

CHUYÊN ĐỀ

BÀI GIẢNG CẤP SỐ NHÂN

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm vững khái niệm cấp số nhân
- + Nắm được tính chất 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân
- + Nắm được công thức tổng quát, công thức tính tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân

❖ Kỹ năng

- + Nhận biết được một cấp số nhân dựa vào định nghĩa
- + Tìm được yếu tố còn lại khi biết 3 trong 5 yếu tố: số hạng đầu, số hạng thứ k , tổng n số hạng đầu tiên, công bội, số số hạng của cấp số nhân
- + Áp dụng tính chất cấp số nhân vào các bài toán giải phương trình, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức
- + ứng dụng vào các bài toán thực tế

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q , ta có công thức truy hồi $u_{n+1} = u_n \cdot q$ với $n \in \mathbb{N}^*$

Đặc biệt:

- Khi $q = 0$, cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, \dots, 0, \dots$
- Khi $q = 1$, cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q , cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

Số hạng tổng quát

Định lý 1. Nếu cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2$$

Tính chất

Định lý 2. Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \text{ với } k \geq 2$$

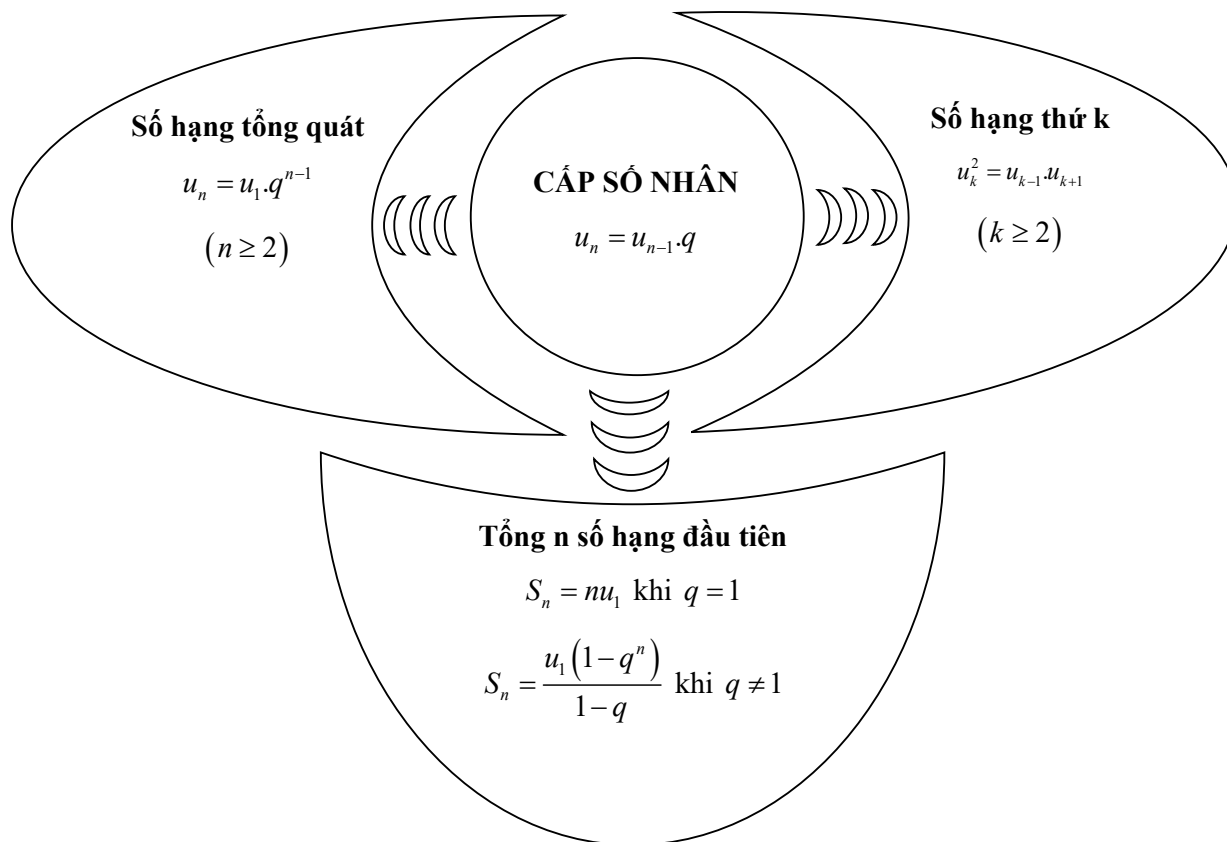
Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Định lý 3. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$

$$\text{Đặt } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n. \text{ Khi đó } S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Chú ý: Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là $u_1, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$ khi đó $S_n = nu_1$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh một dãy (u_n) là cấp số nhân

Phương pháp giải

Chứng minh $u_{n+1} = u_n \cdot q, \forall n \geq 1$ trong đó q là một số không đổi

Nếu $u_n \neq 0, \forall n \geq \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = k$

* k là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = k$

* k phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số nhân

Để chứng minh dãy (u_n) không phải là cấp số nhân, ta chỉ cần chỉ ra ba số hạng liên tiếp không

tạo thành cấp số nhân, chẳng hạn $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$

Để chứng minh a, b, c theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân, ta chứng minh $ac = b^2$ hoặc $|b| = \sqrt{ac}$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Xét trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Tìm công bội của cấp số nhân đó

a) $u_n = (-4)^{2n+1}$

b) $u_n = (-7)^n \cdot 5^{3n-1}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-4)^{2n+3}}{(-4)^{2n+1}} = (-4)^2 = 16$ là số không đổi nên (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 16$

b) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-7)^{n+1} \cdot 5^{3(n+1)-1}}{(-7)^n \cdot 5^{3n-1}} = -7 \cdot 5^3 = -875$ không đổi nên (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -875$

Ví dụ 2. Xét trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Tìm công bội của cấp số nhân đó

$$\text{a) } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{9}{u_n}}{\frac{9}{u_{n-1}}} = \frac{u_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = u_{n-1}, \forall n \geq 2$$

$$\text{Do đó có } \begin{cases} u_1 = u_3 = u_5 = \dots = u_{2n+1} \dots & (1) \\ u_2 = u_4 = u_6 = \dots = u_{2n} = \dots & (2) \end{cases}$$

$$\text{Theo đề bài ta có } u_1 = 3 \Rightarrow u_2 = \frac{9}{u_1} = 3 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = \dots = u_{2n} = u_{2n+1} \dots$

Do đó (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 1$

$$\text{b) Ta có } u_2 = u_1^2 = 4, u_3 = u_2^2 = 16, u_4 = u_3^2 = 256$$

$$\text{suy ra } \frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ và } \frac{u_4}{u_3} = \frac{256}{16} = 16 \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3}$$

Do đó (u_n) không là cấp số nhân

Ví dụ 3. Cho (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 0; u_1 \neq 0$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = u_n \cdot u_{2n}$ cũng là một cấp số nhân

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{u_n \cdot u_{2n}}{u_{n-1} \cdot u_{2(n-1)}} = \frac{u_1 \cdot q^{n-1} \cdot u_1 \cdot q^{2n-1}}{u_1 \cdot q^{n-2} \cdot u_1 \cdot q^{2n-3}} = q^3 \text{ nên } (v_n) \text{ là cấp số nhân với công bội là } q^3$$

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó

Hướng dẫn giải

Ta có $v_n = u_n + 3 \quad (1) \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 3 \quad (2)$

Theo đề ra $u_{n+1} = 4u_n + 9 \Rightarrow u_{n+1} + 3 = 4(u_n + 3) \quad (3)$

Thay (1) và (2) vào (3) ta được $v_{n+1} = 4v_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 4$ (không đổi)

Suy ra (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 5$

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$. B. $u_{n+1} = nu_n$. C. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$. D. $u_{n+1} = u_{n+1} - 3$.

Câu 2: Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$. B. $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$. C. $u_n = n + \frac{1}{3}$. D. $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.

Câu 3: Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^3 \end{cases}$. B. $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. C. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 6u_n \end{cases}$. D. $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

Câu 4: Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{3}n + 2$. B. $u_n = n^2 + 2$. C. $u_n = 3^{2n}$. D. $u_n = n^2 + 1$.

Câu 5: Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{3^n} + 4$. B. $u_n = \frac{1}{5^{n-2}}$. C. $u_n = 2n + \frac{1}{3}$. D. $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.

Câu 6: Dãy số nào trong các dãy số sau vừa là một cấp số cộng, vừa là một cấp số nhân?

A. $1; -1; -1; -1; -1; \dots$ B. $1; 0; 0; 0; 0; \dots$ C. $3; 2; 1; 0; -1; \dots$ D. $1; 1; 1; 1; 1; \dots$

Câu 7: Cho cấp số nhân có $u_1 < 0$ và công bội $q < 0$. Trong các nhận xét sau, nhận xét nào đúng?

A. $u_n < 0$ với mọi n . B. $u_n < 0$ với mọi n lẻ và $u_n > 0$ với mọi n chẵn.
C. $u_n > 0$ với mọi n . D. $u_n < 0$ với mọi n chẵn và $u_n > 0$ với mọi n lẻ.

Câu 8: Hỏi $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}$ là bốn số hạng đầu của dãy số nào sau đây?

A. $u_n = \frac{1}{2n}$. B. $u_n = \frac{1}{2n+1}$. C. $u_n = \frac{1}{2^n}$. D. $u_n = \frac{1}{n^2}$.

Câu 9: Dãy số nào dưới đây **không** là cấp số nhân?

