

Câu 1 (2,0 điểm).

Cho phương trình $8x^2 + 42x + 55 = \frac{m}{4x^2 + 23x + 33}$

- a) Giải phương trình khi $m = 1$.
b) Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 2 (3,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O . Đường thẳng d quay quanh O , cắt hai cạnh AD và BC lần lượt ở E và F (không trùng với các đỉnh của hình vuông). Qua E và F lần lượt kẻ đường thẳng song song với BD và AC chúng cắt nhau tại I . Kẻ IH vuông góc với EF tại H . Chứng minh rằng:

- a) Điểm I chạy trên đoạn AB .
b) Điểm H thuộc đường tròn cố định và đường thẳng IH đi qua một điểm cố định.

Câu 3 (1,0 điểm). Cho hai số $2a > b > 0$. Chứng minh rằng $2a + \frac{64}{(2a-b)(b+3)^2} \geq 5$.

Câu 4 (2,0 điểm).

- a) Cho tập $X = \{1, 2, 3, \dots, 2020\}$. Chứng minh rằng trong số 1011 phân tử bất kì của tập X luôn có hai phân tử nguyên tố cùng nhau.
b) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn $5^n - 1$ chia hết cho n .

Câu 5 (2,0 điểm). Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có các nghiệm x_1, x_2 .

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n, n \in \mathbb{N}$.

- a) Chứng minh: $aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$.

- b) Áp dụng tính $A = (1 + \sqrt{3})^8 + (1 - \sqrt{3})^8$

----- Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN TOÁN 10

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (2điểm)	a) Khi $m = 1$, ta có phương trình $8x^2 + 42x + 55 = \frac{1}{4x^2 + 23x + 33}$ ĐK $x \neq -3; x \neq -\frac{11}{4}$ $PT \Leftrightarrow (2x+5)(4x+11)(4x+11)(x+3) = 1$ $\Leftrightarrow (2x+5)(x+3)(4x+11)^2 = 1$ $\Leftrightarrow (4x+10)(4x+12)(4x+11)^2 = 8$ Đặt $(4x+3)^2 = t, (t \geq 0)$, phương trình trở thành $t^2 - t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$, đổi chiều đk, ta có $(4x+11)^2 = \frac{1+\sqrt{33}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \left(-11 \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{2}} \right)$	1 điểm
	b) Ta có $(4x+10)(4x+12)(4x+11)^2 = 8m \Rightarrow t^2 - t - 8m = 0 \quad (1)$ với $t = (4x+11)^2, t \geq 0$. PT đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi PT (1) có hai nghiệm $\text{đương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_t > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+32m > 0 \\ 1 > 0 \\ -8m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{32} < m < 0.$	1 điểm

Câu 2 (3điểm)	a) Dễ dàng chứng minh được $\triangle EFI$ vuông ở I, và IO là trung tuyến thuộc cạnh huyền EF, do đó $OE = OI$ nên O nằm trên trung trực của EI Mặt khác $OA \perp EI$ nên OA là trung trực của EI. Nên $\triangle AEI$ vuông cân tại A Suy ra $\widehat{AIE} = 45^\circ$. Tương tự $\widehat{BIF} = 45^\circ$. Vậy $\widehat{AIB} = \widehat{AIE} + \widehat{EIF} + \widehat{BIF} = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ suy ra I, A, B thẳng hàng hay $I \in AB$ (đpcm).	1 điểm
	b) Ta có: $AEHI$ và $BFHI$ là các tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{AHI} = \widehat{AEI} = 45^\circ, \widehat{IHB} = \widehat{IFB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AHB} = 90^\circ.$ Vậy $H \in$ đường tròn đường kính AB. (đpcm). Gọi HI cắt đường tròn đường kính AB ở K, ta có $\widehat{AHK} = \widehat{BHK} = 45^\circ$ nên K là trung điểm cung $\widehat{AB}$ suy ra K cố định. (đpcm).	2 điểm
Câu 3 1điểm	Theo BĐT AM-GM: $(2a - b)(b + 3)(b + 3) = \frac{1}{2}(4a - 2b)(b + 3)(b + 3)$ $\leq \frac{1}{2} \left(\frac{4a - 2b + b + 3 + b + 3}{3} \right)^3 = \frac{4(2a + 3)^3}{27} \Rightarrow \frac{64}{(2a - b)(b + 3)^2} \geq 2 \cdot \frac{6^3}{(2a + 3)^3}$ $\Rightarrow 2a + \frac{64}{(2a - b)(b + 3)^2} \geq 2 \left(a + \frac{6^3}{(2a + 3)^3} \right). \quad (1)$ Theo BĐT AM-GM ta có	1 điểm

	$\frac{2a+3}{6} + \frac{2a+3}{6} + \frac{2a+3}{6} + \frac{6^3}{(2a+3)^3} \geq 4 \Rightarrow a + \frac{6^3}{(2a+3)^3} \geq 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = \frac{3}{2}, b = 1$.	
Câu 4 2điểm	a) Chia tập X thành các cặp $(1,2), (3,4), \dots, (2019,2020)$. Có tất cả 1010 cặp và 1011 phần tử nên theo nguyên tắc Diichlet, tồn tại hai phần tử thuộc cùng một cặp. Hai phần tử này nguyên tố cùng nhau. (đpcm)	1 điểm
	b) Xây dựng dãy $(x_n): x_1 = 1, x_{n+1} = 5^{x_n} - 1$. Ta chứng minh (x_n) là dãy số nguyên dương tăng và mọi số hạng của dãy đều thỏa mãn đk bài toán. + Thật vậy (x_n) là dãy số nguyên dương. Áp dụng BĐT Becnuli ta có $x_{n+1} = 5^{x_n} - 1 \geq 1 + 4.x_n - 1 = 4x_n > x_n$ Vậy (x_n) là dãy số tăng. (1) + Dùng quy nạp chứng minh $5^{x_n} - 1 : x_n$ (*) Với $n=1$, ta có $5^{x_1} - 1 : x_1$ (đúng) Giả sử (*) đúng đến n, tức là $5^{x_n} - 1 : x_n \Rightarrow x_{n+1} = 5^{x_n} - 1 = k.x_n, (k \in \mathbb{N}^*)$ Ta có $5^{x_{n+1}} - 1 = 5^{kx_n} - 1 : (5^{x_n} - 1) \Rightarrow 5^{x_{n+1}} - 1 : x_{n+1}$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra $5^{x_n} - 1 : x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (2). Từ (1) và (2) suy ra đpcm.	1 điểm
Câu 5 2điểm	a) ta có $ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \quad (1), ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \quad (2)$ Nhân hai vế của (1) với x_1^{n-2} và nhân hai vế của (2) với x_2^{n-2} rồi cộng theo vế ta đc đpcm.	1 điểm
	b) Ta có $1 \pm \sqrt{3}$ là nghiệm của PT $x^2 - 2x - 2 = 0$ nên $S_n - 2S_{n-1} - 2S_{n-2} = 0, S_0 = 2, S_1 = 2 \Rightarrow S_2 = 2S_1 + 2S_0 = 8, \dots \Rightarrow S_8 = 3104$. Vậy $A=31044$.	1 điểm