

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

GÓC

TRONG KHÔNG GIAN

HÌNH HỌC 11

CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

MỤC LỤC

DẠNG 1: GÓC GIỮA HAI VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

DẠNG 2: GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

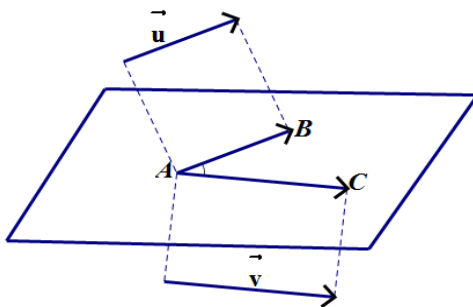
DẠNG 3: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

DẠNG 4: GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

DẠNG 1: GÓC GIỮA HAI VÉC-TƠ**A. KIẾN THỨC CHUNG****1) Góc giữa hai vectơ trong không gian:**

Định nghĩa: Trong không gian, cho trước hai vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$.

Với điểm A bất kì: $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó: $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} (0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ)$.

**2) Tích vô hướng giữa hai vectơ trong không gian:**

Trong không gian, cho trước hai vectơ $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Qui ước: $\begin{cases} \vec{u} = \vec{0} \\ \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$ thì $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

*** Phương pháp**

Cách 1: dùng định nghĩa.

Cách 2: dùng tích vô hướng của 2 vectơ, tính $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ rồi suy ra $(\vec{u}, \vec{v})$.

Đặc biệt, với $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ thì $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$.

B. BÀI TẬP**MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU**

Câu 1. (TH) Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

B. $\alpha = 30^\circ$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

D. $\alpha = 60^\circ$.

Câu 2. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

A. 45° .

B. 90° .

C. 120° .

D. 60° .

Câu 3. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'})$.

A. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 0$. B. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 1$. C. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{1}{2}$. D.

$\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ bằng

A. 0° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Câu 5. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai vector $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng

A. 120° . B. 60° . C. 30° . D. 150° .

Câu 6. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$, góc giữa hai vector $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG}$ là

A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 120° .

Câu 7. (TH) Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm cạnh AB . Khi đó góc giữa 2 vector $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 135° . B. 150° . C. 120° . D. 30° .

Câu 8. (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60° . B. 45° . C. 120° . D. 90° .

Câu 9. (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 120° .

Câu 10. (TH) Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M , N , P , Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC , CB , BC' và $C'A$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CC'}$?

A. 45° . B. 120° . C. 60° . D. 90° .

Câu 11. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a . Góc giữa hai vector $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 60° . B. 120° . C. 30° . D. 90° .

Câu 12. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a . Góc giữa hai vector $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 60° . B. 120° . C. 30° . D. 90° .

Câu 13. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 14. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA = SB = 2a$, $AB = a$. Gọi φ là góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AS}$. Tính $\cos \varphi$?

- A. $\cos \varphi = -\frac{7}{8}$ B. $\cos \varphi = -\frac{1}{4}$ C. $\cos \varphi = \frac{7}{8}$ D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$

Câu 15. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chọn mệnh đề **sai**?

- A. $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CD}) = 120^\circ$. B. $(\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{AD}) = 90^\circ$. C. $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BD}) = 90^\circ$. D. $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$.

Câu 16. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA = SB = a\sqrt{6}$, $CD = 2a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AS}$. Tính $\cos \varphi$.

- A. $\cos \varphi = \frac{-2}{\sqrt{6}}$. B. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{6}}$. D. $\cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Câu 17. (TH) Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O' . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OO'}$?

- A. 60° . B. 45° . C. 120° . D. 90° .

Câu 18. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$?

- A. 60° . B. 120° . C. 45° . D. 90° .

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 19. (VD) Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; \vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Xét hai vectơ $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$. B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. C. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 20. (VD) Cho tứ diện đều $ABCD$ có M là trung điểm của BC . Đặt $\alpha = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD})$. Chọn mệnh đề đúng

- A. $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$. B. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{6}$. D. Đáp số khác.

Câu 21. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$?

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 120° .

Câu 22. (VD) Cho tứ diện đều $S.ABC$ và M, N lần lượt là trung điểm của BC và SA . Cô-sin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{BN}$ bằng.

- A. $-\frac{1}{2}$. B. -1 . C. $-\frac{2}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 23. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đường cao và đáy là tam giác ABC vuông tại B , $BC = a$. Hai mặt phẳng (SCA) và (SCB) hợp với nhau một góc 60° và $\widehat{BSC} = 45^\circ$. Tính cosin của góc $\alpha = \widehat{ASB}$.

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1: GÓC GIỮA HAI VÉC-TƠ

MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 1. (TH) Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

B. $\alpha = 30^\circ$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

D. $\alpha = 60^\circ$.

Lời giải

Chọn A

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Do đó: } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3}{8}.$$

Câu 2. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

A. 45° .

B. 90° .

C. 120° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn B

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp AE \\ AE \parallel DH \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp DH \Rightarrow (\widehat{AB, DH}) = 90^\circ.$$

Câu 3. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'})$.

A. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 0$. **B.** $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 1$.

C. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{1}{2}$. **D.** $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$BD \perp AC \parallel A'C' \Rightarrow BD \perp A'C' \Rightarrow \cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 0.$$

Câu 4. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ bằng

A. 0° .

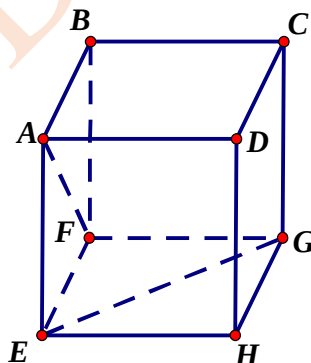
B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn B



Nhận xét $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ nên $(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AC}) = \widehat{FAC}$.

Tam giác FAC là tam giác đều nên $\widehat{FAC} = 60^\circ$.

Câu 5. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai vector $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng

A. 120° .

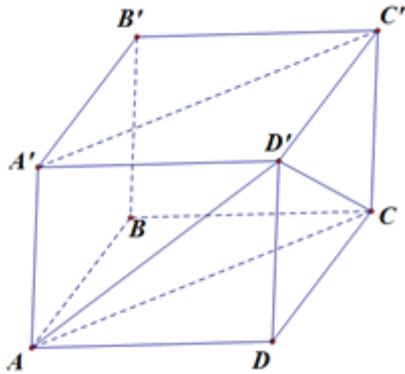
B. 60° .

C. 30° .

D. 150° .

Lời giải

Chọn B



Ta có $(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{D'AC} = 60^\circ$, do tam giác $\triangle ACD'$ đều.

Câu 6. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$, góc giữa hai vector $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG}$ là

A. 45° .

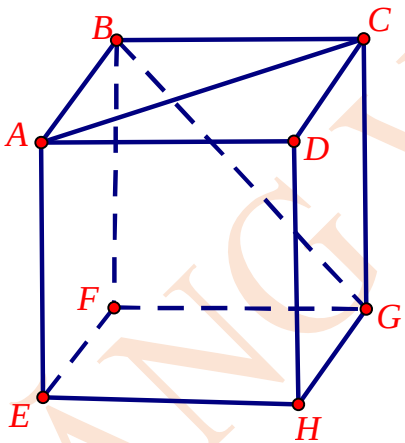
B. 30° .

C. 60° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn C



Gọi cạnh hình lập phương bằng a .

Ta có $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

Lại có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BG} = 2a^2 \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BG}) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BG}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BG}) = 60^\circ$.

Câu 7. (TH) Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm cạnh AB . Khi đó góc giữa 2 vector $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 135° .

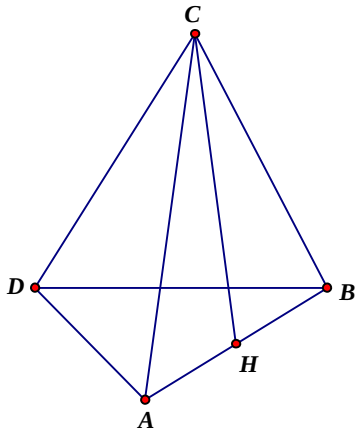
B. 150° .

C. 120° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn B



Gọi A' là điểm sao cho $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA'}$. Khi đó $(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CA'}) = \widehat{HCA'}$.

ΔABC đều $\Rightarrow \widehat{ACH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{HCA'} = 150^\circ$.

Vậy $(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AC}) = 150^\circ$.

Câu 8. (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60° .

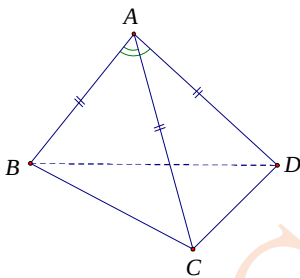
B. 45° .

C. 120° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$$

Câu 9. (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 45° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn B

Ta có BAC và BAD là 2 tam giác đều, I là trung điểm của AB nên $CI = DI$ (2 đường trung tuyến của 2 tam giác đều chung cạnh AB) nên CID là tam giác cân ở I . Do đó $IJ \perp CD$.

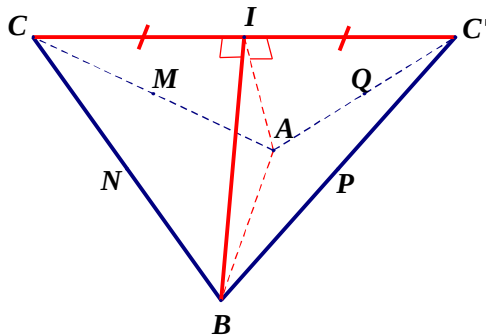
Câu 10. (TH) Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M , N , P , Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC , CB , BC'

và $C'A$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CC'}$?

A. 45° .B. 120° .C. 60° .D. 90° .

Lời giải

Chọn D

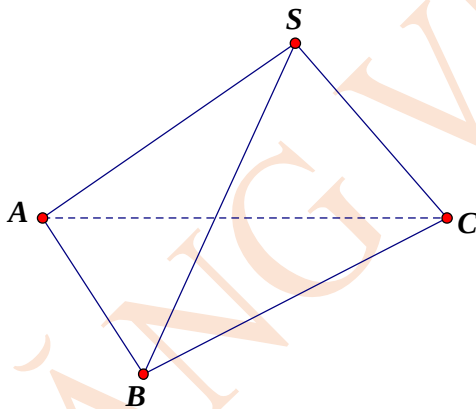
Gọi I là trung điểm CC' $\triangle CAC'$ cân tại $A \Rightarrow CC' \perp AI$ (1) $\triangle CBC'$ cân tại $B \Rightarrow CC' \perp BI$ (2) $\xrightarrow{(1),(2)} CC' \perp (AIB) \Rightarrow CC' \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$ Kết luận: góc giữa $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{AB}$ là 90° .

Câu 11. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a . Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 60° .B. 120° .C. 30° .D. 90° .

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } \cos(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{SB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC}}{a^2} = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{a^2} = \frac{-\frac{a^2}{2} + 0}{a^2} = -\frac{1}{2}.$$

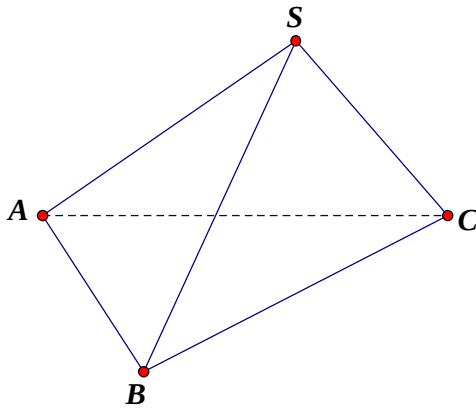
Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 120° .

Câu 12. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a . Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 60° .B. 120° .C. 30° .D. 90° .

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } \cos(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{SB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC}}{a^2} = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{a^2} = \frac{-\frac{a^2}{2} + 0}{a^2} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy góc giữa hai vector $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 120° .

Câu 13. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120° .

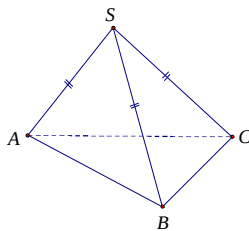
B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B



Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} \\ &= SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB} = 0 \\ \Rightarrow (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Câu 14. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA = SB = 2a$, $AB = a$. Gọi φ là góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AS}$. Tính $\cos \varphi$?

A. $\cos \varphi = -\frac{7}{8}$

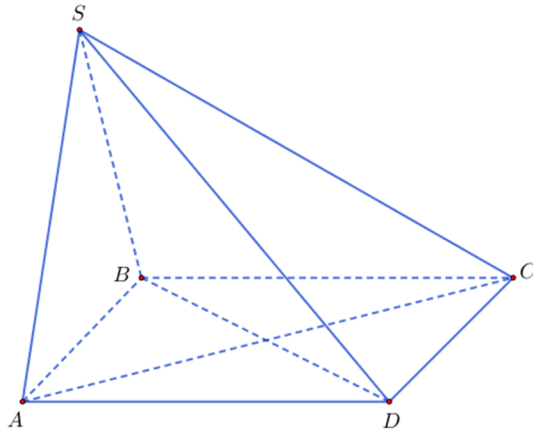
B. $\cos \varphi = -\frac{1}{4}$

C. $\cos \varphi = \frac{7}{8}$

D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } SB^2 = (\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow SB^2 = AS^2 - 2\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} + AB^2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{SB^2 - SA^2 - AB^2}{2} = -\frac{a^2}{2}.$$

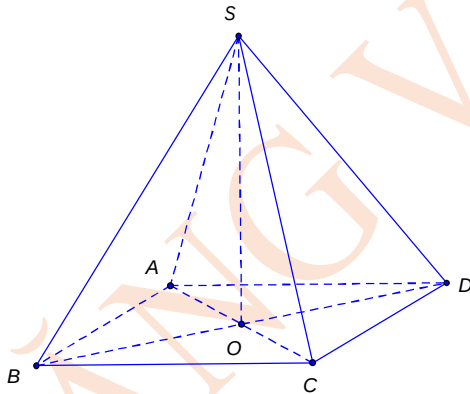
$$\text{Vậy } \cos \varphi = \cos(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AS}) = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AS}}{|\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{AS}|} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a \cdot 2a} = -\frac{1}{4}.$$

Câu 15. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chọn mệnh đề **sai**?

- A.** $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CD}) = 120^\circ$. **B.** $(\widehat{SO}, \widehat{AD}) = 90^\circ$. **C.** $(\widehat{SA}, \widehat{BD}) = 90^\circ$. **D.** $(\widehat{SA}, \widehat{CD}) = 60^\circ$.

Lời giải

Chọn A



* Các mặt bên của hình chóp là các tam giác đều.

$$* (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}) = \widehat{SAB} = 60^\circ.$$

$$* \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AD \Rightarrow (\widehat{SO}, \widehat{AD}) = 90^\circ.$$

$$* \begin{cases} BD \perp SO \text{ (do } SO \perp (ABCD)) \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA \Rightarrow (\widehat{SA}, \widehat{BD}) = 90^\circ.$$

$$* (\widehat{SA}, \widehat{CD}) = (\widehat{SA}, \widehat{AB}) = \widehat{SAB} = 60^\circ.$$

Câu 16. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA = SB = a\sqrt{6}$, $CD = 2a\sqrt{2}$

. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AS}$. Tính $\cos \varphi$.

A. $\cos \varphi = \frac{-2}{\sqrt{6}}$.

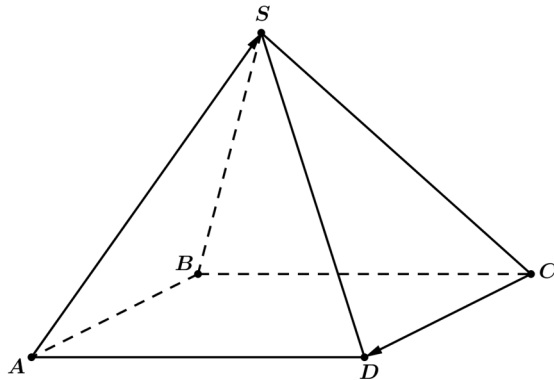
B. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

D. $\cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $ABCD$ là hình bình hành $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Do đó góc giữa hai vector $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AS}$ bù với góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AS} \Rightarrow \cos \varphi = -\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AS}) = -\cos \widehat{SAB} = -\frac{AS^2 + AB^2 - SB^2}{2 \cdot AS \cdot AB}$

$$= -\frac{6a^2 + 8a^2 - 6a^2}{2 \cdot a\sqrt{6} \cdot 2a\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 17. (TH) Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O' . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OO'}$?

A. 60° .

B. 45° .

C. 120° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D

Vì $ABCD$ và $ABC'D'$ là hình vuông nên $AD \parallel BC'$; $AD = BC' \Rightarrow ADBC'$ là hình bình hành. Mà O ; O' là tâm của 2 hình vuông nên O ; O' là trung điểm của BD và $AC' \Rightarrow OO'$ là đường trung bình của $ADBC' \Rightarrow OO' \parallel AD$.

Mặt khác, $AD \perp AB$ nên $OO' \perp AB \Rightarrow (\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{AB}) = 90^\circ$.

Câu 18. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$?

A. 60° .

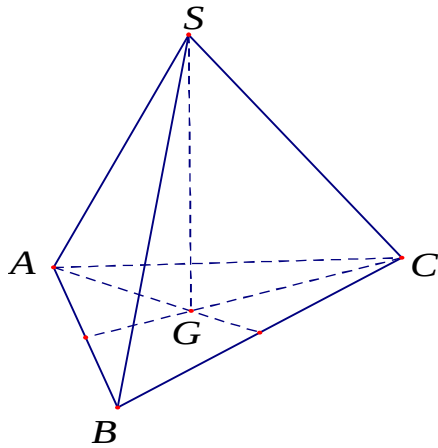
B. 120° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải.

Chọn D



Ta có: $\triangle SAB = \triangle SBC = \triangle SCA$ ($c - g - c$) $\Rightarrow AB = BC = CA$.

Do đó tam giác ABC đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

Vì hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$

nên hình chiếu của S trùng với G

Hay $SG \perp (ABC)$.

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BG \\ AC \perp SG \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBG)$

Suy ra $AC \perp SB$.

Vậy góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 90° .

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 19. (VD) Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; \vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Xét hai vector $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$.

B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

C. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$.

D. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a})^2 + 2(\vec{b})^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$.

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x})^2} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + 4(\vec{b})^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}} = 2\sqrt{3}.$$

$$|\vec{y}| = \sqrt{(\vec{y})^2} = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{5}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{4}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

Câu 20. (VD) Cho tứ diện đều $ABCD$ có M là trung điểm của BC . Đặt $\alpha = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD})$. Chọn mệnh đề đúng

A. $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

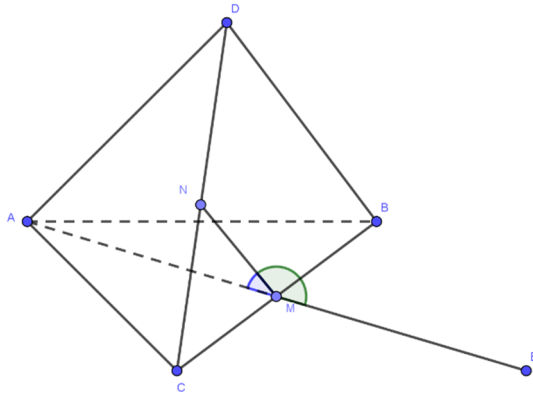
B. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

D. Đáp số khác.

Lời giải

Chọn C



Dựng $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD}$.

Khi đó $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MN}) = 180^\circ - (\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MA}) = 180^\circ - \widehat{AMN}$.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{AMN} = \frac{AM^2 + MN^2 - AN^2}{2 \cdot AM \cdot MN} = \frac{\frac{3}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 - \frac{3}{4}AB^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB \cdot \frac{1}{2} \cdot AB} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$$\text{Nên } \cos \alpha = \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD}) = \cos(180^\circ - \widehat{AMN}) = -\cos \widehat{AMN} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 21. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90° .

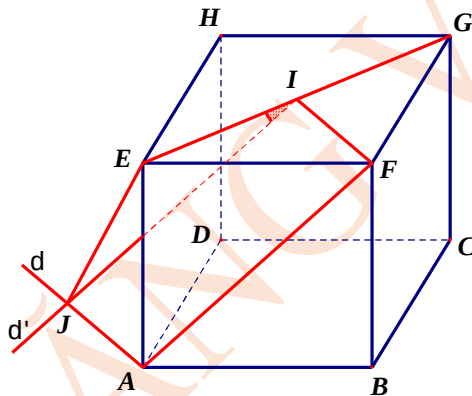
B. 60° .

C. 45° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn B



Đặt cạnh của hình lập phương trên là a

Gọi I là giao trung điểm EG

Qua A kẻ đường thẳng $d // FI$

Qua I kẻ đường thẳng $d' // FA$

Suy ra d cắt d' tại J .

Từ đó suy ra $(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{AF}) = \widehat{EIJ} = \alpha$

$$IJ = AF = 2EI = 2FI = 2AJ = a\sqrt{2}$$

$$EJ^2 = AE^2 + AJ^2 = \frac{3}{2}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{EI^2 + IJ^2 + AJ^2}{2.EI.EJ} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD có số đo là $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Câu 22. (VD) Cho tứ diện đều $S.ABC$ và M, N lần lượt là trung điểm của BC và SA . Cô-sin góc giữa hai vector $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{BN}$ bằng.

A. $-\frac{1}{2}$.

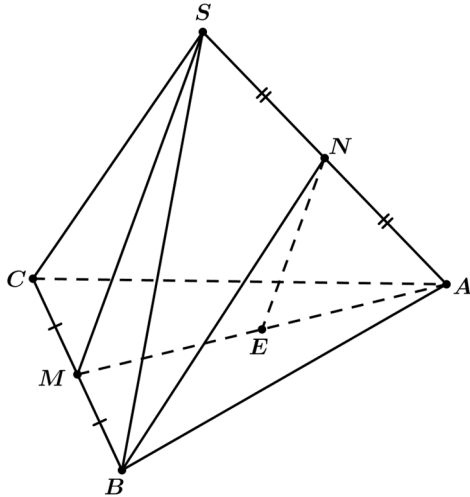
B. -1 .

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Do tam giác SBC đều, tam giác SMA cân tại M nên $SM \perp BM, MN \perp SA$.

Đặt cạnh $AB = 1 \Rightarrow SM = BN = \frac{\sqrt{3}}{2}; MN^2 = SM^2 - SN^2 = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BN}) &= \frac{\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{BN}}{SM \cdot BN} = \frac{\overrightarrow{SM} \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN})}{SM \cdot BN} = \frac{\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{MN}}{SM \cdot BN} = \frac{-MS \cdot MN \cdot \cos(\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{MN})}{SM \cdot BN} \\ &= \frac{-MN^2}{SM \cdot BN} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Câu 23. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đường cao và đáy là tam giác ABC vuông tại B , $BC = a$. Hai mặt phẳng (SCA) và (SCB) hợp với nhau một góc 60° và $\widehat{BSC} = 45^\circ$. Tính cosin của góc

$\alpha = \widehat{ASB}$.

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

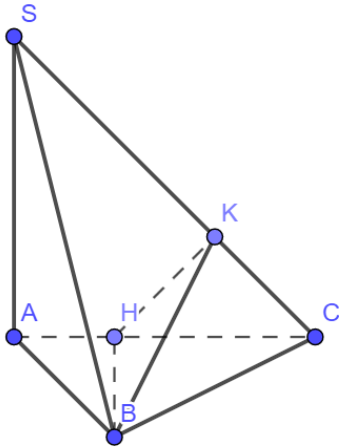
B. $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B



Xét $\triangle ABC$ kẻ BH vuông góc với AC tại H .

Xét $\triangle SAC$ kẻ HK vuông góc với SC tại K .

Có $BH \perp SC$ ($BH \perp (SAC)$), $HK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$

$$(\widehat{SCA}, \widehat{SCB}) = (\widehat{KH}, \widehat{KB}) = \widehat{HKB} = 60^\circ.$$

Có $\triangle SBC$ vuông tại B do $BC \perp (SAB)$

Mà $\widehat{BSC} = 45^\circ$

Do đó $\triangle SBC$ vuông cân tại B .

$$\Rightarrow BK = KC = a \frac{\sqrt{2}}{2}, BC = BS = a.$$

Xét $\triangle BHK$ vuông tại H có $HK = \frac{1}{2}BK = a \frac{\sqrt{2}}{4}$, $HB = a \frac{\sqrt{6}}{4}$.

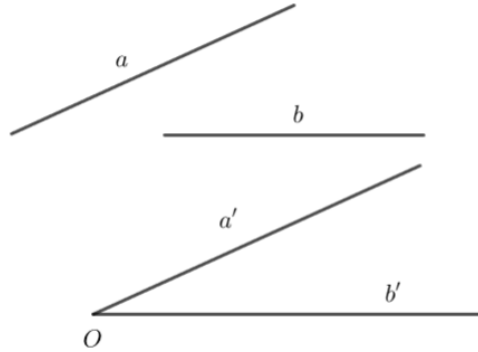
Xét $\triangle HKC$ vuông tại K có $HC = \sqrt{KH^2 + KC^2} = a \frac{\sqrt{10}}{4}$

Xét $\triangle ABC$ có $BH \perp AC$ tại H có $AB = \sqrt{\frac{BC^2 \cdot BH^2}{BC^2 - BH^2}} = a \frac{\sqrt{15}}{5}$.

$$\text{Vậy } \cos \widehat{ASB} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

DẠNG 2: GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG**A. KIẾN THỨC CHUNG****1. Góc giữa hai đường thẳng**

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b .

**- Nhận xét**

- Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì vectơ $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là vectơ chỉ phương của d .
- Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của nó.
- Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai vectơ chỉ phương cùng phương.
- Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.
- Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng a và $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng b và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.

Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0° .

$$(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{D'C'}) \approx 131^\circ 48'.$$

2. Xác định góc giữa hai đường thẳng bằng phương pháp vectơ.*** Phương pháp**

Tìm hai vectơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt của hai đường thẳng a, b . Khi đó góc giữa hai đường thẳng xác

$$\text{định bởi } \cos(a, b) = \frac{|\vec{u}_1 \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|}.$$

Chú ý:

$$(\widehat{a, b}) = (\vec{u}, \vec{v}) \text{ nếu } 0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 90^\circ.$$

$$(\widehat{a, b}) = 180^\circ - (\vec{u}, \vec{v}) \text{ nếu } 90^\circ < (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$$

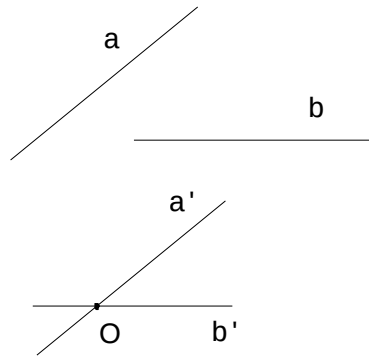
3. Tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian bằng phương pháp dựng hình.*** Phương pháp**

Để xác định góc tạo bởi hai đường thẳng trong không gian a, b ta làm như sau:

Cách 1:

- Chọn một điểm O và qua O kẻ các đường thẳng $a' // a, b' // b$.

- Chọn tam giác OAB sao cho $A \in a', B \in b'$, sử dụng hệ thức lượng để tính giá trị lượng giác góc $\widehat{AOB}$. Từ đó suy ra góc giữa a, b .

**Lưu ý:**

+ Ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng a, b , rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

+ Để tính góc giữa hai đường thẳng a, b ta có thể dùng tính chất sau: $\begin{cases} (a, c) = \alpha \\ b // c \end{cases} \Rightarrow (a, b) = \alpha$

Cách 2:

- Tìm các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng này, giả sử các vectơ chỉ phương ấy là $\vec{u}, \vec{v}$.

- Gọi α là góc giữa 2 đường thẳng a, b ta có: $\cos \alpha = |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right|$

Lưu ý: Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau, ta chỉ cần chứng minh: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

B. BÀI TẬP**MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT**

Câu 1. (NB) Góc giữa hai đường thẳng bất kì trong không gian là góc giữa

- A. Hai đường thẳng cắt nhau và không song song với chúng.
- B. Hai đường thẳng lần lượt vuông góc với chúng.
- C. Hai đường thẳng cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với chúng.
- D. Hai đường thẳng cắt nhau và lần lượt vuông góc với chúng.

Câu 2. (NB) Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c .
- B. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.
- C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.
- D. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song hoặc trùng với c .

Câu 3. (NB) Cho hai đường thẳng a, b lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}, \vec{v}$. Giả sử $(\vec{u}, \vec{v}) = 125^\circ$. Tính góc giữa hai đường thẳng a, b .

- A. 55° .
- B. 125° .
- C. -55° .
- D. -125° .

Câu 4. (NB) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, CD . Góc giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ là

- A. 90° .
- B. 45° .
- C. 60° .
- D. 30° .

Câu 5. (NB) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng BC, SA bằng

- A. 45° . B. 120° . C. 90° . D. 60° .

Câu 6. (NB) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Góc giữa hai đường thẳng SA và BC là

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Câu 7. (NB) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$; $BC = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$; $SA = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC .

- A. 45° . B. 135° . C. 60° . D. 90° .

Câu 8. (NB) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . $AA' = AB = a$. Tính góc giữa đường thẳng AB' và BC .

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 9. (NB) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 10. (NB) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng.

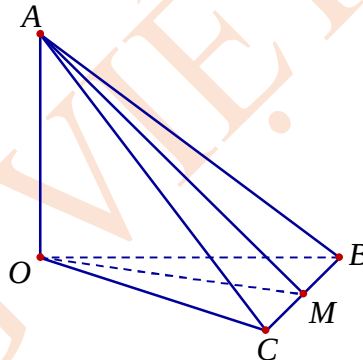
- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 11. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 45° . Gọi I là trung điểm của cạnh CD . Góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng (Số đo góc được làm tròn đến hàng đơn vị).

- A. 48° . B. 51° . C. 42° . D. 39° .

MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 12. (TH) Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng



- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

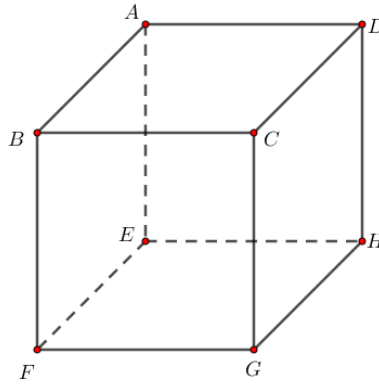
Câu 13. (TH) Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD .

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 14. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo góc $(\widehat{MN, SB})$ bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Câu 15. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh a .



Hãy xác định góc giữa (EG, FA) .

A. 90° .B. 120° .C. 45° .D. 60° .

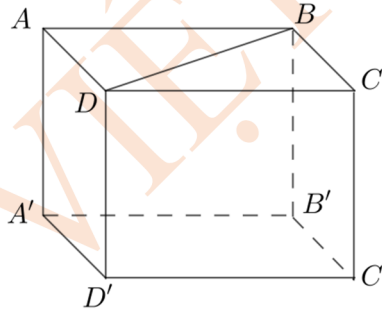
Câu 16. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Tính góc giữa hai đường thẳng SM và BC .

A. 60° .B. 30° .C. 90° .D. 120° .

Câu 17. (TH) Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.D. $\frac{1}{2}$.

Câu 18. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BD và $A'D'$ bằng

A. 90° .B. 0° .C. 60° .D. 45° .

Câu 19. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là

A. 90° .B. 60° .C. 30° .D. 45° .

Câu 20. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = BC = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB , và SC , $MN = a\sqrt{3}$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng SA và BC .

A. 30° .B. 150° .C. 60° .D. 120° .

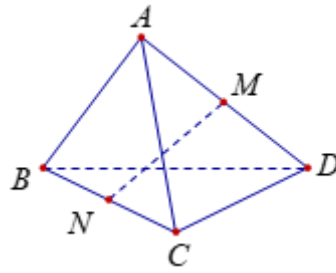
Câu 21. (TH) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và BC . Tính góc giữa hai đường thẳng IJ và SC .

A. 90° .B. 30° .C. 45° .D. 60° .

Câu 22. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$; gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng

A. 45° .B. 90° .C. 30° .D. 60° .

Câu 23. (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30° .



- A. $MN = \frac{a}{2}$. B. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $MN = \frac{a}{4}$.

Câu 24. (TH) Tứ diện đều có góc tạo bởi hai cạnh đối diện bằng

- A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

Câu 25. (TH) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P là trung điểm AB, BC, CD . Biết góc MNP bằng 120° . Góc giữa hai đường thẳng AC và BD bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 120° . D. 30° .

Câu 26. (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Biết $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa AB và CD .

- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

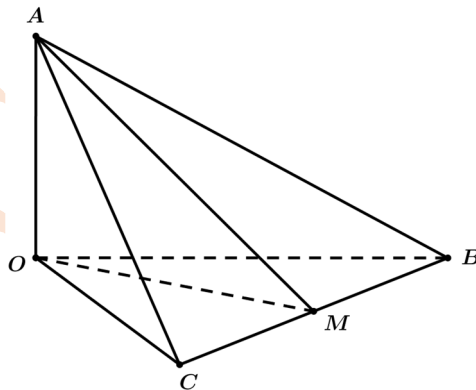
Câu 27. (TH) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi với $AB = BD = AA' = a$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AC' và BC .

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 28. (TH) Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Câu 29. (TH) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng



- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 30. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a, SB = 2a, SC = 3a, \widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^\circ, \widehat{CSA} = 90^\circ$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và BC . Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$. B. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{7}$. C. $\cos \alpha = 0$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Câu 31. (TH) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a, SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Tính góc giữa hai đường thẳng SB và CD .

- A. 90° . B. 135° . C. 60° . D. 45° .

Câu 32. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA = SB = AB$. Góc giữa SA và CD bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 33. (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có 4 mặt là tam giác đều. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 34. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC) , $\triangle ABC$ vuông tại A . Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 35. (TH) Cho tứ diện đều $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD . Góc giữa MN và AB bằng

- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 36. (TH) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác SBC là tam giác đều. Tính góc giữa hai đường thẳng AD và SB .

- A. 60° . B. 30° . C. 120° . D. 90° .

Câu 37. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính góc giữa hai đường thẳng MN và SD .

- A. 45° . B. 135° . C. 60° . D. 90° .

Câu 38. (TH) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a , M là trung điểm cạnh BC . Khi đó, $\cos(\widehat{AB, DM})$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 39. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC .

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 40. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SB . Tính góc giữa hai đường thẳng SA và CM .

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Câu 41. (TH) Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .

- A. 45° . B. 120° . C. 60° . D. 90° .

Câu 42. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng BC, SA bằng

- A. 45° . B. 120° . C. 90° . D. 60° .

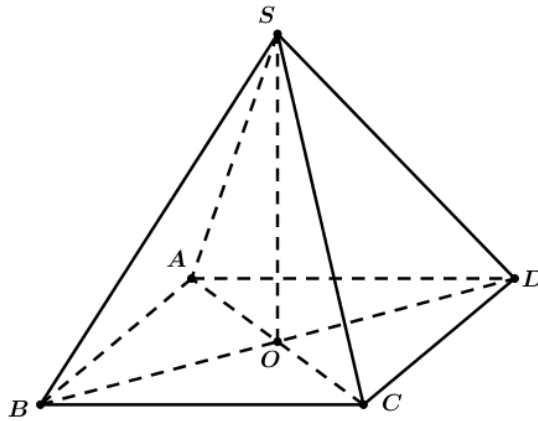
Câu 43. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có I, J tương ứng là trung điểm của BC, BB' . Góc giữa hai đường thẳng AC, IJ bằng

- A. 30° . B. 120° . C. 60° . D. 40° .

Câu 44. (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = AD = \sqrt{2}$, $AC = BD = \sqrt{3}$, $BC = 1$. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng BC và DA là

- A. $(\widehat{BC, DA}) = 30^\circ$. B. $(\widehat{BC, DA}) = 90^\circ$. C. $(\widehat{BC, DA}) = 60^\circ$. D. $(\widehat{BC, DA}) = 45^\circ$.

Câu 45. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$ (tham khảo hình bên). Cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng



A. $-\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Câu 46. (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh $AB = AC = AD = BC = BD = a$ và $CD = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng

A. 30° .

B. 90° .

C. 45° .

D. 60° .

Câu 47. (TH) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật và $\widehat{CAD} = 40^\circ$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ là

A. 20° .

B. 80° .

C. 40° .

D. 50° .

Câu 48. (TH) Tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 45° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

Câu 49. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SC, BC . Số đo góc giữa IJ và CD bằng

A. 90° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 45° .

Câu 50. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng

A. 30° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 51. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = 1$; $\widehat{BAC} = 60^\circ$; $\widehat{BAD} = 90^\circ$; $\widehat{DAC} = 120^\circ$. Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AG và CD , trong đó G là trọng tâm tam giác BCD .

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 52. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC

A. $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{35}}$.

C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

Câu 53. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Hãy tính góc tạo bởi các cặp cạnh đối của tứ diện.

A. 45° .

B. 60° .

C. 30° .

D. 90° .

Câu 54. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BB' . cosin của góc hợp bởi MN và AC' là

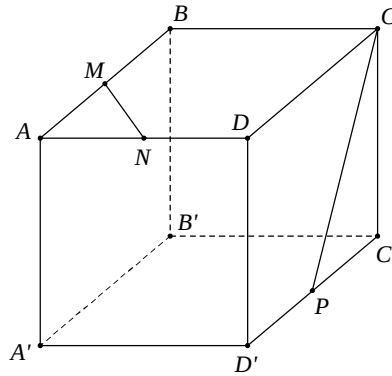
A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 55. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, AD, C'D'$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và CP .



A. $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 56. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = BC = CA = 4$, $AD = 5$, $CD = 6$, $BD = 7$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

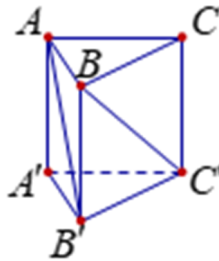
A. 120° .

B. 60° .

C. 150° .

D. 30° .

Câu 57. (VD) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. 60° .

B. 45° .

C. 90° .

D. 30° .

Câu 58. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm các cạnh AB , BC , $C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP .

A. 60° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 45° .

Câu 59. (VD) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC , AD . Biết $AB = CD = a$ và $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 30° .

B. 90° .

C. 120° .

D. 60° .

Câu 60. (VD) Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

A. 0° .

B. 120° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 61. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a = 4\sqrt{2}$ cm, cạnh bên SC vuông góc với đáy và $SC = 2$ cm. Gọi M , N là trung điểm của AB và BC . Góc giữa hai đường thẳng SN và CM là

A. 30° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Câu 62. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi I là trung điểm của cạnh AB . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và $B'I$ được kết quả là

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Câu 63. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA , SB , SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC$. Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó góc giữa hai đường thẳng SI và BC bằng

A. 120° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Câu 64. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với (BCD) . Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của AD . Góc giữa hai đường thẳng AB và CE bằng

A. 30° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Câu 65. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Góc giữa đường thẳng BG và đường thẳng SA bằng

A. $\arccos \frac{\sqrt{33}}{22}$.

B. $\arccos \frac{\sqrt{330}}{110}$.

C. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{11}$.

D. $\arccos \frac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 66. (VD) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 9a$, $AB = 6a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = \frac{1}{2}MC$. Cosin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{7}{2\sqrt{48}}$.

C. $\frac{\sqrt{19}}{7}$.

D. $\frac{14}{3\sqrt{48}}$.

Câu 67. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi E , F lần lượt là trung điểm của BC và AD . Biết $EF = a\sqrt{3}$, tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

A. 60° .

B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Câu 68. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm AD , BC . Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30° .

A. $MN = \frac{a}{2}$.

B. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $MN = \frac{a}{4}$.

Câu 69. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh AC . Góc giữa hai đường thẳng AB và DE bằng

A. 30° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Câu 70. (VD) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI , với I là trung điểm của AD .

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 71. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC là?

A. 45° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

Câu 72. (VD) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4a$, lấy H , K lần lượt trên các cạnh AB , AD sao cho $BH = 3HA$, $AK = 3KD$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S sao cho $\widehat{SBH} = 30^\circ$. Gọi E là giao điểm của CH và BK . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SE và BC .

A. $\frac{28}{5\sqrt{39}}$.

B. $\frac{18}{5\sqrt{39}}$.

C. $\frac{36}{5\sqrt{39}}$.

D. $\frac{9}{5\sqrt{39}}$.

Câu 73. (VD) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAA'}$, $\widehat{A'AB}$ đều bằng 60° . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AA' , CD . Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, giá trị của $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 74. (VD) Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$; $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

A. 0° .B. 120° .C. 60° .D. 90° .

Câu 75. (VD) Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của BC . Khi đó cosin của góc giữa hai đường thẳng nào sau đây có giá trị bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

A. (AB, DM) .B. (AD, DM) .C. (AM, DM) .D. (AB, AM) .

Câu 76. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , độ dài cạnh bên cũng bằng a . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC . Góc giữa MN và SC bằng

A. 30° .B. 45° .C. 60° .D. 90° .

Câu 77. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$, $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Tính cosin góc φ giữa SM và DN .

A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{4}$.B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$.C. $\cos \varphi = \frac{5}{4}$.D. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 2: GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

- Câu 1.** (NB) Góc giữa hai đường thẳng bất kì trong không gian là góc giữa
- A. Hai đường thẳng cắt nhau và không song song với chúng.
 - B. Hai đường thẳng lần lượt vuông góc với chúng.
 - C. Hai đường thẳng cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với chúng.
 - D. Hai đường thẳng cắt nhau và lần lượt vuông góc với chúng.

Lời giải

Chọn C

- Câu 2.** (NB) Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c .
 - B. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.
 - C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.
 - D. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song hoặc trùng với c .

Lời giải

Chọn D

Phương án A: chỉ đúng trong cùng một mặt phẳng nhưng thiếu trường hợp b trùng với c không đúng trong không gian.

Phương án B: góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó khi góc giữa hai véc tơ chỉ phương là góc nhọn, nếu góc giữa véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó là góc tù thì sai.

Phương án C: góc giữa hai đường thẳng có thể là góc vuông...

- Câu 3.** (NB) Cho hai đường thẳng a, b lần lượt có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}, \vec{v}$. Giả sử $(\vec{u}, \vec{v}) = 125^\circ$. Tính góc giữa hai đường thẳng a, b .

- A. 55° .
- B. 125° .
- C. -55° .
- D. -125° .

Lời giải

Chọn A

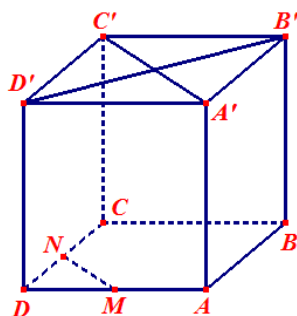
Hai đường thẳng a, b lần lượt có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}, \vec{v}$ và $(\vec{u}, \vec{v}) = 125^\circ$ thì góc giữa hai đường thẳng a, b bằng $180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$.

- Câu 4.** (NB) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, CD . Góc giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ là

- A. 90° .
- B. 45° .
- C. 60° .
- D. 30° .

Lời giải

Chọn A

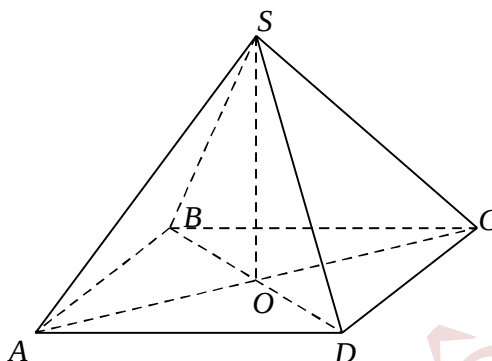


Ta có $MN \parallel A'C'$ mà $A'C' \perp B'D' \Rightarrow MN \perp B'D'$.

- Câu 5.** (NB) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng BC , SA bằng
- A. 45° . B. 120° . C. 90° . D. 60° .

Lời giải

Chọn D

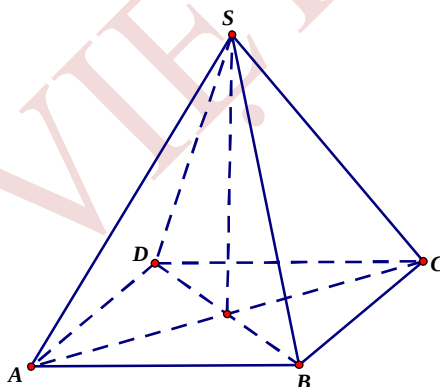


Vì $AD \parallel BC$ nên góc giữa BC và SA là góc giữa AD và SA .
 Hình chóp có tất cả các cạnh đều bằng a nên $\triangle SAD$ đều, suy ra $(AD, SA) = 60^\circ$.

- Câu 6.** (NB) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Góc giữa hai đường thẳng SA và BC là
- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Lời giải

Chọn B



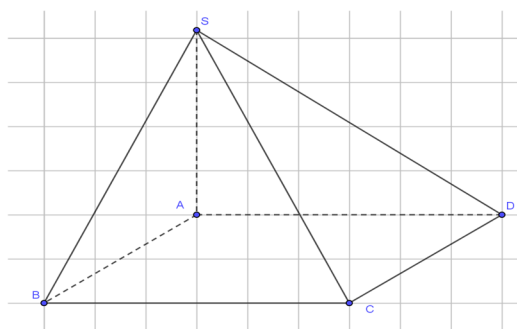
Do $BC \parallel AD$ nên $(SA, BC) = (SA, AD)$. Mà tam giác SAD đều nên $(SA, AD) = 60^\circ$.

Vậy $(SA, BC) = 60^\circ$.

- Câu 7.** (NB) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$; $BC = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$; $SA = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC .
- A. 45° . B. 135° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow (\widehat{SD; BC}) = (\widehat{SD; AD})$.

Xét $\triangle SAD$ vuông tại A có $SA = AD \Rightarrow \triangle SAD$ vuông cân tại A .

Suy ra $(\widehat{SD; BC}) = (\widehat{SD; AD}) = \widehat{SDA} = 45^\circ$.

Câu 8. (NB) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . $AA' = AB = a$. Tính góc giữa đường thẳng AB' và BC .

A. 45° .

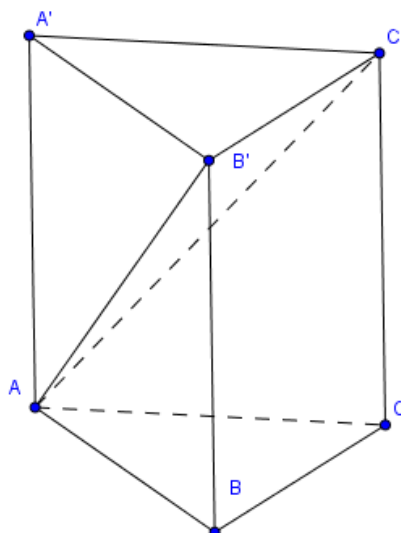
B. 60° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Có $BC \parallel B'C' \Rightarrow (\widehat{AB', BC}) = (\widehat{AB', B'C'})$

$B'C' \perp A'B'$, $AA' \perp (A'B'C')$ (tính chất lăng trụ đứng) $\Rightarrow AA' \perp B'C'$.

$\Rightarrow B'C' \perp (AA'B'B) \Rightarrow B'C' \perp AB' \Rightarrow (\widehat{AB', BC}) = 90^\circ$.

Câu 9. (NB) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng

A. 45° .

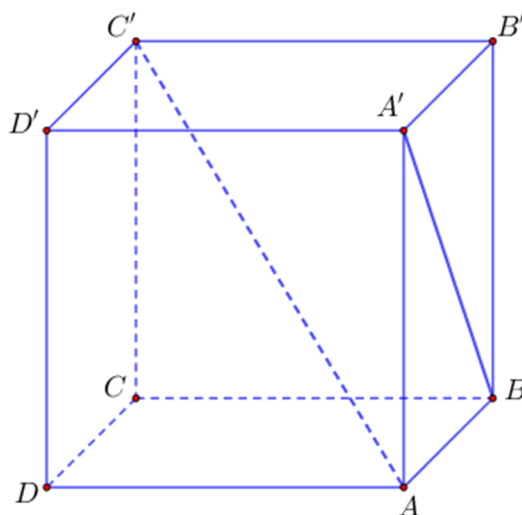
B. 60° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AB' \perp A'B \\ B'C' \perp A'B \end{array} \right\} \Rightarrow A'B \perp (AB'C') \Rightarrow A'B \perp AC'.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng 90° .

Câu 10. (NB) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng.

A. 60° .

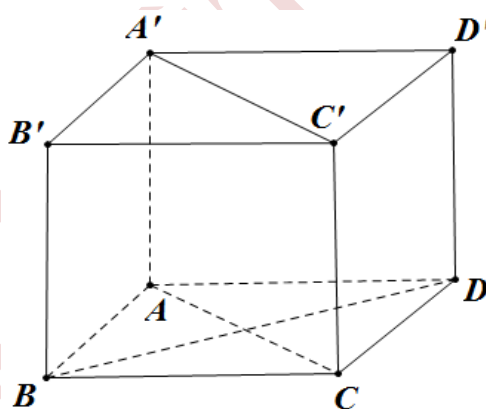
B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có: } (\widehat{A'C'; BD}) = (\widehat{AC; BD}) = 90^\circ$$

Câu 11. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 45° . Gọi I là trung điểm của cạnh CD . Góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng (Số đo góc được làm tròn đến hàng đơn vị).

A. 48° .

B. 51° .

C. 42° .

D. 39° .

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Gọi K là trung điểm của AB .

Giả sử hình vuông $ABCD$ cạnh a , $(\widehat{SD, (SAB)}) = 45^\circ \Rightarrow SA = AD = a$

Gọi K là trung điểm của AB . Vì $KD \parallel BI$ nên góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng góc giữa hai đường thẳng KD và SD và là góc $\widehat{SDK}$. Ta có $KD = SK = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $SD = a\sqrt{2}$.

Gọi H là trung điểm của SD . Ta có $\cos \widehat{SDK} = \frac{HD}{KD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng 51° .

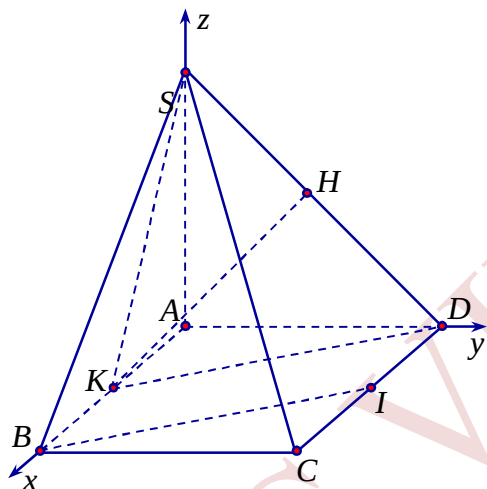
Cách 2. Giả sử hình vuông $ABCD$ cạnh a , $(\widehat{SD, (SAB)}) = 45^\circ \Rightarrow SA = AD = a$.

Xét trong không gian tọa độ $Oxyz$ trong đó: $O \equiv A$, $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AD$, $Oz \equiv AS$. Khi đó ta có:

$$B(a; 0; 0), I\left(\frac{a}{2}; a; 0\right), D(0; a; 0), S(0; 0; a)$$

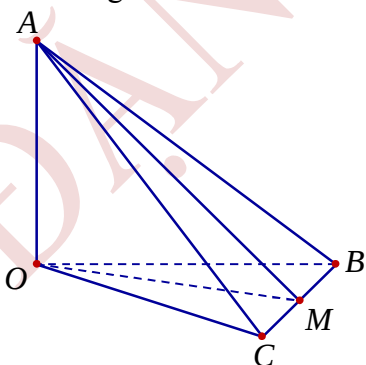
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{IB} = \left(\frac{a}{2}; -a; 0\right), \overrightarrow{SD} = (0; -a; a)$$

$$\text{Mặt khác: } \cos(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{SD}) = \frac{a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} \cdot \sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{SD}) \approx 51^\circ.$$



MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 12. (TH) Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng



A. 90° .

B. 30° .

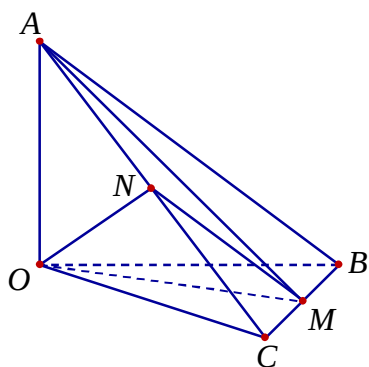
C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Gọi N là trung điểm của AC , ta có $MN \parallel AB \Rightarrow (OM; AB) = (OM; MN) = \widehat{OMN}$.
Do $\triangle OAB = \triangle OCB = \triangle OAC$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau nên
 $OM = ON = MN = \frac{AB}{2} \Rightarrow (OM; AB) = \widehat{OMN} = 60^\circ$.

Cách 2:

Ta có: $\overrightarrow{OA}^2 = a^2$, $\overrightarrow{OB}^2 = b^2$, $\overrightarrow{OC}^2 = c^2$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$, $|\overrightarrow{AB}| = a\sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{OM}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \right) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(OM; AB) = \left| \cos(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{AB}) \right| = \frac{|\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (OM; AB) = 60^\circ.$$

Câu 13. (TH) Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD .

A. 60° .

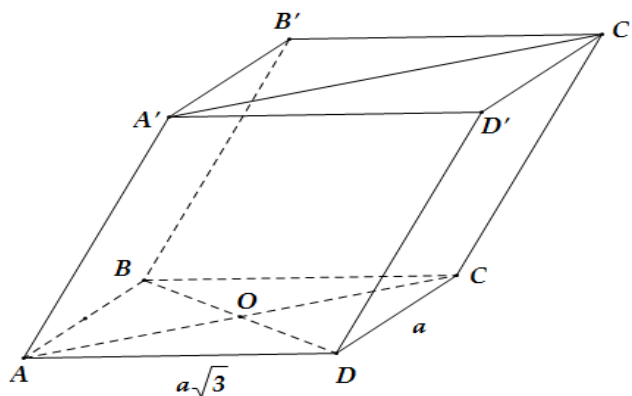
B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$

Ta có $(\widehat{A'C', BD}) = (\widehat{AC, BD})$.

Ta đi tính góc $\widehat{AOD}$

Xét tam giác ABD vuông tại A , ta có:

$$\tan \widehat{BDA} = \frac{AB}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{BDA} = 30^\circ = \widehat{OAD} \text{ (do tam giác } AOD \text{ cân tại } O) \Rightarrow \widehat{AOD} = 120^\circ$$

$$\text{Vậy } (\widehat{A'C'}, \widehat{BD}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Câu 14. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo góc $(\widehat{MN}, \widehat{SB})$ bằng

A. 45° .

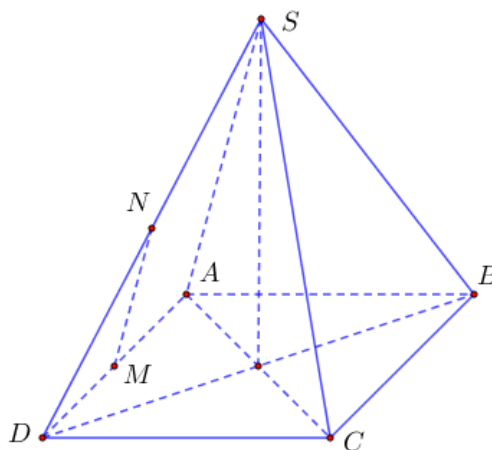
B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D

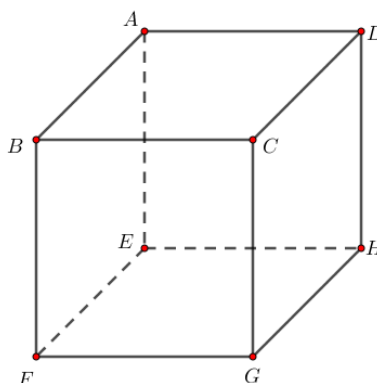


Ta có: Xét (SAD) có $MN \parallel SA$

Mà $(SA, SB) = 60^\circ$ ($\triangle SAB$ đều)

$$\Rightarrow (MN, SB) = 60^\circ.$$

Câu 15. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh a .



Hãy xác định góc giữa (EG, FA) .

A. 90° .

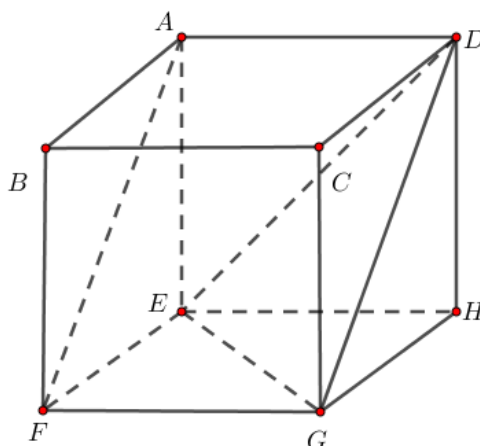
B. 120° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D

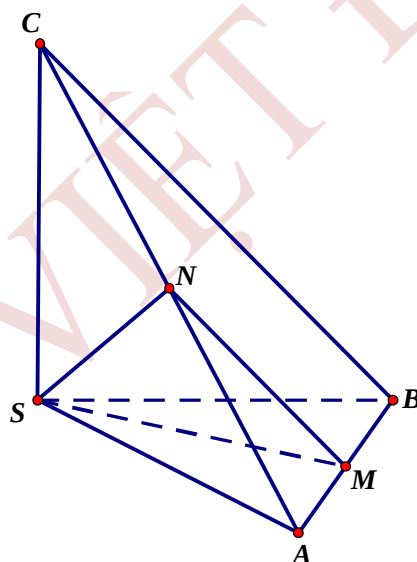


Vì $AF \parallel DG$ nên $(\widehat{EG, FA}) = (\widehat{EG, DG}) = \widehat{EGD} = 60^\circ$ (vì EDG là tam giác đều).

- Câu 16.** (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Tính góc giữa hai đường thẳng SM và BC .
- A.** 60° . **B.** 30° . **C.** 90° . **D.** 120° .

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của AC . Khi đó góc giữa SM và BC bằng góc giữa SM và MN .

Ta có:

- ☐ $AB = BC = CA$
- ☐ $SM = \frac{1}{2} AB$ (trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền).
- ☐ $SN = \frac{1}{2} AC$ (trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền).
- ☐ $MN = \frac{1}{2} BC$.

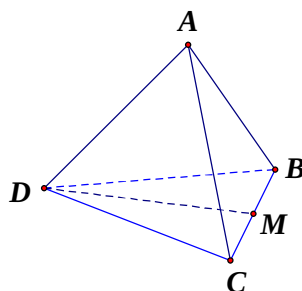
Suy ra $SM = MN = SN$ hay tam giác SMN đều. Do đó $(\widehat{SM; BC}) = \widehat{SMN} = 60^\circ$.

- Câu 17.** (TH) Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\widehat{AB, DM})$ bằng:

- A.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

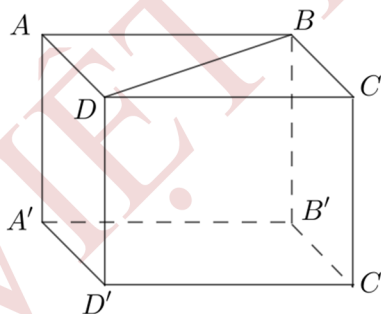


Giả sử tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a ta có: $DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Ta lại có: } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a \cdot a \cdot \cos 60^\circ + a \cdot a \cdot \cos 120^\circ}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 18. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BD và $A'D'$ bằng

A. 90° .B. 0° .C. 60° .D. 45° .

Lời giải

Chọn D

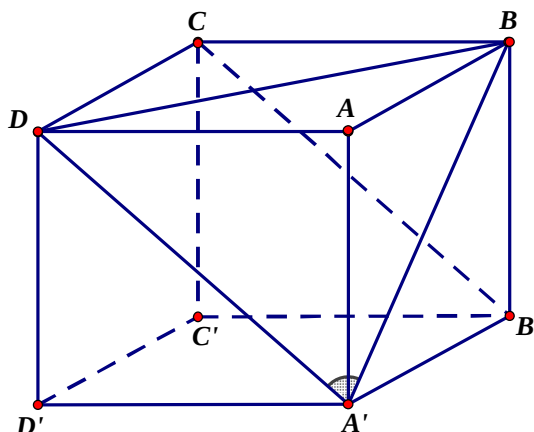
Ta có $AD \parallel A'D'$ nên $(BD, A'D') = (BD, AD) = 45^\circ$

Câu 19. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là

A. 90° .B. 60° .C. 30° .D. 45° .

Lời giải

Chọn B



Ta có $B'C \parallel A'D \Rightarrow \widehat{(A'B; B'C)} = \widehat{(A'B; A'D)} = \widehat{DA'B}$.

Xét $\triangle DA'B$ có $A'D = A'B = BD$ nên $\triangle DA'B$ là tam giác đều.

Vậy $\widehat{DA'B} = 60^\circ$.

Câu 20. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = BC = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB , và SC , $MN = a\sqrt{3}$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng SA và BC .

A. 30° .

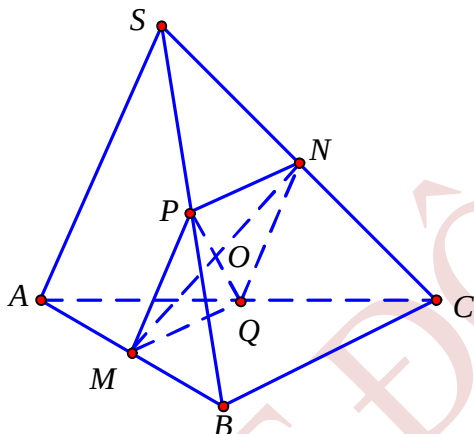
B. 150° .

C. 60° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn C



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của SB, AC . Khi đó MP, NQ, MQ, PN lần lượt là đường trung bình của tam giác SAB, SAC, ABC, SBC nên $MP \parallel NQ \parallel SA; PN \parallel MQ \parallel BC$ và $MP = NQ = \frac{1}{2}SA = a; PN = MQ = \frac{1}{2}BC = a$. Suy ra góc giữa hai đường thẳng SA và BC là góc $\widehat{PMQ}$ và tứ giác $MPNQ$ là hình thoi.

Xét hình thoi $MPNQ$: gọi O giao điểm của hai đường chéo; vì $MN = a\sqrt{3}$ nên $MO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

trong tam giác vuông MOQ thì $OQ = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2} \Rightarrow PQ = a$, khi đó tam giác PMQ đều

hay $\widehat{PMQ} = 60^\circ$.

Câu 21. (TH) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và BC . Tính góc giữa hai đường thẳng IJ và SC .

A. 90° .

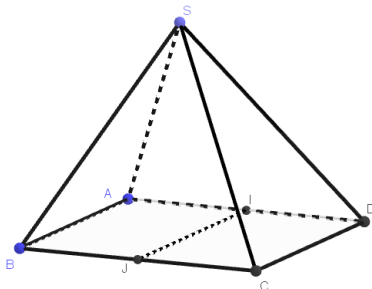
B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Vì I và J lần lượt là trung điểm của AD và BC nên $IJ \parallel CD$.

Suy ra góc giữa IJ và SC là góc giữa SC và CD hay là $\widehat{SCD}$.

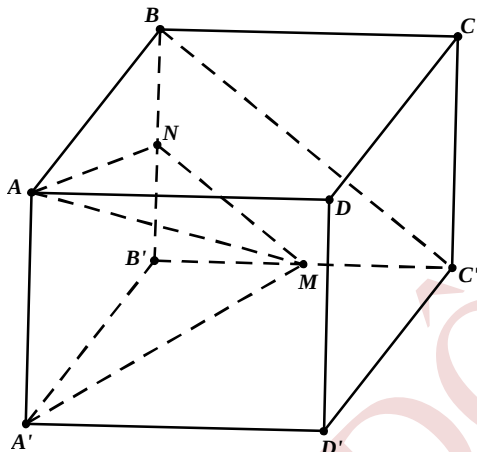
Vì $SABCD$ là hình chóp đều nên SCD đều suy ra $\widehat{SCD} = 60^\circ$.

Hay $\widehat{(IJ, SC)} = 60^\circ$.

- Câu 22.** (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$; gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng
- A.** 45° . **B.** 90° . **C.** 30° . **D.** 60° .

Lời giải

Chọn A



Giả sử cạnh của hình lập phương là $a > 0$.

Gọi N là trung điểm đoạn thẳng BB' . Khi đó, $MN \parallel BC'$ nên $(AM, BC') = (AM, MN)$.

Xét tam giác $A'B'M$ vuông tại B' ta có: $A'M = \sqrt{A'B'^2 + B'M^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác $AA'M$ vuông tại A' ta có: $AM = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} = \sqrt{a^2 + \frac{5a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$.

Có $AN = A'M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $MN = \frac{BC'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

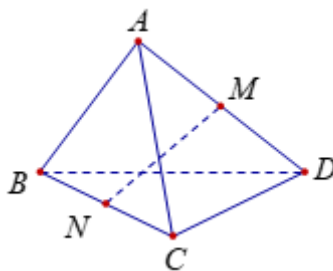
Trong tam giác AMN ta có:

$$\cos \widehat{AMN} = \frac{MA^2 + MN^2 - AN^2}{2 \cdot MA \cdot MN} = \frac{\frac{9a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{6a^2}{4} \cdot \frac{4}{6a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\widehat{AMN} = 45^\circ$.

Vậy $(AM, BC') = (AM, MN) = \widehat{AMN} = 45^\circ$.

- Câu 23.** (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30° .



A. $MN = \frac{a}{2}$.

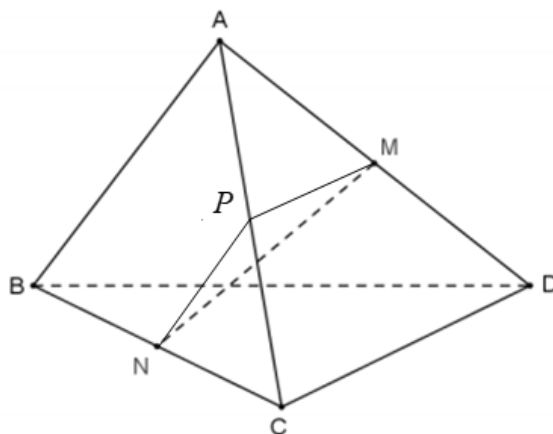
B. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $MN = \frac{a}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm của AC . Suy ra $PM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = PN$. Do đó tam giác PMN cân tại P . Lại có góc giữa AB và MN bằng 30° nên góc giữa MN và PN bằng 30° . Vậy tam giác PMN là tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 120° .

Ta có $PN \cdot \sqrt{3} = MN$ nên $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 24. (TH) Tứ diện đều có góc tạo bởi hai cạnh đối diện bằng

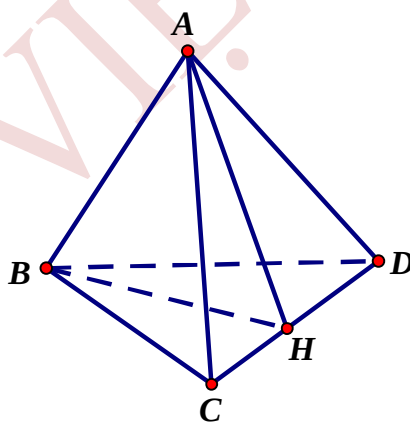
A. 90° .

B. .

C. 30° .D. 45° .

Lời giải.

Chọn A



Trong $\triangle BCD$, gọi H là chân đường cao hạ từ B .

$\Rightarrow H$ là trung điểm của CD và $BH \perp CD$ (1)

$\Rightarrow AH \perp CD$ (2)

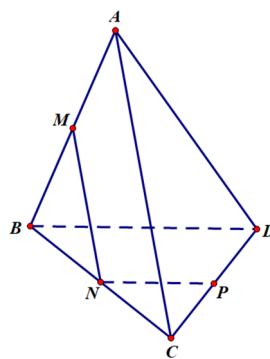
Từ (1); (2) $\Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$

Tương tự với các cặp cạnh đối còn lại.

Câu 25. (TH) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P là trung điểm AB, BC, CD . Biết góc MNP bằng 120° . Góc giữa hai đường thẳng AC và BD bằng

A. 60° .B. 45° .C. 120° .D. 30° .

Lời giải

**Chọn A**

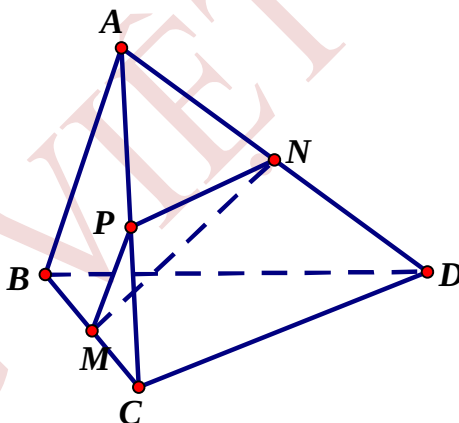
Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC nên $MN \parallel AC$.

N, P lần lượt là trung điểm của CB, CD nên $NP \parallel BD$.

Do đó góc giữa đường thẳng AC và BD bằng góc giữa hai đường thẳng MN và NP và bằng $\widehat{MNP}$ hoặc $180^\circ - \widehat{MNP}$.

Từ giả thiết ta có $\widehat{MNP} = 120^\circ > 90^\circ$ nên góc đường thẳng AC và BD bằng 60° .

Câu 26. (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Biết $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa AB và CD .

A. 45° .**B.** 30° .**C.** 90° .**D.** 60° .**Lời giải****Chọn D**

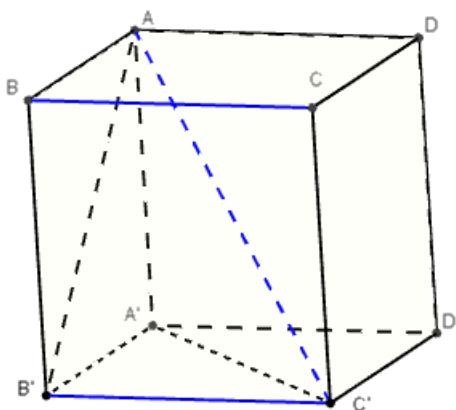
Kẻ $MP \parallel AB, NP \parallel CD$ nên góc giữa AB và CD là góc giữa MP và NP .

$$\cos \widehat{MPN} = \frac{MP^2 + NP^2 - MN^2}{2 \cdot MP \cdot NP} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \widehat{MPN} = 120^\circ.$$

Vậy góc giữa AB và CD bằng 60° .

Câu 27. (TH) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi với $AB = BD = AA' = a$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AC' và BC .

A. $\frac{1}{5}$.**B.** $\frac{3}{5}$.**C.** $\frac{1}{4}$.**D.** $\frac{3}{4}$.**Lời giải****Chọn D**



$$BC \parallel B'C' \Rightarrow (\widehat{AC', BC}) = (\widehat{AC', B'C'}).$$

$ABCD$ là hình thoi với $AB = BD = AA' = a \Rightarrow AC = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = a\sqrt{3}$,

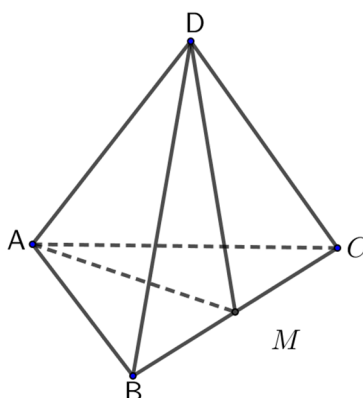
$$AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = 2a, AB' = a\sqrt{2}.$$

$$\cos(\widehat{AC', BC}) = \left| \cos \widehat{AC'B'} \right| = \left| \frac{AC'^2 + B'C'^2 - AB'^2}{2 \cdot AC' \cdot B'C'} \right| = \frac{3}{4}.$$

- Câu 28.** (TH) Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng
 A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Lời giải

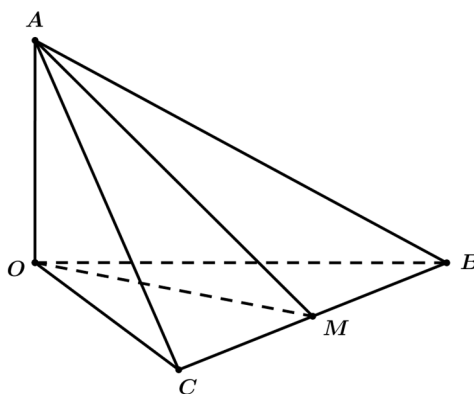
Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC . Vì các tam giác DBC và ABC đều nên

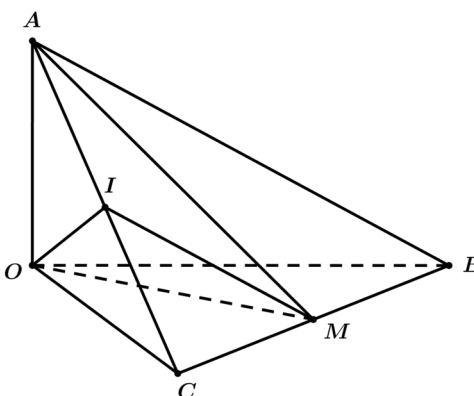
$$\begin{cases} BC \perp DM \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADM) \Rightarrow BC \perp AD.$$

- Câu 29.** (TH) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. 45° .B. 30° .C. 60° .D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm AC lại có M là trung điểm $BC \Rightarrow MI$ là đường trung bình của $\triangle ABC$
 $\Rightarrow MI = \frac{1}{2}AB$ (1) và $MI \parallel AB \Rightarrow (OM, AB) = (OM, MI)$

Xét $\triangle AOC$ vuông cân tại O có OI là đường trung tuyến nên $OI = \frac{1}{2}AC$. (2)

Xét $\triangle BOC$ vuông cân tại O có OM là đường trung tuyến nên $OM = \frac{1}{2}BC$. (3)

Ta có $\triangle AOC = \triangle AOB = \triangle BOC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AC = BC$ (cạnh tương ứng) (4)

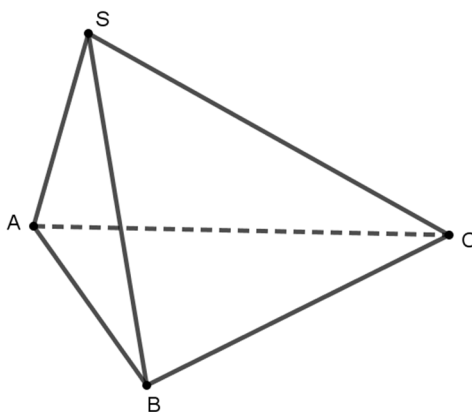
Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow MI = OM = OI \Rightarrow \triangle OIM$ là tam giác đều $\Rightarrow (OM, MI) = 60^\circ$ hay $(OM, AB) = 60^\circ$.

Câu 30. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 3a$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$.
 Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và BC . Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$.B. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{7}$.C. $\cos \alpha = 0$.D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



$$\cos \alpha = \left| \cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) \right| = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{SA \cdot BC} = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})|}{SA \cdot BC} = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}|}{SA \cdot BC}$$

$$= \frac{|SA \cdot SC \cdot \cos 90^\circ - SA \cdot SB \cdot \cos 60^\circ|}{a \cdot \sqrt{4a^2 + 9a^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Câu 31. (TH) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Tính góc giữa hai đường thẳng SB và CD .

A. 90° .

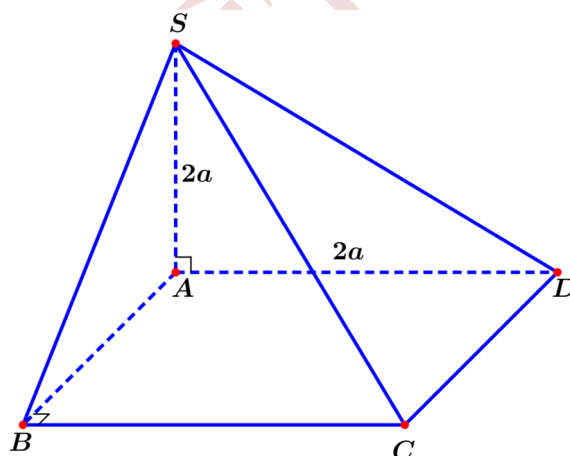
B. 135° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn D



$$\text{Có } AB \parallel CD \Rightarrow (\widehat{SB, CD}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}.$$

Tam giác SAB có $\hat{A} = 1v$, $SA = AB = 2a \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{SBA} = 45^\circ$.

$$\Rightarrow (\widehat{SB, CD}) = 45^\circ.$$

Câu 32. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA = SB = AB$. Góc giữa SA và CD bằng

A. 30° .

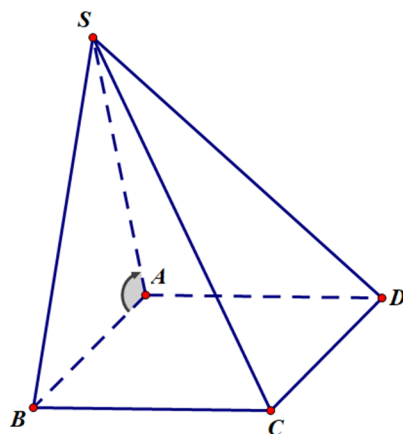
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB \parallel CD$ nên góc giữa SA và CD bằng góc giữa SA và AB và bằng $\widehat{SAB}$ hoặc $180^\circ - \widehat{SAB}$.

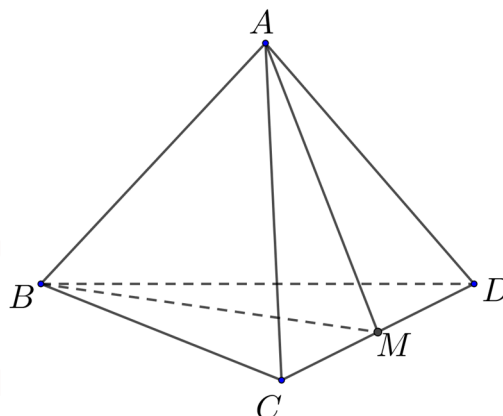
Ta có $SA = SB = AB$ nên $\triangle SAB$ đều $\Rightarrow \widehat{SAB} = 60^\circ < 90^\circ$.

Vậy góc giữa SA và CD bằng $\widehat{SAB} = 60^\circ$.

- Câu 33.** (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có 4 mặt là tam giác đều. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Ta có tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều. Gọi M là trung điểm của CD , khi đó.

$$\begin{cases} AM \perp CD \\ BM \perp CD \\ AM \cap BM = M \\ AM, BM \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM) \Rightarrow CD \perp AB.$$

Suy ra góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 90° .

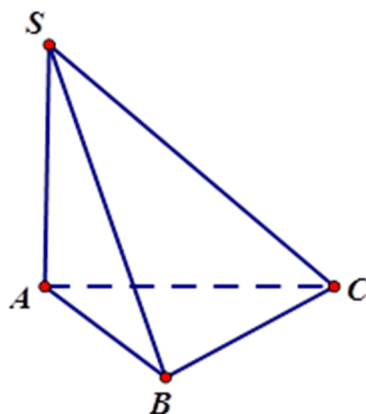
- Câu 34.** (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC) , $\triangle ABC$ vuông tại A . Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} = 0$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{SC}|} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}) = \frac{\pi}{2}.$$

Cách 2:

Ta có $AB \perp SA$ và $AB \perp AC$

$\Rightarrow AB \perp (SAC) \Rightarrow AB \perp SC$

Câu 35. (TH) Cho tứ diện đều $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD . Góc giữa MN và AB bằng

A. 30° .

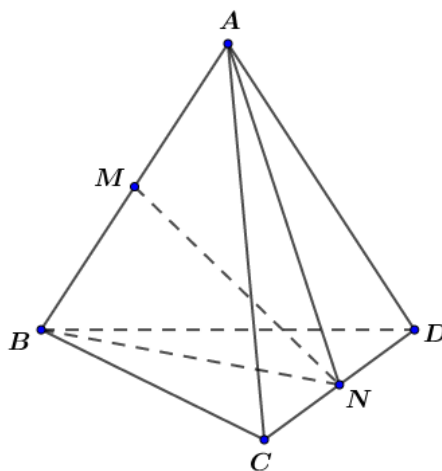
B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B



Do tứ diện đều $ABCD$ nên các cạnh của tứ diện đều bằng nhau.

$$\text{Ta có: } BN = \frac{AB\sqrt{3}}{2}; AN = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$$

Xét tam giác ABN là tam giác cân tại N và M là trung điểm của AB

$\Rightarrow MN \perp AB$

Vậy góc giữa MN và AB bằng 90°

Câu 36. (TH) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác SBC là tam giác đều. Tính góc giữa hai đường thẳng AD và SB .

A. 60° .

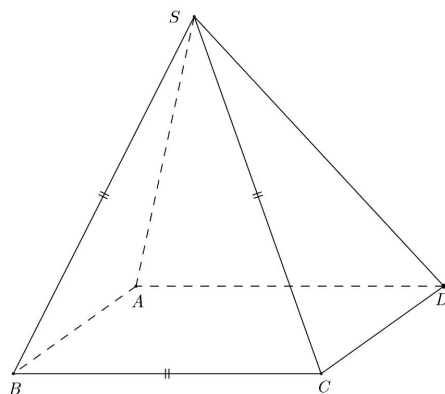
B. 30° .

C. 120° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên đường thẳng AD song song với đường thẳng BC . Suy ra góc giữa đường thẳng AD và đường thẳng SB là góc hai đường thẳng BC và SB , là góc $\widehat{SBC} = 60^\circ$.

Câu 37. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi $M; N$ lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính góc giữa hai đường thẳng MN và SD .

A. 45° .

B. 135° .

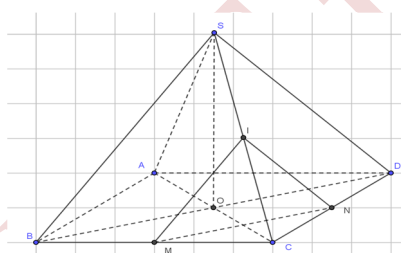
C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

:

Chọn A



Gọi I là trung điểm của SC ta có $NI \parallel SD$ nên suy ra $(\widehat{MN; SD}) = (\widehat{MN; NI})$.

Ta có $MI; MN; IN$ lần lượt là các đường trung bình của các tam giác

$$\triangle SCB; \triangle BCD; \triangle SCD \Rightarrow MI = NI = \frac{a}{2}; MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Xét $\triangle MIN$ ta có $\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \Rightarrow MN^2 = MI^2 + NI^2 \Rightarrow \triangle MIN$ vuông cân tại I .

Vậy góc $(\widehat{MN; SD}) = (\widehat{MN; NI}) = \widehat{MNI} = 45^\circ$.

Câu 38. (TH) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a , M là trung điểm cạnh BC . Khi đó, $\cos(\widehat{AB, DM})$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

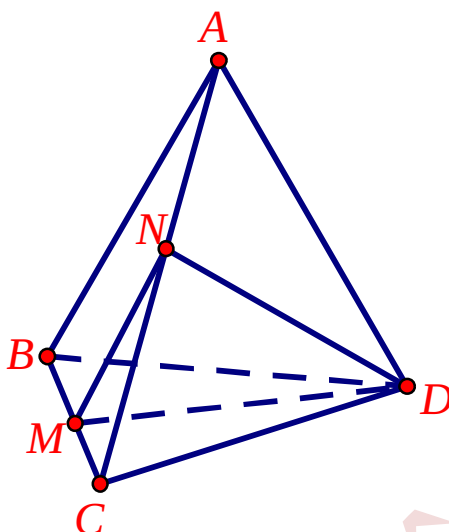
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm của $AC \Rightarrow MN \parallel AB \Rightarrow (\widehat{DM, AB}) = (\widehat{DM, MN})$.

Ta có $MN = \frac{a}{2}$, $DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow \cos \widehat{DMN} = \frac{MN^2 + MD^2 - DN^2}{2MN \cdot MD} = \frac{\frac{a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 39. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC .

A. 45° .

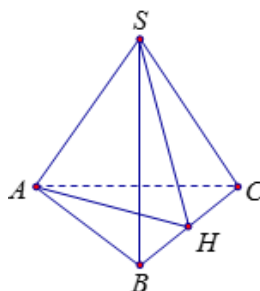
B. 60° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Cách 1:

Ta có $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AS} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = AS \cdot AC \cdot \cos \widehat{SAC} - AS \cdot AB \cdot \cos \widehat{SAB} = 0$.

Do đó số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC bằng 90° .

Cách 2: Vì $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$ nên $\triangle SAC = \triangle SAB$, suy ra $SB = SC$, nên hai tam giác

ABC và SBC là tam giác cân. Gọi H là trung điểm BC , ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAH) \perp BC$.

Vậy $SA \perp BC$.

Câu 40. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SB . Tính góc giữa hai đường thẳng SA và CM .

A. 45° .

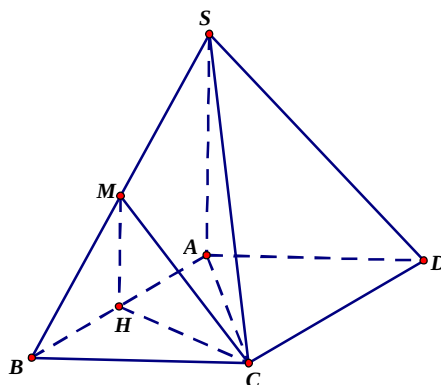
B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB , suy ra $MH \parallel SA$, do đó $(\widehat{SA, CM}) = (\widehat{MH, CM})$.

Ta có $MH = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$, tam giác ABC đều cạnh a nên $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác MHC vuông tại H có $\tan \widehat{HMC} = \frac{CH}{MH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{HMC} = 60^\circ$.

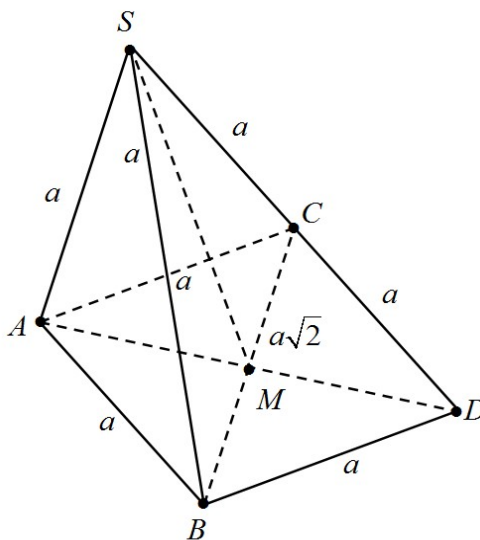
Vậy $(\widehat{MH, CM}) = 60^\circ$ hay $(\widehat{SA, CM}) = 60^\circ$.

Câu 41. (TH) Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .

A. 45° .B. 120° .C. 60° .D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Cách 1: Gọi M là trung điểm của BC .

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên tam giác ABC vuông cân tại A .

Và $BC^2 = SB^2 + SC^2$ nên tam giác SBC vuông cân tại S .

Vẽ hình chữ nhật (cũng là hình vuông) $ABDC \Rightarrow (\widehat{AB, SC}) = \widehat{SCD}$ và $SC = CD = a$.

$$AM = SM = MD = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$\Rightarrow \Delta SAM$ vuông tại M .

$$\left. \begin{array}{l} SM \perp BC \subset (ABCD) \\ SM \perp AM \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SM \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp MD.$$

$$SD^2 = SM^2 + MD^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow SD = a.$$

Suy ra tam giác SCD đều $\Rightarrow (\widehat{AB, SC}) = \widehat{SCD} = 60^\circ$.

Cách 2:

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) &= \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{SC} \cdot (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA})}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{SC \cdot SB \cdot \cos \widehat{BSC} - SC \cdot SA \cdot \cos \widehat{ASC}}{SC \cdot AB} \\ &= \frac{a \cdot a \cdot \cos 90^\circ - a \cdot a \cdot \cos 60^\circ}{a \cdot a} = \frac{-1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ. \end{aligned}$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và SC là 60° .

Câu 42. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng BC, SA bằng

A. 45° .

B. 120° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $BC \parallel AD \Rightarrow (\widehat{SA, BC}) = (\widehat{SA, AD}) = \widehat{SAD} = 60^\circ$ (vì tam giác SAD đều).

Câu 43. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có I, J tương ứng là trung điểm của BC, BB' . Góc giữa hai đường thẳng AC, IJ bằng

A. 30° .

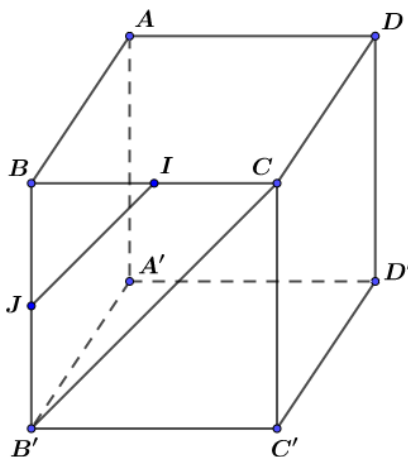
B. 120° .

C. 60° .

D. 40° .

Lời giải

Chọn C



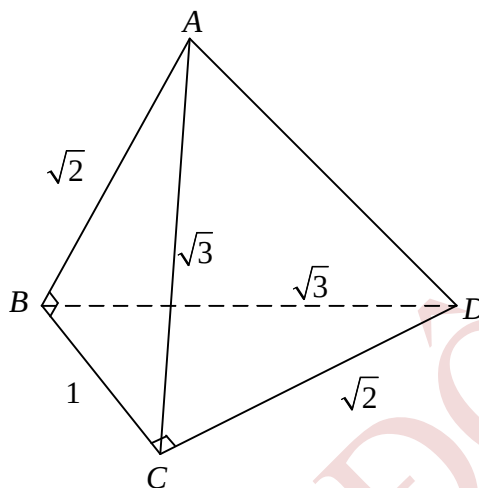
Do $IJ \parallel B'C$ nên góc giữa hai đường thẳng AC, IJ bằng góc giữa hai đường thẳng $AC, B'C$ bằng góc $\widehat{B'CA} = 60^\circ$ (vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $\Delta AB'C$ là tam giác đều).

Câu 44. (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = AD = \sqrt{2}$, $AC = BD = \sqrt{3}$, $BC = 1$. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng BC và DA là

- A. $(\widehat{BC, DA}) = 30^\circ$. B. $(\widehat{BC, DA}) = 90^\circ$. C. $(\widehat{BC, DA}) = 60^\circ$. **D. $(\widehat{BC, DA}) = 45^\circ$.**

Lời giải

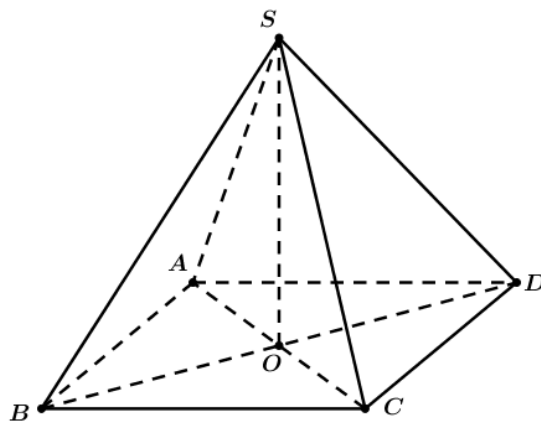
Chọn D



$$\cos(AD, BC) = \left| \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{|(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{BC}|}{AD \cdot BC} = \frac{|\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}|}{\sqrt{2}} = \frac{BC \cdot BD \cdot \cos \widehat{DBC}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow (AD, BC) = 45^\circ.$$

Câu 45. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$ (tham khảo hình bên). Cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng



A. $-\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\bullet (\widehat{AB, SC}) = (\widehat{CD, SC}) = \widehat{SCD}.$$

• Áp dụng định lý cosin cho tam giác SCD có

$$\cos C = \frac{SC^2 + CD^2 - SD^2}{2SC \cdot CD} = \frac{(2a)^2 + a^2 - (2a)^2}{2 \cdot 2a \cdot a} = \frac{1}{4}$$

Câu 46. (TH) Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh $AB = AC = AD = BC = BD = a$ và $CD = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng

A. 30° .

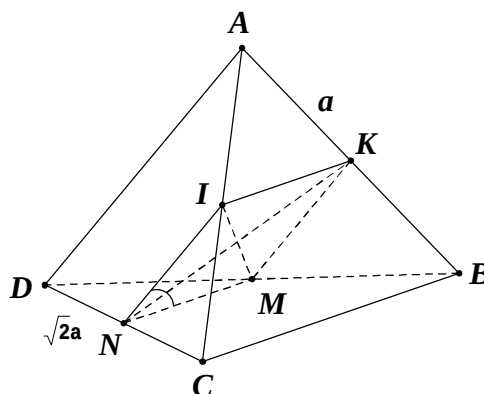
B. 90° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N, I, K lần lượt là trung điểm các cạnh BD, DC, AC, AB thì $MNIK$ là hình

thoi. $\triangle KCD$ cân tại K nên $KN \perp CD \Rightarrow KN = \sqrt{KD^2 - ND^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow \triangle NIK$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{NIK} = 60^\circ \Rightarrow (\widehat{AD, BC}) = (\widehat{IN, IK}) = \widehat{NIK} = 60^\circ$.

Câu 47. (TH) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật và $\widehat{CAD} = 40^\circ$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ là

A. 20° .B. 80° .C. 40° .D. 50° .

Lời giải

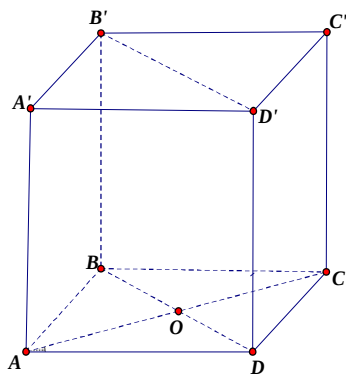
Chọn B

Gọi O là giao điểm của BD và AC .

Vì $B'D' \parallel BD$ nên $(\widehat{B'D', AC}) = (\widehat{BD, AC}) = \alpha$, với $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Mặt khác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $OA = OD$ hay $\triangle OAD$ cân tại O .

Do đó $\widehat{ODA} = \widehat{OAD} = 40^\circ$. Suy ra $\widehat{AOD} = 100^\circ$.



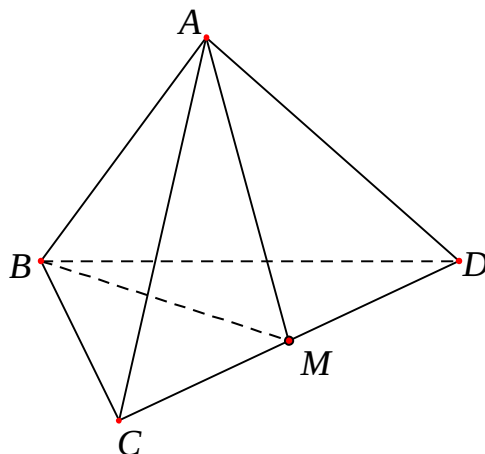
Vậy $\alpha = 80^\circ$.

Câu 48. (TH) Tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 45° .B. 90° .C. 60° .D. 30° .

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm CD .

Khi đó $\begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp BM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM) \Rightarrow CD \perp AB$.

Câu 49. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SC, BC . Số đo góc giữa IJ và CD bằng

A. 90° .

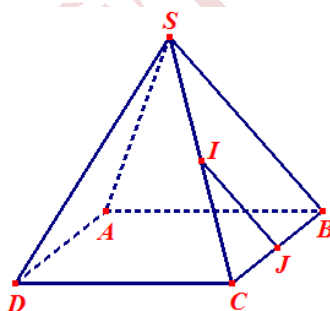
B. 30° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn C



Ta có $IJ \parallel SB, CD \parallel AB \Rightarrow (IJ, CD) = (SB, AB) = 60^\circ$.

Câu 50. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng

A. 30° .

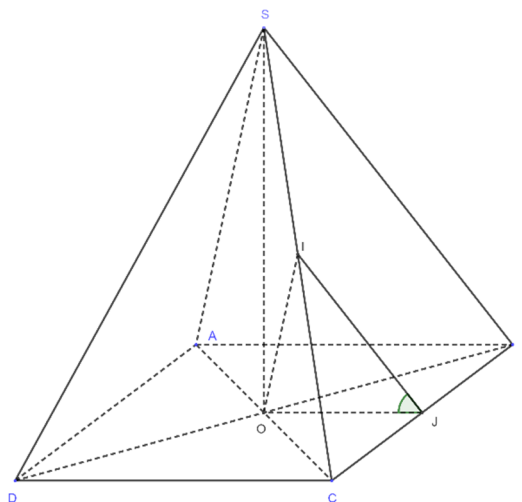
B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



$O = AC \cap BD \Rightarrow O$ là trung điểm của BD và AC

$\Rightarrow OJ$ song song với $DC \Rightarrow \widehat{(IJ, CD)} = \widehat{(IJ, OJ)} = \widehat{IJO}$

OJ là đường trung bình $\triangle BCD \Rightarrow OJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$

IJ là đường trung bình $\triangle SBC \Rightarrow IJ = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2}$

lại có OI là đường trung bình $\triangle SAC \Rightarrow OI = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow \triangle OIJ$ là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{IJO} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{(IJ, CD)} = 60^\circ$

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 51. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = 1$; $\widehat{BAC} = 60^\circ$; $\widehat{BAD} = 90^\circ$; $\widehat{DAC} = 120^\circ$. Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AG và CD , trong đó G là trọng tâm tam giác BCD .

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

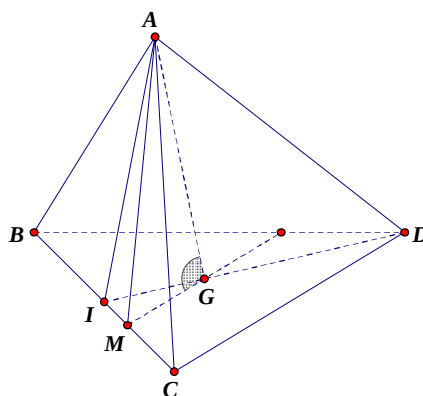
B. $\frac{1}{3}$.

C. $-\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



* $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow BC = 1$.

* $\triangle ACD$ cân tại A có $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}$.

* $\triangle ABD$ vuông cân tại A có $BD = \sqrt{2}$.

* $\triangle BCD$ có $CD^2 = BC^2 + BD^2 \Rightarrow \triangle BCD$ vuông tại B .

Dựng đường thẳng d qua G và song song CD , cắt BC tại M .

Ta có $MG \parallel CD \Rightarrow (AG, CD) = (AG, MG)$.

Gọi I là trung điểm của BC , xét $\triangle BDI$ vuông tại B có $DI = \sqrt{BD^2 + BI^2} = \sqrt{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$.

Ta có $\frac{IM}{IC} = \frac{MG}{CD} = \frac{IG}{ID} = \frac{1}{3} \Rightarrow IM = \frac{1}{3} \cdot IC = \frac{1}{3} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{1}{6}$; $MG = \frac{1}{3} \cdot CD = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $IG = \frac{1}{3} \cdot ID = \frac{1}{2}$.

Xét $\triangle AIM$ vuông tại I có $AM = \sqrt{AI^2 + IM^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

$$\cos \widehat{AID} = \frac{AI^2 + ID^2 - AD^2}{2AI \cdot ID} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$AG = \sqrt{AI^2 + IG^2 - 2AI \cdot IG \cdot \cos \widehat{AID}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Xét $\triangle AMG$ có

$$\cos(AG, MG) = |\cos \widehat{AGM}| = \left| \frac{AG^2 + GM^2 - AM^2}{2 \cdot AG \cdot GM} \right| = \left| \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \right| = \frac{1}{6}.$$

Câu 52. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC

A. $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

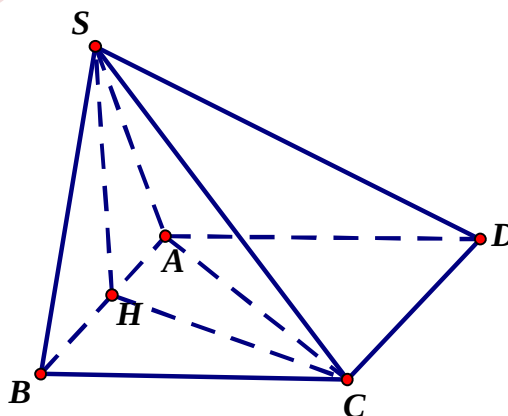
B. $\frac{2}{\sqrt{35}}$.

C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn B



$$(SC, (ABCD)) = (SC, CH) = \widehat{SCH} = 60^\circ.$$

$$\cos(SB, AC) = \frac{|\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{SB \cdot AC}$$

$$\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HB})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} AB^2 = 2a^2$$

$$AC = a\sqrt{5}, CH = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}, SH = CH \cdot \tan \widehat{SCH} = a\sqrt{6}.$$

$$SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{(a\sqrt{6})^2 + a^2} = a\sqrt{7}.$$

$$\cos(SB, AC) = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{SB \cdot AC} = \frac{2a^2}{a\sqrt{7} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{35}}.$$

Câu 53. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Hãy tính góc tạo bởi các cặp cạnh đối của tứ diện.

A. 45° .

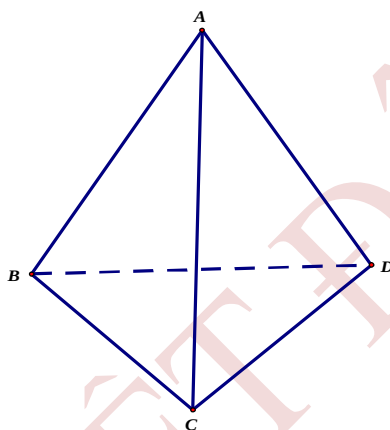
B. 60° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Xét cặp cạnh đối AB và CD của tứ diện, ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$= CB \cdot CD \cdot \cos 60^\circ - CA \cdot CD \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Vậy $(AB, CD) = 90^\circ$.

Câu 54. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BB' . cosin của góc hợp bởi MN và AC' là

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Chọn hệ véc tơ cơ sở là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$. Giả sử độ dài cạnh của hình lập phương là a .

Ta có:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}, AC' = a\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{MN}) = \frac{\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{AC'}| |\overrightarrow{MN}|} = \frac{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD})}{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Vậy cosin của góc hợp bởi MN và AC' là $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Cách 2:

Gọi độ dài cạnh hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là a

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, $B \in Ox$, $D \in Oy$, $A' \in Oz$.

Khi đó, tọa độ các đỉnh: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C(a;a;a)$.

M là trung điểm của $AD \Rightarrow M\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$

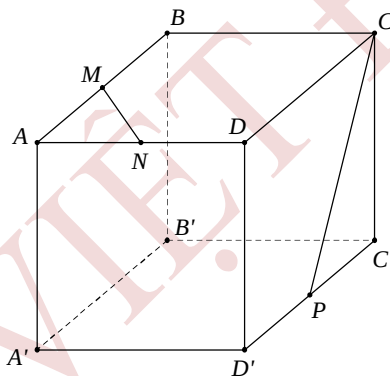
N là trung điểm của $BB' \Rightarrow N\left(a; 0; \frac{a}{2}\right)$

Do đó $\overrightarrow{MN} = \left(a; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$; $\overrightarrow{AC'} = (a; a; a)$

Cosin góc giữa $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{MN}$ là

$$\cos(MN, AC') = \left| \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC'}) \right| = \left| \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC'}}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{AC'}|} \right| = \frac{a^2}{a\sqrt{3} \cdot a \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 55. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, AD, C'D'$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và CP .



A. $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

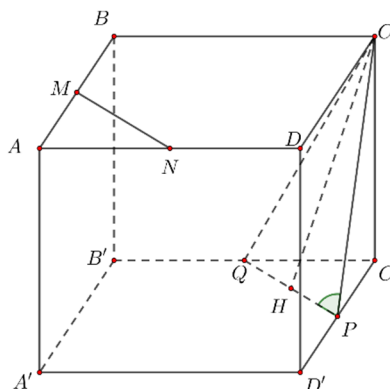
B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi Q là trung điểm $B'C'$. Khi đó $PQ \parallel MN$.

Ta có $(MN, CP) = (PQ, CP) = \widehat{CPQ}$ vì tam giác CPQ cân tại C do $CP = CQ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Gọi H trung điểm PQ nên $CH \perp PQ$; $PQ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow PH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\cos \widehat{CPH} = \frac{PH}{CP} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 56. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = BC = CA = 4$, $AD = 5$, $CD = 6$, $BD = 7$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 120° .

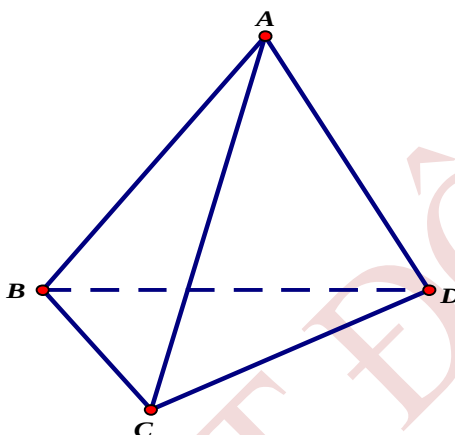
B. 60° .

C. 150° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn B



$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CD} = CB \cdot CD \cdot \cos \widehat{BCD} - CA \cdot CD \cdot \cos \widehat{ACD} \\ &= CB \cdot CD \cdot \frac{CB^2 + CD^2 - BD^2}{2 \cdot CB \cdot CD} - CA \cdot CD \cdot \frac{CA^2 + CD^2 - AD^2}{2 \cdot CA \cdot CD} = \frac{CB^2 + AD^2 - BD^2 - CA^2}{2} = -12 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \cos(\widehat{AB, CD}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{12}{4 \cdot 6} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{AB, CD}) = 60^\circ.$$

Câu 57. (VD) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. 60° .

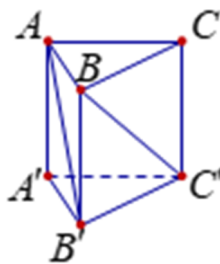
B. 45° .

