

Nguyễn Hoàng Việt
Giáo viên chuyên luyện thi Quốc Gia



TOÀN CẢNH CHUYÊN VINH 2016-2021

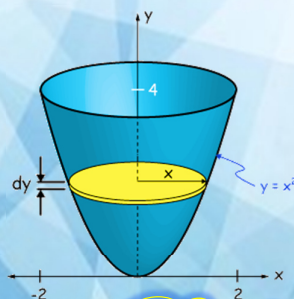
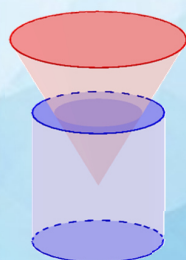
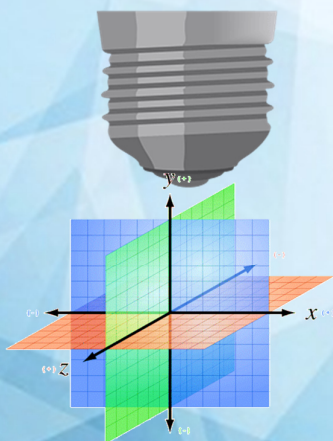
2D1



KSHS



2021



Quảng Bình, ngày 06-08-2021

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Cuốn sách này của:

.....

Ngày đã rạng, bình minh đang tỉnh giấc!

"Khi nào em cảm thấy muốn phê phán và chê bai một ai đó, hãy nhớ rằng không phải ai trên thế giới này cũng có những thuận lợi trong cuộc sống mà em có được."

MỤC LỤC

<i>Bài 01: Định đơn điệu của hàm số.....</i>	<i>Trang 01</i>
<i>Bài 2: Cực trị của hàm số.....</i>	<i>Trang 28</i>
<i>Bài 3: Giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số.....</i>	<i>Trang 48</i>
<i>Bài 4: Đường tiệm cận của hàm số.....</i>	<i>Trang 65</i>
<i>Bài 5: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.....</i>	<i>Trang 74</i>

"Nơi nào có ý chí, nơi đó có con đường."



<https://luyenthitracnghiem.vn>

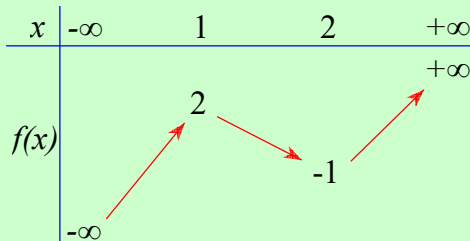


<https://www.facebook.com/vietqld>



BÀI 1: TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

Câu 1: (Câu 19 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



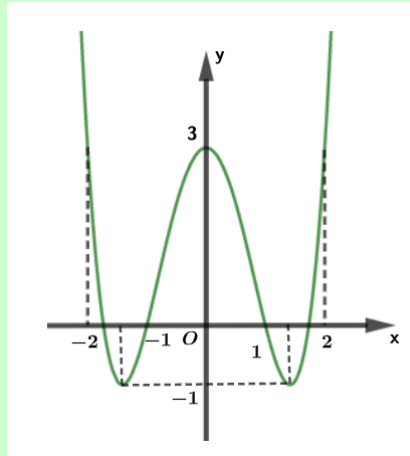
- ☒ A. $(1; 2)$.
 ☐ B. $(1; +\infty)$.
 ☐ C. $(-1; 2)$.
 ☐ D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên ta có suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 2: (Câu 4 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



- ☐ A. $(0; 1)$.
 ☐ B. $(-2; -1)$.
☒ C. $(-1; 0)$.
 ☐ D. $(-1; 3)$.

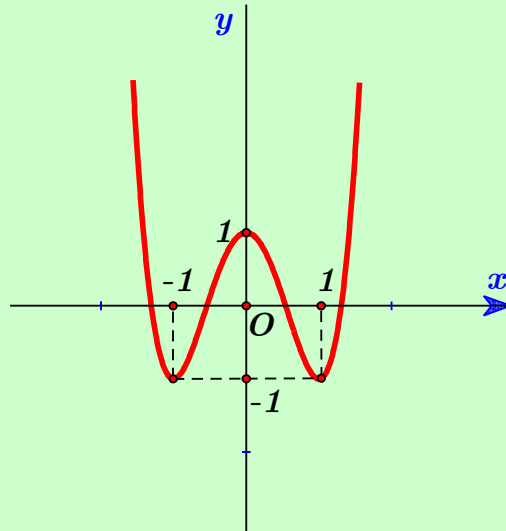
Lời giải

Chọn C

Quan sát hình ta thấy trong các đáp án chỉ có khoảng $(-1; 0)$ đồ thị hàm số đi lên.

Câu 3: (Câu 15 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?





Ⓐ. $(0;1)$.

Ⓑ. $(-1;0)$.

Ⓒ. $(-1;1)$.

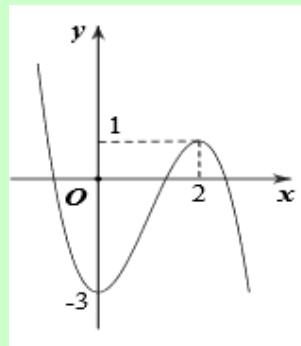
Ⓓ. $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-1;0)$.

Câu 4: (Câu 16 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ. $(-3;1)$.

Ⓑ. $(3;+\infty)$.

Ⓒ. $(-1;3)$.

Ⓓ. $(0;2)$.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta thấy, đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi từ trên xuống dưới, từ trái sang phải trên khoảng $(2;+\infty)$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

ta được đáp án đúng là **D**



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



Câu 5: (Câu 15 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$								

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -1 2 1 3

Ⓐ. $(-1; 2)$.

Ⓑ. $(1; 3)$.

Ⓒ. $(1; 2)$.

Ⓓ. $(2; 4)$.

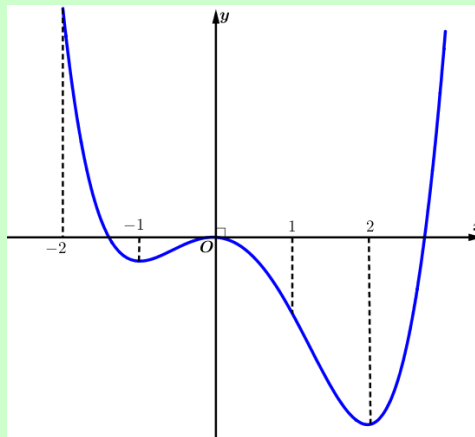
Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(0; 2)$ và $(4; +\infty)$.

Do đó ta chọn đáp án C.

Câu 6: (Câu 22 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

Ⓐ. $(1; 2)$.

Ⓑ. $(-1; 0)$.

Ⓒ. $(0; 1)$.

Ⓓ. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn B

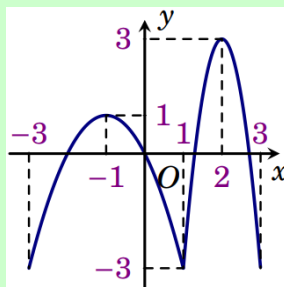
Căn cứ vào đồ thị ta có bản biến thiên sau :



x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$y = f(x)$								

Dựa vào BBT ta có hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ nên chọn đáp án **B**

Câu 7: (Câu 11 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng



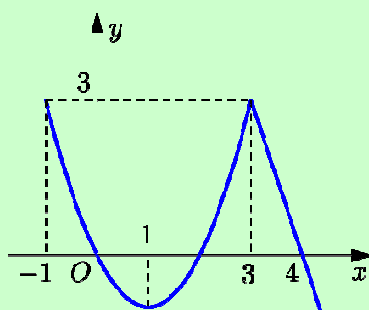
- ☐ A. $(0;2)$.
 ☐ B. $(-2;0)$.
 ☐ C. $(-3;-1)$.
 ☒ D. $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị, hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 8: (Câu 8 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?



- ☐ A. $(2;4)$.
 ☐ B. $(0;3)$.
 ☒ C. $(2;3)$.
 ☐ D. $(-1;4)$.

Lời giải

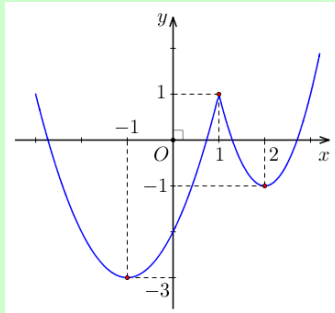
Chọn C

Trên khoảng $(1;3)$ thì đồ thị có hướng đi lên. Suy ra hàm số đồng biến $(1;3)$.

Như vậy khoảng $(2;3) \subset (1;3)$ làm cho hàm số đồng biến.



Câu 9: (Câu 11 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đó?



- ☐ A. Nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$
☐ B. Đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$
☒ C. Đồng biến trên khoảng $(0; 1)$
☐ D. Nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 10: (Câu 23 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2017 - 2018) Hàm số $y = (x^2 - x)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- ☒ A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$
☐ B. $(1; 2)$
☐ C. $(-2; 0)$
☐ D. $(0; 1)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 2(x^2 - x)(2x - 1)$. Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - x)(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y							

Từ bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 11: (Câu 7 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$				$+\infty$	$+\infty$

Ⓐ. $(-1; 0)$.

Ⓑ. $(-1; 1)$.

Ⓒ. $(-\infty; -1)$.

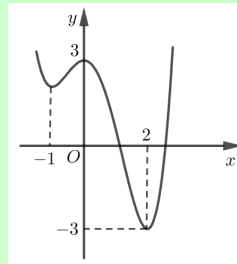
Ⓓ. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Trong khoảng $(-1; 0)$ đạo hàm $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 12: (Câu 4 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới.



Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đó?

Ⓐ. Đồng biến trên khoảng $(0; 2)$

Ⓑ. Nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$

Ⓒ. Đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$

Ⓓ. Nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$

Lời giải

Chọn C

Câu 13: (Câu 11 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là sai?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Ⓐ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Ⓑ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Ⓒ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.



Ⓓ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 14: Dựa vào bảng biến thiên.

(Câu 7 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- Ⓐ. $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Ⓑ. $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Ⓒ. $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$. Ⓓ. $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Lời giải

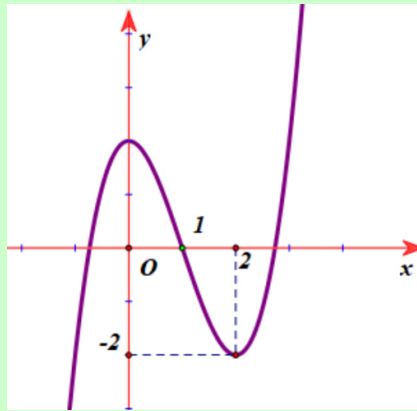
Chọn A

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Cho $k = 0 \Rightarrow y = \sin x$ đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y = \sin x$ cũng đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Câu 15: (Câu 22 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng



- Ⓐ. $(1; 2)$. Ⓑ. $(2; 3)$. Ⓒ. $(-1; 0)$. Ⓓ. $(-1; 1)$.

Lời giải

Chọn A

$y = -2f(x)$ suy ra $y' = -2f'(x)$.

Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến khi $y' > 0 \Leftrightarrow -2f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$.

Vậy $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 16: (Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = 2f(-x)$ đồng biến trên khoảng



Ⓐ. $(2; +\infty)$.

Ⓑ. $(-\infty; -1)$.

Ⓒ. $(-1; 1)$.

Ⓓ. $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = g(x) = 2f(-x)$

Ta có $g'(x) = -2f'(-x) = -2(-x)^2 \cdot [(-x)^2 - 1] = -2x^2(x^2 - 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Kết luận hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 17: (Câu 15 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ. $(1; 3)$.

Ⓑ. $(-1; 0)$.

Ⓒ. $(0; 1)$.

Ⓓ. $(-2; 0)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Đồng thời $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$ nên ta chọn đáp án theo đề bài là $(0; 1)$.

Câu 18: (Câu 25 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng?

Ⓐ. $(0; 2)$

Ⓑ. $(2; +\infty)$

Ⓒ. $(-\infty; -2)$

Ⓓ. $(-2; 0)$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = -2f'(x) = -2x^2 + 4x, y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$		

Vậy hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 19: (Câu 3 - Chuyên Vinh - Lần 4 - Năm 2016 - 2017) Hàm số nào sau đây đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$?

- Ⓐ. $y = x^4 + x^2 + 2$ Ⓑ. $y = x^3 + x - 2$ Ⓒ. $y = x^2 + x + 1$ Ⓓ. $y = x^3 - x + 1$

Lời giải

Chọn B

$y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = x^3 + x - 2$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Câu 20: (Câu 13 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ. Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Ⓑ. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
Ⓒ. Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$. Ⓓ. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. $y' = 4x^3 - 4x$. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 21: (Câu 14 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2016 - 2017) Tìm m để hàm số $y = x^3 + 2x^2 - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- Ⓐ. $m < -\frac{4}{3}$. Ⓑ. $m \leq -\frac{4}{3}$. Ⓒ. $m \geq -\frac{4}{3}$. Ⓓ. $m > -\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 + 4x - m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0 \Leftrightarrow 4 + 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{4}{3}.$$

Câu 22: (Câu 4 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = x^2(3 - x)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- Ⓐ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- Ⓑ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- Ⓒ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
- Ⓓ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = -x^3 + 3x^2$. $y' = -3x^2 + 6x$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Bảng biến thiên:}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				4		

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(0; 2)$.

Câu 23: (Câu 15 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2016 - 2017) Các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 - 3x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của nó không có tiếp tuyến song song với trục hoành là

- Ⓐ. $-1 < m < 0$.
- Ⓑ. $-1 \leq m \leq 0$.
- Ⓒ. $-1 \leq m < 0$.
- Ⓓ. $-1 < m \leq 0$.

Lời giải

Chọn D

Phân tích: Vì đây là hàm bậc ba nên có hai tính chất sau:

Câu 24: Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm.

Câu 25: Đồ thị hàm số không có tiếp tuyến song song với trục hoành $\Leftrightarrow y' = 0$ vô nghiệm.

Kết hợp 2 tính chất ta được $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \quad y' = 3mx^2 - 6mx - 3.$$

Nếu $m = 0$ thì $y' = -3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (thoả mãn).



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



Nếu $m \neq 0$ thì ycbt $\Leftrightarrow y' < 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 9m^2 + 9m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < m < 0$$

Câu 26: Kết hợp 2 trường hợp ta được: $-1 < m \leq 0$.

(Câu 34 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = 3x + m\sqrt{x^2 + 1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A). 5.

(B). 1.

(C). 7.

(D). 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = 3x + m\sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = 3 + \frac{mx}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow f''(x) = \frac{m}{(\sqrt{x^2 + 1})^3}.$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = m + 3, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -m + 3.$$

Trường hợp 1: $m > 0$, khi đó $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$.

So điều kiện: $0 < m \leq 3$.

Trường hợp 2: $m < 0$, khi đó $f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

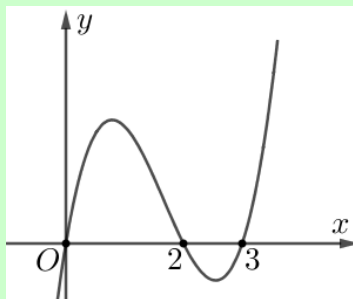
Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3$.

So điều kiện: $-3 \leq m < 0$.

Trường hợp 3: $m = 0$, khi đó $f(x) = 3x$, hiển nhiên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Kết luận: hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3$.

Câu 27: (Câu 45 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Giả sử $f(x)$ là một đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y = f'(1-x)$ được cho như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

(A). $(1; 2)$.

(B). $(-2; -1)$.

(C). $(0; 1)$.

(D). $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có:

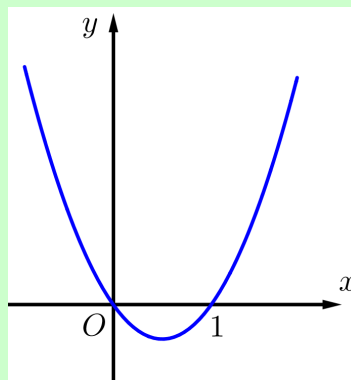


$$\begin{aligned} f'(1-x) &= a.x.(x-2).(x-3), \quad (a > 0) \\ &= -a.[(1-x)-1].[(1-x)+1].[(1-x)+2] \\ \Rightarrow f'(x) &= -a(x-1)(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

Ta có: $g'(x) = 2x.f'(x^2-3) = -2a.x(x^2-4)(x^2-2)(x^2-1), \quad (a > 0)$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$			
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-
Vậy	hàm	số	$g(x)=f\left(x^2-3\right)$			nghịch	biến	trên	các	khoảng		
$\left(-2;-\sqrt{2}\right),\left(-1;0\right),\left(1;\sqrt{2}\right),\left(2;+\infty\right).$												

Câu 28: (Câu 74 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(-x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- ☐ A. $(-2; -1)$.
 ☒ B. $(1; 2)$.
 ☐ C. $(-1; 0)$.
 ☐ D. $(-\frac{1}{2}; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = (-x-x^2)' \cdot f'(-x-x^2) = -(1+2x) \cdot f'(-x-x^2)$.

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2x = 0 \\ f'(-x-x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ -x-x^2 = 0 \\ -x-x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của $y = g(x)$:



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



x	$-\infty$	-1	$-1/2$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$g(x)$					

Dựa vào bảng trên ta thấy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ và $(0; +\infty)$.

Câu 29: (Câu 75 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$-$	$+$

Hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- ☐ A. $(-2; -1)$.
 ☐ B. $(2; +\infty)$.
 ☒ C. $(0; 2)$.
 ☐ D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = (x^2 - 2)' \cdot f'(x^2 - 2) = 2x \cdot f'(x^2 - 2)$.

Từ bảng xét dấu đạo hàm ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có số nghiệm hữu hạn nên phương trình $g'(x) = 0$ cũng có số nghiệm hữu hạn. Do đó, ta cần tìm x sao cho $g'(x) \leq 0$.

$$\text{Ta có } g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow xf'(x^2 - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ f'(x^2 - 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

Do đó hàm số nghịch biến trên mỗi tập: $[0; 2], (-\infty; -2]$.

Từ các đáp án của đề bài ta chọn hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Câu 30: (Câu 40 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho hàm số $y = x^3 + x^2 + (1 - m)x + 2$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

- ☐ A. 5.
 ☐ B. 7.
 ☐ C. Vô số.
 ☒ D. 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $D = \mathbb{R}$, $y' = 3x^2 + 2x + 1 - m$.



Để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$;

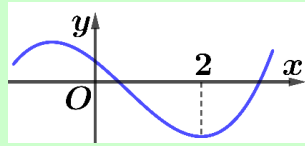
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 1 - m \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 2x + 1, \forall x \in (1; +\infty);$$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + 2x + 1, g'(x) = 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \notin (1; +\infty)$,

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	6	$+\infty$

Do đó $m \leq 6 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, chọn D.

Câu 31: (Câu 39 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới. Tìm m để bất phương trình $f(x) \geq \frac{x+1}{x+2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 1]$.



- Ⓐ. $m < f(1) - \frac{2}{3}$. Ⓑ. $m \leq f(1) - \frac{2}{3}$. Ⓒ. $m \geq f(0) - \frac{1}{2}$. Ⓓ. $m > f(0) - \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) \geq \frac{x+1}{x+2} + m \Leftrightarrow m \leq f(x) - \frac{x+1}{x+2}$.

Đặt $g(x) = f(x) - \frac{x+1}{x+2}$, ta có $m \leq f(x) - \frac{x+1}{x+2}, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow m \leq g(x), \forall x \in [0; 1]$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{(x+2)^2}$.

Từ đồ thị ta có trên $[0; 1]$ hàm số $f(x)$ nghịch biến nên

$$f'(x) \leq 0 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - \frac{1}{(x+2)^2} < 0, \forall x \in [0; 1].$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[0; 1]$.

