

ĐƠN ĐIỀU-GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT-TƯƠNG GIAO
CHỮA TRỊ TUYỆT ĐỐI

A ĐƠN ĐIỀU CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

Câu 1. Cho hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

(A) 3.

(B) 1.

(C) 9.

(D) 10.

Lời giải.

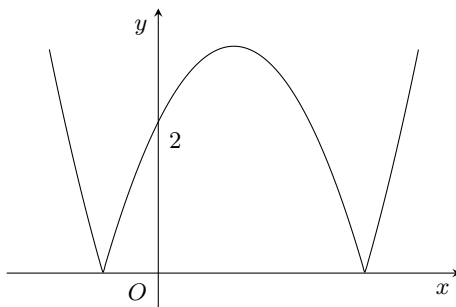
Xét hàm số $y = x^3 - mx + 1$, $y' = 3x^2 - m$.

TH1: $\Delta' = 3m \leq 0 \Rightarrow y' \geq 0 \forall x \geq 1$ hàm số $y = x^3 - mx + 1$ luôn đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Vậy trong trường hợp này để thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ y(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0 \Leftrightarrow m = 0$

(vì m là số tự nhiên).

TH2: $\Delta = 3m > 0 \Rightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).



Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \leq 1 \\ y(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2 - m \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 < m \leq 2 \Leftrightarrow m = \{1, 2\}$

Vậy $m = \{0, 1, 2\}$ thỏa yêu cầu của bài toán. Tổng các phần tử của S là 3.

Cách 2: Xét $f(x) = x^3 - mx + 1$ ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số $y = |x^3 - mx + 1| = |f(x)|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và đồng biến trên $[1; +\infty)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 3x^2 - m \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \\ f(1) = 2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m \geq 0 \\ 2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2$

Kết hợp điều kiện m là số tự nhiên ta có $m = \{0; 1; 2\}$. Tổng các phần tử của S là 3.

Chọn phương án (A)

□

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 1 - m$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$?

(A) 3.

(B) 5.

(C) 8.

(D) Vô số.

Lời giải.

Xét $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 1 - m$, $\Delta' = m^2 + 3m$

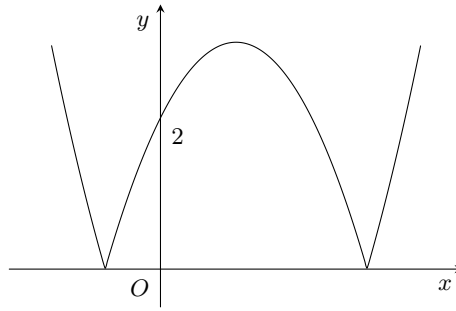
TH1: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-3; 0]$

$y = |f(x)| = f(x)$, khi đó hàm số đồng biến trên khoảng $(m+1; +\infty)$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi $m+1 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq -2$

Kết hợp $m \in [-3; 0] \Rightarrow m \in [-3; -2]$ (1)

TH2: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$. Khi đó $f(x)$ có 2 nghiệm $x_1; x_2 (x_1 < x_2)$



Để hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$ trong hai trường hợp sau

+TH1: $x_1 \leq -1 < 1 \leq m+1 \Leftrightarrow m+1 - \sqrt{m^2 + 3m} \leq -1 < 1 \leq m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$

+TH2: $x_2 \leq -1 \Leftrightarrow m+1 + \sqrt{m^2 + 3m} \leq -1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 3m} \leq -m-2$

$\Leftrightarrow m \geq -4$

Kết hợp $m < -3 \Rightarrow m \in [-4; -3)$ (2)

Từ (1) và (2) có 3 giá trị nguyên của m .

Chọn phương án **(A)** □

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 + 9|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

(A) 3.

(B) 6.

(C) 7.

(D) 4.

Lời giải.

Ta có $y = \begin{cases} x^4 - mx^2 + 9 & (x^4 - mx^2 + 9 \geq 0) \\ -x^4 + mx^2 - 9 & (x^4 - mx^2 + 9 < 0) \end{cases}$

Nên $y' = \begin{cases} 4x^3 - 2mx & (x^4 - mx^2 + 9 \geq 0) \\ -4x^3 + 2mx & (x^4 - mx^2 + 9 < 0) \end{cases}$

Yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} 4x^3 - 2mx \geq 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 \geq 0 \end{cases}, \forall x > 1$ hoặc $\begin{cases} -4x^3 + 2mx \geq 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 < 0 \end{cases}, \forall x > 1$

TH1: $\begin{cases} 4x^3 - 2mx \geq 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 \geq 0 \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2x^2 \\ m \leq x^2 + \frac{9}{x^2} \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2x^2 \\ m \leq x^2 + \frac{9}{x^2} \end{cases}, \forall x \geq 1$

$\Leftrightarrow m \leq 2 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}$

TH2: $\begin{cases} -4x^3 + 2mx \geq 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 < 0 \end{cases}, \forall x > 1 \Rightarrow$ Hệ này vô nghiệm vì khi $x \rightarrow +\infty$ thì $x^4 - mx^2 + 9 \rightarrow +\infty$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |x^5 - mx + 4|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

(A) 4.

(B) 5.

(C) 6.

(D) 7.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } y = \begin{cases} x^5 - mx + 4 & \text{khi } (x^5 - mx + 4 \geq 0) \\ -x^5 + mx - 4 & \text{khi } (x^5 - mx + 4 < 0) \end{cases}; y' = \begin{cases} 5x^4 - m & \text{khi } (x^5 - mx + 4 \geq 0) \\ -5x^4 + m & \text{khi } (x^5 - mx + 4 < 0) \end{cases}$$

$$\text{TH1: } y' = \begin{cases} 5x^4 - m \geq 0 \\ x^5 - mx + 4 \geq 0 \end{cases}, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5x^4 \\ m \leq x^4 + \frac{4}{x} \end{cases}, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ m \leq 1 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 5.$$

$$\text{TH2: } y' = \begin{cases} -5x^4 + m \geq 0 \\ x^5 - mx + 4 < 0 \end{cases}, \forall x \geq 1. \text{ Hệ vô nghiệm vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - mx + 4) = +\infty.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m \leq 5 \\ m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Rightarrow m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Chọn phương án (B)

□

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \left| \frac{x-m}{x+m+1} \right|$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x-m}{x+m+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2m+1}{(x+m+1)^2}.$$

Ta có

$$y = |f(x)| \Rightarrow y' = (|f(x)|)' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|}$$

$$\text{Hàm số } y = \left| \frac{x-m}{x+m+1} \right| \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty) \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) > 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f'(x) < 0 \\ f(x) < 0, \forall x \in (0; +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) > 0, \forall x \in (0; +\infty) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2m+1 < 0 \\ f(0) \leq 0 \\ -m-1 \notin (0; +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} 2m+1 > 0 \\ f(0) \geq 0 \\ -m-1 \notin (0; +\infty) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} m \geq 0 \\ m < -1 \end{cases} \\ m \geq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} -1 < m \leq 0 \\ m \geq -1 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \leq 0$$

Với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0$.

Chọn phương án (B)

□

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5; 5)$ để hàm số $y = \left| \sqrt{x^2-3} - 2x - 3m \right|$ nghịch biến trên $(2; 3)$?

(A) 2.

(B) 3.

(C) 5.

(D) 9.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 3} - 2x - 3m$

Ta có: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} - 2 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x - 2\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{x^2 - 3}}$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x - 2\sqrt{x^2 - 3} = 0 \Rightarrow x = 2$.

Ta thấy $f'(x) < 0, \forall x \in (2; 3)$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(2; 3)$.

Đẩy $y = \left| \sqrt{x^2 - 3} - 2x - 3m \right|$ nghịch biến trên $(2; 3)$ thì $f(3) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{6} - 6 - 3m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{\sqrt{6} - 6}{3}$

Do $m \in (-5; 5)$ nên $m = \{-2; -3; -4\}$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ để hàm số $y = \left| \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1 \right|$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$

(A) 4042.

(B) 4039.

(C) 4040.

(D) 4041.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$. Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m$

Vì hàm số liên tục tại $x = 1; x = 2$ nên để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ ta xét hai trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 2] \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m \geq 0, \forall x \in [1; 2] \\ m \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in [1; 2] \\ m \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[1; 2]} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ m \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \sqrt{2} - 1 \quad (1)$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in [1; 2] \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m \leq 0, \forall x \in [1; 2] \\ m \geq \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in [1; 2] \\ m \geq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[1; 2]} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ m \geq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} m \geq \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ m \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2020; 2020] \end{cases}$ nên có 4041 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x) = |x^3 - x^2 + x + 2020 - m^2(\cos x + 1)|$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

(A) 63.

(B) 89.

(C) 31.

(D) Vô số.

Lời giải.

Đặt $g(x) = x^3 - x^2 + x + 2020 - m^2(\cos x + 1)$.

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 2x + 1 + m^2 \sin x = 2x^2 + (x - 1)^2 + m^2 \sin x \geq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Để $y = f(x)$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $g(0) \geq 0 \Leftrightarrow 2020 - 2m^2 \geq 0 \Leftrightarrow m \in [-\sqrt{1010}; \sqrt{1010}]$.

m nguyên dương nên $m \in [1; 2; 3; \dots; 31]$.

Kết luận có 31 giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **C**

□

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |9^x + 3^x - m + 1|$ đồng biến trên đoạn $[0; 1]$?

(A) 1.

(B) 4.

(C) 3.

(D) 6.

Lời giải.

Đặt $3^x = t \Rightarrow t \in [1; 3]$ vì $x \in [0; 1]$

$$\Rightarrow y = |t^2 + t - m + 1| = \sqrt{(t^2 + t - m + 1)^2} \Rightarrow y' = \frac{2 \cdot (t^2 + t - m + 1)' \cdot (t^2 + t - m + 1)}{2 \cdot |t^2 + t - m + 1|}$$

Để hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 3]$ thì $y' = \frac{(2t + 1) \cdot (t^2 + t - m + 1)}{|t^2 + t - m + 1|} \geq 0, \forall t \in [1; 3]$.

Với mọi giá trị của $t \in [1; 3]$ thì $2t + 1 > 0$ nên để $y' \geq 0$ thì: $t^2 + t - m + 1 \geq 0, \forall t \in [1; 3]$

$$\Rightarrow m - 1 \leq t^2 + t = g(t), \forall t \in [1; 3]$$

Ta có bảng biến thiên:

t	1	3
$g'(t)$		+
$g(t)$	2	12

$$\Rightarrow m - 1 \leq \min_{[1;3]} g(t) = 2 \Rightarrow m \leq 3$$

Vậy có 3 giá trị nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **C**

□

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-1993; 1997)$ của tham số m để hàm số $y = |\ln 5x - 6x^2 + 2m|$ nghịch biến trên đoạn $[1; e^3]$.

(A) 0.

(B) 789.

(C) 790.

(D) 791.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{\left(\frac{1}{x} - 12x\right)(\ln 5x - 6x^2 + 2m)}{|\ln 5x - 6x^2 + 2m|}$. Hàm số nghịch biến trên $[1; e^3]$ khi và chỉ khi

$$y' \leq 0, \forall x \in [1; e^3] \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{x} - 12x\right)(\ln 5x - 6x^2 + 2m)}{|\ln 5x - 6x^2 + 2m|} \leq 0, \forall x \in [1; e^3]$$

$$\Leftrightarrow \ln 5x - 6x^2 + 2m \geq 0, \forall x \in [1; e^3] \Leftrightarrow 2m \geq 6x^2 - \ln 5x, \forall x \in [1; e^3].$$

Xét hàm số $f(x) = 6x^2 - \ln 5x$ trên đoạn $[1; e^3]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 12x - \frac{1}{x} > 0, \forall x \in [1; e^3].$$

Bảng biến thiên

x	1	e^3
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$6 - \ln 5$	$6e^6 - \ln(5e^3)$

Từ bảng biến thiên ta có $2m \geq 6e^6 - \ln(5e^3) \Leftrightarrow m \geq 3e^6 - \frac{1}{2} \ln(5e^3)$.

Vậy $m \in \{1208; 1209; \dots; 1996\}$. Suy ra có 789 giá trị của m .

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên $m > -2020$ để hàm số $y = |\ln(mx^2) - x + 4|$ đồng biến trên $(2; 5)$.

(A) 2020.

(B) 2022.

(C) 2021.

(D) 0.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{\left(\frac{2}{x} - 1\right)(\ln(mx^2) - x + 4)}{|\ln(mx^2) - x + 4|}$. Hàm số đồng biến trên $(2; 5)$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in (2; 5) \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{2}{x} - 1\right)(\ln(mx^2) - x + 4)}{|\ln(mx^2) - x + 4|} \geq 0, \forall x \in (2; 5)$$

$$\Leftrightarrow \ln(mx^2) - x + 4 \leq 0, \forall x \in (2; 5) \Leftrightarrow \ln(mx^2) \leq x - 4, \forall x \in (2; 5).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 \leq e^{x-4}, \forall x \in (2; 5) \\ mx^2 > 0, \forall x \in (2; 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{e^{x-4}}{x^2}, \forall x \in (2; 5) \\ m > 0 \end{cases}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{e^{x-4}}{x^2}$ trên khoảng $(2; 5)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x^2 e^{x-4} - 2x e^{x-4}}{x^4} = \frac{(x-2)e^{x-4}}{x^3} > 0, \forall x \in (2; 5).$$

Bảng biến thiên

x	2	5
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\frac{e^{-2}}{4}$	$\frac{e}{25}$

Từ bảng biến thiên ta có $m \leq \frac{e^{-2}}{4}$. Vậy $0 < m \leq \frac{e^{-2}}{4}$.

Vậy không có giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 12. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2020; 2020)$ để hàm số $y = |\ln(x^2 + 2x + m) + 2mx^2 - 8m + 1|$ luôn nghịch biến trên $(-9; -2)$.

(A) 2019.

(B) 2018.

(C) 2021.

(D) 2020.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \ln(x^2 + 2x + m) + 2mx^2 - 8m + 1$ trên $(-9; -2)$.

Điều kiện xác định: $x^2 + 2x + m > 0, \forall x \in (-9; -2) \Leftrightarrow m > -x^2 - 2x, \forall x \in (-9; -2)$.

Mặt khác $-x^2 - 2x = -x(x + 2) < 0, \forall x \in (-9; -2)$. Suy ra $m \geq 0$.

Ta có $f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + m} + 4mx$. Vì $m \geq 0$ và $x \in (-9; -2)$ nên $f'(x) < 0, \forall x \in (-9; -2)$.

Ta có $y' = \frac{f'(x)f(x)}{|f(x)|}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-9; -2)$

$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (-9; -2) \Leftrightarrow \frac{f'(x)f(x)}{|f(x)|} \leq 0, \forall x \in (-9; -2) \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in (-9; -2)$.

Trường hợp 1: Xét $m = 0$, khi đó $f(x) = \ln(x^2 + 2x) + 1$.

Ta có $f\left(-\frac{21}{10}\right) = \ln\left(\frac{21}{100}\right) + 1 < 0$. Suy ra loại $m = 0$.

Trường hợp 2: Xét $m > 0$. Ở trên ta đã có $f'(x) < 0, \forall x \in (-9; -2)$, do đó $f(x)$ nghịch biến trên $(-9; -2)$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	-9	-2
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$\ln(m + 63) + 154m + 1$	$\ln m + 1$

Từ bảng biến thiên, ta có $f(x) \geq 0, \forall x \in (-9; -2)$ khi $\ln m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq e^{-1} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{e}$.

Vậy $m \in \{1; 2; \dots; 2019\}$. Suy ra có 2019 giá trị của m .

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 1$, với m là tham số thực.

Có bao nhiêu số tự nhiên $m < 2018$ để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(2; 4)$?

(A) 2016.

(B) 2018.

(C) 2015.

(D) 2017.

Lời giải.

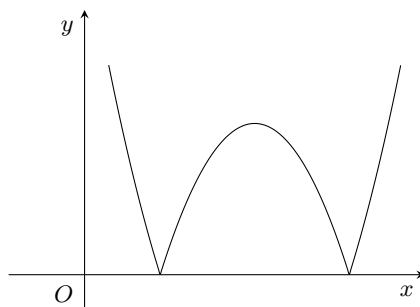
Xét $f(x) = x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 1, \Delta' = m^2 \geq 0, \forall m$

TH1: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 0$

$y = |f(x)| = f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Rightarrow$ thỏa mãn.

TH2: $m \neq 0 \Rightarrow m > 0$. Khi đó $f(x)$ có 2 nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 2m + 1 (x_1 < x_2)$

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên các khoảng $(1; m + 1)$ và $(2m + 1; +\infty)$.