A. $-1; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{25}; -\frac{1}{125}$. B. $-\frac{1}{8}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 1$.
C. $\sqrt[4]{2}; 2\sqrt[4]{2}; 4\sqrt[4]{2}; 8\sqrt[4]{2}$. D. $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}$.

Câu 10: Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân?

- A. $u_n = 2^n + 1$. B. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n \end{cases}$. C. $u_n = \frac{2n-3}{5}$. D. $u_n = \frac{n-1}{n+1}$.

Câu 11: Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân?

- A. $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u_{n+1} = -\sqrt{2}u_n \end{cases}$. C. $u_n = n^2 + 1$. D. $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = u_{n-1}u_n \end{cases}$.

Câu 12: Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân?

- A. $u_n = \frac{1}{3^n + 1}$. B. $u_n = -\frac{1}{3^{n-2}}$. C. $u_n = \frac{1}{3} - 2n$. D. $u_n = n^3 + 1$.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- A. $u_1; u_3; u_5; \dots$ B. $3u_1; 3u_2; 3u_3; \dots$ C. $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots$ D. $u_1 + 1; u_2 + 1; u_3 + 1; \dots$

Câu 14: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 2; u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số đã cho là biểu thức có dạng $a.2^n + bn + c$, với a, b, c là các số nguyên với $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$. Khi đó tổng $a + b + c$ có giá trị bằng

- A. -4. B. 4. C. -3. D. 3.

Câu 15: Cho dãy số (u_n) có các số hạng đầu là 5, 10, 15, 20, 25, ... Số hạng tổng quát của dãy là

- A. $u_n = 5(n-1)$. B. $u_n = 5n$. C. $u_n = 5 + n$. D. $u_n = 5n + 1$.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN DẠNG 1

1-C	2-B	3-C	4-C	5-B	6-D	7-B	8-C	9-B	10-B
11-B	12-B	13-D	14-C	15-B					

Câu 1:

Ta có $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = -5 \Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = -5$

Câu 2:

Xét $u_n = \frac{1}{3^{n-2}} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{3^{n-1}}$

Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3^{n-1}} : \frac{1}{3^{n-2}} = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{3}$

Câu 3:

Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 6$ nên (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 6$

Câu 4:

Vì $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{3^{2n}}{3^{2n-2}} = 3^2 = 9$ nên $u_n = 3^{2n}$ là cấp số nhân có công bội $q = 9$

Câu 5:

Vì $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\frac{1}{5^{n-2}}}{\frac{1}{5^{n-3}}} = \frac{1}{5}$ nên $u_n = \frac{1}{5^{n-2}}$ là cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{5}$

Câu 6:

Dãy số $1; 1; 1; 1; 1; \dots$ vừa là cấp số cộng công sai là 0, số hạng đầu là 1 vừa là cấp số nhân số hạng đầu là 1, công bội là 1

Câu 7:

Vì $u_1 < 0; q < 0 \Rightarrow u_2 = u_1 \cdot q > 0; u_3 = u_1 \cdot q^2 < 0$

Hay $u_{2n} = u_1 \cdot q^{2n-1} > 0; u_{2n+1} = u_1 \cdot q^{2n} < 0$

Câu 8:

Xét cấp số nhân (u_n) với $u_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

Ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$

Câu 9:

Dãy $-\frac{1}{8}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 1$ có $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \neq -\frac{1}{4} \cdot 1$ nên không là cấp số nhân

Câu 10:

Dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n \end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}$ là cấp số nhân với $u_1 = 2, q = \frac{1}{3}$

Câu 11:

Dãy số $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u_{n+1} = -\sqrt{2}u_n \end{cases}$ có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\sqrt{2}$ nên là một cấp số nhân với công bội là $q = -\sqrt{2}$

Câu 12:

Ta có $u_n = -\frac{1}{3^{n-2}} \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(-\frac{1}{3^{n-2}}\right) : \left(-\frac{1}{3^{n-3}}\right) = \frac{1}{3}$

Suy ra $u_n = -\frac{1}{3^{n-2}}$ là một cấp số nhân với công bội là $q = \frac{1}{3}$

Câu 13:

Dãy $u_1; u_3; u_5; \dots$ là cấp số nhân công bội q^2

Dãy $3u_1; 3u_2; 3u_3; \dots$ là cấp số nhân công bội $3q$

Dãy $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots$ là cấp số nhân công bội $\frac{1}{q}$

Dãy $u_1 + 1; u_2 + 1; u_3 + 1; \dots$ không phải là cấp số nhân

Câu 14:

Ta có $u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1 \Leftrightarrow u_n + 3n + 5 = 2[u_{n-1} + 3(n-1) + 5]$ với $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$

Đặt $v_n = u_n + 3n + 5$, ta có $v_n = 2v_{n-1}$ với $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$

Như vậy (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 2$ và $v_1 = 10$

Do đó $v_n = 10.2^{n-1} = 5.2^n$

Suy ra $u_n + 3n + 5 = 5.2^n$ hay $u_n = 5.2^n - 3n - 5$ với $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$

Vậy $a = 5, b = -3, c = -5$ nên $a + b + c = 5 + (-3) + (-5) = -3$

Câu 15:

Ta có $u_1 = 5; u_2 = 10 = 5.2; u_3 = 15 = 5.3; \dots \Rightarrow u_n = 5.n$

Dạng 2: Xác định số hạng đầu, số hạng thứ k, công bội, tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

 Phương pháp giải

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_1 . Giải hệ phương trình này tìm được q và u_1

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức $u_n = u_1.q^{n-1} (n \geq 2)$

Tổng của n số hạng đầu tiên

$$\begin{cases} S_n = nu_1 & \text{khi } q = 1 \\ S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{khi } q \neq 1 \end{cases}$$

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết

$$\text{a) } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có
$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^4) = 51 \quad (*) \\ u_1 q(1 + q^4) = 102 \quad (**) \end{cases}$$

Chia từng vế của (**) cho (*) ta được
$$\frac{u_1 q(1 + q^4)}{u_1(1 + q^4)} = \frac{102}{51}$$

$$\Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{51}{1 + q^4} = \frac{51}{17} = 3$$

Vậy $u_1 = 3$ và $q = 2$

b)
$$\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ u_1 \frac{1 - q^3}{1 - q} = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \quad (*) \\ u_1(1 + q + q^2) = 43 \quad (**) \end{cases}$$

chia từng vế của (*) cho (**) ta được
$$\frac{u_1 q}{u_1(1 + q + q^2)} = \frac{6}{43}$$

$$\Leftrightarrow 43q = 6(1 + q + q^2) \Leftrightarrow 6q^2 - 37q + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 6 \\ q = \frac{1}{6} \end{cases}$$

- Với $q = 6 \Rightarrow u_1 = 1$
- Với $q = \frac{1}{6} \Rightarrow u_1 = 36$

Vậy
$$\begin{cases} q = 6 \\ u_1 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} q = \frac{1}{6} \\ u_1 = 36 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội nguyên và các số hạng thỏa

mãn
$$\begin{cases} u_2 + u_4 = 10 \\ u_1 + u_3 + u_5 = -21 \end{cases}$$

- Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân
- Tổng của bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 1365?
- Số 4096 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

a) Ta có

$$\begin{cases} u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^3 = 10 \\ u_1 + u_1 q^2 + u_1 q^4 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q + q^3) = 10 \\ u_1(1 + q^2 + q^4) = -21 \end{cases} \Rightarrow \frac{1 + q^2 + q^4}{q + q^3} = \frac{-21}{10}$$

$$\Leftrightarrow 10q^4 + 21q^3 + 10q^2 + 21q + 10 = 0 \Leftrightarrow 10\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + 21\left(q + \frac{1}{q}\right) + 10 = 0$$

Đặt $q + \frac{1}{q} = t \Rightarrow t^2 - 2 = q^2 + \frac{1}{q^2}$. Ta có phương trình

Sử dụng công thức

$$u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$$

Đưa hệ phương trình về hệ phương trình hai ẩn q và u_1

Sử dụng công thức

$$u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$$

Và

$$S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1$$

Đưa hệ phương trình về hệ phương trình hai ẩn q và u_1

Sử dụng công thức

$$u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$$

Đưa hệ phương trình về hệ phương trình hai ẩn q và u_1

$$10(t^2 - 2) + 21t + 10 = 0 \Leftrightarrow 10t^2 + 21t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-5}{2} \\ t = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } t = -\frac{5}{2} \Rightarrow q + \frac{1}{q} = -\frac{5}{2} \Rightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = -2 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Mà q nguyên nên $q = -2$

$$\bullet \text{ Với } t = \frac{2}{5} \Rightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5q^2 - 2q + 5 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{Ta có } q = -2 \Rightarrow u_1 = \frac{10}{q + q^3} = -1$$

$$\text{Vậy } q = -2; u_1 = -1$$

$$\text{b) Ta có } S_n = 1365 \Leftrightarrow u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1365$$

$$(-1) \cdot \frac{1 - (-2)^n}{1 + 2} = 1365 \Leftrightarrow 2^n = 4096 \Rightarrow n = 12$$

Vậy tổng của 12 số hạng đầu tiên bằng 1365

$$\text{c) Ta có } u_k = 4096 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{k-1} = 4096 \Leftrightarrow (-1)(-2)^{k-1} = -4096$$

$$\Leftrightarrow 2^{k-1} = 4096 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 2^{12} \Rightarrow k - 1 = 12 \Leftrightarrow k = 13$$

