+b=6$. **C.** $a+2b=6$. **D.** $b-a=5$

**Câu 148.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có đỉnh $B(-12;1)$, đường phân giác trong của góc $A$ có phương trình $d:x+2y-5=0$. $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Đường thẳng $BC$ qua điểm nào sau đây?

**A.** $(1;0)$. **B.** $(2;-3)$. **C.** $(4;-4)$. **D.** $(4;3)$.

**Câu 149.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết phương trình cạnh $BC:x+y-2=0$; hai đường cao $BB':x-3=0$ và $CC':2x-3y+6=0$?

**A.** $A(1;2);B(0;2);C(3;-1)$. **B.** $A(1;2);B(3;-1);C(0;2)$.

**C.** $A(1;-2);B(3;-1);C(0;2)$. **D.** $A(2;1);B(3;-1);C(0;2)$.

**Câu 150.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(-3;0),B(3;0),C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là trực tâm của tam giác $ABC$. Tính $6ab$

**A.** 10. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 60. **D.** 6.

**Câu 151.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;-3)$, $B(0;2)$, $C(-2;4)$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua $A$ và chia tam giác $ABC$ thành hai phần có diện tích bằng nhau. Phương trình của $\Delta$ là

**A.** $2x-y-7=0$. **B.** $x+y+2=0$. **C.** $x-3y-10=0$. **D.** $3x+y=0$.

**Câu 152.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ cân tại $A$, phương trình đường thẳng $AB,AC$ lần lượt là $5x-y-2=0,x-5y+14=0$. Gọi $D$ là trung điểm của $BC$, $E$ là trung điểm của $AD$, $M\left(\frac{9}{5};\frac{8}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của $D$ trên $BE$. Tính $OC$.

**A.** $OC=\sqrt{26}$. **B.** $OC=\sqrt{10}$. **C.** $OC=5$. **D.** $OC=\sqrt{52}$.

**Câu 153.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có chân đường cao hạ từ đỉnh $A$ là $H\left(\frac{17}{5};-\frac{1}{5}\right)$, chân đường phân giác trong góc $A$ là $D(5;3)$ và trung điểm của cạnh $AB$ là $M(0;1)$. Tìm tọa độ đỉnh $C$.

**A.** $C(-2;9)$. **B.** $C(9;11)$. **C.** $C(-9;-11)$. **D.** $C(2;-10)$.

**Câu 154.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ cân tại $B$ với $A(1;-1)$, $C(3;5)$. Đỉnh $B$ nằm trên đường thẳng $d:2x-y=0$. Phương trình các đường thẳng $AB,BC$ lần lượt là $d_1:ax+by-24=0$, $d_2:cx+dy+8=0$. Tính giá trị biểu thức $P=a.b.c.d$.

**A.** $P=975$. **B.** $P=5681$. **C.** $P=3059$. **D.** $P=5083$.

**Câu 155.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho $\Delta ABC$ có $AB=AC$, $\widehat{BAC}=90^o$. Biết $M(1,-1)$ là trung điểm cạnh $BC$ và $G\left(\frac{2}{3},0\right)$ là trọng tâm $\Delta ABC$. Khi đó, $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B),(x_B<0)$. Tính $T=2019x_A^2+y_A+2x_B-3y_B$

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Câu 156.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G(2;-3)$ và $B(1;1)$. Đường thẳng $\Delta: x-y-4=0$ đi qua $A$ và đường phân giác trong của góc $A$ cắt $BC$ tại điểm $I$ sao cho diện tích tam giác $IAB$ bằng $\frac{4}{5}$ diện tích tam giác $IAC$. Biết điểm $A$ có hoành độ dương, khi đó phương trình tổng quát của đường thẳng $BC$ là

**A.** $5x+3y-11=0$. **B.** $3x-8y+5=0$ **C.** $5x+3y+11=0$ **D.** $3x-8y-5=0$

**Câu 157.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ B có phương trình là $\Delta_1: x+3y-18=0$, phương trình đường trung trực của đoạn BC là $\Delta_2: 3x+19y-279=0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d: 2x-y+5=0$ và biết $\widehat{BAC}=135^0$. Giả sử $A(a;b)$, tính tổng $a^2+b$.

**A.** 24. **B.** 6. **C.** 80 **D.** 4

**Câu 158.** Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác $ABC$ cân, cạnh đáy $BC$: $x+3y+1=0$, cạnh bên $AB$: $x-y+5=0$; đường thẳng chứa $AC$ đi qua $M(-4;-1)$. Tìm tọa độ đỉnh $C$.

**A.** $C\left(-\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right)$. **B.** $C\left(-\frac{43}{10};-\frac{11}{10}\right)$. **C.** $C\left(\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right)$. **D.** $C\left(\frac{43}{10};-\frac{11}{10}\right)$.

**Câu 159.** Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(2;0)$, đường trung tuyến $CM: 3x+7y-8=0$, đường trung trực của BC là: $x=3$, đỉnh A có tung độ âm. Khi đó tọa độ của đỉnh A có dạng $(a;\frac{-b}{c})$ với $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tìm $a+b+c$

**A.** 17. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 19.

**Câu 160.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ vuông tại điểm $A(-2;0)$.Điểm $E$ là chân đường cao kẻ từ đỉnh $A$.Gọi $F$ là điểm đối xứng với $E$ qua $A$, trực tâm tam giác $BCF$ là điểm $H(-2;3)$.Trung điểm $M$ của đoạn $BC$ thuộc đường thẳng $(d): 4x-y+4=0$.Biết hoành độ đỉnh $B$ dương. Tính $S=2x_B+3x_C$

**A.** $-4$. **B.** 9. **C.** 4. **D.** $-9$

## Dạng 7. Bài toán liên quan đến tứ giác

**Câu 161.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $C$ thuộc đường thẳng d: $2x+y+5=0$ và điểm $A(-4;8)$. Gọi $M$ đối xứng với $B$ qua $C$, điểm $N(5;-4)$ là hình chiếu vuông góc của $B$ lên đường thẳng $MD$. Biết tọa độ $C(m;n)$, giá trị của $m-n$ là

**A.** 6. **B.** $-6$. **C.** 8. **D.** 7

**Câu 162.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$. Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $BC$, $N$ là điểm trên cạnh $CD$ sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng $AN$ có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm $A$.

**A.** $A(1;-1)$ hoặc $A(4;-5)$.
**B.** $A(1;-1)$ hoặc $A(-4;-5)$.
**C.** $A(1;-1)$ hoặc $A(4;5)$.
**D.** $A(1;1)$ hoặc $A(4;5)$.

**Câu 163.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$; các điểm $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$, $CD$; $CM$ cắt $DN$ tại điểm $I(5;2)$. Biết $P\left(\frac{11}{2};\frac{11}{2}\right)$ và điểm $A$ có hoành độ âm. Tọa độ điểm $A$ và $D$ là:

**A.** $A(-2;3)$ và $D(3;8)$.
**B.** $A(-2;3)$ và $D(-3;8)$.
**C.** $A(-2;3)$ và $D(3;-8)$.
**D.** $A(-2;-3)$ và $D(3;8)$.

**Câu 164.** Trên mặt phẳng $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$. Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $BC$, $N$ là điểm trên cạnh $CD$ sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng $AN$ có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Gọi $P(a;b)$ là giao điểm của $AN$ và $BD$. Giá trị $2a + b$ bằng

**A.** 6
**B.** 5.
**C.** 8.
**D.** 7.

**Câu 165.** Trong mặt phẳng tọa độ với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $H(1;2)$ là hình chiếu vuông góc của $A$ lên $BD$. Điểm $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ là trung điểm cạnh $BC$. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh $A$ của tam giác $ADH$ là $4x + y - 4 = 0$. Biết điểm $D$ có tọa độ là $(x_D;y_D)$ tính giá trị biểu thức $S = 4x_D^2 + y_D^2$.

**A.** $S = 3$.
**B.** $S = 4$.
**C.** $S = 6$.
**D.** $S = 5$.

**Câu 166.** Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x + y + 5 = 0$ và điểm $A(-4;8)$. Gọi M là điểm đối xứng với B qua C, điểm $N(5;-4)$ là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng M**D.** Biết tọa độ $C(m;n)$, giá trị của $m - n$ là:

**A.** 6.
**B.** $-6$.
**C.** 8.
**D.** 7.

**Câu 167.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính $BD$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A$ lên $BC$ và $BD$; gọi $P$ là giao điểm của $MN$ và $AC$. Biết đường thẳng $AC$ có phương trình $x - y - 1 = 0$, $M(0;4)$, $N(2;2)$ và hoành độ điểm $A$ nhỏ hơn 2. Tìm tọa độ các điểm $P, A, B$.

**A.** $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), A(0;-1), B(4;1)$.
**B.** $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), A(0;-1), B(-1;4)$.
**C.** $P\left(\frac{5}{3};\frac{3}{2}\right), A(0;-1), B(-1;4)$.
**D.** $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), A(-1;0), B(4;1)$.

**Câu 168.** Trên hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$. Điểm $M$ thuộc cạnh $CD$ sao cho $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{DM}$, $N(0;2019)$ là trung điểm của cạnh $BC$, $K$ là giao điểm của hai đường thẳng $AM$ và $BD$. Biết đường thẳng $AM$ có phương trình $x-10y+2018=0$. Khoảng cách từ gốc tọa độ $O$ đến đường thẳng $NK$ bằng

**A.** $2019$. **B.** $2019\sqrt{101}$. **C.** $\dfrac{2018}{11}$. **D.** $\dfrac{2019\sqrt{101}}{101}$.

**Câu 169.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD=3BC$. Đường thẳng $BD$ có phương trình $x+2y-6=0$ và tam giác $ABD$ có trực tâm là $H(-3;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh $C$ và $D$.

**A.** $C(-1;6),D(4;1)$ **và** $C(-1;6),D(-8;7)$. **B.** $C(1;6),D(-4;1)$ **và** $C(1;6),D(-8;7)$.

**C.** $C(1;6),D(-4;1)$ **và** $C(1;6),D(8;7)$. **D.** $C(-1;6),D(4;-1)$ **và** $C(-1;6),D(8;-7)$.

**Câu 170.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x+3y=0$ và $x-y+4=0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$. Khẳng định nào sau đay là khẳng định đúng?

**A.** Tọa độ trọng tâm của tam giác BCD là $G\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

**B.** Tọa độ trọng tâm của tam giác ACD là $G\left(-\dfrac{1}{3};-1\right)$

**C.** Tọa độ trọng tâm của tam giác ABD là $G(-1;3)$

**D.** Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{1}{3};-1\right)$

**Câu 171.** Trong mặt phẳng với trục toạ độ $Oxy$ cho hình thang cân $ABCD$ $(AB//CD)$. Gọi $H,I$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $B$ trên các đường thẳng $AC,CD$. Giả sử $M,N$ lần lượt là trung điểm của $AD,HI$. Phương trình đường thẳng $AB$ có dạng $mx+ny-7=0$ biết $M(1;-2)$, $N(3;4)$ và đỉnh $B$ nằm trên đường thẳng $x+y-9=0$, $\cos\widehat{ABM}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Khi đó $m+n$ có giá trị thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ **B.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ **C.** $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ **D.** $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}\right)$

**Câu 172.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình thang $ABCD$ có diện tích bằng 14 và $AB//CD$. Biết $H\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ là trung điểm của cạnh $BC$ và $I\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ là trung điểm của $AH$. Viết phương trình đường thẳng $AB$, biết điểm $D$ có hoành độ dương và $D$ thuộc đường thẳng $5x-y+1=0$.

**A.** $3x-y+2=0$. **B.** $3x-y-2=0$. **C.** $x+3y-2=0$. **D.** $x-3y-2=0$.

***Câu 173.*** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại $A$ và $B$, cạnh $AB = BC = \dfrac{AD}{2}$. Biết đường thẳng chứa cạnh $CD$ có phương trình $3x + y - 4 = 0$ và $A(-2; 0)$. Điểm $B(a;b)$ với $b>0$ khi đó $a^2+b^2=?$

**A.** 5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 4

**Câu 174.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Gọi $P(a;b)$ là giao điểm của AN và BD. Giá trị $2a + b$ bằng:

**A.** 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

**Câu 175.** Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho hình bình hành *ABCD* có phương trình đường chéo *AC* là $5x + y + 4 = 0$. Tọa độ trực tâm tam giác *ABC* là $H(-\frac{23}{7};\frac{15}{7})$. Tọa độ trọng tâm tam giác *ACD* là $G(-\frac{2}{3};4)$. Gọi $x_A, x_B, x_C, x_D$ lần lượt là hoành độ của các điểm *A, B, C,D.*

Tính giá trị biểu thức $T = x_A{}^2 + x_C{}^2 + 2018x_D + x_B$.

**A.** 2024. **B.** 2015. **C.** 2021. **D.** 2019.

**Câu 176.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(3;-1)$, điểm $M$ thuộc cạnh $CD$ sao cho $MC = 2MD$. Tìm tọa độ đỉnh $A$ của hình vuông $ABCD$ biết đường thẳng $AM$ có phương trình $2x - y - 4 = 0$ và đỉnh $A$ có tung độ âm.

**A.** $A(3;-2)$. **B.** $A(3;2)$. **C.** $A\left(-\frac{3}{2};-7\right)$. **D.** $A\left(\frac{3}{5};-\frac{14}{5}\right)$.

**Câu 177.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$ có $M$, $N$ là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$. Biết rằng hai điểm $M$, $D$ thuộc đường thẳng $\Delta: 4x - 3y - 2 = 0$, $N\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$ và $D$ có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{3}$, hãy tính tổng hoành độ và tung độ của điểm $A$.

**A.** $\frac{-22}{25}$ **B.** $\frac{-24}{25}$. **C.** 0. **D.** $\frac{4}{25}$.

**Câu 178.** Cho hình vuông $ABCD$. Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $BC$, $N$ là điểm trên cạnh $CD$ sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng $AN:\ 2x - y - 3 = 0$. Biết tọa độ $A(a;b)$ ( với $b > 0$). Tính $a + b$

**A.** $a + b = 0$. **B.** $a + b = 9$. **C.** $a + b = -1$. **D.** $a + b = 4$

**Câu 179.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho hình thoi $ABCD$ cạnh $AC$ có phương trình là: $x + 7y - 31 = 0$, hai đỉnh $B$, $D$ lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: x + y - 8 = 0$, $d_2: x - 2y + 3 = 0$. Biết rằng diện tích hình thoi bằng 75, đỉnh $A$ có hoành độ âm. Tính tổng hoành độ và tung độ của điểm $C$

**A.** 7 **B.** 10 **C.** 13 **D.** 15

**Câu 180.** Trong mặt phẳng với hệ trục $Oxy$ cho hình chữ nhật $ABCD$ với đường thẳng chứa cạnh $AD$ có phương trình là $d_1: 3x + y - 14 = 0$. Biết điểm $E(0;-6)$ là điểm đối xứng của $C$ qua $AB$. Gọi $M$ là trung điểm của $CD$. Biết $BD \cap ME = I$ với $I(\frac{2}{3};-\frac{4}{3})$. Tính độ dài đoạn thẳng $HD$ với $H(2;-3)$.

**A.** $HD = \sqrt{29}$. **B.** $HD = 5$. **C.** $HD = \sqrt{37}$. **D.** $HD = \sqrt{5}$.

**Dạng 8. Cực trị**

**Câu 181.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho các điểm $A(1;-1)$ và $B(3;4)$. Gọi $(d)$ là một đường thẳng bất kì luôn đi qua **B.** Khi khoảng cách từ A đến đường thẳng $(d)$ đạt giá trị lớn nhất, đường thẳng $(d)$ có phương trình nào dưới đây?

**A.** $x-y+1=0$. **B.** $3x+4y=25$. **C.** $5x-2y-7=0$. **D.** $2x+5y-26=0$.

**Câu 182.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $\Delta: x+(m-1)y+m=0$ ($m$ là tham số bất kì) và điểm $A(5;1)$. Khoảng cách lớn nhất từ điểm $A$ đến $\Delta$ bằng

**A.** $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $4\sqrt{10}$. **D.** $3\sqrt{10}$.

**Câu 183.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho $\Delta: x-y+1=0$ và hai điểm $A(2;1)$, $B(9;6)$. Điểm $M(a;b)$ nằm trên đường $\Delta$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Tính $a+b$.

**A.** $-7$. **B.** $-9$. **C.** 7. **D.** 9.

**Câu 184.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x-4y+15=0$ và điểm $A(2;0)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $d$ để đoạn $AM$ có độ dài nhỏ nhất.

**A.** $M(-15;0)$. **B.** $M(5;5)$. **C.** $M(0;3)$. **D.** $M(1;4)$.

**Câu 185.** Cho 3 điểm $A(-6;3); B(0;-1); C(3;2)$. Tìm $M$ trên đường thẳng $d: 2x-y-3=0$ mà $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất là

**A.** $M\left(\frac{13}{15};\frac{71}{15}\right)$ **B.** $M\left(\frac{13}{15};\frac{19}{15}\right)$ **C.** $M\left(\frac{26}{15};\frac{97}{15}\right)$ **D.** $M\left(\frac{-13}{15};\frac{19}{15}\right)$

**Câu 186.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có đỉnh $A(2;2)$, $B(1;-3)$, $C(-2;2)$. Điểm $M$ thuộc trục tung sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất có tung độ là?

**A.** 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Câu 187.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\Delta: x-y+1=0$ và hai điểm $A(2;1)$, $B(9;6)$. Điểm $M(a;b)$ nằm trên đường $\Delta$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Tính $a+b$ ta được kết quả là:

**A.** -9. **B.** 9. **C.** -7. **D.** 7

**Câu 188.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho điểm $A(6;2)$ và đường thẳng $d: x-y=0$. Gọi $P$ là giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác $ABC$ biết $B$ là điểm thay đổi trên tia $Ox$ và $C$ là điểm thay đổi trên **D.** Tính $P$ ?

**A.** $P=2\sqrt{5}$. **B.** $P=4\sqrt{3}$. **C.** $P=3\sqrt{5}$. **D.** $P=4\sqrt{5}$.

**Câu 189.** Cho $\Delta ABC$ nhọn, có $A(1;7)$, $B(-2;0)$, $C(9;0)$ đường cao $AH$. Xét các hình chữ nhật $MNPQ$ với $M\in AB$; $N\in AC$; $P,Q\in BC$. Điểm $M(a;b)$ thỏa mãn hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất, tính $P=a+b$.

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

**Câu 190.** Cho $\Delta ABC$ nhọn, có $A(1;7)$, $B(-2;0)$, $C(9;0)$ đường cao $AH$. Xét các hình chữ nhật $MNPQ$ với $M\in AB$; $N\in AC$; $P,Q\in BC$, thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất gần với kết quả nào sau đây?

**A.** 10. **B.** 30. **C.** 15. **D.** 19.

**Câu 191.** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy. Đường thẳng (d) đi qua M( 3; -2) cắt Ox, Oy lần lượt tại A(a;0), B(0;b) và $ab \neq 0$ sao cho: $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{4OB^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $S=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ là

**A.** $S=\frac{11}{25}$ **B.** $S=-\frac{11}{7}$ **C.** $S=-\frac{1}{5}$ **D.** $S=-\frac{5}{7}$

**Câu 192.** Cho hình bình $ABCD$ có $A(0;1);B(3;4)$ Tâm $I$ nằm trên parabol có phương trình $y=(x-1)^2$ $0\le x_I\le 3$. khi diện tích hình binh hành $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì tọa độ $C(a,b)$, tọa độ $D(c,d)$, Tính $a+b+c+d$ ?

**A.** $-2$. **B.** $-1$. **C.** $1$. **D.** $0$

**Câu 193.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho điểm $M(2;3)$ và hai đường thẳng $(d_1):3x+2y-6=0$; $(d_2):x-2y+3=0$. Gọi $C$ là giao điểm của $(d_1),(d_2)$. Đường thẳng $(d)$ có phương trình dạng $ax-by+c=0$ (với $a,b,c\in\mathbb{N}$, $(a;b)=1$) đi qua $M$ cắt $(d_1),(d_2)$ lần lượt tại các điểm $A,B$ sao cho $M$ nằm trong đoạn $AB$ và tam giác $ABC$ có diện tích nhỏ nhất. Tính $T=abc$.

**A.** $T=2016$ **B.** $T=1512$ **C.** $T=1800$ **D.** $T=504$

**Câu 194.** Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho các điểm $A(-2;2)$, $B(-4;-3)$, $C(1;-5)$, $D(3;0)$. Lấy $M$, $N$, $P$, $Q$ lần lượt thuộc các cạnh $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MN+NP+PQ+QM$ là :

**A.** $3\sqrt{29}$. **B.** $2\sqrt{58}$. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{140}$.

**Câu 195.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho các đường thẳng $\Delta_1:3x-4y+6=0$, $\Delta_2:3x-4y-9=0$, $\Delta_3:3x-4y+11=0$. Một đường thẳng $d$ thay đổi cắt ba đường thẳng $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ lần lượt tại $A$, $B$, $C$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=AB+\frac{96}{AC^2}$ bằng

**A.** $18$. **B.** $27$. **C.** $9$. **D.** $\frac{49}{9}$.

# Bài 4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH



## PHẦN A. LÝ THUYẾT

## I. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ lần lượt có vectở chỉ phương là $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. Khi đó

a) $\Delta_1$ cắt $\Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ không cùng phương.

b) $\Delta_1$ song song với $\Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc một đường thẳng mà không thuộc đường thẳng còn lại.

c) $\Delta_1$ trùng với $\Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc cả hai đường thẳng đó.

*Chú ý*

- $\Delta_1$ vuông góc với $\Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ vuông góc với nhau.
- Khi xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, có thể dựa vào cặp vectơ pháp tuyến của hai đường thẳng đó.

***Ví dụ 1.*** Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau

a) $\Delta_1 : 2x - y + 1 = 0$ và $\Delta_2 : -x + 2y + 2 = 0$.

b) $\Delta_3 : x - y - 1 = 0$ và $\Delta_4 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

***Giải***

a) Đường thẳng $\Delta_1$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1;2)$, đường thẳng $\Delta_2$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-2;-1)$. Do $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{-1}$ nên $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ không cùng phương, suy ra $\Delta_1$ cắt $\Delta_2$.

b) Đường thẳng $\Delta_3, \Delta_4$ lần lượt có vectơ chỉ phương $\vec{u}_3 = (1;1), \vec{u}_4 = (2;2)$. Suy ra $\vec{u}_4 = 2\vec{u}_3$. Chọn $t = 0$, ta có điểm $M(1;3) \in \Delta_4$. Do $1 - 3 - 1 \neq 0$ nên $M(1;3) \notin \Delta_3$. Vậy $\Delta_3$ song song với $\Delta_4$.

Ta có thể xét vị trí tương đối của hai đường thẳng dựa vào số giao điểm của chúng.

*Nhận xét:* Cho hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ có phương trình lần lượt là $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Khi đó

a) $\Delta_1$ cắt $\Delta_2$ khi và chỉ khi hệ (I) có nghiệm duy nhất.

b) $\Delta_1$ song song với $\Delta_2$ khi và chỉ khi hệ (I) vô nghiệm.

c) $\Delta_1$ trùng với $\Delta_2$ khi và chỉ khi hệ (I) có vô số nghiệm.

***Ví dụ 2.*** Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$\Delta_1 : x - 2y + 1 = 0$ ; $\Delta_2 : 2x - 4y + 2 = 0$.

***Giải***

Tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta_1$ và đường thẳng $\Delta_2$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

Hệ trên có vô số nghiệm.

Như vậy, $\Delta_1$ và $\Delta_2$ có vô số điểm chung, tức là $\Delta_1$ trùng với $\Delta_2$.

## II. Góc giữa hai đường thẳng




Hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ cắt nhau tạo thành bốn góc.

- Nếu hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ không vuông góc với nhau thì góc nhọn trong bốn góc tạo thành được gọi là góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$.
- Nếu hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ vuông góc với nhau thì ta nói góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ bằng $90^\circ$.

Góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ được kí hiệu là $\left(\widehat{\Delta_1,\Delta_2}\right)$ hoặc $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)$.

*Quy ước:* Khi $\Delta_1$ song song hoặc trùng với $\Delta_2$, ta nói góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ bằng $0^\circ$.

*Nhận xét:* Góc giữa hai đường thẳng luôn bé hơn hoặc bằng $90^\circ$, tức là $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)\le 90^\circ$.

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=\left(a_1;b_1\right),\vec{u}_2=\left(a_2;b_2\right)$. Ta có: $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\dfrac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

*Nhận xét*

- $\Delta_1\perp\Delta_2\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$.
- Cho hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1,\vec{n}_2$. Ta cũng có:

$$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|=\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}.$$

***Ví dụ 3.*** Tính số đo góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1:\begin{cases}x=-1+\sqrt{3}t_1\\y=1+t_1\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=-1+\sqrt{3}t_2\\y=4-t_2\end{cases}$

b) $\Delta_1:3x+y-10=0$ và $\Delta_2:-2x+y-7=0$.

***Giải***

a) $\Delta_1$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(\sqrt{3};1)$.

$\Delta_2$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(\sqrt{3};-1)$.

Do đó, ta có: $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\dfrac{\left|\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+1\cdot(-1)\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{2}$. Vậy $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=60^\circ$.

b) $\Delta_1$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(3;1),\Delta_2$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(-2;1)$. Do đó, ta có:

$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}=\dfrac{\left|3\cdot(-2)+1\cdot1\right|}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=45^\circ$.

## III. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình $ax+by+c=0\ \left(a^2+b^2>0\right)$ và điểm $M\left(x_0;y_0\right)$. Khoảng cách từ điểm $M$ đến đường thẳng $\Delta$, kí hiệu là $d(M,\Delta)$, được tính bởi công thức sau:

$$d(M,\Delta)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

*Chú ý:* Nếu $M\in\Delta$ thì $d(M,\Delta)=0$.

***Ví dụ 4.*** Tính khoảng cách từ điểm $M$ đến đường thẳng $\Delta$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $M(-2;1)$ và $\Delta: 2x-3y+5=0$.

b) $M(1;-3)$ và $\Delta: \begin{cases} x=-2+3t \\ y=2-4t \end{cases}$

***Giải***

a) Ta có:

$$d(M,\Delta)=\frac{|2\cdot(-2)-3\cdot 1+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

b) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $N(-2;2)$, có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;3)$. Phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ là

$4(x+2)+3(y-2)=0$ hay $4x+3y+2=0$.

$$\Rightarrow d(M,\Delta)=\frac{|4\cdot 1+3\cdot(-3)+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5}.$$

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

*Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng* $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ *và* $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ *ta xét số nghiệm của hệ phương trình* $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$.

□*Hệ có một nghiệm:* $\Delta_1$ *cắt* $\Delta_2$.

□*Hệ vô nghiệm:* $\Delta_1 \,//\, \Delta_2$.

□*Hệ có vô số nghiệm:* $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

*Đặc biệt: Nếu* $a_2b_2c_2\neq 0$ *thì:*

$$\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2},\ \Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2},\ \Delta_1=\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

*Để tim giao điểm của 2 đường thẳng ta giải hệ phương trình trên.*

*Tìm hình chiếu của điểm A lên đường thẳng d.*

*Cách 1: lập phương trình đường thẳng d' qua A vuông góc với d. Hình chiếu H là giao điểm của d và d'.*

*Cách 2: điểm H thuộc d có tọa độ theo tham số t (hoặc x, hoặc y), cho điều kiện* $AH\perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ *để tìm t.*

*Tìm điểm đối xứng A' của A qua đường thẳng d: tìm hình chiếu H, dùng công thức tọa độ trung điểm để suy ra A'.*

*Tìm đường thẳng d' đối xứng của đường thẳng d qua điểm I cho trước.*

*Cách 1: d' song song hoặc trùng với d nên có cùng VTPT. Lấy điểm A thuộc d rồi tìm điểm B đối xứng qua I thì B thuộc d'.*

*Cách 2: Lấy M(x; y) bất kỳ thuộc d. Gọi M'(x'; y') là điểm đối xứng của M qua I, ta có:*

$x+x'=2x_0,\ y+y'=2y_0 \Rightarrow x=2x_0-x',\ y=2y_0-y'$.

*Thế vào phương trình d thành phương trình d'.*

**Câu 1.** Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của hai đường thẳng:

a) $2x-5y+3=0$ và $5x+2y-3=0$.

b) $x-3y+4=0$ và $0,5x-1,5y+4=0$.

c) $10x+2y-3=0$ và $5x+y-1,5=0$.

**Lời giải.**

a)Ta có $\frac{2}{5}\neq\frac{-5}{2}$ nên hai đường thẳng cắt nhau.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x-5y+3=0\\5x+2y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{9}{29}\\y=\dfrac{21}{29}\end{cases}$.

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại $M\left(\dfrac{9}{29};\dfrac{21}{29}\right)$.

b)Vì $\dfrac{1}{0,5}=\dfrac{-3}{-1,5}\neq\dfrac{4}{4}$ nên hai đường thẳng song song.

c)Vì $\dfrac{10}{5}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{-3}{-1,5}$ nên hai đường thẳng trùng nhau.

**Câu 2.** Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của cặp đường thẳng:

a) $d:\begin{cases}x=-1-5t\\y=2+4t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=-6+5t'\\y=2-4t'\end{cases}$.

b) $d:\begin{cases}x=1-4t\\y=2+2t\end{cases}$ và $d':2x+4y-10=0$.

c) $d:\begin{cases}x=-2+t\\y=2+2t\end{cases}$ và $d':\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-2}$

**Lời giải.**

Ta chuyển các đường thẳng về dạng tổng quát:

a) $d:4x+5y-6=0$ và $d':4x+5y+14=0$..

Ta có $\dfrac{4}{4}=\dfrac{5}{5}\neq\dfrac{-6}{14}$ nên d, d’ song song.

b) $d:x+2y-5=0$ và $d':2x+4y-10=0$.

Ta có $\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{-5}{-10}$ nên d, d’ trùng nhau.

c) $d:x+y-2=0$ và $d':2x+y-3=0$.

Ta có $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{1}{1}$ nên d, d’ cắt nhau.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y-2=0\\2x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ vậy I(1; 1).

**Câu 3.** Biện luận theo tham số m vị trí tương đối của hai đường thẳng:

$mx+y+2=0$ và $x+my+m-1=0$.

**Lời giải.**

Xét hệ $\begin{cases} mx+y+2=0 \\ x+my+m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx+y=-2 \\ x+my=-m+1 \end{cases}$.

Ta lập các định thức:

$D=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}=m^2-1=(m-1)(m+1)$.

$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ m & -m+1 \end{vmatrix}=$ m+1.

$D_y=\begin{vmatrix} m & -2 \\ 1 & -m+1 \end{vmatrix}=-m^2+m+2=-(m+1)(m-2)$.

Vậy nếu $m\neq 1, m\neq -1$ thì $D\neq 0$: hai đường thẳng cắt nhau.

Nếu $m=1$ thì $D=0$, $D_x\neq 0$: hai đường thẳng song song.

Nếu $m=-1$ thì $D=D_x=D_y=0$: hai đường thẳng trùng nhau.

**Câu 4.** Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng sau đây vuông góc $\Delta_1: mx+y+8=0$ và $\Delta_2: x-y+m=0$.

**Lời giải.**

$\Delta_1$ có VTPT là $\overrightarrow{n_1}=(m;1)$.

$\Delta_2$ có VTPT là $\overrightarrow{n_2}=(1;-1)$.

Ta có: $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1$.

**Câu 5.** Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy:

$d_1: 2x+y-4=0$, $d_2: 5x-2y+3=0$ và $d_3: mx+3y-2=0$.

**Lời giải.**

Tọa độ giao điểm của $d_1$ và $d_2$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 5x-2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{9} \\ y=\dfrac{26}{9} \end{cases}$. Vậy $I\left(\dfrac{5}{9};\dfrac{26}{9}\right)$.

Để ba đường thẳng $d_1$, $d_2$, $d_3$ đồng quy ta phải có I thuộc $d_3$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{9}m+\dfrac{26}{3}-2=0 \Leftrightarrow m=-12$.

**Câu 6.** Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=x_2+ct' \\ y=y_2+dt' \end{cases}$ ($x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ là các hằng số). Tìm điều kiện của a, b, c, d để hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$:

a)Cắt nhau.

b)Song song với nhau.

c)Vuông góc với nhau.

**Lời giải.**

$d_1$ đi qua $M_1(x_1;y_1)$ và có VTCP $\vec{u}(a;b)$, $d_2$ đi qua $M_2(x_2,y_2)$ và có VTCP $\vec{v}(c;d)$.

a) $d_1$ cắt $d_2 \Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ không cùng phương $\Leftrightarrow$ ad – bc $\neq 0$.

b) $d_1$ // $d_2 \Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương và $M_1(x_1;y_1)\notin d_2 \Leftrightarrow ad-bc=0$ và $d(x_1-x_2)\neq c(y_1-y_2)$.

c) $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương và $M_1(x_1;y_1) \in d_2 \Leftrightarrow ad - bc = 0$ và $d(x_1 - x_2) = c(y_1 - y_2)$.

d) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow ad + bc = 0$.

**Câu 7.** Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt $M_1(x_1;x_2)$ và $M_2(x_2;y_2)$. Chắng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ song song với d là $Ax_1 + By_1 + C = Ax_2 + By_2 + C \neq 0$.

**Lời giải.**

VTCP của đường thẳng d là: $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

VTPT của đường thẳng $Ax + By + C = 0$ là $\vec{n}(A;B)$.

Vậy để hai đường thẳng song song trước hết cần có $\overrightarrow{M_1M_2}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$.

$\Leftrightarrow Ax_1 + By_1 = Ax_2 + By_2 \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + C = Ax_2 + By_2 + C$.

Mặt khác, điểm $M_1(x_1;y_1)$ không nằm trên $Ax + By + C = 0$ nên $Ax_1 + By_1 + C \neq 0$ (đpcm).

**Câu 8.** Cho hai đường thẳng:

$\Delta_1 : (m+1)x - 2y - m - 1 = 0$; $\Delta_2 : x + (m-1)y - m^2 = 0$.

a)Tìm tọa độ giao điểm của $\Delta_1$ và $\Delta_2$.

b)Tìm điều kiện của m để giao điểm đó nằm trên trục Oy.

**Lời giải.**

a)Ta có:

$$D\begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 + 1.$$

$$D_x = 3m^2 - 1.$$

$$D_y = m^3 + m^2 - m - 1.$$

Vì $D = m^2 + 1 \neq 0$ với mọi m nên $\Delta_1$ và $\Delta_2$ luôn cắt nhau và giao điểm I của chúng có tọa độ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{3m^2 - 1}{m^2 + 1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m^3 + m^2 - m - 1}{m^2 + 1} \end{cases}$$

b) $I \in Oy \Leftrightarrow \dfrac{3m^2 - 1}{m^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**Câu 9.** Cho đường thẳng $\Delta : 3x - y + 1 = 0$ và điểm $I(1;2)$. Tìm phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua điểm I.

**Lời giải.**

Lấy một điểm M nằm trên đường thẳng Δ: $2x - y + 1 = 0$, chẳng hạn M = (0; 1). Điểm M' đối xứng với M qua điểm $I = (1;2)$ có tọa độ $M' = (2;3)$. Đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua I là đường thẳng đi qua điểm M' và song song với Δ, tức là có VTPT $\vec{n} = (2;-1)$. Vậy phương trình của Δ' là: $2(x-2) - (y-3) = 0$ hay $2x - y - 1 = 0$.

**Câu 10.** Cho hai đường thẳng $d_1 : x + y - 1 = 0$ và $d_2 : x - 3y + 3 = 0$. Hãy lập phương trình của đường thẳng $d_3$ đối xứng với $d_1$ qua $d_2$.

**Lời giải.**

Giao điểm $M(x;y)$ của $d_1$ và $d_2$ có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 3y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(0;1)$.

Lấy $A(1;0)$ thuộc $d_1$, phương trình đường thẳng $AH$ vuông góc với $d_2$ là $3(x-1)+1(y-0)=0$ $\Leftrightarrow 3x + y - 3 = 0$.

Tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y - 3 = 0 \\ x - 3y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5}\right) \Rightarrow B\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{12}{5}\right)$

Phương trình đường thẳng MB hay đường thẳng $d_3$ là $(x-0)\left(\dfrac{12}{5}-1\right)-(y-1)\left(\dfrac{1}{5}-0\right)=0 \Leftrightarrow 7x - y + 1 = 0$.

**Câu 11.** Cho đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với đường thẳng Δ:

a)Qua trục hoành.

b)Qua trục tung.

c)Qua gốc tọa độ.

**Lời giải.**

Xét điểm $M(x_M;y_M)$ tùy ý thuộc Δ.

a)Gọi $N(x_N;y_N)$ là điểm đối xứng với M qua Ox.

Khi đó: $\begin{cases} x_N = x_M \\ y_N = -y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_N \\ y_M = -y_N \end{cases}$.

Do đó M $\in \Delta \Leftrightarrow ax_M + by_M + c = 0 \Leftrightarrow ax_N - by_N + c = 0 \Leftrightarrow$ N $\in \Delta_1 \Leftrightarrow ax - by + c = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng với Δ qua Ox là $ax - by + c = 0$.

b)Gọi $P(x_P;y_P)$ là điểm đối xứng với M qua Oy.

Khi đó ta có $\begin{cases} x_P = -x_M \\ y_P = y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = -x_P \\ y_M = y_P \end{cases}$. Do đó M $\in \Delta \Leftrightarrow ax_M + by_M + c = 0 \Leftrightarrow$ $ax_P - by_P - c = 0 \Leftrightarrow$ P $\in \Delta_2 \Leftrightarrow ax - by - c = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng vơi Δ qua Oy là $ax - by - c = 0$.

c)Gọi $Q(x_Q;y_Q)$ là điểm đối xứng với M qua O.

Khi đó ta có $\begin{cases} x_Q = -x_M \\ y_Q = -y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = -x_Q \\ y_M = -y_Q \end{cases}$. Do đó $M \in \Delta \Leftrightarrow$ $ax_M + by_M + c = 0 \Leftrightarrow -ax_Q - by_Q + c = 0 \Leftrightarrow Q \in \Delta_3 \Leftrightarrow ax + by - c = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng với $\Delta$ qua O là $ax + by - c = 0$.

**Câu 12.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $M(-1;2)$ và hai đường thẳng $d_1: x + 2y + 1 = 0$, $d_2: 2x + y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua M và cắt $d_1$ tại A, cắt $d_2$ tại B sao cho $MA = 2MB$.

**Lời giải.**

Ta có $\Delta \cap d_1 = A$ suy ra $A \in d_1$ nên $A(-1-2a;a)$, $\Delta \cap d_2 = B$ suy ra $B \in d_2$ nên $B(b;-2-2b)$.
Suy ra $\overrightarrow{MA} = (-2a;a-2)$ và $\overrightarrow{MB} = (b+1;-2b-4)$.

Do $\Delta$ qua $M$ nên $A, B, M$ thẳng hàng. Hơn nữa $MA = 2MB$, suy ra $\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \end{array}\right.$

□Với $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 2(b+1) \\ a-2 = 2(-2b-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$. Suy ra $A\left(-\dfrac{7}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ và $B\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

Khi đó đường thẳng $\Delta$ qua $M(-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right) = (1;1)$. Làm véc tơ pháp tuyến nên $\Delta$: $x - y + 3 = 0$.

□Với $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = -2(b+1) \\ a-2 = -2(-2b-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$. Suy ra $A(3;-2)$ và $B(-3;4)$.

Khi đó đường thẳng $\Delta$ qua $M(-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (-6;6)$ làm véc tơ pháp tuyến nên $\Delta: x + y - 1 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm $\Delta$: $x - y + 3 = 0$ hoặc $\Delta$: $x + y - 1 = 0$.

**Cách 2.** Gọi $\vec{n} = (a;b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng $\Delta$.
Suy ra $\Delta$: $a(x+1) + b(y-2) = 0$ hay $ax + by + a - 2b = 0$.

Do $\Delta \cap d_1 = A$ nên tọa độ điểm A thỏa mãn hệ $\begin{cases} ax + by + a - 2b = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{2a-5b}{b-2a};\dfrac{2b}{b-2a}\right)$.

Do $\Delta \cap d_2 = B$ nên tọa độ điểm B thỏa mãn hệ $\begin{cases} ax + b + a - 2b = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{4b-a}{a-2b};\dfrac{-4b}{a-2b}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = \left(\dfrac{-4b}{b-2a};\dfrac{4a}{b-2a}\right)$ và $\overrightarrow{MB}\left(\dfrac{2b}{a-2b};\dfrac{-2a}{a-2b}\right)$. Theo giả thiết

$$MA = 2MB \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{-4b}{b-2a}\right)^2 + \left(\frac{4a}{b-2a}\right)^2} = 2\sqrt{\left(\frac{2b}{a-2b}\right)^2 + \left(\frac{-2a}{a-2b}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{b^2+a^2}{(b-2a)^2}} = 4\sqrt{\frac{b^2+a^2}{(a-2b)^2}} \Leftrightarrow (b-2a)^2 = (a-2b)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b-2a = a-2b \\ b-2a = -(a-2b) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b = 0 \\ a+b = 0 \end{array}\right.$$

□Với $a - b = 0$, ta chọn $a = 1$ suy ra $b = 1$. Khi đó $\Delta$: $x + y - 1 = 0$.

□Với $a+b=0$, ta chọn $a=1$ suy ra $b=-1$. Khi đó Δ: $x-y+3=0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm Δ: $x+y-1=0$ hoặc Δ: $x-y+3=0$.

**Câu 13.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;1)$ và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

**Lời giải.**

Gọi $a=2b$, $\Delta \cap \text{Oy} = B(b;0)$ với Δ: $2x+y-8=0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} M \in d \\ S_{\Delta OAB}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1 \\ |ab|=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b+a=8 \\ ab=8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2b+a=-8 \\ ab=-8 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} 2b+a=8 \\ ab=8 \end{cases}$ suy ra Δ: $X+2y-4=0$.

Với $\begin{cases} 2b+a=-8 \\ ab=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4\mp 4\sqrt{2} \\ b=-2\pm 2\sqrt{2} \end{cases}$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \Delta:\left(1-\sqrt{2}\right)x+2\left(+\sqrt{2}\right)y-4=0 \\ \Delta:\left(1+\sqrt{2}\right)x+2\left(1-\sqrt{2}\right)y+4=0 \end{array}\right.$

**Câu 14.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phuong trình đường Δ thẳng song song với đường thẳng d: $2x-y+2015=0$ và cắt hai trục tọa độ tại $M$ và $N$ sao cho $MN=3\sqrt{5}$.

**Lời giải.**

Do Δ qua $M(m;0) \in$ Ox và $N(0;n) \in$ Oy (với m, n $\neq 0$) nên

$\Delta: \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ hay Δ: $nx+my-mn=0$.

Theo giả thiết, Δ song song với d: $2x-y+2015=0$ nên $\frac{n}{2}=\frac{m}{-1} \Leftrightarrow n=-2m$ (*)

Hơn nữa, $MN=3\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{m^2+n^2}=3\sqrt{5}$. Kết hợp với (*), ta được $\sqrt{5m^2}=3\sqrt{5} \Leftrightarrow m=\pm 3$.

Với $m=3$ suy ra $n=-6$. Ta được Δ: $2x-y-6=0$.

Với $m=-3$ suy ra $n=6$. Ta được Δ: $6x-3y+18=0$.

**Câu 15.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(3;2)$ và cắt tia $Ox$ tại $A$, cắt tia $Oy$ tại $B$ sao cho $OA+OB=12$.

**Lời giải.**

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2 \neq 0$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ. Suy ra

Δ: $a(x-3)+b(y-2)=0$ hay $ax+by-3a-2b=0$.

Ta có Δ∩Ox = A nên $A\left(\frac{3a+2b}{a};0\right)$ và Δ∩Oy = B nên $B\left(0;\frac{3a+2b}{b}\right)$.

Theo giả thiết, ta có:

$$OA+OB=12 \Leftrightarrow \left|\frac{3a+2b}{a}\right|+\left|\frac{3a+2b}{b}\right|=12$$

$\Leftrightarrow \frac{3a+2b}{a}+\frac{3a+2b}{b}=12 \Leftrightarrow 3a^2-7ba+2b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ 3a=b \end{array}\right.$

□Với a = 2b, ta chọn b = 1 suy ra a = 2. Ta được Δ: 2x + y – 8 = 0.

□Với 3a = b, ta chọn a = 1 suy ra b = 3. Ta được Δ: x + 3y – 9 = 0.

**Cách 2.** Do Δ đi qua A(a; 0) ∈ Ox và B(0; b) ∈ Oy (với a, b > 0)

nên $\Delta: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ hay Δ: bx + ay – ab = 0.

Theo giả thiết, ta có:

OA + OB = 12 ⇔ a + b = 12 ⇔ b = 12 – a. (*)

Hơn nữa Δ đi qua M(3; 2) nên 3b + 2a – ab = 0. Kết hợp với (*), ta được

$3(12-a)+2a-a(12-a)=0 \Leftrightarrow a^2-13a+36=0 \Leftrightarrow$ a = 9 hoặc a = 4.

□Với a = 4, suy ra b = 12 – a = 8. Ta được Δ: 2x + y – 8 = 0.

□Với a = 9, suy ra b = 12 – a = 3. Ta được Δ: x + 3y – 9 = 0.

**Dạng 2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng**

*Để tính khoảng cách từ điểm* $M(x_0;y_0)$ *đến đường thẳng Δ: ax + by + c = 0 ta dùng công thức:*

$$d\left(M_0,\Delta=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

**Câu 16.** Cho đường thẳng Δ: $5x+3y-5=0$.

a)Tính khoảng cách từ điểm $A(-1;3)$ đến đường thẳng Δ.

b)Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ và Δ': $5x+3y+8=0$.

**Lời giải.**

a)Áp dụng công thức tính khoảng cách ta có:

$$d(A,\Delta)=\frac{|5.(-1)+3.3-5|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{34}}$$

b)Do M(1; 0) ∈ Δ nên ta có $d(\Delta,\Delta')=d(M,\Delta')=\frac{|5.1+3.0+8|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{34}}$

**Câu 17.** Cho ba điểm $A(2;0), B(3;4)$ và $P(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B.

**Lời giải.**

Đường thẳng Δ đi qua P có dạng $a(x-1)+b(y-1)=0 \ \left(a^2+b^2\neq 0\right)$ hay $ax+by-a-b=0$. Δ cách đều A và B khi và chỉ khi:

$$d(A;\Delta)=d(B;\Delta) \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=2a+3b \\ b-a=2a+3b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-4b \\ 3a=-2b \end{array}\right.$$

□Nếu a = –4b, chọn a = 4, b = –1 suy ra Δ: 4x – y – 3 = 0.

□Nếu 3a = –2b, chọn a = 2, b = –3 suy ra Δ: 2x – 3y + 1 = 0.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán là $\Delta_1: 4x-y-3=0$ và $\Delta_2: 2x-3y+1=0$.

**Câu 18.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$ cách điểm $A(1;1)$ một hoảng bằng 2 vá cách điểm $B(2;3)$ một khoảng bằng 4.

**Lời giải.**

Gọi $\Delta$ là đường thẳng cần tìm có dạng $\Delta$: $ax+by+c=0$ với $a^2+b^2\neq 0$.

Vì $\Delta$ cách điểm $A(1;1)$ một khoảng bằng 2 nên

$$d(A,\Delta)=2 \Leftrightarrow \frac{|a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow |a+b+c|=2\sqrt{a^2+b^2}. \quad (1)$$

Vì $\Delta$ cách điểm $B(2;3)$ một khoảng bằng 4 nên

$$d(B,\Delta)=4 \Leftrightarrow \frac{|2a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=4 \Leftrightarrow |2a+3b+c|=4\sqrt{a^2+b^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $|2a+3b+c|=2|a+b+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} c=b \\ 3c=-4a-5b \end{array}\right.$

□Trường hợp $c=b$. Thay vào (1), ta được:

$$|a+2b|=2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 3a^2-4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a=0 \\ 3a-4b=0 \end{array}\right.$$

+ Với $a=0$, ta chọn $b=1$ suy ra $c=b=1$. Khi đó $\Delta$: $y+1=0$.

+ Với $3a-4b=0$, ta chọn $a=4$ suy ra $b=3$ và $c=b=3$. Khi đó $\Delta$: $4x+3y+3=0$.

□Trường hợp $3c=-4a-5b$. Thay vào (1), ta được $|a+2b|=6\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 35a^2-4ba+32b^2=0$. Ta coi đây như là phương trình bậc hai theo a và có $\Delta' = (2b)^2-35.32b^2<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là $\Delta$: $y+1=0$ hoặc $\Delta$: $4x+3y+3=0$.

**Câu 19.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(-2;4), B(3;5)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $I(0;1)$ sao cho khoảng cách từ điểm $A$ đến đường thẳng $\Delta$ gấp hai lần khoảng cách từ $B$ đến $\Delta$.

**Lời giải**

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ là véctơ pháp tuyến của đường thẳng $\Delta$. Suy ra:

$\Delta: a(x-0)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-b=0$.

Vì khoảng cách từ $A$ đến đường thẳng $\Delta$ gấp hai lần khoảng cách từ $B$ đến $\Delta$ nên:

$$d(A;\Delta)=2d(B;\Delta) \Leftrightarrow \frac{|-2a+4b-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2.\frac{|3a+5b-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow |-2a+3b|=2|3a+4b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 8a+5b=0 \\ 3a+11b=0 \end{array}\right.$$

Với $8a+5b=0$, ta chọn $a=5$ suy ra $b=-8$. Khi đó $\Delta: 5x-8y+8=0$.

Với $3a+11b=0$, ta chọn $a=11$ suy ra $b=-3$. Khi đó $\Delta: 11x-3y+3=0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm $\Delta: 5x-8y+8=0$ hoặc $\Delta: 11x-3y+3=0$.

**Câu 20.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng $\Delta$ song song với đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$ và cách $d$ một khoảng bằng 1.

**Lời giải**

Gọi $\Delta$ là đường thẳng cần tìm. Do $\Delta$ song song với đường thẳng $d$ nên có dạng $\Delta: 3x-4y+c=0$.

Vì $\Delta$ cách $d$ một khoảng bằng 1 nên:

$$d(d;\Delta)=1 \Leftrightarrow d(A;\Delta)=1 \Leftrightarrow \frac{|3-4+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1 \Leftrightarrow |c-1|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=6 \\ c=-4 \end{array}\right.$$

Với $c=6$, ta được $\Delta: 3x-4y+6=0$.

Với $c=-4$, ta được $\Delta: 3x-4y-4=0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm $\Delta: 3x-4y+6=0$ hoặc $\Delta: 3x-4y-4=0$.

**Câu 21.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x-\sqrt{3}y-2=0$ và hai điểm phân biệt $A\left(1;\sqrt{3}\right)$, $B$ không thuộc $d$. Viết phương trình đường thẳng $AB$, biết rằng khoảng cách từ $B$ đến giao điểm của đường thẳng $AB$ với $d$ bằng hai lần khoảng cách từ điểm $B$ đến $d$.

**Lời giải**

Gọi $\alpha$ là góc giữa đường thẳng $(AB)$ và đường thẳng $d$. Đường thẳng $d$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_d=\left(1;-\sqrt{3}\right)$.

Gọi $C$ là giao điểm của đường thẳng $(AB)$ với $d$; $H$ là hình chiếu vuông góc của $B$ trên $d$.

Theo giả thiết bài toán:

$BC=2BH$ nên $\sin\alpha=\frac{BH}{BC}=\frac{1}{2}$, suy ra $\alpha=60^0 \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ là véctơ pháp tuyến của đường thẳng $(AB)$. Ta có:

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_d.\vec{n}|}{|\vec{n}_d|.|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|a-\sqrt{3}b|}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |a-\sqrt{3}b|=\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+\sqrt{3}ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a+\sqrt{3}b=0. \end{array}\right.$$

Với $a=0$, ta chọn $b=1$. Khi đó $AB$ có phương trình $y-\sqrt{3}=0$.

Với $a+\sqrt{3}b=0$, ta chọn $a=\sqrt{3}$ suy ra $b=-1$. Khi đó $AB$ có phương trình $\sqrt{3}x-y=0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm: $y-\sqrt{3}=0; \sqrt{3}x-y=0$.

**Dạng 3: Góc giữa hai đường thẳng**

Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1;\Delta_2$ có phương trình $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0,\left(a_1^2+b_1^2\neq 0\right)$, $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0,\left(a_2^2+b_2^2\neq 0\right)$ được xác định bởi công thức $\cos\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

Để xác định góc giữa hai đường thẳng ta chỉ cần biết véctơ chỉ phương (hoặc véctơ pháp tuyến) của chúng: $\cos\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{u}_1;\vec{u}_2\right)\right|=\left|\cos\left(\vec{n}_1;\vec{n}_2\right)\right|$.

**Câu 22.** Xác định góc giữa hai đường thẳng sau: $\Delta_1: 3x-2y+1=0$ và $\Delta_2: \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=7-5t \end{array}\right.\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

**Lời giải**

Ta có $\vec{n}_1(3;-2), \vec{n}_2(5;1)$ lần lượt là véctơ pháp tuyến của các đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2$, suy ra:

$\cos(\Delta_1;\Delta_2) = \dfrac{|3.5-2.1|}{\sqrt{13}.\sqrt{26}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, do đó $(\Delta_1;\Delta_2) = 45^0$.

**Câu 23.** Tìm $m$ để góc hợp bởi hai đường thẳng $\Delta_1 : \sqrt{3}x - y + 7 = 0$ và $\Delta_2 : mx + y + 1 = 0$ một góc bằng $30^0$.

**Lời giải**

Ta có $\cos(\Delta_1;\Delta_2) = \dfrac{|m\sqrt{3}-1|}{\sqrt{3+1}.\sqrt{m^2+1}}$.

Theo giải thiết, góc hợp bởi hai đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2$ bằng $30^0$ nên:

$\cos 30^0 = \dfrac{|m\sqrt{3}-1|}{2\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2+1)} = |m\sqrt{3}-1|$

$\Leftrightarrow 3(m^2+1) = (m\sqrt{3}-1)^2 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $m = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ là giá trị cần tìm.

**Câu 24.** Cho đường thẳng $d : 3x - 2y + 1 = 0$ và $M(1;2)$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua $M$ và tạo với $d$ một góc $45^0$.

**Lời giải**

Đường thẳng $\Delta$ đi qua $M$ có dạng $a(x-1) + b(y-2) = 0, a^2 + b^2 \neq 0$ hay $ax + by - a - 2b = 0$.

Theo bài ra $\Delta$ tạo với $d$ một góc $45^0$ nên:

$\cos 45^0 = \dfrac{|3x + (-2b)|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{|3a-2b|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sqrt{26(a^2+b^2)} = 2|3a-2b|$

$\Leftrightarrow 5a^2 - 24ab - 5b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5b \\ 5a = -b \end{array}\right.$.

Nếu $a = 5b$, chọn $a = 5; b = 1$ ta được $\Delta : 5x + y - 7 = 0$.

Nếu $5a = -b$, chọn $a = 1; b = -5$ ta được $\Delta : x - 5y + 9 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn $x - 5y + 9 = 0; 5x + y - 7 = 0$.

**Câu 25.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d : 2x - y - 2 = 0$ và điểm $I(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ cách điểm $I$ một khoảng bằng $\sqrt{10}$ và tạo với đường thẳng $d$ một góc bằng $45^0$.

**Lời giải**

Giả sử đường thẳng $\Delta$ có phương trình: $ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$.

Đường thẳng $\Delta$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_\Delta = (a;b)$.

Đường thẳng $d$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_d = (2;-1)$.

Vì $\Delta$ tạo với đường thẳng $d$ một góc $45^0$ nên, $\cos(\Delta;d)=\left|\cos(\vec{n}_\Delta;\vec{n}_d)\right| \Leftrightarrow \dfrac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3b \\ b=-3a. \end{array}\right.$

Với $a=3b$, chọn $b=1, a=3$, ta được $\Delta: 3x+y+c=0.$

Mặt khác $d(I;\Delta)=\sqrt{10} \Leftrightarrow \dfrac{|4+c|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=6 \\ c=-14. \end{array}\right.$

Với $b=-3a$, tương tự ta có hai đường thẳng $\Delta: x-3y-8; x-3y+12$.

Vậy các đường thẳng cần tìm là: $\Delta: 3x+y+6=0; 3x+y-14=0; x-3y-8; x-3y+12$

**Câu 26.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $M(0;1)$ và hai đường thẳng $d_1: x-7y+17=0$, $d_2: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M$ và tạo với $d_1, d_2$ một tam giác cân tại giao điểm của $d_1$ và $d_2$.

**Lời giải**

Phương trình đường phân giác góc tạo bởi $d_1$ và $d_2$ là :

$\dfrac{|x-7y+17|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}}=\dfrac{|x+y-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_1: x+3y-13=0 \\ \Delta_2: 3x-y-4=0. \end{array}\right.$

Đường thẳng $\Delta$ cần tìm đi qua $M(0;1)$ và song song với $\Delta_1$ hoặc $\Delta_2$

-Trường hợp $\Delta$ đi qua $M(0;1)$ và song song với $\Delta_1$ thì $\Delta$ có phương trình : $x+3y-3=0.$

-Trường hợp $\Delta$ đi qua $M(0;1)$ và song song với $\Delta_2$ thì $\Delta$ có phương trình : $3x-y+1=0.$

Vậy có hai đường thẳng càn tìm : $x+3y-3=0; 3x-y+1=0.$

**Dạng 4. Tìm điểm thỏa mãn điều kiện cho trước.**

Để xác định tọa độ điểm thuộc đường thẳng ta dựa vào nhận xét sau :

Điểm $A$ thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ (hoặc $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$) có tọa độ dạng $A(x_0+at; y_0+bt)$.

**Câu 27.** Cho đường thẳng $\Delta: 4x-3y+5=0.$

a. Tìm tọa độ điểm $A$ thuộc đường thẳng $\Delta$ và cách gốc tọa độ một khoảng bằng 4.

b. Tìm điểm $B$ thuộc đường thẳng $\Delta$ và cách đều hai điểm $E(5;0), F(3;-2)$.

**Lời giải**

a. Dễ thấy $M(0;-3)$ thuộc đường thẳng $\Delta$ và $\vec{u}(4;3)$ là một véctơ chỉ phương của $\Delta$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x=4t \\ y=-3+4t. \end{cases}$

Điểm $A$ thuộc $\Delta$ nên tọa độ của điểm $A$ có dạng $A(4t;-3+3t)$ suy ra :

$OA=4 \Leftrightarrow \sqrt{(4t)^2+(-3+3t)^2}=4 \Leftrightarrow 25t^2-18t-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{-7}{25}. \end{array}\right.$

Vậy ta tìm được hai điểm là $A_1(4;0)$ và $A_2\left(\dfrac{-28}{25};\dfrac{-96}{25}\right)$.

b. Vì $B\in\Delta$ nên $B(4t;-3+4t)$. Điểm $B$ cách đều hai điểm $E(5;0), F(3;-2)$ suy ra

$EB^2 = FB^2 \Leftrightarrow (4t-5)^2 + (3t-3)^2 = (4t-3)^2 + (3t-1)^2 \Leftrightarrow t = \frac{6}{7}.$

Suy ra $B\left(\frac{24}{7}; -\frac{3}{7}\right).$

**Câu 28.** Cho đường thẳng $d: x-2y+4=0$ và điểm $A(4;1).$

a. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của $A$ lên $d.$

b. Tìm tọa độ điểm $A'$ đối xứng của $A$ qua $d.$

**Lời giải**

a. Phương trình $d'$ đi qua $A$, vuông góc với $d$ có dạng $2x+y+C=0.$

$d'$ qua $A(4;1)$ nên $8+1+C=0 \Rightarrow C=-9.$

Do đó $d': 2x+y-9=0.$

Hình chiếu $H$ là giao điểm của $d$ và $d'$ nên có tọa độ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 2x+y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{14}{5} \\ y=\frac{17}{5}. \end{cases}$

Vậy $H\left(\frac{14}{5}; \frac{17}{5}\right).$

b. $A'$ đối xứng với $A$ qua $d$ khi $H$ là trung điểm của $AA' \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_H \\ y_A + y_{A'} = 2y_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = \frac{8}{5} \\ y_{A'} = \frac{29}{5}. \end{cases}$

Vậy $A'\left(\frac{8}{5}; \frac{29}{5}\right).$

**Câu 29.** Với điều kiện nào thì các điểm $M(x_1, y_1)$ và $N(x_2; y_2)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$?

**Lời giải**

Hai điểm $M$ và $N$ đối xứng với nhau qua $\Delta$ khi và chỉ khi có hai điều kiện :

- Trung điểm $I$ của $MN$ nằm trên $\Delta.$
- Véctơ $\overrightarrow{MN}$ là véctơ pháp tuyến của $\Delta.$

Từ đó ta được các điều kiện sau : $\begin{cases} a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + b\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) + c = 0 \\ b(x_2-x_1) - a(y_2-y_1) = 0. \end{cases}$

**Câu 30.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $d: x-2y+2=0.$ Tìm trên đường thẳng $d$ hai điểm $B, C$ sao cho tam giác $ABC$ vuông ở $B$ và thỏa mãn $AB = 2BC.$

**Lời giải**

Do $B, C \in d$ nên có tọa độ dạng $B(-2+2b; b), C(-2+2c; c)$ với $b \neq c.$

Suy ra $\overrightarrow{AB}(-2+2b; b-2), \overrightarrow{BC}(2c-2b; c-b).$

Tam giác $ABC$ vuông ở $B$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (c-b)(5b-6) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{6}{5}$ (do $b \neq c$). Suy ra $B\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right).$

Tam giác $ABC$ thỏa mãn

$$AB = 2BC \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{25}+\frac{16}{25}} = 2\sqrt{\left(2c-\frac{12}{5}\right)^2+\left(c-\frac{6}{5}\right)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=\frac{7}{5}. \end{array}\right.$$

**Câu 31.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;1), B(4;-3)$ và dr $d: x-2y-1=0$. Tìm tọa độ điểm $C$ thuộc $d$ sao cho khoảng cách từ $C$ đến đường thẳng $AB$ bằng 6.

**Lời giải**

Gọi $C(1+2c;c) \in (d)$.

Phương trình đường thẳng $(AB)$ là : $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow 4x+3y-7=0$.

Theo giả thiết $d(C;AB)=6 \Leftrightarrow \frac{|4(1+c)+3c-7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 6 \Leftrightarrow |11c-3| = 30 \Leftrightarrow c=3$ hoặc $c=-\frac{27}{11}$.

Với $c=3$ ta được $C(7;3)$

Với $c=\frac{-27}{11}$ ta được $C\left(\frac{-43}{11};\frac{-27}{11}\right)$.

**Câu 32.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x-3y-6=0$ và điểm $N(3;4)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $d$ sao cho tam giác $OMN$ có diện tích vằng $\frac{15}{2}$ (với $O$ là gốc tọa độ)

**Lời giải**

$\overrightarrow{ON} = (3;4) \Rightarrow ON = 5$.

Đường thẳng $ON$ có phương trình : $4x-3y=0$.

Gọi $M(3m+6;m) \in (d)$.

Theo giả thiết ta có : $S_{OMN} = \frac{1}{2}ON.d(M;ON) \Leftrightarrow d(M;ON) = \frac{2S_{OMN}}{ON} = 3$

Hay $\frac{|4(3m+6)-3m|}{5} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\frac{-13}{3}. \end{array}\right.$

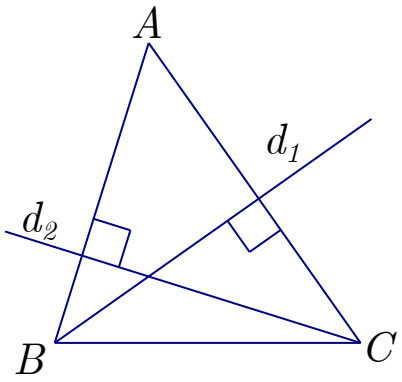
Với $m=-1$ suy ra $M(3;-1)$.

Với $m=-\frac{13}{3}$ suy ra $M\left(-7;-\frac{13}{3}\right)$.

**Dạng 5. Các yếu tố về tam giác.**

**Câu 33.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có tọa độ đỉnh $A(1;0)$ và hai đường thẳng chứa các đường cao kẻ từ $B, C$ có phương trình lần lượt là : $d_1: x-2y+1=0, d_2: 3x+y-1=0$. Tìm tọa độ đỉnh $B$ và $C$.

**Lời giải**




Đường thẳng $AC$ đi qua $A(1;0)$ và vuông góc với $d_1$ nên $AC$ có phương trình $2x+y-2=0$.

Tương tự, $AB$ có phương trình $x-3y-1=0$.

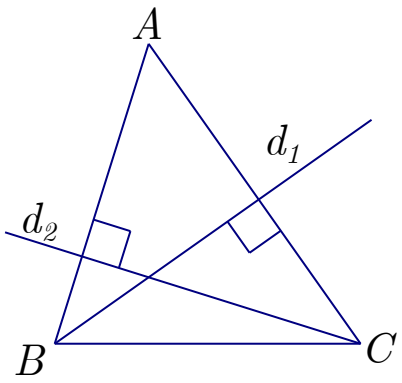
Do $B=d_1\cap AB$ nên tọa độ điểm $B$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-2y+1=0\\x-3y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y=-2\end{cases}$, ta được $B(-5;-2)$

Tương tự $C=d_2\cap AC$, ta được $C(-1;4)$.

Vậy $B(-5;-2),C(-1;4)$.

**Câu 34.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có phương trình cạnh $BC:x+y-9=0$, đường cao qua đỉnh $B$ và $C$ lần lượt có phương trình $d_1:x+2y-13=0;d_2:7x+5y-49=0$. Tìm tọa độ đỉnh $A$.

**Lời giải**




Do $B=d_1\cap BC$ nên tọa độ của $B$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+2y-13=0\\x+y-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$, ta được $B(5;4)$.

Do $C=d_2\cap BC$ nên $C(2;7)$.

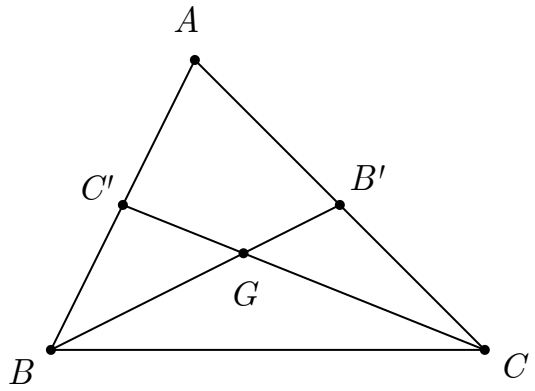
Cạnh $AC$ đi qua $C$ và vuông góc với $d_1$ nên $AC$ có phương trình $2x-y+3=0$.

Cạnh $AB$ đi qua $B$ và vuông góc với $d_2$ nên $AB$ có phương trình $5x-7y+3=0$.

Do $A=AB\cap AC$ nên $A(-2;-1)$.

**Câu 35.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(1;3)$ và hai đường trung tuyến là $BB':x-2y+1=0,CC':y-1=0$. Xác định tọa độ đỉnh $B$ và $C$.

**Lời giải**




Do $B \in BB'$ nên tọa độ của $B$ có dạng $(2b-1;b)$.

Vì $C'$ là trung điểm của $AB$ nên $C'\left(b;\dfrac{b+3}{2}\right)$.

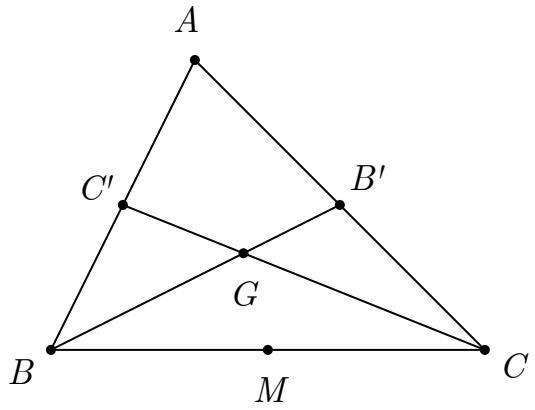
Mặt khác, $C' \in CC'$ nên ta được: $\dfrac{b+3}{2}-1=0 \Leftrightarrow b=-1$ hay $B(-3;-1)$.

Tương tự, $B'$ là trung điểm của $AC$ $B'\left(\dfrac{c+1}{2};2\right)$

Mặt khác $B' \in BB'$ nên $\dfrac{c+1}{2}-2.2+1=0 \Leftrightarrow c=5$ hay $C(5;1)$.

**Câu 36.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với $Oxy$, cho tam giác $ABC$ biết phương trình cạnh $BC: x-2y=5=0$, phương trình đường trung tuyến $BB': y-2=0$ và phương trình đường trung tuyến $CC': 2x-y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

**Lời giải**




Do $B=BB' \cap BC$ nên tọa độ điểm $B$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y-2=0 \\ x-2y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$, ta được $B(-1;2)$.

Tượng tự, $C=CC' \cap BC$, ta được $C(3;4)$.

Gọi $G$ là giao điểm của $BB'$ và $CC'$, khi đó $G(2;2)$.

Gọi $M$ là trung điểm của $BC$, suy ra $M(3;1)$ và $\overrightarrow{GM}=(-1;1)$.

Do $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ nên $A(x;y)$ thỏa mãn:

$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=3.(-1) \\ 3-y=3.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$, ta được $A(4;0)$.

**Câu 37.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(1;5), B(-4;-5)$ và $C(4;-1)$. Viết phương trình đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc $A$.

**Lời giải**

Đường thẳng $AC$ đi qua hai điểm $A, C$ nên $AC$ có phương trình $2x+y-7=0$.

Tương tự $AB: 2x-y+3=0$

Phương trình đường phân giác góc $A$ là: $\frac{|2x+y-7|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{4+1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-5=0 \\ x-1=0 \end{array}\right.$.

Xét phân giác $d_1: y-5=0$. Ta có

$P(B;d_1)=-10, P(C;d_1)=-6$ nên suy ra $B$ và $C$ nằm cùng phía đối với $d_1$, suy ra $d_1$ là phân giác ngoài.

Từ đó suy ra $d_2: x-1=0$ là phân giác trong góc $A$.

**Câu 38.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;-4)$ và hai đường phân giác trong của góc $B$ và $C$ có phương trình lần lượt là $d_1: x+y-2=0, d_2: x-3y-6=0$. Tìm tọa độ điểm $B$ và $C$.

**Lời giải**

Gọi $A_1$ là điểm đối xứng của $A$ qua phân giác $d_1$.

Suy ra tọa độ điểm $A_1(x;y)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{2}-3.\frac{y-4}{2}-6=0 \\ 3(x-2)+1.(y+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}.$$ Ta được $A_1\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Gọi $A_2$ là điểm đối xứng của $A$ qua phân giác $d_2$, tương tự $A_2(6;0)$.

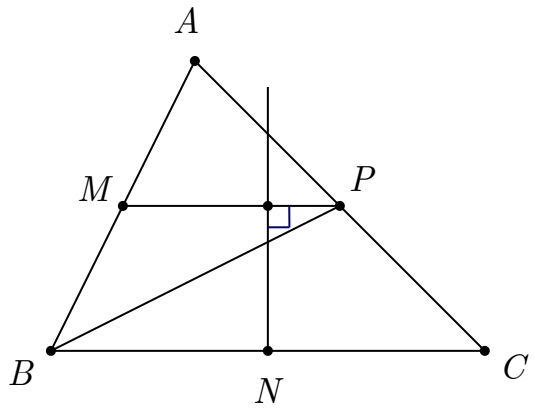
Đường thẳng $BC$ đi qua hai điểm $A_1, A_2$ nên $BC$ có phương trình $x+7y-6=0$.

$B=d_1 \cap BC$ nên tọa độ của $B$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x+7y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$, ta được $B\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Tương tự $C=d_2 \cap BC$ nên ta được $C(6;0)$.

**Câu 39.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ biết trung điểm các cạnh $AB, BC$ và $CA$ lần lượt là : $M(-1;1), N(0;-3)$ và $P(3;-1)$. Viết phương trình đường trung trực của đoạn $BC$.

**Lời giải.**




Ta có $\overrightarrow{MP}=(4;-2)$.

Vì $M,$P là trung diểm của $AB,AC$ nên $MP$ là đường trung bình của tam giác $ABC$, suy ra $MP//BC$

Do đó trung trực đoạn $BC$ qua $N(0;-3)$ và nhận $\overrightarrow{MP}$ làm véctơ pháp tuyến nên có phương trình: $4(x-0)-3(y+3)=0\Leftrightarrow 2x-y-3=0$

**Câu 40.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho tam giác $ABC$ có $A(-2;4),B(4;1)$ và $C(-2;-1)$. Tìm tọa độ trực tâm $H$ của tam giác.

**Lời giải**

Gọi $H(x;y)$ là trực tâm của tam giác $ABC.$

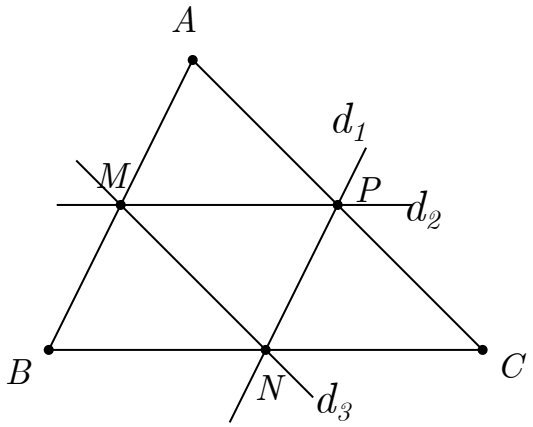
Ta có $\overrightarrow{AH}=(x+2;y-4),\overrightarrow{BC}=(-6;-2),\overrightarrow{BH}=(x-4;y-1),\overrightarrow{AC}=(0;-5).$

Do $H$ là trực tâm nên ta được $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2).(-6)+(y-4).(-2)=0\\ (x-4).0+(y-1).(-5)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}.$

Vậy $H(-1;1).$

**Câu 41.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho tam giác $ABC$ có các đường trung bình nằm trên các đường thẳng có phương trình $d_1:2x-y+1=0,d_2:x+4y-13=0,d_3:x-3y-1=0.$ Viết phương trình cạnh $AB.$

**Lời giải**



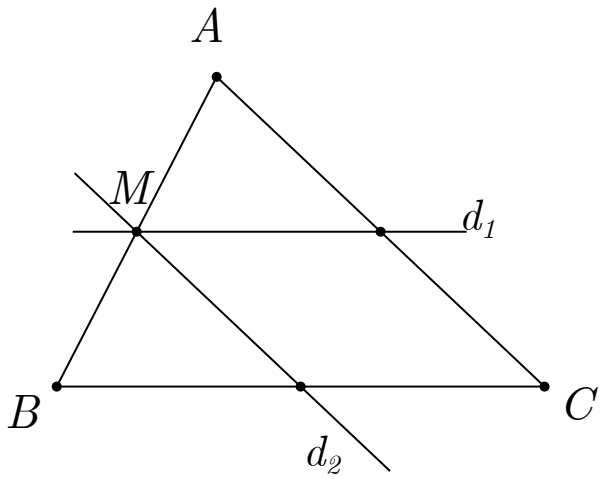

Giả sử $d_1$ song song với $AB$, $d_2$ song song với $BC$, $d_3$ song song với $CA$.

Gọi $M$ là trung điểm của $AB$. Khi đó $M = d_2 \cap d_3$ nên tọa độ $M(x;y)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+4y-13=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$, ta được $M(5;2)$.

Đường thẳng $AB$ đi qua $M$ và song song với $d_1$ nên có phương trình $2x-y-8=0$.

**Câu 42.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có hai đường trung bình kẻ từ trung điểm $M$ của $AB$ nằm trên các đường thẳng có phương trình $d_1 : x-4y+7=0, d_2 : 3x-2y-9=0$ và tọa độ điểm $B(7;1)$. Tìm tọa độ điểm $C$.

**Lời giải**




TH1: Giả sử $d_1$ song song với $BC$, $d_2$ song song với $AC$.

Tọa độ $M(x;y)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x-4y+7=0 \\ 3x-2y-9=0 \end{cases}$, ta được $M(5;3)$.

Đường thẳng $AC$ đi qua $A$ và song song với $d_2$ nên có phương trình: $3x-2y+1=0$.

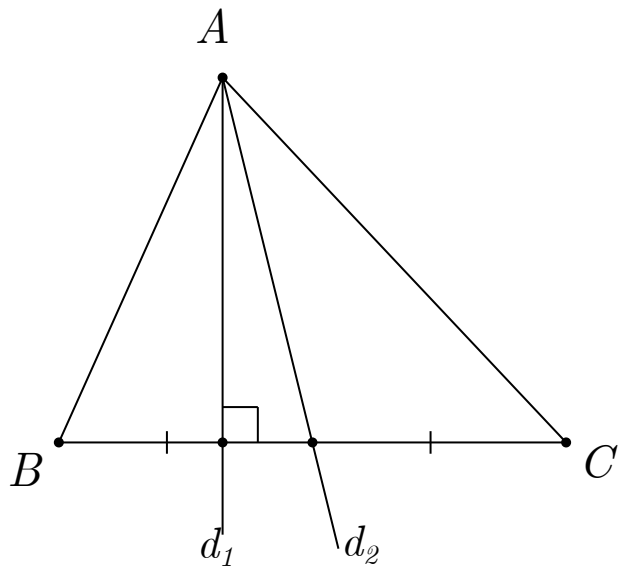
Đường thẳng $BC$ đi qua $B$ và song song với $d_1$ nên có phương trình: $x-4y-3=0$.

Ta có $C = AC \cap BC$ nên tọa độ điểm $C(x;y)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ x-4y-3=0 \end{cases}$, ta được $C(-1;-1)$

TH2: Giả sử $d_1$ song song với $AC$, $d_2$ song song với $BC$. Tương tự TH1 ta được $C(11;7)$.

**Câu 43.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $C(4;-1)$, đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh $A$ có phương trình lần lượt là $d_1: 2x-3y+12=0, d_2: 2x+3y=0$. Tìm tọa độ điểm $B$.

**Lời giải**




Ta có $A=d_1\cap d_2$ nên tọa độ điểm $A(x;y)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases}2x-3y+12=0\\2x+3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$, ta được $A(-3;2)$

Đường thẳng $BC$ đi qua $C$ và vuông góc với $d_1$ nên có phương trình $3x+2y-10=0$.

Gọi $M$ là trung điểm $BC$, suy ra $M=BC\cap d_2$ nên tọa độ điểm $M$ là $(6;-4)$.

Suy ra $B(8;-7)$.

**Câu 44.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;1)$, đường cao qua đỉnh $B$ và đường trung tuyến qua đỉnh $C$ lần lượt có phương trình $d_1: x-3y-7=0, d_2: x+y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh $B$ và $C$.

**Lời giải**

Điểm $B\in d_1$ nên tọa độ của $B$ có dạng $(3b+7;b)$.

Gọi $M$ là trung điểm $AB$, suy ra $M\left(\frac{3b+9}{2};\frac{b+1}{2}\right)$.

Mặt khác, $M\in d_2$ nên $\frac{3b+9}{2}+\frac{b+1}{2}+1=0\Leftrightarrow b=-3$.

Suy ra $B(-2;-3)$.

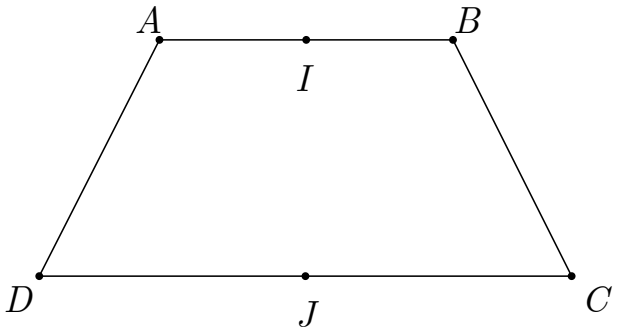
Đường thẳng $AC$ đi qua $A$ và vuông góc $d_1$ nên có phương trình $3x+y-7=0$.

Ta có $C=AC\cap d_2$ nên tọa độ điểm $C$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x+y-7=0\\x+y+1=0\end{cases}$, ta được $C(4;-5)$.

**Dạng 6. Các yếu tố về tứ giác.**

**Câu 45.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(10;5)$, $B(15;-5), D(-20;0)$ là các đỉnh của hình thang cân $ABCD$ trong đó $AB$ song song với $CD$. Tìm tọa độ điểm $C$.

**Lời giải**




Đường thẳng $CD$ đi qua $D(-20;0)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(5;-10)$ làm véctơ chỉ phương nên có phương trình $2x+y+40=0$.

Gọi $I, J$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD$

Ta có $I\left(\frac{25}{2};0\right)$ và $IJ \perp CD$.

Phương trình đường thẳng $IJ$ là $2x-4y-25=0$.

Mà $J=IJ\cap CD$ nên tọa độ điểm $J$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y+40=0\\2x-4y-25=0\end{cases}$, ta được $J\left(\frac{-27}{2};-13\right)$.

Theo tính chất hình thang cân thì $J$ là trung điểm của $CD$, suy ra $C(-7;-26)$.

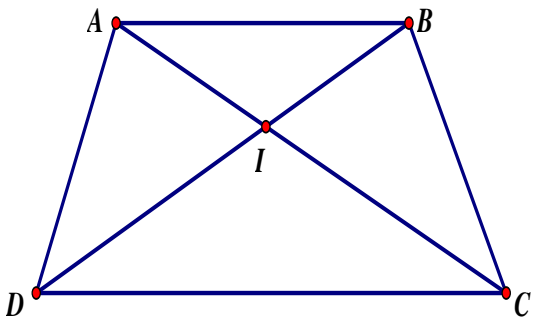
**Câu 46.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình thang cân $ABCD$ với $AB$ song song $CD$ và $AB<CD$. Biết các đỉnh $A(0;2), D(-2;2)$, giao điểm $I$ của hai đường chéo $AC$ và $BD$ nằm trên các đường thẳng $d: x+y-4=0$ sao cho $\widehat{AID}=45^0$. Tìm tọa độ điểm $B$ và $C$.

**Lời giải**

Do $I\in d$ nên $I(t;4-t)$ Ta có $AD=2\sqrt{5}$, $IA=\sqrt{2t^2-4t+4}$, $ID=\sqrt{2t^2-8t+40}$.

Áp dụng định lý hàm số cô-sin cho tam giác $AID$ ta được

$$\cos\widehat{AID}=\frac{IA^2+ID^2-AD^2}{2IA.ID}$$



$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{t^2-3t+6}{\sqrt{t^2-4t+20}.\sqrt{t^2-2t+2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=4 \end{array}\right.$$

Với $t=2$ ta được $I(2;2)$ và $IA=2.ID=4\sqrt{2}$.

Do đó $\overrightarrow{ID}=-\frac{ID}{IB}.\overrightarrow{IB}=-2\sqrt{2}.\overrightarrow{IB}$ suy ra $B\left(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$ và $C\left(2+4\sqrt{2};2+4\sqrt{2}\right)$.

Tương tự với $t=4$ ta tìm được $B\left(4+3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ và $C\left(4+4\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$.

**Câu 47.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình bình hành $ABCD$, biết hai đường chéo $AC$ và $CD$ lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x-3y+9=0$, $d_2: x+3y-3=0$ và phương trình đường thẳng $AB: x-y+9=0$. Tìm tọa độ điểm $C$.

**Lời giải.**

Gọi $I$ là tâm của hình bình hành. Ta có $I=AC\cap BD$ nên tọa độ điểm $I(x;y)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x-3y+9=0 \\ x+3y-3=0 \end{cases} \Rightarrow I(-3;2).$$

Do $A=AB\cap AC$ nên tọa độ điểm $A(x;y)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-y+9=0 \\ x-3y+9=0 \end{cases} \Rightarrow A(-9;0)$

Hình bình hành có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên $I$ là trung điểm $AC$ suy ra $C(3;4)$

**Câu 48.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $d_1: x-y-4=0$, $d_2: 2x+y-2=0$, và hai điểm $A(7;5)$, $B(2;3)$. Tìm điểm trên đường thẳng $d_1$ và điểm trên đường thẳng $d_2$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

**Lời giải.**

Do $C\in d_1$ nên $C(c;c-4)$ và $D\in d_2$ nên $D(d;2-2d)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-5;-2)$, $\overrightarrow{DC}=(c-d;c+2d-6)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} c-d=-5 \\ c+2d-6=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2 \\ d=3 \end{cases}$

Vậy $C(-2;-6), D(3;-4)$

**Câu 49.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình thoi $ABCD$ có $A(0;-1), B(2;1)$ và tâm $I$ thuộc đường thẳng $d: x+y-1=0$. Tìm tọa độ điểm $C$.

**Lời giải.**

Do $I\in d$ nên $I(t;1-t)$. Ta có $\overrightarrow{AI}=(t;2-t)$, $\overrightarrow{BI}=(t-2;-t)$.

Vì $ABCD$ là hình thoi, suy ra $AI \perp BI$ nên $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BI} = 0 \Leftrightarrow t(t-2)+(2-t)(-t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=o \\ t=2 \end{array}\right.$.

Với $t=0$ thì $I(0;1)$. Do là trung điểm của $AC$ nên suy ra $C(0;3)$.

Với $t=2$ thì $I(2;-1)$. Do là trung điểm của $AC$ nên suy ra $C(4;-1)$.

**Câu 50.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình thoi $ABCD$ có phương trình cạnh $AB: x-2y+4=0$, phương trình cạnh $AD: 2x-y+2=0$. Điểm $M(2;2)$ thuộc đường thẳng $BD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi.

**Lời giải.**

Tọa độ đỉnh là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow A(0;2)$.

Phương trình các đường phân giác góc $A$ là $\dfrac{x-2y+4}{\sqrt{5}} = \pm \dfrac{2x-y+2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d_1: x+y-2=0 \\ d_2: x-y+2=0 \end{array}\right.$.

Trường hợp $d_1: x+y-2=0$.

Đường thẳng $BD$ đi qua $M$ và vuông góc với $d_1$ nên có phương trình $x-y=0$.

Do $B = BD \cap AD$ nên tọa độ điểm $B(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases} \Rightarrow B(4;4)$.

Do $I = BD \cap d_1$ nên tọa độ điểm $I(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow I(1;1)$.

Vì $C$ đối xứng với $A$ qua $I$ nên $C(2;0)$.

Trường hợp $d_2: x-y+2=0$. Tương tự như trường hợp 1.

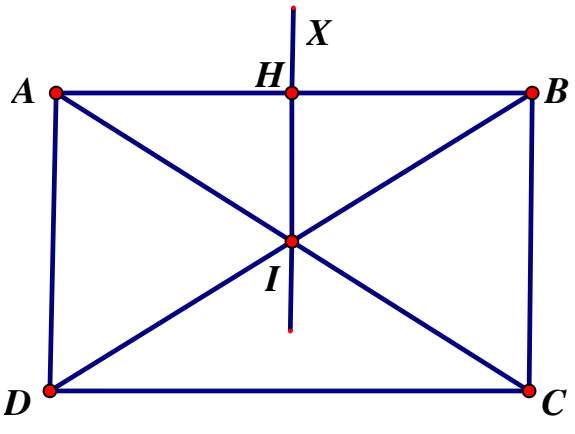
**Câu 51.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

Phương trình đường thẳng $AB: x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết đỉnh $A$ có hoành độ âm.

**Lời giải.**

Khoảng cách từ $I$ đến đường thẳng $AB$ bằng

$$d(I,AB) = \frac{\left|\frac{1}{2}-2.0+2\right|}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$




Gọi $d$ là đường thẳng đi qua $I$ và vuông góc với $AB$

nên $d: 2x+y-1=0$.

Gọi $B$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên $AB$. Khi đó

tọa độ điểm $B$ thỏa mãn hệ

$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow H(0;1)$.

Do $A \in AB$ nên $A(2a-2;a)$ với $a<1$. Từ giả thiết $AB=2AD$, suy ra

$AH=2d(I,AB) \Leftrightarrow \sqrt{(2-2a)^2+(1-a)^2}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |1-a|=1 \Leftrightarrow a=0$ hoặc $a=2$ (loại).

Suy ra $A(-2;0)$, do $H$ là trung điểm $AB$ nên $B(2;2)$.

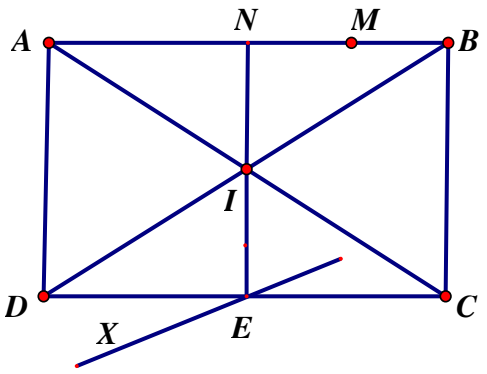
Hơn nữa $I$ là trung điểm $AC$ và $BD$ nên $C(3;0)$, $D(-1;-2)$.

Vậy $A(-2;0), B(2;2), C(3;0), D(-1;-2)$.

**Câu 52.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường thẳng $AC$ và $BD$. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng $AB$ và trung điểm $E$ của cạnh $CD$ thuộc đường thẳng $d: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng $AB$.

**Lời giải.**

Do $E \in d$ nên $E(t;5-t)$. Gọi $N$ là trung điểm $AB$, suy ra $I$ là trung điểm $NE$ nên $N(12-t;t-1)$. Ta có $\overrightarrow{MN}=(11-t;t-6), \overrightarrow{IE}=(t-6;3-t)$. Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên




$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{IE}=0 \Leftrightarrow (11-t)(t-6)(t-6)(3-t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=7 \end{array}\right.$.

* Với $t=6$ suy ra $N(6;5)$. Đường thẳng $AB$ đi qua hai điểm $M$ và $N$ nên có phương trình $AB: y=5$.

* Với $t=7$ suy ra $N(5;6)$. Đường thẳng $AB$ đi qua hai điểm $M$ và $N$ nên có phương trình $AB: x-4y+19=0$.

**Câu 53.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;1)$ và $M(4;2)$ là trung điểm cạnh $BC$. Tìm tọa độ điểm $B$.

**Lời giải.**

Giả sử $\overrightarrow{n_{AB}}=(a;b)$ với $a^2+b^2 \neq 0$ là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng $AB$. Suy ra đường thẳng $BC$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}}=(b;-a)$.

Đường thẳng $AB$ đi qua $A(1;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AB}}=(a;b)$ nên

$AB: a(x-1)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-a-b=0$.

Đường thẳng $BC$ đi qua $M(4;2)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}}=(b;-a)$ nên

$BC: b(x-4)-a(y-2)=0$ hay $bx-ay+2a-4b=0$.

Ta có $AB=d(A,BC)=\dfrac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $BC=2d(M,AB)=2\dfrac{|3a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Vì là hình vuông nên $AB=BC\Leftrightarrow|a-3b|=2|3a+b|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-a\\b=7a\end{array}\right.$.

Với $b=-a$ chọn $a=1$ suy ra $b=-1$. Ta được $AB: x-y=0$ và $BC: x+y-6=0$.

Tọa độ điểm $B$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y=0\\x+y-6=0\end{cases}\Rightarrow B(3;3)$.

Với $b=7a$ chọn $a=1$ suy ra $b=7$. Ta được $AB: x+7y-8=0$ và $BC: 7x-y-26=0$.

Tọa độ điểm $B$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+7y-8=0\\7x-y-26=0\end{cases}\Rightarrow B\left(\dfrac{19}{5};\dfrac{3}{5}\right)$.

**Câu 54.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$ trong đó thuộc đường thẳng $d_1: x+y-1=0$ và $C,D$ nằm trên đường thẳng $d_2: 2x-y+3=0$. Tìm tọa độ điểm $C$, biết hình vuông có diện tích bằng $5$ và có hoành độ dương.

**Lời giải.**

Do $A\in d_1$ nên $A(a;1-a)$ với $a>0$. Theo giả thiết bài toán, ta có

$$S_{ABCD}=5\Leftrightarrow d(A,d_2)=\sqrt{5}\Leftrightarrow\frac{|2a-(1-a)+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow a=1 \text{ hoặc } a=-\frac{7}{3}\ (\text{loại}).$$

Với $a=1$, suy ra $A(1;0)$.

Đường thẳng $AD$ đi qua $A$ và vuông góc với $CD$ nên có phương trình $AD: x+2y-1=0$.

Tọa độ điểm $D$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+2y-1=0\\2x-y+3=0\end{cases}\Rightarrow D(-1;1)$.

Do $C\in d_2$ nên $C(c;2c+3)$. Suy ra $\overrightarrow{CD}=(-1-c;-2-2c)$. Ta có

$$CD=\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{(-1-c)^2+(-2-2c)^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow|-1-c|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=0\\c=2\end{array}\right.$$

Vậy $C(0;3)$ hoặc $C(-2;-1)$.

## Dạng 7: Câu toán cực trị

**Câu 55.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và điểm $A(1;4)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $MA$ nhỏ nhất.

**Lời giải:**

Điểm $M\in d$ nên có tọa độ dạng $M(4-2m;m)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM}=(3-2m;m-4)$, suy ra $AM=\sqrt{(3-2m)^2+(m-4)^2}=\sqrt{5m^2-20m+25}$

Ta có $\sqrt{5m^2-20m+25}=\sqrt{5(m-2)^2+5}\ge\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=2$

Vậy $M(0;2)$ và giá trị nhỏ nhất của $AM$ bằng $\sqrt{5}$

**Câu 56.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;4)$ và $B(3;5)$. Viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $A$ và cách $B$ một khoảng lớn nhất.