Để hàm số đồng biến trên $(2; 4)$ trong hai trường hợp sau

+TH1: $1 \leq 2 < 4 \leq m + 1 \Leftrightarrow m \geq 3$

+TH2: $2m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{2}$

Do m là số tự nhiên $m < 2018$ nên ta có 2016 giá trị nguyên của m .

Chọn phương án **(A)** □

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |x^5 - 5x^2 + 5(m - 1)x - 8|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

(A) 2.

(B) 0.

(C) 4.

(D) 1.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 5x^2 + 5(m - 1)x - 8$. Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Do đó, hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; 1) \Leftrightarrow$ hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị âm và đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (-\infty; 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 5x^4 - 10x + 5(m - 1) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 1) \\ f(1) = 5m - 17 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -x^4 + 2x + 1, \forall x \in (-\infty; 1) \\ m \leq \frac{17}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(-\infty; 1)} (-x^4 + 2x + 1) = \frac{3}{2 \cdot \sqrt[3]{2}} + 1 \\ m \leq \frac{17}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2 \cdot \sqrt[3]{2}} + 1 \leq m \leq \frac{17}{5}. \text{ Kết hợp với điều kiện } m \text{ nguyên ta có } m = 3.$$

Chọn phương án **(D)** □

Câu 15. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m - 4|$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ là

(A) $[2; +\infty)$.

(B) $(-\infty; 2]$.

(C) $(-\infty; 4]$.

(D) $[4; +\infty)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m - 4$

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		$m - 4$		$m - 8$		$m - 4$		$+\infty$

Vì đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ở phía

trên trục hoành và lấy đối xứng phần đồ thị ở phía dưới trục hoành qua trục Ox .

Suy ra hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(3; +\infty) \Leftrightarrow f(3) \geq 0 \Leftrightarrow m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

(A) 6.

(B) 4.

(C) 3.

(D) 5.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$								

$\swarrow$ $m - 5$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

Nhận thấy: hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1) \Leftrightarrow m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$.

Lại do: $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m < 10 \end{cases} \Rightarrow m \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$. Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = |x^4 + 2x^3 + mx + 2|$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$?

(A) $m \geq 1$.

(B) $m \in \emptyset$.

(C) $0 \leq m \leq 1$.

(D) $m \leq 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^4 + 2x^3 + mx + 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + m$.

$y = |x^4 + 2x^3 + mx + 2| = |f(x)|$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \\ f(-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 6x^2 + m \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \\ 1 - m \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -4x^3 - 6x^2, \forall x \in (-1; +\infty) \\ 1 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(-1; +\infty)} (-4x^3 - 6x^2) \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1 \end{aligned}$$

Chọn phương án **(C)** □

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = |-x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?

(A) 21.

(B) 10.

(C) 8.

(D) 2.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3)$ trên khoảng $(0; 2)$.

$$f'(x) = -3x^2 + 6(m+1)x - 3m(m+2) = -3[x^2 - 2(m+1)x + m(m+2)].$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases} \quad (m < m+2).$$

$$\text{Nhận xét: } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	m		$m+2$		$m+3$		$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		0	$\nearrow$		0	$\searrow$	$-\infty$
$ f'(x) $	$+\infty$	$\searrow$		0	$\nearrow$		0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (0; 1) \subset (m; m+2) \\ (0; 1) \subset (m+3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 < 1 \leq m+2 \\ m+3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 0 \\ m \leq -3 \end{cases}.$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $[-10; 10]$ nên có 10 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án (B)

□

Câu 19. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-4; 4)$ để hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1 \right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

Lời giải.

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x + m.$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = 1 - m$$

$$+\text{Trường hợp 1: } \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 1 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 1. \text{ Suy ra } f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty).$$

$$\text{Vậy yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ \frac{1}{3} + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-4; 4)$ ta được $m \in \{1; 2; 3\}$. Ta có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+Trường hợp 2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 1$. Suy ra $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - m}}{2}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - m}}{2}, (x_1 < x_2)$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$+\infty$	

$$\text{Vậy yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ x_1 < x_2 \leq 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ \frac{1 + \sqrt{1 - m}}{2} \leq 1 \\ 1 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq 0 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 1$$

Do m nguyên và $0 \leq m < 1$ nên $m = 0$

Vậy tất cả có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số thực m để hàm số $y = |x^3 - 3(m + 2)x^2 + 3m(m + 4)x|$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$?

(A) 4033.

(B) 4032.

(C) 2018.

(D) 2016.

Lời giải.

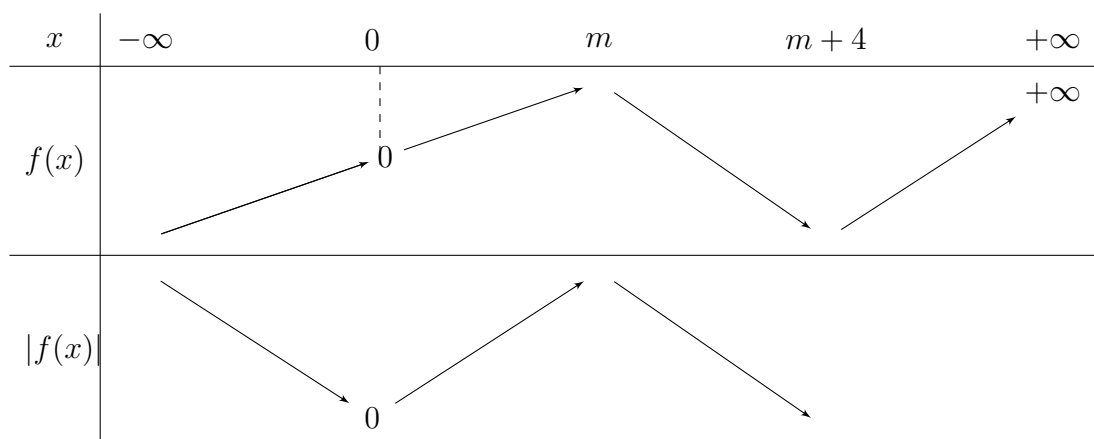
Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3(m + 2)x^2 + 3m(m + 4)x$ trên khoảng $(0; 4)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6(m + 2)x + 3m(m + 4) = 3[x^2 - 2(m + 2)x + m(m + 4)].$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 4 \end{cases} \quad (m < m + 4)$$

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn đi qua điểm $O(0; 0)$.

Trường hợp 1: Nếu $m > 0$

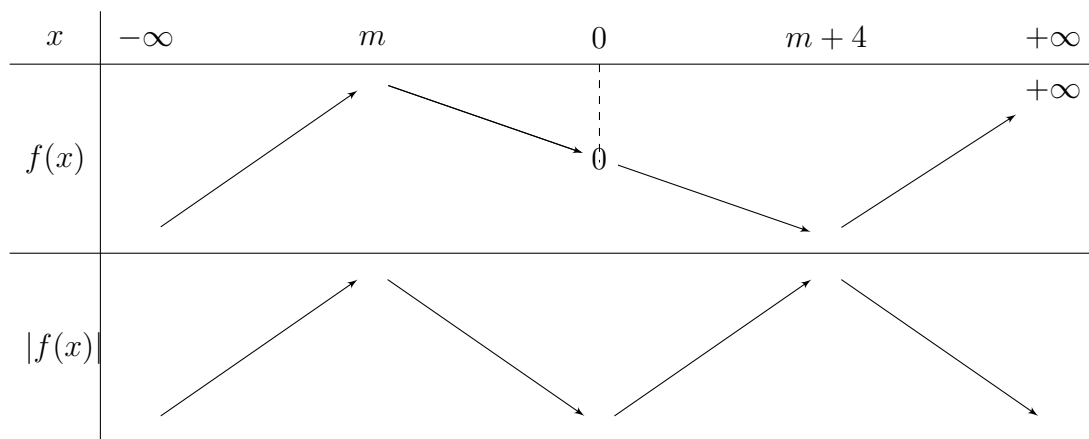


Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$

$$\Leftrightarrow (0; 4) \subset (0; m) \Leftrightarrow 4 \leq m$$

Kết hợp với $m > 0$, ta có $m \geq 4$.

Trường hợp 2: Nếu $m \leq 0 < m + 4 \Leftrightarrow -4 < m \leq 0$.

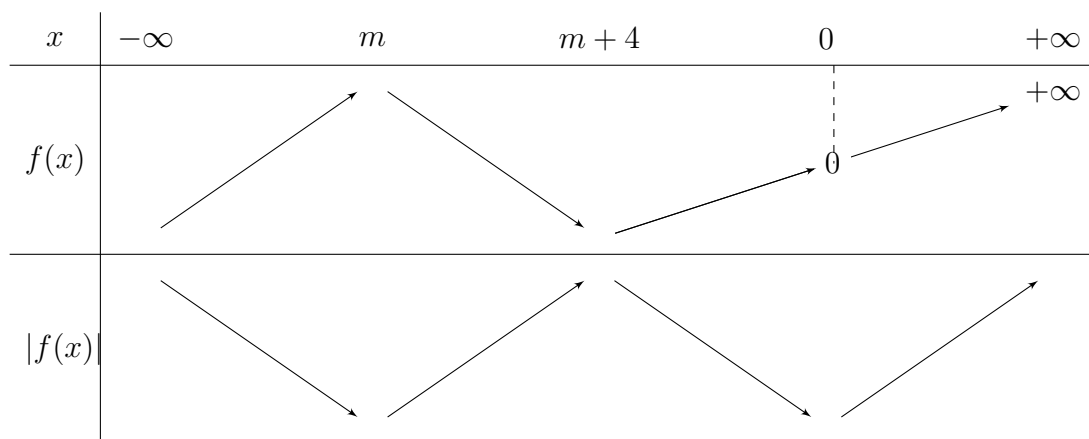


Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 4) \Leftrightarrow (0; 4) \subset (0; m + 4) \Leftrightarrow m + 4 \geq 4$
 $\Leftrightarrow m \geq 0$

Kết hợp với $-4 < m \leq 0$, ta có $m = 0$.

Trường hợp 3: Nếu $m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -4$



Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = |f(x)|$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ với mọi $m \leq -4$.

Vậy $\begin{cases} m \geq 4 \\ m = 0 \\ m \leq -4 \end{cases}$, mà m nguyên thuộc khoảng $[-2019; 2019]$ nên có 4033 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m < 5$ để hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m \right|$ đồng biến trên $(0, +\infty)$?

(A) 4.

(B) 2.

(C) 6.

(D) 8.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m$ ta có $y' = x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó điều kiện hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m \right|$ đồng biến trên $(0, +\infty)$ là $y_{(0)} \geq 0 \Rightarrow m \geq 0$.

Lại có m nguyên dương và $m < 5$ vậy có 4 giá trị của m .

Chọn phương án **(A)** □

Câu 22 (Mức độ 4). Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 + 9|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

(A) 3.

(B) 6.

(C) 7.

(D) 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = \begin{cases} x^4 - mx^2 + 9 & (x^4 - mx^2 + 9 \geq 0) \\ -x^4 + mx^2 - 9 & (x^4 - mx^2 + 9 < 0) \end{cases}$$

$$\text{Nên } y' = \begin{cases} 4x^3 - 2mx & (x^4 - mx^2 + 9 \geq 0) \\ -4x^3 + 2mx & (x^4 - mx^2 + 9 < 0) \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán tương đương với } \begin{cases} 4x^3 - 2mx \geq 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 \geq 0 \end{cases}, \forall x > 1 \text{ hoặc } \begin{cases} -4x^3 + 2mx \geq 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 < 0 \end{cases}, \forall x > 1$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 4x^3 - 2mx \geq 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 \geq 0 \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2x^2 \\ m \leq x^2 + \frac{9}{x^2} \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2x^2 \\ m \leq x^2 + \frac{9}{x^2} \end{cases}, \forall x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow m \leq 2 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} -4x^3 + 2mx \geq 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 < 0 \end{cases}, \forall x > 1 \Rightarrow \text{Hệ này vô nghiệm vì khi } x \rightarrow +\infty \text{ thì } x^4 - mx^2 + 9 \rightarrow +\infty.$$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 23. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 12.

(B) 8.

(C) 11.

(D) 7.

Lời giải.

Xét hàm số: $f(x) = 2x^3 - 2mx + 3$ có $f'(x) = 6x^2 - 2m$

Hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ trong hai trường hợp sau

TH1: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và $f(1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 2m \geq 0 \\ 5 - 2m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3x^2 \forall x \in (1; +\infty) \\ m \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ m \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$$

Do m nguyên và thuộc khoảng $(-10; 10)$ suy ra có 12 giá trị m thỏa yêu cầu

TH2: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và $f(1) \leq 0$

Trường hợp này không xảy ra do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Vậy có tất cả 12 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Cho hàm số $y = |x^5 - mx + 1|$. Gọi S là tập tất cả các số nguyên dương m sao cho hàm số đồng biến

trên $[1; +\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |2x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 2.

(B) 6.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - mx + 1$ ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương và đồng biến trên $(1; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - mx + 1 > 0 \\ 6x^2 - m \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f'(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m + 1 \geq 0 \\ 6 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m \in \{1; 2; 3\}$.

Chọn phương án **(C)**

□

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 2mx + m + 2|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9; 9]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

(A) 3.

(B) 2.

(C) 16.

(D) 9.

Lời giải.

Xét hàm $g(x) = x^2 - 2mx + m + 2$. Ta có $g'(x) = 2x - 2m$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} g(0) \geq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 2) \text{ hoặc } \begin{cases} g(0) \leq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 2).$$

Trường hợp 1.

$$\begin{cases} g(0) \geq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \geq 0 \\ -2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

Trường hợp 2.

$$\begin{cases} g(0) \leq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \leq 0 \\ -2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Do m là nguyên thuộc $[-9; 9]$ nên $m \in \{-2; -1; 0\}$.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 26. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = g(x) = |x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0; +\infty)$ biết rằng $-2021 \leq m \leq 2021$?

(A) 2020.

(B) 2021.

(C) 2022.

(D) 2019.

Lời giải.

Xét hàm số: $y = f(x) = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$; ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3m(m+2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases} \quad (m < m+2, \forall m).$$

Bảng biến thiên

Gọi (C_1) là phần đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$ nằm trên Ox .

Gọi (C_2) là phần đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$ nằm dưới Ox .

Gọi (C'_2) là phần đồ thị đối xứng với (C_2) qua Ox .

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x) = |x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x|$ gồm $(C_1) \cup (C'_2)$.

x	$-\infty$	m	$m+2$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: hàm số $y = g(x) = |x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m+2 \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2$.

Kết hợp với điều kiện $-2021 \leq m \leq 2021$, ta suy ra có 2020 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 27. Gọi $S = [a; +\infty)$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$y = |x^3 - 3x^2 + mx + 3m + 1|$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$. Khi đó a bằng

(A) -3.

(B) 19.

(C) 3.

(D) -2.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx + 3m + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + m$.

$$\text{TH1: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ f(-2) \geq 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ f(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + m \geq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ m \geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3x^2 + 6x, \forall x \in (-2; +\infty) \\ m \geq 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \geq \max_{x \in (-2; +\infty)} (-3x^2 + 6x) \\ m \geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 19.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ f(-2) \leq 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ f(-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + m \leq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ m - 19 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3x^2 + 6x, \forall x \in (-2; +\infty) \\ m \leq 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \leq \min_{(-2; +\infty)} (-3x^2 + 6x) \\ m \leq 19 \end{cases}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + 6x) = -\infty \Rightarrow$ hàm số $y = -3x^2 + 6x$ không có giá trị nhỏ nhất. Vì vậy TH2 không có giá trị m thỏa mãn.

Vậy tập các giá trị m cần tìm là $S = [19; +\infty)$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 28. Cho hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+3)x^2 + (2m+3)x - 1 \right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$. Chọn mệnh đề sai?

- (A) S có 4 phần tử. (B) Tổng các giá trị của m thuộc S bằng 6.
(C) Tích các giá trị của m thuộc S bằng 0. (D) Giá trị m lớn nhất thuộc S bằng 4.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+3)x^2 + (2m+3)x - 1$.

Ta có: $f'(x) = x^2 - (m+3)x + 2m+3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ f(4) \geq 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ f(4) \leq 0 \end{cases}$$

TH1: $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ f(4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (m+3)x + (2m+3) \geq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ 0m + \frac{25}{3} \geq 0 \end{cases}$

$$m \leq \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}, \forall x \in (4; +\infty) \quad m \leq \min_{[4; +\infty)} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} \Leftrightarrow m \leq \frac{7}{2}$$

TH2: $\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ f(4) \leq 0 \end{cases}$

Hệ vô nghiệm vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - (m+3)x + (2m+3)) = +\infty$.