Vậy số 4096 là số hạng thứ 13 của cấp số nhân

Ví dụ 3. Tính các tổng sau

$$\text{a) } S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$\text{b) } S_n = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có dãy số $\frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \dots; \frac{1}{2^n}$ là một cấp số nhân với n số hạng, số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$ và công bội

$$q = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } S_n &= \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2 \\
&= 3^2 + 2 + \frac{1}{3^2} + 3^4 + 2 + \frac{1}{3^4} + \dots + 3^{2n} + 2 + \frac{1}{3^{2n}} \\
&= (3^2 + 3^4 + \dots + 3^{2n}) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2n}}\right) + \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{n \text{ số } 2}
\end{aligned}$$

Dãy số $3^2; 3^4; \dots; 3^{2n}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = 3^2$ và công bội $q = \frac{3^4}{3^2} = 9$

$$\text{Do đó } S_1 = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 9 \cdot \frac{1-9^n}{1-9} = \frac{9}{8}(9^n - 1)$$

Dãy số $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2n}}$ là cấp số nhân với n số hạng, số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3^2}$ và công bội $q = \frac{1}{9}$

$$\text{Do đó } S_2 = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1-\frac{1}{9^n}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{9^n}\right) = \frac{9^n - 1}{8 \cdot 9^n}$$

$$\text{Vậy } S_n = \frac{9}{8}(9^n - 1) + \frac{9^n - 1}{8 \cdot 9^n} + 2n = \frac{(9^n - 1)(9^{n+1} + 1)}{8 \cdot 9^n} + 2n$$

Ví dụ 4. Tính tổng sau

$$\text{a) } S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_{n \text{ số } 1}$$

$$\text{b) } S_n = 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{666\dots 6}_{n \text{ số } 6}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Ta có } S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_{n \text{ số } 1} = \frac{1}{9} \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{n \text{ số } 9} \right)$$

$$= \frac{1}{9} \left[(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) \right] + \dots + (10^n - 1)$$

$$= \frac{1}{9} \left[(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - \left(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ số } 1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{9} \left[\frac{10(1 - 10^n)}{1 - 10} - n \right] = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$$

$$\text{Vậy } S_n = \frac{10^{n+1} - 9(n + 1) - 1}{81}$$

$$\text{b) } S_n = 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{666\dots 6}_{n \text{ số } 6} = \frac{6}{9} \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{n \text{ số } 9} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \left[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) \right] + \dots + (10^n - 1)$$

$$= \frac{2}{3} [10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n] = \frac{2}{3} \left[10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n \right] = \frac{20}{27} (10^n - 1) - \frac{2n}{3}$$

$$\text{Vậy } S_n = \frac{20}{27} (10^n - 1) - \frac{2n}{3}$$

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho các cấp số nhân với $u_1 = \frac{-1}{2}; u_7 = -32$. Công bội của cấp số nhân là

- A. $\pm \frac{1}{2}$. B. ± 4 . C. ± 2 . D. ± 1 .

Câu 2: Cấp số nhân (u_n) có $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^n$. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân là

- A. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 3$. B. $u_1 = \frac{6}{5}, q = -2$. C. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 2$. D. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 5$.

Câu 3: Cho cấp số nhân có $u_1 = -1; q = \frac{-1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân?

- A. Số hạng thứ 103. B. Số hạng thứ 104. C. Số hạng thứ 105. D. Số hạng thứ 106.

Câu 4: Cho các khẳng định sau

- Tồn tại một cấp số nhân (u_n) có $u_5 < 0$ và $u_{75} > 0$
- Nếu các số thực a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có công sai khác 0 thì các số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số cộng
- Nếu các số thực a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân thì các số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số nhân

Số khẳng định đúng là

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 5: Cho cấp số nhân có $u_1 = -1, u_6 = 0,00001$. Khi đó công bội q và số hạng tổng quát u_n là

- A. $q = \frac{1}{10}, u_n = \frac{-1}{10^{n-1}}$ B. $q = \frac{-1}{10}, u_n = -10^{n-1}$ C. $q = \frac{-1}{10}, u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$ D. $q = \frac{-1}{10}, u_n = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$

Câu 6: Cho cấp số nhân $-2; 4; -8; \dots$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

- A. $\frac{-2[1 - (-2)^n]}{1 - (-2)}$ B. $\frac{-2[1 - (2)^n]}{1 - 2}$ C. $\frac{-2[1 - (-2)^{2n}]}{1 - (-2)}$ D. $\frac{-2[1 - (2)^{2n}]}{1 - 2}$

Câu 7: Cho cấp số nhân biết $u_1 = 1; q = 2$. Số hạng thứ 11 là

- A. 20 B. 1024 C. 22 D. 2008

Câu 8: Nếu cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và công bội $q = 3$ thì giá trị u_7 là

- A. 3^6 B. 3^7 C. 21 D. 3^8

Câu 9: Cấp số nhân (u_n) có $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^n$. Số hạng đầu tiên và công bội q là

A. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 3$

B. $u_1 = \frac{6}{5}, q = -2$

C. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 2$

D. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 5$

Câu 10: Cho cấp số nhân có $u_2 = \frac{1}{4}, u_5 = 16$. Công bội và số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

A. $q = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{2}$,

B. $q = -\frac{1}{2}; u_1 = -\frac{1}{2}$,

C. $q = 4; u_1 = \frac{1}{16}$,

D. $q = -4; u_1 = -\frac{1}{16}$,

Câu 11: Cho cấp số nhân với $u_1 = 3, q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

A. u_7

B. u_6

C. u_8

D. Không thuộc cấp số trên

Câu 12: Tổng 10 số hạng đầu của một cấp số nhân có $u_1 = 4, u_{10} = 2048$ là

A. $S_{10} = 8184$

B. $S_{10} = 4092$

C. $S_{10} = 12276$

D. $S_{10} = 6138$

Câu 13: Cho cấp số nhân với $u_1 = 4, q = -4$. Ba số tiếp theo của cấp số nhân là

A. $-16; 64; -256$

B. $-16; -64; -256$

C. $16; 64; 256$

D. $-16; 64; 256$

Câu 14: Cho dãy số xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2u_n + \frac{n-1}{n^2+3n+2} \right); n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó u_{2018} bằng

A. $u_{2018} = \frac{2^{2016}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$

B. $u_{2018} = \frac{2^{2018}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$

C. $u_{2018} = \frac{2^{2017}}{3^{2018}} + \frac{1}{2019}$

D. $u_{2018} = \frac{2^{2017}}{3^{2018}} + \frac{1}{2019}$

Câu 15: Cho $S = 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^n$. Khẳng định nào sau đây đúng với mọi n nguyên dương?

A. $S = 3(2^n - 1)$

B. $S = 3(2^{n+1} + 1)$

C. $S = 3(2^{n+1} - 1)$

D. $S = 3(2^{n-1} - 1)$

Câu 16: Cho một cấp số nhân biết $u_1 = 3, q = 2$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

A. $3 \cdot (1 - 2^9)$

B. $3 \cdot (1 - 2^{10})$

C. $-3 \cdot (2^9 - 1)$

D. $3 \cdot (2^{10} - 1)$

Câu 17: Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_{2017} = 1, u_{2020} = 1000$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng

A. $\frac{10^{10} - 1}{9 \cdot 10^{2016}}$

B. $\frac{9^{10} - 1}{8 \cdot 9^{2016}}$

C. $\frac{1 - 10^{10}}{9 \cdot 10^{2016}}$

D. $\frac{10^{10} - 1}{9 \cdot 10^{2019}}$

Câu 18: Tổng $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$ bằng

A. $1 - 2^{100}$

B. $2^{100} - 1$

C. $1 - 2^{101}$

D. $2^{101} - 1$

Câu 19: Cấp số nhân 5; 10; ...; 1280 có bao nhiêu số hạng?

A. 9

B. 7

C. 8

D. 10

Câu 20: Số hạng thứ 5 của cấp số nhân 2; 6; ... là

A. 48

B. 486

C. 81

D. 162

Câu 21: Cho cấp số nhân có $u_1 = 1, q = 3$. Số hạng thứ 9 của cấp số nhân là

A. 6561

B. 19683

C. 2187

D. 729

Câu 22: Dãy số có số hạng tổng quát $u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n}$ là một cấp số nhân có công bội q bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{1}{3}$

Câu 23: Tổng $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 24: Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$. Tổng của cấp số nhân đó là

- A. $\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{12}$

Câu 25: Tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ có giá trị

- A. 1 B. 2 C. 4 D. $+\infty$

Câu 26: Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases}$. Giá trị u_1 và q là

- A. $u_1 = 2; q = 5$ hoặc $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$ B. $u_1 = 5; q = 1$ hoặc $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$
C. $u_1 = 25; q = 5$ hoặc $u_1 = 1; q = \frac{1}{5}$ D. $u_1 = 1; q = 5$ hoặc $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$

Câu 27: Cấp số nhân (u_n) có $u_n = \frac{6}{5} \cdot 2^n$. Số hạng đầu tiên và công bội q là

- A. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 2$ B. $u_1 = \frac{6}{5}, q = -2$ C. $u_1 = \frac{12}{5}, q = 2$ D. $u_1 = \frac{12}{5}, q = 5$

Câu 28: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Khi đó tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng

- A. $\frac{1-3^{1000}}{4}$ B. $\frac{3^{1000}-1}{2}$ C. $\frac{3^{1000}-1}{6}$ D. $\frac{3^{1000}-1}{3}$

Câu 29: Số hạng đầu và công bội của cấp số nhân thỏa mãn $\begin{cases} u_5 + u_2 = 36 \\ u_6 - u_4 = 48 \end{cases}$ là

- A. $u_1 = 4, q = 4$ B. $u_1 = 2, q = 4$ C. $u_1 = 2, q = 2$ D. $u_1 = 4, q = 2$

Câu 30: Tổng $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$ là một số chia hết cho

- A. 21 B. 41 C. 51 D. 31

Câu 31: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 24$ và $u_4 = 48$. Tổng năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng

- A. 168 B. 186 C. -186 D. 196

Câu 32: Cho cấp số nhân với $u_1 = 3, q = -\frac{1}{2}$. Số 222 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

- A. Số hạng thứ 11 B. Số hạng thứ 9
C. Số hạng thứ 12 D. Không thuộc cấp số nhân

Câu 33: Cho cấp số nhân có $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$. Số hạng đầu tiên u_1 và công bội q của cấp số nhân là

- A. $u_1 = 9$ và $q = 2$ B. $u_1 = 9$ và $q = -2$ C. $u_1 = -9$ và $q = 2$ D. $u_1 = -9$ và $q = 2$

Câu 34: Cho cấp số nhân có $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$. Giá trị u_1 và q của cấp số nhân là

- A. $u_1 = 9$ và $q = 2$ B. $u_1 = 9$ và $q = -2$ C. $u_1 = -9$ và $q = 2$ D. $u_1 = -9$ và $q = -2$

Câu 35: Cho cấp số nhân có $u_1 = 3; q = -2$. Số 192 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân?