**Lời giải:**

Phương pháp đại số: Đường thẳng $d$ đi qua $A(1;4)$ và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ nên có phương trình

$d: a(x-1)+b(y-4)=0$ hoặc $ax+by-a-4b=0$

Khoảng cách từ $B$ đến đường thẳng $d$ được xác định $d(B,d)=\dfrac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

□Nếu $a=0$ thì $d(B,d)=1$

□Nếu $b=0$ thì $d(B,d)=2$

□Khi $a\neq 0$ và $b\neq 0$ ta chọn $b=1$

Suy ra $d(B,d)=\dfrac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=|f(a)|$, với $f(a)=\dfrac{2a+1}{\sqrt{a^2+1}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Shwarz, ta có $(2a+1)^2\le(2^2+1^2)(a^2+1^2)\Rightarrow\dfrac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}\le\sqrt{5}$

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} f(a)=\sqrt{5}$, xảy ra khi $a=2$.

So sánh các trường hợp, ta được $d(B,d)$ lớn nhất khi $a=2$, $b=1$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm $d: 2x+y-6=0$

**Cách 2:** Phương pháp hình học:

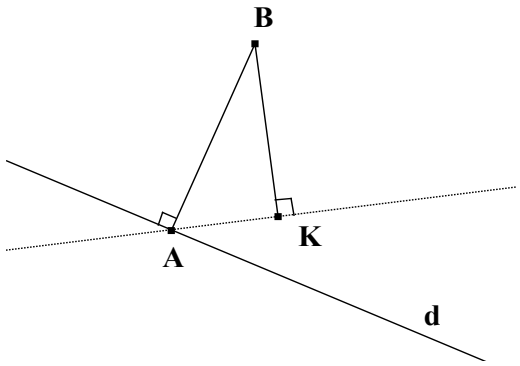
Gọi $K$ là hình chiếu vuông góc của $B$ trên đường thẳng $d$.

Khi đó $d(B,d)=BK$.

Xét tam giác $ABK$ vuông tại $K$, ta có

$d(B,d)=BK\le AB=\sqrt{5}$ (BĐT tam giác mở rộng).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $K\equiv A$.




Khi đó $d$ được xác định là đi qua $A(1;4)$ và vuông góc với $AB$ nên nhận $\overrightarrow{AB}=(2;1)$ làm vecto pháp tuyến.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm $d: 2x+y-6=0$

**Câu 57.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và $A(1;4)$, $B(8;3)$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

**Lời giải:**

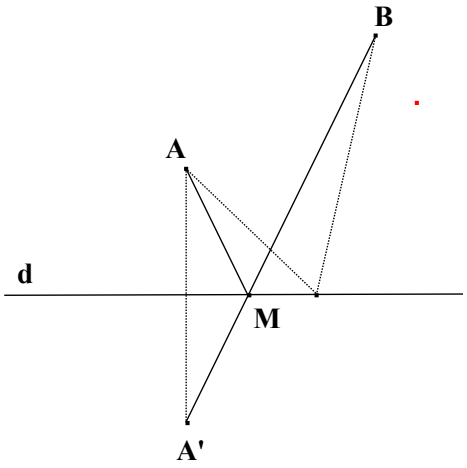
Ta có: $P(A,d).P(B,d)=(x_A+2y_A-4)(x_B+2y_B-4)=5.10>0$

Suy ra hai điểm $A$ và $B$ cùng phía so với đường thẳng $d$.

Gọi $A'$ là điểm đối xứng của $A$ qua $d$.

Khi đó tọa độ điểm $A'(x;y)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 2(x-1)-1(y-4)=0 \\ \dfrac{x+1}{2}+2.\dfrac{y+4}{2}-4=0 \end{cases} \Rightarrow A'(-1;0).$$




Khi đó $MA+MB=MA'+MB\geq A'B=3\sqrt{10}$ (BĐT tam giác mở rộng).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $A'$, $M$, $B$ thẳng hàng hay $M$ thuộc đường thẳng $A'B$.

Đường thẳng $A'B$ đi qua $A'(-1;0)$ và $B(8;3)$ neen có phương trình $A'B: x-3y+1=0$.

Mặt khác, theo giả thiết $M$ thuộc $d$ nên tọa độ điểm $M$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x-3y+1=9 \end{cases} \Rightarrow M(2;1)$

! *Câu toán này dùng cho hai điểm khác phía so với $d$. Nếu đề bài đã cho $A$ và $B$ khác phía với $d$ thì ta không làm bước lấy đối xứng.*

**Câu 58.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(8;3)$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho tam giác $ABM$ có chu vi nhỏ nhất.

**Lời giải:**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(7;-1)$; suy ra $AB=\sqrt{50}$. Chu vi tam giác $ABM$ là:

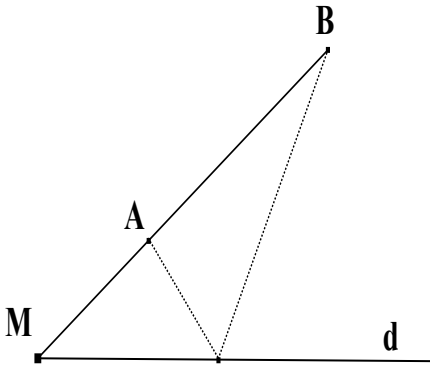
$C_{\Delta ABM}=MA+MB+AB=MA+MB+\sqrt{50}$

Để $C_{\Delta ABM}$ nhỏ nhất khi $MA+MB$ nhỏ nhất. Bạn đọc làm tương tự như bài trên.

**Câu 59.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(3;2)$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất.

**Lời giải:**

Ta có




$P(A,d).P(B,d)=(x_A+2y_A-4)(x_B+2y_B-4)=5.3>0$

Suy ra hai điểm $A$ và $B$ cùng phía so với đường thẳng $d$.

Theo bất đẳng thức tam giác mở rộng, ta có

$|MA-MB|\leq AB=2\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A$, $M$, $B$ thẳng hàng hay $M$ thuộc đường thẳng $AB$.

Đường thẳng $AB$ đi qua $A(1;4)$ và $B(3;2)$ nên có phương trình $AB: x+y-5=0$.

Mặt khác, theo giả thiết $M$ thuộc $d$ nên tọa độ điểm $M$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow M(6;-1).$$

! *Câu toán này dùng cho hai điểm cùng phía so với $d$. Nếu đề bài đã cho $A$ và $B$ khác phía với $d$ thì ta lấy đối xứng một trong hai điểm $A$ hoặc $B$ qua $d$.*

**Câu 60.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(9;0)$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

**Lời giải:**

Điểm $M \in d$ nên có tọa độ dạng $M(4-2m;m)$

Ta có $\overrightarrow{MA}=(2m-3;4-m)$ ; $\overrightarrow{MB}=(2m+5;-m)$, suy ra $3.\overrightarrow{MB}=(6m+15;-3m)$

Do đó $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=(8m+12;4-4m)$. Ta có

$\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{(8m+12)^2+(4-4m)^2}=\sqrt{80m^2+160m+160}=4\sqrt{5}\sqrt{m^2+2m+2}$

$=4\sqrt{5}.\sqrt{(m+1)^2+1}\geq 4\sqrt{5}.\sqrt{1}=4\sqrt{5}$.

**Câu 61.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B\left(8;\frac{1}{2}\right)$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $5MA^2+2MB^2$ nhỏ nhất.

**Lời giải**

Điểm $M \in d$ nên có tọa độ dạng $M(4-2m;m)$

Ta có $\overrightarrow{MA}=(2m-3;4-m)$, suy ra $5MA^2=5\left[(2m-3)^2+(4-m)^2\right]$;

$\overrightarrow{MB}=\left(2m+4;\frac{1}{2}-m\right)$, suy ra $2MB^2=2\left[(2m+4)^2+\left(\frac{1}{2}-m\right)^2\right]$.

Do đó $5MA^2+2MB^2=35m^2-70m+\frac{315}{2}=35(m-1)^2+\frac{245}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=1$.

Vậy $M(2;1)$ và $5MA^2+2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{245}{2}$.

**Câu 62.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x-2y-2=0$ và hai điểm $A(3;4)$, $B(-1;2)$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $MA^2-2MB^2$ lớn nhất.

**Lời giải:**

Điểm $M \in d$ nên có tọa độ dạng $M(2m+2;m)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(1-2m;4-m)$, suy ra $MA^2=(1-2m)^2+(4-m)^2$;

$\overrightarrow{MB}=(-3-2m;2-m)$, suy ra $2MB^2=2\left[(-3-2m)^2+(2-m)^2\right]$.

Do đó: $MA^2-2MB^2=-5m^2-28m-9=-5\left(m+\frac{14}{5}\right)^2+\frac{151}{5}\leq\frac{151}{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=-\frac{14}{5}$.

Vậy $M\left(-\frac{18}{5};-\frac{14}{5}\right)$ và $MA^2-2MB^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{151}{5}$.

**Câu 63.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm $B$ thuộc $Ox$ có hoành độ không âm và điểm $C$ thuộc $Oy$ có tung độ không âm sao cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Tìm tọa

độ điểm $B$ và $C$ sao cho diện tích tam giác $ABC$.

a)Lớn nhất

b) Nhỏ nhất.

**Lời giải**

Gọi $B(b;0)$, $C(0;c)$ với điều kiện $b^2+c^2\neq 0$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=(b-2;1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;c-1)$. Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(b-2).2+1.(c-1)=0\Leftrightarrow 2b+c-5=0$ $(*)$. Từ $(*)$ suy ra $b=\dfrac{5-c}{2}$, do $c\geq 0$ nên $b\leq\dfrac{5}{2}$. Vậy $0\leq b\leq\dfrac{5}{2}$. Ta có:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}.\sqrt{(b-2)^2+1}.\sqrt{4+(c-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2+1}.\sqrt{4+4(b-2)^2}=(b-2)^2+1.$$

a) Khảo sát hàm số bậc hai $f(b)=(b-2)^2+1$ trên $\left[0;\dfrac{5}{2}\right]$, ta tìm được $\max\limits_{\left[0;\frac{5}{2}\right]}f(b)=f(0)=5$.

Với $b=0$, suy ra $c=5$. Vậy $B(0;0)$, $C(0;5)$ và diện tích tam giác $ABC$ đạt giá trị lớn nhất bằng $5$.

b) Ta có $S_{\Delta ABC}=(b-2)^2+1\geq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b=2$, suy ra $c=1$. Vậy $B(2;0)$, $C(0;1)$ và diện tích tam giác $ABC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $1$.

**Câu 64.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng đi qua $M(3;2)$ cắt tia $Ox$ tại $A$ và tia $Oy$ tại $B$ sao cho diện tích tam giác $OAB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

Đường thẳng $d$ đi qua $M(3;2)$ và cắt các tia $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ khác $O$, nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a>0$, $b>0$. Do đó phương trình của $d$ có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Đường thẳng $d$ đi qua $M(3;2)$ nên $\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}=1$. Ta có $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}|a|.|b|=\dfrac{1}{2}ab$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta được $1=\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{6}{ab}}=2\sqrt{\dfrac{3}{S_{\Delta OAB}}}$, suy ra $S_{\Delta OAB}\geq 12$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{3}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=4\end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=1$.

**Câu 65.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $M(4;1)$ và cắt chiều dương các trục $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ sao cho $OA+OB$ nhỏ nhất.

**Lời giải**

**Cách 1.** Giả sử đường thẳng $d$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ nên có phương trình $d:\ a(x-4)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-4a-b=0$. Khi đó $d\cap Ox=A\left(\dfrac{4a+b}{a};0\right)$ và $d\cap Oy=B\left(0;\dfrac{4a+b}{b}\right)$.

Điều kiện: $\dfrac{4a+b}{a}>0$; $\dfrac{4a+b}{b}>0$.

Ta có

$$OA+OB=\left|\frac{4a+b}{a}\right|+\left|\frac{4a+b}{b}\right|=\frac{4a+b}{a}+\frac{4a+b}{b}=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\ge 5+2\sqrt{\frac{b}{a}.\frac{4a}{b}}=9.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}\Leftrightarrow b^2=4a^2$. Ta chọn $a=1$, suy ra $b=2$. Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\ x+2y-6=0$.

**Cách 2.** Đường thẳng $d$ đi qua $M(4;1)$ và cắt các chiều dương $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a>0$, $b>0$. Do đó phương trình của $d$ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Đường thẳng $d$ đi qua $M(4;1)$ nên $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1$. Ta có $OA+OB=|a|+|b|=a+b$.

Áp dụng BDT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\sqrt{\frac{4}{a}}.\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{b}}.\sqrt{b}\right)^2\le\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=a+b\ (\text{do }\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1).$$

Suy ra $a+b\ge 9$ hay $OA+OB\ge 9$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{\frac{4}{a}}:\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{b}}:\sqrt{b}\\ \frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\ b=3\end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\ \frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$.

**Câu 66.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $M(3;1)$ và cắt chiều dương các trục $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ sao cho $12OA+9OB$ nhỏ nhất.

**Lời giải**

**Cách 1.** Giả sử đường thẳng $d$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\ne 0$ nên có phương trình $d:\ a(x-3)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-3a-b=0$.

Khi đó $d\cap Ox=A\left(\frac{3a+b}{a};0\right)$ và $d\cap Oy=B\left(0;\frac{3a+b}{b}\right)$.

Điều kiện $\frac{3a+b}{a}>0$; $\frac{3a+b}{b}>0$.

Ta có

$$12OA+9OB=12\left|\frac{3a+b}{a}\right|+9\left|\frac{3a+b}{b}\right|=12.\frac{3a+b}{a}+9.\frac{3a+b}{b}=45+\frac{12b}{a}+\frac{27a}{b}$$

$$\ge 45+2\sqrt{\frac{12b}{a}.\frac{27a}{b}}=81$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{12b}{a}=\frac{27a}{b}\Leftrightarrow 4b^2=9a^2$. Ta chọn $a=2$, suy ra $b=3$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\ 2x+3y-9=0$.

**Cách 2.** Đường thẳng $d$ đi qua $M(3;1)$ và cắt chiều dương các trục $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a>0$, $b>0$. Do đó phương trình của $d$ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Đường thẳng $d$ đi qua $M(3;1)$ nên $\frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1$.

Ta có: $12OA+9OB=12|a|+9|b|=12a+9b$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}.\sqrt{12a}+\frac{1}{\sqrt{b}}.3\sqrt{b}\right)^2\le\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)(12a+9b)=12a+9b.$$

Suy ra: $12a+9b\ge 81$ hay $12OA+9OB\ge 81$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}:\sqrt{12a}=\dfrac{1}{\sqrt{b}}:3\sqrt{b}\\ \dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{9}{2}\\ b=3\end{cases}.$$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\dfrac{2x}{9}+\dfrac{y}{3}=1$.

**Câu 67.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $M(-4;3)$ và cắt các trục $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ khác $O$ sao cho $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

**Lời giải**

**Cách 1.** Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $O$ trên đường thẳng $d$. Tam giác $OAB$ vuông tại nên

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{OH^2}\ge\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{25}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv M$. Khi đó đường thẳng $d$ đi qua $M(-4;3)$ và vuông góc với $OM$ nên nhận $\overrightarrow{OM}=(-4;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Vậy phương trình đường thẳng $d$: $4x-3y+25=0$.

**Cách 2.** Đường thẳng $d$ đi qua $M(-4;3)$ và cắt các trục $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ khác $O$ nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a\ne 0$, $b\ne 0$. Do đó phương trình của $d$ có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Đường thẳng $d$ đi qua $M(-4;3)$ nên $\dfrac{-4}{a}+\dfrac{3}{b}=1$. Ta có $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\frac{-4}{a}+\frac{3}{b}\right)^2\le\left[(-4)^2+3^2\right]\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

Suy ra $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge\dfrac{1}{25}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}-4:\dfrac{1}{a}=3:\dfrac{1}{b}\\ \dfrac{-4}{a}+\dfrac{3}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{25}{4}\\ b=\dfrac{25}{3}\end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\dfrac{-4x}{25}+\dfrac{3y}{25}=1$.

**Cách 3.** Giả sử đường thẳng $d$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\ne 0$ nên có phương trình $d:a(x+4)+b(y-3)=0$ hay $ax+by+4a-3b=0$.

Khi đó $d\cap Ox=A\left(\dfrac{3b-4a}{a};0\right)$ và $d\cap Oy=B\left(0;\dfrac{3b-4a}{b}\right)$. Ta có:

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2}{(3b-4a)^2}+\frac{b^2}{(3b-4a)^2}=\frac{a^2+b^2}{(3b-4a)^2}\geq\frac{a^2+b^2}{(3^2+4^2)(b^2+a^2)}=\frac{1}{25}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3}{b}=\frac{-4}{a}\Leftrightarrow 3a=-4b$. Chọn $a=4$, suy ra $b=-3$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\ 4x-3y+25=0$.

**Câu 68.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $M(2;-1)$ và cắt các trục $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ khác $O$ sao cho $\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}$ nhỏ nhất.

**Lời giải**

**Cách 1.** Đường thẳng $d$ đi qua $M(2;-1)$ và cắt các trục $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ khác $O$ nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a\neq 0$, $b\neq 0$. Do đó phương trình của $d$ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Đường thẳng $d$ đi qua $M(2;-1)$ nên $\frac{2}{a}-\frac{1}{b}=1$. Ta có $\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}=\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=\left(\frac{2}{3}.\frac{3}{a}-\frac{1}{2}.\frac{2}{b}\right)^2\leq\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}\right).$$

Suy ra $\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}=\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}\geq\frac{36}{25}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{2}{3}:\frac{3}{a}=-\frac{1}{2}:\frac{2}{b}\\ \frac{2}{a}-\frac{1}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{25}{8}\\ b=-\frac{25}{9}\end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\ \frac{8x}{25}-\frac{9y}{25}=1$.

**Cách 2.** Giả sử đường thẳng $d$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ nên có phương trình $d:\ a(x-4)+b(y+1)=0$ hay $ax+by-2a+b=0$.

Khi đó $d\cap Ox=A\left(\frac{2a-b}{a};0\right)$ và $d\cap Oy=B\left(0;\frac{2a-b}{b}\right)$. Ta có:

$$\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}=\frac{9a^2}{(2a-b)^2}+\frac{4b^2}{(2a-b)^2}=\frac{9a^2+4b^2}{(2a-b)^2}=\frac{9a^2+4b^2}{\left(\frac{2}{3}.3a-\frac{1}{2}.2b\right)^2}\geq\frac{9a^2+4b^2}{\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\right)(9a^2+4b^2)}=\frac{36}{25}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2}{3}:3a=-\frac{1}{2}:2b$. Chọn $a=8$, suy ra $b=-9$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\ 8x-9y-25=0$.

**Câu 69.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $M(0;2)$ và hai đường $d_1:\ 3x+y+2=0$, $d_2:\ x-3y+4=0$. Gọi $A$ là giao điểm của $d_1$ và $d_2$. Viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $M$ và cắt hai đường thẳng $d_1$, $d_2$ lần lượt tại $B$, $C$ ($B$ và $C$ khác $A$) sao cho $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

Tọa độ giao điểm $A$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x+y+2=0\\x-3y+4=0\end{cases}\Rightarrow A(-1;1)$.

Đường thẳng $d_1$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(3;1)$; Đường thẳng $d_2$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(1;-3)$.

Ta có $\vec{n}_1.\vec{n}_2=0$. Suy ra $d_1\perp \mathrm{d}_2$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên đường thẳng $d$. Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ nên

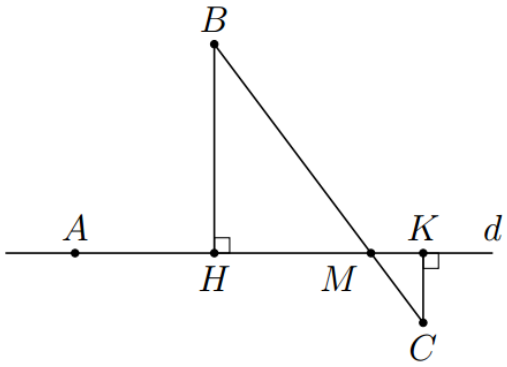
$\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{AH^2}\geq\frac{1}{AM^2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv M$. Khi đó đường thẳng $d$ đi qua $M(0;2)$ và vuông góc với $\overrightarrow{AM}$ nên nhận $\overrightarrow{AM}=(1;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Vậy phương trình đường thẳng $d: x+y-2=0$.

**Câu 70.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$ và $C(7;10)$. Viết phương trình đường thẳng $d$ qua $A$ sao cho tổng khoảng cách từ $B$ và $C$ đến $d$ là lớn nhất.

**Lời giải**

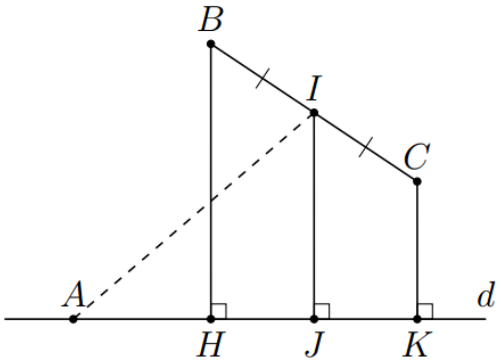
**Trường hợp 1.**




Giả sử $d$ cắt $BC$ tại $M$. Gọi $H$, $K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $B$ và $C$ trên $d$. Ta có $d(B,d)+d(C,d)=BH+CK\leq BM+CM=BC$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $d$ vuông góc với $BC$.

**Trường hợp 2.**




Giả sử $d$ không cắt $BC$. Gọi $I$ là trung điểm $BC$. Gọi $H$, $I$, $J$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $B$, $C$ và $I$ trên $d$. Ta có $d(B,d)+d(C,d)=BH+CK=2IJ\leq 2AI$.

Dấu "=" xảy ra khi $d$ vuông góc với $AI$. Bây giờ ta so sánh $BC$ và $2AI$. Vì $I$ là trung điểm $BC$ nên $I(5;6)$. Ta có $2AI=2\sqrt{41}>BC=4\sqrt{5}$. Vậy đường thẳng $d$ cần tìm qua $A(1;1)$ và nhận $\overrightarrow{AI}=(4;5)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên $d:\ 4x+5y-9=0$.

***Chú ý:*** Nếu $BC > 2AI$ thì đường thẳng $d$ cần tìm qua $A$, có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{BC}$.

**Câu 71.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ có phương trình cạnh $AB$: $x+2y-2=0$, phương trình cạnh $AC$: $2x+y+1=0$, điểm $M(1;2)$ thuộc đoạn $BC$. Tìm tọa độ điểm $D$ sao cho $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

Đường thẳng $AB$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(1;2)$; Đường thẳng $AC$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{AC}=(2;1)$. Giả sử đường thẳng $BC$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{BC}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$. Do đó $BC$: $a(x-1)+b(y-2)=0$ hay $ax+by-a-2b=0$.

Tam giác $ABC$ cân tại $A$ nên

$\cos\widehat{ABC}=\cos\widehat{ACB} \Leftrightarrow |\cos(\vec{n}_{AB},\vec{n}_{BC})|=|\cos(\vec{n}_{AC},\vec{n}_{BC})|$

$\Leftrightarrow \dfrac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}}=\dfrac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=b \end{array}\right.$

• Với $a=-b$, chọn $b=-1$ suy ra $a=1$. Ta được $BC$: $x-y+1=0$.

Tọa độ điểm $B$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow B(0;1)$.

Tọa độ điểm $C$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MB}=(-1;-1)$, $\overrightarrow{MC}=\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{5}{3}\right)$. Suy ra $M$ không thuộc đoạn $BC$.

• Với $a=b$, chọn $a=1$ suy ra $b=1$. Ta được $BC$: $x+y-3=0$.

Tọa độ điểm $B$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow B(4;-1)$

Tọa độ điểm $C$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow C(-4;7)$.

Ta có $\overrightarrow{MB}=(3;-3)$, $\overrightarrow{MC}=(-5;5)$. Suy ra $M$ thuộc đoạn $BC$.

Gọi trung điểm của $BC$ là $I(0;3)$. Ta có

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IC})=DI^2-\dfrac{BC^2}{4}\geq -\dfrac{BC^2}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $D\equiv I$. Vậy $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ nhỏ nhất khi $D(0;3)$.

**Câu 72.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(0;1)$, $B(2;-1)$ và hai đường thẳng có phương trình $d_1$: $(m-1)x+(m-2)y+2-m=0$, $d_2$: $(2-m)x+(m-1)y+3m-5=0$. Chứng minh $d_1$ và $d_2$ luôn cắt nhau tại $P$. Tìm $m$ sao cho $PA+PB$ lớn nhất.

**Lời giải**

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x+(m-2)y=m-2 \\ (2-m)x+(m-1)y=-3m+5 \end{cases}$.

Ta có $D=\begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ 2-m & m-1 \end{vmatrix}=2\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy $d_1$ và $d_2$ luôn cắt nhau.

Ta có $A(0;1)\in d_1$, $B(2;-1)\in d_2$ và $d_1\perp d_2$. Suy ra tam giác $APB$ vuông tại $P$ nên $P$ nằm trên đường tròn đường kính $AB$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có $(PA+PB)^2\le(1^2+1^2)(PA^2+PB^2)=2AB^2=16$. Suy ra $PA+PB\le 4$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $PA=PB$.

Với $PA=PB$ suy ra $P$ là trung điểm của cung $AB$ trong đường tròn đường kính $AB$. Đường tròn đường kính $AB$ có phương trình $(C)$: $(x-1)^2+y^2=2$. Gọi $\Delta$ là trung trực của đoạn $AB$, suy ra $\Delta$ qua tâm $I(1;0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(2;-2)$ nên có phương trình $\Delta$: $x-y-1=0$.

Khi đó tọa độ điểm $P$ thỏa mãn hệ $\begin{cases}x-y-1=0\\(x-1)^2+y^2=2\end{cases}\Rightarrow P(2;1)$ hoặc $P(0;-1)$.

Với $P(2;1)$, thay vào $d_1$ ta được $m=1$; Với $P(0;-1)$, thay vào $d_1$ ta được $m=2$.

Vậy $PA+PB$ lớn nhất khi $m=1$ hoặc $m=2$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

**Câu 1.** Có bao nhiêu cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng sau?

$(d_1):y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x-2$; $(d_2):y=-\frac{1}{2}x+3$; $(d_3):y=\frac{1}{2}x+3$; $(d_4):y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-2$

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn D**

Hai đường thẳng $y=a_1x+b_1$ và $y=a_2x+b_2$ song song với nhau khi và chỉ khi $\begin{cases}a_1=a_2\\b_1\ne b_2\end{cases}$.

Trong các đường thẳng trên không có đường nào thỏa mãn. Vậy không có cặp đường thẳng nào song song.

**Câu 2.** Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng **không** song song với đường thẳng $d:y=3x-2$

**A.** $-3x+y=0$. **B.** $3x-y-6=0$.

**C.** $3x-y+6=0$. **D.** $3x+y-6=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$d:y=3x-2\Leftrightarrow 3x-y-2=0$. $(d)$ có VTPT $\vec{n}=(3;-1)$.

Đường thẳng $3x+y-6=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(3;1)\ne k\vec{n}$ nên $\vec{n}$ và $\overrightarrow{n_1}$ không cùng phương. Do đó đường thẳng $3x+y-6=0$ không song song với đường thẳng $(d)$.

**Câu 3.** Trong mặt phẳng $Oxy$, đường thẳng $d:x-2y-1=0$ song song với đường thẳng có phương trình nào sau đây?

**A.** $x+2y+1=0$. **B.** $2x-y=0$. **C.** $-x+2y+1=0$. **D.** $-2x+4y-1=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta kiểm tra lần lượt các đường thẳng

.+) Với $d_1: x+2y+1=0$ có $\frac{1}{1}\neq\frac{2}{-2}\Rightarrow d$ cắt $d_1$.

.+) Với $d_2: 2x-y=0$ có $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{-2}\Rightarrow d$ cắt $d_2$.

.+) Với $d_3: -x+2y+1=0$ có $\frac{-1}{1}=\frac{2}{-2}\neq\frac{1}{-1}\Rightarrow d$ trùng $d_3$.

.+) Với $d_4: -2x+4y-1=0$ có $\frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}\neq\frac{-1}{-1}\Rightarrow d$ song song $d_4$.

**Câu 4.** Cho các đường thẳng sau.

$$d_1: y=\frac{3}{\sqrt{3}}x-2 \quad d_2: y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+1 \quad d_3: y=-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x+2 \quad d_4: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$$

Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

**A.** $d_2, d_3, d_4$ song song với nhau. **B.** $d_2$ và $d_4$ song song với nhau.

**C.** $d_1$ và $d_4$ vuông góc với nhau. **D.** $d_2$ và $d_3$ song song với nhau.

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì $d_3: y=-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x+2=\frac{1}{\sqrt{3}}x+1\Rightarrow d_3\equiv d_2$. Đường thẳng $d_2$ và $d_4$ có hệ số góc bằng nhau;hệ số tự do khác nhau nên chúng song song.

**Câu 5.** Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để đường thẳng $y=\left(m^2-3\right)x+3m+1$ song song với đường thẳng $y=x-5$.

**A.** $m=\pm 2$. **B.** $m=\pm\sqrt{2}$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Để đường thẳng $y=\left(m^2-3\right)x+3m+1$ song song với đường thẳng $y=x-5$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m^2-3=1 \\ 3m+1\neq -5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=\pm 2 \\ m\neq -2 \end{cases}\Leftrightarrow m=2.$$

**Câu 6.** Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y-6=0$ và $3x+4y-1=0$ là

**A.** $\left(\frac{27}{13};-\frac{17}{13}\right)$. **B.** $(-27;17)$. **C.** $\left(-\frac{27}{13};\frac{17}{13}\right)$. **D.** $(27;-17)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y-6=0$ và $3x+4y-1=0$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-3y-6=0 \\ 3x+4y-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{27}{13} \\ y=-\frac{17}{3}. \end{cases}$

**Câu 7.** Cho đường thẳng $d_1: 2x+3y+15=0$ và $d_2: x-2y-3=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $d_1$ và $d_2$ cắt nhau và không vuông góc với nhau.

**B.** $d_1$ và $d_2$ song song với nhau.

**C.** $d_1$ và $d_2$ trùng nhau.

**D.** $d_1$ và $d_2$ vuông góc với nhau.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đường thẳng $d_1: 2x+3y+15=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(2;3)$ và đường thẳng $d_2: x-2y-3=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(1;-2)$.

Ta thấy $\frac{2}{1}\neq\frac{3}{-2}$ và $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=2.1+3.(-2)=-4\neq 0$.

Vậy $d_1$ và $d_2$ cắt nhau và không vuông góc với nhau.

**Câu 8.** Hai đường thẳng $d_1: mx+y=m-5, d_2: x+my=9$ cắt nhau khi và chỉ khi

**A.** $m\neq -1$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m\neq \pm 1$. **D.** $m\neq 2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**CÁCH 1**

-Xét $m=0$ thì $d_1: y=-5$, $d_2: x=9$. Rõ ràng hai đường thẳng này cắt nhau nên $m=0$ thỏa mãn (1).

-Xét $m\neq 0$ thì $d_1: y=-mx+m-5$ và $d_2: y=-\frac{x}{m}+9$

Hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ cắt nhau $\Leftrightarrow -m\neq -\frac{1}{m}\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq \pm 1 \end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $m\neq \pm 1$.

**CÁCH 2**

$d_1$ và $d_2$ theo thứ tự nhận các vectơ $\vec{n}_1=(m;1)$, $\vec{n}_2=(1;m)$ làm vec tơ pháp tuyến.

$d_1$ và $d_2$ cắt nhau $\Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương $\Leftrightarrow m.m\neq 1.1\Leftrightarrow m\neq \pm 1$.

(Áp dụng tính chất: $\vec{n}_1=(a;b)$ và $\vec{n}_2=(c;d)$ cùng phương $\Leftrightarrow a.d=b.c$)

**Câu 9.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1: 3x+4y+10=0$ và $d_2: (2m-1)x+m^2y+10=0$ trùng nhau?

**A.** $m\pm 2$. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} d_2: (2m-1)x+m^2y+10=0 \\ d_1: 3x+4y+10=0 \end{cases} \xrightarrow{d_1\equiv d_2} \frac{2m-1}{3}=\frac{m^2}{4}=\frac{10}{10}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1=3 \\ m^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

**Câu 10.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1: mx+(m-1)y+2m=0$ và $d_2: 2x+y-1=0$. Nếu $d_1$ song song $d_2$ thì:

**A.** $m=2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=1$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} d_1: mx+(m-1)y+2m=0 \\ d_2: 2x+y-1=0 \end{cases} \xrightarrow{d_1 \parallel d_2} \frac{m}{2}=\frac{m-1}{1}\neq\frac{2m}{-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\neq 2 \\ m=2m-2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

**Câu 11.** Tìm $m$ để hai đường thẳng $d_1: 2x-3y+4=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2-3t \\ y=1-4mt \end{cases}$ cắt nhau.

**A.** $m\neq -\frac{1}{2}$. **B.** $m\neq 2$. **C.** $m\neq \frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} d_1: 2x-3y+4=0 \\ d_2: \begin{cases} x=2-3t \\ y=1-4mt \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1=(2;-3) \\ \vec{n}_2=(4m;-3) \end{cases} \xrightarrow{d_1 \cap d_2 = M} \frac{4m}{2}\neq\frac{-3}{-3} \Leftrightarrow m\neq\frac{1}{2}.$$ **Chọn C.**

**Câu 12.** Với giá trị nào của $a$ thì hai đường thẳng

$d_1: 2x-4y+1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=-1+at \\ y=3-(a+1)t \end{cases}$ vuông góc với nhau?

**A.** $a=-2$. **B.** $a=2$. **C.** $a=-1$. **D.** $a=1$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} d_1: 2x-4y+1=0 \\ d_2: \begin{cases} x=-1+at \\ y=3-(a+1)t \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1=(1;-2) \\ \vec{n}_2=(a+1;a) \end{cases} \xrightarrow{d_1 \perp d_2} \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow a+1-2a=0 \Leftrightarrow a=1.$$

**Chọn D.**

**Câu 13.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=2+mt \\ y=-6+(1-2m)t \end{cases}$ trùng nhau?

**A.** $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m\neq\pm 2$.

**Lời giải**

$$\left.\begin{array}{l} d_1: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \end{cases} \to \vec{u}_1=(2;-3) \\ d_2: \begin{cases} x=2+mt \\ y=-6+(1-2m)t \end{cases} \to A(2;-6)\in d_2,\ \vec{u}_2=(m;1-2m) \end{array}\right\} \xrightarrow{d_1 \equiv d_2} \begin{cases} A\in d_1 \\ \frac{m}{2}=\frac{1-2m}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

**Chọn C.**

**Câu 14.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hai đường thẳng

$d_1: \begin{cases} x=2+2t \\ y=1+mt \end{cases}$ và $d_2: 4x-3y+m=0$ trùng nhau.

**A.** $m=-3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\frac{4}{3}$. **D.** $m\in\varnothing$.

**Lời giải**

$$\left.\begin{array}{l} d_1:\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+mt \end{cases} \to A(2;1)\in d_1, \vec{u}_1=(2;m) \\ d_2: 4x-3y+m=0 \to \vec{u}_2=(3;4) \end{array}\right\} \xrightarrow{d_1=d_2} \begin{cases} A\in d_2 \\ \dfrac{2}{3}=\dfrac{m}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+m=0 \\ m=\dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing.$$

**Chọn D.**

**Câu 15.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng $d_1: 2x+y+4-m=0$ và $d_2:(m+3)x+y+2m-1=0$ song song?

**A.** $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

**Lời giải**

Với $m=4 \longrightarrow \begin{cases} d_1: 2x+y=0 \\ d_2: 7x+y+7=0 \end{cases} \longrightarrow d_1\cap d_2\neq\varnothing \longrightarrow$ loại $m=4$.

Với $m\neq 4$ thì

$$\begin{cases} d_1: 2x+y+4-m=0 \\ d_2:(m+3)x+y-2m-1=0 \end{cases} \xrightarrow{d_1\parallel d_2} \frac{m+3}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{-2m-1}{4-m} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1.$$

**Chọn B.**

**Câu 16.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hai đường thẳng $\Delta_1: 2x-3my+10=0$ và $\Delta_2: mx+4y+1=0$ cắt nhau.

**A.** $1<m<10$. **B.** $m=1$. **C.** Không có $m$. **D.** Với mọi $m$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} \Delta_1: 2x-3my+10=0 \\ \Delta_2: mx+4y+1=0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} m=0 \to \begin{cases} \Delta_1: x+5=0 \\ \Delta_2: 4y+1=0 \end{cases} \to m=0 \text{ (thoaman)} \\ m\neq 0 \xrightarrow{\Delta_1\cap\Delta_2=M} \dfrac{2}{m}\neq\dfrac{-3m}{4} \Leftrightarrow \forall m\neq 0 \end{array}\right. .$$ **ChọnD.**

**Câu 17.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng $\Delta_1: mx+y-19=0$ và $\Delta_2:(m-1)x+(m+1)y-20=0$ vuông góc?

**A.** Với mọi $m$. **B.** $m=2$. **C.** Không có $m$. **D.** $m=\pm 1$.

**Lời giải**

$$\text{Ta có}: \begin{cases} \Delta_1: mx+y-19=0 \to \vec{n}_1=(m;1) \\ \Delta_2:(m-1)x+(m+1)y-20=0 \to \vec{n}_2=(m-1;m+1) \end{cases}$$
$$\xrightarrow{\Delta_1\perp\Delta_1} m(m-1)+1(m+1)=0 \Leftrightarrow m\in\varnothing.$$

**Câu 18.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng $d_1: 3mx+2y+6=0$ và $d_2:(m^2+2)x+2my+6=0$ cắt nhau?

**A.** $m\neq -1$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\neq 1$ và $m\neq -1$.

Ta có: $\begin{cases} d_1: 3mx+2y+6=0 \to \vec{n}_1=(3m;2) \\ d_2:(m^2+2)x+2my+6=0 \to \vec{n}_2=(m^2+2;2m) \end{cases}$

$$\to \left[\begin{array}{l} m=0 \to \begin{cases} d_1: y+3=0 \\ d_2: x+y+3=0 \end{cases} \to m=0(\text{thoaman}) \\ m\neq 0 \xrightarrow{d_1\cap d_2=M} \dfrac{m^2+2}{3m}\neq\dfrac{2m}{2} \Leftrightarrow m\neq\pm 1 \end{array}\right. .$$ **Chọn D.**

**Câu 19.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1: 2x-3y-10=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2-3t \\ y=1-4mt \end{cases}$ vuông góc?

**A.** $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{9}{8}$. **C.** $m=-\frac{9}{8}$. **D.** $m=-\frac{5}{4}$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} d_1: 2x-3y-10=0 \to \vec{n}_1=(2;-3) \\ d_2: \begin{cases} x=2-3t \\ y=1-4mt \end{cases} \to \vec{n}_2=(4m;-3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{d_1 \perp d_2} 2.4m+(-3).(-3)=0 \Leftrightarrow m=-\frac{9}{8}.$$ **Chọn C.**

**Câu 20.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1: 4x-3y+3m=0$ và $d_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=4+mt \end{cases}$ trùng nhau?

**A.** $m=-\frac{8}{3}$. **B.** $m=\frac{8}{3}$. **C.** $m=-\frac{4}{3}$. **D.** $m=\frac{4}{3}$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} d_1: 4x-3y+3m=0 \to \vec{n}_1=(4;-3) \\ d_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=4+mt \end{cases} \to A(1;4) \in d_2,\ \vec{n}_2=(m;-2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{d_1 \equiv d_2} \begin{cases} A \in d_1 \\ \frac{m}{4}=\frac{-2}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-8=0 \\ m=\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{8}{3}.$$ **Chọn B.**

**Câu 21.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1: 3mx+2y-6=0$ và $d_2: (m^2+2)x+2my-3=0$ song song?

**A.** $m=1;\ m=-1$. **B.** $m \in \varnothing$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-1$.

**Lời giải**

Ta có $\begin{cases} d_1: 3mx+2y-6=0 \to \vec{n}_1=(3m;2) \\ d_2: (m^2+2)x+2my-3=0 \to \vec{n}_2=(m^2+2;2m) \end{cases}$

$$\to \begin{cases} m=0 \to \begin{cases} d_1: y-3=0 \\ d_2: 2x+2y-3=0 \end{cases} \to m=0 (\text{khong thoa man}) \\ m \neq 0 \xrightarrow{d_1 \parallel d_2} \frac{m^2+2}{3m}=\frac{2m}{2} \neq \frac{-3}{-6} \Leftrightarrow m=\pm 1 \end{cases}$$ . **Chọn A.**

**Câu 22.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng

$d_1: \begin{cases} x=8-(m+1)t \\ y=10+t \end{cases}$ và $d_2: mx+2y-14=0$ song song?

**A.** $\begin{bmatrix} m=1 \\ m=-2 \end{bmatrix}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m \in \varnothing$.

**Lời giải**

Ta có: $\begin{cases} d_1: \begin{cases} x = 8-(m+1)t \\ y = 10+t \end{cases} \to A(8;10) \in d_1,\ \vec{n}_1 = (1;m+1) \\ d_2: mx+2y-14=0 \to \vec{n}_2 = (m;2) \end{cases}$

$\xrightarrow{d_1 \parallel d_2} \begin{cases} A \notin d_2 \\ \left[\begin{array}{l} m=0 \to \begin{cases} \vec{n}_1 = (1;1) \\ \vec{n}_2 = (0;2) \end{cases} \to \text{khong thoaman} \\ m \neq 0 \to \dfrac{1}{m} = \dfrac{m+1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m+6 \neq 0 \\ m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **Chọn A.**

**Câu 23.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng $d_1: (m-3)x+2y+m^2-1=0$ và $d_2: -x+my+m^2-2m+1=0$ cắt nhau?

**A.** $m \neq 1$. **B.** $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$. **C.** $m \neq 2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{array}\right.$.

**Lời giải**

$\begin{cases} d_1: (m-3)x+2y+m^2-1=0 \\ d_2: -x+my+m^2-2m+1=0 \end{cases}$

$\xrightarrow{d_1 \cap d_2 = M} \left[\begin{array}{l} m=0 \to \begin{cases} d_1: -3x+2y-1=0 \\ d_2: -x+1=0 \end{cases} \to \text{thoaman} \\ m \neq 0 \to \dfrac{m-3}{-1} \neq \dfrac{2}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases} \end{array}\right.$. **Chọn B.**

**Câu 24.** Với giá trị nào của $m$ thì hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = m+2t \\ y = 1+(m^2+1)t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 1+mt \\ y = m+t \end{cases}$ trùng nhau?

**A.** Không có $m$. **B.** $m = \dfrac{4}{3}$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -3$.

**Lời giải**

$\begin{cases} \Delta_1: \begin{cases} x = m+2t \\ y = 1+(m^2+1)t \end{cases} \to A(m;1) \in d_1,\ \vec{u}_1 = (2;m^2+1) \\ \Delta_2: \begin{cases} x = 1+mt \\ y = m+t \end{cases} \to \vec{u}_2 = (m;1) \end{cases} \xrightarrow{d_1 \equiv d_2} \begin{cases} A \in d_2 \\ \dfrac{m}{2} = \dfrac{1}{m^2+1} \end{cases}$. **Chọn C.**

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1+mt \\ 1 = m+t \\ m^3+m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1+m(1-m) \\ (m-1)(m^2+m+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1=0 \\ m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

**Câu 25.** Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $7x-3y+16=0$ và $x+10=0$.

**A.** $(-10;-18)$. **B.** $(10;18)$. **C.** $(-10;18)$. **D.** $(10;-18)$.

**Lời giải**

$\begin{cases} d_1: 7x-3y+16=0 \\ d_2: x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-10 \\ y=-18 \end{cases}$. **Chọn A.**

**Câu 26.** Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=-3+4t\\ y=2+5t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1+4t'\\ y=7-5t'\end{cases}$.

**A.** $(1;7)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(2;-3)$. **D.** $(5;1)$.

**Lời giải**

$$\begin{cases}d_1:\begin{cases}x=-3+4t\\ y=2+5t\end{cases}\\ d_2:\begin{cases}x=1+4t'\\ y=7-5t'\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3+4t=1+4t'\\ 2+5t=7-5t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-t'=1\\ t+t'=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\xrightarrow{\to d_1}\begin{cases}x=1\\ y=7\end{cases}\\ t'=0\end{cases}$$

**Chọn A.**

**Câu 27.** Cho hai đường thẳng $d_1:2x+3y-19=0$ và $d_2:\begin{cases}x=22+2t\\ y=55+5t\end{cases}$. Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho.

**A.** $(2;5)$. **B.** $(10;25)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $(5;2)$.

**Lời giải**

$$\begin{cases}d_1:2x+3y-19=0\\ d_2:\begin{cases}x=22+2t\\ y=55+5t\end{cases}\end{cases}\xrightarrow{d_1\cap d_2}2(22+2t)+3(55+5t)-19=0\Leftrightarrow t=-10\to\begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}.$$

**Chọn A.**

**Câu 28.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(-2;0)$, $B(1;4)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\ y=2-t\end{cases}$. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $AB$ và $d$.

**A.** $(2;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;-2)$.

**Lời giải**

$$\begin{cases}A(-2;0),\ B(1;4)\to AB:4x-3y+8=0\\ d:\begin{cases}x=-t\\ y=2-t\end{cases}\to d:x-y+2=0\end{cases}\xrightarrow{AB\cap d}\begin{cases}4x-3y+8=0\\ x-y+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}.$$

**Chọn B.**

**Câu 29.** Xác định $a$ để hai đường thẳng $d_1:ax+3y-4=0$ và $d_2:\begin{cases}x=-1+t\\ y=3+3t\end{cases}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

**A.** $a=1$. **B.** $a=-1$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-2$.

**Lời giải**

$$Ox\cap d_2\leftrightarrow\begin{cases}x=-1+t\\ y=3+3t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=0\end{cases}\to Ox\cap d_2=A(-2;0)\in d_1$$

$\to -2a-4=0\Leftrightarrow a=-2$. **Chọn D.**

**Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hai đường thẳng $d_1:4x+3my-m^2=0$ và $d_2:\begin{cases}x=2+t\\ y=6+2t\end{cases}$ cắt nhau tại một điểm thuộc trục tung.

**A.** $m=0$ hoặc $m=-6$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$.

**C.** $m=0$ hoặc $m=-2$. **D.** $m=0$ hoặc $m=6$.

**Lời giải**

$Oy \cap d_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t = 0 \\ y = 6 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \to Oy \cap d_2 = A(0;2) \in d_1$

$\Leftrightarrow 6m - m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} m = 0 \\ m = 6 \end{array} \right.$. **Chọn D.**

**Câu 31.** Cho ba đường thẳng $d_1 : 3x - 2y + 5 = 0$, $d_2 : 2x + 4y - 7 = 0$, $d_3 : 3x + 4y - 1 = 0$. Phương trình đường thẳng $d$ đi qua giao điểm của $d_1$ và $d_2$, và song song với $d_3$ là:

**A.** $24x + 32y - 53 = 0$. **B.** $24x + 32y + 53 = 0$.

**C.** $24x - 32y + 53 = 0$. **D.** $24x - 32y - 53 = 0$.

**Lời giải**

$\begin{cases} d_1 : 3x - 2y + 5 = 0 \\ d_2 : 2x + 4y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{8} \\ y = \dfrac{31}{16} \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A\left( -\dfrac{3}{8}; \dfrac{31}{16} \right)$. Ta có

$\begin{cases} A \in d \\ d \parallel d_3 : 3x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A \in d \\ d : 3x + 4y + c = 0 \ (c \neq -1) \end{cases} \to -\dfrac{9}{8} + \dfrac{31}{4} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\dfrac{53}{8}$.

Vậy $d : 3x + 4y - \dfrac{53}{8} = 0 \Leftrightarrow d_3 : 24x + 32y - 53 = 0$. **Chọn A.**

**Câu 32.** Lập phương trình của đường thẳng $\Delta$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1 : x + 3y - 1 = 0$, $d_2 : x - 3y - 5 = 0$ và vuông góc với đường thẳng $d_3 : 2x - y + 7 = 0$.

**A.** $3x + 6y - 5 = 0$. **B.** $6x + 12y - 5 = 0$.

**C.** $6x + 12y + 10 = 0$. **D.** $x + 2y + 10 = 0$.

**Lời giải**

$\begin{cases} d_1 : x + 3y - 1 = 0 \\ d_2 : x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A\left( 3; -\dfrac{2}{3} \right)$. Ta có

$\begin{cases} A \in d \\ d \perp d_3 : 2x - y + 7 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A \in d \\ d : x + 2y + c = 0 \end{cases} \to 3 + 2.\left( -\dfrac{2}{3} \right) + c = 0 \Leftrightarrow c = -\dfrac{5}{3}$.

Vậy $d : x + 2y - \dfrac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow d : 3x + 6y - 5 = 0$. **Chọn A.**

**Câu 33.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho ba đường thẳng lần lượt có phương trình $d_1 : 3x - 4y + 15 = 0$, $d_2 : 5x + 2y - 1 = 0$ và $d_3 : mx - (2m - 1)y + 9m - 13 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để ba đường thẳng đã cho cùng đi qua một điểm.

**A.** $m = \dfrac{1}{5}$. **B.** $m = -5$. **C.** $m = -\dfrac{1}{5}$. **D.** $m = 5$.

**Lời giải**

Ta có: $\begin{cases} d_1 : 3x - 4y + 15 = 0 \\ d_2 : 5x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(-1;3) \in d_3$

$\to -m - 6m + 3 + 9m - 13 = 0 \Leftrightarrow m = 5$. **Chọn D.**

**Câu 34.** Nếu ba đường thẳng

$d_1 : \ 2x + y - 4 = 0$, $d_2 : 5x - 2y + 3 = 0$ và $d_3 : mx + 3y - 2 = 0$

đồng quy thì $m$ nhận giá trị nào sau đây?

**A.** $\frac{12}{5}$. **B.** $-\frac{12}{5}$. **C.** $12$. **D.** $-12$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} d_1:\ 2x+y-4=0 \\ d_2:5x-2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{9} \\ y=\frac{26}{9} \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A\left(\frac{5}{9};\frac{26}{9}\right) \in d_3$$

$$\to \frac{5m}{9}+\frac{26}{3}-2=0 \Leftrightarrow m=-12.$$ **Chọn D.**

**Câu 35.** Với giá trị nào của $m$ thì ba đường thẳng $d_1:3x-4y+15=0$, $d_2:5x+2y-1=0$ và $d_3:mx-4y+15=0$ đồng quy?

**A.** $m=-5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-3$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} d_1:3x-4y+15=0 \\ d_2:5x+2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(-1;3) \in d$$

$$\to -m-12+15=0 \Leftrightarrow m=3.$$ **Chọn C.**

**Câu 36.** Với giá trị nào của $m$ thì ba đường thẳng $d_1:2x+y-1=0$, $d_2:x+2y+1=0$ và $d_3:mx-y-7=0$ đồng quy?

**A.** $m=-6$. **B.** $m=6$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=5$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} d_1:2x+y-1=0 \\ d_2:x+2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(1;-1) \in d_3 \Leftrightarrow m+1-7=0 \Leftrightarrow m=6.$$

**Chọn B.**

**Câu 37.** Đường thẳng $d:51x-30y+11=0$ đi qua điểm nào sau đây?

**A.** $M\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$. **B.** $N\left(-1;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $P\left(1;\frac{3}{4}\right)$. **D.** $Q\left(-1;-\frac{3}{4}\right)$.

**Lời giải**

Đặt $f(x;y)=51x-30y+11 \longrightarrow \begin{cases} f(M)=f\left(-1;-\frac{4}{3}\right)=0 \to M \in d \\ f(N)=f\left(-1;\frac{4}{3}\right)=-80\neq 0 \to N \notin d \\ f(P)\neq 0 \\ f(Q)\neq 0 \end{cases}$.

**Chọn A.**

## Dạng 2. Góc của hai đường thẳng

**Câu 38.** Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta:x-\sqrt{3}y+2=0$ và $\Delta':x+\sqrt{3}y-1=0$.

**A.** $90^\circ$. **B.** $120^\circ$. **C.** $60^\circ$. **D.** $30^\circ$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đường thẳng $\Delta$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(1;-\sqrt{3}\right)$, đường thẳng $\Delta'$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n'}=\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Gọi $\alpha$ là góc giữa hai đường thẳng $\Delta,\Delta'$. $\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{n'}\right)\right|=\dfrac{|1-3|}{\sqrt{1+3}.\sqrt{1+3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^{\circ}$.

**Câu 39.** Góc giữa hai đường thẳng $a:\sqrt{3}x-y+7=0$ và $b:x-\sqrt{3}y-1=0$ là:

**A.** $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Đường thẳng $a$ có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n_1}=\left(\sqrt{3};-1\right)$;

Đường thẳng $b$ có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n_2}=\left(1;-\sqrt{3}\right)$.

Áp dụng công thức tính góc giữa hai đường thẳng có:

$\cos\left(a,b\right)=\dfrac{\vec{n_1}.\vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right|.\left|\vec{n_2}\right|}=\dfrac{1.\sqrt{3}+(-1)\left(-\sqrt{3}\right)}{2.2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra góc giữa hai đường thẳng bằng $30°$.

**Câu 40.** Cho hai đường thẳng $d_1:2x+5y-2=0$ và $d_2:3x-7y+3=0$. Góc tạo bởi đường thẳng $d_1$ và $d_2$ bằng

**A.** $30^0$. **B.** $135^0$. **C.** $45^0$. **D.** $60^0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đường thẳng $d_1:2x+5y-2=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=\left(2;5\right)$.

Đường thẳng $d_2:3x-7y+3=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2=\left(3;-7\right)$.

Góc giữa hai đường thẳng được tính bằng công thức

$$\cos\left(d_1,d_2\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|=\frac{\left|\vec{n}_1.\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{\left|2.3+5.(-7)\right|}{\sqrt{2^2+5^2}.\sqrt{3^2+(-7)^2}}=\frac{29}{29\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow\left(d_1;d_2\right)=45^0$

Vậy góc tạo bởi đường thẳng $d_1$ và $d_2$ bằng $45^0$.

**Câu 41.** Tìm côsin góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1:2x+y-1=0$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\end{cases}$

**A.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\dfrac{3}{10}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Véctơ pháp tuyến của đường thẳng $\Delta_1$ là $\vec{n}=\left(2;1\right)$ nên véctơ chỉ phương $\vec{u}=\left(1;-2\right)$

Véctơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta_2$ là $\vec{u'}=\left(1;-1\right)$

Khi đó $\cos\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{u};\vec{u'}\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{u'}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{u'}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{5}.\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

**Câu 42.** Tìm góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1 : x-2y+15=0$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x=2-t \\ y=4+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

**A.** $5^\circ$. **B.** $60^\circ$. **C.** $0^\circ$. **D.** $90^\circ$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đường thẳng $\Delta_1$ có VTPT là $\overrightarrow{n_1}(1;-2) \Rightarrow 1VTCP(2;1)$

Đường thẳng $\Delta_2$ có $1VTCP(-1;2)$.

Nhận xét: $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0 \Rightarrow \overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2} \Rightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2 \Rightarrow (\Delta_1,\Delta_2)=90^\circ$.

**Câu 43.** Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $d_1 : x+2y-7=0, d_2 : 2x-4y+9=0$.

**A.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $vtpt\vec{n}_{d_1}=(1;2); vtpt\vec{n}_{d_2}=(2;-4)$

$$cos(d;d')=\frac{\left|\vec{n}_{d_1}.\vec{n}_{d_2}\right|}{\left|\vec{n}_{d_1}\right|.\left|\vec{n}_{d_2}\right|}=\frac{|1.2-2.4|}{\sqrt{5}.2\sqrt{5}}=\frac{3}{5}.$$

**Câu 44.** Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta : x-\sqrt{3}y+2=0 và \Delta' : x+\sqrt{3}y-1=0$ ?

**A.** 90º. **B.** 120º. **C.** 60º. **D.** 30º.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\Delta$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=\left(1;-\sqrt{3}\right)$. $\Delta'$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Khi đó:

$$\cos\left(\Delta;\Delta'\right)=\left|\cos(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\left|1.1+\left(-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}.\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{4}.\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng $\Delta$, $\Delta'$ là $60^0$.

**Câu 45.** Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1 : 2x-y-10=0$ và $d_2 : x-3y+9=0.$

**A.** 30º. **B.** 45º. **C.** 60º. **D.** 135º.

**Lời giải**

Ta có

$$\begin{cases} d_1 : 2x-y-10=0 \to \vec{n}_1=(2;-1) \\ d_2 : x-3y+9=0 \to \vec{n}_2=(1;-3) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi=\frac{\left|2.1+(-1).(-3)\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\to \varphi=45^\circ$. **Chọn B.**

**Câu 46.** Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1 : 7x-3y+6=0$ và $d_2 : 2x-5y-4=0.$

**A.** $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3\pi}{4}$.

**Lời giải**

Ta có

$$\begin{cases} d_1: 7x-3y+6=0 \to \vec{n}_1=(7;-3) \\ d_2: 2x-5y-4=0 \to \vec{n}_2=(2;-5) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi=\frac{|14+15|}{\sqrt{49+9}.\sqrt{4+25}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \to \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

**Chọn#A.**

**Câu 47.** Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: 2x+2\sqrt{3}y+5=0$ và $d_2: y-6=0.$

**A.** $30^\circ$. **B.** $45^\circ$. **C.** $60^\circ$. **D.** $90^\circ$.

**Lời giải**

Ta có

$$\begin{cases} d_1: 2x+2\sqrt{3}y+5=0 \to \vec{n}_1=(1;\sqrt{3}) \\ d_2: y-6=0. \to \vec{n}_2=(0;1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi=\frac{|\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}.\sqrt{0+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \to \varphi=30^\circ.$$

**Chọn A.**

**Câu 48.** Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: x+\sqrt{3}y=0$ và $d_2: x+10=0.$

**A.** $30^\circ$. **B.** $45^\circ$. **C.** $60^\circ$. **D.** $90^\circ$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} d_1: x+\sqrt{3}y=0 \to \vec{n}_1=(1;\sqrt{3}) \\ d_2: x+10=0 \to \vec{n}_2=(1;0) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi=\frac{|1+0|}{\sqrt{1+3}.\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2}$$

$\to \varphi=60^\circ$. **Chọn C.**

**Câu 49.** Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1: 6x-5y+15=0$ và $d_2: \begin{cases} x=10-6t \\ y=1+5t \end{cases}$.

**A.** $30^\circ$. **B.** $45^\circ$. **C.** $60^\circ$. **D.** $90^\circ$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} d_1: 6x-5y+15=0 \to \vec{n}_1=(6;-5) \\ d_2: \begin{cases} x=10-6t \\ y=1+5t \end{cases} \to \vec{n}_2=(5;6) \end{cases} \to \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \varphi=90^\circ.$$ **Chọn D.**

**Câu 50.** Cho đường thẳng $d_1: x+2y-7=0$ và $d_2: 2x-4y+9=0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

**A.** $-\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} d_1: x+2y-7=0 \to \vec{n}_1=(1;2) \\ d_2: 2x-4y+9=0 \to \vec{n}_2=(1;-2) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi=\frac{|1-4|}{\sqrt{1+4}.\sqrt{1+4}}=\frac{3}{5}.$$ **Chọn C.**

**Câu 51.** Cho đường thẳng $d_1: x+2y-2=0$ và $d_2: x-y=0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

**A.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Lời giải**

$\begin{cases} d_1: x+2y-2=0 \to \vec{n}_1=(1;2) \\ d_2: x-y=0 \to \vec{n}_2=(1;-1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \dfrac{|1-2|}{\sqrt{1+4}.\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **Chọn A.**

**Câu 52.** Cho đường thẳng $d_1: 10x+5y-1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases}$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

**A.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\dfrac{3}{10}$.

**Lời giải**

$\begin{cases} d_1: 10x+5y-1=0 \to \vec{n}_1=(2;1) \\ d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases} \to \vec{n}_2=(1;1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \dfrac{|2+1|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{1+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **Chọn A.**

**Câu 53.** Cho đường thẳng $d_1: 3x+4y+1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=15+12t \\ y=1+5t \end{cases}$.

Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

**A.** $\dfrac{56}{65}$. **B.** $-\dfrac{33}{65}$. **C.** $\dfrac{6}{65}$. **D.** $\dfrac{33}{65}$.

**Lời giải**

$\begin{cases} d_1: 3x+4y+1=0 \to \vec{n}_1=(3;4) \\ d_2: \begin{cases} x=15+12t \\ y=1+5t \end{cases} \to \vec{n}_2=(5;-12) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \dfrac{|15-48|}{\sqrt{9+16}.\sqrt{25+144}} = \dfrac{33}{65}$.

**Chọn D.**

**Câu 54.** Xác định tất cả các giá trị của $a$ để góc tạo bởi đường thẳng $\begin{cases} x=9+at \\ y=7-2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ và đường thẳng $3x+4y-2=0$ bằng $45°$.

**A.** $a=1$, $a=-14$. **B.** $a=\dfrac{2}{7}$, $a=-14$. **C.** $a=-2$, $a=-14$. **D.** $a=\dfrac{2}{7}$, $a=14$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $\varphi$ là góc giữa hai đường thẳng đã cho.

Đường thẳng $\begin{cases} x=9+at \\ y=7-2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;-2)$.

Đường thẳng $3x+4y-2=0$ có vectơ chỉ phương là $\vec{v}=(4;-3)$.

Ta có $\cos\varphi = |\cos(\vec{u},\vec{v})| \Leftrightarrow \cos 45° = \dfrac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{|4a+6|}{5\sqrt{a^2+4}}$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{a^2+4} = \sqrt{2}|4a+6| \Leftrightarrow 25a^2+100 = 32a^2+96a+72$

$\Leftrightarrow 7a^2+96a-28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{2}{7} \\ a=-14 \end{array}\right.$.

**Câu 55.** Đường thẳng $\Delta$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1: 2x+y-3=0$ và $d_2: x-2y+1=0$ đồng thời tạo với đường thẳng $d_3: y-1=0$ một góc $45^0$ có phương trình:

**A.** $x+(1-\sqrt{2})y=0$ hoặc $\Delta: x-y-1=0$. **B.** $\Delta: x+2y=0$ hoặc $\Delta: x-4y=0$.

**C.** $\Delta: x-y=0$ hoặc $\Delta: x+y-2=0$. **D.** $\Delta: 2x+1=0$ hoặc $y+5=0$..

**Lời giải**

$$\begin{cases} d_1: 2x+y-3=0 \\ d_2: x-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(1;1) \in \Delta.$$

Ta có $d_3: y-1=0 \to \vec{n}_3 = (0;1)$, gọi $\vec{n}_\Delta = (a;b)$, $\varphi = (\Delta; d_3)$. Khi đó

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\varphi = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{0+1}} \Leftrightarrow a^2+b^2 = 2b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \to a=b=1 \to \Delta: x+y-2=0 \\ a=-b \to a=1, b=-1 \to \Delta: x-y=0 \end{array}\right.$$

**Chọn C.**

**Câu 56.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $A(2;0)$ và tạo với trục hoành một góc $45°$?

**A.** Có duy nhất. **B.** $2$.

**C.** Vô số. **D.** Không tồn tại.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Cho đường thẳng $d$ và một điểm $A$. Khi đó.

(i) Có duy nhất một đường thẳng đi qua $A$ song song hoặc trùng hoặc vuông góc với $d$.

(ii) Có đúng hai đường thẳng đi qua $A$ và tạo với $d$ một góc $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

**Câu 57.** Đường thẳng $\Delta$ tạo với đường thẳng $d: x+2y-6=0$ một góc $45^0$. Tìm hệ số góc $k$ của đường thẳng $\Delta$.

**A.** $k=\frac{1}{3}$ hoặc $k=-3$. **B.** $k=\frac{1}{3}$ hoặc $k=3$.

**C.** $k=-\frac{1}{3}$ hoặc $k=-3$. **D.** $k=-\frac{1}{3}$ hoặc $k=3$.

**Lời giải**

$d: x+2y-6=0 \to \vec{n}_d = (1;2)$, gọi $\vec{n}_\Delta = (a;b) \to k_\Delta = -\frac{a}{b}$. Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5(a^2+b^2) = 2a^2+8ab+8b^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2-8ab-3b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\frac{1}{3}b \to k_\Delta = \frac{1}{3} \\ a=3b \to k_\Delta = -3 \end{array}\right.$$ **Chọn A.**

**Câu 58.** Biết rằng có đúng hai giá trị của tham số $k$ để đường thẳng $d: y=kx$ tạo với đường thẳng $\Delta: y=x$ một góc $60^0$. Tổng hai giá trị của $k$ bằng:

**A.** $-8$. **B.** $-4$. **C.** $-1$. **D.** $-1$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} d: y=kx \to \vec{n}_d = (k;-1) \\ \Delta: y=x \to \vec{n}_\Delta = (1;-1) \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}.\sqrt{2}} \Leftrightarrow k^2+1 = 2k^2+4k+2$$

$$\Leftrightarrow k^2+4k+1=0 \xrightarrow{\text{sol: } k=k_1,\ k=k_2} k_1+k_2=-4.$$

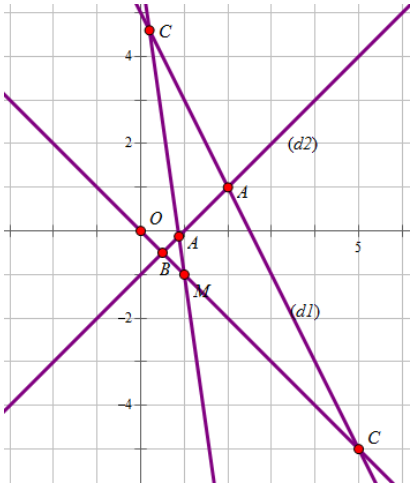
**Chọn B.**

**Câu 59.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho điểm $M(1;-1)$ và hai đường thẳng có phương trình $(d_1): x-y-1=0, (d_2): 2x+y-5=0$. Gọi $A$ là giao điểm của hai đường thẳng trên. Biết rằng có hai đường thẳng $(d)$ đi qua $M$ cắt hai đường thẳng trên lần lượt tại hai điểm $B, C$ sao cho $ABC$ là tam giác có $BC=3AB$ có dạng: $ax+y+b=0$ và $cx+y+d=0$, giá trị của $T=a+b+c+d$ là

**A.** $T=5$. **B.** $T=6$. **C.** $T=2$. **D.** $T=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Tọa độ $A(2;1)$

Gọi $\alpha$ là góc giữa hai đường thẳng $(d_1)$ và $(d_2)$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

Xét tam giác $ABC$ ta có: $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A} \Rightarrow \sin C=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Gọi $\beta$ là góc giữa hai đường thẳng $(d)$ và $(d_1)$, suy ra: $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ $(1)$

Giả sử $(d)$ có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}(a;b)$

Từ $(1)$ ta có: $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \dfrac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow a^2-8ab+b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=7b \end{array}\right.$

Với $a=b$ một vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1) \Rightarrow d: x+y=0$

Với $a=7b$ một vec tơ pháp tuyến $\vec{n}(7;1) \Rightarrow d: 7x+y-6=0$

Vậy: $T=1+0+7-6=2$

## Dạng 3. Khoảng cách

**Câu 60.** Khoảng cách từ điểm $A(1;1)$ đến đường thẳng $5x-12y-6=0$ là

**A.** $13$. **B.** $-13$. **C.** $-1$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Khoảng cách từ điểm $A(1;1)$ đến đường thẳng $\Delta: 5x-12y-6=0$ là

$$d(A,\Delta)=\frac{|5.1-12.1-6|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=1.$$

**Câu 61.** Khoảng cách từ điểm $M(5;-1)$ đến đường thẳng $3x+2y+13=0$ là:

**A.** $2\sqrt{13}$. **B.** $\frac{28}{\sqrt{13}}$. **C.** $26$. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Khoảng cách $d=\frac{|3.5+2.(-1)+13|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{26}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}$.

**Câu 62.** Khoảng cách từ điểm $M(1;-1)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x+y+4=0$ là

**A.** $1$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Khoảng cách từ điểm $M(1;-1)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x+y+4=0$ là

$d(M;\Delta)=\frac{|3.1-1+4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

**Câu 63.** Trong mặt phẳng $Oxy$, khoảng cách từ điểm $M(3;-4)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x-4y-1=0$.

**A.** $\frac{8}{5}$. **B.** $\frac{24}{5}$. **C.** $\frac{12}{5}$. **D.** $-\frac{24}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $d(M,\Delta)=\frac{|3.3-4.(-4)-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{24}{5}$.

**Câu 64.** Khoảng cách từ điểm $A(-3;2)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x-y+1=0$ bằng:

**A.** $\sqrt{10}$. **B.** $\frac{11\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{10\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{11}{\sqrt{10}}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $d(A;\Delta)=\frac{|3.(-3)-2+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$.

**Câu 65.** Trong mặt phẳng $Oxy$, khoảng cách từ gốc tọa độ $O$ đến đường thẳng $d: 4x-3y+1=0$ bằng

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $1$. **D.** $\frac{1}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $d(O,d)=\frac{|4.0-3.0+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$.

**Câu 66.** Một đường tròn có tâm $I(3;-2)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-5y+1=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{14}{\sqrt{26}}$. **B.** $\frac{7}{13}$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi bán kính của đường tròn là $R$. Khi đó: $R = d(I,\Delta) = \frac{|3-5.(-2)+1|}{\sqrt{1^2+(-5)^2}} = \frac{14}{\sqrt{26}}$.

**Câu 67.** Trong mặt phẳng $Oxy$, khoảng cách từđiểm $M(0;4)$ đến đường thẳng $\Delta: x\cos\alpha + y\sin\alpha + 4(2-\sin\alpha) = 0$ bằng

**A.** $\sqrt{8}$. **B.** $4\sin\alpha$. **C.** $\frac{4}{\cos\alpha+\sin\alpha}$. **D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $d(M,\Delta) = \frac{|0.\cos\alpha + 4.\sin\alpha + 4(2-\sin\alpha)|}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} = 8$.

**Câu 68.** Khoảng cách từ $I(1;-2)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x-4y-26=0$ bằng

**A.** 3. **B.** 12. **C.** 5. **D.** $\frac{5}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ là: $d(M,\Delta) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Vậy khoảng cách từ $I(1;-2)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x-4y-26=0$ bằng $d(I,\Delta) = \frac{|3.1-4.(-2)-26|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 3$

**Câu 69.** Khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y+4=0$ và $2x+3y-1=0$ đến đường thẳng $\Delta: 3x+y+4=0$ bằng:

**A.** $2\sqrt{10}$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** 2.

**Lời giải**

$\begin{cases} x-3y+4=0 \\ 2x+3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \to A(-1;1) \to d(A;\Delta) = \frac{|-3+1+4|}{\sqrt{9+1}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$. **Chọn C.**

**Câu 70.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(1;2)$, $B(0;3)$ và $C(4;0)$. Chiều cao của tam giác kẻ từ đỉnh $A$ bằng:

**A.** $\frac{1}{5}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Lời giải**

$\begin{cases} A(1;2) \\ B(0;3),\ C(4;0) \to BC: 3x+4y-12=0 \end{cases} \to h_A = d(A;BC) = \frac{|3+8-12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}$.

**Chọn A.**

**Câu 71.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(3;-4)$, $B(1;5)$ và $C(3;1)$. Tính diện tích tam giác $ABC$.

**A.** 10. **B.** 5. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Cách 1:** $\begin{cases} A(3;-4) \\ B(1;5), C(3;1) \end{cases} \to \begin{cases} A(3;-4) \\ BC = 2\sqrt{5} \\ BC: 2x+y-7=0 \end{cases} \to \begin{cases} BC = 2\sqrt{5} \\ h_A = d(A;BC) = \sqrt{5} \end{cases}$

$\to S_{ABC} = \frac{1}{2}.2\sqrt{5}.\sqrt{5} = 5.$ **Chọn B.**

**Cách 2:** $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

**Câu 72.** Khoảng cách từ điểm $M(0;3)$ đến đường thẳng $\Delta: x\cos\alpha + y\sin\alpha + 3(2-\sin\alpha) = 0$ bằng:

**A.** $\sqrt{6}$. **B.** 6. **C.** $3\sin\alpha$. **D.** $\frac{3}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

**Lời giải**

$d(M;\Delta) = \frac{|3\sin\alpha + 3(2-\sin\alpha)|}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} = 6.$ **Chọn B.**

**Câu 73.** Khoảng cách từ điểm $M(2;0)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+4t \end{cases}$ bằng:

**A.** 2. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{10}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

**Lời giải**

$\Delta: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+4t \end{cases} \to \Delta: 4x-3y+2=0 \to d(M;\Delta) = \frac{|8+0+2|}{\sqrt{16+9}} = 2.$ **Chọn A.**

**Câu 74.** Khoảng cách nhỏ nhất từ điểm $M(15;1)$ đến một điểm bất kì thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = t \end{cases}$ bằng:

**A.** $\sqrt{10}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $\frac{16}{\sqrt{5}}$. **D.** $\sqrt{5}$.

**Lời giải**

$\Delta: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = t \end{cases} \to \Delta: x-3y-2=0 \xrightarrow{\forall N\in\Delta} MN_{\min} = d(M;\Delta) = \frac{|15-3-2|}{\sqrt{1+9}} = \sqrt{10}.$

**Chọn A.**

**Câu 75.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để khoảng cách từ điểm $A(-1;2)$ đến đường thẳng $\Delta: mx+y-m+4=0$ bằng $2\sqrt{5}$.

**A.** $m=2$. **B.** $\begin{bmatrix} m=-2 \\ m=\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại $m$.

**Lời giải**

$$d\left(A;\Delta\right)=\frac{\left|-m+2-m+4\right|}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|m-3\right|=\sqrt{5}.\sqrt{m^2+1}\Leftrightarrow 4m^2+6m-4=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$ . **Chọn B.**

**Câu 76.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\ y=2-t\end{cases}$ và $d_2:x-2y+m=0$ đến gốc toạ độ bằng $2$.

**A.** $\left[\begin{array}{l}m=-4\\ m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-4\\ m=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-2\end{array}\right.$.

**Lời giải**

$$\begin{cases}d_1:\begin{cases}x=t\\ y=2-t\end{cases}\\ d_2:x-2y+m=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}d_1:x+y-2=0\\ d_2:x-2y+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-m\\ y=m-2\end{cases}$$

$\rightarrow M\left(4-m;m-2\right)=d_1\cap d_2.$

Khi đó: $OM=2\Leftrightarrow\left(4-m\right)^2+\left(m-2\right)^2=4\Leftrightarrow m^2-6m+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=4\end{array}\right.$. **Chọn C.**

**Câu 77.** Đường tròn $\left(C\right)$ có tâm là gốc tọa độ $O\left(0;0\right)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:8x+6y+100=0$. Bán kính $R$ của đường tròn $\left(C\right)$ bằng:

**A.** $R=4$. **B.** $R=6$. **C.** $R=8$. **D.** $R=10$.

**Lời giải**

$$R=d\left(O;\Delta\right)=\frac{\left|100\right|}{\sqrt{64+36}}=10.$$ **Chọn D.**

**Câu 78.** Đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(-2;-2\right)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:5x+12y-10=0$. Bán kính $R$ của đường tròn $\left(C\right)$ bằng:

**A.** $R=\frac{44}{13}$. **B.** $R=\frac{24}{13}$. **C.** $R=44$. **D.** $R=\frac{7}{13}$.

**Lời giải**

$$R=d\left(I;\Delta\right)=\frac{\left|-10-24-10\right|}{\sqrt{25+144}}=\frac{44}{13}.$$ **Chọn A.**

**Câu 79.** Cho đường thẳng $d:21x-11y-10=0$. Trong các điểm $M\left(21;-3\right)$, $N\left(0;4\right)$, $P\left(-19;5\right)$ và $Q\left(1;5\right)$ điểm nào gần đường thẳng $d$ nhất?

**A.** $M$. **B.** $N$. **C.** $P$. **D.** $Q$.

**Lời giải**

$$f\left(x;y\right)=\left|21x-11y-10\right|\rightarrow\begin{cases}f\left(M\left(21;-3\right)\right)=464\\ f\left(N\left(0;4\right)\right)=54\\ f\left(P\left(-19;5\right)\right)=464\\ f\left(Q\left(1;5\right)\right)=44\end{cases}$$ . **Chọn D.**

**Câu 80.** Cho đường thẳng $d: 7x+10y-15=0$. Trong các điểm $M(1;-3)$, $N(0;4)$, $P(-19;5)$ và $Q(1;5)$ điểm nào cách xa đường thẳng $d$ nhất?

**A.** $M$. **B.** $N$. **C.** $P$. **D.** $Q$.

**Lời giải**

$f(x;y)=|7x+10y-15| \to \begin{cases} f(M(1;-3))=38 \\ f(N(0;4))=25 \\ f(P(-19;5))=98 \\ f(Q(1;5))=42 \end{cases}$. **Chọn C.**

**Câu 81.** Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $\Delta_1: 6x-8y+3=0$ và $\Delta_2: 3x-4y-6=0$ bằng:

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $2$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Lời giải**

$\begin{cases} A(2;0)\in\Delta_2 \\ \Delta_2 \parallel \Delta_1: 6x-8y+3=0 \end{cases} \to d(\Delta_1;\Delta_2)=d(A;\Delta_1)=\frac{|12+3|}{\sqrt{100}}=\frac{3}{2}$. **Chọn B.**

**Câu 82.** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d: 7x+y-3=0$ và $\Delta: \begin{cases} x=-2+t \\ y=2-7t \end{cases}$.

**A.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $15$. **C.** $9$. **D.** $\frac{9}{\sqrt{50}}$.

**Lời giải**

$\begin{cases} A(-2;2)\in\Delta,\ \vec{n}_\Delta=(7;1) \\ d: 7x+y-3=0 \to \vec{n}_d=(7;1) \end{cases}$

$\to \Delta \uparrow\uparrow d \to d(d;\Delta)=d(A;d)=\frac{|-14+2-3|}{\sqrt{50}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$. **Chọn A.**

**Câu 83.** Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $d_1: 6x-8y-101=0$ và $d_2: 3x-4y=0$ bằng:

**A.** $10,1$. **B.** $1,01$. **C.** $101$. **D.** $\sqrt{101}$.

**Lời giải**

$\begin{cases} A(4;3)\in d_2 \\ d_2 \parallel d_1: 6x-8y-101=0 \end{cases} \to d(d_1;d_2)=\frac{|24-24-101|}{\sqrt{100}}=\frac{101}{10}=10,1$. **Chọn A.**

**Câu 84.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(2;3)$ và $B(1;4)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều hai điểm $A$ và $B$?

**A.** $x-y+2=0$. **B.** $x+2y=0$. **C.** $2x-2y+10=0$. **D.** $x-y+100=0$.

**Lời giải**

Đường thẳng cách đều hai điểm $A, B$ thì đường thẳng đó hoặc song song (hoặc trùng) với $AB$, hoặc đi qua trung điểm $I$ của đoạn $AB$.

Ta có: $\begin{cases} A(2;3) \\ B(1;4) \end{cases} \to \begin{cases} I\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right) \\ \overrightarrow{AB}=(-1;1) \to \vec{n}_{AB}=(1;1) \end{cases} \to AB \parallel d: x-y-2=0$. **Chọn A.**

**Câu 85.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(0;1)$, $B(12;5)$ và $C(-3;0)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều ba điểm $A$, $B$ và $C$.

**A.** $x-3y+4=0$. **B.** $-x+y+10=0$. **C.** $x+y=0$. **D.** $5x-y+1=0$.

**Lời giải**

Dễ thấy ba điểm $A, B, C$ thẳng hàng nên đường thẳng cách điều $A, B, C$ khi và chỉ khi chúng song song hoặc trùng với $AB$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(12;4) \to \vec{n}_{AB}=(1;-3) \to AB \parallel d: x-3y+4=0$. **Chọn A.**

**Câu 86.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;1)$, $B(-2;4)$ và đường thẳng $\Delta: mx-y+3=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để $\Delta$ cách đều hai điểm $A$, $B$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

**Lời giải**

Gọi $I$ là trung điểm đoạn $AB \to \begin{cases} I\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right) \\ \overrightarrow{AB}=(-3;3) \to \vec{n}_{AB}=(1;1) \end{cases}$.

Khi đó: $\Delta: mx-y+3=0 \left(\vec{n}_{\Delta}=(m;-1)\right)$ cách đều $A, B$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I \in \Delta \\ \frac{m}{1}=\frac{-1}{1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{m}{2}-\frac{5}{2}+3=0 \\ m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

**Câu 87.** Đường thẳng $\Delta$ song song với đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$ và cách $d$ một khoảng bằng 1 có phương trình:

**A.** $3x-4y+6=0$ hoặc $3x-4y-4=0$.

**B.** $3x-4y-6=0$ hoặc $3x-4y+4=0$.

**C.** $3x-4y+6=0$ hoặc $3x-4y+4=0$.

**D.** $3x-4y-6=0$ hoặc $3x-4y-4=0$.

**Lời giải**

$\begin{cases} d: 3x-4y+1=0 \to M(1;1) \in d \\ \Delta \parallel d \to \Delta: 3x-4y+c=0 \end{cases} \to 1=d(d;\Delta)=d(M;\Delta)=\frac{|c-1|}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-4 \\ c=6 \end{array}\right.$.

**Chọn A.**

**Câu 88.** Tập hợp các điểm cách đường thẳng $\Delta: 3x-4y+2=0$ một khoảng bằng 2 là hai đường thẳng có phương trình nào sau đây?

**A.** $3x-4y+8=0$ hoặc $3x-4y+12=0$.

**B.** $3x-4y-8=0$ hoặc $3x-4y+12=0$.

**C.** $3x-4y-8=0$ hoặc $3x-4y-12=0$.

**D.** $3x-4y+8=0$ hoặc $3x-4y-12=0$.

**Lời giải**

$d\left(M\left(x;y\right);\Delta\right)=2\Leftrightarrow\dfrac{\left|3x-4y+2\right|}{5}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-4y+12=0\\3x-4y-8=0\end{array}\right.$. **Chọn B.**

**Câu 89.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $d_1:5x+3y-3=0$ và $d_2:5x+3y+7=0$ song song nhau. Đường thẳng vừa song song và cách đều với $d_1$, $d_2$ là:

**A.** $5x+3y-2=0.$ **B.** $5x+3y+4=0.$

**C.** $5x+3y+2=0.$ **D.** $5x+3y-4=0.$

**Lời giải**

$d\left(M\left(x;y\right);d_1\right)=d\left(M\left(x;y\right);d_2\right)\Leftrightarrow\dfrac{\left|5x+3y-3\right|}{\sqrt{34}}=\dfrac{\left|5x+3y+7\right|}{\sqrt{34}}\Leftrightarrow5x+3y+2=0.$

**Chọn C.**

**Câu 90.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, gọi $d$ là đường thẳng đi qua $M(4;2)$ và cách điểm $A(1;0)$ khoảng cách $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. Biết rằng phương trình đường thẳng $d$ có dạng $x+by+c=0$ với $b,c$ là hai số nguyên. Tính $b+c.$

**A.** $4$. **B.** $5$. **C.** $-1$. **D.** $-5$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: $M(4;2)\in d\Leftrightarrow4+2b+c=0\Rightarrow c=-4-2b.$ (1)

$d(A,d)=\dfrac{\left|1+c\right|}{\sqrt{1+b^2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\Leftrightarrow10(1+c)^2=9(1+b^2).$ (2)

Thay $c=-4-2b$ vào PT (2) ta được PT: $31b^2+120b+81=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-3(tmdk)\\b=-\dfrac{27}{31}(ktmdk)\end{array}\right.$

$\Rightarrow b=-3,c=2\Rightarrow b+c=-1..$

**Câu 91.** Đường thẳng $12x+5y=60$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác. Tổng độ dài các đường cao của tam giác đó là

**A.** $\dfrac{60}{13}$. **B.** $\dfrac{281}{13}$. **C.** $\dfrac{360}{17}$. **D.** $20$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Gọi $A$, $B$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng đã cho với $Ox$, $Oy$.

Ta có $12x+5y=60\Leftrightarrow\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{12}=0$. Do đó $A\left(5;0\right)$, $B\left(0;12\right)$.

Gọi $H$ là hình chiếu của $O$ lên $AB$. Khi đó: $OH=d\left(O;AB\right)=\dfrac{\left|12.0+5.0-60\right|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\dfrac{60}{13}$.

Tam giác $OAB$ là tam giác vuông tại $O$ nên tổng độ dài các đường cao là

$OA+OB+OH=5+12+\dfrac{60}{13}=\dfrac{281}{13}$.

## Dạng 4. Một số bài toán liên quan đến diện tích

**Câu 92.** Đường thẳng $\Delta:5x+3y=15$ tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng bao nhiêu?

**A.** $7,5$. **B.** $5$. **C.** $15$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đường thẳng $\Delta: 5x+3y=15$ cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(3;0)$, $B(0;5)$.

Ta có $OA=3$, $OB=5$. Khi đó $S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{15}{2}=7,5$.

**Câu 93.** Cho hai đường thẳng $d_1: y=mx-4; d_2: -mx-4$. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để tam giác tạo thành bởi $d_1, d_2$ và trục hoành có diện tích lớn hơn $8$. Số phần tử của tập $S$ là

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$d_1: y=mx-4$, $d_2: y=-mx-4$.

$d_1$, $d_2$ cắt nhau cùng cắt trục hoành khi $m\neq 0$.

Gọi $A\left(\frac{4}{m};0\right)$, $B\left(-\frac{4}{m};0\right)$ lần lượt là giao điểm của $d_1$, $d_2$ và trục hoành.

Phương trình hoành độ giao điểm của $d_1$, $d_2$: $mx-4=-mx-4\Leftrightarrow x=0$.

Gọi $C$ là giao điểm của $d_1$ và $d_2$ thì $C(0;-4)$.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}d(C,Ox).AB$, có $d(C,Ox)=|y_C|=4$, $AB=|x_A-x_B|=\frac{8}{|m|}$.

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}.4.\frac{8}{|m|}=\frac{16}{|m|}$.

Có $S_{ABC}>8\Leftrightarrow\frac{16}{|m|}>8\Leftrightarrow|m|<2$, $m\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow m=1$. Vậy $S=\{1\}$.

**Câu 94.** Tìm phương trình đường thẳng $d: y=ax+b.$ Biết đường thẳng $d$ đi qua điểm $I(1;3)$ và tạo với hai tia $Ox, Oy$ một tam giác có diện tích bằng $6$?

**A.** $y=\left(9+\sqrt{72}\right)x-\sqrt{72}-6$. **B.** $y=\left(9-\sqrt{72}\right)x+\sqrt{72}-6$.

**C.** $y=3x+6$. **D.** $y=-3x+6.$

**Lời giải.**

**Chọn** D

Vì đường thẳng $d$ đi qua điểm $I(1;3)$ nên ta có: $3=a+b\quad(1)$.

Đường thẳng $d: y=ax+b$ cắt trục $Ox, Oy$ lần lượt là $A\left(-\frac{b}{a};0\right), B(0;b), (a\neq 0)$.

Theo giả thiết $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}\left|\frac{b}{a}\right|.|b|=\frac{1}{2}\frac{b^2}{|a|}=6\quad(2)$.

Từ phương trình $(1)\Leftrightarrow a=3-b$ thay vào phương trình

$(2): \frac{b^2}{|3-b|}=12\Leftrightarrow b^2=12|3-b|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b^2=12(3-b), \quad (b<3)\\ b^2=-12(3-b), \quad (b>3)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b^2+12b-36=0, \quad (b<3)\\ b^2-12b+36=0, \quad (b>3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\left[\begin{array}{l} b=-6+6\sqrt{2}\\ b=-6-6\sqrt{2}\end{array}\right. & (b<3)\\ b=6 & (b>3)\end{array}\right.$

Với $b=6$ ta được $a=-3$.

Vậy phương trình $d: y=-3x+6$.

***Ghi chú:*** Với $\left[\begin{array}{l} b=-6+6\sqrt{2} \\ b=-6-6\sqrt{2} \end{array}\right.$ thì nhìn vào 4 đáp án không có nên ta không cần tìm nữa.

**Câu 95.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho điểm $M(2;1)$. Đường thẳng $d$ đi qua $M$, cắt các tia $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$ và $B$ ($A,B$ khác $O$) sao cho tam giác $OAB$ có diện tích nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng $d$ là.

**A.** $2x-y-3=0$. **B.** $x-2y=0$. **C.** $x+2y-4=0$. **D.** $x-y-1=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi đường thẳng d cắt tia $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A(a;0)$ và $B(0;b); a,b>0$

$\Rightarrow (d): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

Vì $(d)$ qua $M(2;1) \Rightarrow \dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$

$\Rightarrow 1 \geq 2\sqrt{\dfrac{2}{ab}} \Rightarrow ab \geq 8$

Ta có diện tích tam giác vuông $OAB$ tại $O$ là $S=\dfrac{1}{2}.OA.OB=\dfrac{1}{2}.a.b \geq 4$

Diện tích tam giác vuông $OAB$ đạt giá trị nhỏ nhất $S=4 \Leftrightarrow \dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{b} \Leftrightarrow a=2b$

$\Rightarrow \dfrac{2}{2b}+\dfrac{1}{b}=1 \Rightarrow b=2, a=4$

$\Rightarrow (d): \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1 \Leftrightarrow x+2y-4=0$.

**Câu 96.** Đường thẳng $d$: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, $(a \neq 0; b \neq 0)$ đi qua $M(-1;6)$ tạo với tia $Ox, Oy$ một tam giác có diện tích bằng 4. Tính $S=a+2b$.

**A.** $S=\dfrac{-5+7\sqrt{5}}{3}$. **B.** $S=-\dfrac{38}{3}$. **C.** $S=10$. **D.** $S=6$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$d$ đi qua $M(-1;6) \Leftrightarrow \dfrac{-1}{a}+\dfrac{6}{b}=1$ (1).

Đường thẳng cắt tia $Ox$ tại $A(a;0), a>0 \Rightarrow OA=a$.

Đường thẳng cắt tia $Oy$ tại $B(0;b), b>0 \Rightarrow OB=b$.

$\Delta OAB$ vuông tại O nên có diện tích là $\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}ab$.

Theo đề $\dfrac{1}{2}ab=4 \Leftrightarrow ab=8$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra: $a=2; b=4 \Rightarrow S=a+2b=10$.

**Dạng 5. Xác định điểm**

**Câu 97.** Cho đường thẳng $d: 3x+5y-15=0$. Trong các điểm sau đây, điểm nào **không** thuộc đường thẳng $d$

**A.** $M_1(5;0)$. **B.** $M_4(-5;6)$. **C.** $M_2(0;3)$. **D.** $M_3(5;3)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng $d$, ta có $M_1, M_4, M_2 \in d$ và $M_3 \notin d$.

**Câu 98.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(4;3)$, $B(2;7)$, $C(-3;-8)$. Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh $A$ xuống cạnh $BC$ là:

**A.** $(-1;4)$. **B.** $(1;-4)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;1)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $B$ và $C$ có dạng: $\frac{x+3}{2+3}=\frac{y+8}{7+8} \Leftrightarrow 3x-y+1=0$.

Đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $BC$ có phương trình:

$1(x-4)+3(y-3)=0 \Leftrightarrow x+3y-13=0$

Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh $A$ xuống cạnh $BC$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x-y+1=0 \\ x+3y-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}.$$

**Câu 99.** Cho đường thẳng $d: -3x+y-5=0$ và điểm $M(-2;1)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của $M$ trên $d$ là

**A.** $\left(\frac{7}{5};-\frac{4}{5}\right)$. **B.** $\left(-\frac{7}{5};\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\left(-\frac{7}{5};-\frac{4}{5}\right)$. **D.** $\left(-\frac{5}{7};\frac{4}{5}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $d$.

Ta có phương trình của $\Delta$ là: $x+3y-1=0$

Tọa độ hình chiếu vuông góc của $M$ trên $d$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} -3x+y-5=0 \\ x+3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{7}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}.$$

**Câu 100.** Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2)$ lên đường thẳng $\Delta: x-y=0$ là

**A.** $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(2;2)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đường thẳng $\Delta$ có 1 VTPT là $\vec{n}=(1;-1)$ nên $\Delta$ có 1 VTCP là $\vec{u}=(1;1)$

Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $M(1;2)$ lên đường thẳng $\Delta$, tọa độ $H(t;t)$

Vì $MH\perp\Delta\Rightarrow\overrightarrow{MH}\perp\vec{u}\Rightarrow\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t-1+t-2=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}\Rightarrow H\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

**Câu 101.** Cho hai điểm $A(3;-1),B(0;3)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $Ox$ sao khoảng cách từ $M$ đến đường thẳng $AB$ bằng 1.

**A.** $M\left(\frac{7}{2};0\right)$ và $M(1;0)$. **B.** $M\left(\sqrt{13};0\right)$.

**C.** $M(4;0)$. **D.** $M(2;0)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $M(x;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;4)$

Phương trình đường thẳng $AB:4x+3(y-3)=0\Leftrightarrow 4x+3y-9=0$.

$$d(M;AB)=\frac{|4x-9|}{5}\Leftrightarrow 5=|4x-9|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{7}{2}\\x=1\end{array}\right.$$

Vậy $M\left(\frac{7}{2};0\right);M(1;0)$.

**Câu 102.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;1)$, $B(4;-3)$ và đường thẳng $d:x-2y-1=0$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ có tọa độ nguyên và thỏa mãn khoảng cách từ $M$ đến đường thẳng $AB$ bằng 6.