Vậy $m \leq \frac{7}{2}$, m nguyên dương nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 29. Tính tổng S tất cả các giá trị nguyên khác 0 của tham số m trong đoạn $[-5; 5]$ để hàm số $y = \left| \frac{x + m^2 + 1}{x - m} \right|$ nghịch biến trên $(0; m^2)$.

- (A) $S = -16$. (B) $S = 16$. (C) $S = 15$. (D) $S = -15$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \frac{x + m^2 + 1}{x - m} \Rightarrow f'(x) = \frac{-m - m^2 - 1}{(x + m + 1)^2} < 0, \forall x \in (0; m^2)$.

Ta có

$$y = |f(x)| \Rightarrow y' = (|f(x)|)' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|}$$

Hàm số $y = \left| \frac{x + m^2 + 1}{x - m} \right|$ nghịch biến trên khoảng $(0; m^2) \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) < 0, \forall x \in (0; m^2)$
 $\Leftrightarrow f(x) > 0, \forall x \in (0; m^2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(m^2) > 0 \\ m \notin (0; m^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2 + m^2 + 1}{m^2 - m} > 0 \\ \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq m^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \Leftrightarrow m < 0 \Rightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\} \\ m \leq 1 \end{cases}$$

Vậy $S = -15$.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 30. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \left| \frac{x^2 + 2x + m^2 - 2m}{x + 1} \right|$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ là $[a; b]$. Tính ab .

(A) -10.

(B) -9.

(C) 2.

(D) -7.

Lời giải.

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^2 + 2x + m^2 - 2m}{x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x - m^2 + 2m + 2}{(x + 1)^2}.$$

Ta có

$$y = |f(x)| \Rightarrow y' = (|f(x)|)' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|}$$

$$\text{Hàm số } y = \left| \frac{x^2 + 2x + m^2 - 2m}{x + 1} \right| \text{ đồng biến trên khoảng } (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty) \text{ (vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - m^2 + 2m + 2 \geq 0 \\ f(2) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 2 \leq x^2 + 2x \\ \frac{m^2 - 2m + 8}{3} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty) \quad (*)$$

$$\text{Đặt } g(x) = x^2 + 2x$$

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	-1	2	$+\infty$
$g'(x)$	-		+
$g(x)$	-1	8	$+\infty$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 2 \leq 8 \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{11} \leq m \leq 1 + \sqrt{11}$$

Vậy $a = 1 - \sqrt{11}$, $b = 1 + \sqrt{11}$ nên $ab = -10$.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left| \frac{x^3 - 2mx + 2}{x - 1} \right|$ đồng biến trên $[2; +\infty)$?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^3 - 2mx + 2}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2m - 2}{(x - 1)^2}.$$

Ta có

$$y = |f(x)| \Rightarrow y' = (|f(x)|)' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|}$$

Hàm số $y = \left| \frac{x^3 - 2mx + 2}{x - 1} \right|$ đồng biến trên khoảng $[2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0, \forall x \in [2; +\infty) \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}, \forall x \in [2; +\infty) \text{ (vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 2m - 2 \geq 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}, \forall x \in [2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \\ 10 - 4m > 0 \end{cases}, \forall x \in [2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq g(x) \\ m < \frac{5}{2} \end{cases}, \forall x \in [2; +\infty) (*)$$

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	2	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	-1	

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < \frac{5}{2} \Rightarrow m \in \{1; 2\}.$$

Chọn phương án (C)

□

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \left| \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x + m \right|$, trong đó m là tham số thực. S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$. Số phần tử của tập S là

(A) 2018.

(B) 2017.

(C) 2019.

(D) 4039.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x + m$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Ta có, $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}} < 0, \forall x > -1$

(Do $x+1-\sqrt{x^2+2x+2} = (x+1)-\sqrt{(x+1)^2+1} < 0, \forall x > -1$)

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Suy ra, hàm số $f(x) = |g(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$

$\Leftrightarrow g(x) \leq 0, \forall x > -1$ (1)

Do hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1; +\infty)$.

Vậy (1) $\Leftrightarrow \max_{[-1; +\infty)} g(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(-1) = m+2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$

Vậy $S = \{-2019; -2018; \dots; -2\}$

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = |3\sqrt{x^2+1} + x + m|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 5.

(B) 6.

(C) 4.

(D) Vô số.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3\sqrt{x^2+1} + x + m \Rightarrow f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} + 1$.

Trên $(1; +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$.

Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$3\sqrt{2} + 1 + m$	$+\infty$

Nhận thấy: hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty) \Leftrightarrow 3\sqrt{2} + 1 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3\sqrt{2} - 1$.

Lại do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 10]$ để hàm số $y = |x + m\sqrt{x^2-2x+3}|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 11.

(B) 10.

(C) 12.

(D) 9.

Lời giải.

+TXD $D = \mathbb{R}$

+Xét hàm số $f(x) = x + m\sqrt{x^2-2x+3}$.

$f'(x) = 1 + m \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

$$\text{Hàm số đồng biến trên khoảng } (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases}.$$

Trường hợp 1

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow 1 + m \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3} + m(x-1) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty).$$

$$\text{Đặt } t = x - 1, t > 0 \Rightarrow \sqrt{t^2+2} + mt \geq 0 \forall t > 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-\sqrt{t^2+2}}{t}, \forall t > 0$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{-\sqrt{t^2+2}}{t}, f'(t) = \frac{2}{t^2\sqrt{t^2+2}} > 0 \forall t > 0.$$

Bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	$-\infty$	-1

$$\text{Từ Bảng biến thiên ta có } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 1 + m\sqrt{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \geq \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Trường hợp 2

$$f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow 1 + m \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3} + m(x-1) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty).$$

$$\text{Đặt } t = x - 1, t > 0 \Rightarrow \sqrt{t^2+2} + mt \leq 0(*), \forall t > 0$$

Mà $\lim_{t \rightarrow 0^+} (\sqrt{t^2+2} + mt) = 2 > 0$ nên với mỗi giá trị của m luôn có giá trị của t dương đủ nhỏ để Vế trái của (*) lớn hơn 0. Suy ra không có giá trị nào của m để TH2 thỏa mãn.

Vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Chọn phương án (A)

□

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \left| (2 + \sin x)^3 - (3m - 7) \sin x + 18 - 6m \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 2020 của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

(A) 2011.

(B) 2019.

(C) 3.

(D) 2008.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \left| (2 + \sin x)^3 - (3m - 7) \sin x + 18 - 6m \right| = \left| (2 + \sin x)^3 - (3m - 7)(\sin x + 2) + 4 \right|.$$

Đặt $t = t(x) = 2 + \sin x$ thì hàm số $t(x)$ đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $t \in (1; 3)$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = |g(t)|$ với $g(t) = t^3 - (3m - 7)t + 4$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

Trường hợp 1: Hàm số $g(t)$ đồng biến trong khoảng $(1; 3)$ và không âm trên $(1; 3)$ tức là:

$$\begin{cases} g'(t) \geq 0, \forall t \in (1; 3) \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 - (3m - 7) \geq 0, \forall t \in (1; 3) \\ 1 - 3m + 7 + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{10}{3} \\ m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{10}{3}.$$

Trường hợp 2: Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1; 3)$ và không dương trên $(1; 3)$ tức là:

$$\begin{cases} g'(t) \leq 0, \forall t \in (1; 3) \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 - (3m - 7) \leq 0, \forall t \in (1; 3) \\ 1 - 3m + 7 + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{34}{3} \\ m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{34}{3}.$$

Kết hợp với yêu cầu bài toán $m \in \{1; 2; 3\} \cup \{12; 13; 14; \dots; 2019\}$ ta có 2011 giá trị của m .

Chọn phương án **A** □

Câu 36. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên nhỏ hơn 20 của tham số m sao cho hàm số $y = \left| \frac{\tan x - 2}{\tan x - m} \right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

(A) 190.

(B) 189.

(C) 1.

(D) 3.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$. Tập giá trị của $\tan x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ là khoảng $(0; 1)$ nên hàm số $f(x)$

xác định khi $m \notin (0; 1)$ hay $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} (*)$.

Ta có $f'(x) = \frac{(-m + 2)(1 + \tan^2 x)}{(\tan x - m)^2}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2 > 0 \\ \frac{2}{m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > 0 \end{cases}$.

Kết hợp $(*)$, ta được $1 \leq m < 2$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \\ f(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2 < 0 \\ \frac{2}{m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$

Trường hợp này không tìm được m .

Vì chỉ có $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán nên tổng là 1.

Chọn phương án **C** □

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-7; 7]$ để hàm số $y = \cos x \cdot |\cos^2 x - 3m^2|$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

(A) 1.

(B) 15.

(C) 8.

(D) 14.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x$. Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Lại có $t = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên yêu cầu bài toán trở thành tìm m nguyên thuộc $[-5; 5]$ để hàm số $y = t|t^2 - 3m^2| = |t^3 - 3m^2t|$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Xét $f(t) = t^3 - 3m^2t$, $t \in (0; 1)$ có $f'(t) = 3t^2 - 3m^2$.

Trường hợp 1: Nếu $m = 0$ thì hàm số trở thành $y = |t^3|$ luôn đồng biến trên $(0; 1)$.

Do đó $m = 0$ thỏa mãn bài toán. (1)

Trường hợp 2: $m \neq 0 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = m \\ t = -m \end{cases}$ và $f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -m\sqrt{3} \\ t = 0 \\ t = m\sqrt{3} \end{cases}$

*) Với $m > 0$, ta có bảng biến thiên sau:

t	0	m	$m\sqrt{3}$	
$f'(t)$		-	0	+
$ f(t) $	0	$2m^3$	0	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = |f(t)|$ đồng biến trên $(0; m)$.

Do đó khoảng $(0; m)$ chứa khoảng $(0; 1)$, suy ra $m \geq 1$. (2)

*) Với $m < 0$, ta có bảng biến thiên sau:

t	0	$-m$	$-m\sqrt{3}$	
$f'(t)$		-	0	+
$ f(t) $	0	$-2m^3$	0	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = |f(t)|$ đồng biến trên $(0; -m)$.

Do đó khoảng $(0; -m)$ chứa khoảng $(0; 1)$, suy ra $m \leq -1$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra có 15 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |8^{\tan x} + 3 \cdot 2^{\tan x} - m + 2|$ đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- (A)** $m < \frac{29}{8}$.
(B) $m > \frac{29}{8}$.
(C) $m \leq \frac{29}{8}$.
(D) $m \geq \frac{29}{8}$.

Lời giải.

Đặt $2^{\tan x} = t$. Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $\tan x \geq -1$ nên $t \geq \frac{1}{2}$.

Khi đó ta có hàm số: $y = |t^3 + 3t - m + 2|$ (1).

Để hàm số ban đầu đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số (1) phải đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t - m + 2$.

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t$.

Khi đó $y = |f(t)| = \sqrt{f^2(t)}$ nên $y' = \frac{f'(t) \cdot f(t)}{\sqrt{f^2(t)}} = \frac{f'(t) \cdot f(t)}{|f(t)|}$.

Hàm số đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$\Leftrightarrow f(t) \geq 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow t^3 + 3t - m + 2 \geq 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$\Leftrightarrow m \leq t^3 + 3t + 2, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) (*).$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số: $g(t) = t^3 + 3t + 2$ trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ như sau:

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(t)$		+
$g(x)$	$\frac{29}{8}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: $m \leq \frac{29}{8}$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 39. Giá trị lớn nhất của m để hàm số $y = |e^x + e^{2x} - m|$ đồng biến trên $(1; 2)$ là

(A) e .

(B) $e + e^2$.

(C) e^2 .

(D) 2 .

Lời giải.

$$\text{Đặt } f(x) = e^x + e^{2x} - m \Rightarrow y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{f'(t) \cdot f(t)}{\sqrt{f^2(t)}} = \frac{f'(t) \cdot f(t)}{|f(t)|}$$

Hàm số đồng biến trên $(1; 2) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; 2)$

$$\text{Vì } f'(x) = e^x + 2e^{2x} > 0 \forall x \in (1; 2)$$

$$\Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in (1; 2)$$

$$\Leftrightarrow m \leq e^x + e^{2x}, \forall x \in (1; 2) \quad (1)$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = e^x + e^{2x}$ trên khoảng $(1; 2)$ như sau:

x	1	2
$g'(x)$		+
$g(x)$	$e + e^2$	$e^2 + e^4$

Từ bảng biến thiên suy ra $(1) \Leftrightarrow m \leq e + e^2$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 40 (Mức độ 4). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương $m \in (-2019; 2020)$ để hàm số $y = |e^{-x^2} - e^{x^2} - m|$ nghịch biến trên khoảng $(1; e)$?

(A) 401.

(B) 0.

(C) 2019.

(D) 2016.

Lời giải.

$$\text{Đặt } f(x) = e^{-x^2} + e^{x^2} - m \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2} + 2xe^{x^2}$$

$$\text{Ta có } y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(t) \cdot f(t)}{\sqrt{f^2(t)}} = \frac{f'(t) \cdot f(t)}{|f(t)|}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (1; e)$ (*)

Ta có: $-2xe^{-x^2} + 2xe^{x^2} = \frac{2x(e^{2x^2} - 1)}{e^{x^2}} > 0, \forall x \in (1; e)$

Khi đó, (*) $\Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in (1; e)$

$\Leftrightarrow e^{-x^2} + e^{x^2} - m \leq 0, \forall x \in (1; e)$

$\Leftrightarrow e^{-x^2} + e^{x^2} \leq m, \forall x \in (1; e)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = e^{-x^2} + e^{x^2}$ trên $(1; e)$ như sau:

x	1	e
$g'(x)$		+
$g(x)$	$\frac{1}{e} + e$	$e^{-e^2} + e^{e^2}$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \geq e^{-e^2} + e^{e^2} \approx 1618,18$.

Vậy có 401 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 41. Cho hàm số $y = \left| e^{\frac{2x+2}{x-1}} + 3e^{\frac{x+1}{x-1}} - 2m + 5 \right|$ (1). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$?

(A) 234.

(B) Vô số.

(C) 40.

(D) Không tồn tại.

Lời giải.

Đặt $t = e^{\frac{x+1}{x-1}}$, ta có $t' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \forall x \in (2; 3) \Rightarrow t \in (e^2; e^3)$, đồng thời x và t sẽ ngược chiều biến thiên.

Khi đó hàm số trở thành $y = |t^2 + 3t - 2m + 5| = \sqrt{(t^2 + 3t - 2m + 5)^2}$ (2)

Ta có: $y' = \frac{2(t^2 + 3t - 2m + 5) \cdot (2t + 3)}{2\sqrt{(t^2 + 3t - 2m + 5)^2}} = \frac{(t^2 + 3t - 2m + 5) \cdot (2t + 3)}{|t^2 + 3t - 2m + 5|}$.

Hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$ tương đương với hàm số (2) đồng biến trên khoảng $(e^2; e^3)$

$\Leftrightarrow \frac{(t^2 + 3t - 2m + 5) \cdot (2t + 3)}{|t^2 + 3t - 2m + 5|} \geq 0 \forall t \in (e^2; e^3) \Leftrightarrow t^2 + 3t - 2m + 5 \geq 0 \forall t \in (e^2; e^3)$

$\Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + 3t + 5}{2} = g(t) \forall t \in (e^2; e^3)$.

Có $g'(t) = \frac{2t + 3}{2} > 0 \forall t \in (e^2; e^3) \Rightarrow \frac{e^4 + 3e^2 + 5}{2} < g(t) < \frac{e^6 + 3e^4 + 5}{2} \Rightarrow m \leq \frac{e^4 + 3e^2 + 5}{2}$.

Với điều kiện m là số nguyên dương ta tìm được 40 giá trị của m .

Chọn phương án **(C)**

□

Câu 42. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m trong đoạn $[-9; 9]$ để hàm số $y = |\ln(2x^3 - 3mx + 32)|$ nghịch biến trên nửa khoảng $(2; 4]$.

(A) 0.

(B) 19.

(C) 10.

(D) 7.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \ln(2x^3 - 3mx + 32)$ trên $(2; 4]$.

Điều kiện xác định: $2x^3 - 3mx + 32 > 0, \forall x \in (2; 4] \Leftrightarrow 3m < 2x^2 + \frac{32}{x}, \forall x \in (2; 4]$.

Mặt khác $2x^2 + \frac{32}{x} = 2x^2 + \frac{16}{x} + \frac{16}{x} \geq 3\sqrt{2x^2 \cdot \frac{16}{x} \cdot \frac{16}{x}} = 8$. Dấu “=” xảy ra khi $2x^2 = \frac{16}{x} \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy $2x^2 + \frac{32}{x} > 8, \forall x \in (2; 4]$. Suy ra $3m \leq 8 \Leftrightarrow m \leq \frac{8}{3}$.

Ta có $y' = \frac{f'(x)f(x)}{|f(x)|}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(2; 4]$ khi và chỉ khi

$$y' \leq 0, \forall x \in (2; 4] \Leftrightarrow \frac{f'(x)f(x)}{|f(x)|} \leq 0, \forall x \in (2; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in (2; 4] \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in (2; 4] \\ f(x) \leq 0, \forall x \in (2; 4] \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in (2; 4] \end{cases}.$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in (2; 4] \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in (2; 4] \end{cases}$.

Ta có $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(2x^3 - 3mx + 32) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3mx + 32 \geq 1 \Leftrightarrow 2x^3 - 3mx + 31 \geq 0$
 $\Leftrightarrow 3m \leq 2x^2 + \frac{31}{x}$. Xét $g(x) = 2x^2 + \frac{31}{x} \Rightarrow g'(x) = 4x - \frac{31}{x^2} = \frac{4x^3 - 31}{x^2} > 0, \forall x \in (2; 4]$.

Vậy ta có hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; 4]$.

Suy ra, $3m \leq 2x^2 + \frac{31}{x}, \forall x \in (2; 4] \Leftrightarrow 3m \leq g(2) = \frac{47}{2} \Leftrightarrow m \leq \frac{47}{6}$.

Ta có $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 2x^2$.

Để $f'(x) \leq 0, \forall x \in (2; 4] \Leftrightarrow m \geq 2x^2, \forall x \in (2; 4] \Leftrightarrow m \geq 32$.

Vậy trong trường hợp 1, không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\begin{cases} f(x) \leq 0, \forall x \in (2; 4] \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in (2; 4] \end{cases}$. Từ trường hợp trên ta có

$f(x) \leq 0, \forall x \in (2; 4] \Leftrightarrow 3m \geq 2x^2 + \frac{31}{x}, \forall x \in (2; 4] \Leftrightarrow 3m \geq g(4) = \frac{159}{4} \Leftrightarrow m \geq \frac{53}{4}$.

$f'(x) \geq 0, \forall x \in (2; 4] \Leftrightarrow m \leq 2x^2, \forall x \in (2; 4] \Leftrightarrow m \leq 8$.

Vậy trong trường hợp 2, không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 43. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m trong đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $y = |\ln(2x^2 - 4mx - 2m) - 1|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

(A) 13.

(B) 7.

(C) 0.

(D) 25.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \ln(2x^2 - 4mx - 2m) - 1$ trên $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. Suy ra $f'(x) = \frac{2x - 2m}{x^2 - 2mx - m}$.

Điều kiện xác định: $2x^2 - 4mx - 2m > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow m < \frac{x^2}{2x + 1}, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Xét $g(x) = \frac{x^2}{2x + 1}$ trên $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. Ta có $g'(x) = \frac{2x^2 + 2x}{(2x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ x = -1 \notin \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases}$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\frac{1}{2}$	0	1
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	0	$\frac{1}{3}$

Từ bảng biến thiên ta có $m < \frac{x^2}{2x+1}, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow m < 0$.

Ta có $y' = \frac{f'(x)f(x)}{|f(x)|}$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \frac{f'(x)f(x)}{|f(x)|} \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ f(x) \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases}.$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases}$.

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \ln(2x^2 - 4mx - 2m) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(2x^2 - 4mx - 2m) \geq 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4mx - 2m - e \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2m \leq \frac{2x^2 - e}{2x + 1}. \text{ Xét } h(x) = \frac{2x^2 - e}{2x + 1} \\ &\Rightarrow h'(x) = \frac{4x^2 + 4x + 2e}{(2x + 1)^2} = \frac{(2x + 1)^2 + 2e - 1}{(2x + 1)^2} > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \end{aligned}$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$

x	$-\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{2-e}{3}$

Từ bảng biến thiên ta thấy không có giá trị nào của tham số m để $2m \leq \frac{2x^2 - e}{2x + 1}, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Vậy trong trường hợp 1, không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\begin{cases} f(x) \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases}$. Từ trường hợp trên ta có

$$f(x) \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow 2m \geq \frac{2x^2 - e}{2x + 1}, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow 2m \geq \frac{2 - e}{3} \Leftrightarrow m \geq \frac{2 - e}{6}.$$

$$f'(x) \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \frac{2x - 2m}{x^2 - 2mx - m} \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow 2x - 2m \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$$

$$\Leftrightarrow m \geq x, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Kết hợp điều kiện $m < 0$, trong trường hợp 2, không có giá trị của m thỏa mãn.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **C**

□

Câu 44. Tổng các giá trị m nguyên thuộc $[-5; 5]$ sao cho hàm số $y = |\ln(x^3 - 3x + m) + 1|$ nghịch biến trên $[0; 1]$ bằng

(A) 11.

(B) 13.

(C) 10.

(D) 12.

Lời giải.

Xét $f(x) = \ln(x^3 - 3x + m) + 1$ trên $[0; 1]$. Ta có $f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x + m}$.

Điều kiện xác định: $x^3 - 3x + m > 0, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow m > -x^3 + 3x, \forall x \in [0; 1]$.

Xét $g(x) = -x^3 + 3x$ trên $[0; 1]$. Ta có $g'(x) = -3x^2 + 3 \geq 0, \forall x \in [0; 1]$.

Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên $[0; 1]$. Do đó $m > -x^3 + 3x, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow m > 2$.

Ta có $y' = \frac{f'(x)f(x)}{|f(x)|}$. Hàm số nghịch biến trên $[0; 1]$ khi và chỉ khi

$y' \leq 0, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow \ln(x^3 - 3x + m) + 1 \geq 0, \forall x \in [0; 1]$

$\Leftrightarrow m - \frac{1}{e} \geq -x^3 + 3x, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{e} + 2$.

Do m nguyên thuộc $[-5; 5] \Rightarrow m \in \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng các giá trị của m bằng 12.

Chọn phương án **D**

□

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = |\log_3(x^3 + x^2 - mx + 1)|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

(A) 13.

(B) 12.

(C) 11.

(D) 10.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \log_3(x^3 + x^2 - mx + 1)$ nên $f'(x) = \frac{3x^2 + 2x - m}{(x^3 + x^2 - mx + 1) \ln 3}$.

Hàm số đồng biến trên $y = |f(x)|$ đồng biến trên $[1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \\ f(x) \leq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty).$

Trường hợp 1:

$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^3 + x^2 - mx + 1) \geq 0 \\ x^3 + x^2 - mx + 1 > 0 \\ 3x^2 + 2x - m \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty).$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 - mx + 1 \geq 1 \\ 3x^2 + 2x \geq m \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x^2 + x \\ m \leq 3x^2 + 2x \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty).$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[1; +\infty)} (x^2 + x) \\ m \leq \min_{[1; +\infty)} (3x^2 + 2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2.$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^3 + x^2 - mx + 1) \leq 0 \\ x^3 + x^2 - mx + 1 > 0 \\ 3x^2 + 2x - m \leq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 - mx + 1 \leq 1 \\ x^3 + x^2 - mx + 1 > 0, \forall x \in [1; +\infty) \\ 3x^2 + 2x \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \leq m \\ x^2 + x + \frac{1}{x} > m, \forall x \in [1; +\infty) \\ 3x^2 + 2x \leq m \end{cases}.$$

Ta có: $m \geq x^2 + x, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{[1; +\infty)} (x^2 + x), \quad (*)$.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = +\infty$ nên không tồn tại m thỏa mãn (*). Do đó trường hợp 2 không tồn tại giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Suy ra $m \leq 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Mặt khác $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; 10] \end{cases}$ nên có 13 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **A** □

Câu 46. Tổng các giá trị nguyên của m trên $[-10; 10]$ để hàm số $y = g(x) = |\ln(x^2 + x + m) + x|$ đồng biến trên $(-1; 3)$ là

(A) 50.

(B) 100.

(C) 52.

(D) 105.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \ln(x^2 + x + m) + x$ trên khoảng $(-1; 3)$.

Điều kiện xác định là: $x^2 + x + m > 0$ với mọi $x \in (-1; 3)$.

Khi đó $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+m} + 1 = \frac{x^2+3x+m+1}{x^2+x+m}$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + x + m > 0 \\ x^2 + 3x + m + 1 \geq 0 \\ \ln(x^2 + x + m) + x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x + m > 0 \\ x^2 + 3x + m + 1 \leq 0 \\ \ln(x^2 + x + m) + x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{với mọi } x \in (-1; 3).$ (1) (2)

Xét hệ bất phương trình (1): $\begin{cases} x^2 + x + m > 0 \\ x^2 + 3x + m + 1 \geq 0 \\ \ln(x^2 + x + m) + x \geq 0 \end{cases}$ đúng với mọi $x \in (-1; 3)$.

Ta có $x^2 + x + m > 0, \forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow m > -x^2 - x, \forall x \in (-1; 3)$.

Khảo sát tính biến thiên của hàm số $y = -x^2 - x$ trên khoảng $(-1; 3)$ ta suy ra

$$m > \max_{(-1; 3)} (-x^2 - x) \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$$

Lại có $x^2 + 3x + m + 1 \geq 0, \forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow m \geq -x^2 - 3x - 1, \forall x \in (-1; 3)$.

Khảo sát tính biến thiên của hàm số $y = -x^2 - 3x - 1$ trên khoảng $(-1; 3)$ ta suy ra:

$$m \geq \max_{(-1; 3)} (-x^2 - 3x - 1) \Leftrightarrow m \geq 1$$

Ngoài ra $\ln(x^2 + x + m) + x \geq 0, \forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow m \geq -x^2 - x + e^{-x}, \forall x \in (-1; 3)$.

Đặt $k(x) = -x^2 - x + e^{-x}$, $k'(x) = -e^{-x} - 2x - 1 \leq 0$, $\forall x \in (-1; 3)$.

Do đó $m \geq -x^2 - x + e^{-x}$, $\forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow m \geq e$.

Vậy (1) tương đương $m \geq e$.

Với hệ bất phương trình (2) ta cũng làm tương tự như trên thì được

$$\begin{cases} x^2 + x + m > 0 \\ x^2 + 3x + m + 1 \leq 0 \\ \ln(x^2 + x + m) + x < 0 \end{cases}, \forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{4} \\ m \leq -19 \\ \ln(x^2 + x + m) + x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy hàm số $y = g(x) = |\ln(x^2 + x + m) + x|$ đồng biến trên $(-1; 3)$ khi và chỉ khi $m \geq e$, mà m là số nguyên thuộc $[-10; 10]$ nên $m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Do đó tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn là 52.

Cực trị của hàm chứa GTTĐ

Chọn phương án **C**

□

Câu 47. Biết $m \in (a; b)$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ thì hàm số $y = |x^5 - 5x^3 + 5x^2 + 10m - 1|$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng $a + b$?

(A) $\frac{14}{5}$.

(B) $-\frac{27}{10}$.

(C) $\frac{1}{10}$.

(D) $-\frac{13}{5}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^5 - 5x^3 + 5x^2 + 10m - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 10x = 5x(x+2)(x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$10m + 27$		$10m - 1$		$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên trên của hàm số $f(x)$ ta suy ra hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi: $10m - 1 < 0 < 10m + 27 \Leftrightarrow \frac{-27}{10} < m < \frac{1}{10}$. Suy ra $a + b = \frac{-27}{10} + \frac{1}{10} = \frac{-13}{5}$.

Chọn phương án **D**

□

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m ($|m| < 5$) để hàm số $y = |x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2|$ có ba điểm cực tiểu?

(A) 5.

(B) 4.

(C) 6.

(D) 3.

Lời giải.

Xét hàm: $y = x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $y' = 3x^2 - 2(m-2)x - m$.

Nhận xét:

-Mỗi giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Ox sẽ có một điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$

-Nếu hàm số $y = f(x)$ có $y_{cd} \cdot y_{ct} \geq 0$ thì hàm số $y = |f(x)|$ chỉ có hai cực tiểu

-Nếu hàm số $y = f(x)$ không có cực trị thì hàm số $y = |f(x)|$ chỉ có một cực tiểu.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{cd} \cdot y_{ct} < 0$

$\Leftrightarrow x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (x-m)(x^2+2x+m) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = m \\ \begin{cases} 1-m > 0 \\ m^2+3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq 0; -3 \end{cases} \end{cases}$$

Theo đề ra ta có: $m \in \mathbb{Z}, |m| < 5 \Leftrightarrow -5 < m < 5$

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2019; 2019)$ để hàm số $y = |x^5 - 5x^3 - 20x + m|$ có 5 điểm cực trị?

(A) 95.

(B) 48.

(C) 47.

(D) 94.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + m$.

Ta có $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 20$. cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 15x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$48+m$	$-48+m$	$+\infty$	

Để hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ phải cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $y = f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $y(x_1) \cdot y(x_2) < 0$.

Ta có $y(x_1) \cdot y(x_2) = (m+48)(m-48) < 0 \Leftrightarrow -48 < m < 48$.

Vì m là số nguyên nên $m \in \{-47; -46; \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; 46; 47\}$. Vậy có 95 số.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 50. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị là

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{m}{2}$	$\searrow \frac{m}{2} - 32$	$\nearrow +\infty$	

Để thỏa yêu cầu thì trục Ox phải cắt ngang đồ thị tại 3 điểm phân biệt, tức là:

$$\begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \\ \frac{m}{2} - 32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 64 \text{ thì } f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} = 0 \text{ có ba nghiệm } x_1; x_2; x_3 \text{ với}$$

$x_1 < -1 < x_2 < 3 < x_3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	3	x_3	$+\infty$						
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	$+$					
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{m}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$32 - \frac{m}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Như vậy, các giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị là $m \in \{1; 2; 3; \dots; 63\}$.

Tổng các giá trị nguyên này là:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 63 = \frac{63(1+63)}{2} = 2016.$$

Chọn phương án (A)

□

Câu 51. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

(A) 44.

(B) 27.

(C) 26.

(D) 16.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$.

Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1. \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$m-5$	m	$m-32$	$+\infty$

$$\text{Xét hàm số } y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$$

Nên từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực

trị khi và chỉ khi $\begin{cases} m - 32 < 0 \\ m - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq m < 32.$

Do đó có 27 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

Chọn phương án **B**

B GIÁ TRỊ LỚN NHẤT-GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

Câu 52. Gọi A , a lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để $Aa = 12$. Tổng các phần tử của S bằng

- Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ -2. Ⓓ 1.

Lời giải.

Đặt: $u(x) = x^3 - 3x + m \Rightarrow u'(x) = 3x^2 - 3$

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2] \end{cases}$$

Ta có: $u(0) = m$; $u(1) = m - 2$; $u(2) = m + 2$

$$\text{Sup ra: } \max_{[0;2]} u(x) = m + 2; \min_{[0;2]} u(x) = m - 2 \Rightarrow \max_{[0;2]} y = \max \{|m + 2|; |m - 2|\}.$$

$$\text{TH1: } (m-2) \cdot (m+2) < 0 \Rightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow a = \min_{[0;2]} y = 0(\text{loai})$$

(vì ko thỏa mãn giả thiết $Aa = 12$)

$$\text{TH2: } m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2 \Rightarrow \min_{[0; 2]} y = m - 2; A = \max_{[0; 2]} y = m + 2.$$

Từ giả thiết: $Aa = 12 \Rightarrow (m + 2)(m - 2) = 12 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \text{ (thỏa)} \\ m = -4 \text{ (không thỏa)} \end{cases}$

TH3: $m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2 \Rightarrow \underset{[0; 2]}{Min} y = -(m + 2) ; \underset{[0; 2]}{Max} y = -(m - 2).$

$$\text{Từ giả thiết: } Aa = 12 \Rightarrow (m+2)(m-2) = 12 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \text{ (không thỏa)} \\ m = -4 \text{ (thỏa)} \end{cases}$$

Kết hợp các trường hợp suy ra: $S = \{-4; 4\}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng: $(-4) + 4 = 0$.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 53. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[2; 4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

(A) 4.

(B) 36.

(C) 140.

(D) 0.

Lời giải.

$$\text{Xét hàm số } g(x) = x^3 - 3x^2 + m \text{ có } g'(x) = 3x^2 - 6x. \text{ Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ trên $[2; 4]$ là:

$$\max_{x \in [-2; 4]} y = \max \{y(0); y(-2); y(2); y(4)\} = \max \{|m|; |m-4|; |m-20|; |m+16|\}.$$

$$\text{Trường hợp 1: Giả sử } \max y = |m| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 50 \\ m = -50 \end{cases}.$$

Với $m = 50$ thì $|m+16| = 66 > 50$ (loại).

Với $m = -50$ thì $|m-20| = 70 > 50$ (loại).

$$\text{Trường hợp 2: Giả sử } \max y = |m-4| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 54 \\ m = -46 \end{cases}.$$

Với $m = 54 \Rightarrow |m| = 54 > 50$ (loại).

Với $m = -46$ thì $|m-20| = 66 > 50$ (loại).

$$\text{Trường hợp 3: Giả sử } \max y = |m-20| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 70 \\ m = -30 \end{cases}$$

Với $m = 70$ thì $|m+16| = 86 > 50$ (loại).

Với $m = -30$ thì $|m+16| = 14 < 50$, $|m| = 30 < 50$; $|m-4| = 34 < 50$ (thỏa mãn).

$$\text{Trường hợp 4: Giả sử } \max y = |m+16| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 34 \\ m = -66 \end{cases}.$$

Với $m = 34$ thì $|m| = 34 < 50$, $|m-4| = 30 < 50$, $|m-20| = 14 < 50$ (thỏa mãn).

Với $m = -66$ thì $|m| = 66 > 50$ (loại).

Vậy $S \in \{-30; 34\}$. Do đó tổng các phần tử của S là: $-30 + 34 = 4$.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 54. Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 2(m+1)x - 2m - 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0; 4]} |f(x)| + \min_{[0; 4]} |f(x)| = 8$. Số phần tử của S là

(A) 0.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 1.

Lời giải.

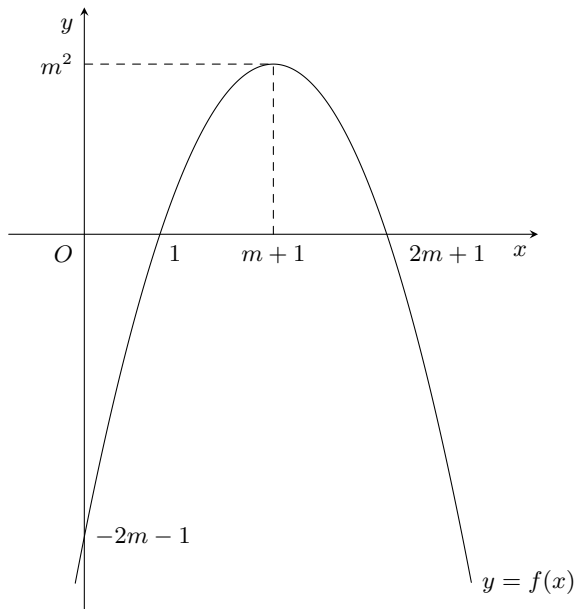
$$\text{Có } f'(x) = -2x + 2(m+1); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = m+1.$$

Ta có $f(0) = -2m - 1$; $f(4) = 6m - 9$; $f(m+1) = m^2$. Giao điểm của đồ thị $f(x)$ với trục hoành là $(1; 0)$ và $(2m+1; 0)$.

Với $m \leq 0$ thì $f(4) = 6m - 9 \leq -9 \Rightarrow |f(4)| \geq 9 \Rightarrow \max_{[0;4]} |f(x)| \geq 9$.

Do đó $m \leq 0$ không thỏa mãn.

Với $m > 0$, đồ thị hàm số $f(x)$ có dạng:



Có $\min_{[0;4]} |f(x)| = 0$; $\max_{[0;4]} |f(x)| = \max \{m^2; 2m+1; |6m-9|\}$

Vậy $\max_{[0;4]} |f(x)| + \min_{[0;4]} |f(x)| = 8 \Leftrightarrow \max_{[0;4]} |f(x)| = 8$, xét các trường hợp sau:

TH1: $m^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases}$, thử lại thấy không thỏa mãn.

TH2: $2m+1 = 8 \Leftrightarrow m = \frac{7}{2}$, thử lại thấy không thỏa mãn

TH3: $|6m-9| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{17}{6} \\ m = \frac{1}{6} \end{cases}$, thử lại thấy $m = \frac{1}{6}$ thỏa mãn. Vậy S có 1 phần tử.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 55. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho

$\max_{[1;3]} |f(x)| = 2 \min_{[1;3]} |f(x)|$. Số phần tử của S là

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên của $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$ trên $[1; 3]$

x	1	2	3
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$m-2$	$m-4$	m

TH1: $m(m-4) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$, khi đó $\min_{[1;3]} |f(x)| = 0 \Rightarrow \max_{[1;3]} |f(x)| = 0$ (vô lí)

TH2: $m < 0$, ta có: $\min_{[1;3]} |f(x)| = |m| = -m$, $\max_{[1;3]} |f(x)| = |m-4| = 4-m$

Khi đó ta có $|m-4| = 2|m| \Leftrightarrow 4-m = -2m \Leftrightarrow m = -4$. Vậy $m = -4$

TH3: $m-4 > 0 \Leftrightarrow m > 4$, ta có: $\min_{[1;3]} |f(x)| = |m-4| = m-4$, $\max_{[1;3]} |f(x)| = |m| = m$.

Khi đó ta có $|m| = 2|m-4| \Leftrightarrow m = 2(m-4) \Leftrightarrow m = 8$. Vậy $m = 8$

Chọn phương án **A**

□

Câu 56. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min_{[0;1]} |f(x)| + \max_{[0;1]} |f(x)| = 2$. Số phần tử của S là

A 6.

B 2.

C 1.

D 4.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{1-m}{(x-1)^2}$.

Trường hợp 1: $1-m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Có $f(x) = \frac{x+1}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \min_{[0;1]} |f(x)| = \max_{[0;1]} |f(x)| = 1 \Rightarrow \min_{[0;1]} |f(x)| + \max_{[0;1]} |f(x)| = 2$.

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $1-m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in [0;1]$ hoặc $f'(x) < 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên $(0;1)$. Do đó $\min_{[0;1]} f(x) \in \{f(0); f(1)\}; \max_{[0;1]} f(x) \in \{f(0); f(1)\}$.

Ta có $f(0) = m; f(1) = \frac{m+1}{2}$.

a) $f(0).f(1) \geq 0 \Rightarrow m \cdot \frac{m+1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -1 \end{cases}$

Khi đó $\max_{[0;1]} |f(x)| = \max_{[0;1]} \left\{ \left| \max_{[0;1]} f(x) \right|; \left| \min_{[0;1]} f(x) \right| \right\} =$

$= \max_{[0;1]} \left\{ |m|; \left| \frac{m+1}{2} \right| \right\}$ và $\min_{[0;1]} |f(x)| = \min_{[0;1]} \left\{ \left| \max_{[0;1]} f(x) \right|; \left| \min_{[0;1]} f(x) \right| \right\} = \min_{[0;1]} \left\{ |m|; \left| \frac{m+1}{2} \right| \right\}$

$\Rightarrow \max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = |m| + \left| \frac{m+1}{2} \right| = 2$

Với $m \geq 0 \Rightarrow m + \frac{m+1}{2} = 2 \Rightarrow m = 1$ (ld).

Với $m \leq -1 \Rightarrow -m - \frac{m+1}{2} = 2 \Rightarrow m = -\frac{5}{3}$ (TM).

b) $f(0).f(1) < 0 \Leftrightarrow m \cdot \frac{m+1}{2} < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm

$$\Rightarrow \min_{[0;1]} |f(x)| = 0 \text{ và } \max_{[0;1]} |f(x)| = \max_{[0;1]} \left\{ |m|; \left| \frac{m+1}{2} \right| \right\}$$

$$\text{Theo giả thiết } \min_{[0;1]} |f(x)| + \max_{[0;1]} |f(x)| = 2 \Rightarrow \begin{cases} |m| = 2 \\ \left| \frac{m+1}{2} \right| = 2 \end{cases} (*)$$

$$\text{Vì } -1 < m < 0 \Rightarrow |m| < 1; \left| \frac{m+1}{2} \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow (*) \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Vậy } m \in \left\{ -\frac{5}{3}; 1 \right\}.$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 57. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(2 - \cos x) + m|$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

(A) 4.

(B) -16.

(C) -32.

(D) -12.

Lời giải.

Đặt $t = 2 - \cos x$ ta có $t \in [1; 3]$. Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = |t^3 - 3t + m|$ với $\forall t \in [1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2.

Xét $u(t) = t^3 - 3t + m$ trên đoạn $[1; 3]$. Ta có hàm số $u(t)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

$$u'(t) = 3t^2 - 3.$$

$$u'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \notin (1; 3) \\ t = 1 \notin (1; 3) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \max_{[1;3]} u(t) = \max \{u(1); u(3)\} = \max \{m + 18; m - 2\} = m + 18 \\ \min_{[1;3]} u(t) = \min \{u(1); u(3)\} = \min \{m + 18; m - 2\} = m - 2 \end{cases}.$$

Yêu cầu bài tập: $\min_{[1;3]} y = 2$.

Trường hợp 1: $m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$

$$\Rightarrow \min_{[1;3]} y = |m - 2| = m - 2; \min_{[1;3]} y = 2 \Leftrightarrow m - 2 = 2 \Leftrightarrow m = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 2: $m + 18 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -18$

$$\Rightarrow \min_{[1;3]} y = |m + 18| = -(m + 18); \min_{[1;3]} y = 2 \Leftrightarrow -(m + 18) = 2 \Leftrightarrow m = -20 \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 3: $(m + 18)(m - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -18 \leq m \leq 2 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = 0 \neq 2 \text{ (loại)}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -16. Chọn phương án

Chọn phương án **(B)** □

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |-x^4 + 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 2018?

(A) 2.

(B) 1.

(C) 0.

(D) 6.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = |-x^4 + 8x^2 + m| = |x^4 - 8x^2 - m| = |(x^2 - 4)^2 - 16 - m|.$$

Đặt $t = (x^2 - 4)^2$, vì $x \in [-1; 3]$ nên miền giá trị của t là $[0; 25]$.

Khi đó $y = f(t) = |t - 16 - m|$.

Ta có $\max_{x \in [-1; 3]} y(x) = \max_{t \in [0; 25]} y(t) = \max \{|16 + m|; |9 - m|\}$.

Trường hợp 1 : $\begin{cases} |16 + m| > |9 - m| \\ |16 + m| = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2002.$

Trường hợp 2 : $\begin{cases} |16 + m| < |9 - m| \\ |9 - m| = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2009.$

Trường hợp 3 : $\begin{cases} |16 + m| = |9 - m| \\ |9 - m| = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$

Vậy có 2 giá trị m cần tìm

Chọn phương án **(A)** □

Câu 59. Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên $[0; \ln 4]$ bằng 6.

(A) 3.

(B) 4.

(C) 1.

(D) 2.

Lời giải.

Đặt $t = e^x$, với $x \in [0; \ln 4] \Rightarrow t \in [1; 4]$. Khi đó $f(x) = |t^2 - 4t + m| = |g(t)|$.

Có $g'(t) = 2t - 4 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Ta có bảng biến thiên

x	1	2	4
$g'(t)$	—	0	+
$g(t)$	$m - 3$	$m - 4$	m

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{[0; 4]} |g(t)| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m - 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 10 \end{cases}.$

Chọn phương án **(D)** □

Câu 60. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + a$. Gọi $M = \max_{x \in [-3; 2]} f(|x|)$, $m = \min_{x \in [-3; 2]} f(|x|)$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a \in [-35; 35]$ sao cho $M \leq 3m$.

(A) 23.

(B) 24.

(C) 25.

(D) 26.

Lời giải.

Dễ thấy rằng

$$M = \max_{x \in [-3; 2]} f(|x|) = \max_{x \in [0; 3]} f(|x|) = \max_{x \in [0; 3]} f(x), m = \min_{x \in [-3; 2]} f(|x|) = \min_{x \in [0; 3]} f(|x|) = \min_{x \in [0; 3]} f(x).$$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 3] \\ x = 1 \in [0; 3] \end{cases}$

Mà $f(0) = a$, $f(1) = a - 2$, $f(3) = a + 18$.

Vậy $M = a + 18$, $m = a - 2$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $a + 18 \leq 3(a - 2) \Leftrightarrow a \geq 12$. Kết hợp với điều kiện $a \in [-35; 35]$ suy ra $a \in \{12; 13; 14; \dots; 35\}$, do đó có 24 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 61. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

(A) 210.

(B) -195.

(C) 105.

(D) 300.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20$ trên đoạn $[0; 2]$.

$$f'(x) = x^3 - 19x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \\ x = 3 \notin [0; 2] \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	2
$g'(t)$		+
$g(t)$	$f(0)$	$f(2)$

với $f(0) = m - 20$; $f(2) = m + 6$.

Xét hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$.

+Trường hợp 1: $m - 20 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 20$. Ta có

$\max_{[0;2]} y = m + 6 \leq 20 \Leftrightarrow m \leq 14$. Kết hợp $m \geq 20$ suy ra không có giá trị m .

+Trường hợp 2: $m + 6 \geq 20 - m \Leftrightarrow m \geq 7$. Ta có:

$\max_{[0;2]} y = m + 6 \leq 20 \Leftrightarrow m \leq 14$. Kết hợp $m \geq 7$ suy ra $7 \leq m \leq 14$.

Vì m nguyên nên $m \in \{7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$.

+Trường hợp 3: $20 - m \geq m + 6 \Leftrightarrow m \leq 7$. Ta có:

$\max_{[0;2]} y = 20 - m \leq 20 \Leftrightarrow m \geq 0$. Kết hợp $m \leq 7$ suy ra $0 \leq m \leq 7$.

Vì m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Vậy $S = \{0; 1; 2; \dots; 14\}$. Tổng các phần tử của S bằng $\frac{(14+0) \cdot 15}{2} = 105$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 62. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2m + 1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| \geq 10$. Số các giá trị nguyên của S trong $[-30; 30]$ là

(A) 56.

(B) 61.

(C) 55.

(D) 57.

Lời giải.

Có $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in [1; 3]$. Vậy trên $[1; 3]$ hàm số luôn đồng biến.

Có $f(1) = 5 - 2m$; $f(3) = 55 - 2m$.

-TH1: $(5 - 2m)(55 - 2m) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq m \leq \frac{55}{2}$

Khi đó $\min_{[1;3]} f(x) = 0$ và $\begin{cases} \max_{[1;3]} |f(x)| = |5 - 2m| = 2m - 5 \\ \max_{[1;3]} |f(x)| = |55 - 2m| = 55 - 2m \end{cases}$

Ta có $2m - 5 > 55 - 2m \Leftrightarrow m > 15$.

Với $15 < m \leq \frac{55}{2}$ thì $\max_{[1;3]} |f(x)| = 2m - 5$

$\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| \geq 10 \Leftrightarrow 2m - 5 + 0 \geq 10 \Leftrightarrow m \geq \frac{15}{2}$. Do đó $15 < m \leq \frac{55}{2}$.

Với $\frac{5}{2} \leq m \leq 15$ thì $\max_{[1;3]} |f(x)| = 55 - 2m$

$\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| \geq 10 \Leftrightarrow 55 - 2m + 0 \geq 10 \Leftrightarrow m \leq \frac{45}{2}$. Do đó $\frac{5}{2} \leq m \leq 15$.

Vậy $\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{55}{2}$.

-TH2: $5 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$.

Thì $\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| \geq 10 \Leftrightarrow 55 - 2m + 5 - 2m \geq 10 \Leftrightarrow m \leq \frac{25}{2}$. Vậy $m < \frac{5}{2}$.

-TH3: $55 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{55}{2}$.

Thì $\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| \geq 10 \Leftrightarrow -5 + 2m - 55 + 2m \geq 10 \Leftrightarrow m \geq \frac{35}{2}$. Vậy $m > \frac{55}{2}$.

Tóm lại $S = \mathbb{R}$. Vậy trong $[-30; 30]$, S có 61 giá trị nguyên.

Chọn phương án (B)

□

Câu 63. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^4 + mx + m}{x + 1}$. Số giá trị nguyên của m để $\max_{[1;2]} |f(x)| - 2\min_{[1;2]} |f(x)| \geq 0$ là

(A) 15.

(B) 14.

(C) 13.

(D) 12.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$.

Nên $f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow m + \frac{1}{2} \leq f(x) \leq m + \frac{16}{3}, \forall x \in [1; 2]$.

TH1: Nếu $m + \frac{1}{2} > 0$ thì: $\max_{[1;2]} |f(x)| - 2\min_{[1;2]} |f(x)| \geq 0 \Leftrightarrow m + \frac{16}{3} - 2\left(m + \frac{1}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{13}{3}$.

Do m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

TH2: Nếu $m + \frac{16}{3} < 0$ thì: $\max_{[1;2]} |f(x)| - 2\min_{[1;2]} |f(x)| \geq 0 \Leftrightarrow -\left(m + \frac{1}{2}\right) + 2\left(m + \frac{16}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{61}{6}$.

Do m nguyên nên $m \in \{-10; -9; -8; -7; -6\}$.

TH3: Nếu $m + \frac{1}{2} \leq 0 \leq m + \frac{16}{3} \Leftrightarrow -\frac{13}{6} \leq m \leq -\frac{1}{2}$ thì $\max_{[1;2]} |f(x)| \geq 0$,

$\underset{[1;2]}{\min} |f(x)| = 0$

Luôn thỏa mãn $\max_{[1;2]} |f(x)| - 2\min_{[1;2]} |f(x)| \geq 0$

Do m nguyên nên $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 64. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$?

(A) 3.

(B) 7.

(C) 6.

(D) 5.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$.

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	2
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	a	$a+1$	a

Do $2m \geq M > 0$ nên $m > 0$ suy ra $g(x) \neq 0 \forall x \in [0; 2]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a+1 < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a > 0 \end{cases}.$$

Nếu $a < -1$ thì $M = -a, m = -a - 1 \Rightarrow 2(-a - 1) \geq -a \Leftrightarrow a \leq -2$.

Nếu $a > 0$ thì $M = a + 1, m = a \Rightarrow 2a \geq a + 1 \Leftrightarrow a \geq 1$.

Do đó $a \leq -2$ hoặc $a \geq 1$, do a nguyên và thuộc đoạn $[-3; 3]$ nên $a \in \{-3; -2; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 5 giá trị của a thỏa mãn đề bài.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 65. Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ ($m \in \mathbb{R}$). có đồ thị (C) . Hỏi giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$ có giá trị nhỏ nhất là?

(A) 3.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 5.

Lời giải.

Ta có

$$y(-2) = |m - 4|; y(-1) = |m - 5|; y(1) = |m - 1|.$$

Khi đó, $\max_{[-2;1]} y = \max_{[-2;1]} \{|m-5|; |m-1|\} \geq \frac{|5-m|+|m-1|}{2} \geq \frac{|5-m+m-1|}{2} = 2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} |m-5| = |1-m| \\ (m-5)(1-m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 66. Cho hàm số $y = \left| \frac{x^2 - (m+1)x + 2m+2}{x-2} \right|$ (với m là tham số thực). Hỏi $\max_{[-1;1]} y$ có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

(A) $\frac{3}{2}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Ta có $y = \left| \frac{x^2 - x + 2}{x-2} - m \right| = |t - m|$ trong đó $t = \frac{x^2 - x + 2}{x-2} \in [-2; -1], \forall x \in [-1; 1]$

Do đó $\max_{[-1;1]} y = \max_{[-2;-1]} |t - m| = \max\{|m+2|, |m+1|\} = \max\{|m+2|, |-m-1|\}$

$\geq \frac{|m+2| + |-m-1|}{2} \geq \frac{|(m+2) + (-m-1)|}{2} = \frac{1}{2}$

Dấu bằng đạt tại $m+2 = -m-1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 67. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$?

(A) vô số.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	1	2	3
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$m-2$	$m-4$	m

Ta thấy $\max_{[1;3]} f(x) = f(3) = m$ và $\min_{[1;3]} f(x) = f(2) = m-4$.

Ta có $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| = \max\{|m|; |m-4|\}$.

Trường hợp 1:

$\begin{cases} |m| \leq |m-4| \\ \max\{|m|; |m-4|\} = |m-4| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \leq m^2 - 8m + 16 \\ -4 \leq m-4 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ 0 \leq m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2,$

mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} |m| > |m-4| \\ \max\{|m|; |m-4|\} = |m| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > m^2 - 8m + 16 \\ -4 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -4 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 4,$$

mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4\}$.

Vậy, có 5 giá trị nguyên của tham số m .

Chọn phương án **C**

□

Câu 68. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |2x^3 - 6x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 8. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

- (A) 8. (B) -16. (C) -64. (D) -72.

Lời giải.

Xét $u(x) = 2x^3 - 6x + m$ trên đoạn $[0; 3]$. Dễ thấy hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$

có $u'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [0; 3]$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max_{[0;3]} u = \max\{u(0); u(1); u(3)\} = \max\{m; m-4; m+36\} = m+36 \\ \min_{[0;3]} u = \min\{u(0); u(1); u(3)\} = \min\{m; m-4; m+36\} = m-4 \end{cases}.$$

$$\text{Theo bài ra } \min_{[0;3]} f(x) = \min\{|m-4|; |m+36|, 0\} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} |m-4| = 8 \\ m-4 > 0 \\ m+36 < 0 \\ |m+36| = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -44 \end{cases}.$$

Do đó $S = \{-44, 12\}$. Vậy số các phần tử của S bằng 2.

Chọn phương án **C**

□

Câu 69. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m + 3|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 4. Tổng tất cả các phần tử của S là

- (A) -6. (B) -8. (C) -9. (D) -12.

Lời giải.

Xét hàm $g(x) = x^2 - 2x + m + 3$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$

Ta có $g'(x) = 2x - 2$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do đó

$$\max_{[-1;2]} |x^2 - 2x + m + 3| = \max\{|m+2|; |m+3|; |m+6|\}.$$

Ta thấy $m+2 < m+3 < m+6$ với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\max_{[-1;2]} y$ chỉ có thể là $|m+6|$ hoặc $|m+2|$.

$$\text{Nếu } \max_{[-1;2]} y = |m+6| \text{ thì } \begin{cases} |m+6| = 4 \\ |m+6| \geq |m+2| \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

$$\text{Nếu } \max_{[-1;2]} y = |m+2| \text{ thì } \begin{cases} |m+2| = 4 \\ |m+2| \geq |m+6| \end{cases} \Leftrightarrow m = -6.$$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -8.

Chọn phương án **B**

□

Câu 70. (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

(A) 2.

(B) 1.

(C) 0.

(D) 6.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(n) \\ x = -1(l) \end{cases}$$

Suy ra GTLN và GTNN của $f(x)$ thuộc $\{f(0); f(1); f(2)\} = \{m; m - 2; m + 2\}$.

Xét hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ ta được giá trị lớn nhất của y là

$$\max\{|m|; |m - 2|; |m + 2|\} = 3.$$

-TH1: $|m| = 3 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

+Với $m = -3$. Ta có $\max\{3; 5; 1\} = 5$ (loại).

+Với $m = 3$. Ta có $\max\{3; 1; 5\} = 5$ (loại).

$$\text{-TH2: } |m - 2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 5 \end{cases}$$

+Với $m = -1$. Ta có $\max\{1; 3\} = 3$ (nhận).

+Với $m = 5$. Ta có $\max\{3; 5; 7\} = 7$ (loại).

$$\text{-TH3: } |m + 2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}$$

+Với $m = 1$. Ta có $\max\{1; 3\} = 3$ (nhận).

+Với $m = -5$. Ta có $\max\{3; 5; 7\} = 7$ (loại).

Do đó $m \in \{-1; 1\}$

Vậy tập hợp S có 2 phần tử.

Chú ý: Ta có thể giải nhanh như sau:

Sau khi tìm được Suy ra GTLN và GTNN của $f(x) = x^3 - 3x + m$ thuộc $\{f(0); f(1); f(2)\} = \{m; m - 2; m + 2\}$.

+Trường hợp 1: $m \geq 0$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$.

+Trường hợp 2: $m < 0$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = |m - 2| = 2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$

Chọn phương án (A)

□

Câu 71. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right|$ trên $[1; 2]$ bằng 2. Số phần tử của S là

(A) 3.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 4.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Xét hàm số: $y = \frac{x^2 + mx + m}{x + 1}$.

$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 2] \\ x = -2 \notin [1; 2] \end{cases}.$$

$$y' > 0 \forall x \in [1; 2] \text{ nên } \max_{[1; 2]} y = y(2) = \left| m + \frac{4}{3} \right|$$

$$\max_{[1; 2]} y = 2 \Leftrightarrow \left| m + \frac{4}{3} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m + \frac{4}{3} = 2 \\ m + \frac{4}{3} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = -\frac{10}{3} \end{cases}.$$

Chọn phương án **(C)**

□

Câu 72. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5.

(A) 3.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 4.

Lời giải.

Ta có Parabol $(P) y = x^2 - 2x + m$ có đỉnh $I(1; -1 + m)$; $y(-1) = m + 3$; $y(2) = m$.

Trường hợp 1: $m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -3 \Rightarrow \min_{[-1; 2]} |y| = -m - 3$ (do lấy đối xứng qua Ox)

Theo giả thiết ta có: $-m - 3 = 5 \Leftrightarrow m = -8$ (thỏa $m < -3$) $\Rightarrow$ Nhận.

Trường hợp 2: $\begin{cases} m + 3 > 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 1 \Rightarrow \min_{[-1; 2]} |y| = 0 \Rightarrow$ Không thỏa yêu cầu.

Trường hợp 3: $m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1 \Rightarrow \min_{[-1; 2]} |y| = m - 1$. Theo yêu cầu ta có $m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = 6$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa yêu cầu

Chọn phương án **(C)**

□

Câu 73. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

(A) $-\frac{8}{3}$.

(B) 5.

(C) $\frac{5}{3}$.

(D) -1.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2}$,

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ và $f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2}$.

Xét $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	-1	0	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$

Ta có: $f(-1) = -m - \frac{1}{3}$; $f(0) = -m$; $f(1) = -m - 1$.

Suy ra: $\max_{[-1;1]} g(x) = \max \{|f(-1)|; |f(0)|; |f(1)|\}$.

Với $g(x) = |f(x)| = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$. Ta có $\max_{[-1;1]} g(x) = \max \{|f(-1)|; |f(0)|; |f(1)|\}$.

Dựa vào đồ thị các hàm số $u = |m|$; $u = |m + 1|$; $u = \left| m + \frac{1}{3} \right|$.

Xét với $m \geq \frac{-1}{2}$. Ta có $\max_{[-1;1]} g(x) = |f(1)| = m + 1 = 3 \Rightarrow m = 2$.

Xét với $m < \frac{-1}{2}$. Ta có $\max_{[-1;1]} g(x) = |f(0)| = -m = 3 \Rightarrow m = -3$.

Vậy $S = \{-3; 2\}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 74. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là

(A) 108.

(B) 136.

(C) 120.

(D) 210.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$

$g'(x) = x^3 - 28x + 48$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6(L) \\ x = 4(L) \\ x = 2(TM) \end{cases}$

$\max_{[0;2]} f(x) = \max_{[0;2]} \{|g(0)|; |g(2)|\} = \max_{[0;2]} \{|m - 30|; |m + 14|\} \leq 30$

$\Rightarrow \begin{cases} |m - 30| \leq 30 \\ |m + 14| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 16$

Suy ra $S = \sum_{x=1}^{16} x = 136$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Số giá trị nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$ là

(A) 3.

(B) 5.

(C) 6.

(D) 7.

Lời giải.

Xét $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$ với $x \in [0; 2]$.

$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

$g(0) = a$; $g(1) = 1 + a$; $g(2) = a$.

Bảng biến thiên $g(x)$

x	0	1		2	
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$	a $a+1$ a				

Trường hợp 1: $a \geq 0$. Khi đó $M = a + 1$; $m = a$.

Ta có $M \leq 2m \Leftrightarrow 1 + a \leq 2a \Leftrightarrow a \geq 1$. Với $\begin{cases} a \in [-3; 3] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{1; 2; 3\}$.

Trường hợp 2: $a + 1 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -1$. Khi đó $M = -a$; $m = -(a + 1)$.

Ta có $M \leq 2m \Leftrightarrow -a \leq -2(a + 1) \Leftrightarrow a \leq -2$. Với $\begin{cases} a \in [-3; 3] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{-3; -2\}$.

Trường hợp 3: $-1 < a < 0$. Với $\begin{cases} a \in [-3; 3] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \emptyset$.

Vậy có 5 giá trị a cần tìm.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 76. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $|x^4 - 2x^2 - m| \leq 12$ nghiệm đúng $\forall x \in [0; 2]$. Tổng các phần tử của S bằng:

(A) 7.

(B) 56.

(C) 11.

(D) 66.

Lời giải.

Xét hàm số $u(x) = x^4 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0; 2]$.

Dễ thấy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0; 2]$ có $u'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1 \in (0; 2)$.

Khi đó $\begin{cases} \max_{[0;2]} u = \max \{u(0); u(1); u(2)\} = \max \{-m; -m - 1; -m + 8\} = -m + 8 \\ \min_{[0;2]} u = \min \{u(0); u(1); u(2)\} = \min \{-m; -m - 1; -m + 8\} = -m - 1 \end{cases}$.

Theo bài ra $|x^4 - 2x^2 - m| \leq 12, \forall x \in [0; 2] \Leftrightarrow \max \{|-m - 1|; |-m + 8|\} \leq 12 \Leftrightarrow \begin{cases} |-m + 8| \leq 12 \\ |-m + 8| \geq |-m - 1| \\ |-m - 1| \leq 12 \\ |-m - 1| \geq |-m + 8| \end{cases}$

Suy ra S có 16 phần tử. Vậy tổng các phần tử của S bằng 56.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 77. Cho hàm số $f(x) = |2x^3 - 6x^2 + m|$, gọi A là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$. Số giá trị nguyên của tham số m để $A < 2020$ là

(A) 4031.

(B) 4032.

(C) 4033.

(D) 2019.

Lời giải.

Xét $u(x) = 2x^3 - 6x^2 - m$ trên đoạn $[1; 3]$. Ta có hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

$u'(x) = 6x^2 - 12x$.

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (1; 3) \\ x = 2 \in (1; 3) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \max_{[1;3]} u(x) = \max \{u(1); u(2); u(3)\} = m \\ \min_{[1;3]} u(x) = \min \{u(1); u(2); u(3)\} = m - 8 \end{cases}.$$

$$A = \max \{|m|; |m - 8|\}.$$

$$\text{Yêu cầu } A < 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| < 2020 \\ |m| \geq |m - 8| \\ |m - 8| < 2020 \\ |m - 8| \geq |m| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2020 < m < 2020 \\ m \geq 4 \\ -2012 < m < 2028 \\ m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq m < 2020 \\ -2012 < m \leq 4 \end{cases}.$$

Vậy có 4031 số nguyên m để $A < 2020$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 78. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc $[-4; 4]$ sao cho $M \leq 2m$?

(A) 7.

(B) 5.

(C) 6.

(D) 4.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 4x^3 + 4x^2 + a$ trên $[0; 2]$.

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1; g(0) = a, g(1) = a + 1, g(2) = a. \\ x = 2 \end{cases}$$

Suy ra: $a \leq g(x) \leq a + 1$.

$$\text{TH1: } 0 \leq a \leq 4 \Rightarrow a + 1 \geq a > 0 \Rightarrow M = \max_{[0;2]} f(x) = a + 1; m = \min_{[0;2]} f(x) = a.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 0 \leq a \leq 4 \\ a + 1 \leq 2a \end{cases} \Rightarrow 1 \leq a \leq 4. \text{ Do đó: có 4 giá trị của } a \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{TH2: } -4 \leq a \leq -1 \Rightarrow a \leq a + 1 \leq -1 \Rightarrow |a + 1| \leq |a|$$

$$\Rightarrow M = \max_{[0;2]} f(x) = |a| = -a; m = \min_{[0;2]} f(x) = |a + 1| = -a - 1.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} -4 \leq a \leq -1 \\ -a \leq -2a - 2 \end{cases} \Rightarrow -4 \leq a \leq -2. \text{ Do đó: có 3 giá trị của } a \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy có tất cả 7 giá trị thỏa mãn.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 79. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^4 + mx + m}{x + 1}$. Số giá trị nguyên của m để $\max_{[1;2]} |f(x)| - 2\min_{[1;2]} |f(x)| \geq 0$ là

(A) 15.

(B) 14.

(C) 13.

(D) 12.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2].$$

Nên $f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow m + \frac{1}{2} \leq f(x) \leq m + \frac{16}{3}, \forall x \in [1; 2]$.

TH1: Nếu $m + \frac{1}{2} > 0$ thì: $\max_{[1;2]} |f(x)| - 2\min_{[1;2]} |f(x)| \geq 0 \Leftrightarrow m + \frac{16}{3} - 2\left(m + \frac{1}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{13}{3}$.

Do m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

TH2: Nếu $m + \frac{16}{3} < 0$ thì: $\max_{[1;2]} |f(x)| - 2\min_{[1;2]} |f(x)| \geq 0 \Leftrightarrow -\left(m + \frac{1}{2}\right) + 2\left(m + \frac{16}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{61}{6}$.

Do m nguyên nên $m \in \{-10; -9; -8; -7; -6\}$.

TH3: Nếu $m + \frac{1}{2} \leq 0 \leq m + \frac{16}{3} \Leftrightarrow -\frac{13}{6} \leq m \leq -\frac{1}{2}$ thì $\max_{[1;2]} |f(x)| \geq 0$,

$\underset{[1;2]}{\min} |f(x)| = 0$

Luôn thỏa mãn $\max_{[1;2]} |f(x)| - 2\min_{[1;2]} |f(x)| \geq 0$

Do m nguyên nên $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 80. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m}{x-2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m nguyên thuộc $[-10; 10]$ sao cho $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| > 2$. Số phần tử của S là

(A) 18.

(B) 8.

(C) 10.

(D) 19.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

* $m = 2$ ta có $f(x) = 1$, khi đó $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2$ không thỏa mãn

* $m \neq 2$, ta có $y' = \frac{m-2}{(x-2)^2} \Rightarrow$ hàm số đơn điệu trên mỗi khoảng của tập xác định nên đơn điệu trên $[0; 1]$

Ta có $f(0) = \frac{m}{2}, f(1) = m-1$ và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(m; 0)$.

TH1: $\frac{m}{2} \cdot (m-1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$, ta có $\min_{[0;1]} |f(x)| = 0$, $\begin{cases} \max_{[0;1]} |f(x)| = \frac{m}{2} \\ \max_{[0;1]} |f(x)| = 1-m \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} \frac{m}{2} > 2 \\ 1-m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \end{cases}$ (Vô nghiệm)

TH2: $\frac{m}{2} \cdot (m-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$

Vậy $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| > 2 \Leftrightarrow \left|\frac{m}{2}\right| + |m-1| > 2$

*) $m < 0$, ta có $\left|\frac{m}{2}\right| + |m-1| > 2 \Leftrightarrow -\frac{m}{2} + 1 - m > 2 \Leftrightarrow -3m > 2 \Leftrightarrow m < -\frac{2}{3}$

*) $m > 1, m \neq 2$, ta có $\left|\frac{m}{2}\right| + |m-1| > 2 \Leftrightarrow \frac{m}{2} + m - 1 > 2 \Leftrightarrow 3m > 6 \Leftrightarrow m > 2$.

Do đó $m \in \{-10; -9; \dots; -1; 3; 4; \dots 10\}$. Vậy có 18 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 81. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-m}{x+2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 4$. Số phần tử của S là

(A) 0.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

+Nếu $m = -4$ thì $f(x) = 2$ thỏa mãn.

+Xét $m \neq -4$. Có $y' = \frac{4+m}{(x+2)^2}$ nên hàm số đơn điệu trên mỗi khoảng của tập xác định. Do đó hàm số đơn điệu trên $[0; 2]$.

Ta có $f(0) = -\frac{m}{2}$; $f(2) = \frac{4-m}{4}$, giao điểm của đồ thị $f(x)$ với trục hoành là $\left(\frac{m}{2}; 0\right)$.

TH1: $0 \leq \frac{m}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$. Khi đó $\min_{[0;2]} |f(x)| = 0$ và $\max_{[0;2]} |f(x)| = \frac{4-m}{4}$ hoặc $\max_{[0;2]} |f(x)| = \frac{m}{2}$

. Theo giả thiết ta phải có $\begin{cases} \frac{4-m}{4} = 4 \\ \frac{m}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -12 \\ m = 8 \end{cases}$ (loại).

TH2: $\frac{m}{2} \notin [0; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \end{cases}$. Khi đó: $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 4 \Leftrightarrow \left|-\frac{m}{2}\right| + \left|\frac{4-m}{4}\right| = 4$

$\Leftrightarrow 2|m| + |4-m| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = \frac{20}{3} \end{cases}$

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án (C)

□

Câu 82. Để giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là nhỏ nhất thì giá trị của m thuộc

(A) $(1; 2)$.

(B) $(-2; -1)$.

(C) $(0; 1)$.

(D) $[-1; 0]$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = g(x) = x^3 - 3x + 2m - 1$ trên đoạn $[0; 2]$, ta có:

$$y' = 3x^2 - 3, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = x^3 - 3x + 2m - 1$ trên đoạn $[0; 2]$

x	0	1	2
$g'(x)$		0	+
$g(x)$	$2m - 1$	$2m - 3$	$2m + 1$

Ta luôn có: $2m - 3 < 2m - 1 < 2m + 1 \Leftrightarrow g(1) < g(0) < g(2)$

Suy ra: $F = \max_{[0;2]} f(x) = \max\{|2m - 3|, |2m + 1|\}$.

Nếu $|2m - 3| \leq |2m + 1| \Leftrightarrow (2m - 3)^2 \leq (2m + 1)^2 \Leftrightarrow 8 \leq 16m \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$ thì

$$F = |2m + 1| \geq \left| 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right| \geq 2.$$

$$\text{Suy ra: } F_{\min} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Nếu } |2m - 3| \geq |2m + 1| \Leftrightarrow (2m - 3)^2 \geq (2m + 1)^2 \Leftrightarrow 8 \geq 16m \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2} \text{ thì}$$

$$F = |2m - 3| = 3 - 2m \geq 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \geq 2.$$

$$\text{Suy ra: } F_{\min} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Chọn phương án **C**

□

Câu 83. Cho hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ ($m \in \mathbb{R}$). có đồ thị (C). Hỏi giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 2]$ có giá trị nhỏ nhất là?

(A) 2.

(B) 4..

(C) 1.

(D) 3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y(2) = |m - 4|; y(1) = |m - 2|.$$

$$\text{Khi đó, } \max_{[1;2]} y = \max_{[1;2]} \{|m - 4|; |m - 2|\} \geq \frac{|4 - m| + |m - 2|}{2} \geq \frac{|4 - m + m - 2|}{2} = 1.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} |4 - m| = |m - 2| \\ (4 - m)(m - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Chọn phương án **C**

□

Câu 84. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$ với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của tham số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể tính được $a + 2b$

(A) -4.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

$$M \geq |f(-1)| = |1 - a + b|$$

$$\text{Ta có } M \geq |f(3)| = |9 + 3a + b|$$

$$M \geq |f(1)| = |1 + a + b|$$

$$2M \geq |-2 - 2a - 2b|$$

$$\text{Từ đó } 4M \geq |f(-1)| + 2|f(1)| + |f(3)| \geq |f(-1) + 2f(1) + f(3)| = 8$$

$$\text{Nên } M \geq 4$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} |1 - a + b| = 2 \\ |2 + 2a + 2b| = 2 \text{ và } 9 + 3a + b; 1 - a - b; 1 + a + b \text{ cùng dấu} \\ |9 + 3a + b| = 2 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \text{ Nên } a + 2b = -4$$

Chọn phương án **A**

□

Câu 85. Để giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là nhỏ nhất thì giá trị của m thuộc

(A) $(1; 2)$.

(B) $(-2; -1)$.

(C) $(0; 1)$.

(D) $[-1; 0]$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = g(x) = x^3 - 3x + 2m - 1$ trên đoạn $[0; 2]$, ta có:

$$y' = 3x^2 - 3, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = x^3 - 3x + 2m - 1$ trên đoạn $[0; 2]$

x	0	1	2
$g'(x)$		0	+
$g(x)$	$2m - 1$	$2m - 3$	$2m + 1$

Ta luôn có: $2m - 3 < 2m - 1 < 2m + 1 \Leftrightarrow g(1) < g(0) < g(2)$

Suy ra: $F = \max_{[0;2]} f(x) = \max \{|2m - 3|, |2m + 1|\}$.

Nếu $|2m - 3| \leq |2m + 1| \Leftrightarrow (2m - 3)^2 \leq (2m + 1)^2 \Leftrightarrow 8 \leq 16m \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$ thì

$$F = |2m + 1| \geq \left| 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right| \geq 2.$$

Suy ra: $F_{\min} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Nếu $|2m - 3| \geq |2m + 1| \Leftrightarrow (2m - 3)^2 \geq (2m + 1)^2 \Leftrightarrow 8 \geq 16m \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$ thì

$$F = |2m - 3| = 3 - 2m \geq 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \geq 2.$$

Suy ra: $F_{\min} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy $m \in (0; 1)$.

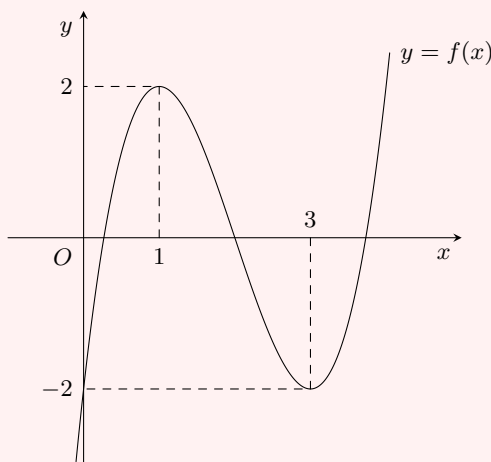
Tương giao của hàm có giá trị tuyệt đối

Chọn phương án **C**

□

C TƯƠNG GIAO CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

Câu 86. Cho đồ thị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ như hình vẽ.



Khi đó phương trình $|x^3 - 6x^2 + 9x - 2| = m$ (m là tham số) có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi.

Ⓐ $-2 \leq m \leq 2.$

Ⓑ $0 < m < 2.$

Ⓒ $0 \leq m \leq 2.$

Ⓓ $-2 < m < 2.$

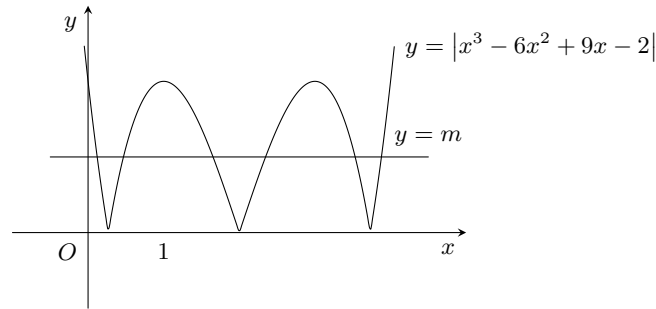
Lời giải.

+) Đồ thị hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + 9x - 2|$ có được bằng cách biến đổi đồ thị (C) hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$:

-Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên trục hoành.

-Lấy đối xứng phần đồ thị của (C) phần dưới trục hoành qua trục hoành.

-Xóa phần đồ thị còn lại của (C) phía dưới trục hoành.



+) Số nghiệm của phương trình $|x^3 - 6x^2 + 9x - 2| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + 9x - 2|$ và đồ thị hàm số $y = m$. Để phương trình có 6 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần và đủ là $0 < m < 2$.

Chọn phương án Ⓑ

□

Câu 87. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x^2(|x| - 3) + 2 - m^2(|m| - 3) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Ⓐ 3.

Ⓑ 12.

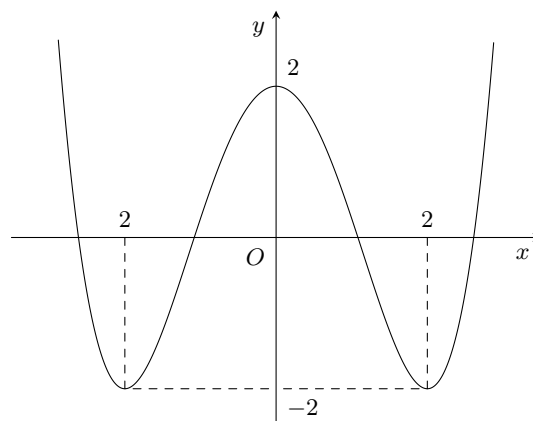
Ⓒ $T = 7.$

Ⓓ 5.

Lời giải.

Ta có $x^2(|x| - 3) + 2 - m^2(|m| - 3) = 0 \Leftrightarrow |x|^3 - 3|x|^2 + 2 = |m|^3 - 3|m|^2 \quad (*)$

Xét hàm số: $y = f(x) = |x|^3 - 3|x|^2 + 2$ có đồ thị như hình vẽ:



Từ đồ thị của hàm số ta có: Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -2 < |m|^3 - 3|m|^2 < 2$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $|m|^3 - 3|m|^2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m^2(|m| - 3) \in \mathbb{Z}$ do đó $m^2(|m| - 3) \in \{-1; 0; 1\}$ từ đây ta có

$$\begin{cases} m = \pm 3 \\ m = 0 \end{cases}.$$

Câu 88. Tìm m để phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m$ có 8 nghiệm phân biệt:

(A) $0 < m < \sqrt[4]{2^9}$.

(B) $-\sqrt[4]{2^9} < m < \sqrt[4]{2^9}$.

(C) Không có giá trị của m .

(D) $1 < m < \sqrt[4]{2^9}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ có

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

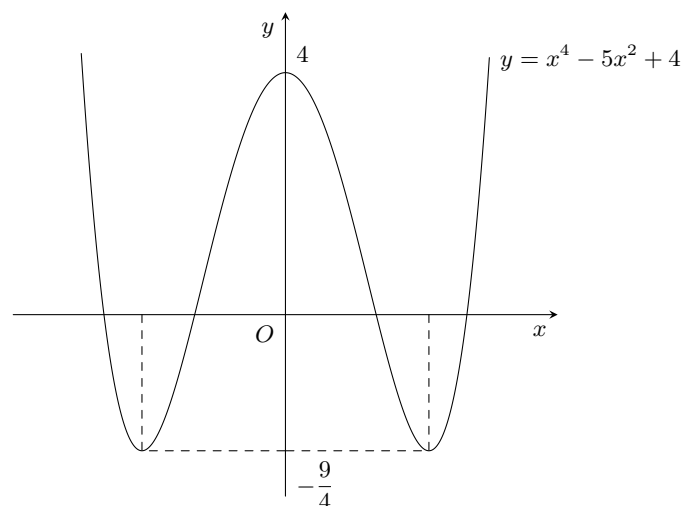
$$y' = 4x^3 - 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 4$ và $x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow y = -\frac{9}{4}$

BBT

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{10}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		4		$+\infty$				
		$-\frac{9}{4}$		$-\frac{9}{4}$					

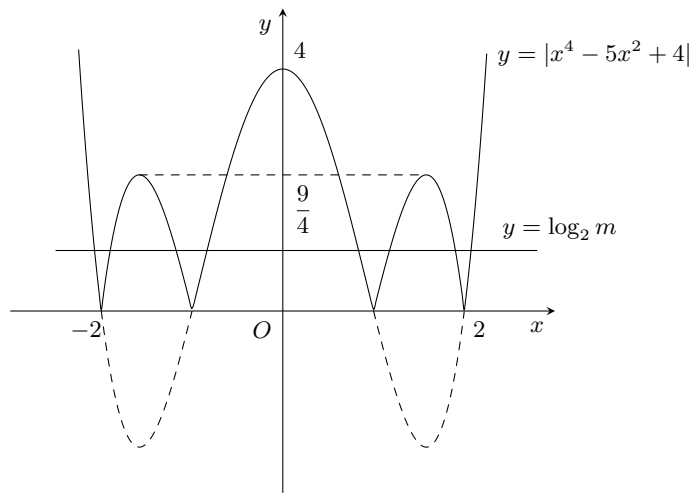
Đồ thị



Từ đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$

Bước 1: Ta giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục hoành.

Bước 2: Lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của đồ thị lên phía trên trục hoành và xóa bỏ đi phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành ta được đồ thị hàm số $y = |x^4 - 5x^2 + 4|$.



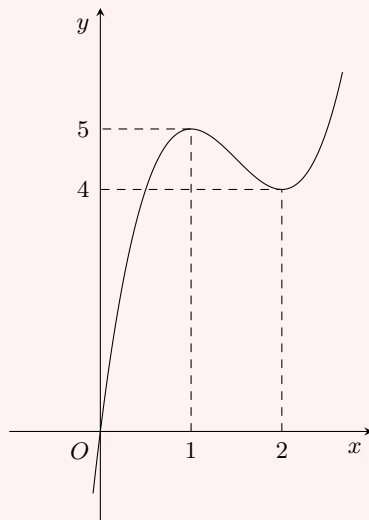
Khi đó số nghiệm của phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^4 - 5x^2 + 4|$ và đường thẳng $y = \log_2 m$ với $m > 0$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = |x^4 - 5x^2 + 4|$ ta thấy để phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m$ có 8 nghiệm thì:

$$0 < \log_2 m < \frac{9}{4} \Leftrightarrow 1 < m < \sqrt[4]{2^9}.$$

Chọn phương án **D**

□

Câu 89. Hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ có đồ thị như hình vẽ bên.

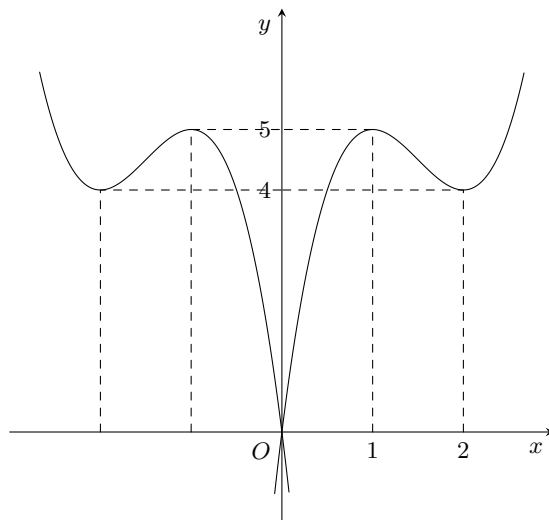


Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| + m = 0$ có sáu nghiệm phân biệt.

- (A)** $m < -5$.
(B) $-5 < m < -4$.
(C) $4 < m < 5$.
(D) $m > -4$.

Lời giải.

Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ như hình dưới đây:



Phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| + m = 0 \Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = -m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ và đường thẳng $y = -m$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$, ta có ycbt $\Leftrightarrow 4 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -4$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 90. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = m$ có 8 nghiệm phân biệt.

(A) $\frac{-9}{4} < m < 4$.

(B) $\frac{-9}{4} < m < 0$.

(C) $\frac{9}{4} < m < 4$.

(D) $0 < m < \frac{9}{4}$.

Lời giải.

Xét hàm $y = x^4 - 5x^2 + 4 \Rightarrow y' = 4x^3 - 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0 $+$	0 $-$ 0 $+$		
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{9}{4}$	4	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$

Ta có bảng biến thiên hàm $y = |x^4 - 5x^2 + 4|$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	-1	0	1	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$							
$f(x)$		0	$\frac{9}{4}$	0	4	0	$\frac{9}{4}$	0	

Vậy phương trình có 8 nghiệm $\Leftrightarrow$ đường $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^4 - 5x^2 + 4|$ tại 8 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}$.

Chọn phương án **D**

□

Câu 91. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $|x^4 - 4x^2 + 3| = m$ có đúng 8 nghiệm phân biệt.

(A) $0 < m < 3$.

(B) $1 < m < 3$.

(C) $-1 < m < 3$.

(D) $0 < m < 1$.

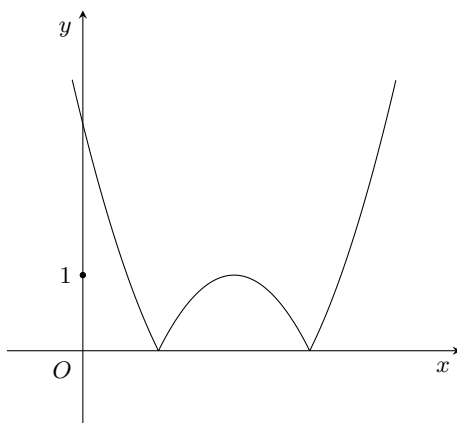
Lời giải.

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, phương trình $|x^4 - 4x^2 + 3| = m$ (1) thành phương trình $|t^2 - 4t + 3| = m$ (2)

Mỗi nghiệm $t > 0$ cho 2 nghiệm x trái dấu.

(1) có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 4 nghiệm phân biệt dương.

Vẽ đồ thị hàm số $y = t^2 - 4t + 3$, từ đó được đồ thị hàm số $y = |t^2 - 4t + 3|$ như sau :



Nghiệm của phương trình (2) là hoành độ giao điểm hai đường $y = |t^2 - 4t + 3|$ và $y = m$.

(2) có 4 nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Chọn phương án **D**

□

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^2 |x^2 - 2|$ tại 6 điểm phân biệt.

(A) $0 < m < 2$.

(B) $0 < m < 1$.

(C) $1 < m < 2$.

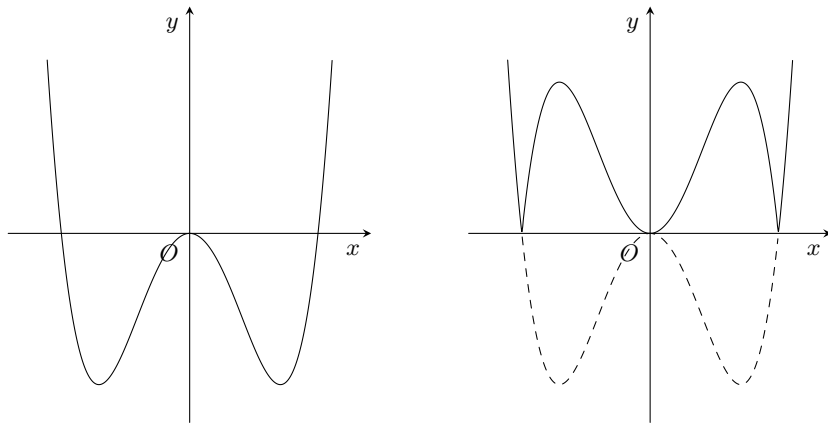
(D) Không tồn tại m .

Lời giải.

Xét hàm số $y = g(x) = 2x^2 (x^2 - 2) = 2x^4 - 4x^2$.

Ta có $g'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Ta có đồ thị hàm số, từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = 2x^2 |x^2 - 2|$.



Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^2|x^2 - 2|$ tại 6 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 2$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 93. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|) + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt?

(A) 3.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 0.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } f(x) = x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		0		-4		$+\infty$

Bảng biến thiên của hàm số $f(|x|)$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$
		-4		-4	

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $f(|x|) + m = 0 \Leftrightarrow f(|x|) = -m$ (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = -m$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

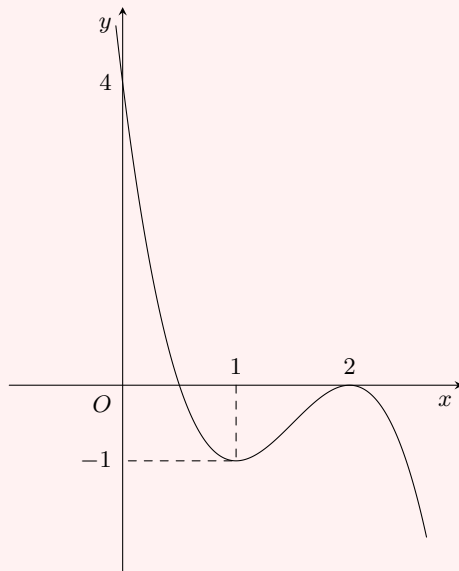
Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn bài ra

Chọn phương án **A**

□

Câu 94. Đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 4$ như hình vẽ.

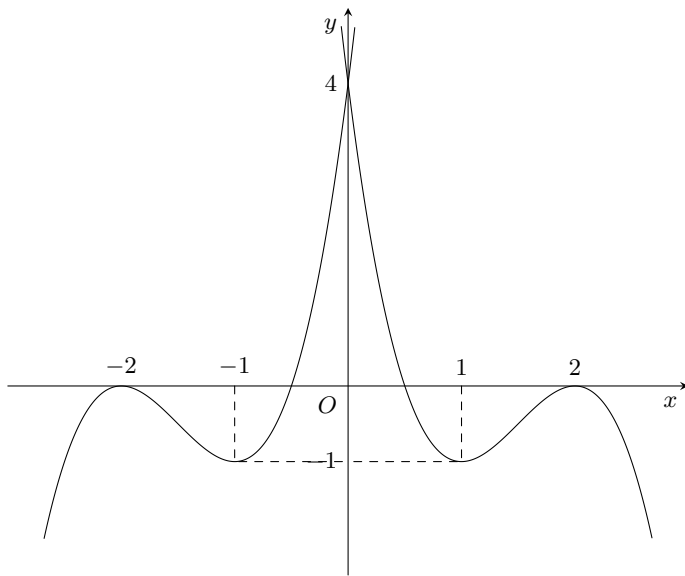


Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| + m = 0$ có 6 nghiệm phân biệt

- (A) $(-1; 0)$. (B) $(-3; -2)$. (C) $(-5; -4)$. (D) $(-4; -3)$.

Lời giải.

Từ đồ thị đã cho, ta có đồ thị hàm số $y = -2|x|^3 + 9x^2 - 12|x| + 4$ như sau:



Xét phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| + m = 0 \Leftrightarrow -2|x|^3 + 9x^2 - 12|x| + 4 = m + 4 (*)$

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2|x|^3 + 9x^2 - 12|x| + 4$ và đường thẳng $y = m + 4$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy để (*) có 6 nghiệm phân biệt thì $-1 < m + 4 < 0 \Leftrightarrow -5 < m < -4$.

Vậy $m \in (-5; -4)$.

Chọn phương án (C)

□

Câu 95. Phương trình $|x^2 - 2x| (|x| - 1) = m$ (với m là tham số thực) có tối đa bao nhiêu nghiệm thực?

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = |x^2 - 2x| (|x| - 1)$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } f(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x)(x - 1) & \text{ khi } x \geq 2 \\ -(x^2 - 2x)(x - 1) & \text{ khi } 0 \leq x < 2 \\ (x^2 - 2x)(-x - 1) & \text{ khi } x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x & \text{ khi } x \geq 2 \\ -x^3 + 3x^2 - 2x & \text{ khi } 0 \leq x < 2 \\ -x^3 + x^2 + 2x & \text{ khi } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 & \text{ khi } x \geq 2 \\ -3x^2 + 6x - 2 & \text{ khi } 0 \leq x < 2 \\ -3x^2 + 2x + 2 & \text{ khi } x < 0 \end{cases}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{7}}{2}$	0	$\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$	$\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$		$- \quad 0 \quad +$	$0 \quad -$		$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		$\frac{20 - 14\sqrt{7}}{27}$	0	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	0	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

Từ bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhiều nhất tại 4 điểm nên phương trình $f(x) = m$ có tối đa 4 nghiệm.

Chọn phương án (B)

□

Câu 96. Phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \frac{1}{4}x^2 + m$ có 8 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a; b)$. Giá trị của $a + b$ bằng

(A) $\frac{121}{64}$.

(B) $\frac{89}{64}$.

(C) $\frac{121}{81}$.

(D) $\frac{15}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = x^2 (t \geq 0) \Rightarrow |t^2 - 5t + 4| = \frac{1}{4}t + m \Leftrightarrow m = g(t) = |t^2 - 5t + 4| - \frac{1}{4}t \quad (*).$$

Với $t = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $t > 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{t}$. Phương trình có 8 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi (*) có 4 nghiệm phân biệt $t > 0$.

Ta có:

$$g(t) = \begin{cases} t^2 - 5t + 4 - \frac{1}{4}t; & t \leq 1 \vee t \geq 4 \\ -t^2 + 5t - 4 - \frac{1}{4}t; & 1 < t < 4 \end{cases} \Rightarrow g'(t) = \begin{cases} 2t - \frac{21}{4}; & t < 1 \vee t > 4 \\ -2t + \frac{19}{4}; & 1 < t < 4 \end{cases} \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{19}{8}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$\frac{19}{8}$	4	$+\infty$	
$g'(t)$	-		+	0	-	+
$g(t)$	4	$-\frac{1}{4}$		$\frac{105}{64}$	-1	$+\infty$

Vậy $-\frac{1}{4} < m < \frac{105}{64} \Rightarrow a + b = -\frac{1}{4} + \frac{105}{64} = \frac{89}{64}$.

Chọn phương án **(B)**

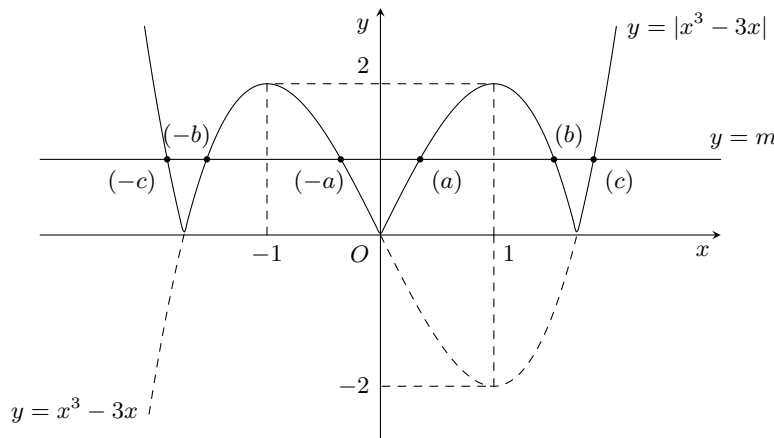
□

Câu 97. Biết rằng phương trình $|x^3 - 3x| = m$ có 3 nghiệm dương phân biệt a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2 + \sqrt{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. (B) $m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. (C) $m \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$. (D) $m \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ ta có đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x|$ như hình vẽ:



Phương trình $|x^3 - 3x| = m$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 2$

Vì $y(-x) = y(x) = |x^3 - 3x|$ nên hàm số $y = |x^3 - 3x|$ là hàm số chẵn, nên phương trình $|x^3 - 3x| = m$ có 6 nghiệm là $-c; -b; -a; a; b; c$, trong đó $-b; -a; c$ là 3 nghiệm của phương trình $x^3 - 3x = m^{(*)}$

Áp dụng định lý Viet ta có $-b - a + c = 0$, kết hợp với $a + b + c = 2 + \sqrt{3}$ ta được $c = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

Do đó $(*)$ có nghiệm $x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{8} \approx 0,8995$.

Chọn phương án **(C)**

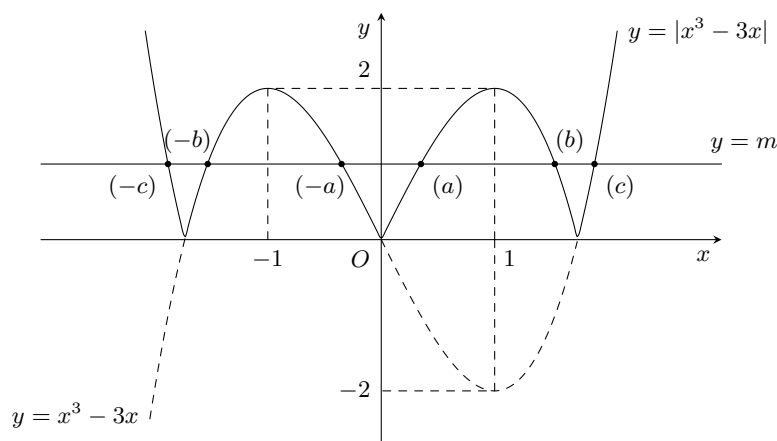
□

Câu 98. Biết rằng với $0 < m < 2$ tổng của các nghiệm dương của phương trình $|x^3 - 3x| = m$ bằng $1 + 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. (B) $m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. (C) $m \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$. (D) $m \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ ta có đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x|$ như hình vẽ bên dưới



Với $0 < m < 2$ phương trình $|x^3 - 3x| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Chú ý $y = |x^3 - 3x|$ là hàm số chẵn vì $y(-x) = y(x) = |x^3 - 3x|$ nên khi đó phương trình $|x^3 - 3x| = m$ có sáu nghiệm $-c, -b, -a, a, b, c$ trong đó $-b, -a, c$ là ba nghiệm của phương trình $x^3 - 3x = m$ (*)

Theo Viet ta có $-b - a + c = 0$, kết hợp với $a + b + c = 1 + 2\sqrt{2} \Rightarrow c = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$.

Do đó (*) có nghiệm $x = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m = \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{13 - 2\sqrt{2}}{8} \approx 1,271$

Chọn phương án **C**

□