- A. Số hạng thứ 5 B. Số hạng thứ 6 C. Số hạng thứ 7 D. Số hạng thứ 8

Câu 36: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q > 1$ và $\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 - u_3^2 = 5 \end{cases}$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

- A. $S_{10} = \frac{31(2+\sqrt{2})}{16}$ B. $S_{10} = 31(1-\sqrt{2})$ C. $S_{10} = 31(\sqrt{2}+1)$ D. $S_{10} = 31(\sqrt{2}-1)$

Câu 37: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Số hạng thứ 5 của cấp số nhân là

- A. $u_5 = \frac{2}{3^4}$ B. $u_5 = \frac{1}{3^5}$ C. $u_5 = 3^5$ D. $u_5 = \frac{5}{3^5}$

Câu 38: Cho cấp số nhân có $u_1 = -1; u_6 = 0.00001$. Khi đó công bội q và số hạng tổng quát là

- A. $q = \frac{1}{10}, u_n = \frac{-1}{10^{n-1}}$ B. $q = -\frac{1}{10}, u_n = -10^{n-1}$ C. $q = -\frac{1}{10}, u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$ D. $q = -\frac{1}{10}, u_n = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$

Câu 39: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \cdot u_n$. Giá trị tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_{10}}{10}$ là

- A. $\frac{3280}{6561}$ B. $\frac{29524}{59049}$ C. $\frac{25942}{59049}$ D. $\frac{1}{243}$

Câu 40: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n = 24; \frac{u_4}{u_{11}} = 16384$. Số hạng thứ 17 của cấp số nhân là

- A. $\frac{3}{67108864}$ B. $\frac{3}{268435456}$ C. $\frac{3}{536870912}$ D. $\frac{3}{214783648}$

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN DẠNG 2

1-C	2-C	3-B	4-A	5-D	6-A	7-B	8-B	9-C	10-C
11-A	12-B	13-A	14-A	15-C	16-D	17-A	18-D	19-A	20-D
21-A	22-D	23-C	24-D	25-B	26-D	27-C	28-D	29-C	30-D
31-B	32-D	33-A	34-A	35-C	36-C	37-A	38-D	39-B	40-C

Câu 1:

Ta có $u_7 = u_1 q^6 \Rightarrow -32 = -\frac{1}{2} q^6 \Rightarrow q = \pm 2$

Câu 2:

Ta có $n=1 \Rightarrow u_1 = \frac{6}{5}$ và $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\frac{3}{5} \cdot 2^n}{\frac{3}{5} \cdot 2^{n-1}} = 2$

Câu 3:

Giả sử $\frac{1}{10^{103}} = u_n$

ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{10^{103}} = -1 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{10}\right)^{103} = \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} \Leftrightarrow n-1=103 \Leftrightarrow n=104$

Câu 4:

1. Sai

Ta có $u_5 = u_1 \cdot q^4, u_{75} = u_1 \cdot q^{74}$. Do đó u_5 và u_{75} cùng dấu

2. Sai

Vì a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có công sai d khác 0 nên $b = a + d, c = a + 2d$

Suy ra $b^2 = a^2 + 2ad + d^2, c^2 = a^2 + 4ad + 4d^2 \Rightarrow a^2 + c^2 \neq 2b^2$

Vậy a^2, b^2, c^2 theo thứ tự không lập thành cấp số cộng

3. Đúng

Vì a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân có công bội d khác 0 nên $b = a \cdot d, c = a \cdot d^2$

Suy ra $b^2 = a^2 d^2, c^2 = a^2 d^4 \Rightarrow a^2 c^2 = (b^2)^2$

Vậy a^2, b^2, c^2 theo thứ tự lập thành cấp số nhân

Câu 5:

Ta có $u_1 = -1, u_6 = 0,00001 \Rightarrow q^5 = \frac{0,00001}{-1} = -\frac{1}{10^5} \Rightarrow q = -\frac{1}{10}$

Vậy số hạng tổng quát $u_n = -1 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$

Câu 6:

Ta có $u_1 = -2$ và $q = -2$

Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân là $S_n = \frac{(-2)(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = -\frac{2}{3}[1-(-2)^n]$

Câu 7:

Ta có $u_{11} = u_1 \cdot q^{10} = 1 \cdot 2^{10} = 1024$

Câu 8:

Ta có $u_7 = u_1 \cdot q^6 = 3 \cdot 3^6 = 3^7$

Câu 9:

$$\text{Ta có } u_1 = \frac{3}{5} \cdot 2^1 = \frac{6}{5}, u_2 = \frac{3}{5} \cdot 2^2 = \frac{6}{5} \cdot 2, u_3 = \frac{3}{5} \cdot 2^3 = \frac{6}{5} \cdot 2^2 \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = 2, \frac{u_3}{u_2} = 2$$

Vậy cấp số nhân cần tìm có $u_1 = \frac{6}{5}, q = 2$

Câu 10:

$$\text{Ta có } q^3 = \frac{u_5}{u_2} = 64 \Rightarrow q = 4 \Rightarrow u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16}$$

Câu 11:

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

Ta cần tìm n sao cho $u_n = 192 \Leftrightarrow 3 \cdot (-2)^{n-1} = 192 \Leftrightarrow n = 7$

Câu 12:

$$\text{Ta có } u_{10} = u_1 \cdot q^9 \Rightarrow q = 2. \text{ Do đó } S_{10} = u_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 4092$$

Câu 13:

Ta có $u_2 = u_1 \cdot q = -16; u_3 = u_2 \cdot q = 64; u_4 = u_3 \cdot q = -256.$

Câu 14:

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2u_n + \frac{n-1}{n^2 + 3n + 2} \right) = \frac{1}{3} \left(2u_n + \frac{3}{n+2} - \frac{2}{n-1} \right) \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{2}{3} \left(u_n - \frac{1}{n+1} \right) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n - \frac{1}{n+1}, \text{ từ (1) ta suy ra } v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$$

Do đó (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, công bội $q = \frac{1}{2}$

$$\text{Suy ra } v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \Leftrightarrow u_n - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Vậy } u_{2018} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{2017} + \frac{1}{2019} = \frac{2^{2016}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$$

Câu 15:

Ta có $1, 2, 2^2, \dots, 2^n$ là cấp số nhân với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$ nên $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$

$$S = 3(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n) = 3(2^{n+1} - 1)$$

Câu 16:

$$\text{Ta có } S_{10} = u_1 \cdot \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 3 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3 \cdot (2^{10} - 1)$$

Câu 17:

Ta có $u_{2020} = u_{2017} \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = 1000 \Rightarrow q = 10 \Rightarrow u_1 = \frac{u_{2017}}{u_{2016}} = \frac{1}{10^{2016}}$

$$\Rightarrow S_{10} = u_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = \frac{1}{10^{2016}} \cdot \frac{10^{10} - 1}{9} = \frac{10^{10} - 1}{9 \cdot 10^{2016}}$$

Câu 18:

Xét cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2, q = 2$

Ta có $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} = 1 + S_{100} = 1 + \frac{2 \cdot (1 - 2^{100})}{1 - 2} = 2^{101} - 1$

Câu 19:

Xét cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 5, q = 2$

Ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow 1280 = 5 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^8 \Leftrightarrow n = 9$

Vậy cấp số nhân đã cho có 9 số hạng

Câu 20:

Xét cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2, q = 3$. Suy ra $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 3^4 = 162$

Câu 21:

Ta có $u_9 = u_1 \cdot q^8 = 1 \cdot 3^8 = 6561$

Câu 22:

Ta có $u_1 = \frac{1}{3}, u_2 = \frac{1}{9} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

Câu 23:

Xét cấp số nhân với $u_1 = \frac{1}{4}, q = \frac{1}{4}$ có $|q| < 1$ nên $S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

Câu 24:

Ta có $u_1 = \frac{1}{9}, q = -\frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{12}$

Câu 25:

Ta có $u_1 = 1, q = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

Câu 26:

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 31 \\ u_1(1+q^2) = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{26}{1+q^2} = \frac{31}{1+q+q^2} \\ u_1 = \frac{26}{(1+q^2)} \end{cases} \Rightarrow 26(1+q+q^2) = 31(1+q^2)$$

$$\Rightarrow 5q^2 - 26q + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 5 \\ q = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_1 = 25 \end{cases}$$