**A.** $M(3;7)$. **B.** $M(7;3)$. **C.** $M(-43;-27)$. **D.** $M\left(3;-\frac{27}{11}\right)$.

**Lời giải**

$\left\{\begin{array}{l}M\in d:x-2y-1=0\to M(2m+1;m),\ m\in\mathbb{Z}\\AB:4x+3y-7=0\end{array}\right.$. Khi đó

$$6=d(M;AB)=\frac{|8m+4+3m-7|}{5}\Leftrightarrow|11m-3|=30\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=\frac{27}{11}\ (1)\end{array}\right.\to M(7;3).$$ **Chọn B.**

**Câu 103.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $A(0;1)$ và đường thẳng $d:\left\{\begin{array}{l}x=2+2t\\y=3+t\end{array}\right.$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ và cách $A$ một khoảng bằng 5, biết $M$ có hoành độ âm.

**A.** $M(4;4)$. **B.** $\left[\begin{array}{l}M(-4;4)\\M\left(-\frac{24}{5};-\frac{2}{5}\right)\end{array}\right.$. **C.** $M\left(-\frac{24}{5};-\frac{2}{5}\right)$. **D.** $M(-4;4)$.

$M\in d:\left\{\begin{array}{l}x=2+2t\\y=3+t\end{array}\right.\to M(2+2t;3+t)$ với $2+2t<0\Leftrightarrow t<-1$. Khi đó

$$5 = AM \Leftrightarrow (2t+2)^2 + (t+2)^2 = 25 \Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1\ (l) \\ t = -\dfrac{17}{5} \rightarrow M\left(-\dfrac{24}{5};;-\dfrac{2}{5}\right). \end{array}\right.$$

**Chọn C.**

**Câu 104.** Biết rằng có đúng hai điểm thuộc trục hoành và cách đường thẳng $\Delta: 2x - y + 5 = 0$ một khoảng bằng $2\sqrt{5}$. Tích hoành độ của hai điểm đó bằng:

**A.** $-\dfrac{75}{4}$. **B.** $-\dfrac{25}{4}$. **C.** $-\dfrac{225}{4}$. **D.** Đáp số khác.

**Lời giải**

Gọi $M(x;0) \in Ox$ thì hoành độ của hai điểm đó là nghiệm của phương trình:

$$d(M;\Delta) = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|2x+5|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} = x_1 \\ x = -\dfrac{15}{2} = x_2 \end{array}\right. \longrightarrow x_1 \cdot x_2 = -\frac{75}{4}.$$ **Chọn A.**

**Câu 105.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(0;3)$. Tìm điểm $M$ thuộc trục hoành sao cho khoảng cách từ $M$ đến đường thẳng $AB$ bằng 1.

**A.** $\left[\begin{array}{l} M\left(\dfrac{7}{2};0\right) \\ M(1;0) \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} M\left(\dfrac{14}{3};0\right) \\ M\left(\dfrac{4}{3};0\right) \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} M\left(-\dfrac{7}{2};0\right) \\ M(-1;0) \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} M\left(-\dfrac{14}{3};0\right) \\ M\left(-\dfrac{4}{3};0\right) \end{array}\right.$.

**Lời giải**

$$\left\{\begin{array}{l} M(x;0) \\ AB: 4x + 3y - 9 = 0 \end{array}\right. \rightarrow 1 = d(M;AB) = \frac{|4x-9|}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7}{2} \rightarrow M\left(\dfrac{7}{2};0\right) \\ x = 1 \rightarrow M(1;0) \end{array}\right.$$ **Chọn A.**

**Câu 106.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(3;0)$ và $B(0;-4)$. Tìm điểm $M$ thuộc trục tung sao cho diện tích tam giác $MAB$ bằng 6.

**A.** $\left[\begin{array}{l} M(0;0) \\ M(0;-8) \end{array}\right.$. **B.** $M(0;-8)$. **C.** $M(6;0)$. **D.** $\left[\begin{array}{l} M(0;0) \\ M(0;6) \end{array}\right.$.

**Lời giải**

Ta có

$$\left\{\begin{array}{l} AB: 4x - 3y - 12 = 0 \\ AB = 5 \\ M(0;y) \rightarrow h_M = d(M;AB) = \dfrac{|3y+12|}{5} \end{array}\right. \rightarrow 6 = S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}.5.\frac{|3y+12|}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \rightarrow M(0;0) \\ y = -8 \rightarrow M(0;-8) \end{array}\right.$$

**Chọn A.**

**Câu 107.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: 3x - 2y - 6 = 0$ và $\Delta_2: 3x - 2y + 3 = 0$. Tìm điểm $M$ thuộc trục hoành sao cho $M$ cách đều hai đường thẳng đã cho.

**A.** $M\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. **C.** $M\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **D.** $M\left(\sqrt{2};0\right)$.

**Lời giải**

$\begin{cases} M(x;0) \\ d(M;\Delta_1)=d(M;\Delta_2) \end{cases} \to \frac{|3x-6|}{\sqrt{13}}=\frac{|3x+3|}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \to M\left(\frac{1}{2};0\right)$. **Chọn B.**

**Câu 108.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(-2;2)$, $B(4;-6)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \end{cases}$. Tìm điểm $M$ thuộc $d$ sao cho $M$ cách đều hai điểm $A$, $B$.

**A.** $M(3;7)$. **B.** $M(-3;-5)$. **C.** $M(2;5)$. **D.** $M(-2;-3)$

**Lời giải**

$\begin{cases} M \in d:\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \end{cases} \to M(t;1+2t) \\ MA=MB \end{cases} \to (t+2)^2+(2t-1)^2=(t-4)^2+(2t+7)^2$

$\Leftrightarrow 20t+60=0 \Leftrightarrow t=-3 \to M(-3;-5)$. **Chọn B.**

**Câu 109.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(-1;2)$, $B(-3;2)$ và đường thẳng $d:2x-y+3=0$. Tìm điểm $C$ thuộc $d$ sao cho tam giác $ABC$ cân tại $C$.

**A.** $C(-2;-1)$. **B.** $C\left(-\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $C(-1;1)$. **D.** $C(0;3)$

**Lời giải**

$\begin{cases} M \in d:2x-y+3=0 \to M(m;2m+3) \\ MA=MB \end{cases} \to (m+1)^2+(2m+1)^2=(m+3)^2+(2m+1)^2$

$\Leftrightarrow m=-2 \to M(-2;-1)$. **Chọn A.**

**Câu 110.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(1;2)$, $B(0;3)$ và đường thẳng $d:y=2$. Tìm điểm $C$ thuộc $d$ sao cho tam giác $ABC$ cân tại $B$.

**A.** $C(1;2)$. **B.** $C(4;2)$. **C.** $\left[\begin{array}{l} C(1;2) \\ C(-1;2) \end{array}\right.$. **D.** $C(-1;2)$.

**Lời giải**

$\begin{cases} C \in d:y=2 \to C(c;2) \\ BA=BC \end{cases} \to 2=c^2+1 \Leftrightarrow c=\pm 1 \to \left[\begin{array}{l} C(1;2) \\ C(-1;2) \end{array}\right.$. **Chọn C.**

**Câu 111.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, giả sử điểm $A(a;b)$ thuộc đường thẳng $d:x-y-3=0$ và cách $\Delta:2x-y+1=0$ một khoảng bằng $\sqrt{5}$. Tính $P=ab$ biết $a>0$.

**A.** 4. **B.** $-2$ **C.** 2. **D.** $-4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Do $A(a;b)$ thuộc đường thẳng $d:x-y-3=0$ nên $a-b-3=0 \Leftrightarrow b=a-3 \Rightarrow A(a;a-3)$.

Khoảng cách từ điểm $A(a;a-3)$ đến đường thẳng $\Delta:2x-y+1=0$ là

$d(a,\Delta)=\frac{|2a-(a-3)+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|a+4|}{\sqrt{5}}$.

Theo đề bài $d(a,\Delta)=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|a+4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |a+4|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+4=5 \\ a+4=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-9 \end{array}\right.$.

Theo đề bài điểm $A(a;b)$ có hoành độ dương nên $a=1 \Rightarrow A(1;-2)$. Vậy $P=ab=1(-2)=-2$.

**Câu 112.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho biết điểm $M(a;b)$ $(a>0)$ thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=3+t\\y=2+t\end{cases}$ và cách đường thẳng $\Delta: 2x-y-3=0$ một khoảng $2\sqrt{5}$. Khi đó $a+b$ là.

**A.** 21. **B.** 23. **C.** 22 **D.** 20.

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì $M(a;b)\in d \Rightarrow M(3+t;2+t)$.

Lại có $M$ cách đường thẳng $\Delta: 2x-y-3=0$ một khoảng $2\sqrt{5}$ suy ra $\dfrac{|2(3+t)-(2+t)-3|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow|t+1|=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=9\\t=-11\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(12;11)\\M(-8;-9)\end{array}\right.$.

Vì $a>0$ nên điểm $M(-8;-9)$ không thỏa mãn.

Vậy: $M(12;11)\Rightarrow a+b=23$.

**Câu 113.** Điểm $A(a;b)$ thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=3-t\\y=2-t\end{cases}$ và cách đường thẳng $\Delta: 2x-y-3=0$ một khoảng bằng $2\sqrt{5}$ và $a<0$. Tính $P=a.b$.

**A.** $P=-72$. **B.** $P=72$. **C.** $P=132$. **D.** $P=-132$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$A(a;b)\in d\Rightarrow\begin{cases}a=3-t\\b=2-t\end{cases}$.

Giả thiết: $a<0\Leftrightarrow 3-t<0\Leftrightarrow t>3$.

Ta có $d(A;d)=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\dfrac{|2(3-t)-(2-t)-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow|1-t|=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=11\\t=-9\end{array}\right.$.

Vì $t>3$ nên chọn $t=11$. Khi đó $\begin{cases}a=-8\\b=-9\end{cases}\Rightarrow P=72$. Do đó chọn đáp án **B.**

**Câu 114.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho điểm $I(1;2)$ và đường thẳng $(d): 2x+y-5=0$. Biết rằng có hai điểm $M_1, M_2$ thuộc $(d)$ sao cho $IM_1=IM_2=\sqrt{10}$. Tổng các hoành độ của $M_1$ và $M_2$ là

**A.** $\dfrac{7}{5}$. **B.** $\dfrac{14}{5}$. **C.** 2. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn B**

$M_1\in(d): 2x+y-5=0\Rightarrow M_1(m;5-2m)\Rightarrow\overrightarrow{IM_1}(m-1;3-2m)$.

$IM_1=\sqrt{10}\Rightarrow\sqrt{(m-1)^2+(3-2m)^2}=\sqrt{10}\Leftrightarrow 5m^2-14m+10=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\dfrac{14}{5}\end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ có 2 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M_1(0;5); M_2\left(\dfrac{14}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$.

Tổng các hoành độ của $M_1$ và $M_2$ là: $0+\dfrac{14}{5}=\dfrac{14}{5}$.

**Câu 115.** Trong hệ tọa độ $Oxy$ cho $A(1;1)$, $B(4;-3)$. Gọi $C(a;b)$ thuộc đường thẳng $d: x-2y-1=0$ sao cho khoảng cách từ $C$ đến đường thẳng $AB$ bằng 6. Biết rằng $C$ có hoành độ nguyên, tính $a+b$?

**A.** $a+b=10$. **B.** $a+b=7$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a+b=-4$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-4)$.

$\Rightarrow$ phương trình tổng quát của đường thẳng $AB$ có dạng $4x+3y+m=0$.

Vì $A(1;1)\in AB$ nên $4.1+3.1+m=0\Leftrightarrow m=-7\Rightarrow AB: 4x+3y-7=0$.

Vì $C(a;b)\in d: x-2y-1=0\Rightarrow a-2b-1=0\Rightarrow a=2b+1$.

Theo đề ra $d(C;AB)=6\Leftrightarrow\dfrac{|4a+3b-7|}{\sqrt{4^2+3^2}}=6\Leftrightarrow|4a+3b-7|=30$.

Thay $a=2b+1$ vào ta được:

$$|4(2b+1)+3b-7|=30\Leftrightarrow|11b-3|=30\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}11b-3=30\\11b-3=-30\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=3\\b=-\dfrac{27}{11}\end{array}\right.$$

Do $C$ có tọa độ nguyên nên $b=3; a=7\Rightarrow a+b=10$.

**Câu 116.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho điểm hai điểm $A(-4;2)$, $B(2;6)$ và điểm $C$ nằm trên đường thẳng $d:\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+1}{-2}$ sao cho $CA=CB$. Khi đó tọa độ điểm C là

**A.** $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{8}{5}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{-1}{5};\dfrac{12}{5}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{11}{5}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{9}{5}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

d có phương trình tham số là $\begin{cases}x=5+3t\\y=-1-2t\end{cases}$

Gọi $C(5+3t;-1-2t)\in d$, ta có: $\overrightarrow{CA}=(-9-3t;3+2t),\overrightarrow{CB}=(-3-3t;7+2t)$

$CA=CB\Leftrightarrow CA^2=CB^2\Leftrightarrow(9+3t)^2+(3+2t)^2=(3+3t)^2+(7+2t)^2$

$\Leftrightarrow 20t=-32\Leftrightarrow t=\dfrac{-8}{5}$

Suy ra: $C\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{11}{5}\right)$

**Câu 117.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho $A(-3;5), B(1;3)$ và đường thẳng $d: 2x-y-1=0$, đường thẳng $AB$ cắt $d$ tại $I$. Tính tỉ số $\dfrac{IA}{IB}$.

**A.** 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn A**

Véc tơ chỉ phương của AB là: $\overrightarrow{AB}=(4;-2)$ $\Rightarrow$ véc tơ pháp tuyến của AB là: $\vec{n}=(1;2)$

Phương trình đường thẳng $AB$ là: $(x+3)+2(y-5)=0\Rightarrow x+2y-7=0$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}2x-y-1=0\\x+2y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{9}{5}\\y=\dfrac{13}{5}\end{cases}$

$\Rightarrow I\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{13}{5}\right)$.

Vậy tỉ số $\dfrac{IA}{IB}=\dfrac{\sqrt{\left(x_I-x_A\right)^2+\left(y_I-y_A\right)^2}}{\sqrt{\left(x_I-x_B\right)^2+\left(y_I-y_B\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{9}{5}+3\right)^2+\left(\dfrac{13}{5}-5\right)^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{9}{5}-1\right)^2+\left(\dfrac{13}{5}-3\right)^2}}=6$.

**Câu 118.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $B(-2;3)$ và $C(3;-2)$. Điểm $I(a;b)$ thuộc $BC$ sao cho với mọi điểm $M$ không nằm trên đường thẳng $BC$ thì $\overrightarrow{MI}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{MB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{MC}$. Tính $S=a^2+b^2$.

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $M(x;y)$. Khi đó: $\overrightarrow{MI}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{MB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\begin{cases}a-x=\dfrac{2}{5}(-2-x)+\dfrac{3}{5}(3-x)\\b-y=\dfrac{2}{5}(3-y)+\dfrac{3}{5}(-2-y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$.

Nên $I(1;0)$. Vậy $S=a^2+b^2=1$.

**Dạng 6. Bài toán liên quan quan đến tam giác**

**Câu 119.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(1;2),B(3;1),C(5;4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao kẻ từ $A$ của tam giác $ABC$?

**A.** $2x+3y-8=0$. **B.** $2x+3y+8=0$. **C.** $3x-2y+1=0$. **D.** $2x+3y-2=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $AH$ là đường cao kẻ từ $A$ của $\Delta ABC$. Ta có: $AH\perp BC\Rightarrow$ *vtpt* $AH$ là $\overrightarrow{BC}=(2;3)$.

Phương trình $AH:2(x-1)+3(y-2)=0\Leftrightarrow 2x+3y-8=0$..

**Câu 120.** Cho $\Delta ABC$ có $A(2;-1),B(4;5),C(-3;2)$. Đường cao $AH$ của $\Delta ABC$ có phương trình là

**A.** $7x+3y-11=0$. **B.** $-3x+7y+13=0$. **C.** $3x+7y+17=0$. **D.** $7x+3y+10=0$.

**Lời giải**

Đường cao $AH$ đi qua điểm $A(2;-1)$ và có VTPT là $\overrightarrow{BC}=(-7;-3)$.

Vậy phương trình $AH$ là $-7(x-2)-3(y+1)=0\Leftrightarrow 7x+3y-11=0$.

**Câu 121.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(1;2),B(3;1),C(5;4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao kẻ từ $A$ của tam giác $ABC$?

**A.** $2x+3y-8=0$. **B.** $2x+3y+8=0$.

**C.** $3x-2y+1=0$. **D.** $2x+3y-2=0$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(2;3)$

Đường cao kẻ từ $A$ của tam giác $ABC$ nhận $\overrightarrow{BC}=(2;3)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua điểm $A$ nên có phương trình: $2(x-1)+3(y-2)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-8=0$.

**Câu 122.** Trong mặt phẳng cho tam giác $ABC$ cân tại $C$ có $B(2;-1)$, $A(4;3)$. Phương trình đường cao $CH$ là

**A.** $x-2y-1=0$. **B.** $x-2y+1=0$. **C.** $2x+y-2=0$. **D.** $x+2y-5=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tam giác $ABC$ cân tại $C$ nên $H$ là trung điểm của $AB$ và $CH \perp AB$.

Có $H(3;1)$ và $\overrightarrow{AB}=(-2;-4)=-2(1;2)$.

Vậy phương trình đường cao $CH$ là $1(x-3)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0$.

**Câu 123.** Cho $\Delta ABC$ có $A(2;-1), B(4;5), C(-3;2)$. Phương trình tổng quát của đường cao $BH$ là

**A.** $3x+5y-37=0$. **B.** $5x-3y-5=0$. **C.** $3x-5y-13=0$. **D.** $3x+5y-20=0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Do $BH \perp AC \Rightarrow$ Chọn VTPT của $BH$ là $\overrightarrow{n_{BH}}=\overrightarrow{CA}=(5;-3)$.

Phương trình tổng quát của $BH: 5(x-4)-3(y-5)=0 \Leftrightarrow 5x-3y-5=0$.

**Câu 124.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;1)$, $B(0;-2)$, $C(4;2)$. Lập phương trình đường trung tuyến của tam giác $ABC$ kẻ từ $A$.

**A.** $x+y-2=0$. **B.** $2x+y-3=0$. **C.** $x+2y-3=0$. **D.** $x-y=0$.

**Lời giải**

Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Ta cần viết phương trình đường thẳng $AM$.

Ta có :

$\begin{cases} B(0;-2) \\ C(4;2) \end{cases} \rightarrow M(2;0) \rightarrow \vec{u}_{AM}=\overrightarrow{AM}=(1;-1) \rightarrow \vec{n}_{AM}=(1;1) \rightarrow AM: x+y-2=0$. **Chọn A.**

**Câu 125.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác $ABC$ kẻ từ $A$.

**A.** $7x+3y-11=0$. **B.** $-3x+7y+13=0$.

**C.** $3x+7y+1=0$. **D.** $7x+3y+13=0$.

**Lời giải**

Gọi $h_A$ là đường cao kẻ từ $A$ của tam giác $ABC$. Ta có

$\begin{cases} A(2;-1) \in h_A \\ h_A \perp BC \rightarrow \vec{n}_{h_A}=\overrightarrow{BC}=(-7;-3)=-(7;3) \end{cases} \rightarrow h_A: 7x+3y-11=0$. **Chọn A.**

**Câu 126.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác $ABC$ kẻ từ $B$.

**A.** $3x-5y-13=0$. **B.** $3x+5y-20=0$.

**C.** $3x+5y-37=0$. **D.** $5x-3y-5=0$.

**Lời giải**

Gọi $h_B$ là đường cao kẻ từ $B$ của tam giác $ABC$. Ta có

$$\begin{cases} B(4;5) \in h_B \\ h_B \perp AC \to \vec{n}_{h_B} = \overrightarrow{AC} = (-5;3) = -(5;-3) \end{cases} \to h_B : 5x-3y-5=0.$$ **Chọn D.**

**Câu 127.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác $ABC$ kẻ từ $C$.

**A.** $x+y-1=0$. **B.** $x+3y-3=0$. **C.** $3x+y+11=0$. **D.** $3x-y+11=0$.

**Lời giải**

Gọi $h_C$ là đường cao kẻ từ $C$ của tam giác $ABC$. Ta có

$$\begin{cases} C(-3;2) \in h_C \\ h_C \perp AB \to \vec{n}_{h_C} = \overrightarrow{AB} = (2;6) = 2(1;3) \end{cases} \to h_C : x+3y-3=0.$$ **Chọn B.**

**Câu 128.** Cho tam giác $ABC$ với $A(1;1)$, $B(0;-2)$, $C(4;2)$. Phương trình tổng quát của đường trung tuyến đi qua điểm $B$ của tam giác $ABC$ là

**A.** $7x+7y+14=0$. **B.** $5x-3y+1=0$. **C.** $3x+y-2=0$. **D.** $-7x+5y+10=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $AC \Rightarrow M\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$.

Đường trung tuyến $BM$ nhận $\vec{n} = (-7;5)$ làm một véctơ pháp tuyến. Vậy phương trình tổng quát của đường trung tuyến qua điểm $B$ của tam giác $ABC$ là:

$-7x+5(y+2)=0 \Leftrightarrow -7x+5y+10=0$.

**Câu 129.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;3)$, $B(1;0)$, $C(-1;-2)$. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh $A$ của tam giác $ABC$ là:

**A.** $2x-y-1=0$. **B.** $x-2y+4=0$. **C.** $x+2y-8=0$. **D.** $2x+y-7=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $I$ là trung điểm của $BC \Rightarrow I(0;-1)$

Ta có $\overrightarrow{AI} = (-2;-4) \Rightarrow \vec{n} = (2;-1)$ là vecto pháp tuyến của đường thẳng $AI$.

Phương trình đường thẳng $AI$ là: $2(x-2)-(y-3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-1=0$

**Câu 130.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(1;4)$, $B(3;2)$ và $C(7;3)$. Viết phương trình tham số của đường trung tuyến $CM$ của tam giác.

**A.** $\begin{cases} x=7 \\ y=3+5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3-5t \\ y=-7 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=7+t \\ y=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2 \\ y=3-t \end{cases}$.

**Lời giải**

$$\begin{cases} A(1;4) \\ B(3;2) \end{cases} \to M(2;3) \to \overrightarrow{MC} = (5;0) = 5(1;0) \to CM : \begin{cases} x=7+t \\ y=3 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$ **Chọn C.**

**Câu 131.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;4)$, $B(5;0)$ và $C(2;1)$. Trung tuyến $BM$ của tam giác đi qua điểm $N$ có hoành độ bằng $20$ thì tung độ bằng:

**A.** $-12$. **B.** $-\frac{25}{2}$. **C.** $-13$. **D.** $-\frac{27}{2}$.

**Lời giải**

$\begin{cases} A(2;4) \\ C(2;1) \end{cases} \longrightarrow M\left(2;\frac{5}{2}\right) \to \overrightarrow{MB} = \left(3;-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}(6;-5) \longrightarrow MB: \begin{cases} x = 5+6t \\ y = -5t \end{cases}$.

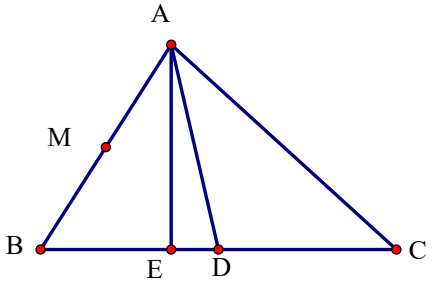
Ta có: $N(20;y_N) \in BM \longrightarrow \begin{cases} 20 = 5+6t \\ y_N = -5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ y_N = -\frac{25}{2} \end{cases} \longrightarrow$ **Chọn B.**

**Câu 132.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh $AB$. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh $A$ lần lượt có phương trình là $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$. Phương trình đường thẳng $AC$ là

**A.** $3x-4y-5=0$. **B.** $3x+4y+5=0$. **C.** $3x-4y+5=0$. **D.** $3x+4y-5=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**




+) Gọi $AH$ và $AD$ lần lượt là các đường cao và trung tuyến kẻ từ $A$ của tam giác $ABC$.

+) Tọa độ $A$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 7x-2y-3=0 \\ 6x-y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A(1;2)$.

+) $M$ là trung điểm của $AB$ nên $\begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 3 \\ y_B = 2y_M - y_A = -2 \end{cases} \Rightarrow B(3;-2)$.

+) Đường thẳng $BC$ đi qua $B(3;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $AH: 6x-y-4=0$ nên có phương trình $x-3+6(y+2)=0 \Leftrightarrow x+6y+9=0$.

+) $D$ là giao điểm của $BC$ và $AN$ nên tọa độ $D$ là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 7x-2y-3=0 \\ x+6y+9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(0;-\frac{3}{2}\right)$ mà D là trung điểm của BC suy ra $C(-3;-1)$

+) Đường thẳng $AC$ đi qua $A(1;2)$ và $C(-3;-1)$ có phương trình là $3x-4y+5=0$.

**Câu 133.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có phương trình cạnh $AB$ là $x-y-2=0$, phương trình cạnh $AC$ là $x+2y-5=0$. Biết trọng tâm của tam giác là điểm $G(3;2)$ và phương trình đường thẳng $BC$ có dạng $x+my+n=0$. Tìm $m+n$.

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $5$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tọa độ điểm $A$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y-2=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ nên $A(3;1)$

Gọi $B(b;b-2)$ và $C(5-2c;c)$, $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ nên $b,c$ là nghiệm của hệ

$\begin{cases}5-2c+b+3=9\\ c+b-2+1=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=5\\ c=2\end{cases}$.

Vậy $B(5;3);C(1;2)\Rightarrow\overrightarrow{BC}=(-4;-1)$ chọn một véctơ pháp tuyến của đường thẳng $BC$ là $\overrightarrow{n_{BC}}=(1;-4)$ suy ra phương trình đường thẳng $BC:1(x-1)-4(y-2)=0\Leftrightarrow BC:x-4y+7=0.$

**Câu 134.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A\left(\frac{7}{4};3\right)$, $B(1;2)$ và $C(-4;3)$.

Phương trình đường phân giác trong của góc $A$ là:

**A.** $4x+2y-13=0.$ **B.** $4x-8y+17=0.$ **C.** $4x-2y-1=0.$ **D.** $4x+8y-31=0.$

**Lời giải**

$\begin{cases}A\left(\frac{7}{4};3\right),B(1;2)\to AB:4x-3y+2=0\\ A\left(\frac{7}{4};3\right),C(-4;3)\to AC:y-3=0\end{cases}$.

Suy ra các đường phân giác góc $A$ là:

$\frac{|4x-3y+2|}{5}=\frac{|y-3|}{1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x+2y-13=0\to f(x;y)=4x+2y-13\\ 4x-8y+17=0\end{array}\right.$

$\to\begin{cases}f(B(1;2))=-5<0\\ f(C(-4;3))=-23<0\end{cases}$

suy ra đường phân giác trong góc $A$ là $4x-8y+17=0$. **Chọn B.**

**Câu 135.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(1;5)$, $B(-4;-5)$ và $C(4;-1)$.

Phương trình đường phân giác ngoài của góc $A$ là:

**A.** $y+5=0.$ **B.** $y-5=0.$ **C.** $x+1=0.$ **D.** $x-1=0.$

**Lời giải**

$\begin{cases}A(1;5),B(-4;-5)\to AB:2x-y+3=0\\ A(1;5),C(4;-1)\to AC:2x+y-7=0\end{cases}$.

Suy ra các đường phân giác góc $A$ là:

$\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x+y-7|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\to f(x;y)=x-1\\ y-5=0\end{array}\right.\to\begin{cases}f(B(-4;-5))=-5<0\\ f(C(4;-1))=3>0\end{cases}$

suy ra đường phân giác trong góc $A$ là $y-5=0$. **Chọn B.**

**Câu 136.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $d_1:3x-4y-3=0$ và $d_2:12x+5y-12=0$. Phương trình đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ là:

**A.** $3x+11y-3=0.$ **B.** $11x-3y-11=0.$ **C.** $3x-11y-3=0.$ **D.** $11x+3y-11=0.$

**Lời giải**

Các đường phân giác của các góc tạo bởi

$d_1:3x-4y-3=0$ và $d_2:12x+5y-12=0$ là:

$\frac{|3x-4y-3|}{5}=\frac{|12x+5y-12|}{13}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+11y-3=0\\ 11x-3y-11=0\end{array}\right.$.

Gọi $I = d_1 \cap d_2 \to I(1;0)$; $d: 3x+11y-3=0 \to M(-10;3) \in d$,

Gọi $H$ là hình chiếu của $M$ lên $d_1$.

Ta có: $IM = \sqrt{130}$, $MH = \dfrac{|-30-12-3|}{5} = 9$, suy ra

$\sin \widehat{MIH} = \dfrac{MH}{IM} = \dfrac{9}{\sqrt{130}} \to \widehat{MIH} > 52^\circ \to 2\widehat{MIH} > 90^\circ$.

Suy ra $d: 3x+11y-3=0$ là đường phân giác góc tù, suy ra đường phân giác góc nhọn là $11x-3y-11=0$. **Chọn B.**

**Câu 137.** Cho tam giác ABC có phương trình cạnh $AB: 3x-4y-9=0$, cạnh $AC: 8x-6y+1=0$, cạnh $BC: x+y-5=0$. Phương trình đường phân giác trong của góc $A$ là:

**A.** $14x+14y-17=0$. **B.** $2x-2y-19=0$. **C.** $2x+2y+19=0$. **D.** $14x-14y-17=0$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

$AB: 3x-4y-9=0$

$AC: 8x-6y+1=0$

Phương trình các đường phân giác của góc $A$ của $\Delta ABC$ là:

$$\frac{3x-4y-9}{5} = \pm\frac{8x-6y+1}{10} \Leftrightarrow 2(3x-4y-9) = \pm(8x-6y+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2y+19=0 (\Delta_1) \\ 14x-14y-17=0 (\Delta_2) \end{array}\right.$$

Có $\{B\} = AB \cap BC$. Suy ra $B\left(\dfrac{29}{7};\dfrac{6}{7}\right)$.

Có $\{C\} = AC \cap BC$. Suy ra $C\left(\dfrac{29}{14};\dfrac{41}{14}\right)$.

Xét $(\Delta_1): 2x+2y+19=0$ có $t_B.t_C = \left(2.\dfrac{29}{7}+2\dfrac{6}{7}+19\right)\left(2.\dfrac{29}{14}+2\dfrac{41}{14}+19\right) > 0$.

Suy ra $B, C$ nằm về cùng một phía đối với $(\Delta_1)$, nên $(\Delta_1)$ là đường phân giác ngoài của góc $A$.

Vậy đường phân giác trong của góc $A$ là $(\Delta_2): 14x-14y-17=0$.

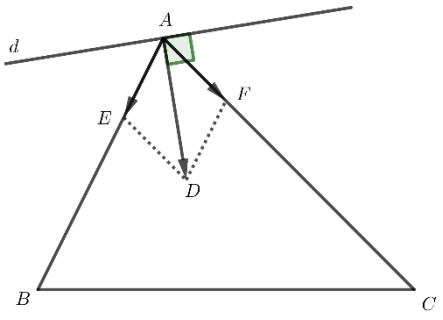
**Câu 138.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ với $A(1;-2)$, $B(2;-3)$, $C(3;0)$. Phương trình đường phân giác ngoài góc $A$ của tam giác $ABC$ là

**A.** $x=1$. **B.** $y=-2$. **C.** $2x+y=0$. **D.** $4x+y-2=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Bài toán tổng quát:**




Gọi $d$ là phân giác ngoài góc $A$ của tam giác $ABC$.

Đặt $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{AB}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{AC}.\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.

Khi đó tứ giác $AEDF$ là hình thoi (vì $AE = AF = 1$).

(*Hình bình hành có 2 cạnh kề bằng nhau*).

Suy ra tia $AD$ là tia phân giác trong góc $EAF$.

Do đó: $AD \perp d$. Nên $\overrightarrow{AD}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng $d$.

Áp dụng: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;-1),\ AB=\sqrt{2}\\ \overrightarrow{AC}=(2;2),\ AC=2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\left(\sqrt{2};0\right)=\sqrt{2}(1;0)$.

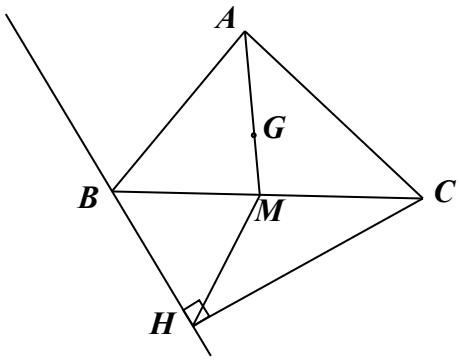
Xem đáp án chỉ có đáp án A có vectơ pháp tuyến là $(1;0)$.

**Câu 139.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ với đỉnh $A(2;4)$, trọng tâm $G\left(2;\frac{2}{3}\right)$. Biết rằng đỉnh $B$ nằm trên đường thẳng $(d)$ có phương trình $x+y+2=0$ và đỉnh $C$ có hình chiếu vuông góc trên $(d)$ là điểm $H(2;-4)$. Giả sử $B(a;b)$, khi đó $T=a-3b$ bằng

**A.** $T=4$. **B.** $T=-2$. **C.** $T=2$. **D.** $T=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $BC$. Ta có

$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M-2=\frac{3}{2}(2-2)\\ y_M-4=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-4\right)\end{cases}$, suy ra $M(2;-1)$.

$\overrightarrow{HM}=(0;3)$ suy ra $HM$ không vuông góc với $(d)$ nên $B$ không trùng với $H$.

$B(a;b)\in(d)\Rightarrow b=-a-2$.

Tam giác $BHC$ vuông tại $H$ và $CM$ là trung tuyến nên ta có

$MB=MH\Leftrightarrow(a-2)^2+(a+1)^2=9\Leftrightarrow a^2-a-2=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a=-1\\ a=2\ (l)\end{bmatrix}$

Suy ra $B(-1;-1)$ và $T=a-3b=2$.

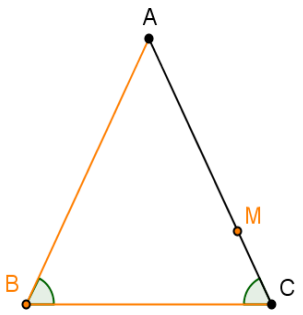
**Câu 140.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác cân $ABC$ có cạnh đáy $BC: x-3y-1=0$, cạnh bên $AB: x-y-5=0$. Đường thẳng $AC$ đi qua $M(-4;1)$. Giả sử toạ độ đỉnh $C(m,n)$.Tính $T=m+n$.

**A.** $T=\frac{5}{9}$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=\frac{9}{5}$. **D.** $T=-\frac{9}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $\vec{n}(a;b)$ với $(a^2+b^2\neq 0)$ là véc tơ pháp tuyến của $AC$, $\overrightarrow{n_1}(1;-3)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng $BC$, $\overrightarrow{n_2}(1;-1)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng $AB$.




Ta có: $\cos B=\cos C\Leftrightarrow|\cos(\vec{n},\overrightarrow{n_1})|=|\cos(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_1})|$

$\Leftrightarrow\dfrac{|\vec{n},\overrightarrow{n_1}|}{|\vec{n}|.|\overrightarrow{n_1}|}=\dfrac{|\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{n_2}|.|\overrightarrow{n_1}|}\Leftrightarrow\dfrac{|a-3b|}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|1+3|}{\sqrt{10}.\sqrt{2}}$

$2\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}=|a-3b|\Leftrightarrow 7a^2+6ab-b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b\\7a=b\end{array}\right.$

+ Với $a=-b$ chọn $a=1,b=-1\Rightarrow\vec{n}(1;-1)$ loại vì $AC//AB$

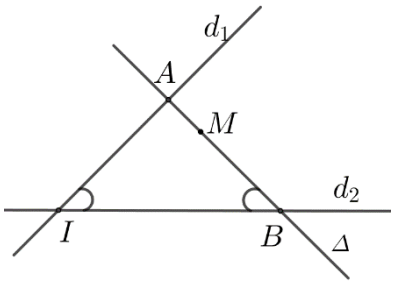
+ Với $a=\dfrac{b}{7}$ chọn $a=1;b=7\Rightarrow AC:x+7y-3=0$. Điểm $C=AC\cap BC\Rightarrow C\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{1}{5}\right)$

**Câu 141.** Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1):2x-y+5=0$ và $(d_2):x+y-3=0$ cắt nhau tại $I$. Phương trình đường thẳng đi qua $M(-2;0)$ cắt $(d_1),(d_2)$ tại $A$ và $B$ sao cho tam giác $IAB$ cân tại $A$ có phương trình dạng $ax+by+2=0$. Tính $T=a-5b$.

**A.** $T=-1$. **B.** $T=9$. **C.** $T=-9$. **D.** $T=11$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Đường thẳng $(d_1),(d_2)$ có véc tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n_1}=(2;-1)$, $\vec{n_2}=(1;1)$.

Gọi $(\Delta)$ là đường thẳng cần tìm có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)$.

Góc giữa 2 đường thẳng $(d_1),(d_2)$ và $(\Delta),(d_2)$ xác định bởi:

$$cos(d_1,d_2)=\frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|}=\frac{|2.1-1.1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$cos(\Delta,d_2)=\frac{|\vec{n}.\vec{n_2}|}{|\vec{n}|.|\vec{n_2}|}=\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a+b|}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Vì $(\Delta)$ cắt $(d_1),(d_2)$ tại $A$ và $B$ tạo thành tam giác $IAB$ cân tại $A$ nên

$$cos(d_1,d_2)=cos(\Delta,d_2)\Leftrightarrow\frac{|a+b|}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow\sqrt{5}|a+b|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow 5(a+b)^2=a^2+b^2\Leftrightarrow 2a^2+5ab+b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-2b\\a=-\dfrac{1}{2}b\end{array}\right.$$

+ $a=-2b$: chọn $a=2\Rightarrow b=-1$: phương trình đường thẳng là:

$2(x+2)-y=0\Leftrightarrow 2x-y+4=0\quad(L)$.

+ $a=-\dfrac{1}{2}b$: chọn $a=1\Rightarrow b=-2$: phương trình đường thẳng là:

$(x+2)-2y=0 \Leftrightarrow x-2y+2=0 \quad (T/m)$. Do đó $T=a-5b=1-5(-2)=11$.

**Câu 142.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có đỉnh $A(2;1)$, $B(2;-3), C(-2;-1)$. Trực tâm $H$ của tam giác $ABC$ có tọa độ $(a;b)$. Biểu thức $S=3a+2b$ bằng bao nhiêu?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $5$. **D.** $-1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-4;-2)$, $\overrightarrow{AH}=(a-2;b-1)$, $\overrightarrow{BH}=(a-2;b+3)$.

Vì $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$ nên ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4(a-2)+2(b-1)=0\\ -4(a-2)-2(b+3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b=3\\ 2a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}.$$

Vậy $S=3a+2b=3\times1+2\times(-1)=1$.

**Câu 143.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ ,cho tam giác $ABC$ có đỉnh $A(2;2)$ và trung điểm của $BC$ là $I(-1;-2)$. Điểm $M(a;b)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Tính $S=a+b$.

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $K$ trung điểm $AI \Rightarrow K\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Ta có $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MK}=\vec{0}\Leftrightarrow M\equiv K$

$\Rightarrow a+b=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$. Chọn A

**Câu 144.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;1)$, đường cao $BH$ có phương trình $x-3y-7=0$ và trung tuyến $CM$ có phương trình $x+y+1=0$. Tìm tọa độ đỉnh $C$?

**A.** $(-1;0)$. **B.** $(4;-5)$. **C.** $(1;-2)$. **D.** $(1;4)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điểm $C$ thuộc đường trung tuyến $CM$ nên gọi tọa độ điểm $C(x;-x-1)$.

Tọa độ $\overrightarrow{AC}=(x-2;-x-2)$, tọa độ vectơ chỉ phương của đường thẳng $BH$ là $\vec{u}=(3;1)$.

Vì $AC\perp BH$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}=0\Leftrightarrow(x-2).3-x-2=0\Leftrightarrow x=4$.

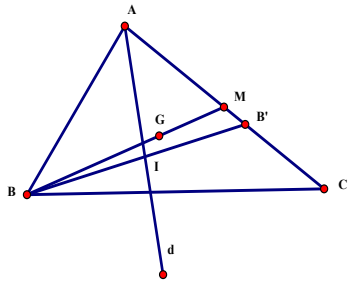
Vậy $C(4;-5)$.

**Câu 145.** Trong hệ trục tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $B(-4;1)$, trọng tâm $G(1;1)$ và đường thẳng phân giác trong góc $A$ có phương trình $d: x-y-1=0$. Biết điểm $A(m;n)$. Tính tích $m.n$.

**A.** $m.n=20$. **B.** $m.n=12$. **C.** $m.n=-12$. **D.** $m.n=6$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $M$ là trung điểm cạnh $AC$, suy ra $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GM}\Rightarrow M\left(\frac{7}{2};1\right)$.

Gọi điểm $B'$ là điểm đối xứng với $B$ qua đường phân giác trong của góc $A$. Suy ra điểm $B'$ nằm trên $AC$.

Đường thẳng $BB'$ qua $B$ và vuông góc với đường thẳng $d:x-y-1=0$ nên có phương trình $BB':x+y+3=0$

Gọi $I=BB'\cap d$, suy ra tọa độ điểm $I(-1;-2)$ là trung điểm của $BB'$ nên tọa độ $B'(2;-5)$

Đường thẳng $AC$ đi qua $B'(2;-5)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{B'M}=\left(\frac{3}{2};6\right)$, suy ra véc tơ pháp tuyến của $AC$ có tọa độ $(4;-1)$. Đường thẳng $AC$ có phương trình là: $4x-y-13=0$

Điểm $A=d\cap AC\Rightarrow A(4;3)$.

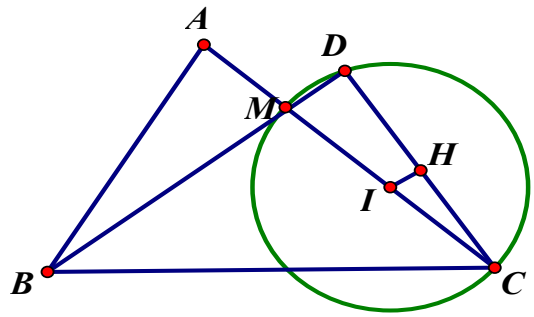
Vậy tích $m.n=12$.

**Câu 146.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, điểm M thuộc cạnh AC, sao cho $AB=3AM$, đường tròn tâm I đường kính CM cắtBM tại D, đường thẳng CD có phương trình $x-3y-6=0$. Biết điểm I(1;-1), điểm $E\left(\frac{4}{3};0\right)$ thuộc đường thẳng BC, $x_C\in\mathbb{Z}$. Gọi B là điểm có tọa độ *(a, b)*. Khi đó:

**A.** $a+b=1$. **B.** $a+b=0$. **C.** $a+b=-1$. **D.** $a+b=2$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi H là hình chiếu của I lên cạnh C**D.**

Do tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn nên $\widehat{ABM}=\widehat{MCD}=\widehat{ICH}\Rightarrow\tan\widehat{ABM}=\tan\widehat{MCD}=\tan\widehat{ICH}=\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$.

$\Rightarrow\sin\widehat{ICH}=\frac{IH}{IC}=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Có $IH=d(I,CD)=\frac{2}{\sqrt{10}}\Rightarrow IC=2\Rightarrow IC^2=4.$

$C\in CD:x-3y-6=0\Rightarrow C(3t+6;t)$

Mà $IC^2=4$ và $x_C\in Z\Rightarrow C(3;-1)$

Đường thẳng BC qua $C(3;-1)$ và $E\left(\frac{4}{3};0\right)$ có phương trình là $BC: 3x+5y-4=0$.

I là trung điểm của MC nên $M(-1;-1)$.

Đường thẳng BD qua $M(-1;-1)$ và vuông góc với CD có phương trình là $BD: 3x+y+4=0$.

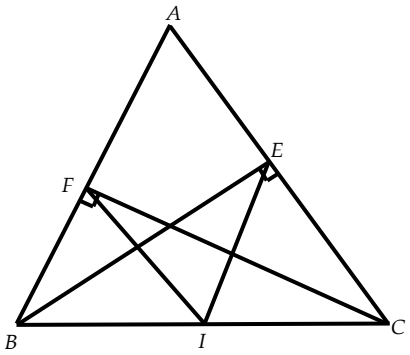
Có $B=BC\cap BD \Rightarrow B(-2;2)$

**Câu 147.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có phương trình đường thẳng $BC: x+7y-13=0$. Các chân đường cao kẻ từ $B,C$ lần lượt là $E(2;5), F(0;4)$. Biết tọa độ đỉnh A là $A(a;b)$. Khi đó:

**A.** $a-b=5$. **B.** $2a+b=6$. **C.** $a+2b=6$. **D.** $b-a=5$

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $I(13-7n;n)$ là trung điểm của BC,khi đó ta có: $IE=IF$

mà $IE=50n^2-164n+146;\ IF=50n^2-190n+185$

$\Rightarrow 50n^2-164n+146=50n^2-190n+185 \Leftrightarrow n=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow I\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

Gọi $B(13-7m;m)$.Vì I là trung điểm của BC nên $C(7m-8;3-m)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BE}=(7m-11;5-m); \overrightarrow{CE}=(10-7m;2+m)$.Vì $BE\perp AC$

nên $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CE}=0 \Leftrightarrow m^2-3m+2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$

+ Với $m=1 \Rightarrow B(6;1), C(-1;2) \Rightarrow A\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3}\right)$.Trường hợp này không thỏa mãn các đáp án.

+ Với $m=2 \Rightarrow B(-1;2); C(6;1) \Rightarrow A(1;6)$ Suy ra **Chọn D**

**Câu 148.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có đỉnh $B(-12;1)$, đường phân giác trong của góc $A$ có phương trình $d: x+2y-5=0$. $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Đường thẳng $BC$ qua điểm nào sau đây?

**A.** $(1;0)$. **B.** $(2;-3)$. **C.** $(4;-4)$. **D.** $(4;3)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua đường thẳng $d: x+2y-5=0$ suy ra $D\in AC$.

Phương trình của đường thẳng $BD: -2x+y-25=0$.

Gọi $H$ là giao điểm của $d$ và $BD$ suy ra tọa độ điểm $H$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+2y-5=0 \\ -2x+y-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow H(-9;7).$$

Mà $H$ là trung điểm của $BD$ suy ra $D(-6;13)$.

Gọi $A(5-2a;a) \in d$.

Ta có $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác $ABC$ nên

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2a-12+x_C=1 \\ a+1+y_C=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=2a+8 \\ y_C=1-a \end{cases} \Rightarrow C(2a+8;1-a)$$

Ta có $\overrightarrow{DA}=(11-2a;a-13); \overrightarrow{DC}=(2a+14;-12-a)$

Mà 3 điểm $D, A, C$ thẳng hàng nên $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{11-2a}{2a+14}=\frac{a-13}{-12-a} \Leftrightarrow a=-2$

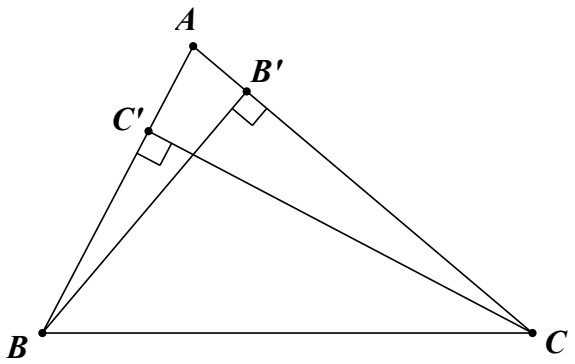
Suy ra điểm $C(4;3)$ nên đường thẳng $BC$ đi qua điểm $C(4;3)$.

**Câu 149.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết phương trình cạnh $BC: x+y-2=0$; hai đường cao $BB': x-3=0$ và $CC': 2x-3y+6=0$?

**A.** $A(1;2); B(0;2); C(3;-1)$.
**B.** $A(1;2); B(3;-1); C(0;2)$.
**C.** $A(1;-2); B(3;-1); C(0;2)$.
**D.** $A(2;1); B(3;-1); C(0;2)$.

**Lời giải**

**Chọn** B




$B = BC \cap BB'$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-3=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(3;-1)$.

$C = BC \cap CC'$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-3y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow C(0;2)$.

$AB$ qua $B$ và vuông với $CC'$ có phương trình: $3x+2y-7=0$.

$AC$ qua $C$ và vuông với $BB'$ có phương trình: $y=2$.

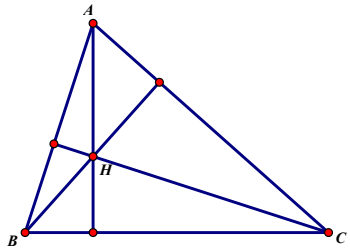
$A = AB \cap AC$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x+2y-7=0 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A(1;2)$.

**Câu 150.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có $A(-3;0), B(3;0), C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là trực tâm của tam giác $ABC$. Tính $6ab$

**A.** 10. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 60. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn A**




Đường thẳng $AH$ đi qua $A(-3;0)$ và nhận $\overrightarrow{BC}=(-1;6)$ làm véctơ pháp tuyến. Suy ra phương trình đường thẳng $AH$ là: $x-6y+3=0$.

Đường thẳng $BH$ đi qua $B(3;0)$ và nhận $\overrightarrow{AC}=(5;6)$ làm véctơ pháp tuyến. Suy ra phương trình đường thẳng $BH$ là: $5x+6y-15=0$.

Ta có $H=AH\cap BH \Leftrightarrow$ Tọa độ $H$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-6y+3=0\\5x+6y-15=0\end{cases}\Leftrightarrow H\left(2;\frac{5}{6}\right)$.

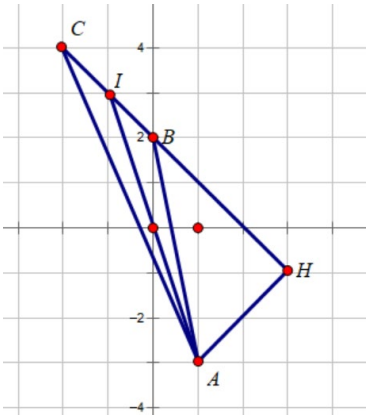
Do đó $a=2; b=\frac{5}{6}\Rightarrow 6ab=10$.

**Câu 151.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;-3)$, $B(0;2)$, $C(-2;4)$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua $A$ và chia tam giác $ABC$ thành hai phần có diện tích bằng nhau. Phương trình của $\Delta$ là

**A.** $2x-y-7=0$. **B.** $x+y+2=0$. **C.** $x-3y-10=0$. **D.** $3x+y=0$.

**Lời giải**

**Chọn D.**




Gọi $I$ là giao điểm của $\Delta$ và $BC$.

Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ trên $BC$.

Theo đề bài ta có: $S_{AIB}=S_{AIC}\Leftrightarrow\frac{1}{2}.AH.IB=\frac{1}{2}.AH.IC\Leftrightarrow IB=IC$.

$\Rightarrow I$ là trung điểm của $BC\Rightarrow I(-1;3)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}=(-2;6)$.

Đường thẳng $\Delta$ đi qua $A$ và nhận vecto $\vec{n}=(3;1)$ làm vecto pháp tuyến.

Phương trình đường thẳng $\Delta$ là $3(x-1)+(y+3)=0\Leftrightarrow 3x+y=0$.

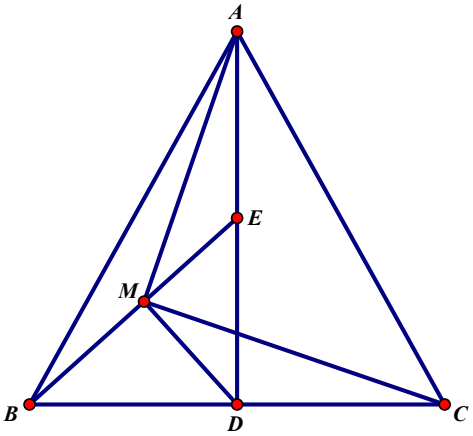
**Câu 152.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ cân tại $A$, phương trình đường thẳng $AB, AC$ lần lượt là $5x-y-2=0, x-5y+14=0$. Gọi $D$ là trung điểm của $BC$, $E$ là trung điểm của $AD$, $M\left(\frac{9}{5};\frac{8}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của $D$ trên $BE$. Tính $OC$.

**A.** $OC=\sqrt{26}$. **B.** $OC=\sqrt{10}$. **C.** $OC=5$. **D.** $OC=\sqrt{52}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

***Cách 1:***




Ta có $A=AB\cap AC\Rightarrow\begin{cases}5x-y-2=0\\x-5y+14=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}\Rightarrow A(1;3)$

Dễ chứng minh được $AM\perp MC\Rightarrow$ Phương trình MC: $4x-7y+4=0$

$C=MC\cap AC\Rightarrow\begin{cases}4x-7y+4=0\\x-5y+14=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=4\end{cases}\Rightarrow C(6;4)$

Vậy $OC=\sqrt{52}$

Chứng minh $AM\perp MC$

PP1: Dùng phương pháp véc tơ.

* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}\right)\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{MB}=2\left(\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MB}\right)$

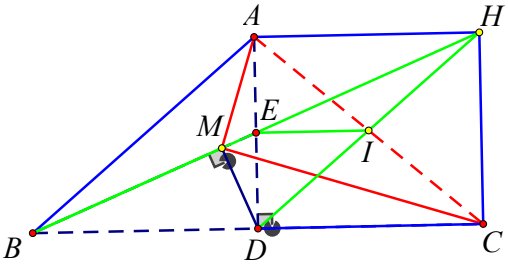
* $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MB}$

* $\cos\left(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{BD}\right)=\cos\widehat{MDB}\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BD}}{DM.DB}=\frac{DM}{DB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BD}=MD^2$

* $\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{MB}\right)=-\cos\widehat{MED}\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MB}}{DE.MB}=-\frac{ME}{DE}\Leftrightarrow\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MB}=-ME.MB=-MD^2$

Do đó $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$ nên $MA\perp MC$.

PP2:




Vẽ hình chữ nhật $ADCF$ (1)

Dễ thấy tứ giác $AHDB$ là hình bình hành $\left(vì\ AH//BD;\ AH=BD\right)$

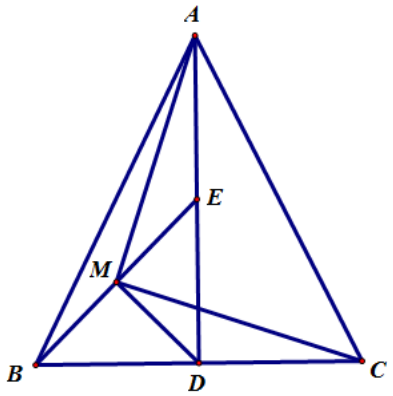
Nên $BH$ qua trung điểm $E$ của $AD$

$\Rightarrow \widehat{HMD} = 90^o$ (2)

Từ (1) và (2) ta có 5 điểm $A, M, D, C, F$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AC$.

Nên $\widehat{AMC} = 90^o \Rightarrow AM \perp MC$.

***Cách 2:***




Ta có: $A = AB \cap AC \Rightarrow A(1;3)$.

Giả sử $DB = kDE\ (k > 0) \Rightarrow \dfrac{MB}{ME} = \dfrac{DB^2}{DE^2} = k^2 \Rightarrow \overrightarrow{MB} + k^2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DM} = \dfrac{1}{k^2+1}\overrightarrow{DB} + \dfrac{k^2}{k^2+1}\overrightarrow{DE}$

Ta có: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DM} = -\dfrac{1}{k^2+1}\overrightarrow{DB} + \dfrac{k^2+2}{k^2+1}\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DM} = -\dfrac{k^2+2}{k^2+1}\overrightarrow{DB} - \dfrac{k^2}{k^2+1}\overrightarrow{DE}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \dfrac{k^2+2}{k^2+1}DB^2 - \dfrac{k^2(k^2+2)}{k^2+1}ED^2 = 0 \Rightarrow MA \perp MC$.

Lại có: $\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{4}{5};-\dfrac{7}{5}\right) \Rightarrow MC: 4x - 7y + 4 = 0$.

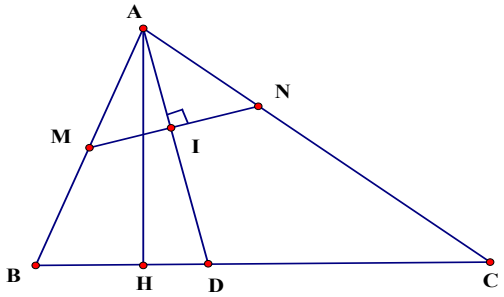
Vậy $C = MC \cap AC \Rightarrow C(6;4) \Rightarrow OC = \sqrt{52}$.

**Câu 153.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có chân đường cao hạ từ đỉnh $A$ là $H\left(\dfrac{17}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$, chân đường phân giác trong góc $A$ là $D(5;3)$ và trung điểm của cạnh $AB$ là $M(0;1)$. Tìm tọa độ đỉnh $C$.

**A.** $C(-2;9)$. **B.** $C(9;11)$. **C.** $C(-9;-11)$. **D.** $C(2;-10)$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Đường thẳng chứa cạnh $BC$ có phương trình:

$$\frac{x-5}{\frac{17}{5}-5}=\frac{y-3}{-\frac{1}{5}-3}\Leftrightarrow 2x-y-7=0$$

Đường thẳng chứa đường cao $AH$ của tam giác đi qua $H\left(\frac{17}{5};-\frac{1}{5}\right)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{HD}\left(\frac{8}{5};\frac{16}{5}\right)$ có phương trình: $\frac{8}{5}\left(x-\frac{17}{5}\right)+\frac{16}{5}\left(y+\frac{1}{5}\right)=0\Leftrightarrow x+2y-3=0$.

Gọi $B\left(x_0;y_0\right)$, vì $M$ là trung điểm của $AB$ nên $A\left(-x_0;2-y_0\right)$.

Ta có: $B\in BC\Leftrightarrow 2x_0-y_0-7=0\qquad (1)$

$A\in AH\Leftrightarrow -x_0+2\left(2-y_0\right)-3=0\Leftrightarrow x_0+2y_0-1=0\qquad (2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có hệ:

$$\begin{cases}2x_0-y_0-7=0\\ x_0+2y_0-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=3\\ y_0=-1\end{cases}\Rightarrow A(-3;3)$$

Gọi $\vec{u}\left(a;b\right)\left(a^2+b^2\neq 0\right)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng $AC$

+) $\overrightarrow{AM}\left(3;-2\right),\overrightarrow{AD}\left(8;0\right)$

Đường thẳng $AD$ là phân giác trong góc $A$ nên:

$$\widehat{BAD}=\widehat{CAD}\Leftrightarrow\cos\widehat{BAD}=\cos\widehat{CAD}\Leftrightarrow\left|\cos\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AD}\right)\right|=\left|\cos\left(\overrightarrow{AD};\vec{u}\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow\frac{|24|}{\sqrt{13}.8}=\frac{|8a|}{8\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow 3\sqrt{a^2+b^2}=|a|\sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2=9b^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{3}{2}b\\ a=-\frac{3}{2}b\end{array}\right.$$

Với $a=-\frac{3}{2}b$. Chọn $b=2\Rightarrow a=-3\Rightarrow\vec{u}\left(-3;2\right)$ (loại vì cùng phương với $\overrightarrow{AM}$)

Với $a=\frac{3}{2}b$. Chọn $b=2\Rightarrow a=3\Rightarrow\vec{u}\left(3;2\right)$. Đường thẳng $AC$ có phương trình: $\begin{cases}x=-3+3t\\ y=3+2t\end{cases}$

Điểm $C$ là giao điểm của $AC$ và $BC$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ:

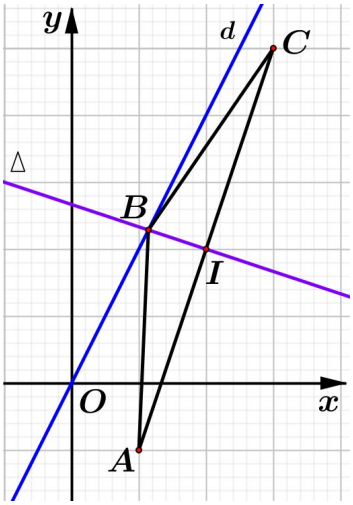
$$\begin{cases}2x-y-7=0\\ x=-3+3t\\ y=3+2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6+6t-3-2t-7=0\\ x=-3+3t\\ y=3+2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=4\\ x=9\\ y=11\end{cases}\Rightarrow C(9;11).$$

**Câu 154.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ cân tại $B$ với $A(1;-1)$, $C(3;5)$. Đỉnh $B$ nằm trên đường thẳng $d: 2x-y=0$. Phương trình các đường thẳng $AB, BC$ lần lượt là $d_1: ax+by-24=0$, $d_2: cx+dy+8=0$. Tính giá trị biểu thức $P=a.b.c.d$.

**A.** $P=975$. **B.** $P=5681$. **C.** $P=3059$. **D.** $P=5083$.

**Lời giải**

**Chọn B**




**Cách 1:**

Gọi $I$ là trung điểm $AC \Rightarrow I(2;2)$.

Đường thẳng $\Delta$ đi qua $I$ và vuông góc với $AC$ có phương trình: $x+3y-8=0\ (\Delta)$.

Tam giác $ABC$ cân tại $B$ nên ta có $B\in\Delta \Rightarrow B=\Delta\cap d \Rightarrow B\left(\frac{8}{7};\frac{16}{7}\right)$.

Phương trình đường thẳng $AB: \dfrac{x-1}{\frac{8}{7}-1}=\dfrac{y+1}{\frac{16}{7}+1} \Leftrightarrow 23x-y-24=0$.

Phương trình đường thẳng $BC: \dfrac{x-3}{\frac{8}{7}-3}=\dfrac{y-5}{\frac{16}{7}-5} \Leftrightarrow 19x-13y+8=0$.

Vậy $a=23, b=-1, c=19, d=-13 \Rightarrow P=a.b.c.d=5681$.

**Cách 2:**

Gọi $B(a;2a)\in d$.

Tam giác $ABC$ cân tại $B$ nên ta có $AB=CB \Rightarrow (a-1)^2+(2a+1)^2=(a-3)^2+(2a-5)^2 \Leftrightarrow a=\dfrac{8}{7}$. Suy ra $B\left(\frac{8}{7};\frac{16}{7}\right)$.

Phương trình đường thẳng $AB: \dfrac{x-1}{\frac{8}{7}-1}=\dfrac{y+1}{\frac{16}{7}+1} \Leftrightarrow 23x-y-24=0$.

Phương trình đường thẳng $BC: \dfrac{x-3}{\frac{8}{7}-3}=\dfrac{y-5}{\frac{16}{7}-5} \Leftrightarrow 19x-13y+8=0$.

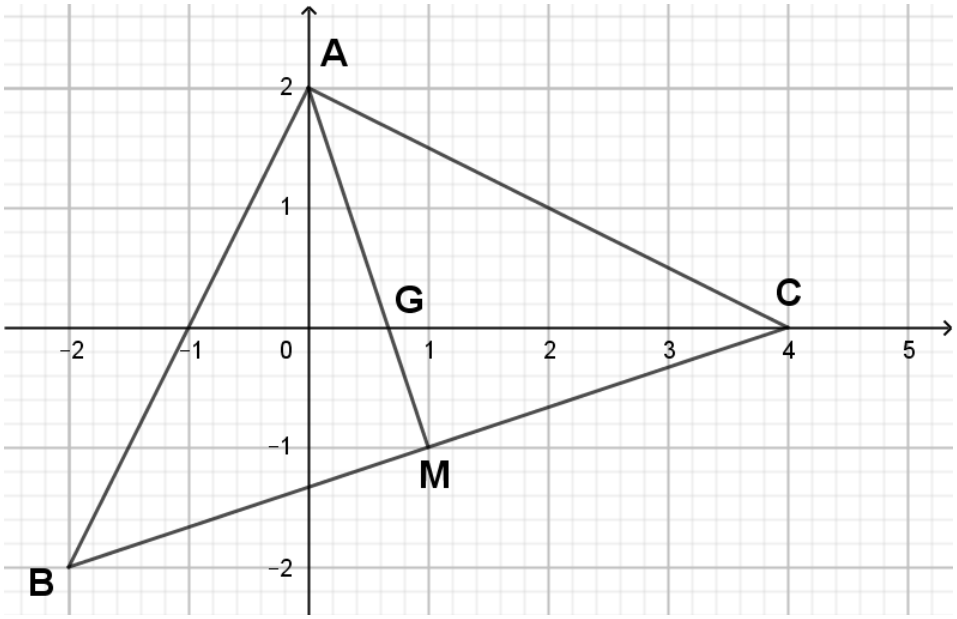
Vậy $a=23, b=-1, c=19, d=-13 \Rightarrow P=a.b.c.d=5681$.

**Câu 155.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho $\Delta ABC$ có $AB=AC$, $\widehat{BAC}=90^o$. Biết $M(1,-1)$ là trung điểm cạnh $BC$ và $G\left(\frac{2}{3},0\right)$ là trọng tâm $\Delta ABC$. Khi đó, $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B),(x_B<0)$. Tính $T=2019x_A^2+y_A+2x_B-3y_B$

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn B**




Ta có: $\overrightarrow{AG}=\left(\frac{2}{3}-x_A,-y_A\right)$; $\overrightarrow{AM}=\left(1-x_A,-1-y_A\right)$

$+G$ là trọng tâm $\Delta ABC$ và $AM$ là trung tuyến suy ra: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{3}-x_A=\frac{2}{3}(1-x_A)\\-y_A=\frac{2}{3}(-1-y_A)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=0\\y_A=2\end{cases}\Rightarrow A(0,2)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(1,-3)\Rightarrow AM=\sqrt{10}$.

+ $\Delta ABC$ vuông tại $A$ nên $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn $(C)$ tâm $M$, bán kính $AM$.

$\Rightarrow(C):(x-1)^2+(y+1)^2=10$

+ BC qua $M$ và vuông góc $AM\Rightarrow(BC):x-1-3(y+1)=0\Leftrightarrow x=3y+4$

+ Ta có: $(C)\cap(BC)=\{B,C\}$. Suy ra tọa độ $B$, $C$ là nghiệm hệ: $\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=10\\x=3y+4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(3y+3)^2+(y+1)^2=10\\x=3y+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y+1)^2=1\\x=3y+4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}\right.\left.\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}\right.\Rightarrow B(-2,-2)$ ( vì $x_B<0$ )

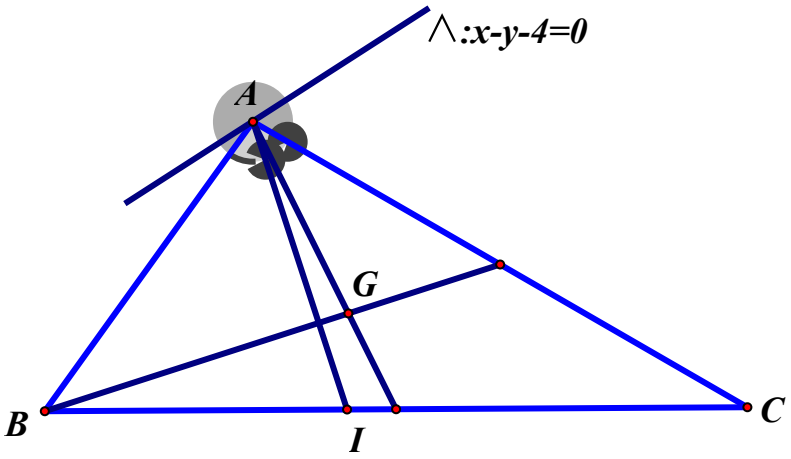
Vậy $T=2019x_A^2+y_A+2x_B-3y_B=4$

**Câu 156.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G(2;-3)$ và $B(1;1)$. Đường thẳng $\Delta:x-y-4=0$ đi qua $A$ và đường phân giác trong của góc $A$ cắt $BC$ tại điểm $I$ sao cho diện tích tam giác $IAB$ bằng $\frac{4}{5}$ diện tích tam giác $IAC$. Biết điểm $A$ có hoành độ dương, khi đó phương trình tổng quát của đường thẳng $BC$ là

**A.** $5x+3y-11=0$. **B.** $3x-8y+5=0$ **C.** $5x+3y+11=0$ **D.** $3x-8y-5=0$

**Lời giải**

**Chọn A**




+ Gọi $A(t;\, t-4) \in \Delta$ với $t > 0$.

Do $G(2;\, -3)$ là trọng tâm tam giác $ABC$ nên: $\begin{cases} x_C = 3x_G - y_A - y_B = 5 - t \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = -6 - t \end{cases}$

$\Rightarrow C(5-t;\, -6-t)$.

+ Vì $AI$ là phân giác trong của tam giác $ABC$ nên $d(I;AB) = d(I;\, AC)$, khi đó

$S_{IAB} = \frac{4}{5} S_{IAC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} d(I;\, AB).AB = \frac{4}{5}.\frac{1}{2}.d(I;\, AC).AC \Leftrightarrow AB = \frac{4}{5} AC$

$\Leftrightarrow 25AB^2 = 16AC^2$

$\Leftrightarrow 25\left[(t-1)^2 + (t-5)^2\right] = 16\left[(2t-5)^2 + (2t+2)^2\right]$

$\Leftrightarrow 39t^2 + 54t - 93 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -\frac{31}{13}$ (loại) $\Rightarrow C(4;\, -7)$.

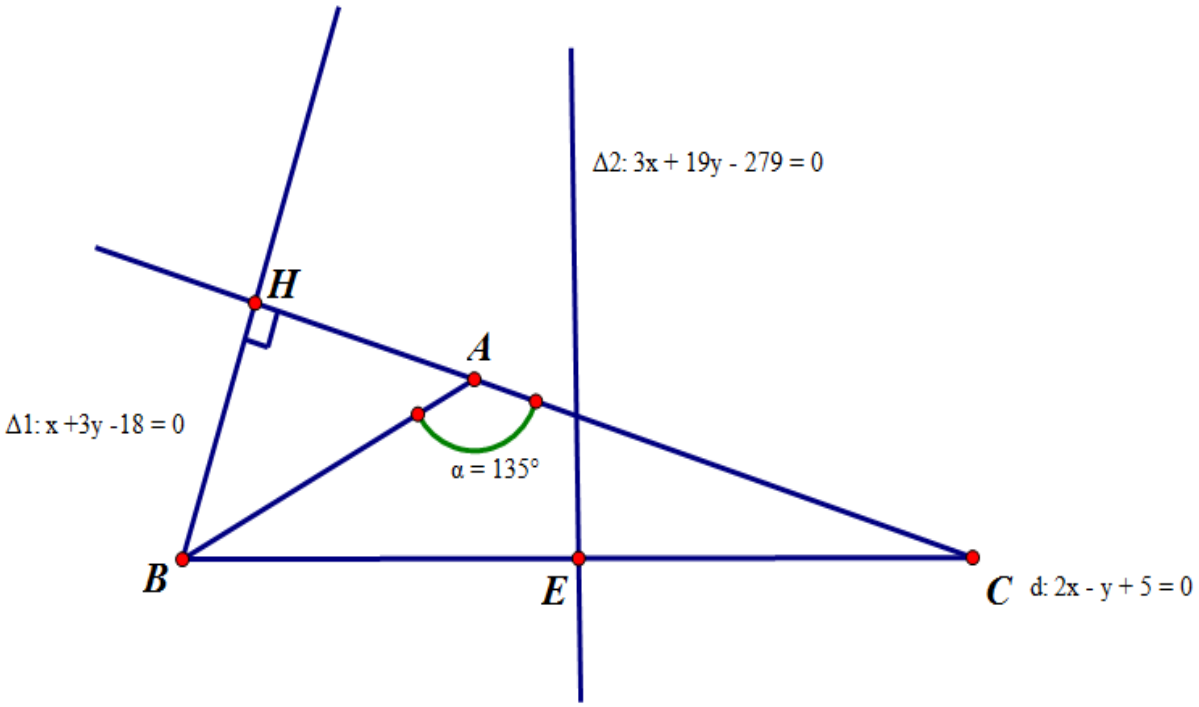
+ Khi đó $BC$ đi qua $B(1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{BC} = (3;\, -8)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 8t \end{cases}$.

Suy ra đường thẳng $BC$ có phương trình tổng quát là $5x + 3y - 11 = 0$.

**Câu 157.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ B có phương trình là $\Delta_1 : x + 3y - 18 = 0$, phương trình đường trung trực của đoạn BC là $\Delta_2 : 3x + 19y - 279 = 0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d : 2x - y + 5 = 0$ và biết $\widehat{BAC} = 135^0$. Giả sử $A(a;b)$, tính tổng $a^2 + b$.

**A.** 24. **B.** 6. **C.** 80 **D.** 4

**Lời giải**




**Vì** $B \in \Delta_1 : x+3y-18=0, C \in d: 2x-y+5=0$ .Giả sử $B(18-3b;b); C(c;2c+5)$ .Suy ra,tọa độ trung điểm $E(\frac{18+c-3b}{2};\frac{b+2c+5}{2}); \overrightarrow{BC} = (c+3b-18;2c-b+5)$

$$\begin{cases} BC \perp \Delta_2 \\ E \in \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = 0 \\ E \in \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (c+3b-18).19-3(2c-b+5)=0 \\ 3.\frac{18+c-3b}{2}+19.\frac{b+2c+5}{2}-279=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13c+60b=357 \\ 41c+10b=409 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=9 \\ b=4 \end{cases}$$

$\Rightarrow B(6;4); C(9;23)$ .

Đường thẳng AC đi qua $C(9;23)$ và vuông góc với $\Delta_1 : x+3y-18=0$ nên có phương trình $3(x-9)-(y-23)=0 \Leftrightarrow 3x-y-4=0$ . Gọi H là chân đường cao kẻ từ **B.** $H = \Delta_1 \cap AC$ . Tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x-y-4=0 \\ x+3y-18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow H(3;5)$ . Đường tròn tâm H bán kính $R = BH = \sqrt{10}$ có phương trình: $(C): (x-3)^2+(y-5)^2=10$ .

Vì $\widehat{BAC} = 135^0 \Rightarrow \Delta ABH$ vuông cân tại H $\Rightarrow HB = HA \Rightarrow A \in (C)$ .Do $A \in AC; A \in (C)$ . Tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x-y-4=0 \\ (x-3)^2+(y-5)^2=10 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \right.$

Do A nằm giữa C và H nên chỉ có trường hợp $A(4:8)$ .

Vậy $\begin{cases} a=4 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow a^2+b=24$

**Có thể tìm tọa độ điểm A bằng cách sử dụng công thức** $\cos 135^0 = \frac{\overrightarrow{AB}.}{}$ $\cos 135^0 = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|AB|.|AC|}$

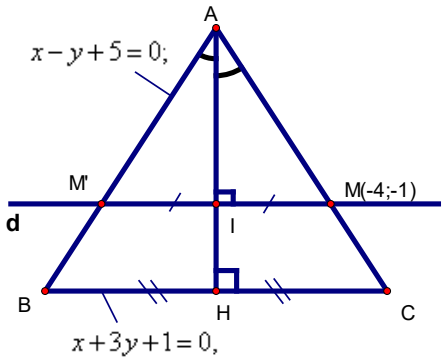
$$\cos 135^0 = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

**Câu 158.** Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác $ABC$ cân, cạnh đáy $BC: x+3y+1=0$, cạnh bên $AB: x-y+5=0$; đường thẳng chứa $AC$ đi qua $M(-4;-1)$. Tìm tọa độ đỉnh $C$.

**A.** $C\left(-\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right)$. **B.** $C\left(-\frac{43}{10};-\frac{11}{10}\right)$. **C.** $C\left(\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right)$. **D.** $C\left(\frac{43}{10};-\frac{11}{10}\right)$.

**Lời giải**

Đường thẳng d đi qua $M(-4;-1)$ và $d//BC$ nên d có VTPT $\overrightarrow{n_d}=\overrightarrow{n_{BC}}=(1;3)$. Đường thẳng d có phương trình: $1(x+4)+3(y+1)=0\Leftrightarrow x+3y+7=0$.




Gọi $M'=d\cap AB$. Tọa độ M' là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+3y+7=0\\x-y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{11}{2}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow M'\left(-\frac{11}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

I là trung điểm của MM'. Suy ra: $I\left(-\frac{19}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

Đường cao AH đi qua I và vuông góc với BC nên có VTPT $\overrightarrow{n_{AH}}=\overrightarrow{u_{BC}}=(3;-1)$. AH có phương trình: $3\left(x+\frac{19}{4}\right)-1\left(y+\frac{3}{4}\right)=0\Leftrightarrow 6x-2y+27=0.$

Cách 1. $H=AH\cap BC\Rightarrow$ tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}6x-2y+27=0\\x+3y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{83}{20}\\y=\frac{21}{20}\end{cases}\Rightarrow H\left(-\frac{83}{20};\frac{21}{20}\right).$$

H là trung điểm của BC nên $C\left(-\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right)$.

***Cách 2.***

Ta có: $A=AH\cap AB$. Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}6x-2y+27=0\\x-y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{17}{4}\\y=\frac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow A\left(-\frac{17}{4};\frac{3}{4}\right).$$

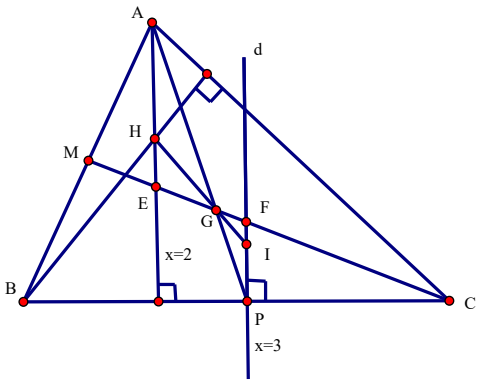
AC đi qua M(- 4; - 1) và nhận $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{4};-\frac{7}{4}\right)$ làm VTCP, do đó AC có VTPT $\overrightarrow{n_{AC}}=(7;1)$. AC có phương trình: $7(x+4)+1(y+1)=0\Leftrightarrow 7x+y+29=0.$

$C=AC\cap BC\Rightarrow C\left(\frac{-43}{10};\frac{11}{10}\right).$

**Câu 159.** Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(2;\,0)$, đường trung tuyến $CM: 3x+7y-8=0$, đường trung trực của BC là: $x=3$, đỉnh A có tung độ âm. Khi đó tọa độ của đỉnh A có dạng $(a;\frac{-b}{c})$ với $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tìm $a+b+c$

**A.** 17. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 19.

**Lời giải**




Gọi P là trung điểm của BC và G, I lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC

Đường cao AH // d và H(2; 0) nên phương trình của AH là x = 2

Vậy hoành độ của A là a = 2

Gọi giao điểm của CM và AH, d lần lượt là E, F. Ta tính được $E(2;\frac{2}{7})$ và $F(3;\frac{-1}{7})$

Theo tính chất đường thẳng Euler ta có GH = 2GI, dùng tam giác đồng dạng suy ra GE = 2GF

Từ đó tính được G là $G(\frac{8}{3};\,0)$. Sử dụng GH = 2GI tính được $I(3;\,0)$

Gọi tọa độ A(2; m) (m < 0), P(3; n), theo công thức tọa độ trọng tâm và trung điểm suy ra: $m+2n=0$

Gọi tọa độ B(p; n) vì tung độ B, P bằng nhau, suy ra C(6 - p; n) (P là trung điểm của BC)

Vì C thuộc đường thẳng CM suy ra $3p=7n+10$

IA = IB suy ra $m^2+1=(p-3)^2+n^2$. Giải hệ ta được $\left[\begin{array}{l} n=-1 \\ n=\frac{4}{7} \end{array}\right.$ suy ra $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\frac{-8}{7} \end{array}\right.$

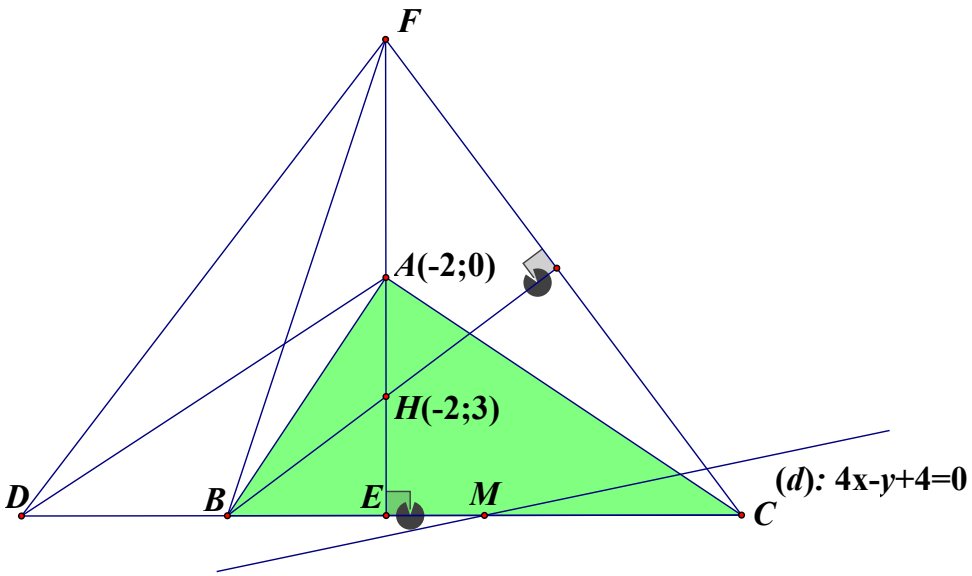
Vậy $m=\frac{-8}{7} \Rightarrow$ Tọa độ A là $A(2;\frac{-8}{7}) \Rightarrow$ a = 2, b = 8, c = 7 $\Rightarrow$ a + b + c = 17 $\Rightarrow$ Đáp án A

**Câu 160.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ vuông tại điểm $A(-2;0)$.Điểm $E$ là chân đường cao kẻ từ đỉnh $A$.Gọi $F$ là điểm đối xứng với $E$ qua $A$, trực tâm tam giác $BCF$ là điểm $H(-2;3)$.Trung điểm $M$ của đoạn $BC$ thuộc đường thẳng $(d): 4x-y+4=0$.Biết hoành độ đỉnh $B$ dương. Tính $S=2x_B+3x_C$

**A.** $-4$. **B.** $9$. **C.** $4$. **D.** $-9$

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $D$ là điểm đối xứng với $E$ qua $B$

Xét $\Delta EDF$: $AB//DF \Rightarrow AC \perp DF$

Xét $\Delta DCF$: $AC$ và $FE$ là đường cao $\Rightarrow A$ là trực tâm $\Rightarrow AD \perp FC \ (1)$

Mà $H$ trực tâm tam giác $BCF \Rightarrow BH \perp FC \ (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra: $AD//BH \Rightarrow H$ là trung điểm $AE \Rightarrow E(-2;6)$

Phương trình $(AE): x+2=0 \Rightarrow (DC): y-6=0$

$$M=(DC)\cap(d) \Rightarrow \begin{cases} y-6=0 \\ 4x-y+4=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2};6\right)$$

Do $B \in DC \Rightarrow B(b;6)$. Mà $\Delta ABC$ vuông tại $A \Rightarrow MA=MB=MC=\frac{13}{2}$

$$\Rightarrow MC^2=MB^2=\frac{169}{4} \Rightarrow \left(b-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{169}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=7 \\ b=-6 \end{array}\right. \Rightarrow B(7,6);C(-6;6) \Rightarrow S=-4$$

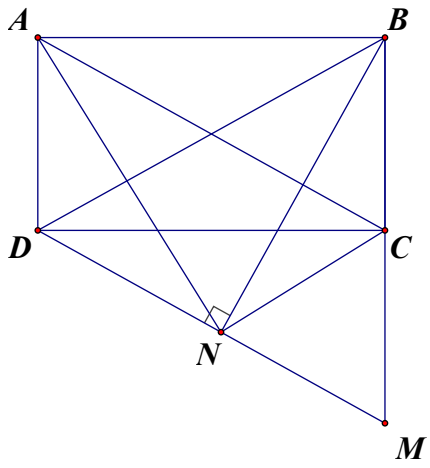
## Dạng 7. Bài toán liên quan đến tứ giác

**Câu 161.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $C$ thuộc đường thẳng d: $2x+y+5=0$ và điểm $A(-4;8)$. Gọi $M$ đối xứng với $B$ qua $C$, điểm $N(5;-4)$ là hình chiếu vuông góc của $B$ lên đường thẳng $MD$. Biết tọa độ $C(m;n)$, giá trị của $m-n$ là

**A.** $6$. **B.** $-6$. **C.** $8$. **D.** $7$

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $C(t;-2t-5)\in(d)$.

Dễ thấy hai tứ giác $BCND$ và $ADNB$ nội tiếp.

Suy ra $\begin{cases}\overline{BNC}=\overline{BDC}\\ \overline{BNA}=\overline{BDA}\end{cases}\Rightarrow \widehat{ANC}=90^{\circ}\Leftrightarrow CN\perp AN$.

Do đó $\overrightarrow{CN}.\overrightarrow{AN}=0\Leftrightarrow 9(5-t)-12(2t+1)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow C(1;-7)$.

Vậy $m-n=1+7=8$

**Câu 162.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$. Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $BC$, $N$ là điểm trên cạnh $CD$ sao cho $CN=2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng $AN$ có phương trình $2x-y-3=0$. Tìm tọa độ điểm $A$.

**A.** $A(1;-1)$ hoặc $A(4;-5)$.

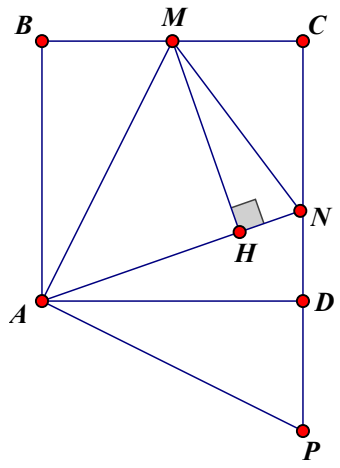
**B.** $A(1;-1)$ hoặc $A(-4;-5)$.

**C.** $A(1;-1)$ hoặc $A(4;5)$.

**D.** $A(1;1)$ hoặc $A(4;5)$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $a>0$ là độ dài cạnh của hình $ABCD$.

Trên tia đối của tia $DC$ lấy điểm $P$ sao cho $DP=\frac{1}{2}a$.

Tam giác $MCN$ có $MN=\sqrt{MC^2+CN^2}=\frac{5}{6}a$.

Tam giác $ANP$ có $NP=ND+DP=\frac{5}{6}a$.

Vậy $\Delta AMN=\Delta APN$ (c.c.c) suy ra $\widehat{MAN}=45^{\circ}$.

Suy ra với $H$ là hình chiếu vuông góc của $M$ trên đường thẳng  thì tam giác $AHM$ vuông cân tại $H$.

Tính được $H\left(\frac{5}{2};2\right)$, $HM=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ suy ra tọa độ $A$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{45}{4}\\ 2x-y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

**Câu 163.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$; các điểm $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$, $CD$; $CM$ cắt $DN$ tại điểm $I(5;2)$. Biết $P\left(\frac{11}{2};\frac{11}{2}\right)$ và điểm $A$ có hoành độ âm. Tọa độ điểm $A$ và $D$ là:

**A.** $A(-2;3)$ và $D(3;8)$.

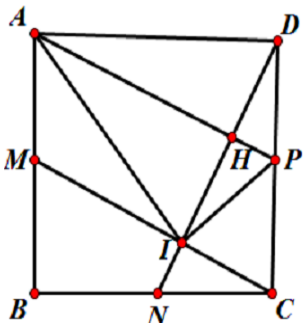
**B.** $A(-2;3)$ và $D(-3;8)$.

**C.** $A(-2;3)$ và $D(3;-8)$.

**D.** $A(-2;-3)$ và $D(3;8)$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $H$ là giao điểm của $ND, AP$

Ta có: $\Delta MBC=\Delta NCD\ (c-g-c)$ nên $\widehat{MCB}=\widehat{NDC}$.

Mà $\widehat{MCB}+\widehat{MCD}=90^\circ\Rightarrow\widehat{NDC}+\widehat{MCD}=90^\circ\Rightarrow\widehat{DIC}=90^\circ\Rightarrow ND\perp MC\Rightarrow ID\perp AP\ \ (1)$

Do $AMCP$ là hình bình hành nên $AP//MC\ \Rightarrow\ HP//IC$ suy ra $H$ là trung điểm của $ID\ \ (2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow AP$ là đoạn trung trực của $ID\Rightarrow\Delta ADP=\Delta AIP\Rightarrow AI\perp IP$,

$AI=2IP=2.\frac{5\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$.

Phương trình đường thẳng $AI:\begin{cases}x=5+7t\\y=2-t\end{cases}$.

$A\in AI,\ \mathrm{A}\neq I,\ \mathrm{x}_A<0\Leftrightarrow A(5+7t;2-t),\ 5+7\mathrm{t}<0.$

$AI=5\sqrt{2}\Leftrightarrow 50t^2=50\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\ (\text{nhận})\\t=1\ (\text{loại})\end{array}\right.$

$t=-1\Rightarrow A(-2;3)$.

$AP:x-3y+11=0$, $DN:3x+y-17=0$.

$H=AP\cap DN\Rightarrow$ Tọa độ của $H$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-3y+11=0\\3x+y-17=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$.

$H(4;5)$, $I(5;2)\Rightarrow D(3;8)$.

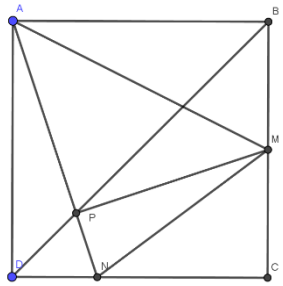
Vậy $A(-2;3)$, $D(3;8)$.

**Câu 164.** Trên mặt phẳng $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$. Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $BC$, $N$ là điểm trên cạnh $CD$ sao cho $CN=2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng $AN$ có phương trình $2x-y-3=0$. Gọi $P(a;b)$ là giao điểm của $AN$ và $BD$. Giá trị $2a+b$ bằng

**A.** 6 **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta chứng minh được $MP\perp AN$, nên $P$ là hình chiếu của $M$ trên $AN$.

(Thật vậy gắn hệ trục toạ độ $Dxy$, $D(0;0),C(1;0),B(1;1),A(0;1)$. Khi đó $M\left(1;\frac{1}{2}\right);N\left(\frac{1}{3};0\right)$.

Phương trình đường thẳng $BD:y=x$. Phương trình đường thẳng $AN:3x+y=1$.

Điểm $P\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$. Khi đó $\overrightarrow{MP}=\left(\frac{-3}{4};\frac{-1}{4}\right);\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{3};-1\right)\Rightarrow\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AN}=0\Rightarrow MP\perp AN$ (đpcm).

Phương trình đường thẳng $MP$ qua $M$ và vuông góc với $AN$ là $x+2y-\frac{13}{2}=0$.

$P$ là giao điểm $MP$ và $AN$ nên toạ độ $P$ là nghiệm hệ $\begin{cases}2x-y=3\\x+2y=\frac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\y=2\end{cases}$.

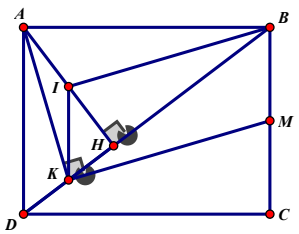
Từ đó: $a=\frac{5}{2}$, $b=2\Rightarrow 2a+b=7$.

**Câu 165.** Trong mặt phẳng tọa độ với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $H(1;2)$ là hình chiếu vuông góc của $A$ lên $BD$. Điểm $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ là trung điểm cạnh $BC$. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh $A$ của tam giác $ADH$ là $4x+y-4=0$. Biết điểm $D$ có tọa độ là $(x_D;y_D)$ tính giá trị biểu thức $S=4x_D^2+y_D^2$.

**A.** $S=3$. **B.** $S=4$. **C.** $S=6$. **D.** $S=5$.

**Lời giải**

**Chọn B**



Gọi $I,K$ lần lượt là trung điểm của $AH$ và $DH \Rightarrow IK \parallel = \frac{1}{2}AD \Rightarrow IK \parallel = BM \Rightarrow$ tứ giác $IBMK$ là hình bình hành $\Rightarrow BI \parallel MK$. (1)

Do $IK \parallel AD$ và $AD \perp AB \Rightarrow IK \perp AB \Rightarrow I$ là trực tâm tam giác $ABK \Rightarrow BI \perp AK$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $MK \perp AK$.

Phương trình $AK: 4x+y-4=0$, suy ra phương trình $MK: 2x-8y+15=0$.