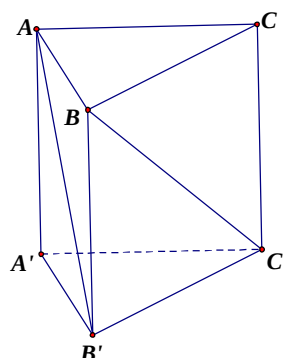
C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn A



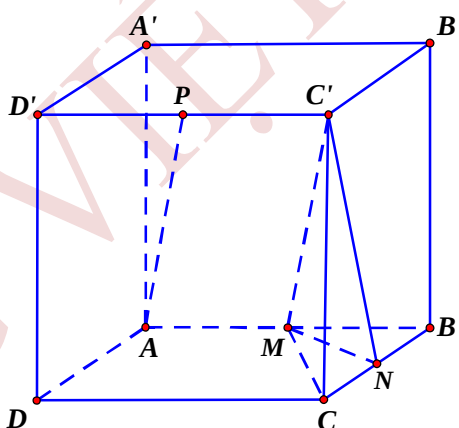


$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} = -\frac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \frac{3a^2}{2}. \\ \text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) &= \frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}}{|\overrightarrow{AB'}| \cdot |\overrightarrow{BC'}|} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{(AB', BC')} = 60^\circ. \end{aligned}$$

- Câu 58.** (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, BC, C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP .
A. 60° . **B.** 90° **C.** 30° . **D.** 45° .

Lời giải

Chọn D



Ta có tứ giác $AMC'P$ là hình bình hành nên $AP \parallel MC' \Rightarrow \widehat{(MN, AP)} = \widehat{(MN, MC')} = \widehat{NMC'}$.

Gọi cạnh hình vuông có độ dài bằng a .

$$\text{Xét tam giác } C'CM \text{ vuông tại } C \text{ có } C'M = \sqrt{C'C^2 + MC^2} = \sqrt{C'C^2 + BC^2 + MB^2} = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } C'CN \text{ vuông tại } C \text{ có } C'N = \sqrt{C'C^2 + CN^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}.$$

$$\text{Mà } MN = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

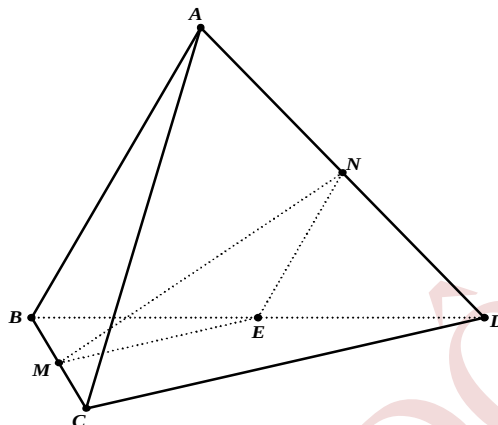
$$\text{Xét tam giác } C'CM \text{ có } \cos \widehat{NMC'} = \frac{MC'^2 + MN^2 - C'N^2}{2MC' \cdot MN} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{NMC'} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{(MN, AP)} = 45^\circ.$$

- Câu 59. (VD)** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . Biết $AB = CD = a$ và $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng
- A. 30° . B. 90° . C. 120° . D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Gọi E lần lượt là trung điểm của BD . Vì $\begin{cases} AB \parallel NE \\ CD \parallel ME \end{cases}$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng góc giữa hai đường thẳng NE và ME .

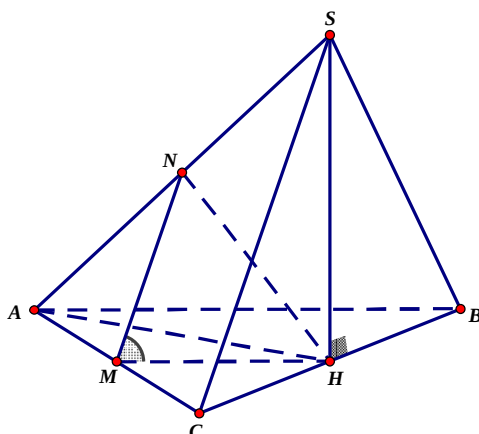
$$\text{Trong tam giác } MNE \text{ ta có: } \cos \widehat{MEN} = \frac{ME^2 + NE^2 - MN^2}{2ME \cdot NE} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a^2}{4}} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra $\widehat{MEN} = 120^\circ$. Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 60° .

- Câu 60. (VD)** Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng
- A. 0° . B. 120° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm BC, AC và SA .

Do $BC^2 = 2a^2 = AB^2 + AC^2$ nên tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Do $SA = SB = SC$ nên $SH \perp (ABC)$.

Lại có: $HM \parallel AB$ và $MN \parallel SC$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng góc giữa hai đường thẳng HM và MN , đặt góc đó là φ .

Nhận thấy: $MN = MH = \frac{a}{2}$.

Tam giác SBC có $SB^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = BC^2 \Rightarrow \triangle SBC$ vuông cân tại S

$\Rightarrow SH = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = AH \Rightarrow SH^2 + AH^2 = a^2 = SA^2 \Rightarrow \triangle HSA$ vuông cân tại H

$\Rightarrow HN = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow MN = HM = HN = \frac{a}{2} \Rightarrow \triangle MNH$ đều $\Rightarrow \widehat{NMH} = 60^\circ \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng 60° .

Câu 61. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a = 4\sqrt{2}$ cm, cạnh bên SC vuông góc với đáy và $SC = 2$ cm. Gọi M , N là trung điểm của AB và BC . Góc giữa hai đường thẳng SN và CM là

A. 30° .

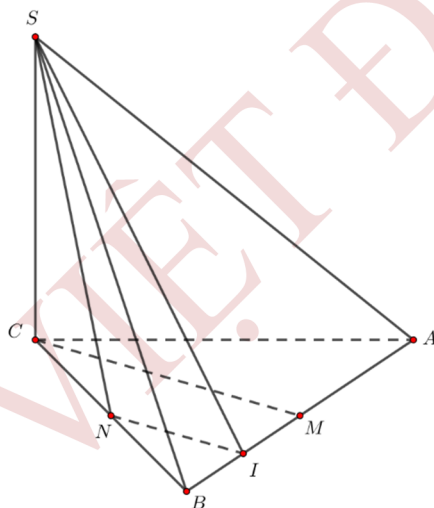
B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của BM , ta có $NI \parallel CM$ nên góc giữa SN và CM là góc giữa SN và NI .

Xét tam giác SNI có $SN = \sqrt{SC^2 + CN^2} = \sqrt{4 + 8} = 2\sqrt{3}$; $NI = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$;

$CI = \sqrt{CM^2 + MI^2} = \sqrt{24 + 2} = \sqrt{26} \Rightarrow SI = \sqrt{SC^2 + CI^2} = \sqrt{4 + 26} = \sqrt{30}$.

Vậy $\cos \widehat{SNI} = \frac{SN^2 + NI^2 - SI^2}{2SN \cdot NI} = \frac{12 + 6 - 30}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-12}{3\sqrt{2} \cdot 4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{SNI} = 135^\circ$.

Vậy góc giữa SN và CM bằng 45° .

Câu 62. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi I là trung điểm của cạnh AB . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và $B'I$ được kết quả là

A. $\frac{1}{5}$.

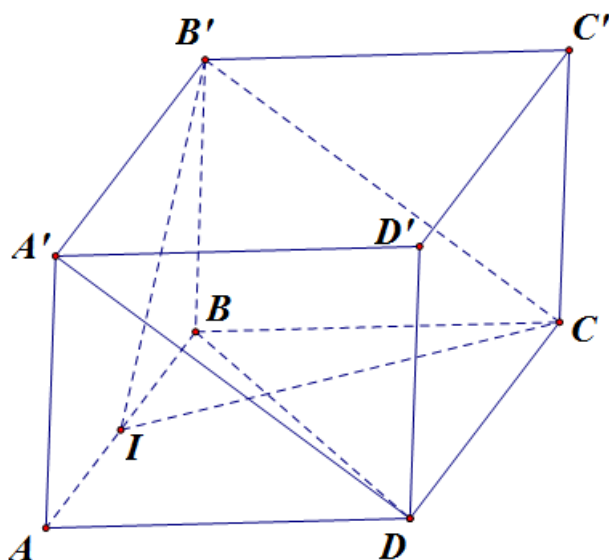
B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi độ dài cạnh hình lập phương là $a > 0$.

Ta có $B'C \parallel A'D \Rightarrow (\widehat{A'D, B'I}) = (\widehat{B'I, B'C})$.

Tính được $B'I = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} = CI$; $B'C = a\sqrt{2}$.

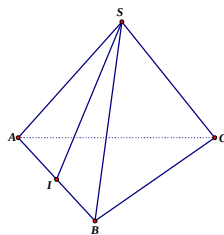
Trong tam giác $B'CI$ có $\cos \widehat{IB'C} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{2a^2}{a^2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy $\cos(\widehat{A'D, B'I}) = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

- Câu 63. (VD)** Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC$. Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó góc giữa hai đường thẳng SI và BC bằng
- A.** 120° .. **B.** 60° .. **C.** 90° .. **D.** 30° ..

Lời giải

Chọn B



Giả sử $SA = SB = SC = a$.

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{SI}; \overrightarrow{BC}) &= \frac{\overrightarrow{SI} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{SI}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{2} \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}) \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})}{|\overrightarrow{SI}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SB}}{|\overrightarrow{SI}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\overline{SB}^2}{|\overline{SI}| \cdot |\overline{BC}|} = -\frac{1}{2} \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}.$$

(Vì hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc nên $\overline{SA} \cdot \overline{SB} = 0; \overline{SA} \cdot \overline{SC} = 0$ và $\overline{SB} \cdot \overline{SC} = 0$).

Suy ra $\angle(\overline{SI}; \overline{BC}) = 120^\circ$.

Do đó góc giữa hai đường thẳng SI và BC bằng $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Câu 64. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với (BCD) . Biết tam giác BCD vuông tại C và

$AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi E là trung điểm của AD . Góc giữa hai đường thẳng

AB và CE bằng

A. 30° .

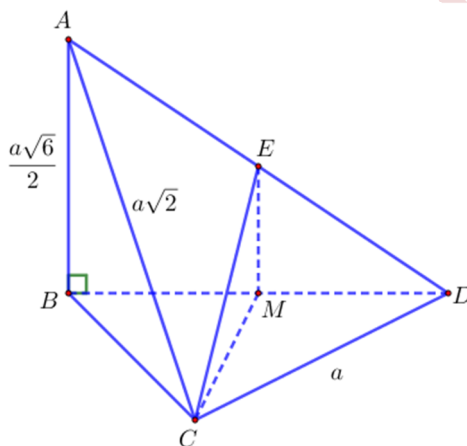
B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, BD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là trung điểm $BD \Rightarrow ME \parallel AB, ME = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{6}}{4}, CM = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$\Rightarrow \triangle CME$ vuông cân tại M .

Ta có $\angle(\overline{AB}, \overline{CE}) = \angle(\overline{EM}, \overline{CE}) = \widehat{CEM} = 45^\circ$.

Câu 65. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = a\sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Góc giữa đường thẳng BG và đường thẳng SA bằng

A. $\arccos \frac{\sqrt{33}}{22}$.

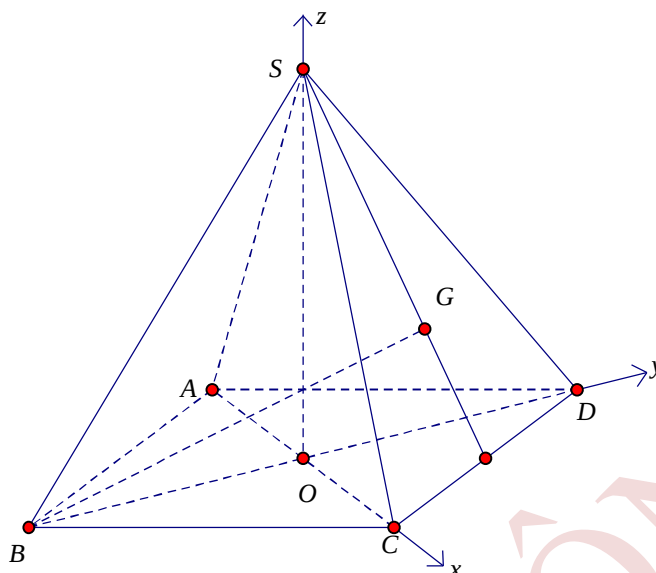
B. $\arccos \frac{\sqrt{330}}{110}$.

C. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{11}$.

D. $\arccos \frac{\sqrt{33}}{11}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm mặt đáy $(ABCD)$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$$OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } SAO \text{ vuông tại } O: SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), D\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{10}}{2}\right).$$

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } SCD \text{ nên: } G\left(\frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{a\sqrt{10}}{6}\right).$$

$$\overrightarrow{SA} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{a\sqrt{10}}{2}\right), \overrightarrow{BG} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{2a\sqrt{2}}{3}; \frac{a\sqrt{10}}{6}\right).$$

$$\cos(SA, BG) = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BG}|}{|\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{BG}|} = \frac{\left|-\frac{a^2}{6} - \frac{5a^2}{6}\right|}{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{3}} = \frac{\sqrt{33}}{11} \Rightarrow (SA, BG) = \arccos \frac{\sqrt{33}}{11}.$$

Câu 66. (VD) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 9a$, $AB = 6a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho

$SM = \frac{1}{2}MC$. Côsin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

A. $\frac{1}{2}$.

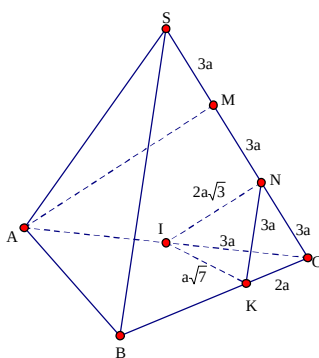
B. $\frac{7}{2\sqrt{48}}$.

C. $\frac{\sqrt{19}}{7}$.

D. $\frac{14}{3\sqrt{48}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm của MC , I là trung điểm AC , K trên CB sao cho $CK = 2a$.

Khi đó ta có $\begin{cases} AM // NI \\ SB // NK \end{cases} \Rightarrow (\widehat{AM, SB}) = (\widehat{NI, NK})$.

Trong tam giác SAC $\cos C = \frac{CA^2 + CS^2 - SA^2}{2CA \cdot CS} = \frac{1}{3}$

Trong tam giác CNI ta có $IN = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN \cdot CI \cdot \cos C} = 2a\sqrt{3}$.

Trong tam giác CIK ta có $IK = \sqrt{CI^2 + CK^2 - 2CI \cdot CK \cdot \cos 60^\circ} = a\sqrt{7}$.

Trong tam giác NIK có $\cos \widehat{INK} = \frac{NI^2 + NK^2 - IK^2}{2NI \cdot NK} = \frac{7\sqrt{3}}{18}$.

Vậy cosin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng $\frac{14}{3\sqrt{48}} = \frac{7\sqrt{3}}{18}$.

Câu 67. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD . Biết $EF = a\sqrt{3}$, tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

A. 60° .

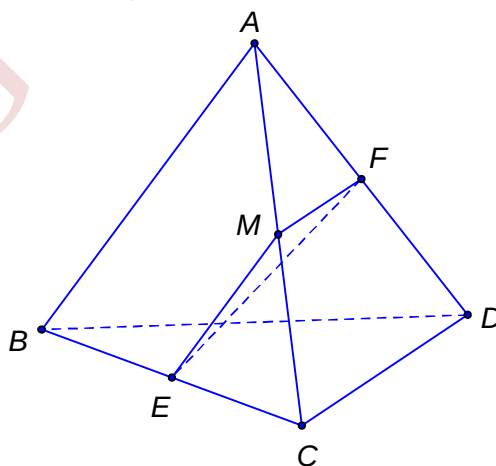
B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AC .

Suy ra: $ME // AB$, $ME = \frac{1}{2}AB = a$ và $MF // CD$, $MF = \frac{1}{2}CD = a$.

Suy ra: $\varphi = (\widehat{AB, CD}) = (\widehat{ME, MF})$

Ta có: $\cos \widehat{EMF} = \frac{ME^2 + MF^2 - EF^2}{2ME \cdot MF} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{EMF} = 120^\circ$

Vậy $\varphi = (\widehat{AB, CD}) = 180^\circ - \widehat{EMF} = 60^\circ$.

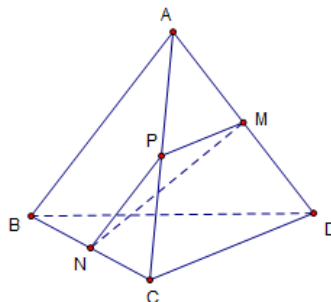
Chú ý: Góc giữa hai đường thẳng thuộc $[0^\circ; 90^\circ]$; còn góc giữa hai vector thuộc $[0^\circ; 180^\circ]$.

Câu 68. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC . Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30° .

- A. $MN = \frac{a}{2}$. B. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $MN = \frac{a}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm AC , $NP \parallel AB$; $(\widehat{MN; AB}) = (\widehat{MN; NP}) = \widehat{MNP}$.

$$PM = PN = \frac{a}{2}; \widehat{MNP} = 30^\circ \rightarrow \widehat{MPN} = 120^\circ.$$

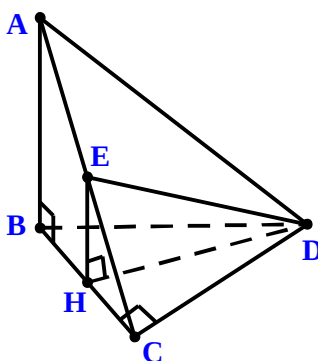
$$MN = \sqrt{NP^2 + MP^2 - 2 \cdot PM \cdot PN \cdot \cos 120^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 69. (VD) Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh AC . Góc giữa hai đường thẳng AB và DE bằng

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của cạnh BC .

Ta có $\begin{cases} AB \perp (BCD) \\ AB \parallel EH \end{cases} \Rightarrow EH \perp (BCD) \Rightarrow EH \perp HD$ và góc giữa hai đường thẳng AB và DE

bằng góc giữa EH và DE bằng góc $\widehat{HED}$.

Lại có $\begin{cases} CD \perp BC \\ CD \perp AB \end{cases} \Rightarrow CD \perp AC$.

Xét tam giác ECD vuông tại C , $ED = \sqrt{EC^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Xét tam giác EHD vuông tại H có $\cos \widehat{HED} = \frac{EH}{ED} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HED} = 60^\circ$.

Câu 70. (VD) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI , với I là trung điểm của AD .

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

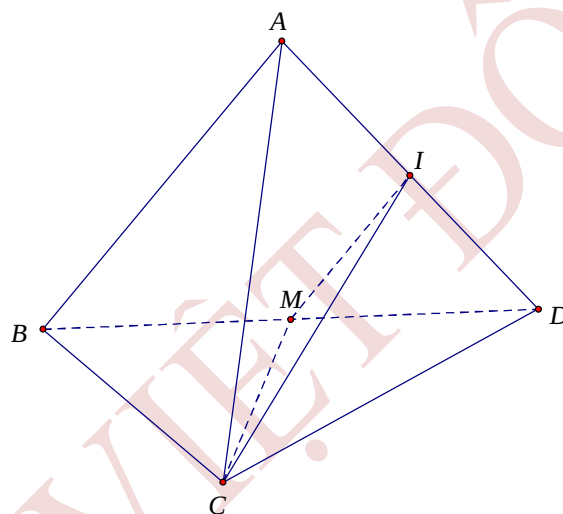
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BD .

Ta có: $IM \parallel AB$.

$$\Rightarrow (AB, IC) = (IM, IC).$$

$$\Rightarrow \cos(AB, IC) = \cos(IM, IC) = |\cos(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC})| = |\cos \widehat{MIC}|.$$

$$\text{Mà: } \cos \widehat{MIC} = \frac{MI^2 + IC^2 - MC^2}{2 \cdot MI \cdot IC} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\Rightarrow \cos(AB, IC) = |\cos \widehat{MIC}| = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 71. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC là?

A. 45° .

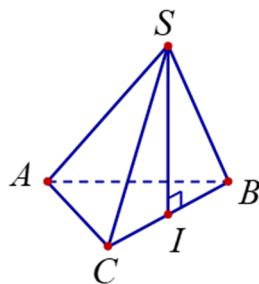
B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C



Ta có $BC = a\sqrt{2}$ nên tam giác ABC vuông tại A . Vì $SA = SB = SC = a$ nên hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Tam giác ABC vuông tại A nên I là trung điểm của BC .

$$\text{Ta có } \cos(AB, SC) = \left| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}|}{AB \cdot SC}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SI} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \cos 45^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

$$\cos(AB, SC) = \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{(AB, SC)} = 60^\circ.$$

$$\text{Cách 2: } \cos(AB, SC) = \left| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}|}{AB \cdot SC}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} = (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SB \cdot SC \cdot \cos 90^\circ - SA \cdot SC \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \cos(AB, SC) = \frac{\left| \frac{-a^2}{2} \right|}{a^2} = \frac{1}{2}$$

Câu 72. (VD) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4a$, lấy H, K lần lượt trên các cạnh AB, AD sao cho $BH = 3HA, AK = 3KD$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S sao cho $\widehat{SBH} = 30^\circ$. Gọi E là giao điểm của CH và BK . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SE và BC .

A. $\frac{28}{5\sqrt{39}}$.

B. $-\frac{18}{5\sqrt{39}}$.

C. $\frac{36}{5\sqrt{39}}$.

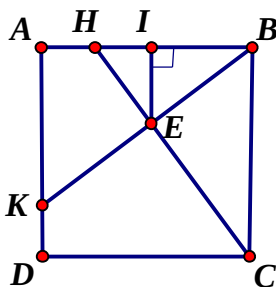
D. $\frac{9}{5\sqrt{39}}$.

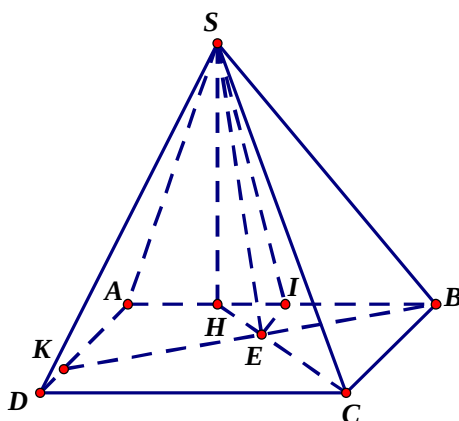
Lời giải

Chọn B

Gọi I là hình chiếu vuông góc của E lên AB ta có $\triangle ABD = \triangle BCH$.

$$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BCH} \Rightarrow \widehat{HEB} = 90^\circ.$$





Ta có: $\cos(SE; BC) = \cos(SE; EI) = |\cos \widehat{SEI}|$, $SH = BH \cdot \tan 30^\circ = a\sqrt{3}$.

$$\frac{HB}{HC} = \frac{HE}{HB} \Rightarrow HE = \frac{HB^2}{HC} = \frac{9a}{5}, SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{81a^2}{25}} = \frac{2a\sqrt{39}}{5}.$$

$$\frac{HE}{HB} = \frac{HI}{HE} \Rightarrow HI = \frac{HE^2}{HB} = \frac{27a}{25}, SI = \sqrt{SH^2 + HI^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\frac{27a}{25}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{651}}{25}.$$

$$\frac{EI}{BC} = \frac{HI}{HB} = \frac{9}{25} \Rightarrow EI = \frac{36a}{25}$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác SEI ta được:

$$\cos \widehat{SEI} = \frac{SE^2 + EI^2 - SI^2}{2 \cdot SE \cdot EI} = \frac{\left(\frac{2a\sqrt{39}}{5}\right)^2 + \left(\frac{36a}{25}\right)^2 - \left(\frac{2a\sqrt{651}}{25}\right)^2}{2 \cdot \frac{2a\sqrt{39}}{5} \cdot \frac{36a}{25}} = \frac{18a}{5\sqrt{39}}.$$

Câu 73. (VD) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAA'}$, $\widehat{A'AB}$ đều bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD . Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, giá trị của $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

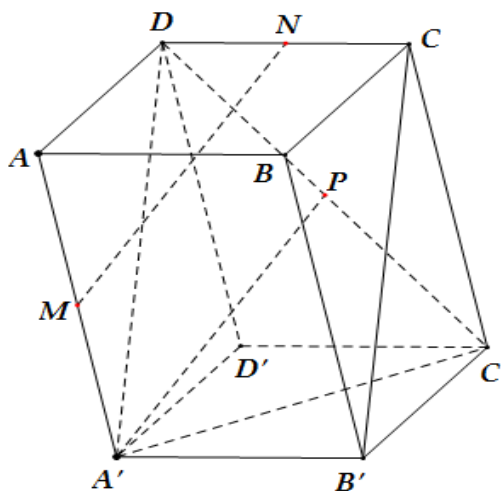
B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi P là trung điểm DC'

Ta có $\begin{cases} B'C // A'D \\ MN // A'P \end{cases}$. Suy ra $\cos(\widehat{MN, B'C}) = \cos(\widehat{A'P, A'D}) = |\cos \widehat{DA'P}|$

Do $\widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = \widehat{A'AB} = 60^\circ$ và các cạnh hình hộp bằng a .

Do đó $A'D = a$, $C'D = C'A' = a\sqrt{3}$, $DP = \frac{1}{2}DC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác $A'C'D$ với $A'P$ là đường trung tuyến, nên ta có:

$$A'P^2 = \frac{2(A'D^2 + C'A'^2) - C'D^2}{4} \Rightarrow A'P = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác $A'DP$, ta có:

$$\cos \widehat{DA'P} = \frac{A'D^2 + A'P^2 - DP^2}{2 \cdot A'D \cdot A'P} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Như vậy $\cos(\widehat{MN, B'C}) = \cos(\widehat{A'P, A'D}) = |\cos \widehat{DA'P}| = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 74. (VD) Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$; $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

A. 0° .

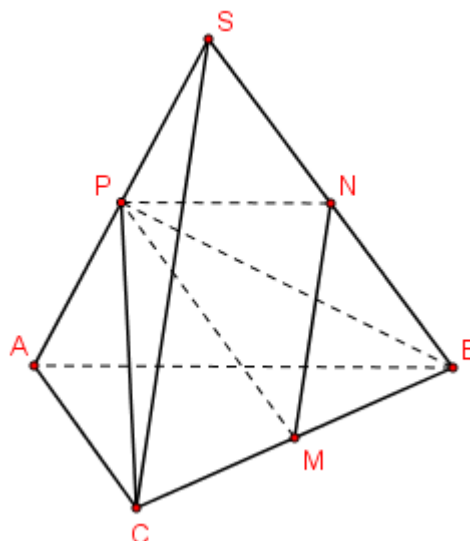
B. 120° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, SB, SA .

Góc giữa AB và SC là góc giữa PN và MN .

$$MN = \frac{a}{2} = NP$$

$$PC = BP = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow PM = \sqrt{PC^2 - CM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

Suy ra tam giác MNP là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{MNP} = 60^\circ$.

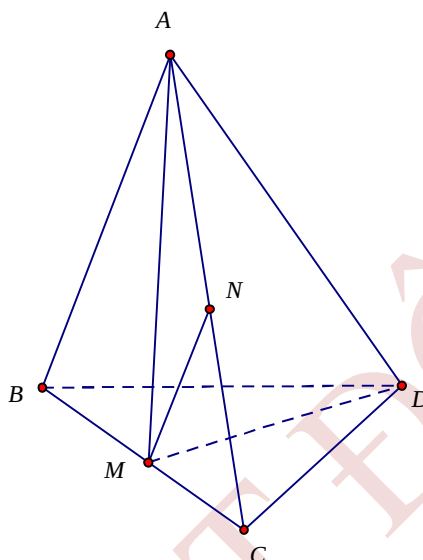
Vậy góc giữa AB và SC bằng 60° .

Câu 75. (VD) Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của BC . Khi đó cosin của góc giữa hai đường thẳng nào sau đây có giá trị bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

- A.** (AB, DM) . **B.** (AD, DM) . **C.** (AM, DM) . **D.** (AB, AM) .

Lời giải

Chọn A



Gọi cạnh của tứ diện có độ dài là a . Ta có: $AM = DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác ADM cân tại M có:

$$\cos \widehat{AMD} = \frac{AM^2 + DM^2 - AD^2}{2 \cdot AM \cdot DM} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$\cos \widehat{ADM} = \frac{DM^2 + AD^2 - AM^2}{2 \cdot AD \cdot DM} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Xét tam giác đều ABC có AM là đường trung tuyến và là đường phân giác nên $(AB, AM) = 30^\circ \Rightarrow \cos(AB, AM) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó loại trừ đáp án B, C,

Gọi N là trung điểm của AC . Ta có $MN \parallel AB \Rightarrow (AB, DM) = (MN, DM)$.

Xét tam giác MND có:

$$\cos \widehat{NMD} = \frac{MN^2 + DM^2 - ND^2}{2 \cdot MN \cdot DM} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{ Suy ra } \cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 76. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , độ dài cạnh bên cũng bằng a . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC . Góc giữa MN và SC bằng

A. 30° .

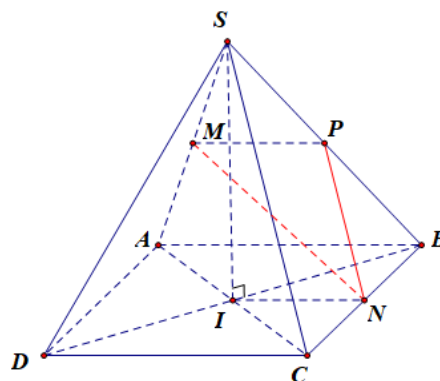
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Gọi P là trung điểm của SB , ta có $SC \parallel NP \Rightarrow (MN, SC) = (MN, NP) = \widehat{MNP}$.

$$\text{Mà } MP = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}; NP = \frac{1}{2}SC = \frac{a}{2}; MC^2 = \frac{2(SC^2 + AC^2) - SA^2}{4} = \frac{2(a^2 + 2a^2) - a^2}{4} = \frac{5a^2}{4};$$

$$MB = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$MN^2 = \frac{2(MC^2 + MB^2) - BC^2}{4} = \frac{2\left(\frac{5a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}\right) - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\text{Do đó } \cos \widehat{MNP} = \frac{NP^2 + MN^2 - MP^2}{2 \cdot NP \cdot MN} = \frac{MN}{2NP} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $\widehat{MNP} = 30^\circ$.

Câu 77. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$, $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi M , N lượt lần là trung điểm của AB, AC . Tính cosin góc φ giữa SM và DN .

A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

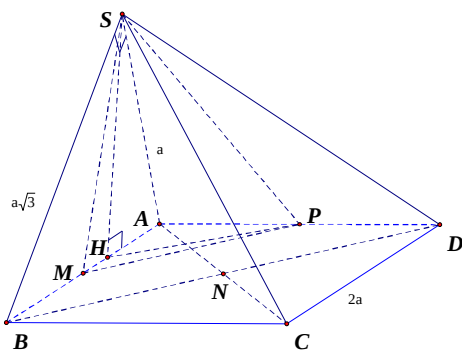
$$\underline{\mathbf{B}} \cdot \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

C. $\cos \varphi = \frac{5}{4}$.

D. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm của AD , H là chân đường vuông góc hạ từ S xuống AB . Theo giả thiết $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Xét tam giác SAB có $AB^2 = SA^2 + SB^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại S . Ta có: $MP \parallel DN$ do đó góc giữa SM và DN là góc giữa SM và MP .

Xét tam giác SAB có: $SM = \frac{1}{2}AB = a$ và $SH = \frac{SA \cdot SB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{a}{2}$.

Ta lại có: $MP = \frac{1}{2}BD = a\sqrt{2}$. Mặt khác: $HP = \sqrt{HA^2 + AP^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Do đó: $SP = \sqrt{SH^2 + HP^2} = a\sqrt{2}$.

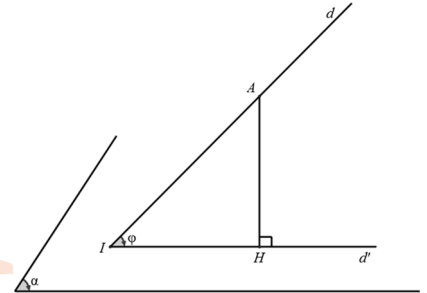
Xét tam giác SHP có $\cos \widehat{SMP} = \frac{SM^2 + MP^2 - SP^2}{2 \cdot SM \cdot MP} = \frac{a^2 + 2a^2 - 2a^2}{2 \cdot a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

DẠNG 3: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG.**A. KIẾN THỨC CHUNG****1. Xác định góc bằng định nghĩa**

* **Định nghĩa:** Góc của đường xiên d và mặt phẳng (α) là góc nhọn tạo bởi d và hình chiếu vuông góc của d lên (α) .

* **Phương pháp tính góc của d và (α)**

- Tìm giao điểm I của d và mặt phẳng (α) .
- Chọn A trên d , vẽ $AH \perp mp(\alpha)$ thì góc của d và $mp(\alpha)$ là $\widehat{AIH}$.
- Dùng tỉ số lượng giác hoặc hệ thức lượng trong tam giác tính được góc này.

**2. Tính góc dùng khoảng cách**

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu của nó lên (P) .

Gọi α là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) thì $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

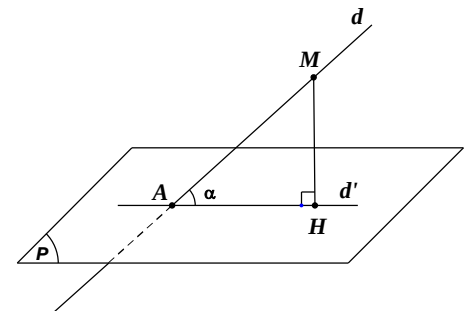
Trước hết tìm giao điểm A của d và (P) .

Trên d chọn điểm B khác A , dựng BH vuông góc với (P) tại H .

Suy ra AH là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P) .

Vậy góc giữa d và (P) là $\widehat{BAH}$.

Nếu việc xác định góc giữa d và (P) gặp khó khăn (không chọn được điểm B để dựng BH vuông góc với (P)) thì ta sử dụng công thức sau đây:



Gọi α là góc giữa d và (P) , suy ra $\sin \alpha = \frac{d(M, (P))}{AM}$.

Ta phải chọn điểm M trên d sao cho có thể tính được khoảng cách đến (P) , còn A là giao điểm của d và (P) .

B. BÀI TẬP

Câu 1. (NB) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) là

A. $\widehat{SBA}$.

B. $\widehat{SAB}$.

C. $\widehat{SBC}$.

D. $\widehat{SCB}$.

- Câu 2.** (NB) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là
- A. $\widehat{SAD}$. B. $\widehat{ASD}$. C. $\widehat{SDA}$. D. $\widehat{BSD}$.

MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

- Câu 3.** (TH) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = AB = a$, gọi $O = AC \cap BD$, gọi φ là góc giữa cạnh bên và mặt đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $\varphi = 60^\circ$. B. $\varphi = 45^\circ$. C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\varphi = 30^\circ$.
- Câu 4.** (TH) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = \sqrt{3}$ và $AA' = 1$. Góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và (ABC) bằng
- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 75° .
- Câu 5.** (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và hai mặt phẳng (SAC) , (SBD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa cặp đường thẳng nào sau đây?
- A. (SB, SA) . B. (SB, SO) . C. (SB, BD) . D. (SO, BD) .
- Câu 6.** (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .
- A. 45° . B. $\arcsin \frac{1}{4}$. C. 30° . D. 60° .
- Câu 7.** (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC) .
- A. 30° . B. 75° . C. 60° . D. 45° .
- Câu 8.** (TH) Cho chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B . Biết $SA = AB = BC$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. $\arccos \frac{1}{3}$.
- Câu 9.** (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{15}$. Tính góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .
- Câu 10.** (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Giá trị của $\tan \varphi$ là
- A. $2\sqrt{2}$. B. 1. C. 45. D. $\sqrt{2}$.
- Câu 11.** (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với $(ABCD)$, $SB = 5a$. Tính $\tan$ góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) .

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 12. (TH) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC) . Khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{\frac{3}{7}}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 13. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của đường thẳng BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 75° .

Câu 14. (TH) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$; $AA'=a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng $(BCC'B')$.

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 15. (TH) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

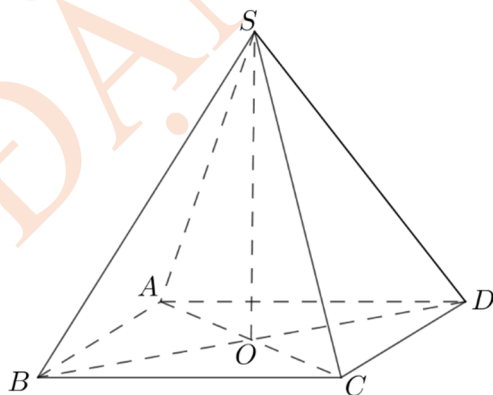
Câu 16. (TH) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi MC' và mặt phẳng (ABC) . Khi đó $\tan \alpha$ bằng:

- A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{\frac{3}{7}}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Biết $\triangle SBC$ đều, tính góc giữa SA và (ABC) .

- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .

Câu 18. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, góc $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$ và $SO = 3a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



- A. 60° . B. 75° . C. 30° . D. 45° .

Câu 19. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) .

- A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .

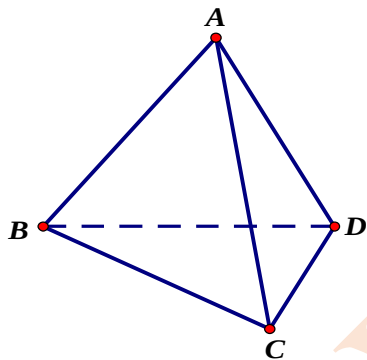
Câu 20. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy là tam giác vuông tại A , cạnh $BC = a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) .

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 21. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. $SA = a\sqrt{3}$. Cosin của góc giữa SC và mặt đáy bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 22. (TH) Cho tứ diện đều $ABCD$. Cosin góc giữa AB và $mp(BCD)$ bằng:



- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 23. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 24. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. α , với $\cot \alpha = \sqrt{3}$. B. 30° . C. 60° . D. 45° .

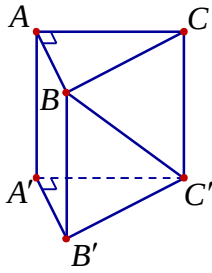
Câu 25. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Điểm M thuộc tia DD' thỏa mãn $DM = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

- A. 30° . B. 45° . C. 75° . D. 60° .

Câu 26. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $ABCD$. Gọi φ là góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$ thì

- A. $\tan \varphi = 2\sqrt{2}$. B. $\tan \varphi = \sqrt{3}$. C. $\tan \varphi = 2$. D. $\tan \varphi = 1$.

Câu 27. (TH) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AA' = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính tang của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 28. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E , M lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và SA , α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD) . Giá trị của $\tan \alpha$ bằng

A. 2.

B. $\sqrt{3}$.

C. 1.

D. $\sqrt{2}$.

Câu 29. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$. Tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 30. (VD) Cho tứ diện đều $ABCD$. Cosin góc giữa AB và mặt phẳng (BCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 31. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E ; M lần lượt là trung điểm của BC và SA . Gọi α là góc tạo bởi EM và (SBD) . Khi đó $\tan \alpha$ bằng:

A. 1.

B. 2.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

Câu 32. (VD) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $\widehat{ACB} = 135^\circ$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB . Tính góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Câu 33. (VD) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 60° .

B. 75° .

C. 30° .

D. 45° .

- Câu 34. (VD)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2a$, $AB = BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) .
- A. $36^\circ 33'$. B. $26^\circ 57'$. C. $26^\circ 33'$. D. $30^\circ 33'$.
- Câu 35. (VD)** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Giá trị cosin của góc giữa cạnh bên và mặt đáy là
- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{\sqrt{33}}{6}$.
- Câu 36. (VD)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M , N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A lên các cạnh SB , SD . Góc giữa mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SB bằng
- A. 45° . B. 120° . C. 90° . D. 60° .
- Câu 37. (VD)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SA và (SBC) . Khi đó
- A. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. D. Đáp án khác.
- Câu 38. (VD)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $\frac{a}{\sqrt{2}}$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là:
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .
- Câu 39. (VD)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SB . Tính tan góc giữa đường thẳng DM và $(ABCD)$.
- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.
- Câu 40. (VD)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Gọi O là tâm của đáy và M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC . Nếu góc giữa đường thẳng MN và $(ABCD)$ bằng 60° thì độ dài đoạn MN là
- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.
- Câu 41. (VD)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD . Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) .
- A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{\sqrt{55}}{10}$.
- Câu 42. (VD)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $ABCD$ là hình chữ nhật có $AD = 3a$, $AC = 5a$, góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45° . Khi đó cosin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{7}}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{17}}{5}$.

Câu 43. (VD) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a . Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° ?

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}a$. B. a . C. $\frac{a}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 44. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a\sqrt{2}$; $BC = a$ và $SA = SB = SC = SD = 2a$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên AC , H là hình chiếu vuông góc của K trên SA . Tính cosin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (BKH) .

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{\sqrt{8}}{5}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 45. (VD) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC . Cạnh bên hợp với (ABC) góc 60° . Sin của góc giữa AB và mặt phẳng $(BCC'B')$.

A. $\frac{3}{\sqrt{13}}$. B. $\frac{3}{2\sqrt{13}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{13}}$. D. $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Câu 46. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° , cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

A. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

Câu 47. (VD) Tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC$ và đôi một vuông góc. Tan của góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 48. (VD) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$, có ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = SB = SC = a\sqrt{3}$. Tính cosin góc giữa SA và (ABC) .

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 49. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính cosin góc giữa MN và (SAC) , biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$. B. $\frac{3\sqrt{310}}{20}$. C. $\frac{\sqrt{310}}{20}$. D. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

- Câu 50. (VD)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, BC = 2a, SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cosin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng
- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{\sqrt{21}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 51. (VD)** Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt ABC và SBC là các tam giác đều và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Số đo của góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng
- A. 45° . B. 75° . C. 60° . D. 30° .
- Câu 52. (VD)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Góc giữa đường thẳng SA và mp (SCD) bằng
- A. 30° . B. 90° . C. 45° . D. 60° .
- Câu 53. (VD)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $ABCD$ và $SA = 2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) .
- A. $\frac{\sqrt{30}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.
- Câu 54. (VD)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BD .
- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .
- Câu 55. (VD)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) là
- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .
- Câu 56. (VD)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng
- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .
- Câu 57. (VD)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AD = 2\text{cm}$, $DC = 1\text{cm}$, $\widehat{ADC} = 120^\circ$. Cạnh bên $SB = \sqrt{3}\text{cm}$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi SD và mặt phẳng (SAC) . Tính $\sin \alpha$.
- A. $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{7}$. C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\sin \alpha = \frac{3}{4}$.
- Câu 58. (VD)** Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC$ và đôi một vuông góc. Tang của góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC) bằng
- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 59. (VD)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABC'D')$. Khi đó
- A. $\tan \alpha = \sqrt{3}$. B. $\tan \alpha = 1$. C. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Câu 60. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Xác định góc giữa SA và (SBD) ?

- A. $\widehat{ASO}$. B. $\widehat{SOA}$. C. $\widehat{ASB}$. D. $\widehat{ASD}$.

Câu 61. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại C . Biết $AB = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tính góc giữa SC và (SAB) .

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 62. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AD = 2a$, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BC . Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SDM) bằng $\frac{a}{2}$, tính tan của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$. B. 1. C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 63. (VD) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{5}$, $AB = a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính cosin của góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng (MQP) .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{15}}{6}$.

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 64. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích $S_{td} = \frac{1}{2}a^2$. Gọi ϕ là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính .

- A. 45° . B. $\phi = \arcsin \frac{1+\sqrt{129}}{16}$. C. $\phi = \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8}$. D. $\phi = 60^\circ$.

Câu 65. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a, BC = a, \widehat{ABC} = 120^\circ$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC) .

- A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$. B. $V = \frac{3}{4}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{1}{4}$.

Câu 66. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a, BC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$, SD vuông góc với mặt phẳng đáy, $SD = a\sqrt{3}$. Tính cosin của góc tạo bởi SB và (SAC) .

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{15}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 67. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) . Giá trị $\sin \alpha$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

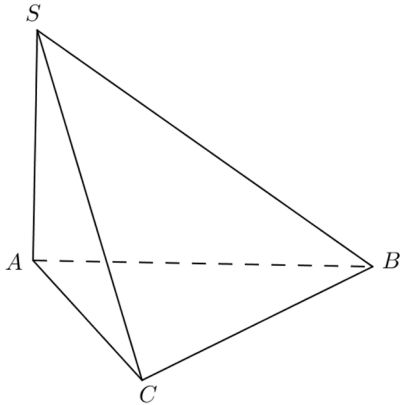
Câu 68. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$, tứ giác $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = a$, $ABC = 120^\circ$, hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Gọi E là trung điểm AD , d là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle SCE$, φ là góc giữa d và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\tan \varphi$.

- A. $\sqrt{\frac{3}{14}}$. B. $\sqrt{\frac{6}{7}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\sqrt{\frac{6}{35}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 3: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG.

Câu 1. (NB) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) là

A. $\widehat{SBA}$.B. $\widehat{SAB}$.C. $\widehat{SBC}$.D. $\widehat{SCB}$.

Lời giải

Chọn A

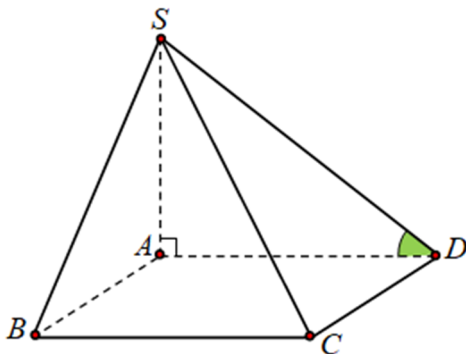
Vì $SA \perp (ABC)$ nên hình chiếu của SB lên (ABC) là $AB \Rightarrow (SB; (ABC)) = \widehat{SBA}$.

Câu 2. (NB) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\widehat{SAD}$.B. $\widehat{ASD}$.C. $\widehat{SDA}$.D. $\widehat{BSD}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $SA \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow AD$ là hình chiếu vuông góc của SD xuống mặt $(ABCD)$.

$\Rightarrow (SD, (ABCD)) = (SD, AD) = \widehat{SDA}$.

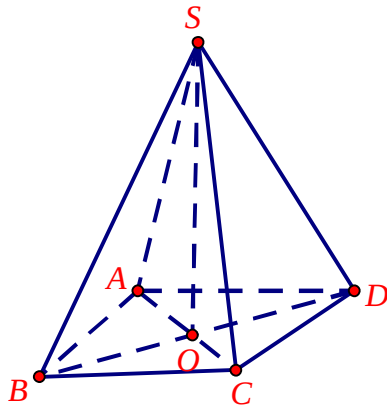
MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 3. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = AB = a$, gọi $O = AC \cap BD$, gọi φ là góc giữa cạnh bên và mặt đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 60^\circ$.B. $\varphi = 45^\circ$.C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.D. $\varphi = 30^\circ$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\varphi = (\widehat{SA, (ABCD)}) = (\widehat{SA, AO}) = \widehat{SAO}$.

Lại có $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SA = a \Rightarrow \cos \widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Câu 4. (TH) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = \sqrt{3}$ và $AA' = 1$. Góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và (ABC) bằng

A. 45° .

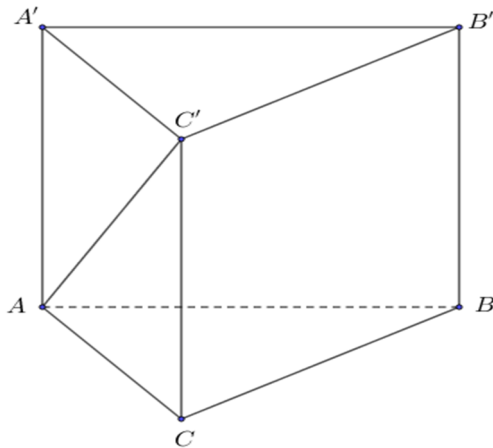
B. 60° .

C. 30° .

D. 75° .

Lời giải

Chọn C



Ta có $(\widehat{AC', (ABC)}) = (\widehat{AC', AC}) = \widehat{CAC'}$, $\tan \widehat{CAC'} = \frac{CC'}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CAC'} = 30^\circ$.

Câu 5. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và hai mặt phẳng (SAC) , (SBD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa cặp đường thẳng nào sau đây?

A. (SB, SA) .

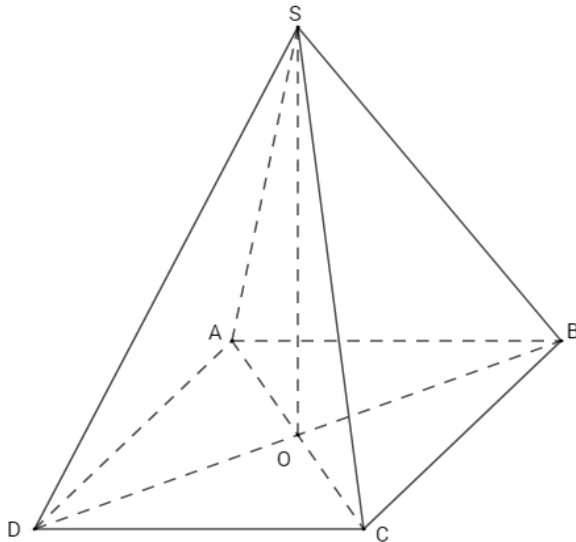
B. (SB, SO) .

C. (SB, BD) .

D. (SO, BD) .

Lời giải

Chọn C



Do hai mặt phẳng $(SAC), (SBD)$ cùng vuông góc với đáy nên $SO \perp (ABCD)$. Khi đó, O là hình chiếu của điểm S xuống đáy $(ABCD)$ và góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ chính là góc giữa SB và BD .

Câu 6. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .

A. 45° .

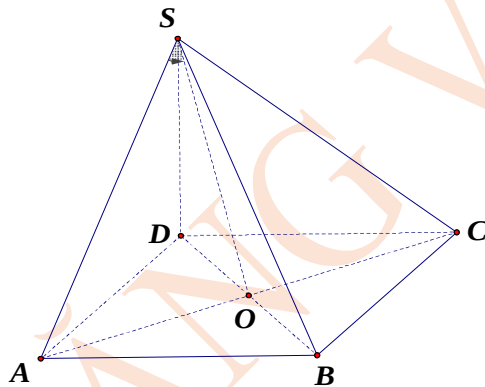
B. $\arcsin \frac{1}{4}$.

C. 30° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn C



Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình vuông $ABCD$. Ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ AO \perp SD \end{cases} \Rightarrow AO \perp (SBD)$ nên SO là hình chiếu vuông góc của AS lên mặt phẳng (SBD) suy ra góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) là góc $\widehat{ASO}$.

Trong tam giác vuông AOS , ta có $\sin \widehat{ASO} = \frac{OA}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ$.

Câu 7. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC) .

A. 30° .

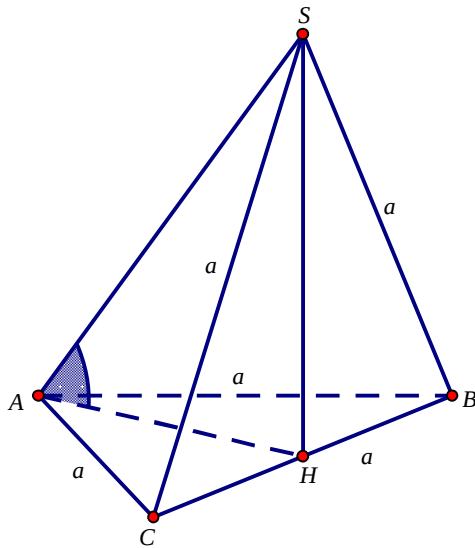
B. 75° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn D



Để thấy AH là hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng đáy.

Do đó góc tạo bởi SA và (ABC) là $\widehat{SAH}$.

Mặt khác, $\triangle ABC = \triangle SBC \Rightarrow SH = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy tam giác SAH là tam giác vuông cân đỉnh H

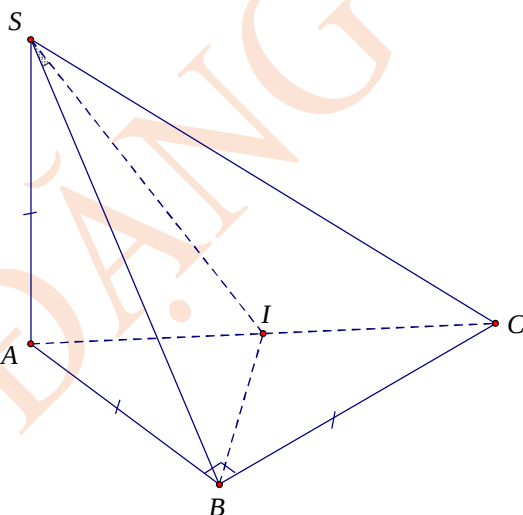
hay $\widehat{SAH} = 45^\circ$.

Câu 8. (TH) Cho chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B . Biết $SA = AB = BC$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .

A. 30° .B. 45° .C. 60° .D. $\arccos \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow BI \perp AC$ (vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A). (1)

Mặt khác: $SA \perp BI$ (vì $SA \perp (ABC)$) (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $BI \perp (SAC)$.