Câu 27:

$$\text{Ta có } u_1 = \frac{12}{5}, u_2 = \frac{24}{5} \Rightarrow q = 2$$

Câu 28:

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_2 = -2 \\ u_5 = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = -2 \\ u_1 q^4 = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S_{1000} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-3^{1000}}{-2} = \frac{3^{1000}-1}{3}$$

Câu 29:

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_5 + u_2 = 36 \\ u_6 - u_4 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q^4 + q) = 36 \\ u_1(q^5 - q^3) = 48 \end{cases} \Rightarrow 48(q^4 + q) = 36(q^5 - q^3)$$

$$\Rightarrow 4q^4 + 4q = 3q^5 - 3q^3 \Leftrightarrow 3q^5 - 4q^4 - 3q^3 - 4q = 0 \Leftrightarrow q(q+1)(q-2)(3q^2 - q + 2) = 0$$

$$\begin{cases} q = 0 \\ q = -1 \\ q = 2 \\ 3q^2 - q + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow q = 2 \text{ (do } q \neq 0; q \neq 1) \Rightarrow u_1 = \frac{36}{q^4 + q} = 2$$

Câu 30:

Ta có $1; 2^1; 2^2; 2^3; 2^4$ là một cấp số nhân với $u_1 = 1; q = 2$ có 5 số hạng

$$\Rightarrow S = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 2^5 - 1 = 31:31$$

Câu 31:

Từ giả thiết $u_3 = 24$ và $u_4 = 48$ suy ra $q = 2$

$$\text{Lại có } u_1 = \frac{u_3}{q^2} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{Vậy } S_5 = u_1 \frac{1-q^5}{1-q} = 6 \cdot \frac{-31}{-1} = 186$$

Câu 32:

Giả sử số 222 là số hạng thứ n

Ta có $u_n = u_1 q^{n-1} \Leftrightarrow 222 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 74$ (không tồn tại $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn)

Vậy 222 không là số hạng của cấp số nhân

Câu 33:

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 - u_1 q = 54 \\ u_1 q^4 - u_1 q^2 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q (q^2 - 1) = 54 \\ u_1 q^2 (q^2 - 1) = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 q (q^2 - 1) = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 9 \end{cases}$$

Câu 34:

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 - u_1 q = 54 \quad (1) \\ u_1 q^4 - u_1 q^2 = 108 \quad (2) \end{cases}$$

Ta thấy $u_1 q^3 - u_1 q \neq 0$ nên chia phương trình (2) cho phương trình (1) ta được $q = 2$

Thay $q = 2$ vào phương trình (1) ta tìm được $u_1 = 9$

Câu 35:

$$\text{Có } u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow q^{n-1} = \frac{u_n}{u_1} \Leftrightarrow (-2)^{n-1} = \frac{192}{3} = 64 \Rightarrow n = 7$$

Câu 36:

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ (u_1 + u_3)^2 - 2u_1 u_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1 u_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_3 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_3 = 2 \end{cases}$$

- Trường hợp 1. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow q^2 = \frac{u_3}{u_1} = 2 \Leftrightarrow q = \sqrt{2} \text{ (do } q > 1 \text{)}$

$$\text{Với } q = \sqrt{2} \text{ thì } S_{10} = \frac{u_1(1 - q^{10})}{1 - q} = \frac{1 \cdot (1 - 2^5)}{1 - \sqrt{2}} = 31(\sqrt{2} + 1)$$

- Trường hợp 2. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow q^2 = \frac{u_3}{u_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ q = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ (loại do } q > 1 \text{)}$

Câu 37:

$$S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}} = \frac{3^n \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{3^n \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\text{Vậy } u_1 = 2; q = \frac{1}{3} \Rightarrow u_5 = u_1 \cdot q^4 = \frac{2}{3^4}$$

Câu 38:

Ta có $u_6 = 0.00001 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^5 = 0.00001 \Leftrightarrow -1 \cdot q^5 = 0.00001 \Leftrightarrow q = -\frac{1}{10}$

Mặt khác $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = -1 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$

Câu 39:

Theo đề ta có $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \cdot u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3} \frac{u_n}{n}$

Mà $u_1 = \frac{1}{3}$ nên $\frac{u_2}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\frac{u_3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$; ...; $\frac{u_{10}}{10} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$

Do đó dãy $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3}$, công bội $q = \frac{1}{3}$

Khi đó $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_{10}}{10} = \frac{3^{10} - 1}{2 \cdot 3^{10}} = \frac{59048}{2 \cdot 3^{10}} = \frac{29524}{59049}$

Câu 40:

Từ $\frac{u_4}{u_{11}} = 16384 \Leftrightarrow \frac{1}{q^7} = 16384 \Leftrightarrow q^7 = \left(\frac{1}{4}\right)^7 \Leftrightarrow q = \frac{1}{4}$

Ta có $u_n = 24$ tương ứng khi $n = 1$

Số hạng thứ 17 của cấp số nhân là $u_{17} = 24 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{16} = \frac{3}{536870912}$

Dạng 3: Dựa vào tính chất của cấp số nhân, chứng minh đẳng thức, giải phương trình và ứng dụng bài toán thực tế

Phương pháp giải

Áp dụng tính chất : Ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân thì $ac = b^2$ hoặc $|b| = \sqrt{ac}$

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} (n \geq 2)$

Tổng của n số hạng đầu tiên

$$\begin{cases} S_n = nu_1 & \text{khi } q = 1 \\ S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{khi } q \neq 1 \end{cases}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm x, y biết $5x - y; 2x + 3y; x + 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và các số $(y+1)^2; xy+1; (x-1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân

Hướng dẫn giải

Ba số $5x - y; 2x + 3y; x + 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên

$$2(2x + 3y) = (5x - y) + (x + 2y) \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x \quad (*)$$

Ba số $(y + 1)^2; xy + 1; (x - 1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên

$$(xy + 1)^2 = (y + 1)^2 (x - 1)^2 \Leftrightarrow (xy + 1)^2 = (xy + x - y - 1)^2$$

$$\text{Trường hợp 1. } xy + 1 = xy + x - y - 1 \Leftrightarrow x - y = 2 \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**) suy ra } x = \frac{10}{3}; y = \frac{4}{3}$$

$$\text{Trường hợp 2. } xy + 1 = -xy - x + y + 1 \Leftrightarrow 2xy + x - y = 0 \quad (***)$$

$$\text{Từ (*) và (***) suy ra } \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{5}x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = -\frac{3}{4}; y = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

$$\text{Vậy các cặp số } (x; y) \text{ cần tìm là } (x; y) \in \left\{ \left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{10} \right); (0; 0); \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3} \right) \right\}$$

Ví dụ 2. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Chứng minh

$$a) (ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3$$

$$b) (a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$$

$$c) (a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$$

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên $b^2 = ac$

$$a) \text{ Ta có } abc(a + b + c)^3 = b^3(a + b + c)^3 = (ab + b^2 + bc)^3 = (ab + bc + ca)^3 \text{ (điều phải chứng minh)}$$

$$b) \text{ Ta có } (a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2 = a^2b^2 + 2b^4 + b^2c^2 \\ = a^2b^2 + 2ab \cdot bc + b^2c^2 = (ab + bc)^2 \text{ (điều phải chứng minh)}$$

$$c) \text{ Ta có } (a + b + c)(a - b + c) = [(a + c) + b][(a + c) - b] = (a + c)^2 - b^2 \\ = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 - b^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ (điều phải chứng minh)}$$

Ví dụ 3. Số đo bốn góc của một tứ giác lập thành cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai. Tìm số đo của góc thứ nhất

Hướng dẫn giải

Gọi A, B, C, D theo thứ tự đó là bốn đỉnh của tứ giác thỏa mãn đề bài

$$\text{Theo bài ra ta có } \widehat{B} = \widehat{A}q; \widehat{C} = \widehat{A}q^2; \widehat{D} = \widehat{A}q^3$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{D} = 9\widehat{B} \Leftrightarrow \widehat{A}q^3 = 9\widehat{A}q \Leftrightarrow q^2 = 9 \Leftrightarrow q = \pm 3$$

$$\text{Với } q = -3 \Rightarrow B = -3A < 0 \text{ (loại)}$$

Với $q = 3$ ta có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0 \Leftrightarrow \hat{A} + 3\hat{A} + 9\hat{A} + 27\hat{A} = 360^0 \Leftrightarrow \hat{A} = 9^0$

Ví dụ 4. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{b}{a}$ là một số nguyên. Các số a, b, c theo thứ tự lập

thành một cấp số nhân và $\frac{a+b+c}{3} = b+2$. Tìm a

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên $b = a.q; c = a.q^2$

Vì $\frac{b}{a}$ là một số nguyên mà a, b là số nguyên dương nên q là số nguyên dương

Ta có $\frac{a+b+c}{3} = b+2 \Rightarrow a + aq + aq^2 = 3aq + 6 \Leftrightarrow a(q-1)^2 = 6$

Vì a, q nguyên dương nên ta có bảng sau

a	1	2	3	6
$(q-1)^2$	6	3	2	1
q	$\sqrt{6}+1$	$\sqrt{3}+1$	$\sqrt{2}+1$	2
Kết luận	Loại	Loại	Loại	Thỏa mãn

Vậy $a = 6$

Ví dụ 5. Tìm m để phương trình $x^3 - (3m+1)x^2 + (5m+4)x - 8 = 0$ (1) có 3 nghiệm lập thành một cấp số nhân