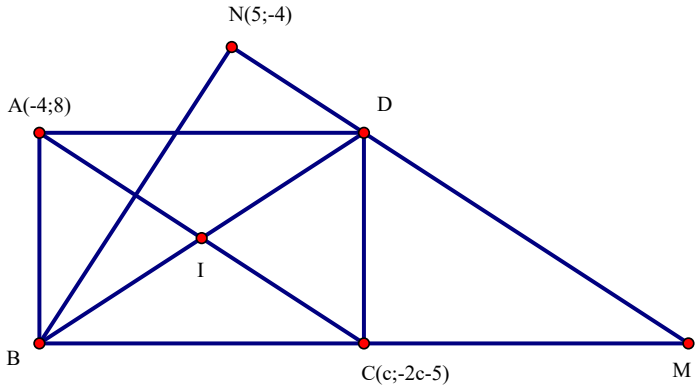
Tọa độ điểm $K$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4x+y-4=0 \\ 2x-8y+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Do đó $\begin{cases} x_D = 2x_K - x_H = 0 \\ y_D = 2y_K - y_H = 2 \end{cases} \Rightarrow D(0;2) \Rightarrow P = 4..$

**Câu 166.** Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x+y+5=0$ và điểm $A(-4;8)$. Gọi M là điểm đối xứng với B qua C, điểm $N(5;-4)$ là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng M**D.** Biết tọa độ $C(m;n)$, giá trị của $m-n$ là:

**A.** 6. **B.** –6. **C.** 8. **D.** 7.

**Lời giải**




**Chọn C**

Gọi $I(a;b)$ là trung điểm $BD$

Có $\widehat{BAD} = \widehat{BND} = 90°$. Suy ra $BAND$ nội tiếp đường tròn đường kính $BD$, tâm $I$

Có $IA = IN \Leftrightarrow (a+4)^2 + (b-8)^2 = (a-5)^2 + (b+4)^2 \Leftrightarrow 6a-8b+13=0$

Có $I$ là trung điểm $AC$. Nên $C(2a+4;2b-8)$

Có $C \in d$. Suy ra $2(2a+4)+(2b-8)+5=0 \Leftrightarrow 4a+2b+5=0$

Giải hệ: $\begin{cases} 6a-8b+13=0 \\ 4a+2b+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Có $m-n=(2a+4)-(2b-8)=8$.

**Câu 167.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính $BD$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A$ lên $BC$ và $BD$; gọi $P$ là giao điểm của $MN$ và $AC$. Biết đường thẳng $AC$ có phương trình $x-y-1=0$, $M(0;4)$, $N(2;2)$ và hoành độ điểm $A$ nhỏ hơn $2$. Tìm tọa độ các điểm $P$, $A$, $B$.

**A.** $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), A(0;-1), B(4;1)$.

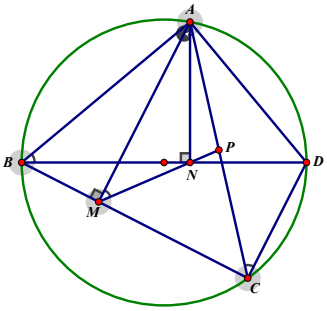
**B.** $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), A(0;-1), B(-1;4)$.

**C.** $P\left(\frac{5}{3};\frac{3}{2}\right), A(0;-1), B(-1;4)$.

**D.** $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), A(-1;0), B(4;1)$.

**Lời giải**

**Chọn B**




* Ta chứng minh $P$ là trung điểm của $AC$.

Thật vậy: do các tứ giác $ABMN$, $ABCD$ là các tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AMP}=\widehat{ABN}=\widehat{ACD}$

Lại do : $AM // CD$ (cùng vuông góc với $BC$) nên $\widehat{ACD}=\widehat{CAM}\Rightarrow\widehat{PAM}=\widehat{PMA}$

$\Rightarrow \Delta PAM$ cân tại $P\Rightarrow PA=PM$. Đồng thời $\Delta PCM$ cân tại $P$ nên $PC=PM$

$\Rightarrow PA=PC$ hay $P$ là trung điểm của $AC$.

- Ta có : $\overrightarrow{MN}=(2;-2)\Rightarrow$ đường thẳng $MN$ có phương trình: $x+y-4=0$

Điểm $P$ có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y-1=0\\x+y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\y=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow P=\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

- Do $A\in AC: x-y-1=0\Rightarrow A=(a;a-1)$ (với $a<2$)

- Do $PA=PM\Leftrightarrow\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\left(a-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}\Leftrightarrow\left(a-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\\a-\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\\a=0\end{array}\right.\Rightarrow a=0\Rightarrow A=(0;-1)\Rightarrow C=(5;4)$

- Do $BC$ đi qua $M(0;4)$ và $C(5;4)$ nên $BC$ có phương trình: $y-4=0$.

- Lại có: $\overrightarrow{AN}=(2;3)$ là vectơ pháp tuyến của $BD$ nên phương trình $BD$ là: $2x+3y-10=0$.

Tọa độ điểm $B$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}y-4=0\\2x+3y-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=4\end{cases}\Rightarrow B=(-1;4)$.

Vậy $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$, $A(0;-1)$, $B(-1;4)$.

**Câu 168.** Trên hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$. Điểm $M$ thuộc cạnh $CD$ sao cho $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{DM}$, $N(0;2019)$ là trung điểm của cạnh $BC$, $K$ là giao điểm của hai đường thẳng $AM$ và $BD$. Biết đường thẳng $AM$ có phương trình $x-10y+2018=0$. Khoảng cách từ gốc tọa độ $O$ đến đường thẳng $NK$ bằng

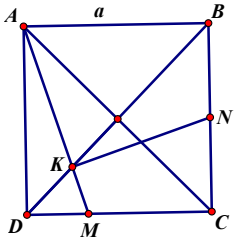
**A.** $2019$. **B.** $2019\sqrt{101}$. **C.** $\frac{2018}{11}$. **D.** $\frac{2019\sqrt{101}}{101}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi cạnh hình vuông bằng $a$. Do $\Delta ABK\sim\Delta MDK\Rightarrow\frac{MD}{AB}=\frac{DK}{KB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{DK}{DB}=\frac{1}{4}$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ (1)




$\overrightarrow{NK}=\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}=0\Rightarrow AM\perp NK$.

Vì $AM\perp NK$ nên NK có phương trình tổng quát: $10x+y-2019=0$.

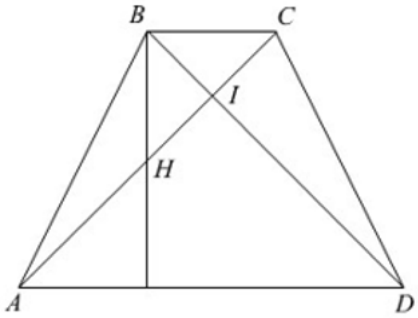
Khoảng cách từ O đến NK là $d(O,NK)=\frac{|-2019|}{\sqrt{10^2+1^2}}=\frac{2019\sqrt{101}}{101}$.

**Câu 169.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD=3BC$. Đường thẳng $BD$ có phương trình $x+2y-6=0$ và tam giác $ABD$ có trực tâm là $H(-3;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh $C$ và $D$.

**A.** $C(-1;6),D(4;1)$ **và** $C(-1;6),D(-8;7)$. **B.** $C(1;6),D(-4;1)$ **và** $C(1;6),D(-8;7)$.

**C.** $C(1;6),D(-4;1)$ **và** $C(1;6),D(8;7)$. **D.** $C(-1;6),D(4;-1)$ **và** $C(-1;6),D(8;-7)$.

**Lời giải.**




Gọi $I$ là giao điểm của $AC$ và $BD\Rightarrow IB=IC$.

Mà $IB\perp IC$ nên $\Delta IBC$ vuông cân tại $I\Rightarrow\widehat{ICB}=45^0$.

$BH\perp AD\Rightarrow BH\perp BC\Rightarrow\Delta HBC$ vuông cân tại $B\Rightarrow I$ là trung điểm của đoạn thẳng $HC$.

Do $CH\perp BD$ và trung điểm $I$ của $CH$ thuộc $BD$ nên tọa độ điểm $C$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}2(x+3)-(y-2)=0\\ \frac{x-3}{2}+2\left(\frac{y+2}{2}\right)-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=6\end{cases}\Rightarrow C(-1;6).$$

Ta có: $\frac{IC}{ID}=\frac{IB}{ID}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{3}\Rightarrow ID=3IC\Rightarrow CD=\sqrt{IC^2+ID^2}=IC\sqrt{10}=\frac{CH\sqrt{10}}{2}=5\sqrt{2}.$

Ta có: $D(6-2t;t)$ và $CD=5\sqrt{2}$ suy ra $(7-2t)^2+(t-6)^2=50\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=7.\end{array}\right.$

Do đó: $D(4;1)$ hoặc $D(-8;7)$.

**Câu 170.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x+3y=0$ và $x-y+4=0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3};1\right)$. Khẳng định nào sau đay là khẳng định đúng?

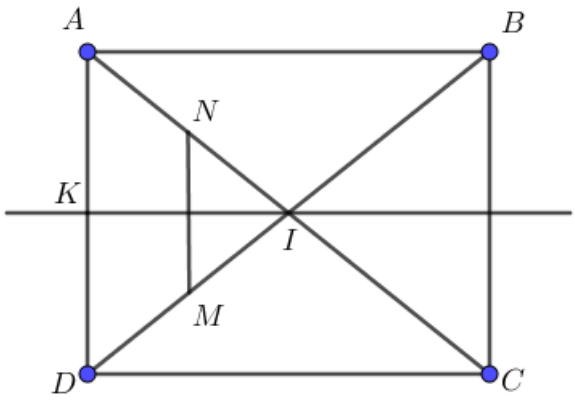
**A.** Tọa độ trọng tâm của tam giác BCD là $G\left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$

**B.** Tọa độ trọng tâm của tam giác ACD là $G\left(-\frac{1}{3};-1\right)$

**C.** Tọa độ trọng tâm của tam giác ABD là $G(-1;3)$

**D.** Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3};-1\right)$

***Lời giải***




+ Tọa độ điểm A thỏa mãn hệ

$\begin{cases}x+3y=0\\x-y+4=0\end{cases}\Rightarrow A(-3;1)$

+ Gọi N là điểm thuộc AC sao cho MN//A**D.** Suy ra MN có phương trình là: $x-y+\frac{4}{3}=0$

Vì N thuộc AC nên tọa độ điểm N thỏa mãn hệ $\begin{cases}x-y+\frac{4}{3}=0\\x+3y=0\end{cases}\Rightarrow N\left(-1;\frac{1}{3}\right)$

Đường trung trực $\Delta$ của MN đi qua trung điểm của MN và vuông góc với AD, nên ta có phương trình $x+y=0$

Gọi I, K lần lượt là giao điểm của $\Delta$ với AC và AD.

Suy ra tọa độ điểm I thỏa mãn hệ $\begin{cases}x+y=0\\x+3y=0\end{cases}\Rightarrow I(0;0)$

Tọa độ điểm K thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Rightarrow K(-2;2)$

Ta có

$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI} \Rightarrow C(3;-1); \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AK} \Rightarrow D(-1;3); \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD} \Rightarrow B(1;-3)$

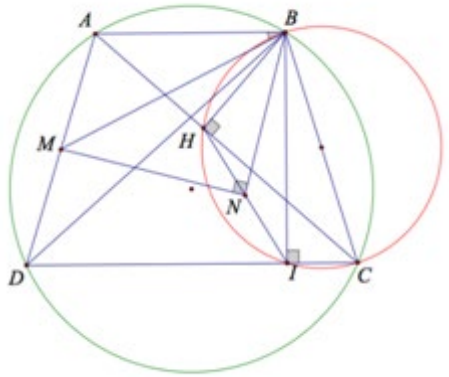
Vậy tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3};-1\right)$

**Câu 171.** Trong mặt phẳng với trục toạ độ $Oxy$ cho hình thang cân $ABCD$ $(AB//CD)$. Gọi $H,I$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $B$ trên các đường thẳng $AC,CD$. Giả sử $M,N$ lần lượt là trung điểm của $AD,HI$. Phương trình đường thẳng $AB$ có dạng $mx+ny-7=0$ biết $M(1;-2)$, $N(3;4)$ và đỉnh $B$ nằm trên đường thẳng $x+y-9=0$, $\cos\widehat{ABM}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Khi đó $m+n$ có giá trị thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$

**Lời giải**

**Chọn B**




Xét tam giác $ABD$ và $HBI$ có: $\widehat{ABD}=\widehat{HCI}=\widehat{HBI}$.

Và $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}=\widehat{HIB}$. Suy ra $\Delta ABD$ và $\Delta HBI$ đồng dạng.

Ta có $BM,BN$ lần lượt là hai trung tuyến của hai tam giác $ABD,HBI$ do đó:

$\frac{BM}{BN}=\frac{BA}{BH}$ (1).

Lại có $\widehat{ABM}=\widehat{HBN} \Rightarrow \widehat{MBN}=\widehat{ABH}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta ABH$ và $\Delta MBN$ đồng dạng.

Do đó $\widehat{MNB}=\widehat{AHB}=90^\circ$ hay $MN \perp NB$

Đường thẳng $BN$ đi qua $N$ và vuông góc với $MN$ nên có phương trình là:

$x+3y-15=0$.

Toạ độ điểm $B$ thoả mãn $\begin{cases} x+y-9=0 \\ x+3y-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$. Suy ra $B(6;3)$.

Gọi $\vec{n}(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ là một vec tơ chỉ phương của đường thẳng $AB$.

Ta có $\overrightarrow{MB}(5;5)$ Theo bài ra ta có $\cos\widehat{ABM}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos\widehat{ABM}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{|a+b|}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$

$\Leftrightarrow 8\left(a^2+b^2\right)=5(a+b)^2 \Leftrightarrow 3a^2-10ab+3b^2=0 \Leftrightarrow a=3b$ và $b=3a$

Với $b=3a$, chọn $a=1;b=3$ ta có phương trình $AB: x+3y-15=0$ (loại do trùng với $BN$).

Với $a=3b$, chọn $a=3;b=1$ ta có phương trình $AB: 3x+y-21=0$

Vậy phương trình đường thẳng $AB: x+\frac{1}{3}y-7=0$.

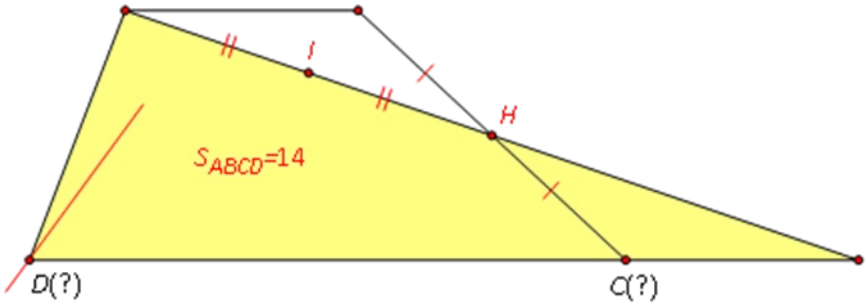
Chọn đáp án **B.**

**Câu 172.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình thang $ABCD$ có diện tích bằng 14 và $AB//CD$. Biết $H\left(-\frac{1}{2};0\right)$ là trung điểm của cạnh $BC$ và $I\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của $AH$. Viết phương trình đường thẳng $AB$, biết điểm $D$ có hoành độ dương và $D$ thuộc đường thẳng $5x-y+1=0$.

**A.** $3x-y+2=0$. **B.** $3x-y-2=0$. **C.** $x+3y-2=0$. **D.** $x-3y-2=0$.

**Lời giải**

**Chọn B**




$A(?)$ $B(?)$

E

**• Do $I$ là trung điểm của $AH \Rightarrow A(1;1)$. Gọi $E$ là giao điểm của $AH$ và $DC$. Khi đó $\Delta ABH=\Delta ECH$. Do đó $S_{ABH}=S_{ECH} \Rightarrow S_{AED}=S_{AHCD}+S_{ECH}=S_{AHCD}+S_{ABH}=S_{ABCD}=14$ và $H$ là trung điểm $AE$.**

**Suy ra $E(-2;-1)$ từ đó có phương trình $AE: 2x-3y+1=0$.**

**• Do $D$ thuộc đường thẳng $5x-y+1=0$ nên $D(t;5t+1), t>0$.**

**Ta có**

$$AE=\sqrt{13} \Rightarrow d(D;AE)=\frac{2S_{AED}}{AE} \Leftrightarrow \frac{|2t-3(5t+1)+1|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{28}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\frac{30}{13} \end{array}\right. \Rightarrow t=2 \Rightarrow D(2;11).$$

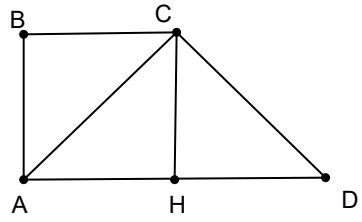
**• Ta có $\overrightarrow{ED}=(4;12)=4(1;3)$. Do $AB//ED$ nên $\vec{n}_{AB}=\vec{n}_{ED}=(3;-1)$ là vecto pháp tuyến của $AB$.**

**Vậy phương trình đường thẳng $AB$ là $3x-y-2=0$**

***Câu 173.*** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại $A$ và $B$, cạnh $AB = BC = \frac{AD}{2}$. Biết đường thẳng chứa cạnh $CD$ có phương trình $3x + y - 4 = 0$ và $A(-2; 0)$. Điểm $B(a;b)$ với $b>0$ khi đó $a^2+b^2=?$

**A.** 5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 4

**Lời giải**



Gọi H là trung điểm của AD suy ra tứ giác ABCH là hình vuông nên các tam giác AHC, DHC vuông cân tại H vậy nên AC vuông góc với CD

$\Rightarrow AC: x-3y+2=0$

$\Rightarrow AC \cap CD = C(1;1)$

ΔABC vuông cân tại B nên B nằm trên đường tròn đường kính AC và AB =BC ta có hệ

$$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \\ 3x+y=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=-1\ (L) \\ x=-1, y=2\ (TM) \end{array}\right.$ Vậy B(-1; 2)

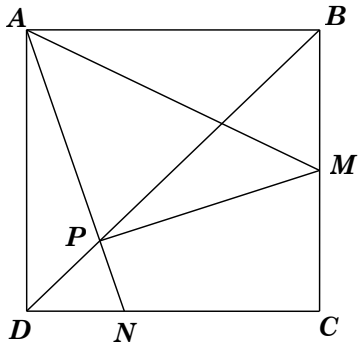
Vậy $a^2+b^2=5$ **Chọn A**

**Câu 174.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD**.** Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x-y-3=0$. Gọi $P(a;b)$ là giao điểm của AN và BD**.** Giá trị $2a+b$ bằng:

**A.** 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn B**




Xét tam giác vuông ABM có $\tan\widehat{BAM}=\frac{BM}{AB}=\frac{1}{2}$

Xét tam giác vuông ADN có $\tan\widehat{DAN}=\frac{DN}{DA}=\frac{1}{3}$

Ta có $\tan\left(\widehat{BAM}+\widehat{DAN}\right)=\frac{\tan\widehat{BAM}+\tan\widehat{DAN}}{1-\tan\widehat{BAM}.\tan\widehat{DAN}}=1$. Suy ra $\widehat{BAM}+\widehat{DAN}=45^0$

Do đó $\widehat{PAM}=90^0-\left(\widehat{BAM}+\widehat{DAN}\right)=45^0$

Ta có $\widehat{PAM}=45^0=\widehat{PBM}$ nên tứ giác ABMP nội tiếp.

Suy ra $\widehat{APM}=180^0-\widehat{ABM}=90^0$ hay $MP \perp AN$

Đường thẳng MP đi qua M và vuông góc với AN nên $MP: x+2y-\frac{13}{2}=0$.

Do $P=AN\cap MP$ nên tọa độ điểm P thỏa mãn hệ $\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ x+2y-\frac{13}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{5}{2};2\right)$.

Vậy $2a+b=7$.

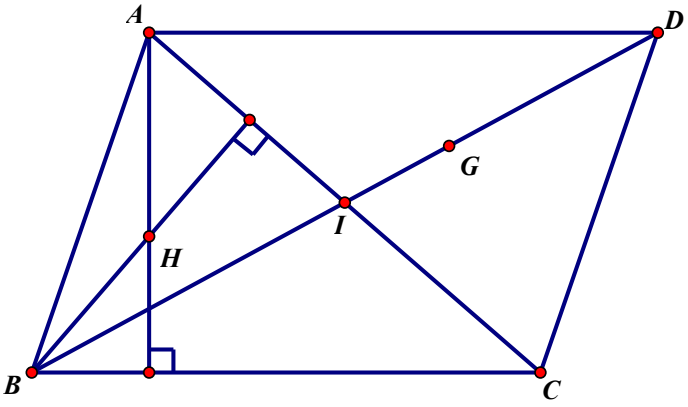
**Câu 175.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình bình hành $ABCD$ có phương trình đường chéo $AC$ là $5x+y+4=0$. Tọa độ trực tâm tam giác $ABC$ là $H(-\frac{23}{7};\frac{15}{7})$. Tọa độ trọng tâm tam giác $ACD$ là $G(-\frac{2}{3};4)$. Gọi $x_A,x_B,x_C,x_D$ lần lượt là hoành độ của các điểm $A, B, C,D$.

Tính giá trị biểu thức $T=x_A^2+x_C^2+2018x_D+x_B$.

**A.** 2024. **B.** 2015. **C.** 2021. **D.** 2019.

***Lời giải***

***Chọn D***




+ Đường thẳng $BH$ qua $H(-\frac{23}{7};\frac{15}{7})$ và vuông góc với $AC$ nên có phương trình: $x-5y+14=0$ hay $x=5y-14$

Giả sử $B(5b-14;b)$. Ta có

$$d(B;AC)=d(D;AC)=3d(G;AC)\Rightarrow\frac{|5(5b-14)+b+4|}{\sqrt{5^2+1^2}}=3.\frac{\left|-5.\frac{2}{3}+4+4\right|}{\sqrt{5^2+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow|26b-66|=14\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}26b-66=14\\26b-66=-14\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\frac{40}{13}\\b=2\end{array}\right.$$

Suy ra $B(\frac{18}{13};\frac{40}{13})$ hoặc $B(-4;2)$. Do $B, G$ nằm khác phía $AC$ nên $B(-4;2)$.

Giả sử $D(x;y)$ ta có:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{3}(x+4)=\frac{10}{3}\\\frac{2}{3}(y-2)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}\Rightarrow D(1;5)$$

Vì $I$ là trung điểm của $BD$ nên $I(-\frac{3}{2};\frac{7}{2})$

Đường thẳng $AC$ có phương trình $y=-5x-4$.

Giả sử $A(a;-5a-4)$, vì $I(-\frac{3}{2};\frac{7}{2})$ là trung điểm của $AC$ nên $C(-a-3;5a+11)$.

Ta có $\overrightarrow{HA}=(a+\frac{23}{7};-5a-\frac{43}{7});\overrightarrow{BC}=(-a+1;5a+9)$.

Do $HA \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (a+\frac{23}{7})(-a+1)+(-5a-\frac{43}{7})(5a+9)=0$

$\Leftrightarrow a^2+3a+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=-2 \end{array}\right.$

$a=-1 \Rightarrow A(-1;1); C(-2;6)$

$a=-2 \Rightarrow A(-2;6); C(-1;1)$.

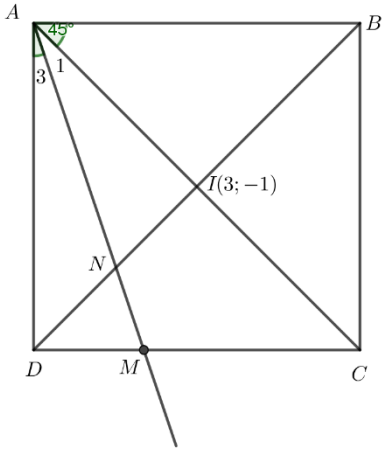
Khi đó: $T = x_A{}^2 + x_C{}^2 + 2018x_D + x_{B.} = (-1)^2 + (-2)^2 + 2018 - 4 = 2019.$

**Câu 176.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(3;-1)$, điểm $M$ thuộc cạnh $CD$ sao cho $MC = 2MD$. Tìm tọa độ đỉnh $A$ của hình vuông $ABCD$ biết đường thẳng $AM$ có phương trình $2x-y-4=0$ và đỉnh $A$ có tung độ âm.

**A.** $A(3;-2)$. **B.** $A(3;2)$. **C.** $A\left(-\frac{3}{2};-7\right)$. **D.** $A\left(\frac{3}{5};-\frac{14}{5}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**




***Cách 1:*** Sử dụng khoảng cách

Biết tọa độ điểm $I(3;-1)$ và phương trình đường thẳng $AM \Rightarrow IH = d(I, AM) = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

$AM \cap BD = \{N\}$ với $N$ là trung điểm của $DI$.

Gọi $a, (a>0)$: là độ dài cạnh của hình vuông.

$AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $IN = \frac{1}{2}ID = \frac{a\sqrt{2}}{4}$; $IH = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{IN^2} \Leftrightarrow \frac{5}{9} = \frac{2}{a^2} + \frac{8}{a^2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$.

Ta có: $\begin{cases} A \in AM \Leftrightarrow A(x; 2x-4) \\ IA = 3 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (2x-3)^2 = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow A(3;2) \\ x=\frac{3}{5} \Rightarrow A\left(\frac{3}{5};-\frac{14}{5}\right) \end{array}\right.$

Vậy $A\left(\frac{3}{5};-\frac{14}{5}\right)$

***Cách 2:*** Xác định $A = AC \cap AM$.

Gọi $\alpha$ là góc tạo bởi hai đường thẳng $AC$ và $AM$.

$\alpha = 90^0 - (A_1 + A_3) = 90^0 - (A_3 + 45^0)$

$\cos\alpha = \cos\left(90^0 - (A_3 + 45^0)\right) = \sin(A_3 + 45^0)$

Gọi $a, (a > 0)$ là độ dài cạnh của hình vuông.

Ta có: $AD = a; DM = \frac{a}{3}; AM = \frac{a\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \cos A_3 = \frac{3}{\sqrt{10}}; \sin A_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Gọi $\vec{n} = (a;b), (a^2 + b^2 \neq 0)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AC. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|2a-b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 3b + 4a = 0 \end{array}\right.$

Với $b = 0$ chọn $a = 1$

Đường thẳng $AC$ đi qua $I(3;-1)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;0)$ có phương trình $x - 3 = 0$.

$\{A\} = AC \cap AM \Rightarrow$ Tọa độ $A: \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(3;2)$ ( Loại).

Tương tự, với $3b + 4a = 0$ chọn $a = 3, b = -4$

Đường thẳng $AC$ đi qua $I(3;-1)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;-4)$ có phương trình $3x - 4y - 13 = 0$.

$\{A\} = AC \cap AM \Rightarrow$ Tọa độ $A: \begin{cases} 3x - 4y - 13 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3}{5}; -\frac{14}{5}\right)$

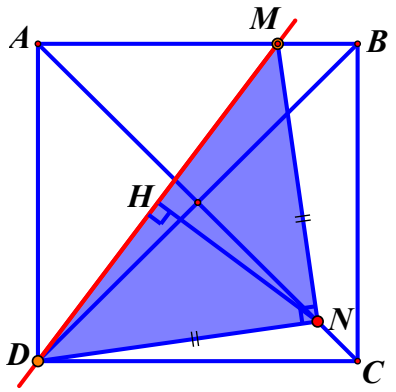
Vậy $A\left(\frac{3}{5}; -\frac{14}{5}\right)$.

**Câu 177.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$ có $M$, $N$ là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$. Biết rằng hai điểm $M$, $D$ thuộc đường thẳng $\Delta: 4x - 3y - 2 = 0$, $N\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ và $D$ có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{3}$, hãy tính tổng hoành độ và tung độ của điểm $A$.

**A.** $\frac{-22}{25}$ **B.** $\frac{-24}{25}$. **C.** $0$. **D.** $\frac{4}{25}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{8}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DN} = \frac{7}{64}AB^2 - \frac{7}{64}AD^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DN}$

• $\mathrm{MN}^2 = \frac{5}{6}AB^2 = \mathrm{DN}^2 \Rightarrow MN = DN \Rightarrow \Delta DMN$ vuông cân tại $N$.

Gọi $H$ là hình chiếu của $N$ trên $\Delta$ thì $NH = d(N;\Delta) = \frac{5}{2}$.

$\Delta DMN$ vuông cân tại $N \Rightarrow \Delta DHN$ vuông cân tại $H$ và $H$ trung điểm của $DM$.

$\Rightarrow ND = NM = \sqrt{2}NH$.

$\Rightarrow D, M$ là các giao điểm của $\Delta$ và đường tròn tâm $N$, bán kính $R = \sqrt{2}NH = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow$ Tọa độ của $D, M$ là các nghiệm (x;y) của hệ $\begin{cases} 4x-3y-2=0 \\ (x-\frac{5}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{25}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(2;2),\ D(-1;-2)\ \text{(loại)} \\ M(-1;-2),\ D(2;2)\ \text{(nhận)} \end{array}\right.$

• $M(-1;-2),\ D(2;2) \Rightarrow MD = 5 \Rightarrow AD = 4,\ AM = 3$.

Giả sử $A(a;b)$. Từ $AD = 4,\ AM = 3$ và hai điểm $A, N$ nằm về hai phía khác nhau đối với đườngthẳng $DM$ ta có hệ $\begin{cases} (a-2)^2+(b-2)^2=16, \\ (a+1)^2+(b+2)^2=9 \\ (4a-3b-2).\frac{25}{2}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{46}{25} \\ b=\frac{22}{25} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{46}{25};\frac{22}{25}\right)$.

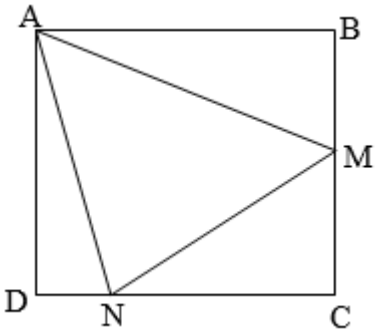
Vậy tổng hoành độ và tung độ của A là $-\frac{24}{25}$.

**Câu 178.** Cho hình vuông $ABCD$. Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $BC$, $N$ là điểm trên cạnh $CD$ sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng $AN:\ 2x-y-3=0$. Biết tọa độ $A(a;b)$ ( với $b>0$). Tính $a+b$

**A.** $a+b=0$. **B.** $a+b=9$. **C.** $a+b=-1$. **D.** $a+b=4$

**Lời giải**

**Chọn B**




Giả sử $A(a,2a-3)$ và $B(b,c)$.

Vì M là trung điểm của $BC$ nên $C(11-b,\ 1-c)$.

Vì $ABCD$ là hbh nên $D(a-2b+11, 2a-2c-2)$

$\Rightarrow N\left(\frac{2a-5b+33}{3};\frac{4a-5c-3}{3}\right)$

Mặt khác: $N \in AN$ nên: $c = 2b-12$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB = BC \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-a)(11-2b)+(2b-2a-9)(24-4b)=0 \\ (b-a)^2+(2b-2a-9)^2=(11-2b)^2+(25-4b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow a=1 \vee a=4$

Với $a=1 \Rightarrow b=-1$ loại

Với $a=4 \Rightarrow b=5 \Rightarrow a+b=9$

**Câu 179.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho hình thoi $ABCD$ cạnh $AC$ có phương trình là: $x+7y-31=0$, hai đỉnh $B$, $D$ lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: x+y-8=0$, $d_2: x-2y+3=0$. Biết rằng diện tích hình thoi bằng 75, đỉnh $A$ có hoành độ âm. Tính tổng hoành độ và tung độ của điểm $C$

**A.** 7 **B.** 10 **C.** 13 **D.** 15

**Lời giải**

**Chọn B**

$B \in d_1 \Rightarrow B(b;8-b)$, $D \in d_2 \Rightarrow (2d-3;d)$.

Khi đó $\overrightarrow{BD}=(-b+2d-3;b+d-8)$ và trung điểm của $BD$ là $I\left(\frac{b+2d-3}{2};\frac{-b+d+8}{2}\right)$.

Theo tính chất hình thoi ta có :

$\begin{cases} BD \perp AC \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_{AC}}.\overrightarrow{BD}=0 \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8b+13d-13=0 \\ -6b+9d-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=1 \end{cases}$.

Suy ra $B(0;8)$; $D(-1;1)$. Khi đó $I\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$; $A \in AC \Rightarrow A(-7a+31;a)$ đk : $a>\frac{31}{7}$

**Cách 1 :**

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD \Rightarrow AC=\frac{2S_{ABCD}}{BD}=15\sqrt{2} \Rightarrow IA=\frac{15}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \left(-7a+\frac{63}{2}\right)^2+\left(a-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{225}{2} \Leftrightarrow \left(a-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(10;3)\ (ktm) \\ A(-11;6) \end{array}\right.$

Suy ra $C(10;3)$ nên tổng hoành độ và tung độ của điểm $C$ là: 13

**Cách 2 :** $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD \Rightarrow AC=\frac{2S_{ABCD}}{BD}=15\sqrt{2}$

ta có $I\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$ là trung điểm của $AC$ nên $C(7a-32;9-a)$ suy ra

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=(14a-63;9-2a) \Rightarrow \sqrt{(14a-63)^2+(9-2a)^2}=15\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(10;3)\ (ktm) \\ A(-11;6) \end{array}\right.$

**Câu 180.** Trong mặt phẳng với hệ trục $Oxy$ cho hình chữ nhật $ABCD$ với đường thẳng chứa cạnh $AD$ có phương trình là $d_1: 3x+y-14=0$. Biết điểm $E(0;-6)$ là điểm đối xứng của $C$ qua $AB$. Gọi $M$ là trung điểm của $CD$. Biết $BD \cap ME = I$ với $I(\frac{2}{3};-\frac{4}{3})$. Tính độ dài đoạn thẳng $HD$ với $H(2;-3)$.

**A.** $HD=\sqrt{29}$. **B.** $HD=5$. **C.** $HD=\sqrt{37}$. **D.** $HD=\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

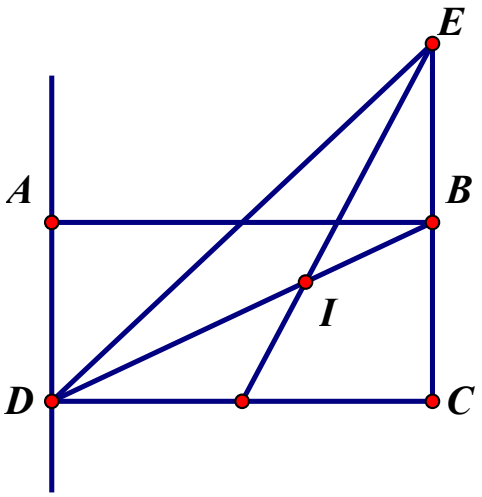
Ta có $\Delta CDE$ với hai trung tuyến $BD \cap ME = I$ nên có $\overrightarrow{EM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{EI}$.

Đặt $M(a;b)$ ta có: $(a;b+6)=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3};\frac{14}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$. Vậy $M(1;1)$.

Đường thẳng $CD$ đi qua điểm $M$ và vuông góc với $AD$ nên có phương trình $d': x-3y+2=0$

Vậy tọa độ điểm $D$ thỏa hệ phương trình $\begin{cases}3x+y=14=0\\x-3y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$

Do đó $HD=\sqrt{29}$.




**Dạng 8. Cực trị**

**Câu 181.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho các điểm $A(1;-1)$ và $B(3;4)$. Gọi $(d)$ là một đường thẳng bất kì luôn đi qua **B.** Khi khoảng cách từ A đến đường thẳng $(d)$ đạt giá trị lớn nhất, đường thẳng $(d)$ có phương trình nào dưới đây?

**A.** $x-y+1=0$. **B.** $3x+4y=25$. **C.** $5x-2y-7=0$. **D.** $2x+5y-26=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $H$ là hình chiếu của điểm $A$ lên đường thẳng $(d)$. Khi đó ta có: $d(A,(d))=AH\le AB=\sqrt{(3-1)^2+(4+1)^2}=\sqrt{29}$. Do đó khoảng cách từ $A$ đến đường thẳng $(d)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{29}$ khi $H\equiv B$ hay $(d)\perp AB$ tại $B$.

Vì vậy $(d)$ đi qua $B$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;5)$ làm VTPT.

Do đó phương trình của đường thẳng $(d)$ là $2(x-3)+5(y-4)=0\Leftrightarrow 2x+5y-26=0$.

**Câu 182.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $\Delta: x+(m-1)y+m=0$ ($m$ là tham số bất kì) và điểm $A(5;1)$. Khoảng cách lớn nhất từ điểm $A$ đến $\Delta$ bằng

**A.** $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $4\sqrt{10}$. **D.** $3\sqrt{10}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\Delta: x+(m-1)y+m=0\Leftrightarrow (y+1)m+x-y=0\ \forall m\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$.

Suy ra $\Delta$ luôn đi qua điểm cố định $H(-1;-1)$.

Khi đó, với mọi $M\in\Delta$, ta có $d(A;\Delta)=AM\le AH$.

Giá trị lớn nhất của $d(A;\Delta)=AH$ khi $M\equiv H\Rightarrow \max d(A,\Delta)=AH=2\sqrt{10}$.

**Câu 183.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho $\Delta: x-y+1=0$ và hai điểm $A(2;1)$, $B(9;6)$. Điểm $M(a;b)$ nằm trên đường $\Delta$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Tính $a+b$.

**A.** $-7$. **B.** $-9$. **C.** $7$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn** C

Gọi $A'$ đối xứng $A$ qua $d$ ta có $A'(0;3)$ khi đó điểm $M = A'B \cap d$

Tìm được $M(3;4)$.

**Câu 184.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x-4y+15=0$ và điểm $A(2;0)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $d$ để đoạn $AM$ có độ dài nhỏ nhất.

**A.** $M(-15;0)$. **B.** $M(5;5)$. **C.** $M(0;3)$. **D.** $M(1;4)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điểm $M \in d \Leftrightarrow M(4t-15;t)$

Ta có: $AM = \sqrt{(4t-17)^2+t^2} = \sqrt{17(t^2-8t+17)} = \sqrt{17\left[(t-4)^2+1\right]} \geq \sqrt{17}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \min AM = \sqrt{17}$, đạt được tại $t=4$. Khi đó $M(1;4)$.

**Câu 185.** Cho 3 điểm $A(-6;3); B(0;-1); C(3;2)$. Tìm $M$ trên đường thẳng $d: 2x-y-3=0$ mà $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất là

**A.** $M\left(\frac{13}{15};\frac{71}{15}\right)$ **B.** $M\left(\frac{13}{15};\frac{19}{15}\right)$ **C.** $M\left(\frac{26}{15};\frac{97}{15}\right)$ **D.** $M\left(\frac{-13}{15};\frac{19}{15}\right)$

**Lời giải**

**Chọn D**

*Cách 1:*

Tìm tọa độ điểm $I(x;y)$ sao cho $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Suy ra $I\left(-1;\frac{4}{3}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MI}\right|$. Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khí $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất.

$\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $I$ xuống đường thẳng $d$.

Đường thẳng $d'$ đi qua $I$ và vuông góc với $d$ có phương trình: $x+2y=\frac{5}{3}$

$M$ là giao điểm của $d$ và $d'$ nên $M$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{-13}{15};\frac{19}{15}\right)$

*Cách 2:*

$M$ thuộc $d$ suy ra $M(t;2t+3)$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = (-3-3t;-6t-5)$

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{(-3-3t)^{2+}+(-6-5t)^2}$

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{45t^2+78t+34} = \sqrt{45\left(t+\frac{13}{15}\right)^2+\frac{1}{5}}$

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi $t=-\frac{13}{15}$. Suy ra $M\left(\frac{-13}{15};\frac{19}{15}\right)$.

**Câu 186.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có đỉnh $A(2;2)$, $B(1;-3)$, $C(-2;2)$. Điểm $M$ thuộc trục tung sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất có tung độ là?

**A.** 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $G(a;b)$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Suy ra $\begin{cases} a=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ b=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2+1-2}{3} \\ b=\dfrac{2-3+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi $MG$ nhỏ nhất.

Mặt khác $M$ thuộc trục tung nên $MG$ nhỏ nhất khi $M$ là hình chiếu của $G$ lên trục tung.

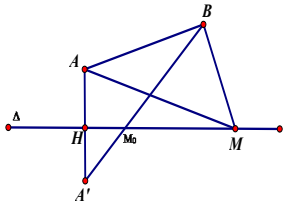
Vậy $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

**Câu 187.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\Delta: x-y+1=0$ và hai điểm $A(2;1)$, $B(9;6)$. Điểm $M(a;b)$ nằm trên đường $\Delta$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Tính $a+b$ ta được kết quả là:

**A.** -9. **B.** 9. **C.** -7. **D.** 7

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng $\Delta$

Ta có: $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ M trùng với $M_0$ ($M_0$ là giao điểm của $\Delta$ và A'B)

Ta có: $AA'\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{n_{AA'}}=\overrightarrow{a_\Delta}=(1;1)$

$(AA'): x+y-3=0$

Gọi $H=AA'\cap\Delta\Rightarrow H(1;2)$

Vì A' đối xứng với A qua $\Delta$ nên H là trung điểm AA' $\Rightarrow A'(0;3)$

Đường thẳng A'B qua B có VTCP $\overrightarrow{A'B}=(9;3)=3(3;1)\Rightarrow\overrightarrow{n_{A'B}}=(1;-3)$

$\Rightarrow A'B: x-3y+9=0$

Tọa độ $M_0$ thỏa hệ: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x-3y+9=0 \end{cases}\Leftrightarrow M_0(3;4)$

$\Rightarrow M(3;4)$. Vậy $a+b=7$

**Câu 188.** Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* cho điểm *A(6;2)* và đường thẳng $d: x-y=0$ .Gọi $P$ là giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác $ABC$ biết $B$ là điểm thay đổi trên tia $Ox$ và $C$ là điểm thay đổi trên ***D.***

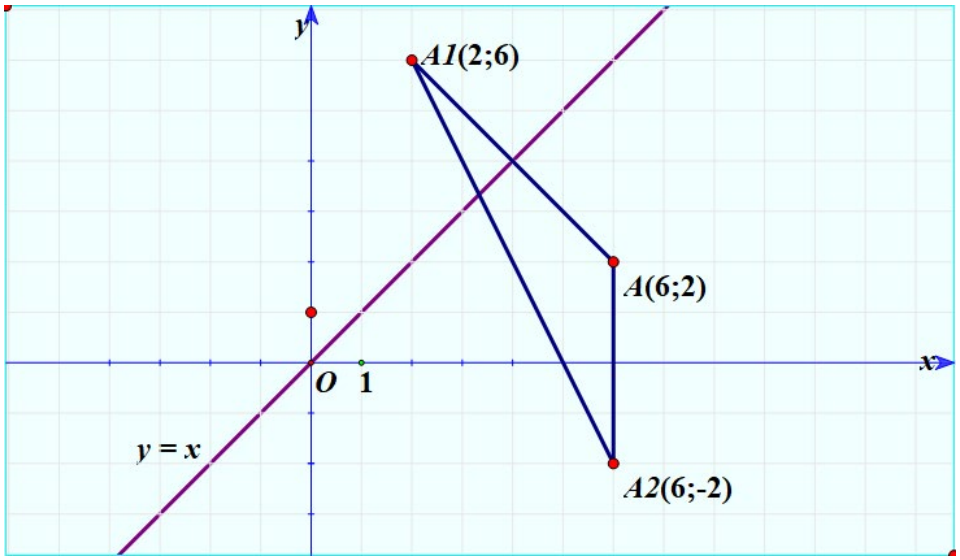
Tính $P$ ?

**A.** $P=2\sqrt{5}$. **B.** $P=4\sqrt{3}$. **C.** $P=3\sqrt{5}$. **D.** $P=4\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Gọi** $A_1, A_2$ lần lượt là điểm đối xứng của $A$ qua $Ox$ và qua $Oy$. Dễ tìm được $A_1(6;-2)$ và $A_2(2;6)$, đồng thời ta có $AB = A_1B, AC = A_2C$. Do đó $P = AB + BC + CA = A_1B + BC + CA_2 \geq A_1A_2$, suy ra $\min P = A_1A_2 = 4\sqrt{5}$ khi $A_1, B, C, A_2$ thẳng hàng theo thứ tự. Viết phương trình $A_1A_2 : 2x + y - 10 = 0$, từ đó tìm được $B(5;0), C(\frac{10}{3};\frac{10}{3})$ thỏa mãn $A_1, B, C, A_2$ thẳng hàng theo thứ tự. Vậy **Chọn D**




**Câu 189.** Cho $\Delta ABC$ nhọn, có $A(1;7)$, $B(-2;0)$, $C(9;0)$ đường cao $AH$. Xét các hình chữ nhật $MNPQ$ với $M \in AB$; $N \in AC$; $P, Q \in BC$. Điểm $M(a;b)$ thỏa mãn hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất, tính $P = a + b$.

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

**Lời giải.**

**Chọn B**

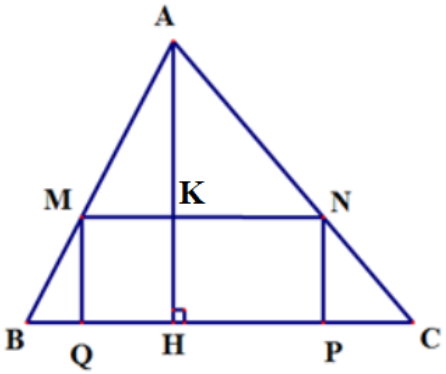
Tổng quát bài toán đặt $MQ = x\ (0 < x < AH)$;

$MN = y \Rightarrow AK = AH - x$

Do $MN // BC \Rightarrow \dfrac{\text{MN}}{\text{BC}} = \dfrac{\text{AK}}{\text{AH}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{y}{BC} = \dfrac{AH - x}{AH} \Rightarrow y = \dfrac{BC(AH - x)}{AH}$

Gọi $S$ là diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ thì:




$$S = xy = \frac{BC}{AH}.x(AH - x) \leq \frac{BC}{AH}.\frac{\left[x + (AH - x)\right]^2}{2} = \frac{BC.AH}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = AH - x \Leftrightarrow x = \dfrac{AH}{2} \Rightarrow MQ = \dfrac{AH}{2}$ suy ra $M$ là trung điểm của $AB$ nên tọa độ $M\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$. Vậy $P = a + b = 3$.

**Câu 190.** Cho $\Delta ABC$ nhọn, có $A(1;7)$, $B(-2;0)$, $C(9;0)$ đường cao $AH$. Xét các hình chữ nhật $MNPQ$ với $M \in AB$; $N \in AC$; $P, Q \in BC$, thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất gần với kết quả nào sau đây?

**A.** 10. **B.** 30. **C.** 15. **D.** 19.

**Lời giải.**

**Chọn D**

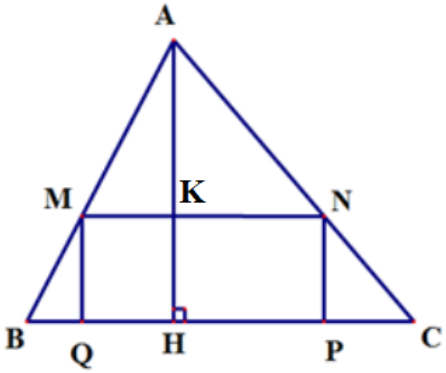
Tổng quát bài toán đặt $MQ = x\ (0 < x < AH)$;

$MN = y \Rightarrow AK = AH - x$

Do $MN // BC \Rightarrow \dfrac{\text{MN}}{\text{BC}} = \dfrac{\text{AK}}{\text{AH}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{y}{BC} = \dfrac{AH - x}{AH} \Rightarrow y = \dfrac{BC(AH - x)}{AH}$

Gọi $S$ là diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ thì:




$$S = xy = \frac{BC}{AH}.x(AH - x) \le \frac{BC}{AH}.\frac{\left[x + (AH - x)\right]^2}{2} = \frac{BC.AH}{4}$$

Có $BC = 11$ và $AH = 7$ nên $S = \dfrac{77}{4}$.

**Câu 191.** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy. Đường thẳng (d) đi qua M( 3; -2) cắt Ox, Oy lần lượt tại A(a;0), B(0;b) và $ab \neq 0$ sao cho: $\dfrac{1}{\text{OA}^2} + \dfrac{1}{4\text{OB}^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $S = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ là

**A.** $S = \dfrac{11}{25}$ **B.** $S = -\dfrac{11}{7}$ **C.** $S = -\dfrac{1}{5}$ **D.** $S = -\dfrac{5}{7}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ giả thiết ta có d: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ .Vì M $\in$ d nên: $\dfrac{3}{a} - \dfrac{2}{b} = 1$ (1)

$OA = |a|; OB = |b| \Rightarrow \dfrac{1}{\text{OA}^2} + \dfrac{1}{4\text{OB}^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4b^2}$

Theo BĐT Bunhiacopski: $1 = (\dfrac{3}{a} - \dfrac{2}{b})^2 = \left(3.\dfrac{1}{a} + (-4).\dfrac{1}{2b}\right)^2 \le (9+16)(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4b^2})$

Hay $\dfrac{1}{\text{OA}^2} + \dfrac{1}{4\text{OB}^2} \ge \dfrac{1}{25}$ đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{a} - \dfrac{2}{b} = 1 \\ 3a = -8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{25}{3} \\ b = -\dfrac{25}{8} \end{cases}$

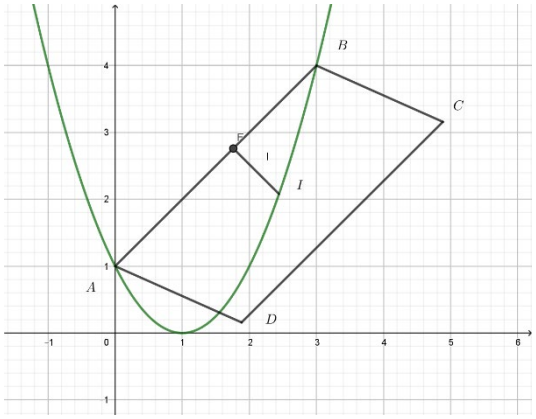
Vậy $\dfrac{1}{\text{OA}^2} + \dfrac{1}{4\text{OB}^2}$ nhỏ nhất khi $\begin{cases} a = \dfrac{25}{3} \\ b = -\dfrac{25}{8} \end{cases} \Rightarrow S = \dfrac{3}{25} - \dfrac{8}{25} = -\dfrac{1}{5}$

**Câu 192.** Cho hình bình $ABCD$ có $A(0;1); B(3;4)$ Tâm $I$ nằm trên parabol có phương trình $y = (x-1)^2$ $0 \le x_I \le 3$ . khi diện tích hình binh hành $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì tọa độ $C(a,b)$, tọa độ $D(c,d)$, Tính $a+b+c+d$ ?

**A.** $-2$. **B.** $-1$. **C.** $1$. **D.** $0$

**Lời giải**

**Chọn B**




$S_{ABCD}=4S_{IAB}=2.d\left(I,AB\right).AB$

Vì $AB$ không đổi nên $S_{ABCD}$ lớn nhất khi khoảng cách từ $I$ đến $AB$ lớn nhất.

Phương trình đường thẳng $AB$ là $x-y+1=0$

Gọi $I\left(x;\left(x-1\right)^2\right)$, $d\left(I,AB\right)=\dfrac{\left|x-\left(x-1\right)^2+1\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|-x^2+3x\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{-x^2+3x}{\sqrt{2}}$ vì $0\le x_I\le 3$

$\max d(I,AB)=\dfrac{9}{4\sqrt{2}}$ đạt được khi $x=\dfrac{3}{2}$ vậy $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{4}\right)$

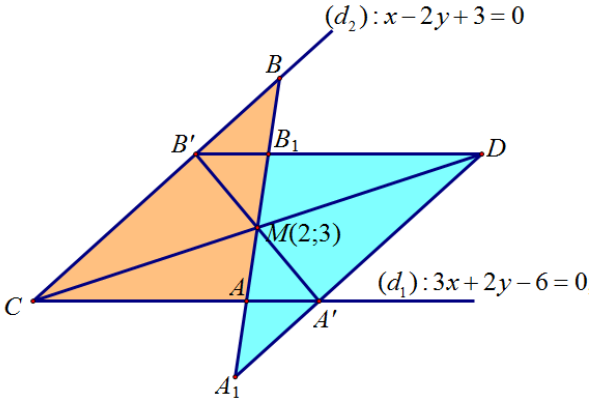
$\Rightarrow D\left(0;-\dfrac{7}{2}\right)\ C\left(3;-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow a+b+c+d=-1$

**Câu 193.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho điểm $M(2;3)$ và hai đường thẳng $(d_1):3x+2y-6=0;$ $(d_2):x-2y+3=0$. Gọi $C$ là giao điểm của $(d_1),(d_2)$. Đường thẳng $(d)$ có phương trình dạng $ax-by+c=0$ (với $a,b,c\in\mathbb{N}$, $(a;b)=1$) đi qua $M$ cắt $(d_1),(d_2)$ lần lượt tại các điểm $A,B$ sao cho $M$ nằm trong đoạn $AB$ và tam giác $ABC$ có diện tích nhỏ nhất. Tính $T=abc$.

**A.** $T=2016$ **B.** $T=1512$ **C.** $T=1800$ **D.** $T=504$

**Lời giải**

**Chọn B**




**Cách 1:** Ta tìm được $d_1\cap d_2=C\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{15}{8}\right)$.

+) Nếu $(d):x=2$ thì $A(2;0)$; $B(2;\dfrac{5}{2})$ suy ra $M$ không thuộc đoạn $AB$ (loại).

+) $(d):y=m(x-2)+3$ cắt $(d_1)$ và $(d_2)$ tại $A(\dfrac{4m}{2m+3};\dfrac{9}{2m+3})$ và $B(\dfrac{4m-3}{2m-1};\dfrac{5m-3}{2m-1})$.

Vì $M$ thuộc đoạn $AB$ nên $-\dfrac{3}{2}<m<\dfrac{1}{2}$. Đường thẳng $CM:9x-10y+12=0$. Diện tích $\Delta ABC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $d_{(A;CM)}+d_{(B;CM)}=\left|\dfrac{60m-54}{2m+3}\right|+\left|\dfrac{10m-9}{2m-1}\right|$ nhỏ nhất. Dùng điều kiện

của $m$ để bỏ trị tuyệt đối, khảo sát (Hoặc sử dụng MODE7) tìm được $m=\frac{3}{14}$ nên đường thẳng $(d):3x-14y+36=0$. Vậy $T=1512$.

**Nhận xét:** Cách giải này nặng về tính toán và trong thời gian ngắn của làm trắc nghiệm nếu học sinh lựa chọn theo cách này sẽ gặp nhiều khó khăn.

**Cách 2:** Ta tìm được $d_1\cap d_2=C\left(\frac{3}{4};\frac{15}{8}\right)$.

Lấy $D\left(\frac{13}{4};\frac{33}{8}\right)$ đối xứng với $C$ qua $M$. Qua $D$ dựng $(d_1')$ song song với $(d_1)$, đường thẳng này cắt $AB$, $(d_2)$ tương ứng tại $B'$, $B_1$. Qua $D$ dựng $(d_2')\,//\,(d_2)$, cắt $(d_1)$, $AB$ tại $A'$, $A_1$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{S_{\Delta ABC}+S_{\Delta DA_1B_1}}{2}=\frac{S_{CA'DB'}+S_{BB'B_1}+S_{AA'A_1}}{2}\ge\frac{S_{CA'DB'}}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $B\equiv B'\equiv B_1$ và $A\equiv A'\equiv A_1$.

Ta viết được phương trình $(DA'):x-2y+5=0$ suy ra $A(\frac{1}{4};\frac{21}{8})\Rightarrow AB:3x-14y+36=0$.

Vậy $T=1512$.

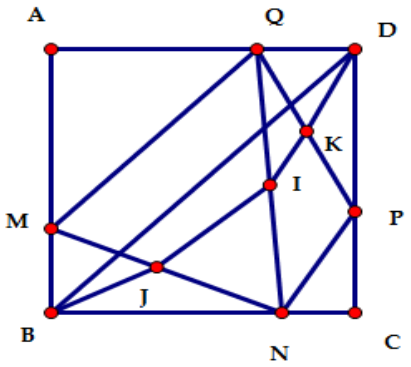
**Câu 194.** Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho các điểm $A(-2;2)$, $B(-4;-3)$, $C(1;-5)$, $D(3;0)$. Lấy $M$, $N$, $P$, $Q$ lần lượt thuộc các cạnh $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MN+NP+PQ+QM$ là :

**A.** $3\sqrt{29}$. **B.** $2\sqrt{58}$. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{140}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đầu tiên ta phát hiện $A(-2;2)$, $B(-4;-3)$, $C(1;-5)$, $D(3;0)$ tạo thành một hình vuông.




Gọi $I$, $J$, $K$ lần lượt là trung điểm của $QN$, $MN$, $PQ$.

Ta có $BJ=\frac{MN}{2}$, $DK=\frac{PQ}{2}$, $IJ=\frac{QM}{2}$, $IK=\frac{PN}{2}$.

Do đó $MN+NP+PQ+QM=2BJ+2DK+2IJ+2IK=2\left(BJ+\text{IJ}+IK+KD\right)\ge 2BD=2\sqrt{58}$.

Dấu bằng xảy ra khi $M$, $N$, $P$, $Q$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$, $CD$, $DA$.

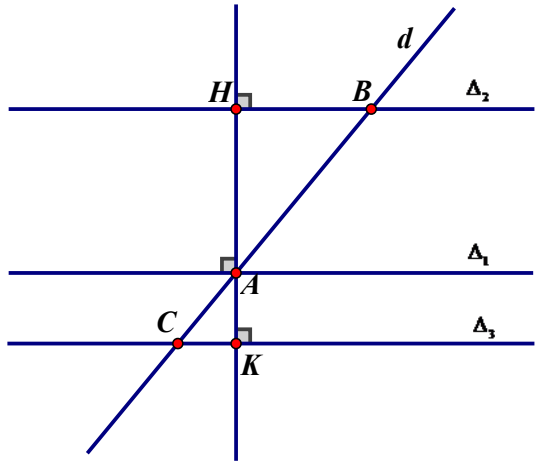
**Chọn B**

**Câu 195.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho các đường thẳng $\Delta_1:3x-4y+6=0$, $\Delta_2:3x-4y-9=0$, $\Delta_3:3x-4y+11=0$. Một đường thẳng $d$ thay đổi cắt ba đường thẳng $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ lần lượt tại $A$, $B$, $C$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=AB+\frac{96}{AC^2}$ bằng

**A.** 18. **B.** 27. **C.** 9. **D.** $\frac{49}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




- Nhận thấy các đường thẳng $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ song song với nhau và

$d\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\dfrac{\left|6+9\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$; $d\left(\Delta_1;\Delta_3\right)=\dfrac{\left|6-11\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$ ; $d\left(\Delta_2;\Delta_3\right)=\dfrac{\left|-9-11\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$

Suy ra: $\Delta_1$ nằm giữa $\Delta_2$ và $\Delta_3$. Do đó nếu $d$ cắt 3 đường thẳng đó lần lượt tại $A$, $B$, $C$ thì $A$ nằm giữa $B$ và $C$.

- Qua $A$ dựng đường thẳng vuông góc với $\Delta_1$, cắt $\Delta_2$ và $\Delta_3$ lần lượt tại $H$ và $K$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AH}{AK}=\dfrac{3}{1}=3\Rightarrow AB=3.AC$

$\Rightarrow P=AB+\dfrac{96}{AC^2}=3.AC+\dfrac{96}{AC^2}=3.\left(AC+\dfrac{32}{AC^2}\right)=3.\left(\dfrac{AC}{2}+\dfrac{AC}{2}+\dfrac{32}{AC^2}\right)$

$\overset{Cauchy}{\geq} 3.3.\sqrt[3]{\dfrac{AC}{2}.\dfrac{AC}{2}.\dfrac{32}{AC^2}}=18$. Dấu "=" xảy ra $\begin{cases}AC=4\\AB=12\end{cases}$.

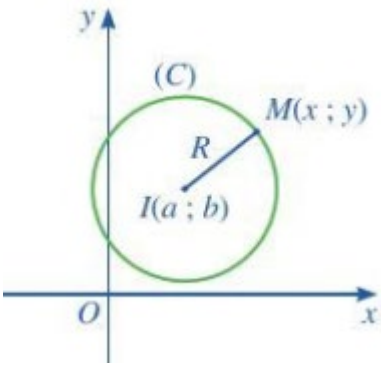
Vậy $P_{\min}=18$.

# Bài 5. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### 1. Phương trình đường tròn




Phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính $R$ là $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Phương trình đường tròn ở dạng trên thường được gọi là phương trình chính tắc của đường tròn.

***Ví dụ 1.*** Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường tròn tâm $O$ bán kính $R$;

b) Đường tròn tâm $I(-1;3)$ bán kính 7 .

***Giải***

a) Phương trình đường tròn tâm $O$ bán kính $R$ là

$(x-0)^2+(y-0)^2=R^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=R^2$.

b) Phương trình đường tròn tâm $I(-1;3)$ bán kính 7 là

$[x-(-1)]^2+(y-3)^2=7^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=49$.

***Ví dụ 2.*** Tìm tâm và bán kính của đường tròn có phương trình là

$(x+2)^2+(y-5)^2=9$

***Giải***

Ta có: $(x+2)^2+(y-5)^2=9 \Leftrightarrow [x-(-2)]^2+(y-5)^2=3^2$.

Vậy đường tròn đã cho có tâm là $I(-2;5)$ bán kính $R=3$

*Nhận xét:* Ta có thể viết phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ của đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính $R$ về phương trình có dạng là $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Dạng đó thường được gọi là phương trình tổng quát của đường tròn.

***Ví dụ 3***

a) Phương trình $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ có phải là phương trình đường tròn không? Nếu phải, xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

b) Xác định điều kiện của $a,b,c$ để phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình đường tròn. Khi đó, xác định toạ độ tâm và bán kính theo $a,b,c$.

***Giải***

a) Ta có:

$x^2+y^2-4x+2y-4=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1=9 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=3^2$.

Phương trình trên là phương trình đường tròn tâm $I(2;-1)$ bán kính $R=3$.

b) Ta có:

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2ax+a^2\right)+\left(y^2-2by+b^2\right)=a^2+b^2-c$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c$.

Do đó, phương trình trên là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2>c$. Lúc này đường tròn đã cho có tâm $I(a;b)$ bán kính

$R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

**2. Phương trình đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng**

Do có duy nhất một đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước nên ta có thể lập được phương trình đường tròn đó khi biết toạ độ của ba điểm nói trên.

***Ví dụ 4***. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(-1;1),B(0;-2),C(0;2)$.

***Giải***

Giả sử tâm của đường tròn là điểm $I(a;b)$. Ta có $IA=IB=IC\Leftrightarrow IA^2=IB^2=IC^2$. Vì $IA^2=IB^2,IB^2=IC^2$ nên

$$\begin{cases}(-1-a)^2+(1-b)^2=(0-a)^2+(-2-b)^2\\(0-a)^2+(-2-b)^2=(0-a)^2+(2-b)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+2a-2b+2=a^2+b^2+4b+4\\a^2+b^2+4b+4=a^2+b^2-4b+4\end{cases}$$

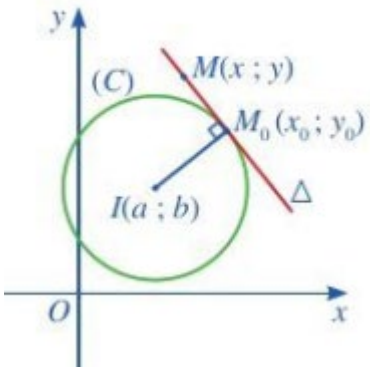
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-2b=4b+2\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$$

Đường tròn tâm $I(1;0)$ bán kính $R=IC=\sqrt{a^2+b^2-4b+4}=\sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn là $(x-1)^2+(y-0)^2=(\sqrt{5})^2$.

Vậy phương trình đường tròn là $(x-1)^2+y^2=5$.

**II. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn**




- Đường thẳng $M_0t$ đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ và có vectơ pháp tuyến

$\overrightarrow{IM_0}=\left(x_0-a;y_0-b\right).$

- Phương trình tiếp tuyến $M_0t$ là

$\left(x_0-a\right)\left(x-x_0\right)+\left(y_0-b\right)\left(y-y_0\right)=0.$

***Ví dụ 5.*** Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;1)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2+(y-3)^2=5.$

***Giải***

Đường tròn có tâm $I(1;3)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;1)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ là

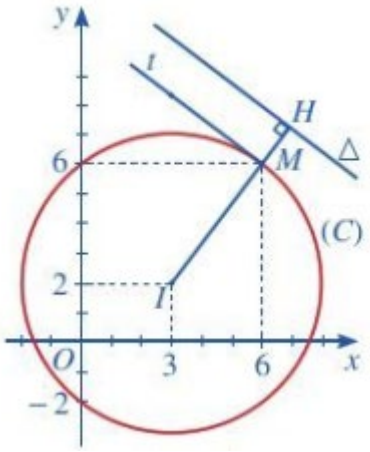
$(2-1)(x-2)+(1-3)(y-1)=0$

$\Leftrightarrow 1(x-2)-2(y-1)=0\Leftrightarrow x-2y=0.$

***Ví dụ 6.*** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, một vật chuyển động tròn đều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn tâm $I(3;2)$ bán kính 5 dưới tác dụng của lực căng dây. Khi vật chuyển động tới điểm $M(6;6)$ thì dây căng bị đứt.

a) Viết phương trình quỹ đạo chuyển động của vật sau khi dây bị đứt, biết rằng vật chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây trong bài toán này.

b) Một vật khác chuyển động thẳng đều trên đường thẳng có phương trình
$\Delta: 3x+4y+23=0.$
Chứng minh hai vật này không gặp nhau tại bất kì thời điểm nào.
***Giải***




a) Quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất trước khi dây bị đứt là đường tròn $(C)$ có phương trình:
$(x-3)^2+(y-2)^2=5^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=25.$
Khi dây bị đứt, do vật thứ nhất chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây nên vật đó tiếp tục chuyển động theo tiếp tuyến $Mt$ tại điểm $M(6;6)$ thuộc đường tròn $(C)$. Phương trình tiếp tuyến $Mt$ là:
$(6-3)(x-6)+(6-2)(y-6)=0$
$\Leftrightarrow 3(x-6)+4(y-6)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-42=0.$
Vậy quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất sau khi dây bị đứt là tia $Mt$, đường thẳng Mt có phương trình là: $3x+4y-42=0$.
b) Khoảng cách từ tâm đường tròn $(C)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x+4y+23=0$ là:

$$IH=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 2+23|}{\sqrt{3^2+4^2}}=8>5.$$

Vì khoảng cách từ tâm đường tròn $(C)$ đến đường thẳng $\Delta$ lớn hơn bán kính của đường tròn $(C)$ nên đường tròn $(C)$ và đường thẳng $\Delta$ không có điểm chung, tức là vật thứ hai không gặp vật thứ nhất khi dây chưa đứt. Mặt khác, vì $\Delta // Mt$ nên vật thứ hai không gặp vật thứ nhất sau khi dây bị đứt. Vậy hai vật không bao giờ gặp nhau.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Nhận dạng phương trình đường tròn

Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=P(*)$

- Nếu $P>0$ thì $(*)$ là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{P}$

- Nếu $P\le 0$ thì $(*)$ không phải là phương trình đường tròn.

**Câu 1.** Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.
a) $x^2+y^2+2x-4y+9=0(1)$ b) $x^2+y^2-6x+4y+13=0(2)$
c) $2x^2+2y^2-6x-4y-1=0(3)$ d) $2x^2+y^2+2x-3y+9=0(4)$

**Câu 2.** Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0(1)$
a) Tìm điều kiện của $m$ để $(1)$ là phương trình đường tròn.
b) Nếu $(1)$ là phương trình đường tròn, hãy tìm tâm và bán kính theo $m$.

**Câu 3.** Cho phương trình đường cong $(C_m): x^2+y^2+(m+2)x-(m+4)y+m+1=0(2)$
a) Chứng minh rằng $(2)$ là phương trình một đường tròn.

b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi $m$ thay đổi.

c) Chứng minh rằng khi $m$ thay đổi, họ các đường tròn $(C_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định.

**Dạng 2. Thiết lập phương trình đường tròn**

**Cách 1:**

- Tìm tọa độ tâm $I(a;b)$ của đường tròn $(C)$.

- Tìm bán kính $R$ của đường tròn $(C)$.

- Viết phương trình đường tròn $(C)$ theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

**Cách 2:** Giả sử phương trình đường tròn $(C)$ là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ ( Hoặc $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$).

- Từ điều kiện của đề Câu thành lập hệ phương trình với ba ẩn là $a,b,c$.

Giải hệ để tìm $a,b,c$ từ đó tìm được phương trình đường tròn $(C)$.

**Câu 4.** Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(1;-5)$ và đi qua $O(0;0)$.

b) Nhận $AB$ làm đường kính với $A(1;1),B(7;5)$.

**Câu 5.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường tròn $(C)$ đi qua ba điểm $A(-3;-1),B(-1;3),C(-2;2)$.

**Câu 6.** Cho hai điểm $A(8;0),B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $OAB$.

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$.

**Câu 7.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d:2x-y-5=0$ và hai điểm $A(1;2),B(4;1)$. Viết phương trình đường tròn $(C)$ có tâm thuộc $d$ và đi qua hai điểm $A,B$.

**Câu 8.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $d_1:x+3y+8=0,d_2:3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Viết phương trình đường tròn $(C)$ có tâm thuộc $d_1$, đi qua điểm $A$ và tiếp xúc với $d_2$

**Câu 9.** Trong mặt phẳng oxy cho 2 điểm A (-1; 1), B(3; 3) và đường thẳng $d:3x-4y+8=0$. Viết phương trình đường tròn (C) qua A, B và tiếp xúc $d$.

**Câu 10.** Trong mặt phẳng oxy cho d: $2x-y-4=0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm thuộc d.

**Câu 11.** Trong mặt phẳng oxy cho $d$: $2x-y-4=0$: viết phương trình đường tròn (C ) có tâm thuộc d đồng tời tiếp xúc với $\Delta_1:3x+4y+5=0$ và $\Delta_2:4x-3y-5=0$

**Câu 12.** Trong mặt phẳng oxy cho $d:x+2y-3=0$ và $\Delta:x+3y-5=0$ viết phương trình (C ) có bán kính $R=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$, có tâm thuộc d và tiếp xúc với $\Delta$.

**Câu 13.** Trong mặt phẳng oxy cho (C): $x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$ tia oy cắt (C ) tại **A.** Viết phương trình (C') có bán kính R'=2 và tiếp xúc ngoài với (C ) tại **A.**

**Câu 14.** Trong mặt phẳng oxy cho (C): $x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C' ) có tâm $M(5;1)$ biết (C') cắt (C ) tại 2 điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.

**Câu 15.** Trong mặt phẳng tọa độ hệ oxy cho đường thẳng $d: x-y-1=0$ và hai đường tròn $(C_1):(x-3)^2+(y+4)^2=8;\ (C_2):(x+5)^2+(y-4)^2=32$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc $d$ và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn trên.

## Dạng 3. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

### 1. Vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn

#### 1.1. Phương pháp 1

Cho đường thẳng $(\Delta)$ và đường tròn $(C)$ có tâm $I$ bán kính $R$

- Nếu $d(I;\Delta)<R$ thì $(\Delta)$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt.

- Nếu $d(I;\Delta)=R$ thì $(\Delta)$ tiếp xúc với $(C)$

- Nếu $d(I;\Delta)>R$ thì $(\Delta)$ và $(C)$ không có điểm chung.

#### 1.2. Phương pháp 2

Cho đường thẳng $(\Delta): Ax+By+C=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \end{cases} \quad (I)$

- Nếu hệ $(I)$ có hai nghiệm thì $(\Delta)$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt.

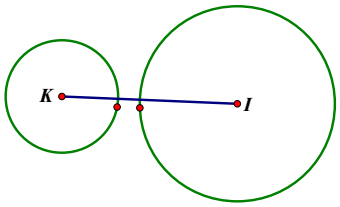
- Nếu hệ $(I)$ có một nghiệm thì $(\Delta)$ tiếp xúc $(C)$.

- Nếu hệ $(I)$ vô nghiệm thì $(\Delta)$ và $(C)$ không có điểm chung.

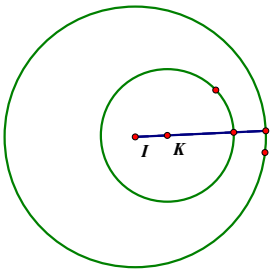
### 2. Vị trí tương đối của hai đường tròn

- Cho hai đường tròn $(C_1);(C_2)$ có tâm lần lượt là $I;\mathrm{K}$ bán kính $R_1;R_2$ . Ta có

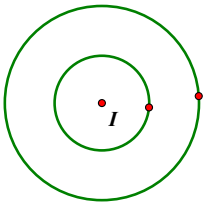
+) $(C_1)$ và $(C_2)$ ở ngoài nhau (không có điểm chung) khi và chỉ khi $IK>R_1+R_2$



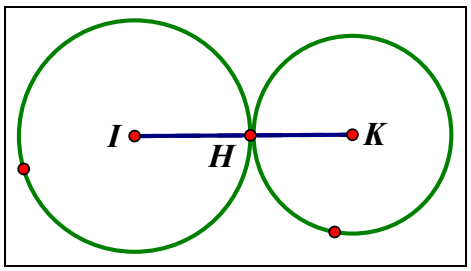

+) $(C_1)$ và $(C_2)$ đựng nhau (không có điểm chung) khi và chỉ khi $IK<|R_1-R_2|$



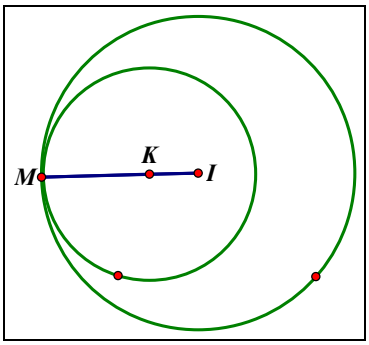

+) $(C_1)$ và $(C_2)$ đồng tâm (không có điểm chung) khi và chỉ khi $I\equiv K; R_1\neq R_2$



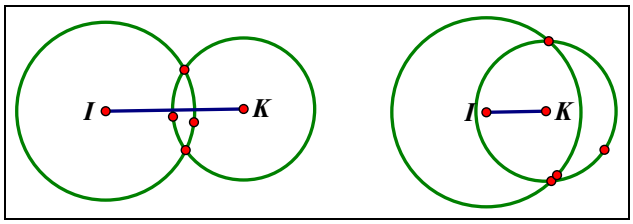

+) $(C_1)$ và $(C_2)$ tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $I_1I_2=R_1+R_2$




+) $(C_1)$ và $(C_2)$ tiếp xúc trong khi và chỉ khi $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$




+) $(C_1)$ và $(C_2)$ cắt nhau khi và chỉ khi $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$




**Câu 16.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy, cho đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

a) Chứng minh M(2;1) nằm trong đường tròn

b) Xét vị trí tương đối của $\Delta$ và (C).

**Câu 17.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy, cho 2 đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ và (C' ): $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$. Chứng minh 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A,B.

**Câu 18.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ Và đường thẳng $\Delta : \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$. Tìm m để (C) cắt $\Delta$ tại 2 điểm phân biệt.

**Câu 19.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và đường thẳng $\Delta : mx - y - 3m - 2 = 0$. Biện luận theo m số giao điểm của $\Delta$ và (C).

**Câu 20.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 1$ và: $(C_m) : x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$. Tìm m để hai đường tròn tiếp xúc trong.

**Câu 21.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho hai đường tròn: $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ và $(C_2) : (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường tròn đó.

**Câu 22.** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ $Oxy$, cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d : 3x + 4y - 2 = 0$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng $6$.

**Câu 23.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ và điểm

$M(7;3)$ . Lập phương trình đường thẳng $d$ qua $M$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt $A, B$ sao cho $MA = 3MB$

**Câu 24.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x-1)^2+(y-1)^2=25$ và điểm $M(-1;2)$ . Lập phương trình đường thẳng $d$ qua $M$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt $A, B$ sao cho độ dài dây cung $AB$ nhỏ nhất .

**Câu 25.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=5$. Viết phương trình đường tròn $(C')$ có tâm $K(5;-2)$ và cắt đường tròn $(C)$ theo một dây cung $AB$ có độ dài bằng $\sqrt{2}$.

**Câu 26.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=1$ , Lập phương trình đường tròn $(C')$ tiếp xúc với hai trục tọa độ và tiếp xúc ngoài $(C)$ .

**Dạng 4: Tiếp tuyến của đường tròn**

Cho đường tròn (C) có tâm I( a;b) và bán kính R.

a) Nếu biết tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ thì tiếp tuyến đó qua M và nhận vector $\overrightarrow{IM}(x_0-a;y_0-b)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là. $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$.

b) Nếu không biết tiếp điểm thì dùng điều kiện tiếp xúc: $\Delta$ tiếp xúc (C ) $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$ để xác định tiếp tuyến.

**Câu 27.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $(x-1)^2+(y+2)^2=8$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm A(3; -4).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) qua điểm B(5; -2).

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến vuông góc với d: $x+y+2014=0$.

d) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C ) biết tiếp tuyến tạo với trục tung một góc $45^0$

**Câu 28.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C_1):x^2+y^2-2y-3=0$ và $(C_2):x^2+y^2-8x-8y+28=0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

**Câu 29.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C_1):(x-2)^2+(y-3)^2=2$ và $(C_2):(x-1)^2+(y-2)^2=8$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

**Câu 30.** Trong mặt phẳng $(Oxy)$, cho $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=5$. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ biết tiếp tuyến cắt $Ox; Oy$ lần lượt tại $A; B$ sao cho $OA=2OB$

**Câu 31.** Trong mặt phẳng $(Oxy)$, cho $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=5$. Tìm $M\in\Delta: x+y+2=0$ sao cho qua $M$ kẻ được tới $(C)$ hai tiếp tuyến $MA, MB$ thỏa mãn diện tích tứ giác $MAIB$ bằng 10, với $I$ là tâm đường tròn.

**Câu 32.** Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm hai điểm $A(1;-1); B(1;3)$

a) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ $B$.

**Câu 33.** Viết phương trình tiếp tuyến $\Delta$ của đường tròn $(C):x^2+y^2-4x+4y-1=0$ trong trường

a) Đường thẳng $\Delta$ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x+3y+4=0$.

b) Đường thẳng $\Delta$ hợp với trục hoành một góc $45^\circ$.

**Câu 34.** Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau:

$$(C_1): x^2+y^2-4y-5=0 \text{ và } (C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0.$$

**Câu 35.** Trong hệ trục Oxy, cho hai đường tròn $(C_1):(x-1)^2+(y-2)^2=2$, $(C_2):(x-4)^2+(y-5)^2=8$ và đường thẳng $d: x+y+m=0$. Tìm m biết đường thẳng $d$ tiếp xúc với cả hai đường tròn $(C_1)$ và $(C_2)$.

**Câu 36.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y+1)^2=8$ và điểm A thuộc đường thẳng $d: x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi, biết rằng $BD=2AC$ và hoành độ điểm A không nhỏ hơn 2.

**Câu 37.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho đường thẳng $d: x-y+1=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Tìm tọa độ điểm $M \in d$ sao cho từ $M$ kẻ được hai tiếp tuyến $MA, MB$ thỏa mãn khoảng cách từ $N\left(0;\frac{1}{2}\right)$ đến đường thẳng $AB$ là lớn nhất.

**Dạng 5: Tìm diểm thỏa mãn diều kiện cho trước**

Phương pháp tìm tập hợp các tâm $I$ của đường tròn $(C)$

- Bước 1. Tìm giá trị của m để tồn tại tâm $I$.
- Bước 2. Tìm toạ độ tâm $I$. Giả sử: I $\begin{cases} x=f(m) \\ y=g(m) \end{cases}$.
- Bước 3. Tìm mối liên hệ giữa $x$ và $y$ theo $m$ ta được phương trình $F(x;y)=0$.
- Bước 4. Dựa vào điều kiện của m ở bước 1 để giới hạn miền của $x$ hoặc $y$.
- Bước 5. Tập hợp điểm $I$ là $F(x;y)=0$ cùng với phần giới hạn ở bước 4.

**Câu 38.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y-1=0$ và đường thẳng $d: x+y+1=0$. Tìm những điểm $M$ thuộc đường thẳng $d$ sao cho từ điểm $M$ kẻ được đến $(C)$ hai tiếp tuyến hợp với nhau góc $90^0$.

**Câu 39.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $x^2+y^2-4x-2y-4=0$. Gọi $I$ là tâm và $R$ là bán kính của $(C)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc đường thẳng $d: x+y+2=0$ sao cho từ $M$ kẻ được hai tiếp tuyến $MA, MB$ đến $(C)$ ( $A, B$ là các tiếp điểm) thỏa mãn

a) $AB=\frac{12\sqrt{34}}{17}$

b) Tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng $6\sqrt{2}$

c) Tứ giác $MAIB$ có chu vi bằng $2\left(3+2\sqrt{2}\right)$

d) Tứ giác $MAIB$ là hình vuông.

**Câu 40.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y-4=0$. Gọi $I$ là tâm và $R$ là bán kính của $(C)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc đường thẳng $d: x+y+2=0$ sao cho từ $M$ kẻ được hai tiếp tuyến $MA$, $MB$ đến $(C)$ ( $A, B$ là các tiếp điểm) thỏa mãn :

a) Tam giác $MAB$ vuông,

b) Tam giác $MAB$ đều,

c) Hai tiếp tuyến $MA, MB$ tạo với nhau một góc bằng $60^0$,

d) Tam giác $IAB$ đều.

**Câu 41.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-3)^2=5$ và đường thẳng $d: x-5y-4=0$. Tìm trên $(C)$ và trên $d$ điểm $N$ sao cho

a) Hai điểm $M, N$ đối xứng nhau qua điểm $A(-7;-1)$.

b) Hai điểm $M, N$ đối xứng nhau qua $Ox$.

**Câu 42.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=5$ và đường thẳng $d: 2x+y+4=0$. Tìm trên $(C)$ điểm $M$ và trên $d$ điểm $N$ sao cho

a) $MN$ có độ dài nhỏ nhất.

b) $MN$ có độ dài lớn nhất.

**Câu 43.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: x-5y-2=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-8=0$. Xác định tọa độ các giao điểm $A, B$ của đường tròn $(C)$ và đường thẳng $d$, biết $A$ có hoành độ dương. Tìm tọa độ điểm $C$ thuộc $(C)$ sao cho tam giác $ABC$ vuông ở $B$.

**Câu 44.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: 3x-y-7=0$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=10$. Chứng minh $(d)$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A, B$. Tìm tọa độ điểm $C$ thuộc $(C)$ sao cho tam giác $ABC$ cân tại $C$

**Câu 45.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $d: x+my-2m+3=0$. Gọi $I$ làm tâm của $(C)$. Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A, B$ thỏa mãn :

a) $AB$ lớn nhất.

b) $AB=2$.

c) Diện tích $\Delta IAB$ lớn nhất.

d) Diện tích $\Delta IAB$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $AB$ lớn nhất.

**Câu 46.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: 3x-4y+m=0$. Tìm $m$ để trên đường thẳng $d$ có duy nhất một điểm $P$ mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến $PA, PB$ tới $(C)$ ($A, B$ là các tiếp điểm) sao cho :

a) Tam giác $PAB$ đều.

b) Tam giác $PAB$ vuông.

c) Góc giữa hai tiếp tuyến $PA, PB$ bằng $60^0$.

**Dạng 6. Tìm quỹ tích tâm đường tròn**

**Phương pháp:**

Phương pháp tìm tập hợp các tâm $I$ của đường tròn $(C)$

- Bước 1. Tìm giá trị của m để tồn tại tâm $I$.
- Bước 2. Tìm toạ độ tâm $I$. Giả sử: I $\begin{cases} x = f(m) \\ y = g(m) \end{cases}$.
- Bước 3. Tìm mối liên hệ giữa $x$ và $y$ theo $m$ ta được phương trình $F(x;y)=0$.
- Bước 4. Dựa vào điều kiện của m ở bước 1 để giới hạn miền của $x$ hoặc $y$.
- Bước 5. Tập hợp điểm $I$ là $F(x;y)=0$ cùng với phần giới hạn ở bước 4.

**Câu 47.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho phương trình đường cong $(C)$ có phương trình:
$x^2+y^2-2mx-4(m+1)y+3m+14=0.$
a) Tìm tham số $m$ để $(C)$ là đường tròn.

b) Tìm quỹ tích điểm $I$ là tâm của đường tròn $(C)$.

**Câu 48.** Trong mặt phẳng $Oxy$, tìm quỹ tích điểm $I$ là tâm của đường tròn $(C)$, biết $(C)$tiếp xúc với đường thẳng $d:6x-8y+15=0$ và có bán kính $R=3$.

**Câu 49.** Trong mặt phẳng $Oxy$, tìm quỹ tích điểm $I$ là tâm của đường tròn $(C)$ có bán kính $R=2$, biết $(C)$tiếp xúc tiếp xúc với đường tròn $(C'):x^2+y^2-4x+6y-3=0$.

**Câu 50.** Trong mặt phẳng $Oxy$, tìm quỹ tích điểm $I$ là tâm của đường tròn $(C)$, biết $(C)$ tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1:2x+3y-6=0,\quad d_2:3x-2y+9=0$.

**Câu 51.** Trong mặt phẳng $Oxy$, tìm quỹ tích điểm $I$ là tâm của đường tròn $(C)$, biết $(C)$tiếp xúc với $Ox$ và cắt $Oy$ tại điểm $A(0;1)$.

**Câu 52.** Cho $(C):x^2+y^2-2mx-2m^2y-1=0$. Tìm quỹ tích tâm $I$ của đường tròn$(C)$.

**Câu 53.** Tìm tập hợp tâm $I$ của đường tròn $(C)$ biết $(C)$ tiếp xúc với 2 đường thẳng $\Delta_1:x+2y-3=0$ và $\Delta_2:x+2y+6=0$.

**Câu 54.** Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2(m-1)x-4my+3m+11=0$. Tìm quỹ tích tâm $I$ của đường tròn.

**Câu 55.** Tìm tập hợp tâm $I$ của đường tròn $(C)$ biết $(C)$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $(C'):x^2+y^2-4x+6y-3=0$ và có bán kính $R=1$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Nhận dạng phương trình đường tròn

**Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình đường tròn.

**A.** $1<m<2$. **B.** $m<-2$ hoặc $m>-1$.

**C.** $m<-2$ hoặc $m>1$. **D.** $m<1$ hoặc $m>2$.

**Câu 2.** Trong mặt phẳng $Oxy$, phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

**A.** $x^2+2y^2-4x-8y+1=0$. **B.** $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

**C.** $x^2+y^2-2x-8y+20=0$. **D.** $4x^2+y^2-10x-6y-2=0$.

**Câu 3.** Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

**A.** $2x^2+y^2-6x-6y-8=0$. **B.** $x^2+2y^2-4x-8y-12=0$.

**C.** $x^2+y^2-2x-8y+18=0$. **D.** $2x^2+2y^2-4x+6y-12=0$.

**Câu 4.** Phương trình nào sau đây là phương trình của một đường tròn?

**A.** $x^2+y^2-4xy+2x+8y-3=0$. **B.** $x^2+2y^2-4x+5y-1=0$.

**C.** $x^2+y^2-14x+2y+2018=0$. **D.** $x^2+y^2-4x+5y+2=0$.

**Câu 5.** Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0(1)$. Điều kiện của $m$ để $(1)$ là phương trình của đường tròn.

**A.** $m=2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$. **C.** $1<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

### Dạng 2. Tìm tọa độ tâm, bán kính đường tròn

**Câu 6.** Trong mặt phẳng $Oxy$, đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+6y-12=0$ có tâm là.

**A.** $I(-2;-3)$. **B.** $I(2;3)$. **C.** $I(4;6)$. **D.** $I(-4;-6)$.

**Câu 7.** Đường tròn $x^2+y^2-10y-24=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

**A.** $49$. **B.** $7$. **C.** $1$. **D.** $\sqrt{29}$.

**Câu 8.** Xác định tâm và bán kính của đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

**A.** Tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$. **B.** Tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=9$.

**C.** Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$. **D.** Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=9$.

**Câu 9.** Tìm tọa độ tâm $I$ và bán kính $R$ của đường tròn $(C)$: $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

**A.** $I(-1;2); R=4$. **B.** $I(1;-2); R=2$. **C.** $I(-1;2); R=\sqrt{5}$. **D.** $I(1;-2); R=4$.

**Câu 10.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+3)^2=9$. Đường tròn có tâm và bán kính là

**A.** $I(2;3)$, $R=9$. **B.** $I(2;-3)$, $R=3$. **C.** $I(-3;2)$, $R=3$. **D.** $I(-2;3)$, $R=3$.

**Câu 11.** Tìm tọa độ tâm $I$ và tính bán kính $R$ của đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-5)^2=9$.

**A.** $I(-2;5),\ R=81..$ **B.** $I(2;-5),\ R=9..$ **C.** $I(2;-5),\ R=3..$ **D.** $I(-2;5),\ R=3.$

**Câu 12.** Đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-3=0$ có tâm $I$, bán kính $R$ là

**A.** $I(-1;2), R=\sqrt{2}$. **B.** $I(-1;2), R=2\sqrt{2}$. **C.** $I(1;-2), R=\sqrt{2}$. **D.** $I(1;-2), R=2\sqrt{2}$.

**Dạng 3. Viết phương trình đường tròn**

**Câu 13.** Phương trình đường tròn có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=5$ là

**A.** $x^2+y^2-2x-4y-20=0$. **B.** $x^2+y^2+2x+4y+20=0$.

**C.** $x^2+y^2+2x+4y-20=0$. **D.** $x^2+y^2-2x-4y+20=0$.

**Câu 14.** Đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$ có phương trình là

**A.** $x^2+y^2+2x+4y-4=0$.

**B.** $x^2+y^2-2x-4y-4=0$.

**C.** $x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

**D.** $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

**Câu 15.** Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính bằng $3$?

**A.** $(x-1)^2+(y+2)^2=9$. **B.** $(x+1)^2+(y+2)^2=9$.

**C.** $(x-1)^2+(y-2)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

**Câu 16.** Đường tròn $(C)$ đi qua hai điểm $A(1;1)$, $B(5;3)$ và có tâm $I$ thuộc trục hoành có phương trình là

**A.** $(x+4)^2+y^2=10$. **B.** $(x-4)^2+y^2=10$.

**C.** $(x-4)^2+y^2=\sqrt{10}$. **D.** $(x+4)^2+y^2=\sqrt{10}$.

**Câu 17.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, tìm tọa độ tâm $I$ của đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$.

**A.** $I(1;1)$. **B.** $I(0;0)$. **C.** $I(1;2)$. **D.** $I(1;0)$.

**Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;-1), B(3;2), C(5;-5)$. Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là

**A.** $\left(\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$. **B.** $\left(\frac{47}{10};\frac{13}{10}\right)$. **C.** $\left(-\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$. **D.** $\left(-\frac{47}{10};\frac{13}{10}\right)$.

**Câu 19.** Trong mặt phẳng $Oxy$, đường tròn đi qua ba điểm $A(1;2)$, $B(5;2)$, $C(1;-3)$ có phương trình là.

**A.** $x^2+y^2+25x+19y-49=0$. **B.** $2x^2+y^2-6x+y-3=0$.

**C.** $x^2+y^2-6x+y-1=0$. **D.** $x^2+y^2-6x+xy-1=0$.

**Câu 20.** Lập phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(3;0), B(0;2)$ và có tâm thuộc đường thẳng $d: x+y=0$.

**A.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$. **B.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

**C.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$. **D.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

**Câu 21.** Cho tam giác $ABC$ biết $H(3;2)$, $G\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$ lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác, đường thẳng $BC$ có phương trình $x+2y-2=0$. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$?

**A.** $(x+1)^2+(y+1)^2=20$.

**B.** $(x-2)^2+(y+4)^2=20$.

**C.** $(x-1)^2+(y+3)^2=1$.

**D.** $(x-1)^2+(y-3)^2=25$.

**Câu 22.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$, trọng tâm $G(-1;3)$. Gọi $K,M,N$ lần lượt là trung điểm của $AH,AB,AC$. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ biết đường tròn ngoại tiếp tam giác $KMN$ là $(C):x^2+y^2+4x-4y-17=0$.

**A.** $(x-1)^2+(y-5)^2=100$.

**B.** $(x+1)^2+(y-5)^2=100$.

**C.** $(x-1)^2+(y+5)^2=100$.

**D.** $(x+1)^2+(y+5)^2=100$.

**Câu 23.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có trực tâm $O$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$; $N$, $P$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ $B$ và $C$. Đường tròn đi qua ba điểm $M$, $N$, $P$ có phương trình là $(T):(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là:

**A.** $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. **B.** $x^2+(y-1)^2=25$.

**C.** $x^2+(y-1)^2=50$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

**Câu 24.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, phương trình của đường tròn có tâm là gốc tọa độ $O$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:\ x+y-2=0$ là

**A.** $x^2+y^2=2$. **B.** $x^2+y^2=\sqrt{2}$.

**C.** $(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

**Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ $(Oxy)$, cho đường tròn $(S)$ có tâm $I$ nằm trên đường thẳng $y=-x$, bán kính $R=3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ. Lập phương trình của $(S)$, biết hoành độ tâm $I$ là số dương.

**A.** $(x-3)^2+(y-3)^2=9$. **B.** $(x-3)^2+(y+3)^2=9$.

**C.** $(x-3)^2-(y-3)^2=9$. **D.** $(x+3)^2+(y+3)^2=9$.

**Câu 26.** Một đường tròn có tâm $I(3;4)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x+4y-10=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{5}{3}$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Câu 27.** Trong hệ trục tọa độ $Oxy$, cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$. Đường tròn tâm $I$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d)$ có phương trình

**A.** $(x-1)^2+(y-1)^2=5$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=25$.

**C.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{5}$.

**Câu 28.** Trên hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$ có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó có phương trình là $3x+4y-9=0$. Viết phương trình của đường tròn $(C)$.