Bảng biến thiên



x	0	1
$g'(x)$		—
$g(x)$	$g(0)$	$g(1)$

Từ bảng biến thiên ta có $m \leq g(x), \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow m \leq g(1) \Leftrightarrow m \leq f(1) - \frac{2}{3}$.

Vậy $m \leq f(1) - \frac{2}{3}$.

Câu 32: (Câu 44 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - 3m)x^2 + 3$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

(A). 4.

(B). 6.

(C). 2.

(D). 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m^2 - 3m)x$

Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow 4x^3 - 4(m^2 - 3m)x \geq 0 \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m^2 - 3m \leq x^2 \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m^2 - 3m \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 4$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 33: (Câu 34 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Hàm số $y = f(1 - 2x)$ đồng biến trên khoảng

x	$-\infty$	-3	-2	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

(A). $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

(B). $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

(C). $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.

(D). $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = f(1 - 2x) \Rightarrow y' = -f'(1 - 2x)$.

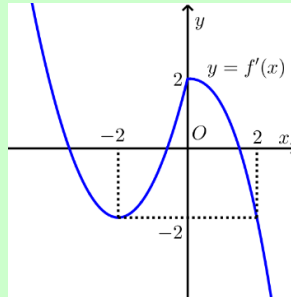
Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) \leq 0$.



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \leq -3 \\ -2 \leq 1-2x \leq 1 \\ 1-2x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{cases}.$$

Vậy chọn đáp án (A).

Câu 34: (Câu 41 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2018 - 2019) Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y=f(x-1)+x^2-2x$ đồng biến trên khoảng



- (A). (1;2). (B). (-1;0). (C). (0;1). (D). (-2;-1).

Lời giải

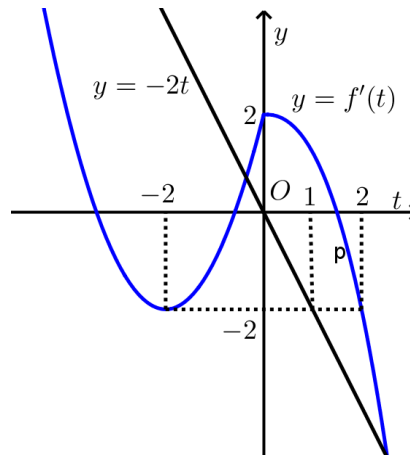
Chọn A

Ta có $y=f(x-1)+x^2-2x$

Khi đó $y'=f'(x-1)+2x-2$. Hàm số đồng biến khi $y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1)+2(x-1) \geq 0$ (1)

Đặt $t=x-1$ thì (1) trở thành: $f'(t)+2t \geq 0 \Leftrightarrow f'(t) \geq -2t$.

Quan sát đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-2t$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó ta thấy với $t \in (0;1)$ thì đồ thị hàm số $y=f'(t)$ luôn nằm trên đường thẳng $y=-2t$.

Suy ra $f'(t)+2t > 0, \forall t \in (0;1)$. Do đó $\forall x \in (1;2)$ thì hàm số $y=f(x-1)+x^2-2x$ đồng biến.

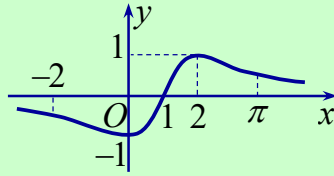


<https://luyenthitracnghiem.vn>

<https://www.facebook.com/vietqld>



Câu 35: (Câu 48 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2018 - 2019) Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Bất phương trình



$f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$ khi và chỉ khi

- (A). $m < f(0)$. (B). $m < f(1) - 1$. (C). $m < f(-1) + 1$. (D). $m < f(2)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1 :

$$\text{Xét } g(x) = f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} \Rightarrow g'(x) = f'(x) - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$$

$$\bullet \text{ Với } x \in [-1; 1] \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos \frac{\pi x}{2} > 0 \quad (1)$$

$$\text{Đồng thời dựa vào đồ thị } f'(x) \text{ ta thấy } f'(x) < 0, \forall x \in [-1; 1] \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta suy ra } g'(x) < 0, \forall x \in [-1; 1].$$

$$\bullet \text{ Với } x \in (1; 3] \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos \frac{\pi x}{2} < 0 \quad (3)$$

$$\text{Đồng thời dựa vào đồ thị ta thấy } f'(x) > 0, \forall x \in (1; 3] \quad (4)$$

$$\text{Từ (3), (4) ta suy ra } g'(x) > 0, \forall x \in (1; 3].$$

$$\text{Tại } x=1: \begin{cases} f'(1)=0 \\ \cos \frac{\pi}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow g'(1)=0. \text{ Ta có bảng biến thiên của } g(x) \text{ như sau:}$$

x	-1	1	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

$$\text{Để bất phương trình } \underbrace{f(x) - \sin \frac{\pi x}{2}}_{g(x)} > m \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [-1; 3]$$

$$\Rightarrow m < \min_{[-1; 3]} g(x) \Rightarrow m < g(1) = f(1) - 1.$$

Cách 2

Xét bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ (1) với $x \in [-1; 3]$, ta có:

$$f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m \Leftrightarrow f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} > m \quad (2)$$

Xét $f(x) - \sin \frac{\pi x}{2}$ với $x \in [-1; 3]$

+ Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ đã cho ta suy ra BBT của $f(x)$ như sau:

x	-1	1	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$f(-1)$	$f(1)$	$f(3)$

Từ BBT ta suy ra: $f(x) \geq f(1), \forall x \in [-1; 3]$ (*)

+ Do $x \in [-1; 3]$ nên: $-1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi x}{2} \leq \frac{3\pi}{2}$

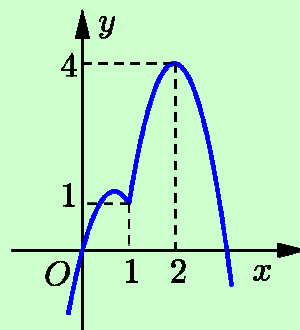
Suy ra: $-1 \leq \sin \frac{\pi x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin \frac{\pi x}{2} \leq 1$ (**)

+ Từ (*) và (**) cho ta: $f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} \geq f(1) - 1, \forall x \in [-1; 3]$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

Do đó: Bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$

$$\Leftrightarrow m < f(1) - 1.$$

Câu 36: (Câu 36 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y = |3f(x) - x^3|$ đồng biến trên khoảng



Ⓐ. $(2; +\infty)$.

Ⓑ. $(-\infty; 2)$.

Ⓒ. $(0; 2)$.

Ⓓ. $(1; 3)$.

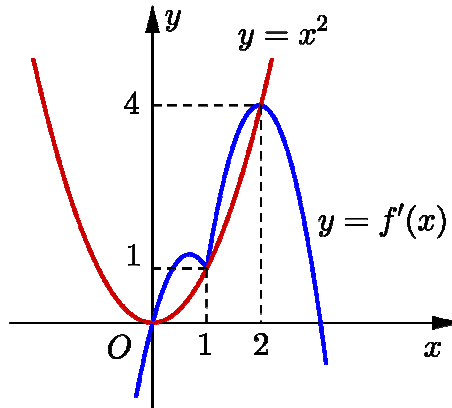
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = 3f(x) - x^3$. Ta có $y' = 3f'(x) - 3x^2$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) - x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2$

Ta vẽ thêm đồ thị hàm số $y = x^2$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị $y = f'(x)$.



Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	+	0	-	
y									

$y = 0$ (red line)
 $3f(2) - 8$ (point on the red line)
 $y = 0$ (point on the red line)

Ta có $f(0) = 0$ nên từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = |3f(x) - x^3|$ có đồ thị được xây dựng từ đồ thị hàm số $y = 3f(x) - x^3$ bằng cách bỏ phần phía dưới trục hoành và lấy đối xứng phần bị bỏ qua trục hoành. Do đó hàm số $y = |3f(x) - x^3|$ đồng biến trên $(0; 2)$.

Câu 37: (Câu 36 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2018 - 2019) Cho $f(x)$ mà hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m + x^2 < f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$

x	-1		1		3
$f'(x)$					

là 1 $\nearrow 3$ $\searrow 2$



Ⓐ. $m < f(0)$

Ⓑ. $m \leq f(0)$

Ⓒ. $m \leq f(3)$

Ⓓ. $m < f(1) - \frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn B

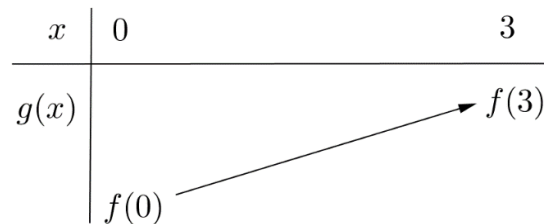
Ta có: $m + x^2 < f(x) + \frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow m < f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ trên $[0; 3]$, có $g'(x) = f'(x) + x^2 - 2x$.

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 2x - x^2 \quad \forall x \in [0; 3]$.

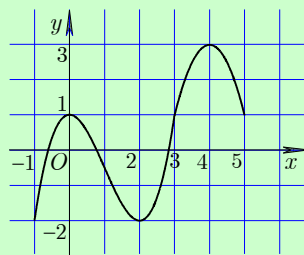
Theo bảng biến thiên $f'(x) > 1, \forall x \in [0; 3]$, mà $2x - x^2 \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x) > 2x - x^2, \forall x \in [0; 3]$ nên ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $[0; 3]$:



Từ bảng biến thiên ta có $m < g(x), \forall x \in (0; 3) \Leftrightarrow m \leq f(0)$

Câu 38: (Câu 36 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng



Ⓐ. $(-3; -2)$.

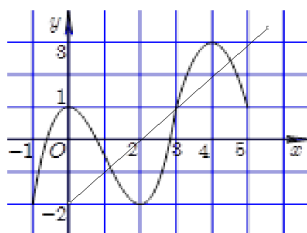
Ⓑ. $(-2; -1)$.

Ⓒ. $(-1; 0)$.

Ⓓ. $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $y = -2f(2-x) + x^2 \Rightarrow y' = -(2-x)' 2f'(2-x) + 2x$



<https://luyenthitracnghiem.vn>

<https://www.facebook.com/vietqld>





$$y' = 2f'(2-x) + 2x \Rightarrow y' < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) + x < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < (2-x) - 2.$$

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại hai điểm có hoành độ

nguyên liên tiếp là $\begin{cases} 1 < x_1 < 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ và cũng từ đồ thị ta thấy $f'(x) < x - 2$ trên miền $2 < x < 3$ nên

$$f'(2-x) < (2-x) - 2 \text{ trên miền } 2 < 2-x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 39: (Câu 34 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2017 - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = m^2 x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A). 15

(B). 6

(C). 7

(D). 16

Lời giải

Chọn D

Ta xét 2 trường hợp:

TH 1: $m^2 = 0$, khi đó $y = 2x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4x \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$. (Nhận)

TH 2: $m^2 \neq 0$, đặt $t = x^2$, khi đó $y = m^2 t^2 - 2(4m-1)t + 1, (\forall t > 1)$

Ta có $y' = 2m^2 t - 2(4m-1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4m-1}{m^2} > 1$$

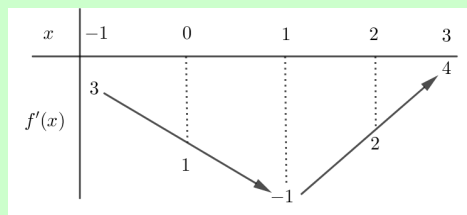
Lập bảng biến thiên ta có $\frac{4m-1}{m^2} < 1 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 + \sqrt{3} \\ m < 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $m = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Câu 40: (Câu 36 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số

$y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên khoảng



(A). $(2; 4)$

(B). $(0; 2)$

(C). $(-2; 0)$

(D). $(-4; -2)$



Lời giải

Chọn D

Xét hàm $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$, ta có: $y' = -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1$

$$\text{Xét BPT } y' = -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1 < 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < 1 - \frac{x}{2} < 3 & (1) \\ -1 < 1 - \frac{x}{2} < a & (2) \end{cases} \text{ với}$$

$$f'(a) = 2, a \in (-1; 0).$$

$$\text{Xét (1): } (1) \Leftrightarrow -4 < x < -2.$$

$$\text{Xét (2): } (2) \Leftrightarrow 2 - 2a < x < 4$$

Ta thấy các đáp án B, C không thỏa mãn và với $a < 0 \Rightarrow 2 - 2a > 2$ nên Đáp án A không thỏa mãn, vậy đáp án D thỏa mãn.

Câu 41: (Câu 32 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2016 - 2017) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^4 - 2mx^2$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

- (A). $m \leq -1$ hoặc $m > 1$ (B). $m \leq -1$ hoặc $m \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 (C). $m = -1$ hoặc $m > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (D). $m \leq -1$

Lời giải

Chọn B

$$y' = 4(m^2 - 1)x^3 - 4mx = 4x[(m^2 - 1)x^2 - m]$$

$$\text{Để hàm số } y = (m^2 - 1)x^4 - 2mx^2 \text{ đồng biến trên } (1; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)x^2 - m \geq 0, \forall x \in (1; +\infty), (*)$$

- Nếu $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -1$
- Với $m = 1$ khi đó $(*) \Leftrightarrow -1 \geq 0$ (mâu thuẫn)
- Với $m = -1$ khi đó $(*) \Leftrightarrow 1 \geq 0$ (đúng) nhận $m = -1$
- Nếu $m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow m < -1$ hoặc $m > 1$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow (m^2 - 1)x^2 \geq m, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{m}{m^2 - 1}, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow 1 \geq \frac{m}{m^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ m \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

- Nếu $m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

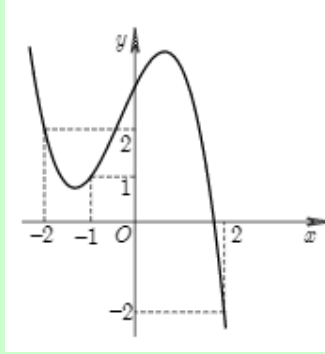


Khi đó $(*) \Leftrightarrow (m^2 - 1)x^2 \geq m, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{m}{m^2 - 1}, \forall x \in (1; +\infty)$

(Không xảy ra do $\forall x \in (1; +\infty)$) Vậy giá trị cần tìm $m \leq -1$ hoặc $m \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

https://luyenthitracnghiem.vn

Câu 42: (Câu 43 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm $y = f'(x-1)$ được cho trong hình vẽ bên.



Hàm số $g(x) = f(2x) + 2x^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ. $(-2; -1)$.

Ⓑ. $(1; 2)$.

Ⓒ. $(0; 1)$.

Ⓓ. $(-1; 0)$.

Lời giải

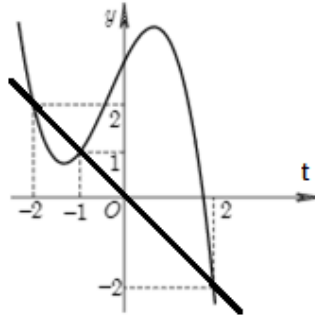
Chọn D

Ta có $g'(x) = 2f'(2x) + 4x + 2$.

Xét $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2f'(2x) \geq -4x - 2 \Leftrightarrow f'(2x) \geq -2x - 1$.

Đặt $2x = t - 1$ ta có $f'(t-1) \geq -(t-1) - 1 \Leftrightarrow f'(t-1) \geq -t$.

Vẽ đường thẳng $y = -t$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị hàm $y = f'(t-1)$.



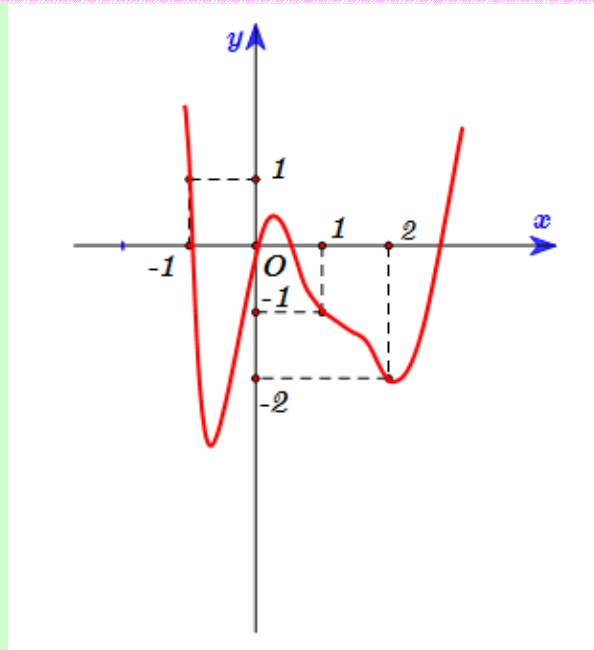
Ta có $f'(t-1) \geq -t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -2 \\ -1 \leq t \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-3}{2} \\ -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

Câu 43: (Câu 82 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên

$\mathbb{R}$ có $f(0) = \frac{1}{2}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



https://www.facebook.com/vietgold



Hàm số $y = |2f(x+2) + (x+1)(x+3)|$ nghịch biến trên khoảng

- Ⓐ. $(-3; -2)$. Ⓑ. $(0; 2)$. Ⓒ. $(-\infty; -3)$. Ⓓ. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$.

Ta có $g'(x) = 2[f'(x+2) + (x+2)]$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2)$

Đặt $t = x+2$ ta được $f'(t) = -t$ (1).

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f'(t)$ và đường thẳng $d: y = -t$ (hình vẽ)

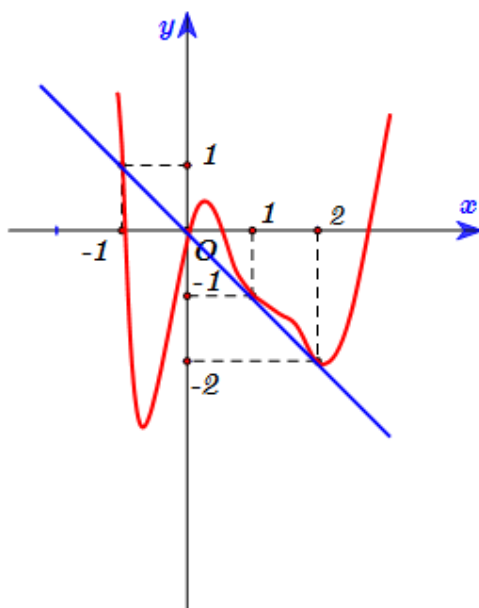


<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>





Dựa vào đồ thị của $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$

$$\text{Ta có : } f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Do $f(0) = \frac{1}{2}$ nên $g(-2) = 2f(0) + (-2+1)(-2+3) = 0$

Bảng biến thiên của hàm số $y = |g(x)|$

x	$-\infty$		0		1		2		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-		-	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$				$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$ g(x) $	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$				$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; x_0)$ và $(-3; -2)$

Câu 44: (Câu 47 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số

$y = -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ Tổng tất cả các phần tử của S là



Ⓐ. -1.

Ⓑ. 0.

Ⓒ. -2.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn A

Gọi $y = f(x) = -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1$.

Nhận xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

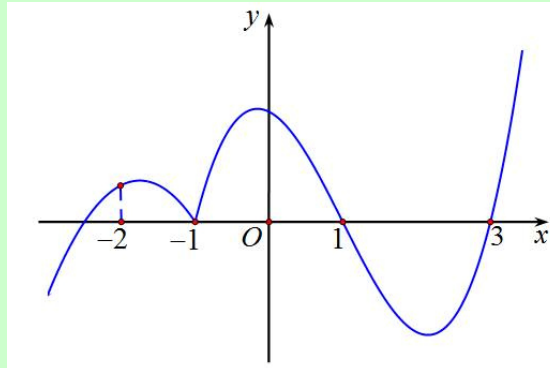
Do đó hàm số $y = -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \leq 0 & \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^3 + 3mx^2 + 4m^2x \leq 0 & \forall x \in (1; +\infty) \\ -1 + m + 2m^2 + m - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x^3 + 3mx^2 + 4m^2x \leq 0 & \forall x \in (1; +\infty) \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < m < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 3mx + 4m^2 \leq 0 & \forall x \in (1; +\infty) \quad (1) \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < m < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (2) $\Rightarrow m \in \{-1; 0\}$ thay vào (1) đều thỏa mãn vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 45: (Câu 42 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $(mx + m^2\sqrt{5-x^2} + 2m + 1)f(x) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 2]$?

Ⓐ. 1.

Ⓑ. 3.

Ⓒ. 0.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = mx + m^2\sqrt{5-x^2} + 2m + 1$.

Từ đồ thị của $y = f(x)$ ta thấy $f(x)$ đổi dấu khi qua $x = 1$ nên suy ra $g(x)$ cũng phải đổi dấu khi qua $x = 1$. Mặt khác $g(x)$ liên tục nên $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 1$.

Kiểm tra: Với $m = -1$



<https://luyenthitracnghiem.vn>

<https://www.facebook.com/vietqld>





Ta có $g(x) \cdot f(x) = (-x + \sqrt{5-x^2} - 1)f(x) = (1-x) \left(\frac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}} + 1 \right) f(x)$

Nhận xét: $\frac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}} + 1 = \frac{3+x+\sqrt{5-x^2}}{2+\sqrt{5-x^2}} > 0, \forall x \in [-2; 2]$.

Khi đó quan sát đồ thị $f(x)$, ta thấy:

+ TH1: với $x \in [1; 2]$ thì $f(x) \leq 0$ nên $(1-x) \cdot f(x) \geq 0$.

+ TH2: với $x \in [-2; 1]$ thì $f(x) \geq 0$ nên $(1-x)f(x) \geq 0$.

Do đó trong cả hai trường hợp ta luôn có $g(x) \cdot f(x) \geq 0, \forall x \in [-2; 2]$.

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

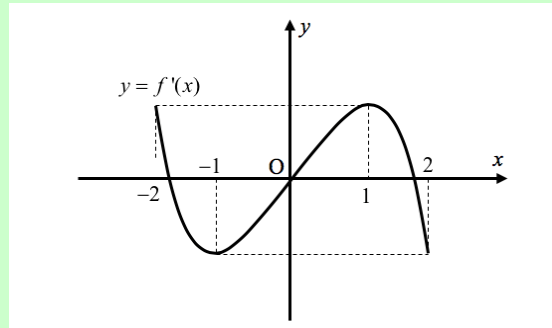
Câu 46: (Câu 41 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng

A. $(1; 2)$

B. $(-1; 0)$

C. $(0; 1)$

D. $(-2; -1)$



Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(\cos x) + x^2 - x$. Ta thấy $g'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1$. Do $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $-1 \leq f'(\cos x) \leq 1$, suy ra $|\sin x \cdot f'(\cos x)| \leq 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vì $g'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1 \geq -1 + (2x - 1) = 2x - 2$ nên $g'(x) > 0, \forall x > 1$.

Suy ra $g(x) = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$. Chọn đáp án **A**.



BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 48: (Câu 11 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$			
y'	+	0	-	0	+		-	0	+

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực đại?

- Ⓐ. 1. Ⓑ. 3. Ⓒ. 4. Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng xét dấu của y' ta có bảng biến thiên của hàm số như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$-$	0	$+$
y									

Do hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

Câu 49: (Câu 11 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ

x	-2	0	1	2	6
$f'(x)$	$+ \ 0$	$- \ 0$	$+ \ 0$	$- \ $	$+ \ 0 \ -$

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị

- Ⓐ. 3. Ⓑ. 4. Ⓒ. 2. Ⓓ. 5.

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và từ bảng xét dấu đạo hàm như trên nên hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 50: (Câu 5 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020 - THPT CHU VĂN AN-HÀ NỘI- LẦN 2-2017) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$, có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	-2	-1	1	3			
y'		+	0	-		+	
y	0		1		-2		5



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- Ⓐ. Giá trị cực tiểu của hàm số là 0. Ⓑ. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.
- Ⓒ. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$. Ⓓ. Giá trị cực đại của hàm số là 5.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Câu 51: (Câu 6 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-		+	0	-	
y	$+\infty$				3		$-\infty$

- Ⓐ. Hàm số có hai điểm cực trị. Ⓑ. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.
- Ⓒ. Hàm số có một điểm cực trị. Ⓓ. Giá trị lớn nhất của hàm số là 3.

Lời giải

Chọn C

A sai vì hàm số chỉ đạt cực trị tại $x = 2$.

B sai vì trên $(0; 2)$ hàm số đồng biến.

C đúng vì hàm số chỉ đạt cực trị tại $x = 2$.

D sai vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ nên hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 52: (Câu 7 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 3]$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ:

x	-3	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	-	0	-	0	+	0

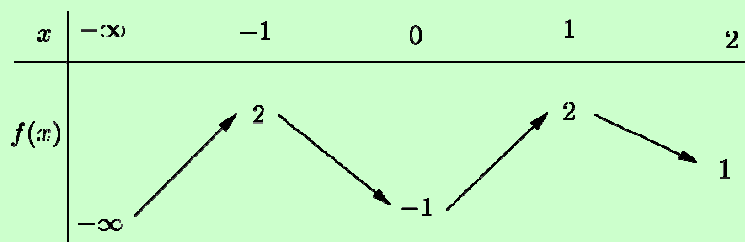
Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-3; 3)$?

- Ⓐ. 2. Ⓑ. 4. Ⓒ. 1. Ⓓ. 3.

Lời giải

Chọn D

Suy ra: Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-3; 3)$.



<https://luyenthitracnghiem.vn>

- ☒ A. Giá trị cực đại bằng 2.
 ☐ B. Hàm số có hai điểm cực tiểu.
- ☐ C. Giá trị cực tiểu bằng -1 .
 ☐ D. Hàm số có hai điểm cực đại.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ chỉ có một điểm cực tiểu là $x_0 = 0$

 <https://www.facebook.com/victorbid>

x	-3	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0

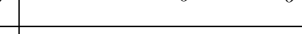
 <https://www.facebook.com/victorbid>

- ☒ A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$
☐ B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$
☐ C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$
☐ D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm đã cho ta có bảng biến thiên của hàm số

x	-3	-1	0	1	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$							

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số không đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 55: (Câu 10 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 3]$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đã cho?

x	-2	0	1	3	
$f'(x)$	+		-	0	+

- (A). Đạt cực tiểu tại $x = -2$ (B). Đạt cực đại tại $x = 1$
 (C). Đạt cực tiểu tại $x = 3$ (D). Đạt cực đại tại $x = 0$

Lời giải

Chọn D

x	-2	0	1	3
$f'(x)$	+		- 0 +	
$f(x)$				

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số nhận $x = 0$ làm điểm cực đại.

Câu 56: (Câu 4 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$	
y'	-			+	0	-
y	$+\infty$	-1		-1	3	$-\infty$

- (A). Hàm số có hai điểm cực trị.
 (B). Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.
 (C). Hàm số có một điểm cực trị.

Ⓓ. Giá trị lớn nhất của hàm số là 3.

Lời giải

Chọn C

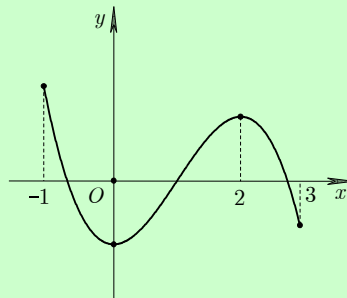
A sai vì hàm số chỉ đạt cực trị tại $x = 2$.

B sai vì trên $(0; 2)$ hàm số đồng biến.

C đúng vì hàm số chỉ đạt cực trị tại $x = 2$.

D sai vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ nên hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 57: (Câu 7 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



Ⓐ. Hàm số có hai điểm cực đại là $x = -1, x = 2$.

Ⓑ. Hàm số có hai điểm cực tiểu là $x = 0, x = 3$.

Ⓒ. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = 2$.

Ⓓ. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = -1$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = 2$.

Câu 58: (Câu 13 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2016 - 2017) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$				
y'		+	0	-		+		
y			3			0		$+\infty$

Ⓐ. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.



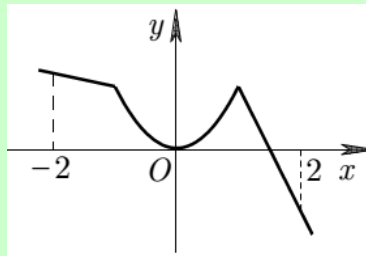
- Ⓐ. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.
 Ⓑ. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.
 Ⓒ. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

Lời giải

Chọn A

Câu 59: Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị.

(Câu 5 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau. Trên $[-2; 2]$ hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị ?



- Ⓐ. 4. Ⓑ. 3. Ⓒ. 2. Ⓓ. 1.

Lời giải

Chọn C

Câu 60: (Câu 32 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Hàm số $f(x) = x^4(x-1)^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- Ⓐ. 3. Ⓑ. 0. Ⓒ. 5. Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = 4x^3(x-1)^2 + 2x^4(x-1) = 2x^3(x-1)(3x-2)$.

$$\text{Giải: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3(x-1)(3x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ . Nhận thấy } f'(x) \text{ đổi dấu qua } 3$$

ngiểm trên. Do đó hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 61: (Câu 16 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên dưới. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực đại?

x	$-\infty$	0	1	2	4	$+\infty$
y'	—	0	+	—	0	+

- Ⓐ. 3. Ⓑ. 2. Ⓒ. 0. Ⓓ. 1.



Lời giải

Chọn D

y' đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x = 1 \Rightarrow x = 1$ là điểm cực đại của hàm số
Hàm số có 1 điểm cực đại.

Câu 62: (Câu 27 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x^2 - 3x)(x^2 - 4x)$. Điểm cực đại của hàm số đã cho là:

- Ⓐ. $x = 0$. Ⓑ. $x = 3$. Ⓒ. $x = 2$. Ⓓ. $x = -2$.

Lời giải

Chọn C

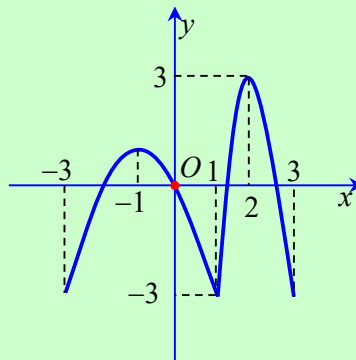
$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x)(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 (\text{nghiệm đơn}) \\ x = 0 (\text{nghiệm kép}) \\ x = 2 (\text{nghiệm đơn}) \\ x = -2 (\text{nghiệm đơn}) \end{cases}.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Câu 63: (Câu 9 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-3; 3]$ hàm số đã cho có mấy điểm cực trị?



- Ⓐ. 4. Ⓑ. 2. Ⓒ. 5. Ⓓ. 3.

Lời giải

Chọn D



Câu 64: (Câu 26 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm

$$f'(x) = (x^2 + x)(x - 2)^2(2^x - 4) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Số điểm cực trị của } f(x) \text{ là}$$

(A). 2.

(B). 4.

(C). 3.

(D). 1.

Lời giải

Chọn C

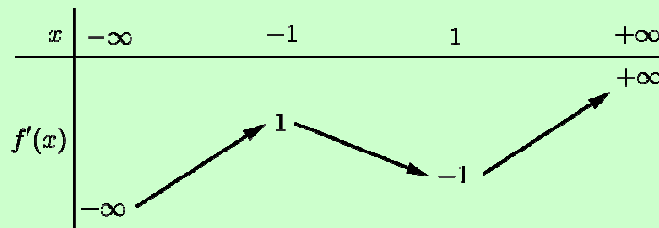
$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x)(x - 2)^2(2^x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Câu 65: (Câu 31 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



(A). 3.

(B). 2.

(C). 0.

(D). 1.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$ (1).

Số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 1$

Dựa vào BBT, suy ra phương trình (1) có 2 nghiệm, trong đó có 1 nghiệm $x = -1$ (nghiệm kép) và $x = x_1 > 1$ (nghiệm đơn).

Vậy hàm số $g(x)$ đã cho có 1 điểm cực trị.



Câu 66: (Câu 6 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

- (A). 3. (B). 2. (C). 1. (D). 4.

Lời giải

Chọn D

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$, ta có: hàm số $f(x)$ có 4 điểm x_0 mà tại đó $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 .

Vậy hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Câu 67: (Câu 14 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $(-\infty; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

x	$-\infty$	1	2	3	4
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	1	0	2	-1

- (A). 3. (B). 2. (C). 4. (D). 5.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào BBT, hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 68: (Câu 27 - Chuyên Vinh - Lần 4 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-2)(x^4-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- (A). 3. (B). 2. (C). 4. (D). 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2)(x^4-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2)^2(x^2+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (nghiệm đơn)}, x = \pm\sqrt{2} \text{ (nghiệm kép)}$$



Vậy chỉ có 1 điểm cực trị $x = 1$.

Câu 69: (Câu 18 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2016 - 2017) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 + mx^2 - x$ có 2 điểm cực trị.

Ⓐ. $|m| \geq \sqrt{3}$.

Ⓑ. $|m| > \sqrt{3}$.

Ⓒ. $|m| \geq 2\sqrt{3}$.

Ⓓ. $|m| > 2$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -3x^2 + 2mx - 1$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 3 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{3}$$

Câu 70: (Câu 21 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2 - 4)$, $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Ⓑ. Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 2$.

Ⓒ. Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Ⓓ. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn là $x = 2$ và $x = -2$ nên hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Chú ý: Có thể lập bảng biến thiên của hàm số, từ đó được A

Câu 71: (Câu 27 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ. Hàm số có giá trị cực tiểu là 0.

Ⓑ. Hàm số có hai giá trị cực tiểu là $-\frac{2}{3}$ và $-\frac{5}{48}$.

Ⓒ. Hàm số chỉ có một giá trị cực tiểu.

Ⓓ. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\frac{2}{3}$ và giá trị cực đại là $-\frac{5}{48}$.

Lời giải

Chọn B

$$y = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 2x^2 - 2x; y' = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên



x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
								
$..$	$+\infty$		5	0		2		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có đáp án B

Câu 72: (Câu 35 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, đồng biến và nhận giá trị âm trên $(0; +\infty)$. Hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ có bao nhiêu điểm cực trị trên $(0; +\infty)$?

- Ⓐ. 1. Ⓑ. Vô số. Ⓒ. 2. Ⓓ. 0.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty) \Rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$.

Do đó $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ liên tục trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $g'(x) = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}$.

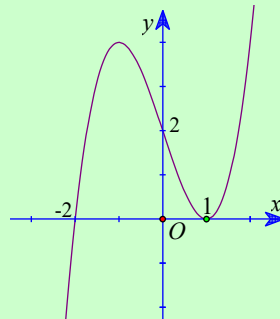
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Theo giả thuyết đề bài $\forall x \in (0; +\infty)$ ta có $\begin{cases} x > 0 \\ f'(x) \geq 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

$\Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vậy hàm số $g(x)$ không có điểm cực trị trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 73: (Câu 72 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



- Ⓐ. 4. Ⓑ. 2. Ⓒ. 5. Ⓓ. 3.



Lời giải

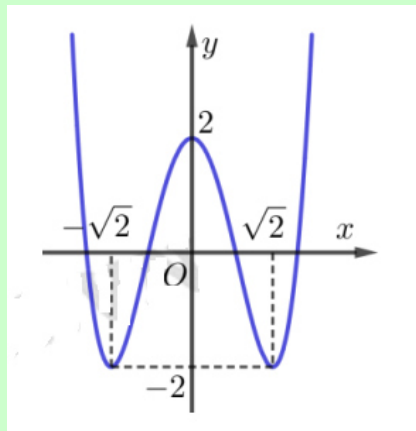
Chọn D

Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

$$\text{Ta có } y' = [f(x^2 - 3)]' = 2x \cdot f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Do đó hàm số $y = f(x^2 - 3)$ có ba cực trị.

Câu 74: (Câu 73 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$.

(A). 2.

(B). 3.

(C). 5.

(D). 4.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = f'(x) \cdot 3^{f(x)} \cdot \ln 3 + f'(x) \cdot 2^{f(x)} \cdot \ln 2 = f'(x) [3^{f(x)} \cdot \ln 3 + 2^{f(x)} \cdot \ln 2].$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \text{ (do } 3^{f(x)} \cdot \ln 3 + 2^{f(x)} \cdot \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{)}.$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$ có 4 điểm cực trị.

Câu 75: (Câu 42 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm

$f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $|f(1 - 2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

(A). 9.

(B). 2018.

(C). 2022.

(D). 11.

Lời giải

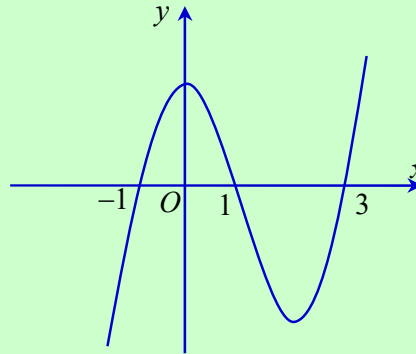


Chọn A

Ta có $f'(x) = x^3(x-2)(x^2-2) = 0$ có 4 nghiệm và đổi dấu 4 lần nên hàm số $y = f(x)$ có 4 cực trị. Suy ra $f(x) = 0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt.

Do đó $y = |f(1-2018x)|$ có tối đa 9 cực trị.

Câu 76: (Câu 27 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là



(A). 1.

(B). 2.

(C). 4.

(D). 3.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta chọn $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$.

Áp dụng công thức $y = [f(u)]' = u'f'(u)$ với $u = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Ta có

$$y' = \left[f(\sqrt{x^2 + 2x + 2}) \right]' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot (\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 3)$$

$$= \frac{(x+1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(x+1)^2(x^2 + 2x - 7)}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 3)} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-1-2\sqrt{2}$	-1	$-1+2\sqrt{2}$	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+
y								

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có một điểm cực đại.



<https://luyenthihocthai.vn>



<https://www.facebook.com/vietqd>



Câu 77: (Câu 45 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

Ⓐ. 15

Ⓑ. 17

Ⓒ. 16

Ⓓ. 18

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có } f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y					

Câu 1. $\Rightarrow x = 0, x = 2$ là các điểm cực trị của hàm số $f(x)$

Xét hàm số $y = f(x^2 - 8x + m)$ Ta có $y' = (2x-8) \cdot f'(x^2 - 8x + m)$

$$y' = (2x-8) f'(x^2 - 8x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - 8x + m = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Để thấy phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung. Do đó hàm số $y = f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị khi phương trình (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt khác 4. Hay $m < 16$

Vậy có 15 số nguyên dương thỏa yêu cầu bài toán

Câu 78: (Câu 31 - Chuyên Vinh - Lần 4 - Năm 2016 - 2017) Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = ax + \sqrt{x^2 + 1}$ có cực tiểu.

Ⓐ. $-1 < a < 1$.Ⓑ. $0 \leq a < 1$.Ⓒ. $-1 < a < 2$.Ⓓ. $-2 < a < 0$.**Lời giải****Chọn A**Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } y' = a + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

+ **ĐK cần:** Hàm số có cực trị khi phương trình $y' = 0$ có nghiệm.

$$\text{Ta có: } y' = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x), \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$



$$f'(x) = -\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	1	-1

Do đó: Phương trình $y' = 0$ có nghiệm thì có nghiệm duy nhất x_0 khi và chỉ khi $-1 < a < 1$.