Hướng dẫn giải

Giả sử $x_1; x_2; x_3$ là ba nghiệm của phương trình (1)

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$$

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 = 0$$

Suy ra $x_1x_2x_3 = 8$

Lại có ba nghiệm $x_1; x_2; x_3$ lập thành một cấp số nhân nên

$$x_2^2 = x_1x_3 \Rightarrow x_2^3 = x_1x_2x_3 = 8 \Rightarrow x_2 = -2$$

Mà x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên

$$2^3 - (3m+1).2^2 + (5m+4).2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Thử lại với $m = 2$ thì phương trình (1) trở thành

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm

Ví dụ 6. Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng. Nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó

Hướng dẫn giải

Gọi u_1, u_2, u_3 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân

Theo đề bài $u_1 - 1, u_2, u_3 - 19$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 65 \\ u_1 - 1 + u_3 - 19 = 2u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 65 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 65 \\ u_1 - 2u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 65 \quad (1) \\ u_1(1 - 2q + q^2) = 20 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Chia vế với vế của (1) cho (2), ta được } \frac{1 + q + q^2}{1 - 2q + q^2} = \frac{65}{20} = \frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(1 + q + q^2) = 13(1 - 2q + q^2) \Leftrightarrow 9q^2 - 30q + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vì u_1, u_2, u_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân tăng dần nên $q = 3 \Rightarrow u_1 = 5$

Vậy 3 số cần tìm là 5; 15; 45

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có ba cạnh CA, AB, BC theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội là q. Tìm q

Hướng dẫn giải

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Theo giả thiết ta có ba cạnh CA, AB, BC theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội là q nên

$$BC = q^2 \cdot AC \text{ và } AB = q \cdot AC$$

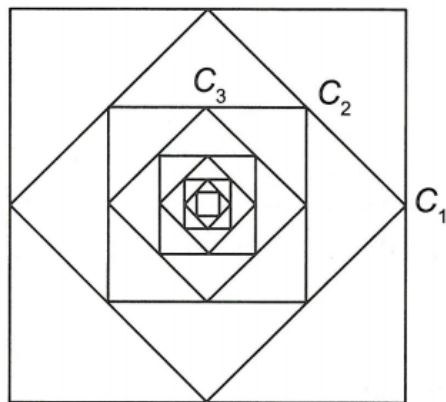
$$\text{Do đó } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow q^4 \cdot AC^2 = q^2 \cdot AC^2 + AC^2 \Leftrightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ q^2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (do } q^2 \geq 0) \Leftrightarrow q = \pm \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{2}$$

$$\text{Vì } q > 0 \text{ nên } q = \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{2}$$

Ví dụ 8. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 1, C_2 là hình vuông có các đỉnh là các trung điểm của cạnh hình vuông C_1 . Tương tự, gọi C_3 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông C_2 . Tiếp tục như vậy ta được một dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Tính tổng diện tích của 10 hình vuông đầu tiên của dãy

Hướng dẫn giải



Diện tích của hình vuông C_1 là 1

Độ dài đường chéo hình vuông C_1 là $\sqrt{2}$

Hình vuông C_2 có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo hình vuông C_1

$\Rightarrow$ Diện tích của hình vuông C_2 là $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

Hình vuông C_3 có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo hình vuông C_2

$\Rightarrow$ Diện tích của hình vuông C_3 là $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$

Hình vuông C_n có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo hình vuông C_{n-1}

$\Rightarrow$ Diện tích của hình vuông C_n là $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2(n-1)}$

Do đó, dãy diện tích các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ lập thành cấp số nhân với số hạng đầu

$$u_1 = 1, q = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{10} = u_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = \frac{1023}{512}$$

Ví dụ 9. Để tiết kiệm năng lượng, một công ty điện lực đề xuất bán điện sinh hoạt cho người dân theo hình thức lũy tiến (bậc thang) như sau: Mỗi bậc gồm 10 số; bậc 1 từ số thứ 1 đến số thứ 10, bậc 2 từ số 11 đến số 20, bậc 3 từ số thứ 21 đến số thứ 30, ... Bậc 1 có giá là 1500 đồng/1 số, giá của mỗi số ở bậc thứ

$n+1$ tăng so với giá của mỗi số ở bậc thứ n là 2,5%. Gia đình ông An sử dụng hết 345 số trong tháng 1, hỏi tháng 1 ông An phải đóng bao nhiêu tiền?

Hướng dẫn giải

Gọi u_1 là số tiền phải trả cho 10 số điện đầu tiên

Suy ra $u_1 = 10.1500 = 15000$ (đồng)

u_2 là số tiền phải trả cho các số điện từ 11 đến 20

Suy ra $u_2 = u_1(1 + 0,025)$

.....

u_{34} là số tiền phải trả cho các số điện từ 331 đến 340

Suy ra $u_{34} = u_1(1 + 0,025)^{33}$

Số tiền phải trả cho 340 số điện đầu tiên là

$$S_1 = u_1 \cdot \frac{1 - (1 + 0,025)^{34}}{1 - (1 + 0,025)} \Rightarrow S_1 = 15000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,025)^{34}}{1 - (1 + 0,025)} = 789193,28$$

Số tiền ông An phải trả cho các số điện từ 341 đến 345 là

$$S_2 = 5.1500(1 + 0,025)^{34} = 17364,92$$

Vậy tháng 1 gia đình ông An phải trả số tiền là: $S = S_1 + S_2 \approx 806558$ (đồng)

Ví dụ 10. Từ độ cao 55,8m của tháp nghiêng Pisa nước Italia, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt trước

đó. Tính tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất

Hướng dẫn giải

Gọi h_n là độ dài đường đi của quả bóng ở lần rơi xuống thứ n ($n \in \mathbb{N}^*$)

Gọi l_n là độ dài đường đi của quả bóng ở lần nảy lên thứ n ($n \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có $h_1 = 55,8, l_1 = \frac{1}{10} \cdot 55,8 = 5,58$ và các dãy số $(h_n), l_n$ là các cấp số nhân lùi vô hạn với

công bội $q = \frac{1}{10}$

Suy ra tổng độ dài đường đi của quả bóng là

$$S = \frac{h_1}{1 - \frac{1}{10}} + \frac{l_1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}(h_1 + l_1) = 68,2(m)$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Ba số $2x, 3x+3, 5x+5$ theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Biết $x \neq -1$, số hạng tiếp theo của cấp số nhân đó là

- A. $-\frac{250}{3}$ B. $\frac{250}{3}$ C. 250 D. -250

Câu 2: Cho cấp số nhân $-4; x; -9$ thì giá trị x là

- A. ± 5 B. $-6,5$ C. ± 6 D. ± 36

Câu 3: Cho cấp số nhân có bốn số hạng $-2; x; -18; y$. Hãy chọn kết quả đúng

- A. $x = -6; y = 54$ B. $x = 6; y = -54$ C. $x = -6; y = -54$ D. $x = -10; y = -26$

Câu 4: Giá trị của x để 3 số $2x-1; x; 2x+1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân là

- A. $x = \pm \frac{1}{3}$ B. $x = \pm \sqrt{3}$ C. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $x = \pm 1$

Câu 5: Ba số x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1 đồng thời các số $x; 2y; 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Giá trị của q là

- A. $q = \frac{1}{3}$ B. $q = \frac{1}{9}$ C. $q = -\frac{1}{3}$ D. $q = -3$

Câu 6: Nếu ba số $x+a; x+b; x+c$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì giá trị của x tính theo a, b, c là

- A. $x = \frac{a^2 - bc}{2a - b - c}$ B. $x = \frac{c^2 - ab}{a + b - 2c}$ C. $x = \frac{b^2 - ac}{a - 2b + c}$ D. $x = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$

Câu 7: Cho cấp số nhân $\frac{-1}{5}, x, \frac{-1}{125}$. Giá trị của x là

- A. $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ B. $\pm \frac{1}{25}$ C. $\pm \frac{1}{5}$ D. ± 5

Câu 8: Với giá trị nào của x thì 3 số $x-2; x+1; 3-x$ lập thành cấp số nhân?