**A.** $(x+3)^2+(y-2)^2=2$. **B.** $(x-3)^2+(y+2)^2=2$.

**C.** $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ **D.** $(x+3)^2+(y-2)^2=4$.

**Câu 29.** Trên mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$ có phương trình

**A.** $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2-4x+4=0$.

**C.** $x^2+y^2=2$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

**Câu 30.** Cho hai điểm $A(3;0)$, $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$ có phương trình là

**A.** $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

**C.** $x^2+y^2-6x-8y+25=0$. **D.** $x^2+y^2=2$.

**Dạng 4. Tương giao (tiếp tuyến) của đường thẳng và đường tròn**

**Câu 31.** Đường tròn $x^2+y^2-1=0$ tiếp xúc với đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

**A.** $3x-4y+5=0$ **B.** $x+y=0$

**C.** $3x+4y-1=0$ **D.** $x+y-1=0$

**Câu 32.** Đường tròn nào sau đây tiếp xúc với trục Ox:

**A.** $x^2+y^2-10x=0$. **B.** $x^2+y^2-5=0$.

**C.** $x^2+y^2-10x-2y+1=0$. **D.** $x^2+y^2+6x+5y+9=0$.

**Câu 33.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Viết phương trình tiếp tuyến $d$ của đường tròn $(C)$ biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: 3x+4y+1=0$.

**A.** $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$; $3x+4y-5\sqrt{2}+11=0$.

**B.** $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

**C.** $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y+5\sqrt{2}+11=0$.

**D.** $3x+4y-5\sqrt{2}+11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

**Câu 34.** Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-4=0$ và điểm $A(1;5)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây là tiếp tuyến của đường tròn $(C)$ tại điểm $A$.

**A.** $y-5=0$. **B.** $y+5=0$. **C.** $x+y-5=0$. **D.** $x-y-5=0$.

**Câu 35.** Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4=0$ và điểm $A(-1;2)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây đi qua $A$ và là tiếp tuyến của đường tròn $(C)$?

**A.** $4x-3y+10=0$. **B.** $6x+y+4=0$. **C.** $3x+4y+10=0$. **D.** $3x-4y+11=0$.

**Câu 36.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(C)$ song song với đường thẳng $\Delta:4x-3y+2=0$ là

**A.** $4x-3y+18=0$. **B.** $4x-3y+18=0$.

**C.** $4x-3y+18=0;4x-3y-2=0$. **D.** $4x-3y-18=0;4x-3y+2=0$.

**Câu 37.** Số tiếp tuyến chung của 2 đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+4y+1=0$ và $(C'):x^2+y^2+6x-8y+20=0$ là

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

**Câu 38.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+4)^2=25$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d:3x-4y+5=0$.

**A.** $4x+3y+29=0$. **B.** $4x+3y+29=0$ hoặc $4x+3y-21=0$.

**C.** $4x-3y+5=0$ hoặc $4x-3y-45=0$ **D.** $4x+3y+5=0$ hoặc $4x+3y+3=0$.

**Câu 39.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)$có phương trình $x^2+y^2-2x+2y-3=0$. Từ điểm $A(1;1)$kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đường tròn $(C)$

**A.** 1. **B.** 2. **C.** vô số. **D.** 0.

**Câu 40.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(C)$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta:4x-3y+2=0$ là

**A.** $4x-3y+18=0$ và $-4x-3y-2=0$. **B.** $4x-3y+18=0$ và $4x-3y-2=0$.

**C.** $-4x-3y+18=0$ và $4x-3y-2=0$. **D.** $-4x+3y-18=0$ và $-4x-3y-2=0$.

**Câu 41.** Trên mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho điểm $P(-3;-2)$ và đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-4)^2=36$. Từ điểm $P$ kẻ các tiếp tuyến $PM$ và $PN$ tới đường tròn $(C)$, với $M$, $N$ là các tiếp điểm. Phương trình đường thẳng $MN$ là

**A.** $x+y+1=0$. **B.** $x-y-1=0$. **C.** $x-y+1=0$. **D.** $x+y-1=0$.

**Câu 42.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $M(-3;1)$ và đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-6y+6=0$. Gọi $T_1$, $T_2$ là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ $M$ đến (C). Tính khoảng cách từ $O$ đến đường thẳng $T_1T_2$.

**A.** 5. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

**Câu 43.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

**A.** Đường tròn $(C_1)$có tâm $I_1(-1;-2)$ và bán kính $R_1=3$.

**B.** Đường tròn $(C_2)$ có tâm $I_2(2;2)$và bán kính $R_2=2$.

**C.** Hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ không có điểm chung.

**D.** Hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ tiếp xúc với nhau.

**Câu 44.** Tìm giao điểm 2 đường tròn $(C_1):x^2+y^2-4=0$ và $(C_2):x^2+y^2-4x-4y+4=0$.

**A.** $(2;2)$ và $(-2;-2)$. **B.** $(0;2)$ và $(0;-2)$. **C.** $(2;0)$và $(-2;0)$. **D.** $(2;0)$ và $(0;2)$.

**Câu 45.** Trong mặt phẳng với hệ trục $Oxy$, cho hai đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=4$ và $(C'):(x-4)^2+(y-3)^2=16$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A$ và $B$. Lập phương trình đường thẳng $AB$

**A.** $x+y-2=0$. **B.** $x-y+2.=0$ **C.** $x+y+2=0$. **D.** $x-y-2=0$.

**Câu 46.** Cho đường thẳng $\Delta:3x-4y-19=0$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=25$. Biết đường thẳng $\Delta$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A$ và $B$, khi đó độ dài đoạn thẳng $AB$ là

**A.** 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 8.

**Câu 47.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho đường tròn $(C)$ có tâm $I(1;-1)$ bán kính $R=5$. Biết rằng đường thẳng $(d):3x-4y+8=0$ cắt đường tròn $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A,B$. Tính độ dài đoạn thẳng $AB$.

**A.** $AB=8$. **B.** $AB=4$. **C.** $AB=3$.. **D.** $AB=6$.

**Câu 48.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$ có phương trình $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ và đường thẳng $d:3x+4y+7=0$. Gọi $A,B$ là các giao điểm của đường thẳng $d$ với đường tròn $(C)$. Tính độ dài dây cung $AB$.

**A.** $AB=\sqrt{3}$. **B.** $AB=2\sqrt{5}$. **C.** $AB=2\sqrt{3}$. **D.** $AB=4$.

**Câu 49.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;1)$, đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua $A$ và cắt đường tròn $(C)$ tại hai điểm $B$, $C$ sao cho $BC=2\sqrt{2}$.

**A.** $d:x+2y-5=0$. **B.** $d:x-2y-5=0$. **C.** $d:x+2y+5=0$. **D.** $d:x-2y+5=0$.

**Câu 50.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường thẳng $d'$ đi qua gốc tọa độ và tạo với đường thẳng nối tâm của hai đường tròn một góc bằng $45°$.

**A.** $d':x-7y=0$ hoặc $d':7x+y=0$. **B.** $d':x+7y=0$ hoặc $d':7x+y=0$.

**C.** $d':x+7y=0$ hoặc $d':7x-y=0$. **D.** $d':x-7y=0$ hoặc $d':7x-y=0$.

**Câu 51.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho điểm $I(1;2)$ và đường thẳng $(d):2x+y-5=0$. Biết rằng có hai điểm $M_1,M_2$ thuộc $(d)$ sao cho $IM_1=IM_2=\sqrt{10}$. Tổng các hoành độ của $M_1$ và $M_2$ là

**A.** $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{14}{5}$. **C.** 2. **D.** 5.

**Câu 52.** Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)$ có phương trình: $x^2+y^2-4x+2y-15=0$. $I$ là tâm $(C)$, đường thẳng $d$ đi qua $M(1;-3)$ cắt $(C)$tại $A,B$. Biết tam giác $IAB$ có diện tích là 8. Phương trình đường thẳng $d$ là: $x+by+c=0$. Tính $b+c$

**A.** 8. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 1.

**Câu 53.** Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác $ABC$ có đỉnh $A(5;5)$, trực tâm $H(-1;13)$, đường tròn ngoài tiếp tam giác có phương trình $x^2+y^2=50$. Biết tọa độ đỉnh $C(a;b)$, với $a<0$. Tổng $a+b$ bằng

**A.** $-8$. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $-6$.

**Câu 54.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn tâm $I(2;2)$, điểm $D$ là chân đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng $AD$ cắt đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ tại điểm thứ hai là $M$ (khác $A$). Biết điểm $J(-2;2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ACD$ và phương trình đường thẳng $CM$ là: $x+y-2=0$. Tìm tổng hoành độ của các đỉnh $A$, $B$, $C$ của tam giác $ABC$.

**A.** $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

**Câu 55.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $(\Delta): x+3y+8=0$; $(\Delta'): 3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Đường tròn có tâm $I(a;b)$ thuộc đường thẳng $(\Delta)$,đi qua $A$ và tiếp xúc với đường thẳng $(\Delta')$. Tính $a+b$.

**A.** $-4$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $-2$.

**Câu 56.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: 3x-4y-1=0$ và điểm $I(1;-2)$. Gọi $(C)$ là đường tròn có tâm $I$ và cắt đường thẳng $d$ tại hai điểm $A$ và $B$ sao cho tam giác $IAB$ có diện tích bằng 4. Phương trình đường tròn $(C)$ là

**A.** $(x-1)^2+(y+2)^2=8$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2=20$.

**C.** $(x-1)^2+(y+2)^2=5$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2=16$.

**Dạng 5. Câu hỏi min-max**

**Câu 57.** Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-4=0$ và điểm $M(2;1)$. Dây cung của $(C)$ đi qua điểm $M$ có độ dài ngắn nhất là

**A.** $6$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $2\sqrt{7}$.

**Câu 58.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(0;-3)$, $B(4;1)$ và điểm $M$ thay đổi thuộc đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=4$. Gọi $P_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$. Khi đó ta có $P_{\min}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $(7,7;8,1)$.. **B.** $(7,3;7,7)$.. **C.** $(8,3;8,5)$.. **D.** $(8,1;8,3)$.

**Câu 59.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0;y_0)$ nằm trên đường tròn $(C)$ sao cho $T=x_0+y_0$ đạt giá trị lớn nhất.

**A.** $M(2;3)$. **B.** $M(0;1)$. **C.** $M(2;1)$. **D.** $M(0;3)$.

**Câu 60.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho điểm $M$ nằm trên đường tròn $(C): x^2+y^2+8x-6y+16=0$. Tính độ dài nhỏ nhất của $OM$ ?

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $5$. **D.** $2$.

**Câu 61.** Gọi $I$ là tâm của đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-1)^2=4$. Số các giá trị nguyên của $m$ để đường thẳng $x+y-m=0$ cắt đường tròn $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A,B$ sao cho tam giác $IAB$ có diện tích lớn nhất là

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Câu 62.** Điểm nằm trên đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ có khoảng cách ngắn nhất đến đường thẳng $d: x-y+3=0$ có toạ độ $M(a;b)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** $\sqrt{2}a=-b$. **B.** $a=-b$. **C.** $\sqrt{2}a=b$. **D.** $a=b$.

**Câu 63.** Cho tam giác $ABC$ có trung điểm của $BC$ là $M(3;2)$, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác lần lượt là $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right), I(1;-2)$. Tìm tọa độ đỉnh $C$, biết $C$ có hoành độ lớn hơn $2$.

**A.** $C(9;1)$. **B.** $C(5;1)$. **C.** $C(4;2)$. **D.** $C(3;-2)$.

**Câu 64.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-25=0$ và điểm $M(2;1)$. Dây cung của $(C)$ đi qua $M$ có độ dài ngắn nhất là:

**A.** $2\sqrt{7}$. **B.** $16\sqrt{2}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{7}$.

**Câu 65.** Cho các số thực $a,b,c,d$ thay đổi, luôn thỏa mãn $(a-1)^2+(b-2)^2=1$ và $4c-3d-23=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a-c)^2+(b-d)^2$ là:

**A.** $P_{\min}=28$. **B.** $P_{\min}=3$. **C.** $P_{\min}=4$. **D.** $P_{\min}=16$.

**Câu 66.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và các đường thẳng $d_1: mx+y-m-1=0$, $d_2: x-my+m-1=0$. Tìm các giá trị của tham số $m$ để mỗi đường thẳng $d_1, d_2$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt sao cho 4 điểm đó lập thành 1 tứ giác có diện tích lớn nhất. Khi đó tổng của tất cả các giá trị tham số $m$ là:

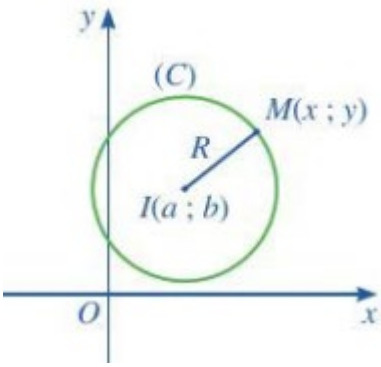
**A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

# Bài 5. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### 1. Phương trình đường tròn




Phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính $R$ là $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Phương trình đường tròn ở dạng trên thường được gọi là phương trình chính tắc của đường tròn.

***Ví dụ 1.*** Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường tròn tâm $O$ bán kính $R$;

b) Đường tròn tâm $I(-1;3)$ bán kính 7 .

***Giải***

a) Phương trình đường tròn tâm $O$ bán kính $R$ là

$(x-0)^2+(y-0)^2=R^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=R^2$.

b) Phương trình đường tròn tâm $I(-1;3)$ bán kính 7 là

$[x-(-1)]^2+(y-3)^2=7^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=49$.

***Ví dụ 2.*** Tìm tâm và bán kính của đường tròn có phương trình là

$(x+2)^2+(y-5)^2=9$

***Giải***

Ta có: $(x+2)^2+(y-5)^2=9 \Leftrightarrow [x-(-2)]^2+(y-5)^2=3^2$.

Vậy đường tròn đã cho có tâm là $I(-2;5)$ bán kính $R=3$

*Nhận xét:* Ta có thể viết phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ của đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính $R$ về phương trình có dạng là $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Dạng đó thường được gọi là phương trình tổng quát của đường tròn.

***Ví dụ 3***

a) Phương trình $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ có phải là phương trình đường tròn không? Nếu phải, xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

b) Xác định điều kiện của $a,b,c$ để phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình đường tròn. Khi đó, xác định toạ độ tâm và bán kính theo $a,b,c$.

***Giải***

a) Ta có:

$x^2+y^2-4x+2y-4=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1=9 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=3^2$.

Phương trình trên là phương trình đường tròn tâm $I(2;-1)$ bán kính $R=3$.

b) Ta có:

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2ax+a^2\right)+\left(y^2-2by+b^2\right)=a^2+b^2-c$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c$.

Do đó, phương trình trên là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2>c$. Lúc này đường tròn đã cho có tâm $I(a;b)$ bán kính

$R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

**2. Phương trình đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng**

Do có duy nhất một đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước nên ta có thể lập được phương trình đường tròn đó khi biết toạ độ của ba điểm nói trên.

***Ví dụ 4***. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(-1;1),B(0;-2),C(0;2)$.

***Giải***

Giả sử tâm của đường tròn là điểm $I(a;b)$. Ta có $IA=IB=IC\Leftrightarrow IA^2=IB^2=IC^2$. Vì $IA^2=IB^2,IB^2=IC^2$ nên

$$\begin{cases}(-1-a)^2+(1-b)^2=(0-a)^2+(-2-b)^2\\(0-a)^2+(-2-b)^2=(0-a)^2+(2-b)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+2a-2b+2=a^2+b^2+4b+4\\a^2+b^2+4b+4=a^2+b^2-4b+4\end{cases}$$

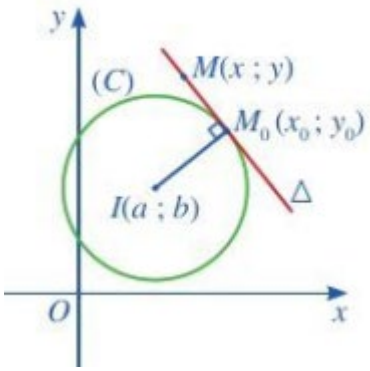
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-2b=4b+2\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$$

Đường tròn tâm $I(1;0)$ bán kính $R=IC=\sqrt{a^2+b^2-4b+4}=\sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn là $(x-1)^2+(y-0)^2=(\sqrt{5})^2$.

Vậy phương trình đường tròn là $(x-1)^2+y^2=5$.

**II. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn**




- Đường thẳng $M_0t$ đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ và có vectơ pháp tuyến

$\overrightarrow{IM_0}=\left(x_0-a;y_0-b\right).$

- Phương trình tiếp tuyến $M_0t$ là

$\left(x_0-a\right)\left(x-x_0\right)+\left(y_0-b\right)\left(y-y_0\right)=0.$

***Ví dụ 5.*** Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;1)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2+(y-3)^2=5.$

***Giải***

Đường tròn có tâm $I(1;3)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;1)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ là

$(2-1)(x-2)+(1-3)(y-1)=0$

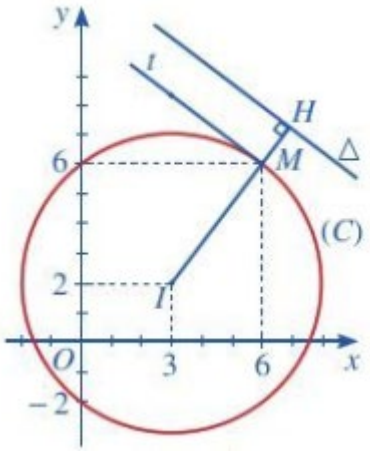
$\Leftrightarrow 1(x-2)-2(y-1)=0\Leftrightarrow x-2y=0.$

***Ví dụ 6.*** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, một vật chuyển động tròn đều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn tâm $I(3;2)$ bán kính 5 dưới tác dụng của lực căng dây. Khi vật chuyển động tới điểm $M(6;6)$ thì dây căng bị đứt.

a) Viết phương trình quỹ đạo chuyển động của vật sau khi dây bị đứt, biết rằng vật chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây trong bài toán này.

b) Một vật khác chuyển động thẳng đều trên đường thẳng có phương trình
$\Delta: 3x+4y+23=0.$
Chứng minh hai vật này không gặp nhau tại bất kì thời điểm nào.

***Giải***




a) Quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất trước khi dây bị đứt là đường tròn $(C)$ có phương trình:
$(x-3)^2+(y-2)^2=5^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=25.$
Khi dây bị đứt, do vật thứ nhất chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây nên vật đó tiếp tục chuyển động theo tiếp tuyến $Mt$ tại điểm $M(6;6)$ thuộc đường tròn $(C)$. Phương trình tiếp tuyến $Mt$ là:
$(6-3)(x-6)+(6-2)(y-6)=0$
$\Leftrightarrow 3(x-6)+4(y-6)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-42=0.$
Vậy quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất sau khi dây bị đứt là tia $Mt$, đường thẳng Mt có phương trình là: $3x+4y-42=0$.
b) Khoảng cách từ tâm đường tròn $(C)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x+4y+23=0$ là:

$$IH=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 2+23|}{\sqrt{3^2+4^2}}=8>5.$$

Vì khoảng cách từ tâm đường tròn $(C)$ đến đường thẳng $\Delta$ lớn hơn bán kính của đường tròn $(C)$ nên đường tròn $(C)$ và đường thẳng $\Delta$ không có điểm chung, tức là vật thứ hai không gặp vật thứ nhất khi dây chưa đứt. Mặt khác, vì $\Delta // Mt$ nên vật thứ hai không gặp vật thứ nhất sau khi dây bị đứt. Vậy hai vật không bao giờ gặp nhau.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Nhận dạng phương trình đường tròn

Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=P(*)$

- Nếu $P>0$ thì $(*)$ là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{P}$

- Nếu $P\le 0$ thì $(*)$ không phải là phương trình đường tròn.

**Câu 1.** Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.

a) $x^2+y^2+2x-4y+9=0(1)$ b) $x^2+y^2-6x+4y+13=0(2)$

c) $2x^2+2y^2-6x-4y-1=0(3)$ d) $2x^2+y^2+2x-3y+9=0(4)$

**Lời giải.**

a) Phương trình $(1)$ có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=-1;b=2;c=9$

Ta có $a^2+b^2-c=1+4-9<0$

Vậy phương trình $(1)$ không phải là phương trình đường tròn.

b) Ta có $a^2+b^2-c=9+4-13=0$

Suy ra phương trình $(2)$ không phải là phương trình đường tròn.

c) Ta có $(3) \Leftrightarrow x^2+y^2-3x-2y-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{2}$

Vậy phương trình $(3)$ là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2};1\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$

d) Phương trình $(4)$ không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của $x^2$ và $y^2$ khác nhau.

**Câu 2.** Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0(1)$

a) Tìm điều kiện của *m* để $(1)$ là phương trình đường tròn.

b) Nếu $(1)$ là phương trình đường tròn, hãy tìm tâm và bán kính theo *m*.

**Lời giải.**

a) Phương trình $(1)$ là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$

Với $a=m;b=2(m-2);c=6-m$

Hay $m^2+4(m-2)^2-6+m>0 \Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right.$

b) Với điều kiện trên thì đường tròn có tâm $I(m;2(m-2))$ và bán kính $R=\sqrt{5m^2-15m+10}$.

**Câu 3.** Cho phương trình đường cong $(C_m): x^2+y^2+(m+2)x-(m+4)y+m+1=0(2)$

a) Chứng minh rằng $(2)$ là phương trình một đường tròn.

b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi *m* thay đổi.

c) Chứng minh rằng khi *m* thay đổi, họ các đường tròn $(C_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định.

**Lời giải.**

a) Ta có

$x^2+y^2+(m+2)x-(m+4)y+m+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+(m+2)x+\frac{(m+2)^2}{4}+y^2-(m+4)y+\frac{(m+4)^2}{4}=\frac{(m+2)^2}{4}+\frac{(m+4)^2}{4}-m-1=0$

$\Leftrightarrow \left[x+\frac{m+2}{2}\right]^2+\left[y+\frac{m+4}{2}\right]^2=\frac{(m+2)^2}{4}+\frac{(m+4)}{4}-m-1$

Do $\left(\frac{m+2}{2}\right)^2+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2-m-1=\frac{(m+2)^2+4}{2}>0$

Suy ra $(2)$ là phương trình đường tròn với mọi *m*.

b) Đường tròn có tâm $(I):\begin{cases} x_1=-\frac{m+2}{2} \\ y_1=\frac{m+4}{2} \end{cases}$ suy ra $x_1+y_1-1=0$

Vậy tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$

c) Gọi $M(x_o;y_o)$ là điểm cố định mà họ $(C_m)$ luôn đi qua.

$$x_o^2+y_o^2+(m+2)x_o-(m+4)y_o+m+1=0,\forall m$$

Khi đó ta có: $\Leftrightarrow (x_o-y_o-1)m+x_o^2+y_o^2+2x_o-4y_o+1=0,\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o-y_o+1=0 \\ x_o^2+y_o^2+2x_o-4y_o+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_o=-1 \\ y_o=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_o=1 \\ y_o=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm cố định mà họ $(C_m)$ luôn đi qua với mọi $m$ là $M_1(-1;0)$ và $M_2(1;2)$

**Dạng 2. Thiết lập phương trình đường tròn**

**Cách 1:**

- Tìm tọa độ tâm $I(a;b)$ của đường tròn $(C)$.

- Tìm bán kính $R$ của đường tròn $(C)$.

- Viết phương trình đường tròn $(C)$ theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

**Cách 2:** Giả sử phương trình đường tròn $(C)$ là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ ( Hoặc $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$).

- Từ điều kiện của đề Câu thành lập hệ phương trình với ba ẩn là $a,b,c$.

Giải hệ để tìm $a,b,c$ từ đó tìm được phương trình đường tròn $(C)$.

**Câu 4.** Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(1;-5)$ và đi qua $O(0;0)$.

b) Nhận $AB$ làm đường kính với $A(1;1),B(7;5)$.

**Lời giải.**

a) Đường tròn cần tìm có bán kính là $OI=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$ nên có phương trình là: $(x-1)^2+(y+5)^2=26$.

b) Gọi $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ suy ra $I(4;3)$, $AI=\sqrt{(4-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$.

Đường tròn cần tìm có đường kính là $AB$ suy ra nó nhận $I(4;3)$ làm tâm và bán kính $R=AI=\sqrt{13}$ nên có phương trình là $(x-4)^2+(y-3)^2=13$.

**Câu 5.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, viết phương trình đường tròn $(C)$ đi qua ba điểm $A(-3;-1),B(-1;3),C(-2;2)$.

**Lời giải.**

**Cách 1.** Phương trình đường tròn có dạng $(C):x^2+y^2+2ax+2by+c=0$, với $a^2+b^2-c>0$.

Vì $A,B,C$ thuộc $(C)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6a+2b-c=10 \\ 2a-6b-c=10 \\ 4a-4b-c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=-20 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm $x^2+y^2-4x+2y-20=0$

**Cách 2.** Gọi $I(a;b)$ là tâm của $(C)$.

Vì $A,B,C$ thuộc $(C)$ nên

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-3-a)^2 + (-1-b)^2 = (-1-a)^2 + (3-b)^2 \\ (-3-a)^2 + (-1-b)^2 = (-2-a)^2 + (2-b)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 8b = 0 \\ 2a + 6b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Suy ra $I(2;-1)$, bán kính $IA = 5$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm $(C): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

**Câu 6.** Cho hai điểm $A(8;0), B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $OAB$.

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$.

**Lời giải.**

a) Ta có tam giác $OAB$ vuông ở $O$ nên tâm $I$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của

cạnh huyền $AB$ suy ra $I(4;3)$ và bán kính $R = IA = \sqrt{(8-4)^2 + (0-3)^2} = 5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $OAB$ là: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

b) Ta có $OA = 8; \text{OB} = 6; \text{AB} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Mặt khác $\frac{1}{2} OA.OB = pr$ ( vì cùng bằng diện tích tam giác $ABC$ ).

Suy ra $r = \frac{OA.OB}{OA + OB + AB} = 2$.

Dễ thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của đường tròn có tọa độ là $I(2;2)$.

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$ là $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

**Câu 7.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: 2x - y - 5 = 0$ và hai điểm $A(1;2), B(4;1)$. Viết phương trình đường tròn $(C)$ có tâm thuộc $d$ và đi qua hai điểm $A, B$.

**Lời giải.**

**Cách 1.** Gọi $I$ là tâm của $(C)$. Do $I \in d$ nên $I(\text{t}; 2\text{t} - 5)$.

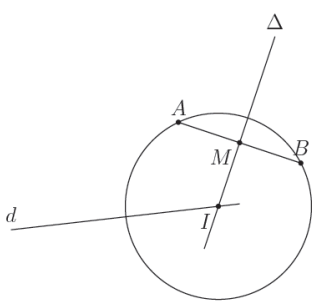
Hai điểm $A, \text{B}$ cùng thuộc $(C)$ nên

$$IA = IB \Leftrightarrow (1-t)^2 + (7-2t)^2 = (4-t)^2 + (6-2t)^2 \Leftrightarrow t = 1$$

Suy ra $I(1;-3)$ và bán kính $R = IA = 5$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm $(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

**Cách 2.** Gọi $M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm $AB$. Đường trung trực của đoạn $AB$ đi qua $M$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (3;-1)$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình $\Delta: 3x - y - 6 = 0$.




Tọa độ tâm $I$ của $(C)$ là nghiệm của hệ

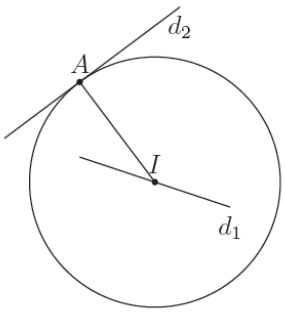
$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1;-3).$$

Bán kính của đường tròn bằng $R = IA = 5$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm

$(C):(x-1)^2+(y+3)^2=25$

**Câu 8.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $d_1: x+3y+8=0, d_2: 3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Viết phương trình đường tròn $(C)$ có tâm thuộc $d_1$, đi qua điểm $A$ và tiếp xúc với $d_2$




**Lời giải.**

Gọi I là tâm của (C). Do $I \in d_1$ nên I(-3t-8; t). Theo giả thiết ta có

$$d(I,d_2)=IA$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3(-3t-8)-4t+10|}{25}=\sqrt{(-3t-8+2)^2+(t-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow t=-3$$

Suy ra I(1; -3) và R=5

Vậy phương trình (C) là $(x-1)^2+(y+3)^2=25$.

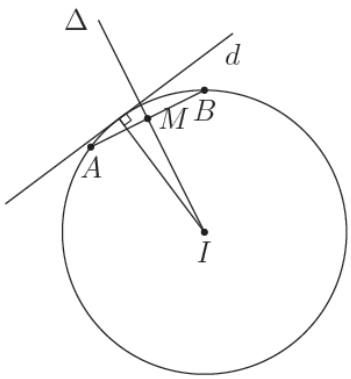
**Câu 9.** Trong mặt phẳng oxy cho 2 điểm A (-1; 1), B(3; 3) và đường thẳng $d: 3x-4y+8=0$. Viết phương trình đường tròn (C) qua A, B và tiếp xúc *d*.

**Lời giải.**

Đường trung trực $\Delta$ của AB đi qua M(1; 2) là trung điểm AB có phương trình là $\Delta: 2x+y-4=0$.

Gọi tâm I của (C) thuộc $\Delta$ là I (t; 4-2t)

Ta có $d(I,d)=IA \Leftrightarrow \sqrt{(-1-t)^2+(2t-3)^2}=\frac{|3t-4(4-2t)+8|}{\sqrt{9+16}}$




$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\frac{31}{2} \end{array}\right.$$

□ Với $t=3$, suy ra tâm I(3; -2). Bán kính R=IA=5

Phương trình (C): $(x-3)^2+(y+2)^2=25$

□ Với $t=\frac{31}{2}$, suy ra tâm $I(\frac{31}{2};-27)$ và $R=\frac{65}{2}$

Phương trình (C): $(x-\frac{31}{2})^2+(y+27)^2=\frac{4225}{4}$.

**Câu 10.** Trong mặt phẳng oxy cho d: $2x-y-4=0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm thuộc d.

**Lời giải.**

Gọi I(m; 2m-4) thuộc d là tâm của đường tròn (C ).

Ta có $d(I;0x)=d(I;oy) \Leftrightarrow |2m-4|=|m| \Leftrightarrow m=4$ hoặc $m=\frac{4}{3}$.

□ Với $m=\frac{4}{3}$ thì $I(\frac{4}{3};\frac{-4}{3}), R=\frac{4}{3}$ ta có

(C): $(x-\frac{4}{3})^2+(y+\frac{4}{3})^2=\frac{16}{9}$

□ Với $m=4$ thì $I(4;4), R=4$ ta có

(C): $(x-4)^2+(y+4)^2=16.$

**Câu 11.** Trong mặt phẳng oxy cho *d:* $2x-y-4=0$ : viết phương trình đường tròn (C ) có tâm thuộc d đồng tời tiếp xúc với $\Delta_1: 3x+4y+5=0$ và $\Delta_2: 4x-3y-5=0$

**Lời giải.**

Gọi $I(6t+10;t)\in d$ ta có

$$d(I,\Delta_1)=d(I,\Delta_2)\Leftrightarrow\frac{|22t+35|}{5}=\frac{|21t+35|}{5}\Leftrightarrow t=0 \text{ hoặc } t=\frac{-70}{43}$$

□ Với $t=0$ suy ra $I(10;0), R=7$

Phương trình $(C):(x-10)^2+y^2=49$.

□ Với $t=\frac{-70}{43}$ suy ra $I(\frac{10}{43};\frac{-70}{43}), R=\frac{7}{43}.$

Phương trình $(C):(x-\frac{10}{43})^2+(y+\frac{70}{43})^2=\frac{49}{1849}.$

**Câu 12.** Trong mặt phẳng oxy cho $d: x+2y-3=0$ và $\Delta: x+3y-5=0$ viết phương trình (C ) có bán kính $R=\frac{2\sqrt{10}}{5}$, có tâm thuộc d và tiếp xúc với $\Delta$.

**Lời giải.**

Gọi $I(-2a+3;a)\in d$ là tâm của (C). Ta có

$$d(I,\Delta)=R\Leftrightarrow\frac{|a-2|}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=6\\a=-2.\end{array}\right.$$

□ Với $a=6$ suy ra I( -9; 6). Phương trình $(C):(x+9)^2+(y-6)^2=\frac{8}{5}.$

□ Với $a=-2$ suy ra I( 7; -2). Phương trình $(C):(x-7)^2+(y+2)^2=\frac{8}{5}.$

**Câu 13.** Trong mặt phẳng oxy cho (C): $x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$ tia oy cắt (C ) tại **A.** Viết phương trình (C') có bán kính R'=2 và tiếp xúc ngoài với (C ) tại **A.**

**Lời giải.**

Đường tròn (C) có tâm $I(-2\sqrt{3};0)$ bán kính R=4.

Tọa độ A là nghiệm hệ $\begin{cases}x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0\\x=0\end{cases}$ $(y>0)$

Ta được A(0; 2).

Đường thẳng IA đi qua 2 điểm I và A nên có phương trình $\begin{cases} x = 2\sqrt{3}t \\ y = 2t + 2. \end{cases}$

Đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với ( C) nên tâm I' thuộc IA, nên $I'(2\sqrt{3}t; 2t+2)$.

Hơn nữa, $R = 2R'$ nên $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{I'A} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3} - 0 = 2(0 - 2\sqrt{3}t) \\ 0 - 2 = 2(2 - 2t - 2) \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$

Với $t = \frac{1}{2}$, suy ra $I'(\sqrt{3}; 3)$. Phương trình đường tròn (C' ): $(x - \sqrt{3})^2 + (y-3)^2 = 4$

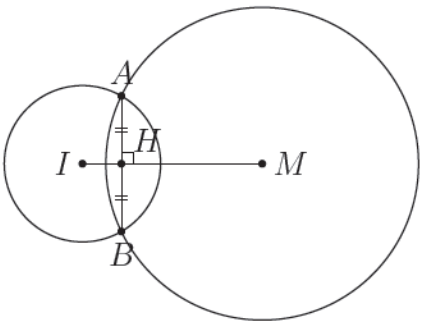
**Câu 14.** Trong mặt phẳng oxy cho (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C' ) có tâm $M(5;1)$ biết (C') cắt (C ) tại 2 điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

**Lời giải.**

Đường tròn (C) có tâm I (1;-2), bán kính $R = \sqrt{3}$

Phương trình đường thẳng nối 2 tâm IM: $3x - 4y - 11 = 0$

Gọi $H(x; y)$ là trung điểm AB.




Ta có $\begin{cases} H \in IM \\ IH = \sqrt{R^2 - AH^2} = \frac{3}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 11 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{5} \\ y = \frac{-29}{10} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = \frac{-11}{10} \end{cases}$

Suy ra $H(\frac{-1}{5}; \frac{-29}{10})$ hoặc $H(\frac{11}{5}; \frac{-11}{10})$

□ Với $H(\frac{-1}{5}; \frac{-29}{10})$ ta có $R'^2 = 43$

Phương trình (C'): $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 43$.

□ Với $H(\frac{11}{5}; \frac{-11}{10})$ ta có $R'^2 = 13$

Phương trình (C'): $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$

**Câu 15.** Trong mặt phẳng tọa độ hệ oxy cho đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$ và hai đường tròn $(C_1): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 8$; $(C_2): (x+5)^2 + (y-4)^2 = 32$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc $d$ và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn trên.

**Lời giải.**

Gọi $I, I_1, I_2, R, R_1, R_2$ lần lượt là tâm và bán kính của 3 đường tròn (C ), $(C_1)$ và $(C_2)$.

Giả sử $I(t; t-1) \in d$. Theo giả thiết Câu toán: (C ) tiếp xúc ngoài $(C_1)$ và $(C_2)$ nên

$$\begin{cases} II_1 = R + R_1 \\ II_2 = R + R_2 \end{cases}$$

Suy ra

$$II_1 - R_1 = II_2 - R_2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(t-3)^2 + (t+3)^2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{(t-5)^2 + (t+5)^2} - 4\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow t = 0$$

Với $t = 0$ suy ra $I(0;-1)$ và $R = \sqrt{2}$.

Phương trình đường tròn (C ): $x^2 + (y+1)^2 = 2$.

## Dạng 3. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

### 1. Vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn

#### 1.1. Phương pháp 1

Cho đường thẳng $(\Delta)$ và đường tròn $(C)$ có tâm $I$ bán kính $R$

- Nếu $d(I;\Delta) < R$ thì $(\Delta)$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt.
- Nếu $d(I;\Delta) = R$ thì $(\Delta)$ tiếp xúc với $(C)$
- Nếu $d(I;\Delta) > R$ thì $(\Delta)$ và $(C)$ không có điểm chung.

#### 1.2. Phương pháp 2

Cho đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

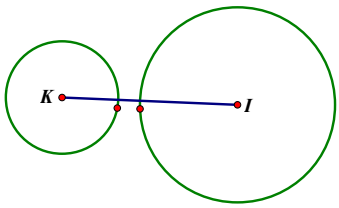
Xét hệ phương trình $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \end{cases}$ $(I)$

- Nếu hệ $(I)$ có hai nghiệm thì $(\Delta)$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt.
- Nếu hệ $(I)$ có một nghiệm thì $(\Delta)$ tiếp xúc $(C)$.
- Nếu hệ $(I)$ vô nghiệm thì $(\Delta)$ và $(C)$ không có điểm chung.

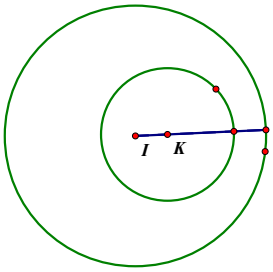
### 2. Vị trí tương đối của hai đường tròn

- Cho hai đường tròn $(C_1);(C_2)$ có tâm lần lượt là $I$; K bán kính $R_1; R_2$ . Ta có

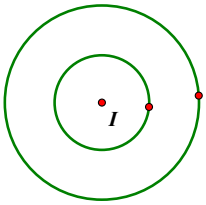
+) $(C_1)$ và $(C_2)$ ở ngoài nhau (không có điểm chung) khi và chỉ khi $IK > R_1 + R_2$



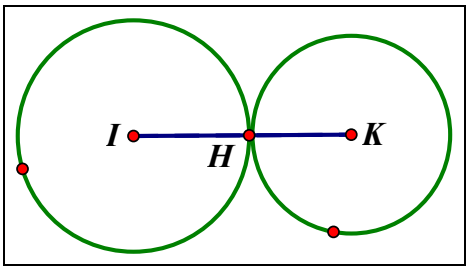

+) $(C_1)$ và $(C_2)$ đựng nhau (không có điểm chung) khi và chỉ khi $IK < |R_1 - R_2|$



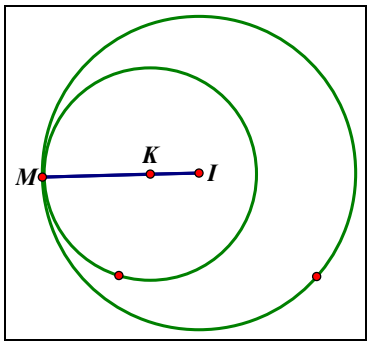

+) $(C_1)$ và $(C_2)$ đồng tâm (không có điểm chung) khi và chỉ khi $I \equiv K; R_1 \neq R_2$



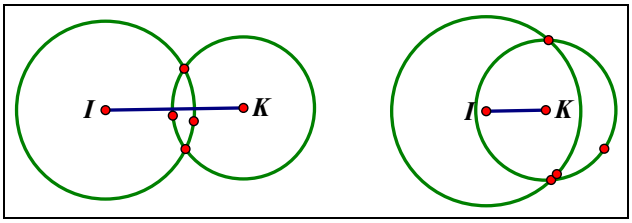

+) $(C_1)$ và $(C_2)$ tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $I_1I_2 = R_1 + R_2$




+) $(C_1)$ và $(C_2)$ tiếp xúc trong khi và chỉ khi $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$




+) $(C_1)$ và $(C_2)$ cắt nhau khi và chỉ khi $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$




**Câu 16.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy, cho đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

a) Chứng minh M(2;1) nằm trong đường tròn

b) Xét vị trí tương đối của $\Delta$ và (C).

**Lời giải.**

a) Đường tròn (C ) có tâm I(2;-1) và bán kính R=3. Ta có

$IM = 2 < 3 = R$. Do đó M nằm trong (C).

b) $d(I;\Delta) = 2\sqrt{2} < 3 = R$ nên $\Delta$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

**Câu 17.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy, cho 2 đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ và (C' ): $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$. Chứng minh 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A,B.

**Lời giải:**

Đường tròn (C ) có tâm I(1; 3) và bán kính R=5.

Đường tròn (C' ) có tâm I'(3; 1) và bán kính $R=\sqrt{13}$.

Mà $II'=2\sqrt{2}$, do đó $|R-R'|<II'<|R+R'|$ nên 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A, B.

**Câu 18.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ Và đường thẳng $\Delta:\sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$. Tìm m để (C) cắt $\Delta$ tại 2 điểm phân biệt.

**Lời giải:**

Đường tròn (C) có tâm I(1; -2) và bán kính R=3

Để (C) cắt $\Delta$ tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)<$ R

$\Leftrightarrow \dfrac{\left|\sqrt{2}-2m+1-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+m^2}}<3 \Leftrightarrow 5m^2+5m^2+17>0$. Đúng với mọi m.

**Câu 19.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $x^2+y^2-4x-2y=0$ và đường thẳng $\Delta:mx-y-3m-2=0$. Biện luận theo m số giao điểm của $\Delta$ và (C).

**Lời giải**:

Đường tròn (C) có tâm I(2; 1) và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Ta có $h=d(I;\Delta)=\dfrac{|m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$.

□ Nếu $h<\sqrt{5}\Leftrightarrow m>2$ hoặc $m<-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \Delta$ cắt (C ) tại 2 điểm phân biệt.

□ Nếu $h=\sqrt{5}\Leftrightarrow m=2$ hoặc $m=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \Delta$ tiếp xúc (C ).

□ Nếu $h>\sqrt{5}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<m<2\Rightarrow \Delta$ không cắt (C ).

**Câu 20.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C):x^2+y^2=1$ và: $(C_m):x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5=0$. Tìm m để hai đường tròn tiếp xúc trong.

**Lời giải.**

Đường tròn (C) có tâm O(0; 0) và bán kính $R=1$.

Đường tròn ($C_m$) có tâm I(m+1; -2m) và bán kính $R=\sqrt{(m+1)^2+4m^2+5}$.

Mà $OI=\sqrt{(m+1)^2+4m^2}$.

Để 2 đường tròn tiếp xúc trong thì $R'-R=OI$

$\Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2+4m^2+5}-1=\sqrt{(m+1)^2+4m^2}$

Giải phương trình ta được $m=-1$ hoặc $m=\frac{3}{5}$.

**Câu 21.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho hai đường tròn: $(C_1): x^2+y^2-2x-4y=0$ và $(C_2): (x+1)^2+(y-1)^2=16$. Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường tròn đó.

**Lời giải**

$(C_1)$ có tâm $I_1(1;-2)$ và bán kính $R_1=3$

$(C_2)$ có tâm $I_2(-1;1)$ và bán kính $R_2=4$

$I_1I_2=\sqrt{(-1-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{13}$.

Ta thấy $|R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.

Gọi điểm $M(x;y)$ thuộc đường thẳng cần tìm

Tọa độ $M$ thỏa mãn hệ $\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y=0\\(x+1)^2+(y-1)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y=0 \quad (1)\\x^2+y^2+2x-2y-14=0 (2)\end{cases}$

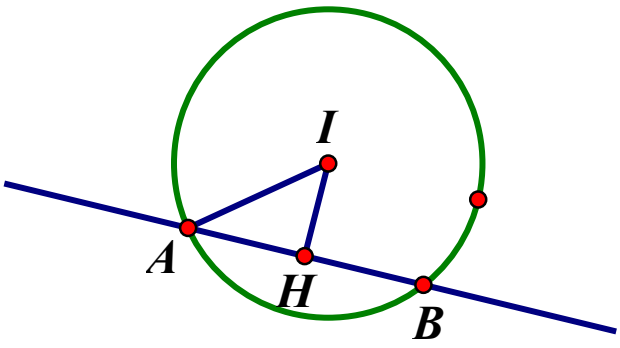
Lấy $(1)-(2)\Rightarrow -4x+6y+10=0\Leftrightarrow 2x-3y-5=0 (3)$

Nhận thấy $M(x;y)$ luôn thỏa mãn phương trình (3)

Suy ra đường thẳng qua giao điểm của hai đường tròn là: $2x-3y-5=0$.

**Câu 22.** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ $Oxy$, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-8y-8=0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d: 3x+4y-2=0$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng $6$.

**Lời giải**




- Đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-8y-8=0$ có tâm $I(-1;4)$ và bán kính $R=5$
- Đường thẳng $d'$ song song với đường thẳng $d$ nên phương trình của $d'$ là: $3x+4y+m=0 (m\neq -2)$
- Kẻ $IH\perp d'\Rightarrow HA=HB=3$ và $IH$ là khoảng cách từ $I$ đến $d'$: $IH=\frac{|-3+4+m|}{5}=\frac{|m+1|}{5}$
- Xét tam giác vuông $IHA$: $IH^2=IA^2-HA^2=25-9=16$

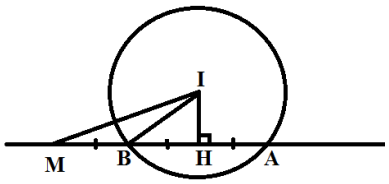
$\Leftrightarrow\frac{(m+1)^2}{25}=16\Leftrightarrow|m+1|=20\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=19\Rightarrow d': 3x+y+19=0\\m=-21\Rightarrow d': 3x+y-21=0\end{array}\right.$.( thỏa mãn ĐK)

Vậy có hai đường thẳng là: $3x+4y+19=0; 3x+4y-21=0$.

**Câu 23.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-1)^2=25$ và điểm

$M(7;3)$ . Lập phương trình đường thẳng $d$ qua $M$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt $A, B$ sao cho $MA = 3MB$

**Lời giải**




Đường tròn $(C)$ có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R = 5$.

Ta có $IM = 2\sqrt{10} > R \Rightarrow M$ nằm ngoài đường tròn $(C)$

Gọi $H$ là trung điểm $AB$ mà $MA = 3MB \Rightarrow B$ là trung điểm $MH$

Ta có $\begin{cases} IH^2 + MH^2 = 40 \\ IH^2 + BH^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IH^2 + 4BH^2 = 40 \\ IH^2 + BH^2 = 25 \end{cases}$ suy ra $IH^2 = 20 \Rightarrow IH = 2\sqrt{5}$

Đường thẳng $d$ qua $M(7;3)$ và có VTPT $\vec{n} = (a;b), a^2 + b^2 \neq 0$ có phương trình là:

$a(x-7) + b(y-3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 7a - 3b = 0$

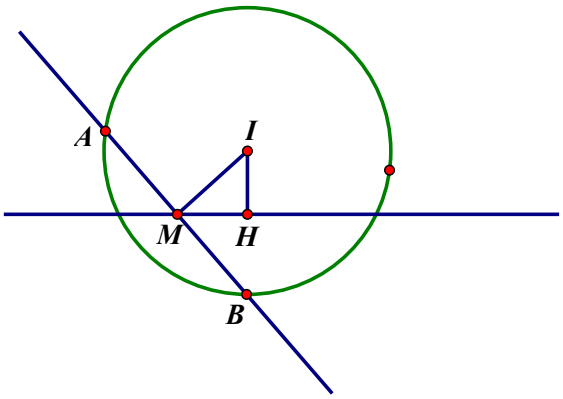
$IH = d(I,d) = \dfrac{|a + b - 7a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |3a + b| = \sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2}$

$9a^2 + 6ab + b^2 = 5(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{b}{2} \\ a = -2b \end{array}\right.$

- $a = \dfrac{b}{2} \Rightarrow d : x + 2y - 13 = 0$
- $a = -2b \Rightarrow d : 2x - y - 11 = 0$

**Câu 24.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ và điểm $M(-1;2)$ . Lập phương trình đường thẳng $d$ qua $M$ cắt $(C)$ tại 2 điểm phân biệt $A, B$ sao cho độ dài dây cung $AB$ nhỏ nhất .

**Lời giải**




Đường tròn $(C)$ có tâm $I(1;1)$ bán kính $R = 5$ .Ta có: $IM = \sqrt{5} \Rightarrow IM < R$ nên điểm $M$ nằm trong đường tròn $(C)$, kẻ $IH \perp d \Rightarrow IH \leq IM$ và $HA = HB = \dfrac{AB}{2}$ . Ta có $AH^2 = IA^2 - IH^2 = 25 - IH^2$ , $AB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $AH$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $IH$ lớn nhất $\Leftrightarrow IH = IM \Leftrightarrow H \equiv M$ . Khi đó đường thẳng $d$ đi qua $M$ và

vuông góc với $IM$ nên đường thẳng $d$ có một vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{IM}=(-2;1)$ . Vậy phương trình đường thẳng $d$ là: $-2(x+1)+1(y-2)=0\Leftrightarrow -2x+y-4=0$ .

**Câu 25.** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ $Oxy$, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=5$. Viết phương trình đường tròn $(C')$ có tâm $K(5;-2)$ và cắt đường tròn $(C)$ theo một dây cung $AB$ có độ dài bằng $\sqrt{2}$.

**Lời giải**

- Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=5$ có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

Gọi $a$ với $a>0$ là bán kính đường tròn $(C')$, phương trình $(C')$ là: $(C'):(x-5)^2+(y+2)^2=a^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-10x+4y+29-a^2=0$ . Tọa độ giao điểm của hai đường tròn $(C)$ và $(C')$ là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=5\\ x^2+y^2-10x+4y+29-a^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y=0 & (1)\\ x^2+y^2-10x+4y+29-a^2=0 & (2)\end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình trên ta được phương trình $8x-8y-29+a^2=0$ là phương trình đường thẳng đi qua hai giao điểm $A,B$ của hai đường tròn , kẻ $IH\perp AB$ suy ra $H$ là trung điểm của $AB$ và

$$AH=HB=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{9}{2}}=d(I,AB)$$

Nên ta có $\frac{|8.1-8.2-29+a^2|}{\sqrt{8^2+(-8)^2}}=\sqrt{\frac{9}{2}}\Leftrightarrow|a^2-37|=24\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2-37=24\\ a^2-37=-24\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2=61\\ a^2=13\end{array}\right.$

Có hai đường tròn là: $(C'):(x-5)^2+(y+2)^2=13;(C'):(x-5)^2+(y+2)^2=61$

**Câu 26.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=1$ , Lập phương trình đường tròn $(C')$ tiếp xúc với hai trục tọa độ và tiếp xúc ngoài $(C)$ .

**Lời giải**

Đường tròn $(C)$ có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=1$.

Gọi $K(a;b)$ và $R>0$ là tâm và bán kính đường tròn $(C')$ tiếp xúc với hai trục tọa độ nên ta có

$|a|=|b|=R\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ a=-b\end{array}\right.$ từ $|a|=|b|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ a=-b\end{array}\right.$

+Nếu $a=b>0\Rightarrow K(a;a)$ phương trình $(C'):(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ hai đường tròn tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $IK=R+R'\Leftrightarrow\sqrt{(a-1)^2+(a-1)^2}=1+a\Leftrightarrow a^2-6a+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3+2\sqrt{2}\\ a=3-2\sqrt{2}\end{array}\right.$

Có 2 đường tròn là: $(C'):\left(x-3-2\sqrt{2}\right)^2+\left(y-3-2\sqrt{2}\right)^2=17+12\sqrt{2}$

$(C'):\left(x-3+2\sqrt{2}\right)^2+\left(y-3+2\sqrt{2}\right)^2=17-12\sqrt{2}$

+Nếu $a=b<0\Rightarrow K(a;a)$ phương trình $(C'):(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ hai đường tròn tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $IK=R+R'\Leftrightarrow\sqrt{(a-1)^2+(a-1)^2}=1-a\Leftrightarrow a^2-2a+1=0\Leftrightarrow a=1$ (loại)

+Nếu $a=-b\Rightarrow K(a;-a)$ phương trình $(C'):(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$ hai đường tròn tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $IK=R+R'\Leftrightarrow\sqrt{(a-1)^2+(a+1)^2}=1+|a|\Leftrightarrow 2a^2+2=(1+|a|)^2$ (1)

TH 1: $a>0$ khi đó $(1)\Leftrightarrow 2a^2+2=(1+a)^2\Leftrightarrow a^2-2a+1=0\Leftrightarrow a=1$

Phương trình đường tròn là: $(C'):(x-1)^2+(y+1)^2=1$.

TH2 : $a<0$ khi đó $(1)\Leftrightarrow 2a^2+2=(1-a)^2\Leftrightarrow a^2+2a+1=0\Leftrightarrow a=-1$

Phương trình đường tròn là: $(C'):(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

Có 4 đường tròn thỏa mãn.

## Dạng 4: Tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I( a;b) và bán kính R.

a) Nếu biết tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ thì tiếp tuyến đó qua M và nhận vector $\overrightarrow{IM}(x_0-a;y_0-b)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là. $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$.

b) Nếu không biết tiếp điểm thì dùng điều kiện tiếp xúc: $\Delta$ tiếp xúc (C ) $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$ để xác định tiếp tuyến.

**Câu 27.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $(x-1)^2+(y+2)^2=8$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm A(3; -4).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) qua điểm B(5; -2).

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến vuông góc với d: $x+y+2014=0$.

d) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C ) biết tiếp tuyến tạo với trục tung một góc $45^0$

**Lời giải.**

a) Đường tròn (C) có tâm I(1; -2) và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Do A thuộc (C) nên tiếp tuyến $\Delta$ qua A và nhận $\overrightarrow{IA}=(2;-2)$ làm vector pháp tuyến

Vậy phương trình $\Delta: x-y-7=0$.

b) Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là vector pháp tuyến của $\Delta$, Do đó

$\Delta: a(x-5)+b(y+2)=0$

$\Leftrightarrow ax+by-5a+2b=0$

Do $\Delta$ tiếp xúc với (C ) nên

$$d(I;\Delta)=R\Leftrightarrow\frac{|-4a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow a=\pm b$$

Với $a=b$ chọn $a=1\Rightarrow b=1$. Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ là $x+y-3=0$.

Với $a=-b$ chọn $a=1\Rightarrow b=-1$. Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ là $x-y-7=0$.

c) Tiếp tuyến $\Delta$ vuông góc d nên $\Delta$ có dạng $x-y+c=0$.

Mà $d(I;\Delta)=R\Leftrightarrow\frac{|3+c|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=1\\c=-7\end{array}\right.$

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn: $x-y+1=0$ hoặc $x-y-7=0$.

d) Gọi $\Delta$ có dạng $ax+by+c=0\quad(a^2+b^2\neq 0)$

Theo Câu ra ta có $\begin{cases} d(I;\Delta)=R \\ \cos(\vec{n};\vec{i})=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a-2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2} \\ \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow a^2=b^2 \Leftrightarrow a=\pm b$

Với $a=b \Rightarrow |c-b|=4|b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=5b \\ c=-3b \end{array}\right.$

+ TH1: chọn $b=1 \Rightarrow c=5; a=1$ ta được $\Delta: x+y+5=0$.

+ TH2: chọn $b=1 \Rightarrow c=-3; a=1$ ta được $\Delta: x+y-3=0$.

Với $a=-b \Rightarrow |c-3b|=4|b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=7b \\ c=-b \end{array}\right.$

+ TH1: chọn $b=-1 \Rightarrow c=-7; a=1$ ta được $\Delta: x-y-7=0$.

+ TH2: chọn $b=-1 \Rightarrow c=3; a=1$ ta được $\Delta: x-y+1=0$.

Vậy có 4 tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: x+y+5=0$; $\Delta: x+y-3=0$; $\Delta: x-y-7=0$; $\Delta: x-y+1=0$.

**Câu 28.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2y-3=0$ và $(C_2): x^2+y^2-8x-8y+28=0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

**Lời giải**:

$(C_1)$ có tâm $I_1(0;1)$ và bán kính $R_1=2$.

$(C_2)$ có tâm $I_2(4;4)$ và bán kính $R_2=2$.

Có $I_1I_2=5>R_1+R_2$ nên 2 đường tròn ở ngoài nhau, như vậy có 4 tiếp tuyến chung.

TH1: Nếu tiếp tuyến song song oy thì $\Delta$ có dạng $x+c=0$.

Ta có $d(I_1;\Delta)=d(I_2;\Delta) \Leftrightarrow |c|=|4+c| \Leftrightarrow c=-2$

Vậy tiếp tuyến $\Delta: x-2=0$.

TH2: Nếu $\Delta$ không song song với oy thì phương trình của $\Delta: y=ax+b$.

Ta có $\begin{cases} d(I_1;\Delta)=2 \\ d(I_1;\Delta)=d(I_2;\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \\ \dfrac{|-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{|-4a-4+b|}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{7}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=\dfrac{-7}{24} \\ b=\dfrac{37}{12} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$

Suy ra $\Delta: 3x-4y+14=0$; $\Delta: 3x-4y-6=0$; $\Delta: 7x+24y-74=0$

Vậy có 4 tiếp tuyến $\Delta: x-2=0$ $\Delta: 3x-4y+14=0$; $\Delta: 3x-4y-6=0$; và $\Delta: 7x+24y-74=0$.

**Câu 29.** Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C_1):(x-2)^2+(y-3)^2=2$ và $(C_2):(x-1)^2+(y-2)^2=8$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

**Lời giải**:

$(C_1)$ có tâm $I_1(2;3)$ và bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

$(C_2)$ có tâm $I_2(1;2)$ và bán kính $R_2=2\sqrt{2}$.

Ta có $I_1I_2=\sqrt{2}=R_2-R_1$ do đó 2 đường tròn tiếp xúc trong. Như vậy có 1 tiếp tuyến chung.

Tọa độ tiếp điểm của 2 đường tròn là nghiệm hệ

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=2\\(x-1)^2+(y-2)^2=8\end{cases}\Rightarrow M(3;4).$$

Tiếp tuyến chung $\Delta$ là đường thẳng qua $M(3;4)$ và nhận $\overrightarrow{I_1I_2}=(-1;-1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $\Delta: x+y-7=0$.

**Câu 30.** Trong mặt phẳng $(Oxy)$, cho $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=5$. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ biết tiếp tuyến cắt $Ox; Oy$ lần lượt tại $A; B$ sao cho $OA=2OB$

**Lời giải**

$(C)$ có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$

Tiếp tuyến cắt $Ox; Oy$ lần lượt tại $A; B$ sao cho $OA=2OB\Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc $k=\pm\dfrac{OB}{OA}=\pm\dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 1: Với $k=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến có dạng $\Delta: y=\dfrac{1}{2}x+b$

$\Delta$ là tiếp tuyến của $(C)\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R\Leftrightarrow\dfrac{|2b|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{5}{2}\\b=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}\\y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$

Trường hợp 2: Với $k=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến có dạng $d: y=-\dfrac{1}{2}x+m$

$d$ là tiếp tuyến của $(C)\Leftrightarrow d(I;d)=R\Leftrightarrow\dfrac{|4-2m|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{9}{2}\\b=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy có 4 tiếp tuyến thỏa mãn điều kiện.

**Câu 31.** Trong mặt phẳng $(Oxy)$, cho $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=5$. Tìm $M\in\Delta: x+y+2=0$ sao cho qua $M$ kẻ được tới $(C)$ hai tiếp tuyến $MA, MB$ thỏa mãn diện tích tứ giác $MAIB$ bằng 10, với $I$ là tâm đường tròn.

**Lời giải**

$(C)$ có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}=AI$

$S_{MAIB}=2S_{\Delta AMI}=2.\frac{1}{2}.AM.AI\Rightarrow AM=\frac{S_{MAIB}}{AI}=2\sqrt{5}\Rightarrow MI=\sqrt{AM^2+AI^2}=5$

$M\in\Delta: x+y=2=0\Rightarrow M(a;2-a)$

$MI=5\Leftrightarrow(2-a)^2+(1-a)^2=25\Leftrightarrow a^2-3a-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=-2 \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn điều kiện $\left[\begin{array}{l} M(5;-3) \\ M(-2;4) \end{array}\right.$.

**Câu 32.** Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm hai điểm $A(1;-1);B(1;3)$

a) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ $B$.

**Lời giải**

Đường tròn $(C)$ có tâm $I(3;-1)$ bán kính $R=\sqrt{3^2+1-6}=2$.

a) Ta có: $IA=2=R; IB=2\sqrt{5}>R$ suy ra điểm A thuộc đường tròn và điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Tiếp tuyến của (C) tại điểm A nhận $\overrightarrow{IA}=(2;0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

$2(x-1)+0(y+1)=0$ hay $x=1$

c) Phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua B có dạng:

$a(x-1)+b(y-3)=0$ (với $a^2+b^2\neq 0$) hay $ax+by-a-3b=0$

Đường thẳng $\Delta$ là tiếp tuyến của đường tròn $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$

$\Leftrightarrow\frac{|3a-b-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\Leftrightarrow(a-2b)^2=a^2+b^2\Leftrightarrow 3b^2-4ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=0 \\ 3b=4a \end{array}\right.$

+ Nếu $b=0$, chọn $a=1$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $x=1$.

+ Nếu $3b=4a$, chọn $a=3, b=4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $3x+4y-15=0$

Vậy qua A kẻ được hai tiếp tuyến với $(C)$ có phương trình là $x=1$ và $3x+4y-15=0$

**Câu 33.** Viết phương trình tiếp tuyến $\Delta$ của đường tròn $(C):x^2+y^2-4x+4y-1=0$ trong trường

a) Đường thẳng $\Delta$ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x+3y+4=0$.

b) Đường thẳng $\Delta$ hợp với trục hoành một góc $45^\circ$.

**Lời giải**

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2;-2)$, bán kính $R=3$

Vì $\Delta \perp \Delta'$ nên $\Delta$ nhận $\vec{u}(-3;2)$ làm VTPT do đó phương trình có dạng $-3x+2y+c=0$

Đường thẳng $\Delta$ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta)=3 \Leftrightarrow \frac{|-10+c|}{\sqrt{13}}=3 \Leftrightarrow c=10\pm 3\sqrt{13}$$

Vậy có hai tiếp tuyến là $\Delta: -3x+2y+10\pm 3\sqrt{13}=0$

b) Giả sử phương trình đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0, a^2+b^2\neq 0$

Đường thẳng $\Delta$ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta)=3 \Leftrightarrow \frac{|2a-2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \Leftrightarrow (2a-2b+c)^2=9(a^2+b^2)(*)$$

Đường thẳng $\Delta$ hợp với trục hoành một góc $45^0$ suy ra

$$\cos(\Delta;Ox)=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \cos 45^0=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow a=b \text{ hoặc } a=-b$$

TH1: Nếu $a=b$ thay vào (*) ta có $18a^2=c^2 \Leftrightarrow \pm c=3\sqrt{2}a$, chọn $a=b=1 \Rightarrow c=\pm 3\sqrt{2}$ suy ra

$\Delta: x+y\pm 3\sqrt{2}=0$

TH2: Nếu $a=-b$ thay vào (*) ta có $18a^2=(4a+c)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=(3\sqrt{2}-4)a \\ c=-(3\sqrt{2}+4)a \end{array}\right.$

Với $c=(3\sqrt{2}-4)a$, chọn $a=1,b=-1,c=(3\sqrt{2}-4) \Rightarrow \Delta: x-y+3\sqrt{2}-4=0$

Với $c=-(3\sqrt{2}+4)a$, chọn $a=1,b=-1,c=-(3\sqrt{2}+4) \Rightarrow \Delta: x-y-3\sqrt{2}-4=0$

Vậy có bốn đường thẳng thỏa mãn là $\Delta_{1,2}: x+y\pm 3\sqrt{2}=0, \Delta_3: x-y+3\sqrt{2}-4=0$ và

$\Delta_4: x-y-3\sqrt{2}-4=0$

**Câu 34.** Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau:

$$(C_1): x^2+y^2-4y-5=0 \text{ và } (C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0.$$

**Lời giải**

Đường tròn $(C_1)$ có tâm $I_1(0;2)$ bán kính $R_1=3$

Đường tròn $(C_2)$ có tâm $I_2(3;-4)$ bán kính $R_2=3$

Gọi tiếp tuyến chung của hai đường tròn có phương trình $\Delta: ax+by+c=0$ với $a^2+b^2\neq 0$

$$\Delta \text{ là tiếp tuyến chung của } (C_1) \text{ và } (C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1,\Delta)=3 \\ d(I_2,\Delta)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c|=3\sqrt{a^2+b^2}\ (*) \\ |3a-4b+c|=3\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

Suy ra $|2b+c|=|3a-4b+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ c=\dfrac{-3a+2b}{2} \end{array}\right.$

TH1: Nếu $a=2b$ chọn $a=2,b=1$ thay vào (*) ta được $c=-2\pm 3\sqrt{5}$ nên ta có 2 tiếp tuyến là

$2x+y-2\pm 3\sqrt{5}=0$

TH2: Nếu $c=\dfrac{-3a+2b}{2}$ thay vào (*) ta được $|2b-a|=2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a=0$ hoặc $3a+4b=0$

+ Với $a=0 \Rightarrow c=b$, chọn $b=c=1$ ta được $\Delta: y+1=0$

+ Với $3a+4b=0\Rightarrow c=3b$, chọn $a=4,b=-3,c=-9$ ta được $\Delta:4x-3y-9=0$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của hai đường tròn là: $2x+y-2\pm3\sqrt{5}=0, y+1=0, 4x-3y-9=0$.

**Câu 35.** Trong hệ trục Oxy, cho hai đường tròn $(C_1):(x-1)^2+(y-2)^2=2$, $(C_2):(x-4)^2+(y-5)^2=8$ và đường thẳng $d:x+y+m=0$. Tìm m biết đường thẳng *d* tiếp xúc với cả hai đường tròn $(C_1)$ và $(C_2)$.

**Lời giải**

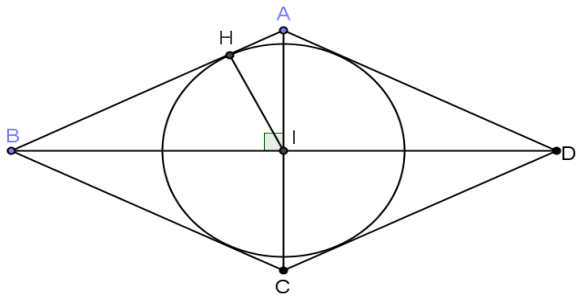
$(C_1)$ có tâm $I_1(1;2)$, bán kính $R_1=\sqrt{2}$ và $(C_2)$ có tâm $I_2(4;5)$, bán kính $R_2=2\sqrt{2}$.

Vì đường thẳng *d* tiếp xúc với cả hai đường tròn $(C_1)$ và $(C_2)$ nên ta có

$$\begin{cases} d(I_1,d)=R_1 \\ d(I_2,d)=R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|m+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \\ \dfrac{|9+m|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=-5$$

**Câu 36.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y+1)^2=8$ và điểm A thuộc đường thẳng $d:x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi, biết rằng $BD=2AC$ và hoành độ điểm A không nhỏ hơn 2.

**Lời giải**




Trong tam giác IAB có $\dfrac{1}{IA^2}+\dfrac{1}{IB^2}=\dfrac{1}{IH^2}\Rightarrow\dfrac{5}{4IA^2}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow\begin{cases} IA=\sqrt{10} \\ IB=2\sqrt{10} \end{cases}$

Giả sử $A(2a-3;a)$ từ $\begin{cases} IA=\sqrt{10} \\ x_A\geq 2 \end{cases}\Rightarrow a=2$ hay $A(1;2)$. Suy ra $C(3;-4)$

Phương trình đường thẳng BD: x-3y-5=0. Kết hợp với $IB=ID=2\sqrt{10}\Rightarrow$ Tọa độ các điểm B, D là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-3y-5=0 \\ (x-2)^2+(y+1)^2=40 \end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix} x=8;y=1 \\ x=-4;y=-3 \end{bmatrix}$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD là $A(1;2),B(8;1),C(3;-4),D(-4;-3)$ hoặc $A(1;2),B(-4;-3),C(3;-4),D(8;1)$.

**Câu 37.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho đường thẳng $d:x-y+1=0$ và đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Tìm tọa độ điểm $M\in d$ sao cho từ $M$ kẻ được hai tiếp tuyến $MA,MB$ thỏa mãn khoảng cách từ $N\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ đến đường thẳng $AB$ là lớn nhất.

**Lời giải**

Đường tròn $(C)$ có tâm $I(1;-2)$. Ta có điểm $M$ thuộc $d$ nên $M(a;a+1)$.

Gọi $K$ trung điểm của $MI$ thì $K\left(\frac{a+1}{2};\frac{a-1}{2}\right)$

Vì tam giác $\triangle MAI, \triangle MBI$ vuông tại $A,B$ nên $KA=KB=\frac{1}{2}MI$

Đường tròn $(C')$ tâm $K$ ,đường kính $MI$ nên có phương trình

$$\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a-1}{2}\right)^2=\frac{a^2+2a+5}{2}\Leftrightarrow x^2+y^2-(a+1)x-(a-1)y-a-2=0$$

Đường thẳng $AB$ là giao của $(C)\cap(C')$ nên tọa độ điểm $A,B$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y-4=0\\ x^2+y^2-(a+1)x-(a-1)y-a-2=0\end{cases}\Rightarrow(1-a)x-(a+3)y-a+2=0$$

Suy ra đường thẳng $AB$ có phương trình $(1-a)x-(a+3)y-a+2=0$ .

Khoảng cách từ $N$ đến $AB$ là

$$d_{(N;d)}=\frac{|7-a|}{2\sqrt{(1-a)^2+(a+3)^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-14a+49}{2a^2+4a+10}}=\frac{1}{2}\sqrt{4\left[\frac{34}{16}-\frac{(2a+3)^2}{2a^2+4a+10}\right]}\le\frac{\sqrt{34}}{4}$$

$$Maxf(a)=\frac{\sqrt{34}}{4}\Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}$$

Vậy $M\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

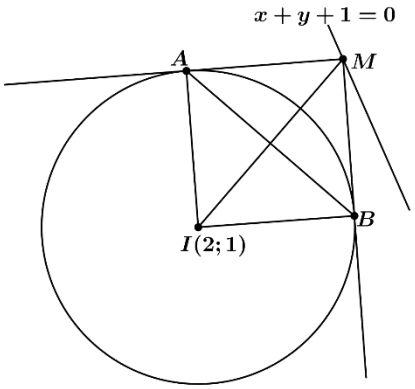
**Dạng 5: Tìm diểm thỏa mãn diều kiện cho trước**

Phương pháp tìm tập hợp các tâm $I$ của đường tròn $(C)$

- Bước 1. Tìm giá trị của m để tồn tại tâm $I$ .
- Bước 2. Tìm toạ độ tâm $I$ . Giả sử: I $\begin{cases}x=f(m)\\ y=g(m)\end{cases}$.
- Bước 3. Tìm mối liên hệ giữa $x$ và $y$ theo $m$ ta được phương trình $F(x;y)=0$.
- Bước 4. Dựa vào điều kiện của m ở bước 1 để giới hạn miền của $x$ hoặc $y$ .
- Bước 5. Tập hợp điểm $I$ là $F(x;y)=0$ cùng với phần giới hạn ở bước 4.

**Câu 38.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ . Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-4x-2y-1=0$ và đường thẳng $d:x+y+1=0$. Tìm những điểm $M$ thuộc đường thẳng $d$ sao cho từ điểm $M$ kẻ được đến $(C)$ hai tiếp tuyến hợp với nhau góc $90^0$.

**Lời giải**



$M$ thuộc $d$ suy ra $M(t;-1-t)$. Nếu 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau thì $MAIB$ là hình vuông ( $A$ , $B$ là 2 tiếp điểm). Do đó $AB = MI = IA\sqrt{2} = R\sqrt{2} = \sqrt{6}.\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

Ta có : $MI = \sqrt{(2-t)^2 + (2+t)^2} = \sqrt{2t^2+8} = 2\sqrt{3}$

- Do đó : $2t^2 + 8 = 12 \Leftrightarrow t^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\sqrt{2} \to M_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right) \\ t = \sqrt{2} \to M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}-1\right) \end{array}\right.$.

**Câu 39.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$. Gọi $I$ là tâm và $R$ là bán kính của $(C)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc đường thẳng $d : x + y + 2 = 0$ sao cho từ $M$ kẻ được hai tiếp tuyến $MA, MB$ đến $(C)$ ( $A, B$ là các tiếp điểm) thỏa mãn

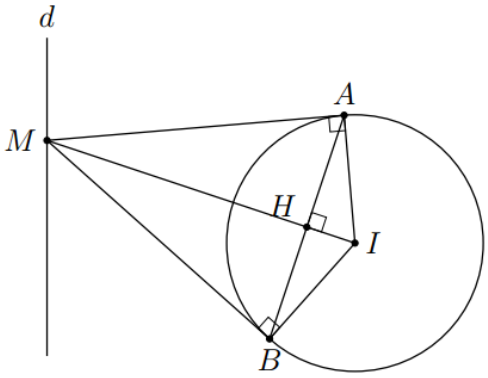
a) $AB = \dfrac{12\sqrt{34}}{17}$

b) Tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng $6\sqrt{2}$

c) Tứ giác $MAIB$ có chu vi bằng $2\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$

d) Tứ giác $MAIB$ là hình vuông.

**Lời giải**




a) Đường tròn $(C)$ có tâm $I(2;1)$, bán kính $R = 3$.

Gọi $H = MI \cap AB$, suy ra $AH \perp MI$ và $AH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{6\sqrt{34}}{17}$.

Xét tam giác $MAI$ vuông tại $A$ có $AH$ là đường cao nên $MI = \dfrac{AI^2}{HI} = \dfrac{AI^2}{\sqrt{AI^2 - AH^2}} = \sqrt{17}$.

Do $M \in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI = \sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^3} = \sqrt{17}$$
$$\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

Vậy $M(1;-3)$ hoặc $M(-2;0)$.

b) Ta có $S_{\Delta MAI} = \dfrac{1}{2} S_{MAIB} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} AM.AI = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow AM = \dfrac{6\sqrt{2}}{AI} = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $MI = \sqrt{AM^2 + AI^2} = \sqrt{17}$. Do $M \in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI=\sqrt{17}\Leftrightarrow\sqrt{(2-m)^2+(m+3)^3}=\sqrt{17}$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m-4=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$$

Vậy $M(1;-3)$ hoặc $M(-2;0)$.

c) Ta có $C_{MAIB}=MA+AI+IB+BM=2(MA+AI)=2\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

Suy ra $MA+AI=3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow MA=3+2\sqrt{2}-AI=2\sqrt{2}$.

Do đó $MI=\sqrt{AM^2+AI^2}=\sqrt{17}$.

Do $M\in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI=\sqrt{17}\Leftrightarrow\sqrt{(2-m)^2+(m+3)^3}=\sqrt{17}$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m-4=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$$

Vậy $M(1;-3)$ hoặc $M(-2;0)$.

d) Tứ giác $MAIB$ là hình vuông nên $MI=IA\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

Do $M\in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{(2-m)^2+(m+3)^3}=3\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m-5=0$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{11}}{2}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2};\frac{-3-\sqrt{11}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2};\frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

**Câu 40.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-4x-2y-4=0$. Gọi $I$ là tâm và $R$ là bán kính của $(C)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc đường thẳng $d:x+y+2=0$ sao cho từ $M$ kẻ được hai tiếp tuyến $MA$, $MB$ đến $(C)$ ($A,B$ là các tiếp điểm) thỏa mãn :

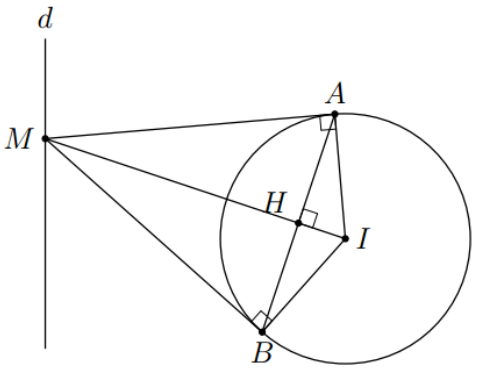
a) Tam giác $MAB$ vuông,

b) Tam giác $MAB$ đều,

c) Hai tiếp tuyến $MA,MB$ tạo với nhau một góc bằng $60^0$,

d) Tam giác $IAB$ đều.

**Lời giải**




a) Ta có đường tròn $(C)$ có tâm $I(2;1)$ và bán kính $R=3$.

Theo giả thiết Câu toán tam giác $MAB$ vuông cân tại $M$ suy ra tứ giác $MAIB$ là hình vuông nên $MI = IA\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Do $M \in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2+(m+3)^3} = 3\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m-5=0$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{-1\pm\sqrt{11}}{2}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2};\frac{-3-\sqrt{11}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2};\frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

b) Tam giác $MAB$ đều, suy ra $\widehat{AMI} = 30^0$.

Xét tam giác $MAI$ vuông tại $A$, ta có $MI = \frac{IA}{\sin\widehat{AMI}} = 2IA = 6$.

Do $M \in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2+(m+3)^3} = 6$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m-23=0$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{-1\pm\sqrt{47}}{2}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{47}}{2};\frac{-3-\sqrt{47}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{47}}{2};\frac{-3+\sqrt{47}}{2}\right)$.

c) Theo giả thiết ta chia Câu toán thành 2 trường hợp

• **Trường hợp 1.** $\widehat{AMB} = 60^0 \Rightarrow \Delta MAB$ đều, suy ra $\widehat{AMI} = 30^0$.

Xét tam giác $MAI$ vuông tại $A$, ta có $MI = \frac{IA}{\sin\widehat{AMI}} = 2IA = 6$.

Do $M \in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2+(m+3)^3} = 6$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m-23=0$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{-1\pm\sqrt{47}}{2}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{47}}{2};\frac{-3-\sqrt{47}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{47}}{2};\frac{-3+\sqrt{47}}{2}\right)$.

• **Trường hợp 2.** $\widehat{AMB} = 120^0$, suy ra $\widehat{AMI} = 60^0$.

Xét tam giác $MAI$ vuông tại $A$, ta có $MI=\dfrac{IA}{\sin \widehat{AMI}}=\dfrac{2IA}{3}=2\sqrt{3}$.

Do $M\in d$ nên $M\left(m;-2-m\right)$. Ta có

$MI=2\sqrt{3}\Leftrightarrow \sqrt{\left(2-m\right)^2+\left(m+3\right)^3}=2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2m^2+2m+1=0$ (vô nghiệm)

Vậy không tồn tại điểm $M$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

d) Tam giác $IAB$ đều, suy ra $\widehat{AIM}=30^0$.

Xét tam giác $MAI$ vuông tại $A$, ta có $MI=\dfrac{IA}{\cos \widehat{AIM}}=\dfrac{2IA}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

Do $M\in d$ nên $M\left(m;-2-m\right)$. Ta có

$MI=2\sqrt{3}\Leftrightarrow \sqrt{\left(2-m\right)^2+\left(m+3\right)^3}=2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2m^2+2m+1=0$ (vô nghiệm)

Vậy không tồn tại điểm $M$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

**Câu 41.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $\left(C\right):\left(x+2\right)^2+\left(y-3\right)^2=5$ và đường thẳng $d:x-5y-4=0$. Tìm trên $\left(C\right)$ và trên $d$ điểm $N$ sao cho

a) Hai điểm $M,N$ đối xứng nhau qua điểm $A\left(-7;-1\right)$.

b) Hai điểm $M,N$ đối xứng nhau qua $Ox$.

**Lời giải**

a) Do $N\in d$ nên $N\left(5t+4;\mathrm{t}\right)$. Điểm $M$ đối xứng với $N$ qua $A$, suy ra $M\left(-18-5t;-2-t\right)$. Mặt khác $M\in\left(C\right)$, nên

$\left(-18-5t+2\right)^2+\left(-2-t-3\right)^2=5$

$\Leftrightarrow 26t^2+170t+276=0$

$\Leftrightarrow t=-3$ hoặc $t=-\dfrac{46}{13}$.

Vậy có hai cặp điểm cần tìm là $M\left(-3;1\right),N\left(-11;-3\right)$ hoặc $M\left(-\dfrac{4}{13};\dfrac{20}{13}\right),N\left(-\dfrac{178}{13};-\dfrac{46}{13}\right)$.

b) Do $N\in d$ nên $N\left(5t+4;t\right)$. Điểm $M$ đối xứng với $N$ qua $Ox$ nên $M\left(5t+4;-t\right)$.

Mặt khác, $M\in\left(C\right)$ nên

$\left(5t+4+2\right)^2+\left(-t-3\right)^2=5$

$\Leftrightarrow 26t^2+66t+40=0$

$\Leftrightarrow t=-1$ hoặc $t=-\dfrac{20}{13}$.

Vậy có hai cặp điểm cần tìm là : $M\left(-1;1\right),N\left(-1;-1\right)$ hoặc $M\left(-\dfrac{48}{13};\dfrac{20}{13}\right),N\left(-\dfrac{48}{13};-\dfrac{20}{13}\right)$.

**Câu 42.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $\left(C\right):\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2=5$ và đường thẳng $d:2x+y+4=0$. Tìm trên $\left(C\right)$ điểm $M$ và trên $d$ điểm $N$ sao cho

a) $MN$ có độ dài nhỏ nhất.

b) $MN$ có độ dài lớn nhất.

**Lời giải**

Đường tròn $(C)$ có tâm $I(2;2)$, bán kính $R=\sqrt{5}$. Ta có

$d(I;d)=\dfrac{|2+4+4|}{\sqrt{4+1}}=2\sqrt{5}>R$.

Do đó $d$ không cắt $(C)$.

Gọi $M_1,M_2$ là đường kính của đường tròn $(C)$ và vuông góc với $d$. Ta thấy với $M$ là một điểm bất kỳ thuộc $(C)$ thì

$\min\{d(M_1,d);d(M_2,d)\}\le d(M,d)\le\max\{d(M_1,d);d(M_2,d)\}$.

Dấu bằng xảy ra khi $M\equiv M_1$ hoặc $M\equiv M_2$.

Đường thẳng $M_1M_2$ đi qua tâm $I$ và vuông góc với $d$ nên có phương trình $x-2y+2=0$.

Tọa độ điểm $M_1,M_2$ thỏa mãn hệ $\begin{cases}x-2y+2=0\\(x-2)^2+(y-2)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$.

Suy ra $M_1(0;1),M_2(4;3)$. Ta có $d(M_1,d)=\sqrt{5}$ và $d(M_2,d)=3\sqrt{5}$.

Tọa độ điểm $M$ cần tìm là hình chiếu vuông góc của tâm $I$ trên $d$.

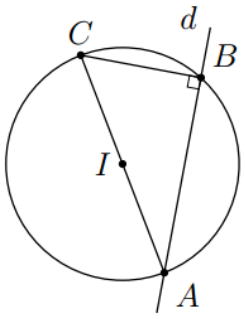
Do đó tọa độ điểm $N$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x+y+4=0\\x-2y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$.

a) Với $M_1(0;1)$ và $N(-2;0)$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán là nhỏ nhất.

b) Với $M_2(4;3)$ và $N(-2;0)$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán là lớn nhất.

**Câu 43.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d:x-5y-2=0$ và đường tròn $(C):x^2+y^2+2x-4y-8=0$. Xác định tọa độ các giao điểm $A,B$ của đường tròn $(C)$ và đường thẳng $d$, biết $A$ có hoành độ dương. Tìm tọa độ điểm $C$ thuộc $(C)$ sao cho tam giác $ABC$ vuông ở $B$.

**Lời giải**




Đường tròn $(C)$ có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=\sqrt{13}$.

Tọa độ giao điểm của $A$ và $B$ là nghiệm của hệ

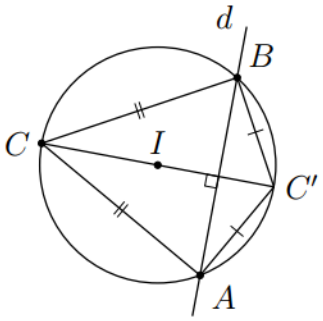
$\begin{cases}x^2+y^2+2x-4y-8=0\\x-5y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}\\\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}\end{array}\right.$

Do $A$ có hoành độ dương nên ta chọn $A(2;0),B(-3;-1)$.

Theo giả thiết, ta có $\widehat{ABC}=90^0$ nên $AC$ là đường kính của đường tròn, tức điểm $C$ đối xứng với điểm $A$ qua tâm $I$, suy ra $C(-4;4)$.

**Câu 44.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: 3x-y-7=0$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=10$. Chứng minh $(d)$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A, B$. Tìm tọa độ điểm $C$ thuộc $(C)$ sao cho tam giác $ABC$ cân tại $C$

**Lời giải**




Đường tròn $(C)$ có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=\sqrt{10}$. Ta có

$d(I,d)=\dfrac{|3-2-7|}{\sqrt{9+1}}=\dfrac{6}{\sqrt{10}}<R$.

Điều đó chứng tỏ $d$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A, B$.

Vì $AB$ là dây cung của $(C)$ nên đường trung trực $\Delta$ của đoạn thẳng $AB$ qua tâm $I$ và vuông góc với $d$ nên $\Delta: x+3y-7=0$.

Tam giác $ABC$ cân tại $C$ nên $C$ thuộc $\Delta$. Hơn nữa $C$ thuộc $(C)$ nên tọa độ điểm $C$ thỏa mãn

hệ $\begin{cases} x+3y-7=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy $C(-2;3)$ hoặc $C(4;1)$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

**Câu 45.** Trong mặt phăng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $d: x+my-2m+3=0$. Gọi $I$ làm tâm của $(C)$. Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A, B$ thỏa mãn :

a) $AB$ lớn nhất.

b) $AB=2$.

c) Diện tích $\Delta IAB$ lớn nhất.

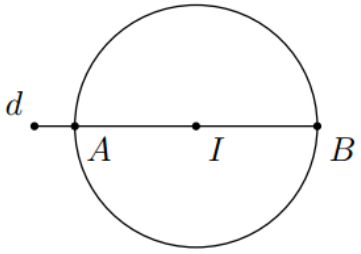
d) Diện tích $\Delta IAB$ bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $AB$ lớn nhất.

**Lời giải**

a) Đường tròn $(C)$ có tâm $I(-2;-2)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Dây cung $AB$ lớn nhất khi và chỉ khi $AB$ là đường kính của $(C)$ nghĩa là đường thẳng $d$ đi qua tâm $I$ nên $-2-2m-2m+3=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $m=\dfrac{1}{4}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.




$$d\left(I,d\right)=d\left(I,AB\right)=IH=\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=1$$

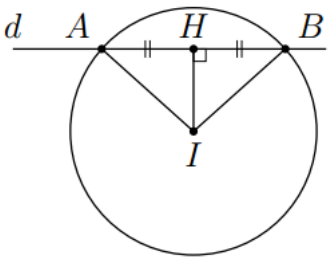
b) Gọi $H$ là trung điểm $AB$. Khi đó $IH\perp AB$ nên $\Leftrightarrow\frac{\left|-2-2m-2m+3\right|}{\sqrt{1+m^2}}=1$

$$\Leftrightarrow\left|1-4m\right|=\sqrt{1+m^2}$$

$$\Leftrightarrow 15m^2-8m=0$$

$\Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=\frac{8}{15}$.

Vậy $m=0$ hoặc $m=\frac{8}{15}$ là các giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu Câu toán.




c) $d$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt khi $d\left(I,d\right)<R$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|2-2m-2m+3\right|}{\sqrt{1+m^2}}<\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|1-4m\right|<\sqrt{2+2m^2}$$

$$\Leftrightarrow 14m^2-8m-1<0\Leftrightarrow\frac{4-\sqrt{30}}{14}<m<\frac{4+\sqrt{30}}{14}.$$

Gọi $H$ là trung điểm $AB$, suy ra $IH\perp AB$.

Ta có $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\frac{1}{2}.R^2.\sin\widehat{AIB}=\sin\widehat{AIB}$.

Do đó $S_{\Delta IAB}$ lớn nhất khi $\sin\widehat{AIB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow\widehat{AIB}=90^0$

Khi đó tam giác $IAB$ vuông cân tại $I$ nên $IH=\frac{IA}{\sqrt{2}}=1\Leftrightarrow d\left(I,d\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\frac{8}{15}\end{array}\right.$

d) Để $d$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt khi $d\left(I,d\right)<R\Leftrightarrow\frac{4-\sqrt{30}}{14}<m<\frac{4+\sqrt{30}}{14}$.

Gọi $H$ là trung điểm $AB$, suy ra $IH\perp AB$. Theo giả thiết Câu toán, ta có

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\frac{1}{2}.R^2.\sin\widehat{AIB}=\sin\widehat{AIB}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\widehat{AIB}=60^0\\\widehat{AIB}=120^0\end{array}\right.$$

Mặt khác, theo giả thiết $AB$ lớn nhất nên $\widehat{AIB}=120^0$. Suy ra $\widehat{IAH}=30^0$.

Trong tam giác vuông $IAH$, ta có $IH = IA.\sin\widehat{IAH} = \sqrt{2}.\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$\Leftrightarrow d\left(I,d\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\left|-2-2m-2m+3\right|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left|1-4m\right| = \sqrt{1+m^2} \Leftrightarrow 31m^2-16m+1=0 \Leftrightarrow m = \frac{8\pm\sqrt{33}}{31}$$

Đối chiếu điều kiện để $d$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt ta được $m = \dfrac{8\pm\sqrt{33}}{31}$.

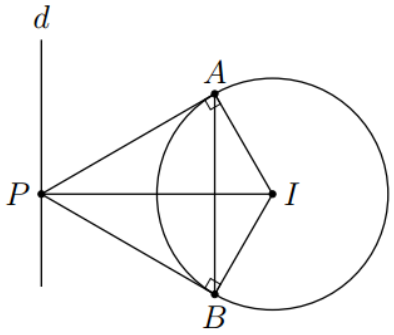
**Câu 46.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $\left(C\right):\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=9$ và đường thẳng $d:3x-4y+m=0$. Tìm $m$ để trên đường thẳng $d$ có duy nhất một điểm $P$ mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến $PA, PB$ tới $\left(C\right)$ ($A, B$ là các tiếp điểm) sao cho :

a) Tam giác $PAB$ đều.

b) Tam giác $PAB$ vuông.

c) Góc giữa hai tiếp tuyến $PA, PB$ bằng $60^0$.

**Lời giải**




a) Đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(1;-2\right)$, bán kính $R=3$.

Tam giác $PAB$ đều nên $\widehat{APB}=60^0$, suy ra $\widehat{API}=30^0$.

Xét tam giác $API$ vuông tại $A$, ta có:

$IP = \dfrac{IA}{\sin\widehat{API}} = 2IA = 6$.

Do đó $P$ thuộc đường tròn $\left(C'\right)$ có tâm $I$, bán kính $R'=IP=6$.

Mặt khác, để trên $d$ có duy nhất một điểm $P$ thỏa yêu cầu Câu toán thì $d$ tiếp xúc với $\left(C'\right)$ nên

$$d\left(I,d\right)=R' \Leftrightarrow \frac{\left|3+8+m\right|}{\sqrt{9+16}}=6 \Leftrightarrow m=19 \text{ hoặc } m=-41.$$

Vậy $m=-19$ hoặc $m=-41$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.

b) Tam giác $PAB$ vuông, suy ra $\widehat{APB}=90^0$. Do đó, tứ giác $PAIB$ là hình vuông, suy ra $IP=IA\sqrt{2}=R\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

Do đó $P$ thuộc đường tròn $\left(C'\right)$ có tâm $I$, bán kính $R'=IP=3\sqrt{2}$.

Mặt khác, để trên $d$ có duy nhất một điểm $P$ thỏa yêu cầu bài toán thì $d$ tiếp xúc với $\left(C'\right)$ nên

$$d\left(I,d\right)=R' \Leftrightarrow \frac{\left|3+8+m\right|}{\sqrt{9+16}}=3\sqrt{2} \Leftrightarrow m=-11\pm15\sqrt{2}.$$

Vậy $m=-11\pm15\sqrt{2}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.

c) Trường hợp 1: $\widehat{APB}=60^0$ (đã làm ở trên)

Trường hợp 2: $\widehat{APB}=120^0$, suy ra $\widehat{API}=60^0$.

Xét tam giác $API$ vuông tại $A$, ta có $IP=\dfrac{IA}{\sin\widehat{API}}=\dfrac{2IA}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

Do đó $P$ thuộc đường tròn $(C')$ có tâm $I$, bán kính $R'=IP=2\sqrt{3}$.

Mặt khác, để trên $d$ có duy nhất một điểm $P$ thỏa yêu cầu Câu toán thì $d$ tiếp xúc với $(C')$ nên

$d(I,d)=R'\Leftrightarrow\dfrac{|3+8+m|}{\sqrt{9+16}}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow m=-11\pm10\sqrt{3}$.

Vậy $m=19$ hoặc $m=-41$ hoặc $m=-11\pm10\sqrt{3}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.

## Dạng 6. Tìm quỹ tích tâm đường tròn

**Phương pháp:**

Phương pháp tìm tập hợp các tâm $I$ của đường tròn $(C)$

- Bước 1. Tìm giá trị của m để tồn tại tâm $I$.
- Bước 2. Tìm toạ độ tâm $I$. Giả sử: I $\begin{cases}x=f(m)\\y=g(m)\end{cases}$.
- Bước 3. Tìm mối liên hệ giữa $x$ và $y$ theo $m$ ta được phương trình $F(x;y)=0$.
- Bước 4. Dựa vào điều kiện của m ở bước 1 để giới hạn miền của $x$ hoặc $y$.
- Bước 5. Tập hợp điểm $I$ là $F(x;y)=0$ cùng với phần giới hạn ở bước 4.