+ **ĐK đủ:** Ta có: $y'' = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$ với mọi x . Suy ra: $y''(x_0) > 0$ nên x_0 luôn là điểm

cực tiểu với mọi $a \in (-1; 1)$.

Vậy $-1 < a < 1$.

Chú ý:

+Ta có thể làm trắc nghiệm bằng phương pháp lần lượt thử với $a = 0$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{2}$ ta cũng được đáp án A

+ Chỗ điều kiện đủ ta có thể dùng duy tắc 1 để kiểm tra x_0 là điểm cực tiểu như sau:

Hàm số có điểm cực tiểu x_0 khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua nghiệm x_0 .

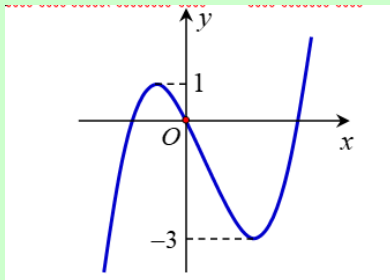
Ta có: $y' = \frac{x+a\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. Vì $-1 < a < 1$ và $x+a\sqrt{x^2+1} \rightarrow x+a|x| = (1 \pm a)x$ nên hệ số bậc cao

nhất của $x+a\sqrt{x^2+1}$ là hệ số dương.

Suy ra: y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua nghiệm x_0 .

Do đó: x_0 là điểm cực tiểu với mọi $a \in (-1; 1)$.

Câu 79: (Câu 39 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị là



(A). $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$. (B). $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.

(C). $m = -1$ hoặc $m = 3$. (D). $1 \leq m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ gồm hai phần:

• Phần 1 là phần đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ nằm phía trên trục hoành;



<https://luyenthitracnghiem.vn>

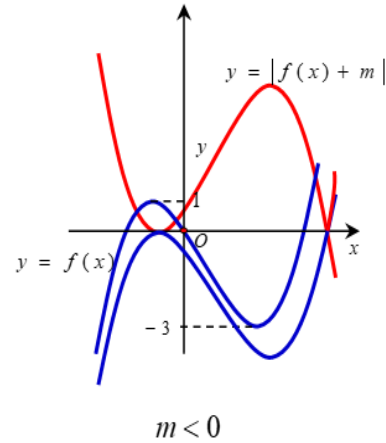
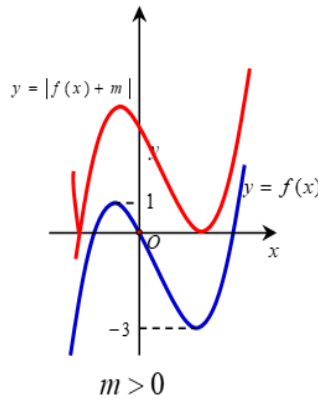


<https://www.facebook.com/vietqld>



- Phần 2 là phần đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đã cho hình bên ta suy ra dạng đồ thị của hàm số $y = f(x) + m$.



Khi đó hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ và trục hoành tại nhiều nhất hai điểm chung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m \leq 0 \\ -3 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}.$$

Cách 2: Ta có

$$y = |f(x) + m| = \sqrt{(f(x) + m)^2}$$

$$y' = \frac{f'(x) \cdot (f(x) + m)}{\sqrt{(f(x) + m)^2}}$$

Để tìm cực trị của hàm số $y = |f(x) + m|$, ta tìm x thỏa mãn $y' = 0$ hoặc y' không xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = -m & (2) \end{cases}$$

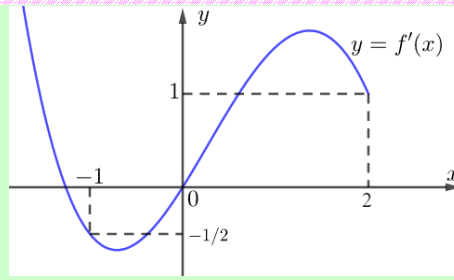
Dựa vào đồ thị ta có (1) có hai điểm cực trị x_1, x_2 trái dấu. Vậy để đồ thị hàm số có 3 cực trị thì (2) có một nghiệm khác x_1, x_2 .

Câu 80: Dựa vào đồ thị ta có điều kiện: $\begin{cases} -m \geq 1 \\ -m \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}.$

(Câu 49 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($ae < 0$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như bên. Hàm số

$y = |4f(x) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



(A). 3.

(B). 5.

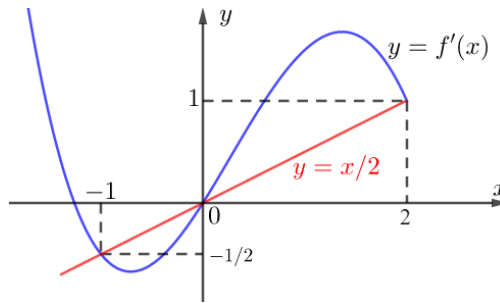
(C). 4.

(D). 2.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $h(x) = f(x) - \frac{x^2}{4} \Rightarrow h'(x) = f'(x) - \frac{x}{2}$.



Từ đồ thị và giả thiết ta có $\Rightarrow h'(x) = 4a(x+1)x(x-2)$, ($a < 0$).

Do $ae < 0 \Rightarrow e > 0 \Leftrightarrow f(0) > 0 \Rightarrow h(0) > 0$.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$			
$h'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$								
$ h(x) $								

Diagram illustrating the function $h(x)$ and its absolute value $|h(x)|$ based on the sign of the derivative $h'(x)$.

The horizontal axis represents x with critical points at $-\infty, -1, 0, 2, +\infty$. The vertical axis represents the function values.

For $h(x)$:

- At $x = -\infty$, $h(x) = -\infty$.
- Between $x = -1$ and $x = 0$, $h'(x) < 0$ (decreasing), so $h(x)$ increases from $h(-1)$ to $h(0)$.
- Between $x = 0$ and $x = 2$, $h'(x) < 0$ (decreasing), so $h(x)$ increases from $h(0)$ to $h(2)$.
- Between $x = 2$ and $x = +\infty$, $h'(x) > 0$ (increasing), so $h(x)$ decreases from $h(2)$ to $-\infty$.

For $|h(x)|$:

- At $x = -\infty$, $|h(x)| = +\infty$.
- Between $x = -1$ and $x = 0$, $h'(x) < 0$ (decreasing), so $|h(x)|$ decreases from $h(-1)$ to 0 .
- Between $x = 0$ and $x = 2$, $h'(x) < 0$ (decreasing), so $|h(x)|$ increases from 0 to $h(2)$.
- Between $x = 2$ and $x = +\infty$, $h'(x) > 0$ (increasing), so $|h(x)|$ decreases from $h(2)$ to 0 .

Vậy hàm số có 3 điểm cực tiểu.

Câu 81: (Câu 44 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2018 - 2019) Hàm số $f(x) = \left| \frac{x}{x^2 + 1} - m \right|$, với m là số thực, có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

(A). 2.

(B). 3.

(C). 5.

(D). 4.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Xét hàm $g(x) = \frac{x}{x^2+1} - m$, có $g'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 + 0 -		
$g(x)$				

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị, đồng thời phương trình $g(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm, tức đồ thị hàm số cắt $g(x)$ tại tối đa 2 điểm. Như vậy hàm số $f(x) = |g(x)|$ có tối đa 4 điểm cực trị.

Cách 2:

Xét hàm số $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ có $g'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 + 0 -		
$y = g(x)$				

Xét các trường hợp:

$|m| > \frac{1}{2}$: đồ thị hàm số $g(x) - m$ không có điểm chung với trục hoành. Nên đồ thị hàm số

$f(x) = |g(x) - m|$ có đúng 2 điểm cực trị.

$|m| = \frac{1}{2}$: đồ thị hàm số $g(x) - m$ không có 1 điểm chung với trục hoành và phần còn lại nằm trên hoặc dưới trục hoành. Nên đồ thị hàm số $f(x) = |g(x) - m|$ có đúng 2 điểm cực trị.

$|m| < \frac{1}{2}$ và $m \neq 0$: đồ thị hàm số $g(x) - m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt. Đồ thị hàm số $f(x) = |g(x) - m|$ có đúng 4 điểm cực trị.

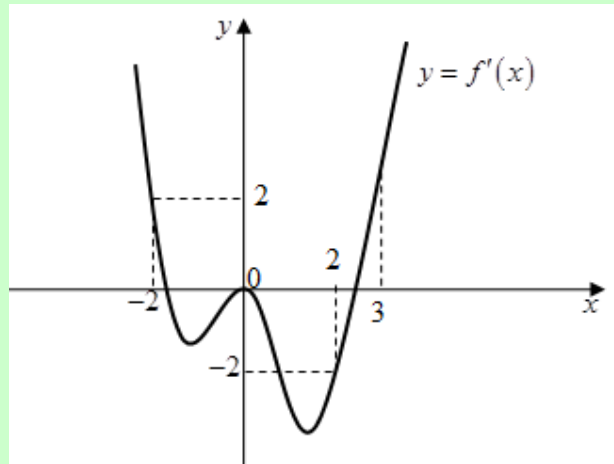


$m = 0$: đồ thị hàm số $g(x) - m$ không có 1 điểm chung với trục hoành. Đồ thị hàm số

$f(x) = |g(x) - m|$ có đúng 3 điểm cực trị.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có nhiều nhất 4 điểm cực trị.

Câu 82: (Câu 44 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu cực trị trong khoảng $(-2; 3)$?

Ⓐ. 6

Ⓑ. 2

Ⓒ. 5

Ⓓ. 3

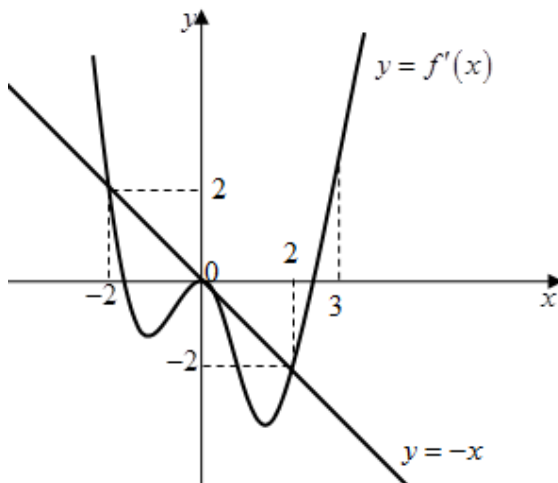
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $h(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0)$.

Ta có $h'(x) = f'(x) + x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$

Nghiệm phương trình trên là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = -x$ và $y = f'(x)$



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



Dựa vào đồ thị suy ra phương trình: $f'(x) = -x$ có ba nghiệm $\begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$, với $x = 0$ là nghiệm

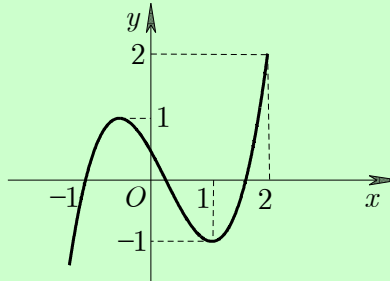
kép. Trên khoảng $(-2; 3)$, hàm số $h(x)$ có một điểm cực trị là $x = 2$, (do qua nghiệm $x = 0$, $h'(x)$ không đổi dấu). Do đó đồ thị hàm số $y = h(x)$ cắt trục hoành tại tối đa 2 điểm.

Suy ra hàm số $y = |h(x)|$ có tối đa $2 + 1 = 3$ điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$.



BÀI 3: GTLN - GTNN CỦA HÀM SỐ

Câu 83: (Câu 17 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[-1; 1]$ là



- (A). -1. (B). 1. (C). 2. (D). 0.

Lời giải

Chọn B

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[-1; 1]$ là 1.

Câu 84: (Câu 13 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

x	-3	-2	0	1	3
$f'(x)$	-	0	+	-	0
$f(x)$	1	-3	0	-2	8

- (A). 0. (B). 8. (C). 1. (D). 3.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{[-3; 3]} f(x) = f(3) = 8$.

Câu 85: (Câu 2 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, đồng biến trên đoạn $[a; b]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A). Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(a; b)$.
 (B). Hàm số đã cho có cực trị trên đoạn $[a; b]$.
 (C). Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.
 (D). Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[a; b]$.



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



Lời giải

Câu 86: Chọn C

(Câu 38 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-4; 2]$ là

- Ⓐ. $f(0)$. Ⓑ. $f(-4)$. Ⓒ. $f(1)$. Ⓓ. $f(2)$.

Lời giải

Chọn C

+ Ta tính được $f'(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)(x^2+1)$

+ Nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 1 \end{cases}$

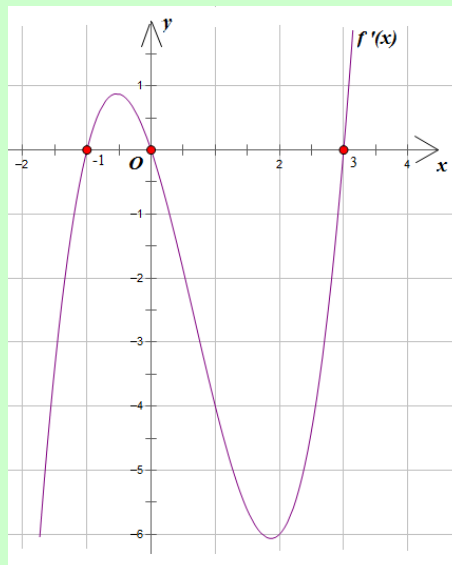
+ Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$	-4	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$								

$f(-4)$ $f(1)$ $f(2)$

+ Dựa vào BBT kết luận giá trị nhỏ nhất là $f(1)$

Câu 87: (Câu 39 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ là



Ⓐ. $f(0)$.

Ⓑ. $f(-4)$.

Ⓒ. $f(1)$.

Ⓓ. $f(2)$.

Lời giải

Chọn A

+ Từ đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ ta lập được bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$							

+ Dựa vào BBT ta suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ là $f(0)$ **Câu 88: (Câu 24 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)(x-2)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$ là

Ⓐ. $f(2)$.

Ⓑ. $f(3)$.

Ⓒ. $f(-1)$.

Ⓓ. $f(0)$.

Lời giải

Chọn D

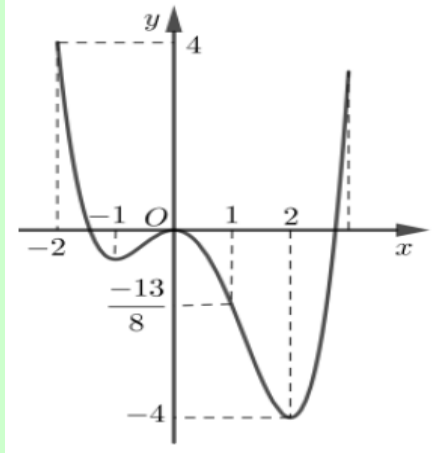
$$\text{Trên đoạn } [-1; 3], \text{ ta xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (n) \\ x = -1 & (n) \\ x = 2 & (n) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	-1	0	2	3	
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$f(-1)$				

$$\text{Vậy } \min_{x \in [-1; 3]} f(x) = f(0).$$

Câu 89: (Câu 31 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Gọi k , K lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(-2x)$ trên đoạn $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$. Giá trị $k + K$ bằng

- ☐ A. 0. ☐ B. 4. ☒ C. $\frac{19}{8}$. ☐ D. -4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = -2x$.

Khi $x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 2]$

Khi đó $y = f(t)$ trên $[-1; 2]$ có $\max_{t \in [-1; 2]} f(t) = 0 = K$, $\min_{t \in [-1; 2]} f(t) = -4 = k$.

Vậy $k + K = -4 + 0 = -4$.

Câu 90: (Câu 29 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2018 - 2019) Gọi m , M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2x + \cos \frac{\pi x}{2}$ trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị của $m + M$ bằng

- ☐ A. 2. ☒ B. -2. ☐ C. 0. ☐ D. -4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 2 - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra, hàm số đồng biến trên $[-2; 2]$.

Vậy $m = f(-2) = -4 + \cos(-\pi) = -5$, $M = f(2) = 4 + \cos \pi = 3$.

Giá trị $m + M = -5 + 3 = -2$.



Câu 91: (Câu 18 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm

$f'(x) = x(x+1)(x-2)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

- Ⓐ. $f(-1)$. Ⓑ. $f(0)$. Ⓒ. $f(3)$. Ⓓ. $f(2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1, \text{ chú ý } x = 2 \text{ là nghiệm kép của } y' \\ x = 2 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$

x	-1	0	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(2)$

Suy ra $\min_{[-1; 2]} f(x) = f(0)$.

Câu 92: (Câu 29 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2018 - 2019) Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và

giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$. Giá trị của $m + M$ bằng

- Ⓐ. $\frac{65}{4}$. Ⓑ. 16. Ⓒ. $\frac{49}{4}$. Ⓓ. 10.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1; 4]$.

Ta có: $y' = \left(x + \frac{9}{x}\right)' = 1 - \frac{9}{x^2}$.

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \in (1; 4) \\ x = -3 \notin (1; 4) \end{cases}$



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



$$\text{Có } \begin{cases} f(1)=10 \\ f(3)=6 \\ f(4)=\frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \min_{[1;4]} y = 6 = m \text{ và } \max_{[1;4]} y = 10 = M.$$

Vậy $m + M = 16$.

Câu 93: (Câu 24 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2017 - 2018) Ký hiệu a , A lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$. Giá trị $a + A$ bằng

- Ⓐ. 7. Ⓑ. 18. Ⓒ. 0. Ⓓ. 12.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$. Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 2] \\ x = 3 \notin [0; 2] \end{cases}$.

Do $y(0) = 4$; $y(1) = 3$; $y(2) = \frac{10}{3}$ nên $\max_{[0;2]} y = y(0) = 4 \Rightarrow A = 4$; $\min_{[0;2]} y = y(1) = 3 \Rightarrow a = 3$.
Vậy $A + a = 7$.

Câu 94: (Câu 23 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2017 - 2018) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = xe^x$ trên $[-2; 0]$ bằng

- Ⓐ. 0. Ⓑ. $-\frac{2}{e^2}$. Ⓒ. $-e$. Ⓓ. $-\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = e^x + xe^x = e^x(x + 1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$y(-2) = -\frac{2}{e^2}$; $y(0) = 0$; $y(-1) = -\frac{1}{e}$. Vậy $y_{\min} = -\frac{1}{e}$.

Câu 95: (Câu 23 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2017 - 2018) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[-3; -1]$ bằng

- Ⓐ. 5 Ⓑ. -4 Ⓒ. -6 Ⓓ. -5

Lời giải

Chọn B

$$y' = \left(1 + x + \frac{4}{x}\right)' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \in (-3; -1) \\ x = 2 \notin (-3; -1) \end{cases}$$

Ta có $y(-3) = -\frac{10}{3}$; $y(-2) = -3$; $y(-1) = -4$

Vậy $\min_{x \in [-3; -1]} f(x) = -4$

Câu 96: (Câu 29 - Chuyên Vinh - Lần 4 - Năm 2016 - 2017) Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ trên đoạn $[-2; 0]$. Giá trị biểu thức $5M + m$ bằng

Ⓐ. $-\frac{4}{5}$.

Ⓑ. $\frac{24}{5}$.

Ⓒ. $-\frac{24}{5}$.

Ⓓ. 0.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ liên tục trên $[-2; 0]$.

Ta có $y' = \frac{-3}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \in [-2; 0]$, suy ra hàm số nghịch biến trên $[-2; 0]$,

Do đó:

$M = \max_{[-2, 0]} y = y(-2) = \frac{1}{5}$ và $m = \min_{[-2, 0]} y = y(0) = -1$.

Vậy $5M + m = 5\left(\frac{1}{5}\right) + (-1) = 0$.

Câu 97: (Câu 35 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2016 - 2017) Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$. Khi đó

Ⓐ. $M - m = 2\sqrt{2} - 2$.

Ⓑ. $M - m = 4$.

Ⓒ. $M - m = 2\sqrt{2} + 2$.

Ⓓ. $M - m = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

$y(-2) = -2$; $y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$; $y(2) = 2$

Do đó: $M = 2\sqrt{2}$; $m = -2$

Suy ra $M - m = 2\sqrt{2} + 2$.

Câu 98: (Câu 19 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2016 - 2017) Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2-3}{x-2}$ trên đoạn $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



Ⓐ. $M + n = \frac{8}{3}$.

Ⓑ. $M + n = \frac{7}{2}$.

Ⓒ. $M + n = \frac{13}{6}$.

Ⓓ. $M + n = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Trên $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ hàm số liên tục và có đạo hàm $y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in \left[-1; \frac{3}{2}\right] \\ x = 3 \notin \left[-1; \frac{3}{2}\right] \end{cases}; \quad y(-1) = \frac{2}{3}; \quad y(1) = 2; \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

$$M = \max_{\left[-1; \frac{3}{2}\right]} y = y(1) = 2; \quad n = \min_{\left[-1; \frac{3}{2}\right]} y = y(-1) = \frac{2}{3} \Rightarrow M + n = \frac{8}{3}$$

Câu 99: (Câu 20 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2016 - 2017) Xét hàm số $f(x) = 3x + 1 + \frac{3}{x+2}$ trên tập $D = (-2; 1]$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- Ⓐ. Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên D bằng 5.
- Ⓑ. Hàm số $f(x)$ có một điểm cực trị trên D .
- Ⓒ. Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên D bằng 1.
- Ⓓ. Không tồn tại giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên D .

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = 3 - \frac{3}{(x+2)^2}$.

Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$.

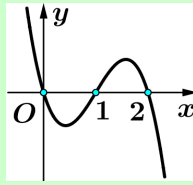
Do $x \in D$ nên ta chọn $x = -1$. BBT:

x	-2		-1		1
y'		-	0	+	
y	$+\infty$		1		5

Câu 100: Vậy câu A sai.

(Câu 45 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên

ℝ. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho trong hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(\sin x)$ trên $[0; \pi]$ là



- Ⓐ. $f(0)$. Ⓑ. $f(1)$. Ⓒ. $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Ⓓ. $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

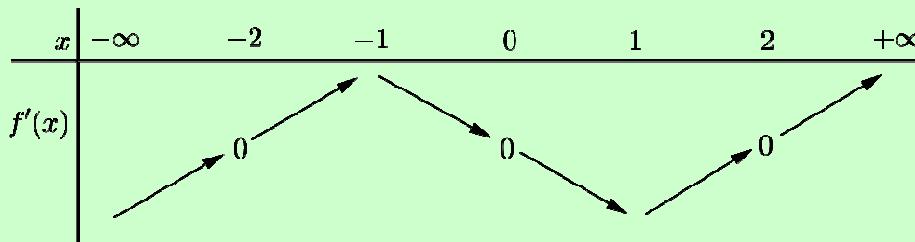
Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin x, t \in [0; 1]$ thì $g'(t) = f'(t) \leq 0, \forall t \in [0; 1] \Rightarrow g(t)$ nghịch biến trên $[0; 1]$

Do đó $\min_{[0; \pi]} g(x) = \min_{[0; 1]} g(t) = f(1)$

Câu 101: (Câu 41 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1; 1]$ là?



- Ⓐ. $f(-1)$ Ⓑ. $f(0)$. Ⓒ. $f(2)$. Ⓓ. $f(1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x) = f(2x) + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}$

Đặt $t = 2x$. Với $x \in [-1; 1]$ thì $t \in [-2; 2]$.

Khi đó ta có: $h(t) = f(t) + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \Rightarrow h'(t) = f'(t) - \frac{1}{2} \sin t$.

Từ bảng biến thiên ta thấy:

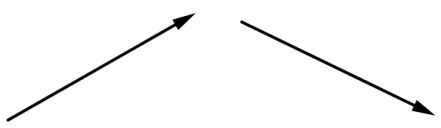
+) Với $t \in (-2; 0)$ thì $f'(t) > 0$ và $\sin t < 0 \Rightarrow h'(t) > 0$.

+) Với $t \in (0; 2)$ thì $f'(t) < 0$ và $\sin t > 0 \Rightarrow h'(t) < 0$.



+) Với $t = 0$ thì $f'(t) = 0$

Từ đó ta có BBT sau:

t	-2	0	2
h'	+	0	-
h			

Vậy $\max_{[-1;1]} g(x) = \max_{[-2;2]} h(t) = h(0) = f(0)$.

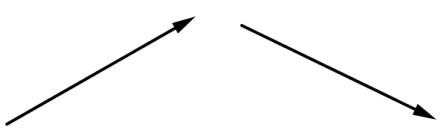
Cách 2:

Ta có $g(x) = f(2x) - \sin^2 x \leq f(2x)$ với $\forall x \in [-1;1]$.

Đặt $t = 2x$. Với $x \in [-1;1]$ thì $t \in [-2;2]$.

Xét hàm $f(t)$ với $t \in [-2;2]$.

Ta có BBT

t	-2	0	2
f'	+	0	-
f			

$\Rightarrow g(x) \leq f(t) \leq f(0)$ với $\forall x \in [-1;1]$.

Lại có $g(0) = f(0)$ nên $\max_{[-1;1]} g(x) = f(0)$.

Nhận xét: Với **HĐG** cách thay $\sin^2 x$ bởi $\sin^{2n} x$ thì kết quả không thay đổi.

Câu 102: (Câu 40 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2017 - 2018) Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ. $0 < m \leq 2$.

Ⓑ. $4 < m \leq 8$.

Ⓒ. $2 < m \leq 4$.

Ⓓ. $m > 8$.

Lời giải

Chọn C



$$y = mx + \frac{36}{x+1} \Rightarrow y' = m - \frac{36}{(x+1)^2}$$

Trường hợp 1: $m = 0$, ta có $y' = -\frac{36}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$. Khi đó $\min_{x \in [0;3]} y = y(3) = 9$.

Trường hợp 2: $m \neq 0$

• Nếu $m < 0$, ta có $y' < 0, \forall x \neq -1$ Khi đó $\min_{x \in [0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3}$.

• Nếu $m > 0$, khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow m - \frac{36}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{36}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{\sqrt{m}} - 1 \\ x = -\frac{6}{\sqrt{m}} - 1 \end{cases} (l)$.

• $0 < \frac{6}{\sqrt{m}} - 1 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{4}{9} < m \leq 36$, $\min_{x \in [0;3]} y = y\left(\frac{6}{\sqrt{m}} - 1\right) = 12\sqrt{m} - m = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 100(l) \end{cases}$.

• $\frac{6}{\sqrt{m}} - 1 > 3 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$, $\min_{x \in [0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3}(l)$.

Câu 103: (Câu 32 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$ ($a \neq 0$) có $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

- (A). $8a + d$. (B). $d - 16a$. (C). $d - 11a$. (D). $2a + d$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 3ax^2 + c.$$

$$y'' = 6ax.$$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Nên đồ thị hàm số có điểm uốn là $A(0; d)$. Do đó đồ thị hàm số nhận $A(0; d)$ làm tâm đối xứng.

Do đó từ $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$ suy ra $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(2) \Rightarrow \max_{[1;3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d$.

Mà $f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a + c = 0 \Rightarrow c = -12a$.

Vậy $\max_{[1;3]} f(x) = 8a - 24a + d = d - 16a$.

Câu 104: (Câu 26 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2017 - 2018) Cho $(P): y = x^2$ và $A\left(-2; \frac{1}{2}\right)$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc (P) . Khoảng cách MA bé nhất là

- (A). $\frac{5}{4}$ (B). $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C). $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D). $\frac{\sqrt{5}}{2}$



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



Lời giải

Chọn D

$$M \in (P) \Rightarrow M(x; x^2) \Rightarrow AM^2 = (x+2)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2.$$

$$\text{Xét hàm: } f(x) = AM^2 = (x+2)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = x^4 + 4x + \frac{17}{4} \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 4x^3 + 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

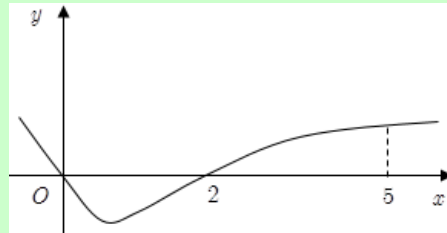
Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$

$$\text{Từ bảng biến thiên ta có: } AM^2 \geq \frac{5}{4} \Rightarrow AM \geq \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ Vậy } AM_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Câu 105: (Câu 37 - Chuyên Vinh - Lần 4 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$.

Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$.



Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là

- Ⓐ. $f(0), f(5)$. Ⓑ. $f(2), f(0)$. Ⓒ. $f(1), f(5)$. Ⓓ. $f(2), f(5)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta được bảng biến thiên như sau:

x	0	2	3	5
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$				

Dựa vào BBT, suy ra: $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $f(2) < f(3)$.

Ta có: $f(0) - f(5) = f(2) - f(3) < 0 \Rightarrow f(0) < f(5)$. Do đó, dựa vào BBT

$$\max_{[0;5]} f(x) = f(5).$$

$$\text{Vậy } \min_{[0;5]} f(x) = f(2); \max_{[0;5]} f(x) = f(5)$$

Câu 106: (Câu 45 - Chuyên Vinh - Lần 4 - Năm 2016 - 2017) Tập hợp nào dưới đây chứa tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ khi $x = -1$ bằng 5.

- Ⓐ. $(-5; -2) \cup (0; 3)$. Ⓑ. $(0; +\infty)$. Ⓒ. $(-6; -3) \cup (0; 2)$. Ⓓ. $(-4; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ với $x \in [-1; 2] \Rightarrow t \in [0; 4]$. Ta có $y = f(t) = |t + m - 1|$.

$$\text{Khi đó } \max_{[-1;2]} y = \max_{t \in [0;4]} f(t) = \max \{f(0); f(4)\} = \max \{|m-1|; |m+3|\}$$

$$\text{TH1. Với } \max_{[-1;2]} y = |m-1|, \text{ ta được } \begin{cases} |m-1| \geq |m+3| \\ |m-1| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-1| \geq |m+3| \\ m = -4 \vee m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4.$$

$$\text{TH2. Với } \max_{[-1;2]} y = |m+3|, \text{ ta được } \begin{cases} |m+3| \geq |m-1| \\ |m+3| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+3| \geq |m-1| \\ m = 2 \vee m = -8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy các giá trị m tìm được thỏa mãn tập hợp $(-5; -2) \cup (0; 3)$.

Chú ý: Trong

HD giải trên ta đã sử dụng tính nhất: Hàm số $f(x) = |ax + b|$ xác định trên đoạn $[x_1; x_2]$ thì đạt GTLN tại x_1 hoặc tại x_2 .

Câu 107: (Câu 46 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2016 - 2017) Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x-y)^2$ là

- Ⓐ. $\max P = 8$. Ⓑ. $\max P = 4$. Ⓒ. $\max P = 12$. Ⓓ. $\max P = 16$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } P = (x-y)^2 = \frac{4(x-y)^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} = \frac{4\left(\frac{x}{y} - 1\right)^2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\frac{x}{y} + 3}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow P = \frac{4t^2 - 8t + 4}{t^2 + 2t + 3} \Leftrightarrow P(t^2 + 2t + 3) = 4t^2 - 8t + 4$$

$$\Leftrightarrow (P-4)t^2 + (2P+8)t + 3P-4 = 0$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm: } \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (P+4)^2 - (P-4)(3P-4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2P^2 + 24P \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq P \leq 12$$

Câu 108: Vậy giá trị lớn nhất của P là 12

(Câu 41 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho đồ thị $(C): y = \frac{x}{x-1}$. Đường thẳng d đi qua điểm $I(1;1)$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B . Khi diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất, với $M(0;3)$ thì độ dài đoạn AB bằng

- Ⓐ. $\sqrt{10}$. Ⓑ. $\sqrt{6}$. Ⓒ. $2\sqrt{2}$. Ⓓ. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A\left(1-m; \frac{1-m}{-m}\right); B\left(1+m; \frac{m+1}{m}\right)$ với $m > 0$.

$I(1;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số, suy ra I là trung điểm của A, B .

$S_{\Delta MAB} = 2S_{\Delta MIB}$ nên $S_{\Delta MAB}$ min khi $S_{\Delta MIB}$ min.

Phương trình đường thẳng $MI: 2x + y - 3 = 0$.

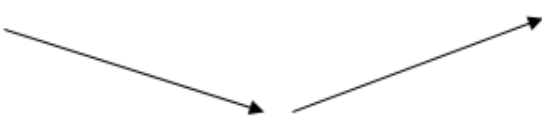
Ta có

$$S_{MIB} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}d(B; MI) \cdot IM = \frac{1}{2} \left| \frac{2m^2 - m + 1}{m} \right|$$

Xét hàm số $g(m) = \frac{2m^2 - m + 1}{m}$

$$g'(m) = \frac{2m^2 - 1}{m^2}$$

Ta có bảng biến thiên

m	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$g'(m)$	-	0	+
$g(m)$			

Suy ra $\min_{m>0} |g(m)| = 2\sqrt{2} - 1$ khi $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Khi đó $IB = \sqrt{m^2 + \frac{1}{m^2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$ suy ra $AB = 2IB = \sqrt{10}$.

Câu 109: (Câu 92 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$							

Diagram showing the sign of $f'(x)$ on a number line. Arrows indicate the direction of the function's slope between critical points. The critical points are at $x = -2, -1, 0, 1, 2$. The sign of $f'(x)$ is positive on $(-\infty, -2)$, $(-1, 0)$, and $(2, +\infty)$, and negative on $(-2, -1)$ and $(0, 1)$. The function has local maxima at $x = -2$ and $x = 0$, and a local minimum at $x = 1$.

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^4(2x)$ trên $[-1; 1]$ là

- Ⓐ. $f(-1)$. Ⓑ. $f(0)$. Ⓒ. $f(2)$. Ⓓ. $f(1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g(x) = f(2x) - \sin^4(2x) \leq f(2x)$, $\forall x \in [-1; 1]$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên của $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$							$+\infty$

Diagram showing the sign of $f'(x)$ on a number line. Arrows indicate the direction of the function's slope between critical points. The critical points are at $x = -2, 0, 2$. The sign of $f'(x)$ is positive on $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$, and $(+\infty, +\infty)$, and negative on $(-2, 0)$ and $(2, +\infty)$. The function has local maxima at $x = -2$ and $x = 2$, and a local minimum at $x = 0$.

Từ bảng biến thiên ta có: $f(2x) \leq f(0)$ với mọi $x \in [-1; 1]$, do đó giá trị lớn nhất của $g(x)$

trên $[-1; 1]$ là $f(0)$, đạt được khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(2x) = f(0) \\ \sin^4(2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 110: (Câu 93 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$							

Diagram showing the sign of $f'(x)$ on a number line. Arrows indicate the direction of the function's slope between critical points. The critical points are at $x = -2, -1, 0, 1, 2$. The sign of $f'(x)$ is positive on $(-\infty, -2)$, $(-1, 0)$, and $(2, +\infty)$, and negative on $(-2, -1)$ and $(0, 1)$. The function has local maxima at $x = -2$ and $x = 0$, and a local minimum at $x = 1$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x) + (x-1)^2$ trên $[0; 2]$ là

- Ⓐ. $f(-1)$. Ⓑ. $f(0)$. Ⓒ. $f(2)$. Ⓓ. $f(1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g(x) = f(2x) + (x-1)^2 \geq f(2x), \forall x \in [0; 2]$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên của $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$									$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f(2x) \geq f(2)$ với mọi $x \in [0; 2]$, do đó giá trị nhỏ nhất của $g(x)$

trên $[0; 2]$ là $f(2)$, đạt được khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(2x) = f(2) \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Câu 111: (Câu 49 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$?

(A). 3.

(B). 7.

(C). 6.

(D). 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$.

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	2
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	a	$a+1$	a

Do $2m \geq M > 0$ nên $m > 0$ suy ra $g(x) \neq 0 \forall x \in [0; 2]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a+1 < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a > 0 \end{cases}.$$

Nếu $a < -1$ thì $M = -a$, $m = -a - 1 \Rightarrow 2(-a - 1) \geq -a \Leftrightarrow a \leq -2$.

Nếu $a > 0$ thì $M = a + 1$, $m = a \Rightarrow 2a \geq a + 1 \Leftrightarrow a \geq 1$.

Do đó $a \leq -2$ hoặc $a \geq 1$, do a nguyên và thuộc đoạn $[-3; 3]$ nên $a \in \{-3; -2; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 5 giá trị của a thỏa mãn đề bài.



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



BÀI 4: ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ

Câu 112: (Câu 2 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{1-x}{x+2} \text{ là}$$

- Ⓐ. $y = -1$. Ⓑ. $y = 1$. Ⓒ. $x = -2$. Ⓓ. $x = 2$.

Lời giải

Chọn A

Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x+2} = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x+2} = -1$, do đó đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -1$.

Câu 113: (Câu 11 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x^2-1}$ có tiệm cận ngang là

- Ⓐ. $y = 0$. Ⓑ. $x = 1$. Ⓒ. $x = 0$. Ⓓ. $y = 1$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 114: (Câu 3 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- Ⓐ. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang.
 Ⓑ. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$.
 Ⓒ. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận ngang là trục hoành.
 Ⓓ. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Lời giải

Chọn C



Câu 115: Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số chỉ một tiệm cận ngang là trục hoành.

(Câu 28 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2 - 3x + 2} \text{ là}$$

- (A). 3. (B). 2. (C). 1. (D). 0.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = (-\infty; 1)$

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)(2-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Câu 116: (Câu 19 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x^3-3x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A). 3. (B). 4. (C). 1. (D). 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{x^3-3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{3}{x^2}} = 0 \Rightarrow TCN: y = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \Rightarrow TCD: x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{3})^+} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3})^-} y = -\infty \Rightarrow TCD: x = \sqrt{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{3})^+} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{3})^-} y = +\infty \Rightarrow TCD: x = -\sqrt{3}.$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x^3-3x}$ có 4 đường tiệm cận.

Câu 117: (Câu 33 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x^2} + x}{x^2 - 2x - 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A). 3. (B). 0. (C). 2. (D). 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = (-1; 1]$



<https://luyenthitrucnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-1; 1] \\ x = 3 \notin [-1; 1] \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận.

Câu 118: (Câu 34 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x} + x}{x - 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A). 3. (B). 4. (C). 2. (D). 1.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x} + x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + 1}{1 - \frac{2}{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x} + x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(-\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 1\right)}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = 0$$

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 119: (Câu 35 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1 - x^2} + x}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A). 3. (B). 1. (C). 2. (D). 0.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = (-1; 1]$

Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (-1; 1) \\ x = 3 \notin (-1; 1) \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.

Câu 120: (Câu 20 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Đồ thị của hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang?

Ⓐ. $y = \frac{1}{2x^2 + x}$.

Ⓑ. $y = 2x^2 + x$.

Ⓒ. $y = e^x$.

Ⓓ. $y = \frac{2x+1}{x+2}$.

Lời giải

Chọn B

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^2 + x) = +\infty \Rightarrow$ đồ thị của hàm số $y = 2x^2 + x$ không có tiệm cận ngang.

Câu 121: (Câu 23 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2018 - 2019) Đồ thị hàm số $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

Ⓐ. 4.

Ⓑ. 3.

Ⓒ. 1.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn B

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x - 1} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x - 1} = 2$ suy ra đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x - 1} = 0$ suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy ĐTHS có ba đường tiệm cận.

Câu 122: (Câu 16 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2018 - 2019) Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x}{x - 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

Ⓐ. 3.

Ⓑ. 0.

Ⓒ. 2.

Ⓓ. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $D = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty) \Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có TCD

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 TCN $y = 2, y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x}{x - 1}$ có 2 đường tiệm cận.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y, \lim_{x \rightarrow 1^-} y$ không tồn tại $\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có TCD.



Câu 123: (Câu 23 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2018 - 2019) Đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x - 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

Ⓐ. 4.

Ⓑ. 1.

Ⓒ. 3.

Ⓓ. 2.

Lời giải**Chọn D**

* TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

* Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x - 2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x - 2} = 1$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

* Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{8}{9}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{8}{9}.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = -\infty.$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 124: (Câu 16 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2017 - 2018) Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

Ⓐ. 4.

Ⓑ. 2.

Ⓒ. 3.

Ⓓ. 1.

Lời giải**Chọn C**

Tập xác định hàm số $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 1. \text{ Đồ thị có tiệm cận ngang } y = 1.$$

Tương tự $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1 \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận ngang là $y = -1$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2-1} = 0$ và $\sqrt{x^2-1} > 0, \forall x > 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$



$\Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận đứng $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right) = 0.$$

Kết luận: Đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận gồm tiệm cận đứng và ngang.

Câu 125: (Câu 21 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2017 - 2018) Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- Ⓐ. 1 Ⓑ. 3 Ⓒ. 2 Ⓓ. 4

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là đường tiệm cận ngang.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ là đường tiệm cận ngang.}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng. Vậy đồ thị hàm số đã cho có tất cả 3 tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

Câu 126: (Câu 2 - Chuyên Vinh - Lần 4 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = \frac{1-2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây sai?

- Ⓐ. (C) có tiệm cận ngang là $y = -2$. Ⓑ. (C) có hai tiệm cận.
Ⓒ. (C) có tiệm cận ngang là $y = -1$. Ⓓ. (C) có tiệm cận đứng.

Lời giải

Chọn C

Hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -2$.

Câu 127: (Câu 37 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2016 - 2017) Tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-\sqrt{x^2-4}}{x^2-4x+3}$ là

- Ⓐ. $y = 1$ và $x = 3$. Ⓑ. $y = 0$, $y = 1$ và $x = 3$.
Ⓒ. $y = 0$, $x = 1$ và $x = 3$. Ⓓ. $y = 0$ và $x = 3$.



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



Lời giải

Chọn D

$$\text{TXĐ} : D = (-\infty; -2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$$

$$\text{Xét pt : } x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 4x + 3} = +\infty \Rightarrow x = 3 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{(x^2 - 4x + 3)(x + \sqrt{x^2 - 4})} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang.

Câu 128: (Câu 5 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = \frac{3}{x+1}$ có đồ thị là (C).

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ. (C) có tiệm cận ngang là $y = 3$.

Ⓑ. (C) chỉ có một tiệm cận.

Ⓒ. (C) có tiệm cận ngang là $y = 0$.

Ⓓ. (C) có tiệm cận đứng là $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$y = \frac{3}{x+1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

Câu 129: (Câu 36 - Chuyên Vinh - Lần 4 - Năm 2016 - 2017) Tìm tất cả các giá trị của tham số a để

đồ thị hàm số $y = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{ax^2 + 2}}$ có tiệm cận ngang.

Ⓐ. $a \geq 0$.

Ⓑ. $a \leq 0$.

Ⓒ. $a = 1$ hoặc $a = 4$.

Ⓓ. $a > 0$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $ax^2 + 2 > 0$

$$+ \text{ TH1: } a = 0. \text{ Ta có: } y = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} (x - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 0 \text{ nên có TCN: } y = 0$$



+ TH2: $a > 0$. Suy ra: $ax^2 + 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{ax^2 + 2}}$ có bậc tử $\leq$ bậc mẫu nên $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \text{const}$ nên có TCN.

+ TH3: $a < 0$. Suy ra: $-\sqrt{-\frac{2}{a}} < x < \sqrt{-\frac{2}{a}}$. Do đó: TXĐ: $D = \left(-\sqrt{-\frac{2}{a}}; \sqrt{-\frac{2}{a}}\right)$ nên đồ thị hàm số không có TCN.

Vậy $a \geq 0$.

Câu 130: (Câu 34 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2016 - 2017) Tìm tất cả các giá trị của tham số a để

đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + a}{x^3 + ax^2}$ có 3 đường tiệm cận.

- Ⓐ. $a \neq 0, a \neq \pm 1$. Ⓑ. $a \neq 0, a \neq -1$. Ⓒ. $a < 0, a \neq -1$. Ⓓ. $a > 0$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -a\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + a}{x^3 + ax^2} = 0$ nên $y = 0$ là một tiệm cận ngang.

Để hàm số $y = \frac{x^2 + a}{x^3 + ax^2}$ có hai tiệm cận đứng thì $a \neq 0$ và $(-a)^2 + a \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{cases}$.

Câu 131: (Câu 36 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2016 - 2017) Các giá trị của tham số a để đồ thị hàm

số $y = ax + \sqrt{4x^2 + 1}$ có tiệm cận ngang là:

- Ⓐ. $a = \pm 2$. Ⓑ. $a = -2$ và $a = \frac{1}{2}$. Ⓒ. $a = \pm 1$. Ⓓ. $a = \pm \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

TH1: $a > 0$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + \sqrt{4x^2 + 1}) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + \sqrt{4x^2 + 1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a^2 - 4)x^2 - 1}{ax - \sqrt{4x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a^2 - 4)x - \frac{1}{x}}{a - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} \text{ vậy để } \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + \sqrt{4x^2 + 1}) \text{ không tồn tại thì}$$

$$a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ (do } a > 0)$$

$$\text{là hữu hạn khi } \begin{cases} a^2 - 4 = 0 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow a = -2.$$



TH2: $a < 0$: Trình bày tương tự ta được $a = -2$

TH3: $a = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{4x^2 + 1} = +\infty \text{ nên loại } a = 0.$$

Vậy các giá trị thỏa mãn là: $a = \pm 2$.

PP trắc nghiệm

$$y = ax + \sqrt{4x^2 + 1} \rightarrow ax + 2|x| = (a \pm 2)x$$

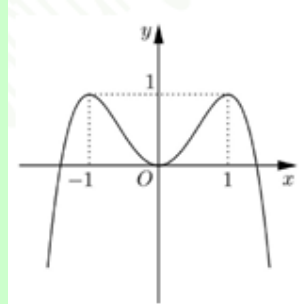
- Nếu $a - 2 \neq 0 \Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$
- Nếu $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$ thì $y \rightarrow 0$

Vậy các giá trị thỏa mãn là: $a = \pm 2$.



BÀI 5: KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 132: (Câu 17 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số nào sau đây?



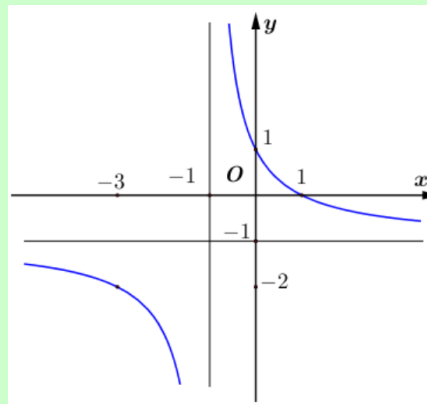
- (A). $y = -x^4 + 2x^2$. (B). $y = x^4 - 2x^2$. (C). $y = -x^2 + 2x$. (D).
 $y = x^3 + 2x^2 - x - 1$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có đây là đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương với hệ số $a < 0$.

Câu 133: (Câu 18 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Đồ thị hình dưới đây là của hàm số nào?



- (A). $y = \frac{-x}{x+1}$. (B). $y = \frac{-x+1}{x+1}$. (C). $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$. (D). $y = \frac{-x+2}{x+1}$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ:

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$. Vậy loại phương án C

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 1$. Vậy loại phương án A, D

Vậy ta chọn phương án B

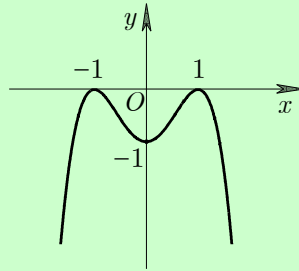


<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>

Câu 134: (Câu 14 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- Ⓐ. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. Ⓑ. $y = -x^4 - 2x^2 - 1$. Ⓒ. $y = x^3 - x^2 + x - 1$. Ⓓ. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

Lời giải

Chọn D

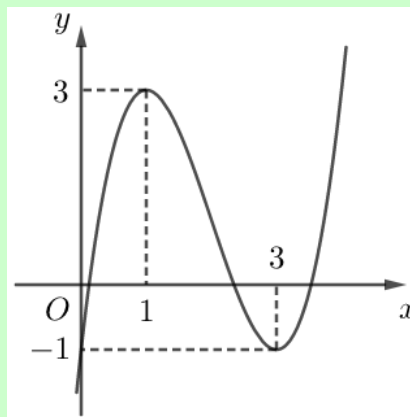
Ta thấy đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng $\Rightarrow$ loại đáp án C.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow$ loại đáp án B.

Từ đồ thị hàm số ta thấy $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty \Rightarrow$ loại đáp án A.

Chọn đáp án D.

Câu 135: (Câu 13 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong ở hình bên?



- Ⓐ. $y = -x^4 + 6x^2 - 1$. Ⓑ. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.
Ⓒ. $y = x^4 - 6x^2 - 1$. Ⓓ. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số không đối xứng qua trục tung nên hàm số không phải là hàm số chẵn, suy ra loại đáp án A, C.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; -1)$ nên suy ra chọn đáp án B.

Câu 136: (Câu 16 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình $f(x) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$		
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$			1	3			0	$+\infty$

Ⓐ. 2

Ⓑ. 3

Ⓒ. 1

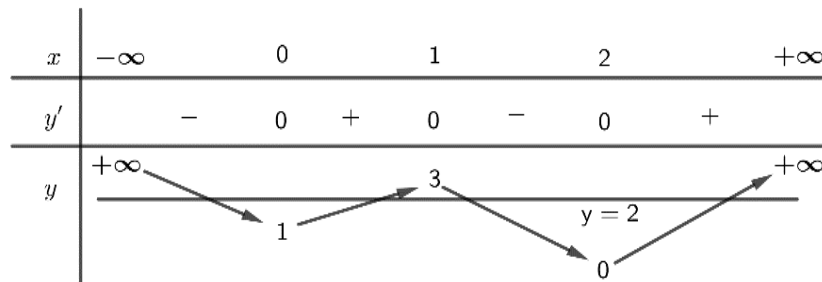
Ⓓ. 4

Lời giải

Chọn D

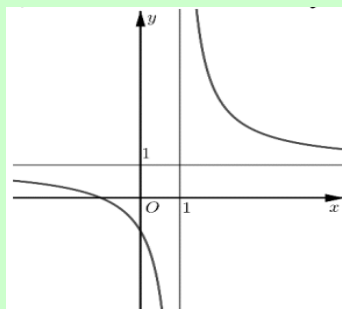
Ta có $f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$.

Số nghiệm của pt là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$



Nhìn bảng biến thiên suy ra 4 nghiệm.

Câu 137: (Câu 7 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2018 - 2019) Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ. $y = -x^3 + 3x + 1$.

Ⓑ. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Ⓒ. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Ⓓ. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào dạng đồ thị, đường cong trên là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Do đó loại đáp án A, D

Mặt khác: dạng đồ thị cho ta biết hàm số nghịch biến trên hai khoảng.

Với $y = \frac{x-1}{x+1}$. Ta có: $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ nên loại đáp án **C**, Vậy **chọn B**

Câu 138: (Câu 8 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -2018$ tại bao nhiêu điểm?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			3		-1		3	

$-\infty \nearrow 3 \searrow -1 \nearrow 3 \searrow -\infty$

- (A). 2. (B). 4. (C). 1. (D). 0.

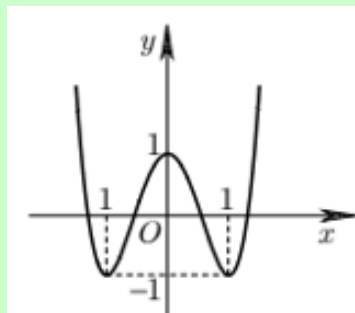
Lời giải

Chọn A

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y		3		-1		3	
	$-\infty$						$-\infty$

Câu 139: Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -2018$ tại 2 điểm.

(Câu 7 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Đồ thị trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- (A). $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. (B). $y = x^3 + 2x + 1$. (C). $y = x^4 - 2x^2 + 1$. (D). $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1; -1)$ và $(-1; -1)$



Câu 140: (Câu 12 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Đồ thị hàm số $y = (x^2 - 1)(x + 1)^2$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

- Ⓐ. 2. Ⓑ. 4. Ⓒ. 1. Ⓓ. 3.

Lời giải

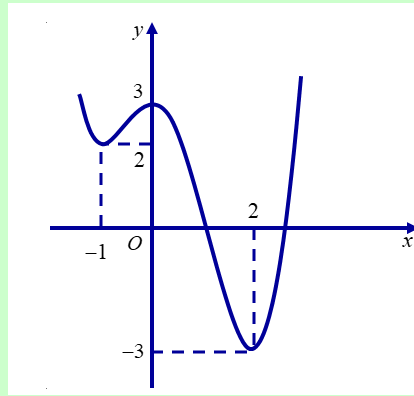
Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = (x^2 - 1)(x + 1)^2$ và trục hoành

$$(x^2 - 1)(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ (x + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Vậy đồ thị hàm số $y = (x^2 - 1)(x + 1)^2$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

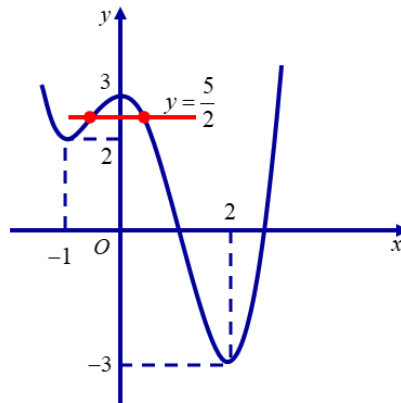
Câu 141: (Câu 17 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi phương trình $2f(x) = 5$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[-1; 2]$?



- Ⓐ. 4. Ⓑ. 2. Ⓒ. 3. Ⓓ. 1.

Lời giải

Chọn B



Ta có $2f(x) = 5 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2}$.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = \frac{5}{2}$ trên đoạn $[-1; 2]$ là số giao điểm của đường thẳng

$y = \frac{5}{2}$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$.



Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = \frac{5}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm trên đoạn $[-1; 2]$.

Vậy Hội phương trình $2f(x) = 5$ có bao 2 nghiệm trên đoạn $[-1; 2]$.

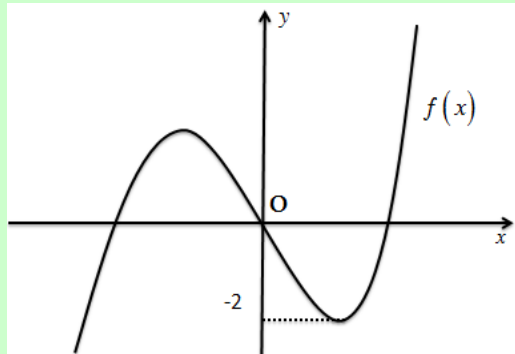
Câu 142: (Câu 20 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(x^2) + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

Ⓐ. 6.

Ⓑ. 3.

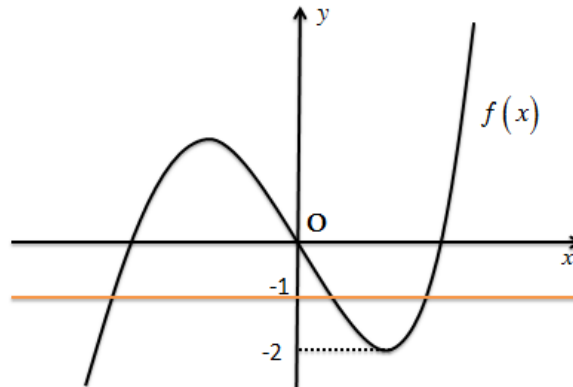
Ⓒ. 4.

Ⓓ. 2.



Lời giải

Chọn C



Ta có: $f(x^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x^2) = -1$.

Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$. Khi đó ta có phương trình $f(t) = -1$. Từ đồ thị thấy đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị (miền $t \geq 0$) tại 2 điểm phân biệt t có hoành độ dương tương ứng với 4 nghiệm x phân biệt. Suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 143: (Câu 27 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1}$. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 1$ bằng

Ⓐ. $\frac{3}{2}$.

Ⓑ. $\frac{3}{4}$.

Ⓒ. $\frac{1}{4}$.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $f'(1) = \frac{3}{4}$.

Câu 144: (Câu 11 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên

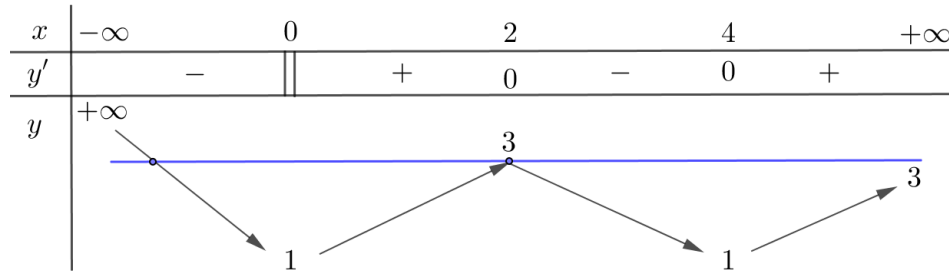
x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	1	3	1	3

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 3$ là

- Ⓐ. 3. Ⓑ. 1. Ⓒ. 4. Ⓓ. 2.

Lời giải

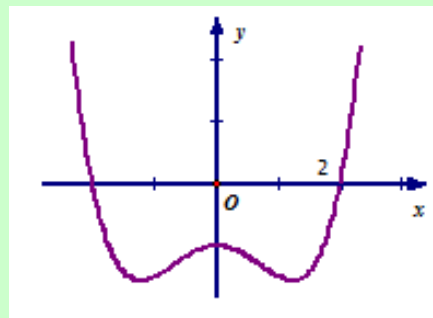
Chọn D



Số nghiệm của phương trình $f(x) = 3$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 3$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 3$ có hai điểm chung nên phương trình $f(x) = 3$ có hai nghiệm.

Câu 145: (Câu 26 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào dưới đây **sai**?



- Ⓐ. $c < 0$. Ⓑ. $a > 0$. Ⓒ. $b > 0$. Ⓓ. $a + b + c < 0$.

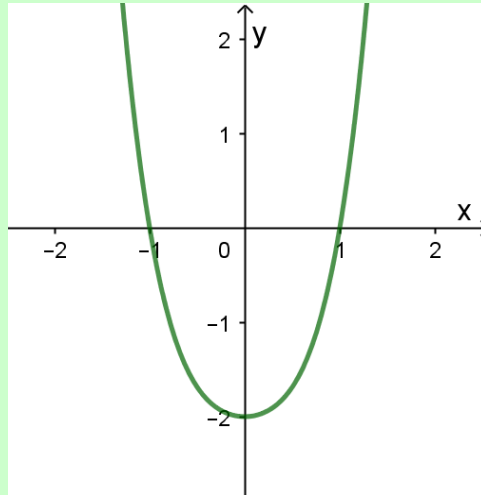
Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số suy ra $\begin{cases} a > 0 \\ a.b < 0 \end{cases} \Rightarrow b < 0$

Do đó **B** là đáp án **sai**.

Câu 146: (Câu 7 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2018 - 2019) Hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



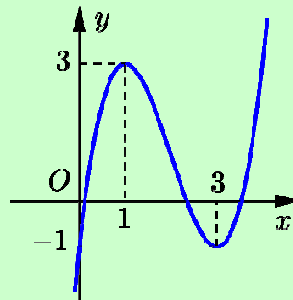
- (A). $y = x^2 - 2$. (B). $y = x^4 + x^2 - 2$. (C). $y = x^4 - x^2 - 2$. (D). $y = x^2 + x - 2$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị qua cắt Ox tại $A(1;0)$, $B(-1;0)$.

Câu 147: (Câu 9 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2018 - 2019) Đường cong hình bên là của đồ thị nào dưới đây?



- (A). $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$. (B). $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.
(C). $y = -x^3 + 6x^2 - 9x - 1$. (D). $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào hình dáng đồ thị đã cho ta thấy đồ thị là đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hệ số $a > 0$, nên ta loại phương án (C).

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $M(0; -1)$, nên ta loại phương án (B).

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $x = 1$, $x = 3$.

Xét phương án A có : $y' = 3x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$, nên ta loại phương án (A).

Xét phương án D có : $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$, nên ta chọn phương án (D).

Câu 148: (Câu 28 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2017 - 2018) Cho các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên mỗi khoảng xác định của chúng và có bảng biến thiên được cho như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	$+\infty$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		$g'(x)$	-	-	-
$f(x)$	$+\infty$	0	$g(x)$	0	$+\infty$	0

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A). Phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; 0)$.
- (B). Phương trình $f(x) + g(x) = m$ có 2 nghiệm với mọi $m > 0$.
- (C). Phương trình $f(x) + g(x) = m$ có nghiệm với mọi m .
- (D). Phương trình $f(x) = g(x) - 1$ không có nghiệm.

Lời giải

Chọn D

Trong khoảng $(-\infty; 0)$, ta có $f(x) > 0, g(x) < 0$ nên phương trình $f(x) = g(x)$ vô nghiệm suy ra A đúng.

Đặt $h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x) < 0, \forall x \neq 0$. Ta có bảng biến thiên như sau. Từ bảng biến thiên ta có B, C đúng.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	-	-
$h(x)$	$+\infty$	$+\infty$	0

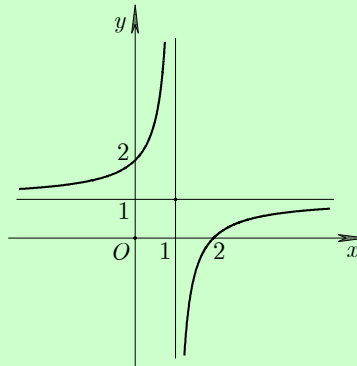
Xét trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	–	
$f(x)$	y_0	$\rightarrow 0$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	–	
$g(x)-1$	$+\infty$	$\rightarrow -1$

Suy ra phương trình $f(x) = g(x) - 1$ có ít nhất một nghiệm. Vậy D sai.

Câu 149: (Câu 6 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2017 - 2018) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?



Ⓐ. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Ⓑ. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

Ⓒ. $y = \frac{x+2}{x-2}$.

Ⓓ. $y = \frac{x+2}{x-1}$.

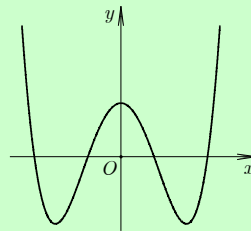
Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số có TĐĐ $x=1$ nên loại đáp án A và Ⓒ.

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0;2)$ nên ta loại Ⓓ.

Câu 150: (Câu 11 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2017 - 2018) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



Ⓐ. $y = x^2 - 3x + 1$

Ⓑ. $y = x^4 - 3x^2 + 1$

Ⓒ. $y = -x^4 + 3x + 1$

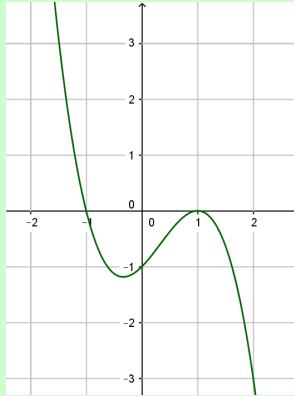
Ⓓ. $y = x^3 - 3x^2 + 1$

Lời giải

Chọn B

Đây là đồ thị hàm số trùng phương với hệ số $a > 0$.

Câu 151: (Câu 5 - Chuyên Vinh - Lần 4 - Năm 2016 - 2017) Hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê bởi các phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



- Ⓐ. $y = x^3 + x^2 - x - 1$. Ⓑ. $y = -x^3 + x^2 + 2x - 1$.
 Ⓒ. $y = x^3 - x^2 + x - 1$. Ⓓ. $y = -x^3 + x^2 + x - 1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị, ta có $a < 0$ loại câu A và C

Thay $x = 1$ vào câu D ta được $y = 0$ đúng.

Câu 152: (Câu 8 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2016 - 2017) Số giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ và $y = x^2 - x - 1$ là

- Ⓐ. 3. Ⓑ. 1. Ⓒ. 0. Ⓓ. 2.

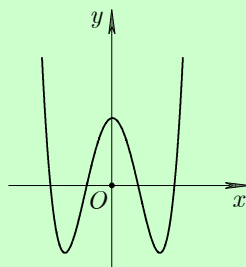
Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Câu 153: (Câu 32 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



- Ⓐ. $a > 0, b < 0, c < 0$. Ⓑ. $a < 0, b > 0, c > 0$. Ⓒ. $a > 0, b > 0, c > 0$. Ⓓ. $a > 0, b < 0, c > 0$.

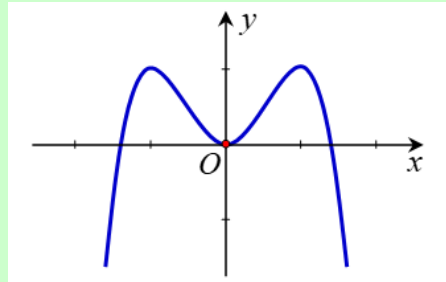
Lời giải

Chọn D

Đây là đồ thị của hàm số trùng phương có ba cực trị nên a và b trái dấu, $a > 0$ nên $b < 0$.

Với $x = 0$ đồ thị cắt trục tung tại điểm nằm phía trên trục Ox nên $c > 0$.

Câu 154: (Câu 10 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f(x)$ là một trong bốn phương án A, B, C, D đưa ra dưới đây. Tìm $f(x)$.



- Ⓐ. $f(x) = x^4 - 2x^2$. Ⓑ. $f(x) = x^4 + 2x^2$.
Ⓒ. $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$. Ⓓ. $f(x) = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} a.b < 0 \\ c = 0 \end{cases}$ nên đồ thị hàm số có một cực tiểu và hai cực đại, đồng thời đi qua gốc tọa độ.

Câu 155: (Câu 26 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2016 - 2017) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 2x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$.

- Ⓐ. $-\frac{3}{2} < m \neq -1$. Ⓑ. $m \geq -\frac{3}{2}$. Ⓒ. $-\frac{3}{2} \leq m \neq -1$. Ⓓ. $m > -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Với $x \neq 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 2x + 1$ và đồ thị hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ là:

$$\frac{x+m}{x-1} = 2x+1 \Leftrightarrow x+m = (2x+1)(x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - m - 1 = 0. (x \neq 1)$$

Đường thẳng $y = 2x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$

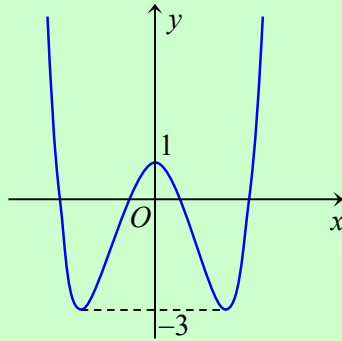
$\Leftrightarrow$ phương trình $2x^2 - 2x - m - 1 = 0$ có nghiệm $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ 2 - 2 - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2(-m-1) \geq 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{3}{2} \\ m \neq -1 \end{cases}$$



Câu 156: (Câu 24 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2016 - 2017) Hình vẽ bên là đồ thị hàm trùng phương.

Giá trị m để phương trình $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm đôi một khác nhau là:

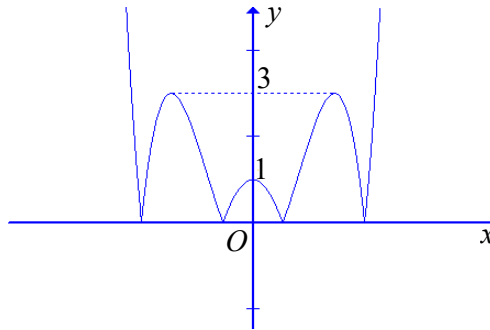


- Ⓐ. $-3 < m < 1$. Ⓑ. $m = 0$. Ⓒ. $m = 0, m = 3$. Ⓓ. $1 < m < 3$.

Lời giải

Chọn C

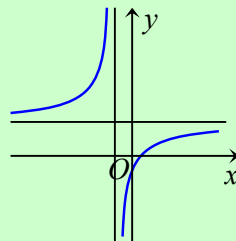
Đồ thị $y = |f(x)|$ là:



Phương trình có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 3$.

Câu 157: (Câu 31 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2016 - 2017) Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$



Mệnh đề nào sau đây là đúng:

- Ⓐ. $bd < 0, ab > 0$. Ⓑ. $ad > 0, ab < 0$. Ⓒ. $bd > 0, ad > 0$. Ⓓ. $ab < 0, ad < 0$.

Lời giải

Chọn B



<https://luyenthitracnghiem.vn>

<https://www.facebook.com/vietqld>

Đồ thị cắt trục Ox tại điểm $\left(\frac{-b}{a}; 0\right)$.

Ta có $\frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$

Mặt khác TCN $y = \frac{a}{c} > 0$,

TCD $x = \frac{-d}{c} < 0 \Rightarrow ad > 0$.

Câu 158: (Câu 41 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2016 - 2017) Cho đồ thị (C) có phương trình

$y = \frac{x+2}{x-1}$, biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với (C) qua trục tung. Khi đó $f(x)$ là

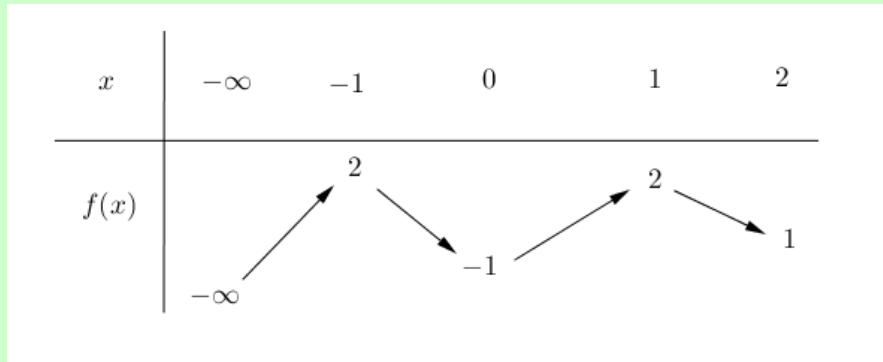
- Ⓐ. $f(x) = -\frac{x-2}{x+1}$ Ⓑ. $f(x) = -\frac{x+2}{x-1}$ Ⓒ. $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ Ⓓ. $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 159: Gọi $M(x; y) \in f(x) \Rightarrow N(-x; y) \in (C)$, ta có $y = \frac{-x+2}{-x-1} = \frac{x-2}{x+1}$.

(Câu 32 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập xác định $(-\infty; 2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt?



- Ⓐ. 2. Ⓑ. 3. Ⓒ. 1. Ⓓ. 0.

Lời giải

Chọn A

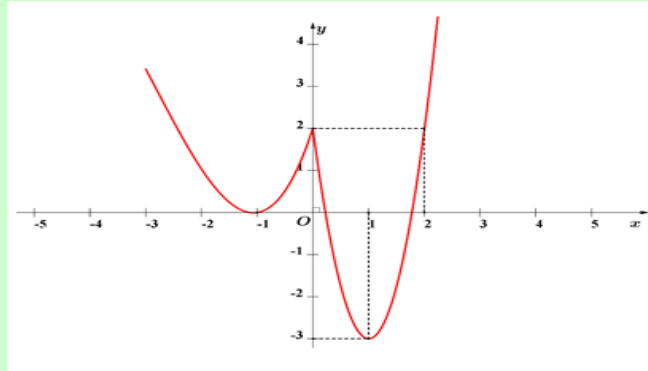
Xét phương trình $f(x) = m$: Đây là phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng nằm ngang $y = m$.

Theo đề: $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Vậy có 2 số nguyên m thoả đề bài.

Câu 160: (Câu 44 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hai hàm số $u(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ và

$f(x)$, trong đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên dưới. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(u(x)) = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?



(A). 4.

(B). 3.

(C). 2.

(D). 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = u(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = \pm 1$$

$$\text{Xét } u'(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - \frac{x(x+3)}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3} = \frac{x^2+3-x^2-3x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$u'(x)$	+	0	-
$u(x)$	-1	2	1

$$\text{Do đó } t \in (-1; 2]$$

Khi đó, $f(u(x)) = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $f(t) = m, t \in (-1; 2]$ có 2

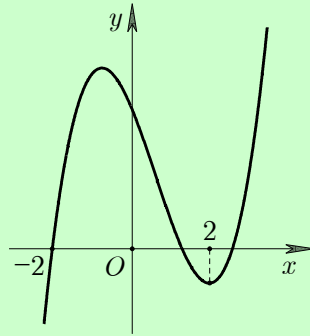
$$\text{nghiệm } t \text{ thỏa } \begin{cases} t_1 \in (0; 1] \\ t_2 \in (1; 2) \end{cases} \Rightarrow m \in (-3; 0] \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}.$$



<https://luyenthitracnghiem.vn>

<https://www.facebook.com/vietqld>

Câu 161: (Câu 36 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



Ⓐ. $ab < 0$.

Ⓑ. $bc < 0$.

Ⓒ. $ac < 0$.

Ⓓ. $bd < 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Từ đồ thị ta thấy :

+ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$.

+ Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 nằm về hai của phía trục $Oy \Rightarrow y'$ có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu $\Rightarrow ac < 0$. Vậy C đúng.

Có $ac < 0$, mà $a > 0 \Rightarrow c < 0$ (1).

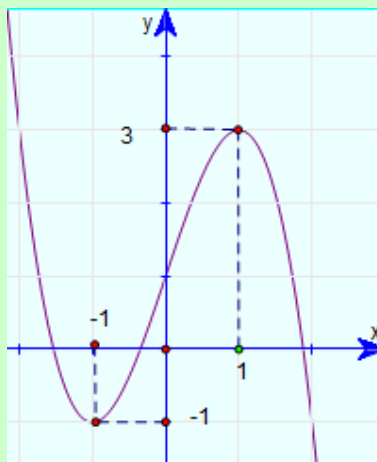
+ Ta có $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0$ (vì $x_1 \in (-2; 0), x_2 = 2$) $\Rightarrow ab < 0$. Vậy A đúng.

Có $ab < 0$, mà $a > 0 \Rightarrow b < 0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $bc > 0$. Vậy B sai, nên chọn B.

+ D đúng vì đồ thị cắt trục Oy tại điểm nằm phía trên trục hoành nên $d > 0$, mà $b < 0 \Rightarrow bd < 0$.

Câu 162: (Câu 36 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x) = (x-1)^3 - 3x + 3$. Đồ thị hình bên là của hàm số có công thức



- Ⓐ. $y = -f(x+1) - 1$. Ⓑ. $y = -f(x+1) + 1$. Ⓒ. $y = -f(x-1) - 1$. Ⓓ. $y = -f(x-1) + 1$.

Lời giải

Chọn B

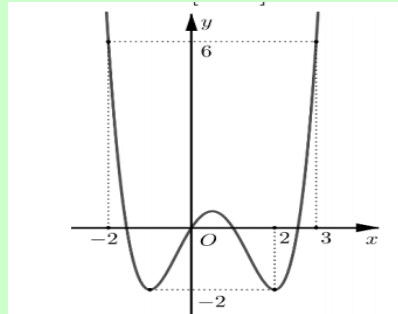
Ta có $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Từ đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(-1; -1), (1; 3)$ nên

$$\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(-1) = -1 \\ y(1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ a - b + c + d = -1 \\ a + b + c + d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -1 \\ c = 3 \\ d = 1 \end{cases}$$

Ta có $y = -x^3 + 3x + 1 = -(x-1+1)^3 + 3(x+1-3) + 1 = -f(x+1) + 1$

Câu 163: (Câu 34 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



- Ⓐ. 3 Ⓑ. 2 Ⓒ. 6 Ⓓ. 7

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^3 - 3x$, với $x \in [-1; 2]$ ta có bảng biến thiên

x	-1	1	2
t'	-	0	+
t	2	-2	2

Với $t \in (-2; 2]$ thì có 2 nghiệm $x \in [-1; 2]$

Để phương trình có 6 nghiệm thì phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm $t \in (-2; 2]$

Dựa vào đồ thị ta có $m = 0; m = 1$



<https://luyenthitracnghiem.vn>

<https://www.facebook.com/vietqld>

Câu 164: (Câu 37 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2017 - 2018) Cho đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{2x}$ và d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của (C) song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa d_1 và d_2 là

(A). 3. (B). $2\sqrt{3}$. (C). 2. (D). $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Do } (C): y = \frac{x-1}{2x}, y'(x) = \frac{1}{2x^2} \quad \forall x \neq 0.$$

d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của (C) song song với nhau lần lượt có các hoành độ tiếp điểm là

$$x_1, x_2 \quad (x_1 \neq x_2), \text{ nên ta có } y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2x_1^2} = \frac{1}{2x_2^2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

$$\text{Gọi } M\left(x_1; \frac{x_1-1}{2x_1}\right); N\left(-x_1; \frac{x_1+1}{2x_1}\right).$$

$$\text{PTTT } d_1 \text{ tại } M\left(x_1; \frac{x_1-1}{2x_1}\right): y = \frac{1}{2x_1^2}(x - x_1) + \frac{x_1-1}{2x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{2x_1^2}(x - x_1) - y + \frac{x_1-1}{2x_1} = 0.$$

$$\text{Khi đó } d_{(d_1, d_2)} = d_{(N; d_1)} = \frac{\left| \frac{2}{x_1} \right|}{\sqrt{\frac{1}{4x_1^4} + 1}} = \frac{4}{\sqrt{4x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}}}.$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cô-Si ta có } 4x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} \geq 2\sqrt{4x_1^2 \cdot \frac{1}{x_1^2}} = 4 \Rightarrow d_{(d_1, d_2)} = \frac{4}{\sqrt{4x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}}} \leq \frac{4}{2} = 2.$$

Câu 165: (Câu 25 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $|f(x-1)| = 2$ là

(A). 5. (B). 4. (C). 2. (D). 3.

Lời giải

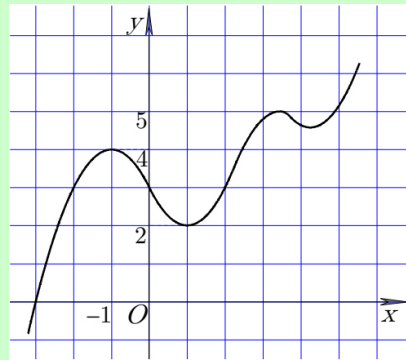
Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số đã cho ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x-1)|$ như sau :

x	$-\infty$	x_1+1	-1	x_2+1	4	x_3+1	$+\infty$
y	$+\infty$	0	4	0	2	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $|f(x-1)| = 2$ có 5 nghiệm.

Câu 166: (Câu 36 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.



(A). 1.

(B). 4.

(C). 2.

(D). 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^2 - 2x$, $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$
t'	$-$	0	$+$
t	$\frac{21}{4}$	-1	$\frac{21}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$.

Ta có: $f(x^2 - 2x) = m \quad (1) \Leftrightarrow f(t) = m \quad (2)$.

Ta thấy, với mỗi giá trị $t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$ ta tìm được hai giá trị của $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm thực phân biệt thuộc $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt thuộc $\left(-1; \frac{21}{4}\right]$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc $\left(-1; \frac{21}{4}\right]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy có hai giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu là $m = 3$ và $m = 5$.

Câu 167: (Câu 40 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2017 - 2018) THPT CHUYÊN ĐHV NĂM 2018

LẦN 2) Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 + mx + 1$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu giá trị của m để tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của (C) đi qua gốc tọa độ O ?

(A). 2.

(B). 1.

(C). 3.

(D). 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -3x^2 + 2mx + m = -3\left(x - \frac{m}{3}\right)^2 + \frac{m^2}{3} + m \leq \frac{m^2}{3} + m$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{m}{3}$, khi đó hệ số góc tiếp tuyến là $f'(x_0) = \frac{m^2}{3} + m$ và tiếp tuyến có

dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ hay $y = \left(\frac{m^2}{3} + m\right)\left(x - \frac{m}{3}\right) + \frac{2m^3}{27} + \frac{m^2}{3} + 1$

Tiếp tuyến qua $O \Rightarrow 0 = -\frac{m^3}{27} + 1 \Rightarrow m = 3$.

Câu 168: (Câu 39 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2017 - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của a để đồ thị hàm số $y = x^3 + (a+10)x^2 - x + 1$ cắt trục hoành tại đúng một điểm?

(A). 9

(B). 10

(C). 11

(D). 8

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + (a+10)x^2 - x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow a + 10 = \frac{-x^3 + x - 1}{x^2}$ (vì $x = 0$ không là nghiệm)

Đặt $f(x) = \frac{-x^3 + x - 1}{x^2} = -x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

Ta có: $f'(x) = \frac{-x^3 - x - 2}{x^3}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
y	$-\infty$	-1	$+\infty$	$-\infty$

Yêu cầu bài toán tương đương $a + 10 > -1 \Leftrightarrow a > -11$.

Suy ra có 10 giá trị nguyên âm của a thỏa.

Câu 169: (Câu 48 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2017 - 2018) Cho đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b \in (-10; 10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0; b)$?

Ⓐ. 2

Ⓑ. 9

Ⓒ. 17

Ⓓ. 16

Lời giải

Chọn C

Phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $B(0; b)$ và có hệ số góc k là $y = kx + b$.

Để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0; b)$ thì

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 = kx + b \\ k = 3x^2 - 6x \end{cases} \text{ có 1 nghiệm}$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 = (3x^2 - 6x)x + b \text{ có 1 nghiệm}$$

$$\text{Hay } -2x^3 + 3x^2 = b(*) \text{ có 1 nghiệm.}$$

Xét hàm số $g(x) = -2x^3 + 3x^2$.

$$\text{Ta có } g'(x) = -6x^2 + 6x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}. \text{ Ta có bảng biến thiên}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	1	$-\infty$

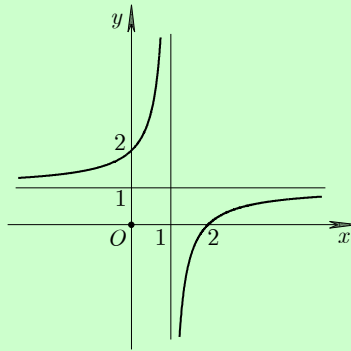
Dựa vào bảng biến thiên ta có để phương trình $(*)$ có 1 nghiệm thì $\begin{cases} b < 0 \\ b > 1 \end{cases}$, mà

$$b \in (-10; 10), b \in \mathbb{Z}$$

Suy ra $b \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Vậy có 17 giá trị b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 170: (Câu 39 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị

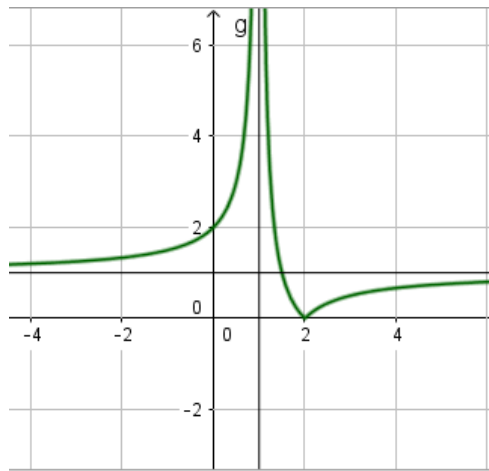
như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của m để phương trình $|f(x)| = m$ có 2 nghiệm phân biệt là



- (A). $m \geq 2$ và $m \leq 1$. (B). $0 < m < 1$ và $m > 1$. (C). $m > 2$ và $m < 1$. (D). $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đồ thị ta thấy, đồ thị hàm số có

- Tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow \frac{-d}{c} = 1 \Rightarrow c = -d$
- Tiệm cận ngang $y = 1 \Rightarrow \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c$
- Đi qua điểm $A(0; 2) \Rightarrow 2 = \frac{b}{d} \Rightarrow b = 2d$
- Đi qua điểm $B(2; 0) \Rightarrow 0 = \frac{2a+b}{2c+d} \Rightarrow b = -2a$

Chọn $a = 1 \Rightarrow c = 1, d = -1, b = 2$.

Vậy hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$

Khi đó đồ thị gồm 2 phần

+ Phần 1: là phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên Ox .

+ Phần 2: là phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía dưới Ox lấy đối xứng qua Ox .

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$.

Khi đó, phương trình $|f(x)| = m$ có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$ và $m > 1$.

Câu 171: (Câu 45 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2016 - 2017) Cho hàm số $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ. Hai phương trình $f(x) = 2017$ và $f(x-1) = 2017$ có cùng số nghiệm.
- Ⓑ. Hàm số $y = f(x-2017)$ không có cực trị.
- Ⓒ. Hai phương trình $f(x) = m$ và $f(x-1) = m-1$ có cùng số nghiệm với mọi m .
- Ⓓ. Hai phương trình $f(x) = m$ và $f(x-1) = m+1$ có cùng số nghiệm với mọi m .

Lời giải

Chọn A

Đặt $x-1 = a$. Khi đó phương trình $f(x-1) = 2017$ trở thành $f(a) = 2017$.

Hay a là nghiệm của phương trình $f(x) = 2017$.

Mà phương trình $x-1 = a$ luôn có nghiệm duy nhất với mọi số thực a .

Đáp án B sai vì đồ thị hàm số $y = f(x-2017)$ tạo thành qua phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Mà $y = f(x)$ có hai cực trị nên $y = f(x-2017)$ phải có hai cực trị.

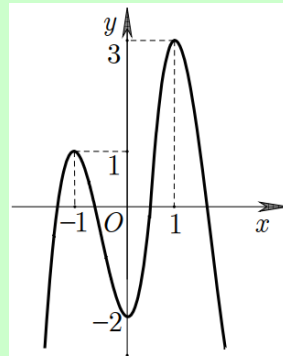
Câu 172: Đáp án C và D sai vì thử bằng máy tính không thỏa mãn.

(Câu 48 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.





Đồ thị của hàm số $y = f(1-x)$ được cho trong hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\left| f\left(\frac{1-x}{x+2}\right) + m \right| = 1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-1; 1]$?



A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị có bảng biến thiên của hàm số $y = f(1-x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$1-x$	$+\infty$	2	1	0	$-\infty$
$f(1-x)$	$-\infty$	1	-2	3	$-\infty$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	-2	1	$-\infty$

Xét phương trình $\left| f\left(\frac{1-x}{x+2}\right) + m \right| = 1, (x \in [-1; 1])$ (*)

Đặt $t = \frac{1-x}{x+2}$, (Ứng với 1 giá trị $t \in [0; 2]$ cho ta đúng 1 giá trị $x \in [-1; 1]$)

(*) thành: $|f(t) + m| = 1, t \in [0; 2]$ (1)

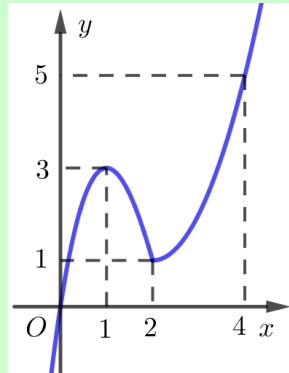
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = 1 - m \\ f(t) = -1 - m \end{cases}, t \in [0; 2].$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 3 nghiệm t phân biệt thuộc $[0; 2]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < 1 - m \leq 3 \\ -2 < -1 - m \leq 1 \\ -2 < 1 - m \leq 1 \\ -1 - m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m < 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa.

Câu 173: (Câu 83 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $f[4(\sin^6 x + \cos^6 x)] = m$ có nghiệm.



Ⓐ. 2.

Ⓑ. 4.

Ⓒ. 3.

Ⓓ. 5.

Lời giải

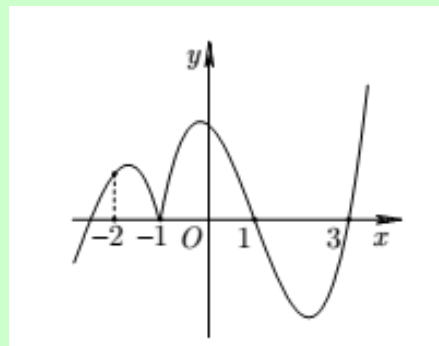
Chọn D

$$\text{Đặt } t = 4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) = 4 - 3\sin^2 2x \Rightarrow t \in [1; 4].$$

Do đó phương trình $f[4(\sin^6 x + \cos^6 x)] = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $f(t) = m$ có nghiệm trên đoạn $[1; 4]$.

Dựa vào đồ thị đã cho ta thấy: phương trình $f(t) = m$ có nghiệm t với $t \in [1; 4] \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 5$.
Vậy $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 174: (Câu 94 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \sqrt{\left(mx + m^2 \frac{4-x^2}{1+\sqrt{5-x^2}} + m^2 + 2m + 1\right)} f(x)$ có tập xác định $[-2; 2]$



Ⓐ. 1.

Ⓑ. 2.

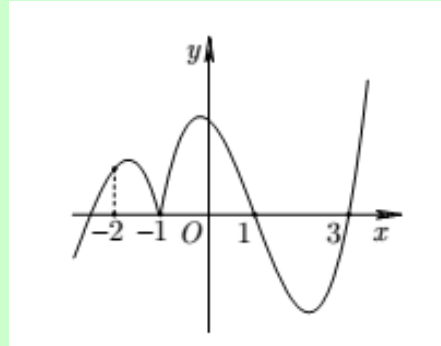
Ⓒ. 0.

Ⓓ. 3.

Lời giải

Chọn A

Câu 175: (Câu 95 - PTĐ Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. S là tập các số nguyên m để bất phương trình $\left(m^3 \cdot \sqrt{2x^2 - 2x + 4} - mx + 2m + 3\right) \left(f(x) + 2019f^{2019}(x)\right) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 2019]$. Tổng các phần tử của S là



Ⓐ. 1.

Ⓑ. 3.

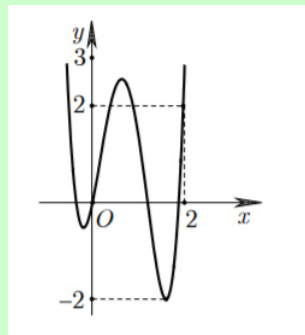
Ⓒ. 0.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn A

Câu 176: (Câu 48 - Chuyên Vinh - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x^3 - 3x|) = m$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2; 2]$?

Ⓐ. 4.

Ⓑ. 3.

Ⓒ. 1.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = |x^3 - 3x|$, với $x \in [-2; 2]$.

Ta thấy hàm số $u(x) = x^3 - 3x$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và $u' = 3x^2 - 3$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$-\sqrt{3}$	2
$u'(x)$		+	0	-	0	+	
$u(x)$	-2	0	2	0	-2	0	2
$ u(x) $	2	0	2	0	2	0	2

Ta có nhận xét:

Với $t = 0$ thì phương trình $t = |x^3 - 3x|$ có 3 nghiệm phân biệt;

Với $t = 2$ thì phương trình $t = |x^3 - 3x|$ có 4 nghiệm phân biệt;

Với mỗi $t \in (0; 2)$ thì phương trình $t = |x^3 - 3x|$ có 6 nghiệm phân biệt.

Với $t = |x^3 - 3x|$ phương trình $f(|x^3 - 3x|) = m$ thành $f(t) = m, (t \in [0; 2])$.

Dựa vào đồ thị, ta có khi $-2 < m < 0$ thì trên $[0; 2]$ phương trình

$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \in (0; 2) \\ t = b \in (0; 2) \end{cases}, (a \neq b)$. Khi đó phương trình $f(|x^3 - 3x|) = m$ có 12 nghiệm phân biệt.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1$.

Câu 177: (Câu 48 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2019 - 2020). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	-3	$+\infty$

Xác định số nghiệm của phương trình $|f(x^3 - 3x^2)| = \frac{3}{2}$, biết $f(-4) = 0$.

(A). 6.

(B). 9.

(C). 10.

(D). 11.

Lời giải

Chọn C

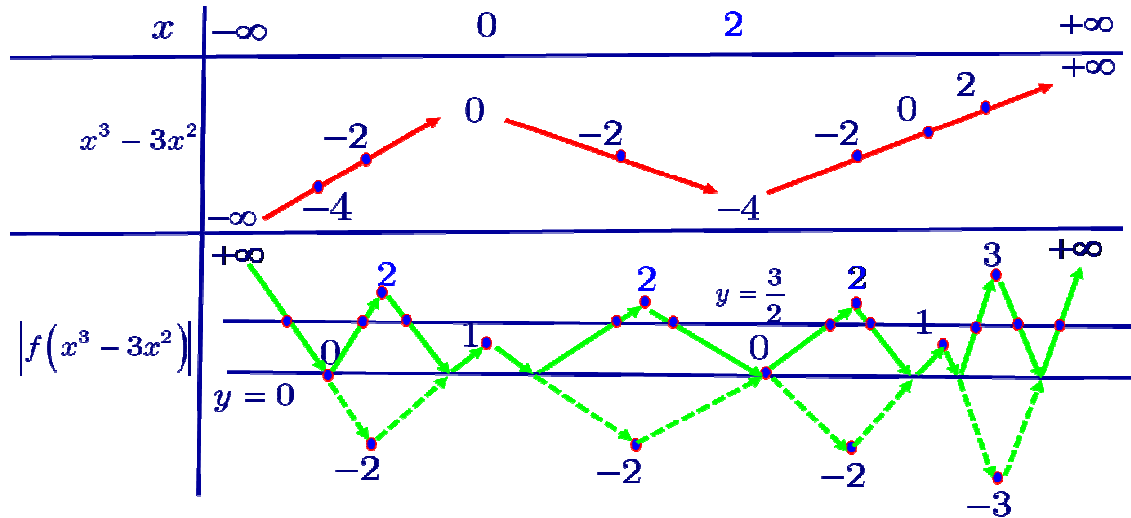
Theo Bài ra ta có Bảng biến thiên tổng hợp:



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>

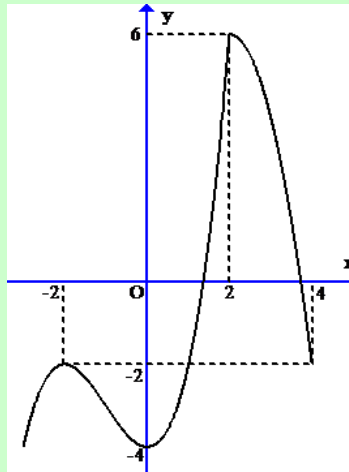


Đồ thị hàm số $y = |f(x^3 - 3x^2)|$ là phần nét liền.

Số nghiệm của pt $|f(x^3 - 3x^2)| = \frac{3}{2} (*)$ chính là số giao điểm của đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ và đồ thị hàm số $y = |f(x^3 - 3x^2)|$

Nên từ BBT pt $(*)$ có 10 nghiệm

Câu 178: (Câu 48 - Chuyên Vinh - Lần 1 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$?

(A). 11

(B). 9

(C). 8

(D). 10

Lời giải

Chọn C

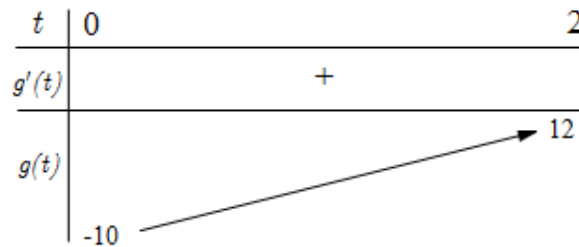
Đặt $t = \frac{x}{2} + 1$, khi $-2 \leq x \leq 2$ thì $0 \leq t \leq 2$.

Phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{3}f(t) + 2t - 2 = m \Leftrightarrow f(t) + 6t - 6 = 3m$.

Xét hàm số $g(t) = f(t) + 6t - 6$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $g'(t) = f'(t) + 6$. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ nên $f'(t) > 0, \forall t \in (0; 2) \Rightarrow g'(t) > 0, \forall t \in (0; 2)$ và $g(0) = -10; g(2) = 12$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[0; 2]$

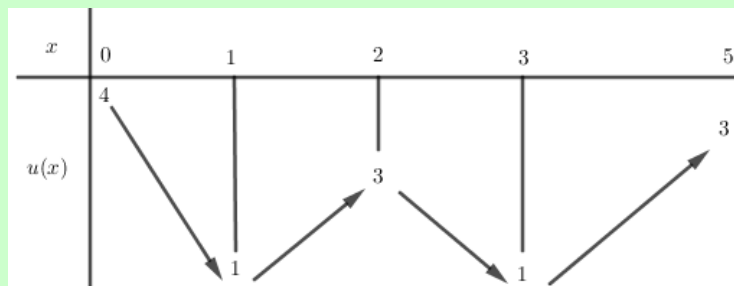


Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $g(t) = 3m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$ hay $-10 \leq 3m \leq 12 \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m \leq 4$.

Mặt khác m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 8 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 179: (Câu 49 - Chuyên Vinh - Lần 3 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10 - 2x} = m.u(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0; 5]$?



(A). 6.

(B). 4.

(C). 5.

(D). 3.

Lời giải

Chọn C

Theo bảng biến thiên ta có trên $[0; 5]$ thì $1 \leq u(x) \leq 4$ (1),

Ta có $\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} = m.u(x) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{u(x)} = m$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}$ trên $[0;5]$

Ta có $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{10-2x}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sqrt{10-2x} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 3(10-2x) = 4x \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng biến thiên

x	0	1	2	3	5
$f'(x)$		+	+	0	-
$f(x)$				5	

$\sqrt{10}$ $\swarrow$ $\searrow$ $\sqrt{15}$

Do đó ta có trên $[0;5]$ thì $\sqrt{10} \leq f(x) \leq 5$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} \max f(x) = f(3) = 5 \\ \min u(x) = u(3) = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} \min f(x) = f(0) = \sqrt{10} \\ \max u(x) = u(0) = 4 \end{cases}$

Do đó $\frac{\sqrt{10}}{4} \leq \frac{f(x)}{u(x)} \leq 5$ với mọi $x \in [0;5]$.

Để phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} = m.u(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0;5] \Leftrightarrow$ phương trình

$\frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{u(x)} = m$ có nghiệm trên đoạn $[0;5] \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{4} \leq m \leq 5$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