- A. ± 1 B. 2 C. -3 D. Không có giá trị nào

Câu 9: Bốn số a, b, c, d theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và bốn số $a+1, b+1, c+3, d+9$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tổng $a+d$ bằng

- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

Câu 10: Có bao nhiêu cấp số nhân gồm bốn phần tử mà tổng của chúng bằng 45 và số hạng thứ tư bằng bốn lần số hạng thứ 2?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 11: Trong một cấp số nhân có các số hạng đều dương, hiệu của số hạng thứ năm và thứ tư là 576, hiệu của số hạng thứ hai và số hạng đầu là 9. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng

- A. 768 B. 1024 C. 1023 D. 1061

Câu 12: Ba số $-x; 3; y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng, ba số $1, x, y$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Biết rằng $x < 0$, khi đó tích $x.y$ bằng

- A. 8 B. -27 C. -8 D. 5

Câu 13: Cho bộ số x_0, y_0, z_0 là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = a + 4 \\ 2x - y + 2z = 2a + 2 \\ 3x + 2y - 3z = 1 - 2a \end{cases}$$
. Các giá trị dương của

a để x_0, y_0, z_0 lập thành một cấp số nhân là

- A. $a = 1$ B. $a = 2$ C. $a = 3$ D. $a = 4$

Câu 14: Tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3mx^2 - (m+1)x - 2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân là

- A. $m = -\frac{5}{\sqrt[3]{2} + 1}$ B. $m = -\frac{5}{3\sqrt[3]{2} + 1}$ C. $m = \frac{5}{3\sqrt[3]{2} + 1}$ D. $m = \frac{5}{3\sqrt[3]{2} - 1}$

Câu 15: Ba số a, b, c theo thứ tự là số hạng thứ nhất, số hạng thứ hai và số hạng thứ ba của một cấp số nhân, đồng thời cũng lần lượt là số hạng thứ nhất, số hạng thứ hai và số hạng thứ tư của một cấp số cộng có công sai bằng 10. Giá trị của a là

- A. $a = 5$ B. $a = \frac{10}{3}$ C. $a = 10$ D. $a = -\frac{10}{3}$

Câu 16: Cho ba số $\frac{\sin \alpha}{6}, \cos \alpha, \tan \alpha$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, với $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0$. Khi đó giá trị $\cos 2\alpha$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

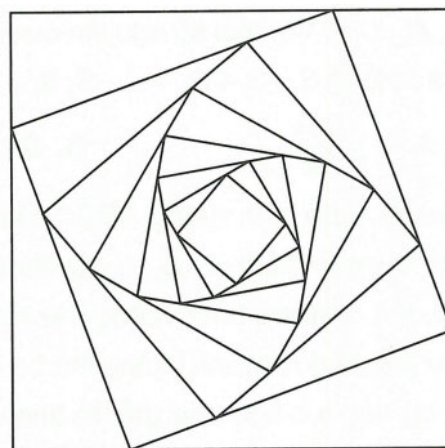
Câu 17: Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng a. Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông (C_2) như hình vẽ

Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i ($i \in \{1, 2, 3, \dots\}$). Đặt $T = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$

Biết $T = \frac{32}{3}$

Giá trị của a là

- A. $a = 2$ B. $a = \frac{5}{2}$ C. $a = \sqrt{2}$ D. $a = 2\sqrt{2}$



Câu 18: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích đáy tháp là $12288m^2$, diện tích mặt trên cùng bằng

- A. $8m^2$ B. $6m^2$ C. $12m^2$ D. $10m^2$

Câu 19: Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $6.10^5 (m^3)$. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây trong rừng là 4,5% mỗi năm. Hỏi sau 10 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu m^3 gỗ (làm tròn đến hàng đơn vị)?

- A. $931782m^3$ B. $931781m^3$ C. $891657m^3$ D. $891658m^3$

Câu 20: Bạn An thả quả bóng cao su từ độ cao 10m theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng với độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn là

- A. 40 m B. 70 m C. 50 m D. 80 m

Câu 21: Cho ba số thực dương a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân đồng thời thỏa mãn điều kiện $\frac{a^2 b^2 c^2}{a^3 + b^3 + c^3} = 4$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$ là

- A. $P = 4$ B. $P = 2$ C. $P = \frac{1}{2}$ D. $P = \frac{1}{4}$

Câu 22: Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A, biết độ dài cạnh đáy BC, đường cao AH và cạnh bên AB theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội a. Giá trị của q^2 bằng

- A. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

Câu 23: Cho bốn số a, b, c, d theo thứ tự đó tạo thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết tổng ba số hạng đầu bằng $\frac{148}{9}$, đồng thời theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Giá trị biểu thức $T = a - b + c - d$ là

- A. $T = \frac{101}{27}$ B. $T = \frac{100}{27}$ C. $T = -\frac{100}{27}$ D. $T = -\frac{101}{27}$

Câu 24: Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là tam giác trung bình của tam giác ABC. Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Giá trị tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$

- A. $S = \frac{15\pi}{4}$ B. $S = 4\pi$ C. $S = \frac{9\pi}{2}$ D. $S = 5\pi$

Câu 25: Cho hình vuông ABCD có các cạnh bằng a và có diện tích S_1

Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA

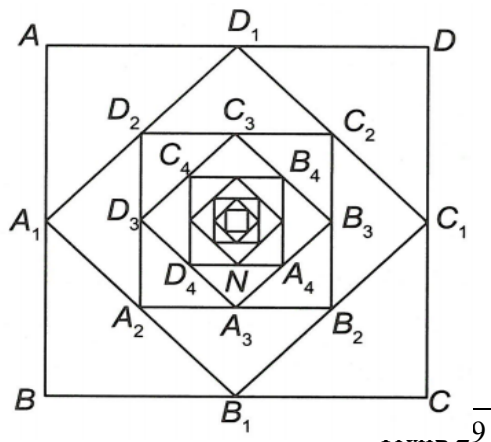
ta được hình vuông thứ hai có diện tích S_2 . Tiếp tục làm như thế,

ta được hình vuông thứ ba là A_2, B_2, C_2, D_2 có diện tích $S_3, \dots$

và cứ tiếp tục làm như thế, ta tính được các hình vuông lần lượt có diện tích có diện tích $S_4, S_5, \dots, S_{100}$ (tham khảo hình vẽ bên).

Giá trị tổng có diện tích $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100}$ là

- A. $S = \frac{a^2(2^{100} - 1)}{2^{100}}$ B. $S = \frac{a^2(2^{100} - 1)}{2^{99}}$
C. $S = \frac{a^2}{2^{100}}$ D. $S = \frac{a^2(2^{99} - 1)}{2^{98}}$



Câu 26: Tổng cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có $u_1 = 1$ và u_1, u_3, u_4 theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng là

- A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$ D. 2

Câu 27: Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ có ba nghiệm thực lập thành một cấp số nhân?

- A. $m = 1$ B. $m = -3$ C. $m = 3$ D. $m = -4$

Câu 28: Các giá trị m để phương trình $x^3 + 2x^2 + (m+1)x + 2(m+1) = 0$ có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là

- A. $m = -1, m = -3, m = -4$ B. $m = -1, m = 13, m = -4$
C. $m = 1, m = 3, m = 4$ D. Không có giá trị của m

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN DẠNG 3

1-B	2-C	3-C	4-C	5-A	6-C	7-B	8-D	9-B	10-C
11-C	12-C	13-C	14-B	15-C	16-D	17-A	18-B	19-A	20-B
21-D	22-C	23-C	24-B	25-B	26-B	27-B	28-D		

Câu 1:

Ba số $2x; 3x+3; 5x+5$ theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên

$$2x(5x+5) = (3x+3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9 \text{ (do } x \neq 1)$$

$$\text{Với } x = 9, \text{ suy ra } q = \frac{3 \cdot 9 + 3}{2 \cdot 9} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Số hạng tiếp theo của cấp số nhân đó là } (5 \cdot 9 + 5) \cdot \frac{5}{3} = \frac{250}{3}$$

Câu 2:

$$\text{Ta có } x^2 = (-4)(-9) = 36 \Rightarrow x = \pm 6$$

Câu 3:

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 = (-2)(-18) = 36 \Rightarrow x = \pm 6 \\ xy = (-18)^2 = 324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 54 \\ x = -6 \\ y = -54 \end{cases}$$

Câu 4:

Ta có $x^2 = 4x^2 - 1 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 5:

Vì x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1 nên $y = x.q; z = x.q^2$ (1)

Các số $x, 2y, 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên $x + 3z = 4y$ (2)

Thay (1) vào (2) được $x + 3xq^2 = 4xq \Leftrightarrow x(3q^2 - 4q + 1) = 0 \Rightarrow 3q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$

Vì $q \neq 1$ nên $q = \frac{1}{3}$

Câu 6:

Đề ba số $x+a; x+b; x+c$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân thì

$$(x+b)^2 = (x+a)(x+c) \Leftrightarrow x^2 + 2bx + b^2 = x^2 + (a+c)x + ac \Leftrightarrow (2b-a-c)x = ac - b^2 \Rightarrow x = \frac{b^2 - ac}{a - 2b + c}$$

Câu 7:

$\frac{-1}{5}; x; \frac{-1}{125}$ là cấp số nhân khi và chỉ khi $x^2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{125} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{25}$

Câu 8:

3 số $x-2; x+1; 3-x$ là cấp số nhân khi và chỉ khi $(x+1)^2 = (x-2)(3-x)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = -x^2 + 5x - 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 7 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị x thỏa mãn đề bài

Câu 9:

Gọi m là công sai của cấp số cộng

Khi đó $b = a + m; c = a + 2m; d = a + 3m$

Do $a+1, b+1, c+3, d+9$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên $\begin{cases} (a+1)(c+3) = (b+1)^2 \\ (b+1)(d+9) = (c+3)^2 \end{cases}$

Thay $b = a + m; c = a + 2m; d = a + 3m$ vào hệ trên và rút gọn ta được $\begin{cases} 2a+2 = m^2 \\ 4a = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$

Thử lại ta thấy chỉ có trường hợp $a = 1, m = 2$ thỏa mãn

Vậy $a + d = 2a + 3m = 8$

Câu 10:

$$\text{Ta có } \begin{cases} S_4 = 45 \\ u_4 = 4u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 45 \\ u_1 \cdot q^3 = 4u_1 \cdot q \Rightarrow \begin{cases} q = 0 \\ q^2 = 4 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 0; u_1 = 45 \\ q = 2; u_1 = 3 \\ q = -2; u_1 = -95 \end{cases}$$

Câu 11:

$$\begin{cases} u_5 - u_4 = 576 \\ u_2 - u_1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^4 - u_1 \cdot q^3 = 576 \\ u_1 \cdot q - u_1 = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{q^4 - q^3}{q - 1} = \frac{576}{9} \Rightarrow q^3 = 64 \Leftrightarrow q = 4 \Rightarrow u_1 = 3$$

$$\text{Vậy tổng 5 số hạng đầu là } S_5 = u_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 1023$$