**Câu 47.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho phương trình đường cong $(C)$ có phương trình:

$x^2+y^2-2mx-4(m+1)y+3m+14=0.$

a) Tìm tham số $m$ để $(C)$ là đường tròn.

b) Tìm quỹ tích điểm $I$ là tâm của đường tròn $(C)$.

**Lời giải**

a) Tìm tham số $m$ để $(C)$ là đường tròn.

Điều kiện để $(C)$ là đường tròn : $m^2+4(m+1)^2-3m-14>0\Leftrightarrow5m^2+5m-10>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-2\end{array}\right.(1)$

b) Tìm quỹ tích điểm $I$ là tâm của đường tròn $(C)$.

Tâm $I(m;2m+2)\Rightarrow\begin{cases}x_I=m\\y_I=2m+2\end{cases}\Leftrightarrow y_I=2x_I+2$.

Theo điều kiện (1) (câu a), ta được quỹ tích tâm I của $(C)$ là một phần đường thẳng có phương trình : $y=2x+2$ ứng với $x<-2;x>1$.

**Câu 48.** Trong mặt phẳng $Oxy$, tìm quỹ tích điểm $I$ là tâm của đường tròn $(C)$, biết $(C)$ tiếp xúc với đường thẳng $d:6x-8y+15=0$ và có bán kính $R=3$.

**Lời giải**

Gọi tâm $I(x_I;y_I)$ của đường tròn $(C)$.

$(C)$ tiếp xúc với đường thẳng $d:6x-8y+15=0$ và có bán kính $R=3$, nên:

$$d(I,d)=R\Leftrightarrow\frac{|6x_I-8y_I+15|}{10}=3\Leftrightarrow\begin{bmatrix}6x_I-8y_I-15=0\\6x_I-8y_I+45=0\end{bmatrix}.$$

Quỹ tích tâm $I$ của đường tròn $(C)$ là hai đường thẳng song song có phương trình :
$6x-8y-15=0$ và $6x-8y+45=0$.

**Câu 49.** Trong mặt phẳng $Oxy$, tìm quỹ tích điểm $I$ là tâm của đường tròn $(C)$ có bán kính $R=2$, biết $(C)$tiếp xúc tiếp xúc với đường tròn $(C'):x^2+y^2-4x+6y-3=0$.

**Lời giải**

Gọi tâm $I(x_I;y_I)$ của đường tròn $(C)$.

$(C)$tiếp xúc với $(C')\begin{cases}I'(2;-3)\\R'=4\end{cases}$ và có bán kính $R=2$, nên:

$$II'=R+R'\Leftrightarrow(x_I-2)^2+(y_I+3)^2=36.$$

Vậy quỹ tích tâm $I$ của đường tròn $(C)$ là đường tròn có phương trình :

$$(x-2)^2+(y+3)^2=36$$

**Câu 50.** Trong mặt phẳng $Oxy$, tìm quỹ tích điểm $I$ là tâm của đường tròn $(C)$, biết $(C)$ tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1:2x+3y-6=0,\quad d_2:3x-2y+9=0$.

**Lời giải**

Gọi tâm $I(x_I;y_I)$ của đường tròn $(C)$.

$(C)$tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1:2x+3y-6=0,\quad d_2:3x-2y+9=0$, nên:

$$d(I,d_1)=d(I,d_2)\Leftrightarrow\frac{|2x_I-3y_I+6|}{\sqrt{13}}=\frac{|3x_I-2y_I+9|}{\sqrt{13}}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_I+y_I+3=0\\x_I-y_I+3=0\end{bmatrix}.$$

Quỹ tích tâm $I$ của đường tròn $(C)$ là hai đường thẳng vuông góc có phương trình :
$x+y+3=0$ và $x-y+3=0$.

**Câu 51.** Trong mặt phẳng $Oxy$, tìm quỹ tích điểm $I$ là tâm của đường tròn $(C)$, biết $(C)$tiếp xúc với $Ox$ và cắt $Oy$ tại điểm $A(0;1)$.

**Lời giải**

Gọi tâm $I(x_I;y_I)$ của đường tròn $(C)$.

$(C)$tiếp xúc với $Ox$ và cắt $Oy$ tại điểm $A(0;1)$ nên:

$$d(I,Ox)=AI\Leftrightarrow|y_I|=\sqrt{x_I^2+(y_I-1)^2}\Leftrightarrow y_I=\frac{1}{2}x_I^2+\frac{1}{2}.$$

Quỹ tích tâm $I$ của đường tròn $(C)$ là đường Parabol có phương trình : $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$.

**Câu 52.** Cho $(C): x^2+y^2-2mx-2m^2y-1=0$. Tìm quỹ tích tâm $I$ của đường tròn $(C)$.

**Lời giải**

$(C)$ có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=m; b=m^2; c=-1$

là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow m^2+\left(m^2\right)^2+1>0$

$\Leftrightarrow m^4+m^2+1>0$ (Lđ $\forall m$ )

Khi đó, $(C)$ có tâm $I\begin{cases}x_I=m\\y_I=m^2\end{cases}\Rightarrow y_I=x_I^2\,(*)$ .Tọa độ tâm I thỏa mãn $(*)$ .

Vậy $I$ nằm trên Parabol có phương trình $y=x^2$ .

**Câu 53.** Tìm tập hợp tâm $I$ của đường tròn $(C)$ biết $(C)$ tiếp xúc với 2 đường thẳng $\Delta_1: x+2y-3=0$ và $\Delta_2: x+2y+6=0$.

**Lời giải**

$(C)$ có tâm $I(x_I;y_I)$ . Theo giả thiết $\mathrm{d}(I;\Delta_1)=\mathrm{d}(I;\Delta_2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{|x_I-2y_I-3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|x_I-2y_I+6|}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow |x_I-2y_I-3|=|x_I-2y_I+6|$

$\Leftrightarrow 2x_I-4y_I-9=0(*)$. Tọa độ tâm $I(x_I;y_I)$ thỏa mãn $(*)$

Vậy tâm $I$ nằm trên đường thẳng $2x-4y-9=0$.

**Câu 54.** Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2(m-1)x-4my+3m+11=0$. Tìm quỹ tích tâm $I$ của đường tròn.

**Lời giải**

$(C)$ có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=m-1; b=2m; c=3m+11$

là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow (m-1)^2+(2m)^2-(3m+11)>0$

$\Leftrightarrow 5m^2-5m-10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>2\\m<-1\end{array}\right.$

Khi đó, $(C)$ có tâm $I\begin{cases}x_I=m-1\\y_I=2m\end{cases}\Rightarrow 2x_I-y_I+2=0(*)$ .Tọa độ tâm $I$ thỏa mãn $(*)$ .

Với điều kiện $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\x<-2\end{array}\right.$

Vậy $I$ nằm trên đường thẳng $2x-y+2=0$ với $x>1$ hoặc $x<-2$

**Câu 55.** Tìm tập hợp tâm $I$ của đường tròn $(C)$ biết $(C)$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $(C'): x^2+y^2-4x+6y-3=0$ và có bán kính $R=1$ .

**Lời giải**

$(C')$ có tâm $I'(2;-3)$ và bán kính $R'=4$

$(C)$ có tâm $I(x_I;y_I)$ và bán kính $R=1$

Theo giả thiết ta có $II'=R+R' \Leftrightarrow II'=5 \Leftrightarrow II'^2=25$

$\Leftrightarrow (x_I-2)^2+(y_I+3)^2=25$ $(*)$

Tọa độ tâm $I(x_I;y_I)$ thỏa mãn $(*)$

Vậy quỹ tích tâm $I$ đường tròn $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Nhận dạng phương trình đường tròn

**Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình đường tròn.

**A.** $1<m<2$. **B.** $m<-2$ hoặc $m>-1$.

**C.** $m<-2$ hoặc $m>1$. **D.** $m<1$ hoặc $m>2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0 \quad (1)$

$\Rightarrow a=m+2; b=-2m; c=19m-6.$

Phương trình $(1)$ là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0$

$\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow m<1$ hoặc $m>2$.

**Câu 2.** Trong mặt phẳng $Oxy$, phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

**A.** $x^2+2y^2-4x-8y+1=0$. **B.** $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

**C.** $x^2+y^2-2x-8y+20=0$. **D.** $4x^2+y^2-10x-6y-2=0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Để là phương trình đường tròn thì điều kiện cần là hệ số của $x^2$ và $y^2$ phải bằng nhau nên loại được đáp án A và **D.**

Ta có: $x^2+y^2-2x-8y+20=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-4)^2+3=0$ vô lý.

Ta có: $x^2+y^2-4x+6y-12=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=25$ là phương trình đường tròn tâm $I(2;-3)$, bán kính $R=5$.

**Câu 3.** Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

**A.** $2x^2+y^2-6x-6y-8=0$. **B.** $x^2+2y^2-4x-8y-12=0$.

**C.** $x^2+y^2-2x-8y+18=0$. **D.** $2x^2+2y^2-4x+6y-12=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Biết rằng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của một đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$.

Ta thấy phương trình trong phương án $A$ và $B$ có hệ số của $x^2$, $y^2$ không bằng nhau nên đây không phải là phương trình đường tròn.

Với phương án $C$ có $a^2+b^2-c=1+16-18<0$ nên đây không phải là phương trình đường tròn.

Vậy ta chọn đáp án $D$.

**Câu 4.** Phương trình nào sau đây là phương trình của một đường tròn?

**A.** $x^2+y^2-4xy+2x+8y-3=0$. **B.** $x^2+2y^2-4x+5y-1=0$.

**C.** $x^2+y^2-14x+2y+2018=0$. **D.** $x^2+y^2-4x+5y+2=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương án A: có tích $xy$ nên không phải là phương trình đường tròn.

Phương án B: có hệ số bậc hai không bằng nhau nên không phải là phương trình đường tròn.

Phương án C: ta có $x^2+y^2-14x+2y+2018=0 \Leftrightarrow (x-7)^2+(y+1)^2+1968=0$ không tồn tại $x, y$ nên cũng không phải phương trình đường tròn.

Còn lại, chọn **D.**

**Câu 5.** Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0\,(1)$. Điều kiện của $m$ để (1) là phương trình của đường tròn.

**A.** $m=2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$. **C.** $1<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0\,(1)$ là phương trình của đường tròn khi và chỉ khi

$(m)^2+\left[2(m-2)\right]^2-(6-m)>0 \Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$.

**Dạng 2. Tìm tọa độ tâm, bán kính đường tròn**

**Câu 6.** Trong mặt phẳng $Oxy$, đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+6y-12=0$ có tâm là.

**A.** $I(-2;-3)$. **B.** $I(2;3)$. **C.** $I(4;6)$. **D.** $I(-4;-6)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có phương trình đường tròn là: $(x+2)^2+(y+3)^2=25$.

Vậy tâm đường tròn là: $I(-2;-3)$.

**Câu 7.** Đường tròn $x^2+y^2-10y-24=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

**A.** $49$. **B.** $7$. **C.** $1$. **D.** $\sqrt{29}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đường tròn $x^2+y^2-10y-24=0$ có tâm $I(0;5)$, bán kính $R=\sqrt{0^2+5^2-(-24)}=7$.

**Câu 8.** Xác định tâm và bán kính của đường tròn $(C): (x+1)^2+(y-2)^2=9$.

**A.** Tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$. **B.** Tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=9$.

**C.** Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$. **D.** Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=9$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 9.** Tìm tọa độ tâm $I$ và bán kính $R$ của đường tròn $(C)$: $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

**A.** $I(-1;2); R=4$. **B.** $I(1;-2); R=2$. **C.** $I(-1;2); R=\sqrt{5}$. **D.** $I(1;-2); R=4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$(C)$ có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2-1}=2$.

**Câu 10.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+3)^2=9$. Đường tròn có tâm và bán kính là

**A.** $I(2;3),\ R=9$. **B.** $I(2;-3),\ R=3$. **C.** $I(-3;2),\ R=3$. **D.** $I(-2;3),\ R=3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đường tròn $(C)$ có tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R=3$.

**Câu 11.** Tìm tọa độ tâm $I$ và tính bán kính $R$ của đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-5)^2=9$.

**A.** $I(-2;5),\ R=81$.. **B.** $I(2;-5),\ R=9$.. **C.** $I(2;-5),\ R=3$.. **D.** $I(-2;5),\ R=3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo bài ra ta có tọa độ tâm $I(-2;5)$ và bán kính $R=3$.

**Câu 12.** Đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+4y-3=0$ có tâm $I$, bán kính $R$ là

**A.** $I(-1;2),R=\sqrt{2}$. **B.** $I(-1;2),R=2\sqrt{2}$. **C.** $I(1;-2),R=\sqrt{2}$. **D.** $I(1;-2),R=2\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2-(-3)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

**Dạng 3. Viết phương trình đường tròn**

**Câu 13.** Phương trình đường tròn có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=5$ là

**A.** $x^2+y^2-2x-4y-20=0$. **B.** $x^2+y^2+2x+4y+20=0$.

**C.** $x^2+y^2+2x+4y-20=0$. **D.** $x^2+y^2-2x-4y+20=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình đường tròn có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=5$ là $(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4=25 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y-20=0$.

**Câu 14.** Đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$ có phương trình là

**A.** $x^2+y^2+2x+4y-4=0$.

**B.** $x^2+y^2-2x-4y-4=0$.

**C.** $x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

**D.** $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$ có phương trình là $(x+1)^2+(y-2)^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

**Câu 15.** Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính bằng 3?

**A.** $(x-1)^2+(y+2)^2=9$. **B.** $(x+1)^2+(y+2)^2=9$.

**C.** $(x-1)^2+(y-2)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình đường tròn tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=3$ là: $(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

**Câu 16.** Đường tròn $(C)$ đi qua hai điểm $A(1;1)$, $B(5;3)$ và có tâm $I$ thuộc trục hoành có phương trình là

**A.** $(x+4)^2+y^2=10$. **B.** $(x-4)^2+y^2=10$.

**C.** $(x-4)^2+y^2=\sqrt{10}$. **D.** $(x+4)^2+y^2=\sqrt{10}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $I(x;0)\in Ox$; $IA^2=IB^2 \Leftrightarrow (1-x)^2+1^2=(5-x)^2+3^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+1=x^2-10x+25+9$

$\Leftrightarrow x=4$. Vậy tâm đường tròn là $I(4;0)$ và bán kính $R=IA=\sqrt{(1-4)^2+1^2}=\sqrt{10}$.

Phương trình đường tròn $(C)$ có dạng $(x-4)^2+y^2=10$.

**Câu 17.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, tìm tọa độ tâm $I$ của đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$.

**A.** $I(1;1)$. **B.** $I(0;0)$. **C.** $I(1;2)$. **D.** $I(1;0)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Giả sử phương trình đường tròn đi qua 3 điểm $A,B,C$ có dạng $(C): x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

Thay tọa độ 3 điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$ ta được:

$$\begin{cases} 8b+c=-16 \\ 4a+8b+c=-20 \\ 4a+c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow (C): x^2+y^2-2x-4y=0.$$

Vậy $(C)$ có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

**Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;-1), B(3;2), C(5;-5)$. Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là

**A.** $\left(\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$. **B.** $\left(\frac{47}{10};\frac{13}{10}\right)$. **C.** $\left(-\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$. **D.** $\left(-\frac{47}{10};\frac{13}{10}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

Ta có: $\begin{cases} AI^2=BI^2 \\ AI^2=CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y-2)^2 \\ (x-1)^2+(y+1)^2=(x-5)^2+(y+5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=11 \\ 8x-8y=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{47}{10} \\ y=-\frac{13}{10} \end{cases}$.

$\Rightarrow I\left(\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$.

**Câu 19.** Trong mặt phẳng $Oxy$, đường tròn đi qua ba điểm $A(1;2)$, $B(5;2)$, $C(1;-3)$ có phương trình là.

**A.** $x^2+y^2+25x+19y-49=0$.

**B.** $2x^2+y^2-6x+y-3=0$.

**C.** $x^2+y^2-6x+y-1=0$.

**D.** $x^2+y^2-6x+xy-1=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình đường tròn có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Đường tròn này qua $A,B,C$ nên

$$\begin{cases}1+4-2a-4b+c=0\\25+4-10a-4b+c=0\\1+9-2a+6b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-\dfrac{1}{2}\\c=-1\end{cases}.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2-6x+y-1=0$.

**Câu 20.** Lập phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(3;0),B(0;2)$ và có tâm thuộc đường thẳng $d:x+y=0$.

**A.** $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{13}{2}$.

**B.** $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{13}{2}$.

**C.** $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{13}{2}$.

**D.** $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{13}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$A(3;0)$, $B(0;2)$, $d:x+y=0$.

Gọi $I$ là tâm đường tròn vậy $I(x;-x)$ vì $I\in d$.

$IA^2=IB^2\Leftrightarrow(3-x)^2+x^2=x^2+(2+x)^2\Leftrightarrow-6x+9=4x+4\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$. Vậy $I\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

$IA=\sqrt{\left(3-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ là bán kính đường tròn.

Phương trình đường tròn cần lập là: $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{13}{2}$.

**Câu 21.** Cho tam giác $ABC$ biết $H(3;2)$, $G\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right)$ lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác, đường thẳng $BC$ có phương trình $x+2y-2=0$. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$?

**A.** $(x+1)^2+(y+1)^2=20$.

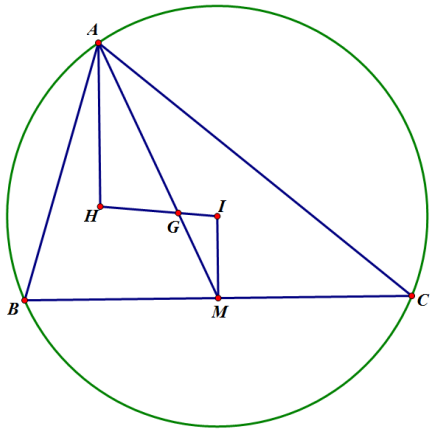
**B.** $(x-2)^2+(y+4)^2=20$.

**C.** $(x-1)^2+(y+3)^2=1$.

**D.** $(x-1)^2+(y-3)^2=25$.

**Lời giải**

**Chọn D**




*) Gọi $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{HI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{HG}\Rightarrow \begin{cases} x_I-3=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}-3\right) \\ y_I-2=\frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}-2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I=1 \\ y_I=3 \end{cases}.$$

(Do đó ta có thể chọn đáp án D luôn mà không cần tính bán kính).

*) Gọi $M$ là trung điểm của $BC \Rightarrow IM \perp BC \Rightarrow IM: 2x-y+1=0$.

$$M=IM\cap BC \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow M\left(0;1\right).$$

Lại có: $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MG} \Rightarrow \begin{cases} x_A=3.\frac{5}{3} \\ y_A-1=3.\left(\frac{8}{3}-1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A=5 \\ y_A=6 \end{cases}.$

Suy ra: bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là $R=IA=5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là $\left(x-1\right)^2+\left(y-3\right)^2=25$.

**Câu 22.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$, trọng tâm $G\left(-1;3\right)$. Gọi $K,M,N$ lần lượt là trung điểm của $AH,AB,AC$. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ biết đường tròn ngoại tiếp tam giác $KMN$ là $\left(C\right): x^2+y^2+4x-4y-17=0$.

**A.** $\left(x-1\right)^2+\left(y-5\right)^2=100$.

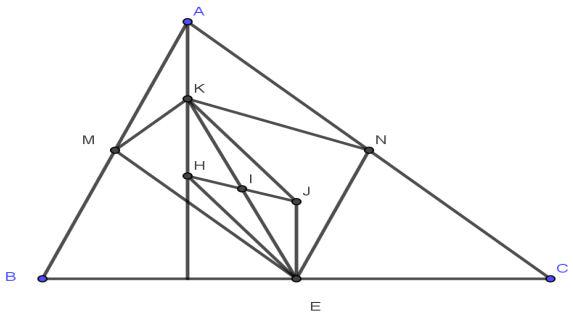
**B.** $\left(x+1\right)^2+\left(y-5\right)^2=100$.

**C.** $\left(x-1\right)^2+\left(y+5\right)^2=100$.

**D.** $\left(x+1\right)^2+\left(y+5\right)^2=100$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $E$ là trung điểm $BC$, $J$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$.

Ta có $\begin{cases} MK \parallel BH \\ ME \parallel AC \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow MK \perp ME \ (1)$, $\begin{cases} KN \parallel CH \\ NE \parallel AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow KN \perp NE (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow KMEN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính $KE$.

Đường tròn $(C): x^2+y^2+4x-4y-17=0$ có tâm $I(-2;2)$ bán kính $r=5 \Rightarrow I$ là trung điểm $KE$.

$KHEJ$ là hình bình hành $\Rightarrow I$ là trung điểm $JH$




Ta có: $\overrightarrow{IJ}=3\overrightarrow{IG} \Rightarrow \begin{cases} x_J+2=3(-1+2) \\ y_J-2=3(3-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_J=1 \\ y_J=5 \end{cases} \Rightarrow J(1;5)$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ là $R=JA=2IK=2r=10$.

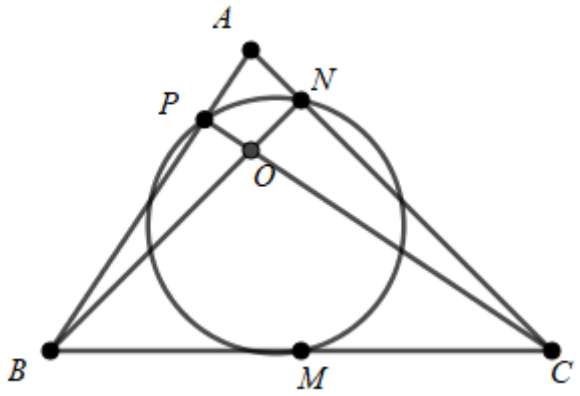
Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ là: $(x-1)^2+(y-5)^2=100$.

**Câu 23.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có trực tâm $O$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$; $N$, $P$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ $B$ và $C$. Đường tròn đi qua ba điểm $M$, $N$, $P$ có phương trình là $(T): (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là:

**A.** $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. **B.** $x^2+(y-1)^2=25$.

**C.** $x^2+(y-1)^2=50$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

**Lời giải**




Ta có $M$ là trung điểm của $BC$; $N$, $P$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ $B$ và $C$. Đường tròn đi qua ba điểm $M$, $N$, $P$ là đường tròn Euler. Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ chính là ảnh của đường tròn Euler qua phép vị tự tâm là $O$, tỷ số $k=2$.

Gọi $I$ và $I'$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $MNP$ và tam giác $ABC$.

Gọi $R$ và $R'$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $MNP$ và tam giác $ABC$.

Ta có $I\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ và do đó $\overrightarrow{OI'}=2\overrightarrow{OI} \Rightarrow I'(2;-1)$.

Mặt khác $R=\frac{5}{2} \Rightarrow R'=5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là: $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

Nhận xét: Đề bài này rất khó đối với học sinh nếu không biết đến đường tròn Euler.

**Câu 24.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, phương trình của đường tròn có tâm là gốc tọa độ $O$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ là

**A.** $x^2+y^2=2$. **B.** $x^2+y^2=\sqrt{2}$.

**C.** $(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đường tròn $(C)$ có tâm $O$, bán kính $R$ tiếp xúc với $\Delta$ nên có:

$$R=d(O;\Delta)=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Phương trình đường tròn $(C)$: $x^2+y^2=2$.

**Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ $(Oxy)$, cho đường tròn $(S)$ có tâm $I$ nằm trên đường thẳng $y=-x$, bán kính $R=3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ. Lập phương trình của $(S)$, biết hoành độ tâm $I$ là số dương.

**A.** $(x-3)^2+(y-3)^2=9$. **B.** $(x-3)^2+(y+3)^2=9$.

**C.** $(x-3)^2-(y-3)^2=9$. **D.** $(x+3)^2+(y+3)^2=9$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Do tâm $I$ nằm trên đường thẳng $y=-x\Rightarrow I(a;-a)$, điều kiện $a>0$.

Đường tròn $(S)$ có bán kính $R=3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ nên:

$$d(I;Ox)=d(I;Oy)=3\Leftrightarrow|a|=3\Leftrightarrow a=3(n)\vee a=-3(l)\Rightarrow I(3;-3).$$

Vậy phương trình $(S):(x-3)^2+(y+3)^2=9$.

**Câu 26.** Một đường tròn có tâm $I(3;4)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x+4y-10=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{5}{3}$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đường tròn tâm $I(3;4)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x+4y-10=0$ nên bán kính đường tròn chính là khoảng cách từ tâm $I(3;4)$ tới đường thẳng $\Delta:3x+4y-10=0$.

Ta có: $R=d(I,\Delta)=\frac{|3.3+4.4-10|}{\sqrt{3^3+4^2}}=\frac{15}{5}=3$.

**Câu 27.** Trong hệ trục tọa độ $Oxy$, cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$. Đường tròn tâm $I$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d)$ có phương trình

**A.** $(x-1)^2+(y-1)^2=5$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=25$.

**C.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đường tròn tâm $I$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d)$ có bán kính $R=d(I,d)=\frac{|3.1+4.1-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

Vậy đường tròn có phương trình là: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

**Câu 28.** Trên hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$ có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó có phương trình là $3x+4y-9=0$. Viết phương trình của đường tròn $(C)$.

**A.** $(x+3)^2+(y-2)^2=2$. **B.** $(x-3)^2+(y+2)^2=2$.

**C.** $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ **D.** $(x+3)^2+(y-2)^2=4$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Vì đường tròn $(C)$ có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó là đường thẳng $\Delta$ có phương trình là $3x+4y-9=0$ nên bán kính của đường tròn là $R=d(I,\Delta)=\frac{|3.(-3)+4.2-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x+3)^2+(y-2)^2=4$

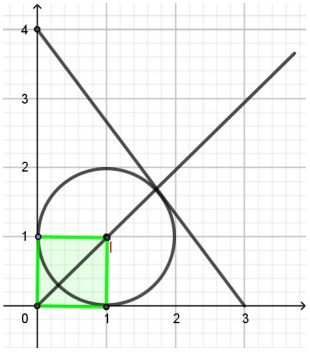
**Câu 29.** Trên mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$ có phương trình

**A.** $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2-4x+4=0$.

**C.** $x^2+y^2=2$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Vì các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nên tam giác $OAB$ cũng nằm trong góc phần tư thứ nhất. Do vậy gọi tâm đường tròn nội tiếp là $I(a,b)$ thì $a>0, b>0$.

Theo đề ra ta có: $d(I;Ox)=d(I;Oy)=d(I;AB)$.

Phương trình theo đoạn chắn của $AB$ là: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ hay $4x+3y-12=0$.

Do vậy ta có: $\begin{cases}|a|=|b|\\|4a+3b-12|=5|a|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|=|b|\\\left[\begin{array}{l}7a-12=5a\\7a-12=-5a\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b>0\\\left[\begin{array}{l}a=6\ (l)\\a=1\end{array}\right.\end{cases}$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

**Câu 30.** Cho hai điểm $A(3;0)$, $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$ có phương trình là

**A.** $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

**C.** $x^2+y^2-6x-8y+25=0$. **D.** $x^2+y^2=2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $OA=3$, $OB=4$, $AB=5$.

Gọi $I(x_I;y_I)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$.

Từ hệ thức $AB.\overrightarrow{IO}+OB.\overrightarrow{IA}+OA.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (Chứng minh) ta được

$$\begin{cases}x_I=\dfrac{AB.x_O+OB.x_A+OA.x_B}{AB+OB+OA}=\dfrac{4.3}{5+4+3}=1\\y_I=\dfrac{AB.y_O+OB.y_A+OA.y_B}{AB+OB+OA}=\dfrac{3.4}{5+4+3}=1\end{cases}\Rightarrow I(1;1)$$

Mặt khác tam giác $OAB$ vuông tại O với $r$ là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác thì

$r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{\frac{1}{2}OA.OB}{\frac{OA+OB+AB}{2}}=\dfrac{3.4}{3+4+5}=1$ ($S,p$ lần lượt là diện tích và nửa chu vi tam giác).

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$ là $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

hay $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

## Dạng 4. Tương giao (tiếp tuyến) của đường thẳng và đường tròn

**Câu 31.** Đường tròn $x^2+y^2-1=0$ tiếp xúc với đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

**A.** $3x-4y+5=0$ **B.** $x+y=0$

**C.** $3x+4y-1=0$ **D.** $x+y-1=0$

**Lời giải**

**Chọn A**

$x^2+y^2-1=0$ có tâm $O(0;0), R=1$.

*Điều kiện để đường thẳng tiếp xúc với đường tròn là khoảng cách từ tâm tới đường thẳng bằng bán kính.*

Xét đáp án A:

$\Delta: 3x-4y+5=0\Rightarrow d(O,\Delta)=\dfrac{|3.0-4.0+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1=R\Rightarrow\Delta$ tiếp xúc với đường tròn.

**Câu 32.** Đường tròn nào sau đây tiếp xúc với trục Ox:

**A.** $x^2+y^2-10x=0$. **B.** $x^2+y^2-5=0$.

**C.** $x^2+y^2-10x-2y+1=0$. **D.** $x^2+y^2+6x+5y+9=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đường tròn $(C)$ tiếp xúc với trục Ox khi $d(I,\text{Ox})=R$ với $I$ và $R$ lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn $(C)$.

Đường tròn: $x^2+y^2-10x=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+y^2=25$ có tâm $I(5;0)$, bán kính $R=5$, $d(\text{I,Ox})=0$. Suy ra: $d(I,\text{Ox})\neq R$. Vậy $(C)$ không tiếp xúc với trục Ox.

$\Rightarrow$ không phải là phương trình đường tròn.

.Xét phương trình đường tròn: $x^2+y^2-5=0$ có $I(0;0)$ và $R=\sqrt{5}$, $d(\text{I,Ox})=0$.

Suy ra: $d(I,\text{Ox})\neq R$. Vậy $(C)$ không tiếp xúc với trục Ox.

Xét phương trình đường tròn: $x^2+y^2-10x-2y+1=0$ có $I(5;1)$ và $R=5, d(\text{I,Ox})=1$.

Suy ra: $d(I,\text{Ox})\neq R$. Vậy $(C)$ không tiếp xúc với trục Ox.

Xét phương trình đường tròn: $x^2+y^2+6x+5y+9=0$ có $I\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$ và $R=\frac{5}{2}, d(\text{I,Ox})=\frac{5}{2}$.

Suy ra: $d(I,\text{Ox})=R$. Vậy $(C)$ tiếp xúc với trục Ox

**Câu 33.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Viết phương trình tiếp tuyến $d$ của đường tròn $(C)$ biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: 3x+4y+1=0$.

**A.** $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$; $3x+4y-5\sqrt{2}+11=0$.

**B.** $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

**C.** $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y+5\sqrt{2}+11=0$.

**D.** $3x+4y-5\sqrt{2}+11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=2.$

Do đó đường tròn có tâm $I=(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Do $d$ song song với đường thẳng $\Delta$ nên $d$ có phương trình là $3x+4y+k=0$, $(k\neq 1)$.

Ta có $d(I;d)=R \Leftrightarrow \frac{|11+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow |11+k|=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}11+k=5\sqrt{2}\\11+k=-5\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k=5\sqrt{2}-11\\k=-5\sqrt{2}-11\end{array}\right.$.

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến cần tìm là $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

**Câu 34.** Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-4=0$ và điểm $A(1;5)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây là tiếp tuyến của đường tròn $(C)$ tại điểm $A$.

**A.** $y-5=0$. **B.** $y+5=0$. **C.** $x+y-5=0$. **D.** $x-y-5=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đường tròn $(C)$ có tâm $I(1;2) \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(0;3)$.

Gọi $d$ là tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $A$, khi đó $d$ đi qua $A$ và nhận vectơ $\overrightarrow{IA}$ là một VTPT.

Chọn một VTPT của $d$ là $\overrightarrow{n_d}=(0;1)$.

Vậy phương trình đường thẳng $d$ là $y-5=0$.

**Câu 35.** Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-4=0$ và điểm $A(-1;2)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây đi qua $A$ và là tiếp tuyến của đường tròn $(C)$?

**A.** $4x-3y+10=0$. **B.** $6x+y+4=0$. **C.** $3x+4y+10=0$. **D.** $3x-4y+11=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đường tròn $(C)$ có tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$ và có bán kính $R=2$.

Họ đường thẳng $\Delta$ qua $A(-1;2):a(x+1)+b(y-2)=0$, với $a^2+b^2\neq 0$.

Điều kiện tiếp xúc $d(O;\Delta)=R$ hay

$$\frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\Leftrightarrow (a-2b)^2=4(a^2+b^2)\Leftrightarrow 3a^2+4ab=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\3a=-4b\end{array}\right.$$

Với $a=0$, chọn $b=1$ ta có $\Delta_1:y-2=0$.

Với $3a=-4b$, chọn $a=4$ và $b=-3$ ta có $\Delta_2:4(x+1)-3(y-2)=0\Leftrightarrow 4x-3y+10=0$.

**Nhận xét:** Thực ra bài này khi thay tọa độ điểm $A(-1;2)$ vào các đường thẳng ở các phương án thì ta loại C. và D. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đến đường thẳng thì chỉ có phương án A. thỏa.

**Câu 36.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(C)$ song song với đường thẳng $\Delta:4x-3y+2=0$ là

**A.** $4x-3y+18=0$. **B.** $4x-3y+18=0$.

**C.** $4x-3y+18=0;4x-3y-2=0$. **D.** $4x-3y-18=0;4x-3y+2=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$ có tâm $I(1;4)$ và bán kính $R=2$.

Gọi $d$ là tiếp tuyến của $(C)$.

Vì $d//\Delta$ nên đường thẳng $d:4x-3y+m=0(m\neq 2)$.

$$d \text{ là tiếp tuyến của } (C)\Leftrightarrow d(I;(d))=R\Leftrightarrow \frac{|4.1-3.4+m|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$$

$$\Leftrightarrow |m-8|=10\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=18\\m=-2\end{array}\right. \text{(thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến cần tìm : $4x-3y+18=0;4x-3y-2=0$.

**Câu 37.** Số tiếp tuyến chung của 2 đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+4y+1=0$ và $(C'):x^2+y^2+6x-8y+20=0$ là

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+4y+1=0$ có tâm $I(1;-2)$ bán kính $R=2$.

Đường tròn $(C'):x^2+y^2+6x-8y+20=0$ có tâm $I'(-3;4)$ bán kính $R'=\sqrt{5}$.

$II'=2\sqrt{13}$.

Vậy $II' > R + R'$ nên 2 đường tròn không có điểm chung suy ra 2 đường tròn có 4 tiếp tuyến chung.

**Câu 38.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+4)^2=25$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d:3x-4y+5=0$.

**A.** $4x+3y+29=0$. **B.** $4x+3y+29=0$ hoặc $4x+3y-21=0$.

**C.** $4x-3y+5=0$ hoặc $4x-3y-45=0$ **D.** $4x+3y+5=0$ hoặc $4x+3y+3=0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+4)^2=25$ có tâm $I(2;-4)$, bán kính $R=5$.

Đường thẳng $\Delta$ vuông góc với đường thẳng $d:3x-4y+5=0$ có phương trình dạng: $4x+3y+c=0$

$\Delta$ là tiếp tuyến của đường tròn $(C)$ khi và chỉ khi: $d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|4.2+3.(-4)+c|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5 \Leftrightarrow |c-4|=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c-4=25 \\ c-4=-25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=29 \\ c=-21 \end{array}\right.$. Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $4x+3y+29=0$ và $4x+3y-21=0$.

**Câu 39.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)$có phương trình $x^2+y^2-2x+2y-3=0$. Từ điểm $A(1;1)$kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đường tròn $(C)$

**A.** 1. **B.** 2. **C.** vô số. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn D**

$(C)$ có tâm $I(1;-1)$ bán kính R=$\sqrt{1^2+(-1)^2-(-3)}=\sqrt{5}$

Vì $IA=2<R$ nên A nằm bên trong $(C)$.Vì vậy không kẻ được tiếp tuyến nào tới đường tròn $(C)$.

**Câu 40.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(C)$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta:4x-3y+2=0$ là

**A.** $4x-3y+18=0$ và $-4x-3y-2=0$. **B.** $4x-3y+18=0$ và $4x-3y-2=0$.

**C.** $-4x-3y+18=0$ và $4x-3y-2=0$. **D.** $-4x+3y-18=0$ và $-4x-3y-2=0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$ có tâm $I(1;4)$ và bán kính $R=2$.

Gọi $d$ là tiếp tuyến của $(C)$.

Vì $d//\Delta$ nên đường thẳng $d:4x-3y+m=0(m\neq 2)$.

$d$ là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow d(I;(d))=R \Leftrightarrow \dfrac{|4.1-3.4+m|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$

$\Leftrightarrow |m-8|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=18 \\ m=-2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

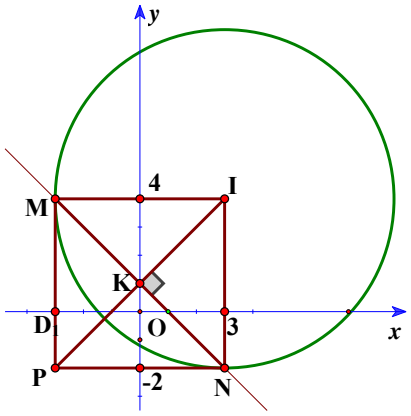
Vậy có 2 tiếp tuyến cần tìm : $4x-3y+18=0; 4x-3y-2=0$.

**Câu 41.** Trên mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho điểm $P(-3;-2)$ và đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-4)^2=36$. Từ điểm $P$ kẻ các tiếp tuyến $PM$ và $PN$ tới đường tròn $(C)$, với $M$, $N$ là các tiếp điểm. Phương trình đường thẳng $MN$ là

**A.** $x+y+1=0$. **B.** $x-y-1=0$. **C.** $x-y+1=0$. **D.** $x+y-1=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $I$ là tâm của đường tròn, ta có tọa độ tâm $I(3;4)$.

Theo đề ra ta có tứ giác $IMPN$ là hình vuông, nên đường thẳng $MN$ nhận $\overrightarrow{IP}=(-6;-6)$ làm VTPT, đồng thời đường thẳng $MN$ đi qua trung điểm $K(0;1)$ của $IP$. Vậy phương trình đường thẳng $MN$: $1.(x-0)+1.(y-1)=0$ hay $x+y-1=0$.

**Câu 42.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $M(-3;1)$ và đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-6y+6=0$. Gọi $T_1$, $T_2$ là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ $M$ đến (C). Tính khoảng cách từ $O$ đến đường thẳng $T_1T_2$.

**A.** $5$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$+(C):x^2+y^2-2x-6y+6=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-3)^2=4$ suy ra (C ) có tâm I( 1;3) và R = 2

+ Phương trình đường thẳng $d$ đi qua $M(-3;1)$ có phương trình: $A(x+3)+B(y-1)=0$.

$d$ là tiếp tuyến với đường tròn khi và chỉ khi $d(I;d)=R$.

$\Rightarrow$ ta có phương trình: $\dfrac{|A+3B+3A-B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2\Leftrightarrow 3A^2+4AB=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=0\\3A=-4B\end{array}\right.$

+ Với $A=0$, chọn $B=1$, phương trình tiếp tuyến thứ nhất là $(d_1):y=1$.

Thế $y=1$ vào $(C):x^2+y^2-2x-6y+6=0$, ta được tiếp điểm là $T_1(1;1)$.

+ Với $3A=-4B$, chọn $A=-4;B=3$, phương trình tiếp tuyến thứ hai là $(d_2):-4x+3y-15=0$

Tiếp điểm $T_2\left(x;\dfrac{4x}{3}+5\right)\in(C)$ nên $(x-1)^2+\left(\dfrac{4x}{3}+5-3\right)^2=4\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}\Rightarrow T_2\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{21}{5}\right)$.

+ Phương trình đường thẳng $T_1T_2:2(x-1)+1(y-1)=0\Leftrightarrow 2x+y-3=0$.

+ Khoảng cách từ $O$ đến đường thẳng $T_1T_2$ là: $d(0;T_1T_2)=\dfrac{|-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

**Câu 43.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

**A.** Đường tròn $(C_1)$ có tâm $I_1(-1;-2)$ và bán kính $R_1=3$.

**B.** Đường tròn $(C_2)$ có tâm $I_2(2;2)$ và bán kính $R_2=2$.

**C.** Hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ không có điểm chung.

**D.** Hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ tiếp xúc với nhau.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta thấy đường tròn $(C_1)$ có tâm $I(-1;-2)$ và bán kính $R_1=3$. Đường tròn $(C_2)$ có tâm $I_2(2;2)$ và bán kính $R_2=2$.

Khi đó: $5=R_1+R_2=I_1I_2=\sqrt{(2+1)^2+(2+2)^2}=5\Rightarrow(C_1)$ và $(C_2)$ tiếp xúc nhau.

**Câu 44.** Tìm giao điểm 2 đường tròn $(C_1):x^2+y^2-4=0$ và $(C_2):x^2+y^2-4x-4y+4=0.$

**A.** $(2;2)$ và $(-2;-2)$. **B.** $(0;2)$ và $(0;-2)$. **C.** $(2;0)$ và $(-2;0)$. **D.** $(2;0)$ và $(0;2)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Giao điểm 2 đường tròn là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ x^2+y^2-4x-4y+4=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 4x+4y=8 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x=2-y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (2-y)^2+y^2=4 \\ x=2-y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2y^2-4y=0 \\ x=2-y \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy giao điểm 2 đường tròn là: $(2;0)$ và $(0;2)$.

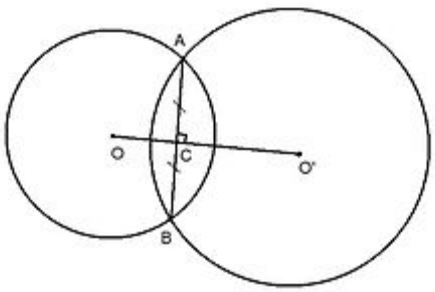
**Câu 45.** Trong mặt phẳng với hệ trục $Oxy$, cho hai đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=4$ và $(C'):(x-4)^2+(y-3)^2=16$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A$ và $B$. Lập phương trình đường thẳng $AB$

**A.** $x+y-2=0$. **B.** $x-y+2.=0$ **C.** $x+y+2=0$. **D.** $x-y-2=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1:** Xét hệ



$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\(x-4)^2+(y-3)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-3=0\\x^2+y^2-8x-6y+9=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\x^2+(2-x)^2-2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\2x^2-6x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2},y=\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\\x=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2},y=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\end{cases}$$

Suy ra $A\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2},\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2},\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$.

$(C)$ có tâm $O(1;0)$, $(C')$ có tâm $O'(4;3)\Rightarrow\overrightarrow{OO'}=(3;3)$

Nên đường thẳng $AB$ qua $A$ và nhận $\vec{n}(1;1)$ là vécto pháp tuyến.

Phương trình: $1\left(x-\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)+1\left(y-\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right)=0\Leftrightarrow x+y-2=0$. Chọn $A$.

**Cách 2:** Giả sử hai đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=4$ và $(C'):(x-4)^2+(y-3)^2=16$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A$ và $B$ khi đó tọa độ của $A$ và thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\(x-4)^2+(y-3)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-3=0 & (1)\\x^2+y^2-8x-6y+9=0 & (2)\end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $6x+6y-12=0\Leftrightarrow x+y-2=0$ là phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm $A$ và $B$

**Câu 46.** Cho đường thẳng $\Delta:3x-4y-19=0$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=25$. Biết đường thẳng $\Delta$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A$ và $B$, khi đó độ dài đoạn thẳng $AB$ là

**A.** 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ $\Delta:3x-4y-19=0\Rightarrow y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{19}{4}(1)$.

Thế $(1)$ vào $(C)$ ta được

$$(x-1)^2+\left(\frac{3}{4}x-\frac{23}{4}\right)^2=25$$

$$\Leftrightarrow\frac{25}{16}x^2-\frac{85}{8}x+\frac{145}{16}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{29}{5}.\end{array}\right.$$

+) $x_A=1\Rightarrow y_A=-4\Rightarrow A(1;-4)$.

+) $x_B=\dfrac{29}{5}\Rightarrow y_B=-\dfrac{2}{5}\Rightarrow B\left(\dfrac{29}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$.

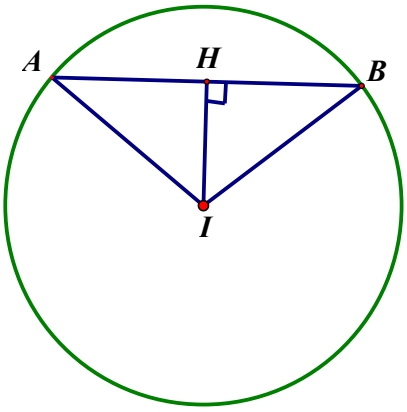
Độ dài đoạn thẳng $AB=\sqrt{\left(\dfrac{29}{5}-1\right)^2+\left(-\dfrac{2}{5}+4\right)^2}=6$.

**Câu 47.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho đường tròn $(C)$ có tâm $I(1;-1)$ bán kính $R=5$. Biết rằng đường thẳng $(d):3x-4y+8=0$ cắt đường tròn $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A,B$. Tính độ dài đoạn thẳng $AB$.

**A.** $AB=8$. **B.** $AB=4$. **C.** $AB=3$.. **D.** $AB=6$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $H$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$. Ta có $IH\perp AB$ và

$IH=d(I;AB)=\dfrac{|3.1-4.(-1)+8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$.

Xét tam giác vuông $AHI$ ta có: $HA^2=IA^2-IH^2=5^2-3^2=16\Rightarrow HA=4\Rightarrow AB=2HA=8$

**Câu 48.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$ có phương trình $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ và đường thẳng $d:3x+4y+7=0$. Gọi $A,B$ là các giao điểm của đường thẳng $d$ với đường tròn $(C)$. Tính độ dài dây cung $AB$.

**A.** $AB=\sqrt{3}$. **B.** $AB=2\sqrt{5}$. **C.** $AB=2\sqrt{3}$. **D.** $AB=4$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đường tròn $(C)$ có tâm $I(2;-2)$ bán kính $R=2$.

$d(I,d)=\dfrac{|3.2+4.(-2)+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1<R=2$ nên $d$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt.

Gọi $A,B$ là các giao điểm của đường thẳng $d$ với đường tròn $(C)$.

$AB=2\sqrt{R^2-d^2(I,d)}=2\sqrt{3}$.

**Câu 49.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho điểm $A(3;1)$, đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ đi qua $A$ và cắt đường tròn $(C)$ tại hai điểm $B$, $C$ sao cho $BC=2\sqrt{2}$.

**A.** $d:x+2y-5=0$. **B.** $d:x-2y-5=0$. **C.** $d:x+2y+5=0$. **D.** $d:x-2y+5=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đường tròn $(C)$có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2-3}=\sqrt{2}$.

Theo giả thiết đường thẳng $d$ đi qua $A$ và cắt đường tròn $(C)$ tại hai điểm $B$, $C$ sao cho $BC = 2\sqrt{2}$.

Vì $BC = 2\sqrt{2} = 2R$ nên $BC$ là đường kính của đường tròn $(C)$ suy ra đường thẳng $d$ đi qua tâm $I(1;2)$

Ta chọn: $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{IA} = (2;-1) \Rightarrow \overrightarrow{n_d} = (1;2)$.

Vậy đường thẳng $d$ đi qua $A(3;1)$ và có VTPT $\overrightarrow{n_d} = (1;2)$ nên phương trình tổng quát của đường thẳng $d$ là: $1(x-3)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0$.

**Câu 50.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường thẳng $d'$ đi qua gốc tọa độ và tạo với đường thẳng nối tâm của hai đường tròn một góc bằng $45°$.

**A.** $d': x-7y=0$ hoặc $d': 7x+y=0$.
**B.** $d': x+7y=0$ hoặc $d': 7x+y=0$.
**C.** $d': x+7y=0$ hoặc $d': 7x-y=0$.
**D.** $d': x-7y=0$ hoặc $d': 7x-y=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tọa độ tâm $I_1$ của đường tròn $(C_1)$ là: $I_1(-1;-2)$.

Tọa độ tâm $I_2$ của đường tròn $(C_1)$ là: $I_2(2;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{I_1I_2}(3;4)$. Gọi $d, d'$ lần lượt là đường thẳng nối tâm của hai đường tròn đã cho và đường thẳng cần lập. Chọn một vectơ pháp tuyến của đường thẳng $d$ là: $\overrightarrow{n_d}(4;-3)$. Gọi $\overrightarrow{n_{d'}}(a;b)$, $a^2+b^2 \neq 0$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng $d'$.

Theo đề $\cos(d,d') = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left|\cos\left(\overrightarrow{n_d},\overrightarrow{n_{d'}}\right)\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|4a-3b|}{\sqrt{3^2+4^2}.\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\Leftrightarrow 7a^2-48ab-7b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=7b\neq 0 \\ a=-\dfrac{1}{7}b\neq 0 \end{array}\right.$.

Với $a=-\dfrac{1}{7}b\neq 0$, chọn $b=-7 \Rightarrow a=1$. Phương trình đường thẳng $d': x-7y=0$.

Với $a=7b\neq 0$, chọn $b=1 \Rightarrow a=7$. Phương trình đường thẳng $d': 7x+y=0$.

**Câu 51.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho điểm $I(1;2)$ và đường thẳng $(d): 2x+y-5=0$. Biết rằng có hai điểm $M_1, M_2$ thuộc $(d)$ sao cho $IM_1 = IM_2 = \sqrt{10}$. Tổng các hoành độ của $M_1$ và $M_2$ là

**A.** $\dfrac{7}{5}$.
**B.** $\dfrac{14}{5}$.
**C.** 2.
**D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\begin{cases} IM_1 = IM_2 = \sqrt{10} \\ I(1;2) \end{cases} \Rightarrow M_1, M_2 \in (C): (x-1)^2+(y-2)^2 = 10.$

Mặt khác, $M_1$, $M_2$ thuộc $(d): 2x+y-5=0$ nên ta có tọa độ $M_1$, $M_2$ là nghiệm của hệ

$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=10 & (1) \\ 2x+y-5=0 & (2) \end{cases}$.

$(2) \Leftrightarrow y=-2x+5$, thay vào $(1)$ ta có $5x^2-14x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{14}{5}. \end{array}\right.$

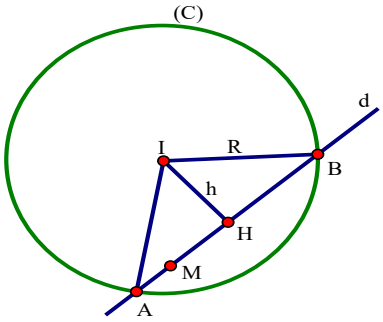
Gọi $x_1, x_2$ lần lượt là hoành độ của $M_1$ và $M_2 \Rightarrow x_1+x_2=0+\dfrac{14}{5}=\dfrac{14}{5}.$

**Câu 52.** Trong hệ tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$ có phương trình: $x^2+y^2-4x+2y-15=0$. $I$ là tâm $(C)$, đường thẳng $d$ đi qua $M(1;-3)$ cắt $(C)$ tại $A, B$. Biết tam giác $IAB$ có diện tích là 8. Phương trình đường thẳng $d$ là: $x+by+c=0$. Tính $b+c$

**A.** 8. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn B**




$(C)$ có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Đặt $h=d(I,AB)$. Ta có: $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}h.AB=8 \Rightarrow h.AB=16.$

Mặt khác: $R^2=h^2+\dfrac{AB^2}{4}=20$

Suy ra: $\left\{\begin{array}{l} h=4 \\ AB=4 \end{array}\right.; \left\{\begin{array}{l} h=2 \\ AB=8 \end{array}\right.$

Vì $d$ đi qua $M(1;-3)$ nên $1-3b+c=0 \Rightarrow 3b-c=1 \Rightarrow c=3b-1$

Với $h=4=\dfrac{|2-b+c|}{\sqrt{1+b^2}}=\dfrac{|2-b+3b-1|}{\sqrt{1+b^2}}=\dfrac{|1+2b|}{\sqrt{1+b^2}} \Rightarrow b \in \Phi$

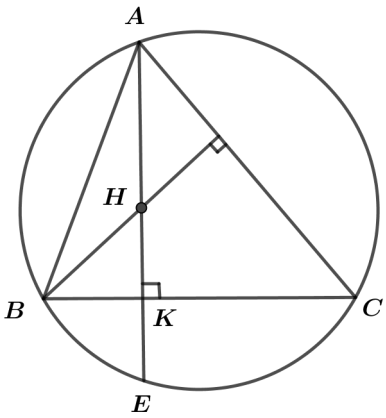
Với $h=2=\dfrac{|2-b+c|}{\sqrt{1+b^2}}=\dfrac{|2-b+3b-1|}{\sqrt{1+b^2}}=\dfrac{|1+2b|}{\sqrt{1+b^2}} \Rightarrow b=\dfrac{3}{4} \Rightarrow c=\dfrac{5}{4} \Rightarrow b+c=2.$

**Câu 53.** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho tam giác $ABC$ có đỉnh $A(5;5)$, trực tâm $H(-1;13)$, đường tròn ngoài tiếp tam giác có phương trình $x^2+y^2=50$. Biết tọa độ đỉnh $C(a;b)$, với $a<0$. Tổng $a+b$ bằng

**A.** $-8$. **B.** $8$. **C.** $6$. **D.** $-6$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $K$ là chân đường cao hạ từ $A$ của tam giác $ABC$, gọi $E$ là điểm đối xứng với $H$ qua $K$ suy ra $E$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ (Tính chất này đã học ở cấp 2).

Ta có $\overrightarrow{AH}=(-6;8)$, chọn $\overrightarrow{u_{AH}}=(3;-4)$.

Phương trình đường thẳng $AH$ qua $A$ ở dạng tham số $\begin{cases}x=5+3t\\y=5-4t\end{cases}$

$K\in AH$ suy ra tọa độ điểm $K$ có dạng $K(5+3t;5-4t)$

$H$ và $E$ đối xứng nhau qua $K$ suy ra tọa độ $E$ theo $t$ là $E(11+6t;-3-8t)$

$$\begin{aligned}E\in(C) &\Rightarrow (11+6t)^2+(-3-8t)^2=50\\ &\Leftrightarrow 5t^2+9t+4=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\t=\dfrac{-4}{5}\end{array}\right.\end{aligned}$$

□ Với $t=-1$, $E(5;5)$ (loại vì $E\equiv A$)

□ Với $t=\dfrac{-4}{5}$, $E\left(\dfrac{31}{5};\dfrac{17}{5}\right)$, $K\left(\dfrac{13}{5};\dfrac{41}{5}\right)$

Phương trình đường thẳng $BC$ có $\overrightarrow{u_{BC}}=\overrightarrow{n_{AH}}=(4;3)$ và qua điểm $K$ có phương trình tham số

$$\begin{cases}x=\dfrac{13}{5}+4t\\y=\dfrac{41}{5}+3t\end{cases}\Rightarrow C\in BC\Rightarrow C\left(\frac{13}{5}+4t;\frac{41}{5}+3t\right).$$

$$\begin{aligned}C\in(C) &\Rightarrow \left(\frac{13}{5}+4t\right)^2+\left(\frac{41}{5}+3t\right)^2=50\\ &\Leftrightarrow 25t^2+70t+24=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{2}{5}\Rightarrow C(1;7)\Rightarrow (KTM)\\t=\dfrac{-12}{5}\Rightarrow C(-7;1)\end{array}\right.\end{aligned}$$

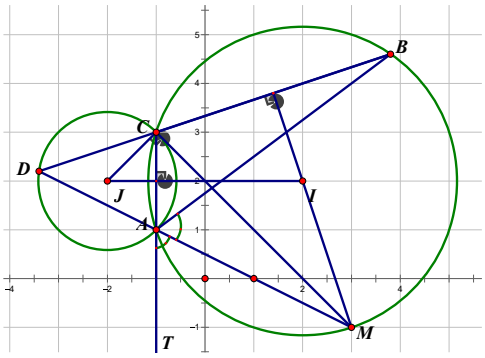
Vậy $C(a;b)=C(-7;1)\Rightarrow a+b=-6$.

**Câu 54.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn tâm $I(2;\,2)$, điểm $D$ là chân đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng $AD$ cắt đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ tại điểm thứ hai là $M$ (khác $A$). Biết điểm $J(-2;\,2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ACD$ và phương trình đường thẳng $CM$ là: $x+y-2=0$. Tìm tổng hoành độ của các đỉnh $A$, $B$, $C$ của tam giác $ABC$.

**A.** $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Ta có:

$\widehat{BCM}=\widehat{BAM}$ (cùng chắn cung $BM$) $(1)$

$\widehat{BAM}=\widehat{MAT}=\widehat{DAC}$ (do $AD$ là đường phân giác ngoài $A$) $(2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $\widehat{DAC}=\widehat{BCM}$, mà $\widehat{BCM}=\widehat{CDA}+\widehat{AMC}$, $\widehat{DAC}=\widehat{ACM}+\widehat{AMC}$ từ đó suy ra $\widehat{CDA}=\widehat{ACM}$, do đó $MC$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ACD$ có tâm $J$ nên $JC\perp MC$. Hay $C$ là hình chiếu của $J$ lên đường thẳng $CM$.

Đường thẳng qua $J$ và vuông góc với $CM$ có phương trình:

$(x+2)-(y-2)=0\Leftrightarrow x-y+4=0$

Tọa độ điểm $C$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+y=2\\x-y=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}\Rightarrow C(-1;\,3)$.

$AC$ là đường thẳng qua $C$ và vuông góc với $\overrightarrow{IJ}(-4;\,0)$ nên có phương trình: $x+1=0$.

Do đó tọa độ điểm $A$ có dạng $A(-1;\,a)$. Ta có $IA^2=IC^2\Leftrightarrow 9+(a-2)^2=9+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=3\end{array}\right.$.

Vì $A\neq C$ nên $A(-1;\,1)$.

Tọa độ điểm $M$ có dạng $M(m;\,2-m)$. Ta có

$IM^2=IC^2\Leftrightarrow(m-2)^2+m^2=10\Leftrightarrow m^2-2m-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=3\end{array}\right.$.

Vì $M\neq C$ nên $M(3;\,-1)$.

$BC$ là đường thẳng qua $C$ và vuông góc với $\overrightarrow{MI}(-1;\,3)$ nên có phương trình:

$-(x+1)+3(y-3)=0\Leftrightarrow x-3y+10=0$.

Tọa độ điểm $B$ có dạng $B(3b-10;\,b)$. Ta có $IB^2=IC^2\Leftrightarrow(3b-12)^2+(b-2)^2=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=3\\b=\frac{23}{5}\end{array}\right.$.

Vì $B\neq C$ nên $B\left(\frac{19}{5};\,\frac{23}{5}\right)$.

Vậy tổng hoành độ của các đỉnh $A$, $B$, $C$ là $-1-1+\dfrac{19}{5}=\dfrac{9}{5}$.

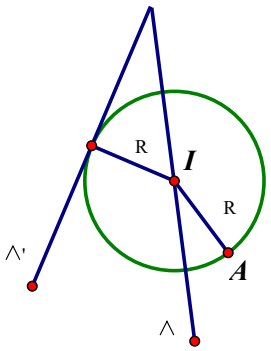
**Câu 55.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai đường thẳng $(\Delta): x+3y+8=0$; $(\Delta'): 3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Đường tròn có tâm $I(a;b)$ thuộc đường thẳng $(\Delta)$,đi qua $A$ và tiếp xúc với đường thẳng $(\Delta')$. Tính $a+b$.

**A.** $-4$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

.




Vì $I\in(\Delta)$ nên $a+3b+8=0\Leftrightarrow a=-8-3b$.

Vì đường tròn đi qua $A$ và tiếp xúc với đường thẳng $(\Delta')$ nên:

$$d(I;\Delta')=IA \Leftrightarrow \frac{|3a-4b+10|}{5}=\sqrt{(-2-a)^2+(1-b)^2} \quad (1).$$

Thay $a=-8-3b$ vào $(1)$ ta có:

$$\frac{|3(-8-3b)-4b+10|}{5}=\sqrt{(-2+8+3b)^2+(1-b)^2}$$

$$\Leftrightarrow |-14-13b|=5\sqrt{10b^2+34b+37}$$

$$\Leftrightarrow (-14-13b)^2=25(10b^2+34b+37)$$

$$\Leftrightarrow 81b^2+486b+729=0 \Leftrightarrow b=-3.$$

Với $b=-3\Leftrightarrow a=1$.

$a+b=-2$.

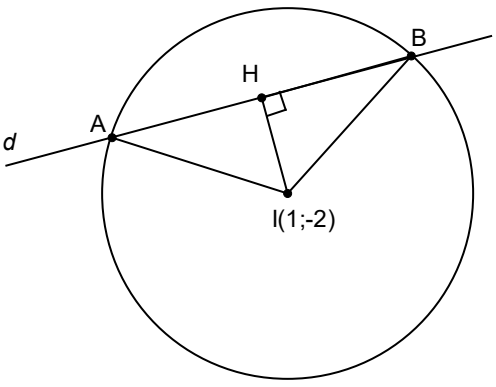
**Câu 56.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $d: 3x-4y-1=0$ và điểm $I(1;-2)$. Gọi $(C)$ là đường tròn có tâm $I$ và cắt đường thẳng $d$ tại hai điểm $A$ và $B$ sao cho tam giác $IAB$ có diện tích bằng 4. Phương trình đường tròn $(C)$ là

**A.** $(x-1)^2+(y+2)^2=8$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2=20$.

**C.** $(x-1)^2+(y+2)^2=5$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2=16$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Ta có:

$IH = d(I;d) = 2$.

$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IH.AB \Rightarrow AB = \frac{2S_{\Delta IAB}}{IH} = \frac{2.4}{2} = 4 \Rightarrow AH = 2$.

$\Rightarrow R = IA = \sqrt{AH^2 + IH^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow (C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$.

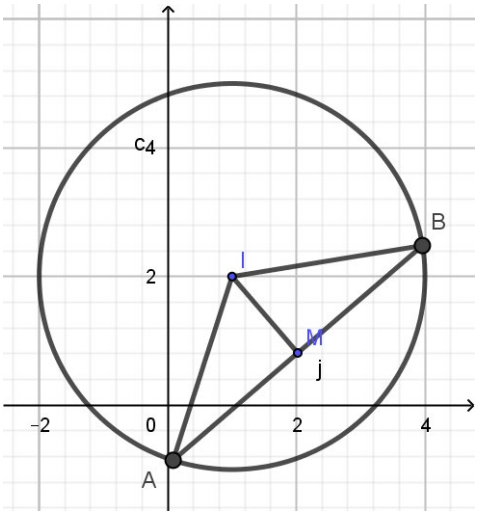
**Dạng 5. Câu hỏi min-max**

**Câu 57.** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $M(2;1)$. Dây cung của $(C)$ đi qua điểm $M$ có độ dài ngắn nhất là

**A.** $6$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $2\sqrt{7}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta có $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow (C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ nên có tâm $I(1;2), R = 3$

Vì $IM = \sqrt{2} < 3 = R$.

Gọi $d$ là đường thẳng đi qua $M$ cắt đường tròn $(C)$ tại các điểm $A$, **B.** Gọi $J$ là trung điểm của $AB$. Ta có:

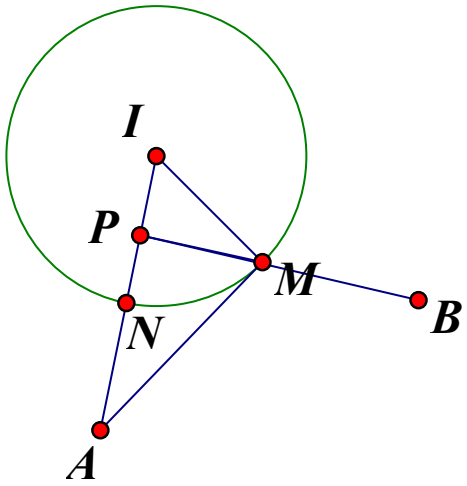
Ta có: $AB = 2AJ = 2\sqrt{R^2 - IJ^2} \geq 2\sqrt{R^2 - IM^2} = 2\sqrt{9-2} = 2\sqrt{7}$.

**Câu 58.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(0;-3)$, $B(4;1)$ và điểm $M$ thay đổi thuộc đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 4$. Gọi $P_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$. Khi đó ta có $P_{\min}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $(7,7;8,1)$.. **B.** $(7,3;7,7)$.. **C.** $(8,3;8,5)$.. **D.** $(8,1;8,3)$.

Lời giải:

**Chọn. D.**




Đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=4$ có tâm $\mathrm{I}(0;1)$ bán kính $R=2$.

$\mathrm{IA}=\mathrm{IB}=4>R$ nên $A, B$ nằm ngoài đường tròn.

Gọi $N$ là giao điểm của IA và đường tròn $(C)$

Trên đoạn IN lấy điểm $P$ sao cho $IP=\frac{1}{2}IN \Rightarrow \overrightarrow{IP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA} \Rightarrow P$ trùng với gốc tọa độ.

Ta có $\Delta IAM \sim \Delta IMP \Rightarrow \frac{MA}{MP}=\frac{IM}{IP}=\frac{IN}{IP}=2 \Rightarrow MA=2MP$.

Do đó $P=MA+2MB=2MP+2MB\geq 2PB \Rightarrow P_{\min}=2PB=2\sqrt{17} \Rightarrow P_{\min}\in(8,1;8,3)$.

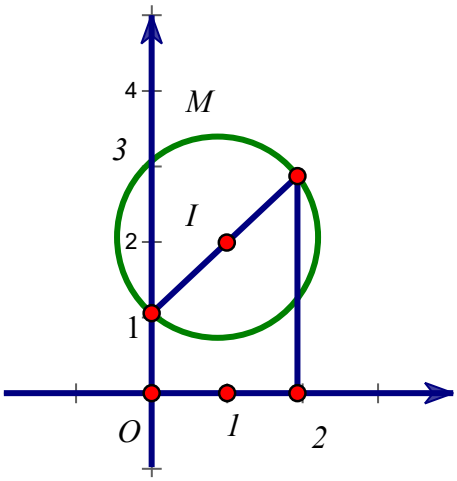
Chọn. **D.**

**Câu 59.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0;y_0)$ nằm trên đường tròn $(C)$ sao cho $T=x_0+y_0$ đạt giá trị lớn nhất.

**A.** $M(2;3)$. **B.** $M(0;1)$. **C.** $M(2;1)$. **D.** $M(0;3)$.

**Lời giải**

**Chọn A**




$(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$, $(C)$ có tâm $I(1;2)$, $R=\sqrt{2}$.

Suy ra $(C):(x-1)^2+(y-2)^2-2=0$.

Có $T=x_0+y_0=(x_0-1)+(y_0-2)+3$.

Áp dụng bất đẳng thức **B. C. S** cho 2 bộ số $(1;1),((x_0-1);(y_0-2))$.

$|(x_0-1)+(y_0-2)|\leq\sqrt{2\left[(x_0-1)^2+(y_0-2)^2\right]}=2$, do $(x_0-1)^2+(y_0-2)^2=2$.

$\Rightarrow -2 \le (x_0-1)+(y_0-2) \le 2 \Rightarrow 1 \le (x_0-1)+(y_0-2)+3 \le 5 \Rightarrow 1 \le T \le 5$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} (x_0-1)=(y_0-2) \\ (x_0-1)^2+(y_0-2)^2=2 \end{cases}$.

$\Rightarrow (x_0-1)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0-1=1 \\ x_0-1=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2, y_0=3, T=5 \\ x_0=0, y_0=1, T=1 \end{array}\right.$.

Vậy $\max T=5$ khi $x_0=2, y_0=3$.

**Câu 60.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho điểm $M$ nằm trên đường tròn $(C): x^2+y^2+8x-6y+16=0$. Tính độ dài nhỏ nhất của $OM$ ?

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $5$. **D.** $2$.

**Lời giải** 1

**Chọn D**

Đường tròn $(C)$ có tâm $I(-4;3)$, bán kính $R=3$.

Ta có $\overrightarrow{OI}=(-4;3)$ suy ra phương trình đường thẳng $OI$ là $\begin{cases} x=-4t \\ y=3t \end{cases}$.

$OI \cap (C)=\{M\}$ Tọa độ $(x;y)$ của $M$ là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2+8x-6y+16=0 \\ x=-4t \\ y=3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25t^2-50t+16=0 \\ x=-4t \\ y=3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{8}{5} \\ x=\dfrac{-32}{5} \\ y=\dfrac{24}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} t=\dfrac{2}{5} \\ x=\dfrac{-8}{5} \\ y=\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Suy ra $M_1\left(-\frac{32}{5};\frac{24}{5}\right), M_2\left(-\frac{8}{5};\frac{6}{5}\right)$

Ta có $OM_1=\sqrt{\left(-\frac{32}{5}\right)^2+\left(\frac{24}{5}\right)^2}=8, OM_2=\sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2}=2 \Rightarrow OM_{\min}=OM_2=2$.

**Cách 2**

Đường tròn $(C)$ có tâm $I(-4;3)$, bán kính $R=\sqrt{4^2+3^2-16}=3$.

Phương trình đường thẳng $OI$ đi qua $O(0;0)$ có vtpt $\vec{n}(3;4)$ là:

$3x+4y=0$.

Tọa độ $M=OI \cap (C)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x+4y=0 \\ x^2+y^2+8x-6y+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{32}{5} \\ y=\dfrac{24}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{8}{5} \\ y=\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

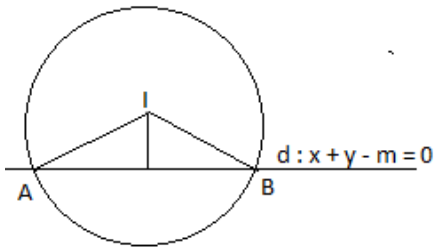
Ta có $OM_1=\sqrt{\left(\frac{32}{5}\right)^2+\left(\frac{24}{5}\right)^2}=8; OM_2=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2}=2$. Vậy $OM_{\min}=2$.

**Câu 61.** Gọi $I$ là tâm của đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-1)^2=4$. Số các giá trị nguyên của $m$ để đường thẳng $x+y-m=0$ cắt đường tròn $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A, B$ sao cho tam giác $IAB$ có diện tích lớn nhất là

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi: $d: x+y-m=0$; tâm của $(C)$ là $I(1;1)$, để $d \cap (C)$ tại 2 phân biệt khi đó:

$$0 \le d(I;d) < 2 \leftrightarrow 0 \le \frac{|2-m|}{\sqrt{2}} < 2 \leftrightarrow 2-2\sqrt{2} < m < 2+2\sqrt{2} \,(*)$$

Xét $\Delta IAB$ có: $S_{\Delta AIB} = \frac{1}{2}.IA.IB.\sin\widehat{AIB} = \frac{1}{2}.R^2.\sin\widehat{AIB} \le \frac{1}{2}.R^2$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\sin\widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^0 \Rightarrow AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow d(I;d) = \sqrt{2} \leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=0 & (TM) \\ m=4 & (TM) \end{array}\right.$$

**Câu 62.** Điểm nằm trên đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ có khoảng cách ngắn nhất đến đường thẳng $d: x-y+3=0$ có toạ độ $M(a;b)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

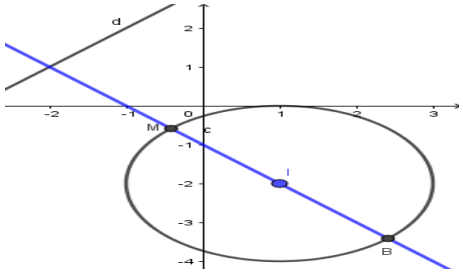
**A.** $\sqrt{2}a = -b$. **B.** $a = -b$. **C.** $\sqrt{2}a = b$. **D.** $a = b$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đường tròn $(C)$ có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=2$.

Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $I$ và vuông góc với $d$. Khi đó, điểm $M$ cần tìm là một trong hai giao điểm của $\Delta$ và $(C)$.




Ta có phương trình $\Delta: x+y+1=0$.

Xét hệ: $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x^2+y^2-2x+4y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ 2(x-1)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x=1\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=-2-\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=-2+\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $B(1+\sqrt{2};-2-\sqrt{2}) \Rightarrow d(B,d) = 2+3\sqrt{2}$

Với $C(1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}) \Rightarrow d(C,d) = -2+3\sqrt{2} < d(B,d)$

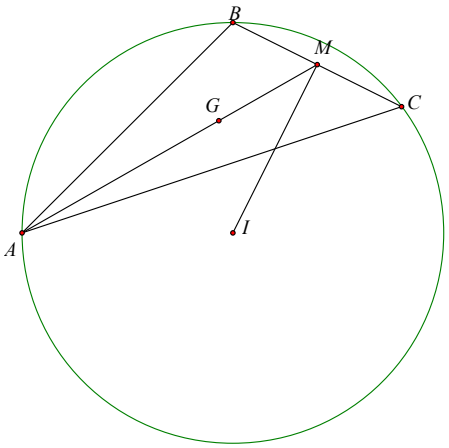
Suy ra $M(1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}) \Rightarrow a = 1-\sqrt{2}; b = -2+\sqrt{2} = \sqrt{2}(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}a$.

**Câu 63.** Cho tam giác $ABC$ có trung điểm của $BC$ là $M(3;2)$, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác lần lượt là $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right), I(1;-2)$. Tìm tọa độ đỉnh $C$, biết $C$ có hoành độ lớn hơn $2$.

**A.** $C(9;1)$. **B.** $C(5;1)$. **C.** $C(4;2)$. **D.** $C(3;-2)$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Vì $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GM}$ nên $A$ là ảnh của điểm $M$ qua phép vị tự tâm $G$, tỉ số $-2$, suy ra $A(-4;-2)$.

Đường tròn ngoại tiếp $ABC$ có tâm $I$, bán kính $R=IA=5$ có phương trình $(x-3)^2+(y-2)^2=25$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=(2;4)$.

Đường thẳng $BC$ đi qua $M$ và nhận vectơ $\overrightarrow{IM}$ làm vectơ pháp tuyến, phương trình $BC$ là: $1(x-3)+2(y-2)=0\Leftrightarrow x+2y-7=0$.

Điểm $C$ là giao điểm của đường thẳng $BC$ và đường tròn $(I;R)$ nên tọa độ điểm $C$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=25\\ x+2y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=3\\ x=5,y=1\end{array}\right.$$

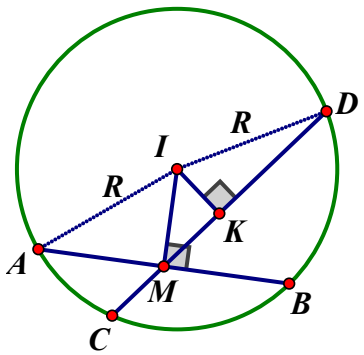
Đối chiếu điều kiện đề bài ta có tọa độ điểm $C(5;1)$.

**Câu 64.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4y-25=0$ và điểm $M(2;1)$. Dây cung của $(C)$ đi qua $M$ có độ dài ngắn nhất là:

**A.** $2\sqrt{7}$. **B.** $16\sqrt{2}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{7}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




+) $(C)$ có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=\sqrt{30}$

+) $AB$ là dây cung của $(C)$ đi qua $M$

+) Ta có $AB$ min $\Leftrightarrow AB\perp IM$.

Thật vậy, giả sử $CD$ là dây cung qua $M$ và không vuông góc với $IM$.

Gọi $K$ là hình chiếu của $I$ lên $CD$ ta có:

$AB=2AM=2\sqrt{IA^2-IM^2}=2\sqrt{R^2-IM^2}$

$CD=2KD=2\sqrt{ID^2-KD^2}=2\sqrt{R^2-IK^2}$

Do tam giác $IMK$ vuông tại $K$ nên $IM > IK$.

Vậy $CD > AB$.

+) Ta có: $IM = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$

$MA = \sqrt{R^2 - IM^2} = \sqrt{30-2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\Rightarrow AB = 2MA = 4\sqrt{7}$.

**Câu 65.** Cho các số thực $a, b, c, d$ thay đổi, luôn thỏa mãn $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$ và $4c - 3d - 23 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-c)^2 + (b-d)^2$ là:

**A.** $P_{\min} = 28$. **B.** $P_{\min} = 3$. **C.** $P_{\min} = 4$. **D.** $P_{\min} = 16$.

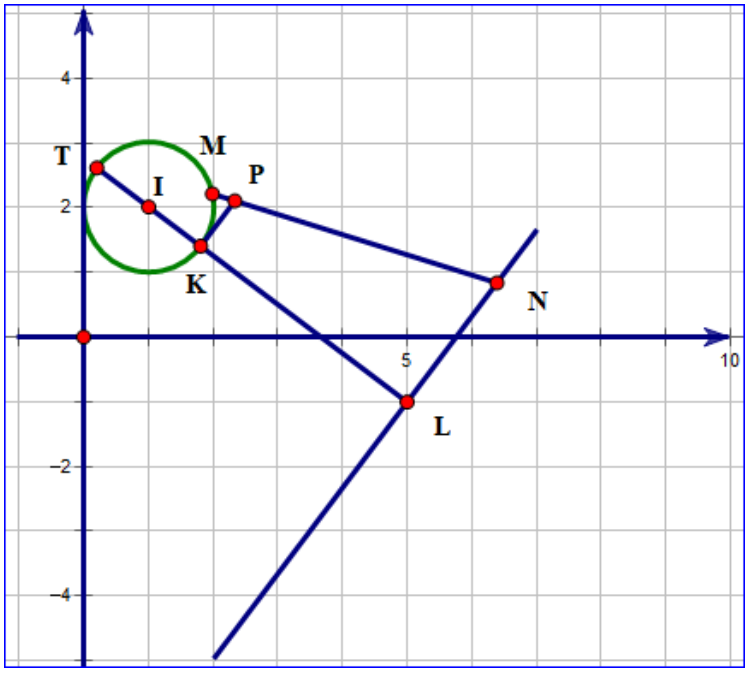
**Lời giải**

**Chọn D**

Xét tập hợp điểm $M(a;b)$ thỏa mãn $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$ thì M thuộc đường tròn tâm $I(1;2); R = 1$

Xét điểm $N(c;d)$ thỏa mãn $4c - 3d - 23 = 0$ thì N thuộc đường thẳng có phương trình $4x - 3y - 23 = 0$.

Ta thấy $d(I;d) = \dfrac{|4-6-23|}{5} = 5 > R = 1$. Do đó đường thẳng không cắt đường tròn.




Đường thẳng qua $I$ vuông góc với $d$ tại $L$ và cắt đường tròn ở $T$, $K$ ($K$ ở giữa $T$ và $L$)

Vẽ tiếp tuyến tại $K$ cắt $MN$ tại $P$.

Có $KL \le PN \le MN$, mà $KL = d(I,d) - R$

Do đó $MN$ ngắn nhất khi $MN = KL$

Từ đây ta suy ra $P = (a-c)^2 + (b-d)^2 = MN^2$ bé nhất khi và chỉ khi

$MN = d(I;d) - R = 5 - 1 = 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất $P_{\min} = 16$

**Câu 66.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và các đường thẳng $d_1 : mx + y - m - 1 = 0$, $d_2 : x - my + m - 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số $m$ để mỗi đường thẳng $d_1, d_2$ cắt

$(C)$ tại 2 điểm phân biệt sao cho 4 điểm đó lập thành 1 tứ giác có diện tích lớn nhất. Khi đó tổng của tất cả các giá trị tham số $m$ là:

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $(C)\begin{cases} I(1;2) \\ R=2 \end{cases}$

Ta dễ thấy đường thẳng $d_1$ và $d_2$ cắt nhau tại điểm $M(1;1)$ cố định nằm trong đường tròn $(C)$ và $d_1 \perp d_2$. Gọi $A,B$ là giao điểm của $d_1$ và $(C)$, $C,D$ là giao điểm của $d_2$ và $(C)$. $H,K$ lần lượt là hình chiếu của $I$ trên $d_1$ và $d_2$

Khi đó

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AB.CD=2AH.CK=2\sqrt{R^2-\left[d\left(I,d_1\right)\right]^2}.\sqrt{R^2-\left[d\left(I,d_2\right)\right]^2}$$

$$=2\sqrt{4-\frac{1}{m^2+1}}\sqrt{4-\frac{m^2}{m^2+1}}=2\frac{\sqrt{\left(4m^2+3\right)\left(3m^2+4\right)}}{m^2+1}\le\frac{4m^2+3+3m^2+4}{m^2+1}=7$$

Do đó $\max S_{ABCD}=7$ khi $m=\pm 1$. Khi đó tổng các giá trị của $m$ bằng 0.

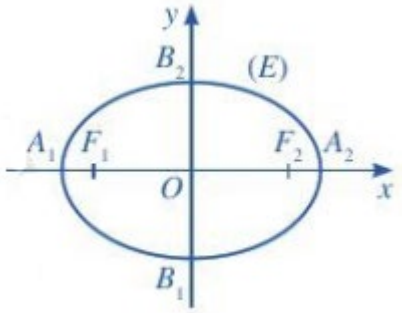
# Bài 6. BA ĐƯỜNG CÔNIC

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Đường elip

#### 1. Định nghĩa đường elip




Cho hai điểm $F_1, F_2$ cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c (c > 0)$.

Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm $M$ trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó $a$ là số cho trước lớn hơn $c$.

Hai điểm $F_1$ và $F_2$ được gọi là hai tiêu điểm của elip.

#### 2. Phương trình chính tắc của elip

Ta chứng minh được rằng:

Khi chọn hệ trục tọa độ như trên, phương trình đường elip có thể viết dưới dạng

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0.$

Đây gọi là phương trình chính tắc của elip.

*Chú ý*

Đối với elip $(E)$ có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:

- $c^2 = a^2 - b^2$,ở đó $2c = F_1F_2$.

- Nếu điểm $M(x;y)$ thuộc elip $(E)$ thì $-a \le x \le a$.

***Ví dụ 1.*** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường elip?

a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$;

b) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = -1$

c) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

d) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

***Giải***

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$ nên chỉ có trường hợp d) là phương trình chính tắc của đường elip.

***Ví dụ 2.*** Lập phương trình chính tắc của elip $(E)$ có một tiêu điểm là $F_2(5;0)$ và đi qua điểm $M(0;3)$.

***Giải***

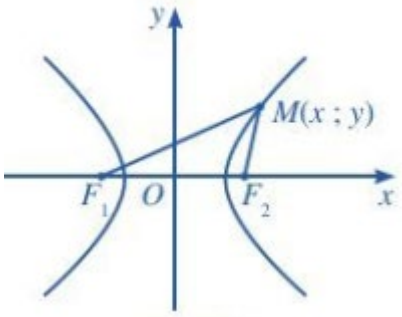
Elip $(E)$ có phương trình chính tắc là:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).$

Do $F_2(5;0)$ là một tiêu điểm của $(E)$ nên $c=5$. Điểm $M(0;3)$ nằm trên $(E)$ nên $\frac{0^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1$. Do đó $b^2=9$, suy ra $a^2=b^2+c^2=9+25=34$

Vậy elip $(E)$ có phương trình chính tắc là: $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{9}=1.$

**II. Đường Hypebol**




Cho hai điểm $F_1,F_2$ cố định có khoảng cách $F_1F_2=2c(c>0)$.

Đường hypebol (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm $M$ sao cho $|MF_1-MF_2|=2a$, trong đó $a$ là số dương cho trước nhỏ hơn $c$.

Hai điểm $F_1$ và $F_2$ được gọi là hai tiêu điểm của hypebol.

**2. Phương trình chính tắc của đường hypebol**

Ta chứng minh được rằng:

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường hypebol có thể viết dưới dạng

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,a>0,b>0.$

Đây gọi là phương trình chính tắc của hypebol.

*Chú ý*

Đối với hypebol $(H)$ có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:

- $c^2=a^2+b^2$, ở đó $2c=F_1F_2$, và điều kiện $a>b$ là không bắt buộc.
- Nếu điểm $M(x;y)$ thuộc hypebol $(H)$ thì $x\le -a$ hoặc $x\ge a$.

***Ví dụ 3.*** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường hypebol?

a) $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{4^2}=-1$

b) $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$

c) $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$

d) $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$

***Giải***

Phương trình chính tắc của hypebol có dạng $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>0,b>0$ nên các trường hợp b), c), d) là phương trình chính tắc của đường hypebol.

***Ví dụ 4.*** Viết phương trình chính tắc của đường hypebol $(H)$ có một tiêu điểm là $F_2(6;0)$ và đi qua điểm $A_2(4;0)$.

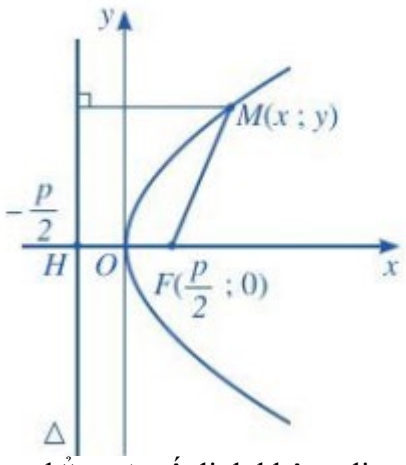
***Giải***

Giả sử hypebol $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>0,b>0$.

Do $A_2(4;0)$ thuộc $(H)$ nên $\frac{4^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1$, suy ra $a=4$. Mà $F_2(6;0)$ là tiêu điểm của $(H)$ nên $c=6$. Suy ra $b^2=c^2-a^2=36-16=20.$

Vậy hypebol $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$.

**III. Đường parabol**




Cho một điểm $F$ cố định và một đường thẳng $\Delta$ cố định không đi qua $F$.
Đường parabol (còn gọi là parabol) là tập hợp các điểm $M$ trong mặt phẳng cách đều $F$ và $\Delta$.
Điểm $F$ được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng $\Delta$ được gọi là đường chuẩn của parabol.

**2. Phương trình chính tắc của parabol**

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường parabol có thể viết dưới dạng
$y^2=2px(p>0).$
Đây gọi là phương trình chính tắc của parabol.
*Chú ý*: Đối với parabol $(P)$ có phương trình chính tắc $y^2=2px(p>0)$, ta có:
- Tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và phương trình đường chuẩn là $x+\frac{p}{2}=0$.
- Nếu điểm $M(x;y)$ thuộc parabol $(P)$ thì $x\ge 0$.

***Ví dụ 5.*** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường parabol?
a) $y^2=-6x$;
b) $y^2=6x$
c) $x^2=-6y$;
d) $x^2=6y$.

***Giải***

Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2=2px$ với $p>0$ nên chỉ có trường hợp b) là phương trình chính tắc của đường parabol.

***Ví dụ 6.*** Viết phương trình chính tắc của parabol $(P)$ biết:
a) $(P)$ có tiêu điểm là $F(5;0)$;
b) $(P)$ đi qua điểm $M(2;1)$.

***Giải***

Gọi phương trình chính tắc của parabol $(P)$ là: $y^2=2px(p>0)$.

a) Vì $(P)$ có tiêu điểm là $F(5;0)$ nên $\frac{p}{2}=5$, tức là $p=10$. Vậy phương trình chính tắc của parabol $(P)$ là $y^2=20x$.

b) Do điểm $M(2;1)$ nằm trên $(P)$ nên $1^2 = 2p \,.\, 2$, tức là $p = \frac{1}{4}$ .Vậy phương trình chính tắc của parabol $(P)$ là $y^2 = \frac{x}{2}$

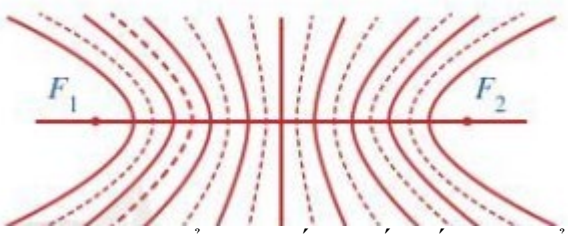
**IV. Một số ứng dụng thực tiễn của ba đường conic**

Ba đường conic có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Ta nêu ra một vài ứng dụng của ba đường conic.

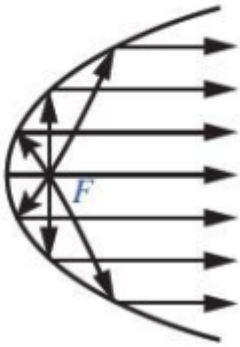
1. Năm 1911, nhà vật lí học người Anh là Ernest Rutherford (1871 - 1937) đã đề xuất mô hình hành tinh nguyên tử, trong đó hạt nhân nhỏ bé nằm tại tâm của nguyên tử, còn các electron bay quanh hạt nhân trên các quỹ đạo hình elip như các hành tinh bay quanh Mặt Trời



2. Trong vật lí, hiện tượng hai sóng gặp nhau tạo nên các gợn sóng ổn định gọi là hiện tượng giao thoa của hai sóng. Các gợn sóng có hình các đường hypebol gọi là các vân giao thoa




3. Với gương parabol, tia sáng phát ra từ tiêu điểm (tia tối) chiếu đến một điểm của parabol sẽ bị hắt lại (tia phản xạ) theo một tia song song (hoặc trùng) với trục của parabol




Tính chất trên có nhiều ứng dụng, chẳng hạn:

- Đèn pha: Bề mặt của đèn pha là một mặt tròn xoay sinh bởi một cung parabol quay quanh trục của nó, bóng đèn được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol đó. Các tia sáng phát ra từ bóng đèn khi chiếu đến bề mặt của đèn pha sẽ bị hắt lại theo các tia sáng song song, cho phép chúng ta quan sát được các vật ở xa.



- Chảo vệ tinh cũng có dạng như đèn pha. Điểm thu và phát tín hiệu của máy được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol



## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Các bài toán liên quan elip

**Câu 1.** Xác định các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip có phương trình sau:

$a)\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ $\qquad$ $b)\ 4x^2+25y^2=100$

**Câu 2.** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip đi qua điểm $M\left(2;\dfrac{5}{3}\right)$ và có một tiêu điểm $F(-2;0)$.

b) Elip nhận $F_2(5;0)$ là một tiêu điểm và có độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ và tiêu cự bằng 2.

d) Elip đi qua hai điểm $M\left(2;-\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-\sqrt{6};1\right)$.

**Câu 3.** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip có tổng độ dài hai trục bằng 8 và tâm sai $e=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Elip có tâm sai $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ có hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

c) Elip có tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và có hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng $12\sqrt{5}$.

**Câu 4.** Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

a) Elip đi qua điểm $M\left(-\sqrt{5};2\right)$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 10.

b) Elip có tâm sai $e=\dfrac{3}{5}$ và khoảng cách từ tâm đối xứng của nó đến một đường chuẩn bằng $\dfrac{25}{3}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng 10 và phương trình một đường chuẩn là $x=\dfrac{25}{4}$.

d) Khoảng cách giữa các đường chuẩn bằng 36 và bán kinh qua tiêu điểm của M thuộc Elip là 9 và 15.

**Câu 5.** Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

a) Elip có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C):x^2+y^2=41$ và đi qua điểm $A(0;5)$.

b) Elip co hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C):x^2+y^2=21$ và đi qua điểm $M(1;2)$ nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc $60^0$.

c) Một cạnh hình chữ nhật cơ sở của Elip nằm trên $d:x-\sqrt{5}=0$ và độ dài đường chéo hình chữ nhật bằng 6.

d) Tứ giác ABCD là hình thoi có bốn đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Bán kính của đường tròn nội tiếp hình thoi bằng $\sqrt{2}$ và tâm sai của Elip bằng $\dfrac{1}{2}$.

**Câu 6.** Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

a) Tứ giác ABCD là hình thoi có 4 đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $(C): x^2 + y^2 = 4$ và $AC = 2BD$ , A thuộc Ox.

b) Elip có độ dài trục lớn bằng 8 và giao điểm của Elip với đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ tạo thành 4 đỉnh của một hình vuông.

c) Elip có tâm sai $e = \frac{1}{3}$ và giao điểm của fElip với đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$ tại 4 điểm A, B, C, D sao cho AB song song với Ox và $AB = 3BC$ .

d) Elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$ , các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của Elip cùng nằm trên một đường tròn.

**Câu 7.** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có hai đỉnh trên trục nhỏ cùng với hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông có diệc tích bằng 32.

b) Elip có một đỉnh và hai tiêu điểm tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của Elip bằng $12\left(2+\sqrt{3}\right)$ .

c) Elip đi qua điểm $M\left(2\sqrt{3};2\right)$ và M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

d) Elip đi qua điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc $60^0$ .

**Câu 8.** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có một tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm M, biết tam giác $F_1MF_2$ có diện tích bằng 1 và vuông tại M.

b) Elip đi qua 3 đỉnh của tam giác đều ABC. Biết tam giác ABC có trục đối xứng là Oy, $A(0;2)$ và có diện tích bằng $\frac{49\sqrt{3}}{12}$ .

c) Khi M thay đổi trên Elip thì độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 và độ dài lớn nhất của $MF_1$ bằng 8 với $F_1$ là tiêu điểm có hoành độ âm của Elip.

**Câu 9.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho

a) Elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . Gọi $F_1; F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; A, B là hai điểm thuộc $(E)$ sao cho $AF_1 + BF_2 = 8$ . Tính $AF_2 + BF_1$

b) Elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ . Gọi $F_1; F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc $(E)$ sao cho $MF_1 = 2MF_2$

c) Elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Gọi $F_1; F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc $(E)$ sao cho $MF_1 - MF_2 = 2$

**Câu 10.** Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho.

a) Elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ . Tìm những điểm M thuộc ( E ) sao cho nó nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc vuông.

b) Elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ . Gọi $F_1; F_2$ là hai tiêu điểm của Elip. Tìm tọa độ điểm M thuộc $(E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 60^0$

c) Elip $(E): \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ . Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip, Tìm tọa độ điểm M thuộc $(E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2}=120^0$

d) Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ . Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc $(E)$ sao cho $\widehat{MF_1F_2}=120^0$

**Câu 11.** Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho.

a) Elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và điểm $C(2;0)$ . Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc ( E ) biết rằng A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC đều.

b) Elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc ( E ) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

**c)** Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ và điểm $A(3;0)$ **.** Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc ( E ) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết B có tung độ dương.

**Câu 12.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho

a) Elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$ và hai điểm $A(-5;-1)$, $B(-1;1)$. Xác định tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho diện tích tam giác $MAB$ lớn nhất.

b) Elip $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ và hai điểm $A(3;4)$, $B(5;3)$. Tìm trên $(E)$ điểm $C$ sao cho tam giác $ABC$ có diện tích bằng $4,5$.

c) Elip $(E): \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm trên $(E)$ những điểm sao cho khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng $d: 2x-3y+1=0$ là lớn nhất.

**Câu 13.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho

a) Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và các điểm $A(-3;0)$, $I(-1;0)$. Tìm tọa độ các điểm $B$, $C$ thuộc $(E)$ sao cho $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

b) Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $MF_1F_2$ bằng $\frac{4}{3}$.

c) Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho đường phân giác trong góc $\widehat{F_1MF_2}$ đi qua điểm $N\left(-\frac{48}{25};0\right)$.

**Câu 14.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho

a) Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua $M$ và cắt $(E)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho $M$ là trung điểm $AB$.

b) Elip $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và điểm $M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua $M$ và cắt $(E)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho $MA=2MB$.

c) Elip $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và đường thẳng $d:2x+y+3=0$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ vuông góc $d$ và cắt $(E)$ tại hai điểm $A$, $B$ sao cho tam giác $OAB$ có diện tích bằng $1$.

d) Elip $(E):x^2+3y^2=6$ có hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$ trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Gọi $d$ là đường thẳng đi qua $F_2$ và song song với $\Delta:y=-x+1$ đồng thời cắt $(E)$ tại hai điểm $A$, $B$ phân biệt. Tính diện tích tam giác $ABF_1$.

**Câu 15.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $d:x-\sqrt{2}y+2=0$. Đường thẳng $d$ cắt $(E)$ tại hai điểm $A$, $B$. Tìm tọa độ điểm $C$ trên $(E)$ sao cho tam giác $ABC$ cân tại $C$.

**Câu 16.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $d:3x+4y-12=0$. Đường thẳng $d$ cắt $(E)$ tại hai điểm $A$, $B$. Tìm tọa độ điểm $C$ trên $(E)$ sao cho tam giác $ABC$ có diện tích bằng $6$.

**Câu 17.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C):x^2+y^2=8$ và elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$. Tính diện tích hình chữ nhật có bốn đỉnh là các giao điểm của đường tròn $(C)$ và elip $(E)$.

## Dạng 2. Các bài toán liên quan hypebol

**Câu 18.** Xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm, tính tâm sai, độ dài trục thực, độ dài trục ảo và viết phương trình các đường tiệm cận của các hypebol $(H)$ sau:

a) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{8}=1$.  b) $5x^2-4y^2=20$.

**Câu 19.** Viết phương trình chính tắc của hypebol $(H)$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $(H)$ có một tiêu điểm tọa độ là $(-4;0)$ và độ dài trục ảo bằng $2\sqrt{7}$.

b) $(H)$ có tiêu cự bằng $10$ và đường tiệm cận là $y=\pm\frac{4}{3}x$.

c) $(H)$ có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ và diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng $48$.

d) $(H)$ đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-1;-\sqrt{3}\right)$.

e) $(H)$ đi qua $M(-2;1)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng $60°$.

**Câu 20.** Cho hypebol $(H):\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$ có tiêu điểm $F_1$ và $F_2$. Tìm điểm $M$ trên $(H)$ trong các trường hợp sau:

a) Điểm $M$ có hoành độ là $4$.

b) Khoảng cách hai điểm $M$ và $F_1$ bằng $3$.

c) Tổng khoảng cách từ $M$ đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

**Câu 21.** Tìm các điểm trên hypebol $(H): 4x^2 - y^2 - 4 = 0$.

a) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông.
b) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc $120°$.
c) Có tọa độ nguyên.

**Câu 22.** Cho số $m > 0$. Chứng minh rằng hypebol $(H)$ có các tiêu điểm $F_1(-m;m)$, $F_2(m;m)$ và giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm trên $(H)$ tới các tiêu điểm là $2m$, có phương trình $x.y = \frac{m^2}{2}$.

**Câu 23.** Cho $F_1\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$, $F_2\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Chứng minh mỗi điểm $M(x;y)$ thuộc đồ thị $y = \frac{1}{x}$ đều có $|MF_1 - MF_2| = 2\sqrt{2}$.

**Câu 24.** Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O$ và có hệ số góc $k$, $\Delta'$ là đường thẳng đi qua $O$ và vuông góc với $\Delta$.

**a)** Xác định tọa độ các tiêu điểm. tâm sai, phương trình các đường tiệm cận và đường chuẩn của $(H)$.

**b)** Tìm điều kiện của $k$ để cả $\Delta$ và $\Delta'$ đều cắt $(H)$.

**c)** Tứ giác với bốn đỉnh là bốn giao điểm của $\Delta$ và $\Delta'$ với $(H)$ là hình gì? Tính diện tích tứ giác này theo $k$. Xác định $k$ để diện tích tứ giác đó có giá trị nhỏ nhất.

**Câu 25.** Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm tùy ý trên $(H)$ đến các đường tiệm cận bằng $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

**Câu 26.** Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Một đường thẳng $\Delta$ cắt $(H)$ tại $P, Q$ và cắt hai đường tiệm cận ở $M, N$. Chứng minh $MP = NQ$. Nếu $\Delta$ có phương trình không đổi thì tích $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}$ là hằng số.

**Câu 27.** Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi $F_1$, $F_2$ là các tiêu điểm, $A_1$, $A_2$ là các đỉnh của $(H)$. $M$ là điểm tùy ý trên $(H)$ và $N$ là hình chiếu của nó trên trục hoành. Chứng minh rằng

**a)** $OM^2 - MF_1.MF_2 = a^2 - b^2$.

b) $(MF_1 + MF_2)^2 = 4\left(OM^2 + b^2\right)$.

**c)** $MN^2 = \frac{b^2}{a^2}.\overrightarrow{NA_1}.\overrightarrow{NA_2}$.

**Câu 28.** Cho hyperbol $(H)$. Chứng minh diện tích của hình bình hành xác định bởi hai đường tiệm cận và hai đường thẳng đi qua một điểm trên $(H)$, song song với hai đường tiệm cận là một hằng số.

**Câu 29.** Hai đỉnh đối diện của một hình bình hành nằm trên hyperbol $(H)$, các cạnh của hình bình hành song song với các đường tiệm cận của $(H)$. Chứng minh đường thẳng nối hai đỉnh đối diện còn lại của hình bình hành đó luôn đi qua tâm đối xứng của $(H)$.

## Dạng 3. Các bài toán liên quan parabol.

**Câu 30.** Tìm tiêu điểm, đường chuẩn và vẽ parabol sau

**a)** $y^2 = 4x$. **b)** $y^2 - x = 0$.

**Câu 31.** Viết phương trình chính tắc của parabol $(P)$ biết

**a)** $(P)$ có tiêu điểm là $F(5;0)$.

**b)** khoảng cách từ tiêu điểm $F$ đến đường thẳng $\Delta: x + y - 12 = 0$ là $2\sqrt{2}$.

**Câu 32.** Viết phương trình chính tắc của parabol $(P)$ biết

a) $(P)$ có đường chuẩn $\Delta:\ x = -5$. b) $(P)$ có $p = \frac{1}{3}$.

**Câu 33.** Cho elip $(E):\ 9x^2 + 16y^2 = 144$.

a) Tìm các tiêu điểm, tiêu cự và tâm sai của elip.

b) Lập phương trình chính tắc của hypebol $(H)$ có cùng hình chữ nhật cơ sở với elip $(E)$.

c) Lập phương trình chính tắc của parabol $(P)$ có tiêu điểm trùng với tiêu điểm bên phải của elip $(E)$.

**Câu 34.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho parabol có tiêu điểm $F$.

a) Tìm trên $(P)$ điểm $M$ cách $F$ một khoảng là 3.

b) Tìm điểm $M$ trên $(P)$ sao cho $S_{OMF} = 8$.

c) Tìm điểm $A$ nằm trên parabol và một điểm $B$ nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x - 3y + 5 = 0$ sao cho $AB$ ngắn nhất.

**Câu 35.** Cho parabol $(P):\ y^2 = 12x$ có tiêu điểm $F$. Tìm hai điểm $A$, $B$ trên $(P)$ sao cho tam giác $OAB$ có trực tâm là $F$.

**Câu 36.** Cho parabol $(P)$ có phương trình $y^2 = 4x$. Tìm tọa độ các điểm $M$ nằm trên parabol $(P)$ và cách tiêu điểm một khoảng bằng 3.

**Câu 37.** Tìm độ dài dây cung vuông góc với trục đối xứng của parabol $y^2 = 2px$ tại tiêu điểm $F$.

**Câu 38.** Cho parabol $(P): y^2 = 2px$. Với mỗi điểm $M \in (P)$ và khác gốc $O$, gọi $M'$ là hình chiếu của $M$ lên $Oy$ và $I$ là trung điểm của đoạn $OM'$. Chứng minh đường thẳng $IM$ có điểm chung duy nhất với $(P)$ và là phân giác của góc $M'MF$.

**Câu 39.** Qua một điểm $A$ cố định trên trục đối xứng của parabol $(P): y^2 = 2px$, ta vẽ một đường thẳng cắt $(P)$ tại hai điểm $M, N$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ $M, N$ tới trục đối xứng của $(P)$ là hằng số.

**Câu 40.** Cho dây cung $AB$ đi qua tiêu điểm $F$ của parabol $(P)$. Chứng minh khoảng cách từ trung điểm $I$ của $AB$ đến đường chuẩn $\Delta$ bằng $\frac{AB}{2}$. Suy ra đường tròn đường kính $PB$ tiếp xúc với đường chuẩn.

**Câu 41.** Cho Parabol $(P): y^2 = 2px$ và đường thẳng $d$ có phương trình $2mx - 2y - mp = 0$. Gọi $A, B$ là các giao điểm của $(P)$ và $d$. Chứng tỏ rằng đường tròn đường kính $AB$ tiếp xúa với đường chuẩn của $(P)$.

**Câu 42.** Cho $A, B$ là hai điểm trên parabol $(P): y^2 = 2px$ sao cho tổng khoảng cách từ $A, B$ tới đường chuẩn của $(P)$ bằng độ dài $AB$. Chứng minh rằng $AB$ luôn đi qua tiêu điểm của $(P)$.

**Câu 43.** Cho parabol $(P): y^2 = \frac{1}{2}x$. Hai điểm lưu động $M, N$ thuộc $(P)$, khác gốc $O$ sao cho $OM$ vuông góc với $ON$. Chứng minh đường thẳng $MN$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Câu 44.** Cho Parabol $(P): y^2 = 2px$ $(p > 0)$. $A$ là một điểm cố định trên $(P)$. Một góc vuông $uAt$ quay quanh đỉnh $A$ có các cạnh cắt $(P)$ tại $B$ và $C$. Chứng minh rằng đường thẳng $BC$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Câu 45.** Cho hai parabol $(P)$ và $(P')$ lần lượt có phương trình $y^2 = 2px$ và $y^2 = 2p'x$. Qua $O$ vẽ đường thẳng thay đổi cắt $(P)$ và $(P')$ tại hai điểm phân biệt $A$ và $A'$. Chứng minh rằng tỉ số $\frac{OA}{OA'}$ không thay đổi.

**Câu 46.** Cho Parabol $(P): y^2 = 2px$ $(p > 0)$ và đường thẳng $d$ quay quanh tiêu điểm $F$ và cắt $(P)$ tại hai điểm $M, N$. Gọi $\alpha = \left(\vec{i}, \overrightarrow{FM}\right)$, $(0 < \alpha < \pi)$.

a) Chứng minh $\frac{1}{MF} + \frac{1}{NF}$ không đổi.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích $FM.FN$ khi $\alpha$ thay đổi.

**Câu 47.** Cho hai parabol lần lượt có phương trình $y^2 = 2px$ và $y = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu hai parabol đó cắt nhau tại bốn điểm phân biệt thì bốn điểm đó nằm trên một đường tròn.

## Dạng 4. Các bài toán liên quan đường cônic

Để nhận dạng đường cônic ta dựa vào tâm sai:

- Elip là một đường cônic có tâm sai $e < 1$.
- Parabol là một đường cônic có tâm sai $e = 1$.
- Hypebol là một đường cônic có tâm sai $e > 1$.

Từ phương trình của các đường cônic ta xác định được dạng của nó từ đó xác định được tiêu điểm và đường chuẩn của nó.

**Câu 48.** Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các đường cônic sau.

a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.  b) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{10} = 1$  c) $y^2 = 18x$

**Câu 49.** Cho cônic có tiêu điểm $F(-1;1)$ đi qua điểm $M(1;1)$ và đường chuẩn $\Delta: 3x + 4y - 5 = 0$ .Cônic này là elip, hypebol hay là parabol?

**Câu 50.** Cho đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$ và điểm $F(1;0)$. Viết phương trình của đường cônic nhận $F$ làm tiêu điểm và $\Delta$ làm đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau:

a) Tâm sai $e=\sqrt{3}$.  b) Tâm sai $e=\frac{1}{2}$  c) Tâm sai $e=1$

**Câu 51.** Cho điểm $A(0;\sqrt{3})$ và hai đường thẳng $\Delta: x-2=0,\ \Delta': 3x-y=0$.

a) Viết phương trình chính tắc đường elip có $A$ là một đỉnh và một đường chuẩn $\Delta$.

b) Viết phương trình chính tắc đường hypebol có $\Delta$ là một đường chuẩn và $\Delta'$ là tiệm cận.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Các bài toán liên quan elip

**Câu 1.** Đường Elip $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ có tiêu cự bằng

**A.** $6$.  **B.** $8$.  **C.** $9$.  **D.** $(-2;+\infty)$.

**Câu 2.** Cho elip $(E)$ có phương trình $16x^2+25y^2=400$. Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

**A.** $(E)$ có trục nhỏ bằng 8.

**B.** $(E)$ có tiêu cự bằng 3.

**C.** $(E)$ có trục nhỏ bằng 10.

**D.** $(E)$ có các tiêu điểm $F_1(-3;0)$ và $F_2(3;0)$.

**Câu 3.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Tiêu cự của $(E)$ bằng

**A.** 10.  **B.** 16.  **C.** 4.  **D.** 8.

**Câu 4.** Một elip có diện tích hình chữ nhật cơ sở là $80$, độ dài tiêu cự là $6$. Tâm sai của elip đó là

**A.** $e=\frac{4}{5}$.  **B.** $e=\frac{3}{4}$.  **C.** $e=\frac{3}{5}$.  **D.** $e=\frac{4}{3}$.

**Câu 5.** Cho elip $(E):4x^2+5y^2=20$. Diện tích hình chữ nhật cơ sở của $(E)$ là

**A.** $2\sqrt{5}$.  **B.** $80$.  **C.** $8\sqrt{5}$.  **D.** $40$.

**Câu 6.** Đường elip $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ có tiêu cự bằng

**A.** $3$.  **B.** $9$.  **C.** $6$.  **D.** $18$.

**Câu 7.** Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tính tâm sai của elip.

**A.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.  **B.** $\frac{1}{2}$.  **C.** $\frac{1}{4}$.  **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Câu 8.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (với $a>b>0$) có $F_1, F_2$ là các tiêu điểm và $M$ là một điểm di động trên $(E)$. Khẳng định nào dưới đây là **đúng?**

**A.** $MF_1+MF_2=2b$.  **B.** $(MF_1-MF_2)^2=4(b^2-OM^2)$.

**C.** $OM^2-MF_1.MF_2=a^2-b^2$.  **D.** $MF_1.MF_2+OM^2=a^2+b^2$.

**Câu 9.** Trong hệ trục $Oxy$, cho Elip $(E)$ có các tiêu điểm $F_1(-4;0), F_2(4;0)$ và một điểm $M$ nằm trên $(E)$. Biết rằng chu vi của tam giác $MF_1F_2$ bằng 18. Xác định tâm sai e của $(E)$.

**A.** $e=\frac{4}{5}$. **B.** $e=\frac{4}{18}$. **C.** $e=-\frac{4}{5}$. **D.** $e=\frac{4}{9}$.

**Câu 10.** Cho Elip $(E)$ đi qua điểm $A(-3;0)$ và có tâm sai $e=\frac{5}{6}$. Tiêu cự của $(E)$ là

**A.** $10$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $5$. **D.** $\frac{10}{3}$.

**Câu 11.** Trong mặt phẳng $Oxy$, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của một elip?

**A.** $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x}{9}+\frac{y}{8}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

**Câu 12.** Phương trình chính tắc của đường elip với $a=4$, $b=3$ là

**A.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

**Câu 13.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, viết phương trình chính tắc của elip biết một đỉnh là $A_1(-5;0)$ và một tiêu điểm là $F_2(2;0)$.

**A.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$. **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{29}+\frac{y^2}{25}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{29}=1$.

**Câu 14.** Tìm phương trình chính tắc của Elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{10}$ và đi qua điểm $A(0;6)$:

**A.** $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{12}=1$. **B.** $\frac{x^2}{160}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{160}+\frac{y^2}{32}=1$. **D.** $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$.

**Câu 15.** Lập phương trình chính tắc của Elip đi qua điểm $B$ và có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

**A.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$

**Câu 16.** Phương trình chính tắc của Elip có đỉnh $(-3;0)$ và một tiêu điểm là $(1;0)$ là

**A.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

**Câu 17.** Tìm phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng $6$ và trục lớn bằng $10$.

**A.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$. **C.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{81}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

**Câu 18.** Cho elip $(E)$ có độ dài trục lớn gấp hai lần độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng $6$. Viết phương trình của $(E)$?

**A.** $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$. **C.** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1$. **D.** $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{12}=1$.

**Câu 19.** Phương trình chính tắc của Elip có độ dài trục lớn bằng $8$, độ dài trục nhỏ bằng $6$ là:

**A.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **B.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

**Câu 20.** Elip có một tiêu điểm $F(-2;0)$ và tích độ dài trục lớn với trục bé bằng $12\sqrt{5}$. Phương trình chính tắc của elip là:

**A.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{16}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{5}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$

**Câu 21.** Trong mặt phẳng $Oxy$, viết phương trình chính tắc của elip $(E)$ biết $(E)$ đi qua $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và $M$ nhìn hai tiêu điểm $F_1,F_2$ dưới một góc vuông.

**A.** $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$ **B.** $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$ **C.** $(E):\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1.$ **D.** $(E):\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1.$

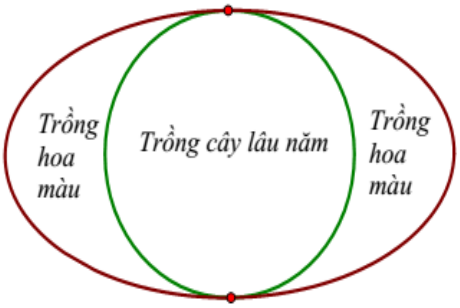
**Câu 22.** Cho Elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ và điểm $M$ nằm trên $(E)$. Nếu điểm $M$ có hoành độ bằng 1 thì các khoảng cách từ $M$ đến hai tiêu điểm của (E) bằng:

**A.** 3,5 và 4,5. **B.** $4\pm\sqrt{2}$. **C.** 3 và 5. **D.** $4\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 23.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Điểm $M\in(E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2}=90^0$. Tìm bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $MF_1F_2$.

**A.** 2 **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Câu 24.** Ông Hoàng có một mảnh vườn hình Elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là $60m$ và $30m$. Ông chia mảnh vườn ra làm hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với Elip để làm mục đích sử dụng khác nhau (xem hình vẽ). Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích hình Elip được tính theo công thức $S=\pi ab$, với a, b lần lượt là nửa độ dài trục lớn và nửa độ dài trục nhỏ. Biết độ rộng của đường Elip là không đáng kể.




**A.** $T=\frac{2}{3}$. **B.** $T=\frac{3}{2}$. **C.** $T=\frac{1}{2}$. **D.** $T=1$.

**Câu 25.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9,(x-2)^2+(y-2)^2=4$ và Elip $(E)$ có phương trình $16x^2+49y^2=1$. Có bao nhiêu đường tròn $(C)$ có bán kính gấp đôi độ dài trục lớn của elip $(E)$ và $(C)$ tiếp xúc với hai đường tròn $(C_1)$, $(C_2)$?

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 26.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho điểm $C(3;0)$ và elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$. $A,B$ là 2 điểm thuộc $(E)$ sao cho $\triangle ABC$ đều, biết tọa độ của $A\left(\frac{a}{2};\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)$ và $A$ có tung độ âm. Khi đó $a+c$ bằng:

**A.** 2. **B.** 0. **C.** –2. **D.** –4.

## Dạng 2. Các bài toán liên quan hypebol

**Câu 27.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ có tiêu cự bằng:

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $6$.

**Câu 28.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{7}=1$ có tiêu cự bằng

**A.** $6$. **B.** $2\sqrt{33}$. **C.** $3$. **D.** $9$.

**Câu 29.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ có một tiêu điểm là điểm nào dưới đây ?

**A.** $(-5;0)$. **B.** $\left(0;\sqrt{7}\right)$. **C.** $\left(\sqrt{7};0\right)$. **D.** $(0;5)$.

**Câu 30.** Cho điểm $M$ nằm trên Hyperbol $(H)$: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$. Nếu điểm $M$ có hoành độ bằng 12 thì khoảng cách từ $M$ đến các tiêu điểm là bao nhiêu?

**A.** $8$. **B.** $10;6$. **C.** $4\pm\sqrt{7}$. **D.** $14;22$.

**Câu 31.** Cho điểm $M$ nằm trên Hyperbol $(H)$: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Nếu hoành độ điểm $M$ bằng 8 thì khoảng cách từ $M$ đến các tiêu điểm của $(H)$ là bao nhiêu?

**A.** $6$ và $14$. **B.** $5$ và $13$. **C.** $8\pm\sqrt{5}$. **D.** $8\pm4\sqrt{2}$.

**Câu 32.** Tâm sai của Hyperbol $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ bằng

**A.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

**Câu 33.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$ có tiêu cự bằng

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $12$. **D.** $6$.

**Câu 34.** Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{12}=1$?

**A.** $x+8=0$. **B.** $x-\frac{3}{4}=0$. **C.** $x+2=0$. **D.** $x+\frac{5\sqrt{2}}{2}=0$.

**Câu 35.** Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{15}=1$?

**A.** $x+4\sqrt{5}=0$. **B.** $x+4=0$. **C.** $x-\frac{4\sqrt{35}}{7}=0$. **D.** $x+2=0$.

**Câu 36.** Điểm nào trong 4 điểm $M(5;0), N(10;3), P(5;3), Q(5;4)$ nằm trên một đường tiệm cận của hyperbol $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$?

**A.** $M$. **B.** $N$. **C.** $P$. **D.** $Q$.

**Câu 37.** Tìm góc giữa 2 đường tiệm cận của hyperbol $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

**A.** $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

**Câu 38.** Hyperbol $(H)$ có 2 đường tiệm cận vuông góc nhau thì có tâm sai bằng bao nhiêu ?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

**Câu 39.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó có tâm sai bằng $2$ và tiêu cự bằng $4$.

**A.** $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. **B.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{5}=1$. **D.** $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

**Câu 40.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó có một đường chuẩn là $2x+\sqrt{2}=0$.

**A.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $x^2-y^2=1$. **C.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

**Câu 41.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó đi qua điểm $(2;1)$ và có một đường chuẩn là $x+\frac{2}{\sqrt{3}}=0$

**A.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $x^2-\frac{y^2}{2}=1$. **C.** $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. **D.** $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

**Câu 42.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó có trục thực dài gấp đôi trục ảo và có tiêu cự bằng $10$.

**A.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{10}=1$.

**Câu 43.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó tiêu điểm là $(3;0)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $\sqrt{2}x+y=0$.

**A.** $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$. **C.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{8}=1$.

**Câu 44.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó tiêu điểm là $(\sqrt{10};0)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $3x+y=0$.

**A.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{6}=1$. **C.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $-x^2+\frac{y^2}{9}=1$.

**Câu 45.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ mà hình chữ nhật cơ sở có một đỉnh là $(2;3)$

**A.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{-3}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$. **D.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

**Câu 46.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó có một đường tiệm cận là $x-2y=0$ và hình chữ nhật cơ sở của nó có diện tích bằng $24$.

**A.** $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$. **C.** $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$. **D.** $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{48}=1$.

**Câu 47.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó đi qua điểm là $(5;4)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $x+y=0$.

**A.** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $x^2-y^2=9$. **C.** $x^2-y^2=1$. **D.** $x^2-y^2=3$.

## Dạng 3. Các bài toán liên quan parabol

**Câu 48.** Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(1;2)$.

**A.** $y^2=4x$. **B.** $y^2=2x$. **C.** $y=2x^2$. **D.** $y=x^2+2x-1$.

**Câu 49.** Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(5;2)$.

**A.** $y=x^2-3x-12$. **B.** $y=x^2-27$. **C.** $y^2=\dfrac{4x}{5}$. **D.** $y^2=5x-21$.

**Câu 50.** Viết phương trình chính tắc của Parabol biết tiêu điểm $F(2;0)$.

**A.** $y^2=2x$. **B.** $y^2=4x$. **C.** $y^2=8x$. **D.** $y=\dfrac{1}{6}x^2$.

**Câu 51.** Viết phương trình chính tắc của Parabol biết tiêu điểm $F(5;0)$.

**A.** $y^2=5x$. **B.** $y^2=10x$. **C.** $y^2=\dfrac{1}{5}x$. **D.** $y^2=20x$.

**Câu 52.** Viết phương trình chính tắc của Parabol biết đường chuẩn có phương trình $x+1=0$.

**A.** $y^2=2x$. **B.** $y^2=4x$. **C.** $y=4x^2$. **D.** $y^2=8x$.

**Câu 53.** Viết phương trình chính tắc của Parabol biết đường chuẩn có phương trình $x+\dfrac{1}{4}=0$.

**A.** $y^2=-x$. **B.** $y^2=x$. **C.** $y^2=2x$. **D.** $y^2=\dfrac{1}{2}x$.

**Câu 54.** Cho Parabol $(P)$ có phương trình chính tắc $y^2=4x$. Một đường thẳng đi qua tiêu điểm $F$ của $(P)$ cắt $(P)$ tại 2 điểm $A$ và $B$. Nếu $A(1;2)$ thì tọa độ của $B$ bằng bao nhiêu?

**A.** $(4;4)$. **B.** $\left(2;2\sqrt{2}\right)$. **C.** $(1;-2)$. **D.** $(1;2)$.

**Câu 55.** Một điểm $A$ thuộc Parabol $(P)$: $y^2=4x$. Nếu khoảng cách từ $A$ đến đường chuẩn bằng 5 thì khoảng cách từ $A$ đến trục hoành bằng bao nhiêu?

**A.** 3. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 4.

**Câu 56.** Một điểm $M$ thuộc Parabol $(P)$: $y^2=x$. Nếu khoảng cách từ $M$ đến tiêu điểm $F$ của $(P)$ bằng 1 thì hoành độ của điểm $M$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

**Câu 57.** Cho $M$ là một điểm thuộc Parabol $(P): y^2=64x$ và $N$ là một điểm thuộc đường thẳng $d: 4x+3y+46=0$. Xác định $M,N$ để đoạn $MN$ ngắn nhất.

**A.** $M(-9;24), N(5;-22)$ **B.** $M(-9;24), N\left(-\dfrac{37}{5};\dfrac{126}{5}\right)$

**C.** $M(9;-24), N\left(-5;\dfrac{-26}{3}\right)$ **D.** $M(9;-24), N\left(\dfrac{37}{5};-\dfrac{126}{5}\right)$

**Câu 58.** Cho parabol $(P): y^2=4x$ và đường thẳng $d: 2x-y-4=0$. Gọi $A,B$ là giao điểm của $d$ và $(P)$. Tìm tung độ dương của điểm $C\in(P)$ sao cho $\Delta ABC$ có diện tích bằng 12.

**A.** 3 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 4

**Câu 59.** Cho parabol $(P): y^2=x$ và đường thẳng $d: x-y-2=0$. Gọi $A,B$ là giao điểm của $d$ và $(P)$. Tìm tung độ điểm $C\in(P)$ sao cho $\Delta ABC$ đều.

**A.** $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ **B.** $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$

**C.** $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ **D.** Không tồn tại điểm C.

**Câu 60.** Cho Parabol $(P): y^2 = 2x$ và đường thẳng $\Delta: x-2y+6=0$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa $\Delta$ và $(P)$.

**A.** $d_{\min} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ **B.** $d_{\min} = 2$ **C.** $d_{\min} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** $d_{\min} = 4$

**Câu 61.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc $Oxy$, cho điểm $A(0;2)$ và parabol $(P): y = x^2$. Xác định các điểm $M$ trên $(P)$ sao cho $AM$ ngắn nhất.

**A.** $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3}{2}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$.

**C.** $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{4}\right)$. **D.** $M\left(\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{7}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{7}{4}\right)$.

**Câu 62.** Cho parabol $(P): y = x^2$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Parabol và elip cắt nhau tại 4 điểm phân biệt.
**B.** Parabol và elip cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.
**C.** Parabol và elip cắt nhau tại 1 điểm phân biệt.
**D.** Parabol và elip không cắt nhau.

**Câu 63.** Lập phương trình chính tắc của parabol $(P)$ biết $(P)$ cắt đường phân giác của góc phần tư thứ nhất tại hai điểm $A, B$ và $AB = 5\sqrt{2}$.

**A.** $y^2 = 20x$ **B.** $y^2 = 2x$ **C.** $y^2 = 5x$ **D.** $y^2 = 10x$

**Câu 64.** Cho điểm $A(3;0)$, gọi M là một điểm tuỳ ý trên $(P): y^2 = -x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM$.

**A.** 3. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Câu 65.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc $Oxy$, cho điểm $F(3;0)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $3x-4y+16=0$. Tìm tọa độ tiếp điểm $A$ của đường thẳng $d$ và parabol $(P)$ có tiêu điểm $F$ và đỉnh là gốc tọa độ $O$.

**A.** $A\left(\frac{4}{3};5\right)$ **B.** $A\left(\frac{8}{3};6\right)$ **C.** $A\left(\frac{16}{3};8\right)$ **D.** $A\left(\frac{2}{3};\frac{9}{2}\right)$

**Câu 66.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho parabol $(P)$ có phương trình $y^2 = x$ và điểm $I(0;2)$. Tìm tất cả hai điểm $M, N$ thuộc $(P)$ sao cho $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$.

**A.** $M(4;2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.
**B.** $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;-6), N(9;3)$.
**C.** $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;-3)$.
**D.** $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.

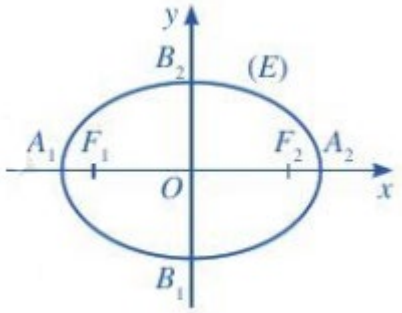
# Bài 6. BA ĐƯỜNG CÔNIC

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

## PHẦN A. LÝ THUYẾT

### I. Đường elip

#### 1. Định nghĩa đường elip




Cho hai điểm $F_1, F_2$ cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c (c > 0)$.

Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm $M$ trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó $a$ là số cho trước lớn hơn $c$.

Hai điểm $F_1$ và $F_2$ được gọi là hai tiêu điểm của elip.

#### 2. Phương trình chính tắc của elip

Ta chứng minh được rằng:

Khi chọn hệ trục tọa độ như trên, phương trình đường elip có thể viết dưới dạng

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0.$

Đây gọi là phương trình chính tắc của elip.

*Chú ý*

Đối với elip $(E)$ có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:

- $c^2 = a^2 - b^2$,ở đó $2c = F_1F_2$.

- Nếu điểm $M(x;y)$ thuộc elip $(E)$ thì $-a \le x \le a$.

***Ví dụ 1.*** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường elip?

a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$;

b) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = -1$

c) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

d) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

***Giải***

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$ nên chỉ có trường hợp d) là phương trình chính tắc của đường elip.

***Ví dụ 2.*** Lập phương trình chính tắc của elip $(E)$ có một tiêu điểm là $F_2(5;0)$ và đi qua điểm $M(0;3)$.

***Giải***

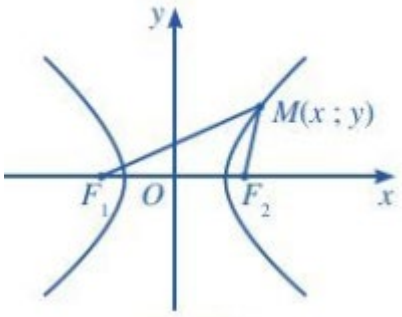
Elip $(E)$ có phương trình chính tắc là:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).$

Do $F_2(5;0)$ là một tiêu điểm của $(E)$ nên $c=5$. Điểm $M(0;3)$ nằm trên $(E)$ nên $\frac{0^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1$. Do đó $b^2=9$, suy ra $a^2=b^2+c^2=9+25=34$

Vậy elip $(E)$ có phương trình chính tắc là: $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{9}=1.$

**II. Đường Hypebol**




Cho hai điểm $F_1,F_2$ cố định có khoảng cách $F_1F_2=2c(c>0)$.

Đường hypebol (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm $M$ sao cho $|MF_1-MF_2|=2a$, trong đó $a$ là số dương cho trước nhỏ hơn $c$.

Hai điểm $F_1$ và $F_2$ được gọi là hai tiêu điểm của hypebol.

**2. Phương trình chính tắc của đường hypebol**

Ta chứng minh được rằng:

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường hypebol có thể viết dưới dạng

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,a>0,b>0.$

Đây gọi là phương trình chính tắc của hypebol.

*Chú ý*

Đối với hypebol $(H)$ có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:

- $c^2=a^2+b^2$, ở đó $2c=F_1F_2$, và điều kiện $a>b$ là không bắt buộc.
- Nếu điểm $M(x;y)$ thuộc hypebol $(H)$ thì $x\le -a$ hoặc $x\ge a$.

***Ví dụ 3.*** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường hypebol?

a) $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{4^2}=-1$

b) $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$

c) $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$

d) $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$

***Giải***

Phương trình chính tắc của hypebol có dạng $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>0,b>0$ nên các trường hợp b), c), d) là phương trình chính tắc của đường hypebol.

***Ví dụ 4.*** Viết phương trình chính tắc của đường hypebol $(H)$ có một tiêu điểm là $F_2(6;0)$ và đi qua điểm $A_2(4;0)$.

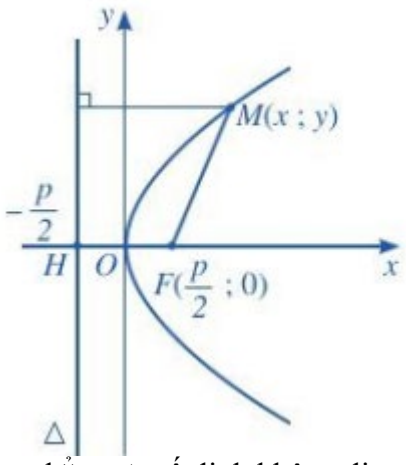
***Giải***

Giả sử hypebol $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>0,b>0$.

Do $A_2(4;0)$ thuộc $(H)$ nên $\frac{4^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1$, suy ra $a=4$. Mà $F_2(6;0)$ là tiêu điểm của $(H)$ nên $c=6$. Suy ra $b^2=c^2-a^2=36-16=20.$

Vậy hypebol $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$.

**III. Đường parabol**




Cho một điểm $F$ cố định và một đường thẳng $\Delta$ cố định không đi qua $F$.
Đường parabol (còn gọi là parabol) là tập hợp các điểm $M$ trong mặt phẳng cách đều $F$ và $\Delta$.
Điểm $F$ được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng $\Delta$ được gọi là đường chuẩn của parabol.

**2. Phương trình chính tắc của parabol**

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường parabol có thể viết dưới dạng
$y^2=2px(p>0).$
Đây gọi là phương trình chính tắc của parabol.
*Chú ý*: Đối với parabol $(P)$ có phương trình chính tắc $y^2=2px(p>0)$, ta có:
- Tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và phương trình đường chuẩn là $x+\frac{p}{2}=0$.
- Nếu điểm $M(x;y)$ thuộc parabol $(P)$ thì $x\ge 0$.

***Ví dụ 5.*** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường parabol?
a) $y^2=-6x$;
b) $y^2=6x$
c) $x^2=-6y$;
d) $x^2=6y$.

***Giải***

Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2=2px$ với $p>0$ nên chỉ có trường hợp b) là phương trình chính tắc của đường parabol.

***Ví dụ 6.*** Viết phương trình chính tắc của parabol $(P)$ biết:
a) $(P)$ có tiêu điểm là $F(5;0)$;
b) $(P)$ đi qua điểm $M(2;1)$.

***Giải***

Gọi phương trình chính tắc của parabol $(P)$ là: $y^2=2px(p>0)$.

a) Vì $(P)$ có tiêu điểm là $F(5;0)$ nên $\frac{p}{2}=5$, tức là $p=10$. Vậy phương trình chính tắc của parabol $(P)$ là $y^2=20x$.

b) Do điểm $M(2;1)$ nằm trên $(P)$ nên $1^2 = 2p \,.\, 2$, tức là $p = \frac{1}{4}$ .Vậy phương trình chính tắc của parabol $(P)$ là $y^2 = \frac{x}{2}$

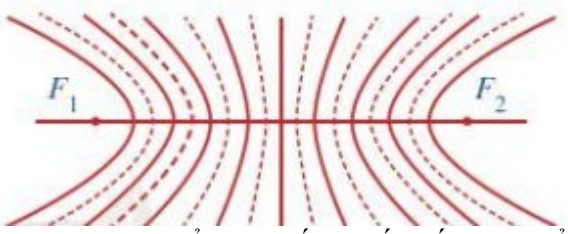
**IV. Một số ứng dụng thực tiễn của ba đường conic**

Ba đường conic có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Ta nêu ra một vài ứng dụng của ba đường conic.

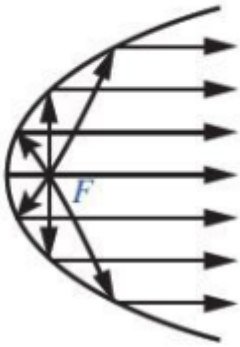
1. Năm 1911, nhà vật lí học người Anh là Ernest Rutherford (1871 - 1937) đã đề xuất mô hình hành tinh nguyên tử, trong đó hạt nhân nhỏ bé nằm tại tâm của nguyên tử, còn các electron bay quanh hạt nhân trên các quỹ đạo hình elip như các hành tinh bay quanh Mặt Trời



2. Trong vật lí, hiện tượng hai sóng gặp nhau tạo nên các gợn sóng ổn định gọi là hiện tượng giao thoa của hai sóng. Các gợn sóng có hình các đường hypebol gọi là các vân giao thoa




3. Với gương parabol, tia sáng phát ra từ tiêu điểm (tia tối) chiếu đến một điểm của parabol sẽ bị hắt lại (tia phản xạ) theo một tia song song (hoặc trùng) với trục của parabol




Tính chất trên có nhiều ứng dụng, chẳng hạn:

- Đèn pha: Bề mặt của đèn pha là một mặt tròn xoay sinh bởi một cung parabol quay quanh trục của nó, bóng đèn được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol đó. Các tia sáng phát ra từ bóng đèn khi chiếu đến bề mặt của đèn pha sẽ bị hắt lại theo các tia sáng song song, cho phép chúng ta quan sát được các vật ở xa.



- Chảo vệ tinh cũng có dạng như đèn pha. Điểm thu và phát tín hiệu của máy được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol



## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Các bài toán liên quan elip

**Câu 1.** Xác định các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip có phương trình sau:

$a)\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ $\qquad$ $b)\ 4x^2+25y^2=100$

**Lời giải.**

a) Từ phương trình $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1\ (E)$, ta có $a=2;\ b=1$. Suy ra $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$, $B_1(0;-1)$, $B_1(0;1)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2=4$. độ dài trục bé $B_1B_2=2$.

Tiêu cự $F_1F_2=2c=2\sqrt{3}$, tiêu điểm là $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$; $F_2\left(\sqrt{3};0\right)$.

Tâm sai của c là $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**b)** Ta có $4x^2+25y^2=100\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$. suy ra $a=5;\ \ b=2$ nên $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{21}$

Do đó tọa độ các đỉnh là $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(0;-2)$, $B_1(0;2)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2=10$, độ dài trục bé $B_1B_2=4$.

Tiêu cự $F_1F_2=2c=2\sqrt{21}$, tiêu điểm là $F_1\left(-\sqrt{21};0\right)$; $F_2\left(\sqrt{21};0\right)$.

Tâm sai của c là $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

**Câu 2.** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip đi qua điểm $M\left(2;\dfrac{5}{3}\right)$ và có một tiêu điểm $F(-2;0)$.

b) Elip nhận $F_2(5;0)$ là một tiêu điểm và có độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ và tiêu cự bằng 2.

d) Elip đi qua hai điểm $M\left(2;-\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-\sqrt{6};1\right)$.

Lời giải.

a) Do $(E)$ có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$ nên $c=2$. Suy ra $a^2=b^2+c^2=b^2+4$.

Mặt khác, $(E)$ đi qua điểm $\mathrm{M}\left(2;\dfrac{5}{3}\right)$ nên:

$\frac{2^2}{a^2}+\frac{(5/3)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{b^2+4}+\frac{25}{9b^2}=1 \Leftrightarrow 9b^4-25b^2-100=0 \Leftrightarrow b^2=5$ hoặc $b^2=-\frac{20}{9}(l)$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

b) Do $(E)$ có một tiêu điểm $F_2(5;0)$ nên $c=5$

Theo giả thiết độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$ nên $2b=4\sqrt{6} \Leftrightarrow b=2\sqrt{6}$

Suy ra $a^2=b^2+c^2=5^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2=49$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ .

c) Độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ nên $2a=2\sqrt{5} \Leftrightarrow a=\sqrt{5}$ .
Tiêu cự bằng 2 nên $2c=2 \Leftrightarrow c=1$ .

Từ hệ thức $a^2=b^2+c^2$ , suy ra $b^2=a^2-c^2=5-1=4$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

d) Do $(E)$ đi qua $M\left(2;-\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-\sqrt{6};1\right)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1\\ \frac{6}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{a^2}=\frac{1}{8}\\ \frac{1}{b^2}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=8\\ b^2=4\end{cases}$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

**Câu 3.** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip có tổng độ dài hai trục bằng 8 và tâm sai $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

b) Elip có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ có hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

c) Elip có tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và có hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng $12\sqrt{5}$ .

**Lời giải.**

a) Tổng độ dài hai truc bằng 8 nên $2a+2b=8$ . (1)

Tâm sai $e=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a=\sqrt{2}c$ . (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\begin{cases}2a+2b=8\\ e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=4\\ a=\sqrt{2}c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=4-\sqrt{2}c\\ a=\sqrt{2}c\end{cases}$

Thay vào hệ thức $a^2=b^2+c$ , ta được.

$2c^2=\left(4-\sqrt{2}c\right)^2+c^2\Leftrightarrow c^2-8\sqrt{2}c+16=0\Leftrightarrow c=4\sqrt{2}\pm 4$

Với $c=4\sqrt{2}+4$ , suy ra $\begin{cases}a=8+4\sqrt{2}\\ b=-8-4\sqrt{2}\end{cases}$ (không thỏa mãn)

Với $c=4\sqrt{2}-4$ , suy ra $\begin{cases}a=8-4\sqrt{2}\\ b=-4+4\sqrt{2}\end{cases}$

Do đó Elip cần tìm có phương trình $(E):\dfrac{x^2}{\left(8-4\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(4\sqrt{2}-4\right)^2}=1$ .

b) Elip có tâm sai $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\Leftrightarrow\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{\sqrt{5}}c$ .

Mặt khác , Elip có hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20 nên :

$2\left(2a+2b\right)=20\Leftrightarrow a+b=5\Leftrightarrow b=5-a$ .

Thay $(1);(2)$ vào hệ thức $a^2=b^2+c^2$ , ta được:

$\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}c\right)^2=(5-a)^2+c^2\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}c\right)^2=\left(5-\dfrac{3}{\sqrt{5}}a\right)^2+c^2\Leftrightarrow c^2-\dfrac{30}{\sqrt{5}}c+25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=5\sqrt{5}\\ c=\sqrt{5}\end{array}\right.$

Với $c=5\sqrt{5}$ , suy ra $\begin{cases}a=15\\ b=-10\end{cases}$ (không thỏa mãn).

Với $c=\sqrt{5}$ , suy ra $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$ . Do đó Elip cần tìm có phương trình $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

c) Elip có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$ nên $c=2$ .

Diện tich hình chữ nhật cơ sở $s=2a.2\text{b}=12\sqrt{5}\Leftrightarrow ab=3\sqrt{5}\Leftrightarrow a^2b^2=45$ (1)

Mặt khác, ta có $a^2=b^2+c^2=b^2+4$ (2)

Kết hợp $(1);(2)$ ta được:

$a^2b^2=45\Leftrightarrow\left(b^2+4\right)b^2=45\Leftrightarrow b^4+4b^2-45=0\Leftrightarrow b^2=5$ hoặc $b^2=-9(l)$

Với $b^2=5\Rightarrow a^2=9$

Vậy phương trình Elip cần tìm là : $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

**Câu 4.** Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

a) Elip đi qua điểm $M\left(-\sqrt{5};2\right)$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 10.

b) Elip có tâm sai $e=\dfrac{3}{5}$ và khoảng cách từ tâm đối xứng của nó đến một đường chuẩn bằng $\dfrac{25}{3}$ .

c) Elip có độ dài trục lớn bằng 10 và phương trình một đường chuẩn là $x=\frac{25}{4}$ .

d) Khoảng cách giữa các đường chuẩn bằng 36 và bán kinh qua tiêu điểm của M thuộc Elip là 9 và 15.

**Lời giải**.

a) Elip đi qua điểm $M\left(-\sqrt{5};2\right)$ nên $\frac{5}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$ .(1)

Khoảng cách giữa hai đường chuẩn của Elip bằng 10 nên:

$$2.\frac{a}{e}=10\Leftrightarrow\frac{a}{e}=5\Leftrightarrow\frac{a^2}{c}=5\Leftrightarrow a^2=5c \qquad (2)$$

Từ (2), kết hợp với hệ thức $a^2=b^2+c^2$ , ta được $b^2=a^2-c^2=5c-c^2$ $(3)$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\frac{5}{5c}+\frac{4}{5c-c^2}=1\Leftrightarrow c^2-6c+9=0\Leftrightarrow c=3$$

Với $c=3$ , suy ra $\begin{cases}a^2=15\\b^2=6\end{cases}$

Vậy phuowng trình Elip cần tìm là : $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$

b) Ta có $e=\frac{3}{5}\Leftrightarrow\frac{c}{a}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow c=\frac{3}{5}a$

Elip có khoảng cách từ tâm đối xứng O đến một đường chuẩn là $\frac{25}{3}$ nên:

$$\frac{a}{e}=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\frac{a^2}{c}=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\frac{a^2}{\frac{3}{5}a}=\frac{25}{3}\Leftrightarrow a=5$$

Với $a=5\Rightarrow c=3$ và $b^2=a^2-c^2=16$

Vậy Elip cần tìm có phương trình là: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

c) Elip có độ dài trục lớn bằng 10 nên $2a=10\Leftrightarrow a=5$

Mặt khác, Elip có phương trình đường chuẩn $x=\frac{25}{4}\Leftrightarrow\frac{a}{e}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow\frac{a^2}{e}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow\frac{5^2}{c}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow c=4$

Suy ra $b^2=a^2-c^2=9$

Vậy phương trình Elip cần tìm có phương trình là $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

d) Elip có khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 36 nên:

$2.\frac{a}{e}=36\Leftrightarrow 2.\frac{a^2}{c}=36\Leftrightarrow \frac{a^2}{c}=18$

Mặt khác, ta có: $\begin{cases}a+ex=9\\a-ex=15\end{cases}\Rightarrow a=12$

Với $a=12\Rightarrow c=8$ và $b^2=a^2-c^2=144-64=80$

Vậy phương trình Elip là : $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{80}=1$

**Câu 5.** Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

a) Elip có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C):x^2+y^2=41$ và đi qua điểm $A(0;5)$ .

b) Elip co hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C):x^2+y^2=21$ và đi qua điểm $M(1;2)$ nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc $60^0$ .

c) Một cạnh hình chữ nhật cơ sở của Elip nằm trên $d:x-\sqrt{5}=0$ và độ dài đường chéo hình chữ nhật bằng 6.

d) Tứ giác ABCD là hình thoi có bốn đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Bán kính của đường tròn nội tiếp hình thoi bằng $\sqrt{2}$ và tâm sai của Elip bằng $\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

**a)** Elip đi qua điểm $A(0;5)\in Oy$ , suy ra $b=5$ .

Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x=\pm a;y=\pm 5$

Suy ra một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là $(a;5)$ .

Theo giả thiết $(a;5)$ thuộc đường tròn (C) nên ta có:

$a^2+25=41\Leftrightarrow a^2=16$

Vậy phương trình Elip cần tìm là : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

**b)** Theo giả thiết bài toán ta có: $\widehat{F_1MF_2}=60^0$ , suy ra:

$F_1F_2^{\ 2}=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1MF_2.\cos 60^0$

$\Leftrightarrow 4c^2=(1+c)^2+4+(1-c)^2-2.\frac{1}{2}\sqrt{(1+c)^2+4}.\sqrt{(1-c)^2+4}$

$\Leftrightarrow 4c^2=2c^2+10-\sqrt{(1+c)^2+4}.\sqrt{(1-c)^2+4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}10-2c^2\ge 0\\\left[(1+c)^2+4\right]\left[(1-c)^2+4\right]=(10-2c^2)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < c \le \sqrt{5} \\ 3c^4 - 46c^2 + 75 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{23 \pm 4\sqrt{19}}{3}$$

Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x = \pm a; y = \pm b$ nên tọa độ một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là $(a;b)$

Theo giả thiết các đỉnh của hình chữ nhật thuộc đường tròn $(C)$ nên ta có: $a^2 + b^2 = 21$

Với $c^2 = \frac{23 + 4\sqrt{19}}{3}$, ta có: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 21 \\ a^2 - b^2 = \frac{23 + 4\sqrt{19}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{43 + 2\sqrt{19}}{3} \\ b^2 = \frac{20 - 2\sqrt{19}}{3} \end{cases}$

Suy ra Elip có phương trình $\frac{x^2}{\frac{43 + 2\sqrt{19}}{3}} + \frac{y^2}{\frac{20 - 2\sqrt{19}}{3}} = 1$

Với $c^2 = \frac{23 - 4\sqrt{19}}{3}$, ta có: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 21 \\ a^2 - b^2 = \frac{23 - 4\sqrt{19}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{43 - 2\sqrt{19}}{3} \\ b^2 = \frac{20 + 2\sqrt{19}}{3} \end{cases}$

Suy ra Elip có phương trình $\frac{x^2}{\frac{43 - 2\sqrt{19}}{3}} + \frac{y^2}{\frac{20 + 2\sqrt{19}}{3}} = 1$

c) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x = \pm a; y = \pm b$

Theo giả thiết một cạnh của hình chữ nhật cơ sở là : $x - \sqrt{5} = 0$ nên $a = \sqrt{5}$ .

Độ dài đường chéo của hình chữ nhật cơ sở bằng 6 nên:

$\sqrt{4a^2 + 4b^2} = 6 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 = 36 \Leftrightarrow 20 + 4b^2 = 36 \Leftrightarrow b^2 = 4$

Vậy phương trình Elip cần tìm là: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

d) Elip có tâm sai $e = \frac{1}{2}$ $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 2c$ .

Elip có các đỉnh $A_1(-a;0), A_2(a;0), B_1(0;-b), B_2(0;b)$ . Gọi H là hình chiếu của O lên $A_2B_2$ .

Theo giả thiết ta có bán kính của dường tròn đã cho bằng OH. Ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{a^2 - c^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{3c^2} \Leftrightarrow c^2 = \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4c^2 = \dfrac{14}{3} \\ b^2 = a^2 - c^2 = 3c^2 = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình Elip cần tìm là: $\dfrac{x^2}{14/3} + \dfrac{y^2}{7/2} = 1$

**Câu 6.** Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

a) Tứ giác ABCD là hình thoi có 4 đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $(C): x^2 + y^2 = 4$ và $AC = 2BD$ , A thuộc Ox.

b) Elip có độ dài trục lớn bằng 8 và giao điểm của Elip với đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ tạo thành 4 đỉnh của một hình vuông.

c) Elip có tâm sai $e = \dfrac{1}{3}$ và giao điểm của fElip với đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$ tại 4 điểm A, B, C, D sao cho AB song song với Ox và $AB = 3BC$ .

d) Elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$ , các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của Elip cùng nằm trên một đường tròn.

**Lời giải.**

a) Giả sử một đỉnh của hình thoi là $A(a;0)$ . Suy ra $AC = 2a$ và $BD = 2b$ .

Theo giả thiết : $AC = 2BD \Leftrightarrow 2a = 2.2b \Leftrightarrow a = 2b$

Đường tròn $(C)$ có $R = 2$ . Gọi H là hình chiếu của O lên AB với $B(0;b)$ . Khi đó ta có:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow b^2 = 5$$

$\Rightarrow a^2 = 20$ .

Vậy phương trình Elip là: $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

b) Elip có độ dài trục lớn bằng 8 nên $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$ .

Do $(E);(C)$ đều có tâm đối xứng là O và trục đối xứng là Ox; Oy nên hình vuông tạo bởi giữa chúng cũng có tính chất tương tự. Do đó, ta giả sử gọi một đỉnh của hình vuông là $M(x;x)$ với x > 0. Vì $M \in (C)$ nên: $x^2 + x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow M(2;2)$ .

Ta có $M \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{16} + \dfrac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = \dfrac{16}{3}$

Vậy phương trình của Elip là: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{16/3} = 1$

c) Elip có tâm sai $e = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3c$ .

Đặt $BC = x$ với $x > 0 \Rightarrow AB = 3x$ . Giả sử một đỉnh $A\left(\frac{3}{2}x;\frac{1}{2}x\right)$ . Ta có:

$$A \in (C) \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{18}{5} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{9\sqrt{10}}{10};\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

Mặt khác, do $A \in (E)$ nên:

$$\frac{81}{10a^2} + \frac{9}{10b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{81}{10(3c)^2} + \frac{9}{10\left(a^2 - c^2\right)} = 1 \Leftrightarrow c^2 = \frac{81}{80}$$

$$\Rightarrow a^2 = 9c^2 = \frac{729}{80}; b^2 = a^2 - c^2 = \frac{81}{10}$$

Vậy phương trình Elip cần tìm là : $\frac{x^2}{729/80} + \frac{y^2}{81/10} = 1$

d) Do độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$ nên $2a = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2}$ .
Các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm cùng thuộc đường tròn nên b= c

Từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 8 = 2b^2 \Leftrightarrow b^2 = 4$

Vậy Elip cần tìm có phương trình là: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

**Câu 7.** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có hai đỉnh trên trục nhỏ cùng với hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông có diệc tích bằng 32.

b) Elip có một đỉnh và hai tiêu điểm tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của Elip bằng $12\left(2+\sqrt{3}\right)$ .

c) Elip đi qua điểm $M\left(2\sqrt{3};2\right)$ và M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

d) Elip đi qua điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc $60^0$ .

**Lời giải.**

**a)** Hai đỉnh trên trục nhỏ và hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông nên $b = c$ .
Mặt khác diện tích hình vuông bằng 32 nên: $2c.2b = 32 \Leftrightarrow b^2 = 8$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 2b^2 = 16$$

Vậy phương trình Elip là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$

**b)** Chu vi hình chũ nhật cơ sở : $C = 12\left(2+\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow 2(2a+2b) = 12\left(2+\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow a+b = 3\left(2+\sqrt{3}\right)$ (1)

Giải sử tam giác $F_1F_2B_2$ đều cạnh $F_1F_2 = 2c$ mà $B_2O \perp F_1F_2$ .

Suy ra $OB_2=\frac{\sqrt{3}}{2}F_1F_2\Leftrightarrow b=\frac{\sqrt{3}}{2}.2c=\sqrt{3}c \qquad (2)$

Từ (1) (2) suy ra : $3\left(2+\sqrt{3}\right)-b=3\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}c$ .

Thay vào hệ thức $a^2=b^2+c^2$ , ta được:

$$\left[\left(6+3\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}c\right]^2=4c^2\Leftrightarrow c^2+6\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)c-\left(6+3\sqrt{3}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=3\\c=-12\sqrt{3}-21(l)\end{array}\right.$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình là : $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

c) Từ giả thiết, ta suy ra $\overrightarrow{MF_1}.\overrightarrow{MF_2}=0\Leftrightarrow\left(-c-2\sqrt{3}\right)\left(c-2\sqrt{3}\right)+4=0\Leftrightarrow c^2=16$

Hơn nữa $(E)$ qua điểm M nên:

$\frac{12}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{12}{b^2+16}+\frac{4}{b^2}=1\Leftrightarrow b^4=64\Leftrightarrow b^2=8$

Suy ra : $a^2=b^2+c^2=24$ .

Vậy phương trình $(E)$ cần tìm là : $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$

d) Từ giả thiết, ta suy ra $\widehat{B_1F_1B_2}=60^0$ mà $F_1B_1=F_1B_2\Rightarrow$ Tam giác $F_1B_1B_2$ đều cạnh bằng 2b nên:

$F_1O=\frac{\sqrt{3}}{2}B_1B_2\Leftrightarrow c=\frac{\sqrt{3}}{2}.2b\Leftrightarrow c=\sqrt{3}b \qquad (1)$

Hơn nữa $(E)$ qua $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nên: $\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\Leftrightarrow\frac{1}{b^2+3b^2}+\frac{3}{4b^2}=1\Leftrightarrow b^2=1$ (2)

Từ $(1);(2)$ , kết hợp với $a^2=b^2+c^2$ ta được $a^2=4$

Vậy Elip cần tìm có phương trình là : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

**Câu 8.** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có một tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm M, biết tam giác $F_1MF_2$ có diện tích bằng 1 và vuông tại M.

b) Elip đi qua 3 đỉnh của tam giác đều ABC. Biết tam giác ABC có trục đối xứng là Oy, $A(0;2)$ và có diện tích bằng $\frac{49\sqrt{3}}{12}$ .

c) Khi M thay đổi trên Elip thì độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 và độ dài lớn nhất của $MF_1$ bằng 8 với $F_1$ là tiêu điểm có hoành độ âm của Elip.

**Lời giải**

**a)** Elip có tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)\Rightarrow c=\sqrt{3}$ .

Gọi $M\left(x;y\right)\in\left(E\right)$ . Theo giả thiết, ta có:

$$S_{\Delta F_1MF_2}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}MF_1.MF_2=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(a+\text{ex}\right)\left(a-\text{ex}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow a^2-e^2x^2=2\Leftrightarrow a^2-\frac{3}{a^2}.x^2=2\Leftrightarrow x^2=\frac{\left(a^2-2\right)a^2}{3}\qquad(1)$$

Cũng từ $MF_1\perp MF_2$ , ta có:

$$\overrightarrow{MF_1}.\overrightarrow{MF_2}=0\rightarrow\Leftrightarrow\left(-c-x\right)\left(c-x\right)+\left(-y\right)\left(-y\right)=0\Leftrightarrow x^2+y^2=c^2=3\qquad(2).$$

Từ $\left(1\right);\left(2\right)$ ta có, $y^2=3-x^2=3-\frac{\left(a^2-2\right)a^2}{3}=\frac{9-a^4+2a^2}{3}$

Do đó,

$$M\left(x;y\right)\in\left(E\right)\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{a^2-2}{3}+\frac{9-a^4+2a^2}{3\left(a^2-3\right)}=1$$
$$\Leftrightarrow\left(a^2-2\right)\left(a^2-3\right)+9-a^4+2a^2=3a^2-9$$
$$\Leftrightarrow a^2=4$$

Suy ra $b^2=1$ . Vậy Elip cần tìm có phương trình $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

**b)** Tam giác ABC đều, có điểm $A\left(0;2\right)\in Oy$ và có trục đối xứng là Oy nên hai điểm B, C đối xứng với nhau qua Oy.

Giả sử $B\left(x;y\right)$ với $x>0;y<2$ , suy ra $C\left(-x;y\right)$ . Độ dài cạnh của tam giác là 2x.

Theo giả thiết, ta có:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{49\sqrt{3}}{12}\Leftrightarrow\frac{\left(2x\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{49\sqrt{3}}{12}\Rightarrow x=\frac{7}{2\sqrt{3}}$$

Đường cao của tam giác đều $h=\frac{2x\sqrt{3}}{2}=x\sqrt{3}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow2-y=\frac{7}{2}\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$

Suy ra $B\left(\frac{7}{2\sqrt{3}};\frac{3}{2}\right)$

Đến đây bài toán trở thành viết phương trình Elip đi qua 2 điểm $A\left(0;2\right)$ và $B\left(\frac{7}{2\sqrt{3}};\frac{3}{2}\right)$.

Vậy phương trình Elip cần tìm có phương trình $\left(E\right):\frac{x^2}{28/5}+\frac{y^2}{4}=1$

**c)** Độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 nên $b=4$ .

Mặt khác, ta lại có độ dài lớn nhất $MF_1$ bằng 8 nên $a+c=8$ .

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+c=8 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=8 \\ a^2=16+c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ c=3 \end{cases}$

Vậy phương trình Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

Để xác định tọa độ điểm M thuộc elip có phương trình chính tắc là $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (a>b>0)$ ta làm như sau

- Giả sử $M(x_M;y_M)$, điểm $M \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1$ ta thu được phương trình thứ nhất.
- Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai; giải phương trình, hệ phương trình ẩn $x_M$, $y_M$ ta tìm được tọa độ của điểm M

**Câu 9.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho

a) Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ . Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; A, B là hai điểm thuộc $(E)$ sao cho $AF_1+BF_2=8$ . Tính $AF_2+BF_1$

b) Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ . Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc $(E)$ sao cho $MF_1=2MF_2$

c) Elip $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ . Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc $(E)$ sao cho $MF_1-MF_2=2$

**Lời giải**

**a)** Ta có $a^2=25 \Rightarrow a=5$ . Do A, B thuộc $(E)$ nên: $AF_1+AF_2=2a=10$ và $BF_1+BF_2=2a=10$

Suy ra $AF_1+AF_2+BF_1+BF_2=20 \Leftrightarrow 8+AF_2+BF_1=20 \Leftrightarrow AF_2+BF_1=12$

**b)** Ta có $a^2=9 \Rightarrow a=3$ và $b^2=5 \Rightarrow b=\sqrt{5}$

Suy ra $c^2=a^2-b^2=4 \Rightarrow c=2$ .

Gọi $M(x;y) \in (E)$ . Ta có $MF_1=2MF_2 \Leftrightarrow a+ex=2(a-ex) \Leftrightarrow x=\frac{a}{3e}=\frac{a^2}{3c}=\frac{3}{2}$

Thay vào $(E)$ ta được: $\frac{9}{4.9}+\frac{y^2}{5}=1 \Leftrightarrow y^2=\frac{15}{4} \Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

Vậy $M\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

c) Ta có $a^2=8 \Rightarrow a=2\sqrt{2};b=2;c=2$

Gọi $M(x;y) \in (E)$ . Ta có $MF_1-MF_2=2 \Leftrightarrow a+ex-(a-ex)=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}=\frac{a}{c}=\frac{2\sqrt{2}}{2}$

Thay vào $(E)$ ta được: $\frac{2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\Leftrightarrow y^2=3\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}$

Vậy $M\left(\sqrt{2};-\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.

**Câu 10.** Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho.

a) Elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ . Tìm những điểm M thuộc ( E ) sao cho nó nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc vuông.

b) Elip $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ . Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip. Tìm tọa độ điểm M thuộc $(E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2}=60^0$

c) Elip $(E):\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ . Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip, Tìm tọa độ điểm M thuộc $(E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2}=120^0$

d) Elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ . Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc $(E)$ sao cho $\widehat{MF_1F_2}=120^0$

**Lời giải**

a) Ta có $\begin{cases}a^2=9\\b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$ . Suy ra $c^2=a^2-b^2=2\Rightarrow c=2\sqrt{2}$ .

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Ta có $\widehat{F_1MF_2}=90^0$ nên :

$F_1F_2^2=MF_1^2+MF_2^2\Leftrightarrow 4c^2=(a+ex)^2+(a-ex)^2$

$\Leftrightarrow 32=2a^2+2e^2x^2$

$\Leftrightarrow 32=18+2.\frac{8}{9}.x^2$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

Thay vào $(E)$ , ta được $y^2=\frac{1}{8}\Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Vậy $M\left(\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2\sqrt{2}}\right);M\left(\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right);M\left(-\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2\sqrt{2}}\right);M\left(-\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

b) Ta có $\begin{cases}a^2=4\\b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ . Suy ra $c^2=a^2-b^2=3\Rightarrow c=\sqrt{3}$ .

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Ta có $\widehat{F_1MF_2}=60^0$ nên :

$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_2MF_1.\cos 60^0$

$\Leftrightarrow 4c^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 - 2(a+ex)(a-ex).\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 12 = 2a^2 + 2e^2x^2 - a^2 + e^2x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{12-a^2}{3e^2} = \dfrac{32}{9} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Thay vào $(E)$ , ta được $y^2 = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{1}{3}$

Vậy $M\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\dfrac{1}{3}\right); M\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3};-\dfrac{1}{3}\right); M-\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\dfrac{1}{3}\right); M\left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

c) Ta có $\begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 5 \end{cases}$ . Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 75 \Rightarrow c = 5\sqrt{3}$ .

Gọi $M(x;y) \in (E)$. Ta có $\widehat{F_1MF_2} = 60^0$ nên :

$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_2MF_1.\cos 120^0$

$\Leftrightarrow 4c^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 + 2(a+ex)(a-ex).\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 300 = 2a^2 + 2e^2x^2 + a^2 - e^2x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{300-3a^2}{e^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Thay vào $(E)$ , ta được $y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 5$

Vậy $M(0;5); M(0;-5)$

d) Ta có $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$ . Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$ .

Gọi $M(x;y) \in (E)$. Ta có $\widehat{F_1MF_2} = 60^0$ nên :

$MF_2^2 = MF_1^2 + F_1F_2^2 - 2F_1F_2MF_1.\cos 120^0$

$\Leftrightarrow (a-ex)^2 = (a+ex)^2 + 4c^2 + 2(a+ex)2c.\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 4aex + 4c^2 + 2ac + 2ecx = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{65}{14}$

Thay vào $(E)$ , ta được $y^2 = \dfrac{243}{196} \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{9\sqrt{3}}{14}$

Vậy $M\left(-\dfrac{65}{14};\dfrac{9\sqrt{3}}{14}\right); M\left(-\dfrac{65}{14};-\dfrac{9\sqrt{3}}{14}\right)$

**Câu 11.** Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho.

a) Elip $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ và điểm $C(2;0)$ . Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc ( E ) biết rằng A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC đều.

b) Elip $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc ( E ) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

**c)** Elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ và điểm $A(3;0)$ **.** Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc ( E ) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết B có tung độ dương.

**Lời giải**

a) Ta có $\begin{cases}a^2=4\\b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ . Suy ra $c^2=a^2-b^2=3\Rightarrow c=\sqrt{3}$ .

Giả sử $A(x;y)\Rightarrow B(x;-y)$ . Theo giả thiết, tam giác ABC đều nên :

$AC^2=AB^2\Leftrightarrow(2-x)^2+y^2=4y^2\Leftrightarrow(2-x)^2=3y^2$ (1)

Hơn nữa $A\in(E)\Leftrightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\Leftrightarrow x^2+4y^2=4$ (2)

Từ $(1);(2)$ ta có:

$\begin{cases}(2-x)^2=3y^2\\x^2+4y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$ hoac $\begin{cases}x=2/7\\y=4\sqrt{3}/7\end{cases}$ hoac $\begin{cases}x=2/7\\y=-4\sqrt{3}/7\end{cases}$

Vì $A$, $B$ khác $C$ nên $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $B\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ và $B\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

b) Do tam giác $OAB$ cân tại $O$ và $A$, $B$ đều có hoành độ dương nên $A$, $B$ đối xứng nhau qua $Ox$.

Giả sử $A(x;y)$ với $x>0$, suy ra $B(x;-y)$. Gọi $H$ là hình chiếu của $O$ lên $AB$. Khi đó ta có

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}AB.OH=\frac{1}{2}|2y|x=x|y|$.

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy*, ta có $1=\frac{x^2}{4}+y^2\geq 2.\frac{x}{2}.|y|=x|y|$.

Do đó $S_{\Delta OAB}\leq 1$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{x^2}{4}=y^2$.

Thay vào $(E)$, ta được $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\Leftrightarrow y^2+y^2=1\Leftrightarrow y^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $x^2=2\Rightarrow x=\sqrt{2}$.

Vậy $A\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $B\left(\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $B\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

c) Gọi $B(x;y)$ với $x>0$.

Do tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$, suy ra $B$ và $C$ đối xứng nhau qua $Ox$ nên $C(x;-y)$.

Ta có $AB\perp AC\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(x-3)^2-y^2=0$. (1)

Hơn nữa, $B\in(E)\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$. (2)

Từ (1) và (2), ta có

$\begin{cases}(x-3)^2-y^2=0\\\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1-\frac{x^2}{9}\\(x-3)^2-1+\frac{x^2}{9}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1-\frac{x^2}{9}\\\frac{10}{9}x^2-6x+8=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{12}{5} \\ y=\pm\dfrac{3}{5} \end{cases}$.

Vì $A$, $B$ khác $C$ nên $B\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{3}{5}\right)$, $C\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$.

**Câu 12.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho

a) Elip $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{5}=1$ và hai điểm $A(-5;-1)$, $B(-1;1)$. Xác định tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho diện tích tam giác $MAB$ lớn nhất.

b) Elip $(E):\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ và hai điểm $A(3;4)$, $B(5;3)$. Tìm trên $(E)$ điểm $C$ sao cho tam giác $ABC$ có diện tích bằng $4,5$.

c) Elip $(E):\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Tìm trên $(E)$ những điểm sao cho khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng $d:2x-3y+1=0$ là lớn nhất.

**Lời giải**

a) Gọi $M(x;y)\in(E)$ nên $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{5}=1$. Phương trình đường thẳng $AB:x-2y+3=0$. Ta có

$$S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}AB.d(M,AB)=\frac{1}{2}.2\sqrt{5}.\frac{|x-2y+3|}{\sqrt{5}}=|x-2y+3|.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Bunhiacopxki*, ta được

$$(x-2y)^2=\left(4.\frac{1}{4}x-2\sqrt{5}.\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2\le\left[\left(\frac{1}{4}x\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2\right]\left[4^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2\right]$$

$$=\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}\right).36$$

$$=1.36=36$$

Suy ra $|x-2y|\le 6$ nên $|x-2y+3|\le 9$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{4}x}{4}=\dfrac{\frac{y}{\sqrt{5}}}{-2\sqrt{5}} \\ x-2y+3=9 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{8}{3} \\ y=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$.

Vậy $M\left(\dfrac{8}{3};-\dfrac{5}{3}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Gọi $C(x;y)\in(E)\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1.\qquad(1)$

Phương trình đường thẳng $AB:x+2y-11=0$.

Ta có

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C,AB)=4,5\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sqrt{5}\frac{|x+2y-11|}{\sqrt{5}}=4,5$$

$$\Leftrightarrow|x+2y-11|=9$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+2y-11=9 & (2) \\ x+2y-11=-9. & (3) \end{cases}$$

Từ $(1)$ và $(2)$, ta có

$\begin{cases} x+2y-11=9 \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20-2y \\ \dfrac{(20-2y)^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20-2y \\ 2y^2-20y+98=0 \end{cases}$ : vô nghiệm.

Từ $(1)$ và $(3)$, ta có

$\begin{cases} x+2y-11=-9 \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ \dfrac{(2-2y)^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\sqrt{3} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1+\sqrt{3} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Vậy $C\left(1-\sqrt{3};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ hoặc $C\left(1+\sqrt{3};\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Gọi $M(x;y)\in(E) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1}=1 \Leftrightarrow x^2+2y^2=2$.

Ta có $d(M,d)=\dfrac{|2x-3y+1|}{\sqrt{13}}$.

Áp dụng bất đẳng thức *Bunhiacopxki*, ta có

$(2x-3y)^2=\left(2.x-\dfrac{3}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}y\right)^2 \le \left[x^2+\left(\sqrt{2}y\right)^2\right]\left(4+\dfrac{9}{2}\right)=2.\dfrac{17}{2}=17$.

Suy ra $|2x-3y|\le\sqrt{17}$ nên $|2x-3y+1|\le\sqrt{17}+1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}y}{\dfrac{-3}{\sqrt{2}}} \\ 2x-3y=\sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{\sqrt{17}} \\ y=-\dfrac{3}{\sqrt{17}} \end{cases}$.

Vậy $d(M,d)$ lớn nhất bằng $\dfrac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{13}}$ khi $M\left(\dfrac{4}{\sqrt{17}};-\dfrac{3}{\sqrt{17}}\right)$.

**Câu 13.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho

a) Elip $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và các điểm $A(-3;0)$, $I(-1;0)$. Tìm tọa độ các điểm $B$, $C$ thuộc $(E)$ sao cho $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

b) Elip $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $MF_1F_2$ bằng $\dfrac{4}{3}$.

c) Elip $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho đường phân giác trong góc $\widehat{F_1MF_2}$ đi qua điểm $N\left(-\dfrac{48}{25};0\right)$.

**Lời giải**

a) Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ có tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=IA=2$ là:

$(C):(x+1)^2+y^2=4$.

Theo giả thiết, ta có $B, C\in(E)\cap(C)$ nên tọa độ điểm $B$, $C$ là nghiệm của hệ

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ (x+1)^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+9y^2=36 \\ 9(x+1)^2+9y^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+9y^2=36 \\ 9(x+1)^2-4x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+9y^2=36 \\ 5x^2+18x+9=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$ (loại) hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{4\sqrt{6}}{5} \end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=-\dfrac{4\sqrt{6}}{5} \end{cases}$.

Vậy $B\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right)$, $C\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right)$ hoặc $B\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right)$, $C\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right)$.

b) Ta có $a^2=25\Rightarrow a=5$ và $b^2=9\Rightarrow b=3$. Suy ra $c^2=a^2-b^2=16\Rightarrow c=4$.

Hai tiêu điểm của Elip là: $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Ta có $S_{\Delta MF_1F_2}=p.r$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}F_1F_2.d(M,F_1F_2)=\dfrac{MF_1+MF_2+F_1F_2}{2}.r$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.2c.|y|=(a+c).\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow 4|y|=9.\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow |y|=3\Leftrightarrow y=\pm 3$.

Thay vào phương trình $(E)$, ta được $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{9}{9}=1\Leftrightarrow x=0$.

Vậy $M(0;3)$ hoặc $M(0;-3)$.

c) Ta có $a^2=25\Rightarrow a=5$ và $b^2=9\Rightarrow b=3$. Suy ra $c^2=a^2-b^2=16\Rightarrow c=4$.

Hai tiêu điểm của Elip là: $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$.

Theo giả thiết $MN$ là phân giác trong của $\widehat{F_1MF_2}$, suy ra

$\dfrac{F_1N}{F_2N}=\dfrac{F_1M}{F_2M}\Leftrightarrow \dfrac{52}{148}=\dfrac{a+ex}{a-ex}\Leftrightarrow 12a+25ex=0\Leftrightarrow 12.5+25.\dfrac{4}{5}x=0\Leftrightarrow x=-3$.

Thay vào phương trình $(E)$, ta được $\dfrac{9}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow y=\pm\dfrac{12}{5}$.

Vậy $M\left(-3;\dfrac{12}{5}\right)$ hoặc $M\left(-3;-\dfrac{12}{5}\right)$.

**Câu 14.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho

a) Elip $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua $M$ và cắt $(E)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho $M$ là trung điểm $AB$.

b) Elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ và điểm $M\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua $M$ và cắt $(E)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho $MA=2MB$.

c) Elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ và đường thẳng $d:2x+y+3=0$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ vuông góc $d$ và cắt $(E)$ tại hai điểm $A$, $B$ sao cho tam giác $OAB$ có diện tích bằng $1$.

d) Elip $(E):x^2+3y^2=6$ có hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$ trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Gọi $d$ là đường thẳng đi qua $F_2$ và song song với $\Delta:y=-x+1$ đồng thời cắt $(E)$ tại hai điểm $A$, $B$ phân biệt. Tính diện tích tam giác $ABF_1$.

**Lời giải**

a) Thay tọa độ điểm $M$ vào vế trái của $(E)$ ta được $\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{9}<1$. Suy ra $M$ nằm ở miền trong của $(E)$.

Do đó mọi đường thẳng đi qua $M$ đều cắt $(E)$ tại hai điểm phân biệt.

Gọi $A(x;y)\in(E)$ nên $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. $(1)$

Do $M(1;1)$ là trung điểm của $AB$ nên $B(2-x;2-y)$.

Vì $B\in(E)$ nên $\frac{(2-x)^2}{25}+\frac{(2-y)^2}{9}=1$. $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$, ta được

$$\frac{x^2-4x+4}{25}+\frac{y^2-4y+4}{9}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\left(\frac{-4x+4}{25}+\frac{-4y+4}{9}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{-4x+4}{25}+\frac{-4y+4}{9}=0\Leftrightarrow 9x+25y-34=0. \quad (*)$$

Do tọa độ hai điểm $A$, $B$ đều thỏa mãn $(*)$ nên phương trình $(*)$ chính là phương trình đường thẳng $d$ cần tìm.

Cách 2. Ta có $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow 9x^2+25y^2=225$. Gọi $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ là hai điểm thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có $A,B\in(E)\Leftrightarrow\begin{cases}9x_1^2+25y_1^2=225\\9x_2^2+25y_2^2=225\end{cases}$.

Trừ vế theo vế ta được $9(x_1-x_2)(x_1+x_2)+25(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$.

Vì $M$ là trung điểm $AB$ nên $\begin{cases}x_1+x_2=2x_M=2\\y_1+y_2=2y_M=2\end{cases}$. Thay vào trên, ta được

$$18(x_1-x_2)+50(y_1-y_2)=0\Leftrightarrow y_1-y_2=-\frac{9}{25}(x_1-x_2).$$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1)=\left(x_2-x_1;-\frac{9}{25}(x_1-x_2)\right)=(x_1-x_2)\left(1;-\frac{9}{25}\right)$.

Suy ra $\vec{u}=(25;-9)$ là một vec-tơ chỉ phương của $\Delta$ nên $\Delta:9x+25y-34=0$.

*Bằng cách giải thứ nhất ta có thể giải được bài toán tổng quát khi thay giả thiết $MA=MB$ bằng giả thiết $M$ chia đoạn $AB$ theo tỉ số $k$ nào đó.*

Cụ thể ta xét bài toán sau

b) Gọi $A(x;y)$, $B(x_0;y_0)$. Vì $B\in(E)$ nên $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{1}=1$. $(1)$

Thay tọa độ điểm $M$ vào vế trái của $(E)$ ta được

$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1}=\frac{20}{36}<1$. Suy ra $M$ nằm ở miền trong của $(E)$.

Mà $MA=2MB$ suy ra $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}$ nên $A(-2x_0+2;-2y_0+2)$.

Mặt khác, $A\in(E)$ nên $\frac{(-2x_0+2)^2}{4}+\frac{(-2y_0+2)^2}{1}=1$. $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$, ta có

$$\begin{cases}\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{1}=1\\\frac{(-2x_0+2)^2}{4}+\frac{(-2y_0+2)^2}{1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y_0^2-8y_0+3=0\\\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=0\\y_0=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x_0=\frac{8}{5}\\y_0=\frac{3}{5}\end{cases}.$$

• Với $B(0;1)$. Đường thẳng cần tìm đi qua $M$ và $B$ nên có phương trình: $x+2y-2=0$.

• Với $B\left(\frac{8}{5};\frac{3}{5}\right)$. Đường thẳng cần tìm đi qua $M$ và $B$ nên có phương trình: $5x+70y-50=0$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán là: $x+2y-2=0$ hoặc $5x+70y-50=0$.

c) Do $\Delta$ vuông góc với $d:2x+y+3=0$ nên $\Delta:x-2y+m=0$.

Đường thẳng $\Delta$ cắt $(E)$ tại hai điểm $A$, $B$ nên tọa độ $A$, $B$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\\ x-2y+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y-m\\ x^2+4y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y-m\\ 8y^2-4my+m^2-4=0\end{cases}\quad(*).$$

Để $\Delta$ cắt $(E)$ tại hai điểm $A$, $B$ phân biệt khi phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow 32-4m^2>0\Leftrightarrow -2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

Gọi $y_1$, $y_2$ là hai nghiệm của phương trình $(*)$, suy ra $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{m}{2}\\ y_1.y_2=\frac{m^2-4}{8}\end{cases}$.

Ta được tọa độ $A(2y_1-m;y_1)$, $B(2y_2-m;y_2)$. Ta có

$$AB=\sqrt{5(y_2-y_1)^2}=\sqrt{5\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]}=\frac{\sqrt{5(8-m^2)}}{2}.$$

Mặt khác, $d(O,AB)=d(O,\Delta)=\frac{|m|}{\sqrt{5}}$. Do đó

$$S_{\Delta OAB}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}AB.d(O,AB)=1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{m^2(8-m^2)}}{4}=1\Leftrightarrow m=\pm 2.$$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn là $\Delta:x-2y+2=0$ hoặc $\Delta:x-2y-2=0$.

d) Phương trình Elip $(E)$ ở dạng chính tắc $(E):\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

Ta có $a^2=6$, $b^2=2$. Suy ra $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$.

Hai tiêu điểm có tọa độ là: $F_1(-2;0)$ và $F_2(2;0)$.

Đường thẳng $d$ đi qua $F_2(2;0)$ và song song với $\Delta:y=-x+1$ nên có phương trình $d:x+y-2=0$.

Tọa độ điểm $A$, $B$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y-2=0\\ x^2+3y^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\ x^2+3(2-x)^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\ 2x^2-6x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\\ y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\\ y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}.$$

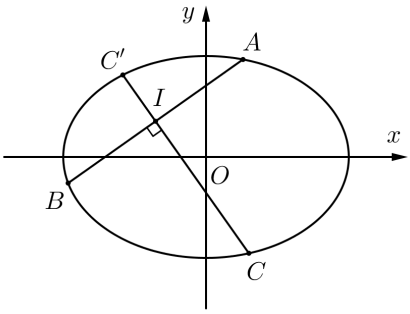
Do đó $A\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ hoặc $A\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Khi đó $AB=\sqrt{6}$ và $d(F_1,AB)=d(F_1,d)=2\sqrt{2}$.

Suy ra diện tích tam giác $ABF_1$ là $S_{\Delta ABF_1}=\frac{1}{2}AB.d(F_1,d)=2\sqrt{3}$.

**Câu 15.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $d:x-\sqrt{2}y+2=0$. Đường thẳng $d$ cắt $(E)$ tại hai điểm $A$, $B$. Tìm tọa độ điểm $C$ trên $(E)$ sao cho tam giác $ABC$ cân tại $C$.

**Lời giải**




Đường thẳng $d$ cắt $(E)$ tại $A$, $B$ nên tọa độ $A$, $B$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x-\sqrt{2}y+2=0 \\ 4x^2+8y^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}y-2 \\ x^2+2y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}y-2 \\ y^2-\sqrt{2}y-1=0 \end{cases}.$$

Gọi $I$ là trung điểm của $AB$. Suy ra $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Thay vào $d$, ta được $x_I=-1$. Do đó $I\left(-1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $I$ và vuông góc với $d$ nên $\Delta:\sqrt{2}x+y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$.

Theo giả thiết tam giác $ABC$ cân tại $C$ nên $C\in\Delta$, đồng thời $C\in(E)$.

Suy ra tọa độ điểm $C$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \sqrt{2}x+y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0 \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x+y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0 \\ x^2+2y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\sqrt{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 5x^2+4x-7=0 \end{cases}.$$

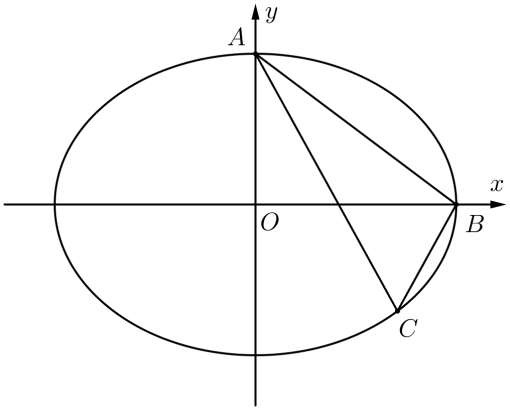
$$\Rightarrow C\left(\frac{-2+\sqrt{39}}{5};-\frac{2\sqrt{78}+\sqrt{2}}{10}\right) \text{ hoặc } C\left(\frac{-2-\sqrt{39}}{5};\frac{2\sqrt{78}-\sqrt{2}}{10}\right).$$

Vậy tọa độ điểm $C$ cần tìm là

$$C\left(\frac{-2+\sqrt{39}}{5};-\frac{2\sqrt{78}+\sqrt{2}}{10}\right) \text{ hoặc } C\left(\frac{-2-\sqrt{39}}{5};\frac{2\sqrt{78}-\sqrt{2}}{10}\right).$$

**Câu 16.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $d:3x+4y-12=0$. Đường thẳng $d$ cắt $(E)$ tại hai điểm $A$, $B$. Tìm tọa độ điểm $C$ trên $(E)$ sao cho tam giác $ABC$ có diện tích bằng $6$.

**Lời giải**




Do $A,B=d\cap(E)$ nên tọa độ điểm $A$, $B$ là nghiệm của hệ

$\begin{cases}3x+4y-12=0\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+4y-12=0\\ 9x^2+16y^2=144\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=0\\ y=3\end{cases}$.

Suy ra $A(4;0)$, $B(0;3)$ hoặc $A(0;3)$, $B(4;0)$.

Khi đó $AB=5$.

Gọi $C(a;b)\in(E)$ nên $\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{b^2}{9}=1$. $(1)$

Mặt khác, ta lại có theo giả thiết

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.d(C,AB)=\dfrac{1}{2}AB.d(C,d)=\dfrac{|3a+4b-12|}{2}=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3a+4b=24\\ 3a+4b=0\end{array}\right.$. $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$, ta tìm được $C\left(2\sqrt{2};-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $C\left(-2\sqrt{2};\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

**Câu 17.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường tròn $(C):x^2+y^2=8$ và elip $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$. Tính diện tích hình chữ nhật có bốn đỉnh là các giao điểm của đường tròn $(C)$ và elip $(E)$.

**Lời giải**

Ta có $(C):x^2+y^2=8\Leftrightarrow x^2=8-y^2$.

$(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{\frac{16}{3}}=1\Leftrightarrow x^2=16-3y^2$.

Do đó $16-3y^2=8-y^2\Leftrightarrow y=\pm2$. Từ đó $x=\pm2$.

Vậy các giao điểm của đường tròn $(C)$ và elip $(E)$ là $M(2;2),N(-2;2),P(-2;-2),Q(2;-2)$.

Ta thấy $MNPQ$ là hình vuông cạnh bằng $4$.

Do đó hình vuông tạo bởi các giao điểm của đường tròn $(C)$ và elip $(E)$ có diện tích bằng $16$.

## Dạng 2. Các bài toán liên quan hypebol

**Câu 18.** Xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm, tính tâm sai, độ dài trục thực, độ dài trục ảo và viết phương trình các đường tiệm cận của các hypebol $(H)$ sau:

a) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{8}=1$. b) $5x^2-4y^2=20$.

**Lời giải**

a) Ta có $a^2=6$, $b^2=8$ nên $a=\sqrt{6}$, $b=2\sqrt{2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=10$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1\left(-\sqrt{6};0\right)$, $A_2\left(\sqrt{6};0\right)$.

Tiêu điểm là $F_1(-10;0)$, $F_2(10;0)$.

Tâm sai của $(H)$ là $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{10}{\sqrt{6}}$.

Độ dài trục thực $2a=2\sqrt{6}$, độ dài trục ảo $2b=4\sqrt{2}$.

Đường tiệm cận có phương trình là $y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}x$.

b) Phương trình chính tắc của $(H)$ là $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

Ta có $a^2=4$, $b^2=5$ nên $a=2$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=3$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$.

Tiêu điểm là $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$.

Tâm sai của $(H)$ là $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{2}$.

Độ dài trục thực $2a=4$, độ dài trục ảo $2b=2\sqrt{5}$.

Đường tiệm cận có phương trình là $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$.

**Câu 19.** Viết phương trình chính tắc của hypebol $(H)$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $(H)$ có một tiêu điểm tọa độ là $(-4;0)$ và độ dài trục ảo bằng $2\sqrt{7}$.

b) $(H)$ có tiêu cự bằng $10$ và đường tiệm cận là $y=\pm\dfrac{4}{3}x$.

c) $(H)$ có tâm sai bằng $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ và diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng $48$.

d) $(H)$ đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-1;-\sqrt{3}\right)$.

e) $(H)$ đi qua $M(-2;1)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng $60°$.

**Lời giải**

Gọi phương trình chính tắc của $(H)$ là $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $b^2=c^2-a^2$.

a) $(H)$ có một tiêu điểm tọa độ là $(-4;0)$ suy ra $c=4$.

Độ dài trục ảo bằng $2\sqrt{7}$ suy ra $2b=2\sqrt{7}\Rightarrow b^2=7$, $a^2=c^2-b^2=9$.

Vậy phương trình $(H)$ là $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$.

b) $(H)$ có tiêu cự bằng $10$ suy ra $2c=10\Rightarrow a^2+b^2=25$. $(1)$

Đường tiệm cận là $y=\pm\dfrac{4}{3}x$ suy ra $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$ hay $b^2=\dfrac{16}{9}a^2$. $(2)$

Thế $(2)$ vào $(1)$ ta được $a^2+\dfrac{16}{9}a^2=25\Leftrightarrow a^2=9\Rightarrow b^2=16$.

Vậy phương trình $(H)$ là $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

c) Tâm sai bằng $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ suy ra $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ hay $4a^2=9b^2$. $(3)$

Diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng $48$ suy ra $2a.2b=48\Leftrightarrow ab=12$. $(4)$

Từ $(3)$ và $(4)$ suy ra $a^2=18$, $b^2=8$.

Vậy phương trình $(H)$ là $\dfrac{x^2}{18}-\dfrac{y^2}{8}=1$.

d) $(H)$ đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-1;-\sqrt{3}\right)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases}\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{8}{b^2}=1\\ \dfrac{1}{a^2}-\dfrac{3}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{2}{5}\\ b^2=2\end{cases}.$$

Vậy phương trình $(H)$ là $\dfrac{x^2}{\frac{2}{5}}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

e) Do $M(-2;1)\in(H)$ nên $\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$. $(5)$

Phương trình hai đường tiệm cận là

$\Delta_1: y=\frac{b}{a}x$ hay $bx-ay=0$, $\Delta_2: y=-\frac{b}{a}x$ hay $bx+ay=0$.

Vì góc giữa hai đường tiệm cận bằng $60°$ nên $\cos 60°=\frac{|b^2-a^2|}{b^2+a^2}$ hay

$$\frac{1}{2}=\frac{|b^2-a^2|}{b^2+a^2}\Leftrightarrow 2|b^2-a^2|=a^2+b^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2(b^2-a^2)=b^2+a^2\\2(b^2-a^2)=-(b^2+a^2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b^2=3a^2\\a^2=3b^2\end{array}\right.$$

• Với $b^2=3a^2$ thay vào $(5)$ được $a^2=\frac{11}{3}$, $b^2=11$.

Suy ra phương trình hypebol $(H)$ là $\frac{x^2}{\frac{11}{3}}-\frac{y^2}{11}=1$.

• Với $a^2=3b^2$ thay vào $(5)$ được $a^2=1$, $b^2=\frac{1}{3}$.

Suy ra phương trình hypebol $(H)$ là $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$.

Vậy có hai hypebol thỏa mãn có phương trình là $\frac{x^2}{\frac{11}{3}}-\frac{y^2}{11}=1$ và $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$.

Để tìm điểm $M$ thuộc hypebol có phương trình chính tắc là $(H):\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0$, $b>0$ ta làm như sau:

• Giả sử $M(x_M;y_M)$, điểm $M\in(H)\Leftrightarrow\frac{x_M^2}{a^2}-\frac{y_M^2}{b^2}=1$ ta có phương trình thứ nhất.

• Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai.

• Giải phương trình, hệ phương trình ẩn $x_M$, $y_M$ ta tìm được tọa độ của điểm $M$.

**Câu 20.** Cho hypebol $(H):\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$ có tiêu điểm $F_1$ và $F_2$. Tìm điểm $M$ trên $(H)$ trong các trường hợp sau:

a) Điểm $M$ có hoành độ là $4$.

b) Khoảng cách hai điểm $M$ và $F_1$ bằng $3$.

c) Tổng khoảng cách từ $M$ đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

**Lời giải**

Giả sử $M(x_M;y_M)\in(H)$ suy ra $\frac{x_M^2}{9}-\frac{y_M^2}{6}=1$. $(*)$

a) Ta có $x_M=4$ suy ra $y_M=\pm\sqrt{6\left(\frac{x_M^2}{9}-1\right)}=\pm\sqrt{\frac{42}{3}}$.

Vậy điểm cần tìm là $M_1\left(4;\frac{\sqrt{42}}{3}\right)$; $M_2\left(4;-\frac{\sqrt{42}}{3}\right)$.

b) Ta có $MF_1=\left|a+\frac{c}{a}x_M\right|$ nên $3=\left|3+\frac{\sqrt{15}}{3}x_M\right|\Leftrightarrow x_M=0$ (loại) hoặc $x_M=\frac{-18}{\sqrt{15}}$ (nhận).

Suy ra $y_M = \pm\dfrac{\sqrt{210}}{5}$.

Vậy điểm cần tìm là $M_1\left(-\dfrac{18}{\sqrt{15}};\dfrac{\sqrt{210}}{5}\right)$ và $M_2\left(-\dfrac{18}{\sqrt{15}};-\dfrac{\sqrt{210}}{5}\right)$.

c) Phương trình hai tiệm cận là $d_1: y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$, $d_2: y=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$.

Tổng khoảng cách từ $M$ đến hai đường tiệm cận bằng $\dfrac{24\sqrt{2}}{5}$ nên

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M-y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}}+\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M+y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}}=\frac{24\sqrt{2}}{5}\Leftrightarrow\left|\sqrt{6}x_M-3y_M\right|+\left|\sqrt{6}x_M+3y_M\right|=\frac{24\sqrt{30}}{5}. \quad (**)$$

Mặt khác $(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt{6}x_M-3y_M\right)\left(\sqrt{6}x_M+3y_M\right)=54>0$ nên ta có

$$(**)\Leftrightarrow\left|\sqrt{6}x_M-3y_M+\sqrt{6}x_M+3y_M\right|=\frac{24\sqrt{30}}{5}\Leftrightarrow x_M=\pm\frac{12}{\sqrt{5}}\Rightarrow y_M=\pm\frac{\sqrt{330}}{5}.$$

Vậy điểm cần tìm là

$M_1\left(\dfrac{12}{\sqrt{5}};\dfrac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_1\left(\dfrac{12}{\sqrt{5}};-\dfrac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_1\left(-\dfrac{12}{\sqrt{5}};\dfrac{\sqrt{330}}{5}\right)$ và $M_1\left(-\dfrac{12}{\sqrt{5}};-\dfrac{\sqrt{330}}{5}\right)$.

**Câu 21.** Tìm các điểm trên hypebol $(H): 4x^2-y^2-4=0$.

a) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông.
b) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc $120°$.
c) Có tọa độ nguyên.

**Lời giải**

Viết lại phương trình của $(H)\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

Suy ra $a^2=1\Rightarrow a=1$; $b^2=1\Rightarrow b=2$, $c^2=a^2+b^2=5\Rightarrow c=\sqrt{5}$, $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$.

Hypebol $(H)$ có các tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5};0\right)$.

a) Gọi $M(x;y)$ là điểm cần tìm. Ta có $\overrightarrow{F_1M}=\left(x+\sqrt{5};y\right)$, $\overrightarrow{F_2M}=\left(x-\sqrt{5};y\right)$.

Ta có $F_1M\perp F_2M\Leftrightarrow\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M}=0\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)+y^2=0\Leftrightarrow x^2+y^2-5=0$.

Mà $M\in(H)\Leftrightarrow 4x^2-y^2=4$ nên $5x^2=9$.

Từ đó ta được $x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}$; $y=\pm\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Vậy có bốn điểm cần tìm là $\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}};\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{5}};-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{5}};\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}};-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

b) Gọi $N(x;y)$ là điểm cần tìm. Ta có $N\in(H)\Rightarrow\left|NF_1-NF_2\right|=2a=2$.

Xét tam giác $F_1NF_2$ ta có

$$\begin{aligned}F_1F_2^2&=F_1N^2+F_2N^2-2F_1N.F_2N.\cos\widehat{F_1NF_2}\\&=\left(F_1N-F_2N\right)^2+2F_1N.F_2N-2F_1N.F_2N.\cos120°\\&=4+3F_1N.F_2N=4+3\left|a+ex\right|.\left|a-ex\right|=4+3\left|a^2-e^2x^2\right|.\end{aligned}$$

Nên $4c^2=4+3\left|1-5x^2\right|\Leftrightarrow 4.5=4+3\left|1-5x^2\right|\Leftrightarrow\left|1-5x^2\right|=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow x^2=\dfrac{19}{15}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{19}{15}}$.

Thay $x=\pm\sqrt{\frac{19}{15}}$ vào phương trình của $(H)$ ta tính được $y=\pm\sqrt{\frac{4}{15}}$.

Vậy có bốn điểm cần tìm là $\left(\sqrt{\frac{19}{15}};\sqrt{\frac{4}{15}}\right),\left(-\sqrt{\frac{19}{15}};-\sqrt{\frac{4}{15}}\right),\left(-\sqrt{\frac{19}{15}};\sqrt{\frac{4}{15}}\right),\left(\sqrt{\frac{19}{15}};-\sqrt{\frac{4}{15}}\right)$.

c) Do $(H)$ nhận $Ox$, $Oy$ làm các trục đối xứng nên ta chỉ cần xét những điểm $(x;y)$ của $(H)$ mà $x;y$ nguyên và $x\ge 0$, $y\ge 0$, rồi sau đó ta tìm những điểm đối xứng với những điểm này qua trục $Ox$ và $Oy$.

Ta có $4x^2-y^2-4=0\Leftrightarrow(2x-y)(2x+y)=4$.

Do $2x-y$, $2x+y$ nguyên, $2x+y\ge 0$ và $2x+y\ge 2x-y$ nên ta có các trường hợp

$\begin{cases}2x-y=1\\2x+y=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2x-y=2\\2x+y=2\end{cases}$.

Giải hai hệ thì có một nghiệm nguyên là $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$.

Vậy những điểm trên $(H)$ có tọa độ nguyên là $(1;0)$, $(-1;0)$.

**Câu 22.** Cho số $m>0$. Chứng minh rằng hypebol $(H)$ có các tiêu điểm $F_1(-m;m)$, $F_2(m;m)$ và giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm trên $(H)$ tới các tiêu điểm là $2m$, có phương trình $x.y=\frac{m^2}{2}$.

**Lời giải**

Xét điểm tùy ý $M(x;y)\in(H)$.

Ta có

$|MF_1-MF_2|=2m$

$\Leftrightarrow\left|\sqrt{(x+m)^2+(y+m)^2}-\sqrt{(x-m)^2+(y-m)^2}\right|=2m$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2+2m^2+(2mx+2my)}.\sqrt{x^2+y^2+2m^2-(2mx+2my)}$

$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2+y^2+2m^2\right)^2-(2mx+2my)^2$

$\Leftrightarrow x.y=\frac{m^2}{2}$.

**Câu 23.** Cho $F_1\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$, $F_2\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Chứng minh mỗi điểm $M(x;y)$ thuộc đồ thị $y=\frac{1}{x}$ đều có $|MF_1-MF_2|=2\sqrt{2}$.

**Lời giải**

Ta có $M(x;y)$ thuộc $(H):y=\frac{1}{x}$ nên có

$MF_1^2=\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^2$

$=x^2+\frac{1}{x^2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}\frac{1}{x}+2x\frac{1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^2$.

Tương tự

$$MF_2^2=\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2$$

$$=x^2+\frac{1}{x^2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}\frac{1}{x}+2x\frac{1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2.$$

Nếu $x>0$ thì $x+\frac{1}{x}\ge 2$ nên $MF_1-MF_2=\left(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$.

Nếu $x<0$ thì $x+\frac{1}{x}\le -2$ nên $MF_1-MF_2=-\left(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)=-2\sqrt{2}$.

Vậy $\left|MF_1-MF_2\right|=2\sqrt{2}$.

**Câu 24.** Cho hyperbol $(H):\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O$ và có hệ số góc $k$, $\Delta'$ là đường thẳng đi qua $O$ và vuông góc với $\Delta$.

**a)** Xác định tọa độ các tiêu điểm. tâm sai, phương trình các đường tiệm cận và đường chuẩn của $(H)$.

**b)** Tìm điều kiện của $k$ để cả $\Delta$ và $\Delta'$ đều cắt $(H)$.

**c)** Tứ giác với bốn đỉnh là bốn giao điểm của $\Delta$ và $\Delta'$ với $(H)$ là hình gì? Tính diện tích tứ giác này theo $k$. Xác định $k$ để diện tích tứ giác đó có giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

**a)** Ta có $a^2=4,b^2=9\Rightarrow c^2=b^2+a^2=13$, suy ra $a=2,b=3$ và $c=\sqrt{13}$.

Vậy $(H)$ có các tiêu điểm $F_1=\left(-\sqrt{13};0\right),F_2=\left(\sqrt{13};0\right)$; tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$; các đường tiệm cận $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{2}x$ và đường chuẩn $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}$.

**b)** $\Delta:y=kx$, $\Delta':y=-\frac{1}{k}x$.

Hoành độ giao điểm của $\Delta$ và $(H)$ là nghiệm của phương trình

$9x^2-4k^2x^2=36\Leftrightarrow\left(9-4k^2\right)x^2=36$.

$\Delta$ cắt $(H)$ khi $9-4k^2>0\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<k<\frac{3}{2}$.

Tung độ giao điểm của $\Delta'$ và $(H)$ là nghiệm của phương trình

$-4y^2+9k^2y^2=36\Leftrightarrow\left(9k^2-4\right)y^2=36$.

$\Delta'$ cắt $(H)$ khi $9k^2-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k<-\frac{2}{3}\\ k>\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

Vậy $\Delta$ và $\Delta'$ đều cắt $(H)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} -\dfrac{3}{2}<k<\dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} k<-\dfrac{2}{3} \\ k>\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{3}{2}<k<-\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{3}<k<\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

**c)** Gọi $A$ và $C$ là các giao điểm của $\Delta$ và $(H)$ $(x_A>0)$.

Gọi $B$ và $D$ là các giao điểm của $\Delta'$ và $(H)$ $(y_B<0)$.

Do $(H)$ nhận $O$ làm tâm đối xứng nên $OA=OC, OB=OD$. Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AC$ vuông góc với $BD$ nên $ABCD$ là hình thoi.

Giải hệ phương trình của $\Delta$ và $(H)$: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1 \\ y=kx \end{cases}$ ta được $A\left(\dfrac{6}{\sqrt{9-4k^2}};\dfrac{6k}{\sqrt{9-4k^2}}\right)$.

Giải hệ phương trình của $\Delta$ và $(H)$: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1 \\ y=-\dfrac{1}{k}x \end{cases}$ ta được $B\left(\dfrac{6k}{\sqrt{9k^2-4}};\dfrac{-6}{\sqrt{9k^2-4}}\right)$.

Ta có $OA^2=x_A^2+y_A^2=\dfrac{36(k^2+1)}{9-4k^2}\Rightarrow OA=\dfrac{6\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{9-4k^2}}$; $OB^2=x_B^2+y_B^2=\dfrac{36(k^2+1)}{9k^2-4}\Rightarrow OB=\dfrac{6\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{9k^2-4}}$.

$$S_{ABCD}=4S_{OAB}=2OA.OB=\frac{72(k^2+1)}{\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)}\le\dfrac{5}{2}(k^2+1)$ nên $S_{ABCD}\ge\dfrac{144}{5}$.

Vậy $S_{ABCD}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 9-4k^2=9k^2-4\Leftrightarrow k=\pm1$.

Vậy diện tích $ABCD$ nhỏ nhất khi các đường thẳng $\Delta$ và $\Delta'$ là các đường phân giác của các góc phần tư thứ nhất và thứ hai.

**Câu 25.** Cho hyperbol $(H):\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm tùy ý trên $(H)$ đến các đường tiệm cận bằng $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

**Lời giải**

$(H)$ có hai đường tiệm cận $\Delta_{1,2}:y=\pm\dfrac{b}{a}x$ hay $\Delta_1:bx-ay=0$, $\Delta_2:bx+ay=0$.

$M(x;y)\in(H)\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

Khi đó: $d(M,\Delta_1).d(M,\Delta_1)=\dfrac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\dfrac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|b^2x^2-a^2y^2|}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ (đpcm).

**Câu 26.** Cho hyperbol $(H):\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Một đường thẳng $\Delta$ cắt $(H)$ tại $P,Q$ và cắt hai đường tiệm cận ở $M,N$. Chứng minh $MP=NQ$. Nếu $\Delta$ có phương trình không đổi thì tích $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}$ là hằng số.

**Lời giải**

Phương trình chung các đường tiệm cận $\Delta_1,\Delta_2$ là $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$.

Gọi $\Delta_1:Ax+By+C=0\ (A^2+B^2\neq0)$.

Nếu $B=0$ thì $\Delta$ vuông góc với $Ox$. Khi đó $MP=NQ$ vì $(H)$ nhận làm $Ox$ trục đối xứng.

Nếu $B\neq0$ thì $P,Q$ có hoành độ là nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ (Vì vế trái của phương trình $(H)$ và phương trình các đường tiệm cận giống nhau).

Hoành độ $M,N$ là nghiệm của phương trình $ax^2+bx+d=0$.

Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm $PQ$ và $MN$, ta có: $x_I=x_J=-\dfrac{b}{2a}$. Suy ra $I\equiv J$.

Vậy $MP=NQ$.

Gọi $\vec{u}=(m;n)$ không đổi, $m^2+n^2\neq0$ là vecto chỉ phương của $\Delta$ và $P(x_0;y_0)$. Khi đó tồn tại các số $t_1,t_2$ sao cho $\overrightarrow{PM}=t_1\vec{u}$, $\overrightarrow{PN}=t_2\vec{u}$.

Tọa độ các điểm $M,N$ là $\begin{cases}x_M=x_0+mt_1\\y_M=y_0+nt_1\end{cases}$ và $\begin{cases}x_N=x_0+mt_2\\y_N=y_0+nt_2\end{cases}$.

$M,N$ thuộc hai đường tiệm cận của $(H)$ nên $t_1,t_2$ là nghiệm của phương trình bậc hai $\dfrac{(x_0+tm)^2}{a^2}-\dfrac{(y_0+tn)^2}{b^2}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{m^2}{a^2}-\dfrac{n^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\dfrac{x_0m}{a^2}-\dfrac{y_0n}{b^2}\right)t+1=0$.

Do đó $t_1.t_2=\dfrac{1}{\dfrac{m^2}{a^2}-\dfrac{n^2}{b^2}}=\dfrac{a^2b^2}{m^2b^2-n^2a^2}$.

Vậy $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}=t_1.t_2\vec{u}^2=\dfrac{a^2b^2}{m^2b^2-n^2a^2}.(m^2+n^2)$ không đổi.

**Câu 27.** Cho hyperbol $(H):\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Gọi $F_1$, $F_2$ là các tiêu điểm, $A_1$, $A_2$ là các đỉnh của $(H)$. $M$ là điểm tùy ý trên $(H)$ và $N$ là hình chiếu của nó trên trục hoành. Chứng minh rằng

**a)** $OM^2-MF_1.MF_2=a^2-b^2$.

b) $(MF_1+MF_2)^2=4(OM^2+b^2)$.

**c)** $MN^2=\dfrac{b^2}{a^2}.\overrightarrow{NA_1}.\overrightarrow{NA_2}$.

**Lời giải**

**a)** $M(x;y)\in(H)\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, MF_1=\left|a+\frac{c}{a}x\right|, MF_2=\left|a-\frac{c}{a}x\right|$. Khi đó:

$$OM^2-MF_1.MF_2=x^2+y^2-\left|a^2-\frac{c^2}{a^2}x^2\right|=x^2+y^2-\left|a^2-c^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)\right|=x^2+y^2-\left|-b^2-\frac{c^2}{b^2}y^2\right|$$

$$=a^2+\frac{a^2}{b^2}y^2-b^2-\frac{a^2+b^2}{b^2}y^2=a^2-b^2.$$

**b)** Ta có

$$\left(MF_1+MF_2\right)^2=\left(MF_1-MF_2\right)^2+4MF_1.MF_2=4a^2+4\left|a^2-\frac{c^2}{a^2}x^2\right|=4a^2+4b^2+\frac{4c^2}{b^2}y^2.$$

$$4\left(OM^2+b^2\right)\left(MF_1+MF_2\right)^2=4\left(x^2+y^2+b^2\right)=4\left(a^2+\frac{a^2}{b^2}y^2\right)+4y^2+4b^2$$

$$=4a^2+4b^2+4y^2\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)=4a^2+4b^2+\frac{4c^2}{b^2}y^2.$$

Vậy $\left(MF_1+MF_2\right)^2=4\left(OM^2+b^2\right)$.

**c)** Ta có

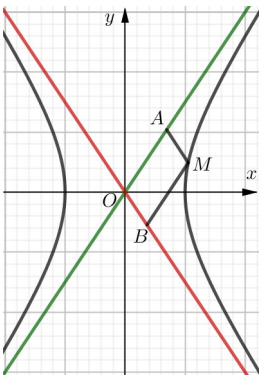
$MN^2=y^2$.

$$\frac{b^2}{a^2}.\overrightarrow{NA_1}.\overrightarrow{NA_2}=\frac{b^2}{a^2}(-x-a)(-x+a)=-\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=y^2.$$

Vậy $MN^2=\frac{b^2}{a^2}.\overrightarrow{NA_1}.\overrightarrow{NA_2}$.

**Câu 28.** Cho hyperbol $(H)$. Chứng minh diện tích của hình bình hành xác định bởi hai đường tiệm cận và hai đường thẳng đi qua một điểm trên $(H)$, song song với hai đường tiệm cận là một hằng số.

**Lời giải**




Gọi $(H):\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Qua điểm $M$ tùy ý trên $(H)$, kẻ hai đường thẳng song song với hai đường tiệm cận và cắt hai tiệm cận tại $B$ và $A$.

Đặt $A\left(m;\frac{b}{a}m\right), B\left(n;-\frac{b}{a}n\right)$. Ta có: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(m+n;\frac{b}{a}(m-n)\right)$.

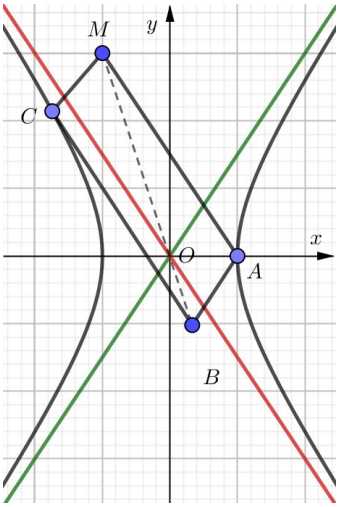
$M\in(H)$ nên $\frac{(m+n)^2}{a^2}-\frac{(m-n)^2}{b^2}=1\Rightarrow 4mn=a^2$.

Gọi $S$ là diện tích hình bình hành $OAMB$, ta có:

$S=2S_{OAB}=OA.OB.\sin\widehat{AOB}=\left|m\left(-\frac{b}{a}n\right)-\left(\frac{b}{a}m\right)n\right|=\frac{b}{a}|-2mn|=\frac{ab}{2}$ (không đổi).

**Câu 29.** Hai đỉnh đối diện của một hình bình hành nằm trên hyperbol $(H)$, các cạnh của hình bình hành song song với các đường tiệm cận của $(H)$. Chứng minh đường thẳng nối hai đỉnh đối diện còn lại của hình bình hành đó luôn đi qua tâm đối xứng của $(H)$.

**Lời giải**




Gọi $(H):\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Gọi $ABCD$ là hình bình hành có các cạnh song song với các đường tiệm cận và hai đỉnh đối diện $A,C$ nằm trên $(H)$.

Đặt $A(x_1;y_1)$, $C(x_2;y_2)$ thì $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$ và $\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$.

Hai đường tiệm cận của $(H)$ có phương trình là $bx-ay=0$ và $bx+ay=0$.

Hai cạnh của hình bình hành đi qua $A$ có phương trình: $b(x-x_1)+a(y-y_1)=0\ (1)$ và $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0\ (2)$.

Hai cạnh của hình bình hành đi qua $C$ có phương trình: $b(x-x_2)+a(y-y_2)=0\ (3)$ và $b(x-x_2)-a(y-y_2)=0\ (4)$.

Giao điểm của hai đường thẳng (1) và (4) và giao điểm của hai đường thẳng (2) và (3) chính là các đỉnh $B,D$ của hình bình hành. Bằng cách giải các hệ phương trình, ta tìm được tọa độ của $B$ và $D$: $\begin{cases}x_B=\frac{b(x_1+x_2)+a(y_1-y_2)}{2b}\\ y_B=\frac{b(x_1-x_2)+a(y_1+y_2)}{2a}\end{cases}$, $\begin{cases}x_D=\frac{b(x_1+x_2)-a(y_1-y_2)}{2b}\\ y_D=\frac{-b(x_1-x_2)+a(y_1+y_2)}{2a}\end{cases}$.

Ta cần chứng minh đường chéo $BD$ đi qua $O$, tức là chứng minh $\frac{x_B}{x_D}=\frac{y_B}{y_D}$ hay $x_By_D=x_Dy_B$.

Thật vậy,

$x_By_D=x_Dy_B\Leftrightarrow\left[b\left(x_1+x_2\right)+a\left(y_1-y_2\right)\right].\left[-b\left(x_1-x_2\right)+a\left(y_1+y_2\right)\right]$

$=\left[b\left(x_1+x_2\right)-a\left(y_1-y_2\right)\right].\left[b\left(x_1-x_2\right)+a\left(y_1+y_2\right)\right]$

$\Leftrightarrow -b^2\left(x_1^2-x_2^2\right)+a^2\left(y_1^2-y_2^2\right)=b^2\left(x_1^2-x_2^2\right)-a^2\left(y_1^2-y_2^2\right)\Leftrightarrow 2b^2\left(x_1^2-x_2^2\right)-2a^2\left(y_1^2-y_2^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}$ (đúng).

## Dạng 3. Các bài toán liên quan parabol.

**Câu 30.** Tìm tiêu điểm, đường chuẩn và vẽ parabol sau

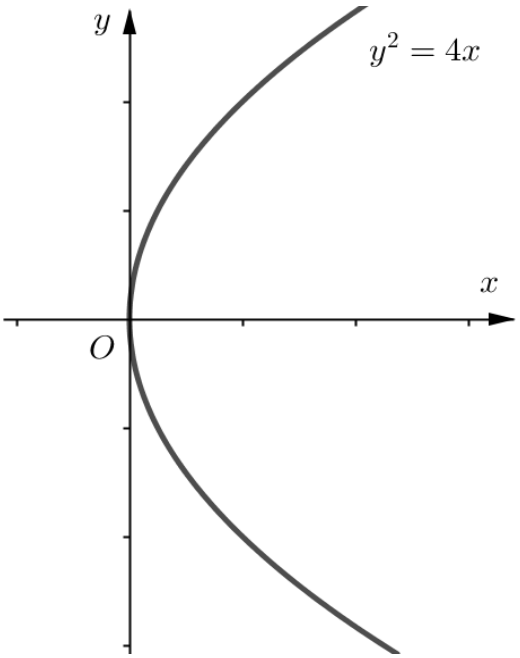
**a)** $y^2=4x$.

**b)** $y^2-x=0$.

**Lời giải**

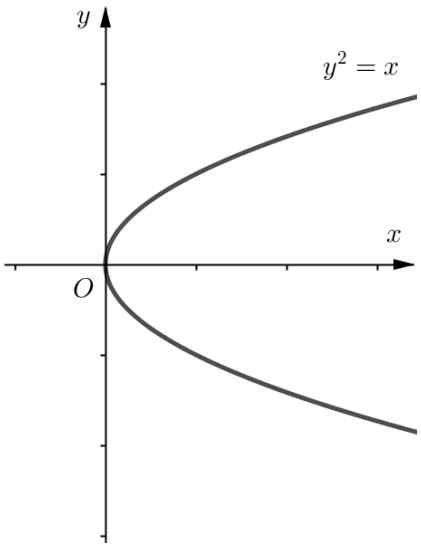
**a)** $y^2=4x\Rightarrow p=2$.

Tiêu điểm $F\left(1;0\right)$, phương trình đường chuẩn $x=-\frac{p}{2}=-1$.




**b)** $y^2-x=0\Leftrightarrow y^2=x\Rightarrow p=\frac{1}{2}$.

Tiêu điểm $F\left(\frac{1}{4};0\right)$, phương trình đường chuẩn $x=-\frac{p}{2}=-\frac{1}{4}$.




**Câu 31.** Viết phương trình chính tắc của parabol $(P)$ biết

**a)** $(P)$ có tiêu điểm là $F(5;0)$.

**b)** khoảng cách từ tiêu điểm $F$ đến đường thẳng $\Delta: x+y-12=0$ là $2\sqrt{2}$.

**Lời giải**

Gọi phương trình chính tắc của parabol $(P)$ là $y^2=2px$.

**a)** $(P)$ có tiêu điểm là $F(5;0)$ nên $\frac{p}{2}=5 \Leftrightarrow p=10$.

Vậy phương trình chính tắc của $(P)$ là $y^2=20x$.

**b)** Tiêu điển $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, khoảng cách từ tiêu điểm $F$ đến đường thẳng $\Delta: x+y-12=0$ là

$$2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{p}{2}-12\right|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=16 \\ p=32 \end{array}\right.$$

Vậy có hai parabol thỏa mãn yêu cầu bài toán có phương trình là $y^2=32x$ và $y^2=64x$.

**Câu 32.** Viết phương trình chính tắc của parabol $(P)$ biết

a) $(P)$ có đường chuẩn $\Delta: x=-5$.

b) $(P)$ có $p=\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2=2px,\ p>0$.

a) Đường chuẩn $\Delta: x=-5 \Rightarrow -\frac{p}{2}=-5 \Rightarrow p=10$ nên $(P): y^2=20x$.

b) Tham số tiêu $p=\frac{1}{3}$ nên $(P): y^2=\frac{2}{3}x$.

**Câu 33.** Cho elip $(E): 9x^2+16y^2=144$.

a) Tìm các tiêu điểm, tiêu cự và tâm sai của elip.

b) Lập phương trình chính tắc của hypebol $(H)$ có cùng hình chữ nhật cơ sở với elip $(E)$.

c) Lập phương trình chính tắc của parabol $(P)$ có tiêu điểm trùng với tiêu điểm bên phải của elip $(E)$.

**Lời giải**

a) $(E)$: $9x^2+16y^2=144 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Ta có $a^2=16$, $b^2=9 \Rightarrow a=4, b=3, c=\sqrt{a^2-b^2}=5$.

Vậy elip $(E)$ có các tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{7};0\right)$; $F_2\left(\sqrt{7};0\right)$, tiêu cự $2c=2\sqrt{7}$, tâm sai $e=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

b) Hypebol $(H)$: $\dfrac{x^2}{A^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$ có cùng hình chữ nhật cơ sở với elip nên $A=a=4, B=b=3$.

Vậy $(H)$: $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

c) Phương trình chính tắc của parabol $(P)$: $y^2=2px$, $p>0$.

Ta có tiêu điểm là tiêu điểm bên phải của elip $F_2\left(\sqrt{7};0\right)$ nên $\dfrac{p}{2}=\sqrt{7} \Rightarrow p=2\sqrt{7}$.

Vậy $(P)$: $y^2=4\sqrt{7}x$.

Để xác định tọa độ điểm $M$ thuộc parabol có phương trình chính tắc là $y^2=2px$ ta làm như sau:

Giả sử $M\left(x_M;y_M\right)$, điểm $M\in(P) \Leftrightarrow y_M^2=2px_M$ ta thu được phương trình thứ nhất.

Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai.

Giải phương trình, hệ phương trình ẩn $x_M$, $y_M$ ta tìm được tọa độ của điểm $M$.

**Câu 34.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho parabol có tiêu điểm $F$.

a) Tìm trên $(P)$ điểm $M$ cách $F$ một khoảng là 3.

b) Tìm điểm $M$ trên $(P)$ sao cho $S_{OMF}=8$.

c) Tìm điểm $A$ nằm trên parabol và một điểm $B$ nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x-3y+5=0$ sao cho $AB$ ngắn nhất.

**Lời giải**

a) Giả sử $M\left(x_M;y_M\right)\in(P) \Rightarrow y_M^2=8x_M$. $(*)$

Từ phương trình $(P)$ có $p=4$ nên $F(2;0)$.

Ta có $FM=\dfrac{p}{2}+x_M$ suy ra $x_M=1$, kết hợp với $(*)$ ta có $y_M=\pm 2\sqrt{2}$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1\left(1;2\sqrt{2}\right), M_2\left(1;-2\sqrt{2}\right)$.

b) Ta có $M\in(P) \Rightarrow M\left(\dfrac{a^2}{8};a\right)$ với $a\geq 0$.

$S_{OMF}=8\Leftrightarrow\frac{1}{2}OF.d\left(M;OF\right)=8\Leftrightarrow a=8$.

Vậy điểm $M$ cần tìm là $M\left(8;8\right)$.

c) Với mọi điểm $A\in\left(P\right)$, $B\in\Delta$ ta luôn có $AB\geq d\left(A;\Delta\right)$.

$A\in\left(P\right)\Rightarrow A\left(\frac{a^2}{8};a\right)$ với $a\geq 0$, khi đó $d\left(A;\Delta\right)=\frac{\left|4.\frac{a^2}{8}-3a+5\right|}{5}=\frac{\left(a-3\right)^2+1}{10}\geq\frac{1}{10}$.

Suy ra $AB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $A\left(\frac{9}{8};3\right)$ và $B$ là hình chiếu của $A$ lên $\Delta$.

Đường thẳng đi qua $A$ vuông góc với $\Delta$ nhận $\vec{u}=\left(3;4\right)$ là véc – tơ pháp tuyến nên có phương trình là $3\left(x-\frac{9}{8}\right)+4\left(y-3\right)=0\Leftrightarrow 24x+32y-123=0$.

Do đó tọa độ điểm $B$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}4x-3y+5=0\\24x+32y-123=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{209}{200}\\y=\frac{153}{50}\end{cases}$.

Vậy $A\left(\frac{9}{8};3\right)$, $B\left(\frac{209}{200};\frac{153}{50}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 35.** Cho parabol $\left(P\right)$: $y^2=12x$ có tiêu điểm $F$. Tìm hai điểm $A$, $B$ trên $\left(P\right)$ sao cho tam giác $OAB$ có trực tâm là $F$.

**Lời giải**

Ta có: $F\left(3;0\right)$ nên tam giác $OAB$ nhận $F$ là trực tâm thì $A$, $B$ đối xứng qua $Ox$.

Gọi $A\left(m;n\right)$ thì $B\left(m;-n\right)$, $m\neq 0$.

Ta có $\begin{cases}A\in\left(P\right)\\OA\perp BF\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n^2=12m\\m\left(m-3\right)-n^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\left(m-15\right)=0\\n^2=12m\end{cases}$.

Chọn $m=15$ nên $n^2=180\Rightarrow n=\pm 6\sqrt{5}$. Vậy $A\left(15;6\sqrt{5}\right)$ và $B\left(15;-6\sqrt{5}\right)$.

**Câu 36.** Cho parabol $\left(P\right)$ có phương trình $y^2=4x$. Tìm tọa độ các điểm $M$ nằm trên parabol $\left(P\right)$ và cách tiêu điểm một khoảng bằng 3.

**Lời giải**

Giả $\left(P\right)$: $y^2=4x=2px\Rightarrow p=2$.

Gọi $M\left(x;y\right)\in\left(P\right)$ thì $MF=x+\frac{p}{2}=x+1$. Ta có $MF=3\Leftrightarrow x+1=3\Leftrightarrow x=2$.

Thế vào $\left(P\right)$: $y^2=8\Rightarrow y=\pm 2\sqrt{2}$.

Vậy có hai điểm $M_1\left(2;2\sqrt{2}\right)$ và $M_2\left(2;-2\sqrt{2}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 37.** Tìm độ dài dây cung vuông góc với trục đối xứng của parabol $y^2=2px$ tại tiêu điểm $F$.

**Lời giải**

Ta có $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ là tiêu điểm của parabol $y^2=2px$, $p>0$.

Đường thẳng vuông góc với $Ox$ tại $F$ có phương trình là $x=\frac{p}{2}$.

Giao điểm của đường thẳng với parabol phải có tọa độ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} y^2=2px \\ x=\frac{p}{2} \end{cases}$.

Do đó $y^2=p^2\Rightarrow y=\pm p$ nên có giao điểm là $A\left(\frac{p}{2};p\right)$ và $B\left(\frac{p}{2};-p\right)$.

Vậy $AB=2p$.

**Câu 38.** Cho parabol $(P):y^2=2px$. Với mỗi điểm $M\in(P)$ và khác gốc $O$, gọi $M'$ là hình chiếu của $M$ lên $Oy$ và $I$ là trung điểm của đoạn $OM'$. Chứng minh đường thẳng $IM$ có điểm chung duy nhất với $(P)$ và là phân giác của góc $M'MF$.

**Lời giải**

Gọi $M(x_0;y_0)\in(P)$ thì $y_0^2=2px_0$; $M'(0;y_0)$ suy ra $I=\left(0;\frac{y_0}{2}\right)$.

Phương trình đường thẳng $IM$ là $\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}\Leftrightarrow\frac{x}{x_0}-\frac{2y}{y_0}+1=0$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} y^2=2px \\ \frac{x}{x_0}-\frac{2y}{y_0}+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{2x_0}{y_0}y-x_0 \\ y^2=2p\left(\frac{2x_0}{y_0}y-x_0\right) \end{cases}$.

Mà $x_0=\frac{y_0^2}{2p}$ nên $y_0=2p\left(\frac{yy_0}{p}-\frac{y_0^2}{2p}\right)\Leftrightarrow y^2-2y_0y+y_0^2=0$.

Vì phương trình có nghiệm kép $\Rightarrow IM$ có điểm chung duy nhất với $(P)$.

Hạ $HM\perp\Delta$. Ta chứng minh $HF\perp MI$.

Vì tam giác $HMF$ có $MH=MF$ nên cân tại $M$.

Suy ra đường cao $MI$ cũng là phân giác của góc $M'MF$.

**Câu 39.** Qua một điểm $A$ cố định trên trục đối xứng của parabol $(P):y^2=2px$, ta vẽ một đường thẳng cắt $(P)$ tại hai điểm $M,N$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ $M,N$ tới trục đối xứng của $(P)$ là hằng số.

**Lời giải**

Gọi $A(a;0)$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua $A$ có phương trình $A(x-a)+By=0$.

Với $A\neq 0$, khi đó tung độ các giao điểm của đường thẳng $\Delta$ và $(P)$ là nghiệm của phương trình

$$A\frac{y^2}{2p}+By-Aa=0\Leftrightarrow Ay^2+2pBy-2pAa=0.$$

Suy ra $\mathrm{d}(M;Ox).\mathrm{d}(N;Ox)$ $|y_M|.|y_N|=\left|-\frac{2pAa}{A}\right|=2p|a|$ không đổi.

**Câu 40.** Cho dây cung $AB$ đi qua tiêu điểm $F$ của parabol $(P)$. Chứng minh khoảng cách từ trung điểm $I$ của $AB$ đến đường chuẩn $\Delta$ bằng $\frac{AB}{2}$. Suy ra đường tròn đường kính $PB$ tiếp xúc với đường chuẩn.

**Lời giải**

Hạ $AA',BB',II'$ vuông góc với đường chuẩn $\Delta$.

Hình thang vuông $ABB'A'$ có $II'$ là đường trung bình nên $d(I,\Delta)=II'=\frac{1}{2}(AA'+BB')$.

Mà $A,B$ thuộc parabol nên $AF=AA'$ và $BF=BB'$

Do đó $AA'+BB'=AF+BF=AB$

Vậy $d(I,\Delta)=\frac{1}{2}AB$, suy ra đường tròn đường kính $AB$ tiếp xúc với đường chuẩn $\Delta$.

**Câu 41.** Cho Parabol $(P):y^2=2px$ và đường thẳng $d$ có phương trình $2mx-2y-mp=0$. Gọi $A,B$ là các giao điểm của $(P)$ và $d$. Chứng tỏ rằng đường tròn đường kính $AB$ tiếp xúa với đường chuẩn của $(P)$.

**Lời giải**

Phương trình $d:2mx-2y-mp=0\Leftrightarrow m(2x-p)-2y=0$.

Suy ra $d$ luôn đi qua tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ của $(P)$.

Do đó dây $AB$ đi qua tiêu điểm $F$.
Bài toán đưa về bài toán của *ví dụ 14* đã chứng minh ở trên.

**Câu 42.** Cho $A,B$ là hai điểm trên parabol $(P):y^2=2px$ sao cho tổng khoảng cách từ $A,B$ tới đường chuẩn của $(P)$ bằng độ dài $AB$. Chứng minh rằng $AB$ luôn đi qua tiêu điểm của $(P)$.

**Lời giải**

Gọi $F$ là tiêu điểm của $(P)$.

Gọi $A',B'$ theo thứ tự là hình chiếu của $A,B$ trên đường chuẩn $\Delta$ của $(P)$.

Ta có $A,B\in(P)\Rightarrow AF=d(A,\Delta)=AA';BF=d(B,\Delta)=BB'$.

Suy ra $AF+BF=AA'+BB'=AB$.
Vậy $A,B,F$ thẳng hàng hay $AB$ đi qua $F$.

**Câu 43.** Cho parabol $(P):y^2=\frac{1}{2}x$. Hai điểm lưu động $M,N$ thuộc $(P)$, khác gốc $O$ sao cho $OM$ vuông góc với $ON$. Chứng minh đường thẳng $MN$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Lời giải**

Gọi $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ thuộc $(P)$ nên $x_1=2y_1^2,x_2=2y_2^2$.
Do $OM$ vuông góc với $ON$ nên ta có :

$x_1x_2+y_1y_2=0\Rightarrow 4\left(y_1y_2\right)^2+y_1y_2=0\Rightarrow y_1y_2=-\dfrac{1}{4}$. (vì $M,N$ khác $O$)

Phương trình đường thẳng qua $M,N$ phân biệt là :

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$\Leftrightarrow \left(y_2-y_1\right)x-\left(x_2-x_1\right)y+y_1x_2-x_1y_2=0$

$\Leftrightarrow \left(y_2-y_1\right)\left[x-2\left(y_2-y_1\right)y+2y_1x_2\right]=0$

$\Leftrightarrow x-2\left(y_2+y_1\right)y+2y_1y_2=0$

$\Leftrightarrow x-2\left(y_2+y_1\right)y-\dfrac{1}{2}=0$.

Với $x=\dfrac{1}{2},y=0$ thì đường thẳng $MN$ luôn đi qua một điểm cố định $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

**Câu 44.** Cho Parabol $(P):y^2=2px\ (p>0)$. $A$ là một điểm cố định trên $(P)$. Một góc vuông $uAt$ quay quanh đỉnh $A$ có các cạnh cắt $(P)$ tại $B$ và $C$. Chứng minh rằng đường thẳng $BC$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Lời giải**

Giả sử $A\left(\dfrac{a^2}{2p};a\right),B\left(\dfrac{b^2}{2p};b\right),C\left(\dfrac{c^2}{2p};c\right)$.

Phương trình đường thẳng $BC$ là: $2px-\left(b+c\right)y+bc=0$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{b^2-a^2}{2p};\text{b}-a\right),\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{c^2-a^2}{2p};c-a\right)$.

Do:

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow\left(b^2-a^2\right)\left(c^2-a^2\right)+4p^2\left(b-a\right)\left(c-a\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(b+a\right)\left(c+a\right)+4p^2=0$

$\Leftrightarrow bc+a\left(b+c\right)+a^2+4p^2=0$

Do đó: $bc=-a\left(b+c\right)-a^2-4p^2$ nên phương trình của $BC$ là

$2px-a^2-4p^2-\left(b+c\right)\left(y+a\right)=0$.

Từ đó đường thẳng $BC$ luôn đi qua một điểm cố định $M\left(\dfrac{a^2}{2p}+2p;-a\right)$.

**Câu 45.** Cho hai parabol $(P)$ và $(P')$ lần lượt có phương trình $y^2=2px$ và $y^2=2p'x$. Qua $O$ vẽ đường thẳng thay đổi cắt $(P)$ và $(P')$ tại hai điểm phân biệt $A$ và $A'$. Chứng minh rằng tỉ số $\dfrac{OA}{OA'}$ không thay đổi.

**Lời giải**

Đường thẳng đi qua $O$ cắt hai parabol $(P)$ và $(P')$ lần lượt tại hai điểm phân biệt $A$ và $A'$ có dạng $y-kx$ với $k\neq 0$.

Giả sử $A(x_0;y_0)$ là nghiệm khác 0 của hệ phương trình: $\begin{cases} y=kx \\ y^2=2px \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{2p}{k^2} \\ y_0=\dfrac{2p}{k} \end{cases}$.

Do đó $OA=\sqrt{\left(\dfrac{2p}{k^2}\right)^2+\left(\dfrac{2p}{k^2}\right)^2}=\dfrac{2p}{k^2}.\sqrt{1+k^2}$

Tương tự $OA'=\dfrac{2p'}{k^2}.\sqrt{1+k^2}$.

Vậy $\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{p}{p'}$ không đổi.

**Câu 46.** Cho Parabol $(P):y^2=2px\ (p>0)$ và đường thẳng $d$ quay quanh tiêu điểm $F$ và cắt $(P)$ tại hai điểm $M,N$. Gọi $\alpha=\left(\vec{i},\overrightarrow{FM}\right),\ (0<\alpha<\pi)$.

a) Chứng minh $\dfrac{1}{MF}+\dfrac{1}{NF}$ không đổi.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích $FM.FN$ khi $\alpha$ thay đổi.

**Lời giải**

a) Chứng minh $\dfrac{1}{MF}+\dfrac{1}{NF}$ không đổi.

Gọi $H,M'$ theo thứ tự là hình chiếu của $M$ trên $Ox$ và đường chuẩn $\Delta$ của parabol $(P)$.

Gọi $I$ là giao điểm của $Ox$ và $\Delta$.

Ta có: $MF=MM'=IH$

$\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FH}=p+\overrightarrow{FM}.\vec{i}=p+MF.\cos\alpha.$

$\Rightarrow MF=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$. Vì $\left(\overrightarrow{FN},\vec{i}\right)=180^o-\alpha$.

Tương tự: $\Rightarrow NF=\dfrac{p}{1-\cos\left(180^o-\alpha\right)}=\dfrac{p}{1+\cos(\alpha)}$

Do đó: $\dfrac{1}{MF}+\dfrac{1}{NF}=\dfrac{1-\cos\alpha}{p}+\dfrac{1+\cos\alpha}{p}=\dfrac{2}{p}$ không đổi.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích $FM.FN$ khi $\alpha$ thay đổi.

$FM.FN=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}.\dfrac{p}{1+\cos\alpha}=\dfrac{p^2}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{p^2}{\sin^2\alpha}$.

$FM.FN$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sin^2\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\alpha=1\Leftrightarrow d\perp Ox$.

**Câu 47.** Cho hai parabol lần lượt có phương trình $y^2=2px$ và $y=ax^2+bx+c$. Chứng minh rằng nếu hai parabol đó cắt nhau tại bốn điểm phân biệt thì bốn điểm đó nằm trên một đường tròn.

**Lời giải**

Tọa độ giao điểm của hai parabol đã cho là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} y^2=2px \\ y=ax^2+bx+c \end{cases}(a\neq 0)$.

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với $a$ rồi trừ đi phương trình thứ 2 ta được:

$ay^2 - y = 2apx - ax^2 - bx - c$

$\Leftrightarrow ax^2 + ay^2 - (2ap - b)x - y + c = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \dfrac{2ap - b}{a}x - \dfrac{1}{a}y + \dfrac{c}{a} = 0.$

Tọa độ các giao điểm thỏa mãn phương trình trên là phương trình của một đường tròn.
Vậy bốn giao điểm nằm trên một đường tròn.

## Dạng 4. Các bài toán liên quan đường cônic

Để nhận dạng đường cônic ta dựa vào tâm sai:

- Elip là một đường cônic có tâm sai $e < 1$.
- Parabol là một đường cônic có tâm sai $e = 1$.
- Hypebol là một đường cônic có tâm sai $e > 1$.

Từ phương trình của các đường cônic ta xác định được dạng của nó từ đó xác định được tiêu điểm và đường chuẩn của nó.

**Câu 48.** Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các đường cônic sau.

a) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.  b) $\dfrac{x^2}{7} - \dfrac{y^2}{10} = 1$  c) $y^2 = 18x$

**Lời giải**

a) Dễ thấy đây là phương trình chính tắc của đường elip

Ta có $\begin{cases} a^2 = 5 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{5} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 5 - 4 = 1.$

Do đó $c = 1$, tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Vậy ta có:

Tiêu điểm $F_1(-1;0)$ tương ứng có đường chuẩn $x + \dfrac{\sqrt{5}}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}} = 0$ hay $x + 5 = 0$.

Tiêu điểm $F_2(1;0)$ tương ứng có đường chuẩn $x - \dfrac{\sqrt{5}}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}} = 0$ hay $x - 5 = 0$.

b) Đây là phương trình chính tắc của đường hypebol.

Ta có $\begin{cases} a^2 = 7 \\ b^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{7} \\ b = \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 17.$

Do đó $c = \sqrt{17}$, tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{17}{7}}$.

Vậy ta có:

Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{17};0)$ tương ứng có đường chuẩn $x+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\frac{17}{7}}}=0$ hay $x+\frac{7}{\sqrt{17}}=0$.

Tiêu điểm $F_2(\sqrt{17};0)$ tương ứng có đường chuẩn $x-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\frac{17}{7}}}=0$ hay $x-\frac{7}{\sqrt{17}}=0$.

c) Đây là phương trình chính tắc của đường parabol.

Ta có $2p=18\Rightarrow p=9$.

Vậy tiêu điểm $F\left(\frac{9}{2};0\right)$ và đường chuẩn $x+\frac{9}{2}=0$.

**Câu 49.** Cho cônic có tiêu điểm $F(-1;1)$ đi qua điểm $M(1;1)$ và đường chuẩn $\Delta: 3x+4y-5=0$ .Cônic này là elip, hypebol hay là parabol?

**Lời giải**

Ta có $MF=2, d(M;\Delta)=\frac{|3+4-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}$. Suy ra $\frac{MF}{d(M;\Delta)}=5>1$ suy ra đây là elip.

Dựa vào các dạng của đường cônic mà giả thiết đã cho để viết phương trình

Dựa vào định nghĩa ba đường cônic

**Câu 50.** Cho đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$ và điểm $F(1;0)$. Viết phương trình của đường cônic nhận $F$ làm tiêu điểm và $\Delta$ làm đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau:

a) Tâm sai $e=\sqrt{3}$.  b) Tâm sai $e=\frac{1}{2}$  c) Tâm sai $e=1$

**Lời giải**

Gọi $M(x;y)$ là điểm thuộc đường cônic cần tìm.

Ta có: $MF=\sqrt{(1-x)^2+y^2}, d(M;\Delta)=\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$

Theo định nghĩa ta có: $\frac{MF}{d(M;\Delta)}=e\Leftrightarrow MF=e.d(M;\Delta)\,(*)$

a) Tâm sai $e=\sqrt{3}$ thì

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{3}.\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-2x+1+y^2\right)=3(x^2+y^2+1-2xy+2x-2y)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+y^2-6xy+10x-6y+1=0.$$

Vậy phương trình đường cônic cần tìm là $2x^2+y^2-6xy+10x-6y+1=0$.

b) Tâm sai $e=\frac{1}{2}$ thì

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2+y^2} = \frac{1}{2}.\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x^2-2x+1+y^2\right) = x^2+y^2+1-2xy+2x-2y$$

$$\Leftrightarrow 7x^2+7y^2+2xy-18x+2y+7=0.$$

Vậy phương trình đường cônic cần tìm: $7x^2+7y^2+2xy-18x+2y+7=0$.

c) Tâm sai $e=1$ thì

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2+y^2} = \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-2x+1+y^2\right) = x^2+y^2+1-2xy+2x-2y$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy-6x+2y+1=0.$$

Vậy phương trình đường cônic cần tìm: $x^2+y^2+2xy-6x+2y+1=0$.

**Câu 51.** Cho điểm $A(0;\sqrt{3})$ và hai đường thẳng $\Delta: x-2=0,\ \Delta': 3x-y=0$.

a) Viết phương trình chính tắc đường elip có $A$ là một đỉnh và một đường chuẩn $\Delta$.

b) Viết phương trình chính tắc đường hypebol có $\Delta$ là một đường chuẩn và $\Delta'$ là tiệm cận.

**Lời giải**

a) Gọi phương trình chính tắc của elip là: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b>0$.

Vì $A(0;\sqrt{3})$ là một đỉnh của elip nên $b=\sqrt{3}$.

Elip có một đường chuẩn là $\Delta$ nên $\frac{a}{c}=2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2}=2 \Leftrightarrow a^2=2c$ (*)

Ta lại có: $b^2=a^2-c \Rightarrow 3=a^2-c \Rightarrow c=a^2-3$

Thay vào (*) ta có $a^2=2(a^2-3) \Leftrightarrow a^2=6$.

Vậy phương trình chính tắc elip cần tìm là: $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

b) Gọi phương trình chính tắc của hypebol là: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>0, b>0$ .

Hypebol có một đường chuẩn là $\Delta$ nên $\frac{a}{e}=2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c}=2 \Leftrightarrow c=\frac{a^2}{2}$. (1)

Hypebol có một đường tiệm cận là $\Delta'$ nên $\frac{b}{a}=3 \Leftrightarrow b=3a$. (2)

Mặt khác: $b^2=c^2-a^2$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta được $(3a)^2=\left(\frac{a^2}{2}\right)^2-a^2 \Leftrightarrow 10a^2=\frac{a^4}{4} \Leftrightarrow a^2(40-a^2)=0 \Leftrightarrow a^2=40$.

Suy ra $b^2=9a^2=360$.

Vậy phương trình chính tắc hypebol cần tìm là: $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{360}=1$.

## PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Dạng 1. Các bài toán liên quan elip

**Câu 1.** Đường Elip $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ có tiêu cự bằng

**A.** $6$. **B.** $8$. **C.** $9$. **D.** $(-2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Elip $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ có $a^2=16$, $b^2=7$ suy ra $c^2=a^2-b^2=16-7=9\Leftrightarrow c=3$.

Vậy tiêu cự $2c=2.3=6$.

**Câu 2.** Cho elip $(E)$ có phương trình $16x^2+25y^2=400$. Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

**A.** $(E)$ có trục nhỏ bằng 8.

**B.** $(E)$ có tiêu cự bằng 3.

**C.** $(E)$ có trục nhỏ bằng 10.

**D.** $(E)$ có các tiêu điểm $F_1(-3;0)$ và $F_2(3;0)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$(E)$: $16x^2+25y^2=400\Leftrightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Elip $(E)$ có $a=5$, $b=4$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Tiêu cự của elip $(E)$ là $2c=6$ nên khẳng định "$(E)$ có tiêu cự bằng 3" là khẳng định sai.

**Câu 3.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Tiêu cự của (*E*) bằng

**A.** 10. **B.** 16. **C.** 4. **D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình chính tắc của elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$.

Do đó elip (*E*) có $\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=4$.

Tiêu cự của elip (*E*) bằng $2c=8$.

**Câu 4.** Một elip có diện tích hình chữ nhật cơ sở là $80$, độ dài tiêu cự là $6$. Tâm sai của elip đó là

**A.** $e=\frac{4}{5}$. **B.** $e=\frac{3}{4}$. **C.** $e=\frac{3}{5}$. **D.** $e=\frac{4}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Diện tích hình chữ nhật cơ sở là $2a.2b=80$, suy ra $a.b=20\ (1)$.

Lại có $2c=6\Rightarrow c=3\Rightarrow a^2-b^2=c^2=9\ \ (2)$.

Từ $(1) \Rightarrow b = \dfrac{20}{a}$, thay vào $(2)$ ta được:

$a^2 - \dfrac{400}{a^2} = 9 \Rightarrow a^4 - 9a^2 - 400 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$.

Do đó tâm sai $e = \dfrac{3}{5}$.

**Câu 5.** Cho elip $(E): 4x^2 + 5y^2 = 20$. Diện tích hình chữ nhật cơ sở của $(E)$ là

**A.** $2\sqrt{5}$. **B.** $80$. **C.** $8\sqrt{5}$. **D.** $40$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$(E): 4x^2 + 5y^2 = 20 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Độ dài trục lớn: $2a = 2\sqrt{5}$.
Độ dài trục bé: $2b = 2.2 = 4$.
Diện tích hình chữ nhật cơ sở của $(E)$ là: $2\sqrt{5}.4 = 8\sqrt{5}$.

**Câu 6.** Đường elip $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$ có tiêu cự bằng

**A.** $3$. **B.** $9$. **C.** $6$. **D.** $18$.

**Lời giải**

**Chọn C**

□ Ta có: $a^2 = 16$, $b^2 = 7$ nên $c^2 = a^2 - b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$.
□ Tiêu cự của elip là $2c = 6$.

**Câu 7.** Cho elip có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. Tính tâm sai của elip.

**A.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2; b^2 = 1 \Rightarrow b = 1; c^2 = a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

Tâm sai của elip là $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**Câu 8.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (với $a > b > 0$) có $F_1, F_2$ là các tiêu điểm và $M$ là một điểm di động trên $(E)$. Khẳng định nào dưới đây là **đúng?**

**A.** $MF_1 + MF_2 = 2b$. **B.** $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(b^2 - OM^2)$.

**C.** $OM^2 - MF_1.MF_2 = a^2 - b^2$. **D.** $MF_1.MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:

$MF_1 = a + \dfrac{cx}{a}; MF_2 = a - \dfrac{cx}{a} \Rightarrow MF_1.MF_2 = a^2 - \dfrac{c^2x^2}{a^2}$.

$M(x;y)\in(E)\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Rightarrow OM^2=x^2+y^2=x^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=x^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$

$MF_1.MF_2+OM^2=a^2-\frac{c^2x^2}{a^2}+x^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}=a^2+b^2+x^2-\left(\frac{c^2x^2}{a^2}+\frac{b^2x^2}{a^2}\right)$

$=a^2+b^2+x^2-\frac{(b^2+c^2)x^2}{a^2}$

Vì $a^2=b^2+c^2$ nên $MF_1.MF_2+OM^2=a^2+b^2+x^2-\frac{(b^2+c^2)x^2}{a^2}=a^2+b^2+x^2-\frac{a^2x^2}{a^2}=a^2+b^2$

**Câu 9.** Trong hệ trục $Oxy$, cho Elip $(E)$ có các tiêu điểm $F_1(-4;0),F_2(4;0)$ và một điểm $M$ nằm trên $(E)$. Biết rằng chu vi của tam giác $MF_1F_2$ bằng 18. Xác định tâm sai e của $(E)$.

**A.** $e=\frac{4}{5}$. **B.** $e=\frac{4}{18}$. **C.** $e=-\frac{4}{5}$. **D.** $e=\frac{4}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $F_1(-4;0)\Rightarrow c=4$.

$P_{\Delta MF_1F_2}=\underbrace{MF_1+MF_2}_{2a}+F_1F_2$

$\Leftrightarrow 18=2a+2c\Leftrightarrow 18=2a+8\Leftrightarrow a=5.$

Tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

**Câu 10.** Cho Elip $(E)$ đi qua điểm $A(-3;0)$ và có tâm sai $e=\frac{5}{6}$. Tiêu cự của $(E)$ là

**A.** $10$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $5$. **D.** $\frac{10}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi phương trình chính tắc của $(E)$ là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$.

Vì $(E)$ đi qua điểm $A(-3;0)$ nên $\frac{9}{a^2}=1\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=3$.

Lại có $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{6}\Rightarrow c=\frac{5a}{6}=\frac{5}{2}\Rightarrow 2c=5$.

**Câu 11.** Trong mặt phẳng $Oxy$, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của một elip?

**A.** $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x}{9}+\frac{y}{8}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$ nên chọn phương án D.

**Câu 12.** Phương trình chính tắc của đường elip với $a=4$, $b=3$ là

**A.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình chính tắc $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

**Câu 13.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, viết phương trình chính tắc của elip biết một đỉnh là $A_1(-5;0)$ và một tiêu điểm là $F_2(2;0)$.

**A.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$. **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{29}+\frac{y^2}{25}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{29}=1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $a=5;c=2\Rightarrow b^2=25-4=21$

Vậy $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$.

**Câu 14.** Tìm phương trình chính tắc của Elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{10}$ và đi qua điểm $A(0;6)$:

**A.** $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{12}=1$. **B.** $\frac{x^2}{160}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{160}+\frac{y^2}{32}=1$. **D.** $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có phương trình chính tắc Elip (E) có dạng $\frac{x^{2)}}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

Theo giả thiết ta có $2a=4\sqrt{10}\Rightarrow a=2\sqrt{10}$.

Mặt khác (E) đi qua $A(0;6)$ nên ta có $\frac{6^2}{b^2}=1\Rightarrow b=6$.

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$

**Câu 15.** Lập phương trình chính tắc của Elip đi qua điểm $B$ và có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

**A.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình chính tắc của Elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$.

Elip đi qua điểm $B$ nên $\frac{0^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}=1\Leftrightarrow b^2=4$.

Tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}\Leftrightarrow\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Leftrightarrow c=\frac{\sqrt{5}}{3}a$.

$a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow a^2=4+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}a\right)^2\Leftrightarrow a^2=9$.

Vậy phương trình chính tắc của Elip cần tìm là $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

**Câu 16.** Phương trình chính tắc của Elip có đỉnh $(-3;0)$ và một tiêu điểm là $(1;0)$ là

**A.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Elip có đỉnh $(-3;0)\Rightarrow a=3$ và một tiêu điểm $(1;0)\Rightarrow c=1$.

Ta có $c^2=a^2-b^2\Leftrightarrow b^2=a^2-c^2=9-1=8$.

Vậy phương trình $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

**Câu 17.** Tìm phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng $6$ và trục lớn bằng $10$.

**A.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$. **C.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{81}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình chính tắc của elip: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Độ dài trục lớn $2a=10\Leftrightarrow a=5$

Tiêu cự $2c=6\Leftrightarrow c=3$

Ta có: $a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow b^2=a^2-c^2=16$

Vậy phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

**Câu 18.** Cho elip $(E)$ có độ dài trục lớn gấp hai lần độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng $6$. Viết phương trình của $(E)$?

**A.** $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$. **C.** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1$. **D.** $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{12}=1$.

**Lời giải**:

**Chọn B**

Ta có: $a=2b, 2c=6\Rightarrow c=3$.

Mà $a^2-b^2=c^2\Rightarrow 4b^2-b^2=9\Rightarrow\begin{cases}b^2=3\\a^2=12\end{cases}$

Vậy phương trình $(E)$: $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$.

**Câu 19.** Phương trình chính tắc của Elip có độ dài trục lớn bằng $8$, độ dài trục nhỏ bằng $6$ là:

**A.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **B.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

**Lời giải**

**Chọn D.**

+ Phương trình Elip dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b>0$.

+ Do có độ dài trục lớn bằng $8=2a\Rightarrow a=4$

+ Do có độ dài trục nhỏ bằng $6=2b\Rightarrow a=3$

+ Suy ra phương trình là $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

Vậy chọn D

**Câu 20.** Elip có một tiêu điểm $F(-2;0)$ và tích độ dài trục lớn với trục bé bằng $12\sqrt{5}$. Phương trình chính tắc của elip là:

**A.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{16}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{5}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$

**Lời giải:**

**Chọn A**

Gọi (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ( $a>b>0$ )

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} ab=3\sqrt{5} \\ a^2-b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=5 \end{cases}$

Vậy (E) cần tìm là $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1..$

**Câu 21.** Trong mặt phẳng $Oxy$, viết phương trình chính tắc của elip $(E)$ biết $(E)$ đi qua $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và $M$ nhìn hai tiêu điểm $F_1,F_2$ dưới một góc vuông.

**A.** $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$ **B.** $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$ **C.** $(E):\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1.$ **D.** $(E):\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Ta có: $(E)$ đi qua $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ nên: $\frac{9}{5a^2}+\frac{16}{5b^2}=1 \Leftrightarrow 16a^2+9b^2=5a^2b^2.$ $(1)$

Vì $M$ nhìn hai tiêu điểm $F_1,F_2$ dưới một góc vuông nên: $OM=\frac{F_1F_2}{2}=c.$

$\Leftrightarrow OM^2=c^2 \Leftrightarrow \frac{9}{5}+\frac{16}{5}=c^2 \Leftrightarrow a^2-b^2=c^2=5 \Leftrightarrow a^2=5+b^2$ thế vào $(1)$ ta được:

$16\left(5+b^2\right)+9b^2=5\left(5+b^2\right)b^2 \Leftrightarrow b^4=16 \Rightarrow b^2=4$ nên $a^2=9.$

Vậy: $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$

**Câu 22.** Cho Elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ và điểm $M$ nằm trên $(E)$. Nếu điểm $M$ có hoành độ bằng 1 thì các khoảng cách từ $M$ đến hai tiêu điểm của (E) bằng:

**A.** $3,5$ và $4,5.$ **B.** $4\pm\sqrt{2}.$ **C.** $3$ và $5.$ **D.** $4\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$

**Lời giải**

**Chọn A**

Giả sử phương trình $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ Ta có : $\begin{cases} a^2=16 \\ b^2=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ c^2=a^2-b^2=4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ c=2 \end{cases}$

Gọi $F_1,F_2$ lần lượt là hai tiêu điểm của Elip $(E), M\left(1;y_M\right)\in(E)$, ta có :

$$\begin{cases} MF_1 = a + \dfrac{c}{a}x_M = 4 + \dfrac{1}{2}.1 = 4,5 \\ MF_2 = a - \dfrac{c}{a}x_M = 4 - \dfrac{1}{2}.1 = 3,5 \end{cases}$$

Chọn **A.**

**Câu 23.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Điểm $M \in (E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 90^0$. Tìm bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $MF_1F_2$.

**A.** 2 **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

Gọi $M(x;y)$ vì $\widehat{F_1MF_2} = 90^0 \Rightarrow MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c^2 = 16$ (1)

Do $M \in (E) \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ (2)

Giải hệ gồm hai phương trình (1) và (2) ta được $x^2 = \dfrac{175}{16}; y^2 = \dfrac{81}{16} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{5\sqrt{7}}{4}; y = \dfrac{9}{4}$

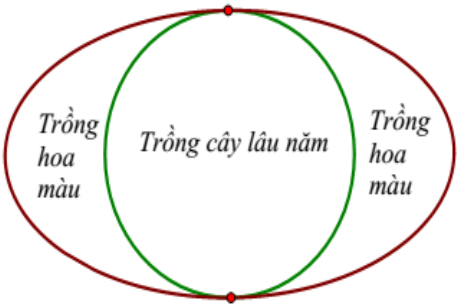
Ta có: nửa chu vi $p = \dfrac{MF_1 + MF_2 + F_1F_2}{2} = \dfrac{2a + 2c}{2} = a + c = 9$

Khoảng các từ M đến trục Ox: $d(M;\text{Ox}) = |y_M| = \dfrac{9}{4}$

$S_{\Delta MF_1F_2} = \dfrac{1}{2}d(M;Ox).F_1F_2 = 9$

Bán kính đường tròn nội tiếp: $r = \dfrac{S}{p} = 1$

**Câu 24.** Ông Hoàng có một mảnh vườn hình Elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là $60m$ và $30m$. Ông chia mảnh vườn ra làm hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với Elip để làm mục đích sử dụng khác nhau (xem hình vẽ). Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích hình Elip được tính theo công thức $S = \pi ab$, với a, b lần lượt là nửa độ dài trục lớn và nửa độ dài trục nhỏ. Biết độ rộng của đường Elip là không đáng kể.




**A.** $T = \dfrac{2}{3}$. **B.** $T = \dfrac{3}{2}$. **C.** $T = \dfrac{1}{2}$. **D.** $T = 1$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** D

Theo đề ta có: Diện tích $(E)$ là: $S_{(E)} = \pi.a.b = 30.15.\pi = 450\pi,\ (m^2)$

Vì đường tròn tiếp xúc trong, nên sẽ tiếp xúc tại đỉnh của trục nhỏ, suy ra bán kính đường tròn: $R = 15m$. Diện tích hình tròn $(C)$ phần trồng cây lâu năm là: $S_{(C)} = \pi.R^2 = 15^2.\pi = 225\pi,\ (m^2)$

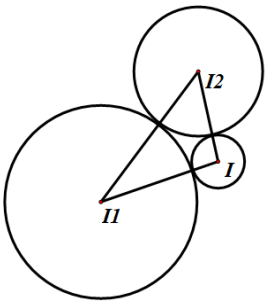
Suy ra diện tích phần trồng hoa màu là: $S = S_{(E)} - S_{(C)} = 225\pi,\ (m^2) \Rightarrow T = 1$.

**Câu 25.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9,(x-2)^2+(y-2)^2=4$ và Elip $(E)$ có phương trình $16x^2+49y^2=1$. Có bao nhiêu đường tròn $(C)$ có bán kính gấp đôi độ dài trục lớn của elip $(E)$ và $(C)$ tiếp xúc với hai đường tròn $(C_1)$, $(C_2)$?

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**




Ta có $16x^2+49y^2=1\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{7}\right)^2}=1\Rightarrow(E)$ có độ dài trục lớn $2a=2.\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó đường tròn $(C)$ có bán kính là $R=1$. Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn $(C)$.

Xét $\Delta II_1I_2$ có $\begin{cases}II_1=R+R_1=1+3=4\\II_2=R+R_2=1+2=3\\I_1I_2=R_1+R_2=5\end{cases}\Rightarrow\Delta II_1I_2$ vuông tại $I$.

Ta có $\overrightarrow{II_1}=(-1-a;-2-b)$, $\overrightarrow{II_2}=(2-a;2-b)$. Khi đó điểm $I$ thỏa mãn:

$$\begin{cases}\overrightarrow{II_1}.\overrightarrow{II_2}=0\\\overrightarrow{II_2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-1-a)(2-a)+(-2-b)(2-b)=0\\(2-a)^2+(2-b)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2-a-6=0\\a^2+b^2-4a-4b-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=6+a\\6+a-4a-4b-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=6+a\\a=\dfrac{5-4b}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{5-4b}{3}\right)^2+b^2-6-\dfrac{5-4b}{3}=0\\a=\dfrac{5-4b}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}25b^2-28b-44=0\\a=\dfrac{5-4b}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}b=2\\b=-\dfrac{22}{25}\end{array}\right.\\a=\dfrac{5-4b}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases}\\\begin{cases}a=\dfrac{71}{25}\\b=-\dfrac{22}{25}\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy có hai phương trình đường tròn $(C)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là

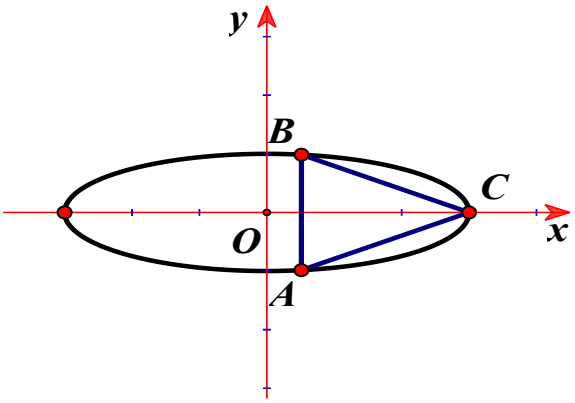
$(C):(x+1)^2+(y-2)^2=1$ hoặc $(C):\left(x-\dfrac{71}{25}\right)^2+\left(y+\dfrac{22}{25}\right)^2=1$.

**Câu 26.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho điểm $C(3;0)$ và elip $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$. $A,B$ là 2 điểm thuộc $(E)$ sao cho $\triangle ABC$ đều, biết tọa độ của $A\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{c\sqrt{3}}{2}\right)$ và $A$ có tung độ âm. Khi đó $a+c$ bằng:

**A.** 2. **B.** 0. **C.** −2. **D.** −4.

**Lời giải**

**Chọn A**




Nhận xét: Điểm $C(3;0)$ là đỉnh của elip $(E) \Rightarrow$ điều kiện cần để $\triangle ABC$ đều đó là $A, B$ đối xứng

Nhau qua $Ox$ .Suy ra $A, B$ là giao điểm của đường thẳng $\Delta : x = x_0$ và elip $(E)$.

+) Ta có elip $(E): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \\ y = \dfrac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \end{array}\right.$.

+) Theo giả thiết $A$ có tung độ âm nên tọa độ của $A\left(x_0; -\dfrac{1}{3}\sqrt{9-x_0^2}\right)$ (điều kiện $x_0 < 3$ do $A \neq C$)

+) Ta có $AC = \sqrt{(3-x_0)^2 + \dfrac{1}{9}(9-x_0^2)}$ và $d_{(C;\Delta)} = |3 - x_0|$

+) $\triangle ABC$ đều $\Leftrightarrow d_{(C;\Delta)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} AC \Leftrightarrow |3-x_0| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(3-x_0)^2 + \dfrac{1}{9}\left(9-x_0^2\right)}$

$\Leftrightarrow (3-x_0)^2 = \dfrac{3}{4}\left[(3-x_0)^2 + \dfrac{1}{9}(9-x_0^2)\right]$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}x_0^2 - \dfrac{3}{2}x_0 + \dfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{3}{2}(t/m) \\ x_0 = 3(L) \end{array}\right.$

$\Rightarrow A\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ c = -1 \end{array}\right. \Rightarrow a + c = 2$.

## Dạng 2. Các bài toán liên quan hypebol

**Câu 27.** Đường Hyperbol $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ có tiêu cự bằng:

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $6$.

**Lời giải.**

**Chọn D**.

Ta có: $a^2 = 5$ và $b^2 = 4$ nên $c^2 = a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$.

Vậy tiêu cự là: $2c = 6$

**Câu 28.** Đường Hyperbol $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{7} = 1$ có tiêu cự bằng

**A.** $6$. **B.** $2\sqrt{33}$. **C.** $3$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{7}=1$ suy ra $\begin{cases}a^2=16\\b^2=7\end{cases}\Rightarrow c^2=a^2+b^2=23$.

Tiêu cự là $2c=2\sqrt{23}$.

**Câu 29.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ có một tiêu điểm là điểm nào dưới đây ?

**A.** $(-5;0)$. **B.** $\left(0;\sqrt{7}\right)$. **C.** $\left(\sqrt{7};0\right)$. **D.** $(0;5)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ suy ra $\begin{cases}a^2=16\\b^2=9\end{cases}\Rightarrow c^2=a^2+b^2=25\Leftrightarrow c=5$.

Tiêu điểm $F_1(-5;0), F_2(5;0)$.

**Câu 30.** Cho điểm $M$ nằm trên Hyperbol $(H)$: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$. Nếu điểm $M$ có hoành độ bằng 12 thì khoảng cách từ $M$ đến các tiêu điểm là bao nhiêu?

**A.** $8$. **B.** $10;6$. **C.** $4\pm\sqrt{7}$. **D.** $14;22$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $a^2=16;b^2=20\Rightarrow c^2=a^2+b^2=36$

Vậy $a=4;b=2\sqrt{5},c=6$

Tiêu điểm $F_1(-6;0);F_2(6;0)$

$M$ có hoành độ $x=12$ khi đó $MF_1=\left|a+\frac{c}{a}x\right|=\left|4+\frac{6}{4}.12\right|=22; MF_2=\left|a-\frac{c}{a}x\right|=\left|4-\frac{6}{4}.12\right|=14$

**Câu 31.** Cho điểm $M$ nằm trên Hyperbol $(H)$: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Nếu hoành độ điểm $M$ bằng 8 thì khoảng cách từ $M$ đến các tiêu điểm của $(H)$ là bao nhiêu?

**A.** $6$ và $14$. **B.** $5$ và $13$. **C.** $8\pm\sqrt{5}$. **D.** $8\pm4\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $a^2=16;b^2=9\Rightarrow c^2=a^2+b^2=25$

Vậy $a=4;b=3,c=5$

Tiêu điểm $F_1(-5;0);F_2(5;0)$

$M$ có hoành độ $x=8$ khi đó $MF_1=\left|a+\frac{c}{a}x\right|=\left|4+\frac{5}{4}.8\right|=14; MF_2=\left|a-\frac{c}{a}x\right|=\left|4-\frac{5}{4}.8\right|=6$

**Câu 32.** Tâm sai của Hyperbol $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ bằng

**A.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $a^2=5,b^2=4$ suy ra $\begin{cases}c^2=5+4=9\Rightarrow c=3\\a=\sqrt{5},b=2\end{cases}$

Tâm sai của Hyperbol là $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

**Câu 33.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$ có tiêu cự bằng

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $12$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $a^2=20, b^2=16$ suy ra $c^2=20+16=36\Rightarrow c=6$.

Khi đó Hyperbol có tiêu cự là $2c=12$.

**Câu 34.** Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{12}=1$?

**A.** $x+8=0$. **B.** $x-\frac{3}{4}=0$. **C.** $x+2=0$. **D.** $x+\frac{5\sqrt{2}}{2}=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{12}=1$ suy ra $a=\sqrt{20}=2\sqrt{5}; b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow c=\sqrt{b^2+c^2}=4\sqrt{2}\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

Khi đó đường chuẩn của Hyperbol $x\pm\frac{a}{e}=0\Leftrightarrow x\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}=0$.

**Câu 35.** Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{15}=1$?

**A.** $x+4\sqrt{5}=0$. **B.** $x+4=0$. **C.** $x-\frac{4\sqrt{35}}{7}=0$. **D.** $x+2=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{15}=1$ suy ra $a=2\sqrt{5}; b=\sqrt{15}\Rightarrow c=\sqrt{35}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{7}}{2}$

Khi đó đường chuẩn của Hyperbol $x\pm\frac{4\sqrt{35}}{7}=0$.

Khi đó đường chuẩn của Hyperbol $x\pm\frac{2\sqrt{5}}{\frac{2\sqrt{10}}{5}}$.

**Câu 36.** Điểm nào trong 4 điểm $M(5;0), N(10;3), P(5;3), Q(5;4)$ nằm trên một đường tiệm cận của hyperbol $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$?

**A.** $M$. **B.** $N$. **C.** $P$. **D.** $Q$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow a=5; b=3\Rightarrow TC: \mathrm{y}=\pm\frac{3}{5}x.$

Vậy $P\in y=\frac{5}{3}x$.

**Câu 37.** Tìm góc giữa 2 đường tiệm cận của hyperbol $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

**A.** $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

$\frac{x^2}{3}-y^2=1\Rightarrow a=\sqrt{3};b=1\Rightarrow TC: y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x\Rightarrow k_1=\frac{\sqrt{3}}{3};k_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \tan\alpha=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=60°.$

**Câu 38.** Hyperbol $(H)$ có 2 đường tiệm cận vuông góc nhau thì có tâm sai bằng bao nhiêu ?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Xét hyperbol $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$.

Hai đường tiệm cận của $(H)$ có phương trình là $y=\frac{b}{a}x$ và $y=-\frac{b}{a}x$.

Do hai đường tiệm cận vuông góc với nhau nên ta có

$\frac{b}{a}.\left(-\frac{b}{a}\right)=-1\Leftrightarrow\frac{b^2}{a^2}=1\Leftrightarrow a^2=b^2=1\Rightarrow c^2=2\Rightarrow c=\sqrt{2}.$

Vậy tâm sai của $(H)$ là $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$.

**Câu 39.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó có tâm sai bằng $2$ và tiêu cự bằng $4$.

**A.** $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. **B.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{5}=1$. **D.** $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Xét hyperbol $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}\frac{c}{a}=2\\2c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\c=2\end{cases}\Rightarrow b=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

Vậy $(H)$ có phương trình là $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1\Leftrightarrow x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

**Câu 40.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó có một đường chuẩn là $2x+\sqrt{2}=0$.

**A.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $x^2-y^2=1$. **C.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Xét hyperbol $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$.

Ta có $2x+\sqrt{2}=0\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{a}{e}=-\frac{a^2}{c}\Rightarrow\frac{a^2}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Xét phương án A, ta có

$a^2=1, c=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{a^2}{c}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy phương án A không thỏa mãn.

Xét phương án B, ta có

$a^2=b^2=1 \Rightarrow c^2=2 \Rightarrow c=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a^2}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy phương án B thỏa mãn.

Xét phương án C, ta có

$a^2=b^2=2 \Rightarrow c^2=4 \Rightarrow c=2 \Rightarrow \frac{a^2}{c}=1$

Vậy phương án C sai.

Tương tự, phương án D cũng sai.

**Câu 41.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó đi qua điểm $(2;1)$ và có một đường chuẩn là $x+\frac{2}{\sqrt{3}}=0$

**A.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $x^2-\frac{y^2}{2}=1$. **C.** $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. **D.** $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Phương án A và D không đi qua điểm $(2;1)$ nên loại.

Phương án C là phương trình của Elip nên loại.

Vậy phương án D đúng.

**Câu 42.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó có trục thực dài gấp đôi trục ảo và có tiêu cự bằng $10$.

**A.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{10}=1$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Xét hyperbol $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$.

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} a=2b \\ 2c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ \sqrt{a^2+b^2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ \sqrt{5b^2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ b=\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2\sqrt{5} \\ b=\sqrt{5} \end{cases}.$$

Vậy phương trình $(H)$ là $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$.

**Câu 43.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó tiêu điểm là $(3;0)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $\sqrt{2}x+y=0$.

**A.** $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$. **C.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{8}=1$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Xét hyperbol $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$.

Do $(H)$ có một tiêu điểm là $(3;0)$ nên $c=3$.

Đường tiệm cận $\sqrt{2}x+y=0\Leftrightarrow y=-\sqrt{2}x\Rightarrow \frac{b}{a}=\sqrt{2}\Rightarrow b=\sqrt{2}a$.

Vậy ta có

$$\begin{cases} b=\sqrt{2}a \\ \sqrt{a^2+b^2}=3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b=\sqrt{2}a \\ \sqrt{3a^2}=3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b=\sqrt{6} \\ a=\sqrt{3} \end{cases}\Rightarrow (H):\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1.$$

Suy ra phương án B đúng.

**Câu 44.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó tiêu điểm là $\left(\sqrt{10};0\right)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $3x+y=0$.

**A.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{6}=1$. **C.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $-x^2+\frac{y^2}{9}=1$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Xét hyperbol $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$.

Do $(H)$ có một tiêu điểm là $\left(\sqrt{10};0\right)$ nên $c=\sqrt{10}$.

Đường tiệm cận $3x+y=0\Leftrightarrow y=-3x\Rightarrow \frac{b}{a}=3\Rightarrow b=3a$.

Vậy ta có

$$\begin{cases} b=3a \\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b=3a \\ \sqrt{10a^2}=\sqrt{10} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=1 \end{cases}\Rightarrow (H):\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Suy ra phương án B đúng.

**Câu 45.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ mà hình chữ nhật cơ sở có một đỉnh là $(2;3)$

**A.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{-3}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$. **D.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Xét hyperbol $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$.

Một đỉnh hình chữ nhật cơ sở là $(2;3)\Rightarrow a=2,\ b=3$.

Vậy phương án D đúng.

**Câu 46.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó có một đường tiệm cận là $x-2y=0$ và hình chữ nhật cơ sở của nó có diện tích bằng $24$.

**A.** $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$. **C.** $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$. **D.** $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{48}=1$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Xét hyperbol $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$.

Tiệm cận $x-2y=0\Leftrightarrow y=\frac{x}{2}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{1}{2}\quad (1)$.

Diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng $24\Leftrightarrow 2a.2b=24\Leftrightarrow a.b=6\quad (2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra $\begin{cases} a=2b \\ a.b=6 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=2\sqrt{3} \\ b=\sqrt{3} \end{cases}\Rightarrow (H):\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1.$

**Câu 47.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol $(H)$ biết nó đi qua điểm là $(5;4)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $x+y=0$.

**A.** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $x^2-y^2=9$. **C.** $x^2-y^2=1$. **D.** $x^2-y^2=3$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Xét hyperbol $(H)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\,b>0)$.

Đường tiệm cận $x+y=0\Leftrightarrow y=-x\Rightarrow\frac{b}{a}=1\Leftrightarrow a=b\ (1)$.

Hyperbol đi qua điểm $(5;\,4)\Rightarrow\frac{25}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1\ (2)$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a=b\\ \frac{25}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=3\end{cases}\Rightarrow(H):\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow x^2-y^2=9.$$

## Dạng 3. Các bài toán liên quan parabol

**Câu 48.** Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(1;2)$.

**A.** $y^2=4x$. **B.** $y^2=2x$. **C.** $y=2x^2$. **D.** $y=x^2+2x-1$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Phương trình chính tắc của parabol $(P):y^2=2px$

$A(1;2)\in(P)\ \Rightarrow 2p=4$

Vậy phương trình $(P):y^2=4x$.

**Câu 49.** Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(5;2)$.

**A.** $y=x^2-3x-12$. **B.** $y=x^2-27$. **C.** $y^2=\frac{4x}{5}$. **D.** $y^2=5x-21$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Phương trình chính tắc của parabol $(P):y^2=2px$

$A(5;2)\in(P)\ \Rightarrow 2p=\frac{4}{5}$

Vậy phương trình $(P):y^2=\frac{4}{5}x$.

**Câu 50.** Viết phương trình chính tắc của Parabol biết tiêu điểm $F(2;0)$.

**A.** $y^2=2x$. **B.** $y^2=4x$. **C.** $y^2=8x$. **D.** $y=\frac{1}{6}x^2$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Phương trình chính tắc của parabol $(P):y^2=2px$

Tiêu điểm $F(2;0)\Rightarrow p=4$

Vậy, phương trình parabol $y^2=8x$.

**Câu 51.** Viết phương trình chính tắc của Parabol biết tiêu điểm $F(5;0)$.

**A.** $y^2=5x$. **B.** $y^2=10x$. **C.** $y^2=\frac{1}{5}x$. **D.** $y^2=20x$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2=2px$

Ta có: tiêu điểm $F(5;0) \Rightarrow p=5 \Rightarrow 2p=10$

Vậy $(P): y^2=10x$ .

**Câu 52.** Viết phương trình chính tắc của Parabol biết đường chuẩn có phương trình $x+1=0$.

**A.** $y^2=2x$. **B.** $y^2=4x$. **C.** $y=4x^2$. **D.** $y^2=8x$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2=2px$

Đường chuẩn $x+1=0$ suy ra $\frac{p}{2}=1 \Rightarrow 2p=4 \Rightarrow y^2=4x$.

Vậy $y^2=4x$.

**Câu 53.** Viết phương trình chính tắc của Parabol biết đường chuẩn có phương trình $x+\frac{1}{4}=0$.

**A.** $y^2=-x$. **B.** $y^2=x$. **C.** $y^2=2x$. **D.** $y^2=\frac{1}{2}x$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2=2px$

Parabol có đường chuẩn $x+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow p=\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y^2=x$.

Vậy $y^2=x$.

**Câu 54.** Cho Parabol $(P)$ có phương trình chính tắc $y^2=4x$. Một đường thẳng đi qua tiêu điểm $F$ của $(P)$ cắt $(P)$ tại 2 điểm $A$ và $B$. Nếu $A(1;2)$ thì tọa độ của $B$ bằng bao nhiêu?

**A.** $(4;4)$. **B.** $\left(2;2\sqrt{2}\right)$. **C.** $(1;-2)$. **D.** $(1;2)$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

$(P)$ có tiêu điểm $F(1;0)$.

Đường thẳng $AF: x=1$.

Đường thẳng $AF$ cắt parabol tại $B(1;-2)$.

Vậy $B(1;2)$.

**Câu 55.** Một điểm $A$ thuộc Parabol $(P)$: $y^2=4x$. Nếu khoảng cách từ $A$ đến đường chuẩn bằng 5 thì khoảng cách từ $A$ đến trục hoành bằng bao nhiêu?

**A.** 3. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có: $A \in (P) \Rightarrow A\left(m^2;2m\right)$, đường chuẩn $\Delta: x=-1$

Khoảng cách từ A đến đường chuẩn $d(A,\Delta)=|m^2+1|=m^2+1=5\Rightarrow m^2=4$

Vậy khoảng cách từ A đến trục hoành bằng $|2m|=4$.

**Câu 56.** Một điểm $M$ thuộc Parabol $(P)$: $y^2=x$. Nếu khoảng cách từ $M$ đến tiêu điểm $F$ của $(P)$ bằng 1 thì hoành độ của điểm $M$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

$M\in(P):y^2=x\Rightarrow M(m^2;m)$

$(P)$ có tiêu điểm $F\left(\frac{1}{4};0\right)$

$$MF^2=\left(m^2-\frac{1}{4}\right)^2+m^2=1\Leftrightarrow m^4+\frac{1}{2}m^2-\frac{15}{16}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=\frac{3}{4}\\ m^2=-\frac{5}{4}\end{array}\right.$$

Vậy hoành độ điểm $M$ là $\frac{3}{4}$.

**Câu 57.** Cho $M$ là một điểm thuộc Parabol $(P):y^2=64x$ và $N$ là một điểm thuộc đường thẳng $d:4x+3y+46=0$. Xác định $M,N$ để đoạn $MN$ ngắn nhất.

**A.** $M(-9;24),N(5;-22)$ **B.** $M(-9;24),N\left(-\frac{37}{5};\frac{126}{5}\right)$

**C.** $M(9;-24),N\left(-5;\frac{-26}{3}\right)$ **D.** $M(9;-24),N\left(\frac{37}{5};-\frac{126}{5}\right)$

**Lời giải.**

**Chọn D.**

$M\in(P)\Rightarrow M(m^2;8m)$

$$d(M;d)=\frac{|4m^2+24m+46|}{5}=\frac{|(2m+6)^2+10|}{5}\geq 2$$

$d(M,d)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m=-3\Rightarrow M(9;-24)$

$N$ là hình chiếu của $M$ lên đường thẳng $d$

Đường thẳng $MN:3x-4y-123=0$

$N$ là giao điểm $MN$ và $d$ suy ra $N\left(\frac{37}{5};-\frac{126}{5}\right)$.

**Câu 58.** Cho parabol $(P):y^2=4x$ và đường thẳng $d:2x-y-4=0$. Gọi $A,B$ là giao điểm của $d$ và $(P)$. Tìm tung độ dương của điểm $C\in(P)$ sao cho $\Delta ABC$ có diện tích bằng 12.

**A.** 3 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 4

**Lời giải.**

**Chọn B.**

Ta có: $d$ cắt $(P)$ tại $A(4;4);B(1;-2)$

$C\in(P)\Rightarrow C(c^2;2c)$

$\overrightarrow{AC}=(c^2-4;2c-4)$

$\overrightarrow{BC}=(c^2-1;2c+2)$

Diện tích tam giác $ABC$: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left(c^2-4\right)(2c+2)-\left(c^2-1\right)(2c-4)\right|=12$

$\left|6c^2-6c-12\right|=24\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=-2\\c=3\end{array}\right.$

Vậy tung độ của điểm $C$ dương là 6.

**Câu 59.** Cho parabol $(P):y^2=x$ và đường thẳng $d:x-y-2=0$. Gọi $A,B$ là giao điểm của $d$ và $(P)$. Tìm tung độ điểm $C\in(P)$ sao cho $\Delta ABC$ đều.

**A.** $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ **B.** $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

**C.** $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ **D.** Không tồn tại điểm C.

**Lời giải.**

**Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm của $d$ và $(P)$: $(x-2)^2=x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.\Rightarrow A(1;-1),B(4;2)$

$C\in(P)\Rightarrow C\left(c^2;c\right)$

$AB=3\sqrt{2}$ , $AC=\sqrt{\left(c^2-1\right)^2+(c+1)^2}$ , $BC=\sqrt{\left(c^2-4\right)^2+(c-2)^2}$

$AC=BC\Rightarrow 6c^2+6c-18=0\Rightarrow c=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

So với điều kiện $AC=3\sqrt{2}$ ta thấy không có giá trị $c$ thoả.
Vậy không tồn tại điểm C thoả đề.

**Câu 60.** Cho Parabol $(P):y^2=2x$ và đường thẳng $\Delta:x-2y+6=0$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa $\Delta$ và $(P)$.

**A.** $d_{\min}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ **B.** $d_{\min}=2$ **C.** $d_{\min}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** $d_{\min}=4$

**Lời giải.**

**Chọn A.**

Gọi $M\in(P)\Rightarrow M\left(2m^2;2m\right)$

$d(M;\Delta)=\frac{\left|2m^2-4m+6\right|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\left|(m-1)^2+2\right|\geq\frac{4}{\sqrt{5}}$.

**Câu 61.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc $Oxy$, cho điểm $A(0;2)$ và parabol $(P):y=x^2$. Xác định các điểm $M$ trên $(P)$ sao cho $AM$ ngắn nhất.

**A.** $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3}{2}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$.

**C.** $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{4}\right)$. **D.** $M\left(\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{7}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{7}{4}\right)$.

**Lời giải.**

**Chọn A.**

$M\in(P)\Rightarrow M\left(m;m^2\right)$

$AM^2=m^2+\left(m^2-2\right)^2=m^4-3m^2+4=\left(m^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}$

$AM$ ngắn nhất khi $m^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy, $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3}{2}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3}{2}\right)$.

**Câu 62.** Cho parabol $(P):y=x^2$ và elip $(E):\frac{x^2}{9}+y^2=1$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Parabol và elip cắt nhau tại 4 điểm phân biệt.
**B.** Parabol và elip cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.
**C.** Parabol và elip cắt nhau tại 1 điểm phân biệt.
**D.** Parabol và elip không cắt nhau.

**Lời giải.**

**Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $(E)$ là $\frac{x^2}{9}+x^4=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\frac{-1+5\sqrt{13}}{18}\\x^2=\frac{-1-5\sqrt{13}}{18}\end{array}\right.$

Vậy $(P)$ cắt $(E)$ tại 2 điểm phân biệt.

**Câu 63.** Lập phương trình chính tắc của parabol $(P)$ biết $(P)$ cắt đường phân giác của góc phần tư thứ nhất tại hai điểm $A,B$ và $AB=5\sqrt{2}$.

**A.** $y^2=20x$ **B.** $y^2=2x$ **C.** $y^2=5x$ **D.** $y^2=10x$

**Lời giải.**

**Chọn C.**

Phương trình chính tắc của parabol $(P):y^2=2px\ (p>0)$

Đường phân giác góc phần tư thứ nhất: $y=x$

Ta có: $A\equiv O$, $B(m;m)\ (m>0)\Rightarrow AB^2=2m^2=\left(5\sqrt{2}\right)^2\Rightarrow m=5$

$B(5;5)\in(P)\Rightarrow 25=2p.5\Rightarrow 2p=5$

Vậy $(P):y^2=5x$

**Câu 64.** Cho điểm $A(3;0)$, gọi M là một điểm tuỳ ý trên $(P):y^2=-x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM$.

**A.** 3. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Lời giải.**

**Chọn A.**

Ta có: $M\in(P)\Rightarrow M\left(-m^2;m\right)$

$AM^2=\left(-m^2-3\right)^2+m^2=m^4+7m^2+9$

Vì $m^2\geq 0$ nên $AM^2\geq 9$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM$ là 3 khi $M\equiv O$.

**Câu 65.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc $Oxy$, cho điểm $F(3;0)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $3x-4y+16=0$. Tìm tọa độ tiếp điểm $A$ của đường thẳng $d$ và parabol $(P)$ có tiêu điểm $F$ và đỉnh là gốc tọa độ $O$.

**A.** $A\left(\frac{4}{3};5\right)$ **B.** $A\left(\frac{8}{3};6\right)$ **C.** $A\left(\frac{16}{3};8\right)$ **D.** $A\left(\frac{2}{3};\frac{9}{2}\right)$

**Lời giải.**

**Chọn C.**

$(P)$ có tiêu điểm $F(3;0)$ và có gốc toạ độ $O$ suy ra $(P): y^2 = 12x$

Phương trình hoành độ giao điểm của $d$ và $(P)$ là $\left(\frac{3x+16}{4}\right)^2 = 12x \Leftrightarrow 9x^2 - 96x + 256 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{16}{3} \Rightarrow y = 8$ .

**Câu 66.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho parabol $(P)$ có phương trình $y^2 = x$ và điểm $I(0;2)$. Tìm tất cả hai điêm $M, N$ thuộc $(P)$ sao cho $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$.

**A.** $M(4;2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.

**B.** $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;-6), N(9;3)$.

**C.** $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;-3)$.

**D.** $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $M(m^2;m) \in (P)$, $N \in (n^2;n) \in (P)$. Khi đó ta có $\overrightarrow{IM} = (m^2; m-2)$, $\overrightarrow{IN} = (n^2; n-2) \Rightarrow 4\overrightarrow{IN} = (4n^2; 4n-8)$.

Vì $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4n^2 \\ m-2 = 4n-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m = -2 \\ n = -1 \end{cases}$

Vậy các cặp điểm thỏa là $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.