$\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SB lên (SAC) .

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (SAC)}) = (\widehat{SB, SI}) = \widehat{BSI}.$$

$$\text{Xét } \triangle BSI \text{ vuông tại } I, \text{ ta có: } \sin \widehat{BSI} = \frac{BI}{SB} = \frac{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}{AB\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

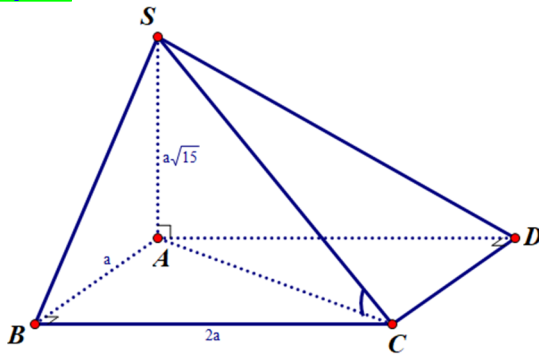
$$\Rightarrow \widehat{BSI} = 30^\circ.$$

Câu 9. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{15}$. Tính góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 30° .B. 60° .C. 45° .D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Do $SA \perp (ABCD)$ nên $(\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$.

$$\text{Xét tam giác vuông } SAC, \text{ ta có } \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{SA}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{SCA} = 60^\circ.$$

Câu 10. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Giá trị của $\tan \varphi$ là

A. $2\sqrt{2}$.

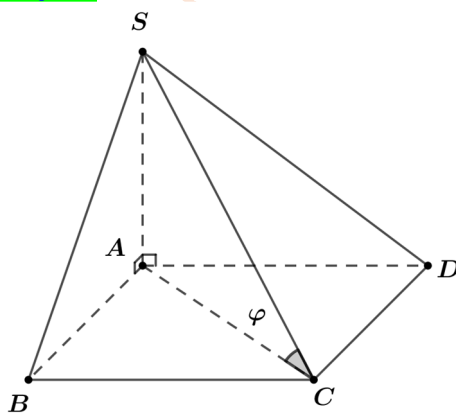
B. 1.

C. 45.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = \widehat{SCA} = \varphi$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{SA}{AC} = \frac{SA}{AB\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1.$$

Câu 11. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với $(ABCD)$, $SB = 5a$. Tính tan góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) .

A. $\frac{1}{6}$.

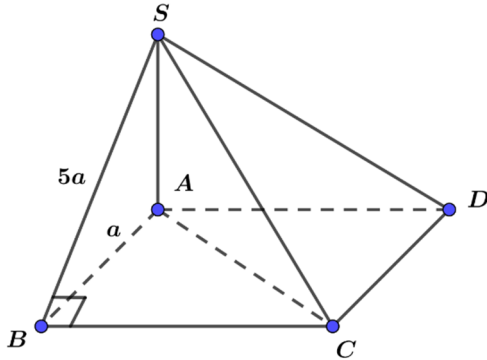
B. $\frac{1}{5}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(BC, (SAB))} = \widehat{CSB}$

ΔSAB vuông ở A suy ra $\tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{1}{5}$.

Câu 12. (TH) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC) . Khi đó $\tan \alpha$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có MC là hình chiếu của MC' lên (ABC) . Suy ra $\alpha = \angle C'CM$.

Xét tam giác MCC' vuông tại C có: $\tan \alpha = \frac{CC'}{CM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 13. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của đường thẳng BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 45° .

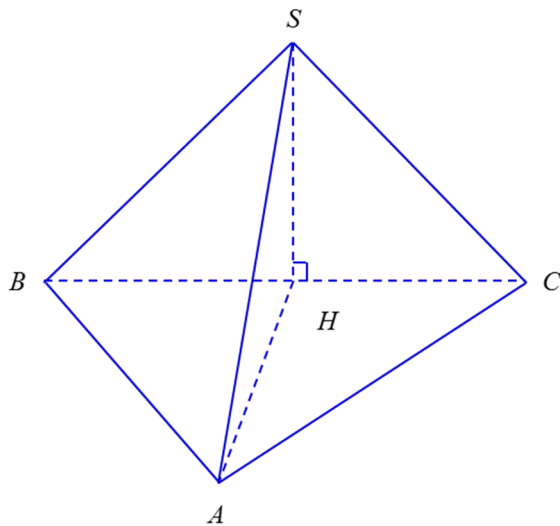
B. 30° .

C. 60° .

D. 75° .

Lời giải

Chọn A



Tam giác ABC là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SBC là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $\widehat{SAH}$ góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) .

Tam giác SHA vuông cân tại H nên $\widehat{SAH} = 45^\circ$.

Câu 14. (TH) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$; $AA'=a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng $(BCC'B')$.

A. 60° .

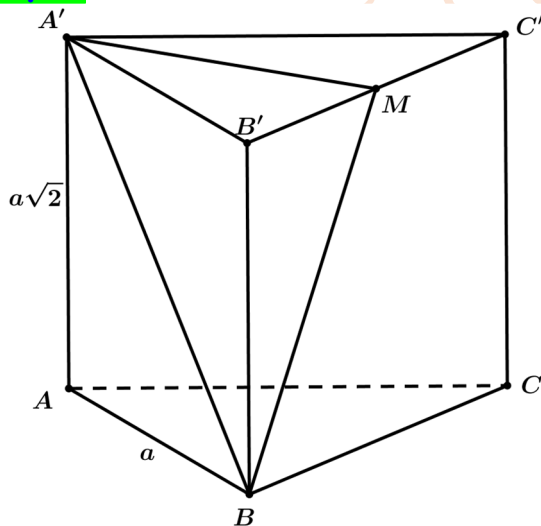
B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'M \perp (BB'C'C)$, góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng $(BB'C'C)$ bằng góc giữa AB và BM và bằng $\widehat{ABM}$.

Ta có $A'B = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$, $A'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\widehat{ABM}) = \frac{A'M}{A'B} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ABM} = 30^\circ$.

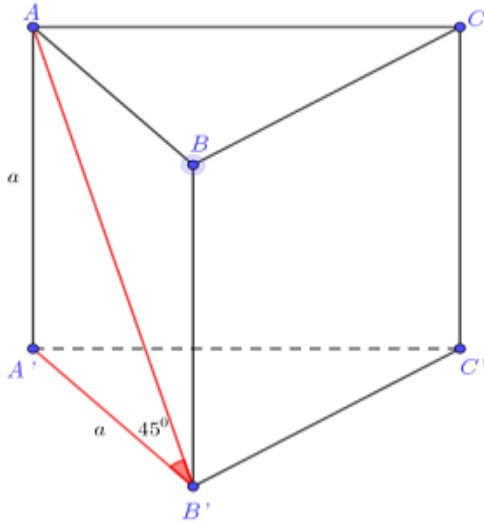
Vậy góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng $(BB'C'C)$ bằng 30° .

Câu 15. (TH) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng

A. 90° .B. 30° .C. 60° .D. 45° .

Lời giải

Chọn D



+) Ta có $A'B'$ là hình chiếu của AB' lên mặt phẳng $(A'B'C')$

$$\Rightarrow (\widehat{AB', (A'B'C')}) = (\widehat{AB', A'B'}) = \widehat{AB'A'}.$$

+) $\triangle AA'B'$ vuông tại A' , $AA' = A'B' = a \Rightarrow \triangle AA'B'$ vuông cân tại $A' \Rightarrow \widehat{AB'A'} = 45^\circ$.

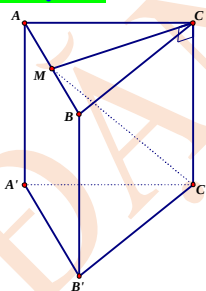
Vậy góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng 45° .

Câu 16. (TH) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi MC' và mặt phẳng (ABC) . Khi đó $\tan \alpha$ bằng:

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.C. $\sqrt{\frac{3}{7}}$.D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Hình chiếu của MC' lên mặt phẳng (ABC) là MC .

$$\text{Do đó, } (\widehat{MC', (ABC)}) = (\widehat{MC', MC}) = \widehat{C'MC} = \alpha.$$

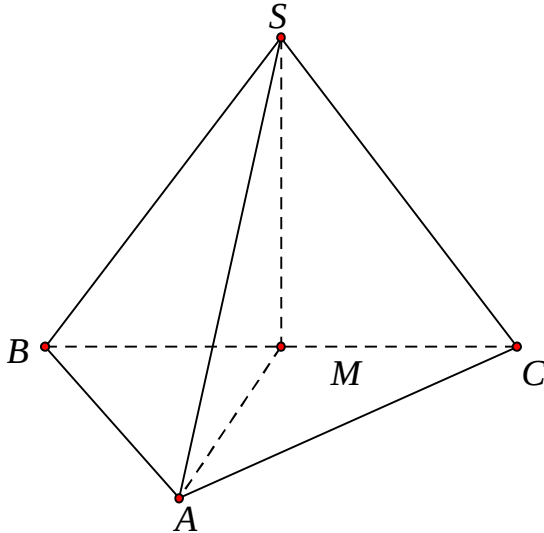
Xét tam giác vuông MCC' :

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{CC'}{CM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

- Câu 17. (TH)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Biết $\triangle SBC$ đều, tính góc giữa SA và (ABC) .
- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .

Lời giải

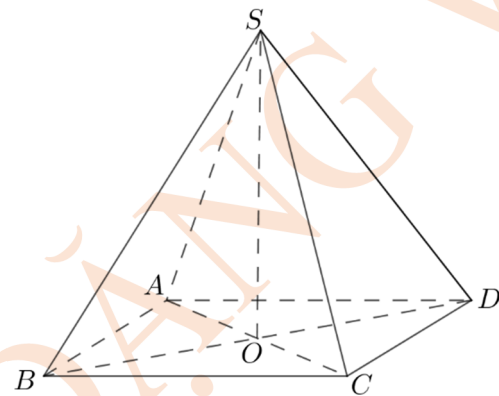
Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC . Khi đó góc giữa SA và (ABC) là góc giữa SA và MA .

Tam giác SAM vuông tại M có $SM = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\widehat{SAM} = 45^\circ$.

- Câu 18. (TH)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, góc $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$ và $SO = 3a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 60° .B. 75° .C. 30° .D. 45° .

Lời giải

Chọn A

Ta có hình chiếu của SD trên mặt phẳng $(ABCD)$ là OD nên $[SD, (ABCD)] = (SD, OD) = \widehat{SDO} = \alpha$

Ta có $AD = DC$ và $\widehat{ADC} = 60^\circ$ nên tam giác ADC đều

$$\Rightarrow OD = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{SO}{OD} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Câu 19. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) .

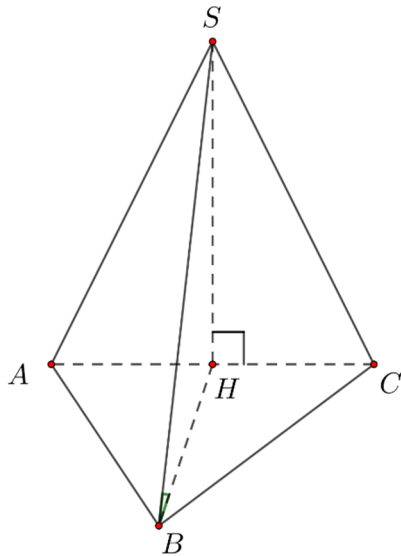
A. 90° .B. 45° .C. 60° .D. 30° .

Lời giải

Chọn D

Đặt $SA = SB = SC = a$.

Ta có $\triangle SAB$ vuông cân tại $S \Rightarrow AB = a\sqrt{2}$; $\triangle SBC$ đều $\Rightarrow BC = a$; $\triangle SAC$ cân tại $S \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$. Ta thấy $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $B \Rightarrow$ trung điểm H của AC là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.



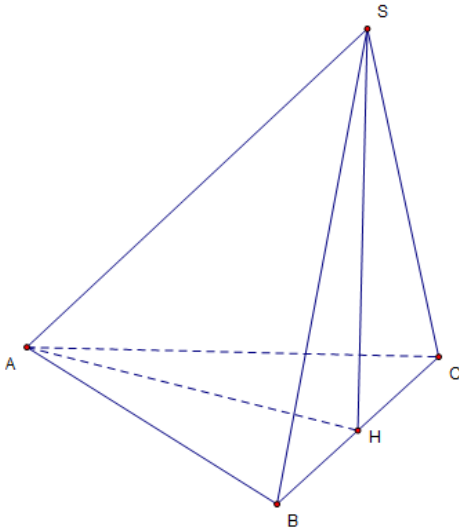
Vậy góc giữa SB và (ABC) là góc $\widehat{SBH}$. Ta có $SB = a$, $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\cos \widehat{SBH} = \frac{BH}{SB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SBH} = 30^\circ$.

Câu 20. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy là tam giác vuông tại A , cạnh $BC = a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) .

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.B. $\frac{1}{3}$.C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm BC thì khi đó $SH \perp (ABC)$; suy ra HA là hình chiếu của SA trên (ABC) .

$$\text{Do đó } (\widehat{SA; (ABC)}) = (\widehat{SA; HA}) = \widehat{SAH} \Rightarrow \cos \widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 21. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. $SA = a\sqrt{3}$. Cosin của góc giữa SC và mặt đáy bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

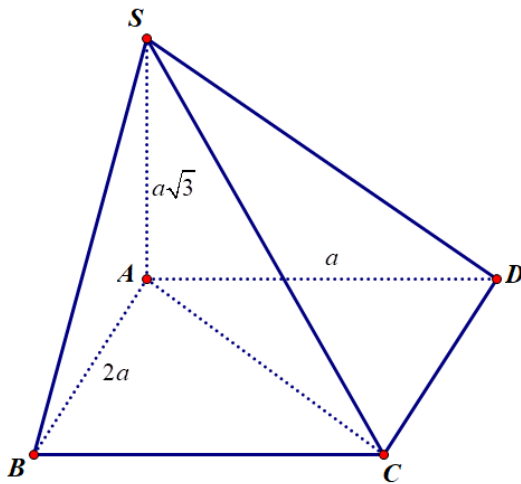
B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



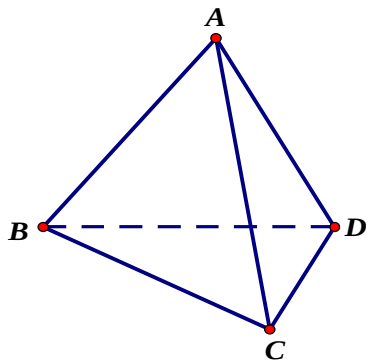
Hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ là AC

$$\text{Do đó } [\widehat{SC, (ABCD)}] = \widehat{SCA}$$

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow SC = 2a\sqrt{2}$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SAC: \cos \widehat{SCA} = \frac{AC}{SC} = \frac{a\sqrt{5}}{2a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Câu 22. (TH) Cho tứ diện đều $ABCD$. Cosin góc giữa AB và $mp(BCD)$ bằng:



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

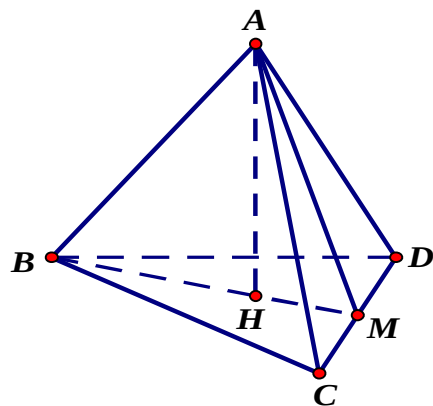
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của CD . Ta có $BM = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) thì $H \in BM$ và $BH = \frac{2}{3}BM = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$.

Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) là $\widehat{ABM}$.

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \cos \widehat{ABM} = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{AB\sqrt{3}}{3}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 23. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin \alpha$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

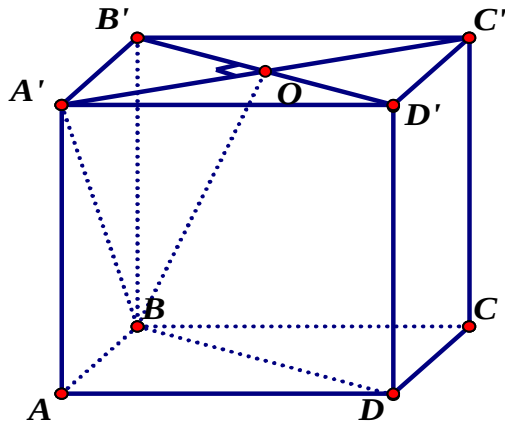
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $B = A'B \cap (BB'D'D)$.

$$\begin{cases} A'O \perp B'D' \\ A'O \perp BB' \\ BB' \cap B'D' = B' \\ BB', B'D' \subset (BB'D'D) \end{cases} \Rightarrow A'O \perp (BB'D'D).$$

BO là hình chiếu vuông góc của AB' lên $(BB'D'D)$ nên $(\widehat{A'B, (BDD'B')}) = (\widehat{A'B, BO})$.

Suy ra $\alpha = \widehat{A'BO}$ (do $\triangle BA'O$ vuông tại O).

Ta có: $A'B = a\sqrt{2}$, $A'O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{A'O}{A'B} = \frac{1}{2}$.

Câu 24. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. α , với $\cot \alpha \sqrt{3}$.

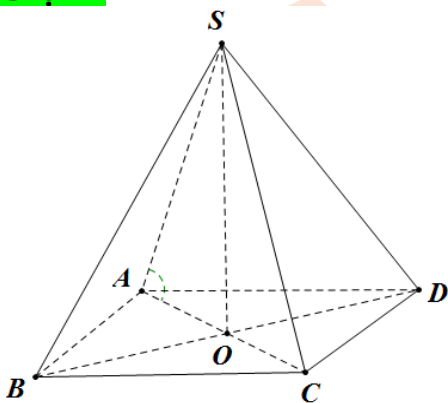
B. 30° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có: } \cos \widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

Câu 25. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Điểm M thuộc tia DD' thỏa mãn $DM = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. 30° .

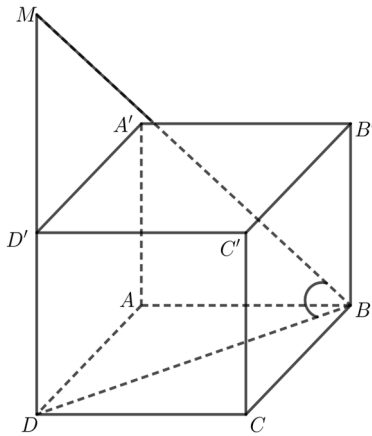
B. 45° .

C. 75° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Để thấy đường thẳng BD là hình chiếu vuông góc của đường thẳng BM lên mặt phẳng $(ABCD)$.
Suy ra góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng BM và BD .

Ta có $\triangle MDB$ vuông tại D , $DM = a\sqrt{6}$, $BD = a\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông cạnh a).

Suy ra góc giữa hai đường thẳng BM và BD là góc $\widehat{MBD}$.

$$\tan MBD = \frac{MD}{BD} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}. \text{ Vậy góc giữa đường thẳng } BM \text{ và mặt phẳng } (ABCD) \text{ là } 60^\circ.$$

Câu 26. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $ABCD$. Gọi φ là góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$ thì

A. $\tan \varphi = 2\sqrt{2}$.

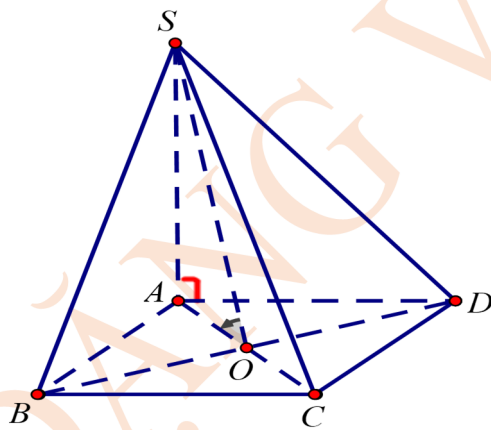
B. $\tan \varphi = \sqrt{3}$.

C. $\tan \varphi = 2$.

D. $\tan \varphi = 1$.

Lời giải

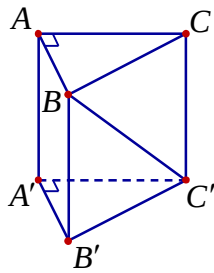
Chọn A



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SO trên $(ABCD)$ là AO . Gọi φ là góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$ thì $\varphi = (\widehat{SO, OA}) = \widehat{SOA}$. Vì tam giác SAO vuông tại A nên

$$\tan \varphi = \frac{SA}{OA} = \frac{2a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Câu 27. (TH) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AA' = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính tang của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.



- A.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\triangle ABC \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow AB = AC = a.$$
$$\triangle ABA' \text{ vuông tại } A \Rightarrow A'B = a\sqrt{2}.$$

Ta có $\begin{cases} C'A' \perp A'B' \\ C'A' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow C'A' \perp (ABB'A').$

$\Rightarrow BA'$ là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $(ABB'A')$.

$$\Rightarrow (BC'; (ABB'A')) = (BC'; BA').$$

$$\Delta A'BC' \text{ vuông tại } A' \Rightarrow \tan \widehat{A'BC'} = \frac{A'C'}{A'B} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

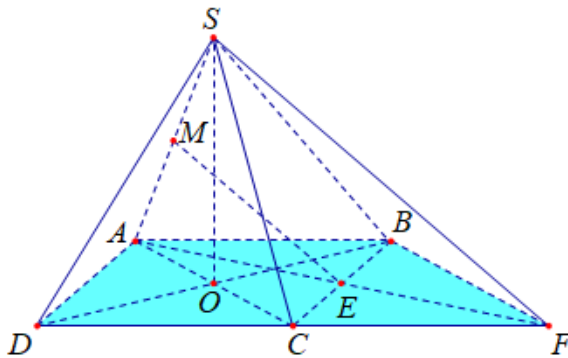
MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 28. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E , M lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và SA , α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD) . Giá trị của $\tan \alpha$ bằng

- A.** 2. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



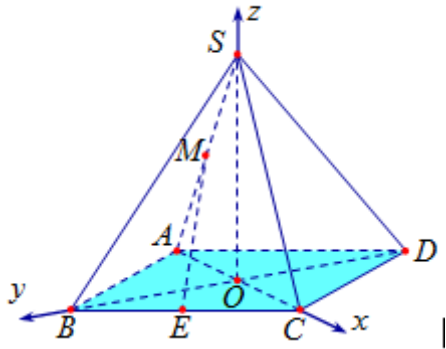
Dựng hình bình hành $ABFC$.

Ta có $EM \parallel SF$ nên góc giữa EM và (SBD) bằng góc giữa SF và (SBD) .

$FB \parallel AC \Rightarrow FB \perp (SBD)$ do đó góc giữa SF và (SBD) bằng góc $\widehat{FSB}$.

Ta có $\tan \widehat{FSB} = \frac{BF}{SB} = \frac{AC}{SB} = \sqrt{2}$. Vậy chọn D

Cách 2:



Tọa độ hóa với $Ox \equiv OC$, $Oy \equiv OB$, $Oz \equiv OS$ ($OA=1$).

Ta có $C(1;0;0)$, $A(-1;0;0) \Rightarrow (SBD)$ nhận $\overrightarrow{AC} = (2;0;0)$ là một VTPT.

Từ $SA = AB = OA\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} S(0;0;1) \\ A(-1;0;0) \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$.

Ta có $\begin{cases} C(1;0;0) \\ B(0;1;0) \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right) \Rightarrow EM$ nhận $\overrightarrow{ME} = \left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Là một VTCPT

$$\Rightarrow \sin(\widehat{EM;(SBD)}) = \frac{|\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{AC}|}{ME \cdot AC} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2}.$$

Là một VTCPT

$$\Rightarrow \sin(\widehat{EM;(SBD)}) = \frac{|\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{AC}|}{ME \cdot AC} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2}.$$

Câu 29. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$. Tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$

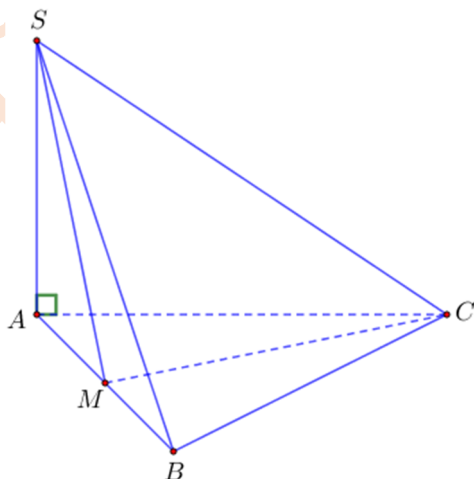
B. $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$

C. 1.

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm AB thì $CM \perp AB \Rightarrow CM \perp (SAB)$.

Ta có SM là hình chiếu của SC trên $(SAB) \Rightarrow (\widehat{SC, (SAB)}) = (\widehat{SC, SM}) = \widehat{MSC}$.

Ta có $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Vậy $\tan \widehat{MSC} = \frac{MC}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Câu 30. (VD) Cho tứ diện đều $ABCD$. Cosin góc giữa AB và mặt phẳng (BCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

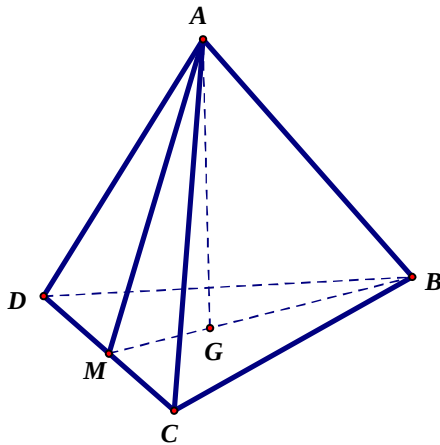
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AB = a$ ($a > 0$).

Gọi M là trung điểm DC , G là trọng tâm tam giác BCD .

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $AG \perp (BCD)$.

Khi đó $(\widehat{AB, (BCD)}) = (\widehat{AB, BG}) = \widehat{ABG}$.

Ta có $BG = \frac{2}{3} BM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\cos \widehat{ABG} = \frac{BG}{BA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 31. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E ; M lần lượt là trung điểm của BC và SA . Gọi α là góc tạo bởi EM và (SBD) . Khi đó $\tan \alpha$ bằng:

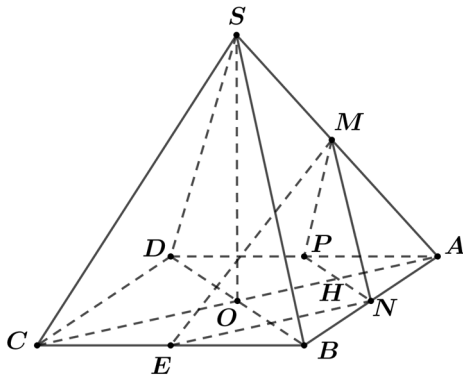
A. 1.

B. 2.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

**Chọn C**

Giả sử tất cả các cạnh của hình chóp có độ dài bằng a . Gọi O là giao điểm của AC và BD và N, P, H lần lượt là trung điểm của AB, AD, OA . Khi đó ta có $(MNP) \parallel (SBD)$. Do đó α là góc

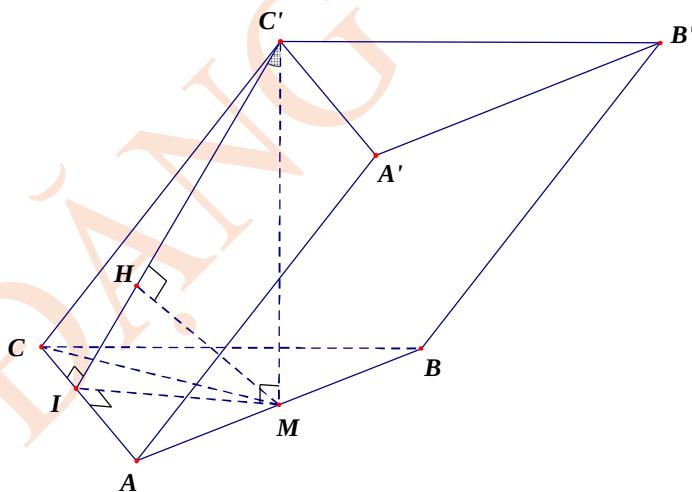
tạo bởi EM và (SBD) bằng góc tạo bởi EM và (MNP) vì $\begin{cases} EN \parallel AC \\ AC \perp (SBD) \\ (SBD) \parallel (MNP) \end{cases} \Rightarrow EN \perp (MNP)$.

Suy ra hình chiếu của ME trên (MNP) là MN . Suy ra góc α bằng góc giữa hai đường thẳng MN và ME . Trong tam giác MNE vuông tại N ta có $MN = \frac{a}{2}$, $NE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra $\tan \alpha = \frac{EN}{MN} = \sqrt{2}$.

Câu 32. (VD) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $\widehat{ACB} = 135^\circ$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB . Tính góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. 90° .B. 60° .C. 45° .D. 30° .

Lời giải

Chọn D

Dựng $MI \perp AC$ ($I \in AC$) và $MH \perp C'I$ ($H \in C'I$) (1).

Ta có: $\begin{cases} AC \perp IM \\ AC \perp C'M \end{cases} \Rightarrow AC \perp (C'MI)$ mà $HM \subset (C'MI) \Rightarrow MH \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MH \perp (ACC'A')$. Do đó góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$ là góc $\widehat{HC'M} = \alpha$.

$$\text{Mặt khác, ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow S_{\triangle AMC} = \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Lại có } S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} MI \cdot AC \Rightarrow MI = \frac{2S_{\triangle AMC}}{AC} = \frac{a^2}{2a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$AM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos 135^\circ} = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + a^2 - 2a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 135^\circ} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$AI = \sqrt{AM^2 - IM^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow CI = AC - AI = a\sqrt{2} - \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$C'I = \sqrt{C'C^2 - CI^2} = \sqrt{\frac{10a^2}{16} - \frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

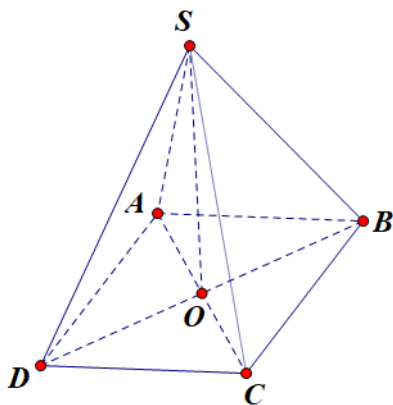
$$\text{Do đó } \sin \alpha = \frac{IM}{C'I} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Câu 33. (VD) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 60° .B. 75° .C. 30° .D. 45° .

Lời giải

Chọn C



Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, và $\widehat{ADC} = 60^\circ$ nên $\triangle ACD$ đều và $OD = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDO}$ và $\tan \widehat{SDO} = \frac{SO}{DO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra

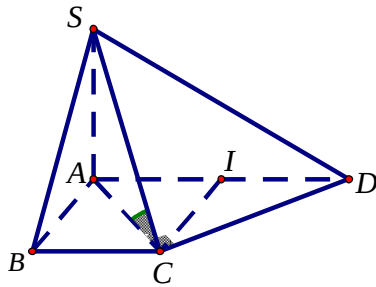
$$\widehat{SDO} = 30^\circ.$$

Câu 34. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2a$, $AB = BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) .

A. $36^\circ 33'$.B. $26^\circ 57'$.C. $26^\circ 33'$.D. $30^\circ 33'$.

Lời giải

Chọn C



$SC \cap (ABCD) = C$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $A \Rightarrow$ hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $AC \Rightarrow \widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Xét tam giác ABC vuông tại B có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{6}$ và $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}a$.

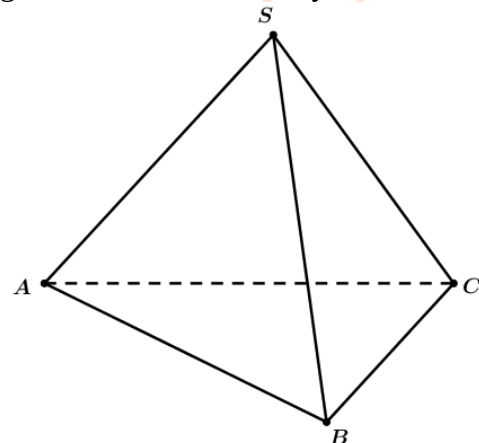
Xét tam giác SAD vuông tại A có $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{6a^2 + 4a^2} = a\sqrt{10}$.

Gọi I là trung điểm của AD . Ta có $AI = \frac{1}{2}AD = a \Rightarrow AI = BC$. Lại có $AI \parallel BC$ nên $ABCI$ là hình bình hành. Do đó $CI = AB = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại $C \Rightarrow CD \perp AC$ mà $CD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$) nên $CD \perp (SAC)$.

Ta có $SD \cap (SAC) = S$ và hình chiếu của D trên mặt phẳng (SAC) là $C \Rightarrow$ hình chiếu của SD trên mặt phẳng (SAC) là $SC \Rightarrow \widehat{(SD, (SAC))} = \widehat{(SD, SC)} = \widehat{DSC}$.

Xét tam giác SCD vuông tại C có $\cos \widehat{DSC} = \frac{SC}{SD} = \frac{2\sqrt{2}a}{a\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \widehat{DSC} \approx 26^\circ 33'$.

Câu 35. (VD) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Giá trị cosin của góc giữa cạnh bên và mặt đáy là



A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

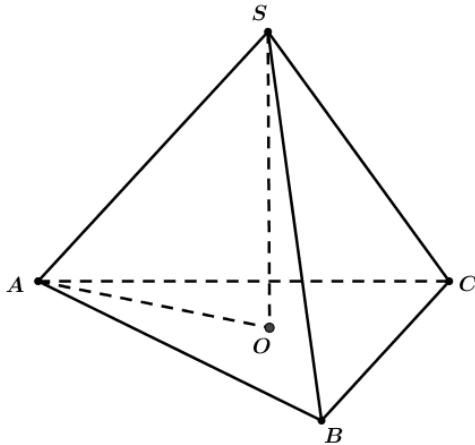
B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

D. $\frac{\sqrt{33}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của ΔABC , suy ra $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$.

Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) .

Ta có $\cos(SA, (ABC)) = \cos(SA, OA) = \cos OAS = \frac{OA}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 36. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A lên các cạnh SB, SD . Góc giữa mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SB bằng

A. 45° .

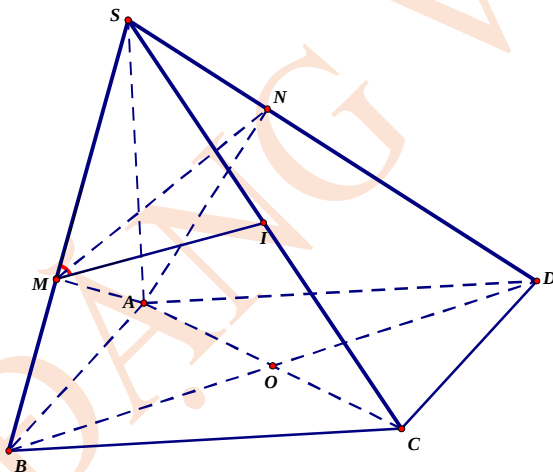
B. 120° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SC

Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$

$AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$

Tương tự: $AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$

Vậy $SC \perp (AMN)$ tại I .

Ta có MI là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (AMN)

Suy ra góc giữa SB và (AMN) là góc $\widehat{SMI}$

$$\text{Ta có } \sin \widehat{SMI} = \frac{SI}{SM}$$

$$\text{Ta có } SM \cdot SB = SA^2 \Rightarrow SM = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$$

$$SI \cdot SC = SA^2 \Rightarrow SI = a$$

$$\text{Vậy } \sin \widehat{SMI} = \frac{SI}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SMI} = 60^\circ$$

Câu 37. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SA và (SBC) . Khi đó

A. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

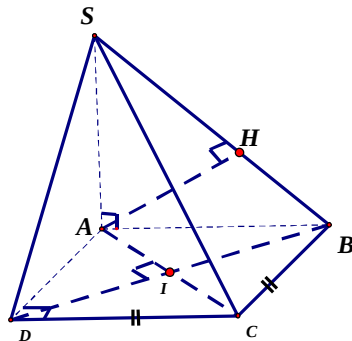
B. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.

D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $AH \perp SB$, chứng minh được $AH \perp (SBC)$, Khi đó góc giữa SA và (SBC) là góc $\widehat{ASH}$ hay $\widehat{ASB}$ và ta có $SB = a\sqrt{5}$.

$$\cos \alpha = \frac{SA}{SB} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Câu 38. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $\frac{a}{\sqrt{2}}$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là:

A. 30° .

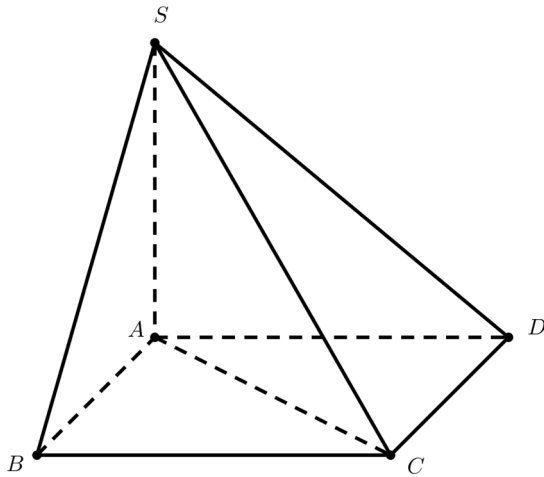
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C



$SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên $mp(ABCD)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh $\frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow AC = a$.

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ.$$

Câu 39. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SB . Tính tan góc giữa đường thẳng DM và $(ABCD)$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

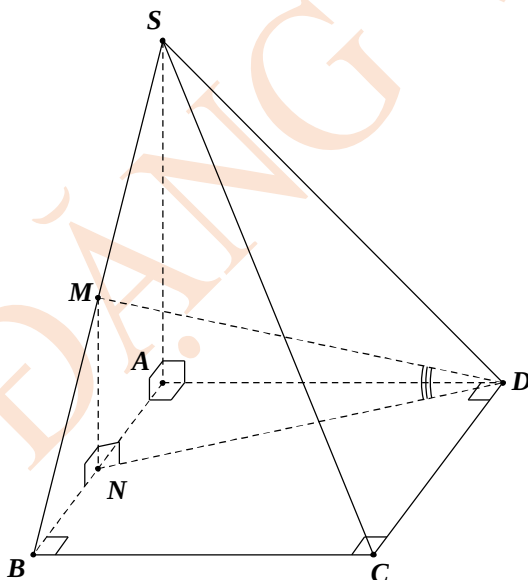
B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm AB .

Ta có: MN là đường trung bình của $\triangle SAB$ nên $MN \parallel SA$ và $MN = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lại có: $SA \perp (ABCD)$.

Do đó $MN \perp (ABCD)$ (1).

Suy ra $MN \perp DN$.

Ta có: N là hình chiếu vuông góc của M lên $(ABCD)$ (do (1)) và D là hình chiếu vuông góc của D lên $(ABCD)$.

Suy ra $(DM; (ABCD)) = (DM; ND) = \widehat{MDN}$ ($\widehat{MDN}$ nhọn vì $\triangle MND$ vuông tại N).

$$\text{Ta có: } DN = \sqrt{AD^2 + AN^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Xét $\triangle MND$ vuông tại N , có:

$$\tan MDN = \frac{MN}{DN} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Vậy } \tan(DM; (ABCD)) = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Câu 40. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Gọi O là tâm của đáy và M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC . Nếu góc giữa đường thẳng MN và $(ABCD)$ bằng 60° thì độ dài đoạn MN là

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

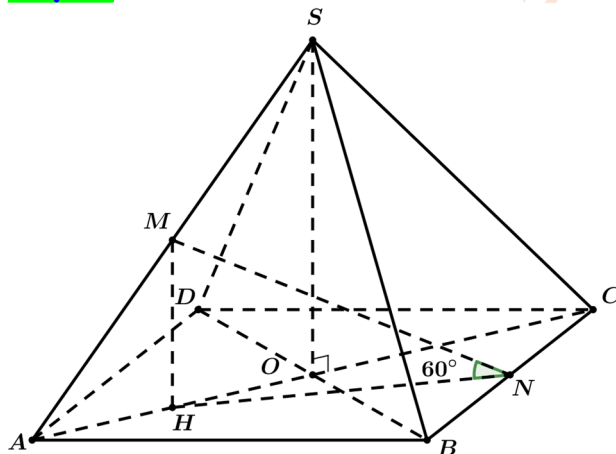
B. $\frac{a}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của $OA \Rightarrow MH \parallel SO$.

Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên:

$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow MH \perp (ABCD) \Rightarrow (MN, (ABCD)) = \widehat{MNH} = 60^\circ.$$

Xét tam giác HNC có:

$$HN^2 = NC^2 + HC^2 - 2HC \cdot NC \cdot \cos \widehat{HCN} = \frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{8} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}.$$

$$\text{Vậy } HN = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}. \text{ Xét tam giác vuông } MHN \text{ ta có: } MN = \frac{HN}{\cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cdot 2 = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Câu 41. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a, AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD . Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) .

A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

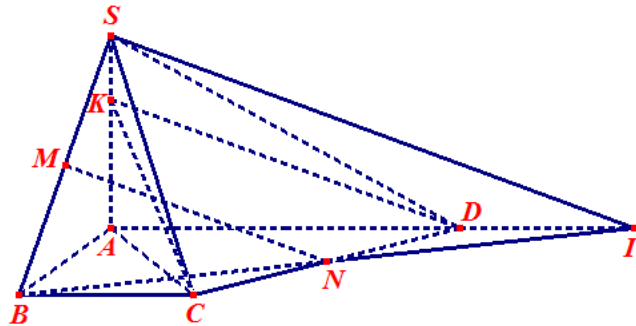
B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

D. $\frac{\sqrt{55}}{10}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $I = BN \cap AD$. Dễ thấy N là trung điểm của BI , do đó $MN \parallel SI$. Kẻ đường thẳng qua D và song song với SI cắt SA tại $K \Rightarrow DK \parallel SI \Rightarrow (MN, (SAC)) = (DK, (SAC))$

Dễ thấy CK là hình chiếu của DK trên $(SAC) \Rightarrow (DK, (SAC)) = \widehat{DKC}$.

$$\text{Ta có } KA = \frac{2}{3}SA = \frac{2a}{3}$$

$$\Rightarrow KC = \sqrt{KA^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{9} + 2a^2} = \frac{\sqrt{22}}{3}a, \quad KD = \sqrt{KA^2 + AD^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{9} + 4a^2} = \frac{2\sqrt{10}}{3}a$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{DKC} = \frac{KC}{KD} = \frac{\sqrt{55}}{10}.$$

Câu 42. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $ABCD$ là hình chữ nhật có $AD = 3a$, $AC = 5a$, góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45° . Khi đó cosin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{7}}{5}$.

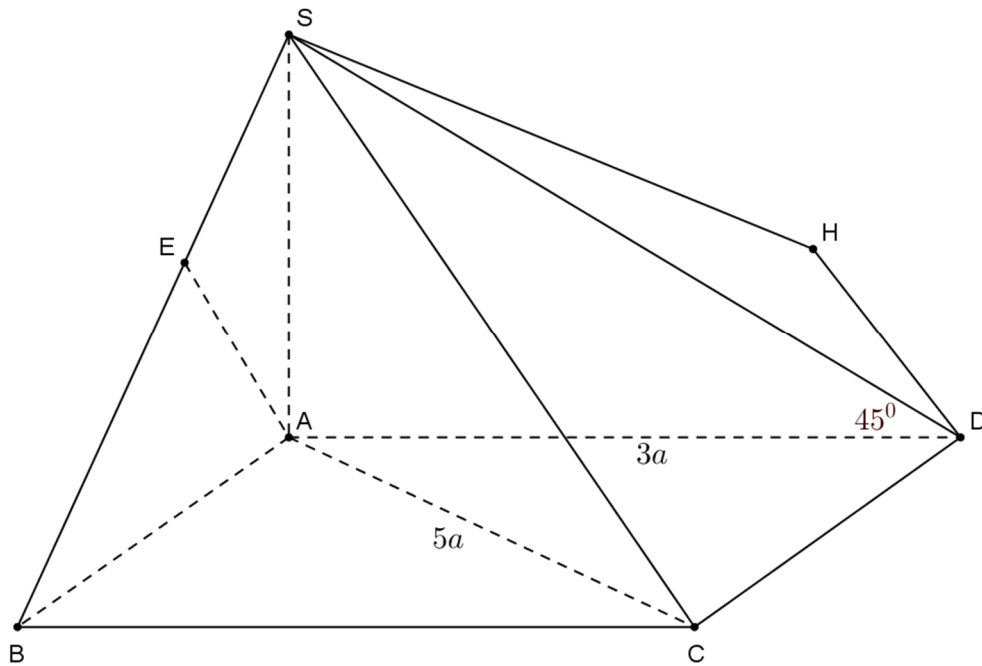
B. $\frac{4}{5}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{17}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SDA} = 45^\circ$.

Gọi E là hình chiếu vuông góc của A lên SB

$$\Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AE = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{12a}{5}.$$

(với $AB = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 4a$).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên (SBC) .

Khi đó, góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng $\widehat{DSH}$.

$$\sin \widehat{DSH} = \frac{DH}{SD} = \frac{d(D, (SBC))}{SD} = \frac{d(A, (SBC))}{SD} = \frac{AE}{AD \cdot \tan 45^\circ} = \frac{\frac{12a}{5}}{3a\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{DSH} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{DSH}} = \frac{\sqrt{17}}{5}.$$

Câu 43. (VD) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a . Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° ?

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}a$.

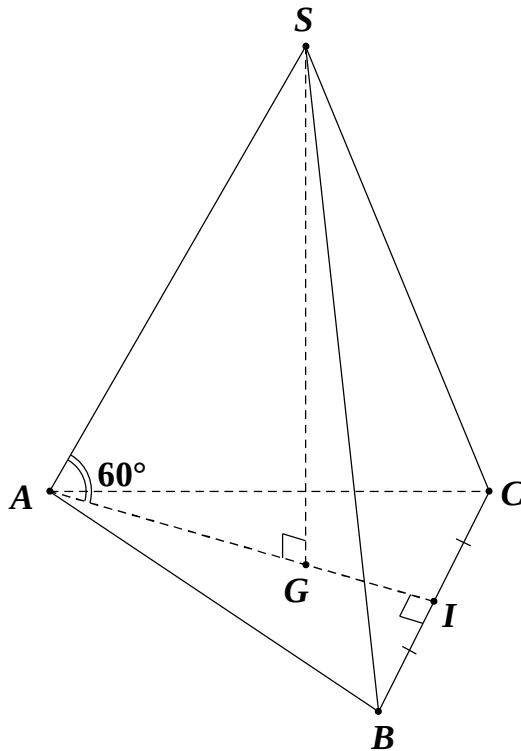
B. a .

C. $\frac{a}{6}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm BC và G là trọng tâm $\triangle ABC$

Ta có: $\begin{cases} SA = SB = SC \\ GA = GB = GC \end{cases}$

Suy ra SG là trục của (ABC)

Suy ra $SG \perp (ABC)$

Ta có: A là hình chiếu vuông góc của A lên (ABC) và G là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC)

Suy ra $(SA; (ABC)) = (SA; AG) = \widehat{SAG} = 60^\circ$

Ta có: $AG = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác SAG vuông tại G , ta có:

$$SG = \tan 60^\circ \cdot AG = \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = a.$$

Câu 44. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a\sqrt{2}$; $BC = a$ và $SA = SB = SC = SD = 2a$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên AC , H là hình chiếu vuông góc của K trên SA . Tính cosin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (BKH) .

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

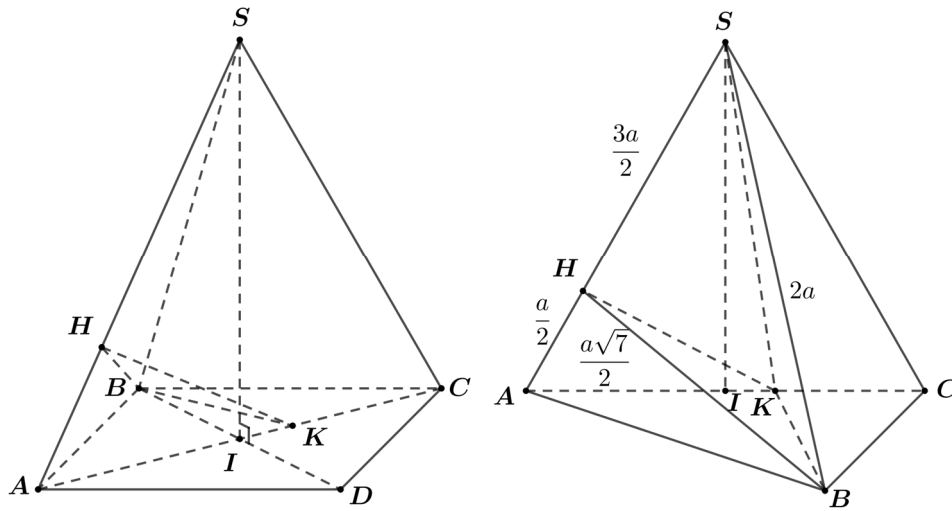
C. $\frac{\sqrt{8}}{5}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Tính trực tiếp bằng lớp 11.



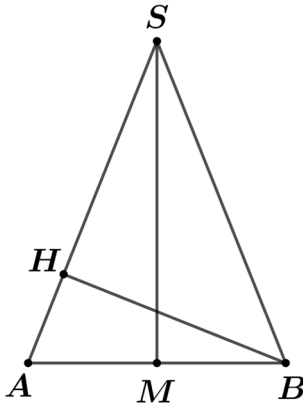
Gọi I tâm của $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} SI \perp AC \\ SI \perp BD \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD).$

Mặt khác: $\begin{cases} BK \perp AC \\ BK \perp SI \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAC).$

Suy ra: $\begin{cases} SH \perp HK \\ SH \perp BK \end{cases} \Rightarrow SH \perp (BHK).$

Nên $\cos(\widehat{SB; (BHK)}) = \cos \widehat{HBK}$



Ta có: $\frac{1}{2} \cdot SM \cdot AB = \frac{1}{2} HB \cdot SA \Rightarrow HB = \frac{SM \cdot AB}{SA}$

Với: $SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$

Suy ra: $HB = \frac{\frac{a\sqrt{14}}{2} \cdot a\sqrt{2}}{2a} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

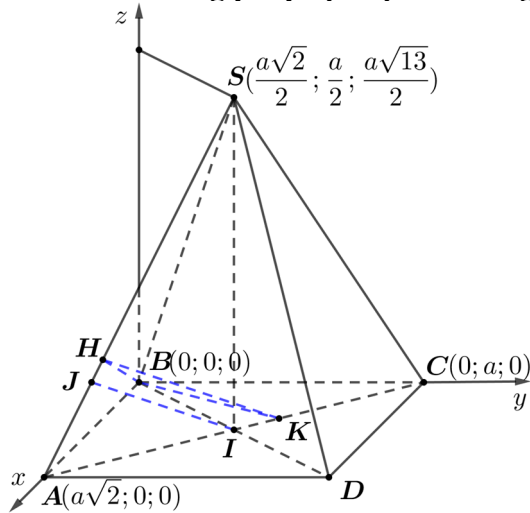
$\Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow SH = \frac{3a}{2}.$

Trong tam giác BHK có:

$$\cos \widehat{BHK} = \frac{HB^2 + SB^2 - SH^2}{2 \cdot HB \cdot SB} \Rightarrow \cos \widehat{BHK} = \frac{\frac{7a^2}{4} + 4a^2 - \frac{9a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot 2a}.$$

Vậy: $\cos(SB; (BHK)) = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ hóa trong không gian (lớp 12).



Gọi I tâm của $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} SI \perp AC \\ SI \perp BD \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Chọn hệ trục như hình vẽ với: $B(0; 0; 0)$; $A(a\sqrt{2}; 0; 0)$; $C(0; a; 0)$.

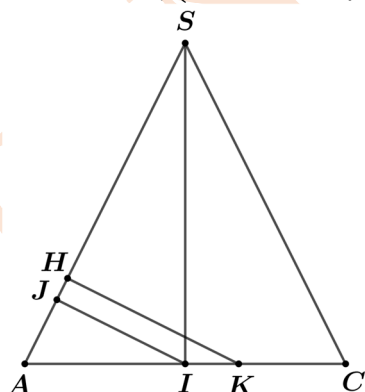
$$SI = \sqrt{SB^2 - BI^2} \Leftrightarrow SI = \sqrt{4a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

Suy ra tọa độ điểm $S\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{13}}{2}\right)$.

Trong tam giác vuông BAC có: $AK = \frac{AB^2}{AC} \Rightarrow AK = \frac{2a}{\sqrt{3}}$; $\frac{AK}{AC} = \frac{2}{3}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \Rightarrow K\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}; \frac{2a}{3}; 0\right)$.

Kẻ $IJ \perp SA$, (hình minh họa)



Ta có: $AJ = \frac{AI^2}{SA} \Rightarrow AJ = \frac{3}{8}a$.

Dễ thấy: $\frac{AH}{AJ} = \frac{AK}{AI} = \frac{4}{3} \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AS}$ với $\overrightarrow{AH} = (x_H - a\sqrt{2}; y_H; z_H)$; $\overrightarrow{AS} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - a\sqrt{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{13}}{2}\right)$.

$$\Rightarrow H\left(\frac{7\sqrt{2}a}{8}; \frac{a}{8}; \frac{a\sqrt{13}}{8}\right).$$

Để dễ tính toán ta đặt $a=1$.

Lúc đó ta có hệ thống điểm như sau:

$$S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{13}}{2}\right); K\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{2}{3}; 0\right); H\left(\frac{7\sqrt{2}}{8}; \frac{1}{8}; \frac{\sqrt{13}}{8}\right).$$

$$\text{Gọi } \overrightarrow{BS} = \vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{13}}{2}\right); \vec{n} = [\overrightarrow{BH}; \overrightarrow{BK}] = \left(-\frac{2\sqrt{13}}{24}; \frac{\sqrt{26}}{24}; \frac{13\sqrt{2}}{24}\right).$$

$$\text{Ta có: } \sin(SB; (BHK)) = \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \sin(\vec{u}; \vec{n}) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}.$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\left| -\frac{2\sqrt{26}}{48} + \frac{\sqrt{26}}{48} + \frac{13\sqrt{26}}{48} \right|}{\sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{13}{4}} \cdot \sqrt{\frac{52}{24^2} + \frac{26}{24^2} + \frac{388}{24^2}}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Suy ra: } \cos(SB; (BHK)) = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Câu 45. (VD) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC . Cạnh bên hợp với (ABC) góc 60° . Sin của góc giữa AB và mặt phẳng $(BCC'B')$.

A. $\frac{3}{\sqrt{13}}.$

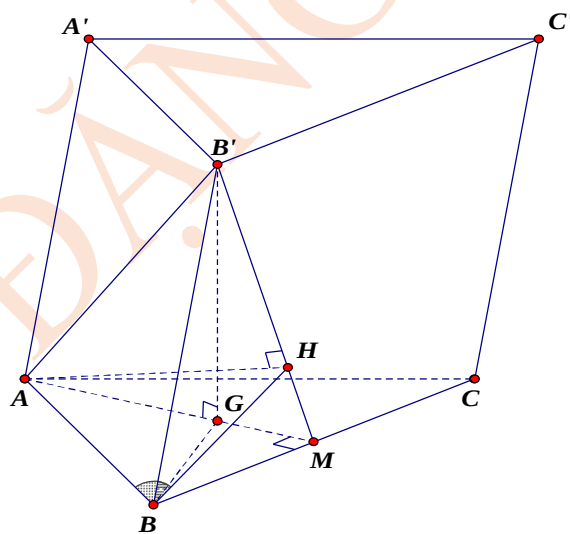
B. $\frac{3}{2\sqrt{13}}.$

C. $\frac{1}{\sqrt{13}}.$

D. $\frac{2}{\sqrt{13}}.$

Lời giải

Chọn A



Ta có $B'G \perp (ABC)$ nên BG là hình chiếu của BB' lên mặt phẳng (ABC) .

$$\Rightarrow (BB'; (ABC)) = (BB'; BG) = \widehat{B'BG} = 60^\circ.$$

Gọi M là trung điểm BC và H là hình chiếu của A lên $B'M$, ta có

$$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp B'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AB'M) \Rightarrow BC \perp AH.$$

Mà $AH \perp B'M$ nên $AH \perp (BCC'B')$.

Do đó HB là hình chiếu của AB lên mặt phẳng $(BCC'B')$.

$$\Rightarrow (AB, (BCC'B')) = (AB, HB) = \widehat{ABH}.$$

Xét tam giác ABH vuông tại H có $\sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB}$.

$$B'G = BG \cdot \tan 60^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} = a.$$

$$B'M = \sqrt{B'G^2 + GM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}.$$

$$\text{Ta có } \triangle AHM \sim \triangle B'GM \Rightarrow AH = \frac{AM \cdot B'G}{B'M} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{39}}{6}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}.$$

$$\text{Vậy } \sin \widehat{ABH} = \frac{\frac{3a}{\sqrt{13}}}{a} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Câu 46. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° , cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

A. $\frac{\sqrt{41}}{41}.$

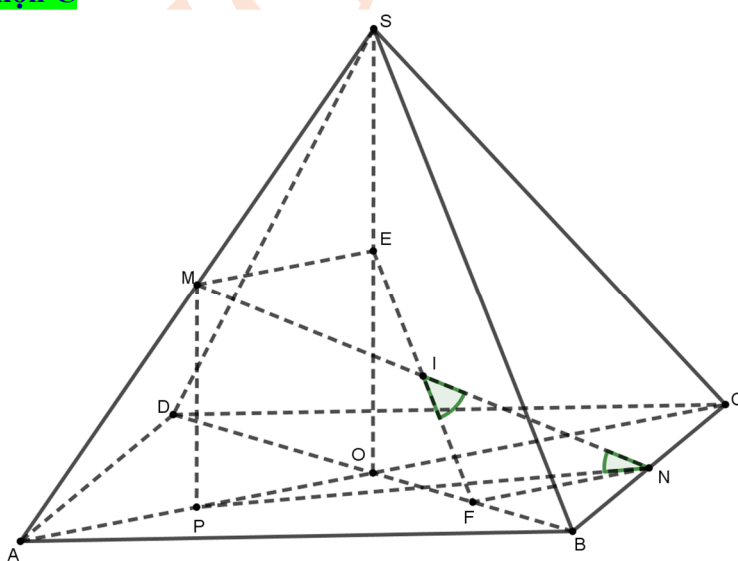
B. $\frac{\sqrt{5}}{5}.$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

D. $\frac{2\sqrt{41}}{41}.$

Chọn C

Lời giải



Cách 1:

Gọi E, F lần lượt là trung điểm SO, OB thì EF là hình chiếu của MN trên (SBD) .

Gọi P là trung điểm OA thì PN là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$.

Theo bài ra: $\widehat{MNP} = 60^\circ$.

Áp dụng định lý cos trong tam giác CNP ta được:

$$NP^2 = CP^2 + CN^2 - 2CP \cdot CN \cdot \cos 45^\circ = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}.$$

$$\text{Suy ra: } NP = \frac{a\sqrt{10}}{4}, MP = NP \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{4}; SO = 2MP = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

$$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow EF = a\sqrt{2}.$$

Ta lại có: $MENF$ là hình bình hành (vì ME và NF song song và cùng bằng $\frac{1}{2}OA$).

Gọi I là giao điểm của MN và EF , khi đó góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) là $\widehat{NIF}$.

$$\cos \widehat{NIF} = \frac{IK}{IN} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{a\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Cách 2:

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ sao cho:

$$O(0;0;0), A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), D\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), S(0;0;x), x > 0.$$

$$M \text{ là trung điểm của } SA: M\left(\frac{-a\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{x}{2}\right)$$

$$N \text{ là trung điểm của } BC: N\left(\frac{-a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{-a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; -\frac{x}{2}\right), \vec{k} = (0;0;1).$$

$$\text{Ta có: } \sin 60^\circ = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{k}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{2a^2}{8} + \frac{a^2}{8} + \frac{x^2}{4}}} \Rightarrow x = a\sqrt{30}$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{-a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; -\frac{a\sqrt{30}}{4}\right)$$

VTCP của (SBD) là $\vec{i} = (1;0;0)$

Gọi α là góc giữa (SBD) và MN

$$\text{Ta có: } \sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{i}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Câu 47. (VD) Tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC$ và đôi một vuông góc. Tan của góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 2.

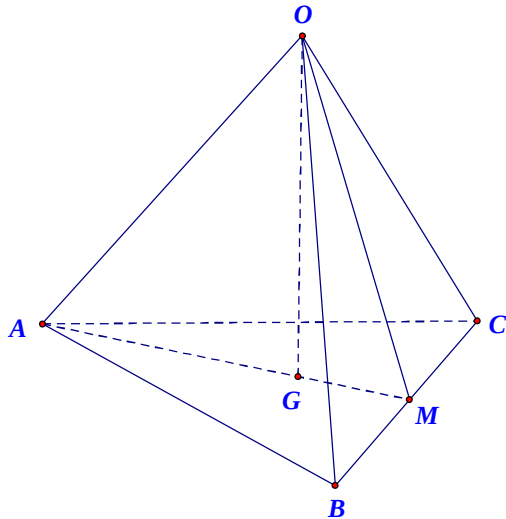
B. $\sqrt{2}$.

C. 1.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Theo bài ra tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC$ và đôi một vuông góc nên đáy ABC là tam giác đều và hình chiếu vuông góc của O lên (ABC) trùng với trọng tâm G của ΔABC .

Do đó $OG \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(OA; (ABC))} = \widehat{OAG}$.

Giả sử $OA = OB = OC = a \Rightarrow AB = AC = BC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác OBC vuông: $OM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (tính chất đường trung tuyến)

$\left. \begin{array}{l} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{array} \right\} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OM \Rightarrow \tan \widehat{OAM} = \frac{OM}{OA} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 48. (VD) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$, có ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = SB = SC = a\sqrt{3}$. Tính cosin góc giữa SA và (ABC) .

A. $\frac{2}{3}$.

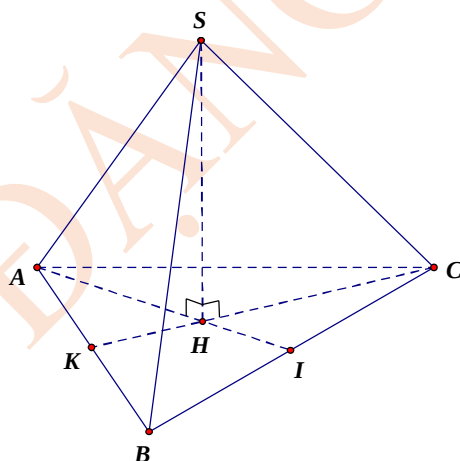
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi AI, CK lần lượt các đường cao trong tam giác ABC , $H = AI \cap CK$.

Ta có $BC \perp AI; BC \perp SI \Rightarrow BC \perp SH$.

Tương tự, $AB \perp SH$.

Suy ra $SH \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu của SA lên (ABC)

$$\Rightarrow (\widehat{SA; (ABC)}) = (\widehat{SA; AH}) = \widehat{SAH}.$$

$$\text{Xét tam giác } SAH \text{ vuông tại } H \text{ có } AH = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\cos \widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Câu 49. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính cosin góc giữa MN và (SAC) , biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

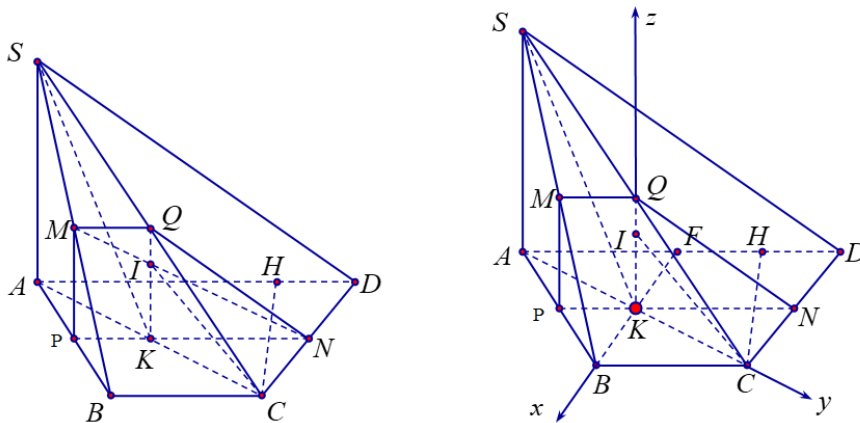
B. $\frac{3\sqrt{310}}{20}$.

C. $\frac{\sqrt{310}}{20}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1: Gọi (α) là mp đi qua MN và song song với mp (SAD) . Khi đó (α) cắt AB tại P , cắt SC tại Q , cắt AC tại K . Gọi I là giao điểm của MN và $QK \Rightarrow I \in (SAC)$.

Suy ra: P, Q, K lần lượt là trung điểm của AB, SC và AC .

Lại có: $ABCD$ là hình thang cân có $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$

$$\Rightarrow AD = 2a; AB = BC = CD = a$$

$$\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$\text{Nên } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SA = a \Rightarrow MP = \frac{1}{2} SA = \frac{a}{2} \text{ và } NP = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } MNP \text{ vuông tại } P: MN = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

MP, KQ lần lượt là đường trung bình của tam giác $\triangle SAB, \triangle SAC \Rightarrow MP \parallel KQ \parallel SA$

KN là đường trung bình của tam giác $\triangle ACD \Rightarrow KN = \frac{1}{2} AD = a$.

$$\text{Xét tam giác } AHC \text{ vuông tại } H: AC = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow KC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra: tam giác KNC vuông tại $C \Rightarrow C$ là hình chiếu vuông góc của N lên (SAC) .

$\Rightarrow$ góc giữa MN và (SAC) là góc $\widehat{NIC}$

$$\text{Khi đó: } \frac{IN}{MN} = \frac{KN}{NP} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow IN = \frac{2}{3} \cdot MN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{Xét tam giác } NIC \text{ vuông tại } C: NC = \frac{a}{2}; IN = \frac{a\sqrt{10}}{3} \Rightarrow IC = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{10}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{31}}{6}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{NIC} = \frac{IC}{IN} = \frac{a\sqrt{31}}{6} : \frac{a\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{310}}{20}.$$

Cách 2. Vì $ABCD$ là hình thang cân có $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$

$\Rightarrow AD = 2a; AB = BC = CD = a$

$$\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$\text{nên } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SA = a$$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ như hình vẽ

$$\text{Ta có: } K(0;0;0), \quad B\left(\frac{a}{2};0;0\right), \quad C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), \quad A\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), \quad N\left(\frac{-a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),$$

$$S\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right), \quad M\left(\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{-3a}{4}; \frac{3a\sqrt{3}}{4}; \frac{-a}{2}\right). \text{ Chọn } \vec{u}_1 = (-3; 3\sqrt{3}; -2) \text{ cùng phương với } \overrightarrow{MN}$$

$$\text{Nhận xét: } \begin{cases} BK \perp SA \\ BK \perp AC \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAC)$$

$$\overrightarrow{BK} = \left(\frac{a}{2}; 0; 0\right) \text{ là vtpt của } (SAC). \text{ Chọn } \vec{n}_1 = (1; 0; 0) \text{ cùng phương với } \overrightarrow{BK}$$

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là góc giữa } MN \text{ và } (SAC). \text{ Ta có } \sin \alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{u}_1| |\vec{n}_1|} = \frac{3\sqrt{10}}{20} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{310}}{20}.$$

Câu 50. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, BC = 2a, SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cô sin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{2}{5}.$

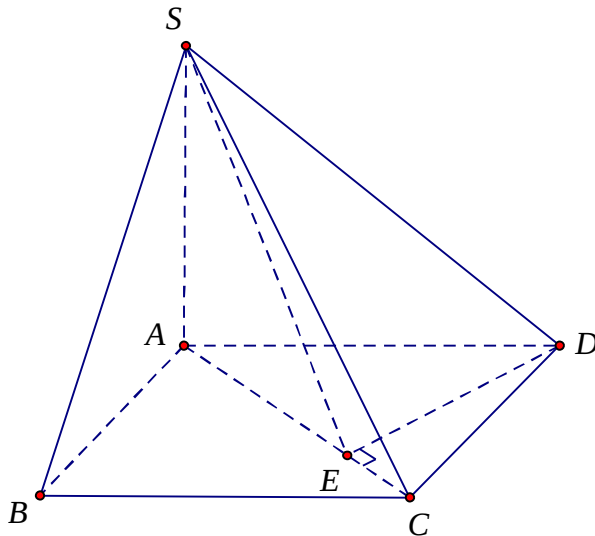
B. $\frac{\sqrt{21}}{5}.$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

D. $\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn B



Kẻ $DE \perp AC, E \in AC$ ta có $DE \perp SA$ do đó $DE \perp (SAC)$. Suy ra góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng góc $\widehat{DSE}$.

$$\text{Ta có } ED = \frac{2}{\sqrt{5}}, SD = a\sqrt{5}, SE = \frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Tam giác } DSE \text{ vuông tại } E \text{ nên } \cos \widehat{DSE} = \frac{SE}{SD} = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Câu 51. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt ABC và SBC là các tam giác đều và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Số đo của góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng

A. 45° .

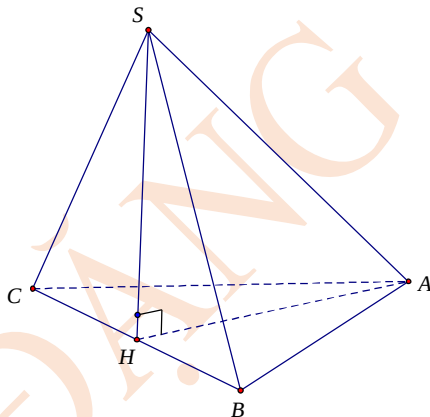
B. 75° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết ta có $(ABC) \perp (SBC)$.

Trong mặt phẳng (SBC) kẻ $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$ hay SH là đường cao của hình chóp.

Khi đó ta có $(SA, (ABC)) = (SA, AH) = \widehat{SAH}$.

Mặt khác theo giả thiết tam giác SBC và ABC là tam giác đều nên H là trung điểm của BC và

$$AH = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Xét tam giác vuông SHA ta có $\tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = 1 \Rightarrow \widehat{SAH} = 45^\circ$.

Vậy $(SA, (ABC)) = 45^\circ$.

Câu 52. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Góc giữa đường thẳng SA và $mp(SCD)$ bằng

A. 30° .

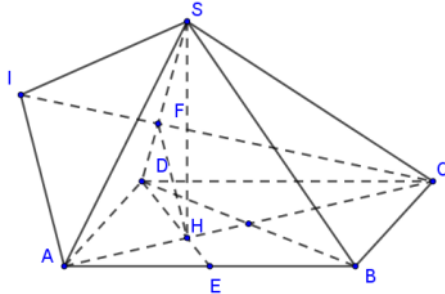
B. 90° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn C



Do $ABCD$ là hình thoi và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên ABD là tam giác đều cạnh a

Gọi H là trọng tâm tam giác ABD . Ta có $DH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vì $SA = SB = SD = a$ nên $SH \perp (ABCD)$. $SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Gọi F là hình chiếu vuông góc của H lên SD khi đó ta có $HF \perp mp(SCD)$. Tính được

$$FH = \frac{SH \cdot DH}{SD} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Gọi I là hình chiếu của A lên (SCD) khi đó FH song song với AI . Ta có $\frac{FH}{AI} = \frac{CH}{CA} = \frac{2}{3}$

$$\text{Nên } AI = \frac{3}{2}FH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Góc giữa đường thẳng SA và $mp(SCD)$ là góc $\widehat{ASI}$. $\sin \widehat{ASI} = \frac{AI}{SA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ASI} = 45^\circ$.

Câu 53. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $ABCD$ và $SA = 2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) .

A. $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

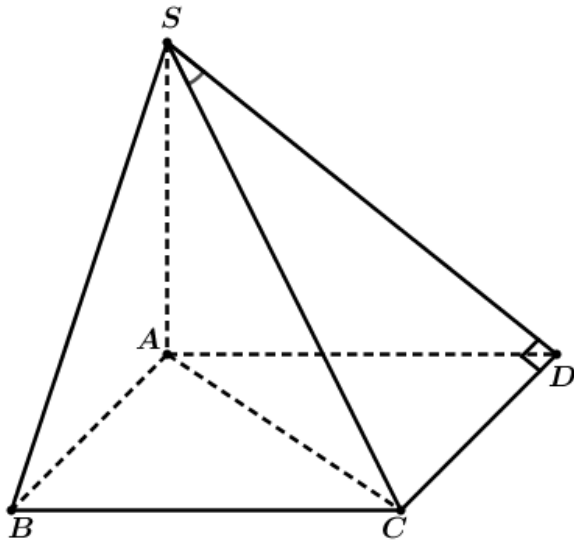
B. $\frac{\sqrt{6}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $ABCD$ nên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$, suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) là góc $\widehat{CSD}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A , có $SA = 2a$, $AC = a\sqrt{2}$, suy ra $SC = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}$.

Xét tam giác SCD vuông tại D , có $CD = a$, $SC = a\sqrt{6}$, suy ra $SD = \sqrt{(a\sqrt{6})^2 - a^2} = a\sqrt{5}$.

$$\cos \widehat{CSD} = \frac{SD}{SC} = \frac{a\sqrt{5}}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Câu 54. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BD .

A. 30° .

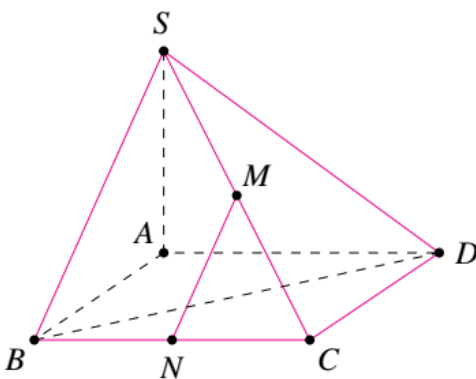
B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn C



Vì M, N là trung điểm của BC, SC nên $MN \parallel SB$.

Suy ra $(MN, BD) = (SB, BD)$.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác SAB và tam giác SAD ta có

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2},$$

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

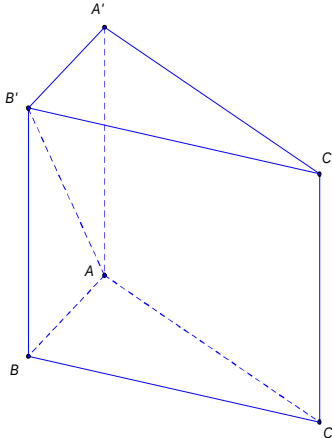
$ABCD$ là hình vuông nên $BD = a\sqrt{2}$. Vậy tam giác SBD là tam giác đều do đó $(\widehat{SB, BD}) = 60^\circ \Rightarrow (\widehat{MN, BD}) = 60^\circ$.

Câu 55. (VD) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) là

A. 45° .B. 30° .C. 60° .D. 90° .

Lời giải

Chọn C



*Vì $BB' \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của AB' trên (ABC) .

*Ta có $(\widehat{AB', (ABC)}) = (\widehat{AB', AB}) = \widehat{B'AB}$.

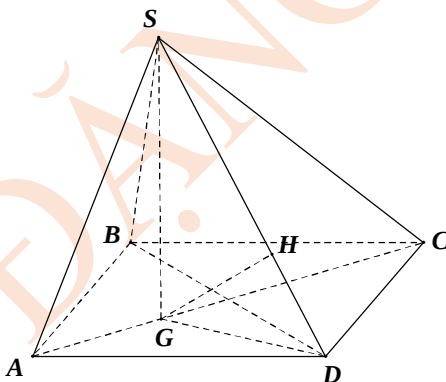
* Tam giác ABB' vuông tại B nên $\tan \widehat{BAB'} = \frac{BB'}{AB} = \frac{AA'}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BAB'} = 60^\circ$.

Câu 56. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng

A. 30° .B. 60° .C. 90° .D. 45° .

Lời giải

Chọn D



Dễ thấy hình chóp $S.ABD$ đều. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABD$. Khi đó $SG \perp (ABCD)$.

Do $\triangle ABD$ đều nên $GD \perp CD \Rightarrow CD \perp (SGD)$. Kẻ $GH \perp SD$, ($H \in SD$).

Khi đó: $GH \perp (SCD) \Rightarrow d(G; (SCD)) = GH$.

$$\text{Ta có: } GD = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SG = \sqrt{SD^2 - GD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Xét $\triangle SGD$ vuông tại G : $GH.SD = SG.GD \Rightarrow GH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

$$\text{Mà } d(A; (SCD)) = \frac{AC}{GC} \cdot d(G; (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Gọi K là hình chiếu của A lên (SCD) . Khi đó góc giữa SA và mặt phẳng (SCD) là $\widehat{ASK}$.

Xét $\triangle ASK$ vuông tại K thì: $\sin SAK = \frac{AK}{SA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{SAK} = 45^\circ$.

Câu 57. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AD = 2\text{ cm}$, $DC = 1\text{ cm}$, $\widehat{ADC} = 120^\circ$. Cạnh bên $SB = \sqrt{3}\text{ cm}$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi SD và mặt phẳng (SAC) . Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

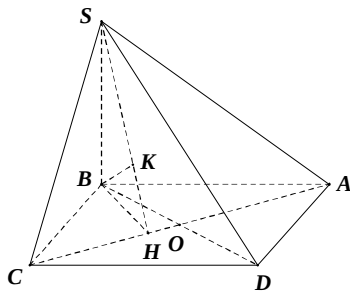
B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{7}$.

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\sin \alpha = \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Dễ thấy $SB \perp (ABCD)$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 60^\circ} = \sqrt{3} \Rightarrow SD = \sqrt{6}$.

$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2 + 2AB.AD.\cos 60^\circ} = \sqrt{7}.$$

Gọi H là hình chiếu của B trên AC , K là hình chiếu của B trên SH . Khi đó $BH \perp (SAC)$.

$$\text{Do } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BH.AC = \frac{1}{2} AB.BC.\sin 120^\circ \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BH^2} + \frac{1}{BS^2} \Rightarrow BK = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow d(B, (SAC)) = d(D, (SAC)) = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Dễ thấy } \sin \alpha = \frac{d(D, (SAC))}{SD} = \frac{1}{4}.$$

Câu 58. (VD) Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC$ và đôi một vuông góc. Tang của góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 2.

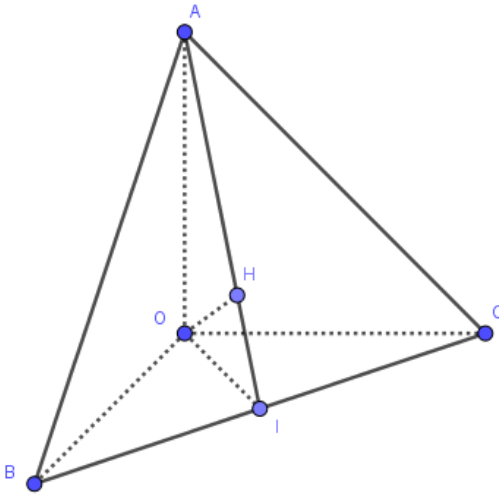
B. $\sqrt{2}$.

C. 1.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow OI \perp BC$, kẻ $OH \perp AI$ ($H \in AI$) $\Rightarrow OH \perp (ABC)$.

Ta được góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC) chính là góc giữa hai đường thẳng OA , AH và bằng $\widehat{OAH} = \widehat{OAI}$.

Giả sử $OA = OB = OC = a$, ta có $OI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác OAI vuông tại O có $\tan \widehat{OAI} = \frac{OI}{OA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 59. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABC'D')$. Khi đó

A. $\tan \alpha = \sqrt{3}$.

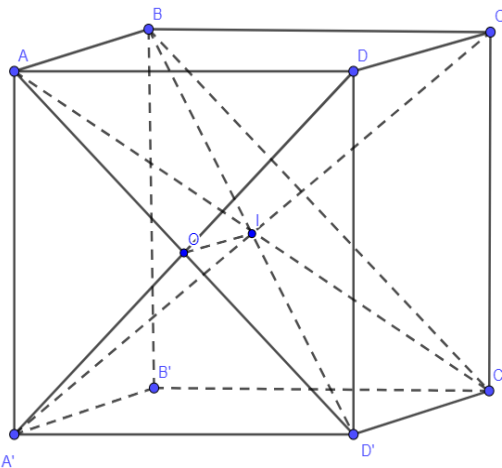
B. $\tan \alpha = 1$.

C. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của $A'C$. Ta có: $ACC'A'$; $ABC'D'$ là các hình chữ nhật.

Nên AC' ; $A'C$; BD' cắt nhau tại $I \Rightarrow A'C \cap (ABC'D') = I$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ADD'A' \Rightarrow A'O \perp AD'$. (1)

Lại có: $AB \perp (ADD'A') \Rightarrow A'O \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $A'O \perp (ABC'D')$.

$$\Rightarrow (A'C; (ABC'D')) = \widehat{A'IO}.$$

Gọi cạnh hình lập phương là a .

Tam giác $A'IO$ vuông tại O có: $A'O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $OI = \frac{1}{2}D'C' = \frac{a}{2}$.

$$\tan \widehat{A'IO} = \frac{A'O}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}.$$

Câu 60. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Xác định góc giữa SA và (SBD) ?

A. $\widehat{ASO}$.

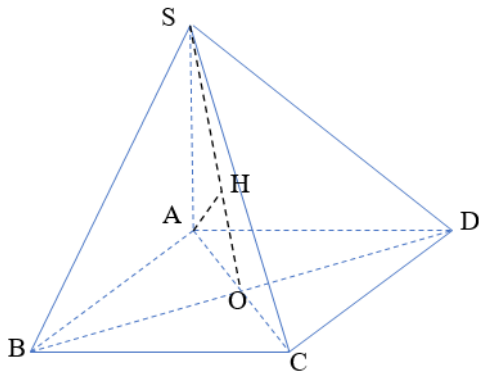
B. $\widehat{SOA}$.

C. $\widehat{ASB}$.

D. $\widehat{ASD}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AO \perp BD$; $SA \perp BD \Rightarrow (SAO) \perp BD \Rightarrow (SAO) \perp (SBD)$

Mà $(SAO) \cap (SBD) = SO$. Trong (SAO) : $AH \perp SO$ tại H .

$\Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow (SA; (SBD)) = (SA; SH) = \angle ASH = \angle ASO$

Câu 61. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại C . Biết $AB = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tính góc giữa SC và (SAB) .

A. 60° .

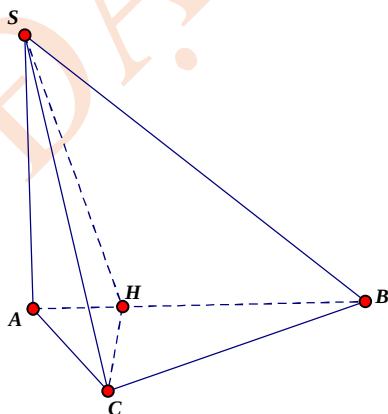
B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Kẻ $CH \perp AB$, theo giả thiết thì $CH \perp SA$ nên $CH \perp (SAB)$.

Vậy thì $\widehat{(SC; (SAB))} = \widehat{CSH}$ và chú ý tam giác SHC vuông tại H . Ta có $\sin \widehat{CSH} = \frac{HC}{SC}$.

Tính toán $AC = AB \cdot \sin 30^\circ = a$; $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$; $HC = AC \cdot \sin \widehat{CAH} = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy nên $\sin \widehat{CSH} = \frac{1}{2}$ tức là $\sin \widehat{CSH} = 30^\circ$.

Câu 62. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AD = 2a$, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BC . Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SDM) bằng $\frac{a}{2}$, tính tan của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

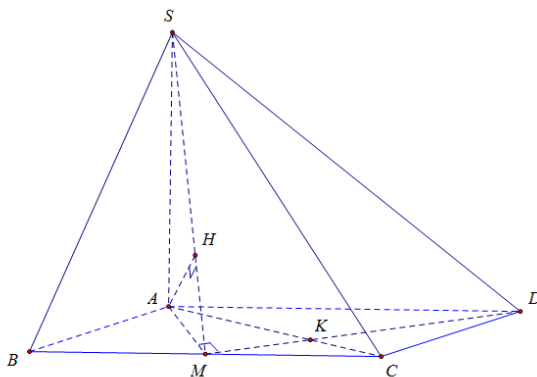
B. 1.

C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, $AC \cap DM = \{K\}$.

Ta có $\frac{CK}{AK} = \frac{MC}{AD} = \frac{1}{2}$, suy ra $d(C, (SDM)) = \frac{1}{2} d(A, (SDM))$, suy ra $d(A, (SDM)) = a$

Từ giả thiết $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2a$, $AB = a \Rightarrow AM = DM = a\sqrt{2}$
 $\Rightarrow AD^2 = AM^2 + DM^2 \Rightarrow$ tam giác AMD vuông tại $M \Rightarrow MD \perp AM$.

Mặt khác $MD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).

Ta có $\begin{cases} MD \perp AM \\ MD \perp SA \\ AM \cap SA = \{A\} \end{cases} \Rightarrow MD \perp (SAM)$.

Trong (SAM) kẻ $AH \perp SM$ tại H , suy ra $AH \perp (SDM)$

$\Rightarrow d(A, (SDM)) = AH = a$.

Xét tam giác SAM vuông tại A , ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}.$$

Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.

$$\text{Ta có } \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Câu 63. (VD) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{5}$, $AB = a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính cosin của góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng $(MNPQ)$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

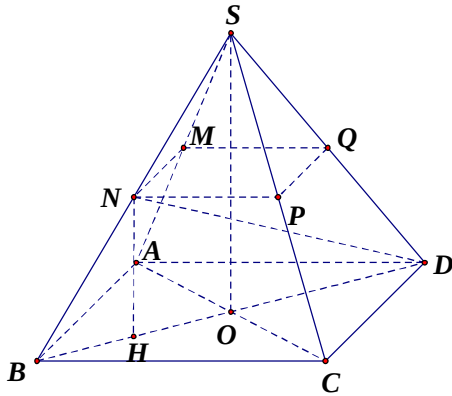
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó $SO \perp (ABCD)$.

Mặt phẳng $(MNPQ)$ cũng là mặt phẳng $(MNPQ)$.

Vì hai mặt phẳng $(MNPQ)$ và $(ABCD)$ song song với nhau nên góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng $(MNPQ)$ bằng góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng $(ABCD)$.

Trong mặt phẳng (SBD) gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên BD .

Khi đó góc giữa DN và $(ABCD)$ là góc $\widehat{NDH}$.

$$\text{Ta có: } SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$$

$$NH = \frac{SO}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a; DH = \frac{3}{4}BD = \frac{3}{4}.a\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$$

Ta suy ra tam giác NDH vuông cân tại H nên góc $\widehat{NDH} = 45^\circ$.

$$\text{Vậy } \cos \widehat{NDH} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

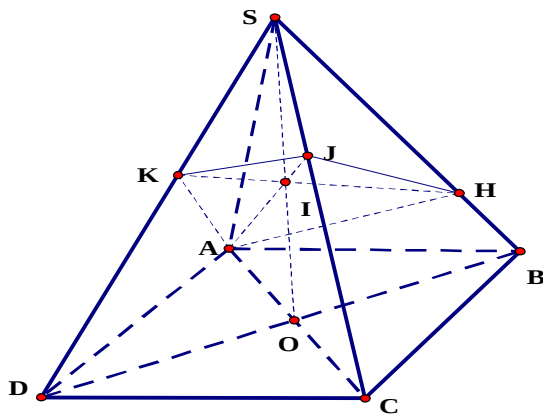
Câu 64. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích $S_{td} = \frac{1}{2}a^2$. Gọi ϕ là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính ϕ .

A. 45° . **B.** $\phi = \arcsin \frac{1 + \sqrt{129}}{16}$.

C. $\phi = \arcsin \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$. **D.** $\phi = 60^\circ$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm H, J, K . Gọi I là giao điểm SO và AJ .

$$\text{Do } \begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$$

mà $(\alpha) \perp SC \Rightarrow (\alpha) \parallel BD$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} BD \subset (SBD) \\ BD \parallel (\alpha) \\ (SBD) \cap (\alpha) = HK \end{cases} \Rightarrow KH \parallel BD \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AJ.$$

$$\text{do đó } S_{AHJK} = \frac{1}{2} HK \cdot AJ.$$

Do $SO \perp (ABCD) \Rightarrow OC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ suy ra $\widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{SCO} = \phi$.

$$\text{Ta có } AJ = AC \sin \phi = a\sqrt{2} \sin \phi; SO = OC \tan \phi = \frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \phi.$$

$$\Delta SOC \sim \Delta SJI \Rightarrow \widehat{SIJ} = \widehat{SCO} = \phi \Rightarrow \widehat{AIO} = \widehat{SIJ} = \phi. \text{ Từ đó ta có } OI = OA \cot \phi = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cot \phi.$$

$$\frac{HK}{BD} = \frac{SI}{SO} = 1 - \frac{OI}{SO} = 1 - \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cot \phi}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \phi} = 1 - \cot^2 \phi \Rightarrow KH = BD(1 - \cot^2 \phi) = a\sqrt{2}(1 - \cot^2 \phi).$$

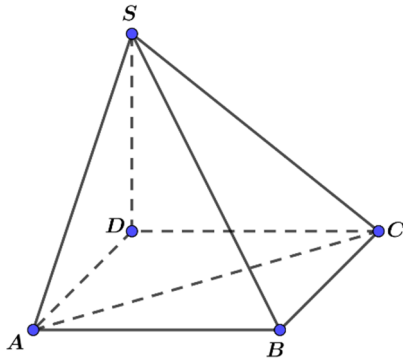
$$\text{Vậy } S_{AHJK} = \frac{1}{2} HK \cdot AI = a\sqrt{2} \sin \phi \cdot a\sqrt{2}(1 - \cot^2 \phi) = 2a^2 \sin \phi(1 - \cot^2 \phi)$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra } 2a^2 \sin \phi(1 - \cot^2 \phi) = \frac{1}{2} a^2 \Leftrightarrow 8 \sin^2 \phi - \sin \phi - 4 = 0$$

$$\sin \phi = \frac{1 + \sqrt{129}}{16} \text{ (do } 0 < \phi < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \phi > 0) \Leftrightarrow \phi = \arcsin \frac{1 + \sqrt{129}}{16}.$$

$$\text{Vậy góc giữa đường thẳng } SC \text{ và mặt phẳng } (ABCD) \text{ là } \phi = \arcsin \frac{1 + \sqrt{129}}{16}.$$

Câu 65. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a, BC = a, \widehat{ABC} = 120^\circ$.
Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC) .



A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$.

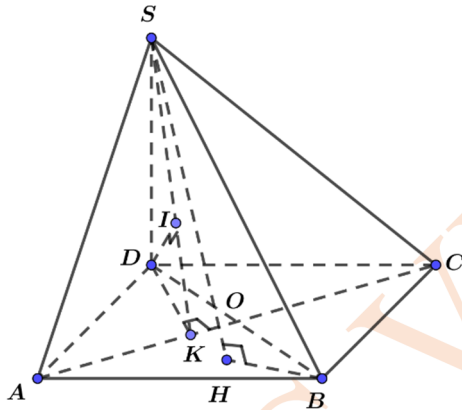
B. $V = \frac{3}{4}$.

C. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $V = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (SAC) khi đó $(\overline{SB}, (\overline{SAC})) = \widehat{BSH}$

$$\text{Nên } \sin(\overline{SB}, (\overline{SAC})) = \sin \widehat{BSH} = \frac{BH}{SB} = \frac{d(B, (SAC))}{SB} (*)$$

$$\text{Lại có } \frac{d(B, (SAC))}{d(A, (SAC))} = \frac{BO}{DO} = 1 \Rightarrow \sin \widehat{BSH} = \frac{BH}{SB} = \frac{d(A, (SAC))}{SB}$$

$$\text{Kẻ } DK \perp AC, DI \perp SK \Rightarrow d(A, (SAC)) = DI$$

$$\text{Trong } \triangle ADC : AC = \sqrt{DA^2 + DC^2 - 2DA \cdot DC \cdot \cos \widehat{ADC}} = a\sqrt{7}.$$

$$S_{\triangle DAC} = \frac{1}{2} DA \cdot DC \cdot \sin \widehat{ADC} = \frac{\sqrt{3}a}{2}; DK = \frac{2S_{\triangle DAC}}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}a.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SDK \text{ có đường cao } DI \text{ suy ra } DI = \frac{\sqrt{SD^2 \cdot DK^2}}{\sqrt{SD^2 + DK^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Trong } \triangle ABD : BD = \sqrt{DA^2 + AB^2 - 2DA \cdot AB \cdot \cos \widehat{DAB}} = a\sqrt{3}.$$

$$SB = \sqrt{SD^2 + DB^2} = a\sqrt{6}.$$

Thay vào (*) ta được $\sin \widehat{BSH} = \frac{AI}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{4}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{4}$.

Câu 66. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$, SD vuông góc với mặt phẳng đáy, $SD = a\sqrt{3}$. Tính cosin của góc tạo bởi SB và (SAC) .

A. $\frac{1}{4}$.

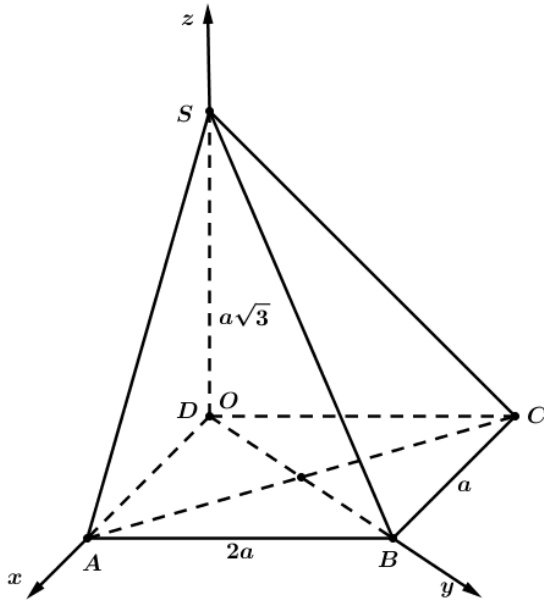
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Trong các tam giác ABC và ABD ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}} = a\sqrt{7}$,

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD}} = a\sqrt{3}.$$

Tam giác ABD có $AB^2 = AD^2 + BD^2$ nên tam giác ABD vuông ở D .

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có: $D(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;a\sqrt{3};0)$, $S(0;0;a\sqrt{3})$

. Do $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow C(-a;a\sqrt{3};0)$.

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng SB là $\overrightarrow{SB} = (0;a\sqrt{3};-a\sqrt{3})$, chọn véc tơ chỉ phương của đường thẳng SB là $\vec{u} = (0;1;-1)$.

Lại có: $\overrightarrow{SA} = (a;0;-a\sqrt{3})$, $\overrightarrow{SC} = (-a;a\sqrt{3};-a\sqrt{3}) \Rightarrow$ véc tơ pháp tuyến của $mp(SAC)$ là

$$[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}] = (3a^2; 2\sqrt{3}a^2; \sqrt{3}a^2), \text{ chọn véc tơ pháp tuyến của } mp(SAC) \text{ là } \vec{u} = (\sqrt{3}; 2; 1).$$

Gọi góc tạo bởi SB và (SAC) là α , ta có $\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Câu 67. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) . Giá trị $\sin \alpha$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

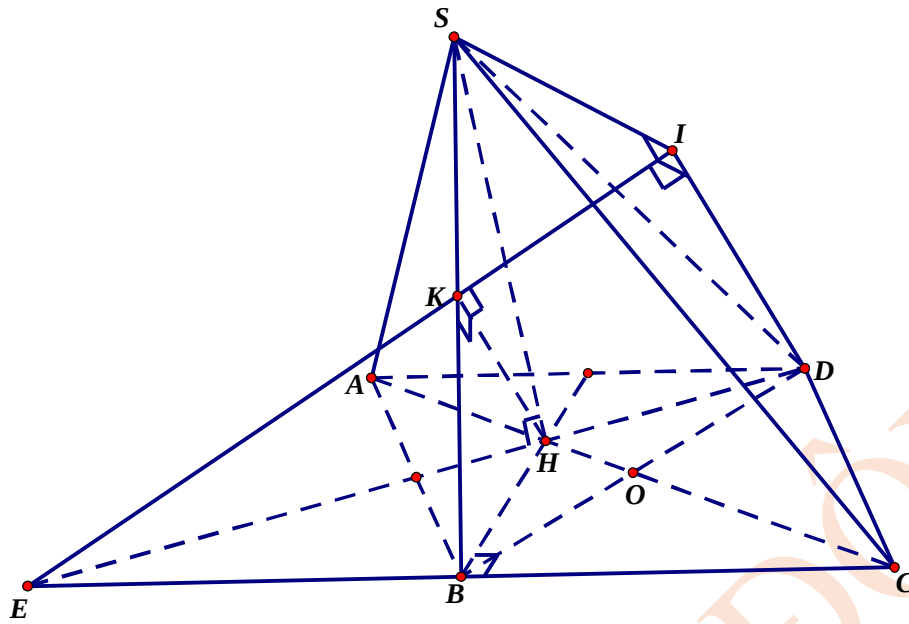
B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$, H là trọng tâm tam giác ABD . Từ $SA = SB = SD$ suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Tam giác ABD có $AB = AD = a$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên suy ra tam giác ABD là tam giác đều cạnh a
 $\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = BH = \frac{2}{3} AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Do đó } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Ta có $BH \perp AD \Rightarrow BH \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHB)$.

Kẻ $HK \perp SB$ ($K \in SB$) $\Rightarrow HK \perp (SBC)$.

Trong tam giác SHB vuông tại H , ta có:

$$HK = \frac{SH \cdot BH}{\sqrt{SH^2 + BH^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{15}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{9}.$$

$$\text{Gọi } E = DH \cap BC \Rightarrow \frac{DE}{HE} = \frac{3}{2}.$$

Gọi I là hình chiếu của D trên (SBC) , suy ra:

$$\frac{DI}{HK} = \frac{DE}{HE} = \frac{3}{2} \Rightarrow DI = \frac{3}{2} HK = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{9} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Ta có $(\widehat{SD; (SBC)}) = (\widehat{SD; SI}) = \widehat{DSI} \Rightarrow \widehat{DSI} = \alpha$.

$$\sin \alpha = \sin \widehat{DSI} = \frac{DI}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 68. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$, tứ giác $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = a$, $\angle ABC = 120^\circ$, hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Gọi E là trung điểm AD , d là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle SCE$, φ là góc giữa d và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\tan \varphi$.

A. $\sqrt{\frac{3}{14}}$.

B. $\sqrt{\frac{6}{7}}$.

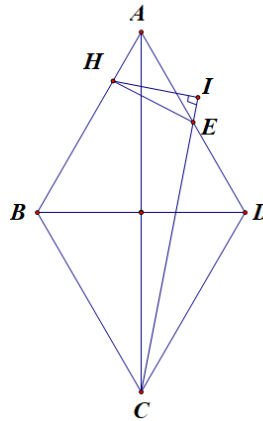
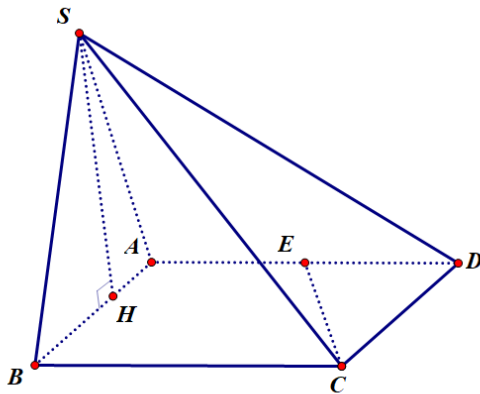
C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\sqrt{\frac{6}{35}}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:



Gọi α là góc giữa $(SCE), (ABCD)$.

Ta có d là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle SCE$ nên d vuông góc với (SCE)

$$\Leftrightarrow \alpha + \varphi = 90^\circ \Leftrightarrow \tan \alpha = \cot \varphi$$

Kẻ HI vuông góc CE tại $I \Rightarrow SI$ vuông góc CE tại I

$$\Rightarrow \alpha = \widehat{(HI, SI)} = \widehat{HIS}$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

$$CE^2 = CD^2 + DE^2 - 2CD \cdot DE \cdot \cos 120^\circ = a^2 + \frac{a^2}{4} + 2a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow CE = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$HE^2 = AH^2 + AE^2 - 2AH \cdot AE \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{36} \Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{7}}{6}$$

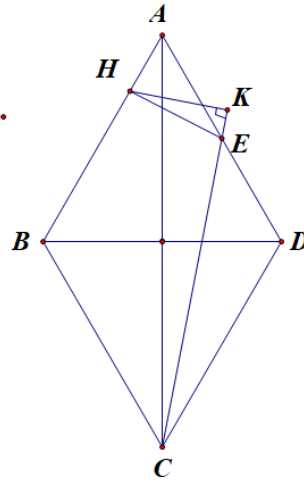
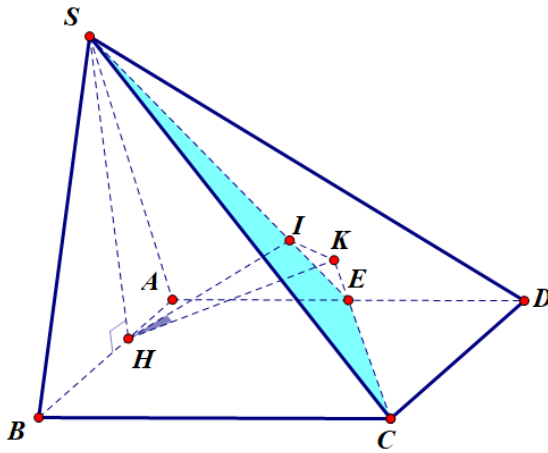
$$CH^2 = CB^2 + BH^2 - 2CB \cdot BH \cdot \cos 120^\circ = a^2 + \frac{4a^2}{9} + 2a \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19a^2}{9} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{13}}{3}$$

$$\cos \widehat{HCE} = \frac{CH^2 + CE^2 - HE^2}{2CH \cdot CE} = \frac{11}{\sqrt{133}} \Rightarrow \sin \widehat{HCB} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{133}}$$

$$HI \cdot CE = CH \cdot CE \cdot \sin \widehat{HCE} \Rightarrow HI = CH \cdot \sin \widehat{HCE} = \frac{2a}{\sqrt{21}}$$

$$\cot \alpha = \frac{HI}{SH} = \frac{2a}{\sqrt{21}} \cdot \frac{3}{2a\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{14}} = \tan \varphi$$

Cách 2:



Kẻ $HK \perp CE$ tại K ; $HI \perp SE$ tại $I \Rightarrow HI \perp (SCE) \Rightarrow d \parallel HI$
 $\Rightarrow \varphi = (\widehat{d, ABCD}) = (\widehat{HI, (ABCD)}) = \widehat{IHK} = \widehat{HSK}$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

$$CE^2 = CD^2 + DE^2 - 2CD \cdot DE \cdot \cos 120^\circ = a^2 + \frac{a^2}{4} + 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow CE = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$S_{CBH} = \frac{2}{3}S_{ABC}; S_{AHE} = \frac{1}{6}S_{ABD}; S_{CDE} = \frac{1}{2}S_{CDA}$$

$$\Rightarrow S_{CHE} = \left(2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

$$HK = \frac{2S_{SCE}}{CE} = \frac{2a}{\sqrt{21}} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{HK}{SH} = \frac{2a}{\sqrt{21}} \cdot \frac{3}{2a\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

DẠNG 4: GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG**A. KIẾN THỨC CHUNG****1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng bằng định nghĩa***** Phương pháp**

Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ và $(P) \cap (Q) = \Delta$. Trong (P) vẽ đường thẳng $a \perp \Delta$ và trong (Q) vẽ đường thẳng $b \perp \Delta$. Khi đó, ta có $\widehat{((P), (Q))} = \widehat{(a, b)}$.

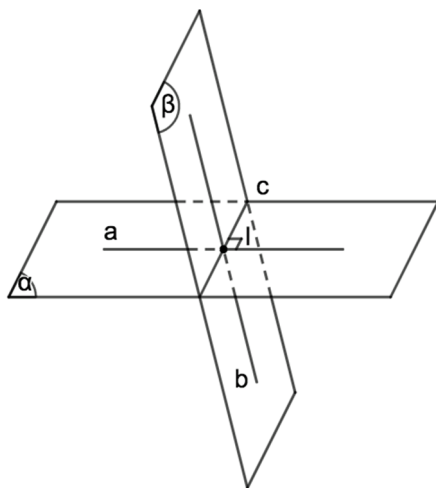
2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng bằng cách tạo mặt phẳng vuông góc giao tuyến*** Phương pháp**

- Tìm giao tuyến d của mặt phẳng (P) và (Q) .
- Dựng mặt phẳng (R) vuông góc với d .
- Tìm giao tuyến a của mặt phẳng (P) và (R) , giao tuyến b của mặt phẳng (Q) và (R) .

Khi đó: $\widehat{((P), (Q))} = \widehat{(a, b)}$.

3. Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau

Giả sử hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến c . Từ một điểm I bất kì trên c ta dựng trong (α) đường thẳng a vuông góc với c và dựng trong (β) đường thẳng b vuông góc với c .



Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) bằng góc giữa hai đường thẳng a và b .

*** Phương pháp:** Giả sử $(\alpha) \cap (\beta) = c$, từ $I \in c$, dựng:

$$\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \\ a \perp c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow \widehat{(\alpha), (\beta)} = \widehat{(a, b)}.$$

B. BÀI TẬP**MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU**

Câu 1. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Xác định góc giữa (SBD) và $(ABCD)$.

- A. $\widehat{SOA}$. B. $\widehat{SBA}$. C. $\widehat{SDA}$. D. $\widehat{SOC}$.

Câu 2. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là:

- A. $\widehat{ASB}$. B. $\widehat{SBA}$. C. $\widehat{SCA}$. D. $\widehat{ASC}$.

Câu 3. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng góc nào sau đây?

- A. $\widehat{ASD}$. B. $\widehat{BSC}$. C. $\widehat{ASC}$. D. $\widehat{BSD}$.

Câu 4. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$ (hình vẽ). Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 5. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$, ΔSAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$. Khi đó

- A. $\varphi = 30^\circ$. B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\varphi = 60^\circ$. D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 6. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao hình chóp bằng $\frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

- A. 60° . B. 75° . C. 30° . D. 45° .

Câu 7. (TH) Trong hình chóp tam giác đều có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° , tang của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 8. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a . Tính cosin của góc giữa một mặt bên và một mặt đáy.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 9. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

A. 45° .

B. 75° .

C. 30° .

D. 60° .

Câu 10. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều, $AB = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) . Giá trị của $\cos \alpha$ là

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 11. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B cạnh $AB = a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính cosin của góc α là góc giữa mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC) .

A. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

D. $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

Câu 12. (TH) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a . Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

A. $\frac{\pi}{6}$.

B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 13. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Số đo của góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ là:

A. 90° .

B. 60° .

C. 30° .

D. 45° .

Câu 14. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 15. (TH) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Ký hiệu φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$. Tính $\tan \varphi$.

A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 16. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = SA = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Tính tang của góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

D. $\sqrt{5}$.

Câu 17. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H , K lần lượt là trung điểm của AB , CD . Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 18. (TH) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB . Biết góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) . Khi đó $\cos \varphi$ bằng

- A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{17}}{17}$. C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\cos \varphi = \sqrt{\frac{16}{17}}$.

Câu 19. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Câu 20. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

- A. 120° . B. 60° . C. 150° . D. 30° .

Câu 21. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa (SCD) và $(ABCD)$.

- A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .

Câu 22. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = 3a$, $BC = 4a$. Biết $SA \perp (ABC)$ và góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính diện tích tam giác SBC .

- A. $6a^2$. B. $8a^2$. C. $3a^2\sqrt{3}$. D. $12a^2$.

Câu 23. (TH) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều và chiều cao lăng trụ bằng a , mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt đáy (ABC) một góc 60° . Gọi S là diện tích tam giác ABC , giá trị của S bằng

- A. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. B. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. C. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 24. (TH) Hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Côsin góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 25. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Tính $\tan$ của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

- A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 26. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a . Tính côsin của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 27. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Mặt bên (SBC) là tam giác cân tại S , đường cao $SH = a\sqrt{3}$ ($H \in BC$), $BC = 3a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy ABC . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\varphi = 60^\circ$. B. $\varphi = 45^\circ$. C. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\varphi = 30^\circ$.

Câu 28. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBD) . Tính $\cos\alpha$.

- A. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. B. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. D. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 29. (TH) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, biết các cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SCD) khi đó $\tan\varphi$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 30. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$. Biết $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

- A. $\varphi = 90^\circ$. B. $\varphi = 30^\circ$. C. $\varphi = 45^\circ$. D. $\varphi = 60^\circ$.

Câu 31. (TH) Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Tính $\cos\alpha$, trong đó α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) ?

- A. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. C. $\cos\alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. D. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 32. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

- A. 30° . B. 45° . C. 90° . D. 60° .

Câu 33. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$; $AC = 2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Mặt phẳng $(SAB); (SAC)$ cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60° . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Tính $\tan\alpha$.

- A. $\frac{\sqrt{51}}{17}$. B. $\frac{\sqrt{51}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{17}}{3}$. D. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

Câu 34. (VD) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB . Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) bằng

- A. $\arctan\sqrt{2}$. B. $\arctan 2$. C. $\arctan 4$. D. $\arctan \frac{1}{4}$.

Câu 35. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = SA = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\sqrt{5}$.

B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 36. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và góc giữa SB với mặt đáy bằng 60° . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Giá trị $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

Câu 37. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

A. 30° .

B. 120° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 38. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $BC = SB = a$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Câu 39. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 3$, $BC = 4$. Tam giác SAC nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng SA bằng 4. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

A. $\frac{5\sqrt{34}}{17}$.

B. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

C. $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

D. $\frac{3\sqrt{34}}{17}$.

Câu 40. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau một góc bằng 60° .

A. $x = \frac{a}{2}$.

B. $x = a\sqrt{3}$.

C. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $x = a$.

Câu 41. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn OA và góc $(SD; (ABCD)) = 60^\circ$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = \frac{4\sqrt{15}}{9}$.

B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{30}}{12}$.

C. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

D. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{30}}{3}$.

Câu 42. (VD) Cho tứ diện đều $ABCD$. Tính côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) .

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Câu 43. (VD) (Chu Văn An - Hà Nội - lần 2 - 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) , $AB = a$, $SA = 2a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SB , SC . Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Câu 44. (VD) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và đáy bằng 60° ; H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) . Khoảng cách từ H đến SA bằng $\frac{a}{\sqrt{7}}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) . Khi đó, $\tan \frac{\alpha}{2}$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 45. (VD) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC . Gọi (β) là góc tạo bởi $mp(P)$ và $(ABCD)$. Tính $\tan \beta$.

A. $\tan \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

B. $\tan \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $\tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 46. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (ABC) . Tính $\tan \varphi$.

A. $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\tan \varphi = \sqrt{2}$.

C. $\tan \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

D. $\tan \varphi = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Câu 47. (VD) Cho khối chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$, $(SAC) \perp (ABC)$, $SA = a$, $AB = AC = 2a$, $BC = 2a\sqrt{2}$. Tính $\cos((SAC), (SBC))$.

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 48. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2CD$, $AD = CD = a$, $SA = x$. Tìm giá trị của x để số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60° .

A. $x = a\sqrt{2}$.

B. $x = \frac{a}{2}$.

C. $x = a\sqrt{3}$.

D. $x = a$.

Câu 49. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. 30° .

B. 90° .

C. 0° .

D. 45° .

Câu 50. (VD) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt bên của hình chóp đó. Hãy tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{8}{15}$.

B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos \alpha = \frac{7}{15}$.

D. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Câu 51. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $SO \perp (ABCD)$. Cho

$AB = SB = a$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng α với

- A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 30^\circ$.

Câu 52. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc

với mặt đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Gọi α là góc giữa $mp(SCD)$ và $mp(ABCD)$. Khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 53. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $\cos$ góc giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và $(ABCD)$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 54. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng

- A. 60° . B. 90° . C. 120° . D. 30° .

Câu 55. (VD) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, có $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng

- A. 75° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

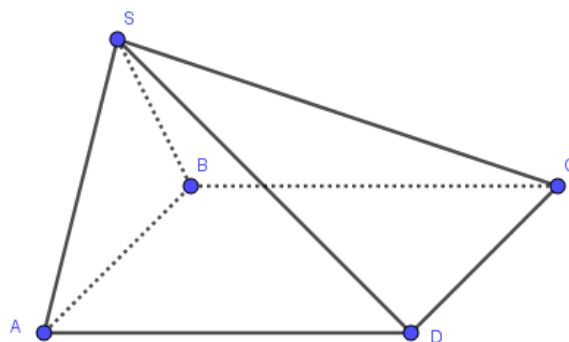
Câu 56. (VD) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên hai tia Bx , Dy vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và cùng chiều lần lượt lấy hai điểm M , N sao cho $BM = \frac{a}{4}$; $DN = 2a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AMN) và (CMN) .

- A. $\varphi = 30^\circ$. B. $\varphi = 60^\circ$. C. $\varphi = 45^\circ$. D. $\varphi = 90^\circ$.

Câu 57. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều, có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Câu 58. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SCD) . Tính $\tan \alpha$.



A. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 59. (VD) Khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' , diện tích tam giác MNP bằng 4. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP)

A. 30° .

B. 120° .

C. 90° .

D. 45° .

Câu 60. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\tan \varphi = \sqrt{2}$.

B. $\tan \varphi = \sqrt{3}$.

C. $\tan \varphi = 2$.

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 61. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = 2a$, $AD = DC = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tang của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{2}$.

Câu 62. (VD) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{6}$. Gọi φ là góc giữa mặt bên và đáy của hình chóp. Tính $\tan \varphi$.

A. $\tan \varphi = 6\sqrt{2}$.

B. $\tan \varphi = 2\sqrt{2}$.

C. $\tan \varphi = 3\sqrt{2}$.

D. $\tan \varphi = 2\sqrt{3}$.

Câu 63. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là

A. $\sqrt{2}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\sqrt{3}$.

Câu 64. (VD) Cho hình chóp $SABC$ có đường cao SA bằng $2a$, tam giác ABC vuông ở C có $AB = 2a$, $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SBC) .

A. $\frac{\sqrt{7}}{9}$.

B. $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

C. $\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

D. $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Câu 65. (VD) Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tính giá trị của x sao cho hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 66. (VDC) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $AA' = 4a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$. Giá trị của $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{29}{61}$.

B. $\frac{27}{34}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{137}{169}$.

Câu 67. (VDC) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB và K là hình chiếu của điểm A trên cạnh SC . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AGK) . Tính $\cos \alpha$, biết rằng khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (KBC) bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

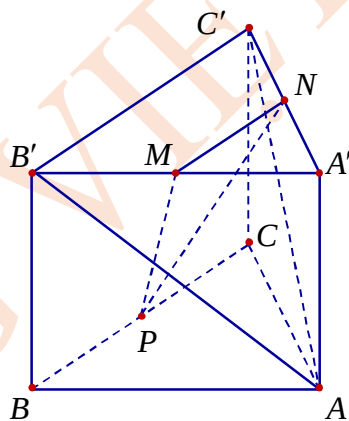
Câu 68. (VDC) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

B. $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

D. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.



Câu 69. (VDC) Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = BC = a$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC . Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và (ABC) .

A. $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{7}$.

Câu 70. (VDC) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60° . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Giá trị của $\tan \alpha$ là

A. $\frac{\sqrt{51}}{17}$.

B. $\frac{\sqrt{51}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{17}}{3}$.

D. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

Câu 71. (VDC) Cho $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AB = 2a$; $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Câu 72. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Biết rằng $AD = 2a$, $AB = BC = a$, $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy, gọi I là trung điểm của AD , M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Điểm N thuộc cạnh CD sao cho tam giác MNI có diện tích bằng $\frac{a^2}{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MNI) và (SAC) .

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 70° .

Câu 73. (VDC) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC . Tính cotang góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) .

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

D. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Câu 74. (VDC) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng $\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của CC' . Tính sin góc giữa hai mặt phẳng (ACB') và (BMA') .

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{\sqrt{21}}{5}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Câu 75. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và tại B với $SA \perp (ABCD)$; $AB = 5$; $BC = 8$; $AD = 3$. Góc hợp bởi đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Gọi α là góc tạo bởi mặt phẳng (SCB) và mặt phẳng (SCD) . Tính $\tan \alpha$.

A. $\frac{89\sqrt{2}}{74}$.

B. $\frac{89\sqrt{2}}{37}$.

C. $\frac{74\sqrt{2}}{89}$.

D. $\frac{37\sqrt{2}}{89}$.

Câu 76. (VDC) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 2BC$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Hình chiếu của A trên các đoạn SB, SC lần lượt là M, N . Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) .

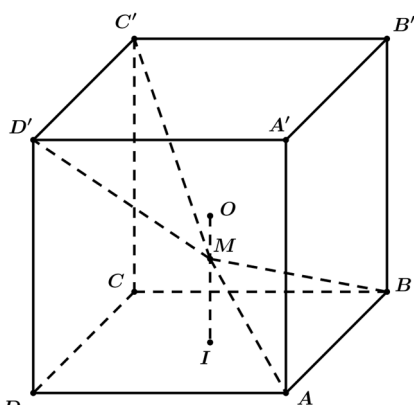
A. 45° .

B. 60° .

C. 15° .

D. 30° .

Câu 77. (VDC) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$ và M là điểm thuộc OI sao cho $MO = \frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó, cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng



A. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.

B. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

C. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$.

D. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

Câu 78. (VDC) Cho hình chóp $S.ABC$ có $\triangle ABC$ vuông tại B , $AB=1$, $BC=\sqrt{3}$, $\triangle SAC$ đều, mặt phẳng (SAC) vuông với đáy. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Giá trị của $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{65}}{65}$.

B. $\frac{\sqrt{65}}{20}$.

C. $\frac{\sqrt{65}}{10}$.

D. $\frac{\sqrt{65}}{65}$.

Câu 79. (VDC) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $AA'=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn BG (với G là trọng tâm tam giác ABC). Tính cosin của góc φ giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ABB'A')$.

A. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{95}}$.

B. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{165}}$.

C. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{134}}$.

D. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{126}}$.

Câu 80. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Biết $AB=2AD=2DC=2a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Tính $\tan \alpha$

A. $\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 4: GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

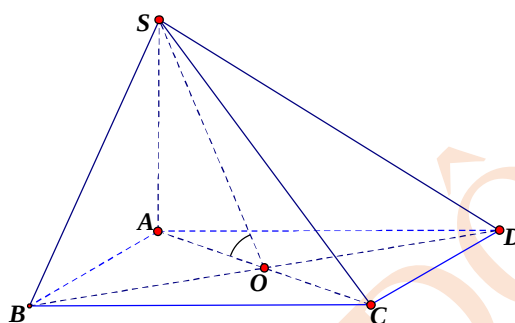
MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 1. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Xác định góc giữa (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\widehat{SOA}$.B. $\widehat{SBA}$.C. $\widehat{SDA}$.D. $\widehat{SOC}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

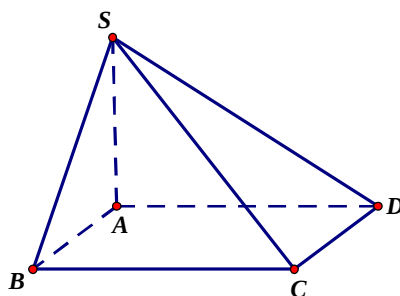
$\Rightarrow \begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \\ DB = (SBD) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \text{Góc giữa } (SBD) \text{ và } (ABCD) \text{ là góc giữa } AC \text{ và } SO \text{ là } \widehat{SOA} \text{ (do } \Delta SAC \text{ vuông tại } A).$

Câu 2. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là:

A. $\widehat{ASB}$.B. $\widehat{SBA}$.C. $\widehat{SCA}$.D. $\widehat{ASC}$.

Lời giải

Chọn B



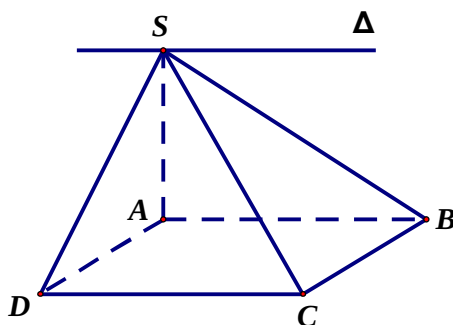
Ta có: $BC \perp BA; BC \perp SA$ nên $((SBC); (ABCD)) = (AB; SB) = \widehat{SBA}$.

Câu 3. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng góc nào sau đây?

A. $\widehat{ASD}$.B. $\widehat{BSC}$.C. $\widehat{ASC}$.D. $\widehat{BSD}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $\Delta = (SAB) \cap (SCD)$. Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel \Delta \parallel CD$.

Vì $SA \perp AB$ nên $SA \perp \Delta$.

Vì $CD \perp (SAD)$ nên $CD \perp SD$ hay $SD \perp \Delta$.

Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng $\widehat{ASD}$.

Câu 4. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$ (hình vẽ). Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. 45° .

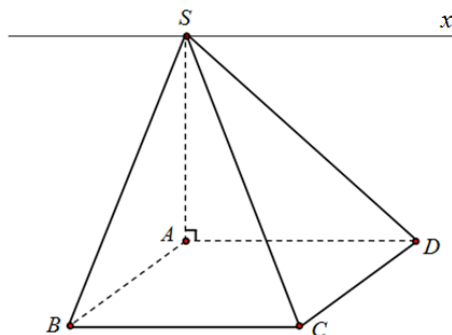
B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Ta có: $(SBC) \cap (SAD) = Sx \parallel BC \parallel AD$.

Ta chứng minh được $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow Sx \perp SB$.

Lại có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD \Rightarrow SA \perp Sx$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SAD) là góc $\widehat{BSA} = 45^\circ$.

Câu 5. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$, ΔSAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$. Khi đó

A. $\varphi = 30^\circ$.

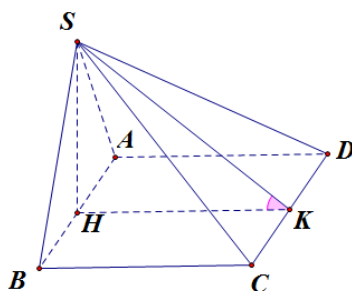
B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\varphi = 60^\circ$.

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Suy ra $SH \perp (ABCD); HK \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK$.

Do đó $\varphi = \widehat{SKH}$.

Tính được $HK = a; SH = (2a) \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, suy ra $\tan \varphi = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

Câu 6. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao hình chóp bằng $\frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. 60° .

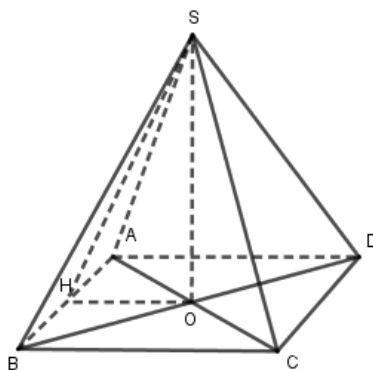
B. 75° .

C. 30° .

D. 45° .

Chọn C

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD ; H là trung điểm của AB .

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Vì $SA = SB$ nên tam giác SAB cân tại S suy ra $SH \perp AB$.

Ta có:
$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ AB \perp SH \\ AB \perp OH \end{cases}$$

Nên góc giữa (SAB) và $(ABCD)$ là góc giữa SH và OH , tức là $\widehat{SHO}$.

Ta có: OH là đường trung bình tam giác ABD nên $OH = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a$.

Tam giác SHO vuông tại O nên: $\tan SHO = \frac{SO}{OH} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SHO} = 30^\circ$.

Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 30° .

Câu 7. (TH) Trong hình chóp tam giác đều có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° , tang của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $\sqrt{3}$.

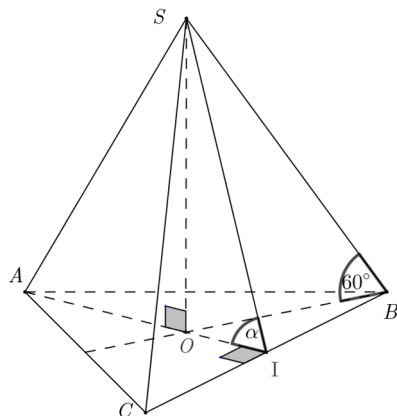
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Nhận xét: Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên có độ dài bằng nhau. Tâm của đáy là chân đường cao của hình chóp và các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau, các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.



Cho hình chóp đều $S.ABC$ như hình vẽ.

Gọi O là trọng tâm của tam giác đều ABC , khi đó $SO \perp (ABC)$.

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (ABC)}) = (\widehat{SB, OB}) = \widehat{SBO} = 60^\circ.$$

Gọi I là trung điểm BC , khi đó $BC \perp AI$.

Mặt khác $SO \perp (ABC)$ nên $SO \perp BC$.

Do đó $BC \perp (SOI) \Rightarrow SI \perp BC$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \subset (SBC), OI \subset (ABC) \\ SI \perp BC, OI \perp BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABC)}) = (\widehat{SI, OI}) = \widehat{SIO} = \alpha.$$

Xét tam giác SOB vuông tại O , ta có $SO = OB \cdot \tan 60^\circ = OA\sqrt{3}$.

$$\text{Xét tam giác } SOI \text{ vuông tại } O, \text{ ta có } \tan \alpha = \frac{SO}{OI} = \frac{OA\sqrt{3}}{OI} = \frac{2OI\sqrt{3}}{OI} = 2\sqrt{3}.$$

Câu 8. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a . Tính cosin của góc giữa một mặt bên và một mặt đáy.

A. $\frac{1}{2}$.

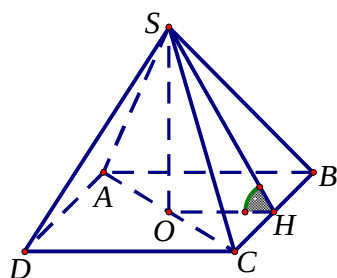
B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là trung điểm của AC . Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi H là trung điểm của BC và góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ là α .

Ta có $(SBC) \cap (ABCD) = BC$ mà $BC \perp SH$ và $BC \perp OH$ nên $\widehat{SHO} = \alpha$.

SH là đường cao của tam giác đều SBC cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

Xét tam giác SOH vuông tại O có: $\cos \alpha = \frac{OH}{SH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 9. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

A. 45° .

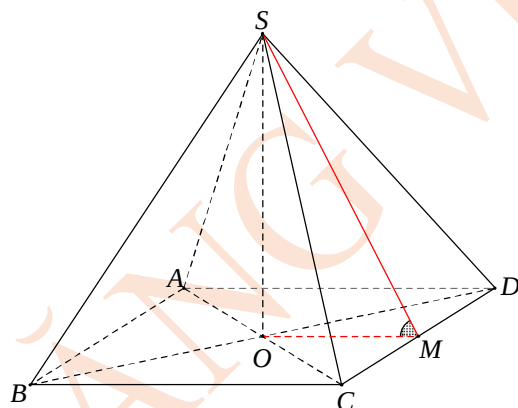
B. 75° .

C. 30° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm CD .

$$\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ SM \subset (SCD): SM \perp CD \\ OM \subset (ABCD): OM \perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (\widehat{SM, OM}) = \widehat{SMO}.$$

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMO} = 60^\circ.$$

Câu 10. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều, $AB = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) . Giá trị của $\cos \alpha$ là

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

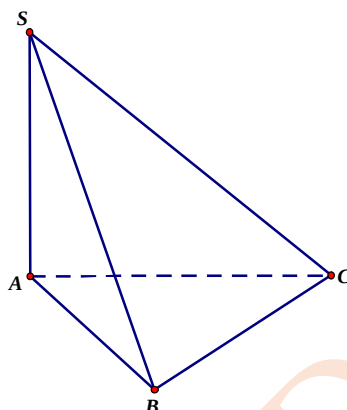
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $(SAB) \cap (SAC) = SA$, $AB \subset (SAB)$ và $AB \perp SA$, $AC \subset (SAC)$ và $AC \perp SA$, cho nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là góc $\widehat{CAB}$ và bằng 60° , $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Câu 11. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B cạnh $AB = a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính cosin của góc α là góc giữa mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC) .

A. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

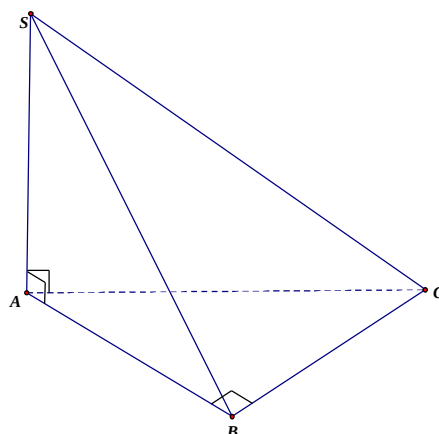
B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

D. $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Vì } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

Suy ra góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC) là góc $\alpha = \widehat{SBA}$.

$$\text{Xét tam giác vuông } SBA \text{ có } \cos \alpha = \frac{AB}{SB} = \frac{AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Câu 12. (TH) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a . Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

A. $\frac{\pi}{6}$.

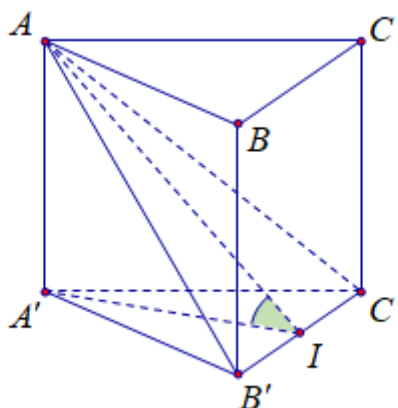
B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của $B'C'$. Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'I \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AIA')$

Khi đó: $\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ AI \perp B'C' \\ A'I \perp B'C' \end{cases}$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ là góc $\widehat{AIA'}$.

Xét tam giác AIA' vuông tại A' ta có: $\tan \widehat{AIA'} = \frac{AA'}{A'I} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AIA'} = \frac{\pi}{6}$.

Câu 13. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Số đo của góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ là:

A. 90° .

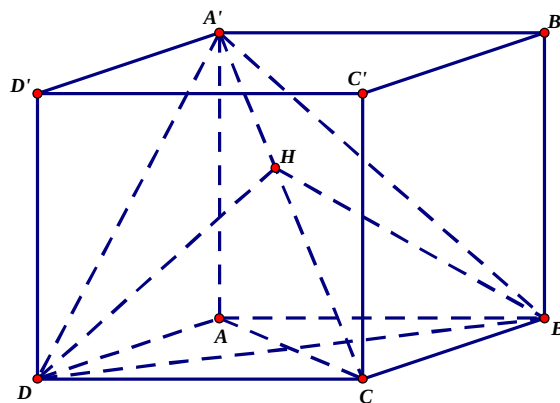
B. 60° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B



Dễ thấy $\Delta A'DC = \Delta A'BC$, $\widehat{A'BC} = \widehat{A'DC} = 90^\circ$.

Dựng $DH \perp A'C \Rightarrow BH \perp A'C$.

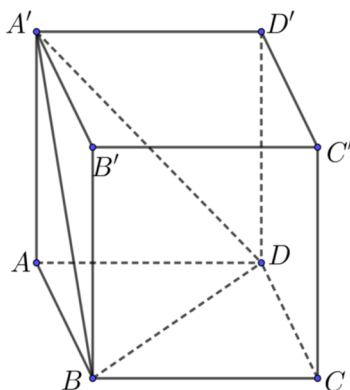
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ là góc (HD, HC) .

Xét tam giác $\triangle DHC$ có $BD = a\sqrt{2}$, $DH = BH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$$\cos \widehat{DHB} = \frac{HD^2 + HB^2 - BD^2}{2HD.HB} = \frac{HD^2 + HB^2 - BD^2}{2HD.HB} = \frac{-1}{2}.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng 60° .

Câu 14. (TH) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ).



Giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

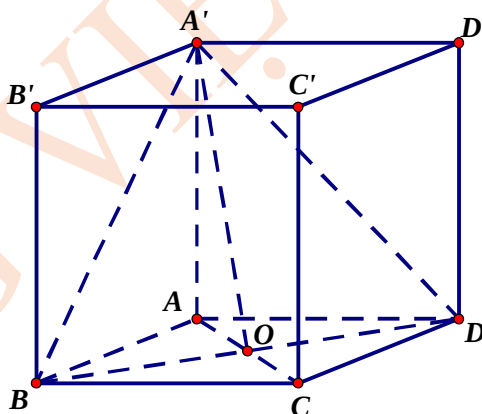
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

~~C.~~ $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Ta thấy góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'OA}$

$$\sin \widehat{A'OA} = \frac{AA'}{A'O} = \frac{AA'}{\sqrt{AA'^2 + AO^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 15. (TH) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Ký hiệu φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$. Tính $\tan \varphi$.

A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

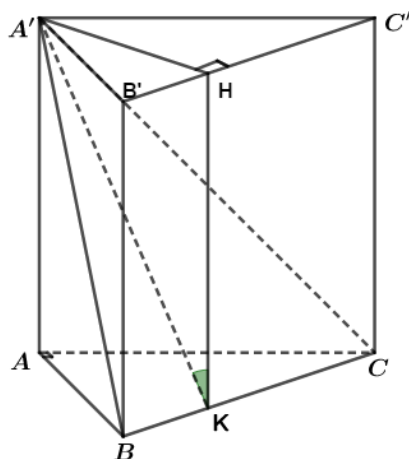
~~B.~~ $\tan \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $A'H \perp B'C'$, H thuộc $B'C'$

Suy ra $A'H \perp (BCC'B')$ tại H .

Trong $(BCC'B')$ kẻ $HK \perp BC$ tại K .

Ta có $\begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp A'H (A'H \perp BCC'B') \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (A'HK)$

Mà $A'K \subset (A'HK)$

$\Rightarrow BC \perp A'K$

Ta có $\begin{cases} (A'BC) \cap (BCC'B') = BC \\ BC \perp HK \text{ (gt)} \\ BC \perp A'K \text{ (cmt)} \end{cases}$

Suy ra $\widehat{A'KH}$ là góc giữa $(A'BC)$ và $(BCC'B')$.

Tính góc $\widehat{A'KH}$.

Xét $\triangle A'KH$ vuông tại H có

$$A'H = \frac{A'B' \cdot A'C'}{\sqrt{A'B'^2 + A'C'^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad HK = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } \tan \widehat{A'KH} = \frac{A'H}{HK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Câu 16. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật,

$AB = a, AD = SA = 2a, SA \perp (ABCD)$. Tính tang của góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}.$

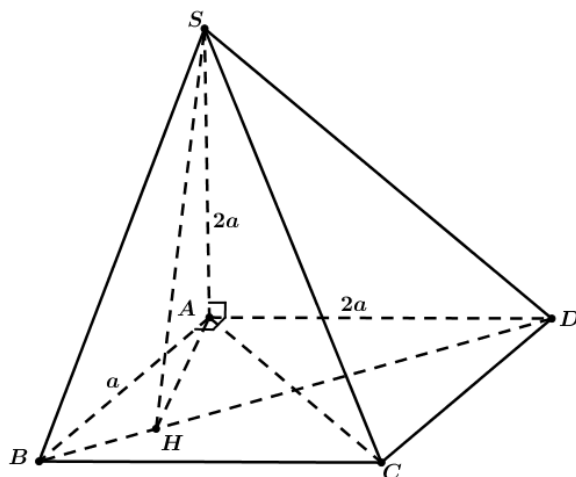
B. $\frac{\sqrt{5}}{2}.$

C. $\frac{2}{\sqrt{5}}.$

D. $\sqrt{5}.$

Lời giải

Chọn D



Kẻ $AH \perp BD$.

Ta lại có $BD \perp SA$ suy ra $BD \perp (SAH)$ do đó góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SHA}$.

Trong tam giác vuông ABD có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Khi đó $\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \sqrt{5}$.

Câu 17. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

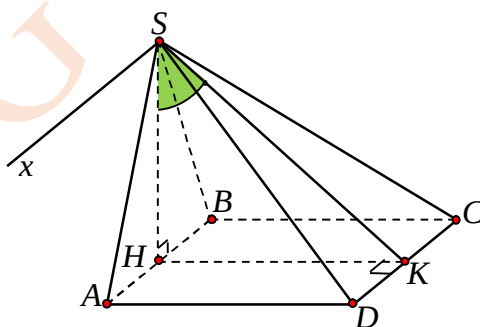
B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: H là trung điểm AB thì $SH \perp AB$ (vì tam giác SAB đều)

Mà $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Mặt khác $\begin{cases} AB \parallel CD \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \parallel CD$

Mà $Sx \perp (SHK) \Rightarrow \begin{cases} Sx \perp SH \\ Sx \perp SK \end{cases}$, với K là trung điểm CD .

$\Rightarrow ((SAB), (SCD)) = \widehat{HSK}$.

$$\text{Khi đó } \tan \widehat{HSK} = \frac{HK}{SH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 18. (TH) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB . Biết góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) . Khi đó $\cos \varphi$ bằng

A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

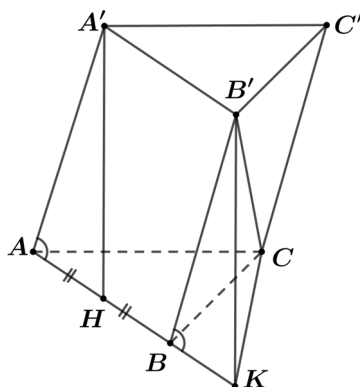
B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{17}}{17}$.

C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{16}}{17}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi K là hình chiếu vuông góc của B' trên (ABC) . Khi đó: $\triangle KBC$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle B'BC$ trên (ABC) . Do đó:

$$S_{\triangle KBC} = S_{\triangle B'BC} \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{\triangle KBC}}{S_{\triangle B'BC}}.$$

$$\text{Ta có: } S_{\triangle KBC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta lại có: } \cos 60^\circ = \frac{AH}{AA'} \Rightarrow AA' = 2a = BB'; \tan 60^\circ = \frac{A'H}{AH} \Rightarrow A'H = a\sqrt{3} = B'K.$$

$$KC = \sqrt{BC^2 + BK^2 - 2 \cdot BC \cdot BK \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{7}.$$

$$\text{và } B'C = \sqrt{B'K^2 + CK^2} = a\sqrt{10}.$$

$$\text{Khi đó: } S_{\triangle B'BC} = \frac{a^2 \sqrt{15}}{2} \text{ (sử dụng công thức Hê-rông).}$$

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \frac{S_{\triangle KBC}}{S_{\triangle B'BC}} = \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}}{\frac{a^2 \sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 19. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

A. 45° .

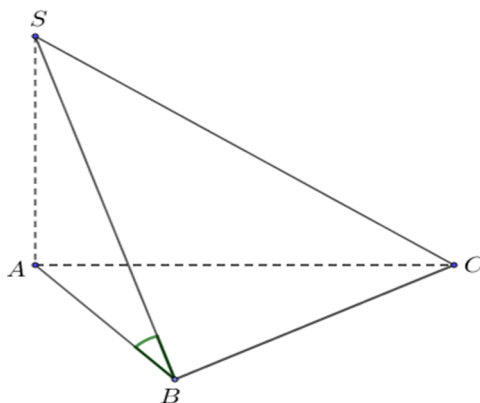
B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

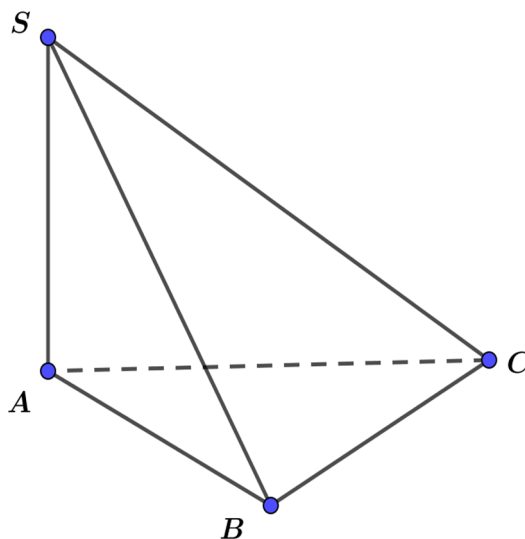
Chọn B



Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SA$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA}$.

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Câu 20. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .



A. 120° .

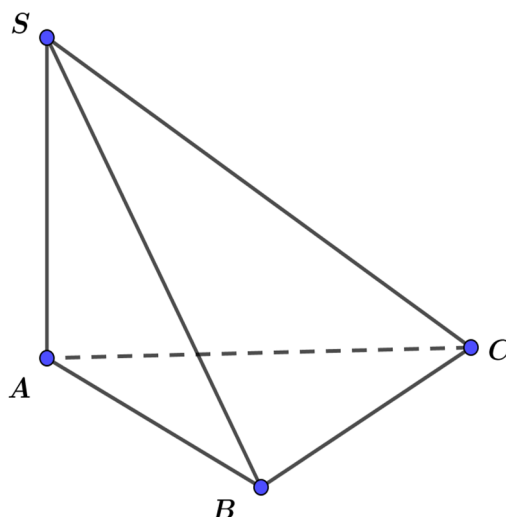
B. 60° .

C. 150° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn B



$$\left. \begin{array}{l} AB \perp SA, AB \subset (SAB) \\ \text{Ta có: } AC \perp SA, AC \subset (SAC) \\ (SAB) \cap (SAC) = SA \end{array} \right\} \Rightarrow ((SAB), (SAC)) = (AB, AC).$$

$$\text{Xét tam giác } ABC \text{ có: } \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

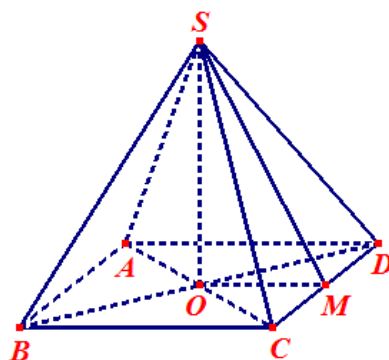
$$\text{Vậy } ((SAB), (SAC)) = (AB, AC) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Câu 21. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa (SCD) và $(ABCD)$.

A. 90° .B. 45° .C. 60° .D. 30° .

Chọn C

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD . Ta có $((SCD), (ABCD)) = (SM, OM) = \widehat{SMO}$.

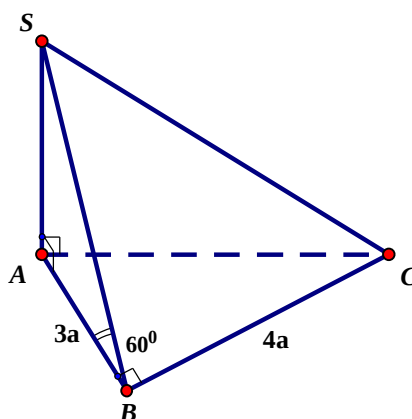
$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMO} = 60^\circ.$$

Câu 22. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = 3a$, $BC = 4a$. Biết $SA \perp (ABC)$ và góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính diện tích tam giác SBC .

A. $6a^2$.B. $8a^2$.C. $3a^2\sqrt{3}$.D. $12a^2$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

$$\cos 60^\circ = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta SBC}} \Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{\cos 60^\circ} = \frac{AB \cdot BC}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 12a^2.$$

Câu 23. (TH) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều và chiều cao lăng trụ bằng a , mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt đáy (ABC) một góc 60° . Gọi S là diện tích tam giác ABC , giá trị của S bằng

A. $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3}$.

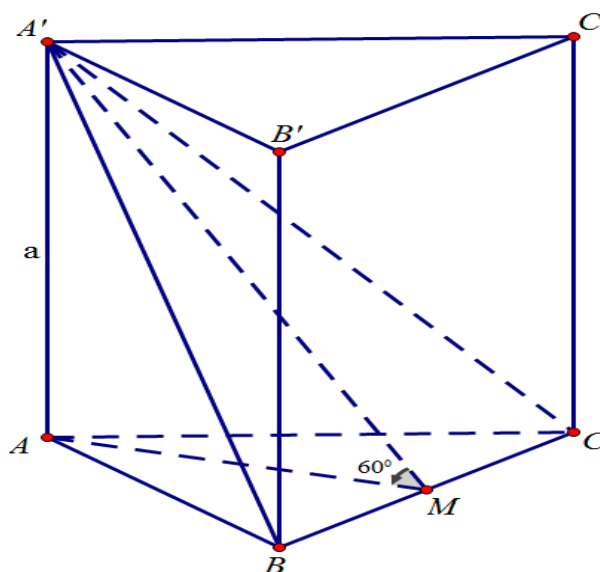
B. $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

C. $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

D. $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC . Ta có $BC \perp AM$ và $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp A'M$.

$$\left. \begin{array}{l} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ \text{Vậy } BC \perp AM, AM \subset (ABC) \\ BC \perp A'M, A'M \subset (A'BC) \end{array} \right\} \Rightarrow ((A'BC), (ABC)) = (A'M, AM) = \widehat{A'MA} = 60^\circ.$$

$\Delta A'AM \perp$ tại A có $AM = \frac{AA'}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

ΔABC đều có $AM = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{2AM}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a}{3}$.

$S = S_{\Delta ABC} = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{9}$.

Câu 24. (TH) Hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Côsin góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

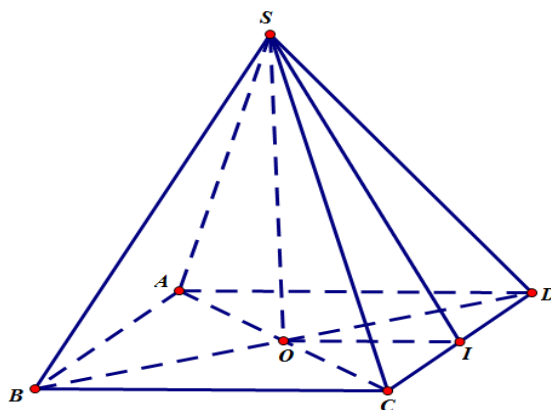
B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a .

Gọi O, I lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và trung điểm của CD .

$$\Rightarrow \begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ OI \perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SIO}.$$

Ta có: $\triangle SCD$ đều cạnh $a \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle SOI$ vuông tại O , $OI = \frac{a}{2} \Rightarrow \cos \widehat{SIO} = \frac{OI}{SI} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 25. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Tính $\tan$ của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

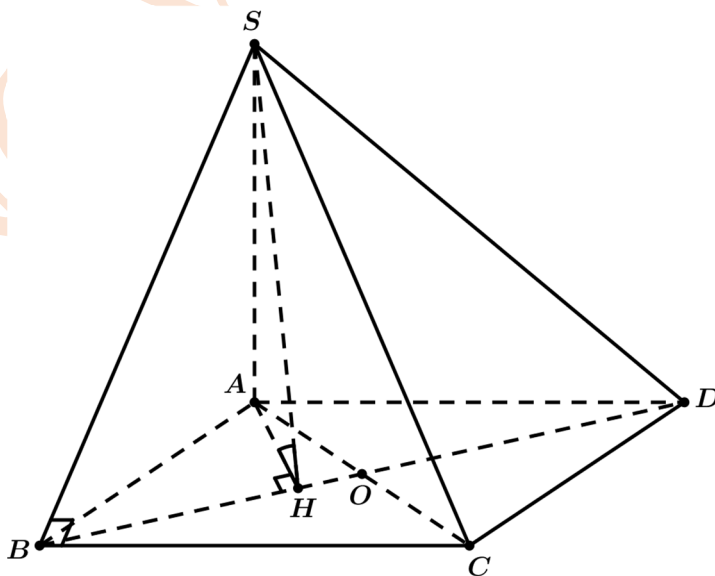
B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Trong $\triangle ABD$ kẻ $AH \perp BD$, suy ra $SH \perp BD$. Góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa SH và HA .

Gọi góc giữa hai mặt phẳng cần tìm là β , vậy $\beta = \widehat{SHA}$. Tính $\tan \beta$.

$\tan \beta = \frac{SA}{AH}$. Tính AH .

Xét tam giác $\triangle BAD$ vuông tại A : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{5}{4a^2}$.

$$\Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

$$\tan \beta = \frac{SA}{AH} = \frac{2a}{\frac{2a}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}.$$

Câu 26. (TH) Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a . Tính cosin của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

A. $-\frac{1}{\sqrt{3}}.$

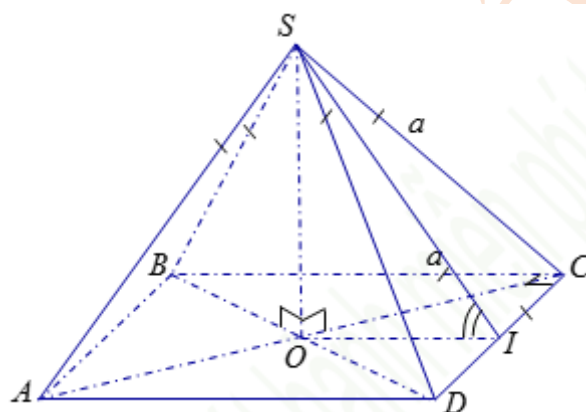
B. $\frac{1}{2}.$

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}.$

D. $\frac{1}{3}.$

Lời giải

Chọn A



+ Gọi O là tâm của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Ta có $SO \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và các mặt bên là các tam giác đều cạnh a .

+ Gọi I là trung điểm cạnh CD .

Theo giả thiết ta có:
$$\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ OI \perp CD \\ SI \perp CD \end{cases}$$

nên góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng OI và SI

bằng góc $\widehat{SIO}$. Khi đó: $\cos \widehat{SIO} = \frac{OI}{SI} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \cos \widehat{SIO} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Câu 27. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Mặt bên (SBC) là tam giác cân tại S , đường cao $SH = a\sqrt{3}$ ($H \in BC$), $BC = 3a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy ABC . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 60^\circ.$

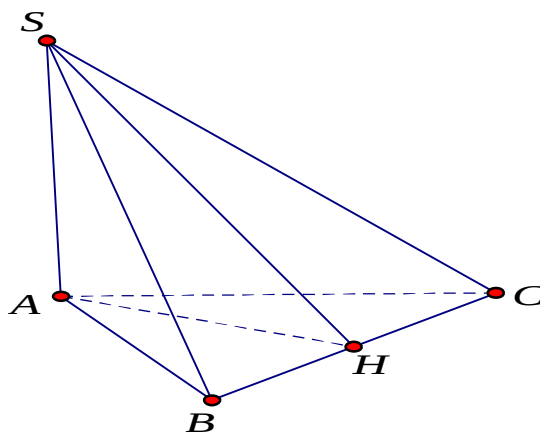
B. $\varphi = 45^\circ.$

C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}.$

D. $\varphi = 30^\circ.$

Lời giải

Chọn D



Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AH; AH \subset (ABC) \\ BC \perp SH; SH \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow \varphi = ((SBC); (ABC)) = (SH; AH) = \widehat{SHA}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $AH = \frac{1}{2} BC = \frac{3a}{2}$.

Tam giác SAH vuông tại A có $\cos \varphi = \frac{AH}{SH} = \frac{\frac{3a}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$.

Câu 28. (TH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBD) . Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

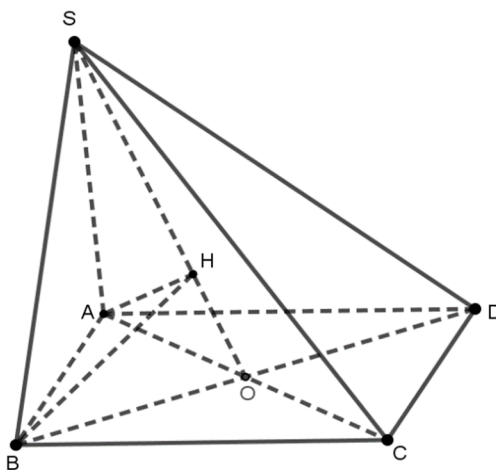
B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Kẻ $AH \perp SO$ tại H .

Ta có: $BD \perp AO$, $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp AH$. Vậy $AH \perp (SBD)$.

Lại có: $AB \perp (SAD)$, do đó góc α giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBD) là góc giữa hai đường thẳng AH và AB . Vậy $\alpha = \widehat{BAH}$.

Khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ nên ta có: $\frac{1}{3}SA.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow SA = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAO vuông tại A , đường cao AH nên: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{2a^2} = \frac{5}{2a^2}$

Suy ra: $AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$. Từ đó: $\cos \alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 29. (TH) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, biết các cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SCD) khi đó $\tan \varphi$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

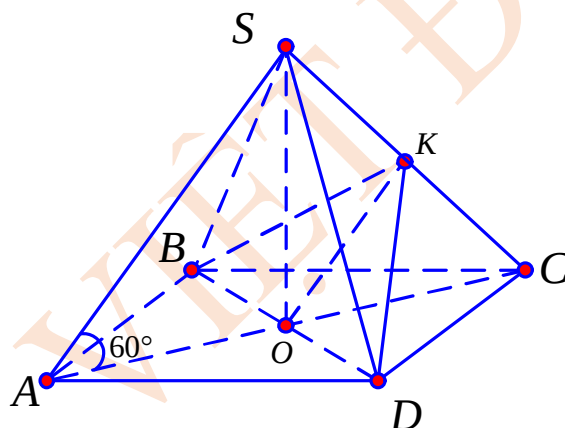
B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $OK \perp SC$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều và $ABCD$ là hình vuông nên $SO \perp (ABCD)$; $BD \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BD$. Suy ra $SC \perp (BKD) \Rightarrow KD \perp SC$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SCD) là $\widehat{OKD}$ và $\tan \widehat{OKD} = \frac{OD}{OK}$ (do ΔKOD vuông ở O).

$ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AC = 2a \Rightarrow OA = OC = OD = a$.

Trong hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh bên tạo với đáy một góc 60° nên $\widehat{SAC} = 60^\circ \Rightarrow SO = OA \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Ta có $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{OKD} = \frac{OD}{OK} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 30. (TH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$. Biết $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

A. $\varphi = 90^\circ$.

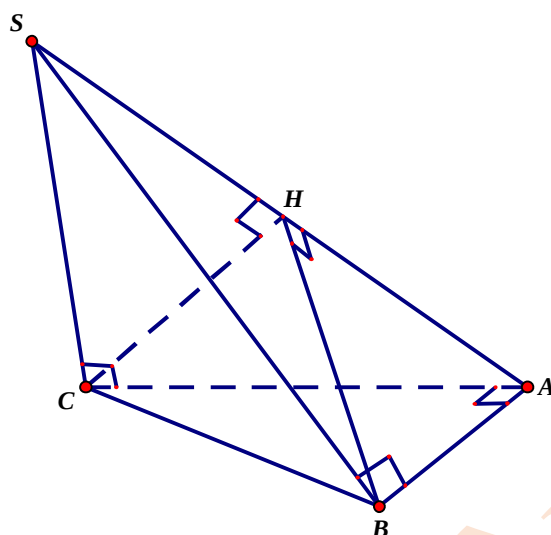
B. $\varphi = 30^\circ$.

C. $\varphi = 45^\circ$.

D. $\varphi = 60^\circ$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $CH \perp SA$, dễ dàng chứng minh được $BH \perp SA$.

Do đó, góc tạo bởi giữa hai mặt phẳng $((SAB), (SAC)) = (CH, BH)$.

Ta có, $CH = \frac{CA \cdot CS}{SA} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $CB = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác CHB , có $\cos H = \frac{CH^2 + BH^2 - BC^2}{2 \cdot HB \cdot HC} = -\frac{1}{2}$.

Vậy $((SAB), (SAC)) = (CH, BH) = 60^\circ$.

Câu 31. (TH) Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$.

Tính $\cos \alpha$, trong đó α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) ?

A. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

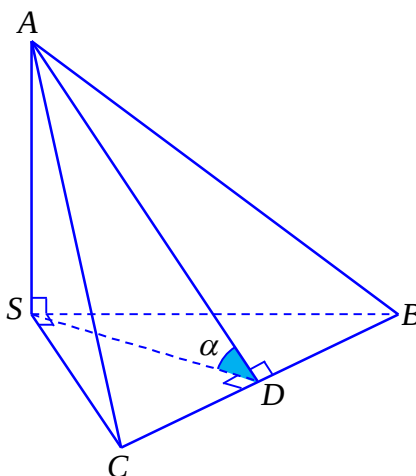
C. $\cos \alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$.

D. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn D

○ Cách 1:



Gọi D là trung điểm cạnh BC .

Ta có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $SD \perp BC$ nên $BC \perp (SAD)$.

$$\Rightarrow \widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{SDA} = \alpha.$$

Khi đó tam giác SAD vuông tại S có $SD = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $AD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ và $\cos \alpha = \frac{SD}{AD} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 32. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

A. 30° .

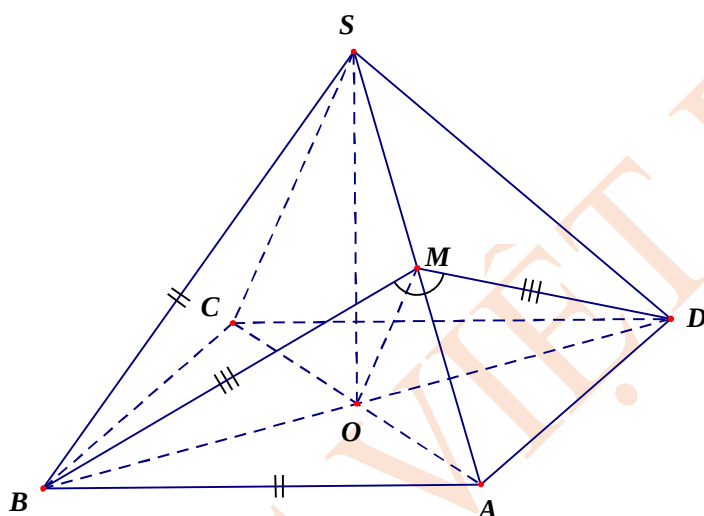
B. 45° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của SA .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (SAD) = SA \\ BM \perp SA; DM \perp SA \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SAB), (SAD))} = (BM, DM).$$

$$\text{Trong } \triangle SBO \text{ vuông tại } O, \text{ có } OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Trong } \triangle SAO \text{ vuông tại } O, \text{ ta có } OA = SO = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SA = OA\sqrt{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Mặt khác, có } DM = BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } BOM \text{ vuông tại } O, \text{ có } \sin \widehat{BMO} = \frac{OB}{BM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{BMO} = 45^\circ.$$

$$\text{Vậy góc } \widehat{((SAB), (SAD))} = 90^\circ.$$

Câu 33. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$; $AC = 2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Mặt phẳng (SAB) ; (SAC) cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60° . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Tính $\tan \alpha$.

A. $\frac{\sqrt{51}}{17}$.

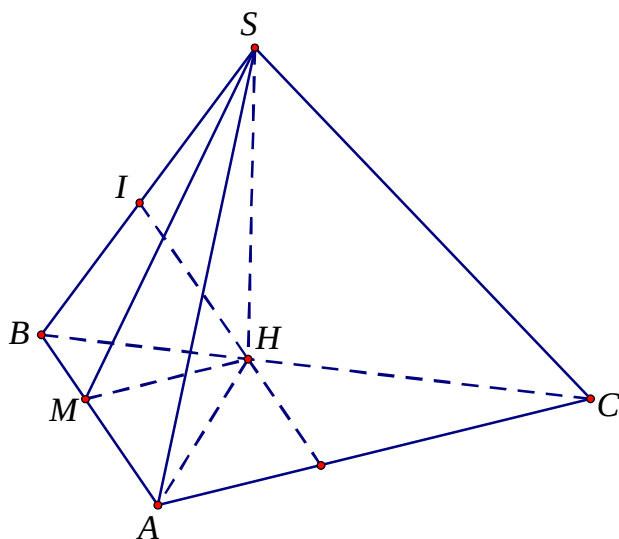
B. $\frac{\sqrt{51}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{17}}{3}$.

D. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

Lời giải

Chọn B

Vẽ $SH \perp BC$ suy ra $SH \perp (ABC)$; vẽ Ax là phân giác góc #Theo giả thiết thì H là giao điểm $Ax \cap BC$.

$$\left. \begin{array}{l} HI \perp SB \\ HK \perp SM \end{array} \right\} \rightarrow ((SBC), (SAB)) = \angle HIK$$

$$\frac{HB}{HC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} BH = \frac{a\sqrt{5}}{3} \\ CH = \frac{2a\sqrt{3}}{5} \end{cases}$$

$$\frac{HM}{AC} = \frac{BH}{BC} = \frac{1}{3} \rightarrow HM = \frac{2a}{3}$$

$$\rightarrow SM = HM \cdot \tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$HK = HM \cdot \sin 60^\circ = \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{MI^2} = \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{SM^2} = \frac{51}{20a^2} \rightarrow MI^2 = \frac{20a^2}{51}$$

$$IK = \sqrt{HI^2 - HK^2} = \frac{a\sqrt{17}}{17}$$

$$\rightarrow \tan \alpha = \frac{HK}{IK} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{51}}{3}.$$

Câu 34. (VD) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB . Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) bằng

A. $\arctan \sqrt{2}$.

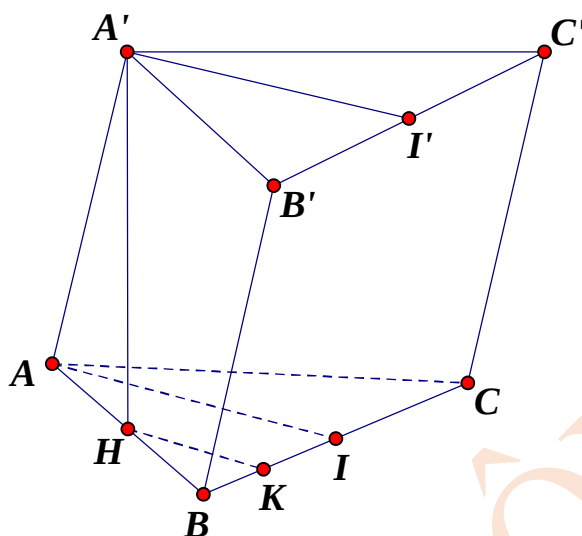
B. $\arctan 2$.

C. $\arctan 4$.

D. $\arctan \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H lần lượt là trung điểm của AB , khi đó góc giữa AA' và (ABC) là $\widehat{A'AH} = 60^\circ$

Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$, K là trung điểm của BI .

Ta có $AI \perp BC \Rightarrow HK \perp BI$ mà $A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'HKI') \Rightarrow BC \perp KI'$

Khi đó $\widehat{(BCC'B'), (ABC)} = \widehat{HK, KI'} = \widehat{HKI'}$.

Ta có $HKI'A'$ là hình thang vuông tại H, A' , có $HI' = a\sqrt{6}; KI' = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

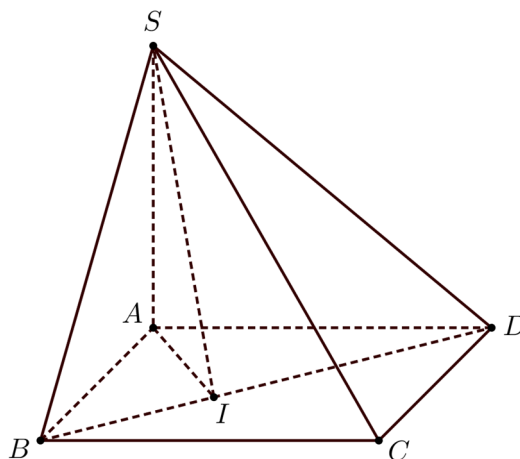
Khi đó $\sin \widehat{HKI'} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Do đó $\cot \widehat{HKI'} = \frac{1}{2}$. Vậy $\widehat{HKI'} = \arctan 2$.

Câu 35. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = SA = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\sqrt{5}$.B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là hình chiếu vuông góc của A trên $BD \Rightarrow AI \perp BD$ (1).

Mà $SA \perp BD$ do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp SI$ (2).

Mặt khác ta có $(SBD) \cap (ABCD) = BD$, $\widehat{SAI} = 90^\circ$ (3).

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow ((SBD)(ABCD)) = \widehat{SIA} = \alpha$.

Trong $\triangle BAD$ vuông tại A có $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} \Leftrightarrow AI = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Xét $\triangle SAI$ vuông tại A ta có: $\tan \alpha = \frac{SA}{AI} = \sqrt{5}$.

Câu 36. (VD) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và góc giữa SB với mặt đáy bằng 60° . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Giá trị $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

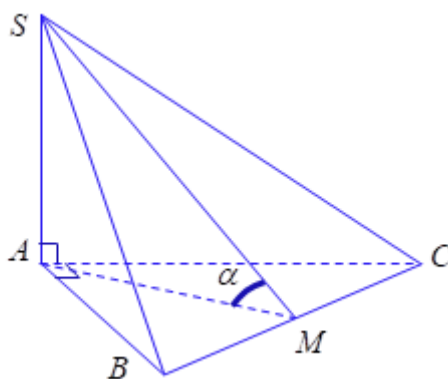
B. $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có giao tuyến của (SBC) và (ABC) là BC . Từ A kẻ $AM \perp BC$, M là trung điểm BC (do $\triangle ABC$ vuông cân tại A)

Ta có $BC \perp AM$, $BC \perp SA$ (gt), do đó $BC \perp (SAM)$ suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc giữa hai đường thẳng SM và AM . Ta tính góc $\widehat{SMA}$

Xét tam giác SMA có $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$. Góc giữa SB và (ABC) là góc

$\widehat{SBA} = 60^\circ$ do đó $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$, từ đó ta có $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = a\sqrt{14}$

Vậy $\cos \alpha = \frac{AM}{SM} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Câu 37. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

A. 30° .

B. 120° .

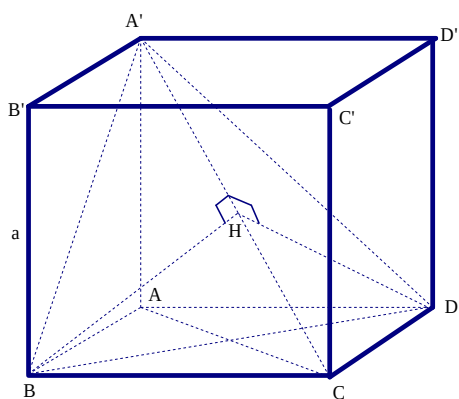
C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



+ $\triangle BA'C$ vuông tại B (vì $BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp A'B$).

Kẻ $BH \perp A'C$ trong $\triangle BA'C$.

$BD \perp (AA'C)$ (vì $BD \perp AC, BD \perp AA' \Rightarrow BD \perp A'C$).

Ta có $BH \perp A'C; BD \perp A'C \Rightarrow A'C \perp (BHD) \Rightarrow A'C \perp HD$.

+ $(BA'C) \cap (DA'C) = A'C$.

$A'C \perp (BHD)$

$(BHD) \cap (BA'C) = BH$

$(BHD) \cap (DA'C) = DH$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng góc giữa BH và DH .

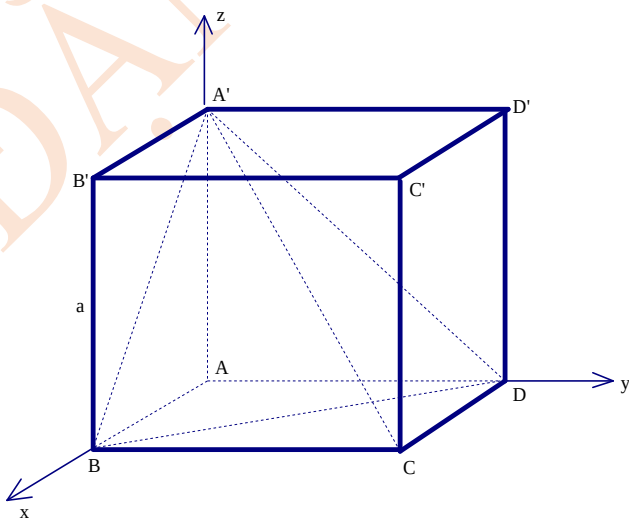
+ $BH = DH$ ($\triangle_v BA'C = \triangle_v DA'C$).

$$\triangle_v BA'C: \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA'^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow BH^2 = \frac{2a^2}{3} = DH^2.$$

$$\triangle BHD: \cos \widehat{BHD} = \frac{BH^2 + DH^2 - BD^2}{2BH.DH} = \frac{\frac{2a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{2a^2}{3}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BHD} = 120^\circ.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Cách 2:



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ có $A \equiv O$, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ lần lượt cùng hướng với các véc tơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Lấy $a=1$, suy ra $B(1;0;0), D(0;1;0), A'(0;0;1), C(1;1;0)$.

$(BA'C)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = \overrightarrow{BA'} \wedge \overrightarrow{BC} = (-1;0;-1)$.

$(DA'C)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = \overrightarrow{DA'} \wedge \overrightarrow{DC} = (0;1;1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Câu 38. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $BC = SB = a, SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

A. 90° .

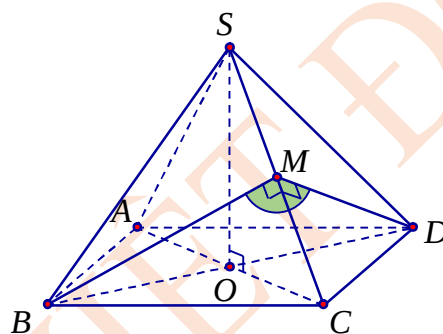
B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của SC , do tam giác SBC cân tại B nên ta có $SC \perp BM$ (1).

Theo giả thiết ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BD$. Do đó $SC \perp (BCM)$ suy ra $SC \perp DM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng BM và DM .

Ta có $\triangle SBO = \triangle CBO$ suy ra $SO = CO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

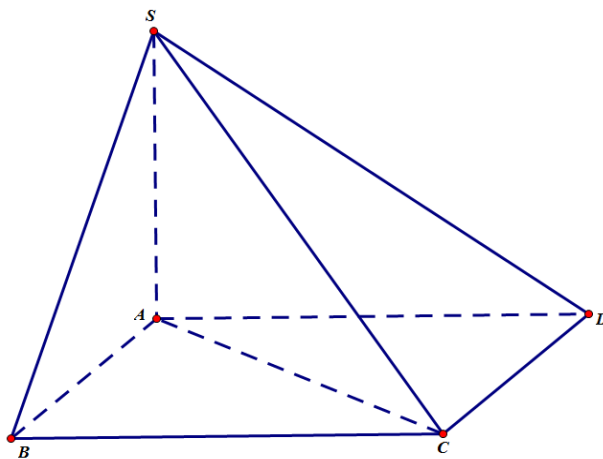
Do đó $OM = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó tam giác BMO vuông cân tại M hay góc

$\widehat{BMO} = 45^\circ$, suy ra $\widehat{BMD} = 90^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là 90° .

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 3, BC = 4$. Tam giác SAC nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng SA bằng 4.



[HH11.C3.4.D03.c] Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

A. $\frac{5\sqrt{34}}{17}$.

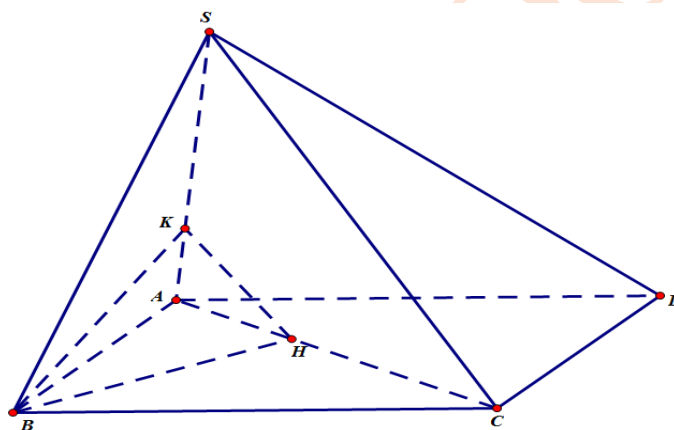
B. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

C. $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

D. $\frac{3\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$.

Kẻ đường cao BH của tam giác $ABC \Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{12}{5}$ và $\frac{HA}{HC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{9}{16}$.

$$\Rightarrow \frac{d(H, SA)}{d(C, SA)} = \frac{HA}{CA} = \frac{9}{25} \Rightarrow d(H, SA) = \frac{36}{25}.$$

Vì $(ABC) \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp (SAC)$.

Kẻ $HK \perp SA \Rightarrow ((SAC), (SAB)) = \widehat{BKH}$.

$$\Rightarrow \tan((SAB), (SAC)) = \frac{BH}{HK} = \frac{5}{3} \Rightarrow \cos((SAB), (SAC)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{5}{3}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}.$$

Câu 40. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$.
Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau một góc bằng 60° .

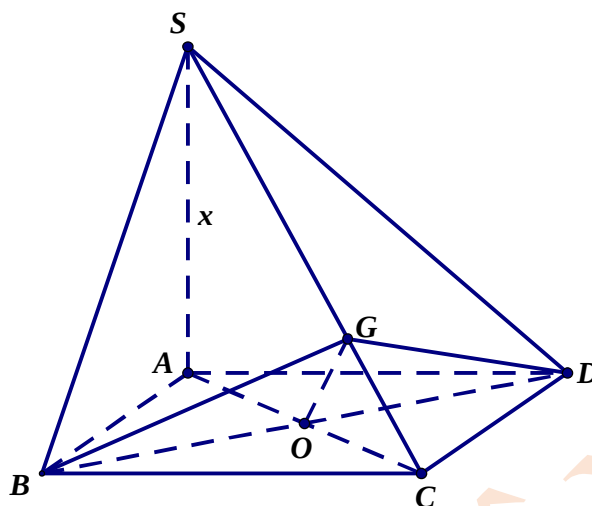
A. $x = \frac{a}{2}$.

B. $x = a\sqrt{3}$.

C. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $x = a$.

Lời giải

Chọn D

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và $G = hc_{AC}^O$.

Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$, mà $SC \perp OG$ suy ra $SC \perp (BGD)$.

Do đó $[(SBC), (SCD)] = (GB, GD) = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BGO} = 60^\circ \vee \widehat{BGO} = 120^\circ$

$$\Delta SAC \sim \Delta OGC \text{ nên: } \frac{SA}{OG} = \frac{SC}{OC} \Rightarrow OG = \frac{x \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{x^2 + 2a^2}} = \frac{xa}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2a^2}}.$$

Xét tam giác BGO :

TH1:

$$\tan 60^\circ = \frac{BO}{GO} = \frac{a \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^2 + 2a^2}}{xa} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{x^2 + 2a^2}}{xa} \Rightarrow \sqrt{3}x = \sqrt{x^2 + 2a^2} \Rightarrow x = a.$$

TH2:

$$\tan 30^\circ = \frac{BO}{GO} = \frac{a \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^2 + 2a^2}}{xa} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{x^2 + 2a^2}}{xa} \Rightarrow \sqrt{3}x = 3\sqrt{x^2 + 2a^2}$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 18a^2 = 0 : \text{vn}$$

Câu 41. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn OA và góc $(SD; (ABCD)) = 60^\circ$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = \frac{4\sqrt{15}}{9}$.

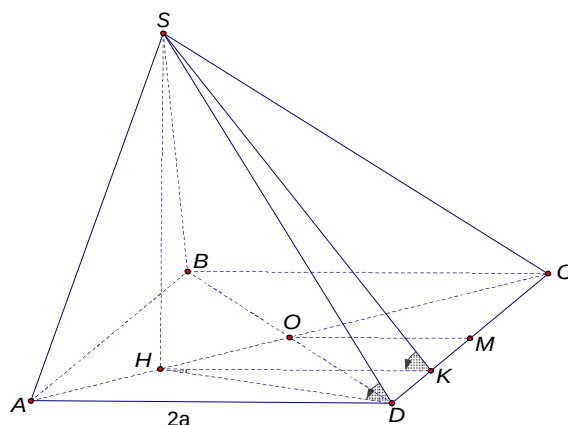
B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{30}}{12}$.

C. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

D. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{30}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SH \perp (ABCD)$ suy ra góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SDH}$ hay $\widehat{SDH} = 60^\circ$.

Hạ $HK \perp CD$ suy ra $CD \perp (SHK)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SKH}$ suy ra $\widehat{SKH} = \alpha$.

$$\text{Ta có } DH = \sqrt{OH^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Tam giác SHD là nửa tam giác đều cạnh $SD = 2DH = a\sqrt{10}$ suy ra đường cao $SH = \frac{(a\sqrt{10})\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{30}}{2}$.

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm } CD, \text{ ta có } HK = \frac{OM + AD}{2} = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \frac{SH}{HK} = \frac{\frac{a\sqrt{30}}{2}}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

Câu 42. (VD) Cho tứ diện đều $ABCD$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) .

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

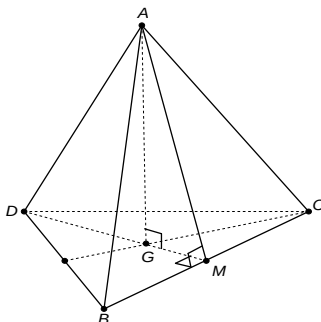
B. $\frac{2}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm tam giác BCD .

Ta có $((ABC), (BCD)) = (AM, DM) = \widehat{AMD}$

Gọi cạnh của tứ diện là 1 khi đó ta có $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}; GM = \frac{1}{3} DM = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$$\cos \widehat{AMG} = \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$$

Câu 43. (VD) (Chu Văn An - Hà Nội - lần 2 - 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) , $AB = a$, $SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC . Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) bằng

A. $\frac{1}{2}$.

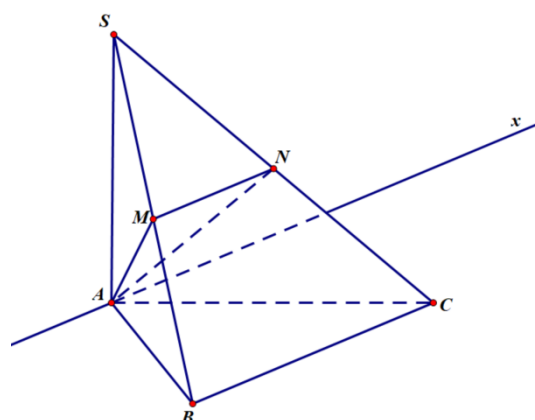
B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $MN \parallel BC$ (tính chất đường trung bình) $\Rightarrow MN \parallel (ABC) \Rightarrow (AMN) \cap (ABC) = Ax$.

Dễ thấy, $BC \perp (SAB) \Rightarrow Ax \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} Ax \perp AB \\ Ax \perp AM \end{cases}$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là $\widehat{MAB}$. Vì tam giác SAB vuông, nên $\widehat{MAB} = \widehat{SBA}$. Ta có:

$$\cos \widehat{MAB} = \cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{a}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 44. (VD) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và đáy bằng 60° ; H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) . Khoảng cách từ H đến SA bằng $\frac{a}{\sqrt{7}}$. Gọi α là góc giữa hai mặt

phẳng (SAB) và (SAC) . Khi đó, $\tan \frac{\alpha}{2}$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

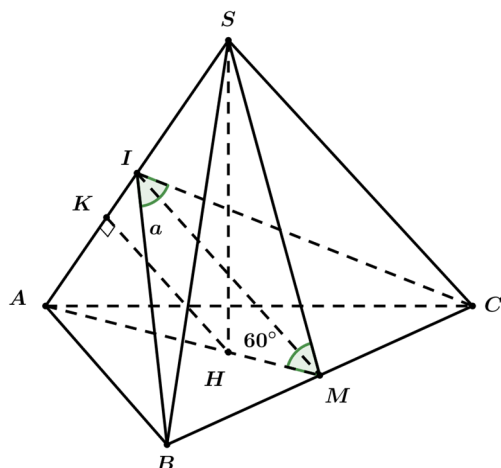
B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC ; K, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của H, M lên SA , $AB = x$ ($x > 0$)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SM \end{cases} \Rightarrow BC \perp SA$, mà $IM \perp SA \Rightarrow SA \perp (IBC) \Rightarrow \alpha = (\overline{IB}, \overline{IC})$.

Mặt khác: $HM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{6}$, $AH = 2HM = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

$SH = HM \cdot \tan 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{x}{2}$.

$\frac{7}{a^2} = \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^2} = \frac{7}{x^2} \Rightarrow x = a$.

$IM = \frac{3}{2}HK = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{7}} = \frac{3a}{2\sqrt{7}}$

Khi đó: $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{BM}{IM} = \frac{a}{2} : \frac{3a}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Câu 45. (VD) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC . Gọi (β) là góc tạo bởi $mp(P)$ và $(ABCD)$. Tính $\tan \beta$.

A. $\tan \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

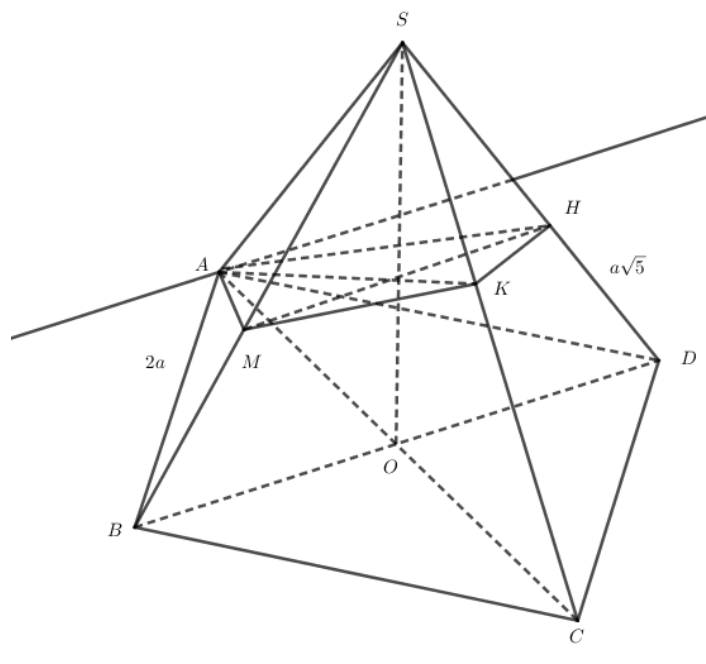
B. $\tan \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $\tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



- Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $AK \perp SC$.
- Trong mặt phẳng (SCD) , kẻ $KH \perp SC$.
- Trong mặt phẳng (SBC) , kẻ $KM \perp SC$.

Khi đó $(P) \equiv (AHKM)$.

Các tam giác SBC và SCD bằng nhau và cùng có $MK \perp SC$; $HK \perp SC$. Suy ra

$$\frac{SM}{SB} = \frac{SH}{SD} \Rightarrow HM \parallel BD.$$

Hai mặt phẳng $(AHKM)$ và $(ABCD)$ có A là điểm chung thứ nhất và lần lượt chứa hai đường thẳng song song nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d đi qua A và song song với BD .

Bây giờ ta đi xác định góc giữa hai mặt phẳng cần tìm.

Vì $AO \perp BD \Rightarrow AO \perp d$ và $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow DB \perp AK \Rightarrow AK \perp d$ nên góc giữa hai mặt phẳng cần tìm là góc $\beta = \widehat{OAK} = \widehat{CAK}$.

$$\text{Ta có } SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = a\sqrt{3}; SO \cdot AC = AK \cdot SC \Rightarrow AK = \frac{SO \cdot AC}{SC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{30}a}{5};$$

$$\cos(\widehat{CAK}) = \frac{AK}{AC} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{Suy ra } \tan \beta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \beta} - 1} = \sqrt{\frac{5}{3} - 1} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Cách 2.

Vì hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ lần lượt có hai véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{SO}$ nên góc giữa hai mặt phẳng cần tìm là góc giữa hai đường thẳng SO, SC .

$$\text{Ta có } SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = a\sqrt{3} \text{ nên } \tan \beta = \frac{OC}{SO} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 46. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (ABC) . Tính $\tan \varphi$.

A. $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

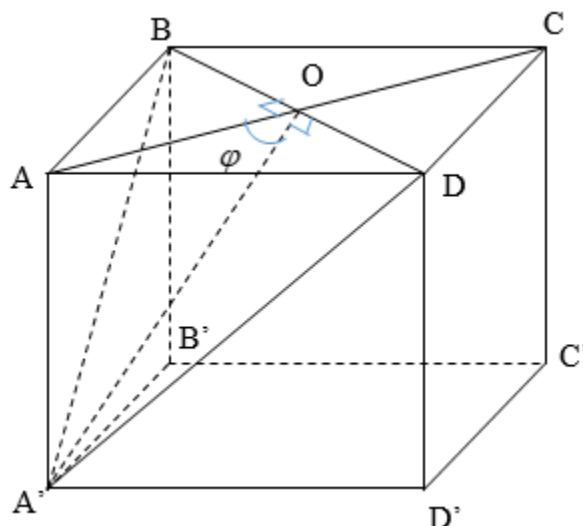
B. $\tan \varphi = \sqrt{2}$.

C. $\tan \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

D. $\tan \varphi = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $(A'BD) \cap (ABC) = BD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì ABCD là hình vuông nên $AO \perp BD$. Mặt khác AO là hình chiếu của $A'O$ lên $(ABCD)$ nên theo định lý 3 đường vuông góc ta có $A'O \perp BD$. Do đó góc giữa $(A'BD)$ và (ABC) là $\varphi = \widehat{A'OA}$.

Gọi cạnh hình lập phương là a . Tam giác $A'OA$ vuông tại A có $AA' = a$, $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$$\tan \widehat{A'OA} = \frac{AA'}{AO} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}. \text{ Vậy } \tan \varphi = \sqrt{2}.$$

Câu 47. (VD) Cho khối chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$, $(SAC) \perp (ABC)$, $SA = a$, $AB = AC = 2a$, $BC = 2a\sqrt{2}$. Tính $\cos((SAC), (SBC))$.

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

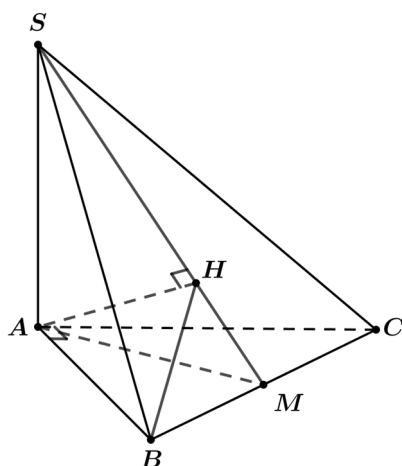
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAC) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC).$

Ta có: $\begin{cases} BC^2 = AB^2 + AC^2 \\ AB = AC \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân tại } A.$

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp BC$.

Kẻ $AH \perp SM$ tại H .

Mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC)$ tại H .

Ta lại có: $AB \perp (SAC)$.

Do đó: $\left(\widehat{(SAC), (SBC)} \right) = \left(\widehat{AH, AB} \right) = \widehat{HAB}.$

Ta có: $AM = \frac{BC}{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow AH = \frac{AM \cdot SA}{\sqrt{AM^2 + SA^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow \cos \widehat{HAB} = \frac{AH}{AB} = \frac{a\sqrt{6}}{3} : 2a = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$

Vậy $\cos \left(\widehat{(SAC), (SBC)} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}}.$

Câu 48. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2CD$, $AD = CD = a$, $SA = x$. Tìm giá trị của x để số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60° .

A. $x = a\sqrt{2}.$

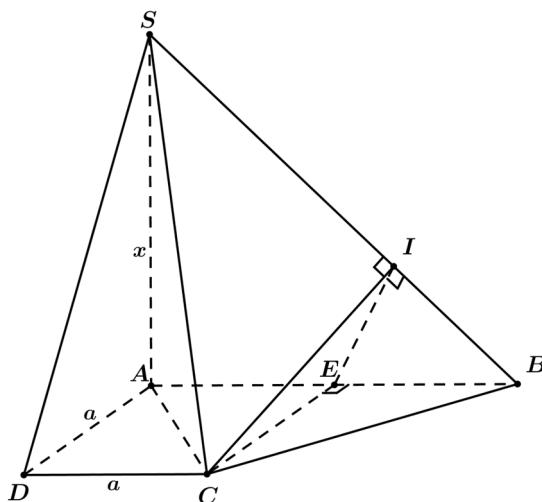
B. $x = \frac{a}{2}.$

C. $x = a\sqrt{3}.$

D. $x = a.$

Lời giải

Chọn A



Dựng $CE \perp AB \Rightarrow CE \perp (SAB)$ và $ADCE$ là hình vuông $\Rightarrow AE = BE = EC = a$.

Dựng $EI \perp SB \Rightarrow SB \perp (CEI) \Rightarrow SB \perp CI$. Vậy góc giữa (SAB) và (SBC) là góc $\widehat{CIE} = 60^\circ$.

Xét $\triangle EIC$ vuông tại E có $IE = EC \cdot \cot 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $IB = \sqrt{BE^2 - EI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vì $\triangle SAB$ đồng dạng với $\triangle EIB$ nên $\frac{SA}{EI} = \frac{AB}{IB} \Rightarrow SA = \frac{AB \cdot EI}{IB} = \frac{2a \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = a\sqrt{2}$.

Vậy $x = a\sqrt{2}$.

Câu 49. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. 30° .

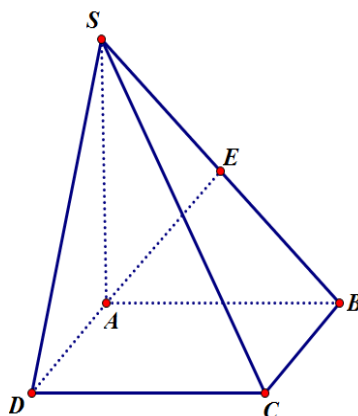
B. 90° .

C. 0° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn D



Ta có $AB \perp (SAD)$

Gọi E là hình chiếu của A lên SB , dễ thấy $AE \perp (SBC)$

Vậy góc giữa (SAD) và (SBC) là góc giữa AB và AE

Ta có tam giác SAB vuông cân tại A suy ra $\widehat{SBA} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BAE} = 45^\circ$ là góc giữa AB và AE

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng $\widehat{BAE} = 45^\circ$.

Câu 50. (VD) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt bên của hình chóp đó. Hãy tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{8}{15}$.

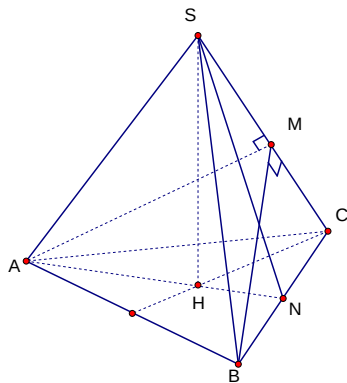
B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos \alpha = \frac{7}{15}$.

D. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, S của tam giác SBC . H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) .

Ta có: $AB \perp (SHC) \Rightarrow AB \perp SC$

Mặt khác $SC \perp BM \Rightarrow SC \perp (ABM) \Rightarrow SC \perp AM$

$$\text{Vậy } \begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ AM \subset (SAC) \\ BM \subset (SBC) \\ SC \perp AM, SC \perp BM \end{cases} \Rightarrow ((SAC); (SBC)) = (AM; BM).$$

Ta tính góc $\widehat{AMB}$. Xét tam giác AMB .

Tam giác SBC cân tại S nên N là trung điểm của BC .

$$+) SN = \sqrt{SC^2 - NC^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$+) BM = \frac{SN \cdot BC}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a}{2a} = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

$$+) AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{BC^2 - MC^2} = BM.$$

$$\text{Ta có } \cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2 \cdot AM \cdot BM} = \frac{\frac{15a^2}{16} + \frac{15a^2}{16} - a^2}{2 \cdot \frac{15a^2}{16}} = \frac{7}{15} > 0, \text{ suy ra góc } \widehat{AMB} \text{ nhọn.}$$

$$\text{Vậy } \alpha = ((SAC); (SBC)) = (AM; BM) = \widehat{AMB} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{7}{15}.$$

Câu 51. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $SO \perp (ABCD)$. Cho

$AB = SB = a$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng α với

A. $\alpha = 90^\circ$.

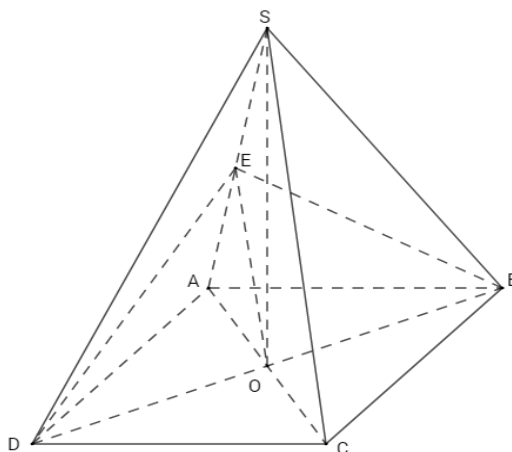
B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 30^\circ$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác SOA , từ điểm O kẻ $OE \perp SA$ (1).

$$\text{Do } \begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SO \\ SO \cap AC = \{O\} \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC) \Rightarrow BO \perp SA \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $SA \perp (BOE) \Rightarrow SA \perp BE$ (3).

Tương tự, ta cũng có $SA \perp DE$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) chính là góc giữa hai đường thẳng BE và DE .

Tam giác SBA cân tại B nên E là trung điểm của SA .

$$\text{Trong tam giác vuông } SOA, \text{ ta có } OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } AOB, \text{ ta có } OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SOA, \text{ ta có } \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{3}{2a^2} = \frac{9}{2a^2} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } BOE, \text{ ta có } \tan \widehat{BEO} = \frac{OB}{OE} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BEO} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BED} = 120^\circ.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng 60° .

Câu 52. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Gọi α là góc giữa $mp(SCD)$ và $mp(ABCD)$. Khi đó $\tan \alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

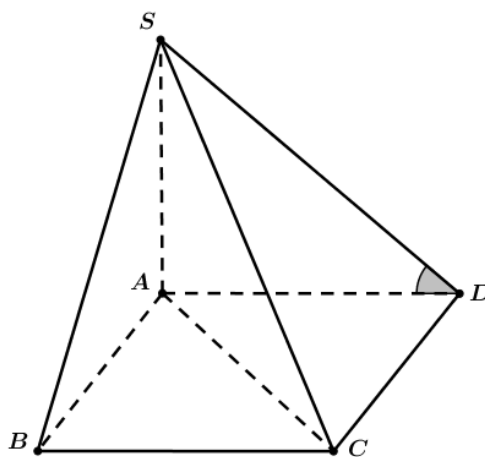
B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}$. Mà $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.

Có $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

Vì $(ABCD) \cap (SCD) = CD$. Mà $\begin{cases} CD \perp SD \\ CD \perp AD \end{cases}$
 $\Rightarrow ((SCD); (ABCD)) = (\widehat{SD; AD}) = \widehat{SAD} = \alpha$.

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

Câu 53. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $\cos$ góc giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và $(ABCD)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

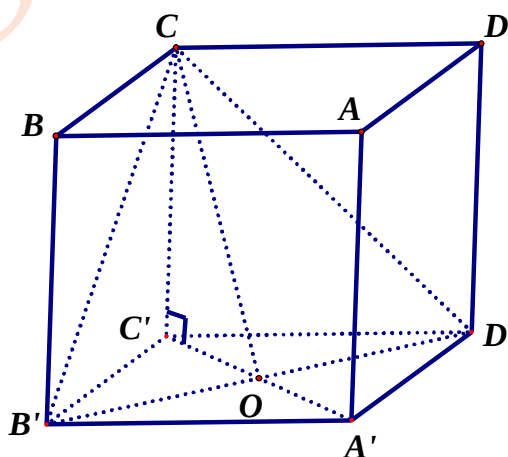
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Do $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên góc giữa mặt phẳng $(CB'D')$ và $(ABCD)$ bằng góc giữa mặt phẳng $(CB'D')$ và $(A'B'C'D')$.

Gọi $O = A'C' \cap B'D'$, ta dễ dàng chứng minh được $B'D' \perp (C'OC) \Rightarrow B'D' \perp CO$, nên góc giữa mặt phẳng $(CB'D')$ và $(A'B'C'D')$ là góc giữa CO và $C'O$, là góc $\widehat{C'OC}$.

$$\text{Đặt } CC' = 1 \text{ thì ta có } C'O = \frac{\sqrt{2}}{2}, \Rightarrow CO = \frac{\sqrt{6}}{2}, \Rightarrow \cos \widehat{C'OC} = \frac{C'O}{CO} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 54. (VD) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng

A. 60° .

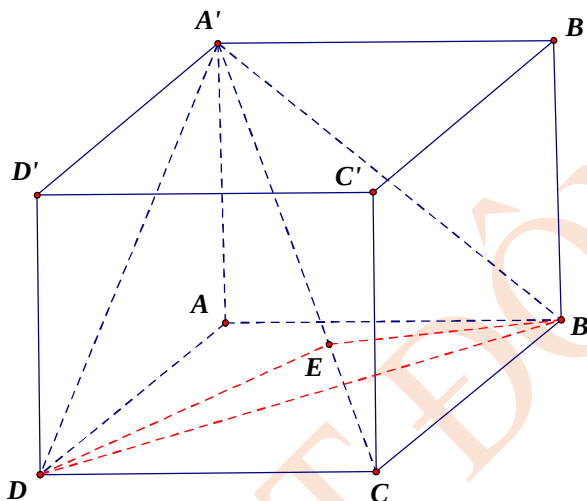
B. 90° .

C. 120° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn A



Kẻ $DE \perp A'C$ tại E (1)

$$\text{Vì } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp A'C \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A'C \perp (BDE) \Rightarrow A'C \perp BE$

$$\begin{cases} (BA'C) \cap (DA'C) = A'C \\ DE \perp A'C \\ BE \perp A'C \end{cases} \Rightarrow \left[(BA'C), (DA'C) \right] = (\widehat{DE, BE})$$

Tính $\widehat{BED}$

$$BD = a\sqrt{2}; BE = DE = \frac{DC \cdot A'D}{A'C} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$\cos \widehat{BED} = \frac{BE^2 + DE^2 - BD^2}{2BE \cdot DE} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \widehat{BED} = 120^\circ$$

$$\text{Vậy } \left[(BA'C), (DA'C) \right] = 60^\circ$$

Câu 55. (VD) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, có $AB = BC = a, AD = 2a, SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng

A. 75° .

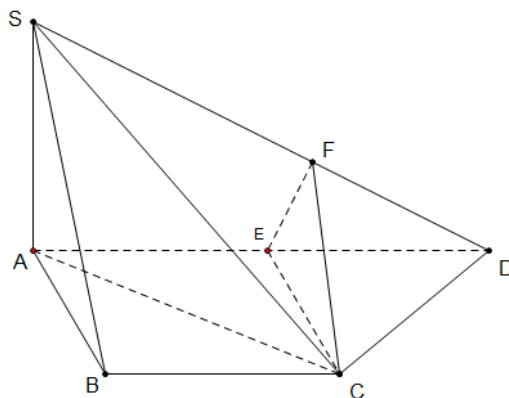
B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D



E là trung điểm của AD . Do đó $AE = ED = a$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{6}$.

Trong mặt phẳng (SAD) , từ E kẻ $EF \perp SD$ ($F \in SD$).

Theo giả thiết: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$

Ta lại có: $AD \perp AB$ nên $AB \perp (SAD)$

$ABCE$ là hình vuông $\Rightarrow AB \parallel EC \Rightarrow EC \perp (SAD) \Rightarrow \begin{cases} EC \perp EF \\ EC \perp SD \end{cases}$

Vì $\begin{cases} EC \perp SD \\ EF \perp SD \end{cases}$ nên $SD \perp FC$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) là $\widehat{EFC}$.

$$\triangle SAD \sim \triangle EFD \Rightarrow \frac{EF}{SA} = \frac{ED}{SD} \Rightarrow EF = \frac{a}{a\sqrt{6}} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Xét tam giác EFC vuông tại E .

$$\tan \widehat{EFC} = \frac{EC}{EF} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{EFC} = 60^\circ$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng 60° .

Câu 56. (VD) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên hai tia Bx , Dy vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$

và cùng chiều lần lượt lấy hai điểm M , N sao cho $BM = \frac{a}{4}$; $DN = 2a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AMN) và (CMN) .

A. $\varphi = 30^\circ$.

B. $\varphi = 60^\circ$.

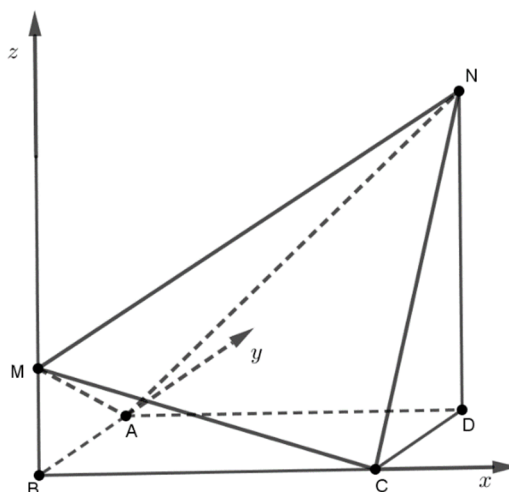
C. $\varphi = 45^\circ$.

D. $\varphi = 90^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



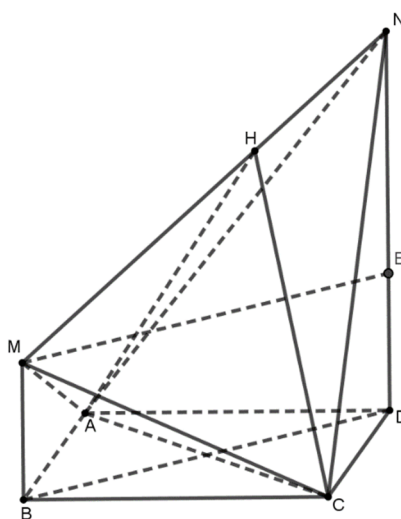
Ta có: $B(0;0;0)$, $A(0;a;0)$, $C(a;0;0)$, $M\left(0;0;\frac{a}{4}\right)$, $N(a;a;2a)$.

$\overrightarrow{AM} = \left(0; -a; \frac{a}{4}\right)$, $\overrightarrow{AN} = (0;0;2a)$, $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \left(-2a^2; \frac{a^2}{4}; a^2\right)$ là vector pháp tuyến của mp(AMN).

$\overrightarrow{CM} = \left(-a; 0; \frac{a}{4}\right)$, $\overrightarrow{CN} = (0; a; 2a)$, $[\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}] = \left(\frac{-a^2}{4}; 2a^2; -a^2\right)$ là vector pháp tuyến của mp(CMN).

$$\text{Do đó: } \cos \varphi = \frac{\left| \frac{a^4}{2} + \frac{a^4}{2} - a^4 \right|}{\sqrt{4a^4 + \frac{a^4}{16} + a^4} \cdot \sqrt{4a^4 + \frac{a^4}{16} + a^4}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ.$$

Cách 2:



Ta có: $\triangle AMN = \triangle CMN$ (c.c.c) nên kẻ $CH \perp MN$ tại H thì $AH \perp MN$.

Mà $(AMN) \cap (CMN) = MN$ nên góc φ giữa hai mặt phẳng (AMN) và (CMN) là góc giữa hai đường thẳng HA, HC .

$$\text{Ta có: } MC = \sqrt{BC^2 + MB^2} = \frac{a\sqrt{17}}{4}, \quad NC = \sqrt{CD^2 + ND^2} = a\sqrt{5},$$

$$MN = \sqrt{ME^2 + EN^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{49a^2}{16}} = \frac{9a}{4}.$$

$$\cos \widehat{MCN} = \frac{MC^2 + NC^2 - MN^2}{MC \cdot NC} = \frac{2}{\sqrt{85}} \Rightarrow \sin \widehat{MCN} = \frac{9}{\sqrt{85}}.$$

$$\Rightarrow S_{MCN} = \frac{1}{2} MC \cdot NC \cdot \sin \widehat{MCN} = \frac{9a^2}{8}.$$

Từ đó: $CH = \frac{2S_{MCN}}{MN} = a = AH$. Do $AH^2 + CH^2 = AC^2$ nên tam giác AHC vuông tại H .

Vậy góc giữa hai đường thẳng HA, HC bằng 90° .

Câu 57. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều, có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. 90° .

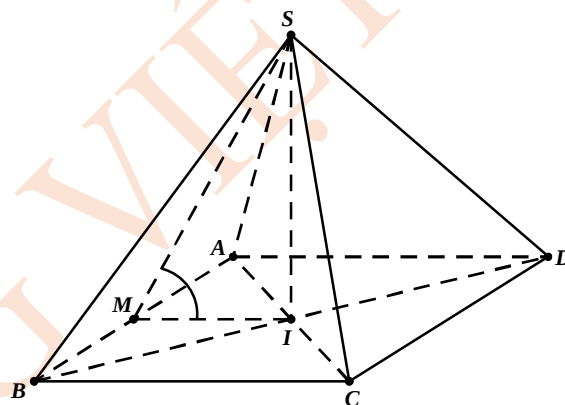
B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a và I là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó $SI \perp (ABCD)$ nên chiều cao của hình chóp là $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Vì IM là đường trung bình của tam giác ABD suy ra $IM \parallel AD$. Mặt khác $AB \perp AD$ (do $ABCD$ là hình vuông). Do đó $IM \perp AB$.

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên tam giác SAB cân tại $S \Rightarrow SM \perp AB$.

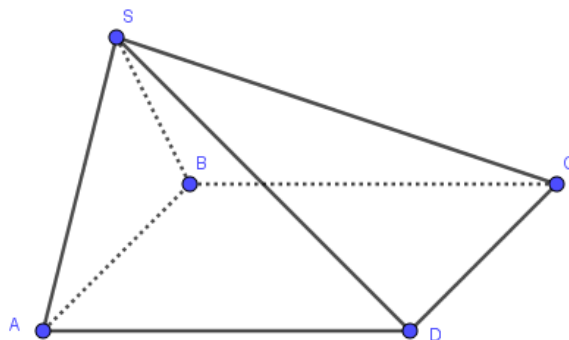
Ta có: $(SAB) \cap (ABCD) = AB$; $SM \subset (SAB)$; $SM \perp AB$; $IM \subset (ABCD)$; $IM \perp AB$ nên

$$(\widehat{(SAB), (ABCD)}) = (\widehat{SM, IM}) = \widehat{SMI}.$$

Xét tam giác SMI vuông tại I , ta có: $\tan \widehat{SMI} = \frac{SI}{MI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$. Suy ra $\widehat{SMI} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° .

Câu 58. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SCD) . Tính $\tan \alpha$.



A. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

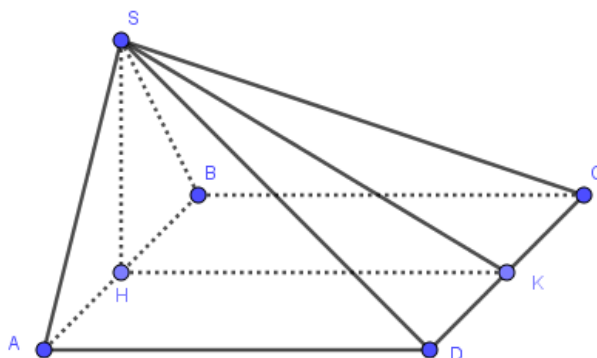
B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ trung tuyến $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Gọi K là trung điểm $CD \Rightarrow HK \perp CD$

Ta có $CD \perp HK, CD \perp SH \Rightarrow CD \perp SK$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SCD) là $\alpha = \widehat{SKH}$

Xét tam giác SHK vuông tại H có $\tan \alpha = \frac{SH}{HK} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($SH = a\sqrt{3}, HK = AD = 2a$).

Câu 59. (VD) Khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' , diện tích tam giác MNP bằng 4. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP)

A. 30° .

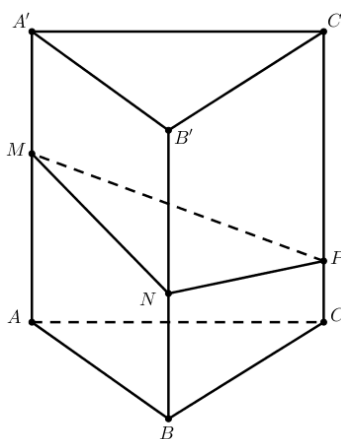
B. 120° .

C. 90° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A



Từ giả thiết suy ra tam giác ABC là hình chiếu của tam giác MNP lên mặt phẳng (ABC) . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) .

Theo công thức diện tích hình chiếu ta có $\cos \alpha = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

Câu 60. (VD) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\tan \varphi = \sqrt{2}$.

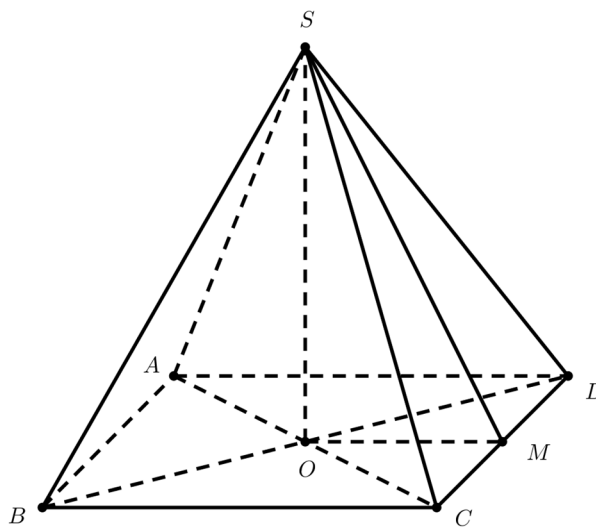
B. $\tan \varphi = \sqrt{3}$.

C. $\tan \varphi = 2$.

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm CD . Ta có:

$$\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ SM \perp CD, SM \subset (SCD) \\ OM \perp CD, OM \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \varphi = \widehat{SMO}.$$

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $BD = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OD = a\sqrt{2}$.

$$OM = a, SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{SO}{OM} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$$

Câu 61. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = 2a$, $AD = DC = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tang của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

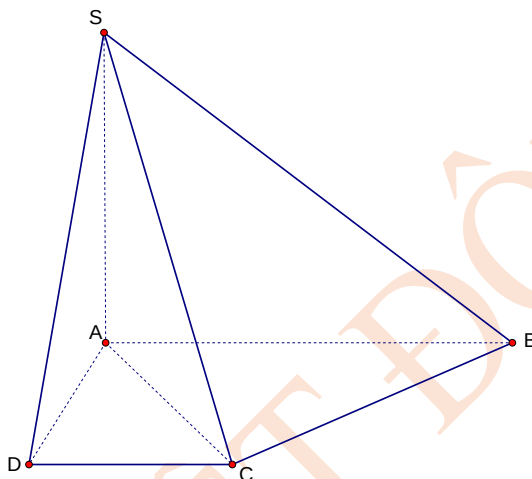
B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



$$(SBC) \cap (ABCD) = BC.$$

Dễ chứng minh được: $AC \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = \widehat{SCA}$

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 62. (VD) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{6}$. Gọi φ là góc giữa mặt bên và đáy của hình chóp. Tính $\tan \varphi$.

A. $\tan \varphi = 6\sqrt{2}$.

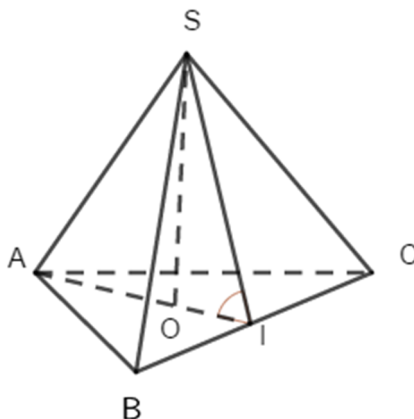
B. $\tan \varphi = 2\sqrt{2}$.

C. $\tan \varphi = 3\sqrt{2}$.

D. $\tan \varphi = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm BC và O là tâm đáy.

$$\Rightarrow SO \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{ABC, SBC}) = (\widehat{AI, SI}) = \widehat{SIA} = \varphi \text{ (vì } \triangle SOI \text{ vuông tại } O).$$

Vì đáy là tam giác đều cạnh a nên $OI = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$$\text{Do đó: } \tan \varphi = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 6\sqrt{2}.$$

Câu 63. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là

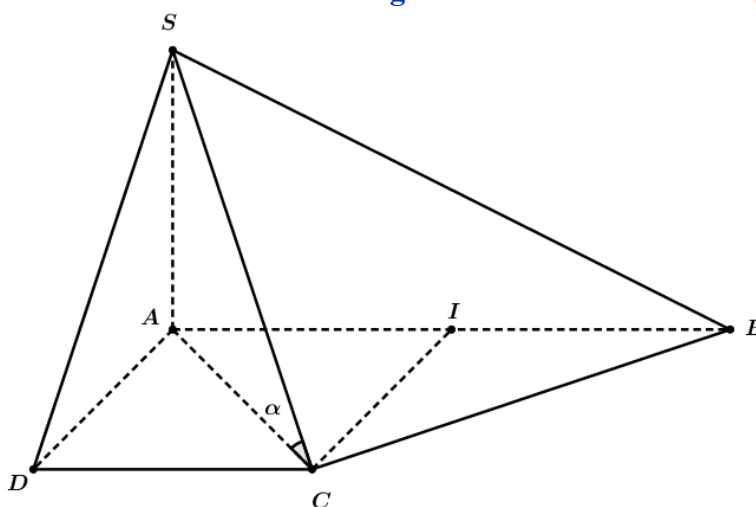
A. $\sqrt{2}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải



Chọn B

Cách 1: Gọi I là trung điểm của AB suy ra $AI = \frac{1}{2}AB = a$. Mặt khác $ABCD$ là hình thang vuông và $AD = DC = a$, nên $ADCI$ là hình vuông suy ra $CI = a$.

Vậy trong tam giác ACB có đường trung tuyến $CI = \frac{1}{2}AB$ và $CI \perp AB$, nên $\triangle ACB$ vuông cân tại C , hay $AC \perp CB$ (1).

Mà theo giả thiết $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CB$ (2).

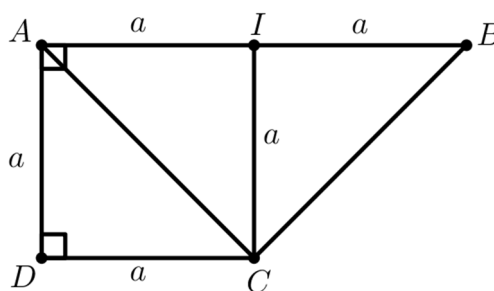
Từ (1) và (2) suy ra $CB \perp SC$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng trong hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến, tức là góc $\widehat{SCA} = \alpha$.

Ta có $AC = a\sqrt{2}$. Vậy $\tan \alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Cách 2:

Gọi I là trung điểm của AB suy ra $AI = \frac{1}{2}AB = a$.

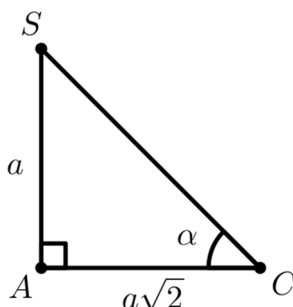


Suy ra $AC \perp CB$ (1).

$$\text{Mà } SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp CB$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng trong hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến, tức là góc $\widehat{SCA} = \alpha$.



Do đó $\tan \alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 64. (VD) Cho hình chóp $SABC$ có đường cao SA bằng $2a$, tam giác ABC vuông ở C có $AB = 2a$, $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SBC) .

A. $\frac{\sqrt{7}}{9}$.

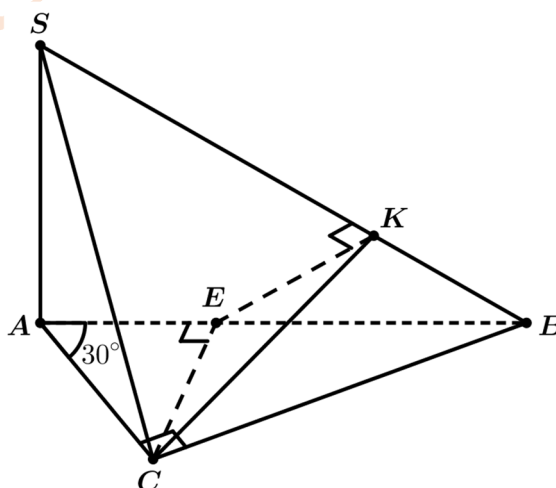
B. $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

C. $\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

D. $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ SA \subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$$

Trong mp(ABC), kẻ $CE \perp AB = (SAB) \cap (ABC) \Rightarrow CE \perp (SAB) \Rightarrow CE \perp SB$ (1)

Trong mp(SAB), kẻ $EK \perp SB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SB \perp CK \Rightarrow ((SAB), (SBC)) = \widehat{EKC}$

$$BC = AB \cdot \cos B = 2a \cdot \cos 60^\circ = a, AC = AB \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3}, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{7}$$

$$CK = \sqrt{\frac{SC^2 \cdot CB^2}{SC^2 + CB^2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}, CE = BC \cdot \sin B = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, EK = \sqrt{CK^2 - CE^2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \widehat{EKC} = \frac{EK}{CK} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

Câu 65. (VD) Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tính giá trị của x sao cho hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

A. $\frac{a}{2}$.

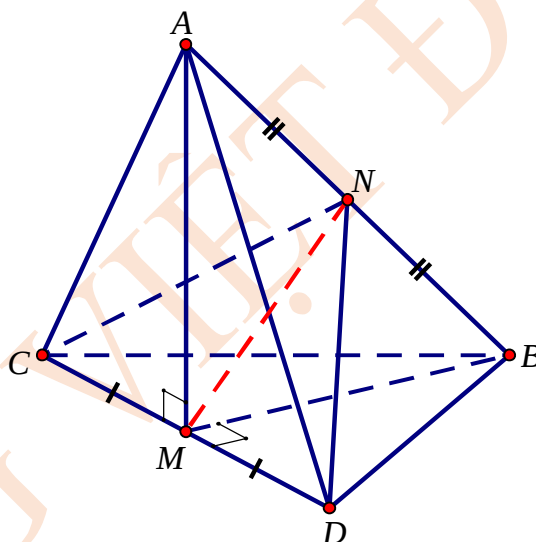
B. $\frac{a}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M , N lần lượt là trung điểm CD , AB .

Ta có: $AC = AD = BC = BD = a$ nên $\triangle ACD$ cân tại A , $\triangle BCD$ cân tại B , $\triangle CAB$ cân tại C , $\triangle DAB$ cân tại D . Suy ra $AM = BM$, $CN = DN$.

Góc giữa (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

$$\text{Tính: } BM = AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\text{Xét } \triangle ABM \text{ vuông cân tại } M \text{ có: } MN = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}} \quad (1).$$

Góc giữa (ABC) và (ABD) là góc giữa CN và DN .

Khi đó $(ABC) \perp (ABD) \Leftrightarrow CN \perp DN \Leftrightarrow \widehat{CND} = 90^\circ$.

$$\text{Xét } \triangle CDN \text{ vuông cân tại } N \text{ có: } MN = \frac{CD}{2} = x \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}} = x \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 66. (VDC) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $AA' = 4a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$. Giá trị của $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{29}{61}$.

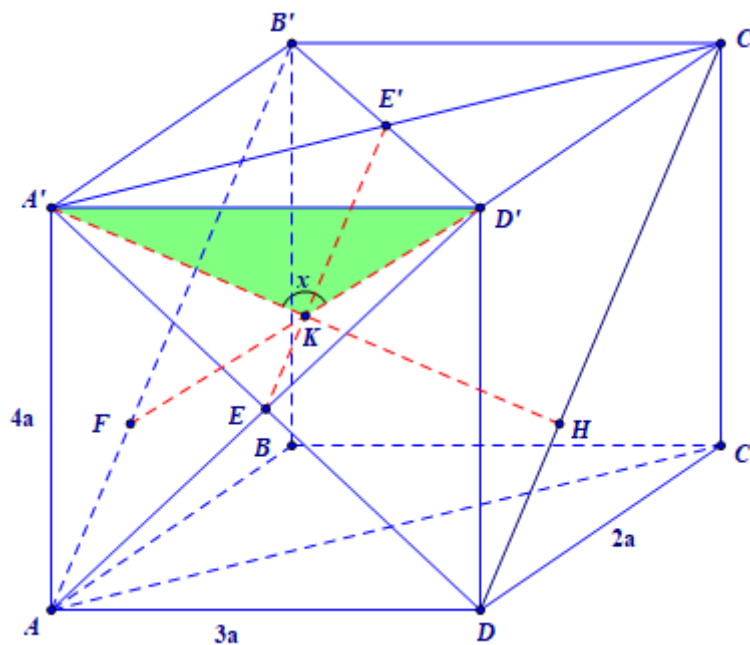
B. $\frac{27}{34}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{137}{169}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi E, E' lần lượt là tâm của hình chữ nhật $ADD'A'$, $A'B'C'D'$.

Khi đó: $EE' = (DA'C') \cap (AB'D')$.

Dựng $A'H$, $D'F$ lần lượt là đường cao của hai tam giác $DA'C'$, $AB'D'$.

Dễ thấy: $A'H, D'F, EE'$ đồng qui tại K và $\begin{cases} A'K \perp EE' \\ D'K \perp EE' \end{cases}$.

Hình chữ nhật $DD'C'C$ có: $DC' = \sqrt{DD'^2 + D'C'^2} = 2\sqrt{5}a$.

Hình chữ nhật $ADD'A'$ có: $A'D = \sqrt{AD^2 + AA'^2} = 5a$.

Hình chữ nhật $A'B'C'D'$ có: $A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{13}a$.

Suy ra: $S_{\triangle DA'C'} = \sqrt{61}a^2 \Rightarrow A'H = \frac{2S_{\triangle DA'C'}}{DC'} = \frac{\sqrt{305}}{5}a \Rightarrow A'K = \frac{\sqrt{305}}{10}a$.

Hoàn toàn tương tự ta có: $D'K = \frac{\sqrt{305}}{10}a$.

Trong tam giác $A'D'K$ có: $\cos x = \frac{A'K^2 + D'K^2 - A'D'^2}{2.A'K.D'K} = -\frac{29}{61}$.

$\Rightarrow \cos \alpha = |\cos x| = \frac{29}{61}$.

Câu 67. (VDC) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB và K là hình chiếu của điểm A trên

cạnh SC . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AGK) . Tính $\cos \alpha$, biết rằng khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (KBC) bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

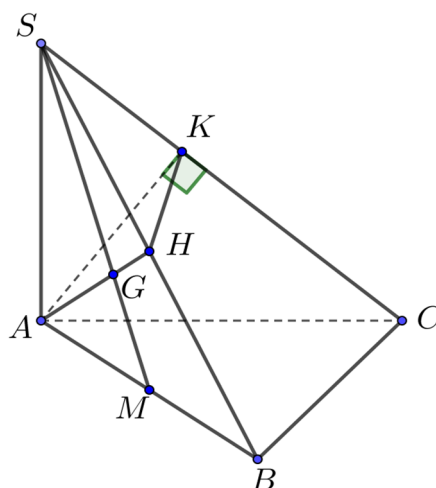
B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC vuông cân tại B mà $AC = a\sqrt{2}$ suy ra $AB = BC = a$.

Do $BC \perp BA$, $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$) nên $BC \perp (SAB)$.

Gọi H là hình chiếu của điểm A lên SB , thì $AH \perp SB$, $AH \perp BC$ (vì $BC \perp (SAB)$) nên

$$AH \perp (SAB) \text{ hay } AH = d(A, (SBC)) = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SAB với đường cao AH , ta được:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SA = a \text{ nên tam giác } SAB \text{ vuông cân tại } A$$

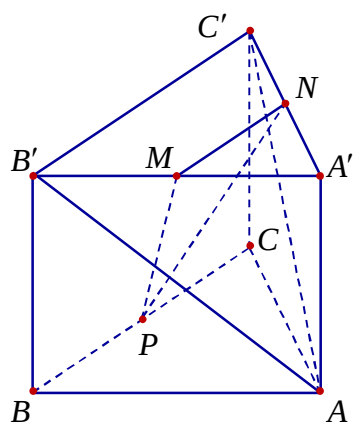
do đó trọng tâm G thuộc AH .

Từ $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ và $AK \perp SC$ nên $SC \perp (AHK)$ hay $SC \perp (AGK)$.

Vì $SC \perp (AGK)$ và $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (AGK) và (ABC) chính là góc giữa hai đường thẳng SC và SA hay $\alpha = \widehat{CSA}$.

$$\text{Theo trên ta có } SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{3} \text{ suy ra } \cos \alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 68. (VDC) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng



A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

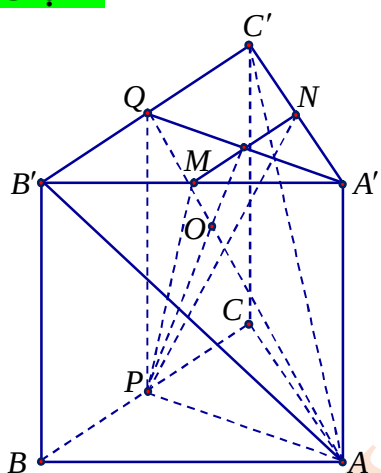
B. $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

D. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I, Q lần lượt là trung điểm của $MN, B'C'$. Gọi $O = PI \cap AQ$.

Khi đó $\begin{cases} O \in (AB'C') \cap (MNP) \\ B'C' \parallel MN \\ B'C' \subset (AB'C'), MN \subset (MNP) \end{cases}$ nên giao tuyến của $(AB'C')$ và (MNP) là đường

thẳng d qua O và song song $MN, B'C'$.

Tam giác $AB'C'$ cân tại A nên $AQ \perp B'C' \Rightarrow AQ \perp d$.

Tam giác PMN cân tại P nên $PI \perp MN \Rightarrow PI \perp d$.

Do đó góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) là góc giữa AQ và PI .

Ta có $AP = 3, AQ = \sqrt{13}, IP = \frac{5}{2}$.

Vì $\triangle OAP \sim \triangle OQI$ và $\frac{AP}{IQ} = 2$ nên $OA = \frac{2}{3}AQ = \frac{2\sqrt{13}}{3}; OP = \frac{2}{3}IP = \frac{5}{3}$.

$$\cos(\widehat{(AB'C'), (MNP)}) = \cos(\widehat{AQ, PI}) = \left| \cos(\widehat{AOP}) \right| = \frac{OA^2 + OP^2 - AP^2}{2OA \cdot OP} = \frac{\sqrt{13}}{65}.$$

Câu 69. (VDC) Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = BC = a$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và (ABC) .

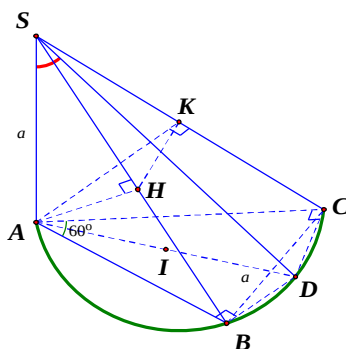
A. $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $SA \perp (ABC)$ (1).

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, kẻ đường kính AD ta có $BD \perp (SAB)$ và $CD \perp (SAC)$.

Từ đó suy ra $AH \perp (SBD)$ và $AK \perp (SCD)$. Do đó $SD \perp (AHK)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $((ABC); (AHK)) = (SA; SD) = \widehat{DSA}$.

Trong $\triangle ABC$ có $\frac{BC}{\sin A} = 2R$ hay $AD = 2R = \frac{a}{\sin 60^\circ} \Leftrightarrow AD = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Trong $\triangle ASD$ có $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Vậy $\cos((ABC); (AHK)) = \cos \widehat{DSA} = \frac{SA}{SD} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 70. (VDC) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60° . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Giá trị của $\tan \alpha$ là

A. $\frac{\sqrt{51}}{17}$.

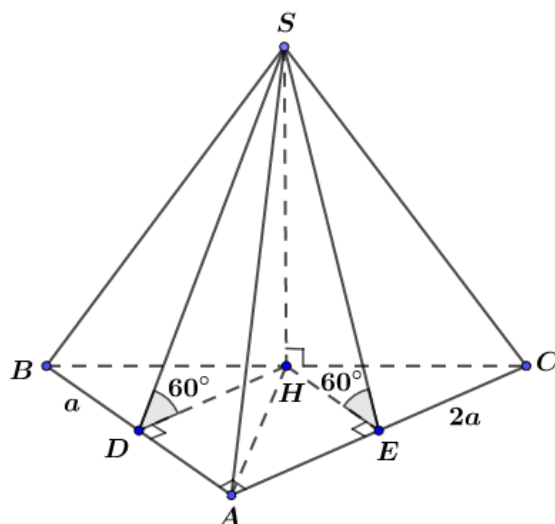
B. $\frac{\sqrt{51}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{17}}{3}$.

D. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

Lời giải

Chọn B



□ Xác định chân đường cao H kẻ từ S của hình chóp $S.ABC$:

Trong (SBC) , kẻ $SH \perp BC$ tại H . Vì $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Trong (ABC) , kẻ $HD \perp AB$ tại D và $HE \perp AC$ tại E . Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SD \perp AB$ và $SE \perp AC$.

$$\Rightarrow \widehat{[(SAB), (ABC)]} = \widehat{SDH}, \widehat{[(SAC), (ABC)]} = \widehat{SEH}.$$

Khi đó, theo giả thiết thì $\widehat{SDH} = \widehat{SEH} = 60^\circ$.

$$\Rightarrow \triangle SHD = \triangle SHE \Rightarrow HD = HE.$$

$\Rightarrow H$ là chân đường phân giác trong kẻ từ A của $\triangle ABC$.

□ Tính SH :

$$\text{Ta có: } S_{ABC} = S_{AHB} + S_{AHC} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot AH \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2} AC \cdot AH \cdot \sin 45^\circ$$

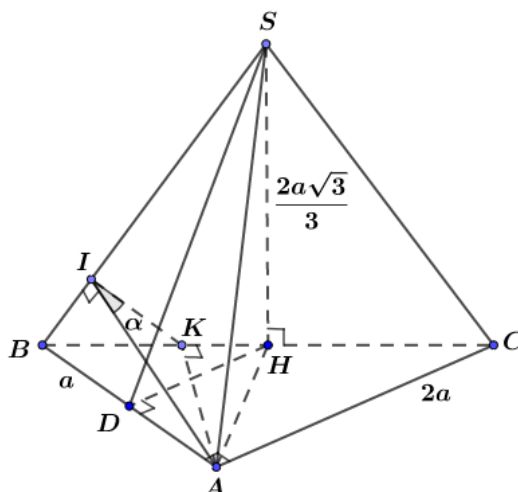
$$\Rightarrow 2a^2 = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Mặt khác, } ADHE \text{ là hình vuông nên } HD = HE = \frac{AH\sqrt{2}}{2} = \frac{2a}{3}.$$

$$\Rightarrow SH = HD \cdot \tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

□ **CÁCH 1:**

□ Xác định góc α :



Trong (ABC) , kẻ $AK \perp BC$ tại K . Vì $(ABC) \perp (SBC)$ nên $AK \perp (SBC)$.

Trong (SAB) , kẻ $AI \perp SB$ tại I . Vì $AK \perp (SBC)$ nên $KI \perp SB$.

$$\Rightarrow \alpha = \widehat{AIK}.$$

□ Tính $\tan \alpha$:

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } A \text{ có } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow AK = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vì } AH \text{ là phân giác của } \widehat{BAC} \text{ nên } \frac{HB}{HC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{HB}{HB+HC} = \frac{1}{1+2}$$

$$\Rightarrow \frac{HB}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow HB = \frac{BC}{3} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

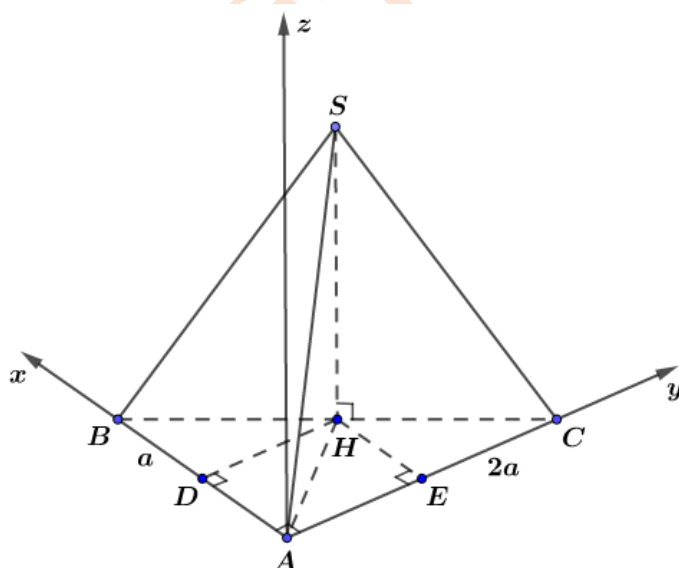
$$\Delta SHB \text{ vuông tại } H \text{ có } SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \frac{a\sqrt{17}}{3}.$$

$$\text{Mặt khác, } SD = \frac{HD}{\cos 60^\circ} = \frac{4a}{3} \Rightarrow AI = \frac{SD \cdot AB}{SB} = \frac{4a\sqrt{17}}{17}.$$

$$\Delta AIK \text{ vuông tại } K \text{ có } IK = \sqrt{AI^2 - AK^2} = \frac{2a\sqrt{255}}{85} \Rightarrow \tan \widehat{AIK} = \frac{AK}{IK} = \frac{\sqrt{51}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \frac{\sqrt{51}}{3}.$$

□ CÁCH 2:



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình trên, với: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;2a;0)$,

$$S\left(\frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}; \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right).$$

$$\text{Khi đó, } \overrightarrow{AS} = \left(\frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}; \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right), \overrightarrow{AB} = (a;0;0), \overrightarrow{BS} = \left(\frac{-a}{3}; \frac{2a}{3}; \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right), \overrightarrow{BC} = (-a;2a;0).$$

Đặt $\vec{n}_1 = \vec{n}_{(SAB)}$, $\vec{n}_2 = \vec{n}_{(SBC)}$. Ta có:

$$\Rightarrow \vec{n}_1 = [3\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}] = (0; 2a^2\sqrt{3}; -2a^2), \vec{n}_2 = [3\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}] = (-4a^2\sqrt{3}; -2a^2\sqrt{3}; 0).$$

$$\Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -12a^4, |\vec{n}_1| = 4a^2, |\vec{n}_2| = 2a^2\sqrt{15}$$

$$\text{Khi đó, } \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{12a^4}{4a^2 \cdot 2a^2 \sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

$$\text{Mà } \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{17}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{51}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \frac{\sqrt{51}}{3}.$$

Câu 71. (VDC) Cho $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AB = 2a$; $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

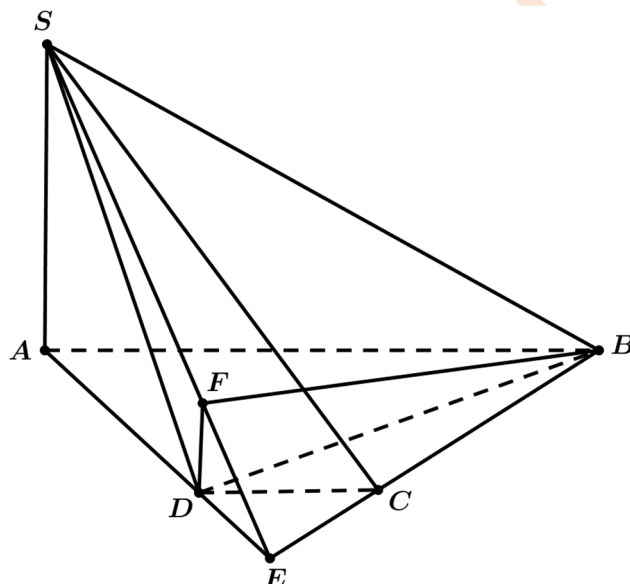
B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $E = AD \cap BC$, dễ thấy D là trung điểm của AE ; $AE = 2a$; $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = a\sqrt{7}$.
 $(SAD) \cap (SBC) = SE$.

Ta có $BD \perp AD$ (tính chất lục giác đều); mà $BD \perp SA$ nên $BD \perp SE$ (1).

Gọi F là hình chiếu vuông góc của D lên SE , $DF \perp SE$ (2).

Từ (1); (2) $\Rightarrow BF \perp SE$

Vậy $((SAD); (SBC)) = (\widehat{DF; BF})$

$$DB = \sqrt{AB^2 - AD^2} = a\sqrt{3}.$$

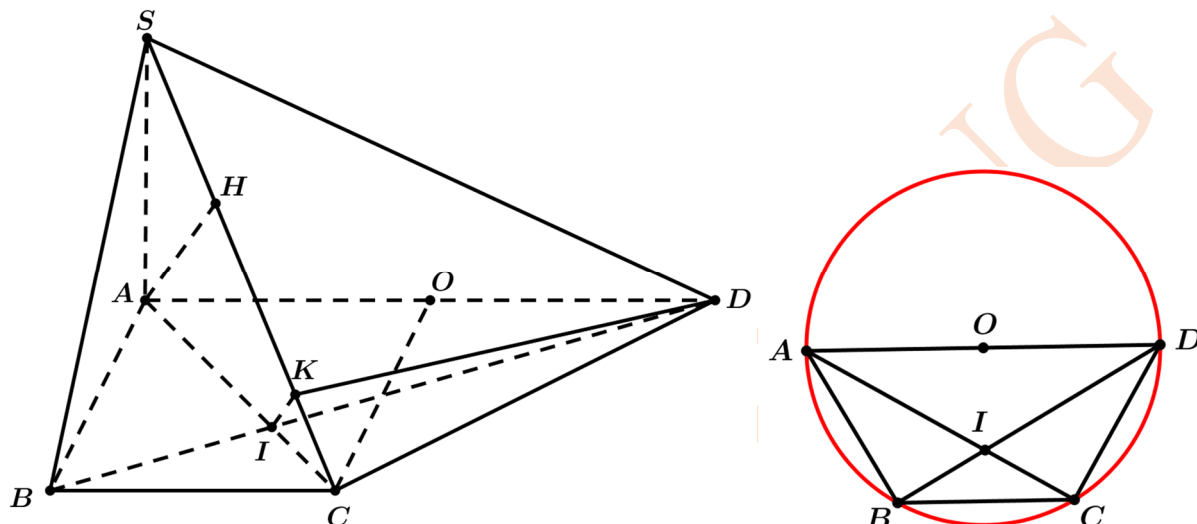
$$\triangle SAE \text{ đồng dạng với } \triangle DFE \Rightarrow \frac{DF}{SA} = \frac{DE}{SE} \Rightarrow DF = \frac{DE}{SE} \cdot SA = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

$$EF = \frac{DE \cdot AE}{SE} = \frac{2a}{\sqrt{7}}; BF = \sqrt{BE^2 - EF^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}.$$

$$\cos \widehat{BFD} = \frac{BF^2 + DF^2 - BD^2}{2BF \cdot DF} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\right)^2 - (a\sqrt{3})^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos(\widehat{(SAD);(SBC)}) = \cos(\widehat{DF;BF}) = \cos \widehat{BFD} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Cách 2



Có $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh là a , nên $AC = BD = SA = a\sqrt{3}$.

Có $BD \perp AB$, $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAB)$

Có $CD \perp AC$, $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC)$.

ΔSAC cân tại A , gọi H là trung điểm SC .

$\Rightarrow AH \perp SC$, mà $AH \perp CD$ (do $CD \perp (SAC)$).

$\Rightarrow AH \perp (SCD)$, mà $BD \perp (SAB)$.

Suy ra góc α giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc tạo bởi hai đường thẳng BD và AH .

$$\cos(AH, BD) = \left| \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BD}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD}|}{AH \cdot BD}, \quad AH = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Có } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \cos 120^\circ = -\frac{3a^2}{4}.$$

$$\Rightarrow \cos(AH, BD) = \frac{\left| -\frac{3a^2}{4} \right|}{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Cách 3

Có $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh là a , nên $AC = BD = SA = a\sqrt{3}$.

Có $BD \perp AB$, $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAB)$

Có $CD \perp AC$, $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC)$.

ΔSAC cân tại A , gọi H là trung điểm SC .

$\Rightarrow AH \perp SC$, mà $AH \perp CD$ (do $CD \perp (SAC)$).

$\Rightarrow AH \perp (SCD)$, mà $BD \perp (SAB)$.

Suy ra góc α giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc tạo bởi hai đường thẳng BD và AH .

Gọi $\{I\} = AC \cap BD$, vẽ $IK \parallel AH$, $K \in SC$, có $AH \perp (SCD)$.

$\Rightarrow IK \perp (SCD)$.

Có $(\widehat{BD, AH}) = (\widehat{IK, BD})$.

ΔDIK vuông tại K có $\cos \widehat{DIK} = \frac{IK}{ID}$.

Có $\frac{ID}{IB} = \frac{AD}{BC} = 2 \Rightarrow ID = \frac{2}{3}BD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Có $\frac{IK}{AH} = \frac{IC}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow IK = \frac{AH}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Suy ra $\cos \widehat{DIK} = \frac{IK}{ID} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{3}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

-----HẾT-----

Câu 72. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Biết rằng $AD = 2a, AB = BC = a, SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy, gọi I là trung điểm của AD , M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Điểm N thuộc cạnh CD sao cho tam giác MNI có diện tích bằng $\frac{a^2}{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MNI) và (SAC) .

A. 30° .

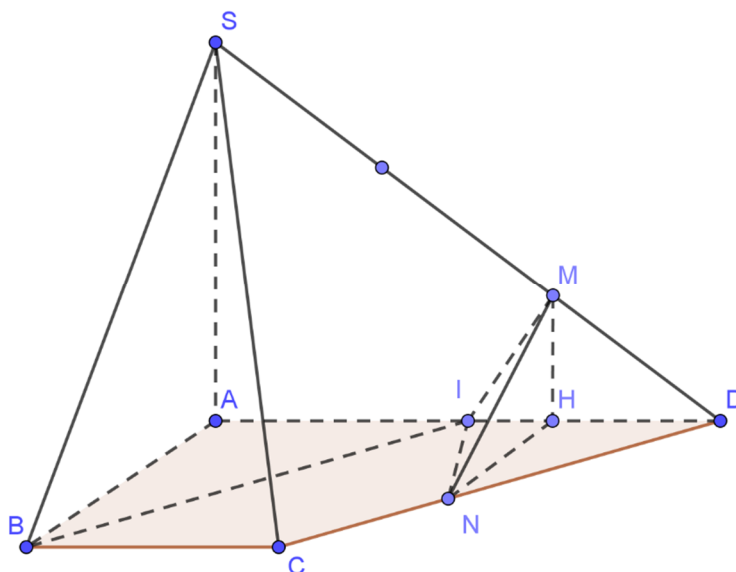
B. 45° .

C. 60° .

D. 70° .

Lời giải

Chọn B



Ta có $AC = a\sqrt{2}, CD = a\sqrt{2}, AD = 2a \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại $C \Rightarrow CD \perp AC$.

Mặt khác $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC)$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (MNI) và (SAC) , ta có $\cos \alpha = \sin(CD, (MNI))$

$$\text{Ta có } \frac{V_{D,MNI}}{V_{D,SAC}} = \frac{DM}{DS} \cdot \frac{DI}{DA} \cdot \frac{DN}{NC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{DN}{NC} \Rightarrow V_{D,MNI} = \frac{1}{6} \cdot \frac{DN}{NC} \cdot V_{D,SAC}$$

$$V_{S,ACD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD = \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{2a^3}{3}$$

Mặt khác có

$$V_{D,MNI} = \frac{1}{3} \cdot d(D, (MNI)) \cdot S_{MNI} = \frac{1}{3} \cdot d(D, (MNI)) \cdot \frac{a^2}{3}$$

$$\Rightarrow d(D, (MNI)) = \frac{DN}{DC} \cdot a$$

$$\text{Ta có } \sin(CD, (MNI)) = \frac{d(D, (MNI))}{DN} = \frac{\frac{DN}{DC} \cdot a}{DN} = \frac{a}{DC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Câu 73. (VDC) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC . Tính cotang góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) .

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

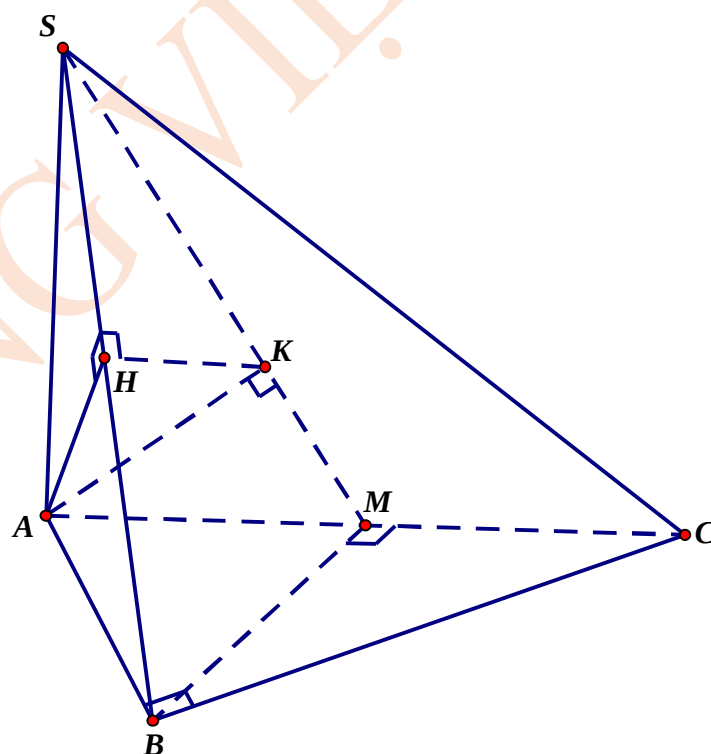
B. 1.

C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

D. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $AH \perp SB$ và $AK \perp SM$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại B và $BC = a$ cùng với $SA \perp (ABC)$ nên suy ra $BM \perp (SAC)$

và $BM = AM = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $BM \perp AK$.

Từ $BM \perp AK$ và $AK \perp SM$ suy ra $AK \perp (SBM) \Rightarrow AK \perp SB$.

Từ $AH \perp SB$ và $AK \perp SB$ ta có $(AHK) \perp SB$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) bằng hoặc bù với góc $\widehat{AHK}$.

Ta có:

$$AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$AK = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Từ $(AHK) \perp SB$ ta có $HK \perp SB$ nên $\triangle SHK \sim \triangle SMB$, do đó $\frac{HK}{MB} = \frac{SK}{SB}$.

Mặt khác

$$SK \cdot SM = SA^2 \Rightarrow SK = \frac{SA^2}{SM} = \frac{(a\sqrt{3})^2}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{3a\sqrt{14}}{7};$$

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a;$$

$$\text{Nên } \frac{HK}{MB} = \frac{SK}{SB} = \frac{3\sqrt{14}}{14} \Rightarrow HK = \frac{3\sqrt{14}}{14} \cdot MB = \frac{3\sqrt{14}}{14} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

Trong tam giác AHK ta có:

$$\cos \widehat{AHK} = \frac{AH^2 + HK^2 - AK^2}{2 \cdot AH \cdot HK} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{7}}{14}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{21}}{7}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{7}}{14}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Như vậy, góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) là α với $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

$$\text{Bởi vậy: } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 74. (VDC) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng $\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của CC' . Tính sin góc giữa hai mặt phẳng (ACB') và (BMA') .

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}.$

B. $\frac{\sqrt{21}}{5}.$

C. $\frac{1}{\sqrt{5}}.$

D. $\frac{2}{5}.$

Lời giải

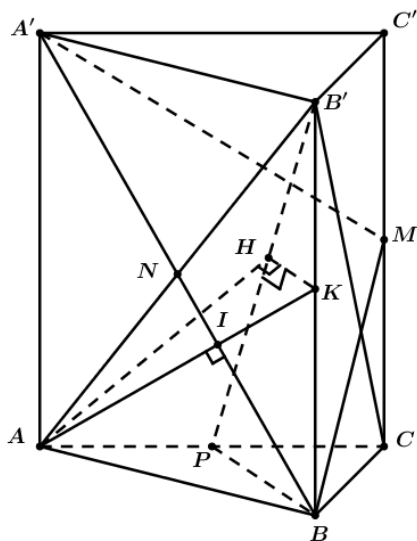
Chọn A

Gọi P là trung điểm AC , $N = AB' \cap A'B$, I là trung điểm của BN , $K = AI \cap BB'$, H là hình chiếu của K trên $B'P$. Do $AA' = \sqrt{3}$ và $AB = 1$ nên $\triangle ABN$ đều $\Rightarrow AI \perp A'B$ từ đó dễ dàng chứng minh được $AK \perp (BMA')$, hơn nữa $KH \perp (ACB')$ nên suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ACB') và (BMA') là $\widehat{AKH}$.

$$\text{Để thấy: } +) BK = \frac{1}{3}BB' = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AK = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad +) BP = \frac{\sqrt{3}}{2}, B'K = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow B'P = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Ta có } \triangle B'BP \sim \triangle B'HK \Rightarrow \frac{B'K}{B'P} = \frac{HK}{BP} \Rightarrow HK = \frac{B'K \cdot BP}{B'P} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{15}}.$$

$$\text{Trong tam giác } AHK: AH = \sqrt{AK^2 - HK^2} = \frac{4}{\sqrt{15}}, \sin \widehat{AKH} = \frac{AH}{AK} = \frac{\frac{4}{\sqrt{15}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$



Câu 75. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và tại B với $SA \perp (ABCD)$; $AB=5$; $BC=8$; $AD=3$. Góc hợp bởi đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Gọi α là góc tạo bởi mặt phẳng (SCB) và mặt phẳng (SCD) . Tính $\tan \alpha$.

A. $\frac{89\sqrt{2}}{74}$.

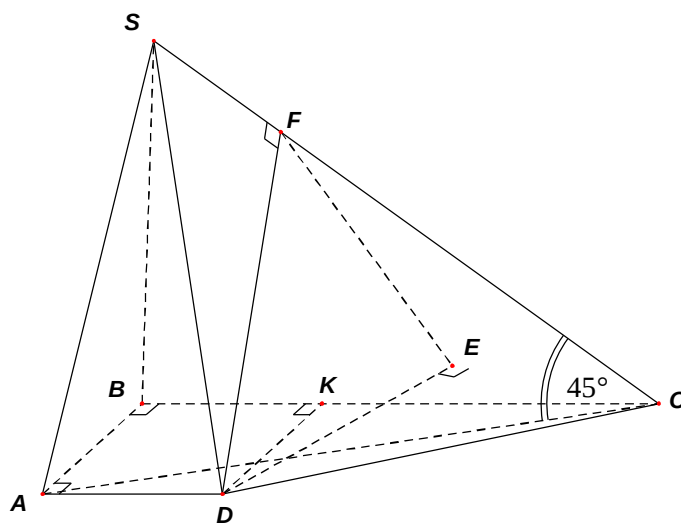
B. $\frac{89\sqrt{2}}{37}$.

C. $\frac{74\sqrt{2}}{89}$.

D. $\frac{37\sqrt{2}}{89}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi E là hình chiếu vuông góc của D trên (SBC) .

Kẻ $DF \perp SC$ tại $F \Rightarrow EF \perp SC$ tại F .

$$\Rightarrow \alpha = (\widehat{EF; DF}) = \widehat{DFE}.$$

$$SA = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{89}; SC = SA\sqrt{2} = \sqrt{178}.$$

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 7\sqrt{2}; CD = \sqrt{DK^2 + KC^2} = 5\sqrt{2}.$$

$$+ \text{Ta có } AD \parallel (SBC) \text{ nên } d_{(D, (SBC))} = d_{(A, (SBC))} = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{5\sqrt{89}}{\sqrt{114}} = DE.$$

$$+ \cos \widehat{SDC} = \frac{SD^2 + DC^2 - SC^2}{2SD \cdot DC} = \frac{-3}{14} \Rightarrow \sin \widehat{SDC} = \frac{\sqrt{187}}{14}.$$

$$+ DF \cdot SC = SD \cdot DC \cdot \sin \widehat{SDC} \Rightarrow DF = \frac{SD \cdot DC \cdot \sin \widehat{SDC}}{SC} = \frac{5\sqrt{187}}{\sqrt{178}}.$$

$$+ EF = \sqrt{DF^2 - DE^2} = \frac{5.37}{\sqrt{5073}}.$$

$$+ \tan \alpha = \frac{DE}{EF} = \frac{5\sqrt{89}}{\sqrt{114}} \cdot \frac{\sqrt{5073}}{5.37} = \frac{89}{37\sqrt{2}} = \frac{89\sqrt{2}}{74}.$$

Câu 76. (VDC) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 2BC$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Hình chiếu của A trên các đoạn SB, SC lần lượt là M, N . Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) .

A. 45° .

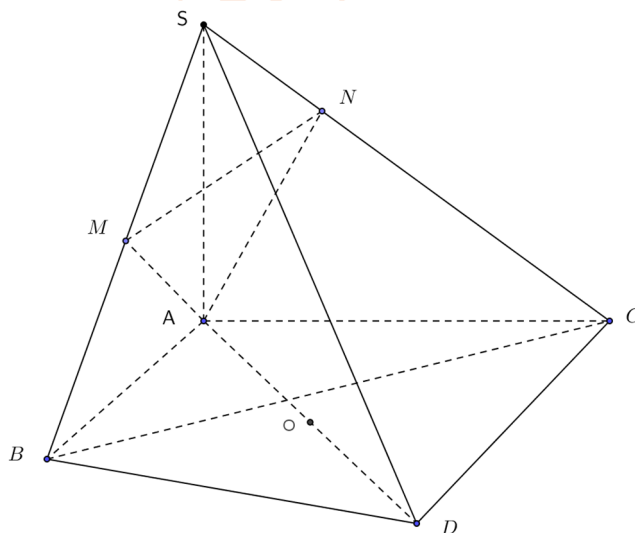
B. 60° .

C. 15° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn D



Kẻ đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$.

Khi đó $\begin{cases} BD \perp AB \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAB)$ hay $BD \perp AM$ và $AM \perp SB$, từ đó ta có

$$AM \perp (SBD) \Rightarrow AM \perp SD.$$

Chứng minh tương tự ta có $AN \perp SD$. Từ đó suy ra $SD \perp (AMN)$, mà $SA \perp (ABC)$. Suy ra $((ABC), (AMN)) = (SA, SD) = \widehat{DSA}$.

Ta có $BC = 2R \sin A = AD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = 2BC = AD\sqrt{3}$. Vậy

$$\tan \widehat{ASD} = \frac{AD}{SA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASD} = 30^\circ.$$

Câu 77. (VDC) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$ và M là điểm thuộc OI sao cho $MO = \frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó, cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.

B. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

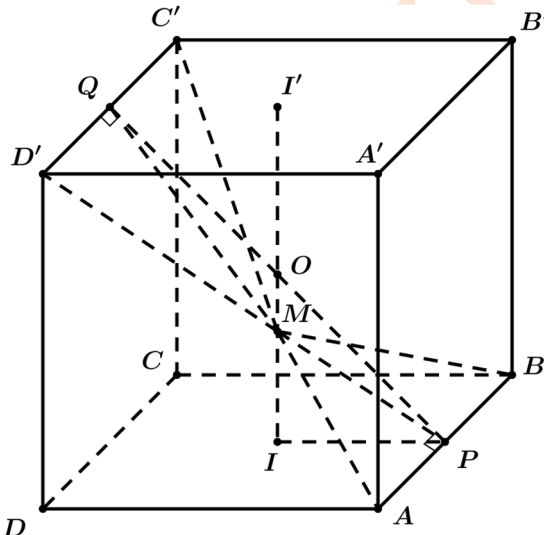
C. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$.

D. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) .

Giả sử hình lập phương cạnh bằng 1

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AB và $C'D'$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MP \subset (MAB): MP \perp AB \\ MQ \subset (MC'D'): MQ \perp C'D' \Rightarrow \alpha = ((MAB), (MC'D')) = (MP, MQ) \\ AB \parallel C'D' \end{cases}$$

$$\text{Tam giác } MIP \text{ vuông tại } I \text{ có: } IP = \frac{1}{2}, MI = \frac{2}{3}OI = \frac{1}{3} \Rightarrow MP = \sqrt{MI^2 + IP^2} = \frac{\sqrt{13}}{6}$$

Gọi I' là tâm hình vuông $A'B'C'D'$.

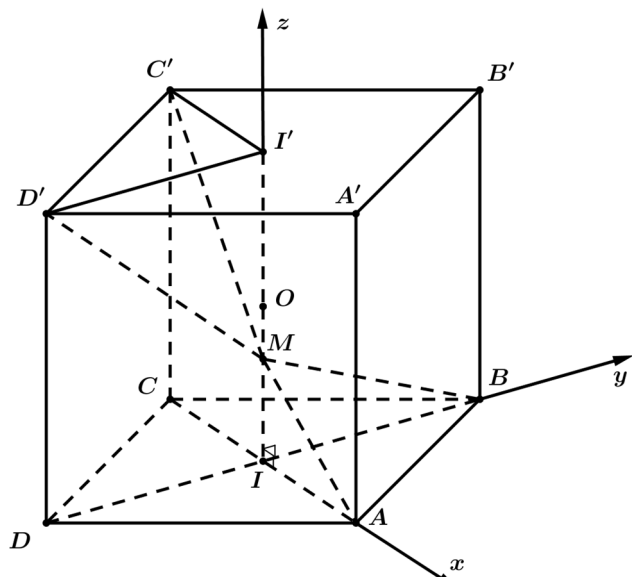
$$\text{Tam giác } MQI' \text{ vuông tại } I' \Rightarrow MQ = \sqrt{MI'^2 + QI'^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5}{6}$$

Xét tam giác MPQ có $QP = \sqrt{2}$, $MQ = \frac{5}{6}$, $MP = \frac{\sqrt{13}}{6}$ nên áp dụng định lý Côsin ta được:

$$\cos \widehat{PMQ} = \frac{MQ^2 + MP^2 - QP^2}{2MQ \cdot MP} = -\frac{17\sqrt{13}}{65}$$

$$\text{Suy ra } \cos \alpha = |\cos \widehat{PMQ}| = \frac{17\sqrt{13}}{65}.$$

Cách 2 (Gắn hệ trục tọa độ)



Giả sử hình lập phương có cạnh bằng 1

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với

$$I(0;0;0), A \in Ix: A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B \in Iy: B\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), O \in Iz: O\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Khi đó } M\left(0; 0; \frac{1}{3}\right), C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 1\right), D'\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$$

$$+) \text{ Xét mp}(MAB) \text{ có } \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), \overrightarrow{MA} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{1}{3}\right)$$

Chọn $\vec{u}_1 = (-1; 1; 0)$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$; $\vec{u}_2 = (3\sqrt{2}; 0; -2)$ cùng phương với $\overrightarrow{MA}$

$$\Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-2; -2; -3\sqrt{2}) \Rightarrow \vec{n}_1 = (2; 2; 3\sqrt{2}) \text{ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng } (MAB).$$

$$+) \text{ Xét mp}(MC'D') \text{ có } \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MC'} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{2}{3}\right)$$

Chọn $\vec{u}_3 = (-3\sqrt{2}; 0; 4)$ cùng phương với $\overrightarrow{MC'}$

$$\Rightarrow \vec{n}_2 = [\vec{u}_1, \vec{u}_3] = (4; 4; 3\sqrt{2}) \text{ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng } (MC'D')$$

$$+) \text{ Ta có } \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{17\sqrt{3}}{65}.$$

Vậy cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

Câu 78. (VDC) Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC vuông tại B , $AB=1, BC=\sqrt{3}$, ΔSAC đều, mặt phẳng (SAC) vuông với đáy. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Giá trị của $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{65}}{65}$.

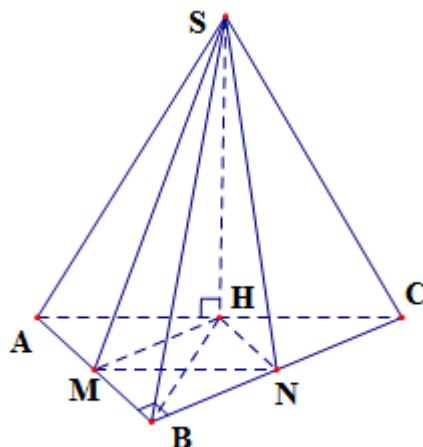
B. $\frac{\sqrt{65}}{20}$.

C. $\frac{\sqrt{65}}{10}$.

D. $-\frac{\sqrt{65}}{65}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB, BC .

$$(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp HM, SH \perp HN$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } B \Rightarrow HM \perp HN$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } B \Rightarrow AC = 2 \Rightarrow SH = \sqrt{3}$$

$$HM = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}; HN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$$

Chọn hệ trục tọa độ như sau: $H(0;0;0); S(0;0;\sqrt{3}); M(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0); N(\frac{1}{2};0;0), B(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0)$

$$\overrightarrow{BM} = \left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right) \quad \overrightarrow{BN} = \left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\overrightarrow{BS} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right) \quad \overrightarrow{BS} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right)$$

$$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BS}] = \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right); \vec{n}_2 = [\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BS}] = \left(-\frac{3}{2}; 0; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{\left| -\frac{3}{16} \right|}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{16}} \cdot \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{16}}} = \frac{\sqrt{65}}{65}$$

Câu 79. (VDC) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn BG (với G là trọng tâm tam giác ABC). Tính cosin của góc φ giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ABB'A')$.

A. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{95}}$.

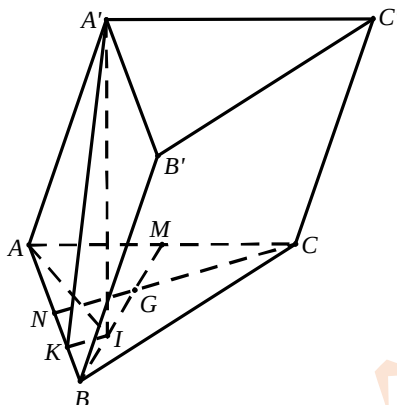
B. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{165}}$.

C. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{134}}$.

D. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{126}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB . Gọi I là trung điểm của BG .

Qua I kẻ đường thẳng song song với CN cắt AB tại K thì $IK \perp AB$ (do $CN \perp AB$) (1).

Vì $A'I \perp (ABC)$ nên $A'I \perp AB$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (A'KI)$. Do đó $\varphi = \widehat{A'KI}$.

$$\text{Vì } I \text{ là trung điểm } BG \text{ nên suy ra } IK = \frac{1}{2}GN = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}CN = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4\sqrt{3}}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } AIM \text{ ta có } AI^2 = AM^2 + MI^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{12}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } A'AI \text{ ta có } A'I^2 = A'A^2 - AI^2 = (2a)^2 - \frac{7a^2}{12} = \frac{41a^2}{12}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } A'KI \text{ ta có } A'K^2 = A'I^2 + KI^2 = \frac{41a^2}{12} + \left(\frac{a}{4\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{165a^2}{48}.$$

$$\text{Suy ra } A'K = \frac{a\sqrt{165}}{4\sqrt{3}}. \text{ Từ đó ta có } \cos \varphi = \frac{KI}{A'K} = \frac{\frac{a}{4\sqrt{3}}}{\frac{a\sqrt{165}}{4\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{165}}.$$

Câu 80. (VDC) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Tính $\tan \alpha$

A. $\sqrt{2}$.

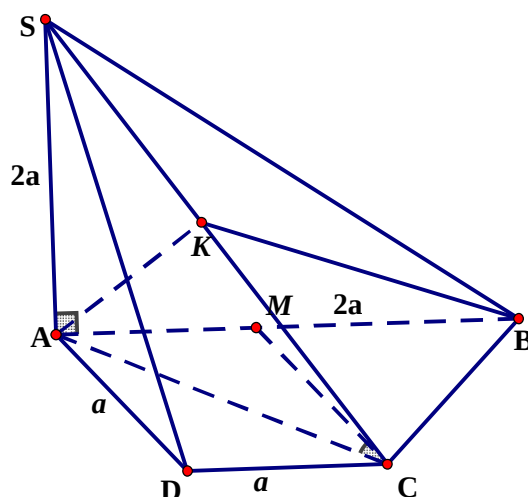
B. $2\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AB , K là hình chiếu vuông góc của A lên SC

Ta có $AMCD$ là hình vuông nên $CM = a = \frac{1}{2} AB$ nên tam giác ABC vuông tại C

Ta có $\left. \begin{array}{l} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp (SBC)$

Ta có SKB là hình chiếu của tam giác SAB lên (SBC)

Theo công thức diện tích hình chiếu ta có

$$\cos \alpha = \frac{S_{SKB}}{S_{SAB}}, \quad S_{SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot AB = 2a^2, \quad S_{SKB} = \frac{1}{2} SK \cdot BC$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$$

$$SK \cdot SC = SA^2 \Rightarrow SK = \frac{4a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{4a}{\sqrt{5}}$$

$$S_{SKB} = \frac{1}{2} SK \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{4a}{\sqrt{5}} \cdot a\sqrt{2} = \frac{2a^2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \alpha = \frac{S_{SKB}}{S_{SAB}} = \frac{\frac{2a^2}{\sqrt{5}}}{2a^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5 \Rightarrow \tan \alpha = 2$$