Câu 12:

$$\text{Ba số } -x, 3, y \text{ theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên } -x + y = 6 \quad (1)$$

$$\text{Ba số } 1, x, y \text{ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên } x^2 = y \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) và } x < 0 \text{ suy ra } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow x \cdot y = -8$$

Câu 13:

$$\text{Giải hệ phương trình ta được } x_0 = \frac{a+3}{6}; y_0 = 2; z_0 = \frac{5a+9}{6}$$

$$\text{Để } x_0, y_0, z_0 \text{ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì } x_0 \cdot z_0 = y_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+3}{6} \cdot \frac{5a+9}{6} = 4 \Leftrightarrow 5a^2 + 24a - 117 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -\frac{39}{5} \end{cases}$$

$$\text{Do } a > 0 \text{ nên } a = 3$$

Câu 14:

$$\text{Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt } x_1, x_2, x_3$$

$$\text{Khi đó } x_1 x_2 x_3 = 2. \text{ Mà } x_1 x_3 = x_2^2 \text{ nên } x_2 = \sqrt[3]{2}$$

$$\text{Do đó ta có } -m - 1 = 4\sqrt[3]{2} \cdot 3m \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3\sqrt[3]{2} + 1}$$

$$\text{Thử lại với } m = -\frac{5}{3\sqrt[3]{2} + 1} \text{ thấy thỏa mãn}$$

$$\text{Vậy } m = -\frac{5}{3\sqrt[3]{2} + 1}$$

Câu 15:

$$\text{Theo đề bài ta có } a = u_1; b = u_2 = u_1 + 10; c = u_4 = u_1 + 30$$

$$\text{Theo tính chất cấp số nhân, ta có } b^2 = a \cdot c \Leftrightarrow (u_1 + 10)^2 = u_1(u_1 + 30) \Leftrightarrow u_1 = 10 \Rightarrow a = 10$$

Câu 16:

Theo giả thiết ta có

$$\frac{\sin \alpha}{6} \cdot \tan \alpha = (\cos \alpha)^2 \Leftrightarrow \frac{(\sin \alpha)^2}{6 \cdot \cos \alpha} = (\cos \alpha)^2 \Leftrightarrow 6 \cdot (\cos \alpha)^3 + (\cos \alpha)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ đó } \cos 2\alpha = 2(\cos \alpha)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

Câu 17:

$$\text{Cạnh của hình vuông } (C_2) \text{ là } a_2 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{Do đó diện tích } S_2 = \frac{5}{8}a^2 = \frac{5}{8}S_1$$

$$\text{Cạnh của hình vuông } (C_3) \text{ là } a_3 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a_2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a_2\right)^2} = \frac{a_2\sqrt{10}}{4} = a_2 \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)$$

$$\text{Do đó diện tích } S_3 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 a^2 = \frac{5}{8}S_2$$

Lý luận tương tự ta có các $S_1; S_2; S_3; \dots; S_n \dots$ tạo thành một dãy cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = S_1$ và công

$$\text{bội } q = \frac{5}{8}$$

$$\text{Vậy } T = \frac{S_1}{1-q} = \frac{8a^2}{3} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2 \text{ (do } a > 0)$$

Câu 18:

Ta nhận thấy diện tích các mặt trên của mỗi tầng lập thành 1 cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2}$

Số hạng đầu $u_1 = 12288$. Khi đó mặt trên cùng tầng 11 ứng với u_{12}

$$\text{Do đó } u_{12} = u_1 \cdot q^{11} = 12288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 6$$

Câu 19:

Đặt $u_0 = 6 \cdot 10^5$ và $r = 4,5\% = 0,045$

Gọi u_n là trữ lượng gỗ của khu rừng sau năm thứ n . Khi đó ta có $u_{n+1} = u_n(1+r), n \in \mathbb{N}$

Suy ra (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu u_0 và công bội $q = 1+r$

Do đó số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n) là $u_n = u_0(1+r)^n$

Sau 10 năm, khu rừng đó sẽ có $u_{10} = u_0 \cdot q^{10} = 6 \cdot 10^5 \cdot (1+0,045)^{10} = 931781,653(m^3) \approx 931782(m^3)$ gỗ

Câu 20:

Các quãng đường khi bóng đi xuống tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 10$ và $q = \frac{3}{4}$

Tổng các quãng đường khi bóng đi xuống là $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{3}{4}} = 40$

Tổng quãng đường bóng đi được (cả lên và xuống) đến khi bóng dừng hẳn là $2S - 10 = 80 - 10 = 70(m)$

Câu 21:

Ta có $\frac{a^2b^2c^2}{a^3+b^3+c^3} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{a^3+b^3+c^3}{a^2b^2c^2} = \frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2}$

Mặt khác a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên $ac = b^2$

Do đó $\frac{1}{4} = \frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} = \frac{a}{ac^3} + \frac{b}{b^4} + \frac{c}{a^3c} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \Rightarrow P = \frac{1}{4}$

Câu 22:

Đặt $BC = a; AB = AC = b; AH = h$. Theo giả thiết ta có a, h, b lập thành cấp số nhân, suy ra $h^2 = ab$

Mặt khác, tam giác ABC cân tại đỉnh A nên $h^2 = m_a^2 = \frac{b^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

Do đó $\frac{b^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4} = ab \Leftrightarrow a^2 + 4ab - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow a = (2\sqrt{2} - 2)b$

Lại có $b = q^2a$ nên $q^2 = \frac{b}{a} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{4} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

Câu 23:

Ta có
$$\begin{cases} ac = b^2 & (1) \\ bd = c^2 & (2) \\ a + b + c = \frac{148}{9} & (3) \end{cases}$$

Cấp số cộng có $u_1 = a, u_4 = b, u_8 = c$. Gọi x là công sai của cấp số cộng. Vì cấp số nhân có công bội khác 1 nên $x \neq 0$

Ta có
$$\begin{cases} b = a + 3x \\ c = a + 7x \end{cases} \quad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra $a(a + 7x) = (a + 3x)^2 \Leftrightarrow ax - 9x^2 = 0$

Do $x \neq 0$ nên $a = 9x$

Từ (3) và (4), suy ra $3a + 10x = \frac{148}{9}$

$$\text{Do đó } \begin{cases} a=4 \\ x=\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{16}{3} \\ c=\frac{64}{9} \\ d=\frac{256}{27} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } T = a - b + c - d = \frac{-100}{27}$$

Câu 24:

Vì dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ là các tam giác đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác bằng cạnh nhân $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Với $n = 1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 3 nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ có bán kính

$$R_1 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_1 = \pi \cdot \left(3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$$

Với $n = 2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{3}{2}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán

$$\text{kính } R_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_2 = \pi \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$$

Với $n = 3$ thì tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_3B_3C_3$ có bán

$$\text{kính } R_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_3 = \pi \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$$

.....

Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán

$$\text{kính } R_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_n = \pi \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$$

Khi đó ta được dãy $S_1; S_2; S_3; \dots; S_n \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = S_1 = 3\pi$ và công

$$\text{bội } q = \frac{1}{4}$$

$$\text{Do đó tổng } S = S_1 + S_2 + \dots + S_n \dots = \frac{u_1}{1-q} = 4\pi$$

Câu 25:

$$\text{Ta có } S_1 = a^2; S_2 = \frac{1}{2}a^2; S_3 = \frac{1}{4}a^2, \dots$$

Do đó $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{100}$ là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = S_1 = a^2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$

$$\text{Suy ra } S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100} = S_1 \cdot \frac{1 - q^{100}}{1 - q} = \frac{a^2(2^{100} - 1)}{2^{99}}$$

Câu 26:

(u_n) là cấp số nhân lùi vô hạn có công bội q , suy ra $|q| < 1$ và $u_3 = u_1 \cdot q^2 = q^2; u_4 = u_1 \cdot q^3 = q^3$

Mà và u_1, u_3, u_4 theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng nên $u_1 + u_4 = 2u_3$

$$\text{Từ đó ta có } 1 + q^3 = 2q^2 \Leftrightarrow q^3 - 2q^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (q - 1)(q^2 - q - 1) = 0 \Leftrightarrow q^2 - q - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ q = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (vì } |q| < 1)$$

$$\text{Vậy } S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Câu 27:

Ta chứng minh nếu $x_1; x_2; x_3$ là nghiệm của phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ thì $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = m \\ x_1 x_2 x_3 = 8 \end{cases}$

$$\text{Thật vậy } x^3 - mx^2 - 6x - 8 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - mx^2 - 6x - 8 = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)x - x_1 x_2 x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = m \\ x_1 x_2 x_3 = 8 \end{cases}$$

Điều kiện cần: Phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ có ba nghiệm thực $x_1 < x_2 < x_3$ lập thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow x_1 x_3 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 x_2 x_3 = x_2^3 \Leftrightarrow 8 = x_2^3 \Leftrightarrow x_2 = 2$

Vậy phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ phải có nghiệm bằng 2

Thay $x = 2$ vào phương trình ta có $m = -3$

$$\text{Điều kiện đủ: Thử lại với } m = -3 \text{ ta có } x^3 - 3x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \text{ (thỏa yêu cầu bài toán)}$$

Câu 28:

Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_1 x_3 = x_2^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = m + 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -\frac{m + 1}{2}$$

Thay vào phương trình ta được $m = -1, m = 3, m = -4$

Thay từng giá trị của m vào phương trình ta thấy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán