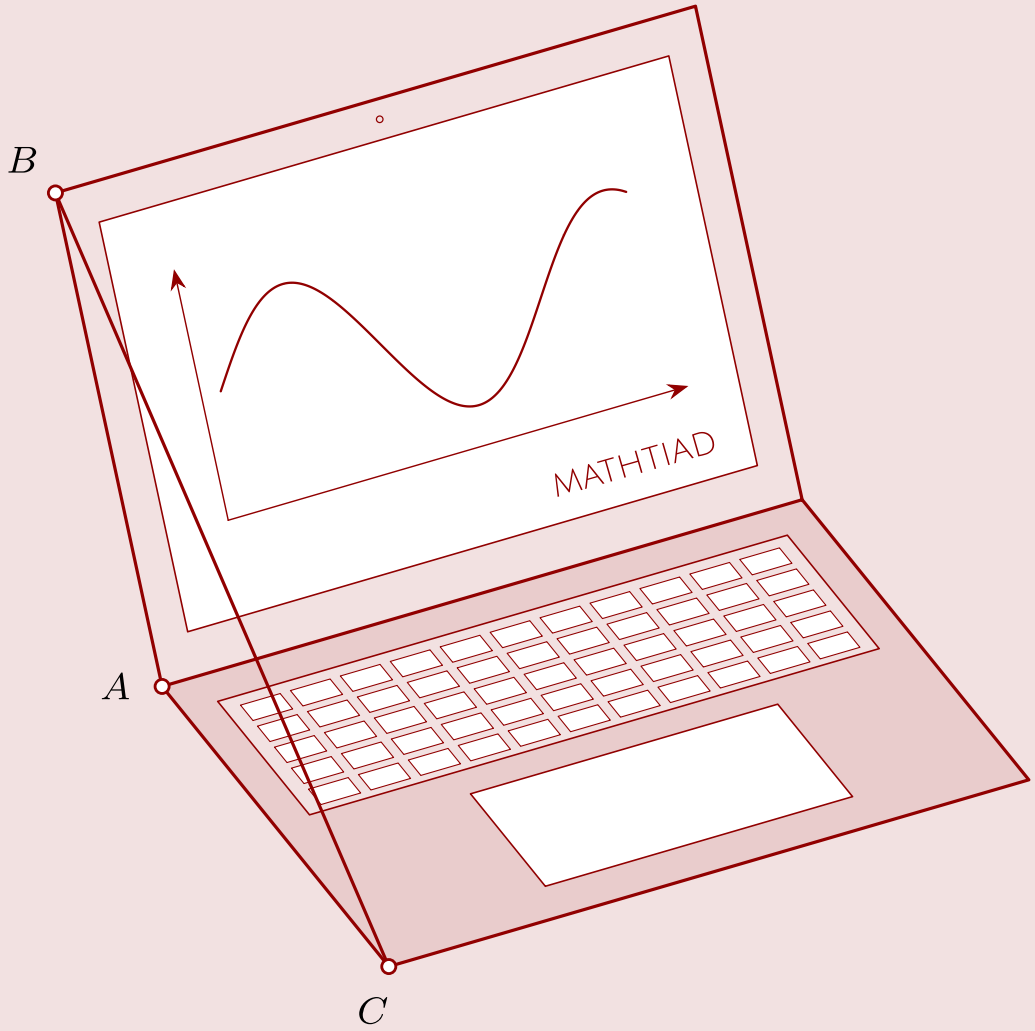
TẬP 1 **BỘ CÁC ĐỀ NĂM HỌC 2024/2025**



Tuyển tập đề thi HSG 12

CÓ LỜI GIẢI CHI TIẾT

PDF WORD

TIAD

XEM CHI TIẾT TẠI MATHTIAD.VN

Mục lục

1 Đề chọn HSG Liên Trường Nghệ An 2
2 Đề chọn HSG Vĩnh Phúc 9
3 Liên trường Nghệ An 15
4 Sở Thanh Hóa 20
5 Minh họa Ninh Bình 27
6 Sở Bắc Ninh 33
7 Sở Bà Rịa Vũng Tàu 46
8 Sở Hải Phòng 51
9 Sở Nghệ An 57
10 Sở Ninh Bình 62
11 Sở Quảng Ninh 68
12 Sở Sơn La 71
13 Sở Thái Bình 77
14 Sở Thanh Hóa 86
15 Sở Vĩnh Phúc 93
16 Liên Trường Bắc Ninh 101
17 Tham khảo Sở Phú Thọ 113
18 THPT Lê Xoay 120
19 THPT Nam Đàn Nghệ An 129
20 THPT Nguyễn Bính 133
21 THPT Tam Dương 141
22 THPT Chuyên Đại học Vinh 148
23 THPT Đô Lương 152
24 THPT Ngô Gia Tự 159
25 Liên trường Bắc Ninh 164
26 Minh họa Sở Bà Rịa Vũng Tàu 174
27 Sở Bắc Giang 180
28 Sở Phú Thọ 188
29 Tham Khảo Sở Bắc Ninh 195

1 ĐỀ CHỌN HSG LIÊN TRƯỜNG NGHỆ AN

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+2)(x-2)^3(x-4)^4, \forall x \in \mathbb{R}$.
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A PD.
B Đường thẳng qua P và song song với MC.
C Đường thẳng qua P và song song với AC.
D Đường thẳng qua P và song song với BC.

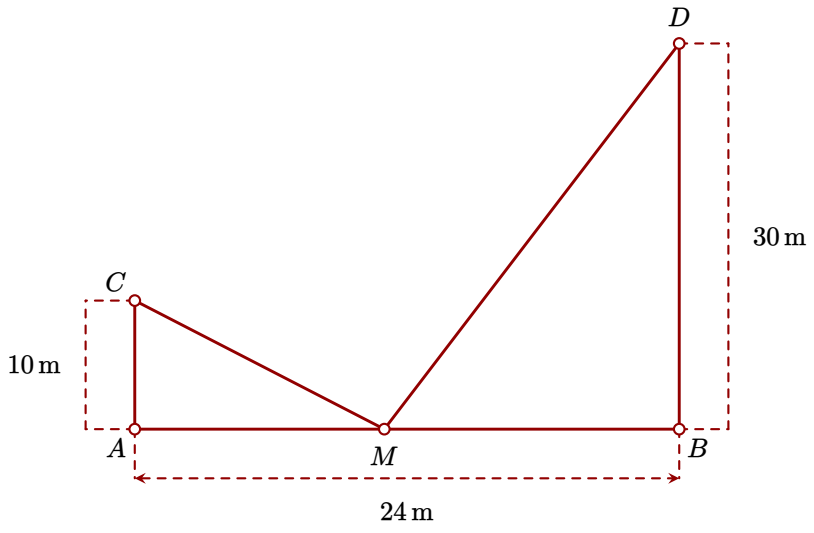
Câu 2. Nếu D_0 là chênh lệch nhiệt độ ban đầu giữa một vật M và các vật xung quanh, và nếu các vật xung quanh có nhiệt độ T_s, thì nhiệt độ của vật M tại thời điểm t (giờ) được mô hình hóa bởi hàm số $T(t)=T_s+D_0\cdot \mathrm{e}^{-kt}$ (trong đó k là hằng số dương phụ thuộc vào vật M). Một con gà tây nướng được lấy từ lò nướng khi nhiệt độ của nó đã đạt đến 195°F và được đặt trên một bàn trong một căn phòng có nhiệt độ là 65°F. Biết rằng sau nửa giờ nhiệt độ của gà tây là 150°F. Hỏi nhiệt độ của gà tây sau 60 phút gần nhất với giá trị nào sau đây.

A 123°F. B 121°F. C 120°F. D 124°F.

Câu 3. Một thùng đựng 25 viên bi được đánh số từ 1 đến 25, mỗi bi mang một số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi, xác suất để các số ghi trên bi tạo thành một cấp số cộng là

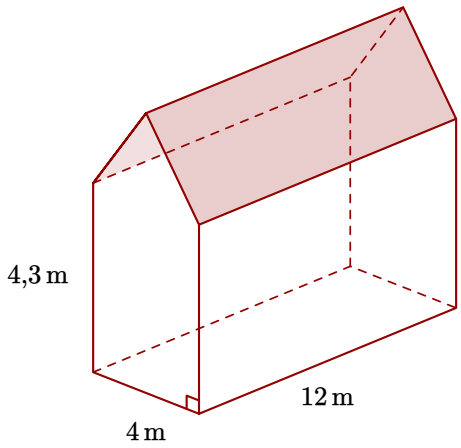
A $\dfrac{9}{1265}$. B $\dfrac{91}{12650}$. C $\dfrac{4}{575}$. D $\dfrac{2}{275}$.

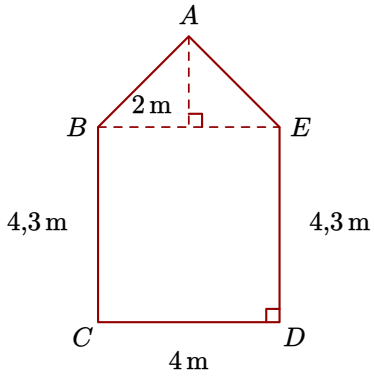
Câu 4. Có hai chiếc cọc cao 10 m và 30 m lần lượt đặt tại hai vị trí A, B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24 m. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc (như hình vẽ). Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?



A $AM=4$ m, $BM=20$ m.
B $AM=6$ m, $BM=18$ m.
C $AM=12$ m, $BM=12$ m.
D $AM=7$ m, $BM=17$ m.

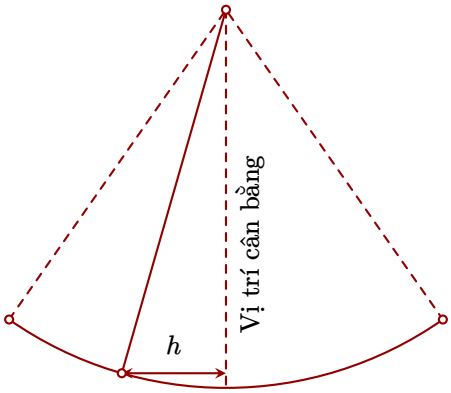
Câu 5. Một căn nhà có dạng là một hình lăng trụ ngũ giác đứng với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính thể tích căn nhà.





A $254{,}4\ \text{m}^3$. B $151{,}2\ \text{m}^3$. C $254{,}3\ \text{m}^3$. D $302{,}4\ \text{m}^3$.

Câu 6. Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 1{,}5\cos\left(\dfrac{t\pi}{4}\right)$; trong đó t là thời gian được tính bằng giây và quãng đường $h = |x|$ được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng. Trong khoảng thời gian từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng mấy lần?



A 6. B 3. C 4. D 5.

Câu 7. Khảo sát thời gian sử dụng điện thoại một ngày của học sinh lớp $11A_{01}$ thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

A $[0;20)$. B $[20;40)$. C $[40;60)$. D $[60;80)$.

Câu 8. Lớp $12A_1$ có 45 học sinh gồm 23 học sinh nữ và 22 học sinh nam, trong đó có bạn Việt (nam) làm lớp trưởng. Sắp xếp học sinh để chụp kỷ yếu trong đó có 21 bạn đứng hàng trước trong đó có bạn Việt đứng ở chính giữa và 24 bạn đứng hàng sau. Số cách sắp xếp là

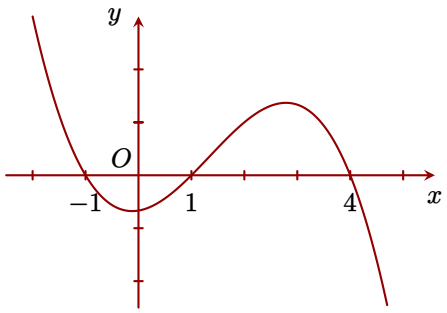
A $A_{45}^{20} \cdot 24!$. B $C_{45}^{21} \cdot 24!$. C $C_{45}^{20} \cdot 24!$. D $A_{44}^{20} \cdot 24!$.

Câu 9. Aladin nhặt được cây bút thần. Bút thần cho chàng 3 điều ước 2 điều đầu tiên tùy thích, nhưng điều ước thứ 3 của chàng là "Ước gì ngày mai tôi lại nhặt được bút thần và bút thần cho tôi số điều ước gấp đôi số điều ước của ngày hôm nay". Bút thần chấp thuận và mỗi ngày Aladin

đều thực hiện theo quy tắc như trên: ước hết các điều đầu tiên và luôn chừa lại điều cuối cùng để kéo dài thỏa thuận với bút thần cho ngày hôm sau (biết rằng mỗi ngày sau Aladin thực hiện xong các điều ước thì bút thần sẽ biến mất và trừ điều ước cuối cùng thì các điều ước còn lại của Aladin mỗi ngày là khác nhau). Sau 5 ngày gặp bút thần, tổng số điều ước khác nhau của Aladin là

A 93. B 88. C 15. D 89.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng

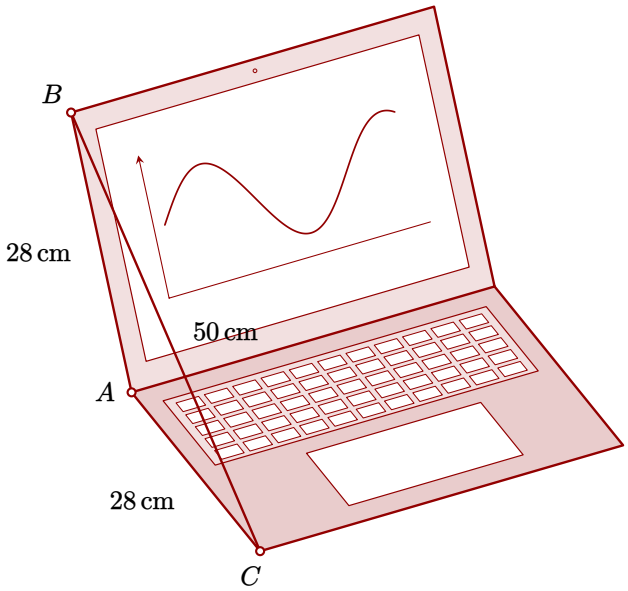


A $(-2;-1)$. B $(0;2)$. C $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. D $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Câu 11. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x>0\\ 2x^2+3m+1 & \text{khi } x\leqslant 0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A $m=1$. B $m=2$. C $m=0$. D $m=-\frac{1}{6}$.

Câu 12. Trong hình dưới đây, chiếc laptop được mở gợi nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của laptop, tính độ mở của laptop.



A $53,53°$. B $106,47°$. C $126,47°$. D $2,21°$.

Câu 13. Một mô hình kim tự tháp có dạng hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 12 cm và chiều cao bằng 16 cm. Hãy cho biết tính đúng, sai của các mệnh đề sau

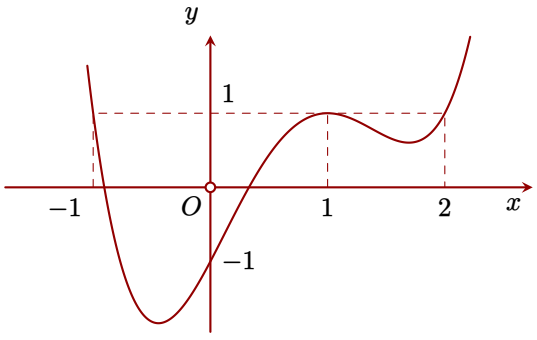
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$AB \parallel (SCD)$.	○	●
b	Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 3MD$. Mặt phẳng (ABM) cắt SC tại N. Thể tích của khối chóp $S.ABNM$ bằng 426,67 cm^3 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).	●	○
c	Góc nhị diện $[S, BC, D]$ có độ lớn bằng $69°26'$ (kết quả làm tròn đến phút).	●	○
d	Khoảng cách giữa AD và mặt phẳng (SBC) bằng 11,23 cm (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).	○	●

Câu 14. Trong một chương trình tư vấn tuyển sinh có 7 khách mời tham gia tư vấn, gồm 4 nam là M, N, P, Q và 3 nữ là X, Y, Z. Kết thúc chương trình, các khách mời đã giải đáp 7 câu hỏi. Thông tin được ghi nhận trong chương trình như sau:
- Mỗi người giải đáp tối đa hai câu và không có người nào giải đáp hai câu liên tiếp.
- Câu đầu tiên và câu cuối cùng được giải đáp bởi hai khách mời nữ.
- Q giải đáp hai câu và Y giải đáp sau khi Q đã giải đáp xong.
- Nếu N giải đáp ít nhất một câu thì M cũng giải đáp ít nhất một câu.
- P hoặc không giải đáp câu nào hoặc giải đáp hai câu.

Hãy cho biết tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Danh sách giải đáp của các khách mời, theo thứ tự từ đầu đến cuối có thể là X, P, N, Q, P, Q, Y.	○	●
b	Nếu N giải đáp hai câu thì P giải đáp câu thứ hai.	○	●
c	Nếu người giải đáp câu thứ tư cũng là người giải đáp câu thứ sáu thì Z không giải đáp câu thứ bảy.	○	●
d	Hai khách mời N và P có ít nhất một người không giải đáp câu nào.	●	○

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.	○	●
b	Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.	○	●
c	Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ dương.	●	○
d	Hàm số $g(x)=f(x-1)-x$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.	●	○

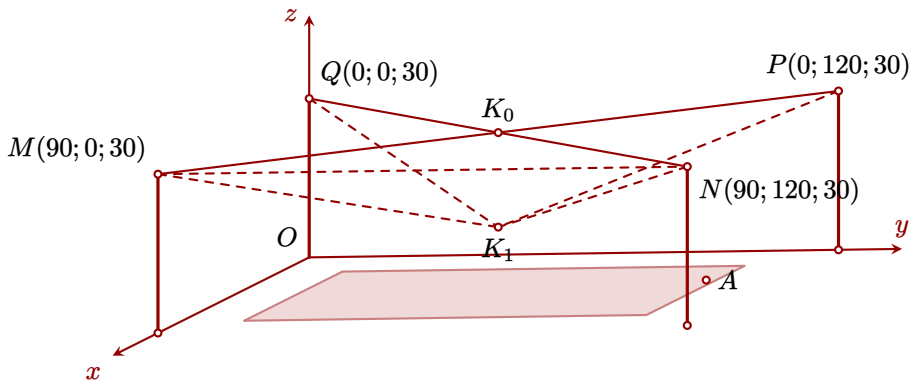
Câu 16. Một công ty chuyên về mua bán xe ô tô đã qua sử dụng, sau khi khảo sát thị trường trong thời gian 6 tháng đã đưa ra công thức về giá trị còn lại của ô tô 4 chỗ kể từ khi đưa vào sử dụng là $P(t)=A\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{4}}$. Trong đó A là giá tiền ban đầu mua xe (triệu đồng), t là số năm kể từ khi đưa xe vào sử dụng. Các khẳng định sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Theo cách tính của công ty trên, sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc xe giảm đi 8% so với giá trị ban đầu của xe.	○	●
b	Anh Bình mua chiếc xe 4 chỗ chưa qua sử dụng với giá 700 triệu, anh s dụng được 30 tháng rồi bán với giá 584 triệu. Còn anh Cường mua chiếc xe 4 chỗ chưa qua sử dụng với giá 630 triệu, anh sử dụng được 2 năm rồi bán với giá 530 triệu. Anh Bình bán xe được giá hơn anh Cường.	●	○
c	Công ty mua một chiếc xe đã sử dụng 4 năm với giá 500 triệu đồng. Vậy giá trị của chiếc xe lúc xuất xưởng là 705 triệu đồng.	○	●
d	Anh An mua chiếc xe 4 chỗ chưa qua sử dụng với giá 520 triệu đồng, anh sử dụng được một năm thì bán với giá 485 triệu đồng.Theo cách tính của công ty trên, anh An đã bán lỗ.	○	●

Câu 17. Tính tổng các giá trị của m để hàm số $y=4x^3+mx^2-3x+1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1=-2x_2$.

KẾT QUẢ:

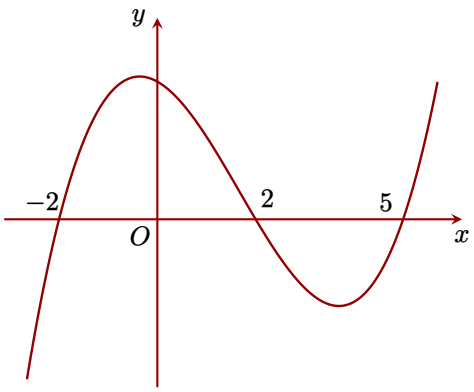
Câu 18. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định bốn chiếc cột cao 28 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;28)$, $N(90;120;28)$, $P(0;120;28)$ và $Q(0;0;28)$ (xem hình minh họa). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 26 và $K_0M=K_0N=K_0P=K_0Q$. Để theo dõi bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 18.



Tính tổng các tọa độ của K_1.

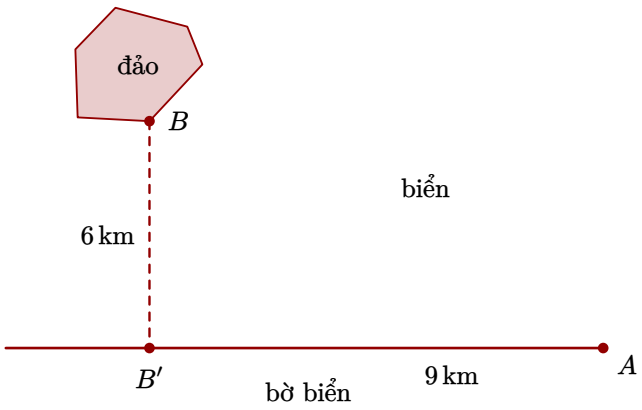
KẾT QUẢ:

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$, có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



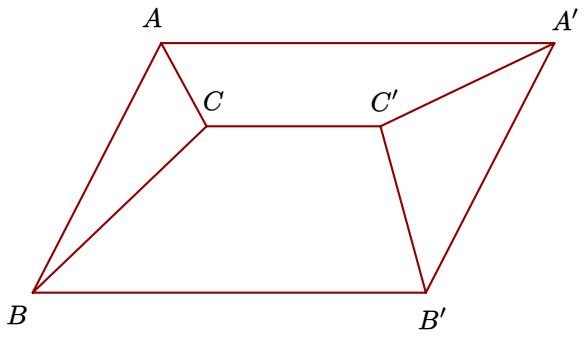
Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $g(x) = f(3 - 2x)$.

Câu 20. Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50 000 USD mỗi km, và 130 000 USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9 km.



Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng bao nhiêu?

Câu 21. Gia đình bác Bình muốn làm mái tôn cho sân thượng là hình chữ nhật $ABB'A'$ với kích thước chiều dài $AA' = 9$ m và chiều rộng $AB = 6$ m. Bác dự định làm mái tôn (kín) có thanh ngang $CC' = 7$ m nằm chính giữa mái, song song và cách mặt sàn sân thượng 1,4 m (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng chi phí làm mái tôn trọn gói cho 1 m^2 là 290 000 đồng. Tính số tiền bác Bình phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn).

Câu 22. Hai đội bóng chuyền A và B đấu với nhau một trận gồm nhiều hiệp đấu. Biết rằng mỗi hiệp đấu không có kết quả hòa và đội nào thắng 3 hiệp trước thì là đội chiến thắng chung cuộc. Trong mỗi hiệp đấu, xác suất để đội A thắng nhiều hơn 12% so với xác suất đội B thắng. Tính xác suất để đội A giành chiến thắng chung cuộc, biết rằng kết quả của các hiệp đấu là độc lập nhau (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 23. Một người vay ngân hàng 200 000 000 đồng theo hình thức trả góp hàng tháng trong 48 tháng. Lãi suất ngân hàng cố định 0,8%/tháng. Mỗi tháng người đó phải trả (lần đầu tiên phải trả là sau 1 tháng kể từ khi vay) số tiền gốc là số tiền vay ban đầu chia cho 48 và số tiền lãi sinh ra từ số tiền còn nợ ngân hàng. Tính tổng số tiền lãi người đó đã trả trong toàn bộ quá trình nợ.

Câu 24. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A. Khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng a. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABC') cũng bằng a. Tìm góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ nhỏ nhất.

2 ĐỀ CHỌN HSG VĨNH PHÚC

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A $(-1;2)$. B $(2;+\infty)$. C $(-1;+\infty)$. D $(-\infty;-1)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-2}{x-2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

B Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)$ và $\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ và $(-\infty;2)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;2)$, $B(-2;1;3)$, $C(3;2;4)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A $G\left(\dfrac{2}{3};1;3\right)$. B $G(2;3;9)$. C $G(-6;0;24)$. D $G\left(2;\dfrac{1}{3};3\right)$.

Câu 4. Tính giới hạn $y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x+4}{x-2}$.

A $y=-3$. B $y=\dfrac{3}{2}$. C $y=4$. D $y=-2$.

Câu 5. Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 - (1-2m)x + m^{2024} + 2025$ có cực trị là

A 20. B 2. C 10. D 9.

Câu 6. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ là

A -3. B 1. C -2. D 0.

Câu 7. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x-3}{x-2m+6}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

A $m=3$. B $m=-3$. C $m=2$. D $m=0$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ cho 2 véc-tơ $\vec{a} = (1;\log_3 5;m)$ và $\vec{b} = (3;\log_5 3;4)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

A -1. B 1. C $\dfrac{3}{4}$. D $-\dfrac{3}{4}$.

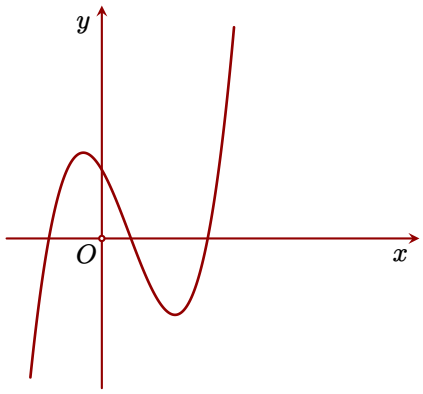
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{5}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	2	↘	-2	↗	$2\sqrt{5}$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\min\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5})} y = 0$. B $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5})} y = 2\sqrt{5}$. C $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5})} y = 2$. D $\min\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5})} y = -2$.

Câu 10. . Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới



Trong 4 số a, b, c, d có bao nhiêu số âm?

A 2. B 0. C 3. D 1.

Câu 11. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi điểm $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc $\widehat{ABC}$. Tính $a+b+c$.

A 4. B $\dfrac{22}{3}$. C 3. D 5.

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.

A $\dfrac{12}{5}$. B $\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$. C $\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$. D $\dfrac{6}{5}$.

Câu 13. Thống kê điểm kiểm tra giữa kì của lớp 12A ta được mẫu số liệu sau

Điểm	$[0;5)$	$[5;6{,}5)$	$[6{,}5;8)$	$[8;9)$	$[9;10)$
Số học sinh	3	14	20	7	1

Tìm tứ phân vị thứ 3 của mẫu số liệu đã cho (làm tròn đến hàng phần trăm).

A 7,76. B 6,91. C 6,07. D 7,54.

Câu 14. Phỏng vấn 30 học sinh lớp $11A$ về môn thể thao yêu thích thu được kết quả: Có 19 bạn thích môn Bóng đá, 11 bạn thích môn bóng bàn và 15 bạn thích cả hai môn đó. Chọn ngẫu nhiên một học sinh đã phỏng vấn. Tính xác suất để chọn được học sinh thích ít nhất một trong hai môn Bóng đá hoặc Bóng bàn.

A 0,7. B 0,5. C 0,6. D 0,3.

Câu 15. Cho tập hợp $A=(-\infty;0)$ và $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,mx^2-4x+m-3=0\right\}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để tập hợp B có đúng hai tập con và $B\subset A$?

A 1. B 2. C 3. D 0.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=22x^3-12x^2-1944x+2024$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số đồng biến trên $(7;+\infty)$.	●	○
b	Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai nửa mặt phẳng khác nhau bờ là trục hoành.	●	○
c	Hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất trên $(2;+\infty)$.	●	○
d	Hàm số $f\left(\lvert x\rvert-10\right)$ có ba điểm cực trị.	○	●

Câu 17. Trong 200 gam dung dịch muối nồng bộ 15%, giả sử thêm vào dung dịch x (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ $f\left(x\right)$%.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{100\left(x+200\right)}{x+30}$.	○	●
b	Đạo hàm của $f\left(x\right)$ luôn nhận giá trị âm trên $(0;+\infty)$.	○	●
c	Khi thêm 140 (gam) thì nồng độ là 50%.	●	○
d	Khi x tăng ra vô hạn thì nồng độ tăng nhưng không vượt quá 100.	●	○

Câu 18. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y=x-2$.	●	○
b	Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(a;b)$ với $a^2+b=12$.	●	○
c	Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x=2$ cắt hai đường tiệm cận tại A,B . Diện tích tam giác IAB bằng 12.	○	●
d	Có tất cả 9 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}=m$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<2<x_2<15$.	●	○

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(1;-2;3)$. $\overrightarrow{EB}=$

$(-1;-m;1)$, $\overrightarrow{EC}=(1;-2-m;3)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành với $D\,(3;-1;2)$.	●	○
b	Độ dài đoạn thẳng AB bằng $\sqrt{6}$.	●	○
c	Biết điểm E thuộc trục Oy và tam giác BCE vuông tại E , điểm E có tọa độ $(0;-6;0)$.	○	●
d	Điểm M là điểm nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $MA=2MB$ thì độ dài OM bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.	●	○

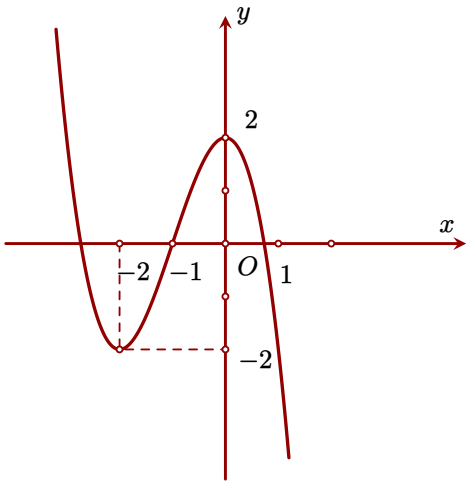
Câu 20. Một người lao động tự do, bắt đầu đi làm từ khi đủ 18 tuổi. Mỗi tháng người đó gửi một số tiền cố định vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, với lãi suất là 0,5%/tháng (lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình gửi). Các kết quả tính toán làm tròn đến hàng triệu.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Nếu mỗi tháng người đó gửi số tiền cố định 3 triệu đồng thì tính đến năm đủ 62 tuổi (sau 528 lần gửi), người đó đã gửi vào ngân hàng số tiền là một tỉ năm trăm tám mươi tư triệu đồng.	●	○
b	Nếu mỗi tháng người đó gửi số tiền cố định 3 triệu đồng thì sau đúng một tháng kể từ lần gửi thứ 528, trong tài khoản của người đó có khoảng bảy tỉ, bảy trăm năm mươi ba triệu đồng.	○	●
c	Nếu mỗi tháng người đó gửi số tiền cố định 2 triệu đồng cho đến năm 62 tuổi thì người đó không gửi nữa. Sau đúng một tháng kể từ lần gửi thứ 528, mỗi tháng người đó rút ra 30 triệu đồng. Đến năm đủ 80 tuổi (sau 216 lần rút), trong tài khoản của người đó còn khoảng ba tỉ năm trăm năm mươi tám triệu đồng.	○	●
d	Nếu mỗi tháng người đó gửi số tiền cố định 2 triệu đồng cho đến năm 62 tuổi thì người đó không gửi nữa. Sau đúng một tháng kể từ lần gửi thứ 528, mỗi tháng người đó rút ra 28 805 000 đồng. Đến năm tròn 100 tuổi (sau 456 lần rút) thì trong tài khoản của người đó còn chưa đầy một triệu đồng.	○	●

Câu 21. Tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$ là $(a;b]$. Tính $T=50a+1002b$.

KẾT QUẢ:

Câu 22. Cho đồ thị hàm số $y=f\,(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+2x}{f(x)+2}$ là bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

Câu 23. Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3-5x^2+(m+3)x+3$ (m là tham số), có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

KẾT QUẢ:

Câu 24. Cho hàm số $f(x)=x^2-4x+6$; $g(x)=\ln\left(f^2(x)-2f(x)\right)+2f^2(x)-mf(x)-1$ có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

KẾT QUẢ:

Câu 25. Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}$ m^3. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 100 000 đồng/m^2. Khi đó chi phí thuê nhân công thấp nhất là bao nhiêu triệu đồng?

KẾT QUẢ:

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có đỉnh $A'\left(\sqrt{3};-1;1\right)$. Hai đỉnh B,C thuộc trục Oz và $AA'=1$ (C không trùng với O). Biết véc-tơ $\vec{u}=(a;b;2)$ cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{A'C}$. Tính $T=a^2+b^2$.

KẾT QUẢ:

Câu 27. Có bao nhiêu số nguyên a , sao cho ứng với mỗi số a đó tồn tại ít nhất 4 số nguyên $b\in(-12;12)$ thỏa mãn $4^{a^2+b}\leqslant 3^{a^2+b}+256$?

KẾT QUẢ:

Câu 28. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho bốn điểm $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$ và $D(2;-2;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $S=a+b+c$.

KẾT QUẢ:

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD=1$; $\widehat{BAC}=60^o$; $\widehat{BAD}=90^o$; $\widehat{DAC}=120^o$. Tính côsin góc tạo bởi hai đường thẳng AG và CD , trong đó G là trọng tâm tam giác BCD (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

KẾT QUẢ:

Câu 30. Một đoàn tình nguyện đến một trường tiểu học miền núi để trao tặng cho 100 em học sinh nghèo học giỏi. Đoàn tình nguyện có 70 chiếc áo mùa đông, 90 chiếc thùng sữa tươi và 40 chiếc cặp được chia thành 100 suất quà (mỗi suất quà gồm 2 món quà: một chiếc áo mùa đông và 1 thùng sữa, 1 chiếc áo mùa đông và 1 chiếc cặp, 1 thùng sữa và 1 chiếc cặp). Tất cả các suất quà đều có giá trị tương đương nhau. Trong số các em được nhận quà có hai em Việt và Nam. Gọi P là xác suất để hai em Việt và Nam nhận được quà giống nhau. Tính 11 000P.

KẾT QUẢ:

3 LIÊN TRƯỜNG NGHỆ AN

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-2;2)$. B $(-\infty;-2)$. C $(-1;3)$. D $(2;+\infty)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(2;-3;1)$, $\vec{v}=(4;-5;-3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}-\vec{v}$ là

A $(6;-8;-2)$. B $(-2;2;4)$. C $(2;-2;-4)$. D $(-2;-2;4)$.

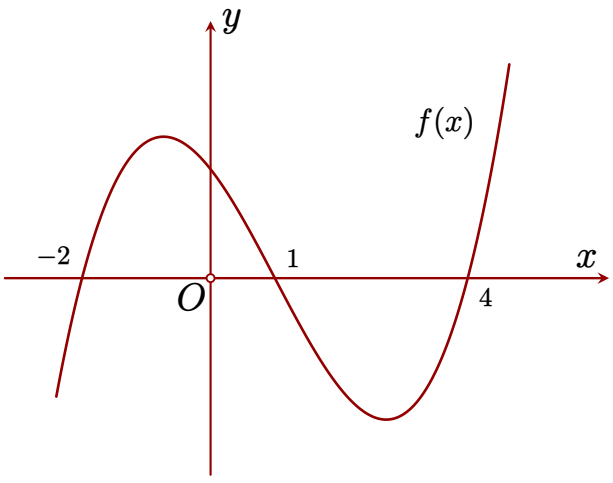
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng SA và SC bằng

A $45°$. B $30°$. C $90°$. D $60°$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Phát biểu nào sau đây là sai?

A $f(-1)>f(-5)$. B $f(0)>f(-1)$. C $f(3)>f(5)$. D $f(4)>f(2)$.

Câu 5. . Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)$ là

A 1. B 2. C 3. D 4.

Câu 6. . Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x}\left(x^{2}-5x+7\right)$ trên đoạn $[0;3]$ bằng

A 7. B 3. C 0. D e^{3}.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^{2} & \text{khi } x\leqslant 1\\ 2-x & \text{khi } x>1\end{cases}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
C Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.
D Hàm số không có cực đại.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD,BC; G là trọng tâm tam giác BCD . Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
B $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.
C $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$.
D $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Câu 9. Phương trình $\sin x-\cos x=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(-2\pi;2\pi)$?

A 5. B 3. C 4. D 6.

Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$, $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên AE và BD sao cho $AM=\dfrac{1}{3}AE$, $BN=\dfrac{1}{x}BD$ $(x>0)$. Tìm x để $MN\parallel(CDFE)$.

A $x=1$. B $x=2$. C $x=3$. D $x=4$.

Câu 11. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ (đơn vị tính là năm) của một loại bóng đèn mới như sau

Tuổi thọ	$[2;3,5)$	$[3,5;5)$	$[5;6,5)$	$[6,5;8)$
Số bóng đèn	8	22	35	15

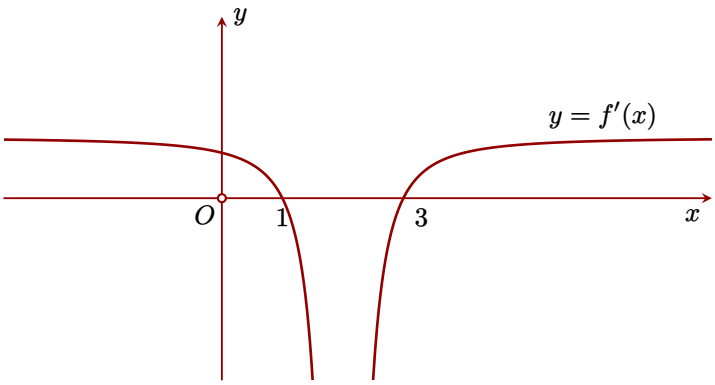
Nhóm chứa tứ phân vị của mẫu số liệu là

A $[2;3,5)$. B $[3,5;5)$. C $[5;6,5)$. D $[6,5;8)$.

Câu 12. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $\mathrm{P}(A)=0{,}3$ và $\mathrm{P}(B)=0{,}5$. Xác suất của biến cố $\overline{A}B$ bằng

A $0,35$. B $0,8$. C $0,15$. D $0,25$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+bx+c}{x-2}$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ sau:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=3$.	●	○
b	Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.	○	●
c	Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$ và đạt cực tiểu tại $x=3$.	●	○
d	Nếu $f(0)=1$ thì $\max\limits_{[3;4]} f(x)=6$.	●	○

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Thể tích của khối lập phương đã cho bằng a^3.	●	○
b	Đường thẳng $B'D$ vuông góc với mặt phẳng $(BA'C')$.	●	○
c	Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(BA'C')$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.	●	○
d	Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.	●	○

Câu 15. Cho hai hàm số $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$ và $g(x)=3^{x+1}$. Các phát biểu sau đây đúng hay sai

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D=\mathbb{R}$.	●	○
b	Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.	○	●
c	Tập nghiệm của bất phương trình $g(x)<3$ là $(-\infty;0)$.	●	○
d	Tập nghiệm của bất phương trình $f(3-g(x))\geqslant 2-x$ có 1 số nguyên.	○	●

Câu 16. Trong hộp kín có 14 quả bóng màu xanh và 6 quả bóng màu đỏ, các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả bóng. Xét các biến cố E: ”

Hai quả bóng lấy ra đều có màu xanh"; F: " Hai quả bóng lấy ra đều có màu đỏ.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Biến cố $E \cup F$ là "hai quả bóng lấy ra có cùng màu sắc".	●	○
b	Hai biến cố E và F là hai biến cố xung khắc.	●	○
c	Xác suất của biến cố F là $P(F) = \dfrac{91}{190}$.	○	●
d	Xác suất của biến cố $E \cup F$ là $P(E \cup F) = \dfrac{53}{95}$.	●	○

Câu 17. Độ bão hòa oxygen trong máu (còn được gọi là chỉ số SpO_2) biểu thị cho tỉ lệ hemoglobin có oxygen trên tổng lượng hemoglobin trong máu. Chỉ số SpO_2 (đơn vị là %) từ $97-99$ là oxygen trong máu tốt, $94-96$ là oxygen trong máu trung bình, $90-93$ là oxygen trong máu thấp, dưới 90 là trường hợp cấp cứu lâm sàng. Đo chỉ số SpO_2 ở một số bệnh nhân Covid-19 người ta thu được kết quả sau:

SpO_2 (%)	$90-93$	$94-96$	$97-99$
Số bệnh nhân	12	31	7

Tính số trung vị của mẫu số liệu đã cho ở trên (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

KẾT QUẢ:

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC = a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = \dfrac{a}{2}$. Số đo góc phẳng nhị diện $[D, SC, B]$ bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?

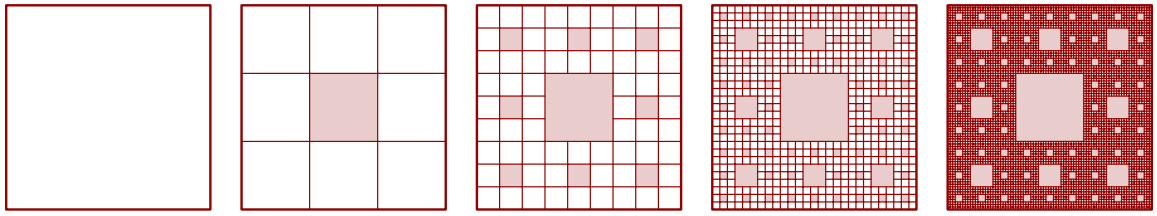
KẾT QUẢ:

Câu 19. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất là 6%/năm. Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu năm? Biết lãi suất không đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Câu 20. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược kinh doanh một loại xe X với chi phí mua vào là 27 triệu đồng/chiếc với giá bán ra là 31 triệu đồng/chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe bán ra mỗi năm là 600 chiếc. Nhằm tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính cứ giảm 1 triệu đồng/chiếc thì số lượng xe máy bán ra trong một năm tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó giá bán mới là bao nhiêu triệu đồng để thu được lợi nhuận cao nhất?

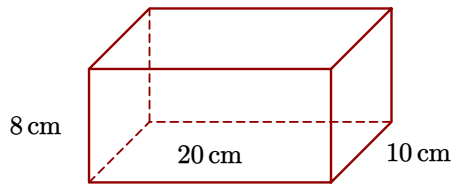
Câu 21. Một hình vuông có diện tích bằng 1 đơn vị diện tích. Chia hình vuông đó thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Với mỗi hình vuông nhỏ chưa được tô màu,

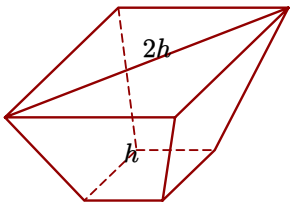
lại chia thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại. Tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ n.



Câu 22. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều. Cạnh đáy dưới dài 5 m, cạnh đáy trên dài 2 m, cạnh bên dài 3 m. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1 470 000 đồng/m^3. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp.

Câu 23. Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước chiều dài 20 cm, chiều rộng 10 cm, chiều cao 8 cm. Để san bớt nước cho đỡ đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài n cm, miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài $2n$ cm. Sau khi đổ, mực nước ở khay thứ hai cao bằng $\dfrac{2}{3}$ chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi $\dfrac{1}{4}$ so với ban đầu. Tính thể tích của chiếc khay thứ hai.





Câu 24. Có hai hộp đựng bóng bàn, các quả bóng bàn có kích thước và hình dạng như nhau. Hộp thứ nhất có 3 quả bóng bàn màu trắng và 2 quả bóng bàn màu vàng. Hộp thứ hai có 6 quả bóng bàn màu trắng và 4 quả bóng bàn màu vàng. Lấy ngẫu nhiên 4 quả bóng bàn ở hộp thứ nhất rồi bỏ vào hộp thứ hai rồi lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng bàn ở hộp thứ hai ra. Tính xác suất để lấy được 1 quả bóng bàn màu vàng ở hộp thứ hai.

4 SỞ THANH HÓA

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A 1. B 4. C 2. D 3.

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Khi đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC'}$ bằng:

A $\overrightarrow{BD}$,. B $2\overrightarrow{OC'}$. C $4\overrightarrow{AO}$,. D $2\overrightarrow{AC}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{a}=(1;-1;2)$, $\vec{b}=(2;1;-3)$, $\vec{c}=(0;3;-2)$. Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OM}+\vec{a}=2\vec{b}-\vec{c}$, tổng $x+y+z$ bằng

A 3. B -3. C 4. D -2.

Câu 4. Thời gian (phút) truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là

A $10,75$. B $4,75$. C $4,63$. D $4,38$.

Câu 5. Trên đồng hồ tại thời điểm đang xét kim giờ OG chỉ đúng số 3, kim phút OP chỉ đúng số 12. Số đo góc lượng giác mà kim giờ quét được từ lúc xét đến khi kim phút và kim giờ gặp nhau lần đầu tiên bằng

A $\alpha=\frac{\pi}{22}$. B $\alpha=-\frac{2\pi}{45}$. C $\alpha=-\frac{\pi}{21}$. D $\alpha=-\frac{\pi}{22}$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi $\begin{cases} u_1=5 \\ u_n=u_{n-1}+n \end{cases} (n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2)$ .Giá trị của u_3 là

A 10. B 14. C 7. D 9.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-2\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có phương trình là

A $y=2x+1$. B $y=x-1$. C $y=2x-3$. D $y=x+3$.

Câu 8. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Tính độ dài $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$.

A $\frac{\sqrt{6}}{2}$. B $\sqrt{3}$. C $2\sqrt{3}$. D $\sqrt{6}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;1), B(1;2;3), C(-1;2;0)$. Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)+\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MC}\right)=0$ và tồn tại số thực k thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}+k(3k+1)\overrightarrow{AC}$. Tổng $2x+y+3z-k$ bằng

A 4. B 5. C 7. D 6.

Câu 10. Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong bảng sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[40;45)$	42,5	4
$[45;50)$	47,5	14
$[50;55)$	52,5	8
$[55;60)$	57,5	10
$[60;75)$	62,5	6
$[65;70)$	67,5	2
		$n=44$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng đơn vị của đơn vị chục nghìn đồng) là

A $6,8$. B $7,3$. C $3,3$. D $46,1$.

Câu 11. Số điểm biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x(\cos 2x+\cos x)=0$ trên đường tròn lượng giác là

A 2. B 3. C 4. D 5.

Câu 12. Cho các số thực dương a,b sao cho phương trình $(a+1)^x(b+1)^{x^2-1}=1$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left(\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4x_1-4x_2\leqslant 3\sqrt[3]{4}$. Giá trị x_1+x_2 thuộc khoảng nào sau đây?

A $(-1;0)$. B $(-2;-1)$. C $(0;1)$. D $(1;2)$.

Câu 13. Cho các số thực a,b,c thoả mãn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax^2+4x+b}{x^3-3x-2}=c$. Tính $S=a^2+b^3+6c$.

A 6. B 10. C 8. D 12.

Câu 14. Gọi S là tập hợp các số có 4 chữ số được lấy từ các chữ số $2;3;4;5;6;7;8$. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập S, tính xác suất để lấy được số chẵn có dạng $\overline{abcd}$ mà $a\leqslant b<c\leqslant d$

A $\dfrac{2}{21}$. B $\dfrac{8}{343}$. C $\dfrac{80}{2401}$. D $\dfrac{76}{2401}$.

Câu 15. Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ và đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x-1$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A 4. B 2. C $\sqrt{2}$. D $2\sqrt{2}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD=2AB=2\sqrt{2}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=4$. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{SN}=y\overrightarrow{SC}$ và độ dài đoạn MN nhỏ nhất. Tổng $2x+3y$ bằng

A 4. B $\dfrac{11}{7}$. C 3. D $\dfrac{22}{7}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện đều $KABC$ có các điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz sao cho $OA = OB = OC = a$. Biết điểm K có tọa độ là các số dương và $OK = \sqrt{6}$. Giá trị a thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. B $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}\right)$. C $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. D $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 18. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $10\left(x^2+y^2-xy\right)-\log_3^2(x+y-1)\geqslant x^3+y^3-4$?

A 25. B 30. C 40. D 45.

Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AA', biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng 60°.

A $\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. B $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. C $\dfrac{3a}{4}$. D $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 20. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu từ một hộp chứa 50 quả cầu được đánh số từ 1 đến 50 sao cho tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số chia hết cho 8?

A 9930. B 11950. C 9650. D 9950.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
		$-\infty$	$\|$				

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số $f(x)$ có cực tiểu bằng 3.	○	●
b	Trên đoạn $[1;2]$, hàm số $y=2+\sqrt{f(x)-2}$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2.	○	●
c	Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai đường tiệm cận vuông góc với nhau.	●	○
d	Trên khoảng $(-3;-1)$, hàm số $y=3-2f(2-f(x))$ nghịch biến.	○	●

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;2;0)$, $C(0;2;0)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	B là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy).	●	○
b	Không tồn tại điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA = MB = MC$.	●	○
c	Gọi (H) là khối hộp nhận các điểm A, B, C, O làm đỉnh và có một đỉnh thuộc trục Ox khác O. Thể tích khối hộp (H) bằng 4.	○	●
d	Nếu điểm $D(x;y;z)$ thỏa mãn $DA = DB = DC$ và OD song song với mặt phẳng (ABC) thì tổng $2x + y - 3z = 6$.	○	●

Câu 23. Bảng sau thống kê lại tổng số giờ nắng trong tháng 6 của các năm từ 2002 đến 2021 tại hai trạm quan trắc đặt ở Nha Trang và Quy Nhơn

.

Số giờ nắng	[130; 160)	[160; 190)	[190; 220)	[220; 250)	[250; 280)	[280; 310)
Số năm ở Nha Trang	1	1	1	8	7	2
Số năm ở Quy Nhơn	0	1	2	4	10	3

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Xét số liệu ở Nha Trang thì khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $32, 64$.	○	●
b	Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì số giờ nắng trong tháng 6 của Quy Nhơn đồng đều hơn.	●	○
c	Xét số liệu của Quy Nhơn ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: $30, 59$.	●	○
d	Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì số giờ nắng trong tháng của Nha Trang đồng đều hơn.	○	●

Câu 24. Giả sử số mi-li-gam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một tháng tại một thành phố công nghiệp được xác định bởi công thức $P(t) = \left|a + b\sin\left[\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right)\right]\right|$,

$a, b > 0$, trong đó t là số ngày kể từ ngày thứ bảy của tuần đầu tiên của tháng đó.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một ngày của tháng không vượt quá $a + b$.	●	○
b	Trong một tháng số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng nhau sau ít nhất 7 ngày.	●	○
c	Giả sử ngày thứ bảy của tuần đầu tiên cũng là ngày đầu tiên của tháng một và trong tháng Một hệ số $a = 30, b = 15$. Khi đó có 2 ngày trong một tháng Một số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng $37,5$ (miligam).	○	●
d	Biết chất ô nhiễm trong một mét khối không khí cao nhất là 50 miligam và thấp nhất là 20 miligam. Trong các ngày: ngày thứ Hai của tuần thứ 2 , ngày thứ Tư của tuần thứ 3 và ngày thứ Ba của tuần thứ 4 và ngày thứ Sáu của tuần thứ 4 của tháng thì số miligam chất ô nhiễm nhiều nhất M , ít nhất là m . Khi đó $M - m$ nhỏ hơn 23.	○	●

Câu 25. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi E là điểm đối xứng với D qua trung điểm P của SA và M là trung điểm của AE.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Đường thẳng PM vuông góc với đường thẳng CD.	●	○
b	Gọi J là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{JD} + 3\overrightarrow{JS} = \overrightarrow{0}$. Khi đó, đường thẳng JC cắt mặt phẳng (MAB).	○	●
c	Số đo của góc nhị diện $[M, BC, A]$ bằng α mà $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.	●	○
d	Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{\sqrt{31}}{14}a$.	○	●

Câu 26. Trong một trò chơi, người dẫn chương trình yêu cầu 18 thành viên đứng ngẫu nhiên, cách đều nhau và tạo thành một vòng tròn. Sau đó, người dẫn chương trình gọi ngẫu nhiên 4 thành viên để bốc thăm câu hỏi, các thành viên được chọn sẽ bốc câu hỏi từ một hộp đựng 8 câu hỏi khác nhau, mỗi người bốc đúng một câu hỏi và không bỏ lại vào hộp. Để hoàn thành trò chơi,

mỗi người phải thực hiện yêu cầu của thăm mà người đó bốc được.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Số cách xếp các thành viên đứng thành vòng tròn là 18!.	○	●
b	Số cách chọn ra 4 thành viên sao cho có đúng 2 người đứng cạnh nhau là 1404.	●	○
c	Số cách chọn ra \$\$4 thành viên và đều thực hiện bốc câu hỏi là \$12533760\$.	○	●
d	Xác suất để chọn được 4 thành viên không có 2 thành viên nào đứng cạnh nhau và đều thực hiện bốc câu hỏi bằng $\frac{91}{170}$.	●	○

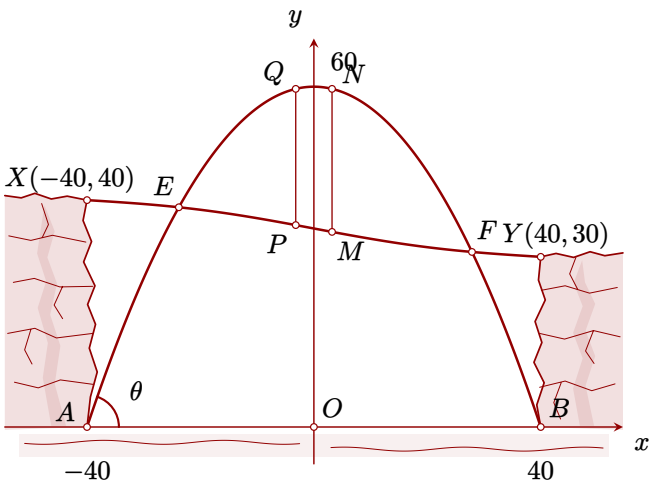
Câu 27. Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

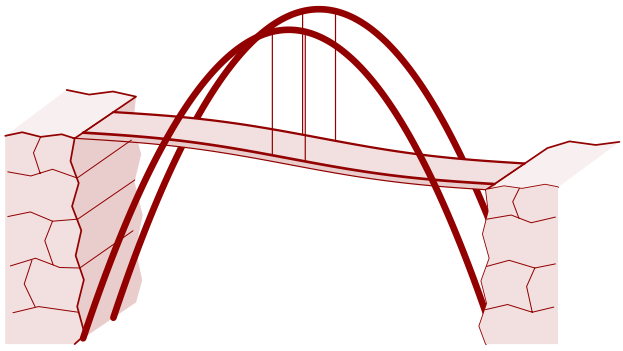
x	0	1	2	3	5
$u(x)$	4 ↘	1 ↗	3 ↘	1 ↗	3

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m bé hơn 205 để bất phương trình $\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}$.

KẾT QUẢ:

Câu 28. Thành phố A dự định xây một cây cầu bắc qua một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Mô hình thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới. Cây cầu XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình $y=\frac{1}{25600}x^3+ax+b$ với a,b là các số thực. Hai cáp treo MN,PQ (cùng song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của parabol và cầu XY. Tổng độ dài hai đoạn cáp treo dài bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng chục của đơn vị mét)? Biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua trục Oy và MN là đoạn có độ dài lớn nhất.





KẾT QUẢ:

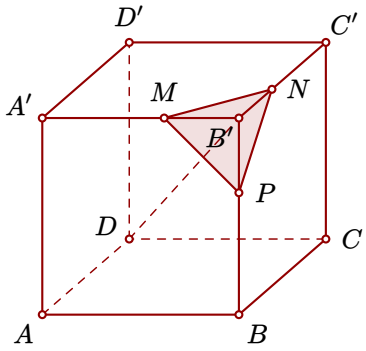
Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(3;4;4)$, $B(1;-1;0)$, $C(3;2;4)$, $D(2;0;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ di động trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $P=\left(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\right)^2+2MB^2+3MC^2-4MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

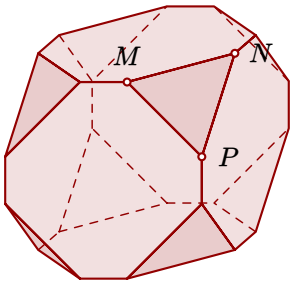
KẾT QUẢ:

Câu 30. Gọi x là số thực dương sao cho tồn tại số thực y không bé hơn 1 thỏa mãn $(xy^2+x-2y-1)\log y=\log\dfrac{2y-x+3}{x}$. Có bao nhiêu số nguyên trong tập giá trị của biểu thức $P=\sqrt{6}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5}-\dfrac{\pi}{4}\right)-3\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5}+\dfrac{\pi}{4}\right)$?

KẾT QUẢ:

Câu 31. Một loại đá quý có dạng khối lập phương, cạnh bằng 2 cm. Để làm đồ mỹ nghệ, với mỗi đỉnh của khối lập phương người ta cắt khối lập phương bởi một mặt phẳng vuông góc với đường chéo của hình lập phương xuất phát từ đỉnh đó để tạo thành một khối mới có 14 mặt mà diện tích của tất cả các mặt bằng nhau. Thể tích của khối thu được sau khi cắt bằng bao nhiêu cm^3 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của đơn vị cm^3)? Giả sử mặt phẳng vuông góc với đường chéo $B'D$ cắt các cạnh $B'A', B'C', B'B$ lần lượt tại M, N, P.





KẾT QUẢ:

Câu 32. Một hộp đựng 8 thẻ được đánh số từ 2 đến 9. Bạn Lê lấy ngẫu nhiên một thẻ, ghi lại số trên thẻ rồi bỏ thẻ vào hộp. Lần thứ hai, bạn Lê cũng lấy ngẫu nhiên một thẻ, ghi lại số trên thẻ rồi bỏ thẻ vào hộp. Tiếp tục như vậy, sau năm lần bạn Lê đã ghi lại được 5 chữ số. Xác suất để trong 5 số ghi được có đúng 2 chữ số chia hết cho 4 là $\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $5a-2b$ bằng bao nhiêu?

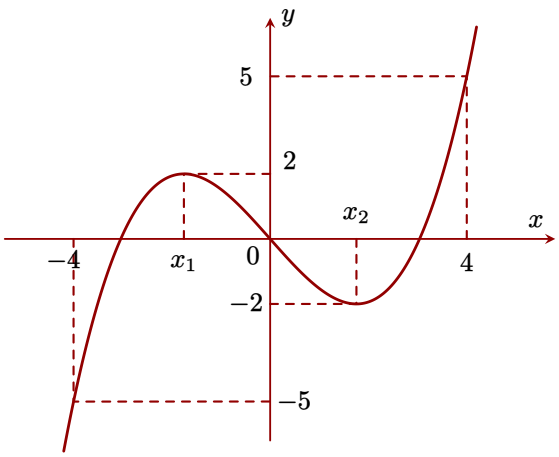
KẾT QUẢ:

5 MINH HỌA NINH BÌNH

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3 - m$, với m là tham số. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2;-2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tính tổng các phần tử của S.

A $(-2;2)$. B $(-2;4)$. C $(-4;2)$. D $(2;4)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là hình cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2f(x)$ trên đoạn $[-4;4]$ bằng

A $\dfrac{5}{2}$. B 5. C 10. D -5.

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-4x+2y-4=0$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đường tròn (C) song song với đường thẳng $\Delta\colon 3x+4y-17=0$?

A 0. B 1. C 2. D 3.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. B $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C $4\sqrt{3}a^3$. D $\dfrac{8a^3}{3}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;-3;2)$ và $B(3;1;4)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$. B $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=36$.

C $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=36$. D $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 6. Có 2 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B và 4 học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh lớp B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp như vậy?

A 80640. B 145152. C 217728. D 108864.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \log_2\left(x - \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \dfrac{17}{4}}\right)$. Tính giá trị của biểu thức $T = f\left(\dfrac{1}{2025}\right) + f\left(\dfrac{2}{2025}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{2024}{2025}\right)$.

A $T = \dfrac{2025}{2}$. B $T = 2025$. C $T = 2024$. D $T = 1012$.

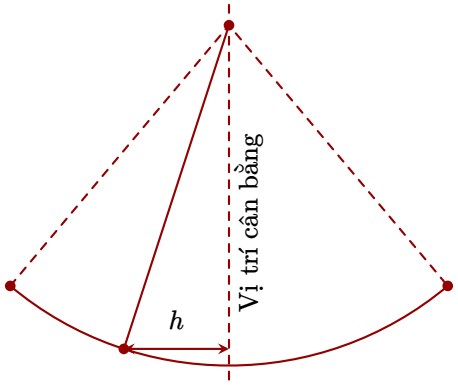
Câu 8. Ba vận động viên bóng rổ thi ném bóng trúng rổ, mỗi vận động viên có xác suất ném bóng trúng rổ là x; 0,8; y với x.

A $0,4202$. B $0,568$. C $0,116$. D $0,432$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Mặt phẳng $(P)\colon 2x+my+nz+p=0$ $(m,n,p\in\mathbb{R})$ chứa Δ và tạo với d một góc lớn nhất. Giá trị biểu thức $T=mnp$ là

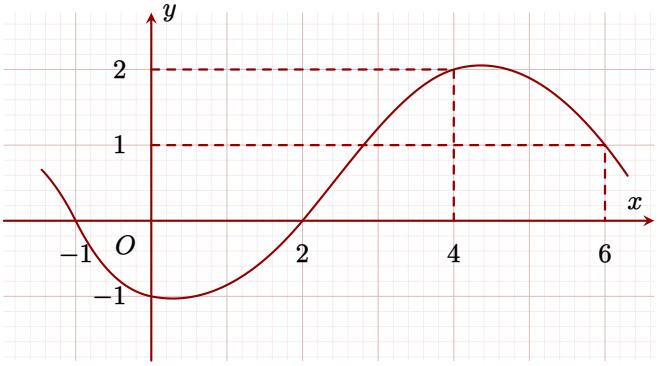
A 60. B -30. C -20. D 30.

Câu 10. Mùa xuân ở Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (tính bằng mét) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng (mô phỏng ở hình vẽ dưới đây) được biểu diễn qua thời gian t ($t\geqslant 0$ và được tính bằng giây) bởi hệ thức $h=|d|$ với $d=3\cos\left[\dfrac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước rằng $d>0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d<0$ trong trường hợp trái lại. Một người chơi đạt cảm giác mạnh nhất khi ở vị trí xa nhất so với vị trí cân bằng. Hỏi trong khoảng thời gian 1 phút, người chơi đu đạt được cảm giác mạnh bao nhiêu lần?



A 40 lần. B 20 lần. C 19 lần. D 39 lần.

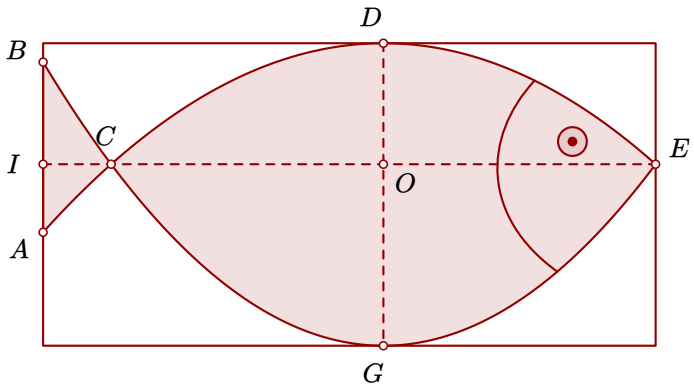
Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ dưới đây.



Trên đoạn $\left[-\sqrt{7};\sqrt{7}\right]$, hàm số $h(x)=f\left(x^2-1\right)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

A $x=\sqrt{7}$. B $x=\sqrt{5}$. C $x=0$. D $x=\sqrt{3}$.

Câu 12. Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, hoạ sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y=f(x)$; $y=g(x)$ với các kích thước $IC=1$ dm; $CO=OE=4$ dm; $OD=2$ dm; $OG=3$ dm (như hình vẽ dưới đây).



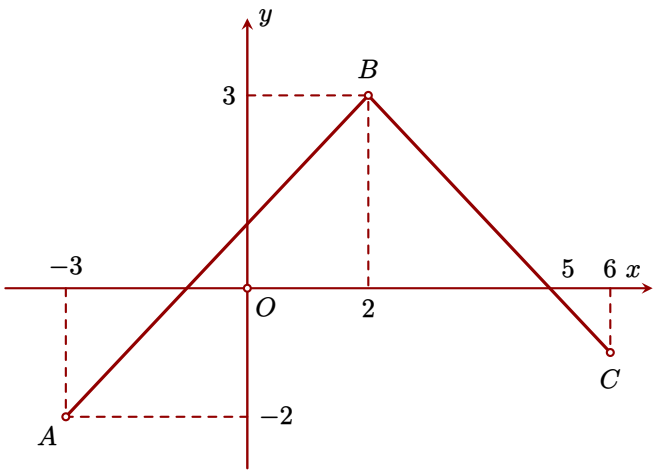
Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

A $42,3\%$. B $68,9\%$. C $31,1\%$. D $57,7\%$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$ có đồ thị (C). Các khẳng định sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.	○	●
b	Đường tiệm cận xiên của (C) có phương trình là $y=x+3$.	●	○
c	Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(2x)$ trên đoạn $\left[\dfrac{3}{4};2\right]$ là $\dfrac{13}{2}$.	●	○
d	Có 3 số nguyên dương m để hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-m}{x-1}$ có hai điểm cực trị.	○	●

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-3;6]$ là đường gấp khúc gồm hai đoạn thẳng AB, BC như hình vẽ dưới đây. Khi đó



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$f'(6) = -1$.	●	○
b	$f(5) > f(6) > f(2)$.	●	○
c	Nếu $f(4) = 3$.	○	●
d	$\int_{-3}^{6} f(x)dx = \dfrac{125}{3}$.	●	○

Câu 15. Mức lương theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của nhân viên ở hai công ty A, B như sau:

Mức lương theo tháng (triệu đồng)	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$
Số nhân viên của công ty A	15	18	10	10	5	2
Số nhân viên của công ty B	16	15	12	9	5	3

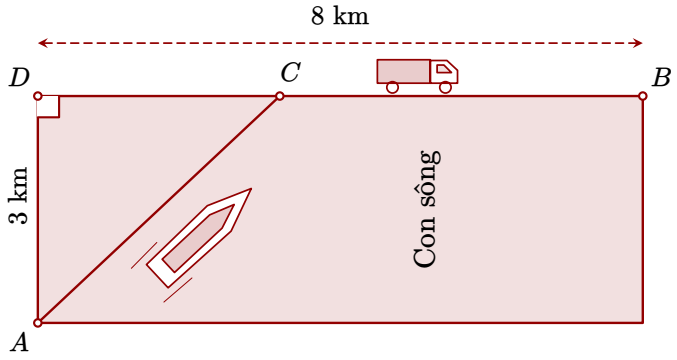
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Mức lương trung bình theo tháng của nhân viên ở công ty A là 20,67 triệu đồng (làm tròn đến hàng phần trăm).	●	○
b	Đối với công ty A, nhân viên có mức lương tối đa khoảng 18 triệu đồng.	○	●
c	Đối với công ty B, 25% số nhân viên có mức lương từ 26,11 triệu đồng trở lên (làm tròn đến hàng phần trăm).	○	●
d	Công ty A có mức lương đồng đều hơn công ty B.	●	○

Câu 16. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh $A'B'$, CC', AD. Biết rằng BM và NP vuông góc với nhau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng $45°$.	○	●
b	Khoảng cách giữa hai đường thẳng BP và MC' bằng $a\sqrt{2}$.	○	●
c	Nếu ϕ là góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ thì $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.	●	○
d	Thể tích khối tứ diện $AMNP$ bằng $\dfrac{1}{16}a^3$.	○	●

Câu 17. Một người cần phải chèo thuyền từ vị trí A đến vị trí C trên bờ BD, sau đó chạy bộ từ C đến B. Biết rằng vận tốc chèo thuyền bằng 6 km/h, vận tốc chạy bộ là 8 km/h, khoảng cách

từ vị trí A đến bờ BD bằng 3 km, khoảng cách hai vị trí B, D bằng 8 km. Tính khoảng cách giữa hai vị trí B, C để tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ là nhỏ nhất (làm tròn đến kết quả hàng phần chục).



KẾT QUẢ:

Câu 18. Một nhóm các nhà khoa học đang thử nghiệm một loại thuốc mới nhằm tiêu diệt các vi khuẩn lây bệnh. Nếu số lượng vi khuẩn nhỏ hơn 10^4 thì khả năng lây nhiễm không còn. Một thí nghiệm bắt đầu với 10^9 vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi 4 giờ có thể tiêu diệt $4 \cdot 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, do cơ chế sinh trưởng, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%. Hỏi trong thí nghiệm trên cần dùng bao nhiêu liều thuốc thì vi khuẩn không có khả năng lây bệnh.

KẾT QUẢ:

Câu 19. Một con súc sắc không đồng chất sao cho mặt bốn chấm xuất hiện nhiều gấp 3 lần các mặt khác, các mặt còn lại đồng khả năng. Gieo con súc sắc đó 5 lần liên tiếp. Xác suất để mặt có số chấm chẵn xuất hiện 2 lần trong 5 lần gieo là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KẾT QUẢ:

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $A(1;2;-1)$, cắt trục Ox tại điểm B và vuông góc với đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KẾT QUẢ:

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, một cabin xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều dọc theo đường cáp có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-2;1)$ với tốc độ là $v = 4{,}5$ m/s. Sau khi xuất phát được t giây thì cabin dừng ở điểm B có hoành độ bằng 550. Biết rằng đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét, tính độ dài quãng đường AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

KẾT QUẢ:

Câu 22. Bạn Hoa phải thực hiện hai thí nghiệm liên tiếp. Thí nghiệm thứ nhất có xác suất thành công là 0,7. Nếu thí nghiệm thứ nhất thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ 2 là 0,8. Nếu thí nghiệm thứ nhất không thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ 2 chỉ là 0,4. Tính xác suất để thí nghiệm thứ nhất thành công, biết rằng thí nghiệm thứ 2 thành công (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KẾT QUẢ:

6 SỞ BẮC NINH

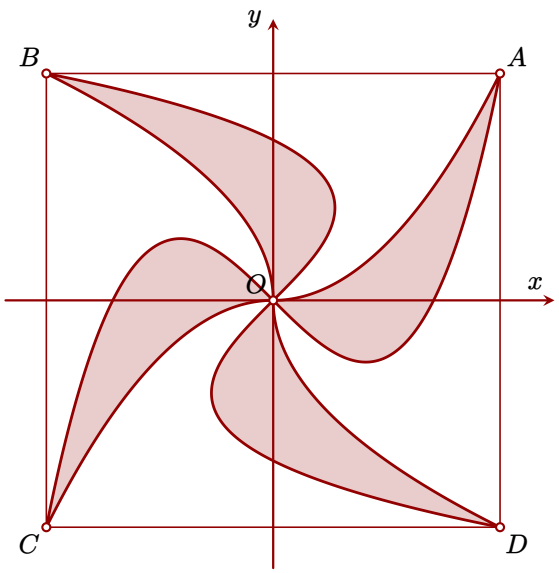
Câu 1. Có hai mươi tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên 6 tấm thẻ. Xác suất để trong 6 tấm thẻ được chọn có hai tấm thẻ mà tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ bằng 21.

A $\dfrac{267}{323}$. B $\dfrac{211}{323}$. C $\dfrac{10}{323}$. D $\dfrac{1}{19}$.

Câu 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 2. Gọi E, F, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, AD và G là trực tâm tam giác BCD. Giá trị $\cos\left(\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{MF}\right)$ bằng

A $\dfrac{2}{3}$. B $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. C $\dfrac{1}{3}$. D $\dfrac{3}{4}$.

Câu 3. Mặt sàn của một thang máy có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2 m được lát gạch màu trắng và được trang trí bởi một hình 4 cánh giống nhau màu sẫm. Khi đặt trong hệ trục tọa độ Oxy với O là tâm hình vuông sao cho $A(1;1)$ thì hai đường cong nối từ O đến A của cánh hình màu sẫm là một phần của đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = ax^3 + bx$ (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị của tích ab bằng bao nhiêu, biết rằng diện tích hình màu sẫm chiếm $\dfrac{1}{3}$ diện tích mặt sàn?



A -3. B 2. C -2. D 3.

Câu 4. Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng m kg được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích là $5\sqrt{2}$ N. Lấy $g = 10$ m/s^2. Khi đó giá trị của m bằng?

A 4. B 5. C 3. D 2.

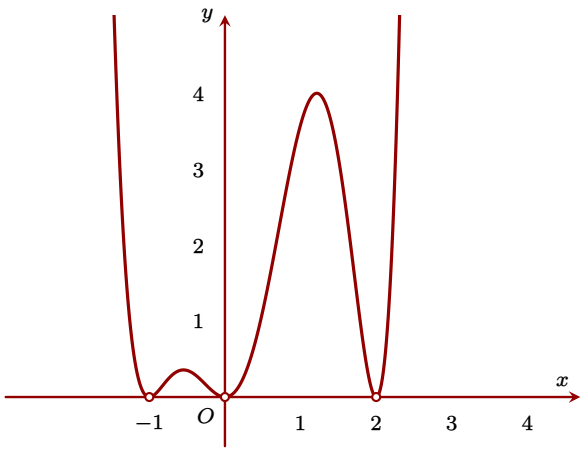
Câu 5. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$

A 2. B 1. C 3. D 0.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$, điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Độ dài đoạn AM bằng?

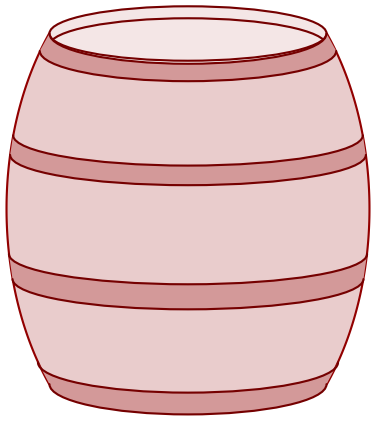
A $\sqrt{17}$. B $\sqrt{10}$. C $\sqrt{29}$. D $\sqrt{23}$.

Câu 7. Cho hai hàm số bậc ba $f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$ và $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+nx+p$. Hàm số $y=f(x)\cdot g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $x=0$ là điểm cực đại của hàm số $y=g(x)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;3]$ bằng



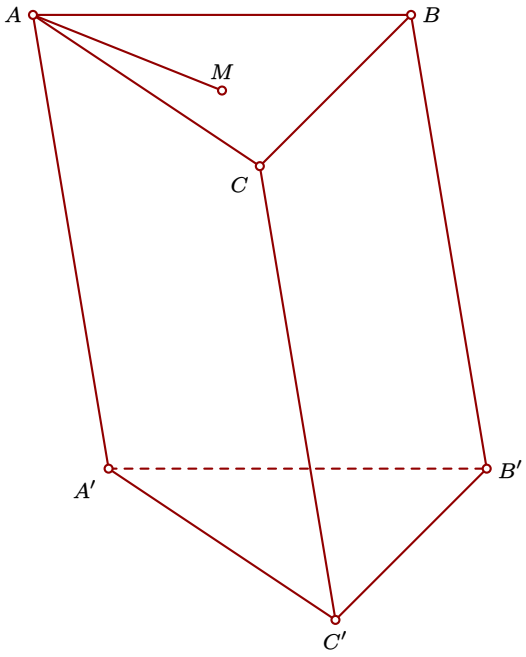
A -3. B 0. C -12. D $-\dfrac{32}{9}$.

Câu 8. Một thùng chứa rượu làm bằng gỗ là một hình tròn xoay như hình bên có hai đáy là hai hình tròn bằng nhau, khoảng cách giữa hai đáy bằng 8 dm. Đường cong mặt bên của thùng là một phần của đường elip có độ dài trục lớn bằng 10 dm, độ dài trục bé bằng 6 dm (tham khảo hình vẽ). Hỏi chiếc thùng gỗ đó đựng được bao nhiêu lít rượu?



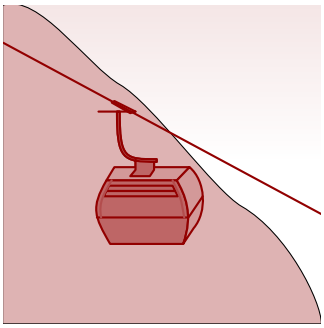
A $\dfrac{1416\pi}{25}$ (lít). B $\dfrac{1516\pi}{25}$ (lít). C $\dfrac{1316\pi}{25}$ (lít). D $\dfrac{1616\pi}{25}$ (lít).

Câu 9. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $AA'=2a$, $\widehat{A'AB}=\widehat{A'AC}=60^\circ$. Gọi M là điểm di động trên mặt phẳng (ABC) sao cho AM vuông góc với BB'. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng $B'M$ là



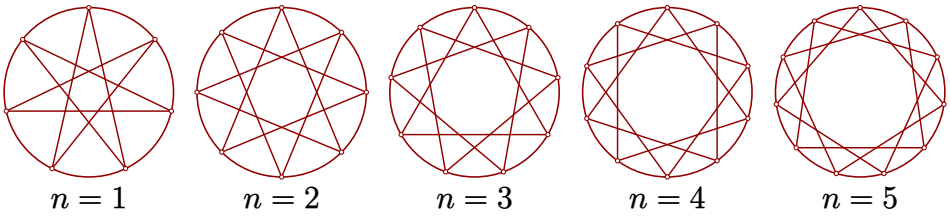
A $\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$. B $\dfrac{a\sqrt{33}}{3}$. C $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. D $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là mét, một Cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(-2;1;5)$ và chuyển động đều theo đường cáp cùng hướng với véc-tơ $\overrightarrow{u}=(0;-2;6)$ với tốc độ 4 m/s. Giả sử sau 5 giây kể từ lúc xuất phát, Cabin đến điểm $M(a;b;c)$. Giá trị của tổng $a+2b+c$ bằng



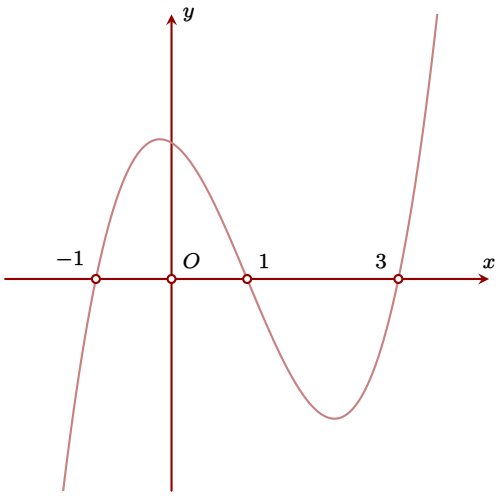
A $12\sqrt{10}$. B 9. C 6. D $5+2\sqrt{10}$.

Câu 11. Với mỗi số nguyên dương n, lấy $n+6$ điểm cách đều nhau trên đường tròn. Nối mỗi điểm với các điểm cách nó hai điểm trên đường tròn để tạo ra ngôi sao như hình vẽ dưới đây. Số đo (đơn vị độ) của góc ở đỉnh ngôi sao khi $n=94$ bằng



A $1,8°$. B $169,2°$. C $138,4°$. D $172,8°$.

Câu 12. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị cắt trục Ox tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng -1; 1; 3 như hình vẽ.



Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\dfrac{f(x+2)}{f(x-2)} \leqslant 0$ là?

A 5. B 7. C 4. D 6.

Câu 13. Cho các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-3$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}[2f(x)-4g(x)]$ bằng

A -8. B -14. C 20. D 16.

Câu 14. Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	$[2,7;3,0)$	$[3,0;3,3)$	$[3,3;3,6)$	$[3,6;3,9)$	$[3,9;4,2)$
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A $0,5$. B $0,575$. C $0,9$. D $0,975$.

Câu 15. Ta có: $4^x+4^{-x}=62 \Leftrightarrow \left(2^x+2^{-x}\right)^2=64 \Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=8$. Vậy $P=\log_2\left(2^x+2^{-x}\right)=\log_2 8=3$

A $\log_2 5$. B 4. C $\log_2 3$. D 3.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(4;1;5)$, $B(3;2;1)$, $C(-3;4;2)$. Điểm $M(a;b;0)$ sao cho $S=MA^2+MB^2-MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $3a+b$ bằng

A $-\dfrac{19}{3}$. B -29. C 29. D $\dfrac{19}{3}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon (m^2+1)x+(2m-1)y-z-m^2+m-3=0$. Có bao nhiêu số thực m để đường thẳng d song song với mặt phẳng (P)?

A 0. B 3. C 1. D 2.

Câu 18. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 6 giây thì gặp chướng ngại vật nên ô tô đi chậm dần với vận tốc $v(t)=-\dfrac{5}{2}t+a$ (m/s), $(t\geqslant 6)$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến lúc dừng hẳn thì ô tô đi được quãng đường là 80 m. Giá trị của v_0 bằng

A 10 (m/s). B 35 (m/s). C 20 (m/s). D 25 (m/s).

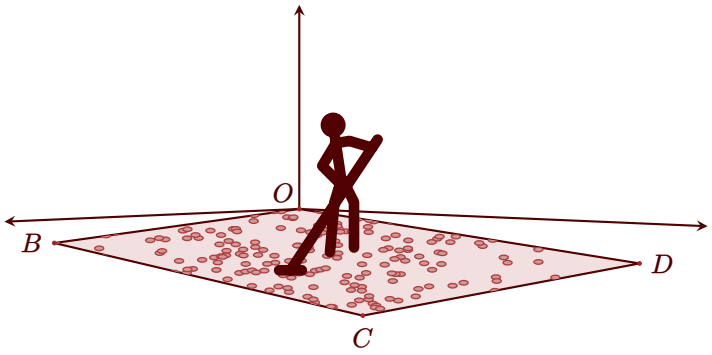
Câu 19. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{c} - \frac{a}{b}$ với a, b, c là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

A 28. B 23. C 32. D 25.

Câu 20. Chọn ngẫu nhiên 3 số tự nhiên từ tập hợp $S = \{9; 10; 11; \ldots; 24\}$. Xác suất để tổng bình phương của 3 số được chia hết cho 4 là

A $\dfrac{1}{10}$. B $\dfrac{1}{140}$. C $\dfrac{3}{5}$. D $\dfrac{2}{5}$.

Câu 21. Ở một số vùng đồng quê xưa ở Việt Nam, trước mỗi nhà thường có một khoảng sân rộng để phơi lúa vào mùa gặt và cũng là nơi để tổ chức một số sự kiện gia đình. Nhà ông M dự định xây một sân trước cửa nhà hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh lần lượt là $AB = 5$ m và $AD = 12$ m. Để thuận lợi cho việc thoát nước khi trời mưa và khi rửa sân nên ông M xây vị trí B thấp hơn vị trí A là 5 cm, vị trí D thấp hơn vị trí A là 8 cm (tham khảo hình vẽ). Hỏi vị trí C thấp hơn vị trí A là bao nhiêu centimet?



A 10. B 13. C 14. D 11.

Câu 22. Cho ba số $a + \log_2 3$; $a + \log_4 3$; $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân đó bằng

A $\dfrac{1}{2}$. B $\dfrac{1}{3}$. C $\dfrac{1}{4}$. D 1.

Câu 23. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tổng $S = 2m + 3M$ là

A $-\dfrac{7}{2}$. B $-\dfrac{3}{2}$. C 4. D -3.

Câu 24. Thời gian hoàn thành một bài viết chính tả của một học sinh lớp 4 trường A được cho ở bảng sau

Thời gian (phút)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)	[10;11)
Số học sinh	8	10	12	14	7

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A 5. B 1. C 4. D 3.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(3; +\infty)$. B $(-\infty; 1)$. C $(-\infty; -1)$. D $(1; 3)$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-3	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số $y=f(3x)$ là

A $x=-\dfrac{2}{3}$. B $x=\dfrac{2}{3}$. C $x=2$. D $x=-2$.

Câu 27. Cho a,b là các số thực thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+ax^2-4x+b}{(x-1)^2}=5$. Giá trị của $2a+b$ bằng

A 7. B 6. C 1. D 5.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(4)-G(4)=3$ và $2F(1)-G(1)=1$. Khi đó $\displaystyle\int_1^2 f(3x-2)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 3. B $\dfrac{1}{2}$. C 2. D $\dfrac{2}{3}$.

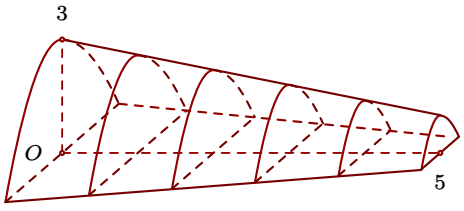
Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;1)$, $B(-1;-2;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon x+y+z=0$ là

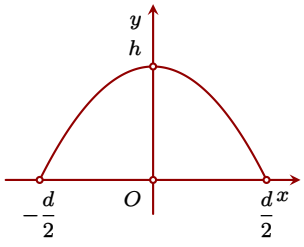
A $x-y-z=0$. B $x-z-2=0$. C $x-y-1=0$. D $y-z=0$.

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm tam giác BCD và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$. Tỉ số $\dfrac{GA}{GA'}$ bằng

A 3. B $\dfrac{1}{2}$. C $\dfrac{1}{3}$. D 2.

Câu 31. Một đường hầm mô hình như hình vẽ có chiều dài 5 cm. Khi cắt mô hình này bởi các mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được mặt cắt là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao. Ở đó hình parabol là hình phẳng được giới hạn bởi một đường parabol và đoạn thẳng nối hai điểm thuộc parabol đồng thời vuông góc với trục đối xứng của parabol đó được gọi là đáy, khoảng cách từ đỉnh của parabol xuống đáy gọi là chiều cao. Chiều cao của mỗi mặt cắt hình parabol cho bởi công thức $y=3-\dfrac{2}{5}x$ cm, với x cm là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình đến mặt phẳng chứa mặt cắt.



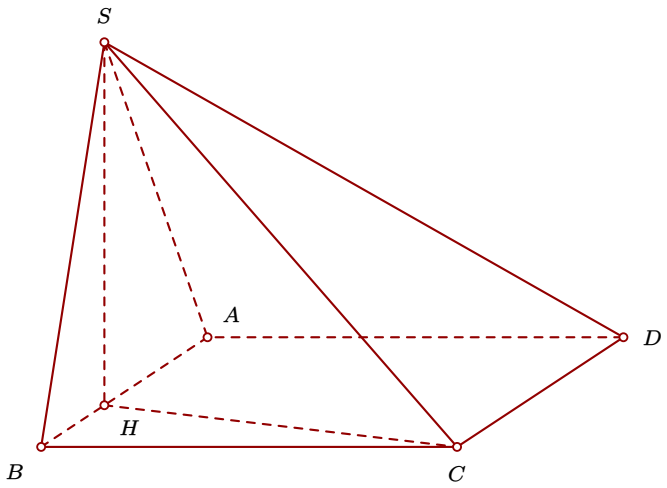


	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Nếu một hình parabol có đáy bằng d và chiều cao bằng h như hình vẽ thì phương trình của parabol là $y = -\dfrac{4h}{d^2}x^2 + h$.	○	●
b	Diện tích cửa lớn của đường hầm mô hình bằng 12 cm^2.	●	○
c	Chiều cao cửa nhỏ của đường hầm mô hình bằng 2 cm.	○	●
d	Nếu người ta làm một khối có kích thước như mô hình đường hầm ở trên bằng nguyên liệu có giá 5,4 triệu đồng cho mỗi cm^3 thì số tiền cần bỏ ra để mua nguyên liệu là 156 triệu đồng.	○	●

Câu 32. Cơn bão YAGI đã gây ra những thiệt hại lớn cho các tỉnh phía Bắc, nhiều tổ chức và cá nhân đã tổ chức các đợt cứu trợ khẩn cấp cho người dân vùng bị ảnh hưởng. Trong đó, xã X đã điều động 3 xe (xe số 1, 2 và 3) vừa chở hàng hóa vừa chở người. Để phối hợp vận chuyển hàng cứu trợ, 10 tình nguyện viên sẽ được chọn để tham gia vào các chuyến xe này. Mỗi xe có thể chở hết 10 tình nguyện viên và những người này được phân bố lần lượt lên 3 chiếc xe một cách ngẫu nhiên.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Không gian mẫu của phép thử có số phần tử là 3^{10}.	○	●
b	Số cách lên xe sao cho chỉ có xe số 3 không có tình nguyện viên nào là $2^{10} - 1$.	○	●
c	Số cách lên xe sao cho xe số 1 không có tình nguyện viên nào là 10^2.	○	●
d	Xác suất để xe nào cũng có tình nguyện viên là $\dfrac{18661}{19683}$.	○	●

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 2a$, $CA = CB = CS$. Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Gọi H là trung điểm AB.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	CH vuông góc với (SAB).	○	●
b	Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.	●	○
c	Gọi M là trung điểm của SD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SH và CM bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.	○	●
d	Gọi ϕ là số đo góc nhị diện $[B, SA, C]$. Ta có $\tan\phi = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.	○	●

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x\log_2 x$.

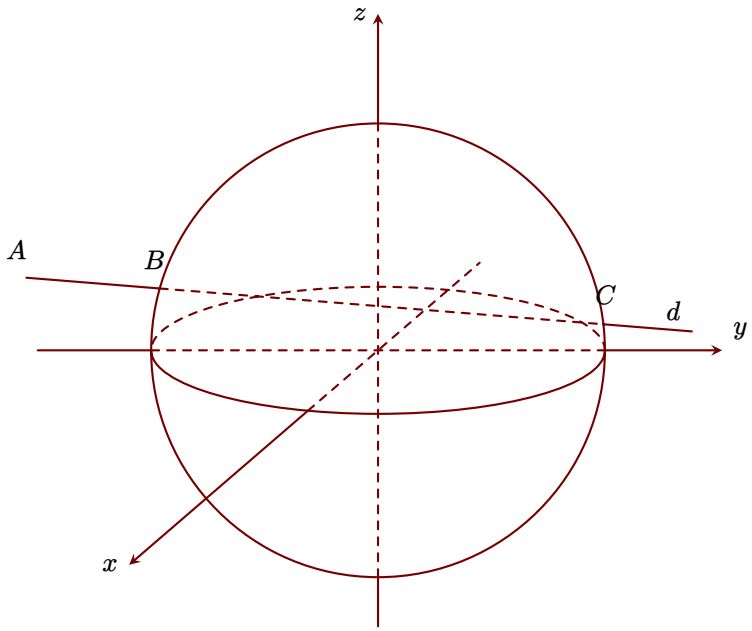
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [0; +\infty)$.	○	●
b	Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = 3x^2 - 3\log_2 x - \dfrac{3}{\ln 2}$.	●	○
c	Phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm.	○	●
d	Biểu thức $P = f(a) + f(b) + f(c)$ đạt giá trị lớn nhất là 4, với a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leqslant 1$.	●	○

Câu 35. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, hình chiếu vuông góc của đỉnh C' lên mặt phẳng (ABC) là điểm A. Biết $AB = 2$, $AC = 3$, $AA' = 3\sqrt{2}$. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ với O trùng A, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AC, AC', đơn vị trên mỗi trục là 1.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Tọa độ đỉnh B' là $(2; -3; 3)$.	○	●
b	$\cos\widehat{BA'C} = \dfrac{3\sqrt{110}}{110}$.	○	●
c	Gọi D là đỉnh thứ 4 của hình chữ nhật $ABDC$, ta có $\left\lvert\overrightarrow{DC'} + \overrightarrow{DB'}\right\rvert = \sqrt{85}$.	○	●
d	Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $P = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB'} + 2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC'} + 3\overrightarrow{MB'}\cdot\overrightarrow{MC'}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a + b + c = -\dfrac{1}{3}$.	○	●

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0; 0; 0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km.

Một máy bay A đang chuyển động với vận tốc 900 km/h trên đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -300 + 80t \\ z = 100\sqrt{11} \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ qua vùng kiểm soát của đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Ranh giới giữa bên ngoài và vùng kiểm soát của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng 300 km.	○	●
b	Máy bay A chuyển động trên đường thẳng d đến vị trí điểm $M\left(-500; 100; 100\sqrt{11}\right)$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát của đài kiểm soát không lưu sân bay.	●	○
c	Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới giữa bên ngoài và vùng kiểm soát của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$.	●	○
d	Thời gian đài kiểm soát không lưu kiểm soát được máy bay A là không quá 42 phút.	●	○

Câu 37. Kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng chp bởi bảng 15, kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi Bảng 16 (đơn vị: m)

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[6,22; 6,46)$	$6,34$	3
$[6,22; 6,46)$	$6,58$	7
$[6,70; 6,94)$	$6,82$	5
$[6,94; 7,18)$	$7,06$	20
$[7,18; 7,42)$	$7,30$	5
		$n = 40$

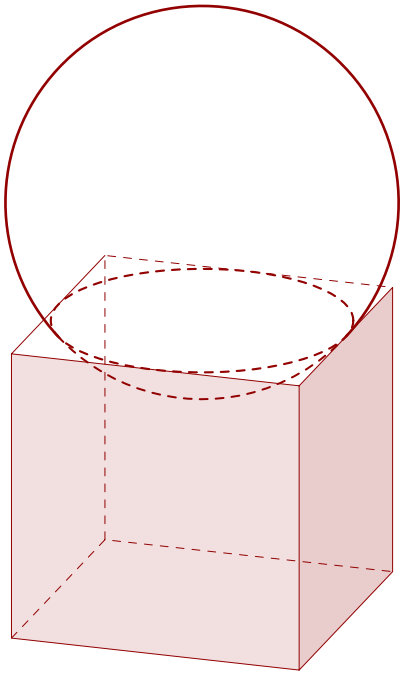
Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[6,22;6,46)$	$6,34$	2
$[6,22;6,46)$	$6,58$	5
$[6,70;6,94)$	$6,82$	8
$[6,94;7,18)$	$7,06$	19
$[7,18;7,42)$	$7,30$	6
		$n=40$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi bảng 16 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là 0,16.	○	●
b	Kết quả nhảy xa trung bình của bạn Huy là 6,952 m.	●	○
c	Số lần nhảy xa từ 7,18 m trở lên của vận động viên Dũng là 5.	●	○
d	Dựa vào độ lệch chuẩn ta thấy kết quả nhảy xa của vận động viên Dũng đồng đều hơn kết quả nhảy xa của vận động viên Huy.	○	●

Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-6}{x+1}$ có đồ thị là đường cong (C).

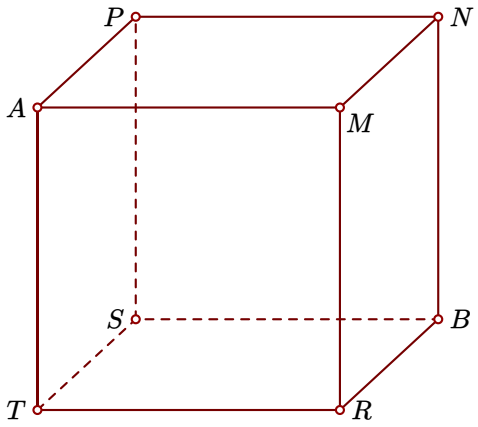
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Trên đồ thị (C) có 8 điểm mà hoành độ và tung độ là các số nguyên.	○	●
b	Có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $(d)\colon y=7x+18$.	●	○
c	Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x$.	●	○
d	Đường tròn $(T)\colon (x+1)^2+(y+1)^2=R^2$ cắt (C) tại 4 điểm phân biệt khi $R^2>5$.	○	●

Câu 39. Một bình chứa đầy nước có hình dạng hình lập phương cạnh 8 cm. Người ta đặt lên miệng bình một khối cầu có đường kính bằng 10 cm làm cho nước trong bình bị tràn ra ngoài. Thể tích nước còn lại trong bình là bao nhiêu centimét khối? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



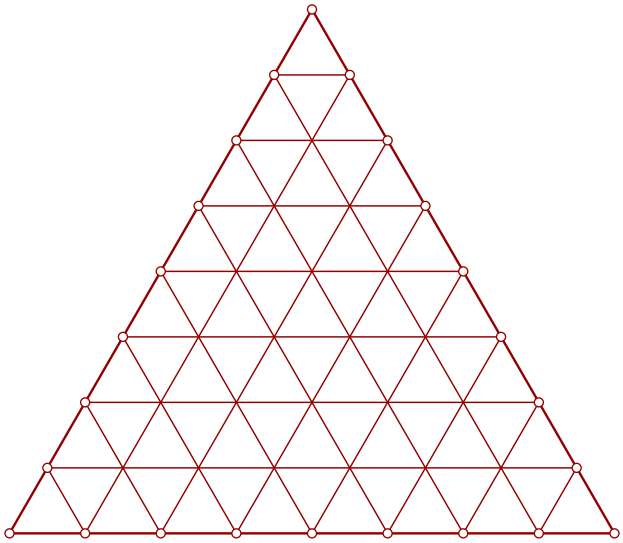
KẾT QUẢ:

Câu 40. Cho một cái hộp hình hộp chữ nhật có kích thước ba cạnh lần lượt là 3 cm, 5 cm, 6 cm như hình vẽ. Một con kiến ở vị trí A muốn đến vị trí B. Biết rằng con kiến chỉ có thể bò trên cạnh hay bề mặt của hình hộp đã cho. Quãng đường ngắn nhất của con kiến đi từ A đến B bằng bao nhiêu centimét?



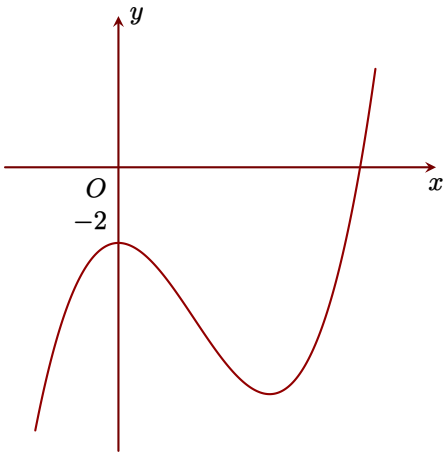
KẾT QUẢ:

Câu 41. Cho tam giác đều có cạnh bằng 8. Chia tam giác đều này thành 64 tam giác đều có cạnh bằng 1 bởi các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác đều đã cho. Gọi S là tập hợp các đỉnh của 64 tam giác đều có cạnh bằng 1. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của tập S. Xác suất để 4 đỉnh chọn được là bốn đỉnh của một hình bình hành bằng $\frac{a}{b}$ với a, b là các số tự nhiên và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của tổng $a^2 + b$ bằng bao nhiêu?



KẾT QUẢ:

Câu 42. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y = f\left(x^3 f(x)\right)$ có bao nhiêu cực tiểu?

KẾT QUẢ:

Câu 43. Trong năm tới, một cửa hàng điện lạnh dự định kinh doanh hai loại máy điều hòa: điều hòa hai chiều và điều hòa một chiều với số vốn ban đầu không vượt quá 1,2 tỉ đồng. Biết rằng, giá mua vào và lợi nhuận dự kiến được cho bởi bảng sau:

Loại điều hòa	Điều hòa hai chiều	Điều hòa một chiều
Giá mua vào	20 triệu đồng/1 máy	10 triệu đồng/1 máy
Lợi nhuận dự kiến	3,5 triệu đồng/1 máy	2 triệu đồng/1 máy

Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu của thị trường sẽ không vượt quá 100 máy cả hai loại. Cửa hàng cần đầu tư kinh doanh x loại máy hai chiều và y loại máy một chiều thì lợi nhuận thu được là lớn nhất. Tổng $x^2 + y^2$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

Câu 44. Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$, $D(-23;20;-11)$. Điểm M thay đổi thuộc mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+2z+7=0$. Khi $M(a;b;c)$ thì biểu thức $T=\dfrac{3MA^2}{MD^2}+\dfrac{5MB^2}{MD^2}-\dfrac{7MC^2}{MD^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a^2+b^2+c^2$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

7 SỞ BÀ RỊA VŨNG TÀU

Câu 1. Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu áo sơ mi nam (cổ tròn). Người điều tra yêu cầu cho điểm mẫu áo đó theo thang điểm là 100. Kết quả được trình bày trong bảng ghép nhóm sau:

Nhóm	$[50;60)$	$[60;70)$	$[70;80)$	$[80;90)$	$[90;100)$	
Tần số	4	5	23	5	3	$N=40$

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị) có giá trị là:

A $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. B $-\dfrac{1}{\sqrt{30}}$. C $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. D $\dfrac{1}{\sqrt{30}}$.

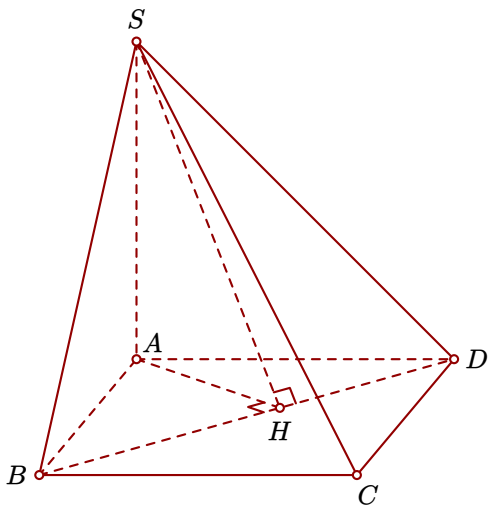
Câu 2. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số lẻ bằng

A $\dfrac{11}{25}$. B $\dfrac{12}{25}$. C $\dfrac{14}{25}$. D $\dfrac{13}{25}$.

Câu 3. Xét các số thực dương x, y thoả mãn $\log_3 \dfrac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$ bằng

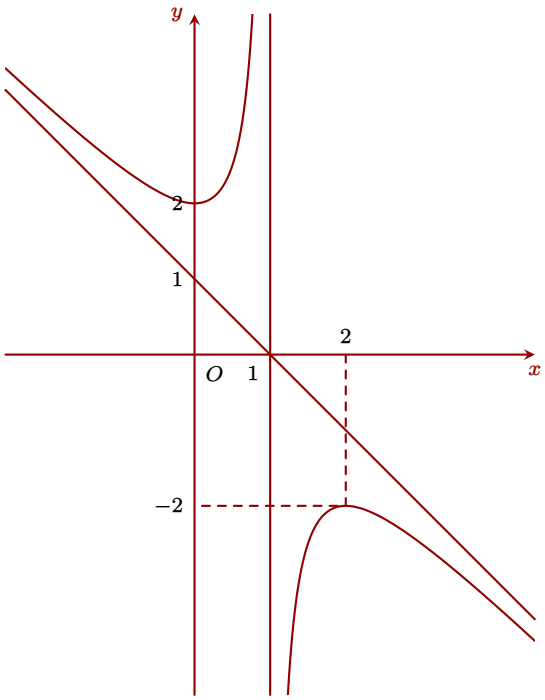
A $\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$. B $\dfrac{9\sqrt{11}-19}{9}$. C $\dfrac{18\sqrt{11}-29}{21}$. D $\dfrac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Giá trị tang của góc nhị diện $[S, BD, A]$ bằng



A $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. B $\dfrac{1}{2}$. C $\sqrt{3}$. D 2.

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + 2x + c}{x + b}$, với $a \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $P = a^2 + b + c$ bằng



A -1. B 3. C 5. D -2.

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 8. Điểm M nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'M$ là

A $2\sqrt{2}$. B 4. C $4\sqrt{2}$. D $\sqrt{2}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C). Phương trình đường tiệm cận xiên của (C) là $y=ax+b$. Giá trị $T=4a-b$ bằng.

A 10. B 8. C 11. D 9.

Câu 8. Số nghiệm của phương trình $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ trên đoạn $[0;10\pi]$ là

A 18. B 21. C 19. D 20.

Câu 9. Ông An dự định sử dụng hết 8 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, có đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích là lớn nhất bằng bao nhiêu mét khối? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A 3,25. B 2,75. C 2,05. D 2,15.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;1;2)$, $B(2;1;4)$, $C(-1;2;2)$. Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm của tam giác ABC. Giá trị của biểu thức $T=x+y+z$ bằng

A $\dfrac{2}{3}$. B $\dfrac{1}{3}$. C 1. D 3.

Câu 11. Thời gian tập thể dục của bạn Nam được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là

A 27,5. B 31,85. C 8,125. D 23,75.

Câu 12. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S(t) = t^3 - 6t^2 + 15t + 9$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tại thời điểm t_0 (giây) bằng bao nhiêu thì vận tốc nhỏ nhất?

A 2. B 4. C 1. D 3.

Câu 13. Mỗi tuần, một cửa hàng bán điện thoại di động trung bình bán được 1000 điện thoại A với giá 14 triệu đồng một cái. Biết rằng, nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng/1 cái, số lượng điện thoại A bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 cái mỗi tuần. Biết rằng nếu bán x cái điện thoại A thì giá mỗi cái là $p(x)$ (triệu đồng) và hàm chi phí hàng tuần $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$p(1000) = 14$ và $p(100) = 13{,}5$.	○	●
b	$p(x) = -\dfrac{1}{200}x + 19$.	●	○
c	Cửa hàng đạt lợi nhuận cao nhất khi bán ra 1200 cái điện thoại.	○	●
d	Để lợi nhuận là lớn nhất, cửa hàng nên bán mỗi cái điện thoại là 8,5 triệu đồng.	○	●

Câu 14. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ có đồ thị (C).

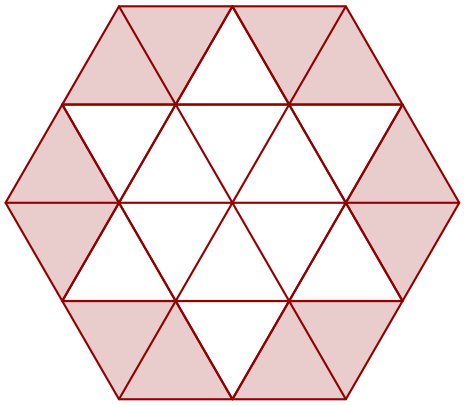
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.	●	○
b	Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của (C) bằng $\sqrt{5}$.	○	●
c	Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{3}{2}$.	○	●
d	Tổng khoảng cách từ một điểm trên (C) đến hai đường tiệm cận của (C) có giá trị nhỏ nhất bằng 1.	○	●

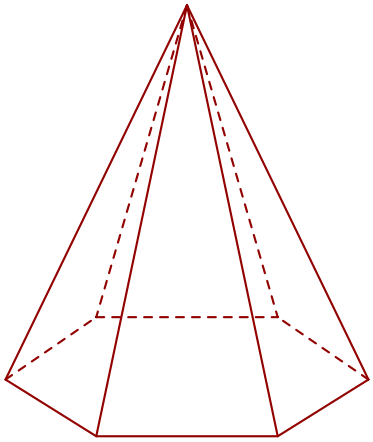
Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật và $A(0;0;0)$, $B(4;0;0)$, $D(0;3;0)$, $S(0;0;6)$. Gọi E là trung điểm của CD. Các phát biểu sau đây đúng hay

sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$C\,(4;3;0)$.	●	○
b	Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{0}$ có tọa độ là $(-2;3;9)$.	○	●
c	Góc tạo bởi hai đường thẳng SE và BC có số đo nhỏ hơn 60°.	○	●
d	Điểm I thuộc mặt phẳng (Oyz) thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left\lvert\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{IS}\right\rvert$ bằng 4.	●	○

Câu 16. Từ một tấm bìa lục giác đều cạnh 20, bạn Hoa muốn làm một hình chóp lục giác đều bằng cách cắt bỏ phần tô đậm và dán các mép lại với nhau (các mối ghép nối có kích thước không đáng kể, tham khảo hình vẽ). Để thể tích hình lục giác đều tạo thành lớn nhất thì phần diện tích bạn Hoa cắt đi là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).





KẾT QUẢ:

Câu 17. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-mx-m+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $M(3;7)$. Gọi S là tập hợp giá trị tham số m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác MAB vuông tại M. Tích tất cả các phần tử của S bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;2)$, $B(2;-6;0)$ và $C(-4;4;4)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho MB vuông góc MC. Độ dài đoạn thẳng AM lớn nhất bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KẾT QUẢ:

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên $y \leqslant 2024$ để ứng với mỗi y tồn tại hai số thực x thỏa mãn bất phương trình $\mathrm{e}^{x^2}+(y+\ln x)\mathrm{e}^{y+\ln x} \leqslant (x^3+x)\mathrm{e}^{y}$?

KẾT QUẢ:

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy và $SA=3$. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng $\dfrac{12}{5}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

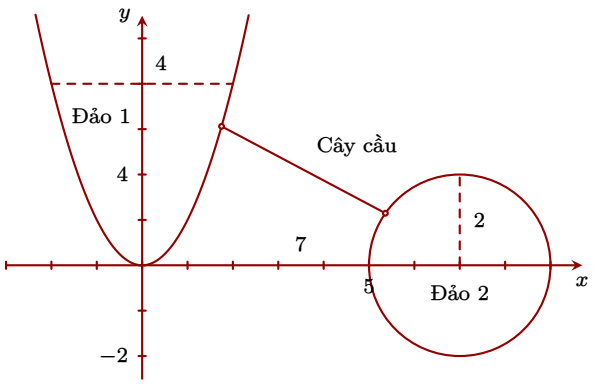
Câu 21. Một hộ sản xuất kinh doanh hạt điều sấy mỗi ngày sản xuất được x kg $(5 \leqslant x \leqslant 20)$. Tổng chi phí sản xuất x kg được cho bởi hàm chi phí $C(x)=x^3-3x^2+19x+300$ (đơn vị: nghìn đồng). Giả sử hộ sản phẩm này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 316 nghìn đồng/kg. Hỏi hộ sản xuất này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu kilôgam hạt điều để thu được lợi nhuận lớn nhất?

KẾT QUẢ:

Câu 22. Xếp ngẫu nhiên một nhóm học sinh gồm 3 nữ và 17 nam thành một hàng ngang. Xác suất để không có học sinh nam nào mà hai bạn bên cạnh đều là nữ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KẾT QUẢ:

Câu 23. Trên một hồ nước có hai đảo. Đảo thứ nhất có hình dạng là một parabol và đảo thứ hai có hình dạng là một hình tròn với kích thước được mô hình hóa trong hình bên. Người ta muốn xây dựng một cái cầu nối hai đảo với nhau. Hỏi chiều dài ngắn nhất có thể của cây cầu là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



KẾT QUẢ:

8 SỞ HẢI PHÒNG

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

A $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$. B $\dfrac{2\sqrt{57}a}{19}$. C $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. D $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2. Tổng các nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$ của phương trình $\sin 2x - \cos x = 0$ bằng

A $\dfrac{5\pi}{2}$. B 2π. C 3π. D 5π.

Câu 3. Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian chạy cự li 100m của 20 vận động viên trong một buổi luyện tập (đơn vị: giây).

Giá trị	$x-y$	$2x+y$	$4x+2y$	$5x+3y$	$17x-2y$
Tần số	14	$3x+2y$	$x+3y$	$5x-y$	8

Số trung bình của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A 10,6. B 10,3. C 10,4. D 10,8.

Câu 4. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 10 000. Tổng $S = \dfrac{1}{u_1u_2} + \dfrac{1}{u_2u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_{99}u_{100}}$ bằng

A $\dfrac{200}{201}$. B $\dfrac{198}{199}$. C $\dfrac{100}{201}$. D $\dfrac{99}{199}$.

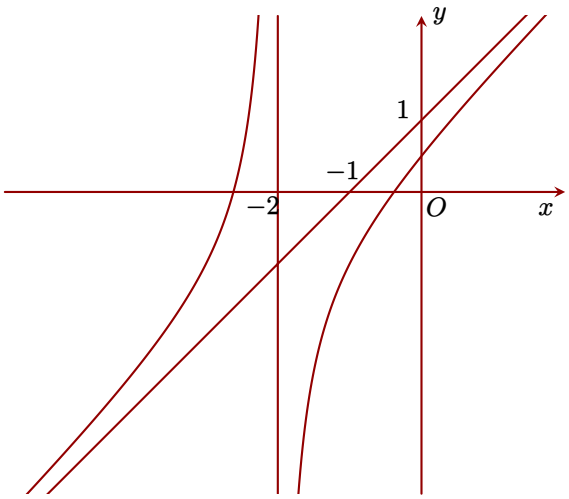
Câu 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Đường thẳng $d_1\colon mx + y - m - 1 = 0$ cắt đường tròn (C) tại M, N và đường thẳng $d_2\colon x - my + m - 1 = 0$ cắt đường tròn (C) tại P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác có 4 đỉnh M, N, P, Q bằng

A 7. B 8. C 14. D 2.

Câu 6. Một nhóm gồm 6 bạn nam trong đó có Hùng và 4 bạn nữ xếp hàng để chụp hình lưu niệm. Mọi người đứng thành 2 hàng, mỗi hàng 5 người. Xác suất để Hùng đứng liền giữa 2 bạn nam đồng thời trong mỗi hàng 2 bạn nữ bất kì không đứng cạnh nhau.

A $\dfrac{2}{105}$. B $\dfrac{4}{105}$. C $\dfrac{1}{21}$. D $\dfrac{1}{105}$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + 1}{cx + 2}$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$) có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $T = 2a + 3b - c$ là



A $T = 11$. B $T = 8$. C $T = 9$. D $T = 10$.

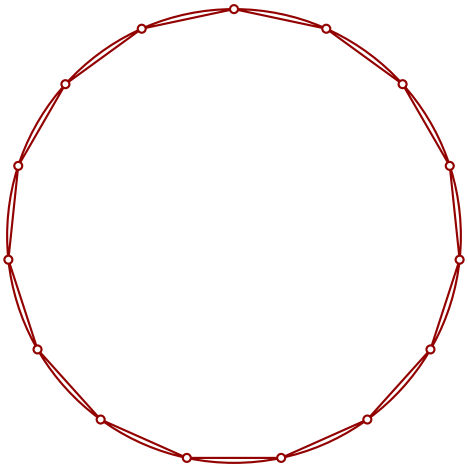
Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x^2 + 5}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$ có đúng 3 điểm cực trị.

A 4. B 5. C 3. D 6.

Câu 9. Người ta dự định làm một hầm rượu có dạng hình chóp cụt đều có hai cạnh đáy là 7 m và 5 m; mặt bên và đáy nhỏ tạo thành góc nhị diện có số đo bằng $120°$. Thể tích của hầm rượu trên bằng bao nhiêu mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

A 62,93. B 60,82. C 64,24. D 58,94.

Câu 10. Cho một đa giác đều (H) có 15 đỉnh. Số tam giác cân không phải là tam giác đều có ba đỉnh là đỉnh của (H) bằng:



A 90. B 105. C 95. D 115.

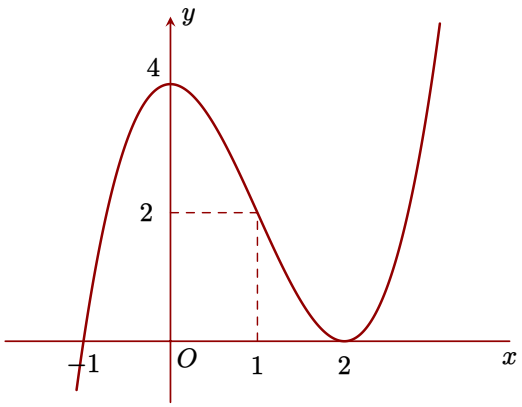
Câu 11. Từ các số thuộc tập $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để viết được số có đúng một số chẵn là

A $\dfrac{20}{63}$. B $\dfrac{10}{63}$. C $\dfrac{5}{126}$. D $\dfrac{5}{63}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$. Điểm $D(x_D; y_D; z_D)$ thỏa mãn $ABCD$ là hình thang với hai đáy AD, BC và diện tích hình thang $ABCD$ gấp 3 lần diện tích tam giác ABC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $z_D = 4$. B $z_D = -1$. C $z_D = 3$. D $z_D = -2$.

Câu 13. Cho hàm đa thức $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Phương trình $f'(\cos x) = 3$ có đúng bốn nghiệm thuộc $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.	○	●
b	$\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(-1)$.	○	●
c	Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.	○	●
d	Hàm số $y = f(x - 2024) - 2023x + 2022$ có đúng 2 điểm cực trị.	○	●

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB = 4a$ và $\widehat{BAD} = 120°$. Gọi H là trung điểm của AO. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Gọi α là số đo góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$, khi đó $\tan\alpha = \frac{2}{3}$.	●	○
b	Góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc $\widehat{BSH}$.	○	●
c	Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $8a^3$.	○	●
d	Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của ba cạnh CD, BC và SA. Khoảng cách giữa hai đường thẳng PN và SM bằng $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.	●	○

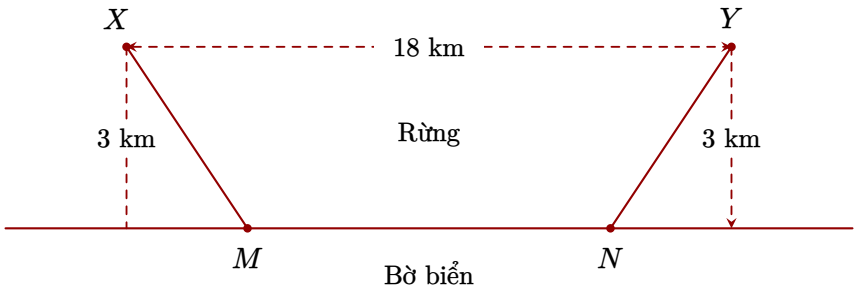
Câu 15. Cho hàm số $f(x) = 3^{\sqrt{x^2+1}+x} - 3^{\sqrt{x^2+1}-x}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Bất phương trình $f(x) - 80 \cdot 3^{\sqrt{x^2+1}-2} \leqslant 0$ có đúng hai nghiệm nguyên dương.	●	○
b	Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.	○	●
c	Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là $(0; +\infty)$.	○	●
d	Số giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2024; 2025]$ để bất phương trình $f(x^2+1) + f\left(-\frac{mx}{2}\right) > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in (-\infty; 0)$ là 2029.	●	○

Câu 16. Một nhà máy sản xuất hai loại sản phẩm I và II từ ba nguyên liệu A, B và C. Để sản xuất 1 kg sản phẩm I nhà máy phải sử dụng 2 kg nguyên liệu A và 2 kg nguyên liệu C. Để sản xuất 1 kg sản phẩm II nhà máy phải sử dụng 2 kg nguyên liệu A, 2 kg nguyên liệu B và 4 kg nguyên liệu C. Biết rằng nhà máy có 10 tấn nguyên liệu A, 4 tấn nguyên liệu B và 12 tấn nguyên liệu C. Giả sử sản phẩm sản xuất ra đều được bán hết và tiền lãi khi bán mỗi tấn sản phẩm I là 3 triệu đồng, mỗi tấn sản phẩm II là 5 triệu đồng. Gọi x và y lần lượt là số tấn sản phẩm I và II nhà máy cần sản xuất $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Khi nhà máy sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất thì phải sử dụng 10 tấn nguyên liệu A.	●	○
b	Nguyên liệu của nhà máy đủ để sản xuất 3 tấn sản phẩm I và 1,5 tấn sản phẩm II.	●	○
c	Bất phương trình mô tả điều kiện về sử dụng nguyên liệu C của nhà máy là $x + 2y \leqslant 6$.	●	○
d	Tiền lãi thu được khi sản xuất 2 tấn sản phẩm I và 2 tấn sản phẩm II là 14 triệu đồng.	○	●

Câu 17. Trong rừng, có hai điểm du lịch ở vị trí X và Y đều cách bờ biển một khoảng bằng 3km (coi đường bờ biển là một đường thẳng). Khoảng cách giữa hai vị trí X và Y là 18 km. Người ta dự định đặt hai điểm nghỉ chân tại vị trí M, N trên bờ biển sao cho $XM = YN$ và làm đường từ X lần lượt qua M, N đến Y. Biết chi phí làm đường trong rừng là 1300 triệu/km và đường trên bờ biển là 500 triệu/km. Khoảng cách giữa hai vị trí M và N là bao nhiêu kilômét để tổng chi phí làm đường nêu trên ít nhất?



KẾT QUẢ:

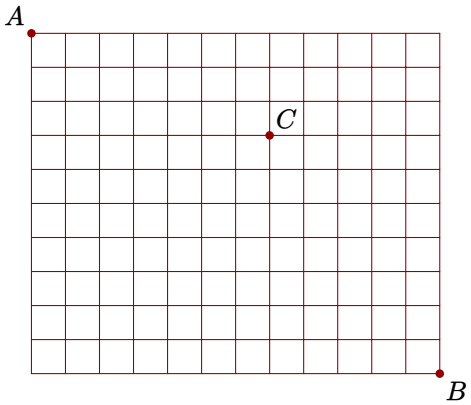
Câu 18. Gọi x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$. Biết $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}(a+\sqrt{b})$, trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính tổng $a+b$.

KẾT QUẢ:

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn ngoại tiếp. Tính giá trị OI^2, biết $A\,(2;2;-2)\,, B\,(6;-4;2)\,, C\,(8;-2;0)$.

KẾT QUẢ:

Câu 20. Mạng lưới giao thông trong một thành phố được bố trí dạng lưới hình chữ nhật kích thước 10×12 như hình vẽ dưới đây. Lần đầu đến thành phố, anh Nam muốn đi từ điểm A đến điểm B. Biết rằng tại các điểm giao nhau, anh Nam luôn chọn ngẫu nhiên một trong các hướng đi để quãng đường đi từ A đến B là ngắn nhất. Xác suất để anh Nam không đi qua điểm giao ở vị trí C là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



KẾT QUẢ:

Câu 21. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1 và 2. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên mặt phẳng $(A'B'C')$

là trung điểm M của cạnh $B'C'$, $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KẾT QUẢ:

Câu 22. Cho bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê doanh thu bán hàng (đơn vị: triệu đồng) trong 20 ngày của một cửa hàng như sau:

Nhóm	$[5;7)$	$[7;9)$	$[9;11)$	$[11;13)$	$[13;15)$
Tần số	2	7	7	3	1

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

KẾT QUẢ:

9 SỞ NGHỆ AN

Câu 1. Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 học sinh lớp 10A.

Khoảng chiều cao	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$
Số học sinh	17	25	8

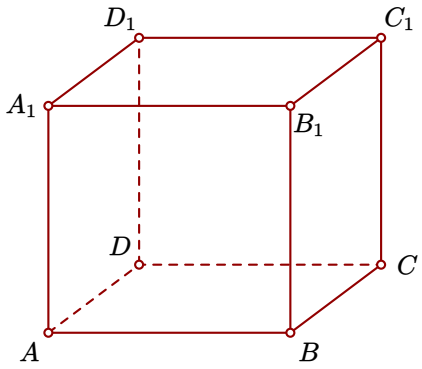
Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A $163,4$. B $162,6$. C 160. D $161,6$.

Câu 2. Một lớp có 45 học sinh, trong đó có 31 học sinh học khá môn Toán, 24 học sinh học khá môn Tiếng Anh, 5 học sinh không học khá cả hai môn Toán và Tiếng Anh. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Xác suất để học sinh được chọn học khá cả hai môn Toán và Tiếng Anh là

A $\dfrac{1984}{6075}$. B $\dfrac{173}{675}$. C $\dfrac{1}{3}$. D $\dfrac{248}{675}$.

Câu 3.



Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Phát biểu nào sau đây sai?

A $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$. B $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DA}$.

C $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. D $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{khi } x > 2 \\ 2 & \text{khi } x = 2 \\ -x & \text{khi } x < 2. \end{cases}$ Phát biểu nào sau đây là đúng?

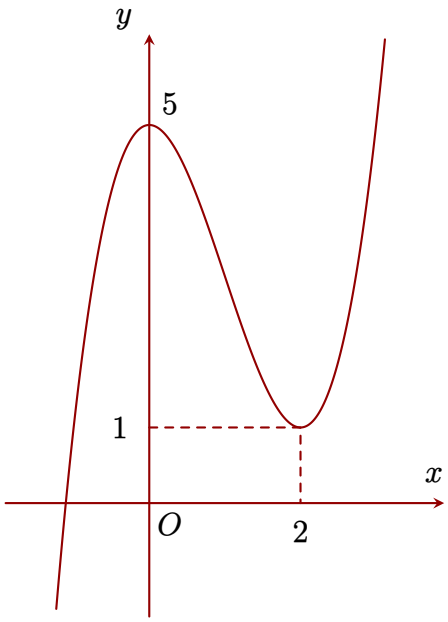
A $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$. B $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

C $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$. D Hàm số liên tục tại $x = 2$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;1)$ và $B(1;2;-3)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A $(-1;3;-4)$. B $(2;-2;-3)$. C $(1;-3;4)$. D $(3;1;-2)$.

Câu 6. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.



Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A 2. B 1. C 5. D 0.

Câu 7. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$. B $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a^3$. C $\dfrac{2a^3}{3}$. D $2a^3$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $OC = \sqrt{3}SA$. Số đo góc phẳng nhị diện $[S, BD, C]$ bằng

A $60°$. B $120°$. C $30°$. D $150°$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)(x+3), \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) + f(-2) = f(3) + f(0)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$ lần lượt là

A $f(0)$ và $f(3)$. B $f(-2)$ và $f(0)$. C $f(0)$ và $f(-2)$. D $f(3)$ và $f(0)$.

Câu 10. Giả sử một vật dao động điều hòa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x(t) = 3\cos\left(4t - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Ở đây thời gian t tính bằng giây và $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây vật đạt li độ bằng $\dfrac{3}{2}$ cm bao nhiêu lần?

A 4. B 6. C 3. D 5.

Câu 11. Một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 4 và số hạng thứ 3 bằng 12. Số hạng thứ 10 của cấp số cộng đó bằng

A 40. B 44. C 36. D 4^{10}.

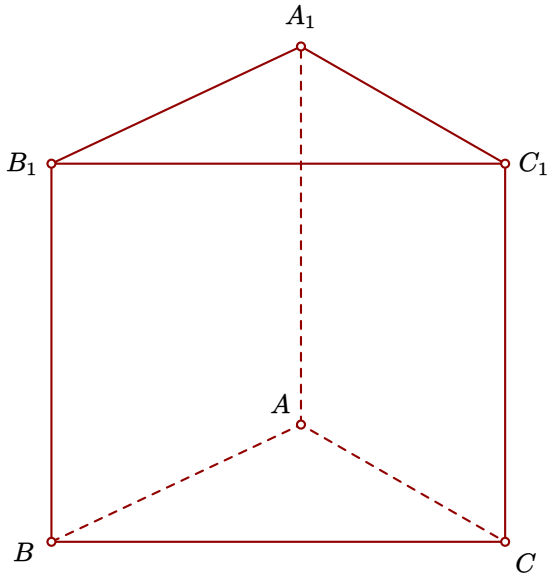
Câu 12. Một vật chuyển động theo phương trình $s(t) = \dfrac{1}{6}t^3 - t^2 + 4t$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Xét trong khoảng thời gian từ 4 giây đến 10 giây vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất bằng?

A $\dfrac{16}{3}$ (m/s). B 2 (m/s). C 4 (m/s). D $\dfrac{32}{3}$ (m/s).

Câu 13. Các học sinh lớp 12T làm thí nghiệm gieo ba loại hạt giống X, Y và Z. Xác suất để ba loại hạt giống X, Y và Z nảy mầm tương ứng là x, y và $0{,}8$ $(x > y)$. Biết rằng xác suất để có ít nhất một trong ba hạt giống nảy mầm là $0{,}964$ và xác suất để cả ba hạt giống đều nảy mầm là $0{,}224$. Giả sử sự nảy mầm của các hạt giống X, Y, Z là độc lập với nhau. Gọi A là biến cố "Có ít nhất một trong ba hạt giống nảy mầm" và B là biến cố "Cả ba hạt giống đều nảy mầm".

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Biến cố đối của biến cố A là $\overline{A}$: "Cả ba hạt giống đều không nảy mầm".	●	○
b	Xác suất để xảy ra biến cố B là $\mathrm{P}(B) = 0{,}8xy$.	●	○
c	Xác suất để hạt giống X nảy mầm là $0{,}7$.	●	○
d	Xác suất để có đúng hai hạt nảy mầm là $0{,}488$.	○	●

Câu 14. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$ và cạnh bên $AA_1 = a\sqrt{2}$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Thể tích của khối lăng trụ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.	●	○
b	Góc giữa hai đường thẳng BC_1 và AC bằng $60°$.	●	○
c	Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (A_1BC_1) bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.	○	●
d	Gọi M, N lần lượt là các điểm di động trên các đoạn thẳng A_1C_1 và BC_1 sao cho $MN = \dfrac{a}{2}$. Thể tích của khối chóp $A.A_1BNM$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{7a^3\sqrt{2}}{48}$.	●	○

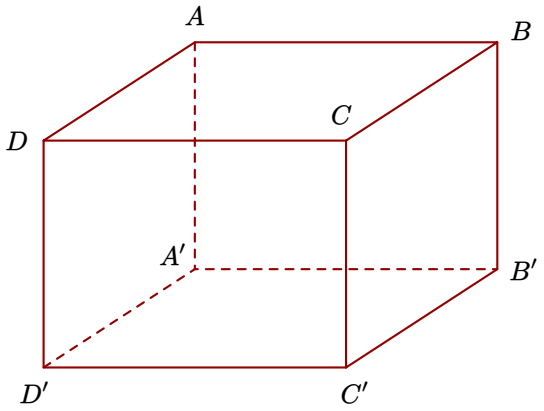
Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\log_5(4x+1)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số có giá trị cực đại lớn hơn giá trị cực tiểu.	●	○
b	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-4;0)$.	○	●
c	Đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số là $y=2x+2$.	●	○
d	Gọi A,B là các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số. Diện tích tam giác OAB bằng 8 (đơn vị diện tích), trong đó O là gốc tọa độ.	○	●

Câu 16. Một doanh nghiệp tư nhân X chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược kinh doanh một loại xe máy với chi phí mua vào là 38 triệu đồng/ chiếc với giá bán ra là 43 triệu đồng/ chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe bán ra mỗi năm là 600 chiếc. Nhằm tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Ước tính cứ giảm 1 triệu đồng/ chiếc thì số lượng xe máy bán ra trong một năm tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải giảm giá bán là bao nhiêu triệu đồng để thu được lợi nhuận cao nhất trong một năm?

KẾT QUẢ:

Câu 17. Trong ngày hội STEM, bạn An nhận được nhiệm vụ thiết kế một chiếc hộp giấy có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với độ dài các cạnh $AB=a$, $AD=b$, $AA'=c$ và khoảng cách giữa AC và BC' bằng d (tham khảo hình vẽ). Biết rằng a,b,c,d là các số nguyên dương có đơn vị đo bằng đề-xi-mét. Hỏi diện tích toàn phần của chiếc hộp bằng bao nhiêu để thể tích của chiếc hộp bạn An làm là nhỏ nhất?



KẾT QUẢ:

Câu 18. 1) Tìm các điểm cực đại và cực tiểu của hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-3x-6\ln(2-x)+1$.

2) Một công ty bất động sản đưa ra hai phương án kí hợp đồng cho thuê căn hộ theo năm (tiền thuê nhà khách hàng phải trả từ đầu năm) để làm văn phòng đại diện như sau:

Hợp đồng loại 1: Trả 220 triệu đồng cho năm đầu tiên và sau mỗi năm tăng thêm 11 triệu đồng so với năm liền trước.
Hợp đồng loại 2: Trả 194 triệu đồng cho năm đầu tiên và sau mỗi năm tăng thêm 6% so với năm liền trước.
Vào đầu năm 2024, bác Hoàng và bác Anh cùng đến thuê căn hộ để làm văn phòng đại diện cho công ty của mình và thuê dài hạn. Biết rằng bác Hoàng lựa chọn hợp đồng loại 1, còn bác Anh lựa chọn hợp đồng loại 2. Hỏi từ đầu năm bao nhiêu trở đi bác Hoàng sẽ chi trả tiền thuê hàng năm ít hơn bác Anh?

Câu 19. Nuôi cấy nấm men thu sinh khối (protein, amino acid...), ứng dụng làm tế bào nhận trong công nghệ gen để sản xuất một số chất có hoạt tính sinh học mạnh (kháng sinh...). Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t)=\dfrac{m}{n+\mathrm{e}^{-0{,}75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Đạo hàm của hàm số $y=P(t)$ biểu thị tốc độ sinh trưởng của nấm men (tính bằng tế bào/giờ) tại thời điểm t. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 30 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 15 tế bào/giờ. Tìm số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm tốc độ sinh trưởng của quần thể đạt mức tối đa.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=8$ và $BC=4\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của CD. Biết $SM=SA=SB$ và thể tích khối tứ diện $S.ABM$ bằng $\dfrac{128}{3}$.
1) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.
2) Tính cô-sin của góc nhị diện $[B,SM,D]$.

Câu 21. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có $AC_1=CB_1=5, AB_1=BB_1=6$ và $AC\cdot CB=37$. Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian ta luôn có: $MA+MC+MC_1+MB_1\geqslant 14$.

Câu 22. Cho tập hợp A gồm n phần tử (n là số nguyên dương). Lấy ngẫu nhiên một bộ thứ tự (X,Y) với X,Y là các tập hợp con của tập hợp A (với $X\neq Y$ thì các bộ thứ tự (X,Y) và (Y,X) là khác nhau). Biết xác suất để lấy được một bộ thứ tự (X,Y) sao cho $X\cup Y=A$ là $\dfrac{729}{4096}$. Tìm số tự nhiên k lớn nhất sao cho có thể chọn ra k tập hợp con khác nhau của tập hợp A mà hai tập hợp con bất kì trong k tập hợp đó đều có giao khác rỗng.

10 SỞ NINH BÌNH

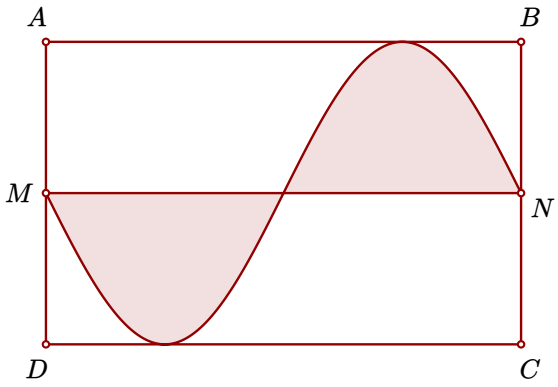
Câu 1. Trong mặt phẳng (Oxy) , cho elip (E) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Tiêu cự của (E) bằng

A 3. B -3. C $\dfrac{7}{3}$. D $-\dfrac{7}{3}$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(0;-3)$, $C(3;3)$. Đường trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC có phương trình tổng quát là

A $2x+5y-21=0$. B $x+y-6=0$. C $5x-2y-9=0$. D $x-y=0$.

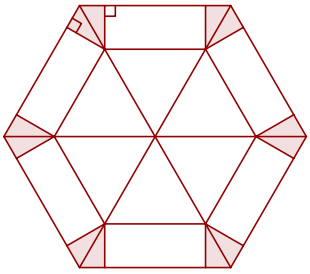
Câu 3. Bác Hòa có một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$. Bác muốn trồng hoa vào phần đất được giới hạn bởi hai cạnh AD, BC, đường trung bình MN của hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin (là đường cong khi xét trong một hệ trục tọa độ phù hợp là đồ thị hàm số có dạng $y=a\sin(bx)$, với a, b là các số thực khác 0; diện tích trồng hoa là diện tích phần tô màu trong hình vẽ dưới đây).



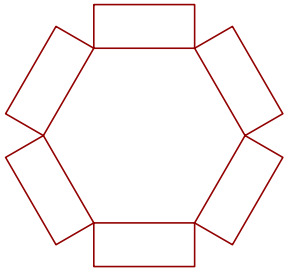
Biết $AB=2\pi(\text{m}), AD=4(\text{m})$. Diện tích phần đất còn lại (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*) là

A $17,12\text{m}^2$. B $17,13\text{m}^2$. C $8,57\text{m}^2$. D $12,57\text{m}^2$.

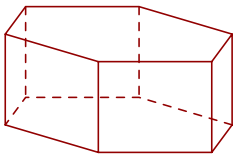
Câu 4. Từ một miếng tôn hình lục giác đều có cạnh bằng 6dm, người ta cắt đi ở mỗi đỉnh của lục giác hai tam giác vuông bằng nhau, các hình cắt đi ở mỗi góc đều bằng nhau (phần tô đậm trong hình 1) để thu được một tấm tôn (hình 2). Sau đó, từ tấm tôn ở hình 2 người ta gò theo các cạnh của lục giác đều làm thành một chiếc thùng có hình dạng là một hình lăng trụ lục giác đều không nắp như hình 3.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Thể tích lớn nhất (theo đơn vị dm3) của chiếc thùng đó là?

A 24. B 36. C 72. D 48.

Câu 5. Dũng là học sinh rất đam mê chơi rubik và có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik 3x3, Dũng đã tự thống kê thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp và lập mẫu số liệu ghép nhóm như ở bảng dưới đây.

Thời gian giải rubik (giây)	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$	$[14;16)$	$[16;18)$
Số lần	4	6	8	4	3

Nếu kết quả làm tròn đến hàng phần trăm thì khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

A $10,75$. B $14,38$. C $3,63$. D $1,75$.

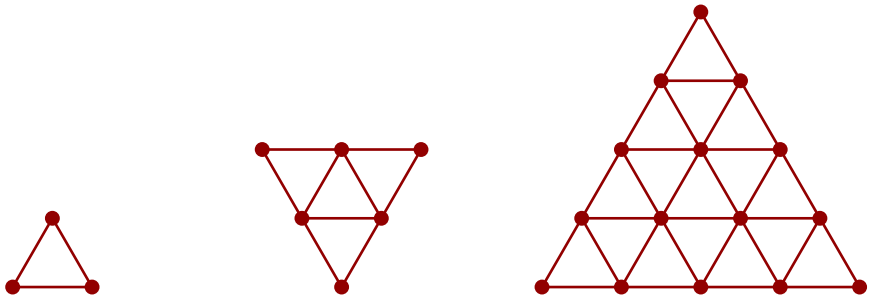
Câu 6. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), radar phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ vị trí điểm $M(500;200;8)$ đến điểm $N(a;b;c)$ trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau 10 phút tiếp theo máy bay sẽ ở vị trí điểm $P(900;360;16)$. Tính giá trị của biểu thức $S=a-b-2c$.

A 452. B 468. C 466. D 425.

Câu 7. Cho đa giác đều có 36 đỉnh. Có tất cả bao nhiêu tam giác vuông hoặc cân có ba đỉnh là đỉnh của đa giác đã cho?

A 1164. B 1200. C 1224. D 1188.

Câu 8. Người ta dùng các que diêm để xếp thành các hình tam giác đều, biết cạnh của tam giác đều ở hình thứ $n+1$ gấp đôi cạnh của tam giác đều ở hình thứ n (với n là số nguyên dương) như hình vẽ dưới đây.



Hình thứ 1 Hình thứ 2 Hình thứ 3

Để xếp hình thứ 15 thì cần dùng a que diêm. Số ước nguyên dương của a là

A 224. B 480. C 240. D 448.

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3-mx^2+(m+6)x+2025$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho không có cực trị. Tổng các phần tử của tập hợp S là

A 8. B 9. C 10. D 15.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(0;1;2)$. Đường cao kẻ từ A của tam giác ABC có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(a;b;2)$. Tính $S=a+3b$.

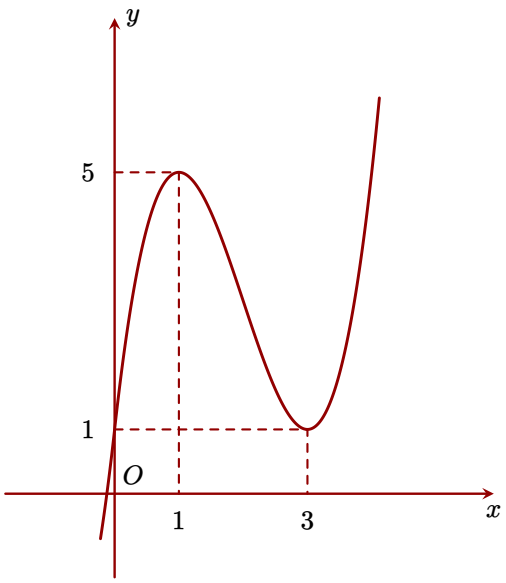
A $\frac{1}{2}$. B -2. C 2. D $-\frac{1}{2}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\,(0;-3;1)$, $B\,(2;-1;-7)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=72$. B $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=72$.

C $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=18$. D $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=18$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây.



Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{5f\left(1+2\sin^2 x\right)+11}$ là

A 4. B 10. C 16. D 6.

Câu 13. Có hai hộp chứa các phiếu bốc thăm, hộp I có 10 phiếu được đánh số từ 1 đến 10, hộp II có 20 phiếu được đánh số từ 11 đến 30. Bạn Hoa chọn ngẫu nhiên một phiếu từ hộp I bỏ sang hộp II, sau đó từ hộp II, bạn Hoa chọn ngẫu nhiên 3 phiếu. Xét các biến cố:
A: "Bình phương số ghi trên phiếu rút ra từ hộp I chia hết cho 5".
B: "Tổng bình phương các số ghi trên phiếu rút ra từ hộp II chia hết cho 5".

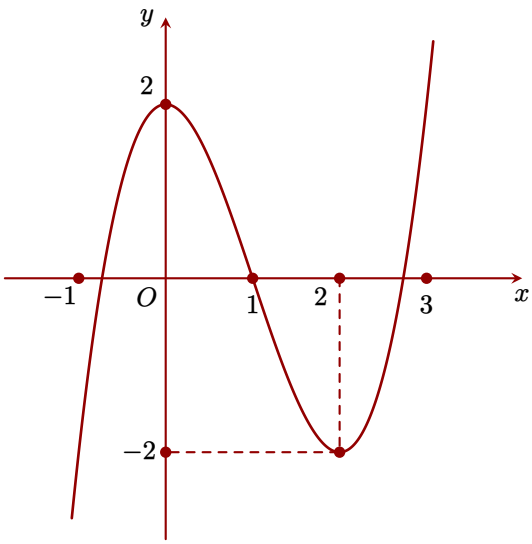
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$\mathrm{P}(B)=\dfrac{33}{665}$.	○	●
b	$\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{32}{133}$.	○	●
c	$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{5}$.	●	○
d	$\mathrm{P}\left(A\mid \overline{B}\right)=\dfrac{125}{644}$.	○	●

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $(Oxyz)$, cho ba điểm $A\left(2;-2;2\right)$, $B\left(-1;1;-1\right)$, $C\left(-3;1;3\right)$

và mặt cầu $(S): (x-5)^2+(y+1)^2+(z-7)^2=56$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Đường thẳng đi qua hai điểm A và C có phương trình tham số là $\begin{cases} x=2-5t \\ y=-2+3t \quad (t\in\mathbb{R}). \\ z=2+t \end{cases}$	●	○
b	Biết $N(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho thể tích tứ diện $NABC$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $a.b.c=405$.	●	○
c	Mặt phẳng (ABC) không đi qua gốc tọa độ.	○	●
d	Cho điểm M di động trên mặt phẳng (Oxy) , biểu thức $T=\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{13}$.	○	●

Câu 15. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây?

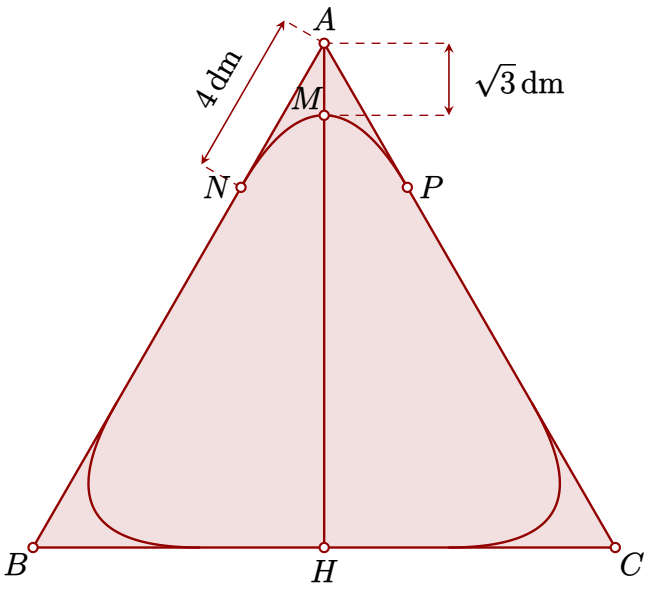


	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Gọi d là đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng d bằng $\frac{2}{5}$.	○	●
b	Hàm số $y=f(x)$ có hai giá trị cực trị trái dấu.	●	○
c	$f(5)=52$.	●	○
d	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)=x-1$ bằng 8.	●	○

Câu 16. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 6, góc giữa $A'B$ và $(ACC'A')$ bằng $30°$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AC.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là $2\sqrt{2}$.	●	○
b	Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $18\sqrt{6}$.	○	●
c	$AA' = 6\sqrt{2}$.	●	○
d	$(A'BM) \perp (ACC'A')$.	●	○

Câu 17. Để tạo ra một mặt bàn bằng kính đặc biệt người ta dùng một tấm kính hình tam giác đều ABC có cạnh bằng 14 (dm) và tại mỗi góc trong tam giác cắt tấm kính theo các đường parabol như nhau. Xét tại đỉnh A , parabol có đỉnh M thuộc đường trung tuyến AH , tiếp xúc với hai cạnh AB, AC lần lượt tại N, P sao cho $AM = \sqrt{3}\text{dm}, AN = AP = 4\text{dm}$.



Diện tích mặt bàn thu được là một số có dạng $a\sqrt{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$ và b không có ước chính phương khác 1). Tính tổng $a + b$.

KẾT QUẢ:

Câu 18. Ban tổ chức lễ hội khinh khí cầu Ninh Bình sử dụng dịch vụ chụp ảnh bằng Flycam phục vụ du khách. Xét trong một hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), Flycam xuất phát từ vị trí của Ban tổ chức là điểm $I(3;0;0)$ và bay đến vị trí được yêu cầu chụp ảnh trong bán kính không quá 3 km. Trong một tình huống, khinh khí cầu thứ nhất đang ở vị trí $M(5;4;4)$ với vận tốc bay là 20 km/h, khinh khí cầu thứ hai đang ở vị trí $N(6;0;3)$ với vận tốc bay là 10 km/h. Hai người bạn trên hai khinh khí cầu muốn chọn một vị trí $A(a;b;c)$ để chụp ảnh bằng Flycam sao cho tổng thời gian bay của hai khinh khí cầu đến A là nhỏ nhất (giả thiết đường bay của mỗi khinh khí cầu là đường thẳng). Tính $S = a + b + c$.

KẾT QUẢ:

Câu 19. Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men trong môi trường nuôi cấy tại phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t)=\dfrac{a}{b+\mathrm{e}^{-0{,}75t}}$ $(a,b\in\mathbb{R})$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Đạo hàm $P'(t)$ biểu thị tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men (tính bằng tế bào/giờ) tại thời điểm t (giờ). Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 10 tế bào/giờ. Tìm số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm tốc độ sinh trưởng đạt giá trị lớn nhất.

KẾT QUẢ:

Câu 20. Một chuyên gia dinh dưỡng dự định lập một thực đơn gồm hai loại thực phẩm chính là X và Y. Biết rằng mỗi kilôgam thực phẩm X chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit; mỗi kilôgam thực phẩm Y chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Vị chuyên gia này yêu cầu thực đơn phải cung cấp ít nhất 900 đơn vị protein và ít nhất 400 đơn vị lipit, đồng thời chỉ dùng nhiều nhất 1,6 kg thực phẩm X và 1,1 kg thực phẩm Y. Giá tiền mỗi kilôgam thực phẩm X là 250 000 đồng, mỗi kilôgam thực phẩm Y là 110 000 đồng. Chi phí ít nhất để mua nguyên liệu làm thực đơn thoả mãn các yêu cầu trên là bao nhiêu nghìn đồng?

KẾT QUẢ:

Câu 21. Thống kê cân nặng (tính theo đơn vị kilogam) của 45 học sinh trong một lớp người ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm như trong bảng sau:

Cân nặng (kg)	$[40;45)$	$[45;50)$	$[50;55)$	$[55;60)$	$[60;65)$	$[65;70)$
Số học sinh	8	16	6	10	3	2

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho *(kết quả làm tròn đến hàng phần trục)*.

KẾT QUẢ:

Câu 22. Ông An trồng ngẫu nhiên hai cây hoa hồng nhung, 3 cây hoa hồng quế, 3 cây hoa hồng bạch thành một hàng dọc cạnh hàng rào trong khu vườn. Xác suất để không có hai cây hoa hồng nào cùng loại trồng cạnh nhau là $\dfrac{a}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{N}$, $b\neq 0$ và a,b là hai số nguyên tố cùng nhau). Tính $S=a+b$.

KẾT QUẢ:

11 SỞ QUẢNG NINH

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A 1,45. B 1,46. C 1,47. D 1,48.

Câu 2. Cho hàm số $y=\sqrt{\log_3\left(x^2-2x+m\right)-1}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số xác định với mọi số thực x.

A $m \geqslant 1$. B $m \leqslant 4$. C $m \geqslant 4$. D $m>1$.

Câu 3. Thống kê điểm số (thang điểm 20) của 100 thí sinh tham dự kỳ thi học sinh giỏi cấp tỉnh môn Toán, ta có bảng số liệu sau:

Điểm	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$	$[14;16)$	$[16;18)$	$[18;20)$
Số thí sinh	12	22	34	16	12	4

Tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên

A 14,775. B 14,825. C 14,875. D 15,125.

Câu 4. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=5$. Giá trị của b thuộc khoảng nào?

A $(-1;2)$. B $(-\infty;-3)$. C $(2;+\infty)$. D $(-3;-1)$.

Câu 5. Khai triển và rút gọn đa thức $P(x)=(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$ ta được $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$. Tìm hệ số a_3.

A 330. B 362. C 365. D 366.

Câu 6. Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hóa và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của sức mua của 100 triệu đồng sau ba năm chỉ còn là 80 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của ba năm đó gần nhất với giá trị nào?

A 7,1%. B 7,2%. C 7,3%. D 7,4%.

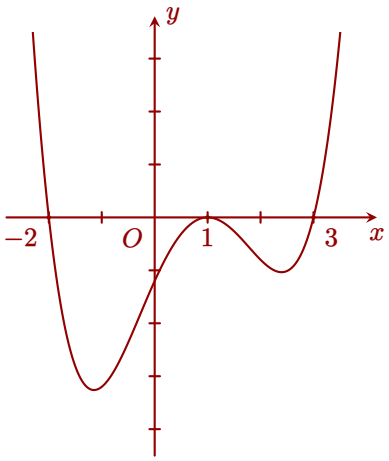
Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{7}$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi I là điểm thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BI}$. Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SCD)

A $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. B $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. C $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. D $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

Câu 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(2m+3)x+m+1}{x+2}$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để khoảng cách từ $A(1;3)$ đến tiệm cận xiên của đồ thị hàm số bằng $\sqrt{2}$. Tính tổng các phần tử của S.

A 2. B 1. C -2. D 3.

Câu 9. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ được cho bởi hình sau



Cho 3 phát biểu:

1 Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

2 Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

3 Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Hỏi có bao nhiêu phát biểu đúng?

A 2. B 0. C 3. D 1.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-4	↗	$+\infty$

Xác định cặp giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất hàm số $y=|f(3\cos 2024x-1)|$ trên $\mathbb{R}$.

A 4 và 3. B 4 và 2. C 3 và 0. D 4 và 0.

Câu 11. Cho hàm số $y=\dfrac{6x-4}{3x+1}$ có đồ thị (C) và I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận tại hai điểm A và B. Tính số đo diện tích tam giác IAB.

A $\dfrac{1}{3}$. B $\dfrac{2}{3}$. C 8. D 4.

Câu 12. Hai chiếu flycam được điều kiển cùng bay lên 1 địa điểm. Sau một thời gian bay chiếc flycam thứ nhất cách mặt đất 5 m, cách điểm xuất phát 3 m về phía nam và 2 m về phía đông. Chiếc flycam thứ hai cách mặt đất 9 m cách điểm xuất phát 5 m về phía bắc và 6 m về phía tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với O đặt tại điểm xuất phát của hai flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (tham khảo hình vẽ) đơn vị đo theo mét. Tính khoảng cách giữa hai filycam trên (làm tròn đến hàng đơn vị).

A 6 m. B 9 m. C 10 m. D 12 m.

Câu 13. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Qua khảo sát thị trường thấy rằng nếu cho thuê một căn hộ với giá 2 triệu đồng/ tháng thì tất cả các căn hộ đều được thuê và nếu mỗi tháng tăng 100 nghìn đồng / căn thì có hai căn hộ bị bỏ trống. Tính giá cho thuê mỗi căn hộ trên một tháng (đơn vị triệu đồng) để doanh thu của công ty cao nhất.

A 2,2. B 2,25. C 2,5. D 2,75.

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$ có cạnh bằng 1 . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và BC . Cho vecto $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{A'N} - \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{D'M}$. Tính độ dài vecto $\overrightarrow{u}$.

A $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. B $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. C $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. D $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;0)$, $B(2;3;3)$, $C(-1;9;-18)$. Gọi $H(a;b;c)$ là trực tâm của tam giác ABC. Tính $a+b+c$.

A -18. B -21. C -16. D -19.

Câu 16. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+mx-4m}{x-m}$ có đồ thị (C) và đường thẳng d có phương trình $x-y-2=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C) có hai điểm cực trị và khoảng cách từ điểm cực đại đến đường thẳng d gấp ba lần khoảng cách từ điểm cực tiểu đến đường thẳng d.

Câu 17. Một hình vuông có kích thước $m \times m$, $(m \geqslant 2, m \in \mathbb{N})$ được chia thành các ô vuông nhỏ có cạnh bằng một đơn vị. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật được tạo thành từ các ô vuông. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để xác suất chọn được một hình chữ nhật mà không phải hình vuông lớn hơn 0,84.

Câu 18. Trong công viên, có một hồ nước hình bán nguyệt đường kính AB bằng 100 m. Tại A và B người ta dựng hai bức tượng lần lượt cao 8 m và 10 m. Một người đứng trên phần cung tròn của bờ hồ muốn đặt máy ảnh cao 1,6 m để chụp toàn cảnh hai bức tượng. Khi người đó di chuyển trên phần cung tròn của bờ hồ thì góc quan sát lớn nhất bằng bao nhiêu độ? (Làm tròn hàng đơn vị).

Câu 19. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $BC=2a$, tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi và có góc $\widehat{B'BC}$ nhọn. Biết mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với mặt phẳng đáy, góc nhị diện $[A, BB', C']$ có số đo bằng α thoả mãn $\tan\alpha = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

a) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $B'C$.

Câu 20. Cho x, y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y+2}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy-6.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{8x+7y-5}{x+y+6}$.

12 SỞ SƠN LA

Câu 1. Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = a+b\sqrt{3}+c\pi$ (với $a,b,c\in\mathbb{Q}$). Tính $S=a+b-c$.

A 6. B 10. C 8. D 3.

Câu 2. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm E,F lần lượt nằm trên các cạnh CA,AB thoả mãn $4\overrightarrow{AE}+3\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{0}$. Điểm M trên tia EF thoả mãn $\dfrac{MF}{ME}=\dfrac{a}{b}$ $(a,b\in\mathbb{N}^*,(a,b)=1)$. Để ba điểm M,B,C thẳng hàng thì giá trị của $a+b$ bằng

A 10. B 16. C 7. D 9.

Câu 3. Trong mặt phẳng (Oxy) , cho tam giác ABC có $A(2;-1),B(4;5),C(-3;2)$. Phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ C là

A $x+y-1=0$. B $x+3y-3=0$. C $3x+y+11=0$. D $3x-y+11=0$.

Câu 4. Chọn ngẫu nhiên 3 số a,b,c trong tập hợp $S=\{1;2;3;\ldots;26\}$. Xác suất để 3 số chọn ra thỏa mãn $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho 5 bằng

A $\dfrac{17}{65}$. B $\dfrac{14}{65}$. C $\dfrac{1}{520}$. D $\dfrac{17}{520}$.

Câu 5. Hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển của biểu thức $\left(3x^3-\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ bằng

A -810. B -240. C 810. D 240.

Câu 6. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau $\overline{abc}$ thỏa mãn chữ số a lẻ và $a

A 50. B 150. C 200. D 100.

Câu 7. Cho góc x thỏa mãn $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ và $\sin x=\dfrac{1}{3}$. Biểu thức $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$ có giá trị bằng

A $2\sqrt{2}$. B $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. C $-2\sqrt{2}$. D $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$ có dạng $(a;b]$. Giá trị a^2-2b

A 1. B -1. C 0. D 2.

Câu 9. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x}{x-2}+5\right)>-2$ có số nghiệm nguyên trong đoạn $[-2025;2025]$ bằng bao nhiêu?

A 2029. B 2026. C 2028. D 2025.

Câu 10. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 8 và có diện tích S_1. Ta lấy trung điểm các cạnh hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ để tạo thành hình vuông mới $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_2. Từ hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ lại làm như trên ta được dãy các hình vuông $A_3B_3C_3D_3,\ldots,A_{100}B_{100}C_{100}D_{100}$ có diện tích lần lượt là $S_3,\ldots,S_{100}$. Tổng $T=S_1+S_2+\cdots+S_{100}$ bằng

A $2^6-\dfrac{1}{2^{94}}$. B $2^7-\dfrac{1}{2^{92}}$. C $2^7-\dfrac{1}{2^{93}}$. D $2^6-\dfrac{1}{2^{93}}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x>0\\ 2x^2+3m+1 & \text{khi } x\leqslant 0.\end{cases}$ Giá trị của m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ là

A $m=1$. B $m=2$. C $m=0$. D $m=-\dfrac{1}{6}$.

Câu 12. Cho $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{9\sqrt[7]{x+1}\left(\sqrt{x+4}-2\right)}=\dfrac{a}{b}$ $(a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*, \dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản).
Tổng $a+b$ bằng:

A 13. B 23. C 43. D 53.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB \parallel CD$, $AB=2CD$. Điểm M thuộc cạnh AD (M không trùng A và D) sao cho $\dfrac{MA}{MD}=x$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với SA và CD, cắt SD, SC, CB lần lượt tại N, P, Q. Biết diện tích tứ giác $MNPQ$ bằng một nửa diện tích tam giác SAB, giá trị của x bằng

A $\dfrac{1}{2}$. B 1. C 2. D $\dfrac{1}{3}$.

Câu 14. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a , số đo góc $[C', AB, C]$ bằng α , với $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. Chiều cao h của lăng trụ bằng

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. B $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. C $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. D $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D với, $AB=AD=2DC=2a$. Gọi I là trung điểm AD . Các mặt phẳng (SIC) và (SIB) cùng vuông góc với $(ABCD)$, Biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $a^3\sqrt{6}$. B $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a^3$. C $\dfrac{3}{4}a^3$. D $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^3$.

Câu 16. Bạn Bình thống kê chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nam lớp 12A ở bảng sau:

Chiều cao (cm)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)
Số học sinh nam lớp 12A	0	9	8	2	1	5

Gọi R là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của các bạn học sinh nam lớp 12A. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là

A $R=30$. B $R=35$. C $R=25$. D $R=20$.

Câu 17. Cho mẫu số liệu ghép nhóm, trong các khẳng định sau có bao nhiêu khẳng định đúng ?
(1) Nếu các giá trị của mẫu số liệu càng tập trung quanh giá trị trung bình thì độ lệch chuẩn càng lớn.
(2) Khoảng biến thiên luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.
(3) Tứ phân vị thứ ba không nhỏ hơn tứ phân vị thứ nhất
(4) Khoảng tứ phân vị bằng hiệu giữa tứ phân vị thứ ba và thứ nhất.
(5) Trung vị luôn bằng giá trị trung bình của số liệu

A 5. B 2. C 4. D 3.

Câu 18. Rút ngẫu nhiên 2 thẻ trong 50 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 50 . Xác suất để tích các số trên hai tấm thẻ là một số chia hết cho 10 bằng

A $\dfrac{67}{245}$. B $\dfrac{10}{49}$. C $\dfrac{13}{49}$. D $\dfrac{57}{245}$.

Câu 19. Lớp 12A có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Tổng kết học kỳ I lớp 12A có 40% số học sinh nam đạt học lực tốt và 60% học sinh nữ đạt học lực lực tốt. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp, xác suất để chọn được học sinh đạt học lực Tốt bằng

A 1. B $\frac{23}{45}$. C $\frac{22}{45}$. D $\frac{11}{25}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^3(x+1)^2(x^2-4)(x^3+1),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A 4. B 3. C 1. D 2.

Câu 21. Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{(x+1)\sqrt{x^2-16}}$ bằng

A 4. B 3. C 1. D 2.

Câu 22. Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Chi phí nhiên liệu phần thứ nhất không đổi và bằng 540 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi vận tốc bằng 10 km/h thì chi phí nhiên liệu phần thứ hai bằng 80 nghìn đồng trên 1 giờ. Vận tốc của tàu để chi phí đường sông trên 1 km nhỏ nhất bằng

A 20 km/h. B 18 km/h. C 15 km/h. D 30 km/h.

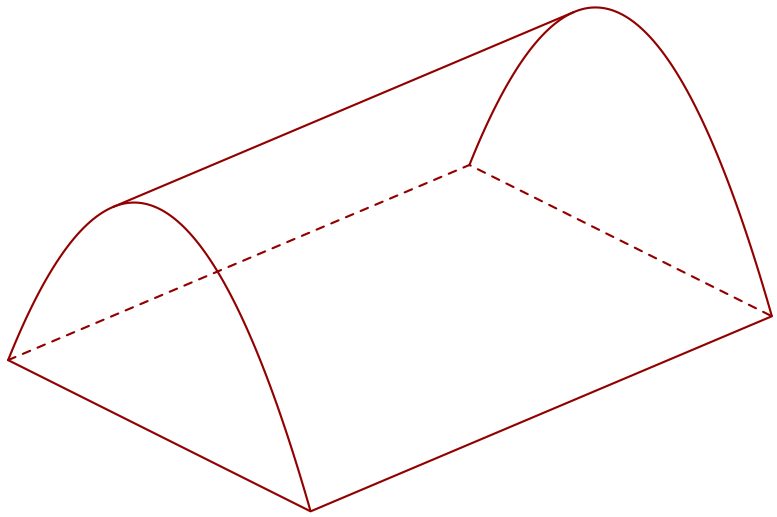
Câu 23. Họ nguyên hàm $\int 2\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ là

A $x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$. B $x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$. C $\frac{2}{3}\cdot\sin^3 x+C$. D $\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin^3 x}{\cos x}+C$.

Câu 24. Cho a là số thực khác 0 thỏa mãn $\displaystyle\int_a^{2a}\frac{x+2}{x}\,\mathrm{d}x=0$, khi đó a thuộc tập nào trong các tập sau đây?

A $(-1;1)$. B $(-2;-1)$. C $(2;3)$. D $(1;2)$.

Câu 25. Nhân dịp đi dã ngoại, lớp 12A dự kiến dựng một cái trại có dạng hình parabol như hình vẽ.



Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 4 m, chiều dài 6 m, đỉnh trại cách nền 4 m. Thể tích phần không gian bên trong lều trại bằng?

A 32 m 3. B 64 m 3. C 30 m 3. D 60 m 3.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) có phương trình $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$ cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C . Khi đó thể tích khối chóp $OABC$ bằng

A 6. B 3. C 2. D 1.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-8}{-2}$ và $d_2 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+7}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 là

A $(P) : x + 8y + 5z + 16 = 0$. B $(P) : x + 8y + 5z - 16 = 0$.

C $(P) : 2x + y - 6 = 0$. D $(P) : x + 4y + 3z - 12 = 0$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\,(2;-3;5)$. Toạ độ điểm A' đối xứng với A qua trục Oy là

A $(2;3;5)$. B $(2;-3;-5)$. C $(-2;-3;5)$. D $(-2;-3;-5)$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho $A\,(-4;1;5)$, $B\,(6;-1;1)$ và $(P) : x + y - z - 1 = 0$. Xét các mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc (P) . Bán kính nhỏ nhất của (S) bằng

A 5. B 6. C $\sqrt{33}$. D $\sqrt{35}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$ và điểm M thuộc một trong ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Giá trị nhỏ nhất của $P = \left|3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}\right|$ bằng

A 11. B $\sqrt{521}$. C $5\sqrt{26}$. D $\sqrt{929}$.

Câu 31. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) .

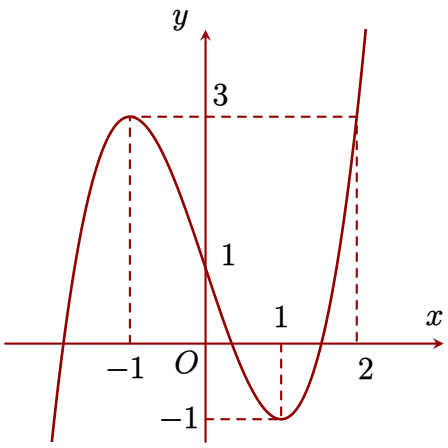
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = -2$, trục tung là 5.	○	●
b	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3 + 3x^2$, $y = x + 3$ và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 0$ được xác định bởi công thức $S = \int\limits_{-3}^{-1} \left(x^3 + 3x^2 - x - 3\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \left(-x^3 - 3x^2 + x + 3\right)\,\mathrm{d}x$.	●	○
c	Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$, trục hoành xung quanh trục Ox là $V = \dfrac{792}{35}\pi$.	○	●
d	Có hai giá trị $m \in (-1;1)$ sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3 + 3x^2$, $y = m^2x + 5$ và 2 đường thẳng $x = 0, x = 1$ có diện tích bằng 4.	○	●

Câu 32. Biểu đồ bên dưới thống kê theo nhóm chiều cao (đơn vị: cm) của các vận động viên của hai đội bóng rổ Sao La và Kim Ngưu:

Chiều cao (cm)	$[170;175)$	$[175;180)$	$[180;185)$	$[185;190)$	$[190;195)$
Đội Sao La	2	4	5	5	4
Đội Kim Ngưu	2	3	4	10	1

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Theo số trung bình chiều cao của hai đội bóng xấp xỉ nhau.	●	○
b	Theo trung vị, chiều cao của đội Kim Ngưu cao hơn so với đội Sao La.	●	○
c	Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên bất kì của đội Sao La để phỏng vấn, xác suất để thành viên đó không thấp hơn 190cm là $\frac{1}{5}$.	●	○
d	Chọn ngẫu nhiên mỗi đội 1 thành viên lên sân khấu giao lưu. Xác suất để hai cầu thủ cùng trong một nhóm chiều cao là $\frac{1}{4}$.	○	●

Câu 33. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$f'(2) = 9$.	●	○
b	Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\ln(x+1)}{f(x)+1}$ có ba đường tiệm cận đứng.	○	●
c	Giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x) = f(\sin x + \cos x)$ trong $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ bằng $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$.	○	●
d	Hàm số $y = \left\|f\left(x^2 - 4x + 4\right) - 2025\right\|$ có ba điểm cực tiểu.	●	○

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Biết rằng $SA \perp (ABCD)$

.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$AC \perp SB$.	○	●
b	Biết $SA = 3a, A \quad B = 4a$ và I là trung điểm của SD . Khi đó cosin của góc giữa hai mặt phẳng (AIC) và (SBC) bằng $\frac{4}{\sqrt{34}}$.	○	●
c	Biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng 3. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất bằng $27\sqrt{3}$.	○	●
d	Biết $SA = 1$, $SB = 2$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm J của SG cắt các cạnh SA, SB, SD lần lượt tại M, N, P . Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2}$ bằng 4.	●	○

Câu 35. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $A(-4;8)$ và điểm C thuộc đường thẳng $d : 2x + y + 5 = 0$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Tìm tọa độ các điểm B và C, biết rằng $N(5;-4)$.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2025; 2025]$ để bất phương trình $\log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m$ nhận mọi giá trị x thuộc khoảng $(-\infty; 0)$ là nghiệm?

Câu 37. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = 9 \\ \dfrac{2u_{n+1}}{n^2+4n+3} = \dfrac{u_n + n^2 + n - 2}{n^2 + n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{4n^2+n}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, góc $\widehat{ABC} = 60°$, $SA = SC = SD = \sqrt{3}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh SC, CD. Mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt bên (SCD). Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AE.

Câu 39. Tìm các giá trị nguyên của m để hàm số $y = 2x + m\sqrt{x^2 + 4x + 6}$ có điểm cực tiểu nhỏ hơn hoặc bằng $-\frac{5}{2}$.

13 SỞ THÁI BÌNH

Câu 1. Mỗi ngày bác An đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày của bác An trong 20 ngày được thống kê ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A $0,975$. B $0,9$. C $0,5$. D $0,575$.

Câu 2. Thống kê điểm kiểm tra học kì I môn Toán của các học sinh lớp 12A và 12B ở bảng sau:

Điểm	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
12A	1	0	11	22	6
12B	0	6	8	14	12

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Điểm trung bình của lớp 12A là 8,4 (làm tròn đến hàng phần chục).

B Điểm trung bình của lớp 12A nhỏ hơn lớp 12B.

C So sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh lớp 12A học đồng đều hơn học sinh lớp 12.

D Phương sai của mẫu số liệu lớp 12B là 1,05 (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-6}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Giá trị nhỏ nhất của $P=ab+a+c$ bằng

A $\dfrac{-1}{4}$. B $\dfrac{3}{8}$. C $\dfrac{-25}{8}$. D $\dfrac{-1}{8}$.

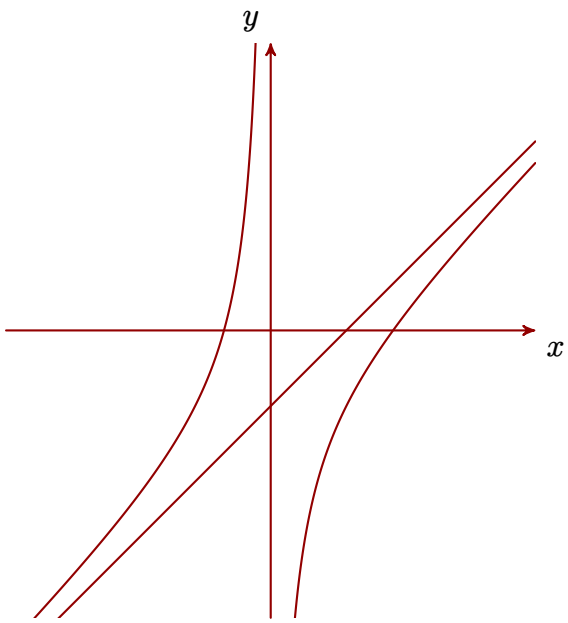
Câu 4. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=-3\overrightarrow{i}$ và hai điểm B,C theo thứ tự nằm trên các trục Oy,Oz sao cho $OB=2$, $OC=5$. Giá trị biểu thức $\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\cdot\overrightarrow{OC}\right|$ bằng

A 60. B 15. C 30. D 20.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $[f(3x+1)]^{2024}+[f(1-4x)]^{2025}=2026x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Đạo hàm $f'(1)$ bằng

A $\dfrac{1013}{1014}$. B $-\dfrac{1}{7}$. C $-\dfrac{1013}{7086}$. D -2026.

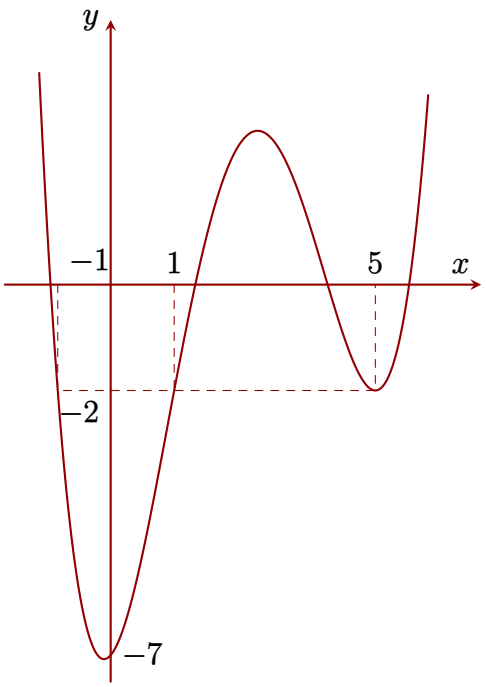
Câu 6. Cho đồ thị hàm số $y=ax-b-\dfrac{c}{x}$ $(abc\neq 0)$ có dạng như hình vẽ sau



Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ c>0 \end{cases}$. B $\begin{cases} a>0 \\ b<0 \\ c>0 \end{cases}$. C $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \\ c>0 \end{cases}$. D $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ c<0 \end{cases}$.

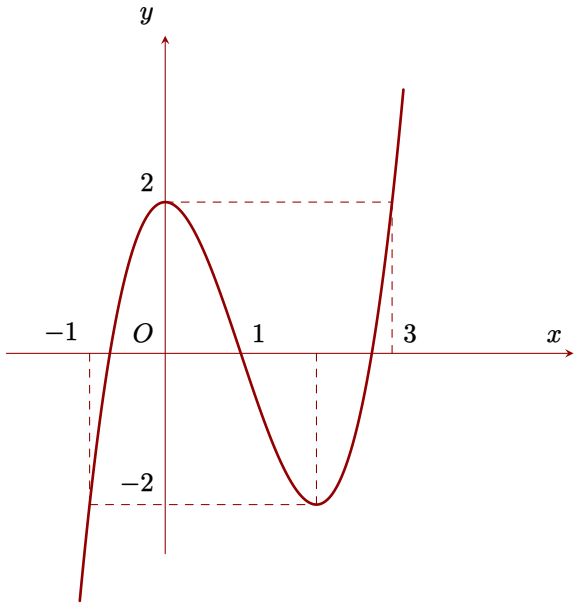
Câu 7. Cho đa thức $y=f(x)$ và hàm số $g(x)=f(x)+2x+1$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $g(-1)>g(1)$. B $g(5)>g(6)$. C $g(-2)<g(-3)$. D $g(3)>g(4)$.

Câu 8. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $g(x)=f(x+m)-\dfrac{1}{2}(x+m-1)^2+2024$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng các phần tử của S bằng

A -11. B -14. C -3. D -21.

Câu 9. Cho hàm số $F(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x$ và $f(x)=(2024x^2+2025x)\mathrm{e}^x$. Biết $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, giá trị $a+2b+3c$ bằng

A 1. B 4047. C 2024. D 4049.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-\dfrac{1}{2}x^2-x$ có đạo hàm trên khoảng $(-1;+\infty)$ và hàm số $g(x)=f'(x)+x$. Giá trị tổng $g\left(\tan\dfrac{\pi}{80}\right)+g\left(\tan\dfrac{2\pi}{80}\right)+g\left(\tan\dfrac{3\pi}{80}\right)+\cdots+g\left(\tan\dfrac{19\pi}{80}\right)=m\ln\sqrt{n}$ (trong đó m,n là các số nguyên tố). Giá trị m^2+n^2 bằng

A 365. B 326. C 328. D 363.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(3;-2;1)$ và $\vec{b}=(2;1;-1)$. Giá trị thực của m để hai véc-tơ $\vec{u}=-m\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=3\vec{a}+m\vec{b}$ vuông góc với nhau là

A $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-9\end{array}\right.$. B $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-9\end{array}\right.$. C $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=9\end{array}\right.$. D $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=9\end{array}\right.$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$ có tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là

A 3. B 4. C 5. D 2.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD và P, Q là các điểm thoả mãn $3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}$, $3\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MP}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$. B $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MQ}$.

C $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MP}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MQ}$. D $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MP}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MQ}$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết phương trình $f(x)-2m+1=0$ có nghiệm khi $m\in[-3;5]$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f^2(x)+2f(x)-3$ trên $\mathbb{R}$ bằng

A 96. B 60. C 32. D 64.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$+$	
y	4	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	
		1		2	-2		

Mệnh đề nào sau đây **đúng?**

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số bằng 3.

C Phương trình $f(x)-2=0$ có ba nghiệm phân biệt.

D Hàm số $y=2024-f(x)$ có một điểm cực trị.

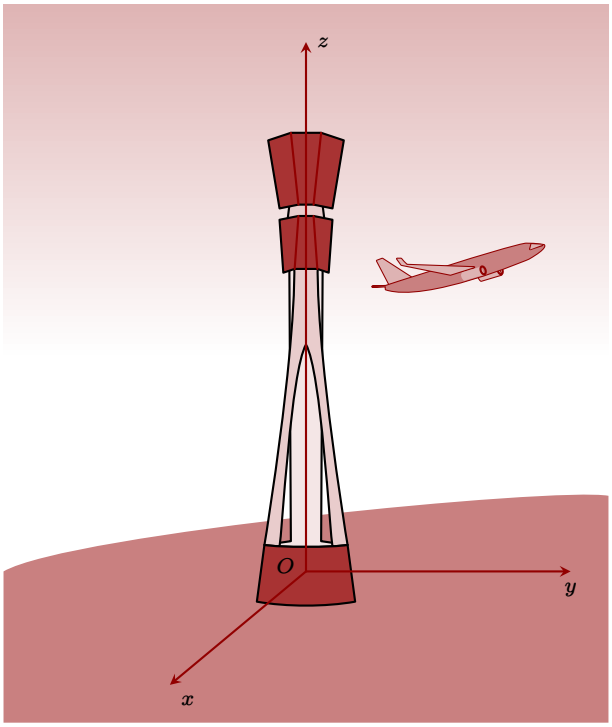
Câu 16. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x\geqslant 1$, $y\geqslant 1$ và $\log_3\dfrac{x+y}{4xy}=4xy-3(x+y)-1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ thuộc tập nào dưới đây?

A $[9\,;+\infty)$. B $[7\,;9)$. C $(0;5)$. D $[5\,;7)$.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $\overrightarrow{AB}=(5;-1;8)$, $\overrightarrow{BC}=(1;-7;4)$. Độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B của tam giác ABC bằng

A $\sqrt{31}$. B 9. C $\sqrt{17}$. D 7.

Câu 18. Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, người ta lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là mặt phẳng), trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời. Sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía nam với tốc độ 888 km/h trong 30 phút. Xác định tọa độ của véc-tơ biểu diễn sự dịch chuyển của máy bay trong nửa giờ đó đối với hệ tọa độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ được lấy theo kilômét.



A $(0;0;444)$. B $(444;0;0)$. C $(444;444;0)$. D $(0;444;0)$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có điểm cực đại, cực tiểu lần lượt là -1 và 3. Biết rằng $y=-8x+1$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đó. Tổng a^2+b^2+c+d bằng

A 8. B 7. C 5. D 6.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-2)^3(x+3)^{2025}$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x^2)$ là

A 0. B 2. C 3. D 1.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3;0;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(3;2;0)$, $D(0;4;0)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$\overrightarrow{IG}=\left(0;\frac{1}{3};0\right)$, với I, G lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và trọng tâm tam giác OAD.	●	○
b	Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc đoạn BC sao cho $S_{\triangle ABM}=2S_{\triangle ACM}$, khi đó $a+b+c=\frac{13}{3}$.	●	○
c	$\overrightarrow{AB}\left(3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)=-18$.	●	○
d	Điểm $N(m;n;p)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\left(\overrightarrow{NA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{ND}\right)+NB^2+NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, $m+n+p=\frac{17}{3}$.	○	●

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$		$-$		$-$	
y	$-\infty$	↗	10	↘	0	↗	5	↘	2	↘	3

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Đồ thị hàm số $h(x)=\dfrac{2025}{f(x)-2}$ có tất cả 5 đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang).	○	●
b	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.	○	●
c	Hàm số $g(x)=\lvert f(\lvert x-2024\rvert)-4\rvert$ có 11 điểm cực trị.	○	●
d	Phương trình $\lvert f(x)-3\rvert=2$ có 6 nghiệm phân biệt.	●	○

Câu 23. Kết quả khảo sát độ tuổi kết hôn của phụ nữ và nam giới vừa lập gia đình được cho ở bảng sau:

Tuổi kết hôn	$[19;22)$	$[22;25)$	$[25;28)$	$[28;31)$	$[31;34)$
Nam giới	10	27	31	25	7
Phụ nữ	47	40	11	2	0

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Tuổi trung bình kết hôn của phụ nữ là 22 tuổi.	○	●
b	Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì phụ nữ có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn so với nam giới.	●	○
c	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với nam giới là $\dfrac{61}{3}$ tuổi.	○	●
d	Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với nam giới là 15 tuổi.	●	○

Câu 24. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều và

nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC), M là trung điểm cạnh CC'.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{CB'} = \dfrac{a^2}{4}$.	○	●
b	Cosin góc giữa hai véctơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BM}$ bằng $\dfrac{\sqrt{33}}{11}$.	●	○
c	Mặt bên $BCC'B'$ là hình chữ nhật.	●	○
d	Gọi K là điểm thuộc mặt phẳng $(AB'C')$. Giá trị nhỏ nhất của $\left\lvert\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KM}\right\rvert$ bằng $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.	●	○

Câu 25. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị là đường cong (C).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Phương trình $x^2+3x+3 = m\lvert x+2\rvert$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > 1$.	○	●
b	Tiếp tuyến của đồ thị (C) tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có chu vi nhỏ nhất bằng $4\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2\sqrt{2}-1}$.	○	●
c	Biết hàm số có 2 điểm cực trị khi đó tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số bằng -2.	●	○
d	Tiếp tuyến của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $x-3y-6=0$ đi qua điểm $B\,(2;-5)$.	○	●

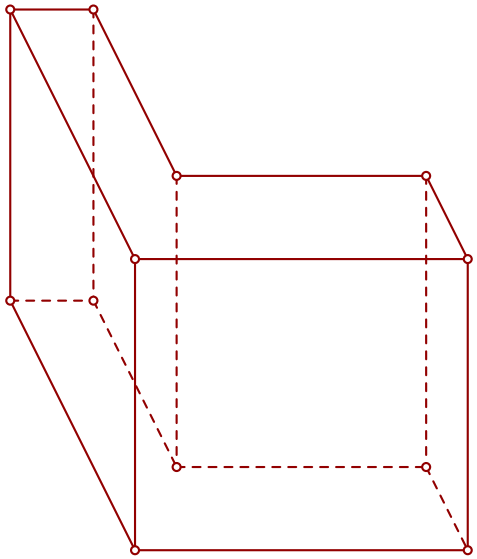
Câu 26. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bằng nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, CC'. Biết độ dài đoạn $MN = a$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và AN bằng $\dfrac{a\sqrt{102}}{68}$.	●	○
b	Thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.	○	●
c	$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC'} = \dfrac{a^2}{2}$.	○	●
d	$\sin[A', AC', B'] = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$.	●	○

Câu 27. Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz có số đo $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$, $\widehat{zOx}$ lần lượt bằng $60°$, $90°$, $120°$. Mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C khác điểm O sao cho $\dfrac{5}{OA}+\dfrac{2}{OB}+\dfrac{3}{OC}=1$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

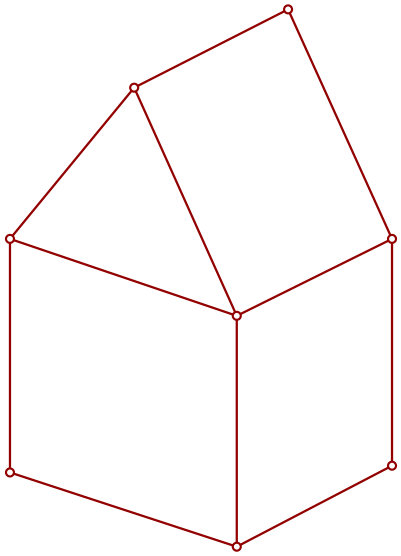
KẾT QUẢ:

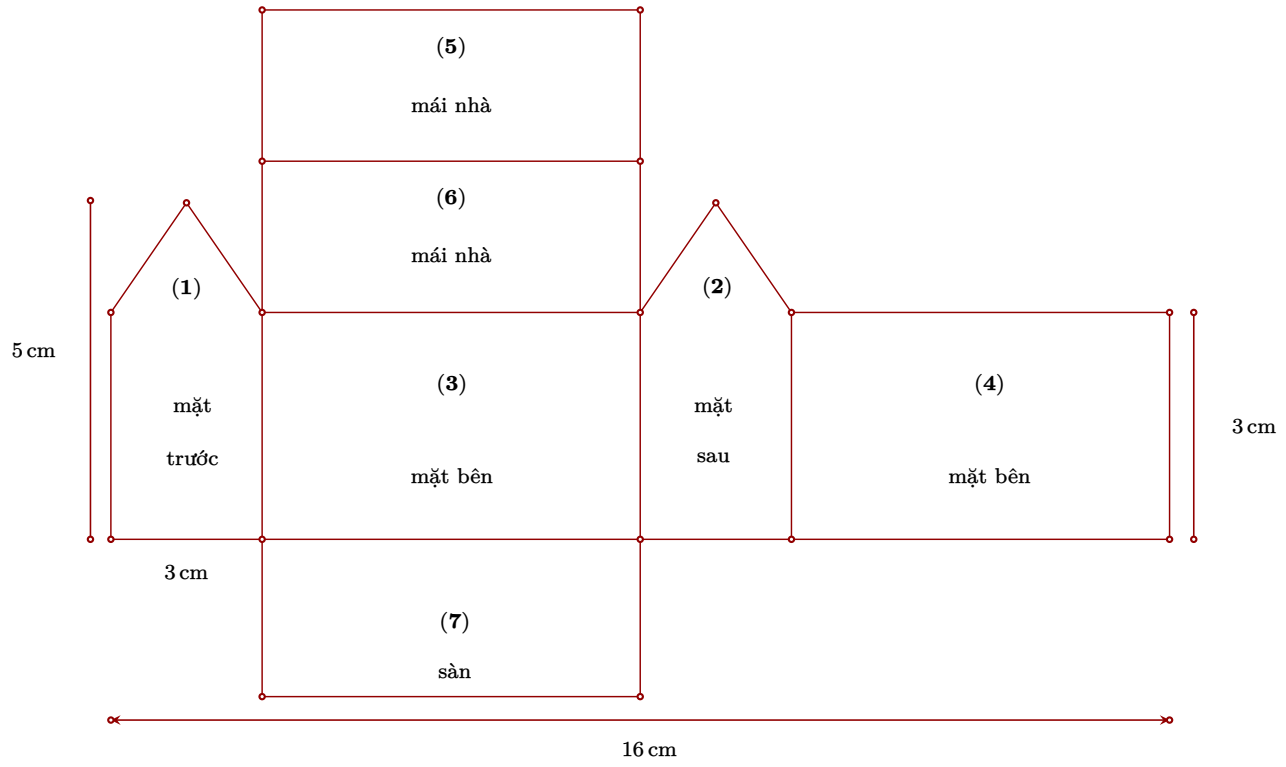
Câu 28. Hành lang trong một tòa nhà dạng hình chữ L có chiều cao 2,3 m, một phía rộng 1,2 m, một phía rộng 1,5 m (như hình vẽ). Người thợ cần mang một ống thép thẳng từ bên này qua bên kia hành lang. Hỏi độ dài của ống thép lớn nhất bằng bao nhiêu? (coi thiết diện ngang của ống thép là không đáng kể, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



KẾT QUẢ:

Câu 29. Mô hình của một ngôi nhà được cắt ra và trải trên mặt phẳng thành một lưới đa giác như hình vẽ dưới đây:





Tính thể tích của mô hình (đơn vị cm^3).

KẾT QUẢ:

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm A, B lần lượt thuộc các tia Ox, Oy sao cho $OA \cdot OB = 4$. Điểm S thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho số đo của góc nhị diện $[S; OB; A]$ và $[S; AB; O]$ đều bằng $60°$. Gọi $S(a; 0; c)$ với $a > 0$, $c > 0$. Khi thể tích khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất, tính giá trị biểu thức $P = a^4 + c^4$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KẾT QUẢ:

Câu 31. Cho ba số thực dương $x, y, 2z+1$ thỏa mãn $(x-2z-1)^2+(2y-2z-1)^2 = 12z^2+12z+27$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^3(y-2z)+4y^3(x-4z)-x^3-8y^3-(2z+1)^3xy}{xy}$ là một số hữu tỷ có dạng $\dfrac{m}{n}$, trong đó $\dfrac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m+n$.

KẾT QUẢ:

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2+x-2}{2x-1}$ và hàm số $g(x) = \dfrac{2f(x)-2025}{f(x)-2}$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

KẾT QUẢ:

14 SỞ THANH HÓA

Câu 1. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$, với $a,b\in\mathbb{R}$. Tính $a+8b$.

A -1. B 2. C -4. D 5.

Câu 2. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$ lần lượt là m,M. Khi đó $2M+m$ bằng

A 2. B 1. C -1. D 0.

Câu 3. Khảo sát thu nhập theo tháng của người lao động ở một công ty thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thu nhập (triệu đồng)	$[5;8)$	$[8;11)$	$[11;14)$	$[14;17)$	$[17;20)$
Số người	30	55	45	30	20

Tính mức thu nhập trung bình của người lao động ở công ty trên.

A 11. B 12,5. C 10,5. D 11,75.

Câu 4. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc 120^0 và $|\vec{a}|=3$, $\left|\vec{b}\right|=5$. Tính độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$.

A $\sqrt{19}$. B 7. C 49. D 19.

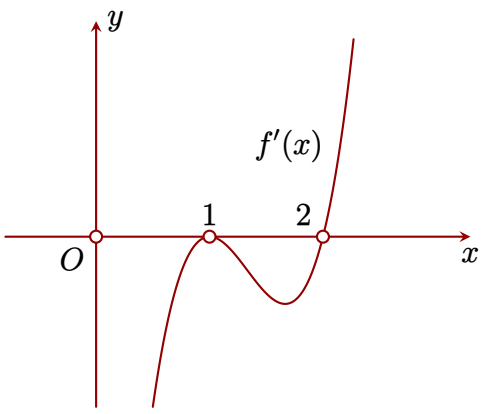
Câu 5. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x+9}{x+1}$ bằng

A $6\sqrt{5}$. B $4\sqrt{5}$. C $2\sqrt{2}$. D $3\sqrt{2}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các đỉnh $A'(-1;2;3)$, $C'(1;4;5)$, $B(-3;3;-2)$, $D(5;3;2)$. Tìm tọa độ D'.

A $D'(0;2;-1)$.. B $D'(4;3;6)$.. C $D'(2;4;1)$. . D $D'(-4;3;2)$..

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(-\infty;2)$. B $(1;3)$. C $(0;1)$ và $(2;+\infty)$. D $(0;+\infty)$.

Câu 8. Một cấp số cộng (u_n) có tổng của n số hạng đầu S_n được tính theo công thức $S_n=3n^2+5n, n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng. đó.

A $u_1=-8;\ d=6$. B $u_1=6;\ d=8$. C $u_1=8;\ d=-6$. D $u_1=8;\ d=6$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;-2;3)$, $B(0;2;-1)$, $C(-2;0;1)$. Xác định tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

A $\vec{u}=(1;6;-6)$. B $\vec{u}=(4;14;-14)$. C $\vec{u}=(7;2;-2)$. D $\vec{u}=(1;6;-2)$.

Câu 10. Gieo đồng thời hai con xúc xắc I và II cân đối, đồng chất một lần. Ta gọi biến cố A: "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm". Khi đó xác suất $\mathrm{P}(A)$ của biến cố A là

A $P(A)=\dfrac{15}{36}$. B $P(A)=\dfrac{11}{36}$. C $P(A)=\dfrac{1}{36}$. D $P(A)=\dfrac{25}{36}$.

Câu 11. Nghiệm của phương trình $2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}=0$ là

A $\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. B $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

C $\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. D $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 12. Đặt $a=\log_2 3, b=\log_5 3$. Nếu biểu diễn $\log_6 45=\dfrac{a(m+nb)}{b(a+p)}$ (với $m,n,p\in\mathbb{Z}$) thì $13m+12n+2024p$ bằng

A 3012. B 2061. C 2028. D 1024.

Câu 13. Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$	$[40;45)$
Số ngày	6	7	5	6	4

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

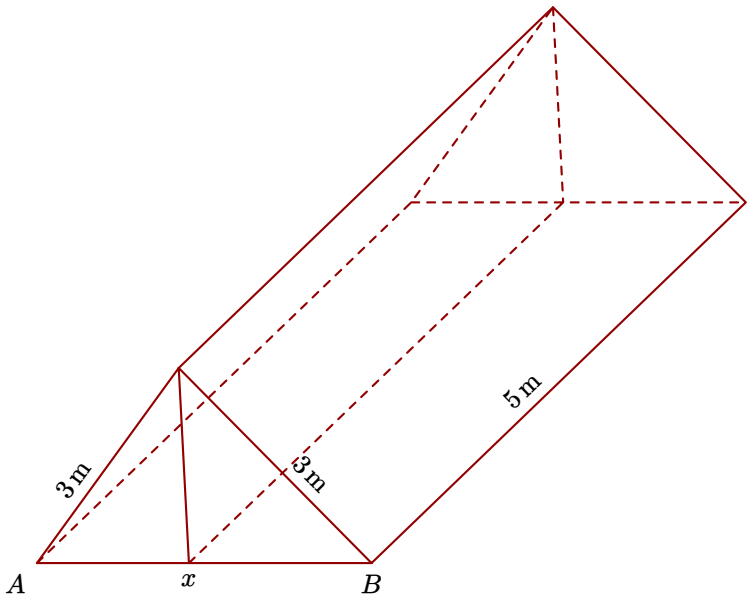
A $\dfrac{165}{14}$. B 27,5. C $\dfrac{155}{13}$. D 12,2.

Câu 14. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Gọi I là điểm thuộc đoạn CC' thoản mãn $IC=3IC'$, G là trọng tâm tứ diện $BA'B'C'$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\overrightarrow{IG}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$. B $\overrightarrow{IG}=\dfrac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}\right)$.

C $\overrightarrow{IG}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{3}{4}\vec{c}$. D $\overrightarrow{IG}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{c}$.

Câu 15. Người ta dựng trên mặt đất bằng phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều dài 6 m và chiều rộng 5 m bằng cách gấp đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh chiều dài của tấm bạt sao cho hai mép cạnh chiều rộng của tấm bạt sát đất và cách nhau x (m), hai đầu hồi của lều được thiết kế cửa ra, vào và có thể khép kín (tham khảo hình vẽ). Thể tích không gian phía trong lều lớn nhất bằng $\dfrac{a}{b}\left(\mathrm{m}^3\right)$ với $a, b\in\mathbb{N}^*$ và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị $a+b$.



A 28. B 47. C 27. D 35.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5;-3;2)$, $B(2;1;-2)$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt thay đổi thoả mãn $BM = BN = 2$ và A, M, N thẳng hàng. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2.AM + 5.AN$ có dạng $7\sqrt{m} - n$ với $m; n$ là số tự nhiên. Tính giá trị $5m + n$.

A 169. B 161. C 215. D 211.

Câu 17. Cho tứ diện $OABC$ có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 60^0; \widehat{AOC} = 90°; OA = OB = OC = 1$. M là điểm thuộc cạnh OA sao cho $AM = 2.MO$; N là trung điểm của BC. Tính độ dài véc tơ $\overrightarrow{MN}$.

A $\frac{4}{5}$. B $\frac{2}{3}$. C $\frac{3}{4}$. D $\frac{5}{6}$.

Câu 18. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $1 < a \leqslant b \leqslant a^4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left[\log_a\left(\frac{a^2}{b}\right)\right]^3 - 3\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{b}{a}\right)$.

A 4. B -18. C -26. D 6.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Trên mỗi cạnh của tứ diện ta đánh dấu 4 điểm chia đều cạnh đó thành các phần bằng nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh lấy từ 24 điểm đánh dấu sao cho mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho

A 283. B 336. C 432. D 216.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = g(x) = \dfrac{2024}{f(x) - 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-7	↗	2	↘	1 ‖	↘	$-\infty$

A 5. B 6. C 4. D 8.

Câu 21. Một hộp chứa 45 quả cầu có cùng kích thước và khối lượng được đánh số từ 1 đến 45. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Số cách lấy được cả 3 quả cầu đánh số chẵn bằng 1540.	○	●
b	Xác suất để tổng 3 số ghi trên 3 quả cầu là số lẻ bằng $\frac{1}{2}$.	○	●
c	Xác suất để tổng 3 số ghi trên 3 quả cầu là số chia hết cho 4 bằng $\frac{323}{1290}$.	●	○
d	Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu là một số chia hết cho 8 bằng $\frac{523}{1290}$.	○	●

Câu 22. Tại một trường THPT, để khảo sát năng lực học môn Toán của hai lớp 12E và 12F, giáo viên đã cho học sinh ở hai lớp làm bài kiểm tra khảo sát đầu năm, thống kê điểm của học sinh được cho trong bảng sau:

Lớp điểm thi	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$
Số hs lớp 12E	3	6	12	24	5
Số hs lớp 12F	4	5	16	18	7

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Dựa vào điểm trung bình môn Toán ta đánh giá được lớp 12E học tốt môn Toán hơn lớp 12F.	●	○
b	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu thống kê điểm của lớp 12F nhỏ hơn 2,9.	●	○
c	Điểm thi có số học sinh đạt được nhiều nhất ở lớp 12E nhỏ hơn ở lớp 12F.	○	●
d	Dựa vào độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm, ta thấy rằng lớp 12E học đều hơn lớp 12F.	●	○

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A\,(2;-1;2)$, $B\,(4;3;-2)$ và $C\,(5;-1;6)$.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Độ dài đường cao AH của tam giác ABC là $\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$.	○	●
b	Chu vi tam giác ABC là 20.	●	○
c	Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $\left(\dfrac{16}{5};-1;\dfrac{18}{5}\right)$.	●	○
d	Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng Oxy sao cho biểu thức $2MA^2-3MB^2+4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn $a+b=1$.	○	●

Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 6 và O là giao điểm của AC và BD. Trong các mặt phẳng chứa đường thẳng CD', gọi (α) là mặt phẳng tạo với mặt phẳng $(BDD'B')$ một góc nhỏ nhất; đường thẳng $\Delta=(\alpha)\cap(BDD'B')$; điểm $E=\Delta\cap BD$. Kẻ $OH\perp\Delta$ tại H. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Góc giữa (α) và $(BDD'B')$ là góc $\widehat{OHC}$.	●	○
b	$DE=6\sqrt{2}$.	●	○
c	Thể tích tứ diện $C'BCE$ là $V=72$.	●	○
d	Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) bằng $2\sqrt{6}$.	○	●

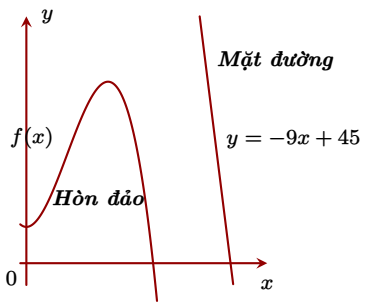
Câu 25. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hóa bởi hàm số $P(t)=115+20\sin(180\pi t)$ ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimet thủy ngân) và thời gian t tính theo phút. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Chu kì của $P(t)$ là 90.	○	●
b	Số lần huyết áp tâm thu xảy ra trong khoảng thời gian một giờ đồng hồ là 5000.	○	●
c	Chỉ số huyết áp là 135/95.	●	○
d	Trong một phút, số lần mà tốc độ thay đổi huyết áp bằng 1800π ($mmHg$/ phút) là 180.	●	○

Câu 26. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-6}{x+1}$ có đồ thị (C). Giả sử A , B là hai điểm thuộc 2 nhánh của đồ thị (C) sao cho AB song song với trục hoành. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $d: y=7x+18$.	○	●
b	Trên đồ thị (C) của hàm số có 8 điểm mà hoành độ và tung độ đều là các số nguyên.	●	○
c	Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng AB bằng $2\sqrt{5}$.	○	●
d	Đường tròn $(T):(x+1)^2+(x+1)^2=R^2$ cắt (C) tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $R^2>12\left(\sqrt{2}-1\right)$.	●	○

Câu 27. Có một hòn đảo nằm trong một vịnh biển, giả sử rằng đường bao sát biển của hòn đảo được mô hình hóa vào hệ trục tọa độ Oxy là một phần bên phải trục tung của đồ thị hàm số bậc ba $y=f(x)=-x^3+3x^2+1$ và giả sử một con đường trong đất liền chạy trên một đường thẳng có phương trình là $y=-9x+45$ như hình vẽ, với đơn vị hệ trục là $100m$. Tập đoàn đầu tư du lịch S muốn làm một cây cầu vượt biển có dạng một đoạn thẳng nối từ con đường trong đất liền ra hòn đảo để khai thác du lịch sinh thái. Tính độ dài ngắn nhất (đơn vị: mét) của cây cầu cần làm với kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



KẾT QUẢ:

Câu 28. Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài 30 cm, chiều rộng 20 cm, chiều cao 10 cm. Để san bớt nước cho đỡ đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai (không có nước) có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài x (cm), miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài $2x$ (cm). Sau khi đổ, mực nước ở khay thứ hai cao bằng $\dfrac{2}{3}$ chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi $\dfrac{1}{5}$ so với ban đầu. Tính thể tích của chiếc khay thứ hai (đơn vị cm^3) với kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

KẾT QUẢ:

Câu 29. Cho dãy gồm 2021 số được sắp thứ tự tăng dần như sau: $C_4^4; C_5^4; \ldots; C_{2023}^4; C_{2024}^4$. Lấy ngẫu nhiên ba số hạng liên tiếp từ dãy số đã cho, biết xác suất để tổng ba số này là một số lẻ bằng $\frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị $a+b$.

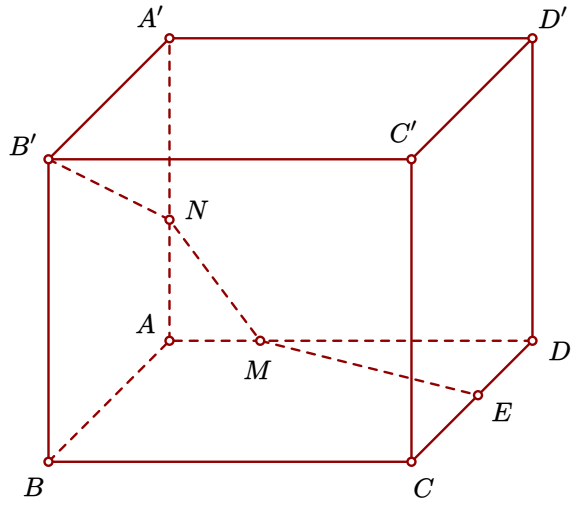
KẾT QUẢ:

Câu 30. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x > \frac{y}{3} > 0$ và $3x + y + 3xy \geqslant 7$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 9x^2 + \frac{1}{4}(3x+5y)^2 - 2\ln(1+30xy-5y^2)$ bằng $a - \ln b$ với a, b là các số tự nhiên. Tính giá trị $a-b$.

KẾT QUẢ:

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên không âm m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 3$ có nghiệm $x \in [-2, 1]$

Câu 32. Mô hình trang trí có dạng là hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 10 dm (như hình vẽ).



Người ta cần nối một đường dây điện đi từ điểm E là trung điểm của CD, đi qua điểm M thuộc cạnh AD, đi tiếp qua điểm N thuộc cạnh AA' tới B'. Độ dài đoạn dây điện ngắn nhất bằng bao nhiêu dm?

15 SỞ VĨNH PHÚC

Câu 1. Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 12 được mẫu số liệu sau:

Khoảng điểm trung bình	[6,5; 7)	[7; 7,5)	[7,5; 8)	[8; 8,5)	[8,5; 9)	[9; 9,5)	[9,5; 10)
Số học sinh	8	10	16	24	13	7	4

Tìm hiệu của tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu đã cho (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A 7,58. B 8,63. C 1,05. D 1,06.

Câu 2. Cho tam giác đều ABC. Lấy điểm D thoả mãn $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ADC. Tỉ số $\dfrac{R}{r}$ bằng

A $\dfrac{7+5\sqrt{7}}{9}$. B $\dfrac{5+7\sqrt{7}}{9}$. C $\dfrac{7+5\sqrt{5}}{9}$. D $\dfrac{5}{2}$.

Câu 3. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

A 7. B 3. C -25. D -20.

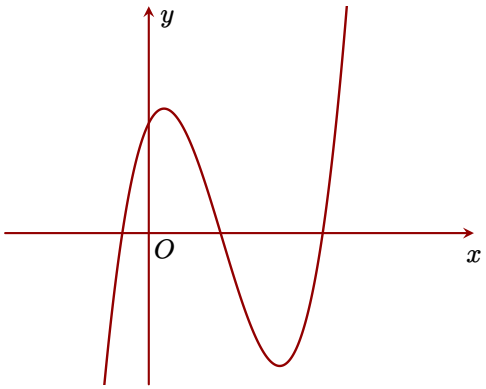
Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{ax-b}{bx+1}$ có đồ thị (C). Nếu (C) có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \dfrac{1}{3}$ thì các giá trị a, b lần lượt là

A 3 và -6. B $\dfrac{-1}{6}$ và $\dfrac{-1}{2}$. C $\dfrac{-1}{2}$ và $\dfrac{-1}{6}$. D -6 và 3.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{a} = (1; -2; 4)$ và $\overrightarrow{b} = (x_0; y_0; z_0)$. Biết vectơ $\overrightarrow{b}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{a}$, vectơ $\overrightarrow{b}$ tạo với tia Oy một góc nhọn và $|\overrightarrow{b}| = \sqrt{21}$. Giá trị của $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

A -3. B 3. C -6. D 6.

Câu 6. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



Khẳng định nào sau đây là đúng

A $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$. B $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

C $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$. D $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 7. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ có hai điểm cực trị. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là

A $x+2y-1=0$. B $2x-y-1=0$. C $2x-y-3=0$. D $x-2y-1=0$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây **sai**?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. B Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$. D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+2m^2-m}{x-3}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

A $m=-1$ hoặc $m=\dfrac{3}{2}$. B $m=-2$ hoặc $m=\dfrac{3}{2}$.

C $m=1$ hoặc $m=-\dfrac{3}{2}$. D $m=1$ hoặc $m=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A\,(1;-1;-2)$ và trọng tâm $G\,(2;1;-3)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ là

A $(3;6;-3)$. B $(3;6;3)$. C $(3;-3;6)$. D $(3;2;1)$.

Câu 11. Khảo sát nhu cầu bồi dưỡng đánh giá năng lực với ba môn Vật lí, Hóa học, Sinh học của lớp 12A có sĩ số 40 học sinh thu được kết quả như sau: Tất cả học sinh của lớp đều có nhu cầu học ít nhất một trong ba môn trên, trong đó số học sinh đăng kí học đúng một môn nhiều gấp 3 lần số học sinh đăng kí học cả ba môn; có 24 học sinh đăng kí học môn Vật lí, 20 học sinh đăng kí học môn Hóa học và 22 học sinh đăng kí học môn Sinh học. Hỏi cả lớp có bao nhiêu học sinh đăng kí học đúng hai môn?

A 21. B 17. C 12. D 14.

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B Hàm số nghịch biến trên tập $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và khoảng $(1;+\infty)$.

D Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 13. Trong một buổi hoạt động ngoại khóa của trường THPT X có tổ chức chương trình rút thăm trúng thưởng. Ban tổ chức chuẩn bị một hộp kín chứa phiếu rút thăm gồm có: 7,5% lượng phiếu trúng phần thưởng là hộp bút, 5% lượng phiếu trúng phần thưởng là quyển vở, 2,5% lượng phiếu trúng phần thưởng là cặp sách và còn lại là các phiếu không trúng thưởng. Mỗi học sinh tham gia chương trình chỉ được rút thăm đúng một lần và rút ngẫu nhiên một phiếu trong hộp nhằm xác định phần thưởng, sau đó trả lại phiếu vào hộp để học sinh tiếp theo rút thăm. Hai học

sinh A và B đều được tham gia rút thăm. Tính xác suất để cả hai học sinh đó đều nhận được phần thưởng và hai phần thưởng nhận được là khác nhau.

A $\dfrac{9}{400}$. B $\dfrac{11}{800}$. C $\dfrac{21}{800}$. D $\dfrac{33}{1600}$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(1;1;3)$. Điểm $H(x_0;y_0;z_0)$ là chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống đường thẳng BC. Khi đó $x_0+y_0+z_0$ bằng

A $\dfrac{38}{9}$. B $\dfrac{30}{11}$. C $\dfrac{34}{11}$. D $\dfrac{11}{34}$.

Câu 15. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+x-4}{x-1}=-\infty$. B $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+x-4}{x-1}=4$.

C $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+x-4}{x-1}=+\infty$. D $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+x-4}{x-1}=-1$.

Câu 16. Một cửa hàng kinh doanh quần áo chuyên nhập và bán sản phẩm cho một hãng thời trang. Cửa hàng nhập và bán hai loại sản phẩm là sản phẩm cao cấp và sản phẩm phổ thông. Mỗi sản phẩm cao cấp có giá nhập vào là 2 000 000 đồng và bán ra với giá 2 500 000 đồng; mỗi sản phẩm phổ thông có giá nhập vào là 350 000 đồng và bán ra với giá 400 000 đồng. Mỗi tháng cửa hàng luôn nhập và bán hết 15 sản phẩm cao cấp, còn sản phẩm phổ thông thì cửa hàng nhập và bán theo số lượng thay đổi để đáp ứng nhu cầu của thị trường. Biết chi phí cố định của cửa hàng trong một tháng là 20 000 000 đồng (gồm tiền thuê mặt bằng, thuê nhân viên bán hàng, tiền điện, tiền nước,...). Giả sử trong một tháng cửa hàng nhập và bán được x sản phẩm phổ thông ($x\in\mathbb{N}^*$), khi đó tiền lãi trung bình cho mỗi sản phẩm bán ra trong tháng (gồm cả hai loại sản phẩm) là hàm số $L(x)$ (đơn vị: đồng/sản phẩm).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$L(x)=\dfrac{50000x+7500000}{x+15}$ (với $x\in\mathbb{N}$).	○	●
b	Tiền lãi trung bình cho mỗi sản phẩm bán ra trong tháng sẽ tăng lên khi sản phẩm phổ thông bán ra trong tháng tăng lên.	●	○
c	Nếu mỗi tháng của hàng bán được 485 sản phẩm phổ thông thì tiền lãi trung bình mỗi sản phẩm đã bán ra trong tháng ấy là 23500 đồng/sản phẩm.	●	○
d	Khi x tăng lên thì tiền lãi trung bình mỗi sản phẩm bán ra trong tháng cũng tăng nhưng không vượt quá 45500 đồng/sản phẩm.	○	●

Câu 17. Bạn A tìm mua được các miếng dán cùng loại, cùng màu và có cùng kích thước $1m\times 3m$ dùng để trang trí kín một mảng tường hình chữ nhật có kích thước là $3\times n$ (với n là số nguyên dương, các kích thước có đơn vị đo là mét). Mỗi miếng dán có thể dán ngang hoặc dọc sao cho đảm bảo không có miếng dán nào bị cắt và không có miếng dán nào chồng lên nhau. (Miếng dán và mảng tường cần trang trí có dạng như hình vẽ).Mảng tường hình chữ nhật kích thước $3\times n$.



Miếng dán 1×3

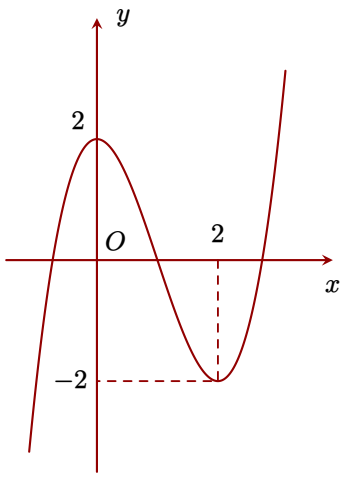
1	2	3	4	·	·	·	·	·	·	·	·	·	n
2													
3													

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Nếu mảng tường có kích thước 3×2 m thì bạn A phải dùng hai miếng dán và chỉ có duy nhất 1 cách dán là xoay dọc cả hai miếng dán.	●	○
b	Nếu mảng tường có kích thước 3×3 m thì bạn A phải dùng 3 miếng dán và chỉ có đúng 2 cách dán là xoay dọc cả 3 miếng hoặc xoay ngang cả 3 miếng.	●	○
c	Nếu mảng tường có kích thước 3×6 m thì bạn A sẽ có tất cả 4 cách dán.	○	●
d	Mảng tường thực tế bạn A cần dán có kích thước 3×14 m, khi đó bạn A có tất cả 129 129 cách dán.	●	○

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ có $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó

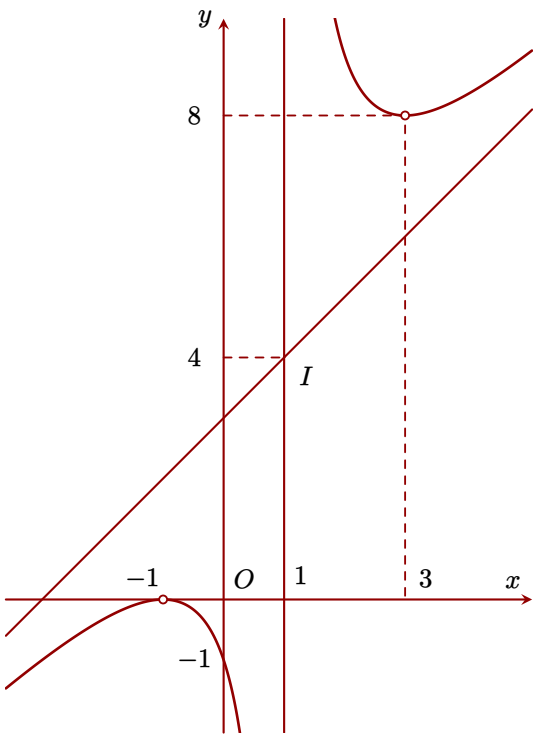
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Độ dài véctơ $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ bằng $6\sqrt{10}$.	●	○
b	Điểm E thuộc trục Ox sao cho tam giác BCE vuông tại B, khi đó độ dài CE bằng $\sqrt{7}$.	○	●
c	Trọng tâm tam giác ABC có tọa độ là $\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)$.	●	○
d	Điểm $M(x;y;z)$ thuộc đường thẳng CD sao cho $\left\lvert\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\rvert$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $x+y+z=6$.	○	●

Câu 19. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$.	○	●
b	Đường cong trên là đồ thị hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2$.	●	○
c	Có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.	●	○
d	Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(2\sin x+1)$, khi đó $M+m=5$.	○	●

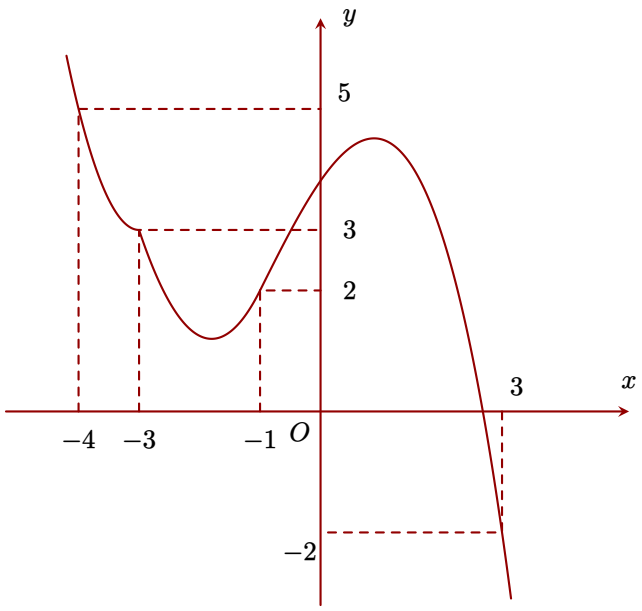
Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.	○	●
b	Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$ và đạt cực tiểu tại $x=3$.	●	○
c	Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đã cho ở trên là $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$.	●	○
d	Điểm M có hoành độ dương trên đồ thị hàm số $y=f(x)$ sao cho khoảng cách từ M đến điểm I đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó hoành độ điểm M là $\sqrt{2\sqrt{2}}+1$.	●	○

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[-4;3]$ tại điểm nào?

KẾT QUẢ:

Câu 22. Trong một buổi ngoại khóa, có 20 học sinh được xếp thành một vòng tròn để tham gia trò chơi. Do sân khấu hẹp, người dẫn chương trình cần chọn ngẫu nhiên 6 học sinh rời khỏi vòng tròn. Tính xác suất để trong 6 học sinh được chọn không có hai học sinh nào đứng cạnh nhau (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KẾT QUẢ:

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(0;2;-1)$ và $C(2;-3;1)$. Điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ thỏa mãn biểu thức $T=MA^2-MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=x_M^2+2y_M^2+3z_M^2$.

KẾT QUẢ:

Câu 24. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1}$ có đúng bốn đường tiệm cận. Tìm số phần tử của tập hợp S.

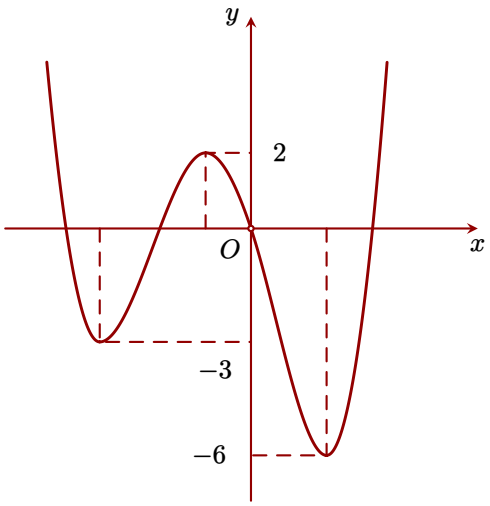
KẾT QUẢ:

Câu 25. Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên từ một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất cách mặt đất 5 m, cách điểm xuất phát 3 m về phía nam và 2 m về phía đông. Chiếc flycam thứ hai cách mặt đất 5 m, cách điểm xuất phát 6 m về phía bắc và 6 m về phía tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt

phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo trên mỗi trục là mét). Trên mặt đất, người ta xác định được một vị trí sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó đến hai chiếc flycam là ngắn nhất. Hỏi khoảng cách từ điểm xuất phát đến vị trí đó bằng bao nhiêu mét?

KẾT QUẢ:

Câu 26. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1)+m|$ có đúng 5 điểm cực trị. Tổng các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

Câu 27. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa (với $1 \leqslant x \leqslant 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$ (đơn vị nghìn đồng). Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hỏi lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày bằng bao nhiêu (đơn vị nghìn đồng)?

KẾT QUẢ:

Câu 28. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 2m}{x+1}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O. Tính tổng các phần tử của tập hợp S.

KẾT QUẢ:

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ thỏa mãn $SA = \sqrt{5}$ và $SB = SC = SD = AB = BC = CD = DA = \sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CD (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KẾT QUẢ:

Câu 30. Cho các số thực dương x, y, z khác 1 đồng thời thỏa mãn các điều kiện $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 y}+\dfrac{1}{\log_2 z}=\dfrac{1}{2024}$ và $\log_2(xyz)=2024$.
Tính giá trị của biểu thức $T=\log_2\left[xyz(x+y+z)-xy-yz-zx+1\right]$.

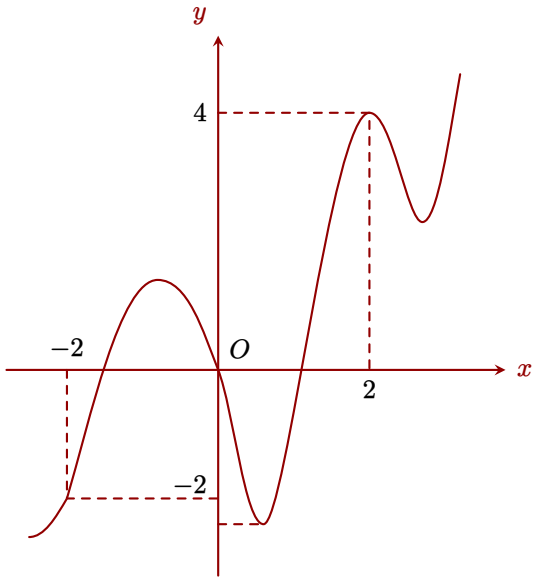
KẾT QUẢ:

16 LIÊN TRƯỜNG BẮC NINH

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3 - m$, với m là tham số. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2;-2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tính tổng các phần tử của S.

A 5. B 1. C 3. D 0.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để phương trình $f\left(x^3 - 3x^2 + 2\right) = m^2 - 3m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1;3)$?

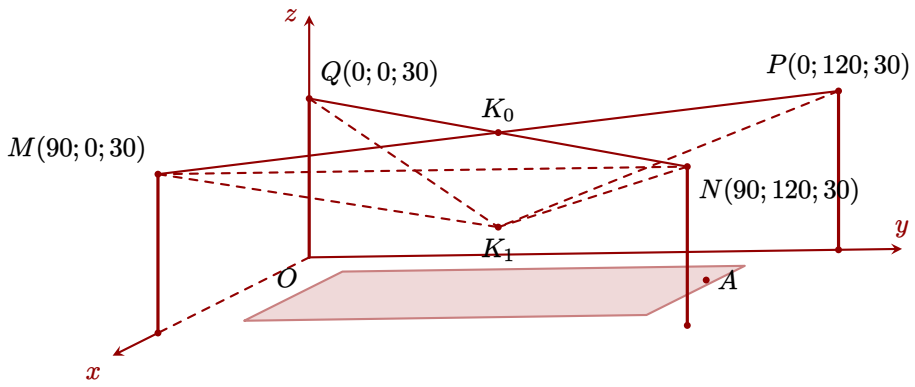


A 21. B 5. C 6. D 4.

Câu 3. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x + 3}$ có phương trình là

A $y = 1$. B $x = -3$. C $y = x$. D $y = -2x$.

Câu 4. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình vẽ). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19. Biết rằng $K_1(a;b;19)$. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?

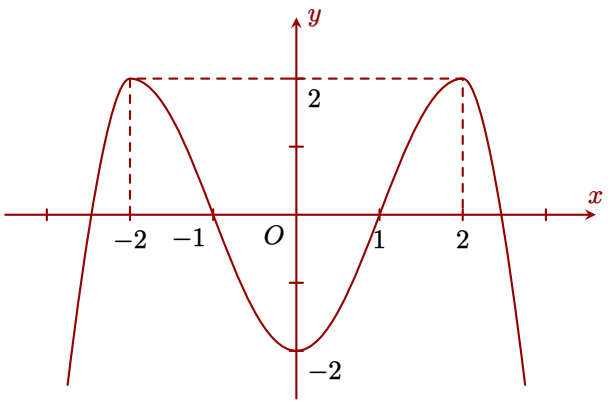


A 105. B 70. C 85. D 60.

Câu 5. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}$. Khi đó tổng $M+m$ bằng

A $4+2\sqrt{2}$. B $4-2\sqrt{2}$. C $1+\sqrt{2}$. D $1-\sqrt{2}$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

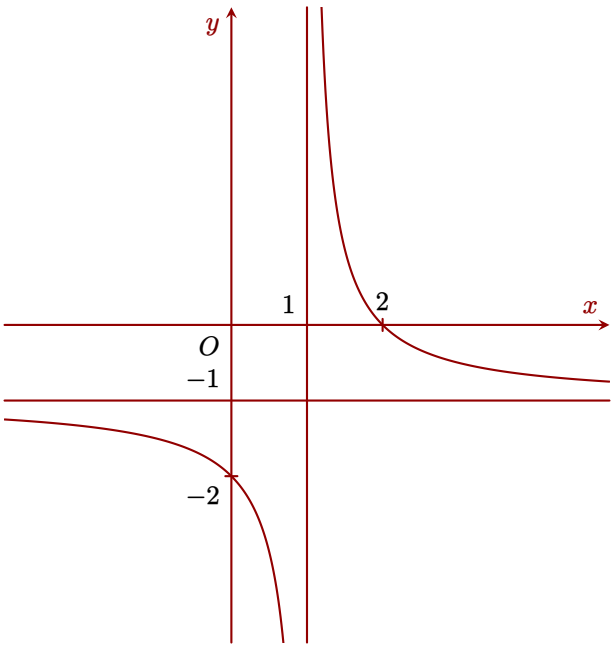


A $(0;2)$. B $(-\infty;0)$. C $(-2;2)$. D $(-2;0)$.

Câu 7. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-2\,024;2\,025)$ và chia hết cho 3, để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+4m+3$ đồng biến trên khoảng $(2\,024;+\infty)$?

A 1349. B 1350. C 1348. D 936.

Câu 8. Cho hàm số như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là**đúng?**



A $0 < a < b$. B $b < 0 < a$. C $0 < b < a$. D $b < a < 0$.

Câu 9. Bạn Hà rất thích đi bộ vào buổi sáng. Thời gian đi bộ mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Hà được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Giá trị đại diện	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5
Số ngày	6	6	4	1	1

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm nói trên có giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?

A $(7; 8)$. B $(3; 4)$. C $(5; 6)$. D $(1; 3)$.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O và $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$. Gọi K là trọng tâm tam giác DCD'. Mặt phẳng $(A'KC)$ cắt cạnh AB' tại G. Chọn khẳng định đúng

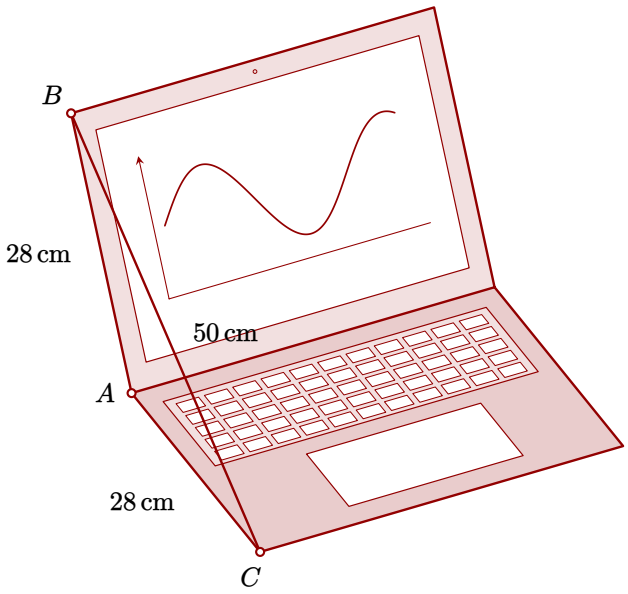
A $\overrightarrow{GK} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$. B $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.

C $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$. D $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Khi đó $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB}$ bằng bao nhiêu?

A $\frac{a^2}{2}$. B $-\frac{a^2}{2}$. C $-\frac{a^2}{6}$. D $\frac{a^2}{6}$.

Câu 12. Trong hình dưới đây, chiếc laptop được mở gợi lên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi góc nhị diện đó là độ mở của laptop, tính độ mở của laptop.



A $53{,}53^\circ$. B $106{,}47^\circ$. C $126{,}47^\circ$. D $2{,}21^\circ$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC thỏa mãn $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$; SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM.

A $a\sqrt{2}$. B $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C $a\sqrt{3}$. D $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A\,(800; 500; 7)$ đến điểm $B\,(940; 550; 9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay trong 5 phút tiếp theo là $C\,(x; y; z)$. Tính $x + y + z$.

A 1595. B 1594. C 1596. D 1593.

Câu 15. Hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 quả cầu trắng, 7 quả cầu đỏ và 15 quả cầu xanh. Hộp thứ hai chứa 10 quả cầu trắng, 6 quả cầu đỏ và 9 quả cầu xanh. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả cầu. Tính xác suất để hai quả lấy ra có màu giống nhau.

A $\dfrac{137}{625}$. B $\dfrac{42}{625}$. C $\dfrac{32}{125}$. D $\dfrac{207}{625}$.

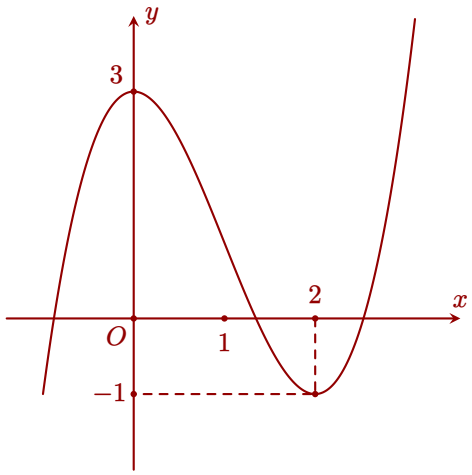
Câu 16. Giả sử chiều cao (tính bằng cm) của một giống cây trồng (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số

$f(t) = \dfrac{2\,024}{1 + 4\mathrm{e}^{-t}}$, $t \geqslant 0$.

Trong đó, thời gian t được tính bằng tháng kể từ khi hạt bắt đầu nảy mầm. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng chiều cao của giống cây đó. Hỏi sau khi hạt giống bắt đầu nảy mầm thì sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất?

A 1,38. B 1,35. C 1,83. D 1,53.

Câu 17. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Khi đó tích phân $\displaystyle\int_0^2 |f'(x)|\,\mathrm{d}x$ bằng



A 5. B -2. C 2. D 4.

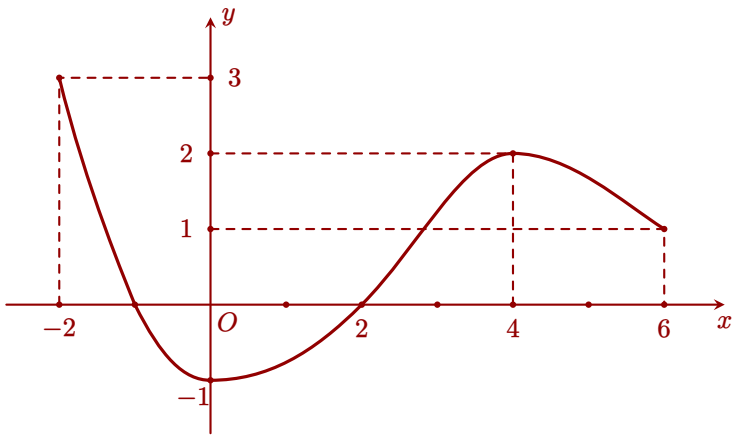
Câu 18. Một vật đang đứng yên chịu tác dụng của một lực và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 4 - 2t$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động. Quãng đường vật đi được kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến vận tốc đạt giá trị lớn nhất là

A 4 m. B $\dfrac{16}{3}$ m. C 8 m. D $\dfrac{15}{2}$ m.

Câu 19. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 4n + 3 \end{cases}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính giới hạn $\lim \dfrac{u_n}{n^2}$.

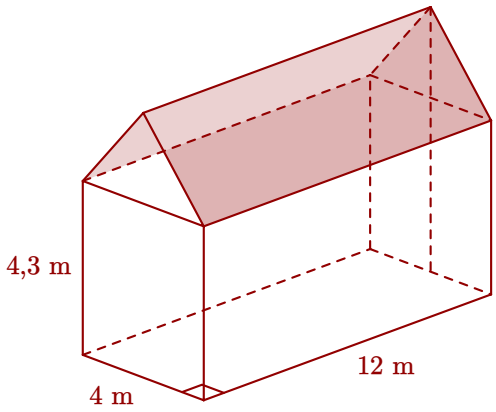
A 3. B $\dfrac{2}{3}$. C 2. D $\dfrac{3}{2}$.

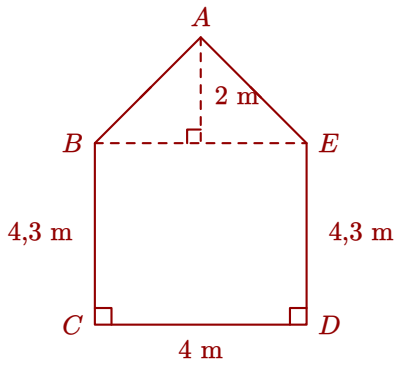
Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng.



A $\max\limits_{[-2;6]} y = f(-2)$. B $\max\limits_{[-2;6]} y = f(2)$. C $\max\limits_{[-2;6]} y = f(6)$. D $\max\limits_{[-2;6]} y = f(-1)$.

Câu 21. Một căn nhà có dạng là một hình lăng trụ ngũ giác đứng với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính thể tích căn nhà.





A $254{,}3\ \text{m}^3$. B $151{,}2\ \text{m}^3$. C $254{,}4\ \text{m}^3$. D $302{,}4\ \text{m}^3$.

Câu 22. Biết $S=(a;b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{3^{2-x}+3-2x}{4^x-2}\geqslant 0$. Khi đó tích ab bằng

A 1. B 4. C 3. D 5.

Câu 23. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+F(2)+\cdots+F(2\,017)$.

A $T=1009\cdot\dfrac{2^{2017}+1}{\ln 2}$. B $T=2^{2017\cdot 2018}$.

C $T=\dfrac{2^{2017}-1}{\ln 2}$. D $T=\dfrac{2^{2018}-1}{\ln 2}$.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị thực của a để có $\displaystyle\int_0^a(2x+5)\,\mathrm{d}x=a-4$?

A 1. B 0. C 2. D Vô số.

Câu 25. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $xy=4$, $x=0$, $y=1$ và $y=4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung.

A $V=8\pi$. B $V=16\pi$. C $V=10\pi$. D $V=12\pi$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y-z-1=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;1;-2)$, biết $\Delta\parallel(P)$ và Δ cắt d.

A $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$. B $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.

C $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{5}$. D $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)+2xf'(x)=4x\sqrt{x}$, $\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=1$. Tính $\displaystyle\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A 15. B $\dfrac{62}{5}$. C 21. D $\dfrac{17}{5}$.

Câu 28. Cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta)\colon 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ đồng thời vuông góc (α) và (β) là

A $x-y-2z=0$. B $2x-y+2z=0$.

C $2x+y-2z+1=0$. D $2x+y-2z=0$.

Câu 29. Cho tam giác ABC với $A(2;-3;2)$, $B(1;-2;2)$, $C(1;-3;3)$. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+2z-3=0$. Khi đó, diện tích tam giác $A'B'C'$ bằng

A 1. B $\frac{3}{2}$. C $\frac{1}{2}$. D $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z-6=0$. Trong (P) lấy điểm M và xác định điểm N thuộc đường thẳng OM sao cho $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Điểm N luôn thuộc mặt cầu có phương trình $\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{4}$.

B Điểm N luôn thuộc mặt cầu có phương trình $\left(x-\frac{1}{12}\right)^2+\left(y-\frac{1}{6}\right)^2+\left(z-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{16}$.

C Điểm N luôn thuộc mặt phẳng có phương trình $x+2y+2z-1=0$.

D Điểm N luôn thuộc mặt phẳng có phương trình $x+2y+2z+1=0$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-3)^2=8$ có tâm I và hai điểm $A(1;1;1)$, $B(4;4;3)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Nếu điểm D có tọa độ $D\,(3;3;5)$ thì $ABDI$ là hình bình hành.	●	○
b	Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1}$.	○	●
c	Mặt phẳng (P) đi qua A và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm M, N, P sao cho A là trực tâm tam giác MNP. Khoảng cách từ B đến (P) bằng $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.	○	●
d	Gọi (C) là tập hợp các điểm $M\in(S)$ để $\lvert 2MA-MB\rvert$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng (C) là một đường tròn có bán kính bằng $R=\sqrt{7}$.	●	○

Câu 32. Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 12 được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	[6,5; 7)	[7; 7,5)	[7,5; 8)	[8; 8,5)	[8,5; 9)	[9; 9,5)	[9,5; 10]
Số học sinh	8	10	16	24	13	7	4

Mẫu số liệu ghép nhóm đã cho có

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Giá trị trung bình gần bằng 8,12 (làm tròn đến hàng phần trăm).	●	○
b	Trung vị bằng 8,15 (làm tròn đến hàng phần trăm).	●	○
c	Mốt bằng 8,5 (làm tròn đến hàng chục).	○	●
d	Phương sai lớn hơn 1.	○	●

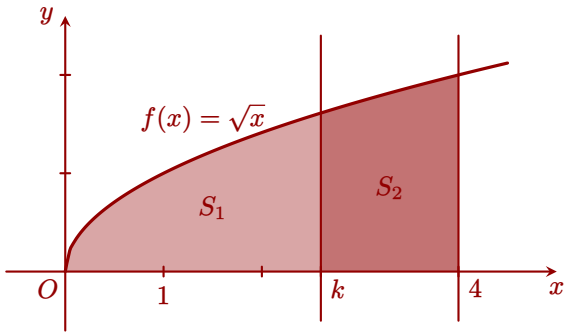
Câu 33. Cho hàm số $f(x)=\log_2 x$. Các mệnh đề sau dúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.	●	○
b	Hàm số có có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{\ln 2}{x}$, $x>0$.	○	●
c	Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x-6\leqslant 0$ là $S=\left[\dfrac{1}{2};64\right]$.	●	○
d	Cho phương trình $(f(2x))^2-(m+2)f(x)+m-2=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ là $[1;2]$.	●	○

Câu 34. Một hộp chứa 40 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 40. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ từ hộp. Xét các biến cố:
A: "Tích các số ghi trên hai thẻ lấy ra chia hết cho 10".
A_1: "Tích các số ghi trên hai thẻ lấy ra không chia hết cho 5".
A_2: "Tích các số ghi trên hai thẻ lấy ra chia hết cho 2".
Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=780$.	●	○
b	$\mathrm{P}(A_1)=\dfrac{7}{195}$.	○	●
c	A_1 và A_2 là hai biến cố độc lập.	●	○
d	$\mathrm{P}(A)=\dfrac{107}{390}$.	●	○

Câu 35. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $f(x)=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=0$, $x=4$ và gọi $S_{(H)}$ là diện tích của nó. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<4)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

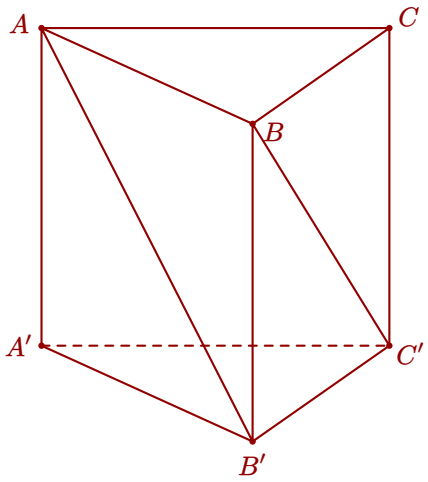


	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$f'(4)=\dfrac{1}{4}$.	●	○
b	$S_{(H)}=12$.	○	●
c	$3S_2=2\left(8-\sqrt{k^3}\right)$.	●	○
d	Nếu $S_1=3S_2$ thì $k=\sqrt[3]{36}$.	●	○

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y=x-2$.	●	○
b	Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có toạ độ là $(a;b)$ với $a^2+b=12$.	●	○
c	Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x=2$ cắt hai đường tiệm cận tại A,B. Diện tích tam giác IAB. bằng 12.	○	●
d	Có tất cả 9 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}=m$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn $x_1<2<x_2<15$.	●	○

Câu 37. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, $AA'=a\sqrt{2}$.



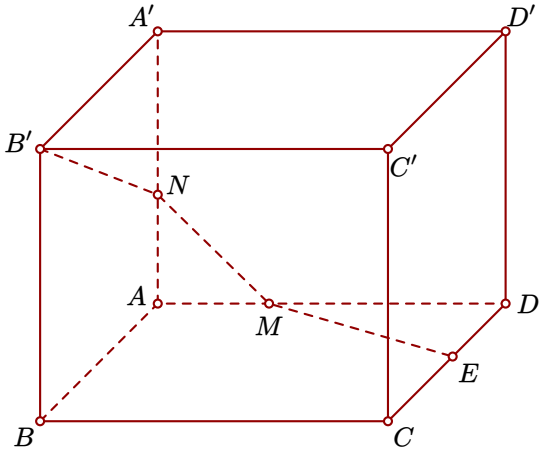
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'}$.	●	○
b	$\left\lvert\overrightarrow{AB'}\right\rvert = \left\lvert\overrightarrow{BC'}\right\rvert = a\sqrt{3}$.	●	○
c	$\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = \dfrac{a^2}{2}$.	○	●
d	$\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right) = 60°$.	●	○

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$. $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên AB, M là trung điểm của SC, I là giao điểm của AC và HD. Các phát biểu sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.	●	○
b	$(SC, (ABCD)) = 30°$.	○	●
c	$\mathrm{d}\,(AB, SC) = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.	○	●
d	$V_{AMID} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{60}$.	○	●

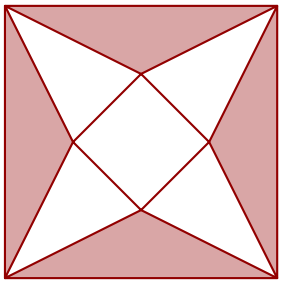
Câu 39. Cho x, y là các số thực thỏa mãn bất phương trình $\log_3(3x+3) + x - 3y \geqslant 27^y$. Biết $0 \leqslant x \leqslant 2\,024$, có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình trên?

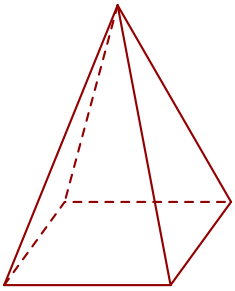
Câu 40. Mô hình trang trí có dạng là hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 4 dm (như hình vẽ). Người ta cần nối một đường dây điện đi từ điểm E là trung điểm của CD, đi qua điểm M thuộc cạnh AD, điểm N thuộc cạnh AA' tới B'. Độ dài đoạn dây điện ngắn nhất bằng bao nhiêu?



KẾT QUẢ:

Câu 41. Một tấm bạt hình vuông cạnh 20 m như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại (các đường may không đáng kể), nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí (tháp dạng hình chóp tứ giác đều) để tránh hư hại tháp khi trời mưa. Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu m^2 để đảm bảo yêu cầu trên?





KẾT QUẢ:

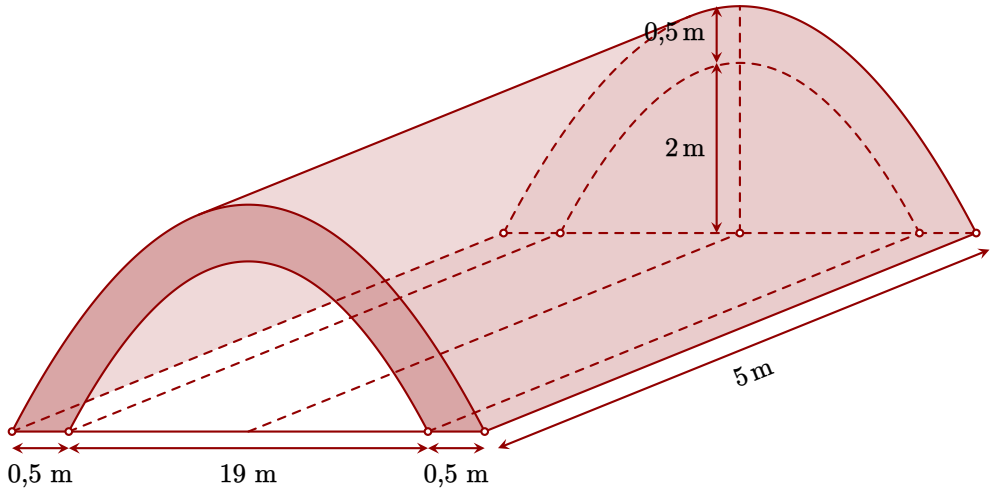
Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-8	$\nearrow$	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	10	$\searrow$	$-\infty$
	2										

Số đường tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{[f(x+1)-4]\sqrt{x^2-4}}$ là bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

Câu 43. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol) là bao nhiêu m^3?



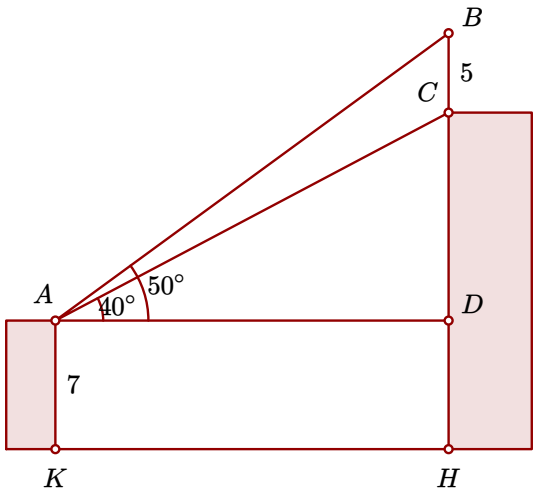
KẾT QUẢ:

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-6;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+7=0$. Điểm B thay đổi thuộc Oz; điểm C thay đổi thuộc mặt phẳng (P). Biết rằng tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất. Cao độ của điểm B bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

17 THAM KHẢO SỞ PHÚ THỌ

Câu 1. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào dưới đây?

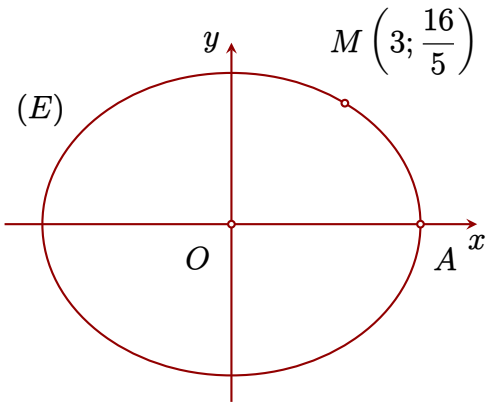


A $21,2$m. B $18,9$m. C $14,2$m. D $11,9$m.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường cao $AH: 2x+y-3=0$; phương trình đường thẳng $AB: x+y-1=0$; điểm $M(0;-1)$ là trung điểm cạnh AC. Phương trình đường thẳng BC là

A $x+2y=0$. B $x-2y=0$. C $x+2y+4=0$. D $x-2y-4=0$.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có một đỉnh $A\,(5;0)$ và đi qua điểm $M\left(3;\dfrac{16}{5}\right)$.



Phương trình chính tắc của (E) là

A $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. B $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$. C $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. D $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

Câu 4. Trong một cuộc khảo sát ở một phường, có 20 người được hỏi về thu nhập hàng tháng. Có một người thu nhập một tháng là 80 triệu đồng, những người còn lại, mỗi người thu nhập 8 triệu đồng một tháng. Số đặc trưng đo xu thế trung tâm nào nên được chọn trong trường hợp này?

A Số trung bình. B Số trung bình hoặc trung vị.

C Số trung bình hoặc mốt. D Số trung vị hoặc mốt.

Câu 5. Một bảng xếp hạng đã tính điểm chuẩn hóa cho chỉ số nghiên cứu của một số trường đại học ở Việt Nam và thu được kết quả sau:

Điểm	Dưới 20	[20; 30)	[30; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số trường	5	19	8	6	4	3

Điểm ngưỡng để đưa ra danh sách 25% trường đại học có chỉ số nghiên cứu tốt nhất Việt Nam là trên mức nào dưới đây?

A 40,83 điểm. B 35,42 điểm. C 52,13 điểm. D 45,83 điểm.

Câu 6. Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geqslant 3$. Biết rằng đa giác có 135 đường chéo. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A $n = 8$. B $n = 15$. C $n = 18$. D $n = 27$.

Câu 7. Có 8 học sinh và ba thầy giáo A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ 11 người đó ngồi trên một hàng ngang có 11 chỗ sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa 2 học sinh?

A 39916800. B 241920. C 3386880. D 8467200.

Câu 8. Trước cổng trường Đại học X có ba quán cơm bình dân chất lượng ngang nhau. Ba sinh viên A, B, C độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên một quán ăn để ăn trưa. Xác suất của biến cố hai sinh viên vào cùng một quán, còn người kia vào quán khác là

A $\frac{1}{3}$. B $\frac{1}{4}$. C $\frac{2}{3}$. D $\frac{3}{4}$.

Câu 9. Trong một khối của một trường phổ thông có 120 học sinh, trong đó có 60 em tham gia câu lạc bộ Toán, 40 em tham gia câu lạc bộ Ngoại ngữ, 15 em tham gia cả hai. Chọn ngẫu nhiên một em. Xác suất để em này không tham gia bất kì một câu lạc bộ nào (Toán hoặc Ngoại ngữ) bằng

A $\frac{1}{24}$. B $\frac{7}{24}$. C $\frac{17}{24}$. D $\frac{1}{3}$.

Câu 10. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ là

A $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\},$.

C $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. D $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 11. Phương trình $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ có tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất bằng

A $\frac{4\pi}{3}$. B 2π. C $\frac{\pi}{3}$. D π.

Câu 12. Cho cấp số cộng 1, 7, 13, $\cdots$, x thỏa mãn điều kiện $1 + 7 + 13 + \cdots + x = 280$. Giá trị của x bằng

A 53. B 55. C 57. D 59.

Câu 13. Giới hạn $\lim\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right)$ bằng

A 0. B $\frac{1}{2}$. C $\frac{1}{3}$. D $+\infty$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-4}{x^2-9} = 1$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{f(x)}-2}{x^2-4x+3}$ bằng

A $\frac{1}{2}$. B 1. C $\frac{3}{4}$. D $+\infty$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x^2+3}{x^2-1} & ;x\neq 1\\ ax+\dfrac{5}{2} & ;x=1;a\in\mathbb{R}\end{cases}$ liên tục tại $x=1$ .Khẳng định nào dưới đây đúng?

A $a=-3$. B $a=3$. C $a=-5$. D $a=2$.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AD=4$; $BC=10$, $AC=8$, $AB=6$. Thể tích của tứ diện đã cho bằng

A 32. B 192. C 40. D 24.

Câu 17. Tập xác định $\mathbb{D}$ của hàm số $y=(x^2-1)^{-2025}$ là

A $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. B $\mathbb{D}=(-\infty;-1)$. C $\mathbb{D}=(-1;1)$. D $\mathbb{D}=(1;+\infty)$.

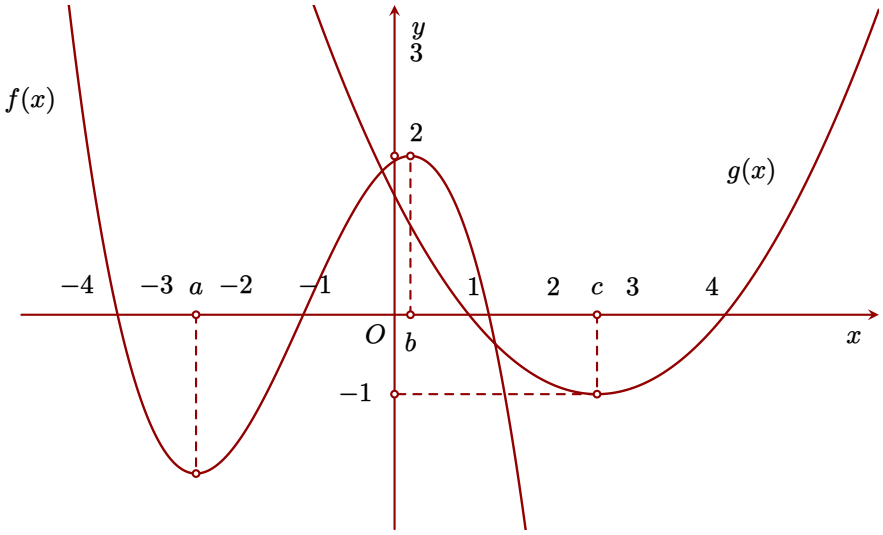
Câu 18. Đạo hàm của hàm số $y=\log(e^x+1)$ là:

A $y'=\dfrac{e^x}{e^x+1}$. B $y'=\dfrac{e^x}{(e^x+1)\ln 10}$. C $y'=\dfrac{1}{(e^x+1)\ln 10}$. D $\dfrac{1}{e^x+1}$.

Câu 19. Cho hàm số $f'(x)=3x^2+6x+4,\forall x\in\mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $(-2025;2025)$ của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)-(2m+4)x-5$ nghịch biến trên $(0;2)$?

A 2013. B 2014. C 2015. D 2012.

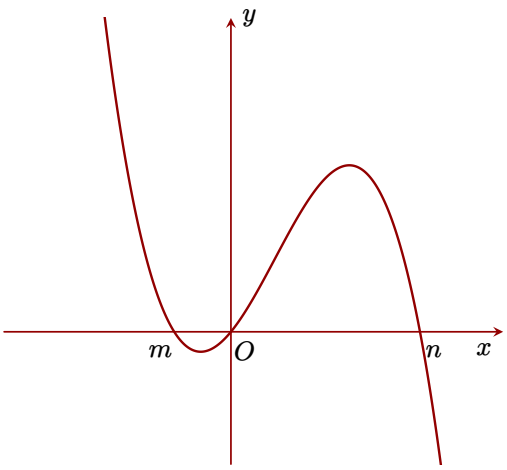
Câu 20. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ và hàm số bậc hai $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f[g(x)]$ là

A 2. B 3. C 4. D 5.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2$, $(a,b,c\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ?



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $4f\left(x\right)+5=0$ là

A 4. B 2. C 3. D 1.

Câu 22. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+4m}}$ có đúng 4 đường tiệm cận?

A 11. B 10. C 8. D 9.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=2, BC=2\sqrt{2}$. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng

A 120°. B 135°. C 150°. D 180°.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A\left(1;2;-1\right)$, $B\left(2;-1;3\right), C\left(-4;7;5\right)$. Gọi $D\left(a;b;c\right)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a+b+2c$.

A 5. B 4. C 14. D 15.

Câu 25. Một hộ nông dân dự định trồng đậu và trồng cà trên diện tích 800 m^2. Biết rằng cứ 100 m^2 trồng đậu cần 10 công và lãi 7 triệu đồng, còn 100 m^2 trồng cà cần 15 công và lãi 9 triệu đồng. Hỏi tiền lãi thu được cao nhất là bao nhiêu khi tổng số công không vượt quá 90?

A 60. B 56. C 65. D 54.

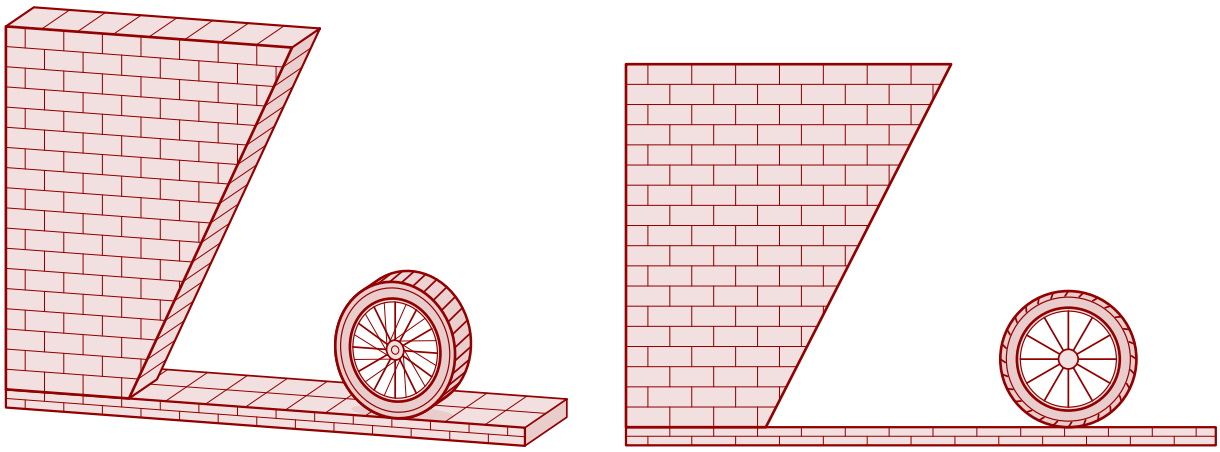
Câu 26. Bác Minh thường xuyên phải đi công tác bằng taxi với quãng đường trên $20km$. Bác liên hệ với một hãng taxi và nhận được thông báo giá cước (đã bao gồm thuế VAT) như sau:

Quãng đường x (km)	Giá mở cửa $(0{,}5\,km)$	Giá cước các kilomet tiếp theo	Giá cước từ kilomet thứ 31 $(x>21)$
Giá cước	10 000 đồng	14 100/1km	12 300/1km

Nếu bác Minh đi 25km thì bác Minh phải trả số tiền là

A 353500 đồng. B 346450 đồng. C 346550 đồng. D 353600 đồng.

Câu 27. Một bánh xe dạng hình tròn bán kính 30cm lăn đến bức tường hợp với mặt đất một góc 60° . Khoảng cách ngắn nhất từ tâm bánh xe đến góc tường



A 40 cm. B 50 cm. C 70 cm. D 60 cm.

Câu 28. Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi

A $t = 13$ (giờ). B $t = 14$ (giờ). C $t = 15$ (giờ). D $t = 16$ (giờ).

Câu 29. Đầu mùa thu hoạch sầu riêng, ông A đã bán cho người thứ nhất nửa số sầu riêng thu hoạch được và tặng thêm 1 quả, bán cho người thứ hai nửa sô sầu riêng còn lại và tặng thêm 1 quả. Ông cứ tiếp tục cách bán như trên thì đến người thứ bảy số sầu riêng của của ông được bán hết. Số sầu riêng mà ông A thu hoạch được là

A 216. B 128. C 256. D 254.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-20; 20)$ để phương trình $3 \cdot 6^x - (7m - 48) \cdot \sqrt{6^x} + 2m^2 - 16m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 \geqslant 2$?

A 22. B 12. C 10. D 11.

Câu 31. Áp suất không khí P (đo bằng mi-li-mét thuỷ ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm so với độ cao x (đo bằng mét) theo công thức $P = P_0 \mathrm{e}^{xi}$, trong đó $P_0 = 760$ mmHg là áp suất ở mực nước biển ($x = 0$), i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là 672,7 mmHg. Áp suất không khí ở độ cao 3000 m (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) bằng

A $527,03$mmHg. B $540,03$mmHg. C $520,03$mmHg. D $510,03$mmHg.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$, $B(0; -3; 3)$, $C(1; 7; 1)$. Biết rằng tọa độ điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất có dạng $M(a; b; c)$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Giá trị $T = abc$ bằng

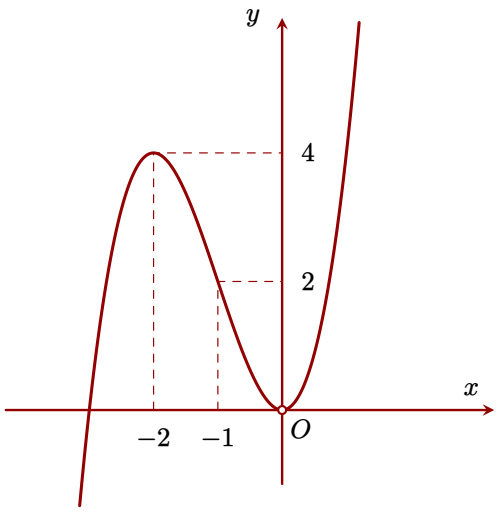
A 10. B 4. C 0. D 3.

Câu 33. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , góc giữa

$A'C$ với mặt đáy (ABC) bằng $45°$, cạnh bên $AA' = 4$. Gọi M là trung điểm của CC' .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng 64.	○	●
b	Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC bằng $2\sqrt{2}$.	●	○
c	Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.	●	○
d	Gọi α là góc nhị diện giữa hai mặt phẳng $(AB'M)$ và (ABC) . Giá trị $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.	○	●

Câu 34. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2x - 2\right) + 2024$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.	●	○
b	Hàm số $h(x) = f\left(1 - \sqrt{x^2 - 2}\right)$ có 5 điểm cực trị.	○	●
c	Đặt $k(x) = x^2 - 4x + f\left(\sqrt{x^2 - 4x + 16}\right)$. Hiệu giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $k(x)$ trên đoạn $[0;2]$ bằng $80 - 24\sqrt{3}$.	●	○
d	Gọi $u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $u'(x) = f(x)$. Bất phương trình $u(x) > \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} + m$ đúng với mọi $x \in (-2;0)$ khi và chỉ khi $m \leqslant u(-2) + \dfrac{10}{3}$.	○	●

Câu 35. 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-3)^{2024}\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + \dfrac{1}{2}\right)(x^2 - 2x)$. Tìm

tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có đúng ba điểm cực trị x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2=50$.
2. Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=25$ m, chiều rộng $AD=20$ m được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15 m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30 m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.

Câu 36. Giải phương trình $\log_3 \dfrac{4x^2+2}{x^6+x^2+1}=x^6-3x^2-1$.

Câu 37. Cho đường tròn $(C):x^2+y^2=25$ ngoại tiếp tam giác nhọn ABC có chân đường cao hạ từ B,C lần lượt là $M(-1;-3), N(2;-3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết A có tung độ âm.

Câu 38. 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B với $AB=BC=3$, $\widehat{ABC}=120^\circ$. Hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trên tia Cx song song với AB, cùng phía với A trong nửa mặt phẳng bờ BC và thỏa mãn $\widehat{AHC}=60^\circ$. Biết cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
2. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AB=3$, $AD=4$, $\widehat{BAD}=120^\circ$. Cạnh bên $AA'=2\sqrt{3}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', AD, BC và α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$, (MNP). Tính $\sin\alpha$.

Câu 39. 1) Cho mẫu số liệu gồm bốn số tự nhiên phân biệt và khác 0, biết số trung bình cộng là 6 và số trung vị là 5 . Tìm các giá trị của mẫu số liệu đó sao cho khoảng biến thiên của mẫu số liệu đạt giá trị nhỏ nhất?
2) Bạn An tung 1 cái xúc sắc cho đến khi có một mặt xuất hiện hai lần thì dừng lại. Tính xác suất bạn An phải tung xúc sắc đúng 3 lần.

18 THPT LÊ XOAY

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

A 12 máy. B 9 máy. C 10 máy. D 11 máy.

Câu 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có phương trình cạnh AB là $x-y-2=0$, phương trình cạnh AC là $x+2y-5=0$. Biết trọng tâm của tam giác là điểm $G(3;2)$ và phương trình đường thẳng BC có dạng $x+my+n=0$. Tìm $m+n$.

A 5. B \$3. C 4. D 2.

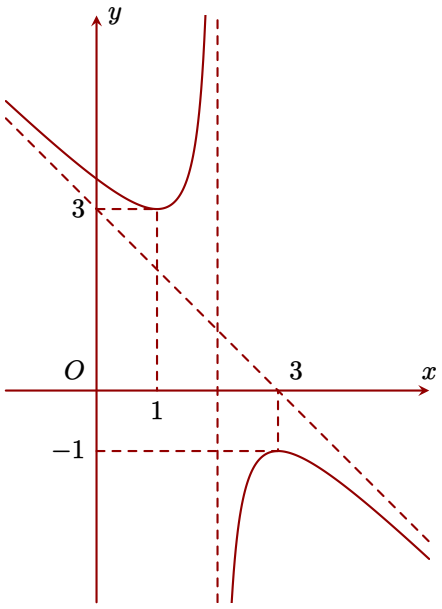
Câu 3. Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn 3 nút liên tiếp khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy số tăng dần và có tổng là 10. Học sinh B chỉ nhớ được là dãy tăng. Tính xác suất để B mở được cửa phòng học đó biết rằng nếu bấm sai 3 lần liên tiếp cửa sẽ tự động khóa lại.

A $\dfrac{531}{3375}$. B $\dfrac{630}{3375}$. C $\dfrac{631}{3375}$. D $\dfrac{530}{3375}$.

Câu 4. Cho biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có kết quả là một số thực. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng

A $87-48\sqrt{3}$. B $\dfrac{9}{4}$. C $6+5\sqrt{3}$. D $\dfrac{45}{16}$.

Câu 5. Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



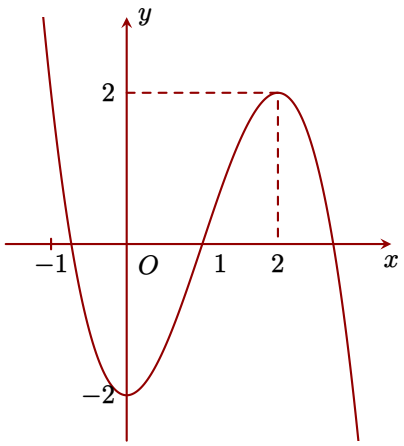
A $y=\dfrac{2x^2-9x+10}{x+2}$. B $y=\dfrac{x^2-5x+7}{-x+2}$. C $y=\dfrac{2x^2-9x+10}{-x+2}$. D $y=\dfrac{x^2-5x+7}{x+2}$.

Câu 6. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là tam giác trung bình của tam giác ABC. Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ... sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n\geqslant 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên

dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$

A $S = \dfrac{15\pi}{4}$. B $S = 5\pi$. C $S = 4\pi$. D $S = \dfrac{9\pi}{2}$.

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(2;+\infty)$. B $(0;2)$. C $(-2;2)$. D $(-\infty;0)$.

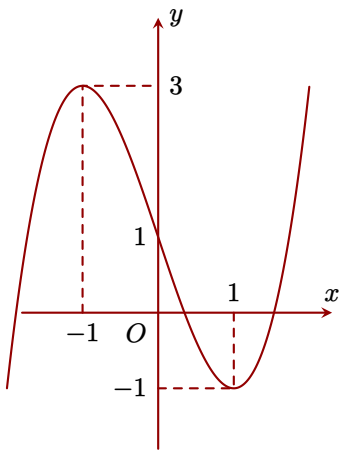
Câu 8. Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, mỗi lớp thi gồm 24 thí sinh được sắp xếp vào 24 bàn khác nhau. Bạn Nam là một thí sinh dự thi, bạn đăng ký 4 môn thi và cả 4 lần thi đều thi tại một phòng duy nhất. Giả sử giám thị xếp thí sinh vào vị trí một cách ngẫu nhiên, tính xác xuất để trong 4 lần thi thì bạn Nam có đúng 2 lần ngồi cùng vào một vị trí.

A $\dfrac{26}{35}$. B $\dfrac{4}{7}$. C $\dfrac{253}{1152}$. D $\dfrac{899}{1152}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;2;1), B(-2;3;6)$. Điểm $M\,(x_M;y_M;z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy). Tìm giá trị của biểu thức $T = x_M + y_M + z_M$ khi $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

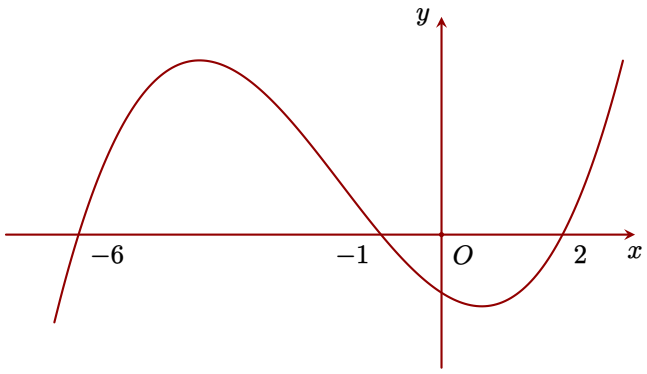
A $-\dfrac{7}{2}$. B $\dfrac{7}{2}$. C 2. D -2.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2f\,(x) + 3m + 3 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.



A $-\dfrac{5}{3} < m < 1$. B $-1 < m < \dfrac{5}{3}$. C $-\dfrac{5}{3} \leqslant m \leqslant 1$. D $-1 \leqslant m \leqslant \dfrac{5}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $y=f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng



A $(-1;0)$. B $(0;1)$. C $(2;3)$. D $(-2;-1)$.

Câu 12. Ông A dự định dùng hết 6,5 m^2 kính để làm một bể cá có hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A 1,33 m^3. B 2,26 m^3. C 1,50 m^3. D 1,61 m^3.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A $(4;-2;10)$. B $(2;6;4)$. C $(2;-1;5)$. D $(1;3;2)$.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích của tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. B $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$. C $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. D $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sauTổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	1	↘	2	↘	-3	↗	3
			$-\infty$				

A 1. B 4. C 2. D 3.

Câu 16. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC=a\sqrt{3}$. Biết BC' hợp với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc 30° và hợp với mặt phẳng đáy góc α sao cho

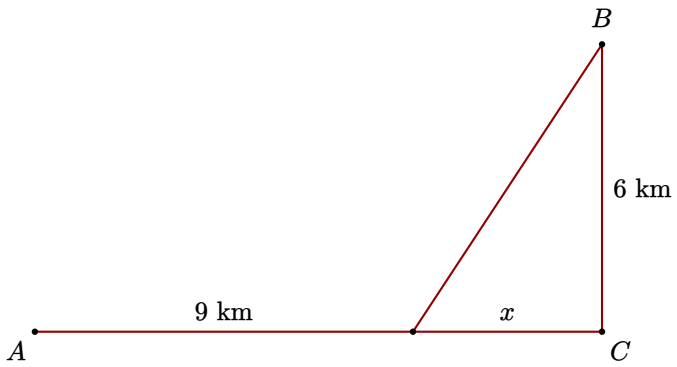
$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB', $A'C'$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Góc giữa MN và (ABC') bằng $60°$.	○	●
b	Thể tích khối chóp $C'.ABB'A'$ bằng $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.	○	●
c	Khoảng cách giữa MN và AC' bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.	○	●
d	Độ dài đường cao của lăng trụ bằng $a\sqrt{3}$.	○	●

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Trên các cạnh CD và BB' ta lần lượt lấy điểm M và N sao cho $DM = BN = x$ với $0 \leqslant x \leqslant a$. Các mệnh đề dưới đây đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.	●	○
b	Gọi K là trung điểm AD, khi đó $\overrightarrow{C'K} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D'} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$.	○	●
c	Góc giữa vectơ $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{MN}$ bằng $60°$.	○	●
d	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'D'} = a^2$.	○	●

Câu 18. Một công ty muốn xây một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo (như hình vẽ). Giá để xây đường ống trên bờ là 50 000 USD mỗi km và 130 000 USD để xây mỗi km dưới nước. Gọi C là điểm trên bờ biển sao cho BC vuông góc với bờ biển, $BC = 6$ km, $AC = 9$ km. Gọi M là vị trí trên đoạn AC sao cho khi làm ống dẫn theo đường gấp khúc AMB thì chi phí ít nhất.

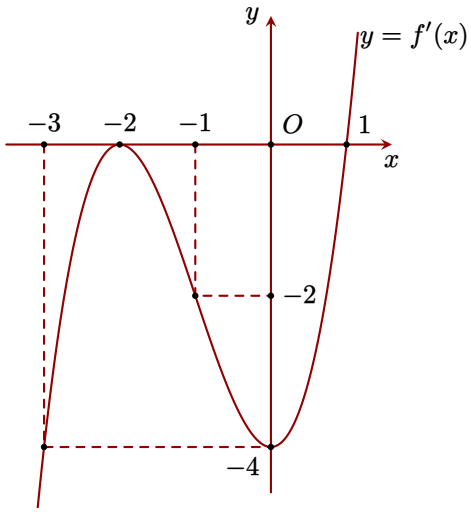


	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Nếu công ty lắp đường ống theo đường ACB thì chi phí hết số tiền 1 230 000 USD.	●	○
b	Chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là 1 170 000 USD.	●	○
c	Nếu công ty lắp đường ống theo đường gấp khúc AMB thì khi M là trung điểm của AC chi phí hết số tiền 1 200 000 USD.	●	○
d	Nếu công ty lắp đường ống thẳng theo đường trên biển từ A đến B thì chi phí hết số tiền nhỏ hơn 1 400 000 USD.	○	●

Câu 19. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_5^2 x - (m-1)\log_5 x + 4 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $[1;25]$ là $(a;b]$. Khi đó $a+b=\dfrac{20}{3}$.	○	●
b	Cho phương trình $3^x + m = \log_3(x-m)$, với m là tham số. Số giá trị nguyên của $m \in (-15;15)$ để phương trình đã cho có nghiệm là 13.	○	●
c	Cho hàm số $f(x) = \left\lvert x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x - m \right\rvert$. Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022;2022]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 5 điểm cực trị nằm về phía bên phải trục Oy bằng 2 021.	●	○
d	Cho hàm số $y = \left\lvert x^3 - 3x^2 - 9x + m \right\rvert$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2;3]$ bằng $M < 50$. Tổng các phần tử của S bằng 735.	○	●

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.	○	●
b	Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+x+2\,024$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$.	●	○
c	$f'(2)=4$.	○	●
d	Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.	●	○

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, AD song song BC, $BC=2a$, $AB=AD=DC=a$ $(a>0)$. Mặt bên SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi O là giao điểm AC và BD. Biết SD vuông góc với AC, M là điểm thuộc đoạn OD, $MD=x$ $(x>0)$, M khác O và D. Mặt phẳng (α) qua M và song song hai đường thẳng SD và AC cắt khối chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện. Diện tích thiết diện lớn nhất khi $x=\frac{a\sqrt{m}}{4}$. Tìm m.

KẾT QUẢ:

Câu 22. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^4}{4}-mx^3+\frac{3}{2}(m^2-1)x^2+(1-m^2)x+2\,019$, m là tham số thực. Biết rằng hàm số $y=f(|x|)$ có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi $a<m^2$.

KẾT QUẢ:

Câu 23. Anh Bình gửi 200 triệu vào ngân hàng TIAD với kì hạn cố định 12 tháng và hưởng lãi suất 0,65%/tháng. Tuy nhiên sau khi gửi được tròn 8 tháng anh phải dùng đến 200 triệu trên. Anh đến ngân hàng định rút tiền thì được nhân viên ngân hàng tư vấn: "Nếu rút tiền trước kì hạn, toàn bộ số tiền anh gửi chỉ có lãi suất không kỳ hạn là 0,02%/tháng. Anh nên thế chấp sổ tiết kiệm đó tại ngân hàng để vay ngân hàng 200 triệu với lãi suất 0,7%/tháng. Khi sổ của anh đến kì hạn, anh có thể rút tiền để trả nợ ngân hàng". Nếu làm theo tư vấn của nhân viên ngân

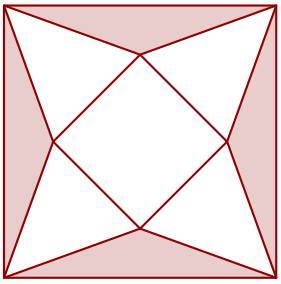
hàng thì anh Bình sẽ đỡ thiệt hại bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng phần chục)? Biết ngân hàng tính lãi theo thể thức lãi kép.
Điền đáp án: _____.

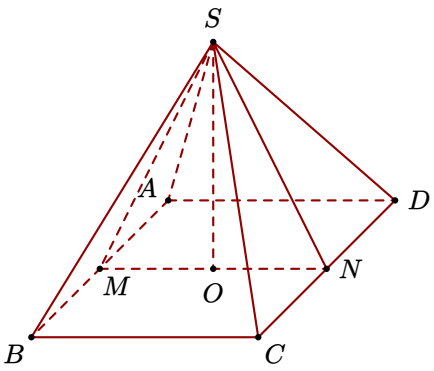
KẾT QUẢ:

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên lớn hơn 2 của y sao cho với mỗi y tồn tại đúng 3 số nguyên dương x thỏa mãn $3^x - y \leqslant 2\log_2(3^x - 2)$.

KẾT QUẢ:

Câu 25. Một tấm bạt hình vuông cạnh 20 m như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại (các đường may không đáng kể), nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí (cả phần xung quanh và đáy của hình tháp dạng hình chóp tứ giác đều) để tránh hư hại tháp khi trời mưa. Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu trên (đơn vị m^2).





KẾT QUẢ:

Câu 26. Một cửa hàng trung bình bán được 100 cái Tivi mỗi tháng với giá 14 triệu đồng một cái. Chủ cửa hàng nhận thấy rằng, nếu giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng. Hỏi cửa hàng nên bán với giá bao nhiêu để doanh thu cửa hàng là lớn nhất?

KẾT QUẢ:

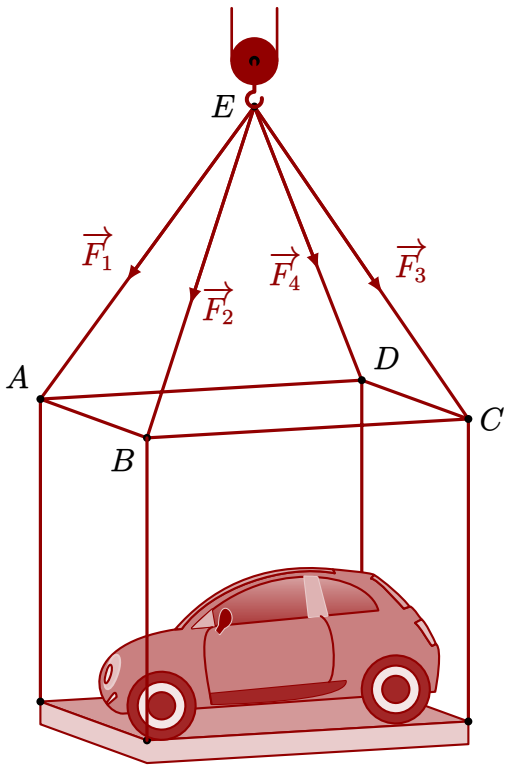
Câu 27. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilogam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, một kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm $x+y$ để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn.

KẾT QUẢ:

Câu 28. Cho phương trình $\cos 2x - \sin x + \dfrac{m}{3} - 1 = 0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có 5 nghiệm trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{2}\right)$.

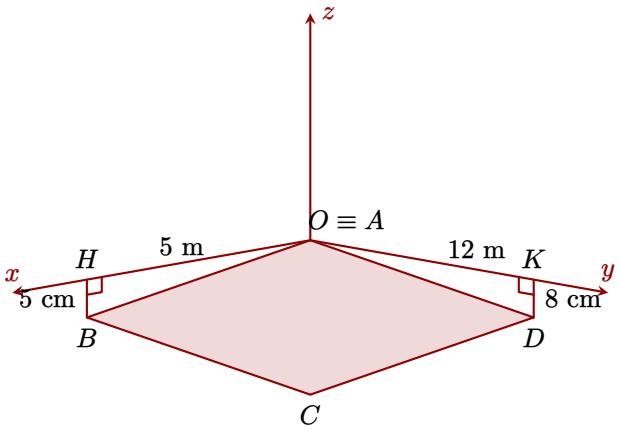
KẾT QUẢ:

Câu 29. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $60°$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$, $\overrightarrow{F}_3$, $\overrightarrow{F}_4$ đều có cường độ là $5\,000\sqrt{3}$ N và trọng lượng của khung sắt là $3\,000$ N. Trọng lượng của chiếc xe ô tô bằng $100x$. Tìm x.



KẾT QUẢ:

Câu 30. Ở một số vùng quê ở Việt Nam, trước mỗi nhà thường có một khoảng sân rộng để phơi lúa vào mùa gặt và cũng là nơi để tổ chức một số sự kiện: đám cưới, đám hỏi, thôi nôi,... Bác An tính xây một sân trước cửa nhà hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh lần lượt là $AB = 5$ m và $AD = 12$ m. Để tiện cho việc thoát nước khi trời mưa và khi rửa sân nên bác An xây vị trí B thấp hơn vị trí A là 5 cm, vị trí D thấp hơn vị trí A là 8 cm. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ để xác định xem vị trí C thấp hơn vị trí A bao nhiêu cm (làm tròn đến hàng đơn vị).



KẾT QUẢ:

19 THPT NAM ĐÀN NGHỆ AN

Câu 1. Điều tra về chiều cao của học sinh lớp 10A, ta có kết quả sau:

Chiều cao (cm)	$[150;154)$	$[154;158)$	$[158;162)$	$[162;166)$	$[166;170)$	$[170;174)$
Số học sinh	5	10	15	12	5	3

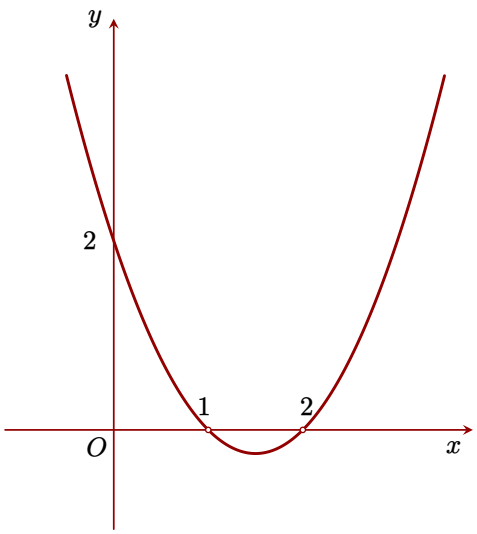
Số trung bình là

A $158,94$. B $160,88$. C $161,02$. D $159,5$.

Câu 2. Thành phố A có dân số năm 2024 là khoảng 3,2 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,7%. Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như năm 2024 thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó đạt khoảng 4 triệu người?

A 2057. B 2033. C 2032. D 2056.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



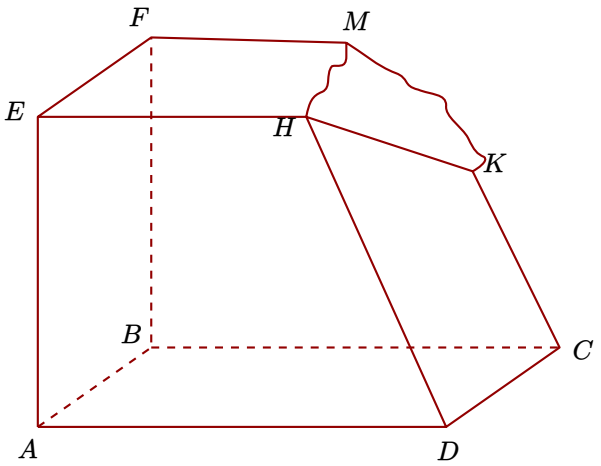
Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. B $(-\infty;-1)$. C $(-1;+\infty)$. D $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 4. Cho $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-4}=\dfrac{m}{n}$, ($\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, $m,n\in\mathbb{Z},n>0$). Giá trị của biểu thức $P=5m+n^2$ bằng

A 2309. B 2379. C 2310. D 2308.

Câu 5. Cho khối gỗ có các mặt đều là một phần của mặt phẳng với $(ABCD)\parallel(EFMH)$, $CK\parallel DH$. Khối gỗ bị hỏng một góc (hình vẽ). Bác thợ mộc muốn làm đẹp khối gỗ bằng cách cắt khối gỗ theo mặt phẳng (α) đi qua K và song song với $(ABCD)$. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của DH, BF với mặt phẳng (α). Biết $BF=50$ cm, $DH=70$ cm, $CK=45$ cm. Độ dài đoạn FJ gần nhất với giá trị nào sau đây?



A 28cm. B 20cm. C 28cm. D 25cm.

Câu 6. Một sinh viên ra trường đi làm ngày 1/1/2024 với mức lương khởi điểm là a đồng mỗi tháng và cứ sau 2 năm được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của anh ta là 60% lương, phần còn lại tiết kiệm hết để mua nhà. Giá trị hiện tại của căn nhà là 1 tỷ đồng và cũng sau 2 năm giá trị tăng thêm 5%. Với mức lương khởi điểm a là bao nhiêu thì sau 12 năm anh ta mua được nhà (kết quả quy tròn đến hàng nghìn đồng)?

A 19028000 đồng. B 20092000 đồng. C 18092000 đồng. D 16092000 đồng.

Câu 7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = a\sqrt{3}$, $AD = 2a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCD'A')$ bằng a. Tính thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

A $3a^3$. B $a^3\sqrt{2}$. C $a^3\sqrt{3}$. D $3a^3\sqrt{2}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ A đến (SBD) bằng $\dfrac{6a}{7}$. Tính khoảng cách từ C đến (SBD)?

A $\dfrac{4a}{7}$. B $\dfrac{12a}{7}$. C $\dfrac{3a}{7}$. D $\dfrac{6a}{7}$.

Câu 9. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 000 000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100 000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A 2.250.000. B 2.350.000. C 2.450.000. D 2.550.000.

Câu 10. Một chất điểm dao động điều hòa xung quanh điểm O theo phương nằm ngang. Biết rằng vị trí của chất điểm đó so với O tại thời điểm t (giây) được xác định theo phương trình $x = 3\cos\left(\dfrac{2t}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right)$ m. Trong 5 giây đầu, thời điểm nào thì chất điểm nằm xa O nhất?

A 2. B π. C $\dfrac{\pi}{2}$. D 1.

Câu 11. Cho hình vuông kích cỡ 3×3 như hình vẽ. Sắp xếp ngẫu nhiên các số tự nhiên từ 1 đến 9 vào 9 ô vuông. Tính xác suất để có tổng 3 ô trong cùng một hàng hay một cột là số lẻ?

A $\dfrac{1}{14}$. B $\dfrac{2}{7}$. C $\dfrac{5}{14}$. D $\dfrac{3}{14}$.

Câu 12. Với số nguyên dương n thỏa mãn $\mathrm{C}_n^3\mathrm{C}_n^{n-3} + 4\mathrm{C}_n^3\mathrm{C}_n^{n-2} + 4\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^{n-2} = 12544$. Tính $P = \dfrac{\mathrm{A}_n^2 \cdot \mathrm{C}_{n-1}^4}{n}$.

A $P = 90$. B $P = 560$. C $P = 25$. D $P = 245$.

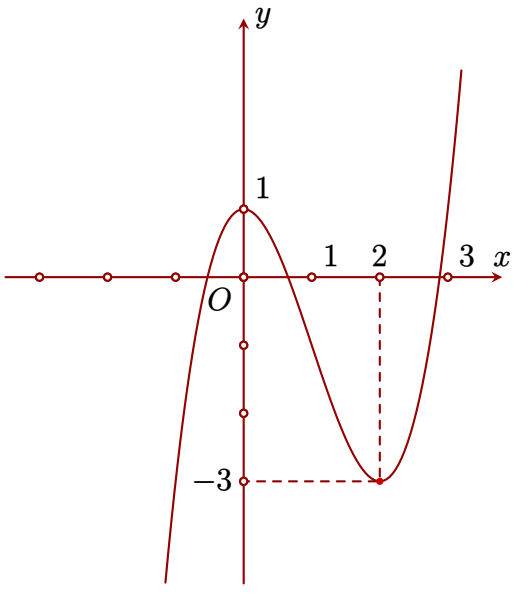
Câu 13. Trong đề kiểm tra 15 phút môn Toán có 20 câu trắc nghiệm. Mỗi câu trắc nghiệm có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án trả lời đúng. Bình giải chắc chắn đúng 10 câu, 10 câu còn lại lựa chọn ngẫu nhiên đáp án. Biết rằng mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm, trả lời sai không bị trừ điểm.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Bình chắc chắn được 5 điểm.	●	○
b	Xác suất để Bình trả lời sai ở một câu là $\frac{3}{4}$.	●	○
c	Xác suất để Bình đạt đúng 8 điểm là $\left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$.	○	●
d	Xác suất để Bình đạt được từ 9 điểm trở lên nhỏ hơn 0,0004.	○	●

Câu 14. Cho ba số thực dương x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số nhân đồng thời với mỗi số thực dương a $(a \neq 1)$ thì $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$\log_{\sqrt{a}} y = 2\log_a y$.	●	○
b	$\log_{\frac{3}{5}} \left(x^2 + z^2\right) \leqslant 4\log_{\frac{3}{5}} y$.	●	○
c	$\log_a x + \log_{\sqrt{a}} y + \log_{\sqrt[3]{a}} z = 3\log_a y^2$.	●	○
d	$\frac{2023x}{y} + \frac{2024y}{z} + \frac{60z}{x} = 2025$.	○	●

Câu 15. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đâyĐặt hàm $g(x) = f(x+1) - 2$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Biết $f(1)=-1$, $f(3)=1$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=\lvert f(x)\rvert$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 6.	○	●
b	Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.	●	○
c	Hàm số $g(\lvert x\rvert)$ có hai điểm cực trị.	○	●
d	Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.	●	○

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB=2$, $AD=CD=1$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SB.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCD}$.	●	○
b	Tính thể tích của khối chóp $M.BCD$ bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$.	●	○
c	Chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\sqrt{6}$.	●	○
d	Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.	○	●

Câu 17. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $B(4;0;0)$, $D'(6;8;10)$, điểm $I\left(\dfrac{1}{2};4;-\dfrac{7}{2}\right)$ và $I'(x;y;z)$ lần lượt là tâm hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Tính giá trị biểu thức $T=x\cdot y\cdot z$.

KẾT QUẢ:

Câu 18. Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức $C(v)=\dfrac{5400}{v}+\dfrac{3}{2}v$.

KẾT QUẢ:

20 THPT NGUYỄN BÍNH

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

A $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. C $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BD=a$. Cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A $60°$. B $120°$. C $45°$. D $90°$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^2(1+2x)+f^3(1-x)=x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A $y=\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$. B $y=\frac{-1}{7}x+\frac{6}{7}$. C $y=\frac{1}{7}x-\frac{5}{7}$. D $y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$.

Câu 4. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để các chữ số của số đó đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 0 và 1 .

A $\frac{7}{125}$. B $\frac{7}{150}$. C $\frac{189}{1250}$. D $\frac{7}{375}$.

Câu 5. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{x-4}{2-x}$ có phương trình là

A $y=-2$. B $x=2$. C $y=-1$. D $x=4$.

Câu 6. Hàm số $y=x^4-4x^3$ đồng biến trên khoảng

A $(-\infty;+\infty)$. B $(3;+\infty)$. C $(-1;+\infty)$. D $(-\infty;0)$.

Câu 7. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ và hai đường thẳng AB', BC' vuông góc với nhau. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.Đặt $AB=2x$ với $x>0$. Gọi M là trung điểm của $A'B'$ suy ra $C'M=x\sqrt{3}$.

A $6a^3$. B $\frac{5}{2}a^3$. C a^3. D $\frac{9}{2}a^3$.

Câu 8. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{9x^2-4}+2x^2+1}{x^2-3x}$ là

A 2. B 4. C 1. D 3.

Câu 9. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\frac{(m-2)\,x+m+2024}{x-n-2}$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó giá trị của $m+n$ bằng

A 2. B 0. C 4. D -2.

Câu 10. Cho hàm số $f\,(x)$ có đạo hàm $f'\,(x)=x^3(x-1)^2(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$. Khoảng nghịch biến của hàm số là

A $(-2;0)$. B $(-\infty;-2)$; $(0;1)$.

C $(-\infty;-2)$; $(0;+\infty)$. D $(-2,0)$; $(1;+\infty)$.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BDC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$.
B $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$.
C $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$.
D $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$.

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{y}$. Khi đó

A $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})$.
B $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})$.
C $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})$.
D $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})$.

Câu 13. Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m-9)x+15$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A 4. B 6. C 7. D 5.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}-\overrightarrow{b}\right)$.
B $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{d}\right)$.
C $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}+\overrightarrow{b}\right)$.
D $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{d}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}\right)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x)=f(2x+7)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

A $(-5;-4)$. B $(-3;0)$. C $(-4;-3)$. D $(-\infty;-5)$.

Câu 16. Hàm số $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$ có bao nhiêu cực trị? Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A 3. B 0. C 2. D 1.

Câu 17. Moment lực là một đại lượng vật lý, thể hiện tác động gây ra sự quay quanh một điểm hoặc một trục của một vật thể. Trong không gian $Oxyz$, với đơn vị đo là mét, nếu tác động vào cán mở lết tại vị trí P một lực $\overrightarrow{F}$ để vặn con ốc ở vị trí O thì moment lực $\overrightarrow{M}$ được tính bởi công thức $\overrightarrow{M}=\left[\overrightarrow{OP},\overrightarrow{F}\right]$. Cho $\overrightarrow{OP}=(x;y;z)$, $\overrightarrow{F}=(a;b;c)$. Nếu giữ nguyên lực tác động $\overrightarrow{F}$ trong khi

thay vị trí đặt lực P sang P' sao cho $\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OP}$, moment lực là $\overrightarrow{M'}$. Khi đó $\overrightarrow{M'} = k \cdot \overrightarrow{M}$. Tính k.

A $k = -2$. B $k = 2$. C $k = -\dfrac{1}{2}$. D $k = \dfrac{1}{2}$.

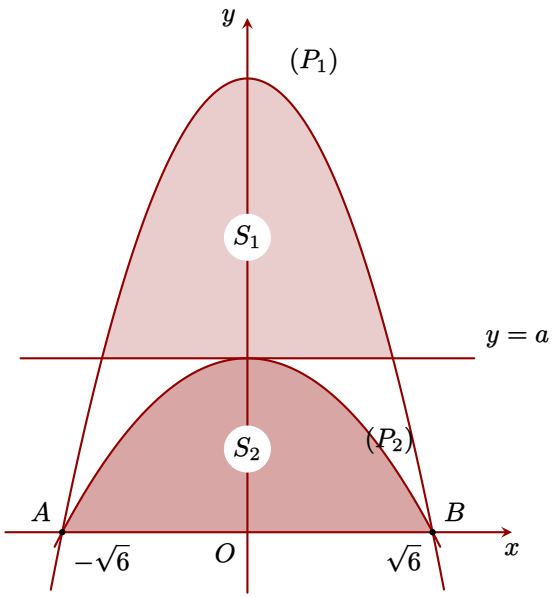
Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a . Góc giữa hai vecto $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng

A $60°$. B $120°$. C $30°$. D $90°$.

Câu 19. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 3t^2 - t^3$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và $S(t)$ là quãng đường tính bằng mét. Thời điểm t tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

A $t = 3$. B $t = 2$. C $t = 5$. D $t = 1$.

Câu 20. Cho parabol $(P_1) : y = -x^2 + 6$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng $d : y = a$ $(0 < a < 6)$. Xét parabol (P_2) đi qua 2 điểm A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $d : y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$. Tính $a^3 - 12a^2 + 108a$.



A $T = 218$. B $T = 219$. C $T = 216$. D $T = 217$.

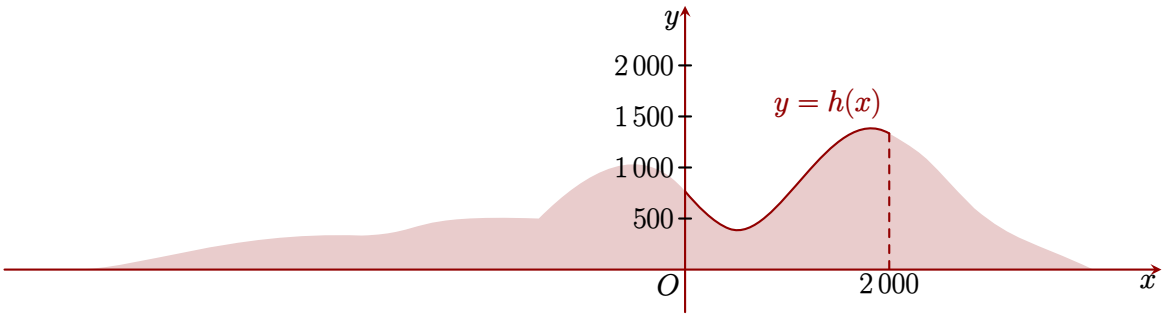
Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[0; +\infty)$ thỏa mãn $f(0) = 1$, $f(x) > 0$, $\forall x \in [0; +\infty)$ và $\dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{2f'(x) + 1} = 1$, $\forall x \in [0; +\infty)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$f(4) = 3$.	●	○
b	$f(x) = \sqrt{x} + 2$.	○	●
c	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}x\sqrt{x} + x + C$.	○	●
d	$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{5}{3}$.	●	○

Câu 22. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = 1$, $OB = 2$, $OC = 3$. Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.	●	○
b	Tích vô hướng của hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OG}$ bằng 3.	○	●
c	Độ dài vectơ $\overrightarrow{OG}$ bằng $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$.	●	○
d	Khi điểm M thay đổi, biểu thức $Q = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3MO^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi điểm M là trung điểm của đoạn OG.	○	●

Câu 23. Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số $y = f(x) = -\dfrac{1}{1\,320\,000}x^3 + \dfrac{9}{3\,520}x^2 - \dfrac{81}{44}x + 840$ với $0 \leqslant x \leqslant 2\,000$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Độ cao thấp nhất của dãy núi là 460 m.	○	●
b	Độ cao nhất của dãy núi là 1 392 m.	●	○
c	Trong khoảng $(a; b)$ (với $b - a$ lớn nhất) độ cao của dãy núi tăng dần khi đó kết quả $5a - b = 450$.	●	○
d	Trong khoảng $(0; c)$ (với c lớn nhất) độ cao của dãy núi giảm dần khi đó diện tích toàn phần của khối lập phương cạnh c là $S = 810\,000$.	○	●

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+3)^2(x^2-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.	●	○
b	Hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực đại.	●	○
c	Hàm số $y=f\left(x^2-6x+10\right)$ có 2 điểm cực trị.	○	●
d	Có 8 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị.	○	●

Câu 25. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang cân, $AB=BC=CD=a$, $AD=2a$, O là trung điểm của cạnh AD. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°.
Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{CA'A}$.	○	●
b	Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C$ bằng khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(B'CO)$.	●	○
c	Thể tích của hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\dfrac{9a^3}{4}$.	●	○
d	Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với đường thẳng $A'C$. Biết (P) chia khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A bằng $\dfrac{15a^3}{8}$.	●	○

Câu 26. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+3}{x+m+2}$, với m là tham số.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{m+2\}$.	○	●
b	Với $m=2$ thì hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.	●	○
c	Với $m=0$ thì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.	●	○
d	Có 10 giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số $y=\left\lvert\dfrac{mx+3}{x+m+2}\right\rvert$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.	○	●

Câu 27. Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=\left|x^4-2x^2-3\right|$.

KẾT QUẢ:

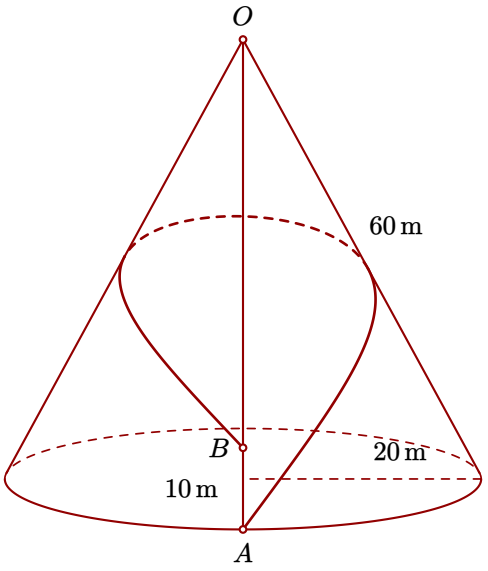
Câu 28. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DE}\right)$.

KẾT QUẢ:

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = x^5 + 4x^3 + m + 2024$. Số giá trị nguyên âm của tham số m để bất phương trình $f(\sqrt[3]{f(x) + m}) \geqslant x^3 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$ là

KẾT QUẢ:

Câu 30. Hình vẽ dưới đây mô tả một ngọn núi có dạng hình nón có độ dài đường sinh bằng 60 m, bán kính đáy bằng 20 m. Nhà đầu tư du lịch dự định xây dựng một con đường nhằm phục vụ việc chuyên chở khách du lịch thăm quan ngắm cảnh vòng quanh ngọn núi bắt đầu từ vị trí A và dừng ở vị trí B sao cho đoạn $AB = 10$ m. Biết rằng người ta đã chọn xây dựng đường đi ngắn nhất vòng quanh núi từ A đến B, đoạn đường đầu là phần lên dốc từ A và đoạn sau sẽ xuống dốc đến B. Khi đó quãng đường xuống dốc đi từ A đến B bằng $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ với a, $b \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $T = a + b$.



KẾT QUẢ:

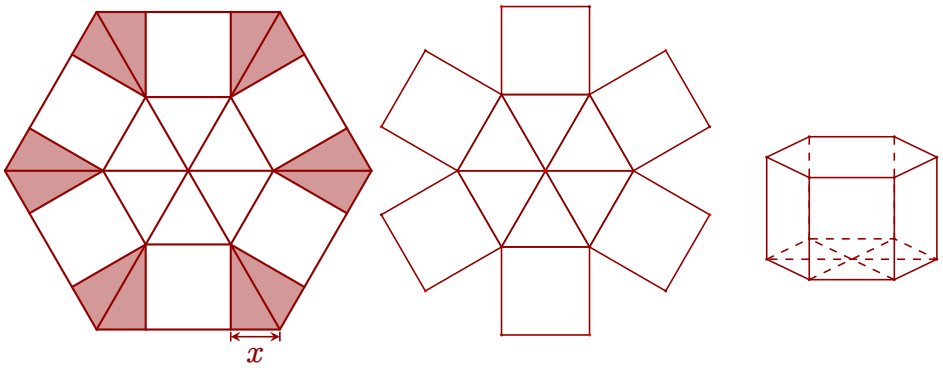
Câu 31. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \dfrac{(m+1)\,x^2 + (2m+1)\,x + m + 2}{x + 1}$. Giá trị của m để tiệm cận xiên của (C) đi qua điểm $A\,(2; 8)$.

KẾT QUẢ:

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là điểm thay đổi trên SO. Tỉ số $\dfrac{SM}{SO}=\dfrac{a}{b}$ sao cho $P=MS^2+MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ nhỏ nhất là bao nhiêu. Tính $a+b$.

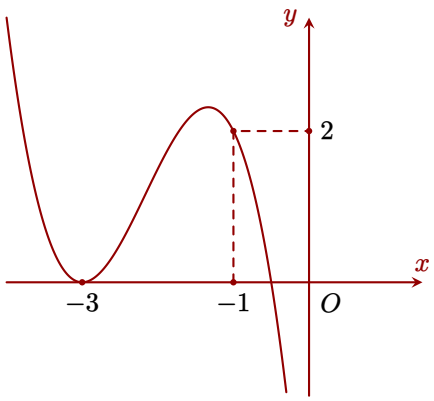
KẾT QUẢ:

Câu 33. Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 90 cm . Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tâm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng x (cm) rồi gập tâm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp. Tính x để thể tích khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất.



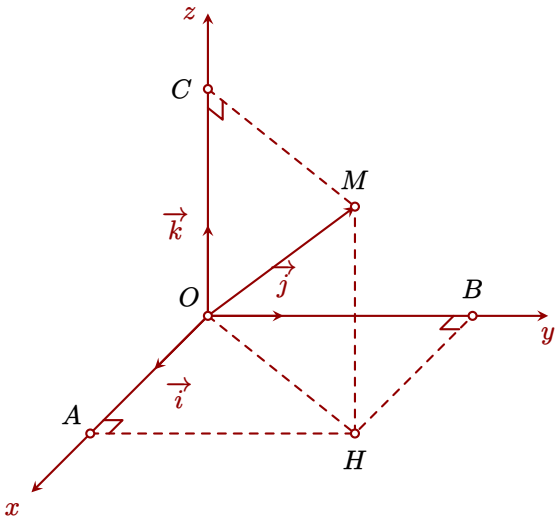
KẾT QUẢ:

Câu 34. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



KẾT QUẢ:

Câu 35. Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình vẽ, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM=14$, $\widehat{HOB}=30^\circ$, $\widehat{MOC}=60^\circ$. Điểm $M(a,b,c)$. Tính $P=abc$.



KẾT QUẢ:

Câu 36. Người ta muốn làm một sàn nổi hình vuông nối liền một sân khấu nổi trên mặt hồ có bờ là một nhánh đồ thị của hàm số $(C)\colon y=\dfrac{x+1}{x-1}$ với đất liền là nửa mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $d\colon y=-x+1$. Tính diện tích S của mặt sàn nổi, biết hình vuông có 2 đỉnh nằm trên (C), 2 đỉnh còn lại nằm trên d.

KẾT QUẢ:

21 THPT TAM DƯƠNG

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3 - m$, với m là tham số. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2;-2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tính tổng các phần tử của S.

A $\dfrac{20}{17}$. B $\dfrac{15}{17}$. C $\dfrac{4}{17}$. D $\dfrac{3}{17}$.

Câu 2. Hàm số $y = \ln\left(4 - x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào?

A $(0;2)$. B $(-2;2)$. C $(-\infty;0)$. D $(-2;0)$.

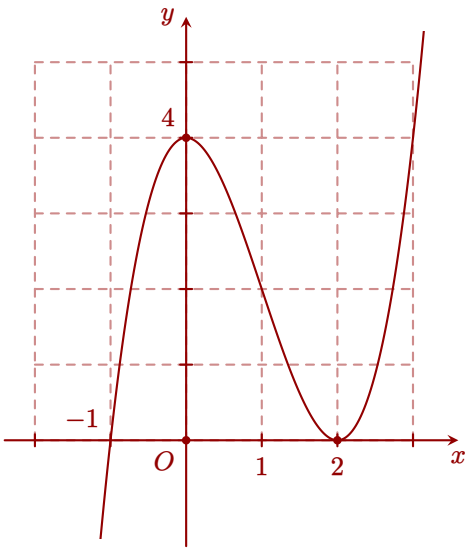
Câu 3. Lớp 10A có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi đúng hai môn Toán và Lý, 4 học sinh giỏi đúng hai môn Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi đúng hai môn Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa. Hỏi số học sinh giỏi ít nhất một môn của lớp 10A là

A 10. B 9. C 18. D 7.

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8, AD = 6$. Gọi P là trung điểm cạnh CD và Q là một điểm thuộc cạnh BC sao cho $QC = 2QB$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

A $\dfrac{\sqrt{55}}{2}$. B $4\sqrt{2}$. C $\dfrac{\sqrt{442}}{5}$. D $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2 - x^2)$ trên đoạn $[0;\sqrt{2}]$ là



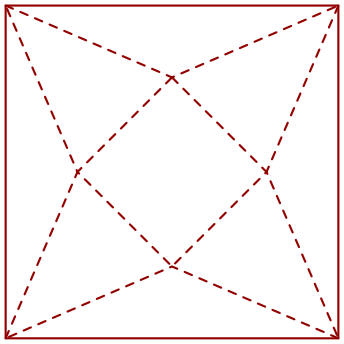
A $\max\limits_{[0;\sqrt{2}]} g(x) = f(2)$. B $\max\limits_{[0;\sqrt{2}]} g(x) = f\left(\sqrt{2}\right)$.

C $\max\limits_{[0;\sqrt{2}]} g(x) = f(1)$. D $\max\limits_{[0;\sqrt{2}]} g(x) = f(0)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, tọa độ điểm M là

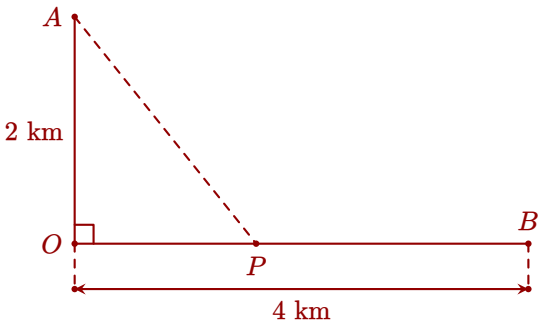
A $\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. B $(1;-7;12)$. C $\left(\dfrac{3}{2};-5;\dfrac{17}{2}\right)$. D $(4;5;-9)$.

Câu 7. Cho hình vuông có cạnh 2 m. Từ tấm bìa này làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là các cạnh của hình vuông rồi gấp lên và ghép lại thành hình chóp tứ giác đều. Thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình bằng $\frac{a\sqrt{2}}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z},\ a, b$ nguyên tố cùng nhau). Khi đó $a+b$ bằng



A 10. B 9. C 8. D 7.

Câu 8. Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông 2 km. Anh dự định chèo thuyền vào bờ và chạy bộ theo một đường thẳng để đến vị trí B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là 4 km. Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc 6 km/h và chạy bộ trên bờ với vận tốc 10 km/h. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là



A 30 phút. B 40 phút. C 44 phút. D 38 phút.

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $B'C'D'$. I là trung điểm của AB'. Giả sử $\overrightarrow{IG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} + c\overrightarrow{AA'}$. Giá trị của biểu thức $S = a+b+c$ bằng

A $\frac{3}{2}$. B 1. C $\frac{4}{3}$. D $\frac{2}{3}$.

Câu 10. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+n}$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có bảng biến thiên như sau. Giả sử $M(x_0; y_0)$ $(x_0 \in \mathbb{Z}; y_0 \in \mathbb{Z})$ thuộc đồ thị hàm số đã cho. Khi đó số điểm M là

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-6	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

A 7. B 5. C 2024. D 6.

Câu 11. Điểm kiểm tra 15 phút của 36 học sinh lớp 12A1 được cho bởi bảng tần số ghép nhóm sau:

Nhóm điểm	Tần số
$[1;3)$	3
$[3;5)$	2
$[5;7)$	10
$[7;9)$	14
$[9;11)$	7

Mốt của bảng ghép lớp trên là giá trị nào sau?

A 7,03. B 6,2. C 5,09. D 7,73.

Câu 12. Ba người cùng bắn vào 1 bia. Xác suất để người thứ nhất, thứ hai, thứ ba bắn trúng đích lần lượt là 0,8; 0,6; 0,5. Xác suất để có đúng 2 người bắn trúng đích là

A 0,46. B 0,92. C 096. D 0,24.

Câu 13. Cường độ ánh sáng đi qua môi trường khác không khí sẽ giảm dần tùy thuộc độ dày của môi trường và hằng số μ gọi là khả năng hấp thu của môi trường, tùy thuộc môi trường thì khả năng hấp thu tính theo công thức $I = I_0 e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó và được tính bằng đơn vị mét. Biết rằng nước biển có $\mu = 1{,}4$. Cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần khi từ độ sâu 2 m xuống đến 20 m?

A $e^{52,5}$. B $e^{25,2}$. C $e^{22,5}$. D $e^{32,5}$.

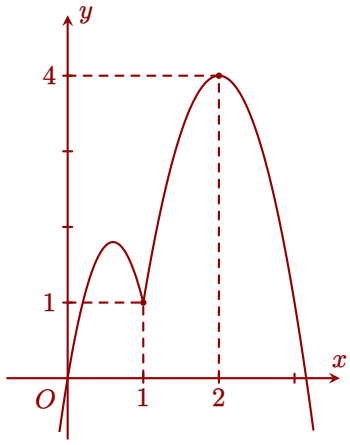
Câu 14. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{x + 1}$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích là

A $\dfrac{25}{2}$. B $\dfrac{25}{4}$. C $\dfrac{27}{2}$. D 25.

Câu 15. Phương trình lượng giác $\sqrt{3}\cot x - 3 = 0$ có nghiệm là:.

A $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$. B $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$. C $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$. D $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Câu 16. Cho hàm sô $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm sô $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.	○	●
b	Hàm số $g(x)=3f(x)-x^3$ có khoảng nghịch biến là $(-\infty;0)$.	○	●
c	Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.	○	●
d	Phương trình $f'(x)-x^2=0$ có hai nghiệm phân biệt.	○	●

Câu 17. Nồng độ thuốc $C(t)$ tính theo mg/cm^3 trong máu bệnh nhân được tính bởi $C(t)=\dfrac{0{,}05t}{t^2+t+1}$, trong đó t là thời gian tính theo giờ kể từ khi tiêm cho bệnh nhân.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Nồng độ thuốc trong máu lớn nhất ở thời điểm 1 giờ sau khi tiêm.	○	●
b	Có thời điểm nồng độ trong máu của bệnh nhân đạt 0,02mg/cm^3.	○	●
c	Hàm số $C(t)$ có đạo hàm $C'(t)=\dfrac{t^2-1}{20(t^2+t+1)^2}, t\geqslant 0$.	○	●
d	Sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân giảm dần theo thời gian.	○	●

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x+m}{x-m}$. Xét tính đúng sai

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Khi $m\neq 0$ ta có $f'(x)=\dfrac{-4m}{(x-m)^2}, \forall x\neq m$.	○	●
b	Với mọi $m\in\mathbb{R}$, hàm số luôn có giá trị lớn nhất trên $[1;3]$.	○	●
c	Khi $m=0$ hàm số là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.	○	●
d	Gọi S là tập các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[1;3]} f(x)=5$. Tổng các phần tử của S bằng $\dfrac{4}{3}$.	○	●

Câu 19. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB=BC=a$, $AD=2a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng 60° . Gọi

E là điểm đối xứng của B qua đường thẳng SD.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$CD = a\sqrt{2}$.	○	●
b	Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.	○	●
c	Thể tích khối tứ diện $SECD$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.	○	●
d	$SA = 2\sqrt{2}a$.	○	●

Câu 20. Một đa giác đều có 20 đỉnh, tất cả các cạnh của đa giác được sơn màu xanh và tất cả các đường chéo của đa giác sơn màu đỏ. Gọi X là tập tất cả các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Trong X có 320 tam giác có đúng một cạnh màu xanh.	●	○
b	Trong X có 1140 tam giác.	●	○
c	Chọn ngẫu nhiên một tam giác từ tập X , xác suất để chọn được tam giác có 3 cạnh cùng màu bằng $\dfrac{40}{57}$.	●	○
d	Trong X có 40 tam giác có hai cạnh màu xanh.	○	●

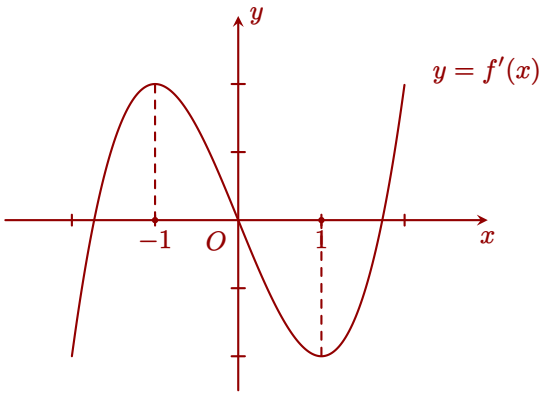
Câu 21. Để gây quỹ cho chương trình Tết yêu thương, một trường THPT tổ chức cho các lớp gói bánh chưng và bánh tét. Mỗi lớp được sử dụng tối đa 10 kg gạo nếp, 1 kg thịt, 1,6 kg đậu xanh. Để gói 1 cái bánh chưng cần 0,5 kg gạo nếp, 0,05 kg thịt và 0,1 kg đậu xanh. Để gói 1 cái bánh tét cần 0,75 kg gạo nếp, 0,075 kg thịt và 0,1 kg đậu xanh. Mỗi bánh chưng bán được 30 nghìn đồng, mỗi cái bánh tét bán được 40 nghìn đồng. Tính số tiền thu được nhiều nhất của mỗi lớp.

KẾT QUẢ:

Câu 22. Một rạp hát có 18 hàng ghế cho khán giả xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 16 ghế, hàng ghế thứ hai có 20 ghế, hàng ghế thứ ba có 24 ghế, ... và cứ tiếp tục theo quy luật như vậy cho đến hàng cuối cùng. Trong một buổi hoà nhạc, ban tổ chức đã bán hết sạch vé và số tiền thu được từ việc bán vé là 135 triệu đồng. Hỏi giá tiền mỗi tấm vé là bao nhiêu nghìn đồng, biết rằng các tấm vé đồng giá và vé bán ra bằng số ghế trong rạp hát?

KẾT QUẢ:

Câu 23. Cho hàm số $y = f'(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2024; 2025)$ để hàm số $y = |4f(\ln x) - \ln^2 x + 1 - m|$ nghịch biến trên khoảng $(1; \mathrm{e})$, biết $f(1) = 1$?



KẾT QUẢ:

Câu 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $BC = 2AB$, phương trình đường trung tuyến BM là $x + y - 2 = 0$. Biết $\widehat{ABC} = 120^\circ$ và $A(3;1)$. Phương trình đường tròn tâm B đi qua A có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Tính tổng $a + b + R$.

KẾT QUẢ:

Câu 25. Anh Long vay ngân hàng 600 triệu đồng và trả góp hàng tháng. Cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả 10 triệu đồng và chịu lãi suất 0,8% trên tháng cho số tiền chưa trả. Với hình thức hoàn nợ như vậy thì sau bao nhiêu tháng anh Long sẽ trả hết số nợ ngân hàng?

KẾT QUẢ:

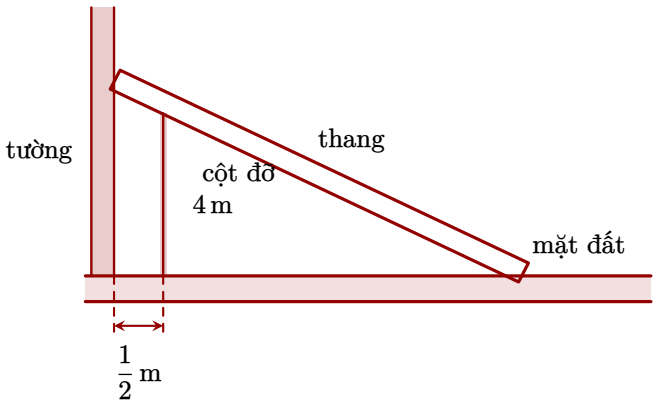
Câu 26. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Biết rằng góc giữa đường thẳng MN và $(ABCD)$ bằng 60°. Tìm số đo bằng độ của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng.

KẾT QUẢ:

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a \neq 0; c \neq 0, ad - bc \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đâyĐồ thị hàm số $f(|x|)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

KẾT QUẢ:

Câu 28. Chiều cao dài bé nhất của cái thang để nó có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao 4 m, song song và cách tường 0,5 m kể từ gốc của cột đỡ.



KẾT QUẢ:

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A\left(-2;1;3\right);B\left(3;-2;-1\right)$. Gọi $M\left(a;b;c\right)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) thỏa mãn: $|MA-MB|$ lớn nhất. Khi đó $a^2+b^2+c^2$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

Câu 30. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Trên đoạn thẳng AC và DC' lần lượt lấy các điểm M và N sao cho MN song song với BD'. Biết $BD'=60$ cm, tính độ dài đoạn thẳng MN.

KẾT QUẢ:

22 THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2), \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. B $\dfrac{9\pi}{10}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C $-90^\circ+k360^\circ, k\in\mathbb{Z}$. D $-270^\circ+k360^\circ, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 2. Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) có $u_{20}=-52,\ u_{51}=-145$ là

A $u_n=-3n+8$. B $u_n=3n+8$. C $u_n=3n-8$. D $u_n=-3n-8$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=(x+1)^2(x-2)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A $y=9x+18$. B $y=-4x+4$. C $y=9x-18$. D $y=-8x+4$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a$, $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi I là trung điểm cạnh BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SI, AC bằng

A $\dfrac{a\sqrt{19}}{3}$. B $\dfrac{a\sqrt{57}}{3}$. C $\dfrac{a\sqrt{3}}{19}$. D $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 5. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$. Giá trị $M-m$ bằng

A $M-m=1$. B $M-m=\sqrt{2}-1$. C $M-m=\sqrt{2}$. D $M-m=2-\sqrt{2}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh bằng $2a$, tam giác SBC vuông tại S, $SC=a$ và $(SBC)\perp(ABC)$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A $\dfrac{a^3}{4}$. B $\dfrac{2a^3}{3}$. C $\dfrac{a^3}{2}$. D $\dfrac{a^3}{3}$.

Câu 7. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm dưới đây gần với số nào nhất?

Nhóm	Tần số
$[2;4)$	12
$[4;6)$	15
$[6;8)$	21
$[8;10)$	18
$[10;12)$	17
	83

A 7,21. B 7, 38. C 7, 42. D 7, 03.

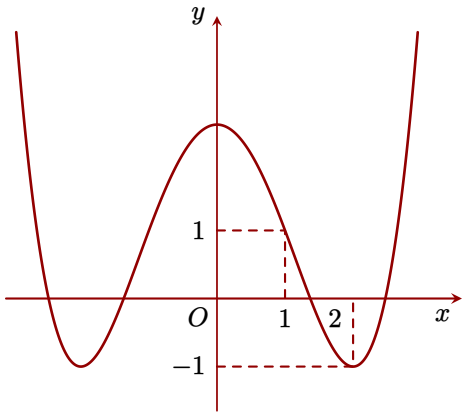
Câu 8. Một đa giác đều có $2n$ cạnh $(n>2)$. Biết số hình chữ nhật tạo bởi 4 đỉnh trong $2n$ đỉnh của đa giác bằng $\dfrac{7}{52}$ số tam giác tạo bởi 3 đỉnh của đa giác và có đúng 1 cạnh là cạnh của đa giác đó. Giá trị của n là

A 52. B 21. C 7. D 15.

Câu 9. Cho m là số nguyên không vượt quá 24. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}e^{3x}+(m+3)e^{2x}+(m+1)e^x-4$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;\ln 2)$ bằng

A 26. B 299. C 300. D 24.

Câu 10. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(1-x^2)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right) + \dfrac{2}{x}$ là



A 5. B 4. C 3. D 7.

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Một lục giác $MNPQEF$ thỏa mãn các đỉnh M, N, P, Q, E, F lần lượt thuộc các cạnh AD, AB, BB', $B'C'$, $C'D'$, $D'D$ và $MN \parallel BD$, $NP \parallel AB'$. Chu vi của lục giác $MNPQEF$ nhỏ nhất bằng

A $2\sqrt{2}$. B $3\sqrt{2}$. C $4\sqrt{2}$. D $6\sqrt{2}$.

Câu 12. Sắp xếp ngẫu nhiên 7 số tự nhiên từ 12 đến 18 thành một hàng ngang. Xác suất để hàng ngang nhận được có tổng của 4 số liên tiếp bất kỳ đều chia hết cho 3 bằng

A $\dfrac{6}{35}$. B $\dfrac{3}{35}$. C $\dfrac{4}{35}$. D $\dfrac{1}{35}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x) = \log_2(2x-4)$ có tập xác định là $\mathscr{D}$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Đồ thị của hàm số $y = \log_2(2x-4)$ đi qua điểm $M(3;1)$.	●	○
b	$\log_{\sqrt{2}}(2x-4) = \log_2\sqrt{2x-4}$, với mọi $x \in \mathscr{D}$.	○	●
c	Tập nghiệm của phương trình $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x - 2$ là $\{4\}$.	●	○
d	Có đúng 5 số nguyên x thỏa mãn $f(x) > x - 6$.	○	●

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao SA , đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và

B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$; SC tạo với mặt đáy một góc $45°$. Gọi E là trung điểm cạnh AD .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$CD \parallel (SBC)$.	○	●
b	$BE \perp SC$.	●	○
c	Thể tích khối chóp $S.CDE$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.	●	○
d	Khoảng cách từ điểm E đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a}{2}$.	●	○

Câu 15. Một lớp học gồm có hai tổ. Tổ 1 có 16 học sinh, tổ 2 có 20 học sinh. Trong kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông năm 2024, tổ 1 có 10 bạn đăng ký thi tổ hợp tự nhiên, 6 bạn đăng ký thi tổ hợp xã hội. Tổ 2 có 8 bạn đăng ký thi tổ hợp tự nhiên và 12 bạn đăng ký thi tổ hợp xã hội. Chọn ngẫu nhiên ở mỗi tổ một bạn để thử nghiệm việc đăng ký dự thi TN THPT.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Số phân tử của không gian mẫu là 320.	●	○
b	Xác suất để hai bạn được chọn cùng đăng ký tổ hợp tự nhiên là $\frac{1}{5}$.	○	●
c	Số cách chọn hai bạn cùng đăng ký tổ hợp xã hội là 72 cách.	●	○
d	Xác suất để hai bạn được chọn đăng ký cùng tổ hợp dự thi tốt nghiệp là $\frac{21}{40}$.	○	●

Câu 16. Cho mệnh đề đúng: "Nếu bạn đạt giải học sinh giỏi Tỉnh thì cuối năm học bạn sẽ được Nhà trường khen thưởng". Xét các mệnh đề sau:
A : "Nếu bạn không đạt giải học sinh giỏi Tỉnh thì cuối năm học bạn sẽ không được Nhà trường khen thưởng".
B : "Cuối năm học Nhà trường sẽ khen thưởng bạn chỉ khi bạn đạt giải học sinh giỏi Tỉnh".
C : "Nếu cuối năm học bạn không được Nhà trường khen thưởng thì bạn đã không đạt giải học sinh giỏi Tỉnh".

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Chỉ có A đúng.	○	●
b	Chỉ có B đúng.	○	●
c	Chỉ có C đúng.	●	○
d	Chỉ có B , C đúng.	○	●

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(1-3x) = x^2 + 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m hàm số $g(x) = f\left(2x - 4\sqrt{2x+1} + m\right)$ có

đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(0;24)$?

KẾT QUẢ:

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;2)$, $B(1;1;0)$, $C(2;-1;4)$. Gọi D là chân đường phân giác trong của tam giác kẻ từ A. Tính giá trị biểu thức $P=a-5b+c$.

KẾT QUẢ:

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+4)(x^2+2mx+9)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f(x^2+3x-4)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

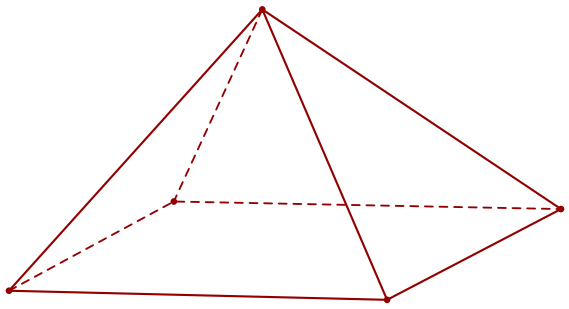
KẾT QUẢ:

Câu 20. Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_2\left(\dfrac{x^2+y^2}{5x+2y-20}\right)+x^2+y^2-20x-8y+78\leqslant 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2$.

Câu 21. Trong một buổi tập đồng diễn sinh hoạt hè 2024 của xóm X, có 6 học sinh gồm 2 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 2 học sinh lớp C của trường Y tham gia. Các học sinh này được xếp ngẫu nhiên vào 3 hàng, mỗi hàng có 2 học sinh. Tính xác suất để không có hai học sinh cùng lớp nào được xếp vào cùng một hàng.

Câu 22. Một ca nô xuất phát từ cảng A chạy ngược dòng nước để đến cảng B cách A một khoảng 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc của ca nô khi nước đứng yên là v (km/h) thì lượng nhiên liệu tiêu hao trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=c(v+24)^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị lít). Ca nô được chủ động về thời gian để đi từ A đến B, hỏi ca nô nên chạy với vận tốc bằng bao nhiêu để tốn ít nhiên liệu nhất?

Câu 23. Một túp lều có dạng hình chóp với đáy là hình thoi cạnh bằng 4 m. Trong bốn mặt bên thì có hai mặt bên kề nhau là hai tam giác đều (như hình vẽ). Tính chiều cao của túp lều để khoảng không gian bên trong nó là lớn nhất.



Câu 24. Dùng 3 m^2 kính trong suốt để tạo một chiếc bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp với đáy là hình vuông (các mép dán có kích thước không đáng kể). Hỏi chiếc bể cao bao nhiêu cm để thể tích của nó là lớn nhất?

23 THPT ĐÔ LƯƠNG

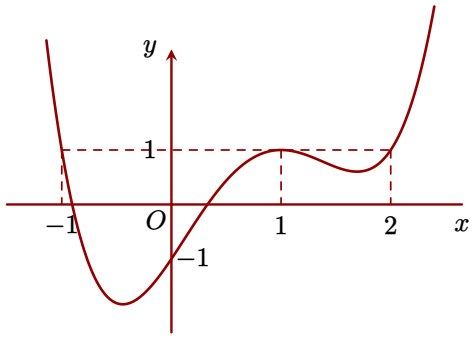
Câu 1. Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - x}{x + 1}$

A $2°\text{C}$. B $2,5°\text{C}$. C $2{,}6°\text{C}$. D $3,6°\text{C}$.

Câu 2. Trong một buổi sinh hoạt nhóm của lớp, tổ một có 12 học sinh gồm 4 học sinh nữ trong đó có bí thư và 8 học sinh nam trong đó có lớp trưởng. Chia tổ thành 3 nhóm, mỗi nhóm gồm 4 học sinh và phải có ít nhất 1 học sinh nữ. Xác suất để bí thư và lớp trưởng không ở cùng một nhóm là

A $\dfrac{5}{16}$. B $\dfrac{25}{32}$. C $\dfrac{11}{16}$. D $\dfrac{7}{32}$.

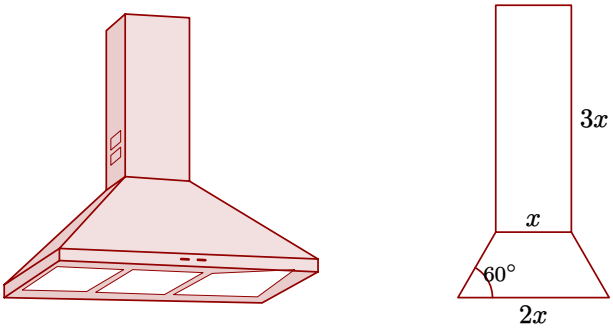
Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên.



Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?

A $\left(\dfrac{3}{2}; 3\right)$. B $(0; 1)$. C $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$. D $(-2; 0)$.

Câu 4. Một ống khói có cấu trúc gồm một khối chóp cụt tứ giác đều có thể tích V_1 và một khối hộp chữ nhật có thể tích V_2 ghép lại với nhau như hình bên. Cho biết bản vẽ hình chiếu của ống khói với phương chiếu trùng với phương của một cạnh đáy khối chóp cụt, hãy tính tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}$?



A $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. B $\dfrac{7\sqrt{3}}{18}$. C $\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$. D $\dfrac{7\sqrt{3}}{9}$.

Câu 5. Kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao 98 m và cạnh đáy 180 m. Số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp đó gần nhất với giá trị nào sau đây?

A $46,2°$. B $47,4°$. C $49°$. D $45,5°$.

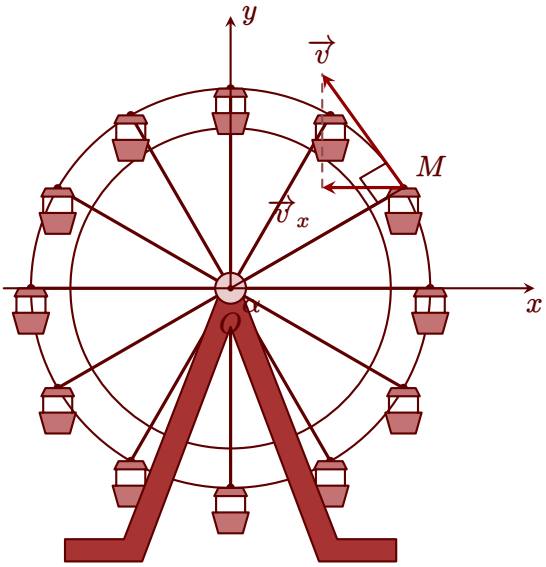
Câu 6. Tổng hợp tiền lương tháng của một số nhân viên văn phòng được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng):

Lương tháng (triệu đồng)	$[6;8)$	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$
Số nhân viên	3	6	8	7

Ước lượng tứ phân vị thứ ba của số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên là:

A $10,75$. B 9. C $11,5$. D $12,3$.

Câu 7. Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0{,}3\sin\alpha$ m/s (hình bên). Dựa vào đồ thị hàm số sin, biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$) góc α thuộc các khoảng $(a;b)$ và $(c;d)$ thì v_x tăng. Hãy cho biết $a+b+c+d$ có giá trị bằng bao nhiêu?



A 4π. B $\dfrac{7\pi}{2}$. C $\dfrac{3\pi}{2}$. D $\dfrac{5\pi}{2}$.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC; P là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là

A $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$. B $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{4}$. C $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{2}$. D $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 9. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20 000 đồng, mỗi lần tiếp theo đặt gấp đôi lần tiền cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp kể từ lần đầu tiên và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu tiền?

A Thắng 20000 đồng. B Thua 40000 đồng. C Thua 20000 đồng. D Hoà vốn.

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Có thể lập được hệ tọa độ $Oxyz$ nào sau đây?

A Gốc O trùng đỉnh B' và các véc-tơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các véc-tơ $\overrightarrow{B'B}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{B'A'}$.

B Gốc O trùng đỉnh B' và các véc-tơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các véc-tơ $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{B'D}$.

C Gốc O trùng đỉnh B' và các véc-tơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các véc-tơ $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{B'B}$.

D Gốc O trùng đỉnh B' và các véc-tơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các véc-tơ $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{B'A}$.

Câu 11. Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm Hải Vân được cho bởi công thức $f(v)=\dfrac{290{,}4v}{0{,}36v^2+13{,}2v+264}$ xe/g trong đó v km/h là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính lưu lượng xe là lớn nhất. Kết quả thu được gần với giá trị nào sau đây nhất?

A $8,8$. B $8,9$. C 9. D $8,7$.

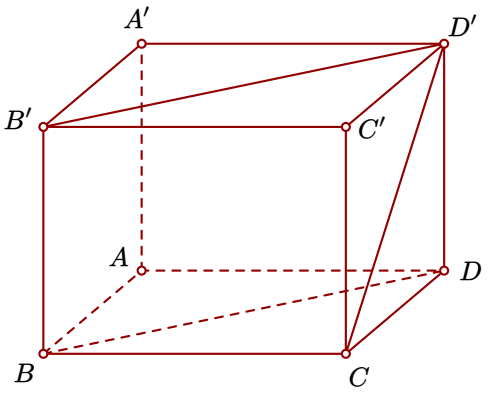
Câu 12. Thang đo Richter được Charles Francis Richter đề xuất và sử dụng lần đầu tiên vào năm 1935 để sắp xếp các số đo độ chấn động của các cơn động đất với đơn vị là độ Richter. Công thức tính độ chấn động như sau $M_L=\log A-\log A_0$, với M_L là độ chấn động, A là biên độ tối đa đo bằng địa chấn kế và A_0 là một biên độ chuẩn. Hỏi theo thang độ Richter, với cùng một biên độ chuẩn thì biên độ tối đa của một trận động đất 7 độ Richter sẽ lớn gấp mấy lần biên độ tối đa của một trận động đất 5 độ Richter?

A 2. B 20. C $10^{\frac{7}{5}}$. D 100.

Câu 13. Dân số của một quốc gia sau t năm kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức $N(t)=100\mathrm{e}^{0{,}012t}$ ($N(t)$ được tính bằng triệu người, $0\leqslant t\leqslant 50$). Các phát biểu sau đây đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Dân số của quốc gia vào năm 2035 là 125,488 triệu người.	○	●
b	Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm).Vậy vào năm 2024 thì tốc độ tăng dân số quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.	○	●
c	Xem $N(t)$ là hàm số biến số t xác định trên $[0;50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0;50]$.	●	○
d	Dân số của quốc gia vào năm 2030 là 108,763 triệu người.	●	○

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Góc nhị diện $[(BCC'B'), BB', (BDD'B')]$ có số đo bằng $45°$.	●	○
b	Thể tích khối tứ diện $AB'CD'$ bằng $\frac{a^3}{6}$.	○	●
c	Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.	●	○
d	Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$ bằng a.	●	○

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	-4	0	4	0	$+\infty$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.	●	○
b	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.	○	●
c	Hàm số $g(x) = f(2x + 1)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$.	○	●
d	Hàm số có 3 điểm cực trị.	○	●

Câu 16. Có ba người cùng đi câu cá. Xác suất câu được cá của người thứ nhất là 0,5. Xác suất câu được cá của người thứ hai là 0,4. Xác suất câu được cá của người thứ ba là 0,3. Khi đó xác suất của biến cố

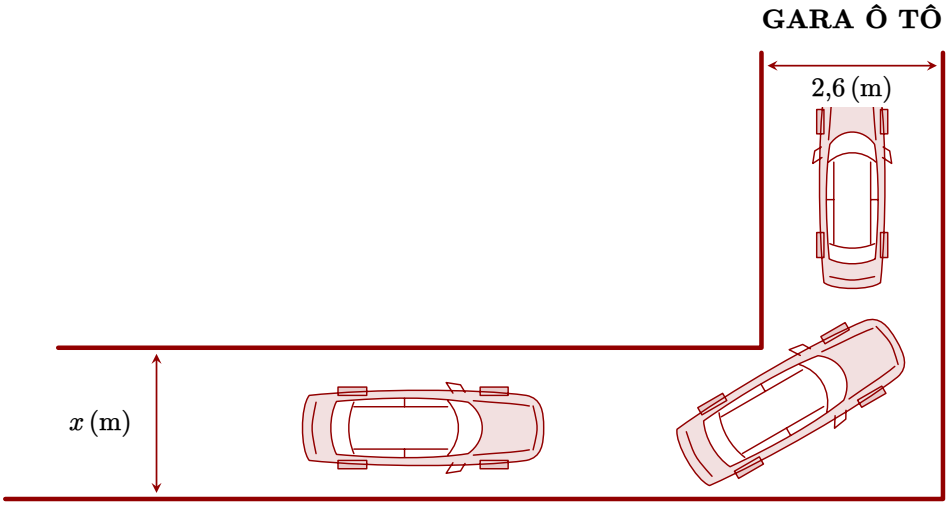
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	” Người thứ ba luôn câu được cá” bằng 0,3.	●	○
b	” Có ít nhất một người câu được cá” bằng 0,21.	○	●
c	” Có đúng một người câu được cá” bằng 0,34.	○	●
d	” Có đúng hai người câu được cá” bằng 0,29.	●	○

Câu 17. Một đài kiểm soát không lưu ở sân bay cao 80 m sử dụng ra-đa có phạm vi theo dõi 500 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía

nam, trục Oz hướng thẳng đứng lên phía trên (hình bên) (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Một máy bay tại vị trí A cách mặt đất 10 km, cách 300 km về phía đông và 200 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu. Tính khoảng cách từ máy bay đến ra-đa (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KẾT QUẢ:

Câu 18. Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào Gara của bác Hạo Nam.



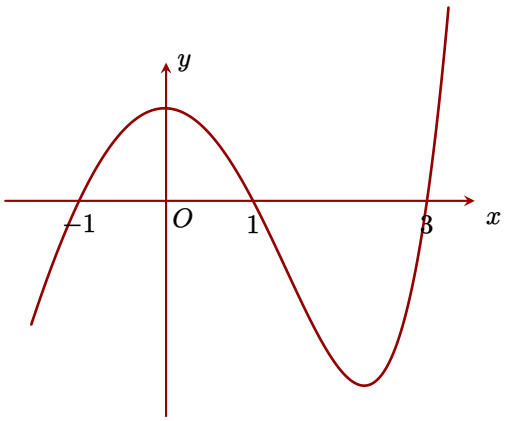
Một lối đi gồm đoạn đường thứ nhất có chiều rộng bằng x m vuông góc với đoạn đường thứ hai dẫn thẳng vào cổng gara có chiều rộng 2,6 m. Kích thước của một chiếc ô tô là 5 m $\times$ 1,9 m (chiều dài $\times$ chiều rộng). Trong tính toán thiết kế, người ta coi ô tô như một hình chữ nhật có chiều dài 5 m và chiều rộng 1,9 m. Tìm chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường thứ nhất để ô tô có thể đi vào gara được (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm; giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường và không bị biến dạng).

KẾT QUẢ:

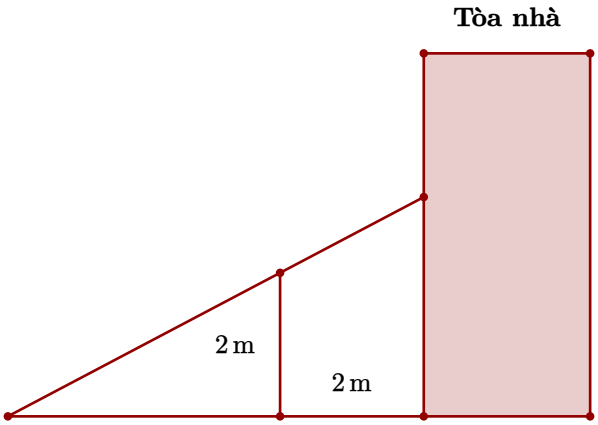
Câu 19. a) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

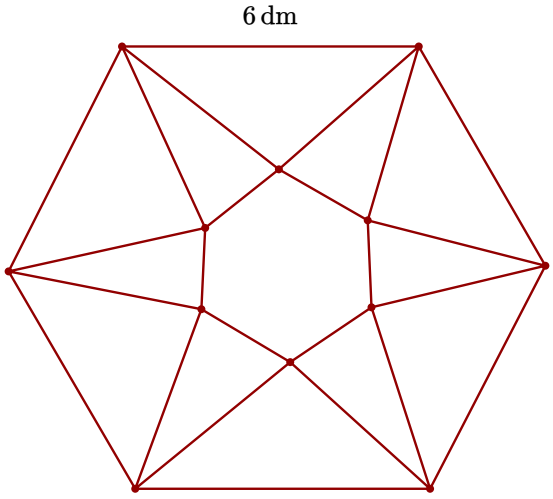
Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = f\left(4x^2 + 4x\right)$.
b) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $g(x) = f(-2x + 1)$?



Câu 20. Một bức tường cao 2m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 2m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang bằng bao nhiêu mét?



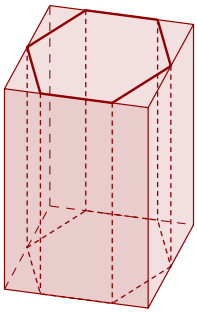
Câu 21. Từ một tấm bìa mỏng hình lục giác đều cạnh 6 dm, bạn Phương cắt bỏ sáu tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của hình lục giác đều ban đầu và đỉnh là đỉnh của một hình lục giác đều nhỏ phía trong rồi gấp lên, ghép lại tạo thành một khối chóp lục giác đều (Hình vẽ).



Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu dcm khối ?

Câu 22. Bác Hà lập lại mật khẩu cho tài khoản thanh toán trực tuyến. Khi lập mật khẩu, hệ thống báo về số điện thoại của bác mã OTP là một dãy 4 kí tự, mỗi kí tự là một chữ số, chữ số 0 có thể đứng đầu. Tính xác suất của biến cố: Mã OTP là dãy kí tự $abcd$ với $a < b < c < d$.

Câu 23. Cho một cây nến hình lăng trụ lục giác đều. Biết chiều cao và độ dài cạnh đáy của cây nến lần lượt là 1,5 dm và 0,5 dm. Người ta xếp nến vào trong một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật (xem hình vẽ bên dưới). Biết cây nến nằm vừa khít trong chiếc hộp, tìm thể tích của khối hộp (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn, đơn vị dm^3).



Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 1. Mặt phẳng (Q) thay đổi song song với mặt phẳng (ABC) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC tại M, N, P. Qua M, N, P kẻ các đường thẳng song song với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (ABC) tại M', N', P'. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$.

24 THPT NGÔ GIA TỰ

Câu 1. Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - x}{x+1}$.

A $+\infty$. B 2. C -1. D 1.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Hỏi hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 5. B 3. C 2. D 4.

Câu 3. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, có bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90°$?

A 0. B 2. C 1. D Vô số.

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4$, $BC = 6$, M là trung điểm BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

A $3\sqrt{5}$. B $5\sqrt{2}$. C $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. D $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5. Ba người bắn vào một bia. Xác suất để người thứ nhất, thứ hai, thứ ba bắn trúng đích lần lượt là $0,8; 0,6; 0,5$. Xác suất để có đúng hai người bắn trúng đích bằng

A $0{,}96$. B $0{,}24$. C $0{,}92$. D $0{,}46$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A $M\,(4;5;0)$. B $M\,(0;0;1)$. C $M\,(2;-3;0)$. D $M\,(4;-5;0)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$.
C Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
D Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;0)$.

Câu 8. Lớp $12A$ có 27 bạn nam trong đó có 18 bạn thích bơi lội 15 bạn thích đá bóng. Biết số bạn thích bơi lội và cả đá bóng nhiều gấp đôi số bạn không thích cả hai môn này. Hỏi có bao nhiêu bạn nam trong lớp $12A$ thích bóng đá nhưng không thích bơi lội.

A 8. B 11. C 6. D 3.

Câu 9. Tìm giá trị thực của tham số m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{mx-1}{2x+m}$ đi qua điểm $M\left(-1;\sqrt{2}\right)$.

A $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. B $m=\dfrac{1}{2}$. C $m=0$. D $m=2$.

Câu 10. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$ bằng

A $3\sqrt{2}$. B 3. C 9. D $2\sqrt{3}$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-2)$, $B(3;-1;-4)$, $C(-2;2;0)$. Tìm tọa độ điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

A $D\,(7;1;-6)$. B $D\,(-3;1;-2)$. C $D\,(-3;3;2)$. D $D\,(-1;1;-2)$.

Câu 12. Tập giá trị của hàm số $f(x)=x+\dfrac{9}{x}$ với $x\in[2;4]$ là đoạn $[a;b]$. Tính $P=b-a$.

A $P=6$. B $P=\dfrac{25}{4}$. C $P=\dfrac{13}{2}$. D $P=\dfrac{1}{2}$.

Câu 13. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-2}{x+1}$ có đồ thị (C).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) có phương trình $y=2x-2$.	○	●
b	Gọi $M\,(x_M;y_M)$ là điểm thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận nhỏ nhất, với $x_M>-1$ thì $y_M<-1,9$.	○	●
c	Hàm số có hai điểm cực trị.	○	●
d	Điểm $M\,(1;-3)$. Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị (C). Diện tích tam giác MAB bằng 6.	○	●

Câu 14. Cho hàm số $y=-x^3+2024x+2025$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số có hai điểm cực trị.	○	●
b	Hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;+\infty)$.	○	●
c	Hàm số đồng biến trong khoảng $(-20;20)$.	○	●
d	Hàm số $y=\lvert f\,(x-10)-2026\rvert$ có 5 điểm cực trị.	○	●

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+3}{x+m+2}$ (với m là tham số).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số đồng biến trong khoảng $(0;+\infty)$ khi $m\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.	○	●
b	Hàm số có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-m-2\}$.	○	●
c	Đồ thị hàm số luôn có đường tiệm cận đứng với mọi giá trị của tham số m.	○	●
d	Khi $m=2$, M là điểm bất kì thuộc đồ thị hàm số, khoảng cách từ điểm M đến tâm đối xứng của đồ thị nhỏ nhất bằng $\sqrt{10}$.	○	●

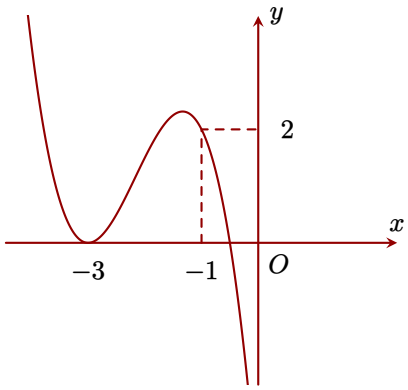
Câu 16. Tỉ lệ tăng dân số mỗi năm của một tỉnh X từ năm 2010 đến năm 2019 là 0,4%. Vì thực hiện các chính sách về dân số nên tỉnh X dự kiến từ năm 2020 đến năm 2030 tỉ lệ tăng dân số mỗi năm chỉ còn lại 0,35%. Theo thống kê số dân tỉnh X năm 2021 nhiều hơn năm 2017 là 30400 người. Các kết quả tính toán lấy đơn vị là triệu và làm tròn đến hai chữ số thập phân. Đặt A là dân số tỉnh X năm 2010.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Dân số tỉnh X năm 2017 là $A.1,004^7$.	○	●
b	$A=1,96$.	○	●
c	Dân số năm 2024 là 2,05 triệu người.	○	●
d	Dân số năm 2030 tăng so với năm 2010 là 0,22 triệu người.	○	●

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;-2)$, $B(2;-1;3)$, $C(1;3;-2)$, $D(5;-1;8)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$\overrightarrow{CD}=(4;-4;10)$.	○	●
b	Điểm E thuộc trục Ox sao cho tam giác CDE vuông tại C , điểm E có toạ độ là $(-7;0;0)$.	○	●
c	Tồn tại bộ số m,n để $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$.	○	●
d	Ba điểm A,B,C thẳng hàng.	○	●

Câu 18. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{f^2(x)-2f(x)}$ là bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

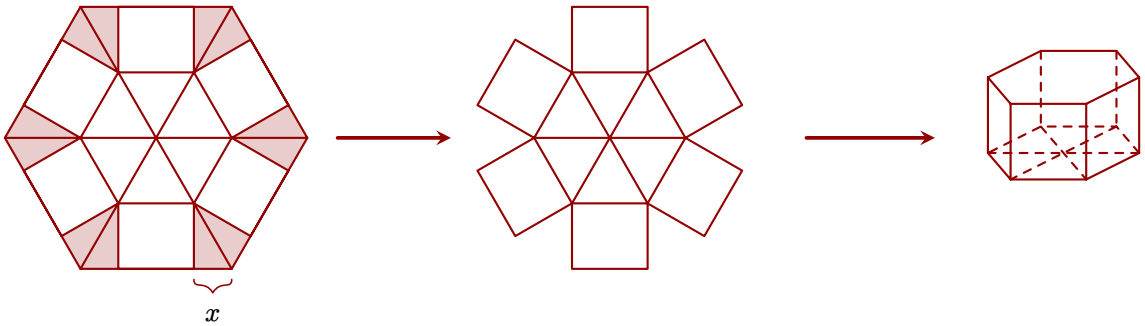
Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 6 . Gọi I là điểm bất kì trong không gian sao cho biểu thức $P=4IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó thể tích khối chóp $I.ABC$ bằng bao nhiêu? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

KẾT QUẢ:

Câu 20. Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{9^x-2}{9^x+3}$. Tính giá trị biểu thức:
$S=f\left(\dfrac{1}{2025}\right)+f\left(\dfrac{2}{2025}\right)+f\left(\dfrac{3}{2025}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2024}{2025}\right)$.
Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

KẾT QUẢ:

Câu 21. Cho một tấm nhôm hình lục giác đều có cạnh 90 cm. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nằm trên cạnh lục giác bằng x cm (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gấp tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp. Tìm x để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất.



KẾT QUẢ:

Câu 22. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hàng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x) = 90 - 0{,}01x^2$ (triệu đồng). Chi phí A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 15x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 15 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm). Hỏi A bán cho B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận cao nhất?

KẾT QUẢ:

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

KẾT QUẢ:

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-1;2)$, $B(-1;1;1)$, $C(-3;-3;4)$ và $D\left(1;\dfrac{1}{2};1\right)$. Điểm $M(x;y;0)$ thoả mãn biểu thức $T = -3\left(\dfrac{MA}{MD}\right)^2 - 2\left(\dfrac{MB}{MD}\right)^2 + \left(\dfrac{MC}{MD}\right)^2$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $x + y$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

Câu 25. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A. Khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng a. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABC') bằng a. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ nhỏ nhất. Góc α tính bằng độ và kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

KẾT QUẢ:

Câu 26. Gọi S là tập hợp các chuỗi nhị phân có 10 kí tự (chuỗi nhị phân là chuỗi tạo thành từ các chữ số 0 và 1). Chọn ngẫu nhiên một phần tử từ tập S. Tính xác suất nhận được chuỗi nhị phân mà không có hai chữ số 1 đứng cạnh nhau. Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân.

KẾT QUẢ:

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-100; 100)$ để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ có 5 điểm cực trị?

KẾT QUẢ:

25 LIÊN TRƯỜNG BẮC NINH

Câu 1. Một nhà sản xuất xác định chi phí để tạo ra x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 1800 + 25{,}177x - 0{,}2x^2 + 0{,}001x^3$ triệu đồng và hàm cầu là $p(x) = 48{,}2 - 0{,}03x$ triệu đồng. Lợi nhuận lớn nhất mà nhà sản xuất có thể đạt được là

A 4842,578 triệu đồng. B 6982,57 triệu đồng.

C 161 triệu đồng. D 2139,992 triệu đồng.

Câu 2. Khi học kì 1 kết thúc, giáo viên chủ nhiệm lớp $12X$ cho các học sinh trong lớp ghi phiếu đánh giá về hiệu quả làm việc của Lớp trưởng và Bí thư. Giáo viên chủ nhiệm lớp tổng hợp các ý kiến đánh giá và thu được kết quả là 75% học sinh trong lớp đánh giá tốt cho Lớp trưởng, 60% học sinh trong lớp đánh giá tốt cho Bí thư và 50% học sinh trong lớp đánh giá tốt cho cả Lớp trưởng và Bí thư. Giáo viên chủ nhiệm chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp để hỏi ý kiến đánh giá đã ghi trong phiếu. Xác suất chọn được học sinh chỉ đánh giá tốt cho đúng một bạn trong hai bạn Lớp trưởng hoặc Bí thư là

A 0,25. B 0,1. C 0,35. D 0,85.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, có góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là điểm di động trên đường thẳng AB, N là điểm di động trên đường thẳng SD. Độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng MN là

A a. B $a\sqrt{2}$. C $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. D $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	10	$\searrow$		$\nearrow$	6
			-2				-8		

Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{2025}{f(x) - 3}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A 7. B 6. C 5. D 4.

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $\ln\left(x^2\right) = 4\ln(x+2)$ có tất cả bao nhiêu phần tử?

A 1. B 2. C 3. D 4.

Câu 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với 8 cạnh (gồm 4 cạnh bên và 4 cạnh đáy). Chọn ngẫu nhiên hai cạnh của hình chóp đã cho. Xác suất chọn được hai cạnh cùng nằm trên một mặt phẳng là

A $\dfrac{5}{7}$. B $\dfrac{2}{7}$. C $\dfrac{9}{14}$. D $\dfrac{1}{7}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha)\colon x - my + z + 6m + 3 = 0$ và $(\beta)\colon mx + y - mz + 3m - 8 = 0$ (với m là tham số thực) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ. Gọi đường thẳng Δ' là hình chiếu vuông góc của Δ lên mặt phẳng (Oxy). Biết rằng khi m thay đổi thì đường thẳng Δ' luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có tâm $I(a;b;c)$ thuộc (Oxy) với bán kính là R. Giá trị của $a + 2b + 3c + 5R$ bằng

A 19. B -9. C -6. D 16.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1 \\ z = 1+t \end{cases}$.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng

A $30°$. B $135°$. C $45°$. D $60°$.

Câu 9. Một chất điểm chuyển động trên trục thẳng đứng với chiều dương hướng lên trên có vị trí được xác định bởi $s(t) = t^3 - 3t^2 + 12t$ cm, trong đó t là thời gian chuyển động được tính theo giây. Trong 12 giây chuyển động đầu tiên, vận tốc trung bình của chất điểm là

A 120 cm/s. B 360 cm/s. C 372 cm/s. D 31 cm/s.

Câu 10. Trong một cuộc thi giải khối rubik tiêu chuẩn cỡ $3 \times 3 \times 3$, người ta thống kê thời gian giải rubik của 25 người chơi theo bảng số liệu sau

Thời gian (giây)	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$	$[14;16)$	$[16;18)$
Số người	4	6	8	4	3

Khoảng tứ phân vị được cho bởi bảng trên được làm tròn đến hàng phần trăm là

A 3,63. B 10,75. C 1,75. D 14,38.

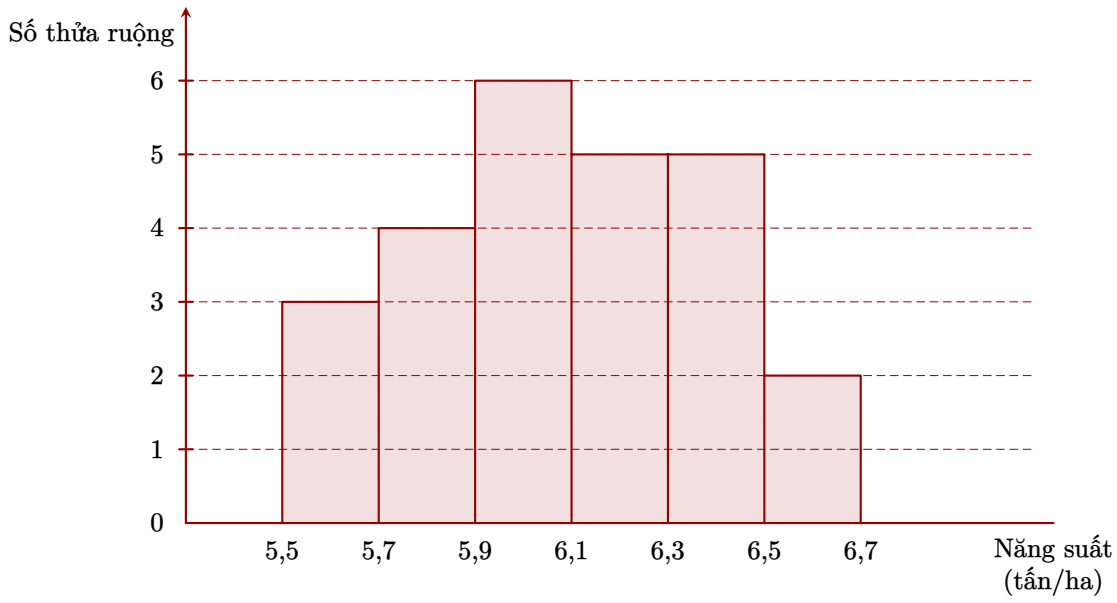
Câu 11. Nếu a, b là các số thực thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(ax + 3 + \sqrt{4x^2 + bx + 12}\right) = 5$ thì giá trị của $2a - b$ bằng bao nhiêu?

A 10. B -2. C -4. D 12.

Câu 12. Đơn đặt hàng của một xưởng sản xuất cho một sản phẩm X là khoảng 400 chiếc mỗi ngày khi giá 350 nghìn đồng/chiếc và 600 chiếc mỗi ngày khi giá 325 nghìn đồng / 1 chiếc. Hàm cung được cho bởi công thức $\rho = 0{,}325x + 40$ (nghìn đồng), trong đó x là số sản phẩm được bán với giá ρ nghìn đồng 1 chiếc. Trong trường hợp hàm cầu là hàm bậc nhất thì thặng dư tiêu dùng bằng bao nhiêu triệu đồng?

A 40 triệu. B 40 000 triệu. C 10,4 triệu. D 50,4 triệu.

Câu 13. Kết quả khảo sát năng suất lúa (đơn vị: tấn/ha) của một số thửa ruộng được minh họa bởi biểu đồ sau



Phương sai của mẫu số liệu cho bởi biểu đồ trên bằng

A 0,0903. B 0,3004. C 0,0867. D 0,2944.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;-2)$, $B(-2;1;2)$ và $C(2;3;4)$. Tập hợp các điểm cách đều ba điểm đã cho là một đường thẳng có phương trình

A $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+3}{-5}=\dfrac{z-2}{1}$. B $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z-1}{1}$.

C $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+3}{-5}=\dfrac{z-2}{1}$. D $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 15. Trong không gian, bốn lực $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$, $\overrightarrow{F}_3$, $\overrightarrow{F}_4$ cùng tác động vào một chất điểm S làm cho chất điểm đứng yên. Các lực $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$, $\overrightarrow{F}_3$ có cường độ bằng nhau và bằng $30\sqrt{6}$ N. Khi giá của các lực $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$, $\overrightarrow{F}_3$ đôi một tạo với nhau một góc bằng 60° thì cường độ của lực $\overrightarrow{F}_4$ bằng bao nhiêu?

A $\left|\overrightarrow{F_4}\right|=120$ N. B $\left|\overrightarrow{F_4}\right|=180$ N. C $\left|\overrightarrow{F_4}\right|=60$ N. D $\left|\overrightarrow{F_4}\right|=90\sqrt{6}$ N.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z+3=0$ và $(Q)\colon -x+y-2z+6=0$. Mặt phẳng (α) cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình là

A $x-y+2z-3=0$. B $x-y+2z+9=0$.

C $2x-2y+4z+9=0$. D $2x-2y+4z-3=0$.

Câu 17. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AA'=2AB=6$, $\widehat{A'AB}=\widehat{A'AC}=60^\circ$. Gọi M là trung điểm AA' và N là trọng tâm tam giác BCC'. Độ dài đoạn thẳng MN bằng

A $3\sqrt{3}$. B 6. C $\sqrt{3}$. D 3.

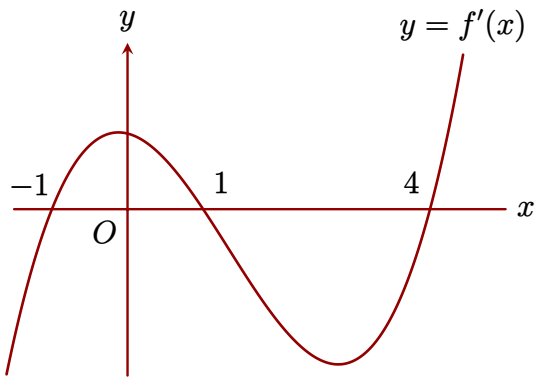
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(4)+4G(1)=4G(4)+F(1)+2025$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A -675. B -405. C 675. D 405.

Câu 19. Ba bạn Bình, Khá và Giỏi tham gia một trò chơi với phần thưởng là những cái kẹo. Sau khi trò chơi kết thúc, số kẹo được thưởng của Bình, Khá, Giỏi theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội là số tự nhiên. Vì số kẹo thưởng của bản thân nhiều hơn của hai bạn còn lại nên Giỏi đã tặng cho bạn Bình 84 cái kẹo và tặng cho bạn Khá 54 cái kẹo. Sau khi tặng kẹo xong, Giỏi nhận thấy số kẹo của Bình, Khá và bản thân theo thứ tự lại tạo thành một cấp số cộng và bản thân Giỏi vẫn có nhiều kẹo nhất. Số kẹo thưởng còn lại của Giỏi sau khi tặng cho hai bạn Bình và Khá là bao nhiêu cái?

A 288. B 150. C 200. D 62.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$ đạt được tại điểm

A $x=-1$. B $x=0$. C $x=1$. D $x=4$.

Câu 21. Cho hàm số $y=\dfrac{9-3x}{x+1}$ có đồ thị là đường cong (C), đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt có tọa độ là các số nguyên. Có tất cả bao nhiêu đường thẳng Δ thỏa mãn đề bài?

A 6. B 66. C 132. D 45.

Câu 22. Cho cấp số cộng (u_n) với $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$. Nếu $\dfrac{S_m}{S_n}=\dfrac{m^2}{n^2}$ $(\forall m,n\in\mathbb{N}^*, m\neq n)$ và giá trị của $\dfrac{u_{24}}{u_{25}}=\dfrac{a}{b}$ thì $24a-25b$ bằng bao nhiêu?

A -101. B -49. C -99. D -97.

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$ có M là một điểm thuộc mặt phẳng (BCD) thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$, $(x,y,z\in\mathbb{R})$. Giá trị $x+y+z$ bằng

A -2. B 1. C 2. D -1.

Câu 24. Cho bất phương trình $\sqrt{x+2}\cdot\left[\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x^2-x-18}-\dfrac{1}{2}\right]\geqslant 0$. Gọi T là tập tất cả các nghiệm nguyên không vượt quá 2025 của bất phương trình đã cho. Số phần tử của T là

A 8. B 10. C 2021. D 2022.

Câu 25. Trong các hàm số được cho bởi các phương án A, B, C, D dưới đây, hàm số nào không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}+\dfrac{2024}{2x+1}$ trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$?

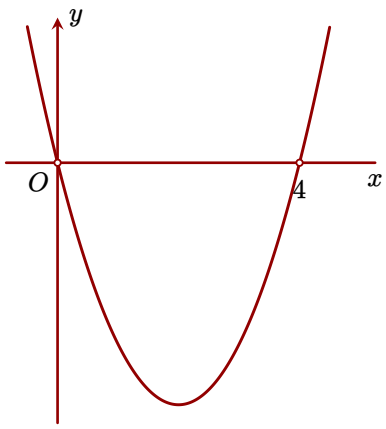
A $F(x)=\sqrt{2x+1}+1012\ln(2x+1)+C$. B $F(x)=\sqrt{2x+1}+2024\ln(2x+1)+C$.

C $F(x)=\sqrt{2x+1}+506\ln(2ex+e)^2+C$. D $F(x)=\sqrt{2x+1}+1012\ln(4x+2)+C$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ là $O(0;0;0)$, đơn vị trên mỗi trục tính theo ki-lô-mét. Một máy bay chuyển động thẳng trong khu vực kiểm soát không lưu, bay qua hai vị trí $A(222;220;10)$ và $B(122;150;20)$. Khi máy bay ở gần đài kiểm soát nhất, tọa độ vị trí của máy bay là $(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $a+b-c$ bằng

A 52. B -18. C -108. D 98.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm số $y=f'(3-x)$ là đường cong trong hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2025;2025)$ để hàm số $y=f\left(\left|x^2+4x-m\right|\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$?



A 2024. B 2021. C 2023. D 2022.

Câu 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ACC') bằng

A $30°$. B $45°$. C $60°$. D $90°$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-\infty;-1)$. B $(3;+\infty)$. C $(-1;3)$. D $(-\infty;1)$.

Câu 30. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho bất phương trình $mx^2+\mathrm{e}^x+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\leqslant m^2x+1$ có nghiệm duy nhất?

A 1. B 2. C 0. D 3.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{-2025x}-\mathrm{e}^{2025x}-2025\ln\left(45x+\sqrt{2025x^2+1}\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số $y=f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.	●	○
b	$f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.	●	○
c	Có tất cả 18 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x+2025)+f(m-\mathrm{e}^x)=0$ có đúng 2 nghiệm nhỏ hơn 3.	○	●
d	Tập nghiệm của bất phương trình $f(\log(2x-3))\geqslant f(\log(x+4))$ là $T=[7;+\infty)$.	○	●

Câu 32. Xét khối chóp $S.ABC$ có thể tích V, G là trọng tâm của khối chóp. Mặt phẳng (α) đi qua G cắt các cạnh SA, SB, SC tương ứng tại A', B', C'. Gọi V' là thể tích của khối chóp $S.A'B'C'$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Nếu tam giác ABC vuông cân tại A, $AB=a$, $SA=a\sqrt{6}$ và $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90°$ thì khoảng cách từ A đến (SBC) bằng $\dfrac{2a}{3}$.	●	○
b	Nếu tam giác SBC và tam giác ABC là các tam giác đều và $SA=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BC$ thì số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$ bằng $30°$.	○	●
c	Nếu tam giác SBC và tam giác ABC là các tam giác đều có cạnh $BC=2a$ và nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì $V=3a^3$.	○	●
d	Nếu tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V'}{V}$ bằng phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$ $(a,b\in\mathbb{N}^*)$ thì $a+b=123$.	●	○

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\widehat{A'AB}=\widehat{A'AD}=\widehat{BAD}=60°$, $AA'=\dfrac{3}{2}AD=$

$3AB = 9$. Gọi G là trọng tâm tam giác $CB'D'$, I là trung điểm của đoạn BB'.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AA'}$.	●	○
b	$\overrightarrow{AA'} + 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{IG}$.	○	●
c	$2\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC'} = 81$.	●	○
d	$\left\|\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GD}\right\| = 3\sqrt{7}$.	○	●

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;2)$, $B(-3;0;2)$, mặt phẳng $(P)\colon x-y+z-4=0$ và các đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+2}{2}$, $\Delta_3\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$ và $\Delta_4\colon \begin{cases} x = -2+3t \\ y = 2-t \\ z = -3. \end{cases}$

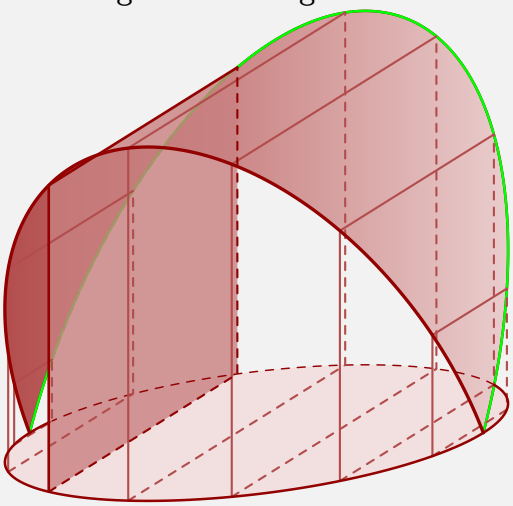
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Phương trình mặt cầu đường kính AB là $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2 = 5$.	○	●
b	Gọi D là điểm thay đổi trên (P) và E là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) . Chu vi tam giác ADE có giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{11}$.	●	○
c	Đường thẳng Δ cắt cả 4 đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta} = (3;2;2)$.	○	●
d	Nếu mặt phẳng (α) đi qua A cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại M, N, P sao cho tam giác MNP có trọng tâm là A thì phương trình của (α) là $2x+y+z-6=0$.	●	○

Câu 35. Khi thống kê 51 bài kiểm tra môn Toán của bạn X ta thu được bảng số liệu dưới đây và trong số đó chỉ có đúng 1 bài kiểm tra có điểm dưới 6,5.

Điểm	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)
Số bài	1	3	10	25	12

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Mốt của mẫu số liệu có kết quả làm tròn tới hàng phần trăm là 8,54.	●	○
b	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là 1,9.	○	●
c	Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu có kết quả được làm tròn tới hàng phần trăm là 0,82.	○	●
d	Điểm của bài kiểm tra dưới 6,5 điểm không phải là giá trị ngoại lệ.	○	●

Câu 36. Trả lời mệnh đề

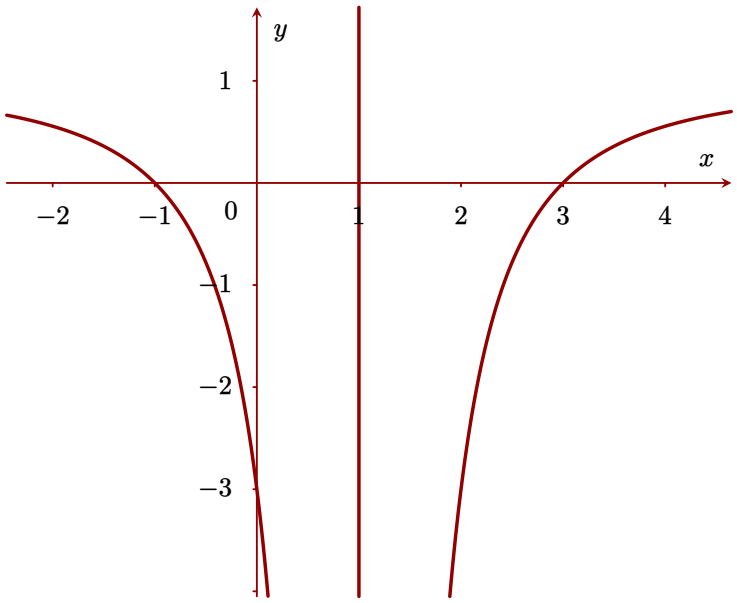
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Nếu $\int\limits_0^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = 24$ và $\int\limits_6^{10} 2f(x)\,\mathrm{d}x = -8$ thì $\int\limits_0^{6} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{10}^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = 32$.	○	●
b	Cho vật thể T có đáy là hình tròn bán kính bằng 3, các mặt phẳng vuông góc với mặt đáy cắt vật thể theo các thiết diện là những hình vuông. Thể tích của vật thể T bằng 144π (đvtt).  .	○	●
c	Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 5$ và $\int\limits_0^1 [f(x) + xf'(x)]^2\,\mathrm{d}x + 45 = 30\int\limits_0^1 \left[x^2 f(x) + x^3 f'(x)\right]\,\mathrm{d}x$ thì $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}$.	●	○
d	Nếu $F(x) = x\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{e^x}$ thì $f(x) = (1+\ln x)\,e^x$.	●	○

Câu 37. Chọn ngẫu nhiên 3 số nguyên dương khác nhau từ 2025 số nguyên dương đầu tiên

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Số cách chọn được 3 số tạo thành một cấp số nhân có công bội $q = 5$ là 81.	●	○
b	Số cách chọn được 3 số chia hết cho 3 là C_{674}^3.	○	●
c	Số cách chọn được 3 số lẻ là A_{1013}^3.	○	●
d	Xác suất chọn được 3 số không tạo thành một cấp số cộng là 0,9992588931.	●	○

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ (a, b, c, d là các hệ số thực) có đồ thị nhận đường

thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng và $\min\limits_{(-d;+\infty)} f(x)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ sau.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường thẳng có phương trình $y=x+4$.	○	●
b	Điểm cực đại của hàm số đã cho là $x=-1$ và điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x=3$.	●	○
c	Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.	○	●
d	Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai đường tiệm cận của nó một tam giác có chu vi nhỏ nhất bằng $8\sqrt[4]{2}+4\sqrt{2\sqrt{2}-2}$.	●	○

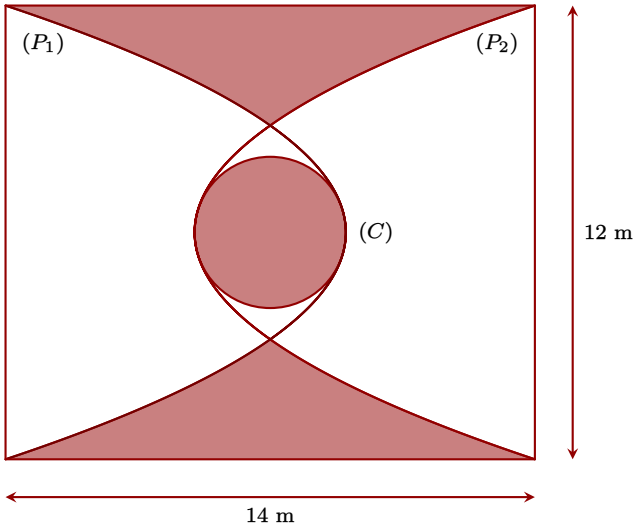
Câu 39. Độ sáng của một vật thể thì tỉ lệ thuận với cường độ của nguồn sáng và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ nguồn sáng đến vật thể. Cho hai nguồn sáng A và B đặt cách nhau 12 mét, nguồn sáng A có cường độ gấp 8 lần nguồn sáng B. Một vật thể M được đặt trên đoạn thẳng nối hai nguồn sáng sao cho vật thể có độ sáng là ít nhất. Tỉ số khoảng cách từ M đến hai nguồn sáng bằng bao nhiêu? (số bé chia số lớn).

KẾT QUẢ:

Câu 40. Một cột điện có chiều cao là h mét được dựng vuông góc với mặt đất. Sau khi cơn bão Yagi đi qua, cột điện bị nghiêng về phía nam một góc 30° so với vị trí ban đầu. Tại thời điểm mặt trời ở hướng đông với các tia nắng tạo với mặt đất một góc 30°, người ta nhận thấy bóng trên mặt đất của cột điện bị nghiêng có chiều dài bằng 18 mét. Giá trị của h bằng bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KẾT QUẢ:

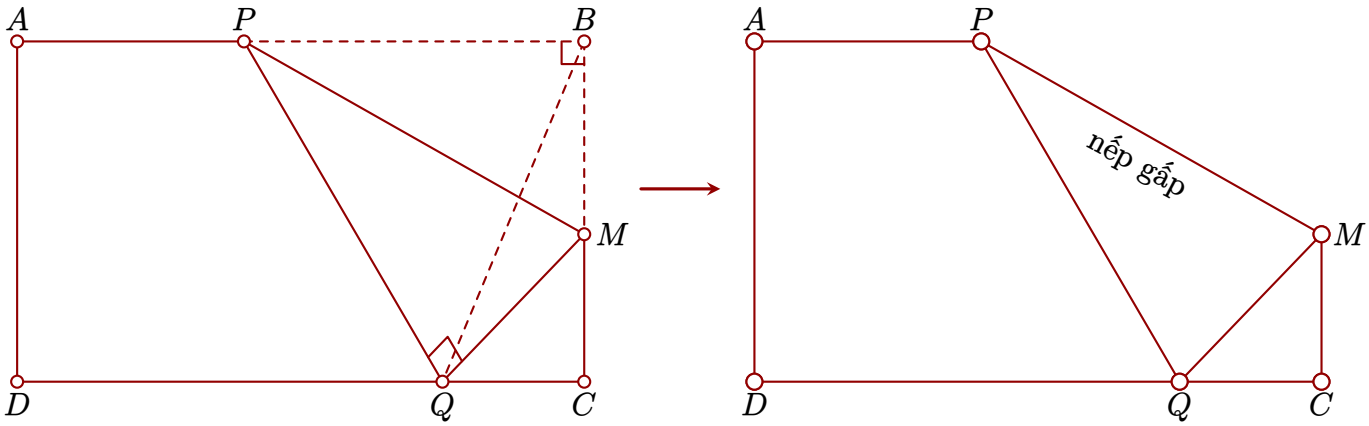
Câu 41. Người ta lát gạch trang trí một mảnh sân hình chữ nhật kích thước 28 m × 16 m như hình vẽ bên dưới, trong đó (P_1), (P_2) là hai parabol đối xứng trục với nhau qua trục đối xứng vuông góc với chiều dài của mảnh sân, (C) là đường tròn có tâm trùng với tâm của mảnh sân và lần lượt có duy nhất một điểm chung với các parabol tại các đỉnh của parabol đó (tham khảo hình vẽ).



Chi phí cho phần lát gạch là 240 nghìn đồng một mét vuông, phần không lát gạch để trồng cỏ với chi phí 100 nghìn đồng một mét vuông. Trong trường hợp hình tròn (C) có diện tích lớn nhất thì tổng chi phí lát gạch và trồng cỏ cho mảnh sân là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KẾT QUẢ:

Câu 42. Cho một tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 24$ cm và chiều rộng $BC = 16$ cm. Gấp tờ giấy một lần sao cho góc trên bên phải B của tờ giấy nằm trên cạnh dưới CD của nó (tham khảo hình vẽ).



Nếp gấp MP có độ dài ngắn nhất bằng bao nhiêu xăng-ti-mét? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KẾT QUẢ:

Câu 43. Hai bạn Thanh và Mai hẹn gặp nhau tại thư viện trường X trong khoảng thời gian từ 9 giờ 30 phút đến 10 giờ 30 phút. Người đến trước đợi quá 12 phút mà không gặp thì rời đi. Khi hai bạn đi ngẫu nhiên đến nơi hẹn theo quy định thì xác suất hai bạn gặp nhau tại thư viện trường X bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, tia Ox hướng về phía nam, tia Oy hướng về phía đông, tia Oz hướng thẳng đứng lên trời, mỗi đơn vị trên trục tọa độ tương ứng 1 m. Một chiếc flycam xuất phát từ gốc tọa độ, bay theo đường thẳng với mỗi giây bay nó cách điểm xuất phát 6 m về phía nam, 4 m về phía đông đồng thời tăng độ cao thêm 1 m so với mặt đất. Sau t giây kể từ lúc xuất phát, chiếc flycam bay tới vị trí điểm $M(a;b;c)$ để quan sát hai vật thể nằm ở hai vị trí $A(40;203;8)$ và $B(160;22;12)$ trong không gian. Khi góc quan sát tạo bởi hai tia MA và MB là lớn nhất thì giá trị $a+b+c+t$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

26 MINH HỌA SỞ BÀ RỊA VŨNG TÀU

Câu 1. Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu áo sơ mi nam (cổ tròn). Người điều tra yêu cầu cho điểm mẫu áo đó theo thang điểm là 100. Kết quả được trình bày trong bảng ghép nhóm sau

Nhóm	$[50;60)$	$[60;70)$	$[70;80)$	$[80;90)$	$[90;100)$	
Tần số	4	5	23	5	3	$N=40$

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị) có giá trị là

A 74. B 75. C 76. D 77.

Câu 2. Bên trong một bảng hiệu quảng cáo sữa cho trẻ em, người ta lắp đặt hai hệ thống bóng đèn. Hệ thống I gồm 2 bóng đèn mắc nối tiếp, hệ thống II gồm 2 bóng đèn mắc song song. Khả năng bị hỏng của mỗi bóng đèn sau 8 giờ thắp sáng liên tục là 0,15. Biết tình trạng của mỗi bóng đèn là độc lập. Xác suất (kết quả được làm tròn đến hàng phần nghìn) để cả hai hệ thống đều bị hỏng (không sáng) là bao nhiêu?

A $0,023$. B $0,978$. C $0,278$. D $0,006$.

Câu 3. Phương trình $\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A 3. B 4. C 1. D 2.

Câu 4. Cho các số thực x,y thoả mãn $5+16.4^{x^2-2y}=\left(5+4^{2x^2-4y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{10x+6y+26}{2x+2y+5}$. Tổng giá trị $M+m$ bằng:

A $\dfrac{19}{2}$. B $\dfrac{21}{2}$. C 10. D 15.

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Giá trị sin của góc nhị diện $[A',BD,A]$ bằng bao nhiêu?

A $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. B $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. C $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. D $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

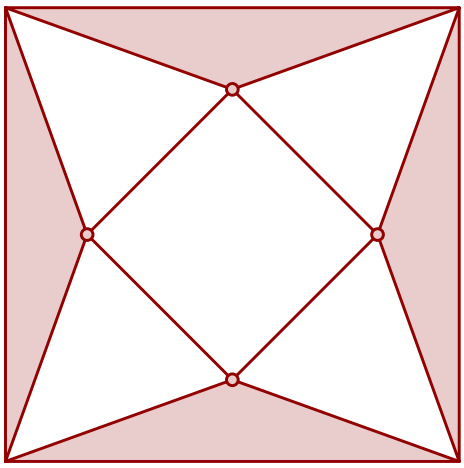
Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SE và BC bằng:

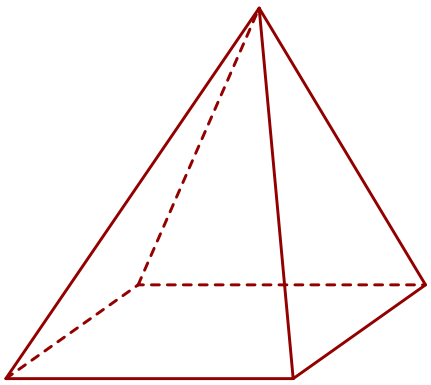
A $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. B $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C $\dfrac{a}{2}$. D $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 7. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi tại thời điểm $t=0\,(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t=126\,(s)$, cho bởi hàm số $v\,(t)=0,001302t^3-0,09029t^2+23$ (v được tính bằng ft/s và $1feet=0,3048m$, t được tính bằng giây). Gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng từ giây thứ bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị) tính từ thời điểm $t=0\,(s)$ cho đến khi tên lửa được phóng đi?

A 0. B 46. C 23. D 126.

Câu 8. Một tấm bạt hình vuông cạnh 20m như hình vẽ bên. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại, nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí để tránh hư hại tháp khi trời mưa. Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Phần diện tích tấm bạt bị cắt theo yêu cầu:



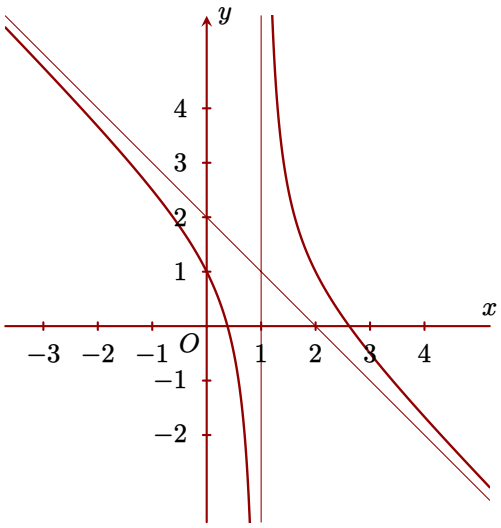


A $\dfrac{256\sqrt{10}}{3}$. B $8\sqrt{2}$. C 80. D 70.

Câu 9. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2+2x+2}$. Số đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là:

A 0. B 1. C 2. D 3.

Câu 10. Cho hàm số $y=ax+2+\dfrac{b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới:



Giá trị của $P=a+b+c$ bằng:

A 1. B -1. C 2. D -3.

Câu 11. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng:

A 120^0. B 60^0. C 135^0. D 45^0.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A\left(1;2;-1\right), B\left(2;-1;3\right), C\left(-4;7;5\right)$. Toạ độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là:

A $\left(\dfrac{11}{3};-2;1\right)$. B $(-2;11;1)$. C $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. D $\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};1\right)$.

Câu 13. Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần:
- Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ.

- Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ km/h thì chi phí nhiên liệu phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ. Gọi x (km/h) là vận tốc của đoàn tàu.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất trong thời gian tàu chạy trên quãng $1km$ là $\frac{480}{x}$ (nghìn đồng).	●	○
b	Tổng chi phí nhiên liệu cho tàu chạy trong 1 giờ là $C(x) = 480 + 0,03x^3$ (nghìn đồng).	●	○
c	Tổng chi phí nhiên liệu tàu chạy trên quãng $1km$ giảm khi vận tốc của tàu thuộc $(0; 30)$.	○	●
d	Tổng chi phí nhiên liệu để tàu chạy trên quãng $1km$ nhỏ nhất là 43 (nghìn đồng).	○	●

Câu 14. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3x - 8}{x - 2}$ (1) và đường tròn $(C) : (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Gọi I là tâm đường tròn (C).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.	●	○
b	Giá trị nhỏ nhất của hàm số (1) trên đoạn $[3; 5]$ bằng $7 + 2\sqrt{2}$.	●	○
c	Tổng khoảng cách từ điểm I đến hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng $\dfrac{10 + 3\sqrt{2}}{2}$.	○	●
d	Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cắt đường đường tròn (C) tại hai điểm M, N . Diện tích tứ giác $IMON$ bằng $\frac{14}{5}$ (với O là gốc toạ độ).	●	○

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $A'(0; 0; 3)$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm nằm trên cạnh BD, AD' sao cho $AN = DM$,

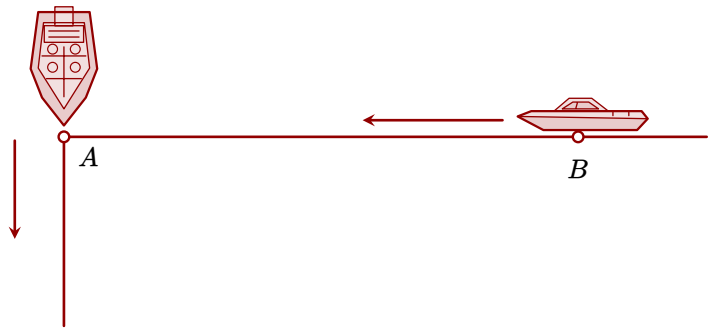
P là trung điểm của $B'C'$, K là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Trọng tâmcủa tam giác PDC có tọa độ là $\left(2;\frac{5}{2};1\right)$.	●	○
b	Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left\lvert\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right\rvert$ là $\frac{5}{2}$.	●	○
c	Góc giữa hai đường thẳng AP và BC' bằng $60°$.	○	●
d	Độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng $\sqrt{2}$.	○	●

Câu 16. Cho tập $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. Gọi S là tập các số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ A. Xác suất có dạng $\frac{a}{b}$. Hỏi $a+b$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

Câu 17. Ở trên biển, hai con tàu A và B đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 10 hải lí. Cả hai tàu đồng thời cùng khởi hành. Tàu A chạy về hướng Nam với vận tốc 8 hải lí/giờ, còn tàu B chạy về vị trí hiện tại của tàu A với vận tốc 6 hải lí/giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là ngắn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



KẾT QUẢ:

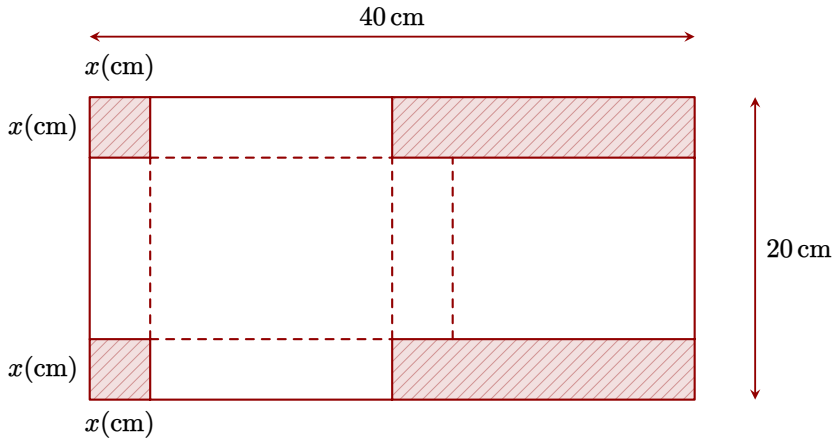
Câu 18. Bác Bình có một nông trại ao nuôi cá, mỗi ngày thu hoạch được 2 tấn cá. Nếu bán cho thương lái với giá 30 nghìn đồng/kg thì hết cá, nếu giá bán cứ tăng thêm 2 ngàn đồng/kg thì số cá thừa sẽ tăng thêm 10kg. Số các thừa này được bán để làm thức ăn cho động vật với giá 10 nghìn đồng/kg. Hỏi bác Bình phải bán với giá bao nhiêu nghìn đồng/kg để số tiền bán cá mỗi ngày đạt doanh thu nhiều nhất?

KẾT QUẢ:

Câu 19. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB = 1$, $AC = 2$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB, SC và α là góc tạo bởi đường thẳng SA với mặt phẳng (AMN) sao cho $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

KẾT QUẢ:

Câu 20. Để làm một cái hộp đựng quà tặng bạn nhân dịp sinh nhật, từ một tấm bìa hình chữ nhật với kích thước 40 cm × 20 cm, bạn Hoa cắt bỏ hai hình vuông có cạnh x cm và hai hình chữ nhật (phần gạch sọc như hình bên) rồi gấp theo đường nét đứt và dán các mép để được một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật. Hỏi bạn Hoa cần cắt bỏ cạnh hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) để phần không gian của hộp đựng nhiều quà nhất?



KẾT QUẢ:

Câu 21. Có bao nhiêu số nguyên $y \in [-2024; 2024]$ sao cho ứng với mỗi y , tồn tại số thực x thỏa mãn điều kiện $15\sqrt[3]{5y + 15.2^x} + 5y = 8^x$?

KẾT QUẢ:

Câu 22. Một công ty X sản xuất máy tính bảng dành cho học sinh bán được x máy mỗi tháng. Giá bán mỗi máy tính được cho bởi công thức $p(x) = 8600 - 10x$ (nghìn đồng). Chi phí để sản xuất mỗi máy là $c(x) = x^2 - 4x + 500 + \dfrac{1000}{x}$ (nghìn đồng). Hỏi công ty X phải bán bao nhiêu máy để đạt lợi nhuận cao nhất?

KẾT QUẢ:

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(0; 0; 4)$ và $N\left(\dfrac{3}{2}; 2; 6\right)$. Xét điểm $I(a; b; c)$ thay đổi sao cho IN luôn vuông góc với OM và diện tích tam giác IMO bằng 8. Khi độ dài đoạn IN đạt giá trị lớn nhất, giá trị $5a + 5b + c$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

27 SỞ BẮC GIANG

Câu 1. Cho các số thực a, b, c đều lớn hơn 1 thỏa mãn $\log^2_{\sqrt{a}} b + (\log_b c - 1) \cdot \log_b \sqrt{c} + \log_a \dfrac{c^3}{b} = 0$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{4}{\log_b a} + \log_b(bc)$ bằng

A 4. B 2. C 1. D 3.

Câu 2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AC = a\sqrt{3}$. Góc tạo bởi đường thẳng BC_1 và mặt phẳng (AA_1C_1C) bằng 30°, góc giữa đường thẳng BC_1 và mặt phẳng (ABC) bằng ϕ thỏa mãn $\sin\phi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh BB_1 và A_1C_1. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC_1 bằng

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. B $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. D $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 3. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (m-2)x + 3}{x - 1}$ có đường tiệm cận xiên cắt đường tròn $(C)\colon (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$ tại hai điểm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A 10. B 5. C 9. D 6.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Biết $AB = 1$, $AD = \sqrt{2}$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Côsin của góc phẳng nhị diện $[B, SC, D]$ bằng

A $-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. B $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. C $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. D $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Câu 5. Gọi S là diện tích giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C). Giá trị của S bằng

A $\dfrac{1}{2}$. B 8. C 1. D $\dfrac{1}{4}$.

Câu 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = 3$, $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. N là điểm thuộc cạnh A_1C_1 sao cho $B_1N \perp AM$. Tỉ số $\dfrac{A_1N}{A_1C_1}$ bằng

A $\dfrac{3}{5}$. B $\dfrac{7}{10}$. C $\dfrac{15}{22}$. D $\dfrac{13}{20}$.

Câu 7. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Số đo góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{SC}$ bằng

A 45°. B 120°. C 60°. D 135°.

Câu 8. Gọi A, B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 4$. Diện tích tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) bằng

A 4. B 8. C $\dfrac{9}{2}$. D 9.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như hình bên dưới.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(x^2-2x-m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$?

A 4. B 2. C 5. D 3.

Câu 10. Biết $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{e}^x\left(2+\sqrt{x}\mathrm{e}^x\right)}{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^b+c$, với a,b,c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $a+b-c$ bằng

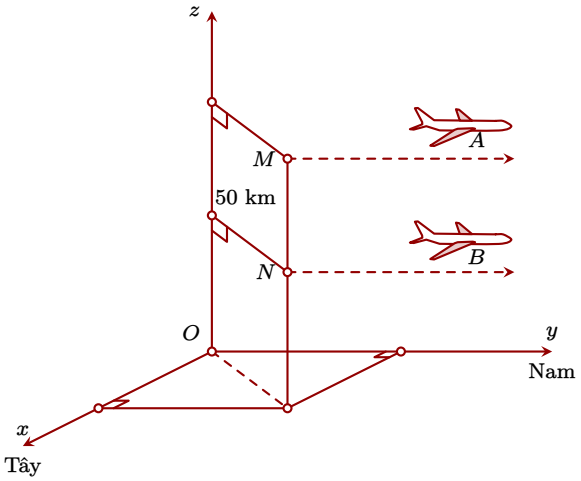
A 4. B 6. C 14. D -4.

Câu 11. Cho $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$. Biết $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ và $f'(x)\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}=1$. Giá trị $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ bằng

Điền đáp án: _____

A -4. B 8. C 0. D -8.

Câu 12. Để theo dõi hành trình của máy bay, người ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp kiểm soát không lưu ở sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam, trục Oz hướng thẳng đứng lên phía trên (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Từ vị trí điểm M, máy bay A duy trì hướng bay về phía nam với tốc độ 840 km/h. Sau thời điểm đó nửa giờ và ở vị trí điểm N có độ cao thấp hơn 50 km so với vị trí điểm M (giả sử N,M cùng hoành độ và tung độ), máy bay B cũng duy trì hướng bay về phía nam với tốc độ 960 km/h (tham khảo hình vẽ). Tìm thời gian máy bay B bay trong khoảng 5 giờ tính từ lúc máy bay B bay từ vị trí điểm N để khoảng cách giữa hai máy bay A và B là ngắn nhất.



A $2,5$ giờ. B 4 giờ. C $3,5$ giờ. D 3 giờ.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi E là giao điểm của CD_1 và C_1D. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

B $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

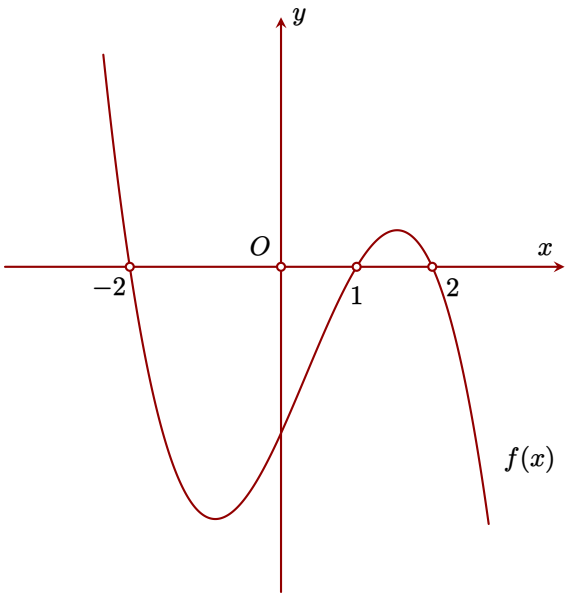
C $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

D $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

Câu 14. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương có 5 chữ số. Xác suất để chọn được số mà hai chữ số kề nhau luôn khác nhau.

A $0,3024$. B $0,5661$. C $0,6561$. D $0,3204$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2)=f(-2)=0$. Hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như hình bên. Hàm số $y=(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

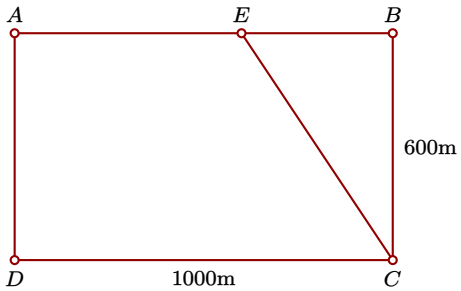


A $(2;3)$. B $(1;2)$. C $(-2;-1)$. D $(-1;1)$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x-2}{9^x+3}$. Biết rằng $f\left(\dfrac{1}{2024}\right)+f\left(\dfrac{2}{2024}\right)+f\left(\dfrac{3}{2024}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2023}{2024}\right)=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{N}^*$. Giá trị biểu thức $a+2b$ bằng

A 2025. B 2035. C 2036. D 2029.

Câu 17. Một vận động viên thể thao hai môn phối hợp luyện tập trong một khu vực hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng 600 m, chiều dài 1000 m. Vận động viên xuất phát từ A chạy thẳng đến điểm E với vận tốc 30 km/h và bơi thẳng đến C với vận tốc 6 km/h (tham khảo hình vẽ). Vận động viên đó đến C nhanh nhất khi độ dài đoạn AE bằng bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



A 878m. B 123m. C 877m. D 122m.

Câu 18. Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t)=12-2t$ m/s^2, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi ô tô đạt vận tốc lớn nhất bằng

A $144m$. B $120m$. C $60m$. D $36m$.

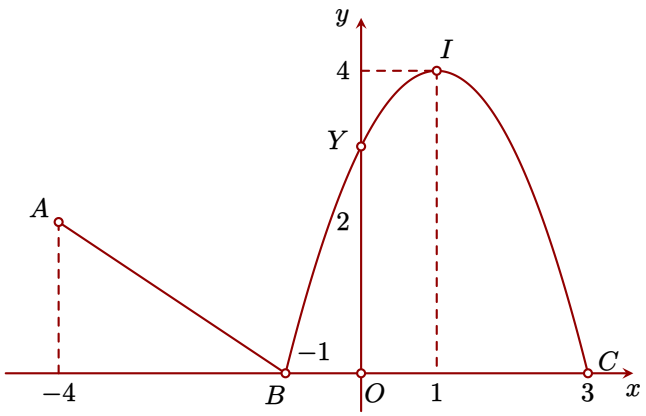
Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 1$, $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$ và $\widehat{SAB} = 60^\circ$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $\widehat{CAS} = 120^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. B $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. C $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. D $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 20. Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 [f(x)+2g(x)]\,\mathrm{d}x = 3$ và $\displaystyle\int_0^1 [2f(x)+5g(x)]\,\mathrm{d}x = 9$. Giá trị tích phân $\displaystyle\int_0^1 [3f(x)+g(x)-x]\,\mathrm{d}x$ bằng

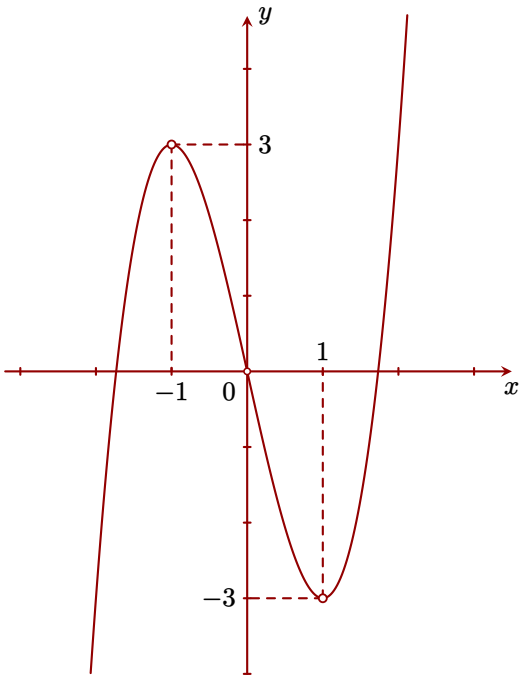
A $\dfrac{23}{2}$. B $\dfrac{-11}{2}$. C $\dfrac{-13}{2}$. D $\dfrac{13}{2}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;3]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$. Biết rằng đạo hàm $f'(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-4;3]$ gồm đoạn thẳng AB và một phần đường parabol có đỉnh $I(1;4)$, cắt trục hoành tại hai điểm B, C như hình vẽ bên dưới với $A(-4;2), B(-1;0)$ và $C(3;0)$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = -4$, $x = 3$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích phần hình phẳng (H) nằm phía trên và phía dưới trục hoành. Khi đó $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{11}{6}$.	○	●
b	$f(2) = \dfrac{20}{3}$.	○	●
c	$\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{161}{36}$.	●	○
d	$\displaystyle\int -4^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = 3$.	○	●

Câu 22. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{2}{3}\cos x\right)$ bằng 3.	○	●
b	Nếu $F(0)=0$ thì hàm số $y=\left\|F\left(x^4\right)-x^2\right\|$ có 5 điểm cực trị.	●	○
c	$f(3)=18$.	○	●
d	Hàm số $y=F\left(x^3+1\right)+\frac{3}{2}x^6+3x^3+2025$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.	●	○

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A\left(-2;3;1\right)$, $B\left(2;1;0\right)$, $C\left(-3;-1;1\right)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$.	○	●
b	Tam giác ABC có $\widehat{ABC}$ là góc nhọn.	●	○
c	Nếu $D(x_0;y_0;z_0)$ là điểm thỏa mãn tứ giác $ABCD$ là hình thang với đáy AD và diện tích bằng 3 lần diện tích tam giác ABC thì $3x_0-4y_0+z_0=-29$.	●	○
d	Cho điểm $E(1;1;1)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2+2ME^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $2a+b+c=\frac{8}{5}$.	○	●

Câu 24. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau và cách nhau 2 cm. Trên đường thẳng a lấy 7 điểm $P_1,P_2,\ldots,P_7$ sao cho $P_1P_2=P_2P_3=\cdots=P_6P_7=1$ cm; trên đường thẳng b lấy 6

điểm $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$ sao cho $Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = \cdots = Q_5Q_6 = 1$ cm. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ các điểm đã cho.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Xác suất để ba điểm được chọn có một điểm là trung điểm của đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là hai điểm còn lại bằng $\frac{13}{286}$.	○	●
b	Xác suất để chọn được ba điểm tạo thành tam giác có diện tích 1 cm 2 là $\frac{71}{286}$.	○	●
c	Xác suất để chọn được ba điểm tạo thành tam giác là $\frac{21}{26}$.	●	○
d	Số phần tử của không gian mẫu là 286.	●	○

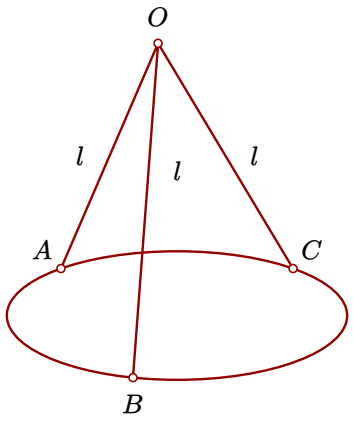
Câu 25. Các học sinh lớp 12E làm thí nghiệm gieo ba loại hạt giống A, B và C. Xác suất để ba loại hạt giống A, B và C nảy mầm lần lượt là a, b và 0,8 $(0 \leqslant a < b \leqslant 1)$. Biết rằng xác suất để ít nhất một trong ba loại hạt giống nảy mầm là 0,964 và xác suất để cả ba hạt giống nảy mầm là 0,224. Giả sử việc nảy mầm của các hạt giống A, B và C là độc lập với nhau. Xác suất để hạt giống A nảy mầm là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).**Điền đáp án:**

KẾT QUẢ:

Câu 26. Cho hai số dương x, y thoả mãn $2^y + y = 2x + \log_2\left(x + 2^{y-1}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y}$ là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KẾT QUẢ:

Câu 27. Một chiếc đèn hình tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn sao cho tam giác ABC đều. Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng l (tham khảo hình vẽ bên). Trọng lượng của chiếc đèn là 27 N và bán kính chiếc đèn là 0,5 m. Biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 12 N. Hỏi chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là bao nhiêu centimet? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

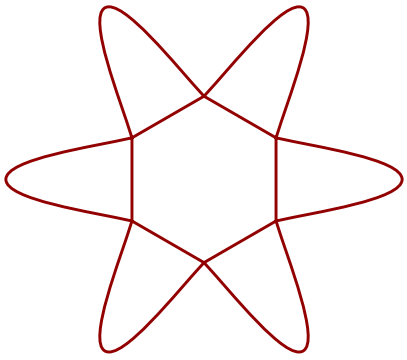


KẾT QUẢ:

Câu 28. Một công ty sản xuất và bán hết x sản phẩm $(0

KẾT QUẢ:

Câu 29. Để trang trí cho một phòng trong một toà nhà, người ta vẽ lên tường một hoa văn có hình như sau: trên mỗi cạnh của hình lục giác đều có cạnh bằng 4 dm có một cánh hoa hình parabol, đỉnh của parabol cách cạnh 3 dm và nằm phía ngoài hình lục giác, đường parabol đó đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh (tham khảo hình vẽ). Diện tích của hình hoa văn nói trên là bao nhiêu dm^2? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



KẾT QUẢ:

Câu 30. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m+3)x - 4$ có điểm cực đại thuộc trục hoành bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ:

Câu 31. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x + \cos x)^2 + \cos^2 x}{\sin 2x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Câu 32. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, hai mặt phẳng (B_1AB) và (B_1AC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (B_1CD) và $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng ϕ với $\tan\phi = 2$. Gọi M là trung điểm của CD.
1) Tính thể tích khối chóp $B_1.ABCM$ theo a.
2) Gọi E là trung điểm của B_1M và F thuộc đường thẳng DD_1 sao cho EF vuông góc với AC. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (AEM) và (AEF).

Câu 33. Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a + b + c - 4abc$.

28 SỞ PHÚ THỌ

Câu 1. Tại một lớp học chứng chỉ Tin học, nếu mức độ hoàn thành trung bình 5 bài kiểm tra của học viên lớn hơn hoặc bằng 85% thì học viên sẽ được giảm 30% học phí. An đã làm 4 bài kiểm tra với kết quả là 90%, 82%, 78%, 80%. Hỏi bài cuối cùng An cần đạt được ít nhất bao nhiêu phần trăm để được giảm 30% học phí?

A 94%. B 92%. C 95%. D 93%.

Câu 2. Thời gian tập thể dục của bạn Anh trong một ngày được thông kê trong 30 ngày và cho ở bảng sau (đơn vị là phút).

Thời gian	$[65;70)$	$[70;75)$	$[75;80)$	$[80;85)$	$[85;90)$
Số lần	4	2	9	10	5

Giá trị mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần chục) bằng

A $80,2$. B $80,8$. C 80. D $80,3$.

Câu 3. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin 2x\,(1+\cos x)=0$ trên $(\pi;3\pi)$ bằng

A 9π. B 10π. C 12π. D 6π.

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q>1$ có $u_2=-3$ và $u_1+u_2+u_3=-13$. Số hạng thứ mười của cấp số nhân đã cho bằng

A -19683. B 19683. C -26. D 28.

Câu 5. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\ln^2\left(x^2-2x+4\right)$ là:

A $f'(x)=\dfrac{4x-4}{x^2-2x+4}$. B $f'(x)=\dfrac{4x-4}{x^2-2x+4}\ln\left(x^2-2x+4\right)$.

C $f'(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-2x+4}\ln\left(x^2-2x+4\right)$. D $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x+4}\ln\left(x^2-2x+4\right)$.

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2024\sin(\pi+x)+\dfrac{2025}{\cos^2 x}$ là:

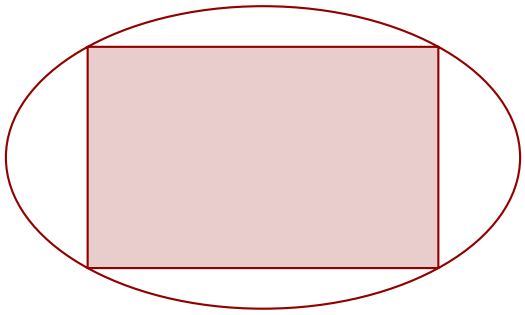
A $2024\cos x+2025\tan x+C$. B $-2024\cos x+2025\tan x+C$.

C $-2024\sin x-2025\tan x+C$. D $2024\sin x-2025\cot x+C$.

Câu 7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng d: $2x-y+1=0$ và hai điểm $A(-1;2)$, $B(4;0)$. Gọi C là điểm thuộc trục Oy sao cho trọng tâm của tam giác ABC thuộc đường thẳng d. Chu vi của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) bằng

A 19. B 18. C 20. D 17.

Câu 8. Bên trong một sân vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng $8m$, độ dài trục bé bằng $6m$, người ta rào thành một hình chữ nhật nội tiếp elip để trồng hoa, phần còn lại để trồng rau như hình vẽ.



Diện tích lớn nhất của phần trồng hoa bằng

A $48m^2$. B $12m^2$. C $24m^2$. D $6m^2$.

Câu 9. Vị trí một chất điểm N tại thời điểm t (t trong khoảng thời gian từ 0 đến 180 phút) có tọa độ là $(3+5\sin t^\circ; 4+5\cos t^\circ)$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm N khi N ở cách xa gốc tọa độ nhất. Giá trị x_0+y_0 bằng

A 2. B 48. C -2. D 14.

Câu 10. Có 3 học sinh nam và 7 học sinh nữ, trong các học sinh nữ có ba bạn Hồng, Huệ, Lan xếp thành một hàng ngang. Xác suất để mỗi bạn nam đều đứng giữa hai bạn nữ đồng thời ba bạn Hồng, Huệ, Lan luôn đứng cạnh nhau bằng

A $\frac{1}{250}$. B $\frac{1}{1260}$. C $\frac{1}{210}$. D $\frac{1}{201}$.

Câu 11. Ông giám đốc vườn thú mua 12 con vật nhốt vào 12 cái chuồng mới xây có kích thước khác nhau, trong đó có 3 chuồng không vừa với 6 con vật lớn nhất. Hỏi vị giám đốc có bao nhiêu cách nhốt 12 con vật, mỗi con trong một chuồng?

A 1. B 43545600. C 479001600. D 61200.

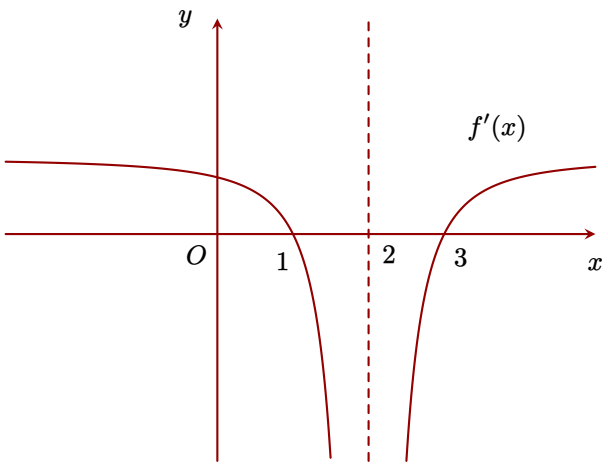
Câu 12. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'B=\sqrt{6}$, đường thẳng $A'B$ vuông góc với đường thẳng $B'C$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A $\frac{\sqrt{6}}{3}$. B $\sqrt{6}$. C $\frac{3}{4}$. D $\frac{9}{4}$.

Câu 13. Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 30 ghế, hàng thứ hai có 31 ghế, hàng thứ ba có 32 ghế,... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng ngay trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 71 100 000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé, biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

A 90000 đồng. B 100000 đồng. C 80000 đồng. D 110000 đồng.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Biết $f(0)=1$ và $\min\limits_{[-4;-3]} f(x)=\dfrac{k}{m}$ với $k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{N}$, $\dfrac{k}{m}$ tối giản. Khi đó $k-2m$ bằng

A 14. B -14. C -10. D 22.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2-ax}{bx-c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R},\ b\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	3	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	3

Tổng các số $a+b-c$ thuộc khoảng nào sau đây?

A $(-4;-2)$. B $(-2;0)$. C $(0;2)$. D $(2;4)$.

Câu 16. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+4m}}$ có đúng ba đường tiệm cận. Số phần tử của tập hợp S bằng

A 8. B 6. C 7. D 5.

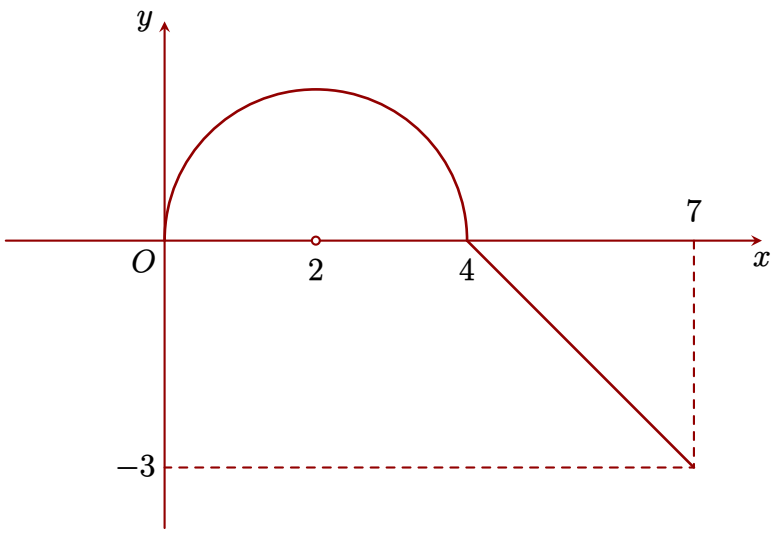
Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-5)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2+m)$ có đúng ba điểm cực trị bằng

A 4. B 5. C 3. D 6.

Câu 18. Bác Bình bơm nước vào một bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t phút. Biết rằng lưu lượng nước chảy vào bể tại thời điểm t phút là $h'(t)=3at^2+2bt$ (dm^3/phút) và ban đầu bể không có nước. Sau 2 phút thì thể tích nước trong bể là 16 dm^3, sau 5 phút thì thể tích nước trong bể là 175 dm^3. Thể tích nước trong bể sau khi bơm được 10 phút bằng

A 2000dm^3. B 2100dm^3. C 1000dm^3. D 1200dm^3.

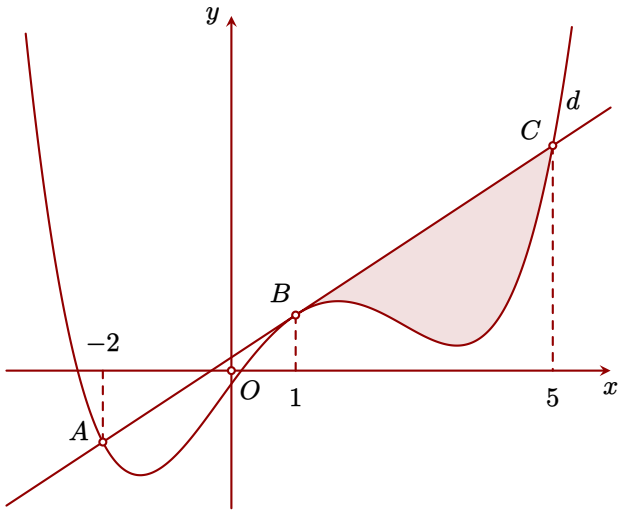
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn hàm $y=f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;7]$ và có đồ thị như hình vẽ:



Biết phần đường cong trong hình là nửa đường tròn tâm tọa độ $(2;0)$. Giá trị của biểu thức $f(7)-f(2)$ bằng

A $2\pi+\dfrac{9}{2}$. B $2\pi-\dfrac{9}{2}$. C $\pi+\dfrac{9}{2}$. D $\pi-\dfrac{9}{2}$.

Câu 20. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=kx+\dfrac{1}{4}$ như hình vẽ.



Biết $BC - AB = \dfrac{5}{4}$, diện tích hình phẳng phần gạch chéo bằng $\dfrac{24}{5}$. Giá trị của $\displaystyle\int_{-2}^{4} [24f(x) + x]\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{21}{20}$. B $\dfrac{126}{5}$. C $\dfrac{156}{5}$. D $\dfrac{846}{5}$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2;4]$ thỏa mãn $f(2) = \dfrac{5}{8}$ và $(x+3)f'(x) = f(x) - 3x^2 f^2(x)$ với mọi $x \in [2;4]$. Giá trị của $\displaystyle\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{17}{32}$. B $\dfrac{56}{3}$. C $-\dfrac{1}{32}$. D $-\dfrac{17}{32}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB, biết rằng SC tạo với đáy một góc 30°. Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{DH}$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A 152°. B 135°. C 125°. D 28°.

Câu 23. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm toạ độ điểm $D(x;y;z)$ sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC. Giá trị của $x+y+z$ bằng

A 10 .. B 11 .. C -10 .. D -11.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1)$ và $B\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{8}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. Biết tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB là $I(a;b;c)$. Giá trị của $a+2b+c$ bằng

A 2 .. B 3 .. C 4 .. D 1.

Câu 25. An và Bình chơi cờ. Trong một ván cờ, xác suất An thắng Bình là $0,2$ và xác suất Bình thắng An là $0,4$. Hai bạn dừng chơi khi có người thắng, người thua. Xác suất để hai bạn dừng chơi sau hai ván cờ bằng

A $0,4$. B $0,24$. C $0,6$. D $0,21$.

Câu 26. Trong một đợt hưởng ứng tiết kiệm điện của một khu dân cư gồm 45 hộ gia đình. Bác An trưởng khu thống kê số điện tiêu thụ (kwh) của khu dân đó cho ở bảng sau:

Số tiêu thụ điện (kwh)	$[150;170)$	$[170;190)$	$[190;210)$	$[210;230)$	$[230;250)$
Số hộ	8	15	11	7	4

Bác An muốn chọn ra 25% hộ gia đình để khen thưởng hộ gia đình dùng điện tiết kiệm, khi đó bác cần chọn những hộ gia đình có lượng điện tiêu thụ không vượt quá số điện (làm tròn đến hàng đơn vị) là

A $174kwh$. B $178kwh$. C $209kwh$. D $210kwh$.

Câu 27. Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi cơn sóng được cho bởi hàm số $h(t)=60\sin\left(\dfrac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng xăng-ti-mét. Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc thời gian $t=0$ giây), có hai thời điểm sóng đạt chiều cao lớn nhất là a giây và b giây (với $a,b\in\mathbb{N}$). Khi đó $a+b$ bằng

A 75. B 24. C 20. D 30.

Câu 28. Cho hàm số $y=\log x$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Đường tròn tâm $A\in Ox$ có duy nhất một điểm chung với (C) là điểm B thuộc đường thẳng $d: y-1=0$. Hoành độ điểm A nằm trong khoảng nào sau đây?

A $\left(10;\dfrac{21}{2}\right)$. B $\left(\dfrac{21}{2};11\right)$. C $\left(11;\dfrac{23}{2}\right)$. D $\left(\dfrac{23}{2};12\right)$.

Câu 29. Có bao nhiêu số nguyên $x\in(-2025;2025)$ sao cho tồn tại ít nhất 4 số nguyên dương y thỏa mãn: $3^{x+y}\leqslant 6^x-2$?

A 2025. B 2019. C 2017. D 2018.

Câu 30. Cho nửa đường tròn đường kính $AB=4$ và hai điểm C,D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ là

A $5\sqrt{5}$. B $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. C $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$. D $3\sqrt{3}$.

Câu 31. Cho quả bóng bầu dục được tạo ra bằng cách quay elip có độ dài trục lớn bằng 18 cm và trục bé bằng 10 cm quanh trục Ox.



Thể tích của quả bóng bằng

A $300\pi\text{cm}^3$. B $\dfrac{54500\pi}{243}\text{cm}^3$. C $\dfrac{54500}{243}\text{cm}^3$. D 300cm^3.

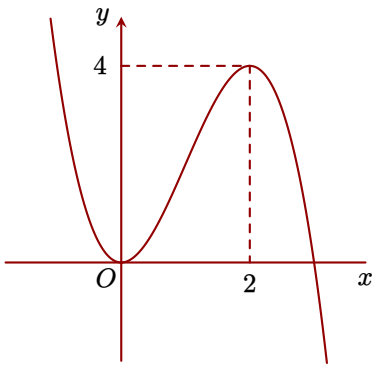
Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;-3;3)$, $B(-1;-3;3)$, $C(6;-1;-3)$. Điểm M di chuyển trên trục Ox. Giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$ bằng

A 6. B $6\sqrt{17}$. C $24\sqrt{17}$. D 24.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA=\sqrt{5}$, các cạnh còn lại bằng $\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, O là giao điểm của AC và BD.

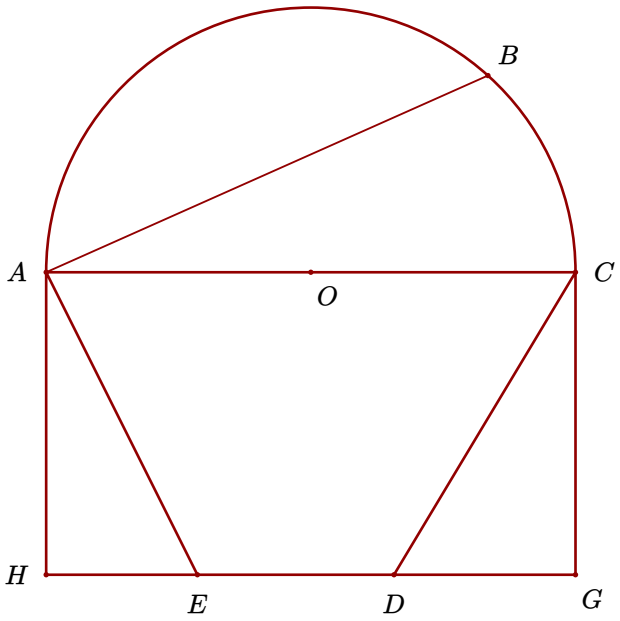
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$(SAC)\perp(SBD)$.	●	○
b	Thể tích của khối chóp $S.CDM$ bằng $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.	○	●
c	Gọi α là góc nhị diện $[B,SC,D]$. Giá trị $\sin\alpha=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$.	○	●
d	Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SM bằng $\dfrac{3\sqrt{345}}{23}$.	○	●

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số $h(x)=f\left(\sqrt{x^2-2}\right)+2025$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{11}\right)$ và $\left(\sqrt{2};\sqrt{11}\right)$.	●	○
b	Tích các điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)+2024$ bằng 3.	○	●
c	Hàm số $k(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3+9x-2025$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-5;5]$ bằng $f(3)-2007$.	●	○
d	Bất phương trình $f(x)-\left(\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+\log_{\frac{1}{2}}m\right)<0$ đúng với mọi $x\in(-2;0)$ khi và chỉ khi $0<m<2^{-f(0)}$.	○	●

Câu 35. 1) Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng $\Delta: 3x-y-3=0$.
2)Một khu đất trống bằng phẳng hình chữ nhật $ACGH$, bên cạnh là một hồ nước có dạng nửa hình tròn đường kính AC , như hình vẽ



Từ vị trí A, anh An chèo thuyền với vận tốc 5 km/h đến vị trí B trên bờ hồ. Sau đó, anh An chạy bộ theo bờ hồ đến vị trí C với vận tốc 7 km/h, rồi tiếp tục chạy bộ theo đường gấp khúc $CDEA$ để quay về vị trí A. Trong đó, vận tốc chạy bộ của anh An trên các đoạn CD và EA là 6 km/h, vận tốc chạy bộ trên đoạn DE là 10 km/h (D, E là hai vị trí bất kì trên đoạn GH). Thời gian ngắn nhất mà anh An di chuyển từ A theo lộ trình trên rồi quay trở về A là bao nhiêu phút (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị), biết các khoảng cách $AC = 1$ km, $AH = 0{,}6$ km và $BC = 0{,}5$ km?

Câu 36. Giải phương trình $(x+1)^2 - 2\sqrt{2x+1} + \log_2 \dfrac{x^2+2x+2}{\sqrt{2x+1}} = 0.$

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và $B, AD = 2AB = 2BC, CD = 2\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm M của cạnh CD. Tính khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAD đến mặt phẳng (SBM).

Câu 38. Cho mẫu số liệu có bảng số liệu sau:

Giá trị	$x-y$	$2x+y$	$4x+2y$	$5x+3y$	$17x-2y$
Tần số	14	$3x+2y$	$x+3y$	$5x-y$	8

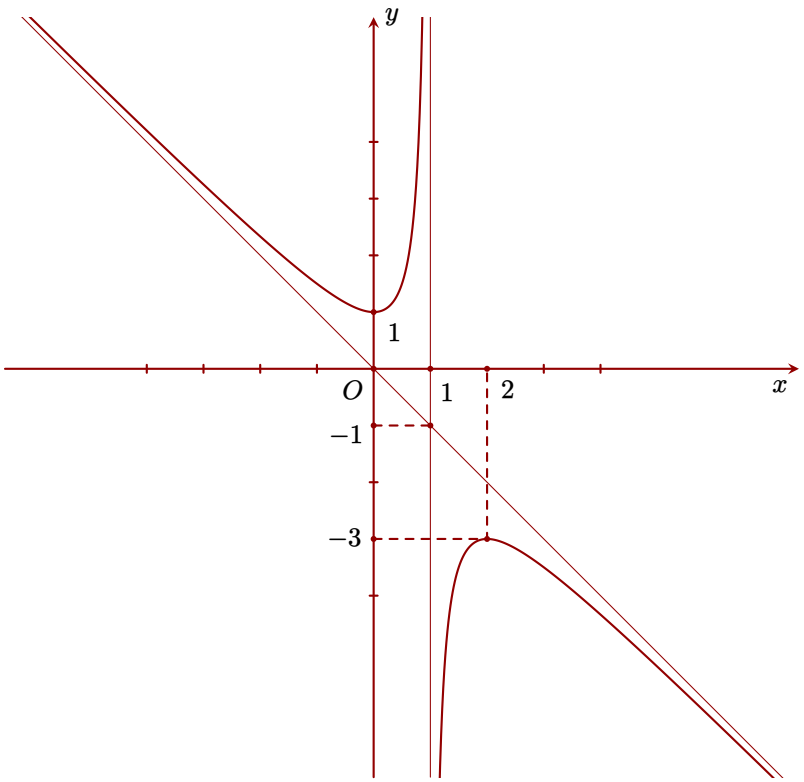
Với x, y là các số tự nhiên. Biết mẫu số liệu thống kê đã cho có mốt là ba giá trị khác nhau. Tính phương sai của mẫu số liệu đã cho (làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 39. Trong một trò chơi bạn Việt có 9 tấm bìa được đánh số từ 1 đến 9, bạn Nam có 8 tấm bìa được đánh số từ 1 đến 8, mỗi bạn chọn ra ba tấm bìa rồi sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để được một số gồm ba chữ số. Người thắng cuộc là người có số lớn hơn. Tính xác suất để Việt thắng Nam.

Câu 40. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' và CC' lần lượt là $\sqrt{3}$ và $\sqrt{5}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm H của $B'C'$ và $A'H = 2$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

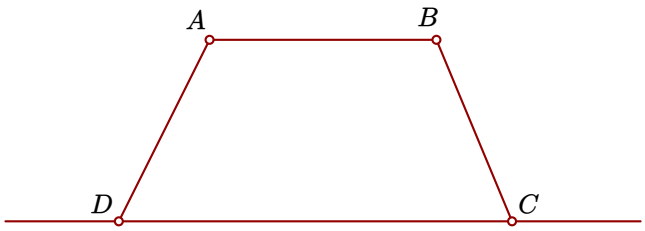
29 THAM KHẢO SỞ BẮC NINH

Câu 1. Đường cong cho trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



A $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$. B $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-1}$. C $y=\dfrac{x^2-x+1}{-x+1}$. D $y=\dfrac{-x^2-x+1}{x-1}$.

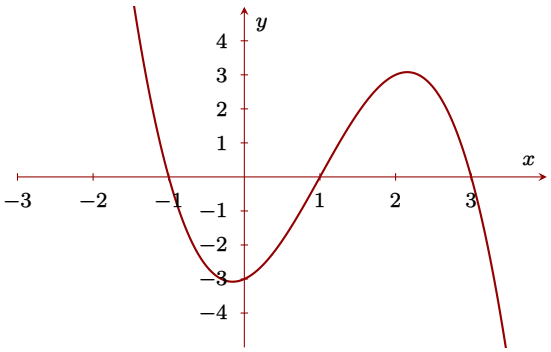
Câu 2. Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài 12 m và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng DC không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang).



Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2?

A $108\sqrt{2}$. B $100\sqrt{3}$. C $108\sqrt{3}$. D $100\sqrt{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1)=f(3)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình dưới đây.



Hàm số $g(x)=(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A $(-\infty;0)$. B $(-2;1)$. C $(1;\dfrac{5}{2})$. D $(2;4)$.

Câu 4. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$.

A $m=-1$. B $m=-7$. C $m=5$. D $m=1$.

Câu 5. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m^2x-m-1}{x+2}$ có tiệm cận đứng.

A $\mathbb{R}\setminus\{1;-3\}$. B $\mathbb{R}$. C $\mathbb{R}\setminus\left\{1;-\dfrac{2}{3}\right\}$. D $\mathbb{R}\setminus\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-9)(x^2-16)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x^3+7x|+m)$ có đúng 5 điểm cực trị.

A 10. B 9. C 8. D 7.

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x\left(2025-\dfrac{2024\mathrm{e}^{-x}}{x^5}\right)$.

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2025\mathrm{e}^x-\frac{2024}{x^4}+C$. B $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2025\mathrm{e}^x+\frac{2024}{x^4}+C$.

C $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=2025e^x+\frac{506}{x^4}+C$. D $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=2025e^x-\frac{506}{x^4}+C$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;6]$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=10$ và $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=6$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $P=4$. B $P=16$. C $P=8$. D $P=10$.

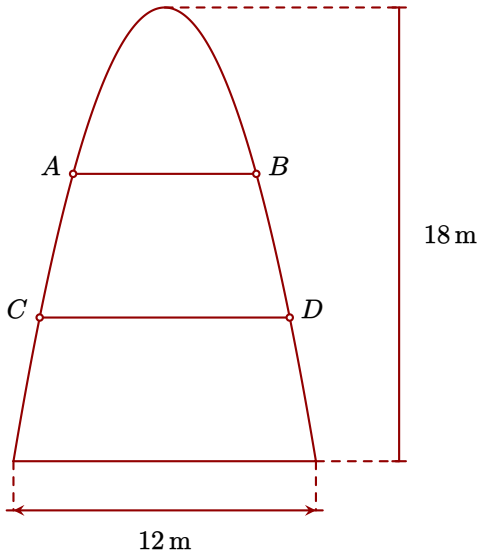
Câu 9. Một vật bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 6 giây thì vật gặp chướng ngại trên đường nên vật bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t)=-\dfrac{5}{2}t+a$ m/s $(t\geqslant 6)$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì vật đi được quãng đường là 80 m. Tìm v_0.

A $v_0=35$m/s. B $v_0=25$m/s. C $v_0=10$m/s. D $v_0=20$m/s.

Câu 10. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=4$, $x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A $V=\dfrac{7}{6}$. B $V=\dfrac{5\pi}{6}$. C $V=\dfrac{7\pi}{11}$. D $V=\dfrac{11\pi}{6}$.

Câu 11. Một cổng chào có dạng hình parabol, chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang, đồng thời chia hình phẳng giới hạn bởi parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ).



Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng

A $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. B $\dfrac{4}{5}$. C $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. D $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-6z-12=0$. Tâm của mặt cầu (S) có toạ độ là

A $(-2;0;3)$. B $(-2;3;0)$. C $(-4;0;6)$. D $(2;0;-3)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;5;2)$, $B(3;1;-2)$. Điểm M thuộc Δ sao cho tam giác MAB vuông tại M. Hoành độ của M bằng

A ± 1. B 1. C 0. D -1.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(0;3;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+z-4=0$. Gọi I là giao điểm của AB và (P). Tung độ của I bằng

A 2. B 1. C 0. D 3.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{3}$ và $\Delta'\colon \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z+1}{-1}$, đồng thời tiếp xúc với mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$?

A 2. B 1. C 0. D Vô số.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D(2;0;\sqrt{7})$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ thỏa mãn $MA^2+2MB\cdot MC=8$. Biết rằng đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

A $\sqrt{7}$. B $2\sqrt{7}$. C $3\sqrt{7}$. D $4\sqrt{7}$.

Câu 17. Thống kê điểm thi tốt nghiệp môn Toán THPT năm 2024 của lớp 12D tại một trường THPT thu được kết quả như sau:

Nhóm	$[4;5)$	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$	$[8;9)$	$[9;10]$
Tần số	2	5	10	15	10	5

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu thống kê trên bằng

A 13. B 6. C 7. D 10.

Câu 18. Thời gian truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là

A 18,2. B 18,1. C 18. D 18,3.

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'C$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A $\overrightarrow{AC'} = 3\overrightarrow{AG}$. B $\overrightarrow{AC'} = 4\overrightarrow{AG}$. C $\overrightarrow{BD'} = 4\overrightarrow{BG}$. D $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD'}$.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$, M là trung điểm của cạnh AB, G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{y}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{z}$. Phân tích $\overrightarrow{MG}$ theo các véc-tơ $\vec{x}$; $\vec{y}$; $\vec{z}$.

A $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{6}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}$. B $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{6}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}$.

C $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{6}\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}$. D $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{6}\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y} - \frac{1}{3}\vec{z}$.

Câu 21. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng 2. Gọi E, F, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, AD và điểm G là trực tâm của tam giác BCD. Giá trị $\cos\left(\overrightarrow{GE}; \overrightarrow{MF}\right)$ bằng

A 3. B $\frac{2}{3}$. C $\frac{3}{4}$. D $-\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Câu 22. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3^{-n} \end{cases}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính giới hạn $\lim u_n$.

A 3. B $\frac{2}{3}$. C $\frac{3}{4}$. D $\frac{3}{2}$.

Câu 23. Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $m \in (-3; 0)$. B $m \leqslant -3$. C $m \in [0; 5)$. D $m \in [5; +\infty)$.

Câu 24. Cho hàm số đa thức $f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-10}{x-1} = 5$. Giá trị $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-10}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{4f(x)+9}+3)}$ bằng

A 10. B $\frac{5}{3}$. C 1. D 2.

Câu 25. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kỳ hạn 12 tháng với lãi suất là 6%/năm. Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu năm? Biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

A 3 năm. B 4 năm. C 5 năm. D 6 năm.

Câu 26. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a = \log_2 5$ và $b = \log_3 5$. Giá trị của $\log_6 5$ bằng

A $\frac{ab}{a+b}$. B $\frac{a+b}{ab}$. C $\frac{1}{a+b}$. D $a+b$.

Câu 27. Một chiếc hộp có mười thẻ được đánh số từ 1 đến 10. Rút ngẫu nhiên hai thẻ rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Xét biến cố A: "Rút được một thẻ ghi số chẵn và một thẻ ghi số lẻ" và B: "Cả hai thẻ rút ra là thẻ chẵn". Khi đó $\mathrm{P}(A \cup B)$ bằng

A $\frac{8}{9}$. B $\frac{5}{9}$. C $\frac{2}{9}$. D $\frac{7}{9}$.

Câu 28. Một nhà máy sản xuất được hai lô hàng. Người ta lấy ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng một sản phẩm. Xác suất để lấy sản phẩm chất lượng tốt ở từng lô hàng lần lượt là 0,5 và 0,8. Xác suất để trong hai sản phẩm được lấy ra có đúng một sản phẩm có chất lượng tốt bằng

A $0,2$. B $0,5$. C $0,25$. D $0,6$.

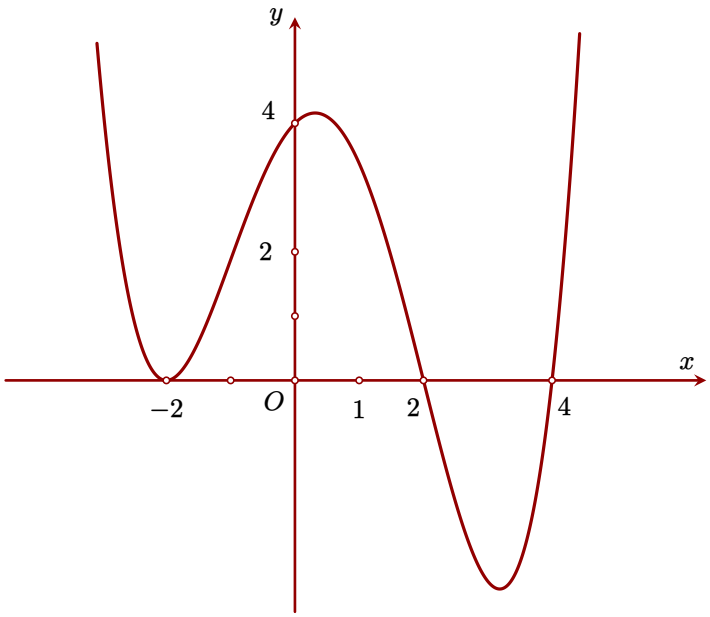
Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A 30^0. B 45^0. C 60^0. D 90^0.

Câu 30. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ biết BC' tạo với $(ABB'A')$ một góc 30^0 và $d(M,(BA'C')) = a\sqrt{\frac{6}{11}}$, với M là trung điểm AC. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được tính theo a là

A $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. B $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. C $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 31. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.	●	○
b	Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-4}{f'(x)}$ có một đường tiệm cận đứng.	○	●
c	Hàm số $h(x)=f(4\sin x)$ có 8 điểm cực trị thuộc khoảng $(-2\pi;2\pi)$.	●	○
d	Nếu $f(-2)=-\dfrac{19}{5}$; $f(0)=0$ thì có đúng 27 số nguyên dương của tham số m để phương trình $2^{f(x)}+f(x)=2m+\log_2\left(m+2^{f(x)-1}\right)$ có 3 nghiệm phân biệt.	○	●

Câu 32. Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+1$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4$ và $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=14$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$a+b=6$.	○	●
b	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là $\dfrac{4}{27}$ (đvdt).	●	○
c	Nếu $\displaystyle\int\frac{x^2}{f(x)}dx=mx+n\ln\lvert x+1\rvert+p\ln\lvert 3x+1\rvert+C$ với m,n,p là các số hữu tỉ thì $6m+3n+9p=1$.	●	○
d	Cho hàm số $y=g(x)$ thỏa mãn $[g'(x)]^2+g(x).g''(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$ và $g(0)=g'(0)=2$ thì $g^2(2)=\dfrac{128}{3}$.	○	●

Câu 33. Bảng sau biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của hai công ty A và B (đơn vị: triệu đồng).

Nhóm	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$
Số người công ty A	28	15	20	20	8	9
Số người công ty B	30	18	18	13	12	9

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm của công ty A là 22,1.	●	○
b	Trung vị của mẫu số liệu của công ty B là 22,5.	○	●
c	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu của công ty A (làm tròn đến hàng phần trăm) là 13,54.	●	○
d	Sử dụng độ lệch chuẩn để đánh giá mức độ phân tán ta thấy mức lương của công ty A đều hơn mức lương của công ty B.	●	○

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng 1, $\widehat{BAD} = \widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 60^\circ$. Gọi P, Q là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{D'A}$, $\overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{DC'}$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	$\left\lvert \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right\rvert = \sqrt{6}$.	●	○
b	$\overrightarrow{MP} = \frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.	○	●
c	Đường thẳng PQ đi qua trung điểm của cạnh BB'.	●	○
d	Độ dài đoạn $PQ = 4\sqrt{2}$.	○	●

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(6;2;-1)$, $B(-2;-6;3)$ và $C(2;-2;1)$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$.	●	○
b	Phương trình mặt cầu (S) là $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 31 = 0$.	○	●
c	Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và cách gốc O một khoảng bằng $\frac{4}{3}$. Mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại E và cắt tia Oy tại F. Khi đó $EF = 2\sqrt{3}$.	○	●
d	Lấy hai điểm M, N thay đổi sao cho tam giác MAB vuông tại M, $MN = 5$ và $MC = NC$. Khi đó, giá trị lớn nhất của $2OM^2 - ON^2$ là $45 + 6\sqrt{86}$.	●	○

Câu 36. Cho hàm số $f(x)=\log_2\left(x^2-5x-6\right)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Đạo hàm của hàm số là $f'(x)=\dfrac{2x-5}{(x^2-5x+6)\log 2}$.	○	●
b	Tập nghiệm của bất phương trình $f(x)\leqslant 3$ có dạng $S=[a;b)\cup(c;d]$. Khi đó, $4a+3b+2c+d=10$.	○	●
c	Tập xác định của hàm số $y=f(\ln(x))$ có dạng $D=(0;e^a)\cup(e^b;+\infty)$. Khi đó, $6a+b=0$.	●	○
d	Có 5 giá trị nguyên dương của tham số $m\in[-5;5]$ để phương trình $f(2^x)=m$ có nghiệm.	●	○

Câu 37. Có 10 học sinh gồm 2 học sinh khối 10 , 3 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 12.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Số cách chọn một học sinh trong số học sinh trên là 10.	●	○
b	Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh trên thành một hàng có 9! cách.	○	●
c	Số cách chọn 3 học sinh đủ cả ba khối là 30.	●	○
d	Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh trên thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng khối đứng canh nhau bằng $\dfrac{11}{315}$.	○	●

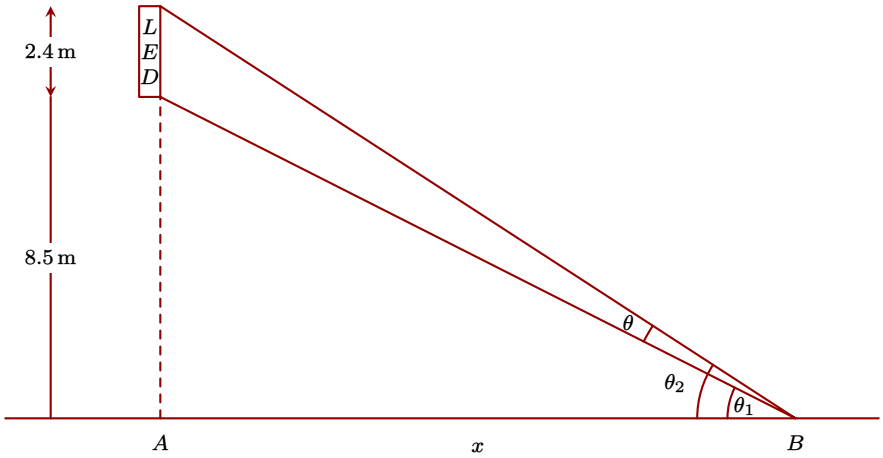
Câu 38. Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$ cạnh a.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a	Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng $a\sqrt{2}$.	○	●
b	Góc giữa hai đường thẳng BC' và CD' bằng $90°$.	○	●
c	Khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'D$ và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.	●	○
d	Số đo của góc nhị diện $[A,CD,B']$ bằng $45°$.	○	●

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$. Biết phương trình $|f(x)|=22$ có 6 nghiệm là $3,6,9,15,18,21$. Giá trị của $|d|$ là bao nhiêu?

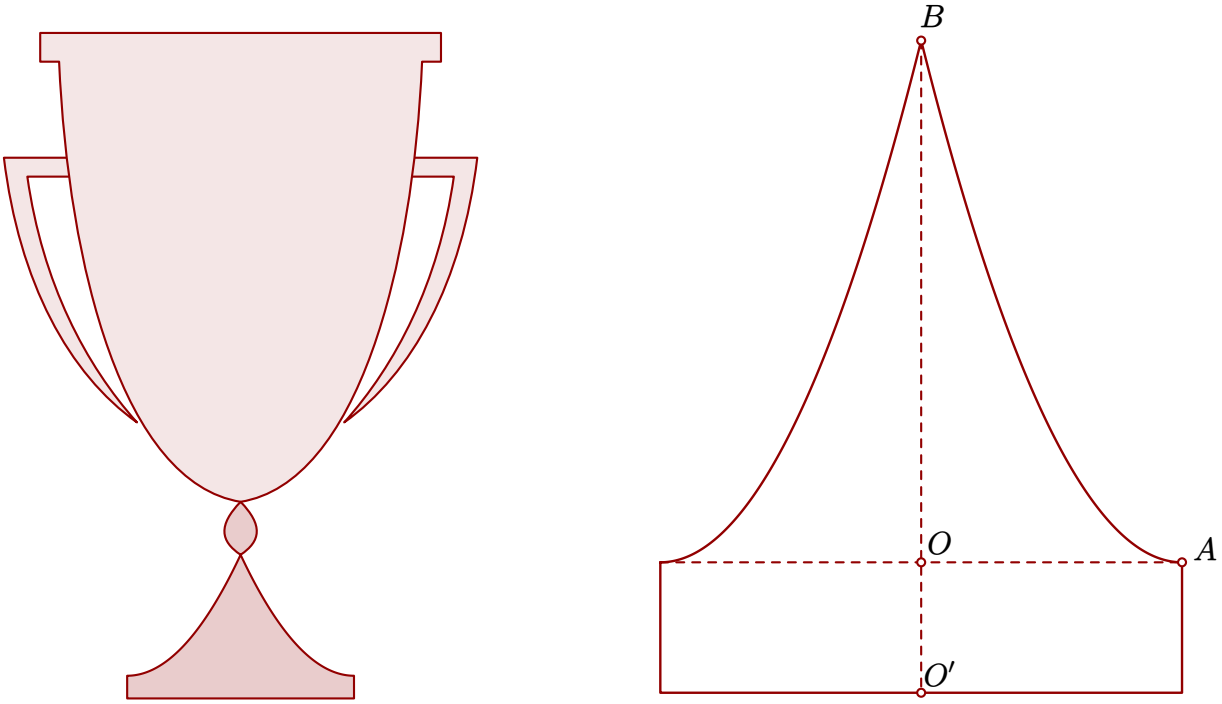
KẾT QUẢ:

Câu 40. Màn hình LED là màn hình điện tử cỡ lớn đặt thẳng đứng tại một sân vận động, cao 2,4 m, cạnh thấp nhất nằm phía trên tầm mắt của khán giả A ngồi dưới nó là 8,5 m. Một khán giả B có góc quan sát màn hình LED là thuận lợi nhất khi góc đối diện với màn hình LED là cực đại, khi đó khoảng cách giữa hai khán giả A và B là bao nhiêu?



KẾT QUẢ:

Câu 41. Để làm chân cho một chiếc cúp, người ta sử dụng vật liệu bằng nhôm. Chân chiếc cúp có dạng một khối tròn xoay và được đúc đặc ruột. Mặt cắt qua trục của chân cúp cho như hình. Biết rằng $OO' = 5cm, OA = 10cm, OB = 20cm$, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A . Biết tại thời điểm chế tạo chân cúp đó, giá nhôm là 25 nghìn đồng/kg. Và cứ 1 m^3 nhôm thì nặng 2700kg. Tính giá tiền để sản xuất chân chiếc cúp trên? (đơn vị: nghìn đồng và làm tròn số tiền đến hàng đơn vị).



KẾT QUẢ:

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), tại vị trí $B(-1;2;4)$ đang là tâm của một cơn bão nhỏ. Một vật thể chuyển động trên đường thẳng đi qua điểm $A(1;4;2)$ đến một điểm M nào đó trên đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$. Xác định tổng các thành phần tọa độ của điểm M sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng AM là lớn nhất.

KẾT QUẢ:

Câu 43. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh 2. Mặt bên $BB'C'C$ là hình thoi và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa CC' và $(ABB'A')$ bằng $\dfrac{2\sqrt{12}}{5}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KẾT QUẢ:

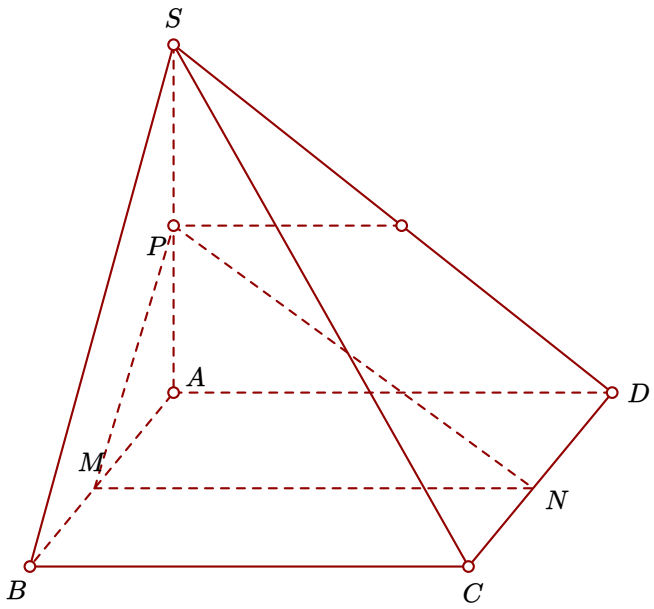
Câu 44. Với mỗi bộ số thực $(a_1;a_2;\ldots;a_{12};b_1;b_2;\ldots;b_{12};c_1;c_2;\ldots;c_{12})$ thỏa mãn $a_k^2+b_k^2\neq 0$, $\forall k=1,2,\ldots,12$ xét tất cả các hệ bất phương trình hai ẩn x,y mà mỗi hệ bất phương trình gồm 12 bất phương trình, trong đó bất phương trình thứ k $(k=1,2,\ldots,12)$ trong hệ có dạng $a_kx+b_ky>c_k$ hoặc $a_kx+b_ky<c_k$. Trong các hệ bất phương trình đó, có bao nhiêu hệ bất phương trình vô nghiệm?

KẾT QUẢ:

Hướng dẫn giải

Đề chọn HSG Liên Trường Nghệ An

Câu 1. Chọn đáp án D



Ta có mặt phẳng (SAD) và (PMN) có điểm chung là P mà $AD \parallel MN$ nên giao tuyến của (SAD) và (PMN) là đường thẳng đi qua P và song song với AD hay song song với BC.

Câu 2. Chọn đáp án B

Ta có độ chênh lệch nhiệt độ giữa con gà tây và căn phòng lúc đầu là $D_0 = 195°\text{F} - 65°\text{F} = 130°\text{F}$.
$T_s = 65°\text{F}$.
$T(t) = T_s + D_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt} = 65 + 130 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$.
Ta có $T\left(\frac{1}{2}\right) = 150°\text{F} \Leftrightarrow 65 + 130 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{2}} = 150 \Leftrightarrow k = -2\ln\dfrac{85}{130} = -2\ln\dfrac{17}{26}$.
Tính $T(1) = 65 + 130 \cdot \mathrm{e}^{-k} = 65 + 130 \cdot \left(\dfrac{17}{26}\right)^2 \approx 120{,}6°\text{F}$ gần nhất với giá trị $121°\text{F}$.

Câu 3. Chọn đáp án D

Gọi A là biến cố chọn được 4 bi có các số ghi trên bi tạo thành một cấp số cộng.
Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{25}^4 = 12650$.
Giả sử bốn số chọn được tạo thành một cấp số cộng có số hạng đầu là u_1 (là số nhỏ nhất) và công sai $d > 0, d \in \mathbb{N}$, khi đó số lớn nhất trong bốn số là $u_1 + 3d$.
Mà $u_1 + 3d \leqslant 25 \Leftrightarrow d \leqslant \dfrac{25 - u_1}{3}$. Ta có các trường hợp:
Trường hợp 1:
$u_1 \in \{1\} \Rightarrow d \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.
Suy ra có $1 \cdot 8 = 8$ cách chọn.
Trường hợp 2:
$u_1 \in \{2; 3; 4\} \Rightarrow d \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.
Suy ra có $3 \cdot 7 = 21$ cách chọn.
Trường hợp 3:
$u_1 \in \{5; 6; 7\} \Rightarrow d \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Suy ra có $3 \cdot 6 = 18$ cách chọn.
Trường hợp 4:
$u_1 \in \{8; 9; 10\} \Rightarrow d \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Suy ra có $3 \cdot 5 = 15$ cách chọn.
Trường hợp 5:
$u_1 \in \{11; 12; 13\} \Rightarrow d \in \{1; 2; 3; 4\}$.
Suy ra có $3 \cdot 4 = 12$ cách chọn.
Trường hợp 6:
$u_1 \in \{14; 15; 16\} \Rightarrow d \in \{1; 2; 3\}$.
Suy ra có $3 \cdot 3 = 9$ cách chọn.
Trường hợp 7:
$u_1 \in \{17; 18; 19\} \Rightarrow d \in \{1; 2\}$.
Suy ra có $3 \cdot 2 = 6$ cách chọn.
Trường hợp 8:
$u_1 \in \{20; 21; 22\} \Rightarrow d \in \{1\}$.
Suy ra có $3 \cdot 1 = 3$ cách chọn.
Ta có $n(A) = 8 + 21 + 18 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3 = 8 + 3(7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 92$.
Khi đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{92}{12650} = \dfrac{2}{275}$.

Câu 4. Chọn đáp án B
Đặt $AM = x$ m $(0 < x < 24)$.
Suy ra $BM = AB - AM = 24 - x$ m.
Áp dụng định lí Pythagore ta tính được
$CM = \sqrt{AC^2 + AM^2} = \sqrt{10^2 + x^2}$ m;
$DM = \sqrt{BD^2 + BM^2} = \sqrt{30^2 + (24 - x)^2}$ m.
Tổng khoảng cách từ hai vị trí A, B đến vị trí M là
$CM + DM = \sqrt{10^2 + x^2} + \sqrt{30^2 + (24 - x)^2}$ m.
Xét hàm số $f(x) = \sqrt{10^2 + x^2} + \sqrt{30^2 + (24 - x)^2}$ với $x \in (0; 24)$.
Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{10^2 + x^2}} + \dfrac{x - 24}{\sqrt{30^2 + (24 - x)^2}}$.
Cách 1:
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{10^2 + x^2}} = \dfrac{24 - x}{\sqrt{30^2 + (24 - x)^2}}$
Với $x \in (0; 24)$, phương trình tương đương
$$\left(\frac{x}{\sqrt{10^2 + x^2}}\right)^2 = \left(\frac{24 - x}{\sqrt{30^2 + (24 - x)^2}}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{10^2 + x^2} = \frac{(24 - x)^2}{30^2 + (24 - x)^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2\left[30^2 + (24 - x)^2\right] = (24 - x)^2\left(10^2 + x^2\right)$$
$$\Leftrightarrow 30^2x^2 = 10^2(24 - x)^2$$
$$\Leftrightarrow 9x^2 = (24 - x)^2$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 6 & \text{(thỏa mãn)} \\ x = -12 & \text{(loại).} \end{bmatrix}$$
Cách 2: Trên khoảng $(0; 24)$, sử dụng máy tính cầm tay giải phương trình $f'(x) = 0$, ta được $x = 6$.
Ta có $f'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{10^2 + 1^2}} + \dfrac{1 - 24}{\sqrt{30^2 + (24 - 1)^2}} < 0$; $f'(7) = \dfrac{7}{\sqrt{10^2 + 7^2}} + \dfrac{7 - 24}{\sqrt{30^2 + (24 - 7)^2}} > 0$, khi đó ta có

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0		6		24
y'		$-$	0	$+$	
y	$10+6\sqrt{41}$	$\searrow$	$8\sqrt{34}$	$\nearrow$	56

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $8\sqrt{34}$ tại $x=6$.
Vậy phải đặt chốt ở vị trí sao cho $AM=6$ m, $BM=18$ m để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất.

Câu 5. Chọn đáp án A

Ta có $S_{ABCDE}=S_{BCDE}+S_{ABE}=4{,}3\cdot 4+\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=21{,}2$ m^2.
$V_{\text{nhà}}=S_{ABCDE}\cdot h=21{,}2\cdot 12=254{,}4$ m^3.

Câu 6. Chọn đáp án D

Tại vị trí cân bằng thì $x=1{,}5\cos\left(\dfrac{t\pi}{4}\right)=0$.
Khi đó ta có
$1{,}5\cos\left(\dfrac{t\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow\cos\left(\dfrac{t\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{t\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow t=2+4k;$
Trong khoảng thời gian từ 0 đến 20 giây thì $t\in[0;20]$, suy ra $0\leqslant 2+4k\leqslant 20\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}\leqslant k\leqslant\dfrac{9}{2}$;
Vì $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0;1;2;3;4\}$.
Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng 5 lần.

Câu 7. Chọn đáp án B
Ta có bảng phân bố tần số tích lũy

Thời gian (phút)	$[0;20)$	$[20;40)$	$[40;60)$	$[60;80)$	$[80;100)$
Tần số	5	9	12	10	6
Tần số tích lũy	5	14	26	36	42

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là
Nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $11,5$ là nhóm 2 .
Vậy $Q_1=20+\dfrac{11,5-5}{9}20=34,4$ .Vậy nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm số 2.

Câu 8. Chọn đáp án D
Chọn 21 bạn đứng hàng trước trong đó có bạn Việt là C_{44}^{20}.
Còn lại 24 bạn xếp hàng sau.
Vì bạn Việt đứng chính giữa nên ta có 20! cách xếp 20 bạn này ở hàng trước.
Trong 24 bạn đứng hàng sau ta có 24! cách.
Vậy số cách xếp là $C_{44}^{20}\cdot 20!\cdot 24!=A_{44}^{20}\cdot 24!$.

Câu 9. Chọn đáp án B
Ngày 1 Aladin có 3 điều ước khác nhau.
Ngày 2 Aladin có $3 \cdot 2 - 1 = 5$ điều ước khác nhau.
Ngày 3 Aladin có $3 \cdot 2^2 - 1 = 11$ điều ước khác nhau.
Ngày 4 Aladin có $3 \cdot 2^3 - 1 = 23$ điều ước khác nhau.
Ngày 5 Aladin có $3 \cdot 2^4 - 1 = 47$ điều ước khác nhau.
Vậy sau 5 ngày gặp bút thần Aladin có tất cả $3 + 5 + 11 + 23 + 47 = 89$ điều ước khác nhau.

Câu 10. Chọn đáp án C
Ta có $y' = 2xf'\left(x^2\right)$.
$y' = 0 \Leftrightarrow 2xf'\left(x^2\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -1 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

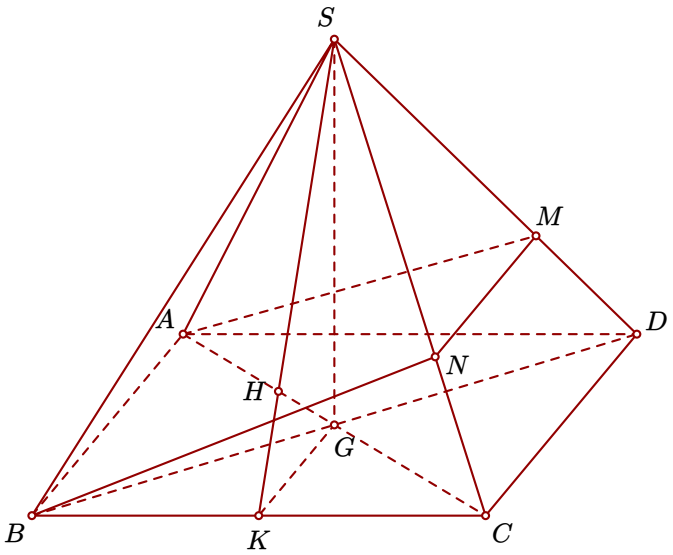
Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 11. Chọn đáp án D
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Với $x > 0$, hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.
Với $x < 0$, hàm số $f(x) = 2x^2 + 3m + 1$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$.
Tại $x = 0$, ta có $f(0) = 3m + 1$.
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \dfrac{1}{2}$.
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x^2 + 3m + 1) = 3m + 1$.
Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 3m + 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{6}$.
Vậy $m = -\dfrac{1}{6}$.

Câu 12. Chọn đáp án C
Ta có $AB = AC = 28$ cm, $BC = 50$ cm.

Độ mở của laptop là góc $\widehat{BAC}$.
Áp dụng định lý cô-sin trong tam giác ABC, ta có
$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{28^2 + 28^2 - 50^2}{2 \cdot 28 \cdot 28} = -\dfrac{233}{392} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 126{,}47^\circ.$

Câu 13. Chọn đáp án: a b c d



a) $\begin{cases} AB \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (SCD).$
b) Ba mặt phẳng (SCD), $(ABNM)$, $(ABCD)$ lần lượt cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt AB, CD, MN mà $AB \parallel CD$ nên $MN \parallel CD \Rightarrow \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{2}{3}.$
$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = 768.$
$\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABM} = \dfrac{1}{3} V_{S.ABCD} = 256.$
$\dfrac{V_{S.BMN}}{V_{S.BDC}} = \dfrac{SM}{SD} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow V_{S.BMN} = \dfrac{4}{9} V_{S.BCD} = \dfrac{2}{9} V_{S.ABCD} = \dfrac{512}{3}.$
$V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.BMN} = \dfrac{1280}{3} \approx 426{,}67.$
c) Gọi K là trung điểm của BC.
Ta có $[S, BC, D] = (KS, KO)$; $OK = \dfrac{CD}{2} = 6.$
Trong tam giác vuông SOK, có $\tan\widehat{SKO} = \dfrac{8}{3} \Rightarrow \widehat{SKO} \approx 69^\circ 26'.$
d) Kẻ $OH \perp SK \Rightarrow \mathrm{d}(AD, (SBC)) = 2\mathrm{d}(O, (SBC)) = 2 \cdot OH.$
Trong tam giác vuông SOK, có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{73}{2304} \Rightarrow OH = \dfrac{48\sqrt{73}}{73}.$

Câu 14. Chọn đáp án: a b c d

a) Danh sách giải đáp của các khách mời, theo thứ tự từ đầu đến cuối có thể là X, P, N, Q, P, Q, Y.
- Điều kiện 4: Nếu N giải đáp ít nhất một câu thì M cũng phải giải đáp ít nhất một câu. Trong danh sách này, N có giải đáp một câu (câu thứ ba), nhưng M không giải đáp câu nào, điều này mâu thuẫn với điều kiện 4.
- Suy ra mệnh đề sai vì mâu thuẫn với điều kiện số 4.
b) Nếu N giải đáp hai câu thì P giải đáp câu thứ hai.

- Theo điều kiện 3, Q phải giải đáp 2 câu và Y phải giải đáp sau khi Q đã giải đáp xong. Vậy trình tự Q và Y luôn là Q, Y, Q, Y.
- Khi xét các trường hợp Y đứng cuối và Y không đứng cuối, kết hợp với các điều kiện còn lại (như câu đầu tiên và cuối cùng phải do nữ giải đáp, không ai giải đáp 2 câu liên tiếp), đều dẫn đến mâu thuẫn.
- Kết luận: Mệnh đề này sai vì xét cả hai trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn.

c) Nếu người giải đáp câu thứ tư cũng là người giải đáp câu thứ sáu thì Z không giải đáp câu thứ bảy.
- Có thể xảy ra trường hợp giải đáp như sau: X, Z, Q, Y, Q, Y, Z, trong đó người giải đáp câu thứ tư (Q) cũng là người giải đáp câu thứ sáu. Z vẫn có thể giải đáp câu thứ bảy mà không mâu thuẫn với bất kỳ điều kiện nào.
- Kết luận: Mệnh đề này sai vì có thể xảy ra trường hợp Z giải đáp câu thứ bảy.

d) Hai khách mời N và P có ít nhất một người không giải đáp câu nào.
- Giả sử ngược lại, rằng cả N và P đều tham gia giải đáp (tức là cả N và P đều giải đáp ít nhất một câu).
- Theo điều kiện, nếu N giải đáp ít nhất một câu thì M cũng phải giải đáp ít nhất một câu. Ngoài ra, Q giải đáp 2 câu, Y giải đáp 2 câu (Q, Y, Q, Y), và câu đầu tiên và cuối cùng phải do khách mời nữ giải đáp.
- Nếu M, N, P, Q, Y và cả nữ khác đều tham gia giải đáp thì sẽ không đủ chỗ cho tất cả các khách mời, vì tổng cộng chỉ có 7 câu. Điều này dẫn đến mâu thuẫn về số lượng người giải đáp.

Vì giả thiết ngược dẫn đến mâu thuẫn, kết luận phải là đúng: N và P có ít nhất một người không giải đáp câu nào.

Câu 15. Chọn đáp án: a b c d

Ta có $y' = f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-1;0) \\ x = b \in (0;1). \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		a		0		b		1		$+\infty$
y'			$+$		0		$-$		0		$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

a) Dựa vào bảng biến thiên, hàm số không đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có 2 điểm cực trị.

c) Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x = b \in (0;1)$.

d) $g(x) = f(x-1) - x \Rightarrow g'(x) = f'(x-1) - 1$.

Xét $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 < -1 \\ x - 1 > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3. \end{array}\right.$

Nên hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 16. Chọn đáp án: a b c d

a) Ta có $P(1) = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = A \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \approx 0{,}93 \cdot A = 93\%A$.

Vậy giá trị của chiếc xe giảm đi 9% so với ban đầu.

b) Giá trị còn lại của chiếc xe anh Bình sử dụng là $700 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{8}} = 700 \cdot \sqrt[8]{\left(\frac{3}{4}\right)^5} \approx 584{,}8$ triệu đồng.

Giá trị còn lại của chiếc xe anh Cường sử dụng là $630 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 630 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 545{,}6$ triệu đồng.

Vậy anh Bình bán xe được giá hơn anh Cường

c) Ta có $500 = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{4}} \Rightarrow A = \frac{500 \cdot 4}{3} \approx 666{,}7$ triệu đồng.

d) Giá trị còn lại của chiếc xe anh An sử dụng là $520 \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \approx 483{,}9$ triệu đồng.

Vậy anh An đã không bán lỗ chiếc xe.

Câu 17. Đáp án: 0.

Ta có $y' = 12x^2 + 2mx - 3$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow 12x^2 + 2mx - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + 36 > 0$ (đúng với mọi m).

Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi giá trị của m.

- Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = -2x_2$, kết hợp với hệ thức Vi-ét của phương trình $y' = 0$ ta có hệ phương trình:

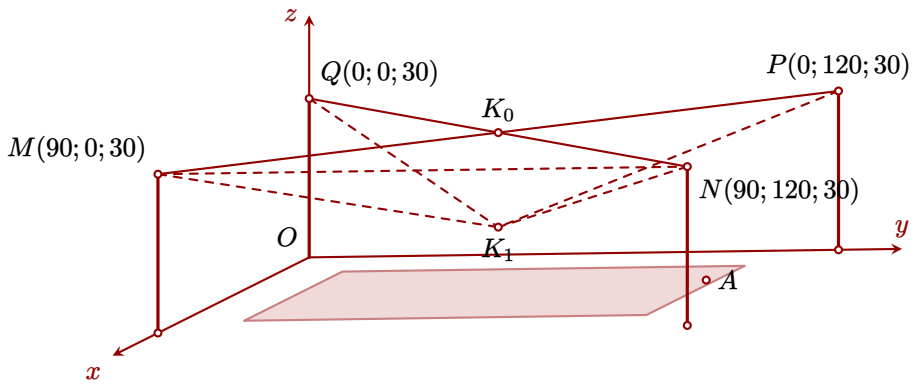
$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{6} \\ x_1 x_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2^2 = \dfrac{1}{8} \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right. \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{6} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ m = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Vậy giá trị m thỏa mãn điều kiện đề bài là $m \in \left\{-\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$.

Tổng các giá trị của m bằng 0.

Câu 18. Đáp án: 123.



Ta có tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật và nằm trên mặt phẳng song song với mặt sân cỏ.
Gọi O là tâm hình chữ nhật $MNPQ$.
Theo dữ kiện đề bài ta có K_0, K_1 nằm trên trục của đường tròn tâm O.
Ta có O là trung điểm của hai đường chéo QN và MP, nên tọa độ tâm O là $(45; 60; 28)$.
Điểm K_1 ở độ cao 18 nên tọa độ điểm $K_1(45; 60; 18)$.
Vậy tổng các tọa độ của K_1 là $45 + 60 + 18 = 123$.

Câu 19. Ta có $g'(x) = -2f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x=-2 \\ 3-2x=2 \\ 3-2x=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2} \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=-1. \end{array}\right.$

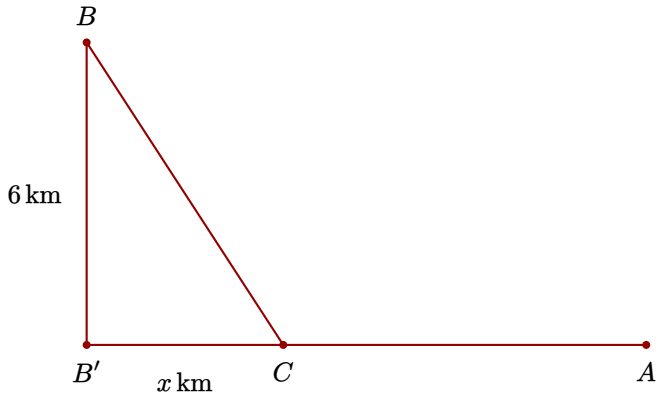
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Hàm số đồng biến trên $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Câu 20.

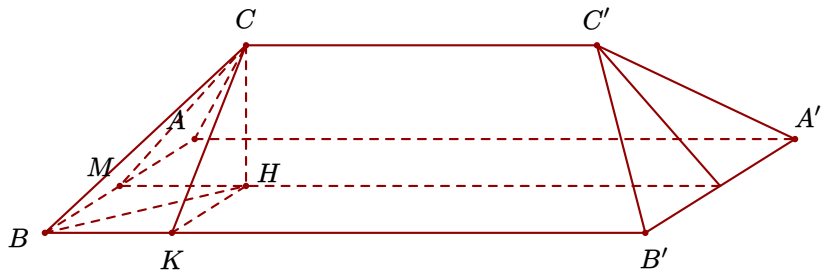


Đặt $B'C = x$ km $\Rightarrow CA = 9 - x$ km.
Khi đó $BC = \sqrt{x^2 + 36}$.
Tổng chi phí để làm đường ống từ B qua C rồi đến A bằng
$f(x) = 130\,000\sqrt{x^2 + 36} + 50\,000(9 - x)$ với $0 \leqslant x \leqslant 9$.
Ta có $f'(x) = 10\,000\left(\dfrac{13x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 5\right)$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2 + 36} = 13x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 25(x^2 + 36) = 169x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2{,}5.$
Bảng biến thiên

x	0		$2{,}5$		9
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có chi phí làm đường ống nhỏ nhất bằng $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ khi $x = 2{,}5$ km.
Khi đó khoảng cách từ C đến A bằng $9 - 2{,}5 = 6{,}5$ km.

Câu 21.



Đầu tiên ta dựng $CH \perp (A'B'AB) \Rightarrow CH = 1{,}4$ m, gọi M là trung điểm AB.
Khi đó MH cũng đi qua trung điểm của $A'B'$ do CC' nằm chính giữa mái, song song với mặt sàn $(A'B'AB)$.
Sau đó dựng $HK \perp BB' \Rightarrow BMHK$ là hình chữ nhật $AB = 6$ m, nên $HK = MB = \dfrac{1}{2}AB = 3$ m.
Mặt khác ta có $2MH + CC' = AA' = 9$ m, $CC' = 7$ m nên $MH = 1$ m.
Từ đó ta tính được $CM = \sqrt{1 + 1{,}4^2} \approx 1{,}72$ m.
Lại có $CH \perp BB' \Rightarrow BB' \perp (CHK) \Rightarrow BB' \perp CK \Rightarrow CK = \sqrt{1{,}4^2 + 3^2} \approx 3{,}31$ m.
Vậy tổng chi phí mái tôn là $T = 2\,(S_{ABC} + S_{CC'BB'}) \cdot 290\,000 = [CM \cdot AB + CK \cdot (CC' + BB')] \cdot 290\,000 \approx 18\,351\,000$ đồng.

Câu 22. Vì đội nào thắng 3 hiệp trước thì sẽ thắng nên các tỉ số khả thi để A thắng ngay là $3-0$, $3-1$, $3-2$ nghiêng về phía A.
Vậy số hiệp đấu tối đa của hai đội là 5 và tối thiểu là 3.
Mỗi lượt đấu gọi xác suất hai đội A, B thắng lần lượt là $\mathrm{P}(A)$ và $\mathrm{P}(B) = k$ $(0 < k < 1)$.
Theo đề, xác suất để đội A thắng nhiều hơn 12% so với xác suất đội B thắng, nên $\mathrm{P}(A) = 0{,}12 + k \Rightarrow 0 < k < 0{,}88$.
Mặt khác $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - k \Rightarrow 1 - k - k = 0{,}12 \Rightarrow k = 0{,}44$.
Suy ra $\mathrm{P}(A) = 0{,}56$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}44$.
Trường hợp 1: Đội A thắng chỉ trong 3 hiệp.
Khi đó ta có xác suất $\mathrm{P}(T_1) = \mathrm{C}_3^3\,(\mathrm{P}(A))^3 = (k + 0{,}12)^3$.

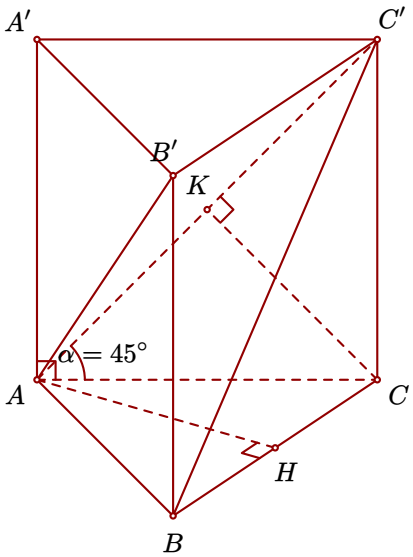
Trường hợp 2: Đội A thắng sau 4 hiệp.
Khi đó ta có xác suất $\mathrm{P}(T_2) = \left(\mathrm{C}_4^1 - 1\right)(\mathrm{P}(A))^3 \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 3(k+0{,}12)^3(0{,}88-k)$.
Ta phải loại đi Trường hợp 1 vì lúc đó A thắng $3-0$ nên không thể đấu tới hiệp 4.
Trường hợp 3: Đội A thắng sau 5 hiệp.
Nhưng ta phải loại đi các trường hợp mà đội A thắng sau 3 và 4 hiệp.

A	B	A	A	B	4 hiep
A	A	B	A	B	4 hiep
B	A	A	A	B	4 hiep
A	A	A	B	B	3 hiep

Thứ tự hai đội thắng trong 5 hiệp được ghi từ trái sang phải.
Hay nói cách khác là đội B phải thắng 2 trong 4 hiệp đầu tiên.
Khi đó ta có xác suất: $\mathrm{P}(T_3) = \left(\mathrm{C}_5^2 - 4\right)(\mathrm{P}(A))^3 \left(\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)\right)^2 = \mathrm{C}_4^2(k+0{,}12)^3(0{,}88-k)^2$.
Vậy $\mathrm{P} = \mathrm{P}(T_1) + \mathrm{P}(T_2) + \mathrm{P}(T_3) \approx 79\%$.

Câu 23. Số tiền vay: $A = 200$ triệu.
Thời hạn trả góp: 48 tháng.
Lãi suất cố định: $r = 0{,}8\%$/tháng.
Số tiền vay ban đầu chia cho 48 là $\dfrac{A}{48} = a$ (triệu).
Tháng 1 trả góp: $a + A \cdot r$ (triệu).
Tháng 2 trả góp: $a + (A-a) \cdot r$ (triệu).
Tháng 3 trả góp: $a + (A-2a) \cdot r$ (triệu).
...
Tháng 48 trả góp: $a + (A-47a) \cdot r$ (triệu).
Tổng số tiền gốc và lãi đã trả trong 48 tháng là
$P = 48a + [48A - (1+2+3+\cdots+47)a]\, r = A + (48A - 1128a)r = 239{,}2$ triệu.
Vậy số tiền lãi đã trả trong toàn bộ quá trình nợ là $L = 239{,}2 - 200 = 39{,}2$ triệu.

Câu 24.



Kẻ $AH \perp BC$ mà $CC' \perp AH$ nên $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow \mathrm{d}(A,(BCC'B')) = AH = a$.
Kẻ $CK \perp AC'$ mà $AB \perp CK$ nên $CK \perp (ABC') \Rightarrow \mathrm{d}(C,(ABC')) = CK = a$.
Ta có
$$\begin{cases} (ABC) \cap (ABC') = AB \\ AC \perp AB \\ AC' \perp AB \end{cases}$$
$\Rightarrow \widehat{((ABC),(ABC'))} = \widehat{CAC'} = \alpha$.
Gọi $AB = x$, $(x > a)$.
Từ đó suy ra $CC' = x$ và $AC = \dfrac{AB \cdot AH}{\sqrt{AB^2 - AH^2}} = \dfrac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.
Thể tích lăng trụ $V = \dfrac{ax^3}{2\sqrt{x^2 - a^2}}$.
Xét hàm số $V = \dfrac{ax^3}{2\sqrt{x^2 - a^2}}$ trên khoảng $(a; +\infty)$.
Ta có $f'(x) = \dfrac{ax^2(2x^2 - 3a^2)}{2\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}$.
Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Từ đó có thể suy ra $\min\limits_{(a;+\infty)} f(x) = f\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right) = 3\sqrt{3}a^3$.
Vậy thể tích lăng trụ nhỏ nhất khi $x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Từ đó tính được $AC = a\sqrt{3}$ suy ra $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Đề chọn HSG Vĩnh Phúc

Câu 1. Chọn đáp án A
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 2. Chọn đáp án D
Hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$.
Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
$y=\dfrac{-4}{(x-2)^2}<0, \forall x\neq 2$.
Vậy hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ và $(-\infty;2)$

Câu 3. Chọn đáp án A
Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC
$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{1-2+3}{3}=\dfrac{2}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{0+1+2}{3}=1 \\ x_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{2+3+4}{3}=3 \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{2}{3};1;3\right).$$

Câu 4. Chọn đáp án A

$$\text{Ta có } y=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+4}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\dfrac{4}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=-3.$$

Câu 5. Chọn đáp án A
Ta có $y'=x^2+2mx-(1-2m)$.
Hàm số đã cho có cực trị khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow (m-1)^2>0\Leftrightarrow m\neq 1$.
Mà m nguyên và $m\in[-10;10]$ nên có tất cả 20 giá trị m thỏa mãn.

Câu 6. Chọn đáp án B
Ta có $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=x+\dfrac{1}{x+1}$.
Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
$y'=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	$+\infty$ ‖	↘	1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số là 1.

Câu 7. Chọn đáp án A

Để đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x-3}{x-2m+6}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow x = 0$ là nghiệm của phương trình $x - 2m + 6 = 0 \Rightarrow m = 3$.

Câu 8. Chọn đáp án A

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 3 + \log_3 5 \cdot \log_5 3 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 9. Chọn đáp án C

Ta có $\min\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5})} y = -2$ và không tồn tại $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5})} y$.

Câu 10. Chọn đáp án A

Từ đồ thị ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ suy ra $a > 0$.

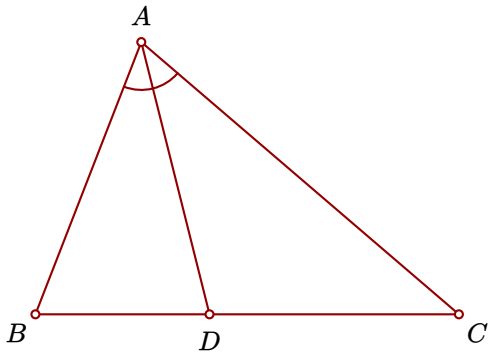
Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d > 0$.

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Rightarrow$ phương trình $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Rightarrow 3a \cdot c < 0 \Rightarrow c < 0$.

Tổng hai điểm cực trị của hàm số dương $\Rightarrow -\dfrac{2b}{3a} > 0 \Leftrightarrow b < 0$.

Vậy có 2 số âm là b và c.

Câu 11. Chọn đáp án A



Ta có $BA = \sqrt{26}$, $BC = 2\sqrt{26} \Rightarrow \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

Mà D là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$

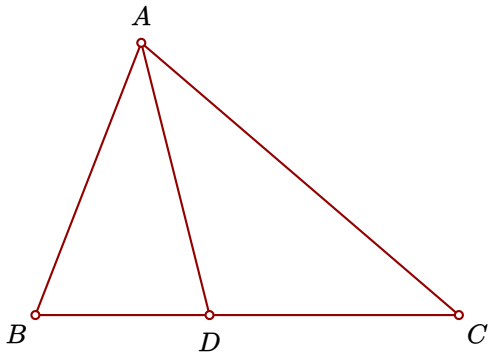
$\Rightarrow \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{DA}{DC} \Rightarrow \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow DC = 2DA \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AD}$.

Gọi $D(a;b;c)$ và ta có $\overrightarrow{DC} = (-4-a; 7-b; 5-c)$, $\overrightarrow{AD} = (a-1; b-2; c+1)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -4-a=2a-2 \\ 7-b=2b-4 \\ 5-c=2c+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{3} \\ b=\dfrac{11}{3} \\ c=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a+b+c=4.$

Câu 12. Chọn đáp án C



Áp dụng định lý cô-sin cho tam giác ABC ta có
$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}=7\Rightarrow BC=\sqrt{7}.$
Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC
$\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow DB=\dfrac{2}{3}DC=\dfrac{2}{5}BC=\dfrac{2\sqrt{7}}{5}.$
$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}.$
Trong tam giác ABD, có
$AD=\sqrt{BA^2+BD^2-2BA\cdot BD\cdot\cos B}$

$$=\sqrt{4+\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2-2\cdot 2\cdot\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{7}}{14}}$$

$$=\frac{6\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 13. Chọn đáp án A
Ta có cỡ mẫu của mẫu số liệu trên là $n=3+14+20+7+1=45.$
Ta có $\dfrac{3n}{4}=\dfrac{3\cdot 45}{4}=33{,}75$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ 3 là nhóm $[6{,}5;8).$
Do đó $Q_3=6{,}5+\dfrac{33{,}75-(14+3)}{20}\cdot(8-6{,}5)\approx 7{,}76.$

Câu 14. Chọn đáp án A
Gọi A là biến cố " Học sinh được chọn thích môn Bóng đá".
B là biến cố " Học sinh được chọn thích môn Bóng bàn".
C là biến cố " Học sinh được chọn thích ít nhất một trong hai môn Bóng đá hoặc Bóng bàn".
Khi đó ta có $C=A\cup B.$
Ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=30.$
Vậy xác suất của biến cố C là
$\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{19}{30}+\dfrac{17}{30}-\dfrac{15}{30}=\dfrac{21}{30}=0{,}7.$

Câu 15. Chọn đáp án A

Để B có đúng hai tập con và $B \subset A$ thì B phải có đúng một phần tử và phần tử đó thuộc A.

Suy ra phương trình $mx^2 - 4x + m - 3 = 0$ $(*)$ có nghiệm duy nhất $x > 0$.

- Trường hợp 1: Nếu $m = 0$, phương trình $(*)$ trở thành $-4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{4}$ (không thỏa mãn).

- Trường hợp 2: Nếu $m \neq 0$, phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất khi $\Delta' = 4 - m(m-3) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -1. \end{array}\right.$

Với $m = -1$, phương trình $(*)$ trở thành $-x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (không thỏa mãn).

Với $m = 4$, phương trình $(*)$ trở thành $4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy có một giá trị của tham số m thỏa mãn.

Câu 16. Chọn đáp án: a b c d

Ta có $f'(x) = 66x^2 - 24x - 1944 = 6\left(11x^2 - 4x - 324\right)$.

Do $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2 - 4\sqrt{223}}{11} \approx -5{,}25 < 0 \\ x = \dfrac{2 + 4\sqrt{223}}{11} \approx 5{,}61 > 0. \end{array}\right.$

Khi đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\dfrac{2-4\sqrt{223}}{11}$		$\dfrac{2+4\sqrt{223}}{11}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\approx 8715{,}78$	↘	$\approx 5375{,}22$	↗	$+\infty$

a) Hàm số đồng biến trên $(7; +\infty)$.

Dựa vào bảng biến thiên hàm số đồng biến trên $(7; +\infty)$.

Dựa vào bảng biến thiên đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai nửa mặt phẳng khác nhau bờ là trục hoành.

Dựa vào bảng biến thiên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $(2; +\infty)$.

Xét hàm số $g(x) = f(x - 10)$.

Với $g'(x) = [f(x-10)]' = f'(x-10)$.

$$f'(x-10) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 10 = \dfrac{2 - 4\sqrt{223}}{11} < 0 \\ x - 10 = \dfrac{2 + 4\sqrt{223}}{11} > 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{122 + \sqrt{4 + 11 \cdot 324}}{11} > 0 \\ x = \dfrac{122 - \sqrt{4 + 11 \cdot 324}}{11} > 0. \end{array}\right.$$

Nên hàm số $g(x) = f(x - 10)$ có 2 cực trị có hoành độ dương.

Vậy hàm số $f(|x| - 10)$ có 5 cực trị.

Câu 17. Chọn đáp án: a b c d

a) Khối lượng muối trong 200 g dung dịch ban đầu là $\dfrac{15\cdot 200}{100}=30$ gam.

Thêm x gam muối tinh khiết ta được $30+x$ (gam).

Nồng độ dung dịch sau khi thêm là

$f(x)=\dfrac{(30+x)\cdot 100}{200+x}$ (%).

b) Ta có $f(x)=\dfrac{100x+3000}{x+200}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{17000}{(x+200)^2}>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$.

c) Khi thêm 140 g muối thì tổng số gam muối trong dung dịch là $30+140=170$ (gam).

Nồng độ dung dịch khi đó là $\dfrac{170}{200+140}\cdot 100\%=50\%$.

d) Khi $x\to+\infty$ ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{100x+3000}{x+200}=100$.

Câu 18. Chọn đáp án: a b c d

a) $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}=x-2+\dfrac{4}{x-1}$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}[y-(x-2)]=0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}[y-(x-2)]=0$.

Do đó tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y=x-2$.

b) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(3;3)$, do đó $a^2+b=3^2+3=12$.

c) Tiệm cận đứng: $d_1: x=1$, tiệm cận xiên $d_2: y=x-2$ nên giao điểm hai tiệm cận là điểm $I(1;-1)$.

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=2$ có phương trình:

$d: y=y'(2)(x-2)+y(2)=-3(x-2)+4\Leftrightarrow y=-3x+10$.

Đường thẳng d cắt d_1,d_2 lần lượt tại $A(1;7),B(3;1)$.

$\overrightarrow{IA}=(0;8);\ \overrightarrow{IB}=(2;2)$.

$S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}|0\cdot 2-2\cdot 8|=8$.

d) Từ phương trình $\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}=m$

Xét tính tương giao của đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Ta thấy phương trình $\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}=m$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<2<x_2<15$ khi và chỉ khi \$4 Vậy có các giá trị nguyên là 5, 6, 7,..., 13 nên có 9 giá trị.

Câu 19. Chọn đáp án: a b c d

a) $\overrightarrow{AD}=(x_D-1;y_D-1;z_D)$, $\overrightarrow{BC}=(2;-2;2)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-1=2\\y_D-1=-2\\z_D=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=3\\y_D=-1\\z_D=2.\end{cases}$

Vậy $D(3;-1;2)$.

b) $AB=\sqrt{(-1-1)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{6}$.

c) Gọi $E(0;m;0)$ là điểm thuộc trục Oy.

$\overrightarrow{EB}=(-1;-m;1)$, $\overrightarrow{EC}=(1;-2-m;3)$.

Tam giác BCE vuông tại E nên ta có $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=0\Leftrightarrow m^2+2m+2=0$.

Phương trình trên vô nghiệm nên không có điểm E nào.

d) Điểm M là điểm nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $MA=2MB$ nên ta có

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$

$\Leftrightarrow M\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Khi đó $OM=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 20. Chọn đáp án: a b c d

a) Nếu mỗi tháng người đó gửi số tiền cố định 3 triệu đồng thì tính đến năm đủ 62 tuổi (sau 528 lần gửi), người đó đã gửi vào ngân hàng số tiền là

$3\,000\,000\cdot 528=1\,584\,000\,000$ (đồng).

b) Giả sử mỗi tháng người đó đều gửi vào ngân hàng số tiền cố định là A đồng.

Số tiền người này có được sau tháng thứ nhất là $T_1=A+A\cdot 0{,}5\%=A(1+0{,}5\%)$ (đồng).

Số tiền người này có được sau tháng thứ hai là

$T_2=T_1+A+(T_1+A)\cdot 0{,}5\%=A(1+0{,}5\%)^2+A(1+0{,}5\%)$ (đồng).

Số tiền người này có được sau tháng thứ ba là

$T_3=T_2+A+(T_2+A)\cdot 0{,}5\%=A(1+0{,}5\%)^3+A(1+0{,}5\%)^2+A(1+0{,}5\%)$ (đồng).

...

Số tiền người này nhận được sau tháng thứ n là

$T_n=A(1+0{,}5\%)^n+\cdots+A(1+0{,}5\%)^2+A(1+0{,}5\%)$ (đồng).

Hay $T_n=A(1+0{,}5\%)\cdot\dfrac{(1+0{,}5\%)^n-1}{(1+0{,}5\%)-1}=\dfrac{A}{0{,}5\%}\cdot[(1+0{,}5\%)^n-1](1+0{,}5\%)$ (đồng).

Nếu mỗi tháng người đó gửi số tiền cố định 3 triệu đồng thì sau đúng một tháng kể từ lần gửi thứ 528, số tiền trong tài khoản của người đó là

$T_{528}=\dfrac{3\cdot 10^6}{0{,}5\%}\cdot\left[(1+0{,}5\%)^{528}-1\right](1+0{,}5\%)\approx 7\,792\,000\,000$ (đồng).

c) Nếu mỗi tháng người đó gửi số tiền cố định 2 triệu đồng thì sau đúng một tháng kể từ lần gửi thứ 528, số tiền trong tài khoản của người đó là

$T_{528}=\dfrac{2\cdot 10^6}{0{,}5\%}\cdot\left[(1+0{,}5\%)^{528}-1\right](1+0{,}5\%)=5\,194\,373\,101$ (đồng).

Số tiền còn lại sau lần rút thứ nhất là $X_1 = T_{528} - 3 \cdot 10^7$ (đồng).
Số tiền còn lại sau lần rút thứ hai là
$X_2 = X_1(1+0{,}5\%) - 3 \cdot 10^7 = T_{528}(1+0{,}5\%) - 3 \cdot 10^7 \cdot (1+0{,}5\%) - 3 \cdot 10^7$ (đồng).
Số tiền còn lại sau lần rút thứ ba là
$X_3 = X_2(1+0{,}5\%) - 3 \cdot 10^7 = T_{528}(1+0{,}5\%)^2 - 3 \cdot 10^7 \cdot (1+0{,}5\%)^2 - 3 \cdot 10^7 \cdot (1+0{,}5\%) - 3 \cdot 10^7$
...
Số tiền còn lại sau lần rút thứ 216 là
$X_{216} = T_{528}(1+0{,}5\%)^{215} - 3 \cdot 10^7 \cdot \left[(1+0{,}5\%)^{215} + \cdots + (1+0{,}5\%)^2 + (1+0{,}5\%) + 1\right]$

$= T_{528}(1+0{,}5\%)^{215} - 3 \cdot 10^7 \cdot \dfrac{(1+0{,}5\%)^{215} - 1}{0{,}5\%} \approx 3\,645\,000\,000$ (đồng).

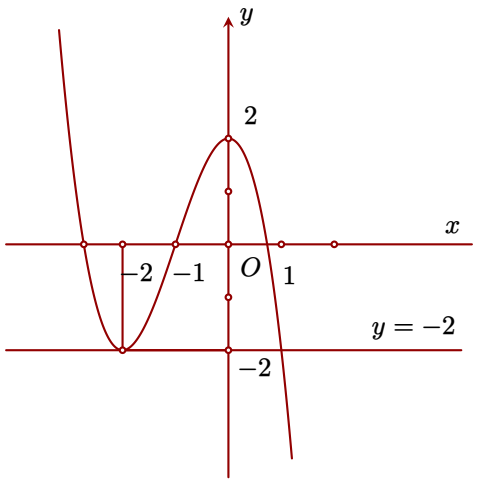
d) Tương tự câu c) ta có
Số tiền còn lại sau lần rút thứ 456 là
$X_{456} = T_{528}(1+0{,}5\%)^{455} - 28\,805\,000 \cdot \dfrac{(1+0{,}5\%)^{455} - 1}{0{,}5\%} \approx 280\,000\,000$ (đồng).

Câu 21. Đáp án: 2024.
Tập xác định $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
$y' = \dfrac{5m-2}{(x+5m)^2}$, $x \neq -5m$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$ khi và chỉ khi $y' > 0$, $\forall x \in (-\infty; -10)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m - 2 > 0 \\ -5m \notin (-\infty; -10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{2}{5} \\ m \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow m \in \left(\dfrac{2}{5}; 2\right].$

$\Rightarrow a = \dfrac{2}{5}$, $b = 2 \Rightarrow 50a + 1002b = 2024$.

Câu 22. Đáp án: 3.



Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có phương trình $f(x) = -2$ có 2 nghiệm phân biệt $x = -2$, $x = x_0$ $(x_0 > 0)$ và $a > 0$, trong đó $x = -2$ là nghiệm kép và $x = x_0$ là nghiệm đơn nên ta có $f(x) + 2 = a(x+2)^2(x - x_0)$.
$\Rightarrow g(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{a(x+2)^2(x-x_0)} = \dfrac{x}{a(x+2)(x-x_0)}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty \Rightarrow x = -2$, $x = x_0$ là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
Vậy tổng số tiệm cận ngang và đứng là 3.

Câu 23. Đáp án: 3.
Do $y=f(x)$ là hàm đa thức và $f(0)=3$ nên số điểm cực trị của hàm $y=f(|x|)$ là $2a+1$ trong đó a là số điểm cực trị dương của hàm $y=f(x)$.
Trường hợp 1: $m=1 \Rightarrow f(x)=-5x^2+4x+3$, $f'(x)=-10x+4$; $f'(x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{2}{5}$.
Vậy hàm $y=f(x)$ có duy nhất một điểm cực trị dương nên số điểm cực trị của hàm $y=f(|x|)$ là $2a+1=3$ thỏa mãn.
Trường hợp 2: $m \neq 1$
Để hàm số $f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị ta có 2 khả năng
+ Khả năng 1: Phương trình $f'(x)=0$ có một nghiệm $x_1=0$ và $x_2>0$
$f'(x)=3(m-1)x^2-10x+(m+3)$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3(m-1)x^2-10x+(m+3)=0$
$x_1=0 \Rightarrow m=-3$ thử lại: ta có $x_2=-\dfrac{5}{6}<0$ không thỏa mãn.
+ Khả năng 2: phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $x_1 \cdot x_2<0$
$\Leftrightarrow 3(m-1)x^2-10x+(m+3)=0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $x_1 \cdot x_2<0$
$\Leftrightarrow ac<0 \Leftrightarrow \dfrac{m+3}{3(m-1)}<0 \Leftrightarrow \dfrac{m+3}{m-1}<0 \Leftrightarrow -3$
Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1;0\}$.
Kết hợp các trường hợp ta có $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1;0;1\}$.
Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 24. Đáp án: 12.
Ta có $f'(x)=2x-4$, $f'(x)>0, \forall x \in (2;+\infty)$.
$g(x)=\ln\left(f^2(x)-2f(x)\right)+2f^2(x)-mf(x)-1$.
$$g'(x)=\frac{2f(x)\cdot f'(x)-2f'(x)}{f^2(x)-2f(x)}+4f(x)\cdot f'(x)-mf'(x)\geqslant 0,\ \forall x\in(2;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \frac{2f(x)\cdot f'(x)-2f'(x)}{f^2(x)-2f(x)}+4f(x)\cdot f'(x)\geqslant mf'(x),\ \forall x\in(2;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow m\leqslant \frac{2f(x)-2}{f^2(x)-2f(x)}+4f(x),\ \forall x\in(2;+\infty).$$
Xét $h(x)=\dfrac{2f(x)-2}{f^2(x)-2f(x)}+4f(x), \forall x \in (2;+\infty)$.
Đặt $t=f(x), \forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow t>2$.
$h(t)=\dfrac{2t-2}{t^2-2t}+4t, \forall t \in (2;+\infty)$.
$$h'(t)=\frac{4t^4-16t^3+14t^2+4t-4}{(t^2-2t)^2} \quad (\forall t>2)$$
$$h'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t\approx 2{,}51 & \\ t\approx 1{,}468 & \text{(loại)} \\ t\approx 0{,}532 & \text{(loại)} \\ t\approx -0{,}51 & \text{(loại).}\end{array}\right.$$
Bảng xét dấu:

t	2		2,51		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		$\searrow$	12,4	$\nearrow$	

$\min\limits_{(2;+\infty)} h(t) = 12{,}4$.
Vậy $m \leqslant h(x) \Rightarrow m \leqslant \min\limits_{(2;+\infty)} h(t), \forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow m \leqslant 12{,}4$.
Số nguyên dương m để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là 12.

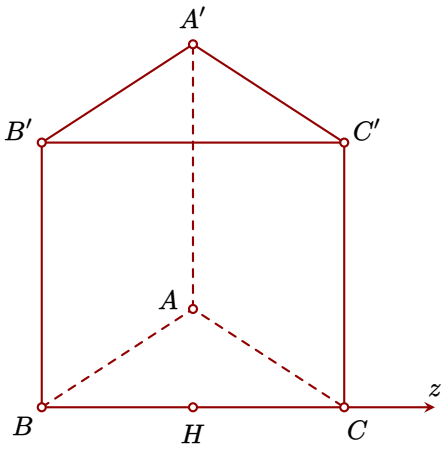
Câu 25. Đáp án: 15.
Gọi x, y lần lượt là chiều rộng cạnh đáy, chiều cao của bể $(x, y > 0)$.
Chiều dài cạnh đáy là $2x$.
Thể tích của bể là $V = 2x^2y = \dfrac{500}{3} \Rightarrow y = \dfrac{250}{3x^2}$.
Diện tích toàn phần của bể là

$$S = 2x^2 + 2xy + 4xy = 2x^2 + 6xy = 2x^2 + 6x \cdot \frac{250}{3x^2} = 2\left(x^2 + \frac{250}{x}\right)$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{125}{x} + \frac{125}{x}\right) \geqslant 2 \cdot 3 \cdot 25 = 150 \Rightarrow \min S = 150 \Leftrightarrow x = 5 \text{ m}.$$

Vậy chi phí thuê nhân công thấp nhất bằng 15 000 000 đồng.

Câu 26. Đáp án: 16.



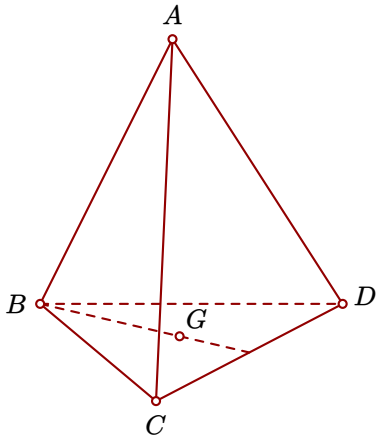
Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(0;0;1) \Rightarrow A'H = 2 \Rightarrow AH = \sqrt{3} \Rightarrow AB = BC = AC = 2$
$\Rightarrow B \equiv O(0;0;0), C(0;0;2) \Rightarrow \overrightarrow{A'C} = \left(-\sqrt{3};1;1\right)$.
Vectơ $\overrightarrow{u} = (a;b;2)$ cùng phương với $\overrightarrow{A'C} \Rightarrow \dfrac{a}{-\sqrt{3}} = \dfrac{b}{1} = \dfrac{2}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt{3} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow T = a^2 + b^2 = 16.$

Câu 27. Đáp án: 4.
Đặt $x = a^2 + b, x \in \mathbb{Z}$. Bất phương trình đã cho trở thành $4^x \leqslant 3^x + 256 \Leftrightarrow x \leqslant 4$.
Ta có $a^2 + b \leqslant 4 \Leftrightarrow b \leqslant 4 - a^2$.
Để tồn tại ít nhất 4 số nguyên $b \in (-12;12)$ khi và chỉ khi $-8 \leqslant 4 - a^2 \Leftrightarrow a^2 \leqslant 12$.
Mà $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.
Vậy có 4 số nguyên a thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 28. Đáp án: 1.
Phương trình đường thẳng CD là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = -1 + t. \end{cases}$
Suy ra $M(1+t; 2-4t; -1+t)$.
Chu vi tam giác ABM là
$AB + AM + BM = \sqrt{113} + \sqrt{18t^2 - 18t + 54} + \sqrt{18t^2 - 18t + 41}$.

Đặt $a = 18t^2 - 18t \quad \left(a \geqslant -\dfrac{9}{2}\right)$.
Khi đó chu vi tam giác ABM là:
$\sqrt{113} + \sqrt{a+54} + \sqrt{a+41} \geqslant \sqrt{113} + \sqrt{\dfrac{99}{2}} + \sqrt{\dfrac{73}{2}}$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = -\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2}; 0; -\dfrac{1}{2}\right)$.
Vậy $a + b + c = 1$.

Câu 29. Đáp án: 0,17.



Ta có $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ nên

$$\begin{aligned} AG^2 &= \left[\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)\right]^2 \\ &= \frac{1}{9}\left(AB^2 + AC^2 + AD^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ + 2AB \cdot AD \cdot \cos 90^\circ + 2AC \cdot AD \cdot \cos 120^\circ\right) \\ &= \frac{1}{9}(1 + 1 + 1 + 1 + 0 - 1) = \frac{1}{3} \Rightarrow AG = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có
$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos 120^\circ = 3 \Rightarrow CD = \sqrt{3}$.
Tích vô hướng
$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{3}\left(-AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ - AC^2 + AD^2\right) = -\dfrac{1}{6}$.
Từ đó suy ra

$$\cos(AG, CD) = \left|\cos\left(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CD}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD}\right|}{AG \cdot CD} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17.$$

Câu 30. Đáp án: 5000.
Gọi x, y, z lần lượt là số suất quà gồm: 1 chiếc áo mùa đông và 1 thùng sữa; 1 chiếc áo mùa đông và 1 chiếc cặp; 1 thùng sữa và 1 chiếc cặp.
Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ y + z = 90 \\ x + z = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 60 \\ z = 30. \end{cases}$$

Không gian mẫu Ω: Phát 100 suất quà cho 100 học sinh.
Vì các suất quà cùng loại coi như giống nhau nên số phần tử của không gian mẫu là
$n(\Omega) = \mathrm{C}_{100}^{10} \cdot \mathrm{C}_{90}^{60} \cdot \mathrm{C}_{30}^{30}$.
Xét biến cố A: " Hai em Việt và Nam được phát quà giống nhau".

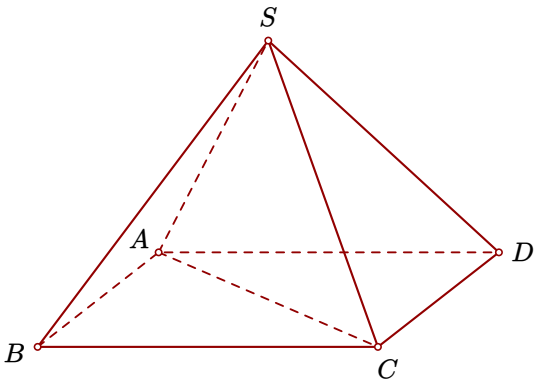
Phát quà cho hai em Việt và Nam nhận quà giống nhau trước, sau đó phát quà cho 98 em còn lại:
$n(A) = \mathrm{C}_{98}^{8} \cdot \mathrm{C}_{90}^{60} \cdot \mathrm{C}_{30}^{30} + \mathrm{C}_{98}^{10} \cdot \mathrm{C}_{88}^{58} \cdot \mathrm{C}_{30}^{30} + \mathrm{C}_{98}^{10} \cdot \mathrm{C}_{88}^{60} \cdot \mathrm{C}_{28}^{28}$.
Xác suất của biến cố A là
$\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{11}$.
Do đó, $11\,000\mathrm{P}(A) = 5000$.

Liên trường Nghệ An

Câu 1. Chọn đáp án A
Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.

Câu 2. Chọn đáp án B
Ta có $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(2-4;-3+5;1+3)=(-2;2;4)$.

Câu 3. Chọn đáp án C



Ta có $AC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}$.
Vì $SA^2+SC^2=a^2+a^2=2a^2=AC^2$ nên tam giác SAC vuông tại S (định lý Pythagoras đảo)
Vậy $(SA,SC)=\widehat{CSA}=90^\circ$.

Câu 4. Chọn đáp án D

x	$-\infty$	-5	-1	0	1	2	3	4	5	$+\infty$
$f(x)$		$f(-5)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ do đó ta có:
$f(-1)>f(-5)$
$f(0)>f(-1)$
Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ do đó ta có:
$f(3)>f(5)$
$f(2)>f(4)$.

Câu 5. Chọn đáp án A
Từ đồ thị $f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta có: hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực đại.

Câu 6. Chọn đáp án A

Ta có $f'(x) = \mathrm{e}^x(x^2 - 5x + 7) + \mathrm{e}^x(2x - 5) = \mathrm{e}^x(x^2 - 3x + 2)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta có $f(0) = 7$, $f(1) = 3\mathrm{e}$, $f(2) = \mathrm{e}^2$, $f(3) = \mathrm{e}^3$.

Vậy $\min\limits_{[0;3]} f(x) = 7$ khi $x = 0$.

Câu 7. Chọn đáp án D

Ta có

$f'(x) = \left\{\begin{array}{l} 2x \text{ khi } x \leqslant 1 \\ -1 \text{ khi } x > 1. \end{array}\right.$

Và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

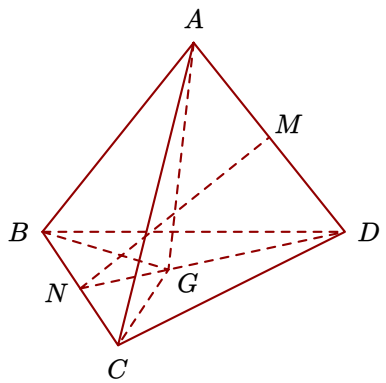
Khi đó hàm số không có đạo hàm tại $x = 1$, ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 8. Chọn đáp án C



Ta có $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Vì N là trung điểm của cạnh BC nên ta có $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Vì G là trọng tâm tam giác BCD nên

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

Ta có

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

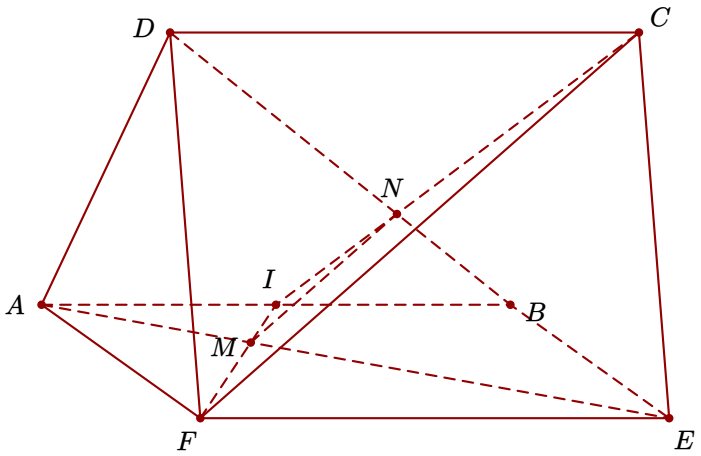
Câu 9. Chọn đáp án C

Ta có $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in (-2\pi; 2\pi) \Rightarrow -2\pi < \frac{\pi}{4} + k\pi < 2\pi \Rightarrow -2{,}25 < k < 1{,}75 \Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Suy ra phương trình có 4 nghiệm thuộc khoảng $(-2\pi; 2\pi)$.

Câu 10. Chọn đáp án C



Trường hợp 1: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$.

Đặt $\overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AD} - t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \left(\frac{2}{3} - t\right)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$.

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB}$.

$MN//(FECD) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{DF} + b\overrightarrow{FE} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} - t\right)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AF} = b\overrightarrow{AB} - a\overrightarrow{AD} + a\overrightarrow{AF}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} - t = b \\ t = -a \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \Rightarrow x = 3.$$

Trường hợp 2: $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \left(\frac{4}{3} - t\right)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$.

$MN//(FECD) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{DF} + b\overrightarrow{FE} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3} - t\right)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF} = b\overrightarrow{AB} - a\overrightarrow{AD} + a\overrightarrow{AF}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} - t = b \\ t = -a \\ a = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \Rightarrow x = 3.$$

Câu 11. Chọn đáp án C

$n = 8 + 22 + 35 + 15 = 80$.

Vì mẫu số liệu có 80 số liệu nên tứ phân vị $M_e = \frac{x_{40} + x_{41}}{2}$. Do đó nhóm chứa tứ phân vị là nhóm $[5; 6, 5)$.

Câu 12. Chọn đáp án A

$\mathrm{P}\left(\overline{A}B\right) = \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathrm{P}(B) = (1 - \mathrm{P}(A)) \cdot \mathrm{P}(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35.$

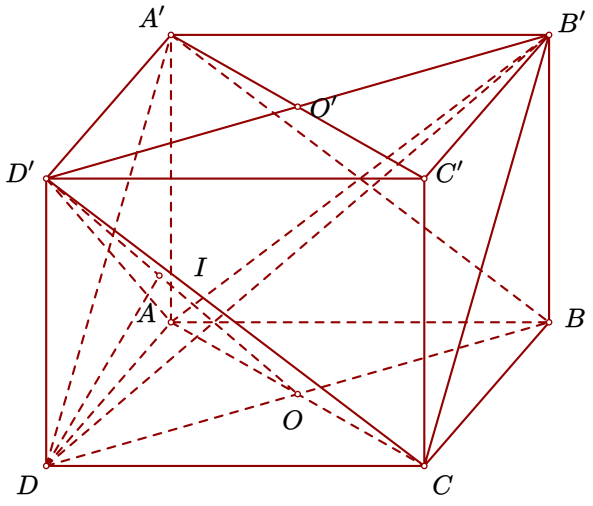
Câu 13. Chọn đáp án: a b c d

Từ đồ thị, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f_{CĐ}$	↘	$+\infty$	↘	f_{CT}	↗	$+\infty$

Đồ thị $f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ bằng 1 và 3.
Trên khoảng $(-\infty; 1)$ hàm số đồng biến.
Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.
Khi $f(0) = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{0^2 + b \cdot 0 + c}{0 - 2} \Leftrightarrow c = -2$.
Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 2b + 2}{(x-2)^2}$ và $f'(1) = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2}$.
Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; 4)$ nên $\max\limits_{[3;4]} f(x) = f(4) = 6$.

Câu 14. Chọn đáp án: a b c d



Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng a^3.
Ta có $\left.\begin{matrix} BC' \perp B'C \\ BC' \perp A'B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC' \perp (A'B'CD) \Rightarrow BC' \perp B'D \quad (1)$.
Mặt khác $\left.\begin{matrix} A'C' \perp B'D' \\ A'C' \perp DD' \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'C' \perp (BDD'B') \Rightarrow A'C' \perp B'D \quad (2)$.
Từ (1) và (2) suy ra $B'D \perp (BA'C')$.
Ta có $AD' \parallel BC' \Rightarrow AD' \parallel (BC'A')$, $CD' \parallel A'B \Rightarrow CD' \parallel (BC'A')$.
Suy ra $(ACD') \parallel (BC'A')$ hay $\mathrm{d}((ACD'), (BC'A')) = \mathrm{d}(A', (ACD')) = \mathrm{d}(D, (ACD'))$.
Dựng $DI \perp D'O$ tại I.

Ta có $\left.\begin{matrix} DO \perp AC \\ DD' \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (DOD') \Rightarrow AC \perp DI.$

Mà $DI \perp D'O \Rightarrow DI \perp (ACD')$ tại I suy ra $\mathrm{d}(D,(ACD')) = DI = \dfrac{DD' \cdot DO}{\sqrt{DD'^2 + DO^2}} = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

Ta có $BC' \parallel AD' \Rightarrow BC' \parallel (AB'D').$

Suy ra $\mathrm{d}(AB', BC') = \mathrm{d}(B,(AB'D')) = \mathrm{d}(D,(AB'D')) = \mathrm{d}(A',(AB'D')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

Câu 15. Chọn đáp án: a b c d

Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ có tập xác định $\mathscr{D} = (0;+\infty)$.

Vì cơ số $a = \dfrac{1}{3} \in (0;1)$ nên hàm số $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ luôn nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Bất phương trình $g(x) < 3 \Leftrightarrow 3^{x+1} < 3 \Leftrightarrow x+1 < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;0)$.

Bất phương trình

$$\begin{aligned} f(3-g(x)) \geqslant 2-x &\Leftrightarrow f\left(3-3^{x+1}\right) \geqslant 2-x \\ &\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\left(3-3^{x+1}\right) \geqslant 2-x \\ &\Leftrightarrow 0 < 3-3^{x+1} \leqslant 3^{x-2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+1} < 3 \\ 3-3\cdot 3^x \leqslant \dfrac{1}{9}\cdot 3^x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{28}{9}\cdot 3^x \geqslant 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3^x \geqslant \dfrac{27}{28} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \geqslant \log_3 \dfrac{27}{28} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \log_3 \frac{27}{28} \leqslant x < 0. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[\log_3 \dfrac{27}{28}; 0\right)$.

Câu 16. Chọn đáp án: a b c d

Ω: lấy ra hai quả bóng ngẫu nhiên trong 20 quả bóng trong hộp nên $n(\Omega) = \mathrm{C}_{20}^2 = 190$.

F: Hai quả bóng lấy ra màu đỏ trong 6 quả bóng màu đỏ nên $n(F) = \mathrm{C}_6^2 = 15 \Rightarrow P(F) = \dfrac{15}{190} = \dfrac{3}{38}$.

$E \cup F$: Hai quả bóng lấy ra cùng màu nên $n(E \cup F) = \mathrm{C}_{14}^2 + \mathrm{C}_6^2 = 106 \Rightarrow P(E \cup F) = \dfrac{106}{190} = \dfrac{53}{95}$.

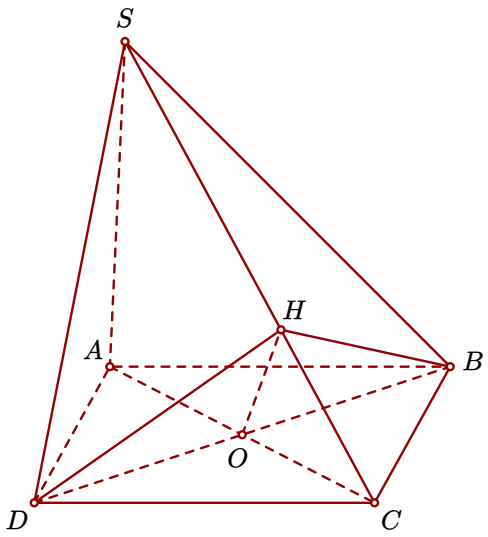
Câu 17. Đáp án: 94,8.

Ta có cỡ mẫu là $n = 12 + 31 + 7 = 50 \Rightarrow$ trung vị của mẫu số liệu gốc là $\dfrac{x_{25} + x_{26}}{2}$ nên nhóm chứa trung vị là nhóm $94 - 96$.

Suy ra trung vị của mẫu số liệu đã cho

$$M_e = 94 + \frac{\dfrac{50}{2} - 12}{31} \cdot 2 \approx 94{,}8.$$

Câu 18. Đáp án: 130.



Gọi $O = AC \cap BD$, H là hình chiếu của O lên SC.

Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BD$.

Khi đó $\begin{cases} SC \perp BD \\ SC \perp OH \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BDH) \Rightarrow HD \perp SC,\ HB \perp SC \Rightarrow [D, SC, B] = \widehat{BHD}$.

Nhận xét tam giác ABC đều có cạnh bằng $a \Rightarrow BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$.

Mặt khác $\triangle CHO \backsim \triangle CAS \Rightarrow \dfrac{OH}{SA} = \dfrac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2} : \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$.

Mà tam giác HBD cân tại $H \Rightarrow OH \perp BD \Rightarrow \tan \widehat{HBO} = \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{a}{2\sqrt{5}} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$

$\Rightarrow \widehat{HBO} \approx 25^\circ \Rightarrow \widehat{DHB} \approx 180^\circ - 2 \cdot 25^\circ = 130^\circ$.

Câu 19. Do kì hạn là 12 tháng tức là 1 năm, gọi n là số kì hạn khi đó n cũng chính là số năm.

Số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi sau n năm là $100 \cdot (1 + 6\%)^n$.

Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì

$100 \cdot (1 + 6\%)^n > 130 \Leftrightarrow (1 + 6\%)^n > 1{,}3 \Rightarrow n > \log_{1+6\%} 1{,}3 \approx 4{,}5$.

Vậy người đó phải gửi ít nhất 5 năm.

Câu 20. Gọi x (triệu đồng) là số tiền cần giảm.

Giảm 1 triệu đồng/chiếc thì số lượng xe máy bán ra trong một năm tăng thêm 200 chiếc.

Giảm x triệu đồng/chiếc thì số lượng xe máy bán ra trong một năm tăng thêm $200x$ chiếc.

Số xe máy bán ra trong một năm là $600 + 200x$.

Chi phí mua vào là $27 \cdot (600 + 200x)$ triệu đồng.

Giá bán ra là $31 - x$ triệu đồng/chiếc.

Lợi nhuận doanh nghiệp thu được là

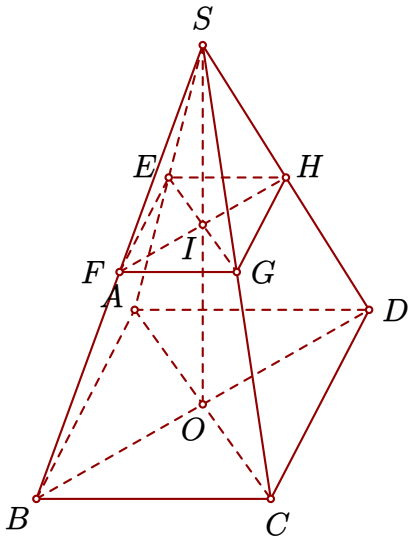
$(31-x)\cdot(600+200x)-27\cdot(600+200x)=-200x^2+200x+2400$.
Xét hàm số $f(x)=-200x^2+200x+2400$ $(0<x<31)$.
$f'(x)=-400x+200$
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

x	0		$\dfrac{1}{2}$		31
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	2450	↘	

Vậy doanh nghiệp phải giảm giá bán là $\dfrac{1}{2}$ triệu đồng/chiếc để thu được lợi nhuận cao nhất trong một năm, khi đó giá bán mới là 30,5 triệu đồng/chiếc.

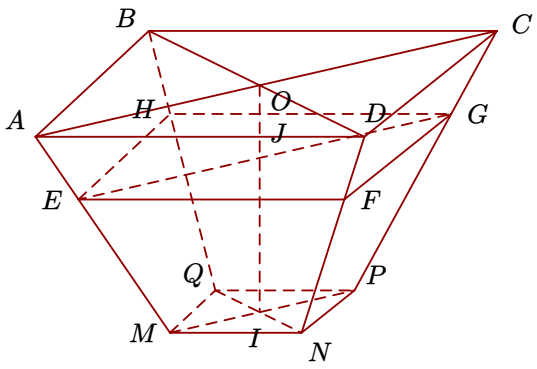
Câu 21. Diện tích phần tô màu ở hình thứ nhất, hình thứ hai, hình thứ ba lần lượt là
$S_1=1-\dfrac{8}{9}=\dfrac{1}{9}$, $S_2=1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^2=\dfrac{17}{81}$, $S_3=1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^3=\dfrac{217}{729}$
Gọi S_n là diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ n .
Ta có: $S_n=1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.

Câu 22.



Thể tích của khối chóp cụt tứ giác đều là $V=V_{ABCD.EFGH}=V_{S.ABCD}-V_{S.EFGH}$.
Ta có $\dfrac{SE}{SA}=\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow\dfrac{EA}{SA}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow SA=5$ m.
Suy ra $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{5^2-\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ m.
Lại có $\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow SI=\sqrt{2}$ m.
Khi đó $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABCD}=\dfrac{125\sqrt{2}}{6}$ m^3, $V_{S.EFGH}=\dfrac{1}{3}\cdot SI\cdot S_{EFGH}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ m^3.
Do đó $V=\dfrac{39\sqrt{2}}{2}$ m^3.
Vậy số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là $28\,665\,000\sqrt{2}$ đồng.

Câu 23.



Thể tích của khay hình hộp chữ nhật là $V = 20 \cdot 10 \cdot 8 = 1600 \text{ cm}^3$.
Lượng nước đổ sang khay thứ hai là $V_1 = \dfrac{1}{4} \cdot 1600 = 400 \text{ cm}^3$.
Khi đổ nước vào khay thứ hai thì ta được chóp cụt tứ giác đều $MNPQ.EFGH$ có $IJ = \dfrac{2}{3}OI = \dfrac{2}{3}h$, $\dfrac{ME}{AM} = \dfrac{PG}{PC} = \dfrac{2}{3}$.
Và tính được $EG = \dfrac{5n}{3}$.
Ta có

$$\begin{aligned} V_{MNPQ.EFGH} &= \frac{1}{3} \cdot IJ \cdot \left(S + \sqrt{S \cdot S'} + S'\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}h \cdot \left(\frac{n^2}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5n}{3}\right)^2} + \frac{25n^2}{18}\right) \\ &= \frac{49}{81}hn^2 \\ &= 400. \end{aligned}$$

Suy ra $hn^2 = \dfrac{32400}{49}$.
Thể tích khay thứ hai là

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(\frac{n^2}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2n)^2} + \frac{4n^2}{2}\right) \\ &= \frac{7}{6}hn^2 \\ &= \frac{7}{6} \cdot \frac{32400}{49} \\ &= \frac{5400}{7} \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Câu 24. Gọi A là biến cố " Lấy được 3 quả bóng bàn màu trắng và 1 quả bóng bàn màu vàng ở hộp thứ nhất".
B là biến cố " Lấy được 2 quả bóng bàn màu trắng và 2 quả bóng bàn màu vàng ở hộp thứ nhất".
H là biến cố " Lấy được 1 quả bóng bàn màu vàng ở hộp thứ hai".
Ta có $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_3^3 \cdot \mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_5^4} = \dfrac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B) = \dfrac{\mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_5^4} = \dfrac{3}{5}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(H) &= \mathrm{P}(H \cap A) + \mathrm{P}(H \cap B) \\ &= \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(H \mid A) + \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(H \mid B) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{14} + \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{14} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Sở Thanh Hóa

Câu 1. Chọn đáp án C

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ suy ra phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \\ x=c \\ x=d \end{array}\right. (a<b<c<d)$

Ta có bảng biến thiên:Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực đại</b<c<d)$

Câu 2. Chọn đáp án C

Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

$ACC'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AC'}=4\overrightarrow{AO}$.

Câu 3. Chọn đáp án B

Ta có $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}=(3;0;-6)$.

Suy ra $M(3;0;-6)$.

Vậy $x+y+z=-3$.

Câu 4. Chọn đáp án B

Cỡ mẫu $n=3+12+15+24+2=56$.

Gọi $x_1,x_2,\ldots,x_{56}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có $x_1,x_2,x_3 \in [9{,}5;12{,}5)$; $x_4,\ldots,x_{15} \in [12{,}5;15{,}5)$; $x_{16},\ldots,x_{30} \in [15{,}5;18{,}5)$; $x_{31},\ldots,x_{54} \in [18{,}5;21{,}5)$; $x_{55},x_{56} \in [21{,}5;24{,}5)$.

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1,x_2,\ldots,x_{56}$ là $\dfrac{1}{2}(x_{14}+x_{15})$.

Do x_{14} và x_{15} thuộc nhóm $[12{,}5;15{,}5)$ nên tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$Q_1=12{,}5+\dfrac{\frac{56}{4}-3}{12}\cdot(15{,}5-12{,}5)=15{,}25$.

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1,x_2,\ldots,x_{56}$ là $\dfrac{1}{2}(x_{42}+x_{43})$.

Do x_{42} và x_{43} thuộc nhóm $[18{,}5;21{,}5)$ nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$Q_3=18{,}5+\dfrac{\frac{3\cdot 56}{4}-30}{24}\cdot 3=20$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là $\Delta Q=Q_3-Q_1=20-15{,}25=4{,}75$.

Câu 5. Chọn đáp án A

Ta có $\left[\begin{array}{l} (OG,OP)=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ (OG,OP)=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

Trong một giờ, kim giờ quay được $\dfrac{1}{12}$ vòng/giờ, kim phút quay được 1 vòng/giờ.

Hiện tại hai kim cách nhau $\dfrac{1}{4}$ vòng.

Suy ra kim phút đi được $\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{12}}=\dfrac{3}{11}$ vòng tương ứng với góc là $\dfrac{6\pi}{11}$.

Số đo góc lượng giác kim giờ quét được từ lúc xét đến khi kim phút và kim giờ gặp nhau lần đầu tiên $\dfrac{6\pi}{11}-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi=\dfrac{\pi}{22}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, ứng với $k=0$ là $\dfrac{\pi}{22}$.

Câu 6. Chọn đáp án A

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_n = u_{n-1} + n \quad (n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2) \end{cases}$

$\Rightarrow u_2 = u_1 + 2 = 5 + 2 = 7$

$\Rightarrow u_3 = u_2 + 3 = 7 + 3 = 10.$

Câu 7. Chọn đáp án B

Không giảm tính tổng quát chọn $m = 1$.

Từ bảng biến thiên đồ thị có tiệm cận đứng là $x = 1$ nên $n = -1$.

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = \dfrac{2ax + b}{m} = 2ax + b.$

Theo bảng biến thiên đường thẳng này đi qua điểm $(1 - \sqrt{2}; -2\sqrt{2})$ và $(1 + \sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ nên ta có

$\begin{cases} 2a(1 - \sqrt{2}) + b = -2\sqrt{2} \\ 2a(1 + \sqrt{2}) + b = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \end{cases}$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ lại đi qua điểm $(1 - \sqrt{2}; -2\sqrt{2})$

$\Rightarrow \dfrac{(1 - \sqrt{2})^2 - 2(1 - \sqrt{2}) + c}{1 - \sqrt{2} - 1} = -2\sqrt{2} \Rightarrow c = 3.$

Vậy hàm số đã cho là $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{2}{x - 1}$, từ đó tiệm cận xiên có phương trình $y = x - 1$.

Câu 8. Chọn đáp án D

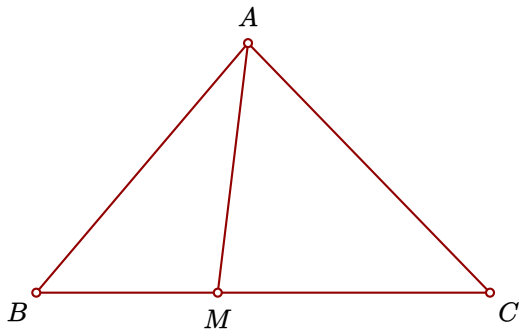
Ta có

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right|^2 &= AB^2 + AC^2 + AD^2 + 2\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right) \\ &= AB^2 + AC^2 + AD^2 + 2\left(AB \cdot AC \cos 60^\circ + AB \cdot AD \cos 60^\circ + AC \cdot AD \cos 60^\circ\right) \\ &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2\left(1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 6 \end{aligned}$$

nên $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{6}.$

Câu 9. Chọn đáp án A

.



Từ $\cos\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) + \cos\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MC}\right) = 0$ ta có được $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ suy ra M nằm giữa B, C.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = \dfrac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \dfrac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}$. Theo giả thiết ta có được $k + k(3k + 1) = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = -1 \\ k = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Ta loại $k = -1$.

Với $k = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \left(-\dfrac{7}{3}; 1; 0\right) \Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{3}; 2; 1\right).$

Nên $2x + y + 3z - k = -\dfrac{2}{3} + 2 + 3 - \dfrac{1}{3} = 4.$

Câu 10. Chọn đáp án A

Số tiền trung bình siêu thị thống kê trong một ngày là

$$\overline{x}=\frac{4\cdot 42{,}5+14\cdot 47{,}5+8\cdot 52{,}5+10\cdot 57{,}5+6\cdot 62{,}5+2\cdot 67{,}5}{44}=\frac{585}{11}.$$

Phương sai số tiền siêu thị thống kê trong một ngày là

$$S^2=\frac{1}{44}\left(4\cdot 42{,}5^2+14\cdot 47{,}5^2+8\cdot 52{,}5^2+10\cdot 57{,}5^2+6\cdot 62{,}5^2+2\cdot 67{,}5^2\right)-\left(\frac{585}{11}\right)^2\approx 46{,}13.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{46{,}13}\approx 6{,}8.$

Câu 11. Chọn đáp án C

Từ phương trình $\sin x(\cos 2x+\cos x)=0$ ta được

$\sin x=0$ (1) hoặc $\cos 2x+\cos x=0$ (2).

Giải phương trình (1) ta được $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Trên đường tròn lượng giác có 2 điểm biểu diễn góc x.

Ta có $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, giải phương trình (2) ta được

$$2\cos^2 x+\cos x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Trên đường tròn lượng giác có 3 điểm biểu diễn các góc lượng giác là nghiệm phương trình (2).

Trong đó có một điểm trùng với điểm biểu diễn nghiệm phương trình (1).

Vậy tất cả 4 điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn các nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 12. Chọn đáp án A

Ta có

$$\ln\left[(a+1)^x(b+1)^{x^2-1}\right]=\ln 1\Leftrightarrow x\ln(a+1)+(x^2-1)\ln(b+1)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2\ln(b+1)+x\ln(a+1)-\ln(b+1)=0.$$

Phương trình có $\begin{cases}\ln(b+1)\neq 0\\ \ln^2(a+1)+4\ln^2(b+1)>0\end{cases},\forall a,b>0.$

Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm $\forall a,b>0$.

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình đã cho.

Áp dụng định lý Vi-ét ta có

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{\ln(a+1)}{\ln(b+1)}=-\log_{b+1}(a+1)\\ x_1x_2=\dfrac{-\ln(b+1)}{\ln(b+1)}=-1.\end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\left(\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4x_1-4x_2\leqslant 3\sqrt[3]{4}\Leftrightarrow\frac{1}{\log_{b+1}^2(a+1)}+4\log_{b+1}(a+1)\leqslant 3\sqrt[3]{4}\quad(1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\frac{1}{\log_{b+1}^2(a+1)}+4\log_{b+1}(a+1)=\frac{1}{\log_{b+1}^2(a+1)}+2\log_{b+1}(a+1)+2\log_{b+1}(a+1)$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{\log_{b+1}^2(a+1)}\cdot 2\log_{b+1}(a+1)\cdot 2\log_{b+1}(a+1)}$$
$$=3\sqrt[3]{4}\quad(2).$$

Từ (1) và (2) ta được $\dfrac{1}{\log_{b+1}^2(a+1)}+4\log_{b+1}(a+1)=3\sqrt[3]{4}.$

Phương trình tương đương

$\Leftrightarrow -4\log_{b+1}^3(a+1)+3\sqrt[3]{4}\log_{b+1}^2(a+1)-1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_{b+1}(a+1)\approx -0{,}4\\ \log_{b+1}(a+1)\approx 0{,}8.\end{array}\right.$

Vì $b+1>1, \forall b>0$ nên ta loại $\log_{b+1}(a+1)\approx -0{,}4$.

Như vậy $x_1+x_2=-\log_{b+1}(a+1)\approx -0{,}8\in(-1;0)$.

Câu 13. Chọn đáp án C

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax^2+4x+b}{x^3-3x-2}=c\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax^2+4x+b}{(x+1)^2(x-2)}=c.$

Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax^2+4x+b}{x^3-3x-2}=c$ là $ax^2+4x+b=0$ có nghiệm kép $x=-1$.

Suy ra $ax^2+4x+b=a(x+1)^2\Leftrightarrow ax^2+4x+b=ax^2+2ax+a\Rightarrow a=b=2$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+4x+2}{x^3-3x-2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2}{x-2}=-\dfrac{2}{3}$.

Do đó $c=-\dfrac{2}{3}$.

Vậy $S=a^2+b^3+6c=4+8-4=8$.

Câu 14. Chọn đáp án C

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=7^4=2401$.

Gọi A là biến cố "lấy được số chẵn có dạng $\overline{abcd}$ mà $a\leqslant b<c<d$".

Giả sử $\overline{abcd}$ là số tự nhiên chẵn được chọn thỏa mãn $a\leqslant b<c<d$.

Vì $\overline{abcd}$ là số chẵn và $a\leqslant b<c<d$:

Nếu $d=8$ thì có 2 khả năng xảy ra là a,b,c khác nhau hoặc $a=b<c<8$.

+ a,b,c khác nhau $(a<b<c<8)$: Mỗi bộ ba số tự nhiên chọn từ 7 số $\{1;2;3;4;5;6;7\}$ cho đúng một cách xếp.

Số các số tự nhiên thỏa mãn là $\mathrm{C}_7^3=35$.

+ $a=b<c<8$: Chọn 2 số từ 7 số $\{1;2;3;4;5;6;7\}$ để làm giá trị cho a (cũng là b) và c.

Số các số tự nhiên thỏa mãn là $\mathrm{C}_7^2=21$.

Suy ra với $d=8$ có tất cả $35+21=56$ số tự nhiên.

Nếu $d=6$: Lập luận tương tự, chọn các số từ $\{1;2;3;4;5\}$.

Số các số tự nhiên thỏa mãn là $\mathrm{C}_5^3+\mathrm{C}_5^2=10+10=20$.

Nếu $d=4$: Lập luận tương tự, chọn các số từ $\{1;2;3\}$.

Số các số tự nhiên thỏa mãn là $\mathrm{C}_3^3+\mathrm{C}_3^2=1+3=4$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là

$n(A)=56+20+4=80$.

Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{80}{2401}$.

Câu 15. Chọn đáp án B

Vì đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y=x-1$ nên AB có phương trình $y=-x+m$.

Khi đó A, B là hai giao điểm của đường thẳng $y=-x+m$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là

$\dfrac{x^2}{x-1}=-x+m\Leftrightarrow x^2-(x-1)(-x+m)=0\quad (x\neq 1)$

$\Leftrightarrow 2x^2-(m+1)x+m=0\quad (x\neq 1)$.

AB cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt nên phương trình $2x^2-(m+1)x+m=0\quad (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Ta có điều kiện

$\begin{cases}(m+1)^2-8m>0\\ 2\cdot 1^2-(m+1)\cdot 1+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m<3-2\sqrt{2}\\ m>3+2\sqrt{2}\end{bmatrix}$ (**).

Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của hai điểm A, B.

Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$ và $A(x_1;-x_1+m)$, $B(x_2;-x_2+m)$.

Gọi I là trung điểm của AB, khi đó $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};m-\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

Áp dụng định lý Vi-ét ta có $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m+1}{4}$ nên $I\left(\dfrac{m+1}{4};\dfrac{3m-1}{4}\right)$.

Điểm I thuộc đường thẳng $y=x-1$ nên ta có

$\dfrac{3m-1}{4}=\dfrac{m+1}{4}-1\Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn điều kiện (**)).

$AB=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2(x_1+x_2)^2-8x_1x_2}=2$.

Câu 16. Chọn đáp án A

Ta có

$\overrightarrow{SN}=y\overrightarrow{SC}\Leftrightarrow\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BN}=y\overrightarrow{SC}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}=y\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}\\ &=y\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}-x\overrightarrow{BD}\\ &=y\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}-x\left(\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SB}\right)\\ &=y\overrightarrow{SC}+(x-1)\overrightarrow{SB}-x\overrightarrow{SD}\\ &=y\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+(x-1)\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}\right)-x\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD}\right)\\ &=(y-1)\overrightarrow{SA}+(x+y-1)\overrightarrow{AB}+(y-x)\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}MN^2&=\left[(y-1)\overrightarrow{SA}+(x+y-1)\overrightarrow{AB}+(y-x)\overrightarrow{AD}\right]^2\\ &=(y-1)^2\overrightarrow{SA}^2+(x+y-1)^2\overrightarrow{AB}^2+(y-x)^2\overrightarrow{AD}^2\\ &=16(y-1)^2+2(x+y-1)^2+8(y-x)^2\\ &=10x^2+26y^2-12xy-4x-36y+18=f(x).\end{aligned}$$

Ta có $f'(x)=20x-12y-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3y+1}{5}$.

Lập bảng biến thiên ta được

$$\begin{aligned}f(x)\geqslant f\left(\frac{3y+1}{5}\right)&=\frac{1}{5}\left(112y^2-192y+88\right)\\ &=\frac{112}{5}\left(y^2-\frac{12}{7}y+\frac{11}{14}\right)\\ &=\frac{112}{5}\left[\left(y-\frac{6}{7}\right)^2+\frac{5}{98}\right]\geqslant\frac{8}{7}.\end{aligned}$$

Dấu " = " xảy ra khi $y=\dfrac{6}{7}\Rightarrow x=\dfrac{5}{7}$.

Vậy $MN_{\min}=\sqrt{\dfrac{8}{7}}$ khi $x=\dfrac{5}{7}$, $y=\dfrac{6}{7}\Rightarrow 2x+3y=4$.

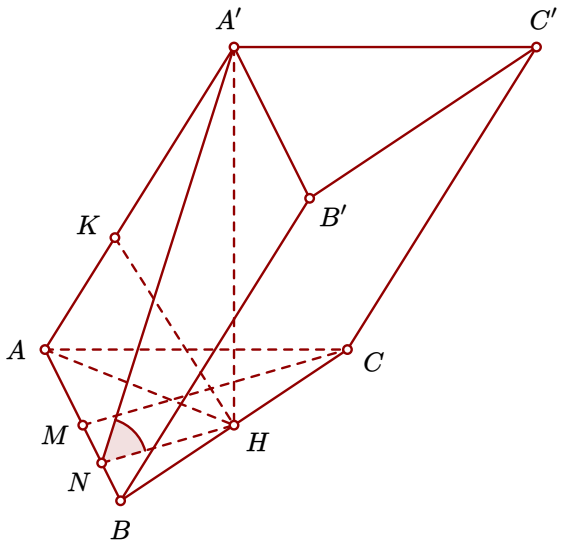
Câu 17. Chọn đáp án D

Áp dụng tính chất: $KABC$ là một tứ diện đều, H là tâm của tam giác ABC và O là trung điểm của KH thì OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC).
Ta có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = OB = OC$ nên O là trung điểm đoạn KH (1) hoặc $\overrightarrow{OK} = 3\overrightarrow{OH}$ (2).
Vì các điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz nên ở trường hợp (1), điểm K có tọa độ là các số âm, suy ra điểm K thỏa mãn (2).
Khi đó ta có
$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{9OH^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}\right) = \frac{1}{3a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{3a^2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow a = \sqrt{2} \in \left(0; \frac{3}{2}\right).$$

Câu 18. Chọn đáp án D
$$10(x^2+y^2-xy) - \log_3^2(x+y-1) \geqslant x^3+y^3-4$$
$$\Leftrightarrow 10(x^2+y^2-xy) - x^3 - y^3 - \log_3^2(x+y-1) + 4 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow 10(x^2-xy+y^2) - (x+y)(x^2-xy+y^2) + 4 - \log_3^2(x+y-1) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (10-x-y)(x^2-xy+y^2) + 4 - \log_3^2(x+y-1) \geqslant 0.$$
Do x, y là các số nguyên dương nên $x+y \geqslant 2$.
Trường hợp 1: Với $x+y > 10$, ta có $10-x-y < 0$ và $4 - \log_3^2(x+y-1) \leqslant 0$ nên bất phương trình vô nghiệm.
Trường hợp 2: Với $2 \leqslant x+y \leqslant 10$, bất phương trình có nghiệm.
Vậy số cặp nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn là
$\sum_{k=1}^{9} k = 45$ cặp.

Câu 19. Chọn đáp án A



Gọi H là trung điểm BC, theo giả thiết $A'H \perp (ABC)$.
Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $AH \perp BC$.
Vậy $BC \perp (A'AH) \Rightarrow BC \perp AA'$.
Gọi M là trung điểm AB, N là trung điểm MB.
Ta có $CM \perp AB$, NH là đường trung bình $\triangle BCM$ nên $HN \parallel CM \Rightarrow HN \perp AB$.
Mà góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{A'NH} = 60°$.
Trong mặt phẳng $(A'AH)$, kẻ $HK \perp AA'$ tại K.
Ta thấy $HK \perp AA'$ mà $AA' \parallel BB' \Rightarrow HK \perp BB'$, $HK \perp BC$ nên $HK \perp (BCC'B')$.
Vì $AA' \parallel BB'$ nên $\mathrm{d}(AA', B'C') = \mathrm{d}(AA', (BCC'B')) = \mathrm{d}(K, (BCC'B')) = HK$.

Ta có $HN = \dfrac{1}{2}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A'H = HN \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{4}$.

Trong $\triangle A'AH$ có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'H = \dfrac{3a}{4}$ nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{16}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{28}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

Câu 20. Chọn đáp án C

Số chia hết cho 8 có dạng $8k$ $(k \in \mathbb{N})$.

$1 \leqslant 8k \leqslant 50 \Leftrightarrow \dfrac{1}{8} \leqslant k \leqslant \dfrac{25}{4} \Rightarrow$ có 6 số.

Số chia hết cho 4 có dạng $4k$ $(k \in \mathbb{N})$.

$1 \leqslant 4k \leqslant 50 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \leqslant k \leqslant \dfrac{25}{2} \Rightarrow$ có 12 số.

Số chia hết cho 2 có 25 số.

Suy ra:

+ Có 6 số chia hết cho 8.

+ Có 6 số chia hết cho 4 mà không chia hết cho 8.

+ Có 13 số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4.

+ Có 25 số lẻ.

Chia 50 quả cầu thành 4 nhóm:

Nhóm 1: Gồm 25 quả cầu mang số lẻ.

Nhóm 2: Gồm 13 quả cầu mang số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4.

Nhóm 3: Gồm 6 quả cầu mang số chia hết cho 4 mà không chia hết cho 8.

Nhóm 4: Gồm 6 quả cầu mang số chia hết cho 8.

Xét biến cố A: "Tích ba số là một số chia hết cho 8".

Biến cố đối $\overline{A}$: "Tích ba số là một số không chia hết cho 8".

Để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số không chia hết cho 8 thì có 4 trường hợp sau:

Trường hợp 1: 1 quả nhóm 1 và 2 quả nhóm 2 có $\mathrm{C}_{25}^1 \cdot \mathrm{C}_{13}^2 = 1950$ cách lấy.

Trường hợp 2: 2 quả nhóm 1 và 1 quả nhóm 2 có $\mathrm{C}_{25}^2 \cdot \mathrm{C}_{13}^1 = 3900$ cách lấy.

Trường hợp 3: 2 quả nhóm 1 và 1 quả nhóm 3 có $\mathrm{C}_{25}^2 \cdot \mathrm{C}_{6}^1 = 1800$ cách lấy.

Trường hợp 4: 3 quả nhóm 1 có $\mathrm{C}_{25}^3 = 2300$ cách lấy.

Vậy

$n(A) = \mathrm{C}_{50}^3 - n\left(\overline{A}\right) = \mathrm{C}_{50}^3 - \left(\mathrm{C}_{25}^1 \cdot \mathrm{C}_{13}^2 + \mathrm{C}_{25}^2 \cdot \mathrm{C}_{13}^1 + \mathrm{C}_{25}^2 \cdot \mathrm{C}_{6}^1 + \mathrm{C}_{25}^3\right) = 9650.$

Câu 21. Chọn đáp án: a b c d

a) Hàm số $f(x)$ có giá trị cực tiểu bằng 2.

b) Hàm số $y = 2 + \sqrt{f(x) - 2}$ xác định khi $f(x) - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant 2 \Leftrightarrow x > 0$.

Ta có $y' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x) - 2}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \notin [1;2]$.

Ta có $\forall x \in [1;2]$ thì $f'(x) < 0$ nên $y' < 0$, hàm số nghịch biến trên $[1;2]$.

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$, $\min\limits_{[1;2]} y = y(2) = 2 + \sqrt{f(2) - 2} > 2$.

c) Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta thấy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = 0$ và một đường tiệm cận ngang $y = 2$ nên hai đường tiệm cận vuông góc với nhau.

d) Điều kiện $x \neq 0$.

Ta có $y' = -2 \cdot (-f'(x)) \cdot f'(2 - f(x)) = 2f'(x) \cdot f'(2 - f(x))$.

$$y'=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}f'(x)=0\\ f'\left(2-f(x)\right)=0\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=3\\ 2-f(x)=0\\ 2-f(x)=3\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=3\\ f(x)=2\\ f(x)=-1\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=3\\ x=a<0.\end{bmatrix}$$

Ta có bảng xét dấu.

x	$-\infty$		a		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y=3-2f\left(2-f(x)\right)$ đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$.

Câu 22. Chọn đáp án: a b c d

a) B là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy).

b) Gọi điểm $M(0;y;z)$ thỏa mãn $MA=MB=MC$.

Ta có $MA^2=MB^2=MC^2\Leftrightarrow\begin{cases}1+(y-2)^2+(z+4)^2=1+(y-2)^2+z^2\\ 1+(y-2)^2+(z+4)^2=(y-2)^2+z^2.\end{cases}$

Hệ phương trình vô nghiệm nên không tồn tại điểm M.

c) Điểm $A(1;2;-4)$ nên các cạnh của khối hộp lần lượt là 1, 2, 4, do đó thể tích khối hộp (H) bằng 8.

d) Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\overrightarrow{j}(0;1;0)$.

Điểm $D(x;y;z)$ thỏa mãn $DA=DB=DC$ nên

$$DA^2=DB^2=DC^2\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=x^2+(y-2)^2+z^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ z=-2.\end{cases}$$

Suy ra tọa độ điểm $D\left(\dfrac{1}{2};y;-2\right)$.

Vì DO song song với mặt phẳng (ABC) nên $\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{OD}=0\Leftrightarrow y=0$.

Hay $D\left(\dfrac{1}{2};0;-2\right)\Rightarrow 2x+y-3z=7$.

Câu 23. Chọn đáp án: a b c d

a) Xét số liệu ở Nha Trang:

Cỡ mẫu $n=20$.

Gọi $x_1,x_2,\ldots,x_{20}$ là tổng số giờ nắng trong tháng 6 của 20 năm và giả sử dãy số liệu gốc này đã được sắp xếp theo thứ tự không giảm.

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu là $\dfrac{1}{2}(x_5+x_6)$ thuộc nhóm $[220;250)$ nên tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 220 + \frac{\frac{20}{4} - 3}{8} \cdot (250 - 220) = 227{,}5.$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu là $\frac{1}{2}(x_{15} + x_{16})$ thuộc nhóm $[250; 280)$ nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 250 + \frac{\frac{3 \cdot 20}{4} - 11}{7} \cdot (280 - 250) \approx 267{,}14.$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$\Delta_Q = 267{,}14 - 227{,}5 = 39{,}64.$

b) Tương tự, tính ở Quy Nhơn:

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu là $\frac{1}{2}(x_5 + x_6)$ thuộc nhóm $[220; 250)$ nên

$$Q_1 = 220 + \frac{\frac{20}{4} - 3}{4} \cdot (250 - 220) = 235.$$

Tứ phân vị thứ ba

$$Q_3 = 250 + \frac{\frac{3 \cdot 20}{4} - 7}{10} \cdot (280 - 250) = 274.$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$\Delta_Q = 274 - 235 = 39.$

Khoảng tứ phân vị trong mẫu số liệu số giờ nắng của Quy Nhơn nhỏ hơn khoảng tứ phân vị trong mẫu số liệu thống kê ở Nha Trang, nên so sánh theo khoảng tứ phân vị thì số giờ nắng trong tháng 6 của Quy Nhơn đồng đều hơn.

c)

Số giờ nắng	$[130; 160)$	$[160; 190)$	$[190; 220)$	$[220; 250)$	$[250; 280)$	$[280; 310)$
Giá trị đại diện	145	175	205	235	265	295
Số năm ở Nha Trang	1	1	1	8	7	2
Số năm ở Quy Nhơn	0	1	2	4	10	3

Tại Quy Nhơn:

Số trung bình của mẫu số liệu

$$\overline{x}_1 = \frac{0 \cdot 145 + 1 \cdot 175 + 2 \cdot 205 + 4 \cdot 235 + 10 \cdot 265 + 3 \cdot 295}{20} = 253.$$

Phương sai

$$s_1^2 = \frac{1}{20}\left[0 \cdot (145 - 253)^2 + 1 \cdot (175 - 253)^2 + 2 \cdot (205 - 253)^2 + 4 \cdot (235 - 253)^2 + 10 \cdot (265 - 253)^2 + 3 \cdot (29\right.$$
$$= 936.$$

Độ lệch chuẩn

$s_1 = \sqrt{s_1^2} = \sqrt{936} \approx 30{,}59.$

d) Tại Nha Trang:

Số trung bình của mẫu số liệu

$$\overline{x}_2 = \frac{1 \cdot 145 + 1 \cdot 175 + 1 \cdot 205 + 8 \cdot 235 + 7 \cdot 265 + 2 \cdot 295}{20} = 242{,}5.$$

Phương sai

$$s_2^2 = \frac{1}{20}\left[1 \cdot (145 - 242{,}5)^2 + 1 \cdot (175 - 242{,}5)^2 + 1 \cdot (205 - 242{,}5)^2 + 8 \cdot (235 - 242{,}5)^2 + 7 \cdot (265 - 242{,}5)^2 -\right.$$
$$= 1248{,}75.$$

Độ lệch chuẩn
$s_2 = \sqrt{s_2^2} = \sqrt{1248{,}75} \approx 35{,}34.$
Vì $s_2 > s_1$ nên số giờ nắng trong tháng 6 của Quy Nhơn đồng đều hơn.

Câu 24. Chọn đáp án: a b c d

a) Vì $P(t) = \left|a + b\sin\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right)\right| \leqslant |a| + |b| = a + b, \quad \forall a, b > 0.$

b) Vì $P(t)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{7}} = 7$ nên sau ít nhất 7 ngày thì số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng nhau.

c) Vì:

$$\left|30 + 15\sin\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right)\right| = 37{,}5 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 30 + 15\sin\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right) = 37{,}5 \\ 30 + 15\sin\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right) = -37{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sin\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right) = 0{,}5 \\ \sin\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right) = -4{,}5 \quad \text{(vô nghiệm)} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right) = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right) = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = \frac{11}{3} + 7k \\ t = 6 + 7k \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Mà $t \in [1; 31]$ nên suy ra $t \in \{6; 13; 20; 27\}$.

d) Vì $a, b > 0$ nên $\max P(t) = a + b, \quad \min P(t) = a - b.$
Theo đề bài:
$$\begin{cases} a + b = 50 \\ a - b = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 32{,}5 \\ b = 17{,}5 \end{cases}$$
Khi đó $P(t) = \left|35 + 15\sin\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right)\right|.$

Ngày thứ Hai của tuần thứ 2 ứng với $t = 2$, $P(2) = 35 + 15\sin\left(-\frac{13}{42}\pi\right) \approx 22{,}66.$

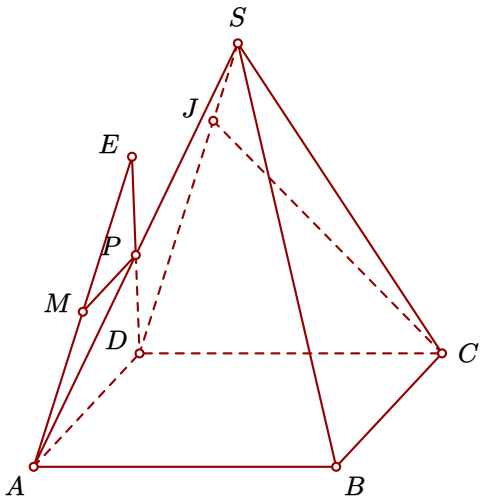
Ngày thứ Tư của tuần thứ 3 ứng với $t = 11$, $P(11) = 35 + 15\sin\left(\frac{95}{42}\pi\right) \approx 45{,}99.$

Ngày thứ Ba của tuần thứ 4 ứng với $t = 17$, $P(17) = 35 + 15\sin\left(\frac{167}{42}\pi\right) \approx 33{,}88.$

Ngày thứ Sáu của tuần thứ 4 ứng với $t = 20$, $P(20) = 35 + 15\sin\left(\frac{29}{6}\pi\right) \approx 42{,}5.$

Suy ra $M = 45{,}99, \quad m = 22{,}6 \Rightarrow M - m \approx 23{,}4 > 23.$

Câu 25. Chọn đáp án: a b c d



a) Giả sử O là tâm hình vuông.

Suy ra $SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA,(ABCD)) = \widehat{SAO} = 60^\circ$.

Do đó, $SO = AO \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với tâm hình vuông $ABCD$, $Ox \parallel AB$, $Oy \parallel AD$, $Oz \equiv SO$.

Khi đó

$A\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{2};0\right)$, $B\left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{2};0\right)$, $C\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$, $D\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)$;

$P\left(-\dfrac{a}{4};-\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{6}}{4}\right)$, $E\left(0;-a;\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)$, $M\left(-\dfrac{a}{4};-\dfrac{3a}{4};\dfrac{a\sqrt{6}}{4}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{PM} = \left(0;-\dfrac{a}{2};0\right)$, $\overrightarrow{CD} = (-a;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow PM \perp CD$.

b) Gọi $J(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{JD} + 3\overrightarrow{JS} = \overrightarrow{0}$.

Ta có $\overrightarrow{JD} = \left(-\dfrac{a}{2}-x;\dfrac{a}{2}-y;-z\right)$, $\overrightarrow{JS} = \left(-x;-y;\dfrac{a\sqrt{6}}{2}-z\right)$.

Suy ra $J\left(-\dfrac{a}{8};\dfrac{a}{8};\dfrac{3a\sqrt{6}}{8}\right) \Rightarrow \overrightarrow{u}_{JC} = \left(5;3;-3\sqrt{6}\right)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{MA} = \left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{4};-\dfrac{a\sqrt{6}}{4}\right)$, $\overrightarrow{MB} = \left(\dfrac{3a}{4};\dfrac{a}{4};-\dfrac{a\sqrt{6}}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n}_{(MAB)} = \left(0;\sqrt{6};1\right)$.

Khi đó, $\overrightarrow{u}_{JC} \cdot \overrightarrow{n}_{(MAB)} = 0$.

Do đó, $JC \parallel (MAB)$ (vì $C \notin (MAB)$).

c) Góc nhị diện $[M,BC,A]$ bằng góc giữa hai mặt phẳng (MBC) và (ABC).

Ta có $\overrightarrow{n}_{(ABC)} = (0;0;1)$.

$\overrightarrow{MB} = \left(\dfrac{3a}{4};\dfrac{a}{4};-\dfrac{a\sqrt{6}}{4}\right)$, $\overrightarrow{MC} = \left(\dfrac{3a}{4};\dfrac{5a}{4};-\dfrac{a\sqrt{6}}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n}_{(MBC)} = \left[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right] = \left(\sqrt{6};0;3\right)$.

Suy ra $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{n}_{(ABC)} \cdot \overrightarrow{n}_{(MBC)}\right|}{\left|\overrightarrow{n}_{(ABC)}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}_{(MBC)}\right|} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

d) Ta có

$\overrightarrow{SB} = \left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SC} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n}_{(SBC)} = \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right] = \left(\sqrt{6};0;1\right)$.

Suy ra $(SBC)\colon \sqrt{6}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)+z=0 \Leftrightarrow \sqrt{6}x+z-\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=0$.

Từ đó

$$\mathrm{d}(M,(SBC))=\frac{\left|\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{a}{4}\right)+\frac{a\sqrt{6}}{4}-\frac{a\sqrt{6}}{2}\right|}{\sqrt{(\sqrt{6})^2+1^2}}=\frac{a\sqrt{42}}{14}.$$

Câu 26. Chọn đáp án: a b c d

a) Để tính số cách xếp 18 thành viên đứng thành vòng tròn, ta sử dụng công thức $(n-1)!$ với n là số thành viên.

Do đó, số cách xếp là 17!.

b) Trong vòng tròn có 18 người, mỗi người có 2 người đứng cạnh mình (một bên trái, một bên phải).

Như vậy, số cách chọn cặp 2 người đứng cạnh nhau là 18 cách (1).

Chọn 2 thành viên còn lại không đứng cạnh nhau và không đứng cạnh cặp đã chọn: sau khi chọn 1 cặp (2 người), còn lại $18-2=16$ người.

Lại có 2 vị trí liền kề cặp đã chọn không được chọn nên còn $16-2=14$ người có thể chọn.

Chọn 2 người trong 14 người này sao cho họ không đứng cạnh nhau: số cách chọn 2 người bất kỳ là C_{14}^2, trong 14 người xếp hàng có 13 cặp đứng cạnh nhau (tức 13 cách), vậy số cách chọn 2 người không đứng cạnh nhau là

$\mathrm{C}_{14}^2-13=78$ (2).

Tổng số cách chọn 4 thành viên (bao gồm 2 thành viên đứng cạnh nhau và 2 thành viên không đứng cạnh nhau và cũng không đứng cạnh cặp đã chọn) là

$18\cdot 78=1404$.

c) Số cách chọn 4 thành viên từ 18 thành viên là

$\mathrm{C}_{18}^4=3060$.

Mỗi người bốc một câu hỏi từ 8 câu hỏi khác nhau, không bỏ lại.

Số cách bốc câu hỏi là

$8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=1680$.

Vậy tổng số cách là

$3060\cdot 1680=5140800$.

d) Ta có

$$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{C}_{14}^4}{\mathrm{C}_{18}^4}=\frac{1001}{3060}=\frac{91}{170}.$$

Câu 27. Đáp án: 199.

Vì $u(x)>0,\forall x\in(0;5)$ nên

$$\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}<m\cdot u(x)\Leftrightarrow m>\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{u(x)},\forall x\in(0;5).$$

Xét hàm số $y=\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}$ trên $(0;5)$.

Ta có

$$y'=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{10-2x}}$$

$$\begin{aligned}y'=0&\Leftrightarrow\sqrt{3}\sqrt{10-2x}=2\sqrt{x}\\&\Leftrightarrow 30-6x=4x\\&\Leftrightarrow x=3.\end{aligned}$$

Ta có bảng biến thiên

x	0		3		5
y'		$+$	0	$-$	
y	$\sqrt{10}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\sqrt{15}$

Do đó GTLN của y bằng 5 khi $x = 3$.
Mà GTNN của $u(x)$ trên $(0;5)$ bằng 1 khi $x = 3$.
Suy ra GTLN của $\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{u(x)}$ trên $(0;5)$ bằng 5.
Vậy $m > 5$.
Mà m nguyên bé hơn 205 nên $m \in \{6;7;\ldots;204\}$.
Vậy có 199 số nguyên.

Câu 28. Đáp án: 49,5.
Ta có parabol có đỉnh là điểm $(0;60)$ nên có phương trình là $y = cx^2 + 60$.
Vì parabol đi qua điểm $(40;0)$ nên $c = -\dfrac{3}{80}$.
Vậy phương trình của parabol là $y = -\dfrac{3}{80}x^2 + 60$.
Vì $X(-40;40)$, $Y(40;30)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 40 = -\dfrac{5}{2} - 40a + b \\ 30 = \dfrac{5}{2} + 40a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{16} \\ b = 35. \end{cases}$$

Vậy phương trình của cầu XY là $y = \dfrac{1}{25600}x^3 - \dfrac{3}{16}x + 35$.
Gọi $M\left(x; \dfrac{1}{25600}x^3 - \dfrac{3}{16}x + 35\right)$ và $N\left(x; -\dfrac{3}{80}x^2 + 60\right)$ với $0 \leqslant x \leqslant 40$.
Suy ra:

$$\begin{aligned} MN &= -\frac{3}{80}x^2 + 60 - \frac{1}{25600}x^3 + \frac{3}{16}x - 35 \\ &= -\frac{1}{25600}x^3 - \frac{3}{80}x^2 + \frac{3}{16}x + 25. \end{aligned}$$

Vì $MN \geqslant 0$ nên $0 \leqslant x \leqslant 27{,}9962579$ và giá trị lớn nhất của MN bằng 25,2337682 khi $x = 2{,}490309932$.
N và Q là hai điểm đối xứng qua trục $Oy \Rightarrow N\left(-x; -\dfrac{3}{80}x^2 + 60\right) \Rightarrow P\left(-x; \dfrac{1}{25600}x^3 - \dfrac{3}{16}x + 35\right)$.
Khi đó $PQ = -\dfrac{1}{25600}x^3 - \dfrac{3}{80}x^2 + \dfrac{3}{16}x + 25$ ứng với $x = -2{,}490309932$ hay $PQ = 24{,}30110854$.
Vậy tổng độ dài hai đoạn cáp treo bằng 49,5 m.

Câu 29. Đáp án: 7.

$$\begin{aligned} 2MB^2 + 3MC^2 - 4MD^2 &= 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 - 4\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right)^2 \\ &= MA^2 + 2\overrightarrow{MA}\left(2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD}\right) + 2AB^2 + 3AC^2 - 4AD^2 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB} = (-2;-5;-4)$, $\overrightarrow{AC} = (0;-2;0)$, $\overrightarrow{AD} = (-1;-4;-2)$
$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$
$\Rightarrow 2MB^2 + 3MC^2 - 4MD^2 = MA^2 + 18$
Vậy:

$P = \left(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}\right)^2 + MA^2 + 18$

$= MA^2 \cdot MB^2 \cdot \cos^2 \widehat{BMA} + MA^2$

$= MA^2 \left(MB^2 \cdot \cos^2 \widehat{BMA} + 1\right)$

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (Oxy). Khi đó ta có $MA \geqslant AH = 5$.

Hơn nữa $MB^2 \cdot \cos^2 \widehat{BMA} + 1 \geqslant 1$.

Do đó $P \geqslant AH^2 + 18 = 43$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} MA \perp MB \\ M \equiv H \end{cases} \Rightarrow M(3;4;0)$.

Do đó $a + b + c = 7$.

Câu 30. Đáp án: 3.

Ta có:

$(xy^2 + x - 2y - 1)\log y = \log \dfrac{2y - x + 3}{x}$

$\Leftrightarrow (xy^2 + x - 2y - 3)\log y + 2\log y - \log \dfrac{2y - x + 3}{x} = 0$

$\Leftrightarrow (xy^2 + x - 2y - 3)\log y + \log \dfrac{xy^2}{2y - x + 3} = 0 \quad (*)$

Trường hợp 1: $y = 1 \Rightarrow \log \dfrac{2y - x + 3}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.

$P = \sqrt{6}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} - 3 \notin \mathbb{Z}$.

Trường hợp 2: $y > 1$.

Nếu $xy^2 + x - 2y - 3 > 0 \Leftrightarrow xy^2 > 2y - x + 3 \Rightarrow \log \dfrac{xy^2}{2y - x + 3} > 0 \Rightarrow \text{VT}(*) > 0$.

Nếu $xy^2 + x - 2y - 3 < 0 \Leftrightarrow xy^2 < 2y - x + 3 \Rightarrow \log \dfrac{xy^2}{2y - x + 3} < 0 \Rightarrow \text{VT}(*) < 0$.

Do vậy:

$xy^2 + x - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2y + 3}{y^2 + 1} \quad (y > 1)$.

Xét hàm số $f(y) = \dfrac{2y + 3}{y^2 + 1}$ với $y > 1$:

$f'(y) = \dfrac{-2y^2 - 6y + 2}{(y^2 + 1)^2} < 0, \quad \forall y > 1 \Rightarrow 0 < x < \dfrac{5}{2}$.

Hay $x \in \left(0; \dfrac{5}{2}\right)$.

$P = \sqrt{6}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5} - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{6}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5} - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi x}{5} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{6}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5} - \dfrac{7\pi}{12}\right), \quad x \in \left(0; \dfrac{5}{2}\right)$.

$P' = \dfrac{2\sqrt{6}\pi}{5}\cos\left(\dfrac{\pi x}{5} - \dfrac{7\pi}{12}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{65}{12} + 5k \in \left(0; \dfrac{5}{2}\right) \Rightarrow k \in \left(-\dfrac{13}{12}; -\dfrac{7}{12}\right)$

$\Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = \dfrac{5}{12}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số P trên $\left(0; \dfrac{5}{2}\right)$ ta được:

$-2\sqrt{6} \leqslant P < -3 + \sqrt{3} \Rightarrow P \in \{-4; -3; -2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của P.

Câu 31. Đáp án: 1,32.
Đặt $B'M = x \quad (0 < x < 2)$.
Theo giả thiết ta có:
$\frac{x^2\sqrt{3}}{2} = 4 - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{\sqrt{3}-1}$.
Vậy thể tích khối thu được là:
$V = 2^3 - 8 \cdot \frac{1}{6}x^3 = 8 - \frac{4}{3} \cdot 8 \cdot (\sqrt{3}-1)\sqrt{\sqrt{3}-1} \approx 1{,}32\text{cm}^3$.

Câu 32. Đáp án: -349.
Đặt $X = \{4;8\}$, $Y = \{1;2;3;5;6;7\}$.
Vì sau mỗi lần lấy được thẻ thì lại bỏ lại vào hộp và có 5 lần rút như vậy nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 8^5$.
Gọi A là biến cố "trong 5 số ghi được có đúng 2 chữ số chia hết cho 4".
Để đếm số khả năng thuận lợi cho biến cố A, ta thực hiện các công đoạn sau:
+ Chọn 2 lần trong 5 lần lấy được số chia hết cho 4: có C_5^2 cách.
+ Với mỗi lần chọn ở trên đều có 2 cách chọn 1 chữ số chia hết cho 4 từ tập X.
+ Với 3 lần còn lại, mỗi lần đều có 6 cách chọn 1 chữ số không chia hết cho 4 từ tập Y.
$\Rightarrow n(A) = \mathrm{C}_5^2 \cdot 2^2 \cdot 6^3$.
$\Rightarrow \mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\mathrm{C}_5^2 \cdot 2^2 \cdot 6^3}{8^5} = \frac{135}{512}$.
$\Rightarrow a = 135,\ b = 512 \Rightarrow 5a - 2b = 5 \cdot 135 - 2 \cdot 512 = -349$.

Minh họa Ninh Bình

Câu 1. Chọn đáp án A

Ta có

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=4. \end{array}\right.$$

Trong đó, nghiệm $x=4$ là nghiệm bội chẵn.

Xét dấu $f'(x)$, ta có hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-2;2)$.

Câu 2. Chọn đáp án C

Nhìn đồ thị ta có $-5 \leqslant f(x) \leqslant 5,\ \forall x \in [-4;4]$.

Suy ra $-10 \leqslant 2f(x) \leqslant 10,\ \forall x \in [-4;4]$.

Vậy $\max\limits_{[-4;4]} 2f(x)=2f(4)=10$.

Câu 3. Chọn đáp án B

$(C)\colon x^2+y^2-4x+2y-4=0$ có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=\sqrt{2^2+(-1)^2+4}=3$.

Vì $d \parallel \Delta\colon 3x+4y-17=0$ nên phương trình d có dạng $3x+4y+C=0$ $(C \neq -17)$.

Ta có d là tiếp tuyến của đường tròn $(C) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,d)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3\cdot 2+4\cdot(-1)+C|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$$

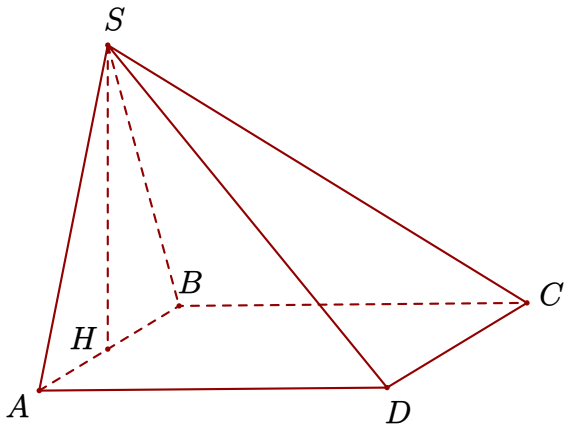
$$\Leftrightarrow |2+C|=15$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+C=15 \\ 2+C=-15 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=13 \text{ (thỏa mãn)} \\ C=-17 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Vậy có 1 tiếp tuyến của đường tròn (C) song song với đường thẳng $\Delta\colon 3x+4y-17=0$.

Câu 4. Chọn đáp án A



Gọi H là trung điểm của AB.

Do tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.

Mặt khác, $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Tam giác SAB đều và có cạnh $AB=2a \Rightarrow SH=a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V=\frac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot a\sqrt{3}\cdot 4a^2=\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 5. Chọn đáp án D
Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(1;-1;3)$.
Mặt cầu đường kính AB có tâm I và bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{(3+1)^2+(1+3)^2+(4-2)^2}}{2} = 3$.
Phương trình mặt cầu đường kính AB là: $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 9$.

Câu 6. Chọn đáp án B
Trường hợp 1: Hai học sinh lớp A đứng cạnh nhau.
- Xếp hai học sinh lớp A có 2 cách.
- Xếp 2 học sinh lớp A cùng với các học sinh còn lại có 8! cách.
Trường hợp này có $2 \cdot 8! = 80\,640$ cách.
Trường hợp 2: Có 1 học sinh lớp C đứng giữa 2 học sinh lớp A.
- Xếp 1 học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A có $2 \cdot 4$ cách.
- Xếp 3 học sinh trên cùng các học sinh còn lại có 7! cách.
Trường hợp này có $4 \cdot 2 \cdot 7! = 40\,320$ cách.
Trường hợp 3: Có 2 học sinh lớp C đứng giữa 2 học sinh lớp A.
- Xếp 2 học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A có $2 \cdot \mathrm{A}_4^2$ cách.
- Xếp 4 học sinh trên cùng các học sinh còn lại có 6! cách.
Trường hợp này có $2 \cdot \mathrm{A}_4^2 \cdot 6! = 17\,280$ cách.
Trường hợp 4: Có 3 học sinh lớp C đứng giữa 2 học sinh lớp A.
- Xếp 3 học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A có $2 \cdot \mathrm{A}_4^3$ cách.
- Xếp 4 học sinh trên cùng các học sinh còn lại có 5! cách.
Trường hợp này có $2 \cdot \mathrm{A}_4^3 \cdot 5! = 5\,760$ cách.
Trường hợp 5: Có 4 học sinh lớp C đứng giữa 2 học sinh lớp A.
- Xếp 4 học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A có $2 \cdot 4!$ cách.
- Xếp 4 học sinh trên cùng các học sinh còn lại có 4! cách.
Trường hợp này có $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1\,152$ cách.
Vậy có $80\,640 + 40\,320 + 17\,280 + 5\,760 + 1\,152 = 145\,152$ cách.

Câu 7. Chọn đáp án C
Ta có
$$f(x) = \log_2\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}}\right)$$
$$= \log_2\left(\frac{(2x-1) + \sqrt{(2x-1)^2+16}}{2}\right).$$
Xét tổng
$$f(x) + f(1-x) = \log_2\left(\frac{(2x-1) + \sqrt{(2x-1)^2+16}}{2}\right) + \log_2\left(\frac{-(2x-1) + \sqrt{(2x-1)^2+16}}{2}\right)$$
$$= \log_2 4$$
$$= 2.$$
Vậy
$$T = \left[f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2024}{2025}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{1012}{2025}\right) + f\left(\frac{1013}{2025}\right)\right]$$
$$= 2 \cdot 1012$$
$$= 2024.$$

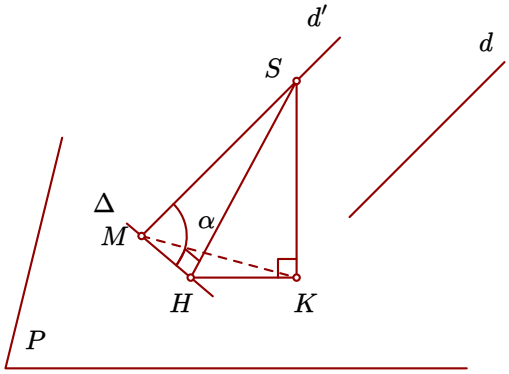
Câu 8. Chọn đáp án C
Theo bài ra, ta có hệ

$\begin{cases} 1-(1-x)(1-y)\cdot 0{,}2 = 0{,}992 \\ 0{,}8\cdot xy = 0{,}432 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1{,}5 \\ xy = 0{,}54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}6 \\ y = 0{,}9. \end{cases}$

Xác suất để có đúng một người ném trúng rổ là

$x\cdot 0{,}2\cdot(1-y)+(1-x)\cdot 0{,}8\cdot(1-y)+(1-x)\cdot 0{,}2\cdot y = 0{,}116.$

Câu 9. Chọn đáp án C



Lấy S là điểm bất kỳ trên d'. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của S lên (P) và Δ.

Suy ra $(d;(P)) = (d';(P)) = \widehat{SMK}$.

Ta có $\sin\widehat{SMK} = \dfrac{SK}{SM} \leqslant \dfrac{SH}{SM}$.

Vì $\widehat{SMK} \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ nên $\widehat{SMK}$ lớn nhất khi $\sin\widehat{SMK}$ lớn nhất.

Mà $\sin\widehat{SMK}$ lớn nhất bằng $\dfrac{SH}{SM}$ khi điểm K trùng với điểm H.

Suy ra $SH \perp (P)$ nên $(SHM) \perp (P)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{u}_\Delta, \overrightarrow{u}_d] = (8;0;-4)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (SHM).

Nên $\overrightarrow{n}_1 = [\overrightarrow{u}_\Delta, \overrightarrow{n}] = (-8;20;-16)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Suy ra chọn $\overrightarrow{n}_{(P)} = (2;-5;4)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $2x-5y+4z+1=0$.

Suy ra $m=-5$; $n=4$; $p=1 \Rightarrow mnp = -20$.

Câu 10. Chọn đáp án A

Do $-1 \leqslant \cos\left[\dfrac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leqslant 1$ nên $-3 \leqslant 3\cos\left[\dfrac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leqslant 3$ hay $-3 \leqslant d \leqslant 3$.

Do đó, $0 \leqslant |d| \leqslant 3$.

Một người chơi đạt cảm giác mạnh nhất khi ở vị trí xa nhất so với vị trí cân bằng, tức là $h=3$.

Suy ra

$$\begin{aligned} h = 3 &\Leftrightarrow |d| = 3 \\ &\Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1 \\ &\Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \\ &\Leftrightarrow t = \frac{1+3k}{2} \end{aligned}$$

với $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$.

Trong khoảng thời gian 1 phút, ta có $0 \leqslant \dfrac{1+3k}{2} \leqslant 60 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \leqslant k \leqslant \dfrac{119}{3}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$ nên $k \in \{0;1;2;\ldots;39\}$.

Vậy trong khoảng thời gian 1 phút, người chơi đu đạt được cảm giác mạnh 40 lần.

Câu 11. Chọn đáp án C

Ta có

$h'(x) = 2xf'\left(x^2-1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 0 \\ f'\left(x^2-2x\right) = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2-1 = -1 \\ x^2-1 = 2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 0 \text{ (kép)} \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên hàm $y = h(x)$

x	$-\sqrt{7}$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$\sqrt{7}$
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
h		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $h(x)$ có 1 điểm cực đại tại $x = 0$.

Câu 12. Chọn đáp án C

Giả sử parabol $y = f(x)$ cho bởi $f(x) = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$.

Do parabol $y = f(x)$ đi qua điểm $D(0;2)$ nên $c = 2$, suy ra $f(x) = ax^2+bx+2$ $(a \neq 0)$.

Vì parabol $y = f(x)$ đi qua các điểm $C(-4;0)$, $E(4;0)$ nên ta có

$\begin{cases} 16a-4b+2 = 0 \\ 16a+4b+2 = 0. \end{cases}$

Hệ phương trình trên có nghiệm là $a = -\dfrac{1}{8}$, $b = 0$.

Vậy $f(x) = -\dfrac{1}{8}x^2+2$.

Giả sử parabol $y = g(x)$ cho bởi $g(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$ $(a_1 \neq 0)$.

Do parabol $y = g(x)$ đi qua điểm $G(0;-3)$ nên $c_1 = -3$, suy ra $g(x) = a_1x^2+b_1x-3$ $(a_1 \neq 0)$.

Vì parabol $y = g(x)$ đi qua các điểm $C(-4;0)$, $E(4;0)$ nên ta có

$\begin{cases} 16a_1-4b_1-3 = 0 \\ 16a_1+4b_1-3 = 0. \end{cases}$

Hệ phương trình trên có nghiệm là $a_1 = \dfrac{3}{16}$, $b_1 = 0$.

Vậy $g(x) = \dfrac{3}{16}x^2-3$.

Diện tích của logo là $S = S_1+S_2$, trong đó S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các parabol $f(x) = -\dfrac{1}{8}x^2+2$, $g(x) = \dfrac{3}{16}x^2-3$ và hai đường thẳng $x = -5$, $x = -4$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các parabol $f(x) = -\dfrac{1}{8}x^2+2$, $g(x) = \dfrac{3}{16}x^2-3$ và hai đường thẳng $x = -4$, $x = 4$.

Do đó, ta có

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-5}^{-4} |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{-4}^{4} |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-5}^{-4} [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x + \int_{-4}^{4} [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-5}^{-4} \left[\left(\frac{3}{16}x^2-3\right)-\left(-\frac{1}{8}x^2+2\right)\right]\mathrm{d}x + \int_{-4}^{4} \left[\left(-\frac{1}{8}x^2+2\right)-\left(\frac{3}{16}x^2-3\right)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_{-5}^{-4} \left(\frac{5}{16}x^2-5\right)\mathrm{d}x + \int_{-4}^{4} \left(-\frac{5}{16}x^2+5\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{48}x^3\Big|_{-5}^{-4} - 5x|_{-5}^{-4} - \frac{5}{48}x^3\Big|_{-4}^{4} + 5x|_{-4}^{4} \\
&= \frac{305}{48} - 5 - \frac{640}{48} + 40 \\
&= \frac{1345}{48}\ \mathrm{dm}^2.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \dfrac{1345}{48}\ \mathrm{dm}^2$.

Gọi t là lượng ánh sáng đi qua mỗi dm^2 của logo.

Suy ra lượng ánh sáng đi qua logo là $\dfrac{1345}{48}t$.

Mặt khác, diện tích của cửa sổ là $(8+1)\cdot(2+3) = 45\ \mathrm{dm}^2$ và lượng ánh sáng đi qua mỗi dm^2 của phần cửa sổ nằm ngoài logo là $2t$.

Suy ra lượng ánh sáng đi qua cửa sổ trước khi làm logo là $45\cdot 2t = 90t$ và lượng ánh sáng đi qua phần cửa sổ nằm ngoài logo là $\left(45-\dfrac{1345}{48}\right)\cdot 2t = \dfrac{815}{24}t$.

Do đó, tổng lượng ánh sáng đi qua cửa sổ sau khi làm logo là $\dfrac{1345}{48}t + \dfrac{815}{24}t = \dfrac{2975}{48}t$.

Tỉ số phần trăm của lượng ánh sáng đi qua cửa sổ sau khi làm logo so với lượng ánh sáng đi qua cửa sổ trước khi làm logo là

$\left(\dfrac{2975}{48}t : 90t\right)\cdot 100\% = \dfrac{297500}{4320}\% \approx 68{,}9\%$.

Vậy lượng ánh sáng khi đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm đi xấp xỉ là $100\% - 68{,}9\% = 31{,}1\%$.

Câu 13. Chọn đáp án: a b c d

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ mà $1\in(0;2)$ nên hàm số không đồng biến, không nghịch biến trên $(0;2)$.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}-(x+3)\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{1}{x-1}\right] = 0$ nên $y=x+3$ là tiệm cận xiên.

c) Đặt $t = 2x \Rightarrow t\in\left[\dfrac{3}{2};4\right]$ bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(t) = \dfrac{t^2+2t-2}{t-1};\ \forall t\in\left[\dfrac{3}{2};4\right];\ f'(t) = \dfrac{t^2-2t}{(t-1)^2}$.

Bảng xét dấu:

t	$\frac{3}{2}$		2		4
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{13}{2}$	↗	6	↘	$\frac{22}{3}$

Dựa vào bảng xét dấu ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\frac{13}{2}$.

d) Ta có $y' = \frac{x^2-2x-2+m}{(x-1)^2}$, để hàm số có hai điểm cực trị thì $\frac{x^2-2x-2+m}{(x-1)^2} = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-2+m=0 \\ 1^2-2\cdot 1-2+m \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3-m > 0 \\ m \neq 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m < 3$.

Vậy có 2 số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14. Chọn đáp án: a b c d

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua các điểm $A(-3;-2)$, $B(2;3)$, $D(5;0)$.

Đường thẳng AB có phương trình là $(AB)\colon \frac{x+3}{5} = \frac{y+2}{5} \Leftrightarrow y = x+1$.

Đường thẳng BC có phương trình là $(BC)\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-3} \Leftrightarrow y = -x+5$.

Do đó

$$f'(x) = \begin{cases} x+1 \text{ khi } -3 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x+5 \text{ khi } 2 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}+x+C_1 \text{ khi } -3 \leqslant x \leqslant 2 \\ -\frac{x^2}{2}+5x+C_2 \text{ khi } 2 \leqslant x \leqslant 6. \end{cases}$$

Theo đề bài

$\begin{cases} f(-1) = \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}+C_1 \Leftrightarrow C_1 = 1 \\ f(2) = 5 = 8+C_2 \Leftrightarrow C_2 = -3. \end{cases}$

Suy ra hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}+x+1 \text{ khi } -3 \leqslant x \leqslant 2 \\ -\frac{x^2}{2}+5x-3 \text{ khi } 2 \leqslant x \leqslant 6. \end{cases}$$

a) $f'(6) = -6+5 = -1$.

b) $f(5) = \frac{19}{2}$; $f(6) = 9$; $f(2) = 5$

$\Rightarrow f(5) = \frac{19}{2} > f(6) = 9 > f(2) = 5$.

c) $f(4) = -\frac{4^2}{2}+5\cdot 4-3 = 9 \neq 3$.

d) Tính tích phân

$$\int_{-3}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{2}\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right)\mathrm{d}x + \int_{2}^{6}\left(-\frac{x^2}{2}+5x-3\right)\mathrm{d}x = \frac{125}{3}.$$

Câu 15. Chọn đáp án: a b c d

a) Vì theo bài ra ta có $\overline{x}_A = \dfrac{15\cdot 12{,}5 + 18\cdot 17{,}5 + 10\cdot 22{,}5 + 10\cdot 27{,}5 + 5\cdot 32{,}5 + 2\cdot 37{,}5}{15+18+10+10+5+2} \approx 20{,}67.$

b) Vì đối với công ty A, nhân viên có mức lương tối đa gần 40 triệu đồng.

c) Vì công ty B, mức lương từ 26,11 triệu trở lên thuộc hai nhóm $[30;35)$ và $[35;40)$.

Số nhân viên là $5+3=8$. Suy ra % nhân viên có mức lương từ 26,11 triệu trở lên là $\dfrac{8}{60}\cdot 100 = 13{,}33\%$.

d) Vì $\overline{x}_B = \dfrac{12{,}5\cdot 16 + 17{,}5\cdot 15 + 24{,}5\cdot 12 + 27{,}5\cdot 9 + 34{,}5\cdot 5 + 37{,}5\cdot 3}{60} = 20{,}92.$

Độ lệch chuẩn là $s_A = 7{,}01$ và $s_B = 7{,}5$.

Ta thấy công ty A có mức lương đồng đều hơn công ty B.

Câu 16. Chọn đáp án: a b c d

a) $\left.\begin{array}{l} AC \perp BD \\ BD \parallel B'D' \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp B'D'.$

b) $\left.\begin{array}{l} MC' \subset (A'B'C'D') \\ BP \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{d}(MC', BP) = \mathrm{d}((ABCD),(A'B'C'D')) = AA'.$

Đặt $AA' = h$.

+) $\overrightarrow{BM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}.$

+) $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}.$

+) $BM \perp PN \Rightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{PN} = 0$

$\Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}\right) = 0$

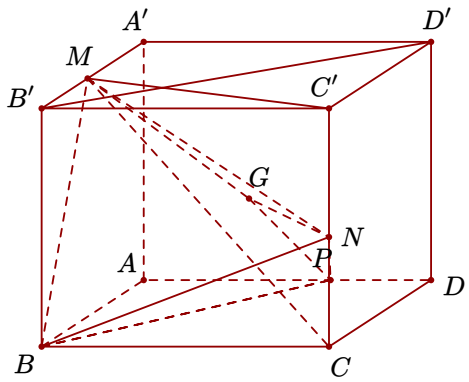
$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}AB^2 + \dfrac{1}{2}AA'^2 = 0$

$\Leftrightarrow h = a.$

Vậy $\mathrm{d}(MC', BP) = a$.

c) Ta có $BM = BN = BP = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $MN = NP = MP = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

$\Rightarrow B.MNP$ là hình chóp đều.



Gọi G là trọng tâm tam giác $MNP \Rightarrow BG \perp (MNP)$.

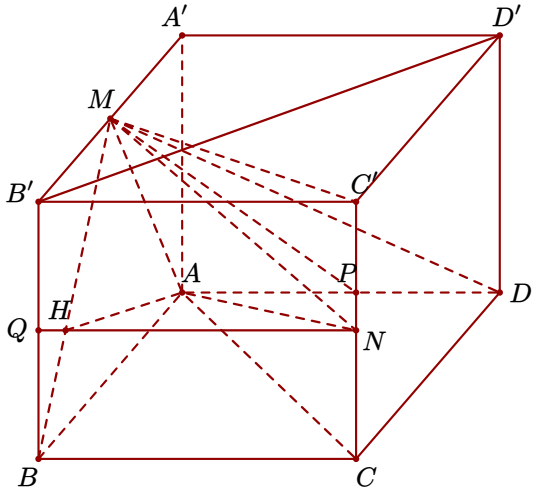
$\overrightarrow{BG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BP}\right) = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}.$

$\Rightarrow BG = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

+) $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{AA'}=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}\right)\cdot\overrightarrow{AA'}=\frac{a^2}{2}$.

$\Rightarrow \cos\alpha=\cos(BG,AA')=\cos\left(\overrightarrow{BG},\overrightarrow{AA'}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{AA'}}{BG\cdot AA'}=\dfrac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

d) Gọi Q là trung điểm của $BB'\Rightarrow QN\parallel AD$, $AQ\perp BM$.



Gọi $H=BM\cap AQ\Rightarrow BH=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$, $MH=\dfrac{3\sqrt{5}a}{10}$.

+) $\left.\begin{matrix}MH\perp AQ\\MH\perp QN\end{matrix}\right\}\Rightarrow MH\perp(AQND)$.

+) $V_{M.AQND}=\dfrac{1}{3}\cdot MH\cdot S_{AQND}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{5}a}{10}\cdot\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\cdot a=\dfrac{a^3}{4}$.

+) $V_{AMNP}=V_{M.ANP}=\dfrac{1}{2}V_{M.AND}=\dfrac{1}{4}V_{M.AQND}=\dfrac{a^3}{16}$.

Câu 17. Đáp án: 4,6.

Đặt $x=BC$ km, $0\leqslant x\leqslant 8$.

Ta có $AC=\sqrt{9+(8-x)^2}=\sqrt{73-16x+x^2}$ km.

Từ đó suy ra tổng thời gian người đó đi bộ và chèo thuyền là

$t(x)=\dfrac{\sqrt{73-16x+x^2}}{6}+\dfrac{x}{8}$ h, ta cần tìm x để $t(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $t'(x)=\dfrac{-16+2x}{12\sqrt{73-16x+x^2}}+\dfrac{1}{8}$.

$t'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-16+2x}{12\sqrt{73-16x+x^2}}+\dfrac{1}{8}=0\Leftrightarrow 2(16-2x)=3\sqrt{73-16x+x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 8\\7x^2-112x+367=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$x=\dfrac{56-9\sqrt{7}}{7}$.

$t(0)=\dfrac{\sqrt{73}}{6}$, $t(8)=\dfrac{3}{2}$, $t\left(\dfrac{56-9\sqrt{7}}{7}\right)=\dfrac{8+\sqrt{7}}{8}$.

Vậy tổng thời gian nhỏ nhất đạt được khi $BC=x=\dfrac{56-9\sqrt{7}}{7}\approx 4{,}6$.

Câu 18. Đáp án: 4.

Đặt số lượng vi khuẩn ban đầu là $N_0=10^9$.

Số lượng vi khuẩn sau khi dùng thuốc lần 1 là $N_1=N_0-4\cdot 10^8=10^9-4\cdot 10^8=6\cdot 10^8$.

Số lượng vi khuẩn sau khi tăng trưởng 25% là $N_1'=N_1+0{,}25\cdot N_1=1{,}25\cdot N_1=7{,}5\cdot 10^8$.

Số lượng vi khuẩn sau khi dùng thuốc lần 2 là $N_2 = N_1' - 4 \cdot 10^8 = 3{,}5 \cdot 10^8$.
Số lượng vi khuẩn sau khi tăng trưởng 25% là $N_2' = N_2 + 0{,}25 \cdot N_2 = 1{,}25 \cdot N_2 = 4{,}375 \cdot 10^8$.
Số lượng vi khuẩn sau khi dùng thuốc lần 3 là $N_3 = N_2' - 4 \cdot 10^8 = 0{,}375 \cdot 10^8$.
Số lượng vi khuẩn sau khi tăng trưởng 25% là $N_3' = 1{,}25 \cdot N_3 = 0{,}46875 \cdot 10^8$.
Số lượng vi khuẩn sau khi dùng thuốc lần 4 là $N_4 = N_3' - 4 \cdot 10^8 = -3{,}53125 \cdot 10^8 < 10^4$.
Vậy trong thí nghiệm trên cần dùng 4 liều thuốc thì vi khuẩn không có khả năng lây bệnh.

Câu 19. Đáp án: 0,21.
Xác suất xuất hiện mặt số chẵn trong một lần gieo là $\dfrac{5}{8}$.
Gọi biến cố A là " mặt có số chấm chẵn xuất hiện 2 lần trong 5 lần gieo".
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \mathrm{C}_5^2 \cdot \left(\dfrac{5}{8}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{8}\right)^3 = \dfrac{3375}{16384} \approx 0{,}21$.

Câu 20. Đáp án: 3,74.
Gọi $B(x;0;0)$ và $\overrightarrow{BA} = (1-x;2;-1)$.
Ta có $\Delta \perp d \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}\right) \cdot (\overrightarrow{u_d}) = 0 \Leftrightarrow 1(1-x) - 2 \cdot 2 - 1(-1) = 0$.
$\Leftrightarrow 1 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
$\Rightarrow BA = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$.

Câu 21. Đáp án: 810.
Cabin di chuyển dọc theo đường thẳng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-2;1)$ và xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$.
Phương trình tham số của đường đi là $\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t, \end{cases}$ với t là tham số.
Khi cabin đến điểm B, ta có $x_B = 550$.
Thay vào phương trình tham số của x, ta có $10 + 2t = 550 \Leftrightarrow t = 270$.
Từ đó suy ra tọa độ điểm B là $B(550;-537;270)$.
Vậy độ dài $AB = \sqrt{(550-10)^2 + (-537-3)^2 + 270^2} = 810$ m.

Câu 22. Đáp án: 0,82.
Gọi A là biến cố " Thí nghiệm thứ nhất thành công", $\mathrm{P}(A) = 0{,}7$, $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}3$.
B là biến cố " Thí nghiệm thứ hai thành công".
Ta có $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}8$, $\mathrm{P}(B \mid \overline{A}) = 0{,}4$.
Xác suất để thí nghiệm thứ 2 thành công là
$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(B \mid \overline{A}) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}68$.
Xác suất để cả 2 thí nghiệm thành công là $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.
Vậy xác suất để thí nghiệm thứ nhất thành công nếu thí nghiệm thứ 2 thành công là
$\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{0{,}56}{0{,}68} \approx 0{,}82$.

Sở Bắc Ninh

Câu 1. Chọn đáp án B

Có hai mươi tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên 6 tấm thẻ. Xác suất để trong 6 tấm thẻ được chọn có hai tấm thẻ mà tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ bằng 21.

Ta có các cặp số có tổng bằng 21 là

$\{(1;20),(2;19),(3;18),(4;17),(5;16),(6;15),(7;14),(8;13),(9;12),(10;11)\}$.

Đặt $A=$ "Trong 6 tấm thẻ được chọn có hai tấm thẻ mà tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ bằng 21".

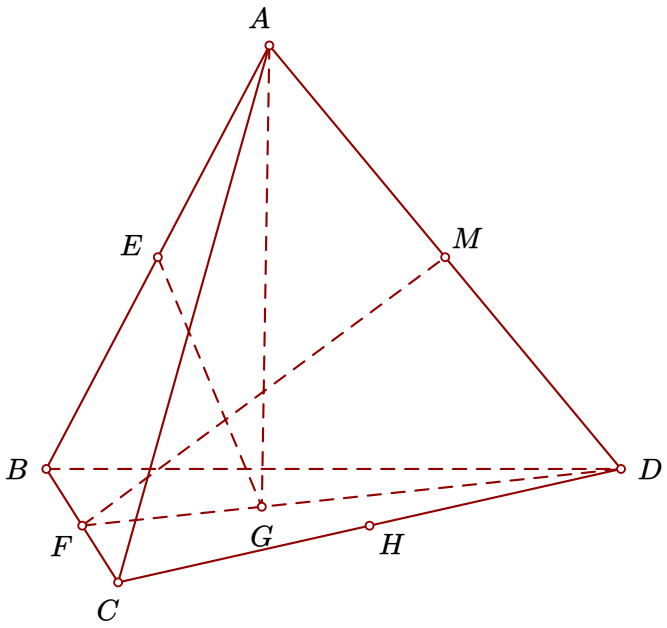
Suy ra $\overline{A}=$ "Trong 6 tấm thẻ được chọn không có hai tấm thẻ mà tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ bằng 21".

Ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_{20}^{6}$.

Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $n(\overline{A})=\mathrm{C}_{10}^{6}\cdot 2^{6}$ (chọn ra 6 cặp trong 10 cặp trên và mỗi cặp lấy ra 1 số).

Vậy $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(\overline{A})=1-\dfrac{\mathrm{C}_{10}^{6}\cdot 2^{6}}{\mathrm{C}_{20}^{6}}=\dfrac{211}{323}$.

Câu 2. Chọn đáp án B



Ta có các cặp số có tổng bằng 21 là

$\{(1;20),(2;19),(3;18),(4;17),(5;16),(6;15),(7;14),(8;13),(9;12),(10;11)\}$.

Đặt A là biến cố: "Trong 6 tấm thẻ được chọn có hai tấm thẻ mà tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ bằng 21".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "Trong 6 tấm thẻ được chọn không có hai tấm thẻ mà tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ bằng 21".

Ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_{20}^{6}$.

Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $n(\overline{A})=\mathrm{C}_{10}^{6}\cdot 2^{6}$ (chọn ra 6 cặp trong 10 cặp trên và mỗi cặp lấy ra 1 số).

Vậy $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(\overline{A})=1-\dfrac{\mathrm{C}_{10}^{6}\cdot 2^{6}}{\mathrm{C}_{20}^{6}}=\dfrac{211}{323}$.

Câu 3. Chọn đáp án C

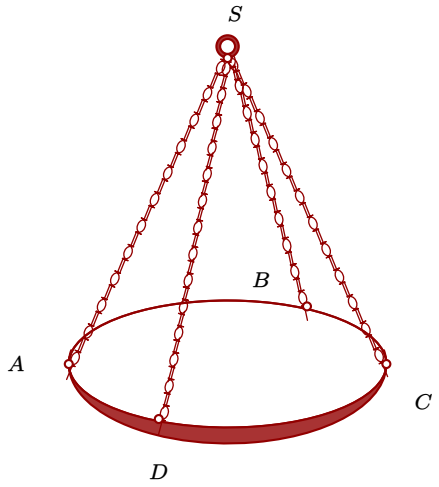
Vì đồ thị hàm số $y=ax^{3}+bx$ đi qua điểm $A(1;1)$ nên ta có $a+b=1 \quad (1)$.

Ta có diện tích một cánh màu sẫm là $S=\int\limits_0^1(x^2-ax^3-bx)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}$.

Theo bài ra ta có $4S=4\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}\right)=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow a+2b=0\quad(2)$.

Kết hợp (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases}a+b=1\\a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}\Rightarrow ab=-2$.

Câu 4. Chọn đáp án D



Ta có trọng lực $P=m\cdot g=10m$ N.

Độ lớn lực căng của dây $F=\left|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}\right|=\left|4\overrightarrow{SO}\right|=4SO$ (O là tâm đáy hình chóp).

Do $\widehat{ASC}=90^\circ$ nên $AC=10$; $SO=5$.

Chiếc cân ở vị trí cân bằng nên $F=P\Leftrightarrow 20=10m\Leftrightarrow m=2$ kg.

Câu 5. Chọn đáp án A

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}&=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})(x-3)(x-2)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(3x+1)(x-2)}{(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})(x-3)(x-2)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{3x+1}{(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})(x-3)}\\&=-\frac{7}{6}\end{aligned}$$

suy ra $x=2$ không phải là đường tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=+\infty$ nên $x=3$ là đường tiệm cận đứng.

Tiệm cận ngang: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=0$ nên $y=0$ là đường tiệm cận ngang.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 2.

Câu 6. Chọn đáp án C

Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC=2MB\Rightarrow\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}\Rightarrow M(-1;4;2)$.

Vậy $AM=\sqrt{29}$.

Câu 7. Chọn đáp án C

Ta có $g'(x)=x^2+2mx+n$.

Do $x=0$ là điểm cực đại của hàm số $y=g(x)$ nên $g'(0)=0\Leftrightarrow n=0$.

Từ đồ thị hàm số ta có $y=f(x)g(x)=x^2(x+1)^2(x-2)^2$.

Ta có $f(0)g(0)=0\Leftrightarrow cp=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}p=0\\c=0\end{array}\right.$.

Vì $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)g(x)$, ta có $f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)g(0)=0\Leftrightarrow bp=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=0\\p=0\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Với $p=0$, ta có $g(x)=x^2\left(\dfrac{1}{3}x+m\right)$.

Khi đó

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=x^2\left(\frac{1}{3}x+m\right)(3x^3+ax^2+bx+c)\\&=x^2(x+3m)\left(x^3+\frac{a}{3}x^2+\frac{b}{3}x+\frac{c}{3}\right)\\&=x^2(x+1)^2(x-2)^2.\end{aligned}$$

Nếu $3m=1\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{3}$ thì $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{3}x^2$; $g'(x)=x^2+\dfrac{2}{3}x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

Khi đó

$x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$.

Nếu $3m=-2\Leftrightarrow m=-\dfrac{2}{3}$ thì $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2}{3}x^2$; $g'(x)=x^2-\dfrac{4}{3}x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$.

Khi đó $x=0$ là điểm cực đại của hàm số $g(x)$ và $f(x)=3(x-2)(x+1)^2=3x^3-9x-6$.

Ta có $f'(x)=9x^2-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$.

$f(0)=-6$; $f(1)=-12$; $f(3)=48$.

Vậy $\min\limits_{[0;3]}f(x)=-12$.

Trường hợp 2: $b=c=0$, ta có $f(x)=3x^3+ax^2=3x^2\left(x+\dfrac{a}{3}\right)$.

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=3x^2\left(x+\frac{a}{3}\right)\left(\frac{1}{3}x^3+mx^2+p\right)\\&=x^2\left(x+\frac{a}{3}\right)(x^3+3mx^2+3p)\\&=x^2(x+1)^2(x-2)^2.\end{aligned}$$

Khi đó

Nếu $\dfrac{a}{3}=1\Leftrightarrow a=3$ thì $g(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)(x-2)^2=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+4$; $g'(x)=x^2-2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Khi đó

$x=0$ là điểm cực đại của hàm số $g(x)$.

Ta có $f(x)=3x^3+3x^2$; $f'(x)=9x^2+6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

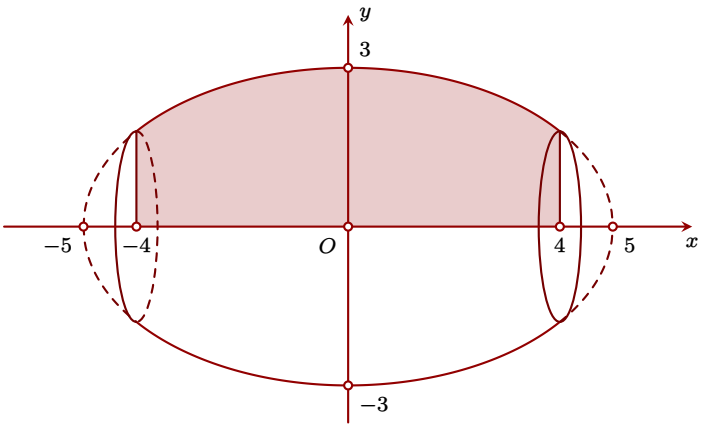
$f(0)=0$; $f(3)=108$.

Vậy $\min\limits_{[0;3]}f(x)=0$.

Nếu $\dfrac{a}{3}=-2\Leftrightarrow a=-6$ thì $g(x)=\dfrac{1}{3}(x-2)(x+1)^2=\dfrac{1}{3}x^3-x-\dfrac{2}{3}$; $g'(x)=x^2-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

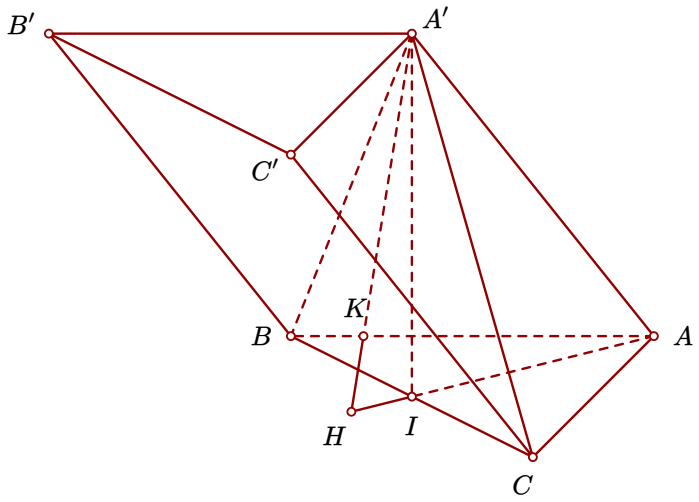
$\Rightarrow g(x)$ không nhận $x=0$ làm điểm cực đại.

Câu 8. Chọn đáp án A



Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ. Gọi $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
Do elip có độ dài trục lớn bằng 10 dm, độ dài trục bé bằng 6 dm nên $a=5$, $b=3$, ta có phương trình elip là $(E)\colon \dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ hay $y=\pm\dfrac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$.
Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-4$, $x=4$ quanh trục Ox là $V=\pi\displaystyle\int_{-4}^{4}\frac{9}{25}(25-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1416\pi}{25}$ dm^3.

Câu 9. Chọn đáp án D



Xét tam giác $A'AB$ có $A'B=\sqrt{AB^2+AA'^2-2\cdot AB\cdot AA'\cdot\cos\widehat{A'AB}}=a\sqrt{3}$.
Tương tự $A'C=a\sqrt{3}$.
Do đó tam giác $A'BC$ cân tại A'.
Gọi I là trung điểm của BC, kẻ $A'H\perp AI$ $(H\in AI)$, ta có $\begin{cases}AI\perp BC\\A'I\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(A'AI)\Rightarrow BC\perp A'H$.
$\begin{cases}A'H\perp BC\\A'H\perp AI\end{cases}\Rightarrow A'H\perp(ABC)$.

Ta có $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'I = \sqrt{A'B^2 - BI^2} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

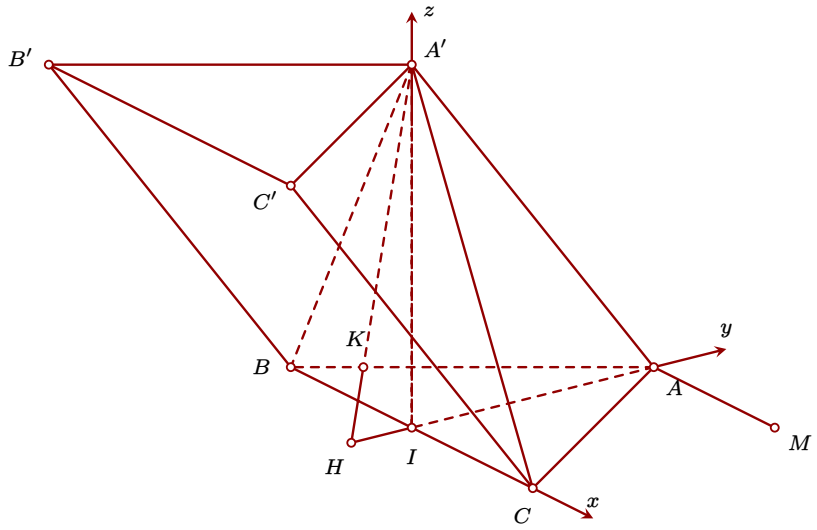
Xét tam giác $A'AI$ có $p = \dfrac{AA' + AI + A'I}{2}$; $S_{A'AI} = \sqrt{p(p - A'A)(p - AI)(p - A'I)} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

$S_{A'AI} = \dfrac{1}{2} \cdot A'H \cdot AI \Rightarrow A'H = \dfrac{2 \cdot S_{A'AI}}{AI} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác $A'AH$ vuông tại H có $AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IH = AH - AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $AM \perp BB' \Rightarrow AM \perp AA'$.

$\begin{cases} AM \perp AA' \\ AM \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AM \perp (A'AH) \Rightarrow AM \perp AH \Rightarrow AM \parallel BC$.



Dựng hệ trục tọa độ $Ixyz$ như hình vẽ, chọn $a = 1$, đặt $AM = x$ ta có $I(0;0;0)$, $A\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $A'\left(0;-\dfrac{\sqrt{3}}{6};\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $B'\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $M\left(x;\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Ta có $B'M = \sqrt{\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{27}{4}} \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ tứ giác $AIBM$ là hình chữ nhật.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $B'M$ bằng $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10. Chọn đáp án **D**

Sau 5 giây Cabin chuyển động được quãng đường là $AM = 4 \cdot 5 = 20$ m.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (a+2; b-1; c-5) = t\vec{u} = (0; -2t; 6t)$ với $t > 0$.

$\Rightarrow \sqrt{(-2t)^2 + (6t)^2} = 20 \Rightarrow \sqrt{40t^2} = 20 \Rightarrow t = \sqrt{10}$.

Vậy $\overrightarrow{AM} = (a+2; b-1; c-5) = (0; -2\sqrt{10}; 6\sqrt{10}) \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 - 2\sqrt{10} \\ c = 5 + 6\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow a + 2b + c = 5 + 2\sqrt{10}$.

Câu 11. Chọn đáp án **B**

Số đo của mỗi cung tròn do $n+6$ điểm chia đều trên đường tròn là $\dfrac{1}{n+6} \cdot 360°$.

Khi $n = 94$, mỗi góc ở đỉnh ngôi sao chắn bởi n cung tròn, số đo $\alpha_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n}{n+6} \cdot 360° = 169{,}2°$.

Câu 12. Chọn đáp án C

Do đồ thị hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục Ox tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng $-1;\ 1;\ 3$ nên $f(x)=a\left(x^2-1\right)(x-3)$ với $a>0$.

$$\frac{f(x+2)}{f(x-2)}=\frac{\left[(x+2)^2-1\right](x+2-3)}{\left[(x-2)^2-1\right](x-2-3)}=\frac{(x^2+4x+3)(x-1)}{(x^2-4x+3)(x-5)}.$$

$$\frac{f(x+2)}{f(x-2)}\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{(x^2+4x+3)(x-1)}{(x^2-4x+3)(x-5)}\leqslant 0$$

$$\overset{\text{Bảng xét dấu}}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}-3\leqslant x\leqslant -1\\ 3<x<5\end{array}\right.$$

$$\overset{x\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow}x\in\{-3;-2;-1;4\}.$$

Câu 13. Chọn đáp án D

$$\lim_{x\to x_0}\left[2f(x)-4g(x)\right]=2\lim_{x\to x_0}f(x)-4\lim_{x\to x_0}g(x)=4+12=16$$

Câu 14. Chọn đáp án B

Cỡ mẫu $n=20$. Suy ra $\dfrac{n}{4}=5$ và $\dfrac{3n}{4}=15$.

Tìm tứ phân vị thứ nhất: Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm $[3{,}0;3{,}3)$.

Suy ra, tứ phân vị thứ nhất là $Q_1=3+\dfrac{5-3}{6}\cdot 0{,}3=3{,}1$.

Tìm tứ phân vị thứ ba: Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là nhóm $[3{,}6;3{,}9)$.

Suy ra, tứ phân vị thứ ba là $Q_3=3{,}6+\dfrac{15-(3+6+5)}{4}\cdot 0{,}3=3{,}675$.

Vậy khoảng tứ phân vị là $\Delta Q=Q_3-Q_1=0{,}575$.

Câu 15. Chọn đáp án D

Ta có $4^x+4^{-x}=62\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2=64\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=8$.

Vậy $P=\log_2\left(2^x+2^{-x}\right)=\log_2 8=3$.

Câu 16. Chọn đáp án C

Ta có

$$\begin{aligned}S&=MA^2+MB^2-MC^2\\&=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2\\&=MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)+IA^2+IB^2-IC^2\end{aligned}.$$

Chọn điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}\Rightarrow I(10;-1;4)$.

Để S nhỏ nhất thì IM nhỏ nhất $\Rightarrow M(10;-1;0)$.

Khi đó $3a+b=29$.

Câu 17. Chọn đáp án C

Đường thẳng d đi qua $M(1;-2;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(2;-1;3)$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(m^2+1;2m-1;-1)$.

Đường thẳng d song song với mặt phẳng $(P)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{n}\\ M\notin(P)\end{array}\right.$.

Khi đó ta có

$$\left\{\begin{array}{l}2(m^2+1)-2m+1-3=0\\ m^2+1-2(2m-1)-m^2+m-3\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2m^2-2m=0\\ -3m\neq 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow m=1.$$

Câu 18. Chọn đáp án A

Ta có $v(0)=a=v_0 \Rightarrow v(t)=-\dfrac{5}{2}t+v_0=0 \Rightarrow t=\dfrac{2v_0}{5}$.

Ta có quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn là 80 m, do đó

$$6v_0+\int\limits_0^{\frac{2v_0}{5}}\left(-\frac{5}{2}t+v_0\right)\mathrm{d}t=80$$

$$\Rightarrow 6v_0+\left(-\frac{5}{4}t^2+v_0t\right)\Big|_0^{\frac{2v_0}{5}}=80$$

$$\Rightarrow 6v_0-\frac{v_0^2}{5}+\frac{2v_0^2}{5}=80$$

$$\Rightarrow v_0^2+30v_0-400=0$$

$$\Rightarrow v_0=10.$$

Câu 19. Chọn đáp án D

Ta có $\sin^2\dfrac{x}{4}\cos^2\dfrac{x}{4}=\left(\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}(1-\cos x)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{8}\cos x$.

Khi đó

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}.$$

Suy ra $a=1$, $b=8$, $c=16$ nên $P=a+b+c=25$.

Câu 20. Chọn đáp án A

Ta có $9^2=81$; $10^2=100$; $11^2=121$; $12^2=144$; $13^2=169$; $14^2=196$; $15^2=225$; $16^2=256$; $17^2=289$; $18^2=324$; $19^2=361$; $20^2=400$; $21^2=441$; $22^2=484$; $23^2=529$; $24^2=576$.

Ta thấy bình phương của tập hợp các số sau đều có hai số cuối chia hết cho 4: $\{10;12;14;16;18;20;22;24\}$.

Và bình phương của các số còn lại $\{9;11;13;15;17;19;21;23\}$ đều chia cho 4 dư 1.

Gọi A là biến cố " tổng bình phương của 3 số được chia hết cho 4".

Ta có $n(\Omega)=\mathrm{C}_{16}^3=560$.

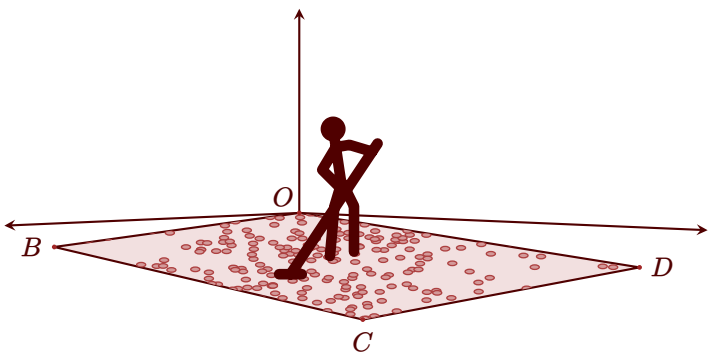
Biến cố A xảy ra khi ta chọn được ba số trong các số trong tập $\{10;12;14;16;18;20;22;24\}$.

Vậy $n(A)=\mathrm{C}_8^3=56$.

Xác suất $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{56}{560}=\dfrac{1}{10}$.

Câu 21. Chọn đáp án B

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ



Ta có:
$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{500^2 - 5^2} \approx 500$ cm.
$AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{1200^2 - 8^2} \approx 1200$ cm.
Dựa vào hình vẽ ta có: $A(0;0;0)$; $B(500;0;-5)$; $D(0;1200;-8)$.
$\overrightarrow{AD} = (0;1200;-8)$; $\overrightarrow{BC} = (x_C - 500; y_C; z_C + 5)$.

Do đó $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 500 = 0 \\ y_C = 1200 \\ z_C + 5 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 500 \\ y_C = 1200 \\ z_C = -13 \end{cases} \Rightarrow C(500;1200;-13)$.

Vậy vị trí C thấp hơn vị trí A là 13 cm.

Câu 22. Chọn đáp án B

Vì ba số $a + \log_2 3$; $a + \log_4 3$; $a + \log_8 3$ lập thành một cấp số nhân nên ta có:

$$(a + \log_4 3)^2 = (a + \log_2 3)(a + \log_8 3)$$

$$\Leftrightarrow a \log_2 3 + \frac{1}{4}\log_2^2 3 = \frac{a}{3}\log_2 3 + a\log_2 3 + \log_2 3 \cdot \log_8 3.$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}\log_2 3$$

Suy ra công bội $q = \dfrac{a + \log_4 3}{a + \log_2 3} = \dfrac{-\frac{1}{4}\log_2 3 + \log_4 3}{-\frac{1}{4}\log_2 3 + \log_2 3} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 23. Chọn đáp án A

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Mà $f(0) = -1$; $f(3) = -\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3]} f(x) = -1 = m$; $\max\limits_{[0;3]} f(x) = -\dfrac{1}{2} = M \Rightarrow S = 2m + 3M = -\dfrac{7}{2}$.

Câu 24. Chọn đáp án A

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là: $11 - 6 = 5$.

Câu 25. Chọn đáp án D

Ta có $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có hàm số đồng biến trên $(1;3)$.

Câu 26. Chọn đáp án B

Ta có $y = f(3x) \Rightarrow y' = 3f'(3x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(3x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(3x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-3	↗	$+\infty$

Vậy điểm cực tiểu của hàm số cần tìm là $x = \dfrac{2}{3}$.

Câu 27. Chọn đáp án A

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+ax^2-4x+b}{(x-1)^2} = 5$ và $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}(2x^3+ax^2-4x+b) = 0 \Leftrightarrow a+b = 2$.

Khi đó ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+(2-b)x^2-4x+b}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{2x^2+4x+b(x+1)}{x-1} = 5$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left[2x^2+4x+b(x+1)\right] = 0$$

$$\Rightarrow b = -3 \Rightarrow a = 5$$

Vậy $2a+b = 2\cdot 5-3 = 7$.

Câu 28. Chọn đáp án D

Ta có

$$\int_1^2 f(3x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}F(3x-2)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3}\big(F(4)-F(1)\big) = \frac{1}{3}\big(G(4)-G(1)\big).$$

Do $2F(4)-G(4) = 3$ và $2F(1)-G(1) = 1$ nên $2[F(4)-F(1)]-[G(4)-G(1)] = 2$.

Suy ra

$$6\int_1^2 f(3x-2)\,\mathrm{d}x - 3\int_1^2 f(3x-2)\,\mathrm{d}x = 2$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(3x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Câu 29. Chọn đáp án C

+) (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;1)$.

+) $\overrightarrow{AB} = (-3;-3;-4)$.

+) Vì (P) đi qua hai điểm $A(2;1;1)$, $B(-1;-2;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon x+y+z = 0$ nên (P) nhận $\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right] = (-1;1;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

$\Rightarrow (Q)\colon -x+y+1 = 0$.

Câu 30. Chọn đáp án A

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GA'} = \vec{0} \Rightarrow GA = 3GA' \Rightarrow \dfrac{GA}{GA'} = 3.$

Câu 31. Chọn đáp án: a b c d

a) Parabol cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là $\frac{d}{2}$ và $-\frac{d}{2}$ nên parabol có phương trình $y = a\left(x - \frac{d}{2}\right)\left(x + \frac{d}{2}\right) = a\left(x^2 - \frac{d^2}{4}\right)$.

Mà parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $h \Rightarrow h = a \cdot \left(-\frac{d^2}{4}\right) \Rightarrow a = -\frac{4h}{d^2}$.

Vậy phương trình của parabol là $y = -\frac{4h}{d^2}x^2 + h$.

b) Cửa lớn của đường hầm mô hình ứng với $x = 0 \Rightarrow$ parabol có chiều cao $h = 3 \Rightarrow d = 6 \Rightarrow$ phương trình của parabol là $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3 \Rightarrow$ Diện tích cửa lớn của đường hầm mô hình là $\int\limits_{-3}^{3}\left(-\frac{1}{3}x^2 + 3\right)\mathrm{d}x = 12\ \mathrm{cm}^2$.

c) Cửa nhỏ của đường hầm mô hình ứng với $x = 5 \Rightarrow$ parabol có chiều cao $h = 3 - \frac{2}{5} \cdot 5 = 1$ cm.

d) Theo giả thiết mặt cắt hình parabol có $d = 2h$ nên phương trình của parabol này là $y = -\frac{4h}{d^2}x^2 + h = -\frac{4h}{4h^2}x^2 + h = -\frac{1}{h}x^2 + h$.

$\Rightarrow$ Diện tích của mặt cắt là $\int\limits_{-h}^{h}\left(-\frac{1}{h}x^2 + h\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{h} \cdot \frac{x^3}{3} + hx\right)\Big|_{-h}^{h} = \frac{4}{3}h^2$.

Mà mặt cắt hình parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ cm, với x cm là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình đến mặt phẳng chứa mặt cắt.

Do đó parabol này có chiều cao $h = 3 - \frac{2}{5}x$.

$\Rightarrow$ Diện tích của mặt cắt là $S(x) = \frac{4}{3}\left(3 - \frac{2}{5}x\right)^2 \Rightarrow$ Thể tích của đường hầm là $V = \int\limits_{0}^{5} S(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{5}\frac{4}{3}\left(3 - \frac{2}{5}x\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1460}{81}\ \mathrm{cm}^3$.

Suy ra số tiền cần bỏ ra để mua nguyên liệu là $\frac{1460}{81} \cdot 5{,}4 = \frac{292}{3} \approx 97{,}33$ triệu đồng.

Câu 32. Chọn đáp án: a b c d

a) Mỗi người đều có 3 cách chọn xe để lên, do đó $n(\Omega) = 3^{10}$.

b) Số cách chọn để mỗi người lên ít nhất một trong hai xe số 1 hoặc xe số 2 là 2^{10}, trong đó có 1 cách cả 10 người lên xe số 1 và 1 cách cả 10 người lên xe số 2, do đó số cách lên xe sao cho chỉ có xe số 3 không có tình nguyện viên nào là $2^{10} - 2$.

c) Trường hợp 1: Xe số 2 không có tình nguyện viên, xe số 3 có 10 tình nguyện viên, khi đó có 1 cách.

Trường hợp 2: Xe số 2 có 10 tình nguyện viên, xe số 3 không có tình nguyện viên, khi đó có 1 cách.

Trường hợp 3: Xe số 2 và xe số 3 đều có tình nguyện viên, khi đó có $2^{10} - 2$ cách.

Vậy tổng số cách lên xe sao cho xe số 1 không có tình nguyện viên nào là $1 + 1 + (2^{10} - 2) = 2^{10}$.

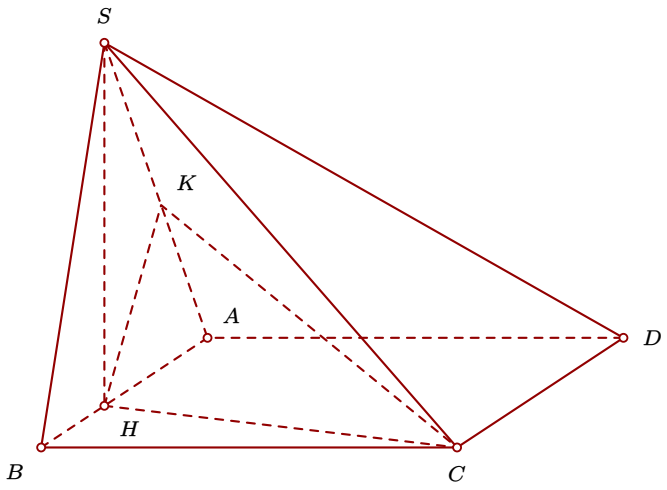
d) Gọi A là biến cố: "Xe nào cũng có tình nguyện viên".

Khi đó $\overline{A}$ là biến cố: "Có xe không có tình nguyện viên nào".

Suy ra $n(\overline{A}) = 3 + 3 \cdot (2^{10} - 2) = \mathrm{C}_3^1(2^{10} - 1) = 3 \cdot 2^{10} - 3 \Rightarrow \mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{3 \cdot 2^{10} - 3}{3^{10}} = \frac{341}{6561}$.

Do đó $\mathrm{P}(A) = 1 - \frac{341}{6561} = \frac{6220}{6561}$.

Câu 33. Chọn đáp án: a b c d



a) Do $CA = CB = CS$ và H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB nên $CH \perp (SAB)$.
b) Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy và H là trung điểm AB nên $SH \perp (ABCD)$.

Mà góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng đáy bằng 30° nên $\widehat{SCH} = 30^\circ$ và $SH = \dfrac{AB}{2} = a \Rightarrow HC = \dfrac{SH}{\tan 30^\circ} = a\sqrt{3}$.
Đồng thời $CH \perp (SAB)$ nên $CH \perp AB$.

Thể tích khối chóp là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a \cdot a\sqrt{3} \cdot 2a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

c) Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, H làm gốc tọa độ, $H(0;0;0)$, $S(0;0;a)$, $A(-a;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;a\sqrt{3};0)$, $D(-2a;a\sqrt{3};0)$.

Gọi M là trung điểm SD, khi đó $M\left(-a;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.

$$\Rightarrow \mathrm{d}(SH,CM) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SH},\overrightarrow{CM}\right]\cdot\overrightarrow{HC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SH},\overrightarrow{CM}\right]\right|} = \frac{2\sqrt{21}}{7}a.$$

d) Gọi K là trung điểm SA, ta có:

$$\begin{cases} HK \perp SA \\ CH \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (CHK) \Rightarrow [B;SA;C] = \widehat{HKC} = \phi.$$

Mà $\tan\phi = \dfrac{CH}{HK} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6}$.

Câu 34. Chọn đáp án: a b c d

a) Điều kiện: $x > 0$.
Tập xác định $\mathscr{D} = (0;+\infty)$.

b) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = \left(x^3 - 3x\log_2 x\right)' = 3x^2 - 3\log_2 x - \dfrac{3}{\ln 2}$.

c) Phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x\log_2 x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 3\log_2 x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x^2 - 3\log_2 x = 0 \quad (*). \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 3\log_2 x$ với $x > 0$.

$$g'(x)=2x-\frac{3}{x\ln 2}=0\Leftrightarrow\frac{2x^2\ln 2-3}{x\ln 2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{\dfrac{3}{2\ln 2}}\\ x=-\sqrt{\dfrac{3}{2\ln 2}}\ \text{(loại)}.\end{array}\right.$$

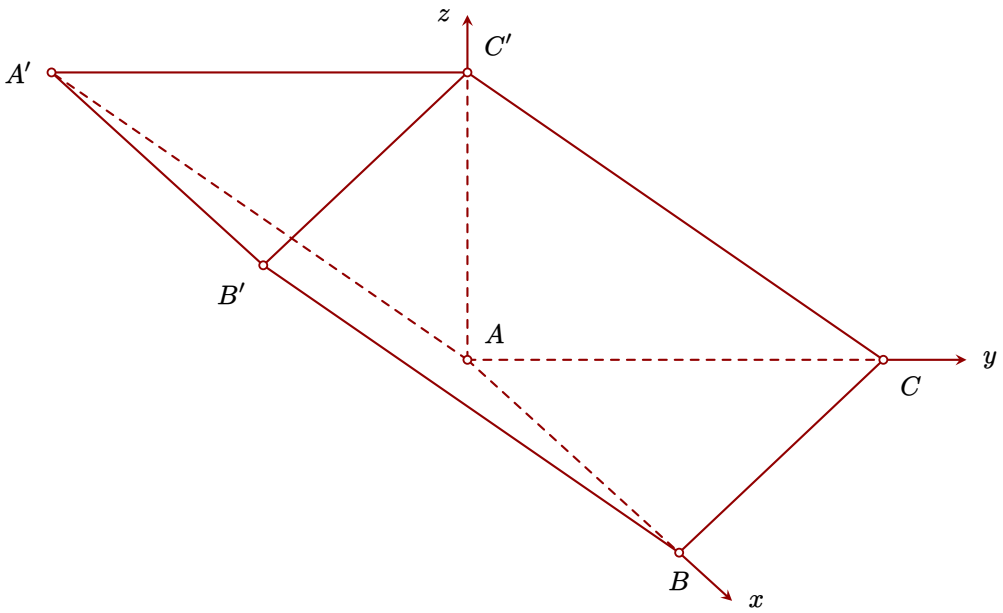
$g\left(\sqrt{\dfrac{3}{2\ln 2}}\right)\approx 0{,}49.$

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\dfrac{3}{2\ln 2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$\approx 0{,}49$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $(*)$: $g(x)=x^2-3\log_2 x=0$ vô nghiệm.
Vậy phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.
d) Biểu thức $P=f(a)+f(b)+f(c)$ đạt giá trị lớn nhất là 4, với a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c\leqslant 1$.
Đặt $x=\log_2 a$; $y=\log_2 b$; $z=\log_2 c\Rightarrow a=2^x$; $b=2^y$; $c=2^z$.
$P=f(a)+f(b)+f(c)=(2^x)^3+(2^y)^3+(2^z)^3-3(x\cdot 2^x+y\cdot 2^y+z\cdot 2^z)$.
Vì $a,b,c\in[1;2]\Rightarrow x,y,z\in[0;1]$.
Mà $(2^x)^3-3x\cdot 2^x\leqslant x^3+1$, $(2^y)^3-3y\cdot 2^y\leqslant y^3+1$, $(2^z)^3-3z\cdot 2^z\leqslant z^3+1$.
$\Rightarrow P\leqslant x^3+y^3+z^3+3\leqslant 4$.
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1$, $c=2$ hoặc $a=c=1$, $b=2$ hoặc $c=b=1$, $a=2$.

Câu 35. Chọn đáp án: a b c d



a) Ta có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;3;0)$.
Vì $AC'=\sqrt{AA'^2-A'C'^2}=3\Rightarrow C'(0;0;3)$.
Mà $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=(0;-3;3)\Rightarrow B'(2;-3;3)$.
b) Ta có $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}=(0;-3;3)\Rightarrow A'(0;-3;3)\Rightarrow\overrightarrow{A'B}=(2;3;-3)$, $\overrightarrow{A'C}=(0;6;-3)$.

Suy ra $\cos \widehat{BA'C} = \cos\left(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}\right) = \dfrac{2\cdot 0 + 3\cdot 6 + (-3)\cdot(-3)}{\sqrt{4+9+9}\cdot\sqrt{0+36+9}} = \dfrac{27}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{45}} = \dfrac{9\sqrt{110}}{110}$.

c) Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = (2;0;0) \Rightarrow D(-2;3;0)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{DC'} + \overrightarrow{DB'} = (6;-9;6) \Rightarrow \left|\overrightarrow{DC'} + \overrightarrow{DB'}\right| = 3\sqrt{17}$.

d) Ta có $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $c = 0$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} P &= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB'} + 2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC'} + 3\overrightarrow{MB'}\cdot\overrightarrow{MC'} \\ &= (-a)(2-a) + (-b)(-3-b) + 2[(-a)(-a) + (-b)(-b)] + 3[(2-a)(-a) + (-3-b)(-b) + 3\cdot 3] \\ &= -2a + a^2 + 3b + b^2 + 2a^2 + 2b^2 - 6a + 3a^2 + 9b + 3b^2 + 27 \\ &= 6a^2 + 6b^2 - 8a + 12b + 27 \\ &= 6\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 + 6(b+1)^2 + \frac{55}{3} \geqslant \frac{55}{3} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = \dfrac{2}{3}$, $b = -1$.

Khi đó $a + b + c = -\dfrac{1}{3}$.

Câu 36. Chọn đáp án: a b c d

a) Đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km nên ranh giới giữa bên ngoài và vùng kiểm soát của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng 600 km.

b) Ta có $OM = \sqrt{(-500)^2 + 100^2 + (100\sqrt{11})^2} = \sqrt{370000} > 600$ km nên vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát của đài kiểm soát không lưu sân bay.

c) Đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km nên phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới giữa bên ngoài và vùng kiểm soát của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$.

d) Gọi $d \cap (S) = \{B; C\}$.

Tọa độ B, C tương ứng với tham số t thỏa mãn:

$$(-1000 + 100t)^2 + (-300 + 80t)^2 + (100\sqrt{11})^2 = 600^2 \Leftrightarrow 41t^2 - 620t + 2100 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = \dfrac{2100}{41}. \end{array}\right.$$

$\Rightarrow B(0;500;100\sqrt{11})$; $C\left(-\dfrac{20000}{41}; \dfrac{4500}{41}; 100\sqrt{11}\right)$.

$t_{BC} = \dfrac{BC}{v_{BC}} = \dfrac{624{,}69}{900} \approx 0{,}69$ h $= 41{,}4$ phút < 42 phút.

Vậy thời gian đài kiểm soát không lưu kiểm soát được máy bay A là không quá 42 phút.

Câu 37. Chọn đáp án: a b c d

a) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi bảng 16 là

$$S_2^2 = \frac{1}{40}\left[2\cdot(6{,}952 - 6{,}34)^2 + 5\cdot(6{,}952 - 6{,}58)^2 + 8\cdot(6{,}952 - 6{,}82)^2 + 19\cdot(6{,}952 - 7{,}06)^2 + 6\cdot(6{,}952 - 7{,}3\right.$$

$\approx 0{,}06$.

b) Kết quả nhảy xa trung bình của bạn Huy là

$$\overline{x}_2 = \frac{6{,}34\cdot 2 + 6{,}58\cdot 5 + 6{,}82\cdot 8 + 7{,}06\cdot 19 + 7{,}3\cdot 6}{40} = 6{,}952.$$

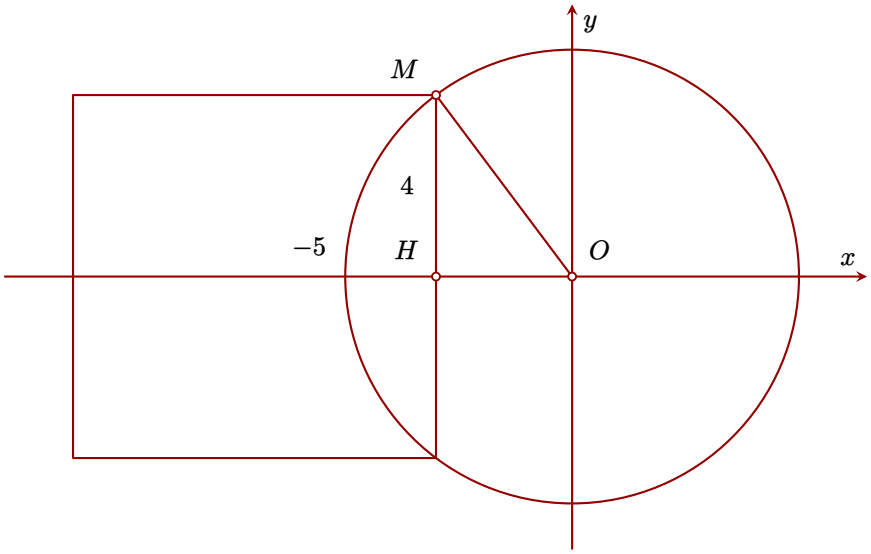
$$S_1^2 = \frac{6{,}34\cdot 3 + 6{,}58\cdot 7 + 6{,}82\cdot 5 + 7{,}06\cdot 20 + 7{,}3\cdot 5}{40} \approx 6{,}92.$$

$S_1 = \sqrt{6{,}92} \approx 2{,}63$.

c) Dựa vào bảng số liệu 15, ta thấy tần số của nhóm $[7{,}18;7{,}42)$ là 5.
d) Kết quả nhảy xa trung bình của bạn Dũng là
$\overline{x}_1 = \dfrac{6{,}34\cdot 3 + 6{,}58\cdot 7 + 6{,}82\cdot 5 + 7{,}06\cdot 20 + 7{,}3\cdot 5}{40} \approx 6{,}92.$
Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi bảng 15 là
$S_1^2 = \dfrac{1}{40}\left[3\cdot(6{,}92-6{,}34)^2 + 7\cdot(6{,}92-6{,}58)^2 + 5\cdot(6{,}92-6{,}82)^2 + 20\cdot(6{,}92-7{,}06)^2 + 5\cdot(6{,}92-7{,}3)^2\right]$
$\approx 0{,}07.$
Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi bảng 16 là
$S_2 = \sqrt{S_2^2} = \sqrt{0{,}06} \approx 0{,}24.$
Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi bảng 15 là
$S_1 = \sqrt{S_1^2} = \sqrt{0{,}07} \approx 0{,}26.$
Dựa vào độ lệch chuẩn ta thấy kết quả nhảy xa của vận động viên Huy đồng đều hơn kết quả nhảy xa của vận động viên Dũng.

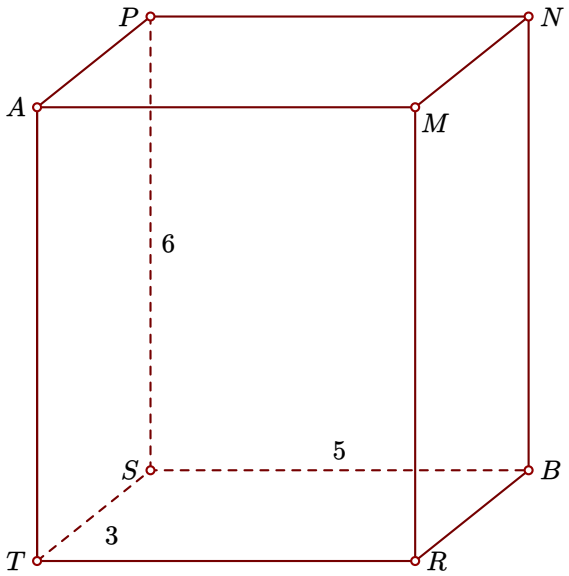
Câu 38. Chọn đáp án: a b c d
a) Ta có $y = \dfrac{x^2+x-6}{x+1} = x - \dfrac{6}{x+1}$.
Điều kiện y nguyên khi x nguyên và $\dfrac{6}{x+1}$ nguyên.
Suy ra $x+1$ là ước của 6.
Do đó $x \in \{-7;-4;-3;-2;0;1;2;5\}$.
Có 8 điểm mà hoành độ và tung độ là các số nguyên.
b) Ta có $y' = \dfrac{x^2+2x+7}{(x+1)^2}$.
Tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $(d)\colon y = 7x+18$ nên hệ số góc của tiếp tuyến
$k = y'(x_0) = 7 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2+2x_0+7}{(x_0+1)^2} = 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$.
Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -6$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 7x-6$.
Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -6$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 7x+4$.
Vậy có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $(d)\colon y = 7x+18$.
c) Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{6}{x+1}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{6}{x+1}\right) = 0$.
Do đó đồ thị (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.
d) Ta có $y = \dfrac{x^2+x-6}{x+1} = x - \dfrac{6}{x+1} \Rightarrow y+1 = x+1-\dfrac{6}{x+1}$.
Đặt $x+1 = a$.
Để $(T)\colon (x+1)^2+(y+1)^2 = R^2$ cắt (C) tại 4 điểm phân biệt thì phương trình $a^2 + \left(a - \dfrac{6}{a}\right)^2 = R^2$ có hai nghiệm phân biệt.
$\Leftrightarrow 2a^4 - (R^2+12)a^2 + 36 = 0$.
Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta = (R^2+12)^2 - 288 > 0 \Rightarrow R^2 > \sqrt{288} - 12 \approx 4{,}97$.

Câu 39. Đáp án: 458.

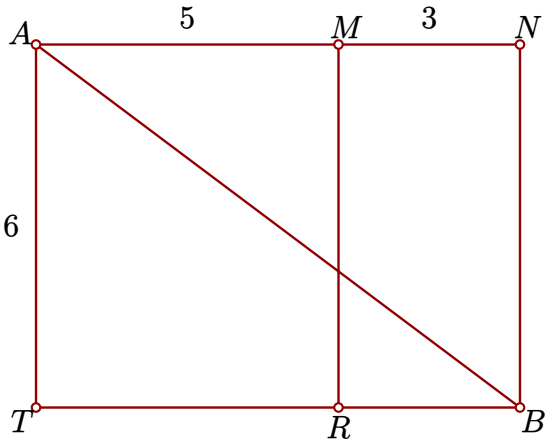


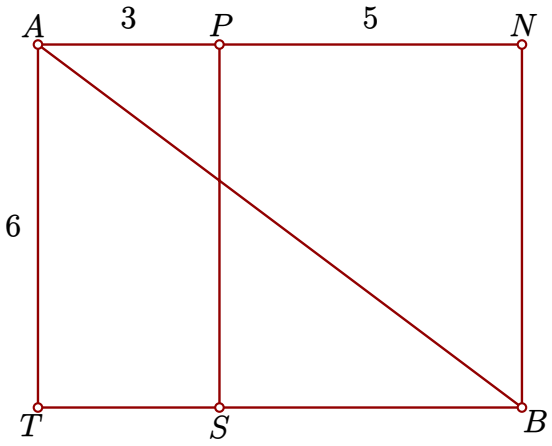
Xét mặt cắt ngang chia khối đã cho thành 2 phần như nhau và ghép hệ trục tọa độ Oxy cho mặt cắt như hình vẽ với tâm khối cầu trùng với gốc tọa độ O.
Gọi H là hình chiếu của tâm O lên mặt phẳng miệng bình nước.
Ta có $OH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Phương trình đường tròn tâm O bán kính bằng 5 là $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm\sqrt{25 - x^2}$.
Suy ra thể tích phần chỏm cầu nằm trong bình là $V = \pi \displaystyle\int_{-5}^{-3} \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \dfrac{52\pi}{3}$.
Vậy thể tích phần nước còn lại trong bình là $V = 8^3 - \dfrac{52\pi}{3} \approx 458\ \mathrm{cm}^3$.

Câu 40. Đáp án: 10.

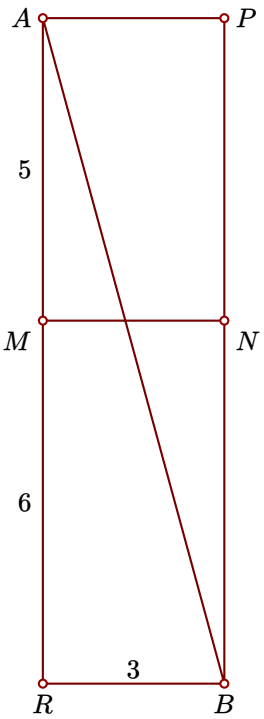


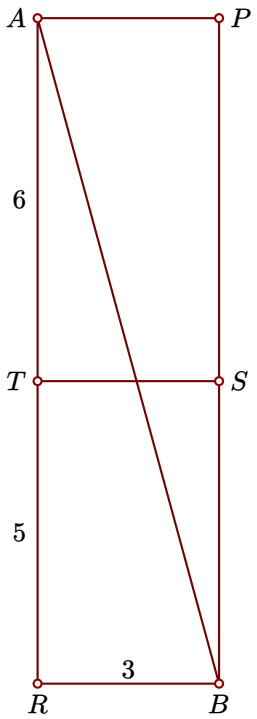
Vì A, B là hai đỉnh đối nhau của hình hộp chữ nhật nên không ảnh hưởng tới kết quả bài toán, ta giả sử $ST = 3$ cm; $SB = 5$ cm; $CP = 6$ cm.
Quãng đường ngắn nhất để con kiến đi từ A đến B khi chỉ đi qua 2 mặt phẳng.
Trường hợp 1: Con kiến đi trên mặt phẳng $(AMRT) \to (MNBR)$ hoặc $(APST) \to (PNBS)$.





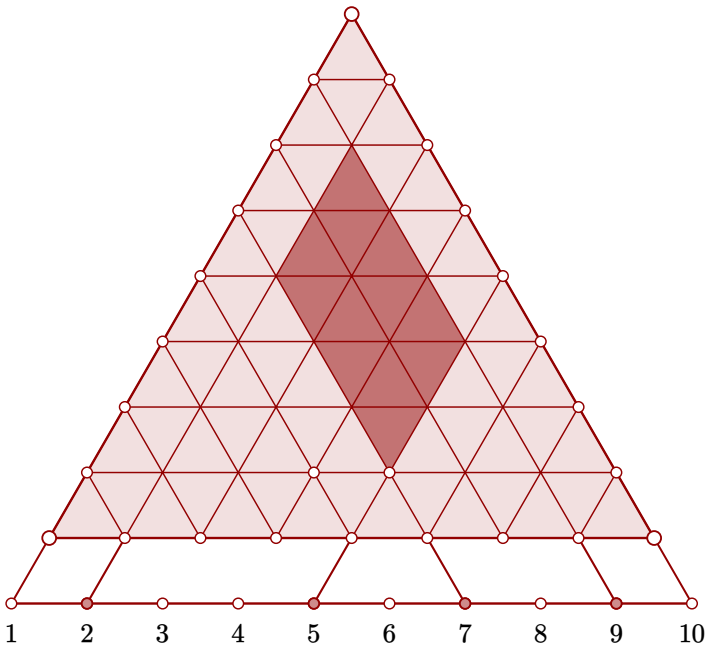
Khi đó, quãng đường ngắn nhất để con kiến đi từ A đến B là
$AB = \sqrt{6^2 + (3+5)^2} = 10$ cm.
Trường hợp 2: Con kiến đi trên mặt phẳng $(APNM) \to (MNBR)$ hoặc $(APST) \to (SBRT)$ thì độ dài ngắn nhất từ A đến B là đoạn AB.
.





$AB = \sqrt{3^2 + (6+5)^2} = \sqrt{130} \approx 11{,}4$ cm.
Trường hợp 3: Con kiến đi trên mặt phẳng $(APNM) \to (SPNB)$.
Tương tự ta có $AB = \sqrt{5^2 + (6+3)^2} = \sqrt{106} \approx 10{,}3$ cm.
Vậy quãng đường ngắn nhất của con kiến đi từ A đến B là 10 cm.

Câu 41. Đáp án: 477.
Ta thấy có 3 loại hình bình hành dựa vào cách chọn phương của hai cạnh của hình bình hành.
Số hình bình hành của mỗi loại là bằng nhau nên chỉ cần tính một loại rồi nhân với 3.



Dựng thêm một đường thẳng song song với cạnh đáy và cách cạnh đáy một khoảng bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song kề nhau, tạo thành một tam giác đều mở rộng như hình vẽ.
Ta chia cạnh mới thành 9 phần bằng nhau bởi 8 điểm, cộng thêm 2 đầu mút nữa thành 10 điểm. Các điểm được đánh số từ trái sang phải từ 1 đến 10.
Khi đó, với 1 hình bình hành có hai cạnh song song với hai cạnh bên tương ứng với bốn số $1 \leqslant a < b < c < d \leqslant 10$.
Vậy số hình bình hành loại này là số cách lấy ra bốn số phân biệt $(a; b; c; d)$ từ 10 số tự nhiên $\{1; 2; 3; \ldots; 10\}$ và ta được $\mathrm{C}_{10}^{4} = 210$.
Vậy kết quả là $3 \cdot \mathrm{C}_{10}^{4} = 630$ hình bình hành.
Ta thấy có $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$ giao điểm giữa các đường thẳng nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{45}^{4}$.
Vậy ta có $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3 \cdot \mathrm{C}_{10}^{4}}{\mathrm{C}_{45}^{4}} = \dfrac{2}{473} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 473 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b = 2^2 + 473 = 477.$

Câu 42. Đáp án: 3.
Ta có $y' = \left(3x^2 f(x) + x^3 f'(x)\right) f'\left(x^3 f(x)\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = 0 \\ f'\left(x^3 f(x)\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ 3f(x) + xf'(x) = 0 \quad (1) \\ x^3 f(x) = 0 \quad (2) \\ x^3 f(x) = m \ (m > 0) \quad (3). \end{array}\right.$$

Giải (1):
Ta có $3f(x) + xf'(x) = 0$.
Đặt $f'(x) = ax(x - n) = ax^2 - anx \ (a > 0)$.
Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{ax^3}{3} - \frac{an}{2}x^2 + c$.
Mà $f(0) = -2 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{a}{3}x^3 - \dfrac{an}{2}x^2 - 2$.
Khi đó

$$3f(x)+xf'(x)=0 \Leftrightarrow ax^3-\frac{3}{2}anx^2-6+ax^3-anx^2=0$$
$$\Leftrightarrow 2ax^3-\frac{5}{2}anx^2-6=0.$$

Xét $g(x)=2ax^3-\frac{5}{2}anx^2-6$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=6ax^2-5anx \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{5n}{6}. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\frac{5\pi}{6}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘		↗	$+\infty$

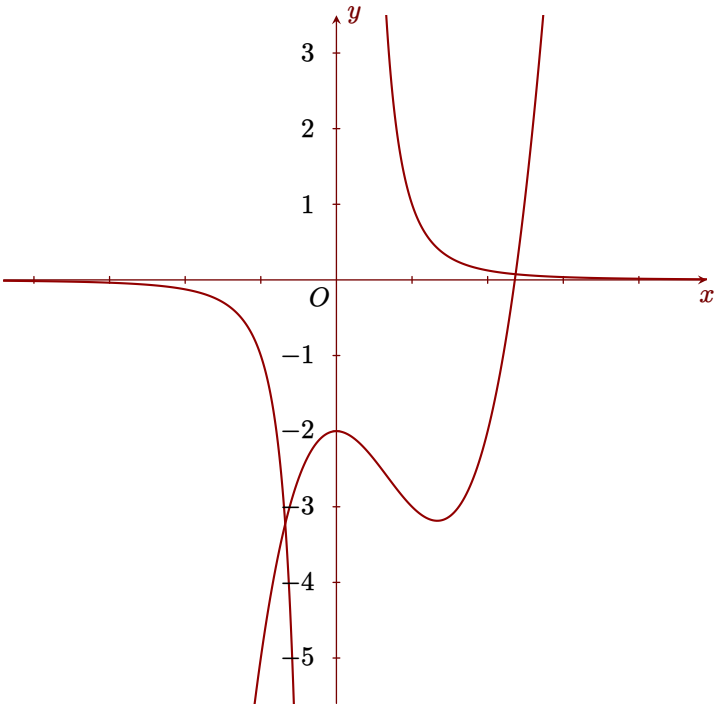
Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $g(x)=0$ có nghiệm duy nhất.

Giải (2):

$$x^3f(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^3=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m\ (m>0). \end{array}\right.$$

Giải (3):

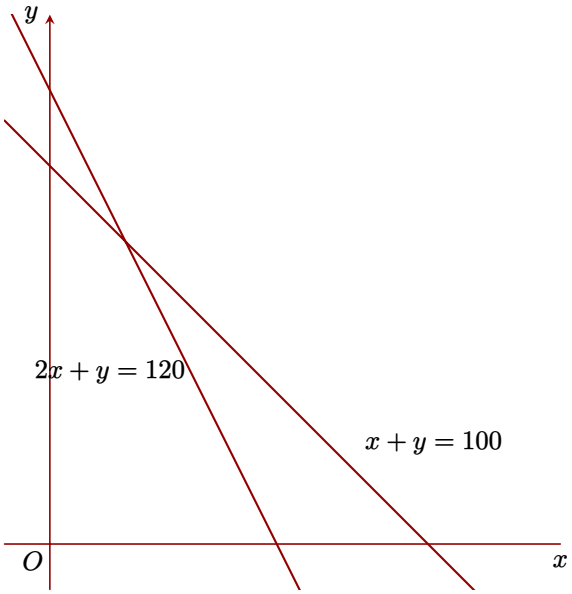
Đồ thị hàm số $y=\frac{m}{x^3}$ nằm ở góc phần tư thứ IV và có tiệm cận đứng là trục Oy, tiệm cận ngang là trục Ox, do đó cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương (hình vẽ).



Do đó ta có hàm số $y=f\left(x^3f(x)\right)$ có 5 cực trị.

Do $f(x)$ có hệ số $a>0$ nên hàm số có 3 cực tiểu và 2 cực đại.

Câu 43. Đáp án: 6800.
Gọi x, y lần lượt là số lượng máy 2 chiều và 1 chiều mà cửa hàng kinh doanh (x, y là các số nguyên).
Ta có hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} x \geqslant 0, y \geqslant 0 \\ x+y \leqslant 100 \\ 20x+10y \leqslant 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, y \geqslant 0 \\ x+y \leqslant 100 \\ 2x+y \leqslant 120 \end{cases} \quad \text{(I)}.$$
Lợi nhuận thu được là $F(x;y) = 3{,}5x + 2y$ triệu đồng.
Miền nghiệm của hệ (I) là tứ giác $OABC$ với $O(0;0)$, $A(60;0)$, $B(20;80)$, $C(0;100)$.



Ta có $F(O) = 0$, $F(A) = 3{,}5 \cdot 60 = 210$, $F(B) = 3{,}5 \cdot 20 + 2 \cdot 80 = 230$, $F(C) = 200$.
Vậy lợi nhuận lớn nhất $F(B) = 230$ khi $x = 20$, $y = 80$.
Suy ra $x^2 + y^2 = 400 + 6400 = 6800$.

Câu 44. Đáp án: 195.
Ta có $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$, $D(-23;20;-11)$.
Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn:
$3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$ (1).
Ta có $\overrightarrow{IA} = (1-x;1-y;1-z)$; $\overrightarrow{IB} = (-1-x;2-y;-z)$; $\overrightarrow{IC} = (3-x;-1-y;2-z)$.
Từ (1) suy ra $x = -23$; $y = 20$; $z = -11 \Rightarrow I \equiv D$.
Khi đó, $T = \dfrac{3MA^2 + 5MB^2 - 7MC^2}{MD^2}$.
$$\Rightarrow T = \frac{3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + 5\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 - 7\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2}{MD^2}$$
$$= \frac{MI^2}{MD^2} + \frac{3IA^2 + 5IB^2 - 7IC^2}{MD^2}$$
$$= \frac{MD^2}{MD^2} - \frac{1114}{MD^2} = 1 - \frac{1114}{MD^2}.$$
$T_{\min}$ khi $\left(\dfrac{1114}{MD^2}\right)_{\max} \Leftrightarrow (MD^2)_{\min} \Leftrightarrow MD_{\min}$.
Do M thay đổi trong (α), nên MD nhỏ nhất khi M là hình chiếu của D trên (α), $(D \notin (\alpha))$.
Gọi d là đường thẳng qua D và vuông góc với (α).
Phương trình đường thẳng d là:

$\begin{cases} x = -23 + 2t \\ y = 20 - t \\ z = -11 + 2t. \end{cases}$

Thay vào (α): $2(-23+2t) - (20-t) + 2(-11+2t) + 7 = 0 \Rightarrow t = 9$.

Suy ra $M(-5; 11; 7)$.

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 = 25 + 121 + 49 = 195$.

Sở Bà Rịa Vũng Tàu

Câu 1. Chọn đáp án B

Xét
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}&=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}\right)\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DN}\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\cdot\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=-1.\end{aligned}$$
Mặt khác $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{AC^2+CM^2}=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$, $\left|\overrightarrow{CN}\right|=\sqrt{CD^2+DN^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CN}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CN}\right|}=-\dfrac{1}{\sqrt{30}}$.

Câu 2. Chọn đáp án D

Ta có $n(\Omega)=\mathrm{C}_{25}^2$.

Trong 25 số nguyên dương đầu tiên có 13 số lẻ và 12 số chẵn.

Để tổng hai số là số lẻ, ta chọn một số chẵn và một số lẻ.

Gọi A là biến cố chọn được hai số có tổng là một số lẻ, khi đó $n(A)=\mathrm{C}_{13}^1\cdot\mathrm{C}_{12}^1$.

Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số lẻ là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{\mathrm{C}_{13}^1\cdot\mathrm{C}_{12}^1}{\mathrm{C}_{25}^2}=\dfrac{13}{25}$.

Câu 3. Chọn đáp án A

Ta có
$$\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$$
$\Leftrightarrow\log_3\left[3(1-xy)\right]+3(1-xy)=\log_3(x+2y)+(x+2y)$.

Xét hàm số $y=\log_3 u$, với $u\in(0;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{1}{u\ln 3}>0,\ \forall u>0$, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó $3(1-xy)=x+2y\Leftrightarrow 3xy+2y=3-x\Leftrightarrow y=\dfrac{3-x}{3x+2}$. Suy ra $P=x+\dfrac{3-x}{3x+2}=\dfrac{3x^2+x+3}{3x+2}$ với $x>0$.

Xét hàm số $y=\dfrac{3x^2+x+3}{3x+2}$ với $x>0$. Ta có $y'=\dfrac{9x^2+12x-7}{(3x+2)^2}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-2+\sqrt{11}}{3}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{-2+\sqrt{11}}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-3+2\sqrt{11}}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$ bằng $\dfrac{2\sqrt{11} - 3}{3}$.

Câu 4. Chọn đáp án D

Dựng $AH \perp BD$, khi đó $BD \perp (SAH) \Rightarrow [S, BD, A] = \widehat{SHA} = \alpha$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2$.

Vậy giá trị tang của góc nhị diện $[S, BD, A]$ bằng 2.

Câu 5. Chọn đáp án D

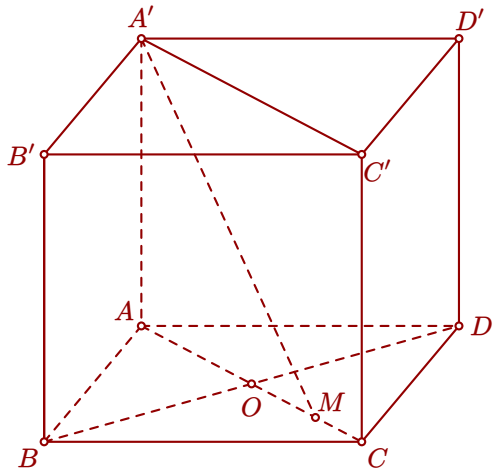
Căn cứ vào đồ thị ta có tiệm cận đứng có phương trình $x = 1 \Rightarrow b = -1$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $\dfrac{c}{b} = 2 \Rightarrow c = -2$.

Căn cứ vào đồ thị ta có tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có toạ độ $(0; 1)$ và cắt trục hoành tại điểm có toạ độ $(1; 0)$ nên phương trình tiệm cận xiên là $y = -x + 1 \Rightarrow a = -1$.

Ta có $P = a^2 + b + c = (-1)^2 + (-1) + (-2) = -2$.

Câu 6. Chọn đáp án C



Ta có $BB' \parallel (ACC'A')$ nên $\mathrm{d}(BB', A'M) = \mathrm{d}(BB', (ACC'A')) = \mathrm{d}(B, (ACC'A'))$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

$\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BO \perp (ACC'A') \Rightarrow \mathrm{d}(B, (ACC'A')) = BO = 4\sqrt{2}$.

Câu 7. Chọn đáp án B

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $y = x - 4 + \dfrac{11}{x + 2}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (x - 4)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{11}{x + 2} = 0$.

Phương trình đường tiệm cận xiên của (C) là $y = x - 4$.

Giá trị $T = 4a - b = 4 \cdot 1 - (-4) = 8$.

Câu 8. Chọn đáp án D

Ta có

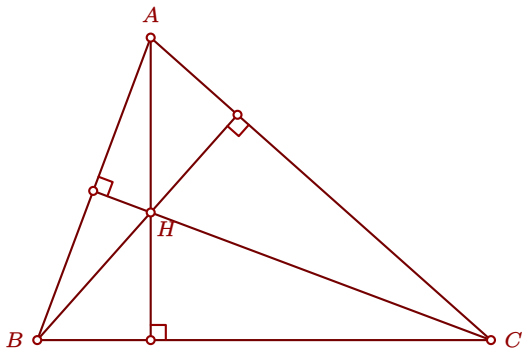
$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\quad (k\in\mathbb{Z}).$$
Vì $x\in[0;10\pi]$ nên
$$0\leqslant\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\leqslant 10\pi$$
$$\Leftrightarrow -\frac{5}{6}\leqslant k\leqslant 20-\frac{5}{6}.$$
Mà $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0,1,\ldots,19\}$.
Suy ra phương trình $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ có 20 nghiệm trên đoạn $[0;10\pi]$.

Câu 9. Chọn đáp án C
Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là x (m), với $x>0$.
Suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $2x$.
Gọi h là chiều cao của bể, ta có $V=Sh=3x^2\cdot h=500\Rightarrow h=\frac{500}{3x^2}$.
Diện tích xây dựng của bể là $S=2h\cdot x+2h\cdot 2x+x\cdot 2x=2x^2+6hx$.
Theo đề bài ta có $2x^2+6hx=8\Leftrightarrow h=\frac{4-x^2}{3x}$.
Điều kiện $h>0\Leftrightarrow 4-x^2>0\Rightarrow 0<x<2$.
Khi đó
$$V=x\cdot 2x\cdot h=2x^2\cdot\frac{4-x^2}{3x}=\frac{8x-2x^3}{3}\Rightarrow V'=\frac{8-6x^2}{3}.$$
Ta có $V'=0\Leftrightarrow 8-6x^2=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

x	0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	$\frac{32}{9\sqrt{3}}$	↘	0

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $\frac{32}{9\sqrt{3}}\approx 2{,}05.</x<2\$.$

Câu 10. Chọn đáp án B



Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;1;2)$, $B(2;1;4)$, $C(-1;2;2)$. Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm của tam giác ABC. Giá trị của biểu thức $T=x+y+z$ bằng:

Câu 11. Chọn đáp án C

Ta có $N=18$.

Tính Q_1:

Ta có $\dfrac{N}{4}=\dfrac{18}{4}=4{,}5$ nên Q_1 thuộc nhóm $[20;25)$.

Suy ra $Q_1=20+\dfrac{4{,}5}{6}\cdot(25-20)=23{,}75$.

Tính Q_3:

Ta có $\dfrac{3N}{4}=\dfrac{3\cdot 18}{4}=13{,}5$ nên Q_3 thuộc nhóm $[30;35)$.

Suy ra $Q_3=30+\dfrac{13{,}5-(6+6)}{4}\cdot(35-30)=31{,}875$.

Khoảng tứ phân vị là $\Delta Q=Q_3-Q_1=31{,}875-23{,}75=8{,}125$.

Câu 12. Chọn đáp án A

Phương trình vận tốc của chất điểm là $v(t)=S'(t)=(t^3-6t^2+15t+9)'=3t^2-12t+15$.

Ta thấy phương trình vận tốc $v(t)$ là hàm bậc hai có $a=3>0$ nên đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{12}{6}=2$.

Câu 13. Chọn đáp án: a b c d

a) Ta có $p(1000)=14$ và $p(1100)=13{,}5$.

b) Ta có $p(x)=ax+b$.

Vì $p(1000)=14\Rightarrow 1000a+b=14$ và $p(1100)=13{,}5\Rightarrow 1100a+b=13{,}5$.

Do đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}1000a+b=14\\1100a+b=13{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{200}\\b=19.\end{cases}$$

Vậy $p(x)=-\dfrac{1}{200}x+19$.

c) Doanh thu khi bán x điện thoại A của cửa hàng là $P(x)=\left(-\dfrac{1}{200}x+19\right)x=-\dfrac{1}{200}x^2+19x$.

Lợi nhuận khi đó là

$$\begin{aligned}L(x)&=P(x)-C(x)\\&=-\frac{1}{200}x^2+19x-12000+3x\\&=-\frac{1}{200}x^2+22x-12000.\end{aligned}$$

Ta có $L'(x)=-\dfrac{1}{100}x+22=0\Leftrightarrow x=2200$.

Bảng biến thiên:

x	0		$2\,200$		$+\infty$
$L'(x)$		$+$	0	$-$	
$L(x)$	$-120\,00$	↗	$12\,200$	↘	$-\infty$

Vậy cửa hàng đạt lợi nhuận cao nhất khi bán ra 2200 cái điện thoại A.

d) Với $x = 2200 \Rightarrow p(2200) = -\dfrac{1}{200} \cdot 2200 + 19 = 8$.

Câu 14. Chọn đáp án: (a) (b) (c) (d)

Hàm số $y = \dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và đạo hàm $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

a) Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

b) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là $A(0;0)$ và $B(2;4)$.

Khi đó khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

c) Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$.

Khi đó tiệm cận xiên của đồ thị là $y = x + 1$.

Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) giao với các trục tọa độ tại các điểm lần lượt là $M(0;1)$ và $N(-1;0)$.

Suy ra $OM = ON = 1$.

Khi đó tam giác được tạo thành là tam giác vuông cân OMN.

Diện tích $S_{\triangle OMN} = \dfrac{1}{2} \cdot OM \cdot ON = \dfrac{1}{2}$.

d) Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; x_0 + 1 + \dfrac{1}{x_0 - 1}\right)$.

Đồ thị có 2 đường tiệm cận là $x = 1$ và $y = x + 1$.

Ta có $\Delta_1 : x - 1 = 0$ và $\Delta_2 : x - y + 1 = 0$.

Khi đó tổng khoảng cách đến 2 đường tiệm cận là

$$T = |x_0 - 1| + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left| x_0 - \left(x_0 + 1 + \frac{1}{x_0 - 1} \right) + 1 \right|$$
$$= |x_0 - 1| + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left| \frac{1}{x_0 - 1} \right|$$
$$\geqslant 2\sqrt{|x_0 - 1| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left| \frac{1}{x_0 - 1} \right|} = 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $|x_0 - 1| = \dfrac{1}{\sqrt{2}|x_0 - 1|} \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x_0 = 1 \pm \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

Tổng khoảng cách từ một điểm trên (C) đến hai đường tiệm cận của (C) có giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

Câu 15. Chọn đáp án: a b c d

a) Gọi $C(x; y; z)$ ta có $\overrightarrow{AD} = (0; 3; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (x - 4; y; z)$.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4; 3; 0).$$

b) Gọi $M(x_1; y_1; z_1)$ ta có

$\overrightarrow{MB} = (4 - x_1; -y_1; -z_1)$.

$\overrightarrow{MC} = (4 - x_1; 3 - y_1; -z_1) \Rightarrow 2\overrightarrow{MC} = (8 - 2x_1; 6 - 2y_1; -2z_1)$.

$\overrightarrow{MS} = (-x_1; -y_1; 6 - z_1) \Rightarrow 3\overrightarrow{MS} = (-3x_1; -3y_1; 18 - 3z_1)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MS} = (-2x_1 - 4; -2y_1 - 6; -2z_1 + 18)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 4 = 0 \\ -2y_1 - 6 = 0 \\ -2z_1 + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -3 \\ z_1 = 9 \end{cases} \Rightarrow M(-2; -3; 9).$$

c) Vì E là trung điểm của CD nên $E(2; 3; 0)$.

$\overrightarrow{SE} = (2; 3; -6)$; $\overrightarrow{BC} = (0; 3; 0)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng SE và BC.

Ta có $\cos\alpha = \left| \cos\left(\overrightarrow{SE}, \overrightarrow{BC}\right) \right| = \dfrac{\left| \overrightarrow{SE} \cdot \overrightarrow{BC} \right|}{\left| \overrightarrow{SE} \right| \cdot \left| \overrightarrow{BC} \right|} = \dfrac{9}{7 \cdot 3} = \dfrac{3}{7} \Rightarrow \alpha \approx 65°$.

d) Ta có

$$\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MB} - 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MC}) + 3(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MS})$$
$$= 2\overrightarrow{IM} + (\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MS})$$
$$= 2\overrightarrow{IM}$$

(theo ý b thì $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{0}$).

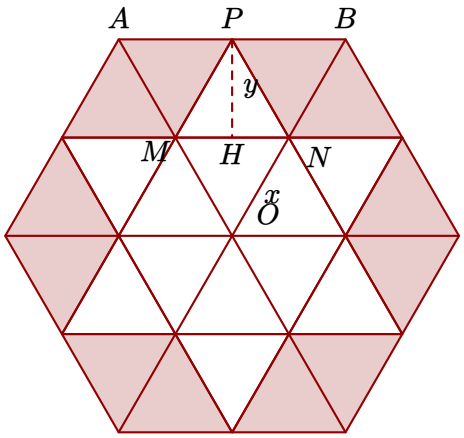
$P = |\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IS}| = 2|\overrightarrow{IM}|$.

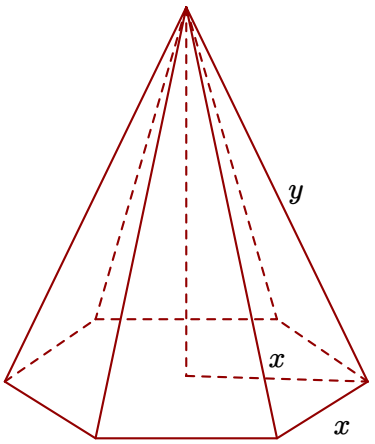
Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì I là hình chiếu của M lên mặt phẳng (Oyz)

$\Rightarrow I(0; -3; 9) \Rightarrow P = 2|\overrightarrow{IM}| = 4$.

Câu 16. Đáp án: 624.

Gọi x và y lần lượt là độ dài cạnh đáy và cạnh bên của hình chóp lục giác đều thu được. Chiều cao của hình chóp bằng $\sqrt{y^2 - x^2}$.





Diện tích đáy của hình chóp bằng $6 \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3x^2\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $OP = 20 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow PH = 10\sqrt{3} - \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y^2 = \dfrac{3(20-x)^2}{4} + \dfrac{x^2}{4} = x^2 - 30x + 300$.

Chiều cao hình chóp bằng $h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{300 - 30x}$.

Thể tích hình chóp bằng $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3x^2\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{300 - 30x} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2} \cdot \sqrt{x^4(10-x)}$.

Hàm số $f(x) = 10x^4 - x^5$ có bảng biến thiên trên khoảng $(0; 10)$:

x	0		8		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	0

Thể tích hình chóp thu được lớn nhất khi $x = 8$.

Khi đó $PH = 6\sqrt{3}$.

Khi đó diện tích toàn phần của hình chóp bằng $\dfrac{3 \cdot 8^2\sqrt{3}}{2} + 6 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 8 = 240\sqrt{3}$.

Diện tích phần cắt đi bằng $6 \cdot \dfrac{20^2\sqrt{3}}{4} - 240\sqrt{3} = 360\sqrt{3} \approx 624$ m^2.

Câu 17. Đáp án: 19.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x + 2m - 1}{(x-1)^2}$.

Hàm số có hai cực trị khi y' có hai nghiệm phân biệt, tức là

$\begin{cases} 1 - (2m-1) > 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 + 2m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1 \quad (*)$.

Khi đó, y' có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 x_2 = 2m - 1$.

Xét hàm số có dạng $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $y' = \dfrac{p'(x)q(x) - q'(x)p(x)}{[q(x)]^2}$.

Vì $y'(x_1) = 0 \Rightarrow p'(x_1)q(x_1) - q'(x_1)p(x_1) = 0 \Rightarrow \dfrac{p(x_1)}{q(x_1)} = \dfrac{p'(x_1)}{q'(x_1)}$, tương tự $\dfrac{p(x_2)}{q(x_2)} = \dfrac{p'(x_2)}{q'(x_2)}$.

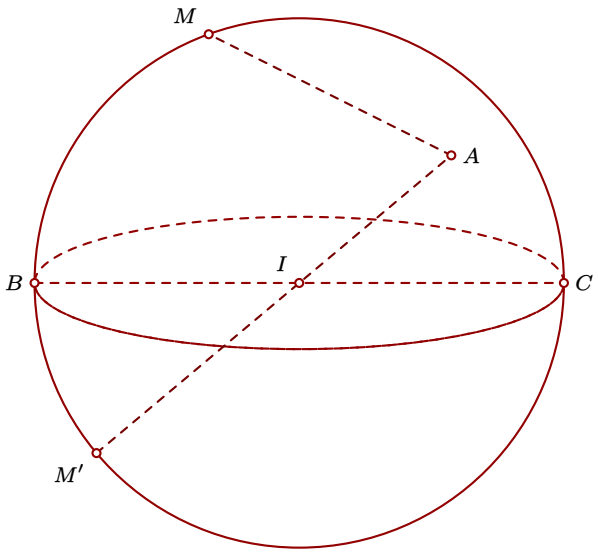
Suy ra tọa độ hai điểm cực trị của (C) là $A(x_1; 2x_1 - m)$, $B(x_2; 2x_2 - m)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (x_1 - 3; 2x_1 - m - 7)$, $\overrightarrow{MB} = (x_2 - 3; 2x_2 - m - 7)$.

Tam giác MAB vuông tại M khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$
$\Leftrightarrow (x_1-3)(x_2-3)+(2x_1-m-7)(2x_2-m-7)=0$
$\Leftrightarrow 5x_1x_2-(2m+17)(x_1+x_2)+m^2+14m+58=0$
$\Leftrightarrow 5(2m-1)-2(2m+17)+m^2+14m+58=0$
$\Leftrightarrow m^2+20m+19=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \text{ (thỏa mãn)} \\ m=-19 \text{ (thỏa mãn).}\end{array}\right.$
Phương trình có hai nghiệm âm (thỏa mãn $(*)$) và có tích bằng 19.

Câu 18. Đáp án: 11,5.

Vì MB vuông góc với MC nên M thuộc mặt cầu (S) có tâm $I(-1;-1;2)$, bán kính $R=\dfrac{BC}{2}=\sqrt{38}$.
Ta có $IA=\sqrt{29}<R$ nên điểm A nằm trong mặt cầu (S).

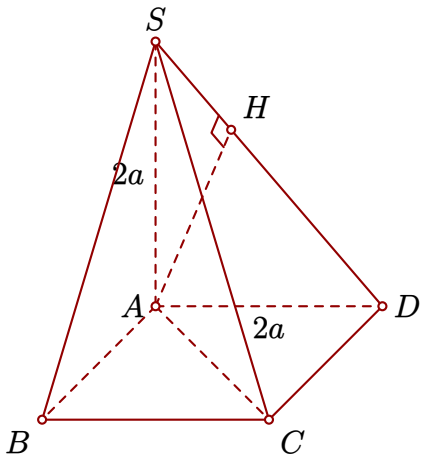


Dựa vào hình vẽ minh họa, ta có $\max AM=AM'=IA+R=\sqrt{29}+\sqrt{38}\approx 11{,}5$.

Câu 19. Đáp án: 2024.
Xét hàm số $g(t)=\mathrm{e}^t-t\Rightarrow g'(t)=\mathrm{e}^t-1$; $g'(t)=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^t=1\Leftrightarrow t=0$.
Ta có $g'(t)<0\Leftrightarrow t<0$; $g'(t)>0\Leftrightarrow t>0$.
Do đó $g(t)\geqslant g(0)=1\Rightarrow \mathrm{e}^t-t\geqslant 1,\forall t\in\mathbb{R}\quad(1)$, dấu bằng xảy ra khi $t=0$.
Điều kiện: $x>0$.
Xét $\mathrm{e}^{x^2}+(y+\ln x)\mathrm{e}^{y+\ln x}\leqslant (x^3+x)\mathrm{e}^y\quad(*)$, chia hai vế cho $\mathrm{e}^y\cdot x$, ta có
$\mathrm{e}^{x^2-y-\ln x}-(x^2-y-\ln x)\leqslant 1$.
Mà từ (1), ta có $\mathrm{e}^{x^2-y-\ln x}-(x^2-y-\ln x)\geqslant 1$.
Từ đó ta có $x^2-y-\ln x=0\Leftrightarrow y=x^2-\ln x$.
Xét hàm số $f(x)=x^2-\ln x$ với $x>0$.
Ta có $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Lại có $f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $f'(x)>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
Do đó, để ứng với mỗi y tồn tại hai số thực x thỏa mãn bất phương trình $(*)$ thì
$y>f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}85$.

Vì $y \in \mathbb{Z}$ và $y \leqslant 2024$ nên $y \in \{1; 2; \ldots; 2024\}$.
Vậy có 2024 giá trị nguyên $y \leqslant 2024$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20. Đáp án: 16.



Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \supset SD \Rightarrow \mathrm{d}(AB, SD) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD))$.
Trong (SAD) kẻ $AH \perp SD$ $(H \in SD)$, ta có
$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH.$
Lại có $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD).$
Suy ra $\mathrm{d}(A, (SCD)) = AH \Rightarrow \mathrm{d}(AB, SD) = AH$.
Độ dài cạnh $AD = 4$.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông tại A ta có
$AD = \dfrac{AH \cdot SA}{\sqrt{SA^2 - AH^2}} = 4.$
Vậy thể tích của hình chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 16.$

Câu 21. Đáp án: 11.
Doanh thu khi bán x kg vải là $316x$.
Mà tổng chi phí sản xuất x kg được cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 + 19x + 300$ (đơn vị: nghìn đồng).
Lợi nhuận khi bán x kg là $L(x) = 316x - C(x) = -x^3 + 3x^2 + 297x - 300$.
$L'(x) = -3x^2 + 6x + 297$.
Ta có $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 99 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11 \\ x = -9 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$
$L(11) = 1999$; $L(5) = 1135$; $L(20) = -1160$.
Vậy hộ sản xuất này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 11 kg hạt điều để thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 22. Đáp án: 0,75.
Ta có $n(\Omega) = 20!$.
Gọi A " Không có học sinh nam nào mà hai bạn bên cạnh đều là nữ".
Ta xét $\overline{A}$ " Có ít nhất một học sinh nam mà hai bạn bên cạnh đều là nữ".
Trường hợp 1: Có hai học sinh nam mà hai bạn bên cạnh đều là nữ.
Xếp 17 bạn nam có 17! cách.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Chọn vị trí 2 bạn nam cạnh nhau để xếp 3 bạn nữ xen kẽ vào như sau:

Nữ	Nam	Nữ	Nam	Nữ

Thì có 16 cách.
Hoán vị 3 bạn nữ có 3! cách.
Vậy trường hợp 1 có $17! \cdot 16 \cdot 3!$ cách.
Trường hợp 2: Có đúng một học sinh nam mà hai bạn bên cạnh đều là nữ.
Xếp 17 bạn nam có 17! cách.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Ta chọn vị trí 1 bạn nam để xếp 2 bạn nữ hai bên sẽ có 2 khả năng:
+ Khả năng 1: Bạn nam ở vị trí 1. Chọn 2 bạn nữ xếp hai bên có A_3^2 cách. Coi 3 bạn này là 1 bạn.

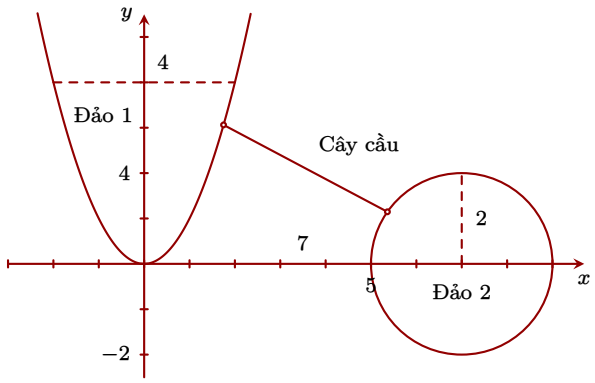
Nữ	1	Nữ	2	X	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Khi đó 17 bạn này tạo thành 18 khoảng trống.
Xếp bạn nữ còn lại vào 17 khoảng trống (trừ đi khoảng trống giữa 2 bạn nam ở vị trí 2 và 3) có 17 cách.
Do đó có $17! \cdot A_3^2 \cdot 17$ cách.
Tương tự với bạn nam ở vị trí 17 cũng có $17! \cdot A_3^2 \cdot 17$ cách.
Tổng là $2 \cdot 17! \cdot A_3^2 \cdot 17$ cách.
+ Khả năng 2: Bạn nam ở vị trí 2.
Chọn 2 bạn nữ xếp hai bên có A_3^2 cách.
Coi 3 bạn này là 1 bạn.

1	Nữ	2	Nữ	3	X	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Khi đó 17 bạn này tạo thành 18 khoảng trống.
Xếp bạn nữ còn lại vào 16 khoảng trống (trừ đi khoảng trống ở đầu và khoảng trống giữa 2 bạn nam ở vị trí 3 và 4) có 16 cách.
Do đó có $17! \cdot A_3^2 \cdot 16$ cách.
Tương tự với bạn nam ở các vị trí từ 3 đến 16 cũng có $17! \cdot A_3^2 \cdot 16$ cách.
Tổng là $15 \cdot 17! \cdot A_3^2 \cdot 16$ cách.
Vậy trường hợp 2 có $2 \cdot 17! \cdot A_3^2 \cdot 17 + 15 \cdot 17! \cdot A_3^2 \cdot 16$ cách.
Suy ra
$n\left(\overline{A}\right) = 17! \cdot 16 \cdot 3! + 2 \cdot 17! \cdot A_3^2 \cdot 17 + 15 \cdot 17! \cdot A_3^2 \cdot 16.$
$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{29}{114} \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{85}{114} \approx 0{,}75.$

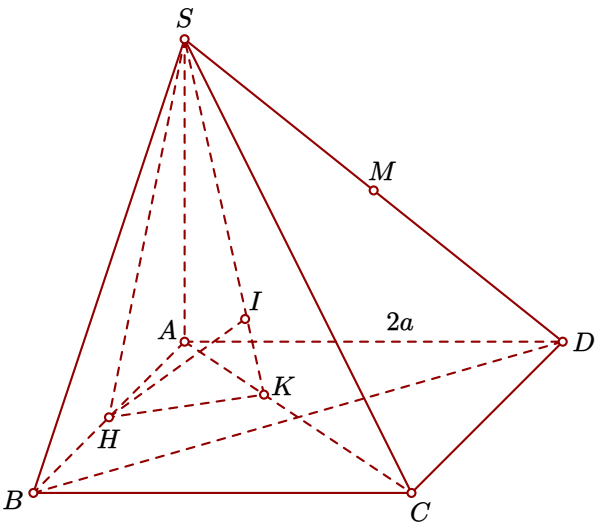
Câu 23. Đáp án: 3,93.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.
Khi đó phương trình của Đảo 1 là $y = x^2$.
Phương trình của Đảo 2 là $(x-7)^2 + y^2 = 4$.
Với mỗi điểm C thuộc Đảo 1 và điểm D thuộc Đảo 2, ta có: $CD \geqslant CI - DI = CI - 2$.
Dấu bằng xảy ra khi D nằm giữa C và I.
Do đó để tìm CD ngắn nhất ta đi tìm CI ngắn nhất.
Gọi $C\left(x; x^2\right) \Rightarrow CI^2 = (x-7)^2 + x^4$.
Ta thấy để CI ngắn nhất thì $x > 0$.
Xét hàm số $f(x) = (x-7)^2 + x^4$, $x > 0$.
Ta có $f'(x) = 2(x-7) + 4x^3$.
Xét phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 1{,}408727186$.
Khi đó $\min f(x) \approx f(1{,}408727186) \approx 35{,}20062069$.
Do đó giá trị nhỏ nhất của $CI \approx 5{,}93$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $CD \approx 3{,}93$.

Sở Hải Phòng

Câu 1. Chọn đáp án A



Gọi H là trung điểm của AB. Vì $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có M là trung điểm SD nên:

$\mathrm{d}(M,(SAC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(D,(SAC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(B,(SAC)) = \mathrm{d}(H,(SAC))$.

Kẻ $HK \perp AC$ và $HI \perp SK$.

Ta có $HI \perp (SAC) \Rightarrow \mathrm{d}(H,(SAC)) = HI$.

Trong tam giác AHK có $HK = AH \sin \widehat{HAK} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{2a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Trong tam giác SHK ta có $HI = \dfrac{HS \cdot HK}{\sqrt{HS^2 + HK^2}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{5}}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Vậy $\mathrm{d}(M,(SAC)) = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 2. Chọn đáp án C

$$\begin{aligned}
\sin 2x - \cos x = 0 &\Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vì $x \in [0;2\pi]$ nên phương trình có các nghiệm $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$, do đó tổng các nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$ của phương trình là 3π.

Câu 3. Chọn đáp án A

Số trung bình của mẫu số liệu là $\overline{x} = \dfrac{3 \cdot 10{,}3 + 7 \cdot 10{,}5 + 8 \cdot 10{,}7 + 2 \cdot 10{,}9}{20} = 10{,}59 \approx 10{,}6.$

Câu 4. Chọn đáp án D

Ta có

$$\begin{aligned} S_{100} = \frac{(u_1 + u_{100}) \cdot 100}{2} &\Leftrightarrow 10\,000 = (u_1 + u_1 + 99d) \cdot 50 \\ &\Leftrightarrow 200 = 2 \cdot 1 + 99d \\ &\Leftrightarrow d = 2. \end{aligned}$$

Suy ra $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 3 \\ u_3 = 5 \\ \vdots \\ u_{99} = 197 \\ u_{100} = 199. \end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \cdots + \frac{1}{u_{99} u_{100}} \\ &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{197 \cdot 199} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{2}{197 \cdot 199}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{1 \cdot 3} + \frac{5-3}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{199-197}{197 \cdot 199}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{197} - \frac{1}{199}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{199}\right) = \frac{99}{199}. \end{aligned}$$

Câu 5. Chọn đáp án A

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi $H = d_1 \cap d_2$, tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx + y - m - 1 = 0 \\ x - my + m - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = m + 1 - mx \\ x - m(m + 1 - mx) + m - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = m + 1 - mx \\ x - m^2 - m + m^2 x + m - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = m + 1 - mx \\ x(1 + m^2) = 1 + m^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow H(1;1). \end{aligned}$$

Ta nhận thấy: $\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2 = m \cdot 1 + 1 \cdot (-m) = 0$.

Suy ra, 2 đường thẳng d_1 và d_2 vuông góc nhau tại H.

Đặt $a = \mathrm{d}(I, d_1); b = \mathrm{d}(I, d_2)$.

Ta có: $a^2 + b^2 = HI^2 = (1-1)^2 + (2-1)^2 = 1$.

Mặt khác: $MN = 2\sqrt{R^2 - a^2} = 2\sqrt{4 - a^2}; PQ = 2\sqrt{R^2 - b^2} = 2\sqrt{4 - b^2}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} S_{MPNQ} &= \frac{1}{2} MN \cdot PQ \\ &= 2\sqrt{4-a^2} \cdot \sqrt{4-b^2} \\ &\leqslant 2 \cdot \frac{(4-a^2)+(4-b^2)}{2} = 8-(a^2+b^2) = 8-1 = 7. \end{aligned}$$

Vậy $(S_{MPNQ})_{\max} = 7$.

Câu 6. Chọn đáp án C

Chọn 5 bạn từ 10 bạn và xếp vào hàng 1 có 30 240 cách.

5 bạn còn lại xếp vào hàng 2 có $5! = 120$ cách.

Do đó $n(\Omega) = (30\,240 \cdot 120) \cdot 2 = 7\,257\,600$ (do 2 hàng có thể đổi chỗ cho nhau).

Trường hợp 1:

- Hàng 1 gồm 1 nữ, 4 nam trong đó có Hùng.

Chọn 2 nam từ 5 nam xếp cùng hàng với Hùng, có $C_5^2 = 10$ cách.

Xếp Hùng vào giữa 2 nam vừa được chọn, có $2! = 2$ cách.

Chọn 1 nam từ 3 nam xếp cùng hàng với Hùng có $C_3^1 = 3$ cách.

Chọn 1 nữ từ 4 nữ xếp cùng hàng với Hùng có $C_4^1 = 4$ cách.

Coi Hùng và 2 bạn nam xếp liền kề là 1 phần tử, xếp 3 phần tử vào 3 vị trí có $3! = 6$ cách.

- Hàng 2 gồm 2 nam và 3 nữ.

Xếp 3 nữ vào 3 vị trí có $3! = 6$ cách.

Khi đó giữa 3 nữ có hai khoảng trống, ta xếp 2 nam vào 2 khoảng trống đó, có $2! = 2$ cách.

Do đó, trường hợp này có $2 \cdot (10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2) = 34\,560$ cách (do 2 hàng có thể hoán đổi cho nhau).

Trường hợp 2:

- Hàng 1 gồm 2 nữ, 3 nam, trong đó có Hùng.

Chọn 2 nam từ 5 nam xếp cùng hàng với Hùng, có $C_5^2 = 10$ cách.

Xếp Hùng vào giữa 2 nam vừa được chọn, có $2! = 2$ cách.

Chọn 2 nữ từ 4 nữ xếp cùng hàng với Hùng có $C_4^2 = 6$ cách.

Xếp 2 bạn nữ vào 2 vị trí có $2! = 2$ cách.

Coi Hùng và 2 bạn nam xếp liền kề là 1 phần tử ta xếp vào khoảng trống giữa 2 bạn nữ, có 1 cách.

- Hàng 2 gồm 3 nam và 2 nữ.

Xếp 3 nam vào 3 vị trí có $3! = 6$ cách.

Khi đó có 4 khoảng trống được tạo ra (2 khoảng trống giữa và 2 khoảng trống 2 đầu), chọn 2 khoảng trống và xếp 2 nữ vào 2 khoảng trống đó, có $A_4^2 = 12$ cách.

Do đó, trường hợp này có $2 \cdot (10 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 12) = 34\,560$ cách (do 2 hàng có thể hoán đổi cho nhau).

Vậy $\mathrm{P} = \dfrac{34\,560 + 34\,560}{7\,257\,600} = \dfrac{1}{21}$.

Câu 7. Chọn đáp án D

Vì đồ thị hàm số nhận đường $x = -2$ là tiệm cận đứng, suy ra:

$-2c + 2 = 0 \Leftrightarrow c = 1$.

Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua hai điểm $(-1;0)$ và $(0;1)$ nên tiệm cận xiên có phương trình là

$y = x + 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax^2+bx+1}{cx+2} = \frac{ax^2+bx+1}{x+2} \\ &= ax - 2a + b + \frac{4a-2b+1}{x+2}. \end{aligned}$$

Mà tiệm cận xiên của đồ thị hàm số ban đầu có dạng $y = ax - 2a + b$, suy ra
$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3. \end{cases}$
Vậy $T = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 1 = 10$.

Câu 8. Chọn đáp án D
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+5) - (x^2-x+3)(2x)}{(x^2+5)^2}$$
$$= \frac{x^2+4x-5}{(x^2+5)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -5 \end{bmatrix}.$$
Bảng biến thiên

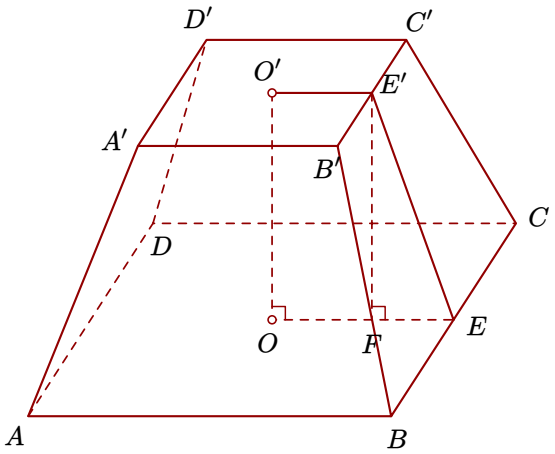
x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	$\frac{11}{10}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	1

Ta có
$$g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x-2 = 0 \\ f'(x^2-2x-m) = 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x^2-2x-m = -5 \\ x^2-2x-m = 1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x^2-2x = m-5 \ (1) \\ x^2-2x = m+1 \ (2). \end{bmatrix}$$
Để hàm số $g(x) = f(x^2-2x-m)$ có đúng 3 điểm cực trị thì $f'(x^2-2x-m) = 0$ phải có hai nghiệm đơn phân biệt khác $x = 1$ tương đương phương trình (1), (2) có hai nghiệm đơn phân biệt khác $x = 1$.
Xét hàm số $y = x^2 - 2x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$
			$y = m+1$		
			$y = m-5$		

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x$ ta có:
$\begin{cases} m+1 > -1 \\ m-5 \leqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-2;4]$
Vậy có 6 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Chọn đáp án A



Diện tích đáy nhỏ là: $S_1 = 7^2 = 49$.
Diện tích đáy lớn là: $S_2 = 5^2 = 25$.
Ta có mặt bên và đáy nhỏ tạo thành góc nhị diện có số đo bằng $120^\circ \Rightarrow \widehat{O'E'E} = 120^\circ$
$\Rightarrow \widehat{OEE'} = 60^\circ$.
Lấy F là trung điểm của $OE \Rightarrow E'F \perp (ABCD)$
$OO' = E'F = \tan 60^\circ \cdot EF$
$= \sqrt{3}$.
Thể tích của hầm rượu trên bằng $V = \dfrac{(49 + 25 + \sqrt{49 \cdot 25}) \cdot \sqrt{3}}{3} = 62{,}93$.

Câu 10. Chọn đáp án A
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đều (H) có 15 đỉnh đó. Lấy một đỉnh A bất kì trong 15 đỉnh đó. Khi đó có 7 cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng AO, như vậy có tất cả 7 tam giác cân đỉnh A được tạo ra. Với 15 đỉnh đó tạo ra $15 : 3 = 5$ tam giác đều, nhưng mỗi tam giác đều thì sẽ cân tại mỗi đỉnh, khi đó mỗi tam giác đều tạo thành sẽ bị đếm lại ba lần.
Vậy số tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều là $15 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = 90$ tam giác.

Câu 11. Chọn đáp án A
Gọi số tự nhiên có 4 số đôi một khác nhau là $x = \overline{abcd}$, $a \neq 0, a, b, c, d$ đôi một khác nhau được chọn từ S.
Khi đó số các số x được tạo ra là: $\mathrm{A}_9^4 = 3024$.
Gọi x_1 số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được chọn từ S trong đó có đúng một chữ số chẵn.

1	2	3	4

Chọn một số chẵn trong 4 số chẵn của S xếp vào 1 trong 4 ô như hình có $4 \cdot 4 = 16$ cách xếp chữ số chẵn.
Chọn 3 trong 5 chữ số lẻ của S để xếp vào 3 ô còn lại có $\mathrm{C}_5^3 \cdot 3! = 60$ cách.
Vậy có tất cả $60 \cdot 16 = 960$ số x_1.
Xác suất để viết được số có đúng một số chẵn là $\mathrm{P} = \dfrac{960}{3024} = \dfrac{20}{63}$.

Câu 12. Chọn đáp án C

Ta có

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \mathrm{d}(A, BC)$$

$$\Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$$

$$\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC}$$

$$\Leftrightarrow 3BC = AD + BC$$

$$\Leftrightarrow AD = 2BC.$$

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ (1).

$\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1)$.

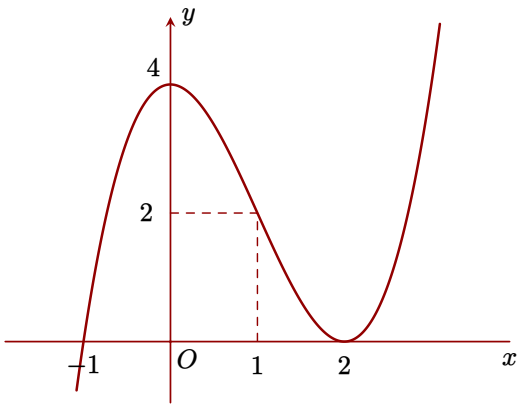
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3. \end{cases}$$

Vậy $D(-12; -1; 3)$.

Câu 13. Chọn đáp án: a b c d

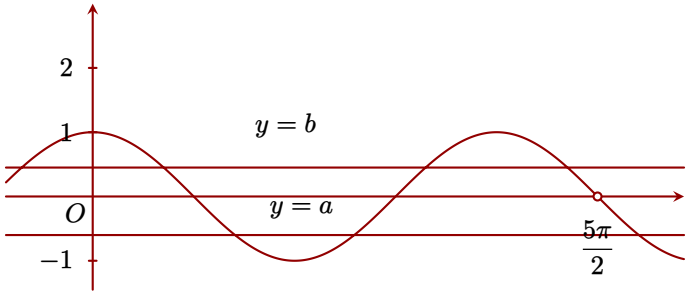
a)



Đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại ba điểm nên phương trình $f'(\cos x) = 3$ có ba nghiệm là:

$$\Rightarrow f'(\cos x) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = a, a > 1 (l) \\ \cos x = b, b \in (0; 1) \\ \cos x = c, c \in (-1; 0) \end{cases}$$

Xét đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ ta có



Đường thẳng $y=b$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm.
Đường thẳng $y=a$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm.
Vậy phương trình $f'(\cos x)=3$ có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

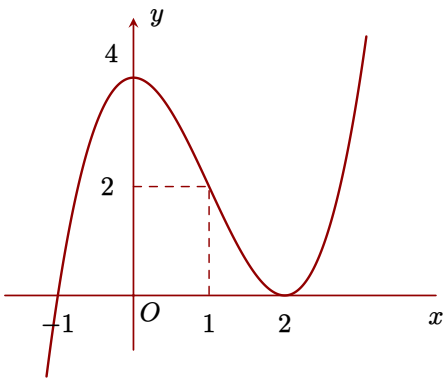
b) Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ là

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f(-1)$.

c) Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

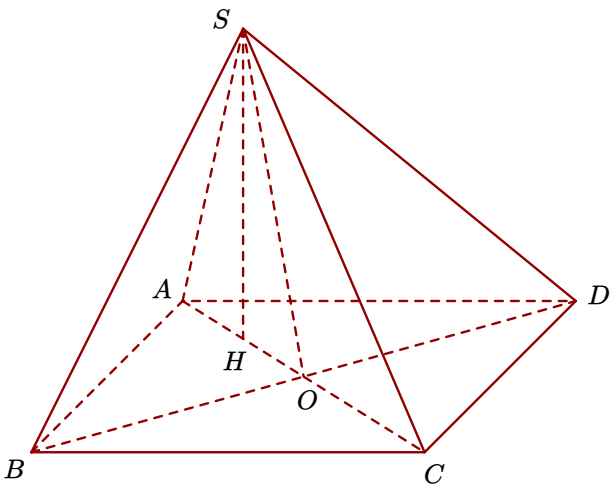
d) Xét hàm số $y=f(x-2024)-2023x+2022$ có $y'=f'(x-2024)-2023$
Đặt $t=x-2024$ thì $y'=f'(t)-2023$.
$y'=0\Rightarrow f'(t)=2023$.



Đường thẳng $y=2023$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại một điểm. Nên hàm số có 1 cực trị.

Câu 14. Chọn đáp án: a b c d

a)



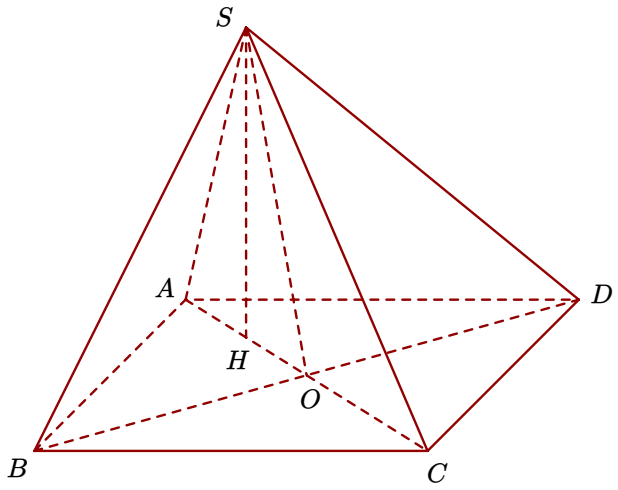
Từ điểm H kẻ $HK \perp CD$, ta có $CD \perp (SHK)$ nên góc phẳng của nhị diện $[S, CD, A]$ bằng góc $\alpha = \widehat{SKH}$.

Ta có:

$$\frac{HK}{AI} = \frac{HC}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow HK = \frac{3}{4}AI = \frac{3}{4} \cdot 4a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan\alpha = \frac{SH}{HK} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2}{3a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.$$

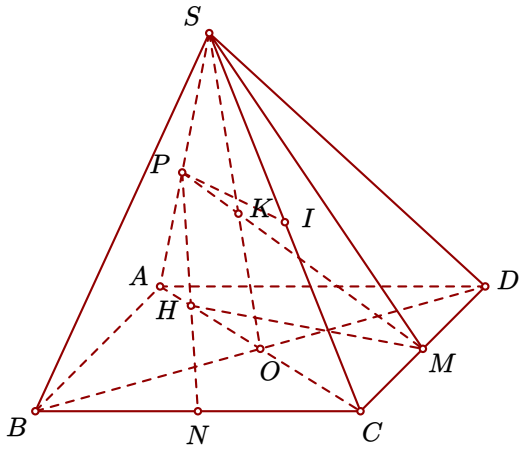
b)



Ta có $BO \perp (SAC)$ nên góc giữa SB và (SAC) là góc $\widehat{BSO}$.

c) Ta có diện tích đáy $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4} = 8a^2\sqrt{3}$.

d)



Gọi I là trung điểm AM, ta có $PI \parallel SM$ nên $SM \parallel (PNI)$.

Do đó $\mathrm{d}(SM, PN) = \mathrm{d}(S, (PNI)) = \mathrm{d}(A, (PNI))$ vì P là trung điểm SA.

Do H là trung điểm AO nên $\mathrm{d}(A, (PNI)) = 2\mathrm{d}(H, (PNI))$.

Ta có tam giác ACD đều nên $AM \perp CD$.

Kẻ $HK \perp NI$, $HK = \dfrac{1}{2}AI = \dfrac{1}{4}AM = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{4a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác SAH ta có PO cắt SH tại F nên ta có:

$$\frac{SP}{PA} \cdot \frac{AO}{OH} \cdot \frac{HF}{FS} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{HF}{FS} = \frac{1}{2} \text{ nên } HF = \frac{1}{3}SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Kẻ $HE \perp FK$ thì:
$\mathrm{d}(H,(PNI)) = HE$

$$= \frac{HF \cdot HK}{\sqrt{HF^2 + HK^2}}$$
$$= \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Vậy $\mathrm{d}(SM, PN) = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 15. Chọn đáp án: a b c d

a) Ta có

$$f(x) - 80 \cdot 3^{\sqrt{x^2+1}-2} \leqslant 0 \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x^2+1}+x} - 3^{\sqrt{x^2+1}-x} - 80 \cdot 3^{\sqrt{x^2+1}-2} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow 3^x - 3^{-x} - 80 \cdot 3^{-2} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 1 - \frac{80}{9} \cdot 3^x \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{9} \leqslant 3^x \leqslant 9$$
$$\Leftrightarrow x \leqslant 2.$$

Các nghiệm nguyên dương của bất phương trình là $1; 2$.

b) Ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x^2+1}+x} - 3^{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$$
$$\Leftrightarrow 3^x - 3^{-x} = 0$$
$$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm.

c) Ta có

$$f'(x) = 3^{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot \ln 3 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right) - 3^{\sqrt{x^2+1}-x} \cdot \ln 3 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$$
$$= \frac{3^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \ln 3}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(3^x \cdot x + 3^x \cdot \sqrt{x^2+1} - 3^{-x} \cdot x + 3^{-x} \cdot \sqrt{x^2+1}\right)$$
$$= \frac{3^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \ln 3}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left[\sqrt{x^2+1} \cdot (3^x + 3^{-x}) + x \cdot (3^x - 3^{-x})\right]$$

Xét $x \cdot (3^x - 3^{-x})$:
Với $x > 0$ ta có $3^x - 3^{-x} > 0$, do đó $x \cdot (3^x - 3^{-x}) > 0$.
Với $x < 0$ ta có $3^x - 3^{-x} < 0$, do đó $x \cdot (3^x - 3^{-x}) > 0$.
Suy ra $x \cdot (3^x - 3^{-x}) \geqslant 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\dfrac{3^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \ln 3}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ và $\sqrt{x^2+1} \cdot (3^x + 3^{-x}) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. (Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$).

d) Xét hàm số $f(x) = 3^{\sqrt{x^2+1}+x} - 3^{\sqrt{x^2+1}-x}$.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $f(-x) = 3^{\sqrt{x^2+1}-x} - 3^{\sqrt{x^2+1}+x} = -f(x)$.

Do đó $f(x)$ là hàm số lẻ.

Khi đó

$$f(x^2+1)+f\left(-\frac{mx}{2}\right)>0 \Leftrightarrow f(x^2+1)>-f\left(-\frac{mx}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow f(x^2+1)>f\left(\frac{mx}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2+1>\frac{mx}{2}.$$

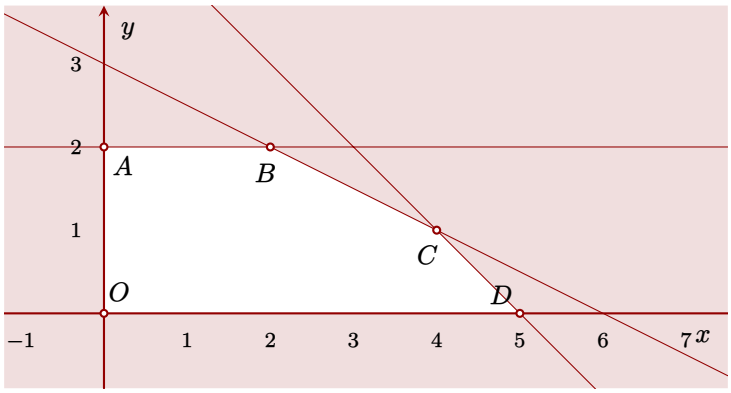
Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x\in(-\infty;0)$
$\Leftrightarrow \frac{m}{2}>x+\frac{1}{x}, \forall x\in(-\infty;0)$. $(*)$

Với $x<0$, ta có $x+\frac{1}{x}=-\left[(-x)+\left(-\frac{1}{x}\right)\right]\leqslant -2\sqrt{(-x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}=-2$.

Khi đó, $(*)$ tương đương $\frac{m}{2}>-2\Leftrightarrow m>-4$.

Các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2024;2025]$ thỏa mãn điều kiện trên là:
$m\in\{-3;-2;\ldots;2025\}$ (2029 giá trị).

Câu 16. Chọn đáp án: a b c d

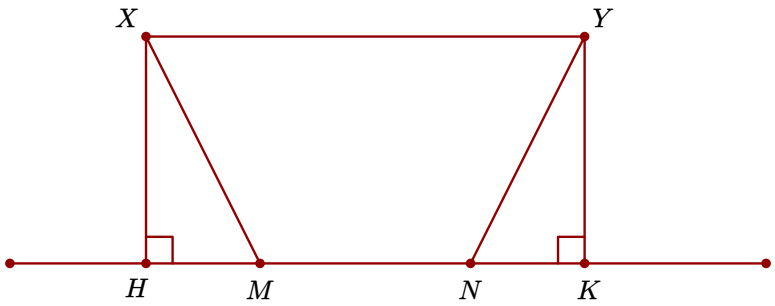


Gọi x và y lần lượt là số tấn sản phẩm I và II nhà máy cần sản xuất $(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$.
Theo đề ra ta có hệ:

$$\begin{cases} x\geqslant 0\\ 0\leqslant y\leqslant 2\\ 2x+2y\leqslant 10\\ 2x+4y\leqslant 12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geqslant 0\\ 0\leqslant y\leqslant 2\\ x+y\leqslant 5\\ x+2y\leqslant 6.\end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ là miền trong đa giác (kể cả biên) $OABCD$ với $O(0;0), A(0;2), B(2;2), C(4;1), D(5;0)$.
a) Tổng số tiền thu được là $F(x;y)=3x+5y$ (triệu đồng).
$F(0;0)=0$,
$F(0;2)=10$,
$F(2;2)=16$,
$F(4;1)=17$,
$F(5;0)=15$.
Vậy tiền lãi cao nhất ta dùng 4 tấn sản phẩm loại I và 1 tấn loại II.
b) Điểm $M(3;1{,}5)$ thuộc miền nghiệm của hệ.
c) Bất phương trình mô tả điều kiện về sử dụng nguyên liệu C của nhà máy là:
$2x+4y\leqslant 12\Leftrightarrow x+2y\leqslant 6$.
d) $F(2;2)=3\cdot 2+5\cdot 2=16$ nên tiền lãi thu được khi sản xuất 2 tấn sản phẩm I và 2 tấn sản phẩm II là 16 triệu đồng.
$F(4;1)=3\cdot 4+5\cdot 1=17$ nên tiền lãi thu được cao nhất khi sản xuất 4 tấn sản phẩm I và 1 tấn sản phẩm II là 17 triệu đồng.

Câu 17. Đáp án: 15,5.



Đặt: $XM = YN = x, x \geqslant 3$. Ta có: $HM = NK = \sqrt{x^2-9} \Rightarrow MN = 18 - 2\sqrt{x^2-9}$.
Xét hàm số: $f(x) = 2x \cdot 1300 + 500 \cdot \left(18 - 2\sqrt{x^2-9}\right), x \geqslant 3$.

$$f'(x) = 2600 - \frac{1000x}{\sqrt{x^2-9}}$$
$$= \frac{2600\sqrt{x^2-9} - 1000x}{\sqrt{x^2-9}}$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2600\sqrt{x^2-9} - 1000x = 0$$
$$\Leftrightarrow 13\sqrt{x^2-9} = 5x$$
$$\Leftrightarrow 169(x^2-9) = 25x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{169}{16}$$
$$\Rightarrow x = \frac{13}{4}.$$

Bảng biến thiên:

x	3		$\frac{13}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	16800	↘	16200	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy khoảng cách giữa hai vị trí M và N là:
$MN = 18 - 2\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^2 - 9} = 15{,}5$ kilômét thì tổng chi phí làm đường nêu trên ít nhất.

Câu 18. Đáp án: 14.
Điều kiện xác định $x > 0$ và $x \neq \frac{1}{2}$.
Ta có

$$\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7\left(\frac{(2x-1)^2}{2x}\right) + (4x^2-4x+1) - 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow \log_7(2x-1)^2 - \log_7(2x) + (2x-1)^2 - 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow \log_7(2x-1)^2 + (2x-1)^2 = \log_7(2x) + 2x. \quad (1)$$

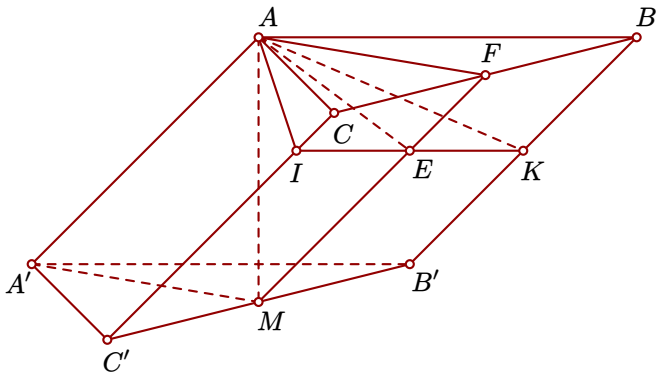
Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 7} + 1 > 0, \forall t > 0$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
Phương trình (1) có dạng $f\left((2x-1)^2\right) = f(2x)$, suy ra
$(2x-1)^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 2x$
$\Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0.$
Giải phương trình bậc hai trên, ta thu được hai nghiệm
$x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$, $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$.
Vì $x_1 < x_2$, ta tính giá trị $x_1 + 2x_2$:
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= \frac{3-\sqrt{5}}{4} + 2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{3-\sqrt{5}+6+2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{9+\sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$
Theo giả thiết $x_1 + 2x_2 = \dfrac{1}{4}(a + \sqrt{b})$, suy ra
$\begin{cases} a = 9 \\ b = 5 \end{cases}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}^+$).
Vậy tổng $a + b = 9 + 5 = 14$.

Câu 19. Đáp án: 17.
Ta có $AB = 2\sqrt{17}$, $BC = 2\sqrt{3}$, $AC = 2\sqrt{14}$.
Suy ra $BC^2 + AC^2 = AB^2$.
Do đó tam giác ABC vuông tại C.
Suy ra I là trung điểm của AB.
Do đó $I(4; -1; 0)$.
Vậy $OI^2 = 17$.

Câu 20. Đáp án: 0,96.
Ta nhận xét rằng để đi từ A đến B cần đi sang phải 12 bước và xuống dưới 10 bước.
Tổng cộng là 22 bước.
Chọn 12 bước đi sang phải có C_{22}^{12} cách.
Do đó $n(\Omega) = \mathrm{C}_{22}^{12}$.
Gọi D: "Anh Nam không đi qua điểm giao ở vị trí C".
Khi đó $\overline{D}$: "Anh Nam đi qua điểm giao ở vị trí C".
Để đi từ A đến C cần đi sang phải 7 bước và xuống dưới 3 bước nên số cách đi là C_{10}^{7} cách.
Để đi từ C đến B cần đi sang phải 5 bước và xuống dưới 7 bước nên số cách đi là C_{12}^{5} cách.
Vậy $n\left(\overline{D}\right) = \mathrm{C}_{10}^{7} \cdot \mathrm{C}_{12}^{5}$.
Suy ra
$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) &= \frac{n\left(\overline{D}\right)}{n(\Omega)} \\ &= \frac{1200}{29393} \end{aligned}$$
$\Rightarrow \mathrm{P}(D) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \approx 0{,}96.$

Câu 21. Đáp án: 2,58.



Kẻ $AI \perp CC'$, $AK \perp BB' \Rightarrow AI = 2$, $AK = 1$, $CC' \perp (AIK) \Rightarrow CC' \perp IK$.
Khi đó IK là khoảng cách từ CC' đến BB' cũng là khoảng cách từ C đến BB'
$\Rightarrow IK = \sqrt{5} \Rightarrow AI^2 + AK^2 = 2^2 + 1^2 = 5 = IK^2 \Rightarrow \triangle AIK$ vuông tại A.
Gọi F là trung điểm $BC \Rightarrow MF \parallel CC' \parallel BB' \Rightarrow MF \perp (AIK)$, $MF \cap IK = E$ là trung điểm IK.
Lại có $MA \perp (A'B'C') \Rightarrow ((AIK);(A'B'C')) = (MF;MA) = \widehat{FMA} = \widehat{EAF}$ (do $MA \perp AF$).

Lại có $EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE \Rightarrow \cos\widehat{EAF} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{\sqrt{15}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{EAF} = 30^\circ$.

Do hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là tam giác $\triangle AIK$ nên ta có:

$$S_{\triangle AIK} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\widehat{EAF} \Leftrightarrow 1 = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Xét tam giác AMF vuông tại A có:

$$\tan\widehat{AMF} = \frac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \frac{\dfrac{\sqrt{15}}{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{5}.$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3} \approx 2{,}58$.

Câu 22. Đáp án: 10,7.
Cỡ mẫu $n = 20$.
Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\dfrac{1}{2}(x_{15} + x_{16}) \in [9;11)$ nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 9 + \frac{\dfrac{3.20}{4} - (2+7)}{7}(11-9) = \frac{75}{7} \approx 10,7\ .$$

Sở Nghệ An

Câu 1. Chọn đáp án D
Nhóm chứa Mốt là: $[160;165)$.
Khi đó $M_0 = 160 + \dfrac{25-17}{(25-17)+(25-8)} \cdot 5 = 161,6$.

Câu 2. Chọn đáp án C
Gọi T là tập hợp học sinh học khá môn Toán, A là tập hợp học sinh học khá môn Tiếng Anh.
Gọi x là số học sinh học khá cả hai môn Toán và Tiếng Anh, tức $x = n(T \cap A)$.
Ta có: $n(T \cup A) + 5 = 45 \Leftrightarrow (31 + 24 - x) + 5 = 45 \Leftrightarrow x = 15$. Vậy xác suất để chọn được một học sinh học khá cả hai môn Toán và Tiếng Anh là:
$P = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$.

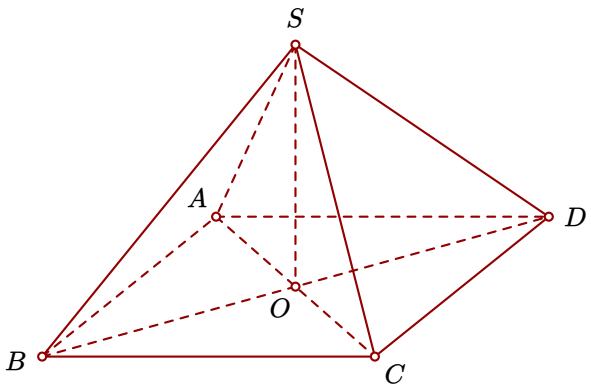
Câu 3. Chọn đáp án A
Ta có: $\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB_1}$ không bằng $\overrightarrow{AC_1}$ nên A sai.

Câu 4. Chọn đáp án A
Ta có
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x-2) = 2$.
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (-x) = -2$.
$f(2) = 2$.

Câu 5. Chọn đáp án A
Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-1;3;-4)$.

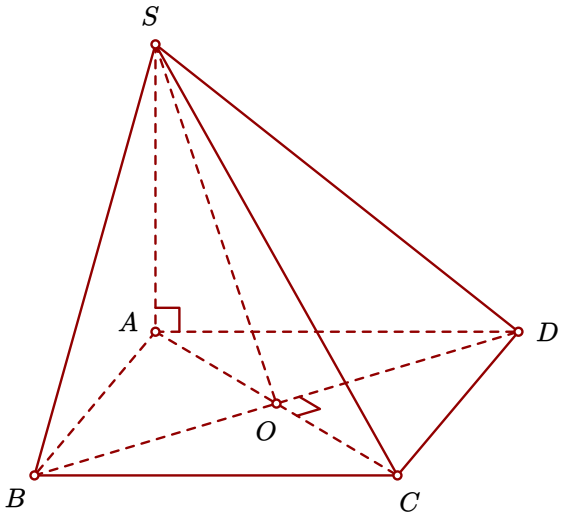
Câu 6. Chọn đáp án A
Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x = 2$.

Câu 7. Chọn đáp án C



Diện tích đáy $B = a^2$.
Ta có $AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Chiều cao của khối chóp là
$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2a$.
Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng
$V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot 2a = \dfrac{2}{3}a^3$.

Câu 8. Chọn đáp án D



Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do đó $\begin{cases} SO \perp BD \quad (SO \subset (SBD)) \\ OC \perp BD \quad (OC \subset (BCD)). \end{cases}$

Suy ra góc phẳng nhị diện $[S, BD, C]$ là $\widehat{SOC}$.

Ta có

$OA = OC = SA\sqrt{3} \Rightarrow AC = 2SA\sqrt{3}$.

$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{SA^2 + 3SA^2} = 2SA$.

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{SA^2 + 12SA^2} = SA\sqrt{13}$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác SOC

$$\cos\widehat{SOC} = \frac{SO^2 + OC^2 - SC^2}{2SO \cdot OC} = \frac{4SA^2 + 3SA^2 - 13SA^2}{2 \cdot 2SA \cdot SA\sqrt{3}} = \frac{-6}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $\widehat{SOC} = 150°$.

Vậy số đo góc phẳng nhị diện $[S, BD, C]$ bằng $150°$.

Câu 9. Chọn đáp án A

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Theo giả thiết: $f(1) + f(-2) = f(3) + f(0) \Leftrightarrow f(3) - f(-2) = f(1) - f(0)$.

Vì hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $0 < 1 < 3$ nên $f(1) - f(0) > 0$.

Suy ra $f(3) - f(-2) > 0 \Leftrightarrow f(3) > f(-2)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $f(0)$, giá trị lớn nhất của hàm số là $f(3)$.

Câu 10. Chọn đáp án B

Ta có

$$x(t) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4t - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \\ t = k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 \leqslant t \leqslant 4$ nên:

- Với $t = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$: $0 \leqslant \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \leqslant 4 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leqslant k \leqslant \frac{8}{\pi} - \frac{1}{3} \approx 2{,}21 \Rightarrow k \in \{0; 1; 2\}$.
- Với $t = k\frac{\pi}{2}$: $0 \leqslant k\frac{\pi}{2} \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant \frac{8}{\pi} \approx 2{,}55 \Rightarrow k \in \{0; 1; 2\}$.

Các giá trị t tương ứng không trùng nhau, do đó có tất cả 6 thời điểm thoả mãn.

Vậy vật đạt li độ bằng $\frac{3}{2}$ cm tất cả 6 lần.

Câu 11. Chọn đáp án A

Ta có $u_3 = 12 \Leftrightarrow u_1 + 2d = 12 \Leftrightarrow 4 + 2d = 12 \Leftrightarrow d = 4$.

Khí đó $u_{10} = u_1 + 9d = 4 + 9.4 = 40$.

Câu 12. Chọn đáp án C

Ta có vận tốc của vật $v(t) = s'(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 4$.

- $v'(t) = t - 2$;
- $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (loại).

Ta có bảng biến thiên như sau

t	4		10
$v'(t)$		$+$	
$v(t)$	4	↗	34

Vậy trong khoảng thời gian từ 4 giây đến 10 giây vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 (m/s).

Câu 13. Chọn đáp án: a b c d

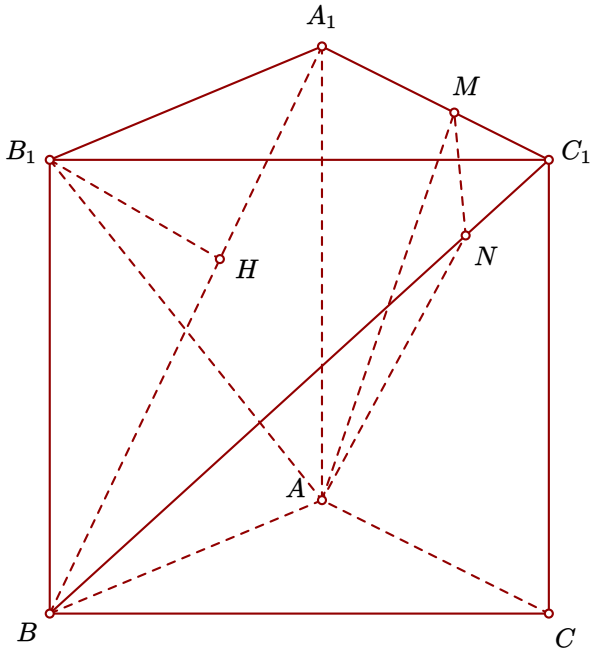
a) Biến cố đối của biến cố A là $\overline{A}$: "Không có hạt giống nào nảy mầm" hay "Cả ba hạt giống đều không nảy mầm".

b) Vì việc nảy mầm của ba loại hạt giống là độc lập với nhau nên xác suất để xảy ra biến cố B là: $P(B) = x \cdot y \cdot 0{,}8 = 0{,}8xy$.

c) Ta có: $P(A) = 0{,}964 \Rightarrow P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}964 = 0{,}036$.

Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là các biến cố hạt giống X, Y, Z nảy mầm. Khi đó:
$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = x \cdot y \cdot 0{,}8 = 0{,}224$
$P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) = (1-x)(1-y) \cdot 0{,}2 = 0{,}036$
$$\Rightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{7}{25} \\ (1-x)(1-y) = \dfrac{9}{50} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0{,}28 \\ x + y = 1{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}7 \\ y = 0{,}4 = \dfrac{2}{5} \end{cases} (\text{do } x > y).$$
Vậy xác suất để hạt giống X nảy mầm là 0,7.
d) Gọi C là biến cố: "Có đúng hai trong ba loại hạt giống nảy mầm".
Ta có $C = \left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right)$.
Vì các biến cố thành phần xung khắc và sự nảy mầm của các loại hạt là độc lập với nhau nên:
$P(C) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8$
$= 0{,}056 + 0{,}336 + 0{,}096 = 0{,}488.$

Câu 14. Chọn đáp án: a b c d



a) Thể tích của khối lăng trụ là
$V = AA_1 \cdot S_{ABC} = a\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}.$
b) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BC_1 và AC.
Vì $AC \parallel A_1C_1$ nên $\alpha = (BC_1, AC) = (BC_1, A_1C_1) = \widehat{BC_1A_1}$.
Ta có $A_1C_1 \perp (ABB_1A_1) \Rightarrow A_1C_1 \perp BA_1$.
Xét tam giác vuông A_1BC_1 tại A_1, ta có
$\tan\alpha = \dfrac{A_1B}{A_1C_1} = \dfrac{\sqrt{a^2+2a^2}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°.$
c) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (A_1BC_1):
Gọi H là hình chiếu vuông góc của B_1 lên BA_1.
Vì $AB_1 \parallel (A_1BC_1)$ nên
$\mathrm{d}(A, (A_1BC_1)) = \mathrm{d}(B_1, (A_1BC_1)) = B_1H.$
Xét tam giác vuông BA_1B_1, ta có
$\dfrac{1}{B_1H^2} = \dfrac{1}{BB_1^2} + \dfrac{1}{A_1B_1^2} \Rightarrow B_1H = \dfrac{a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+2a^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$

Suy ra $\mathrm{d}(A,(A_1BC_1))=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

d) Ta có

$V_{A.A_1BNM}=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A,(A_1BC_1))\cdot S_{A_1BNM}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\cdot(S_{\Delta A_1BC_1}-S_{\Delta MNC_1})$.

Đặt $MC_1=x, NC_1=y\ (0<x\leqslant a, 0<y\leqslant 2a)$.

Ta có $BC_1=\sqrt{BA_1^2+A_1C_1^2}=\sqrt{3a^2+a^2}=2a$.

Suy ra

$\dfrac{S_{\Delta MNC_1}}{S_{\Delta A_1BC_1}}=\dfrac{x}{a}\cdot\dfrac{y}{2a}=\dfrac{xy}{2a^2}\Rightarrow S_{\Delta MNC_1}=\dfrac{xy}{2a^2}\cdot S_{\Delta A_1BC_1}$

$\Rightarrow S_{A_1BNM}=S_{\Delta A_1BC_1}-S_{\Delta MNC_1}=S_{\Delta A_1BC_1}\left(1-\dfrac{xy}{2a^2}\right)$.

Áp dụng định lí cô-sin cho tam giác MNC_1, ta có

$MN^2=MC_1^2+NC_1^2-2MC_1\cdot NC_1\cdot\cos\widehat{MC_1N}$

$\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{4}=x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ$

$\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{4}=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy$.

Mặt khác $(x+y)^2\geqslant 4xy$ nên

$\dfrac{a^2}{4}=(x+y)^2-3xy\geqslant 4xy-3xy=xy\Rightarrow xy\leqslant\dfrac{a^2}{4}$.

Suy ra

$S_{A_1BNM}=S_{\Delta A_1BC_1}\left(1-\dfrac{xy}{2a^2}\right)\geqslant S_{\Delta A_1BC_1}\left(1-\dfrac{\frac{a^2}{4}}{2a^2}\right)=\dfrac{7}{8}S_{\Delta A_1BC_1}$.

Khi đó

$V_{A.A_1BNM}\geqslant\dfrac{a\sqrt{6}}{9}\cdot\dfrac{7}{8}S_{\Delta A_1BC_1}=\dfrac{7a\sqrt{6}}{72}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot a\sqrt{3}\right)=\dfrac{7a^3\sqrt{2}}{48}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{a}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $A.A_1BNM$ là $\dfrac{7a^3\sqrt{2}}{48}$.

Câu 15. Chọn đáp án: a b c d

Ta có:

$y'=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-4.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-6	↘	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có giá trị cực đại của hàm số là -6 (tại $x=-4$) và giá trị cực tiểu của hàm số là 2 (tại $x=0$). Vì vậy, giá trị cực đại của hàm số nhỏ hơn giá trị cực tiểu của hàm số.

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4;-2)$ và $(-2;0)$.

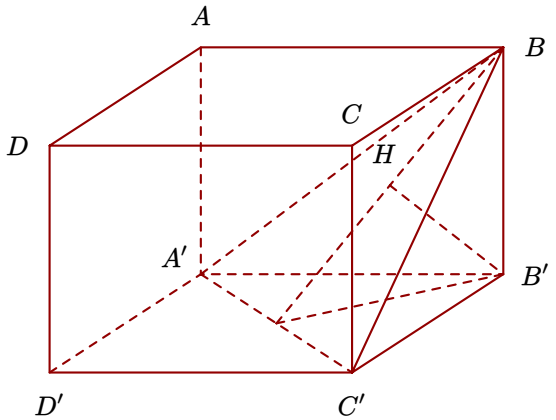
Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình: $y = \dfrac{(x^2+2x+4)'}{(x+2)'} = 2x+2$. Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(-4;-6)$ (điểm cực đại) và $B(0;2)$ (điểm cực tiểu).
Gốc tọa độ $O(0;0)$. Ta có $\overrightarrow{OA} = (-4;-6)$, $\overrightarrow{OB} = (0;2)$.
Diện tích tam giác OAB là: $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}\left|(-4)\cdot 2 - 0\cdot(-6)\right| = 4$ (đơn vị diện tích).

Câu 16. Đáp án: 1.
Gọi x (triệu đồng) là số tiền cần giảm giá cho mỗi chiếc xe máy $(0 < x < 43)$.
Giảm 1 triệu đồng/chiếc thì số lượng xe máy bán ra trong một năm tăng thêm 200 chiếc.
Giảm x triệu đồng/chiếc thì số lượng xe máy bán ra trong một năm tăng thêm $200x$ chiếc.
Do đó:
Số lượng xe máy bán ra trong một năm là: $600+200x$ (chiếc).
Chi phí mua vào là: $38(600+200x)$ (triệu đồng).
Giá bán mỗi chiếc là: $43-x$ (triệu đồng/chiếc).
Lợi nhuận doanh nghiệp thu được trong một năm là:
$(43-x)(600+200x)-38(600+200x) = (5-x)(600+200x) = -200x^2+400x+3000$ (triệu đồng).
Xét hàm số $f(x) = -200x^2+400x+3000$ trên khoảng $(0;43)$: $\begin{aligned} f'(x) &= -400x+400 \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$ Bảng biến thiên:

x	0		1		43
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	3200	↘	

Từ bảng biến thiên, hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$.
Vậy doanh nghiệp phải giảm giá bán 1 triệu đồng mỗi chiếc để thu được lợi nhuận cao nhất trong một năm.

Câu 17. Đáp án: 360.



Gọi H là hình chiếu của B' lên mặt phẳng $(BA'C')$.
Vì $AC \parallel A'C'$ nên
$AC \parallel (BA'C') \Rightarrow \mathrm{d}(AC, BC') = \mathrm{d}(AC,(BA'C')) = \mathrm{d}(C,(BA'C')) = \mathrm{d}(B',(BA'C')) = B'H = d.$

Tứ diện $B'.BA'C'$ có ba cạnh $B'A', B'C', B'B$ đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'A'^2} + \frac{1}{B'C'^2} + \frac{1}{B'B^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow d = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

$\Leftrightarrow a^2b^2c^2 = d^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ (1).

Thể tích hình hộp chữ nhật là $V = abc$, do đó V nhỏ nhất khi và chỉ khi $V^2 = a^2b^2c^2$ nhỏ nhất.

Đặt $a = xyz$, $b = xyt$, $c = xzt$, $d = yzt$ với $x, y, z, t \in \mathbb{Z}^+$.

Thay vào (1), ta được $x^2 = y^2 + z^2 + t^2$.

Để V đạt giá trị nhỏ nhất thì $x, y, z, t \in \mathbb{Z}^+$ nhỏ nhất.

Bộ số nguyên dương nhỏ nhất thoả mãn đẳng thức trên là $(x; y; z; t) = (3; 2; 2; 1)$ (hoặc các hoán vị của y, z, t).

Khi đó

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 2 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 6 \\ c = 6 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy diện tích toàn phần của chiếc hộp là

$S_{\text{tp}} = 2(ab + bc + ca) = 2(12 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 12 \cdot 6) = 360$ dm^2.

Câu 18. 1) Xét hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 3x - 6\ln(2 - x) + 1$:

Tập xác định: $D = (-\infty; 2)$.

$$y' = x^2 - 3 + \frac{6}{2 - x} = \frac{-x^3 + 2x^2 + 3x}{2 - x}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (thoả mãn)} \\ x = -1 \text{ (thoả mãn)} \\ x = 3 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{11}{3} - 6\ln 3$	↘	$1 - 6\ln 2$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm $x = -1$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

2) Bác Hoàng lựa chọn hợp đồng loại 1: Số tiền thuê căn hộ bác Hoàng phải trả cho năm thứ n ($n \in \mathbb{N}^*$) là một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 220$ và công sai $d = 11$:

$u_n = 220 + (n - 1) \cdot 11 = 11n + 209$ triệu đồng.

Bác Anh lựa chọn hợp đồng loại 2: Số tiền thuê căn hộ bác Anh phải trả cho năm thứ n ($n \in \mathbb{N}^*$) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = 194$ và công bội $q = 1 + 6\% = 1{,}06$:

$v_n = 194 \cdot 1{,}06^{n-1}$ triệu đồng.

Bác Hoàng sẽ chi trả tiền thuê hàng năm ít hơn bác Anh khi:

$u_n < v_n \Leftrightarrow 11n + 209 < 194 \cdot 1{,}06^{n-1} \Leftrightarrow f(n) = 194 \cdot 1{,}06^{n-1} - 11n - 209 > 0$.

Xét hàm số $f(x) = 194 \cdot 1{,}06^{x-1} - 11x - 209$ với $x \geqslant 1$:

$f'(x) = 194 \cdot 1{,}06^{x-1} \cdot \ln 1{,}06 - 11$.

$f''(x) = 194 \cdot 1{,}06^{x-1} \cdot (\ln 1{,}06)^2 > 0, \forall x \geqslant 1$, suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.
Mặt khác, $f'(1) = 194 \ln 1{,}06 - 11 \approx 0{,}31 > 0$ nên $f'(x) > 0, \forall x \geqslant 1$.
Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.
Ta có
$f(8) = 194 \cdot 1{,}06^7 - 11 \cdot 8 - 209 \approx -5{,}28 < 0$
$f(9) = 194 \cdot 1{,}06^8 - 11 \cdot 9 - 209 \approx 0{,}94 > 0$.
Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $f(n) > 0 \Leftrightarrow n \geqslant 9$.
Đầu năm thứ 9 tương ứng với đầu năm $2024 + 9 - 1 = 2032$.
Vậy từ đầu năm 2032 trở đi thì bác Hoàng sẽ chi trả tiền thuê hàng năm ít hơn bác Anh.

Câu 19. Ta có $P'(t) = \dfrac{0{,}75me^{-0{,}75t}}{(n + e^{-0{,}75t})^2}$.
Từ giả thiết, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} P(0) = 30 \\ P'(0) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{n+1} = 30 \\ \dfrac{0{,}75m}{(n+1)^2} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 30(n+1) \\ \dfrac{0{,}75 \cdot 30}{n+1} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0{,}5 \\ m = 45. \end{cases}$$

Suy ra $P(t) = \dfrac{45}{0{,}5 + e^{-0{,}75t}}$ và $P'(t) = \dfrac{135e^{-0{,}75t}}{4\,(0{,}5 + e^{-0{,}75t})^2}$.
Đạo hàm cấp hai của $P(t)$ là

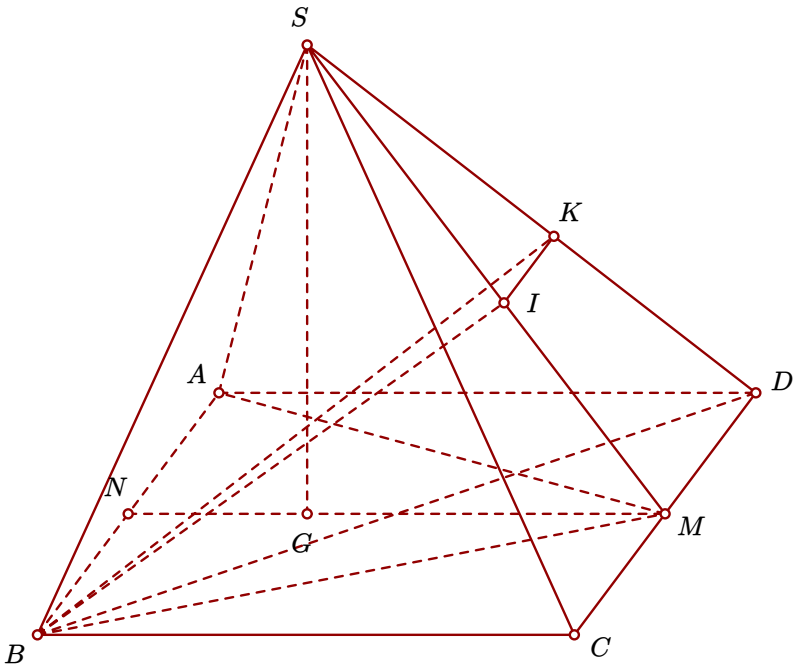
$$P''(t) = \frac{135}{4} \cdot \frac{-0{,}75e^{-0{,}75t}\,(0{,}5 + e^{-0{,}75t})^2 - e^{-0{,}75t} \cdot 2\,(0{,}5 + e^{-0{,}75t}) \cdot (-0{,}75e^{-0{,}75t})}{(0{,}5 + e^{-0{,}75t})^4}$$
$$= -\frac{405e^{-0{,}75t}}{16} \cdot \frac{0{,}5 - e^{-0{,}75t}}{(0{,}5 + e^{-0{,}75t})^3}.$$

$P''(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}5 - e^{-0{,}75t} = 0 \Leftrightarrow e^{-0{,}75t} = 0{,}5 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 0{,}5}{-0{,}75} = \dfrac{4}{3}\ln 2$.
Bảng biến thiên của hàm số $P'(t)$:

t	0		$\frac{4\ln 2}{3}$		$+\infty$
$P''(t)$		$+$	0	$-$	
$P'(t)$	15	↗	$\frac{138}{5}$	↘	0

Từ bảng biến thiên, tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men đạt mức tối đa tại $t = \dfrac{4}{3}\ln 2$.
Khi đó, số lượng tế bào của quần thể nấm men là $P\left(\dfrac{4}{3}\ln 2\right) = \dfrac{45}{0{,}5 + 0{,}5} = 45$ tế bào.

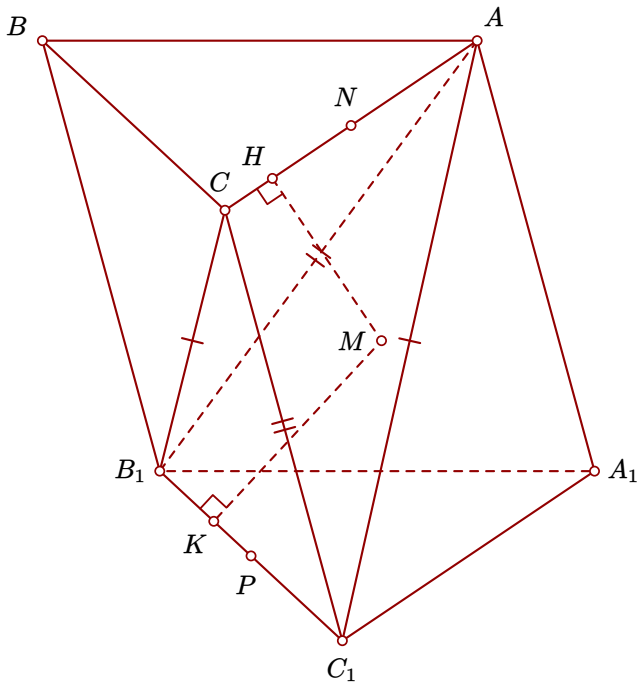
Câu 20.



1) Ta có $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$.
Tương tự $BM = 8$, suy ra $AM = BM = AB = 8 \Rightarrow \Delta ABM$ đều.
Mà $SA = SB = SM$ nên $S.ABM$ là hình chóp tam giác đều.
Gọi N là trung điểm của AB và G là trọng tâm tam giác ABM, khi đó $SG \perp (ABM)$ hay $SG \perp (ABCD)$.
Diện tích tam giác đều ABM cạnh bằng 8 là
$S_{\Delta ABM} = \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$.
Ta có
$V_{S.ABM} = \dfrac{1}{3}SG \cdot S_{\Delta ABM} \Rightarrow SG = \dfrac{3V_{S.ABM}}{S_{\Delta ABM}} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{128}{3}}{16\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.
Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABM là
$GM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.
Suy ra
$SA = SB = SM = \sqrt{SG^2 + GM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{8\sqrt{6}}{3}$.
Vì tam giác SCD cân tại S có M là trung điểm của CD nên $SM \perp CD$.
Diện tích tam giác SCD là
$S_{\Delta SCD} = \dfrac{1}{2}SM \cdot CD = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{8\sqrt{6}}{3} \cdot 8 = \dfrac{32\sqrt{6}}{3}$.
Mặt khác
$S_{\Delta NCD} = \dfrac{1}{2}CD \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} = S_{\Delta ABM}$
$\Rightarrow V_{S.NCD} = V_{S.ABM} = \dfrac{128}{3}$.
Suy ra khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SCD) là
$\mathrm{d}(N, (SCD)) = \dfrac{3V_{S.NCD}}{S_{\Delta SCD}} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{128}{3}}{\dfrac{32\sqrt{6}}{3}} = 2\sqrt{6}$.
Vì $AB \parallel CD \subset (SCD)$ nên $AB \parallel (SCD)$ và $SD \subset (SCD)$.

Do đó $\mathrm{d}(AB,SD)=\mathrm{d}(AB,(SCD))=\mathrm{d}(N,(SCD))=2\sqrt{6}$.
2) Dựng $BI\perp SM$ tại $I\in SM$.
Trong mặt phẳng (SCD), kẻ $IK\parallel CD$ với $K\in SD$.
Vì $CD\perp SM$ nên $IK\perp SM$.
Do đó góc phẳng nhị diện $[B,SM,D]$ là góc $\widehat{BIK}$.
Xét tam giác SBM cân tại S có $SB=SM=\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$, $BM=8$.
Gọi E là trung điểm của BM, ta có
$\cos\widehat{SMB}=\dfrac{EM}{SM}=\dfrac{4}{\frac{8\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.
Suy ra
$IM=BM\cdot\cos\widehat{SMB}=8\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{4}=2\sqrt{6}$
$\Rightarrow BI=\sqrt{BM^2-IM^2}=\sqrt{8^2-(2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{10}$.
Ta có
$SI=SM-IM=\dfrac{8\sqrt{6}}{3}-2\sqrt{6}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\dfrac{SI}{SM}=\dfrac{1}{4}$.
Vì $IK\parallel MD$ nên
$\dfrac{IK}{MD}=\dfrac{SI}{SM}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow IK=\dfrac{1}{4}MD=\dfrac{1}{4}\cdot4=1$.
Ta có
$SD=\sqrt{SM^2+MD^2}=\sqrt{\left(\dfrac{8\sqrt{6}}{3}\right)^2+4^2}=\dfrac{4\sqrt{33}}{3}$
$\Rightarrow KD=\dfrac{IM}{SM}\cdot SD=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4\sqrt{33}}{3}=\sqrt{33}$.
Mặt khác
$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{8^2+(4\sqrt{3})^2}=4\sqrt{7}$.
Áp dụng định lí cô-sin trong tam giác SBD:
$\cos\widehat{SDB}=\dfrac{BD^2+SD^2-SB^2}{2BD\cdot SD}=\dfrac{112+\frac{176}{3}-\frac{128}{3}}{2\cdot4\sqrt{7}\cdot\frac{4\sqrt{33}}{3}}=\dfrac{12}{\sqrt{231}}$.
Áp dụng định lí cô-sin trong tam giác BKD:
$BK^2=BD^2+KD^2-2BD\cdot KD\cdot\cos\widehat{SDB}$
$\Leftrightarrow BK^2=112+33-2\cdot4\sqrt{7}\cdot\sqrt{33}\cdot\dfrac{12}{\sqrt{231}}=49$.
Áp dụng định lí cô-sin trong tam giác BIK:
$\cos\widehat{BIK}=\dfrac{BI^2+IK^2-BK^2}{2BI\cdot IK}=\dfrac{40+1-49}{2\cdot2\sqrt{10}\cdot1}=-\dfrac{2}{\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.
Vậy cô-sin của góc nhị diện $[B,SM,D]$ bằng $-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 21.



Dễ thấy $CC_1 = BB_1 = AB_1 = 6$.
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AC và B_1C_1.
Gọi N, P lần lượt là trung điểm của AC và B_1C_1.
Đặt $AC = x, B_1C_1 = y \Rightarrow xy = 37$.
Vì $\Delta AB_1C_1 = \Delta CC_1B_1$ (c-c-c) nên $AP = CP \Rightarrow \Delta CPA$ cân tại $P \Rightarrow PN \perp AC$.
Chứng minh tương tự, ta có $PN \perp B_1C_1$. Do đó:
$PN = \mathrm{d}(AC, B_1C_1)$.
Dễ dàng tìm được:
$$PN = \sqrt{\frac{5^2+6^2}{2} - \frac{x^2+y^2}{4}} = \sqrt{\frac{61}{2} - \frac{x^2+y^2}{4}}.$$
Áp dụng bất đẳng thức Minkowski, ta có:
$$\begin{aligned} MC + MA &= \sqrt{MH^2 + HC^2} + \sqrt{MH^2 + HA^2} \\ &\geqslant \sqrt{(MH + MH)^2 + (HA + HC)^2} \\ &= \sqrt{4MH^2 + AC^2} = \sqrt{4MH^2 + x^2}. \end{aligned}$$
Tương tự, ta có:
$MB_1 + MC_1 \geqslant \sqrt{4MK^2 + y^2}$.
Từ đó suy ra:
$$\begin{aligned} MA + MC + MC_1 + MB_1 &\geqslant \sqrt{4MH^2 + x^2} + \sqrt{4MK^2 + y^2} \\ &\geqslant \sqrt{(2MH + 2MK)^2 + (x+y)^2} \\ &\geqslant \sqrt{4HK^2 + (x+y)^2} \\ &\geqslant \sqrt{4\mathrm{d}^2(AC, B_1C_1) + (x+y)^2} \\ &= \sqrt{4PN^2 + x^2 + 2xy + y^2} \\ &= \sqrt{4\left(\frac{61}{2} - \frac{x^2+y^2}{4}\right) + x^2 + 2xy + y^2} \\ &= \sqrt{122 + 2 \cdot 37} = \sqrt{196} = 14. \end{aligned}$$
Dấu "=" xảy ra khi $M \in PN$ và $\dfrac{MN}{MP} = \dfrac{x}{y}$.

Câu 22. Số tập con của tập hợp A là 2^n.
Suy ra $n(\Omega) = 2^n \cdot 2^n = 4^n$.
Gọi B là biến cố "Lấy được một bộ thứ tự (X, Y) sao cho $X \cup Y = A$".
Nếu tập hợp X có m phần tử $(0 \leqslant m \leqslant n)$ thì X có C_n^m cách chọn.
Khi đó, để $X \cup Y = A$ thì tập hợp Y phải chứa tất cả các phần tử thuộc $A \setminus X$ và có thể chứa thêm một số phần tử của X. Do X có m phần tử nên số cách chọn tập Y là
$\mathrm{C}_m^0 + \mathrm{C}_m^1 + \cdots + \mathrm{C}_m^m = 2^m$ cách.
Theo quy tắc nhân, trường hợp này có $\mathrm{C}_n^m \cdot 2^m$ cách chọn cặp (X, Y).
Suy ra số phần tử của biến cố B là
$n(B) = \mathrm{C}_n^0 \cdot 2^0 + \mathrm{C}_n^1 \cdot 2^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^n \cdot 2^n = (1+2)^n = 3^n$.
Xác suất của biến cố B là
$\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
Theo đề bài $\mathrm{P}(B) = \dfrac{81}{448} \Rightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \dfrac{81}{448} \Rightarrow n = \log_{\frac{3}{4}}\left(\dfrac{81}{448}\right)$ (không phải số nguyên).
Phản biện: Sửa lại xác suất thành $\dfrac{729}{4096} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^6$, khi đó ta tìm được $n = 6$.
Khi $n = 6$, tập hợp A có 6 phần tử và có $2^6 = 64$ tập hợp con.
Xét 64 tập con này, ta có thể chia thành 32 cặp tập con bù nhau $\{S, A \setminus S\}$. Với mỗi cặp, vì $S \cap (A \setminus S) = \varnothing$ nên ta chỉ có thể chọn tối đa 1 tập con từ mỗi cặp để đảm bảo hai tập bất kì trong các tập được chọn luôn có giao khác rỗng.
Do đó số tập hợp con được chọn tối đa là $k = 32$.

Sở Ninh Bình

Câu 1. Chọn đáp án A

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x&=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cot^2\frac{x}{2}+\tan^2\frac{x}{2}-2\right)\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}-4\right)\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}-4\right)\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{4}{\sin^2 x}-4\right)\mathrm{d}x\\&=(-4\cot x-4x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\\&=\left(-4\cot\frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}\right)-\left(-4\cot\frac{\pi}{4}-\pi\right)\\&=4-\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Suy ra $a=4$, $b=-\dfrac{4}{3}$, $c=-\dfrac{1}{3}$.

Vậy $S=a+b-c=4-\dfrac{4}{3}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=3$.

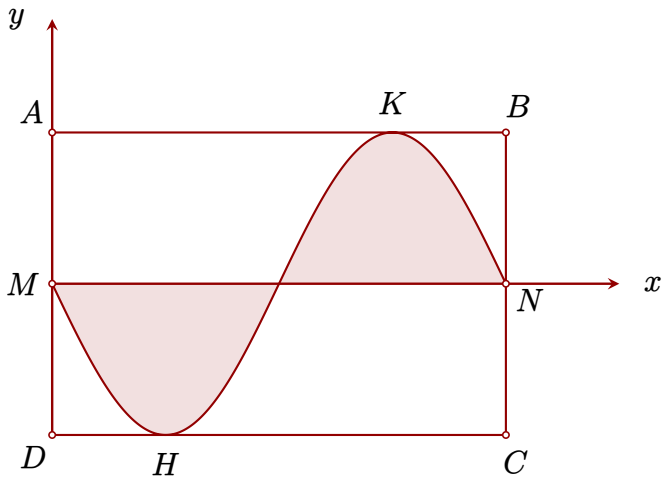
Câu 2. Chọn đáp án C

Ta có: $I\,(1;-2)$ là trung điểm của AB.

Khi đó, đường trung tuyến kẻ từ C có VTCP là $\overrightarrow{IC}=(2;5)\Rightarrow$ VTPT là $\overrightarrow{n}=(5;-2)$.

Vậy phương trình tổng quát của trung tuyến $CI:5x-2y-9=0$.

Câu 3. Chọn đáp án B



Chọn hệ trục toạ độ Mxy như hình vẽ.

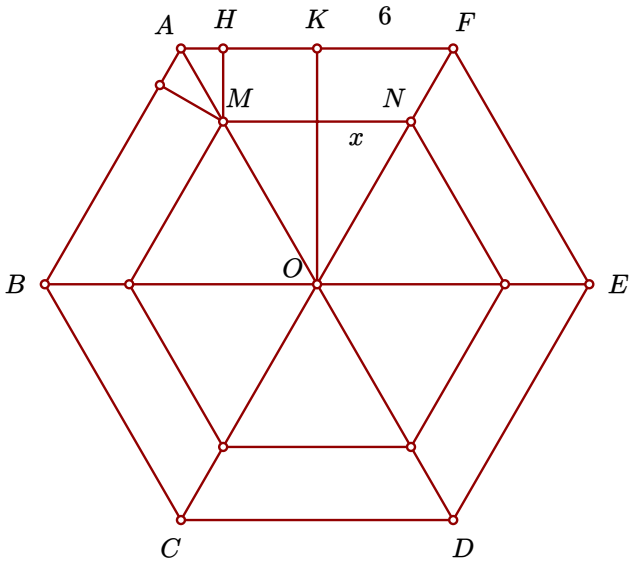
Do $AB = 2\pi$ (m), $AD = 4$ (m) nên ta có toạ độ các điểm: $M(0;0)$, $H\left(\frac{\pi}{2};-2\right)$, $N(2\pi;0)$, $K\left(\frac{3\pi}{2};2\right)$.

Vậy đồ thị hàm số có dạng: $y = -2\sin x$.

Khi đó diện tích phần đất còn lại là:

$$\begin{aligned} S &= S_{ABCD} - S_{\text{hoa}} \\ &= 2\pi \cdot 4 - 2\int_0^{\pi} |-2\sin x|\,\mathrm{d}x \\ &= 8\pi - 4\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= 8\pi + 4\cos x|_0^{\pi} \\ &= 8\pi + 4\cos\pi - 4\cos 0 \\ &= 8\pi - 8 \approx 17{,}13 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Câu 4. Chọn đáp án C



Đặt cạnh đáy của thùng là x dm $(0 < x < 6)$.

Theo định lí Ta-lét trong tam giác OAK, ta có:

$\frac{MH}{OK} = \frac{AM}{OA} \Rightarrow \frac{MH}{3\sqrt{3}} = \frac{6-x}{6} \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{3}(6-x)}{2}$.

Thể tích của thùng là:

$V = B \cdot h = 6S_{OMN} \cdot MH$

$= 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}(6-x)}{2}$

$= \frac{9}{4}\left(-x^3 + 6x^2\right)$.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 6x^2$ trên khoảng $(0;6)$:

$f'(x) = -3x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 4 \text{ (thỏa mãn)}. \end{array}\right.$

Suy ra $\max\limits_{(0;6)} f(x) = f(4) = 32$.

Vậy thể tích lớn nhất của thùng là $\frac{9}{4} \cdot 32 = 72$ dm^3.

Câu 5. Chọn đáp án C

Ta có $\frac{n}{4}=\frac{25}{4}=6{,}25$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là $[10;12)$.
Suy ra $Q_1=10+\frac{6{,}25-4}{6}\cdot(12-10)=10{,}75$.
Ta có $\frac{3n}{4}=\frac{3\cdot 25}{4}=18{,}75$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $[14;16)$.
Suy ra $Q_3=14+\frac{18{,}75-(4+6+8)}{4}\cdot(16-14)=14{,}375$.
Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là:
$\Delta_Q=Q_3-Q_1=14{,}375-10{,}75=3{,}625\approx 3{,}63$.

Câu 6. Chọn đáp án A
Ta có $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{NP}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MP}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(300;120;6)\Rightarrow N(800;320;14)$.
Suy ra $a=800, b=320, c=14\Rightarrow S=452$.

Câu 7. Chọn đáp án A
Gọi A là biến cố: " Số cách chọn tam giác vuông có ba đỉnh là đỉnh của đa giác".
B là biến cố: " Số cách chọn tam giác cân có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác".
Để chọn ra tam giác vuông, ta chọn một cạnh của tam giác làm đường kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đều, có $\frac{36}{2}=18$ cách.
Chọn một đỉnh còn lại của tam giác, có $36-2=34$ cách.
Do đó, $n(A)=18\cdot 34=612$.
Để chọn ra tam giác cân, ta chọn một đỉnh của tam giác cân, có 36 cách.
Đường kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đi qua điểm vừa chọn chia đường tròn thành hai phần đối xứng nhau qua đường kính.
Khi đó ta chọn hai đỉnh còn lại đối xứng qua đường kính trên, có $\frac{36-2}{2}=17$ cách.
Số tam giác đều có ba đỉnh là đỉnh của đa giác là $\frac{36}{3}=12$.
Mỗi cách chọn ra ba đỉnh của tam giác cân trên, mỗi tam giác đều được chọn lại 2 lần.
Do đó, $n(B)=36\cdot 17-12\cdot 2=588$.
Để chọn tam giác vuông cân, ta chọn một cạnh của tam giác làm đường kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đều, có $\frac{36}{2}=18$ cách.
Chọn đỉnh còn lại để tam giác đó cân, có 2 cách.
Do đó, $n(A\cap B)=18\cdot 2=36$.
Vậy số cách chọn ra tam giác vuông hoặc cân có ba đỉnh là đỉnh của đa giác là $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=612+588-36=1164$.

Câu 8. Chọn đáp án A
Gọi u_n là số hàng của hình thứ n.
Ta có $u_1=1$ và cạnh của tam giác đều ở hình thứ $n+1$ gấp đôi cạnh của tam giác đều ở hình thứ n nên số hàng của hình thứ $n+1$ gấp đôi số hàng ở hình thứ n.
Do đó, (u_n) là cấp số nhân có $u_1=1$ và công bội $q=2$.
Số hàng của hình thứ 15 là $u_{15}=u_1\cdot q^{14}=1\cdot 2^{14}=2^{14}$.
Gọi v_n là số tam giác ở hàng thứ n.
Ta thấy hàng thứ nhất gồm 1 tam giác, hàng thứ hai gồm 2 tam giác không chung cạnh với hàng 1, hàng thứ ba gồm 3 tam giác không chung cạnh với hàng 2,...
Do đó, (v_n) là cấp số cộng có $v_1=1$ và công sai $d=1$.
Tổng số tam giác của hình thứ 15 gồm 2^{14} hàng là:
$S_{2^{14}}=\frac{2^{14}\cdot[2v_1+(2^{14}-1)d]}{2}=\frac{2^{14}\cdot[2\cdot 1+(2^{14}-1)\cdot 1]}{2}=134\,225\,920$.

Vậy tổng số que diêm là:
$a = 3 \cdot S_{2^{14}} = 3 \cdot 134\,225\,920$
$= 402\,677\,760$
$= 2^{13} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 113.$
Số ước nguyên dương của a là:
$(13+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 14 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 224.$

Câu 9. Chọn đáp án D
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 - 2mx + m + 6$.
Hàm số đã cho không có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép
$\Delta'_{y'} \leqslant 0 \Leftrightarrow (-m)^2 - 3(m+6) \leqslant 0$
$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 18 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow -3 \leqslant m \leqslant 6.$
Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in S = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Vậy tổng các phần tử của S là
$(-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 15.$

Câu 10. Chọn đáp án B
Ta có $\overrightarrow{BC} = (-2; 2; -1)$.
Phương trình tham số của đường thẳng BC: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - t. \end{cases}$ Gọi H là chân đường cao kẻ từ A xuống $BC \Rightarrow H(2-2t; -1+2t; 3-t)$.
Suy ra $\overrightarrow{AH} = (1-2t; -3+2t; 4-t)$.
Vì $AH \perp BC$ nên: $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -2(1-2t) + 2(-3+2t) - (4-t) = 0$
$\Leftrightarrow 9t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{4}{3}.$
Với $t = \dfrac{4}{3}$, ta có $\overrightarrow{AH} = \left(-\dfrac{5}{3}; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$.
Một vectơ chỉ phương của đường cao AH là $\vec{u} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AH} = \left(-\dfrac{5}{4}; -\dfrac{1}{4}; 2\right)$.
Suy ra $a = -\dfrac{5}{4}$ và $b = -\dfrac{1}{4}$.
Vậy $S = a + 3b = -\dfrac{5}{4} + 3\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -2.$

Câu 11. Chọn đáp án C
Tâm của mặt cầu là trung điểm I của đoạn thẳng AB, suy ra $I(1; -2; -3)$.
Bán kính mặt cầu là:
$R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-8)^2}}{2} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$
Phương trình mặt cầu cần tìm là:
$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 18.$

Câu 12. Chọn đáp án B
Đặt $t = 1 + 2\sin^2 x$. Vì $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$ nên $t \in [1; 3]$, khi đó $y = \sqrt{5f(t) + 11}$.
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, với mọi $t \in [1; 3]$ ta có $1 \leqslant f(t) \leqslant 5$, suy ra:
$4 \leqslant \sqrt{5f(t) + 11} \leqslant 6 \Leftrightarrow 4 \leqslant y \leqslant 6.$

- $y=6 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow 1+2\sin^2 x=1 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
- $y=4 \Leftrightarrow t=3 \Leftrightarrow 1+2\sin^2 x=3 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Suy ra $\max y=6$ và $\min y=4$.
Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $6+4=10$.

Câu 13. Chọn đáp án: a b c d

a) Mệnh đề sai vì:
- Hộp I có 10 phiếu: $\{1;2;3;\ldots;10\}$.
- Hộp II có 20 phiếu: $\{11;12;13;\ldots;30\}$.
- Bạn Hoa rút 1 phiếu từ hộp I bỏ vào hộp II, khi đó hộp II có 21 phiếu.
- Tiếp theo, bạn Hoa chọn 3 phiếu từ hộp II.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=10\cdot \mathrm{C}_{21}^3=13\,300$.
Nhận xét về số dư của bình phương một số tự nhiên khi chia cho 5:
Bình phương một số tự nhiên có tận cùng là $0;1;4;5;6;9$, do đó khi chia cho 5 chỉ có thể dư 0, 1 hoặc 4.
- Trong hộp I:
+ Các số có bình phương chia cho 5 dư 0: $\{5;10\}$ (2 số).
+ Các số có bình phương chia cho 5 dư 1: $\{1;4;6;9\}$ (4 số).
+ Các số có bình phương chia cho 5 dư 4: $\{2;3;7;8\}$ (4 số).
- Trong hộp II:
+ Các số có bình phương chia cho 5 dư 0: $\{15;20;25;30\}$ (4 số).
+ Các số có bình phương chia cho 5 dư 1: $\{11;14;16;19;21;24;26;29\}$ (8 số).
+ Các số có bình phương chia cho 5 dư 4: $\{12;13;17;18;22;23;27;28\}$ (8 số).

Để tổng các bình phương của 3 số lấy ra chia hết cho 5, số dư tương ứng của 3 bình phương chỉ có thể là $(0;0;0)$ hoặc $(0;1;4)$.
- Khả năng 1: Chuyển 1 số có bình phương chia 5 dư 0 từ hộp I sang hộp II (có 2 cách chọn phiếu từ hộp I). Khi đó hộp II có 5 số dư 0, 8 số dư 1, 8 số dư 4:
+ Cả 3 số có bình phương chia 5 dư 0: có $2\cdot \mathrm{C}_5^3=20$ cách.
+ Gồm 1 số dư 0, 1 số dư 1, 1 số dư 4: có $2\cdot \mathrm{C}_5^1\cdot \mathrm{C}_8^1\cdot \mathrm{C}_8^1=640$ cách.
- Khả năng 2: Chuyển 1 số có bình phương chia 5 dư 1 từ hộp I sang hộp II (có 4 cách chọn phiếu từ hộp I). Khi đó hộp II có 4 số dư 0, 9 số dư 1, 8 số dư 4:
+ Cả 3 số có bình phương chia 5 dư 0: có $4\cdot \mathrm{C}_4^3=16$ cách.
+ Gồm 1 số dư 0, 1 số dư 1, 1 số dư 4: có $4\cdot \mathrm{C}_4^1\cdot \mathrm{C}_9^1\cdot \mathrm{C}_8^1=1152$ cách.
- Khả năng 3: Chuyển 1 số có bình phương chia 5 dư 4 từ hộp I sang hộp II (có 4 cách chọn phiếu từ hộp I). Khi đó hộp II có 4 số dư 0, 8 số dư 1, 9 số dư 4:
+ Cả 3 số có bình phương chia 5 dư 0: có $4\cdot \mathrm{C}_4^3=16$ cách.
+ Gồm 1 số dư 0, 1 số dư 1, 1 số dư 4: có $4\cdot \mathrm{C}_4^1\cdot \mathrm{C}_8^1\cdot \mathrm{C}_9^1=1152$ cách.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là:
$n(B)=(20+640)+(16+1152)+(16+1152)=2996$.
Khi đó:
$\mathrm{P}(B)=\dfrac{2996}{13\,300}=\dfrac{749}{3325}$.

b) Mệnh đề sai vì:
Khi biến cố A đã xảy ra (phiếu lấy từ hộp I có bình phương chia hết cho 5), hộp II khi đó có 21 phiếu gồm: 5 số có bình phương chia hết cho 5, 8 số có bình phương chia 5 dư 1 và 8 số có bình phương chia 5 dư 4.
Số cách chọn 3 phiếu từ hộp II là $\mathrm{C}_{21}^3=1330$.
Số cách chọn 3 phiếu thỏa mãn tổng bình phương chia hết cho 5 là:
$\mathrm{C}_5^3+\mathrm{C}_5^1\cdot \mathrm{C}_8^1\cdot \mathrm{C}_8^1=10+320=330$.
Suy ra:

$\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{330}{1330} = \dfrac{33}{133}$.
c) Mệnh đề đúng vì:
Biến cố A xảy ra khi phiếu rút từ hộp I có bình phương chia hết cho 5, tức là số ghi trên phiếu thuộc tập $\{5; 10\}$.
Xác suất của biến cố A là:
$\mathrm{P}(A) = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$.
d) Mệnh đề sai vì:
Ta có:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right) &= \frac{\mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)} = \frac{\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)}{1 - \mathrm{P}(B)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)}{1 - \mathrm{P}(B)} \\ &= \frac{0{,}2 - 0{,}2 \cdot \dfrac{33}{133}}{1 - \dfrac{749}{3325}} = \frac{100}{5152} \cdot \frac{3325}{2576} = \frac{250}{1288} = \frac{125}{644}.\end{aligned}$$

Câu 14. Chọn đáp án: a b c d
a) Mệnh đề đúng vì:
$\overrightarrow{AC} = (-5; 3; 1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AC.
Đường thẳng đi qua hai điểm A và C có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 2 + t \end{cases}$$

b) Mệnh đề đúng vì:
Mặt cầu $(S)\colon (x-5)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 = 56$ có tâm $I(5; -1; 7)$ và bán kính $R = 2\sqrt{14}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -3)$ và $\overrightarrow{AC} = (-5; 3; 1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (12; 18; 6) = 6(2; 3; 1)$.
Phương trình mặt phẳng $(ABC)\colon 2x + 3y + z = 0$.
Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (ABC) là
$\mathrm{d}(I, (ABC)) = \dfrac{|2 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + 7|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \dfrac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$.
Đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình tham số:

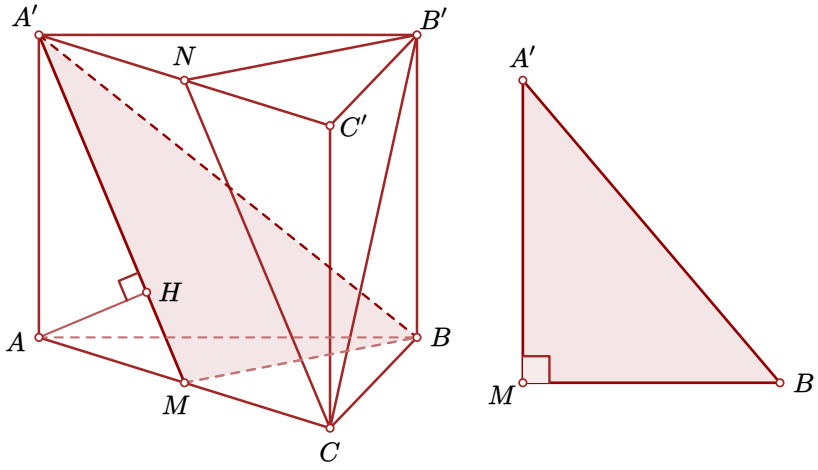
$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 7 + t. \end{cases}$$

Để thể tích tứ diện $NABC$ lớn nhất thì khoảng cách từ N đến (ABC) phải lớn nhất, khi đó N là giao điểm của đường thẳng d với mặt cầu (S).
Tọa độ điểm N tương ứng với giá trị t thỏa mãn
$(2t)^2 + (3t)^2 + t^2 = 56 \Leftrightarrow 14t^2 = 56 \Leftrightarrow t = \pm 2$.
- Với $t = 2 \Rightarrow N(9; 5; 9) \Rightarrow \mathrm{d}(N, (ABC)) = \dfrac{|2 \cdot 9 + 3 \cdot 5 + 9|}{\sqrt{14}} = 3\sqrt{14}$.
- Với $t = -2 \Rightarrow N(1; -7; 5) \Rightarrow \mathrm{d}(N, (ABC)) = \dfrac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-7) + 5|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$.
Do đó chọn $N(9; 5; 9) \Rightarrow a \cdot b \cdot c = 9 \cdot 5 \cdot 9 = 405$.
c) Mệnh đề sai vì:
Mặt phẳng (ABC) có phương trình $2x + 3y + z = 0$, đi qua gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$.
d) Mệnh đề sai vì:

Gọi $J(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{0}$.
Ta có
$$\begin{cases} x_J=\dfrac{x_A-2x_B+3x_C}{1-2+3}=\dfrac{2-2\cdot(-1)+3\cdot(-3)}{2}=-\dfrac{5}{2} \\ y_J=\dfrac{y_A-2y_B+3y_C}{1-2+3}=\dfrac{-2-2\cdot 1+3\cdot 1}{2}=-\dfrac{1}{2} \\ z_J=\dfrac{z_A-2z_B+3z_C}{1-2+3}=\dfrac{2-2\cdot(-1)+3\cdot 3}{2}=\dfrac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow J\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2};\frac{13}{2}\right).$$
Khi đó
$T=\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MJ}+\left(\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}\right)\right|=2MJ.$
Biểu thức T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của J lên mặt phẳng $(Oxy)\Rightarrow M\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2};0\right)$.
Vậy $\min T=2MJ=2\cdot\dfrac{13}{2}=13$.

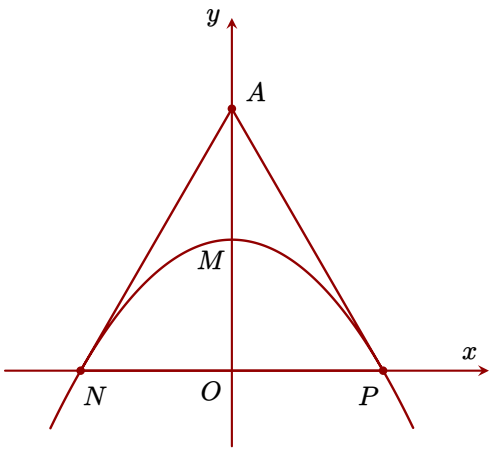
Câu 15. Chọn đáp án: a b c d
a) Mệnh đề sai vì:
Từ đồ thị hàm số suy ra đồ thị có hai điểm cực trị là $A(0;2)$ và $B(2;-2)$.
Phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị A,B là
$\dfrac{x-0}{2-0}=\dfrac{y-2}{-2-2}\Leftrightarrow 2x+y-2=0.$
Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d là
$\mathrm{d}(O,d)=\dfrac{|-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}.$
b) Mệnh đề đúng vì:
Từ đồ thị hàm số suy ra đồ thị có hai điểm cực trị là $A(0;2)$ và $B(2;-2)$.
Do đó $y_{\text{CĐ}}=2$ và $y_{\text{CT}}=-2$.
c) Mệnh đề đúng vì:
Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.
Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;2)$ và $B(2;-2)$ nên:
$$\begin{cases} f(0)=2 \\ f(2)=-2 \\ f'(0)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} d=2 \\ 8a+4b+2c+d=-2 \\ c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2. \end{cases}$$
Suy ra $f(x)=x^3-3x^2+2$, do đó $f(5)=5^3-3\cdot 5^2+2=52$.
d) Mệnh đề đúng vì:
Xét phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)=x^3-3x^2+2$ và $g(x)=x-1$:
$$x^3-3x^2+2=x-1\Leftrightarrow x^3-3x^2-x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=3. \end{array}\right.$$
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là
$S=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left|x^3-3x^2-x+3\right|\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left|x^3-3x^2-x+3\right|\,\mathrm{d}x=8.$

Câu 16. Chọn đáp án: a b c d



a) Mệnh đề đúng vì
Gọi N là trung điểm của cạnh $A'C'$.
Tứ giác $A'NCM$ là hình bình hành nên $CN \parallel A'M$.
Mặt khác $A'M \subset (A'BM) \Rightarrow CN \parallel (A'BM)$ (1).
Tứ giác $MBB'N$ là hình bình hành nên $B'N \parallel BM$.
Mặt khác $BM \subset (A'BM) \Rightarrow B'N \parallel (A'BM)$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra
$(B'CN) \parallel (A'BM) \Rightarrow \mathrm{d}(A'B, B'C) = \mathrm{d}((B'CN), (A'BM)) = \mathrm{d}(C, (A'BM))$.
Vì M là trung điểm của AC nên $\mathrm{d}(C, (A'BM)) = \mathrm{d}(A, (A'BM))$.
Kẻ $AH \perp A'M$ tại H (3).
Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BM \perp (ACC'A') \Rightarrow BM \perp AH$ (4).
Từ (3) và (4) suy ra $AH \perp (A'BM) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (A'BM)) = AH$.
Vì $BM \perp (ACC'A')$ nên hình chiếu của $A'B$ lên $(ACC'A')$ là $A'M$, suy ra $(A'B, (ACC'A')) = \widehat{BA'M} = 30^\circ$.
Xét tam giác $A'MB$ vuông tại M
$$BM = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow A'M = \frac{BM}{\tan \widehat{BA'M}} = \frac{3\sqrt{3}}{\tan 30^\circ} = 9.$$
Theo định lí Pythagore trong tam giác vuông $A'AM$
$AA' = \sqrt{A'M^2 - AM^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$.
Trong tam giác vuông $A'AM$, đường cao AH có
$$AH \cdot A'M = AA' \cdot AM \Rightarrow AH = \frac{AA' \cdot AM}{A'M} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 3}{9} = 2\sqrt{2}.$$
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là $2\sqrt{2}$.
b) Mệnh đề sai vì
Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 6\sqrt{2} \cdot \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{6}$.
c) Mệnh đề đúng.
d) Mệnh đề đúng vì
Ta có $\begin{cases} BM \perp (ACC'A') \\ BM \subset (A'BM) \end{cases} \Rightarrow (A'BM) \perp (ACC'A')$.

Câu 17. Đáp án: 48.



Chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ.
Do tam giác ABC đều và $AN = AP = 4$ dm nên tam giác ANP đều $\Rightarrow NP = 4$ dm.
Xét tam giác OAN vuông tại O, ta có
$OA = \sqrt{AN^2 - ON^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ dm.
$OM = OA - AM = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$ dm.
Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{14^2\sqrt{3}}{4} = 49\sqrt{3}$ dm^2.
Toạ độ các điểm là $A(0;2\sqrt{3})$, $M(0;\sqrt{3})$, $N(-2;0)$, $P(2;0)$.
Phương trình đường thẳng AP:
$\dfrac{x-2}{0-2} = \dfrac{y-0}{2\sqrt{3}-0} \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.
Giả sử parabol có dạng $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Do (P) đi qua các điểm M, N, P nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = \sqrt{3} \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ b = 0 \\ c = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \sqrt{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$, parabol $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \sqrt{3}$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ là

$$S' = \int_0^2 \left| \left(-\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \sqrt{3}\right) \right| \mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Diện tích mặt bàn là

$$S = S_{ABC} - 6S' = 49\sqrt{3} - 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 45\sqrt{3}.$$

Suy ra $a = 45$, $b = 3$.
Vậy $a + b = 48$.

Câu 18. Đáp án: 7,6.
Phương trình mặt cầu tâm I, bán kính $R = 3$ là $(S)\colon (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 9$.
Để tổng thời gian bay của hai khinh khí cầu đến A là nhỏ nhất thì điểm A thuộc mặt cầu (S), khi đó
$(a-3)^2 + b^2 + c^2 = 9 \Leftrightarrow (a-3)^2 + b^2 + c^2 - 9 = 0$.
Ta có
$AM = \sqrt{(a-5)^2 + (b-4)^2 + (c-4)^2}$,
$AN = \sqrt{(a-6)^2 + b^2 + (c-3)^2}$.
Tổng thời gian bay của hai khinh khí cầu đến A là

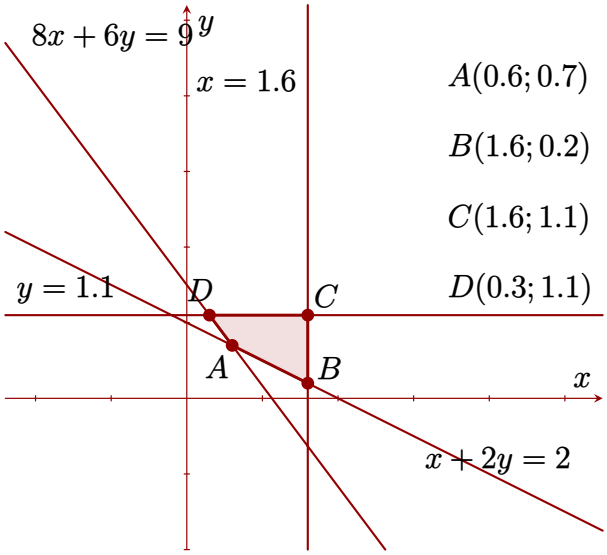
$T=\dfrac{AM}{20}+\dfrac{AN}{10}=\dfrac{1}{20}(AM+2AN)$.
Biến đổi biểu thức $AM+2AN$:
$$\begin{aligned}AM+2AN&=\sqrt{(a-5)^2+(b-4)^2+(c-4)^2+3\left[(a-3)^2+b^2+c^2-9\right]}+2\sqrt{(a-6)^2+b^2+(c-3)^2}\\&=\sqrt{4a^2-28a+4b^2-8b+4c^2-8c+30}+2\sqrt{(a-6)^2+b^2+(c-3)^2}\\&=2\sqrt{\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+(b-1)^2+(c-1)^2}+2\sqrt{(a-6)^2+b^2+(c-3)^2}\\&=2PA+2NA\geqslant 2PN,\end{aligned}$$
với điểm $P\left(\dfrac{7}{2};1;1\right)$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi điểm A nằm giữa P và N, tức là
$\begin{cases}A\in PN\cap(S)\\ \overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PN}\ (0<k<1).\end{cases}$
Ta có $\overrightarrow{PN}=\left(\dfrac{5}{2};-1;2\right)$, phương trình đường thẳng PN:
$$\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}+\dfrac{5}{2}t\\ y=1-t\\ z=1+2t.\end{cases}$$
Thay vào phương trình mặt cầu (S):
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}t\right)^2+(1-t)^2+(1+2t)^2=9$$
$$\Leftrightarrow\frac{45}{4}t^2+\frac{9}{2}t-\frac{27}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{3}{5}\ \text{(thỏa mãn } 0<t<1)\\ t=-1\ \text{(loại)}.\end{array}\right.$$
Với $t=\dfrac{3}{5}$, ta được toạ độ điểm $A\left(5;\dfrac{2}{5};\dfrac{11}{5}\right)$.
Vậy $S=a+b+c=5+\dfrac{2}{5}+\dfrac{11}{5}=\dfrac{38}{5}=7{,}6$.

Câu 19. Đáp án: 30.
Ta có
$$P'(t)=\frac{-a(b+\mathrm{e}^{-0{,}75t})'}{(b+\mathrm{e}^{-0{,}75t})^2}=\frac{0{,}75a\mathrm{e}^{-0{,}75t}}{(b+\mathrm{e}^{-0{,}75t})^2}.$$
Theo giả thiết
$$\begin{cases}P(0)=20\\ P'(0)=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{b+1}=20\\ \dfrac{0{,}75a}{(b+1)^2}=10.\end{cases}$$
Thay $b+1=\dfrac{a}{20}$ vào phương trình thứ hai
$$\frac{0{,}75a}{\left(\frac{a}{20}\right)^2}=10\Leftrightarrow\frac{300}{a}=10\Leftrightarrow a=30.$$
Suy ra $b=\dfrac{30}{20}-1=0{,}5$.
Do đó
$$P(t)=\frac{30}{0{,}5+\mathrm{e}^{-0{,}75t}}\quad\text{và}\quad P'(t)=\frac{22{,}5\mathrm{e}^{-0{,}75t}}{(0{,}5+\mathrm{e}^{-0{,}75t})^2}.$$

Tốc độ sinh trưởng của nấm men đạt giá trị lớn nhất khi $P'(t)$ đạt giá trị lớn nhất.
Đặt $u = \mathrm{e}^{-0,75t}$ $(u > 0)$.
Khi đó
$$P'(t) = g(u) = \frac{22,5u}{(0,5+u)^2} = \frac{22,5}{\dfrac{0,25}{u} + u + 1}.$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\dfrac{0,25}{u}$ và u
$$\frac{0,25}{u} + u \geqslant 2\sqrt{\frac{0,25}{u} \cdot u} = 1.$$
Suy ra
$$\frac{0,25}{u} + u + 1 \geqslant 2 \Rightarrow g(u) \leqslant \frac{22,5}{2} = 11,25.$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\frac{0,25}{u} = u \Leftrightarrow u^2 = 0,25 \Leftrightarrow u = 0,5 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,75t} = 0,5.$$
Tại thời điểm đó, số lượng tế bào của quần thể nấm men là
$$P(t) = \frac{30}{0,5+0,5} = 30 \text{ tế bào.}$$

Câu 20. Đáp án: 196.
Gọi x, y lần lượt là số kilôgam thực phẩm X và Y cần dùng.
Điều kiện: $0 \leqslant x \leqslant 1,6$ và $0 \leqslant y \leqslant 1,1$.
Lượng protein và lipit cung cấp lần lượt là $800x + 600y$ và $200x + 400y$.
Theo yêu cầu bài toán, ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1,6 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1,1 \\ 800x + 600y \geqslant 900 \\ 200x + 400y \geqslant 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1,6 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1,1 \\ 8x + 6y \geqslant 9 \\ x + 2y \geqslant 2. \end{cases}$$
Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác $ABCD$ (kể cả biên), với toạ độ các đỉnh:
- $A(0,6; 0,7)$ là giao điểm của hai đường thẳng $8x + 6y = 9$ và $x + 2y = 2$.
- $B(1,6; 0,2)$ là giao điểm của hai đường thẳng $x = 1,6$ và $x + 2y = 2$.
- $C(1,6; 1,1)$ là giao điểm của hai đường thẳng $x = 1,6$ và $y = 1,1$.
- $D(0,3; 1,1)$ là giao điểm của hai đường thẳng $8x + 6y = 9$ và $y = 1,1$.

Chi phí mua nguyên liệu là biểu thức $T(x; y) = 250x + 110y$ (nghìn đồng).



Biểu thức T đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$:
- Tại $A(0{,}6;0{,}7)$: $T(0{,}6;0{,}7) = 250 \cdot 0{,}6 + 110 \cdot 0{,}7 = 227$.
- Tại $B(1{,}6;0{,}2)$: $T(1{,}6;0{,}2) = 250 \cdot 1{,}6 + 110 \cdot 0{,}2 = 422$.
- Tại $C(1{,}6;1{,}1)$: $T(1{,}6;1{,}1) = 250 \cdot 1{,}6 + 110 \cdot 1{,}1 = 521$.
- Tại $D(0{,}3;1{,}1)$: $T(0{,}3;1{,}1) = 250 \cdot 0{,}3 + 110 \cdot 1{,}1 = 196$.

Vậy chi phí ít nhất để mua nguyên liệu là 196 nghìn đồng (khi mua 0,3 kg thực phẩm X và 1,1 kg thực phẩm Y).

Câu 21. Đáp án: 6,9.
Giá trị trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là:
$$\overline{x} = \frac{42{,}5 \cdot 8 + 47{,}5 \cdot 16 + 52{,}5 \cdot 6 + 57{,}5 \cdot 10 + 62{,}5 \cdot 3 + 67{,}5 \cdot 2}{45} = \frac{925}{18}.$$
Phương sai là:
$$s^2 = \frac{8 \cdot \left(42{,}5 - \frac{925}{18}\right)^2 + 16 \cdot \left(47{,}5 - \frac{925}{18}\right)^2 + \cdots + 2 \cdot \left(67{,}5 - \frac{925}{18}\right)^2}{45} = \frac{3860}{81}.$$
Độ lệch chuẩn là:
$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{3860}{81}} \approx 6{,}9.$$

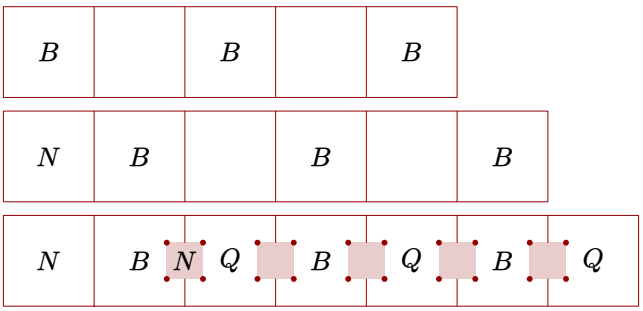
Câu 22. Đáp án: 43.
Ta có số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 8!$.
Gọi biến cố A: "Tám cây hoa được trồng không có hai cây hoa hồng nào cùng loại trồng cạnh nhau".
Ta có các trường hợp sau:
Trường hợp 1: Hai cây hồng nhung không có cây nào được trồng ở đầu hoặc cuối hàng.

	N		N	

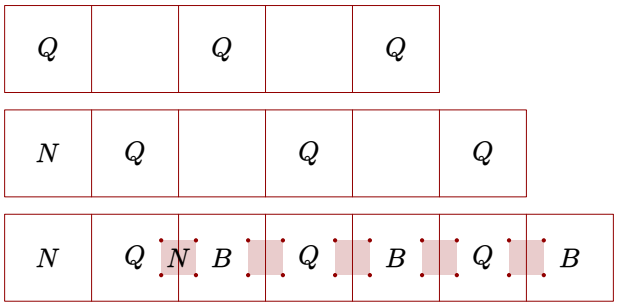
	B		N		B		N		B	

B	Q	N	Q	B		N		B	Q

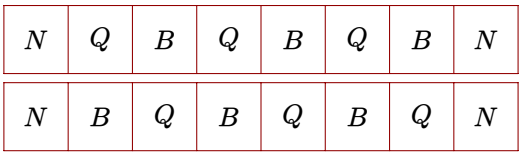
Trồng hai cây hoa hồng nhung có 2! cách trồng, ứng với mỗi cách trồng đó tạo ra một vị trí trống giữa hai cây hoa hồng nhung và hai vị trí trống ở hai bên, có $P_3 = 3!$ cách trồng ba cây hồng bạch vào ba vị trí đó.
Ứng với mỗi cách trồng như vậy có bốn vị trí trống giữa cây hồng nhung và cây hồng bạch và hai vị trí hai bên, có A_6^3 cách trồng ba cây hồng quế vào ba trong sáu vị trí đó (tham khảo hình vẽ).
Trong trường hợp này ta có $2! \cdot 3! \cdot A_6^3 = 1440$ cách.
Trường hợp 2: Hai cây hồng nhung có đúng một cây được trồng ở đầu hoặc cuối hàng.
Trồng ba cây hoa hồng bạch có 3! cách trồng, ứng với mỗi cách trồng đó tạo ra hai vị trí trống giữa hai cây hoa hồng bạch và hai vị trí trống ở hai bên, có $C_2^1 \cdot 2$ cách lấy ra một cây hồng nhung và trồng cây đó ở đầu hoặc cuối hàng, ứng với mỗi cách trồng đó tạo ra hai vị trí trống giữa hai cây hồng bạch và một vị trí bên ngoài của cây hồng bạch cuối cùng, có $P_3 = 3!$ cách trồng ba cây hồng quế vào ba vị trí đó, ứng với mỗi cách trồng đó có năm vị trí trống giữa hai cây hồng bạch và hồng quế để trồng cây hồng nhung còn lại (tham khảo sơ đồ sau)



và ngược lại.



Trong trường hợp này ta có $3! \cdot \mathrm{C}_2^1 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 5 \cdot 2 = 1440$ cách.
Trường hợp 3: Cả hai cây hoa hồng nhung đều được trồng ở đầu và cuối hàng (tham khảo hình vẽ).



Trong trường hợp này ta có $2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2 = 140$ cách.
Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 1440 + 1440 + 144 = 3024$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3024}{8!} = \dfrac{3}{40} \Rightarrow S = 3 + 40 = 43$.

Sở Quảng Ninh

Câu 1. Chọn đáp án B
Từ năm 2022 đến năm 2030 là 8 năm, tỉ số tăng dân số là 0,89%/năm.
Ta có dân số của Quảng Ninh năm đầu tiên là 1,36 triệu người, hàm số theo biến $t=8$ được cho bởi công thức:
$S=1{,}36\cdot \mathrm{e}^{0{,}89\%\cdot 8}\approx 1{,}46$.

Câu 2. Chọn đáp án C
Để hàm số xác định thì
$$\begin{cases}\log_3(x^2-2x+m)-1\geqslant 0\\ x^2-2x+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+m-3\geqslant 0\\ x^2-2x+m>0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\geqslant 4\\ m>1.\end{cases}$$
Vậy để hàm số xác định với mọi số thực x thì $m\geqslant 4$.

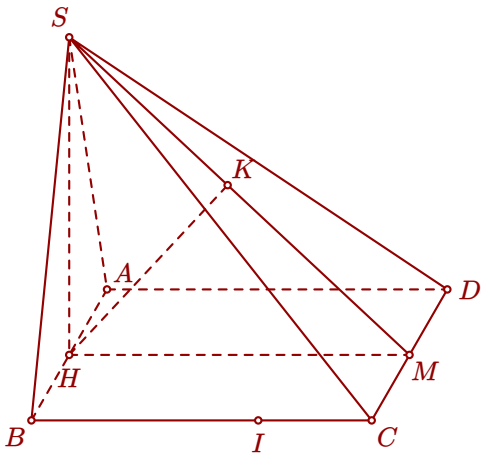
Câu 3. Chọn đáp án A
Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $[14;16)$.
Khi đó $Q_3=14+\dfrac{\frac{3}{4}\cdot 100-(12+22+34)}{16}.(16-14)=14{,}775$.

Câu 4. Chọn đáp án B
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=5$.
Nếu $a=0$ suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=-\infty$ (mâu thuẫn).
Do đó $a\neq 0$.
Suy ra
$$\lim_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^2x^2-(x^2+bx+2)}{ax+\sqrt{x^2+bx+2}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^2-1)x^2-bx-2}{ax+\sqrt{x^2+bx+2}}.$$
Để $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=5$ thì $\begin{cases}a\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-1\end{array}\right.\\ -\dfrac{b}{a+1}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-10.\end{cases}$
Suy ra $b=-10\Rightarrow b\in(-\infty;-3)$.

Câu 5. Chọn đáp án A
Hệ số a_3 tương ứng với số hạng a_3x^3.
Suy ra hệ số chứa x^3 trong khai triển của đa thức $P(x)$ là $1+\mathrm{C}_4^3+\mathrm{C}_5^3+\cdots+\mathrm{C}_{10}^3=330$.

Câu 6. Chọn đáp án B
Gọi r là tỉ lệ lạm phát trung bình của 3 năm.
Ta có $80=100\left(1-\dfrac{r}{100}\right)^3$ suy ra $r\approx 7{,}2\%$.

Câu 7. Chọn đáp án A



Gọi H là trung điểm của AB.
Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(I,(SCD))}{\mathrm{d}(B,(SCD))}=\dfrac{IC}{BC}=\dfrac{1}{3}$.
Vì $AB\parallel(SCD)$ nên $\mathrm{d}(B,(SCD))=\mathrm{d}(H,(SCD))$.
Vì tam giác SAB đều và $(SAB)\perp(ABCD)$ nên $SH\perp(ABCD)$.
Gọi M là trung điểm của CD. Ta có:
$\begin{cases}SH\perp CD\\HM\perp CD\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SHM)$.
Trong mặt phẳng (SHM), kẻ $HK\perp SM$.
Vì
$\begin{cases}HK\perp CD\\HK\perp SM\end{cases}\Rightarrow HK\perp(SCD)$ nên $\mathrm{d}(H,(SCD))=HK$.
Ta có $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HM^2}=\dfrac{4}{21}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow HK=\sqrt{3}$.
Vậy $\mathrm{d}(I,(SCD))=\dfrac{1}{3}HK=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8. Chọn đáp án B
Ta có $y=x+2m+1+\dfrac{-3m-1}{x+2}$.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-(x+2m+1))=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3m-1}{x+2}=0$ suy ra tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $\Delta\colon y=x+2m+1$.
Ta có
$\mathrm{d}(A,\Delta)=\sqrt{2}\Rightarrow\dfrac{|1-3+2m+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$$\Rightarrow|2m-1|=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{3}{2}\\m=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 1.

Câu 9. Chọn đáp án D
Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

Vậy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị, đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$, không đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 10. Đặt $t=3\cos 2024x-1$. Vì $-1\leqslant \cos 2024x\leqslant 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $t\in[-4;2]$. Khi đó bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|f(t)|$ trên đoạn $[-4;2]$.

x	-4		2
$f'(t)$		$-$	0
$f(t)$	3	↘	-4

Nên có $f(-4)f(2)<0$ nên phương trình $f(t)=0$ có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-4;2)$.

t	-4		x_0		2
$\lvert f(t)\rvert$	3	↘	0	↗	4

Do đó $\max\limits_{[-4;2]}|f(t)|=4$; $\min\limits_{[-4;2]}|f(t)|=0$.

Câu 11. Chọn đáp án **D**

Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $x=-\dfrac{1}{3}$ và $y=2$.

Giao điểm của 2 tiệm cận là $I\left(-\dfrac{1}{3};2\right)$.

Giả sử $M\left(x_0;\dfrac{6x_0-4}{3x_0+1}\right)$.

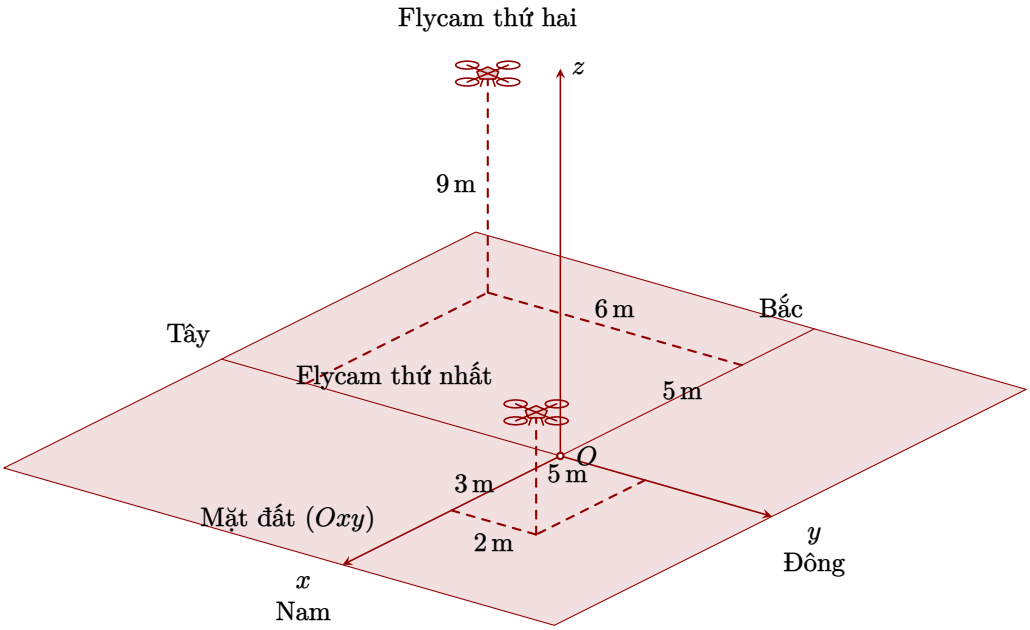
Ta có $y'=\dfrac{18}{(3x+1)^2}$; phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M có dạng $y=\dfrac{18}{(3x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{6x_0-4}{3x_0+1}$.

Tiếp tuyến giao với tiệm cận đứng tại điểm $A\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{6x_0-10}{3x_0+1}\right)$ suy ra $IA=\left|\dfrac{12}{3x_0+1}\right|$.

Tiếp tuyến giao với tiệm cận ngang tại điểm $B\left(2x_0+\dfrac{1}{3};2\right)$ suy ra $IB=\left|\dfrac{2(3x_0+1)}{3}\right|$.

Khi đó diện tích tam giác IAB là $S=\dfrac{1}{2}IA\cdot IB=4$.

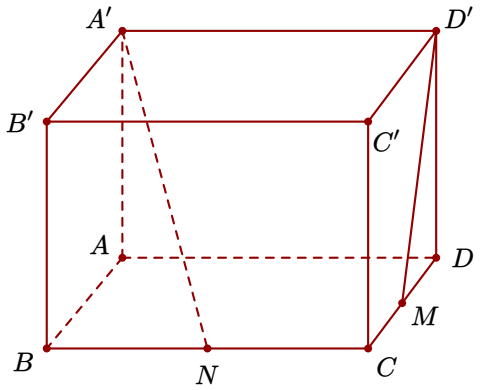
Câu 12. Chọn đáp án **D**



Giả sử flycam thứ nhất là vị trí điểm A suy ra điểm $A\,(3;2;5)$;
flycam thứ hai là vị trí điểm B suy ra điểm $B\,(-5;-6;9)$.
Khí đó khoảng cách giữa hai flycam là $AB=\sqrt{8^2+8^2+4^2}=\sqrt{144}=12$.

Câu 13. Chọn đáp án B
Giả sử giá cho thuê căn hộ tăng x triệu đồng/căn.
Khi đó số căn hộ bị bỏ trống là $20x$ căn.
Do đó, số căn hộ được thuê là $50-20x$ căn.
Khi đó tổng số tiền thuê nhà sẽ là $(2+x)(50-20x)=-20x^2+10x+100$ triệu đồng.
Để doanh thu cao nhất thì $y=-20x^2+10x+100$ đạt giá trị lớn nhất.
Vì đây là hàm số bậc hai nên $y_{\max}$ đạt được khi $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{10}{2\cdot(-20)}=0{,}25$.
Vậy giá cho thuê mỗi căn là 2,25 triệu đồng mỗi tháng thì doanh thu của công ty cao nhất.

Câu 14. Chọn đáp án A



Ta có
$$\overrightarrow{A'N}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$
$\Rightarrow 2\overrightarrow{A'N}=2\overrightarrow{A'A}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
Ta có

$$\overrightarrow{D'M} = \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{D'D} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{D'M} = 3\overrightarrow{A'A} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$

Suy ra

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A'A} - 3\overrightarrow{A'A} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}.$$

Khi đó $|\vec{u}| = BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

Câu 15. Chọn đáp án A

Gọi $H(a;b;c) \Rightarrow \overrightarrow{CH} = (a+1; b-9; c+18)$, $\overrightarrow{BH} = (a-2; b-3; c-3)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;2;3)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;8;-18) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-60;12;12)$ nên (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = -\frac{1}{12}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5;-1;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $5x - y - z - 4 = 0$.

Vì $H \in (ABC) \Rightarrow 5a - b - c - 4 = 0$ (1).

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} CH \perp AB \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c + 37 = 0 \\ 2a - 8b + 18c - 34 = 0 \end{cases} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $a = -\frac{7}{3}$, $b = -\frac{37}{3}$, $c = -\frac{10}{3} \Rightarrow a + b + c = -18$.

Câu 16. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$y' = \frac{x^2 - 2mx - m^2 + 4m}{(x-m)^2}.$$

Đặt $f(x) = x^2 - 2mx - m^2 + 4m$, $h(x) = x^2 + mx - 4m$, $g(x) = x - m$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2m^2 - 4m > 0 \\ f(m) = -2m^2 + 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases} \quad (1).$$

Khi đó $\begin{cases} y_1 = y(x_1) = \dfrac{h'(x_1)}{g'(x_1)} = 2x_1 + m \\ y_2 = y(x_2) = \dfrac{h'(x_2)}{g'(x_2)} = 2x_2 + m. \end{cases}$

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx - m^2 + 4m = 0$ nên theo Viet, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \ (2) \\ x_1 x_2 = -m^2 + 4m \ (3). \end{cases}$$

Giả sử $A(x_1; y_1)$ là điểm cực đại, $B(x_2; y_2)$ là điểm cực tiểu. Ta có bảng biến thiên của hàm số. Suy ra $x_1 < x_2$ (4).

x	$-\infty$		x_1		m		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	‖	↘	CT	↗	$+\infty$

Khi đó yêu cầu của đề bài tương đương với

$$\mathrm{d}(A,d)=3\mathrm{d}(B,d)\Leftrightarrow\frac{|x_1-y_1-2|}{\sqrt{2}}=3\frac{|x_2-y_2-2|}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow\frac{|x_1-(2x_1+m)-2|}{\sqrt{2}}=3\frac{|x_2-(2x_2+m)-2|}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow|x_1+m+2|=3|x_2+m+2|.$$

Trường hợp 1. $x_1+m+2=3(x_2+m+2)\Leftrightarrow x_1-3x_2=2m+4.$

Kết hợp với (2) ta được $\begin{cases}x_2=-1\\x_1=2m+1.\end{cases}$

Thay vào (3) ta được $-m^2+4m=-1(2m+1)\Leftrightarrow m^2-6m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3+\sqrt{10}\\m=3-\sqrt{10}\end{array}\right.$ (đều thỏa mãn (1)).

Với $m=3+\sqrt{10}$, ta có $\begin{cases}x_2=-1\\x_1=2(3+\sqrt{10})+1=7+2\sqrt{10}.\end{cases}$ Không thỏa (4).

Với $m=3-\sqrt{10}$, ta có $\begin{cases}x_2=-1\\x_1=2(3-\sqrt{10})+1=7-2\sqrt{10}.\end{cases}$ Không thỏa (4).

Trường hợp 2. $x_1+m+2=-3(x_2+m+2)\Leftrightarrow x_1+3x_2=-4m-8.$

Kết hợp với (2) ta được $\begin{cases}x_1=5m+4\\x_2=-3m-4.\end{cases}$

Thay vào (3) ta được $-m^2+4m=(5m+4)(-3m-4)\Leftrightarrow 14m^2+36m+16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{4}{7}\\m=-2\end{array}\right.$ (đều thỏa mãn (1)).

Với $m=-\dfrac{4}{7}$, ta có $\begin{cases}x_1=\dfrac{8}{7}\\x_2=-\dfrac{16}{7}.\end{cases}$ Không thỏa mãn (4).

Với $m=-2$, ta có $\begin{cases}x_1=-6\\x_2=2.\end{cases}$ Thỏa mãn (4).

Vậy $m=-2$.

Câu 17. Tổng số hình chữ nhật có thể tạo thành trong lưới $m\times m$ là $N_{\text{hcn}}=1^3+2^3+\cdots+m^3=\dfrac{(m+1)^2m^2}{4}$.

Tổng số hình vuông có thể tạo thành trong lưới $m\times m$ là $N_{\text{hv}}=1^2+2^2+\cdots+m^2=\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

Tổng số hình chữ nhật mà không phải hình vuông là $N=N_{\text{hcn}}-N_{\text{hv}}=\dfrac{(m+1)^2m^2}{4}-\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

Xác suất chọn được một hình chữ nhật mà không phải hình vuông là

$$P=\frac{N_{\text{hcn}}-N_{\text{hv}}}{N_{\text{hcn}}}=1-\frac{N_{\text{hv}}}{N_{\text{hcn}}}=1-\frac{\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}}{\dfrac{(m+1)^2m^2}{4}}=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{2m+1}{m(m+1)}.$$

Vì $P>0{,}84\Rightarrow 0{,}48m^2-3{,}52m-2>0$ (1).

Vì $m\geqslant 2$, $m\in\mathbb{N}$ nên thử lần lượt $m\in\{2;3;4;\dots\}$ ta được giá trị nhỏ nhất của m thỏa mãn (1) là $m=8$.

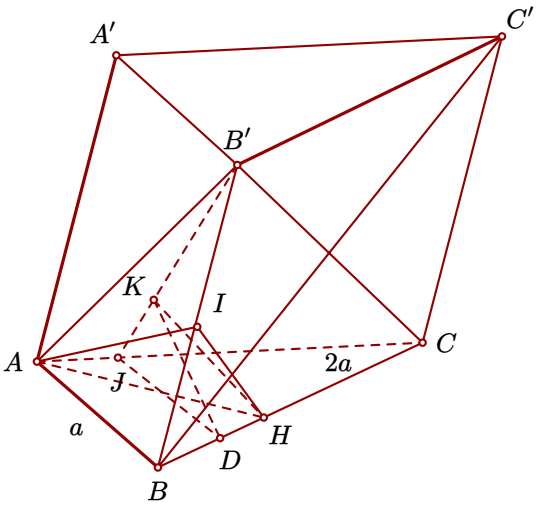
Câu 18. Chọn điểm A trùng với điểm gốc của hệ tọa độ $Oxyz$, khi đó đỉnh bức tượng tại điểm A là điểm $C(0;0;8)$, đỉnh bức tượng tại điểm B là $D(100;0;10)$, gọi $M(x;y;1{,}6)$ là điểm đặt máy

ảnh $(0 \leqslant x \leqslant 100)$.
Ta có phương trình đường tròn của hồ nước trong mặt phẳng Oxy là $(x-50)^2+y^2=2500$ nên phương trình bờ hồ hình bán nguyệt là $y=\sqrt{-x^2+100x}$.
Do đó điểm M có tọa độ là $(x;\sqrt{-x^2+100x};1{,}6)$.
Ta có $\overrightarrow{MC}=(-x;-\sqrt{-x^2+100x};6{,}4)$, $\overrightarrow{MD}=(100-x;-\sqrt{-x^2+100x};8{,}4)$.
Ta gọi ϕ là góc quan sát của máy ảnh chụp toàn cảnh hai bức tượng thì
$\cos\phi=|\cos(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD})|=\dfrac{53{,}76}{\sqrt{-10000x^2+100260x+41240{,}1376}}$.
Ta có góc quan sát lớn nhất khi $\cos\phi$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow f(x)=-10000x^2+1002960x+412490{,}1376$ đạt giá trị lớn nhất $(0 \leqslant x \leqslant 100)$.

x	0		$50{,}148$		100
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	0

Ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=50{,}148$, khi đó $\cos\phi=\dfrac{672}{6317}$ nhỏ nhất.
Khi đó góc ϕ lớn nhất bằng $\approx 89^\circ$.

Câu 19.



a) Dựng $AH \perp BC$ $(H \in BC)$, suy ra $AH \perp (BCC'B')$.
Trong tam giác vuông ABC: $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=a\sqrt{3}$, $AH=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Dựng $HI \perp BB'$ $(I \in BB')$ thì $\begin{cases} BB' \perp HI \\ BB' \perp AH \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (AHI)$ hay $\widehat{AIH}=\alpha$.
Ta có $BH=\dfrac{AB^2}{BC}=\dfrac{a}{2}$; $IH=\dfrac{AH}{\tan\alpha}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}:\dfrac{5\sqrt{3}}{3}=\dfrac{3a}{10} \Rightarrow \sin\widehat{IBH}=\dfrac{IH}{BH}=\dfrac{3}{5}$.
Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=3V_{A.BB'C}=3\cdot\dfrac{1}{3}\cdot AH\cdot\dfrac{1}{2}\cdot BB'\cdot BC\cdot\sin\widehat{IBH}=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{5}$ đơn vị thể tích.
b) Dựng $B'D \perp BC$ $(D \in BC)$, ta có $B'D \perp (ABC)$.
Có $\mathrm{d}(A'C',B'C)=\mathrm{d}(A'C',(B'AC))=\mathrm{d}(B,(B'AC))=\dfrac{BC}{DC}\cdot\mathrm{d}(D,(B'AC))$.

Dựng $DJ \perp AC$ $(J \in AC)$, $DK \perp B'J$ $(K \in B'J)$, khi đó $\mathrm{d}(D,(B'AC)) = DK$.

Trong tam giác vuông IBH: $\sin\widehat{IBH} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \cos\widehat{IBH} = \dfrac{4}{5}$

$$\Rightarrow \begin{cases} BD = BB' \cdot \cos\widehat{IBH} = 2a \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{8a}{5} \\ B'D = BB' \cdot \sin\widehat{IBH} = 2a \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{6a}{5}. \end{cases}$$

Trong $\triangle ABC$: $\dfrac{DJ}{AB} = \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{2a - \dfrac{8a}{5}}{2a} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow DJ = \dfrac{1}{5}a.$

Suy ra $DK = \dfrac{DB' \cdot DJ}{\sqrt{B'D^2 + DJ^2}} = \dfrac{\dfrac{6a}{5} \cdot \dfrac{1}{5}a}{\sqrt{\dfrac{36a^2}{25} + \dfrac{a^2}{25}}} = \dfrac{6a}{5\sqrt{37}}.$

Vậy $\mathrm{d}(A'C', B'C) = \dfrac{BC}{DC} \cdot DK = 5 \cdot \dfrac{6a}{5\sqrt{37}} = \dfrac{6a\sqrt{37}}{37}.$

Câu 20. Ta có

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y+2}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy - 6$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} \frac{3x+3y+6}{x^2+y^2+xy+2} + 3x + 3y + 6 = x^2 + y^2 + xy + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(3x+3y+6) + (3x+3y+6) = \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2) + (x^2+y^2+xy+2).$$

Hàm số $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t$, $t > 0$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$\Rightarrow f(3x+3y+6) = f(x^2+y^2+xy+2)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (2x+y-3)^2 + (\sqrt{3}y - \sqrt{3})^2 = 28.$

Đặt $\begin{cases} a = 2x + y - 3 \\ b = \sqrt{3}y - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3a - \sqrt{3}b + 6}{6} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}b + 3}{3} \end{cases}$ và $a^2 + b^2 = 28$ (C).

$$P = \frac{8x+7y-5}{x+y+6} = 7 + \frac{x-47}{x+y+6} \Leftrightarrow P - 7 = \frac{x-47}{x+y+6} = \frac{3a - \sqrt{3}b - 276}{3a + \sqrt{3}b + 48} = Q.$$

$\Rightarrow (3Q-3)a + \sqrt{3}(Q+1)b + 48Q + 276 = 0$ (d).

Đường thẳng (d) có điểm chung với đường tròn (C)

$\Leftrightarrow d^2(O,d) \leqslant 28$

$$\Leftrightarrow \frac{(48Q+276)^2}{(3Q-3)^2 + 3(Q+1)^2} \leqslant 28$$

$\Leftrightarrow 41Q^2 + 559Q + 1580 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{395}{41} \leqslant Q \leqslant -4 \Rightarrow P - 7 \leqslant -4 \Leftrightarrow P \leqslant 3.$

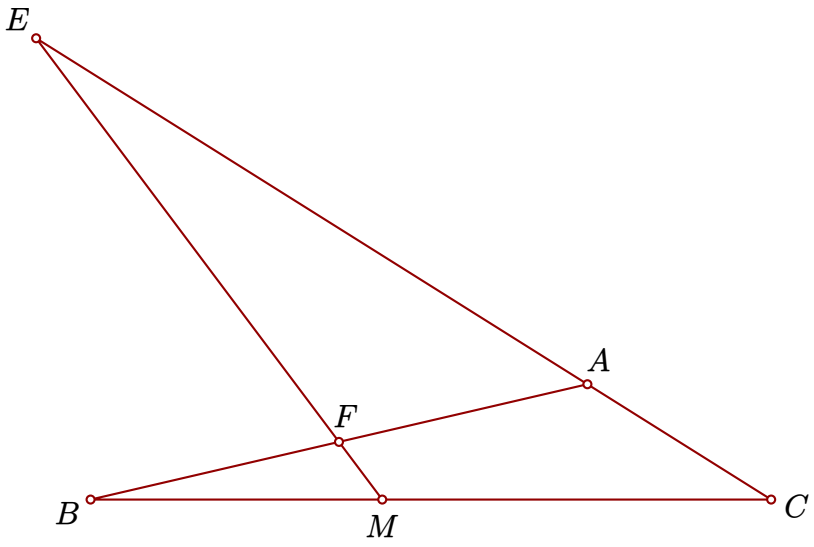
Vậy $\max P = 3$.

Xét hệ $\begin{cases} a^2 + b^2 = 28 \\ -15a - 3\sqrt{3}b + 84 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 28 \\ b = \dfrac{28 - 5a}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow 3a^2 + (28-5a)^2 = 84 \Leftrightarrow 28a^2 - 280a + 700 = 0 \Leftrightarrow a = 5 \Rightarrow b = \sqrt{3} \Rightarrow x = 3,\ y = 2$ (thỏa mãn).

Sở Sơn La

Câu 1. Chọn đáp án A
Ta có $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3$. Tiêu cự là $F_1F_2 = 2c = 6$.

Câu 2. Chọn đáp án D



Ta có:
- $4\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} + 3(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AC}$.
- $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{0} \Rightarrow F$ là trung điểm của AB.

Đặt $\overrightarrow{FM} = x\overrightarrow{FE}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FM} - \overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{AB}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF})\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + x\left(-3\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right)\overrightarrow{AB} - 3x\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Lại có $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Ba điểm M, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương:

$$\frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x}{-1} = \frac{-3x}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = -3x \Leftrightarrow \frac{7}{2}x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}.$$

Với $x = -\frac{1}{7}$, ta có:

$$\overrightarrow{FM} = -\frac{1}{7}\overrightarrow{FE} \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = -\frac{1}{7}(\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{ME}) \Leftrightarrow \frac{8}{7}\overrightarrow{FM} = -\frac{1}{7}\overrightarrow{ME} \Rightarrow \frac{MF}{ME} = \frac{1}{8}.$$

Do đó $a = 1, b = 8 \Rightarrow a + b = 9$.

Câu 3. Chọn đáp án B
Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 6)$.
Phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ C là
$(x + 3) + 3(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 3 = 0$.

Câu 4. Chọn đáp án B
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{26}^3 = 2600$.
Nhận xét về số dư của bình phương một số nguyên khi chia cho 5:
- Số chia hết cho 5 thì bình phương chia hết cho 5 (dư 0).
- Số chia cho 5 dư 1 hoặc 4 thì bình phương chia cho 5 dư 1.
- Số chia cho 5 dư 2 hoặc 3 thì bình phương chia cho 5 dư 4.
Chia tập hợp S thành 3 tập con:
- $A = \{5; 10; 15; 20; 25\}$ gồm 5 số chia hết cho 5.
- $B = \{1; 4; 6; 9; 11; 14; 16; 19; 21; 24; 26\}$ gồm 11 số chia cho 5 dư 1 hoặc 4.
- $C = \{2; 3; 7; 8; 12; 13; 17; 18; 22; 23\}$ gồm 10 số chia cho 5 dư 2 hoặc 3.
Để $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 5, ta có hai trường hợp:
- Trường hợp 1: Cả 3 số đều thuộc tập A (dư $0 + 0 + 0 = 0$).
Số cách chọn là $\mathrm{C}_5^3 = 10$.
- Trường hợp 2: Chọn 1 số thuộc tập A, 1 số thuộc tập B và 1 số thuộc tập C (dư $0+1+4 = 5 \vdots 5$).
Số cách chọn là $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{11}^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 = 550$.
Số cách chọn 3 số thỏa mãn yêu cầu là $\mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{11}^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 = 10 + 550 = 560$.
Xác suất cần tìm là:
$$P = \frac{\mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{11}^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^1}{\mathrm{C}_{26}^3} = \frac{560}{2600} = \frac{14}{65}.$$

Câu 5. Chọn đáp án A
Số hạng tổng quát trong khai triển là:
$$T_{k+1} = \mathrm{C}_5^k \left(3x^3\right)^{5-k} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_5^k 3^{5-k}(-2)^k x^{15-5k} \quad (0 \leqslant k \leqslant 5, k \in \mathbb{N}).$$
Số hạng chứa x^{10} ứng với:
$15 - 5k = 10 \Leftrightarrow 5k = 5 \Leftrightarrow k = 1$ (thỏa mãn).
Hệ số cần tìm là:
$\mathrm{C}_5^1 \cdot 3^4 \cdot (-2)^1 = 5 \cdot 81 \cdot (-2) = -810$.

Câu 6. Chọn đáp án A
Từ giả thiết ta có $a, b, c \neq 0$ và $a \leqslant 7$. Do a là số lẻ nên $a \in \{1; 3; 5; 7\}$.
Nhận xét: Mỗi cách chọn được một bộ 3 chữ số a, b, c phân biệt thoả mãn $a < b < c$ sẽ chỉ lập được duy nhất một số $\overline{abc}$.
Xét các trường hợp:
- Trường hợp 1: Với $a = 1$, chọn 2 chữ số b, c từ tập $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ có $\mathrm{C}_8^2 = 28$ cách.
- Trường hợp 2: Với $a = 3$, chọn 2 chữ số b, c từ tập $\{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ có $\mathrm{C}_6^2 = 15$ cách.
- Trường hợp 3: Với $a = 5$, chọn 2 chữ số b, c từ tập $\{6; 7; 8; 9\}$ có $\mathrm{C}_4^2 = 6$ cách.
- Trường hợp 4: Với $a = 7$, chọn 2 chữ số b, c từ tập $\{8; 9\}$ có $\mathrm{C}_2^2 = 1$ cách.
Vậy số các số thoả mãn yêu cầu là:
$\mathrm{C}_8^2 + \mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_2^2 = 28 + 15 + 6 + 1 = 50$ số.

Câu 7. Chọn đáp án C
Ta có:
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$
Do $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ nên $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
Biến đổi biểu thức:

$$\begin{aligned}\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}&=\frac{(1+\cos 2x)+\sin 2x}{(1-\cos 2x)+\sin 2x}\\&=\frac{2\cos^2 x+2\sin x\cos x}{2\sin^2 x+2\sin x\cos x}\\&=\frac{2\cos x(\cos x+\sin x)}{2\sin x(\sin x+\cos x)}\\&=\frac{\cos x}{\sin x}\\&=\frac{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{1}{3}}\\&=-2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Câu 8. Chọn đáp án B

$$\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x\Leftrightarrow\left[\begin{cases}8-2x<0\\-x^2+6x-5\geqslant 0\end{cases}\right.$$
$$\left.\begin{cases}8-2x\geqslant 0\\-x^2+6x-5>(8-2x)^2\end{cases}\right.$$

Ta có

$$\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x>4\\1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}\right.$$
$$\left.\begin{cases}x\leqslant 4\\5x^2-38x+69<0\end{cases}\right.$$

Suy ra $a=3,b=5$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&4<x\leqslant 5\\&\begin{cases}x\leqslant 4\\3<x<\dfrac{23}{5}\end{cases}\end{aligned}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&4<x\leqslant 5\\&3<x\leqslant 4\end{aligned}\right.$$
$$\Leftrightarrow 3<x\leqslant 5.$$

Vậy $a^2-2b=3^2-2\cdot 5=-1$.

Câu 9. Chọn đáp án D

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x-2}+5\right)>-2\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x}{x-2}+5>0\\\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x}{x-2}+5<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\end{cases}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4x^2-5x-12}{x^2-x-2}>0\quad(1)\\\dfrac{4x^2-5x-12}{x^2-x-2}<4\quad(2)\end{cases}$$

Giải (1):

$$\frac{4x^2-5x-12}{x^2-x-2}>0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x<\frac{5-\sqrt{217}}{8}\\&-1<x<2\\&x>\frac{5+\sqrt{217}}{8}\end{aligned}\right.\quad(3)$$

Giải (2):

$$\frac{4x^2-5x-12}{x^2-x-2}<4 \Leftrightarrow \frac{4x^2-5x-12-4(x^2-x-2)}{x^2-x-2}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-4}{x^2-x-2}<0 \quad (4)$$

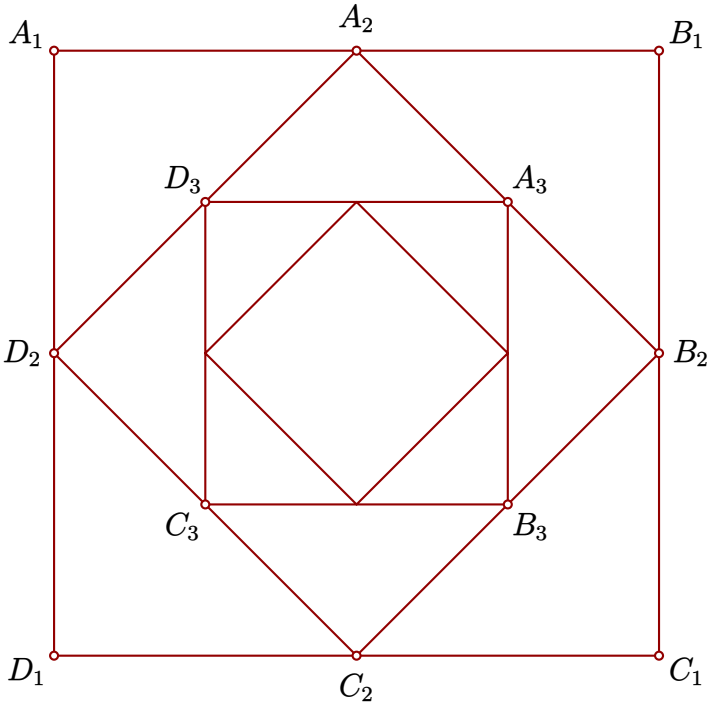
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4<x<-1 \\ x>2 \end{array}\right.$$

Từ (3) và (4) suy ra tập nghiệm của bất phương trình là:

$S=(-4;-1)\cup\left(\frac{5+\sqrt{217}}{8};+\infty\right)$. Vì $x\in[-2025;2025]$ và $x\in\mathbb{Z}$ nên:

$x\in\{-3;-2;3;4;\ldots;2025\}$. Vậy có tất cả $2+(2025-3+1)=2025$ giá trị nguyên thỏa mãn.

Câu 10. Chọn đáp án C



Cạnh hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ bằng 8 nên diện tích là $S_1=8^2=64$.

Cạnh hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ bằng $\frac{8\sqrt{2}}{2}$ nên diện tích là $S_2=\left(\frac{8\sqrt{2}}{2}\right)^2=8^2\cdot\frac{1}{2}$.

Cạnh hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ bằng $\left(\frac{8\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ nên diện tích là $S_3=8^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

$\ldots$

Cạnh hình vuông $A_{100}B_{100}C_{100}D_{100}$ bằng $8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{99}$ nên diện tích là $S_{100}=8^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$.

Ta có tổng:

$$\begin{aligned} T&=S_1+S_2+\cdots+S_{100}\\ &=8^2+8^2\cdot\frac{1}{2}+8^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+8^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{99}\\ &=8^2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{1-\frac{1}{2}}\\ &=2^6\cdot\frac{2^{100}-1}{\frac{1}{2}\cdot 2^{100}}=\frac{2^{100}-1}{2^{93}}=2^7-\frac{1}{2^{93}}. \end{aligned}$$

Câu 11. Chọn đáp án D

Với $x > 0$, hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ liên tục.

Với $x < 0$, hàm số $f(x) = 2x^2 + 3m + 1$ liên tục.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x^2 + 3m + 1) = 3m + 1,$$

$$f(0) = 3m + 1.$$

Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 3m + 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{6}$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m = -\dfrac{1}{6}$.

Câu 12. Chọn đáp án A

Ta có:

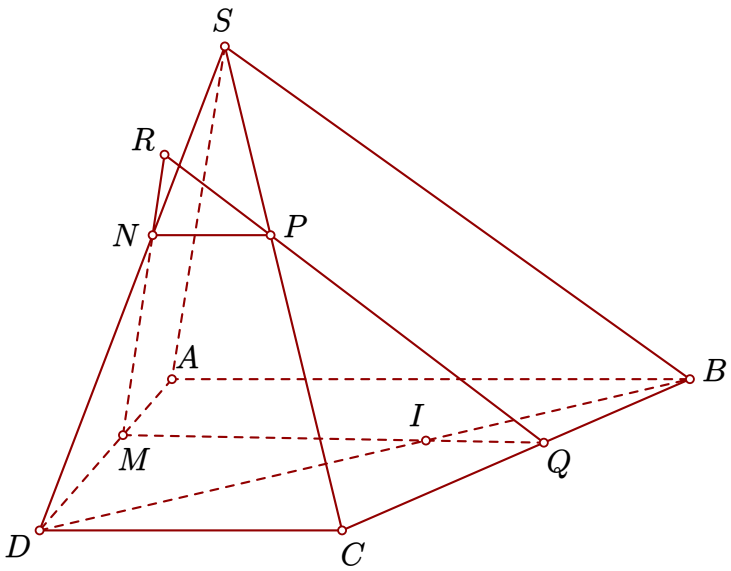
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{9\sqrt[7]{x+1}\left(\sqrt{x+4}-2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{9\sqrt[7]{x+1}(x+4-4)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{9x\sqrt[7]{x+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}+2}{9\sqrt[7]{x+1}} = \frac{4}{9}.$$

Suy ra $a = 4, b = 9 \Rightarrow a + b = 13$.

Câu 13. Chọn đáp án B



Kẻ $MQ \parallel CD$ $(Q \in BC)$, $MN \parallel SA$ $(N \in SD)$, $NP \parallel CD$ $(P \in SC)$.

Ta được thiết diện là hình thang $MNPQ$.

Gọi $R = MN \cap QP$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $I = BD \cap MQ$.

Ta có: $MQ = MI + IQ$.

- $\dfrac{MI}{AB} = \dfrac{MD}{AD} \Rightarrow MI = \dfrac{MD}{AD} \cdot AB$.
- $\dfrac{IQ}{CD} = \dfrac{QB}{BC} = \dfrac{MA}{AD} \Rightarrow IQ = \dfrac{MA}{AD} \cdot CD$.

Mà $\dfrac{MA}{MD}=x$ nên:

$\dfrac{MA}{AD}=\dfrac{MA}{MA+MD}=\dfrac{x}{x+1}$ và $\dfrac{MD}{AD}=\dfrac{MD}{MA+MD}=\dfrac{1}{x+1}$.

Do đó:

$$MQ=MI+IQ=\frac{MD}{AD}\cdot AB+\frac{MA}{AD}\cdot CD$$
$$=\frac{1}{x+1}AB+\frac{x}{x+1}CD=\frac{1}{x+1}AB+\frac{x}{2(x+1)}AB=\frac{x+2}{2(x+1)}AB.$$

Tam giác RMQ và tam giác SAB có các cạnh tương ứng song song nên hai tam giác này đồng dạng với nhau:

$$\frac{S_{RMQ}}{S_{SAB}}=\left(\frac{MQ}{AB}\right)^2=\left(\frac{x+2}{2(x+1)}\right)^2=\frac{(x+2)^2}{4(x+1)^2}\quad(1)$$

Lại có $NP\parallel CD\Rightarrow\dfrac{NP}{CD}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{x}{x+1}$, suy ra:

$$NP=\frac{x}{x+1}CD=\frac{x}{2(x+1)}AB.$$

Suy ra $\dfrac{NP}{MQ}=\dfrac{x}{x+2}$, do đó:

$$\frac{S_{RNP}}{S_{RMQ}}=\left(\frac{NP}{MQ}\right)^2=\frac{x^2}{(x+2)^2}.$$

Khi đó:

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{RMQ}}=1-\frac{S_{RNP}}{S_{RMQ}}=1-\frac{x^2}{(x+2)^2}=\frac{4x+4}{(x+2)^2}\quad(2)$$

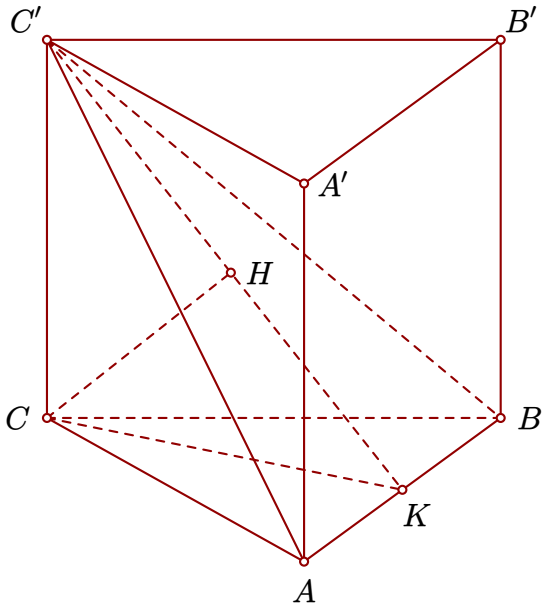
Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}}=\frac{S_{RMQ}}{S_{SAB}}\cdot\frac{S_{MNPQ}}{S_{RMQ}}=\frac{(x+2)^2}{4(x+1)^2}\cdot\frac{4(x+1)}{(x+2)^2}=\frac{1}{x+1}.$$

Theo giả thiết:

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=1.$$

Câu 14. Chọn đáp án C



Gọi K là trung điểm của AB, tam giác ABC đều nên $CK\perp AB$.

Suy ra $AB\perp(C'CK)\Rightarrow AB\perp CH$.

Kẻ $CH\perp C'K$ tại H thì $CH\perp(C'AB)$ hay $\mathrm{d}(C,(C'AB))=CH=a$.

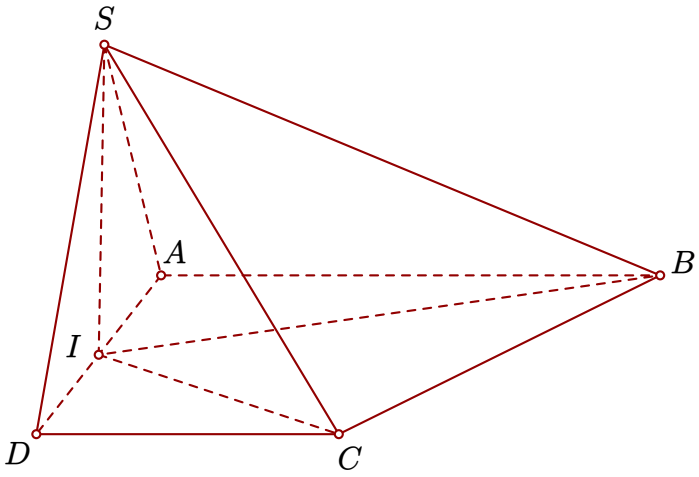
Góc phẳng nhị diện $[C', AB, C]$ là $\widehat{CKC'} = \alpha$.

Ta có: $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó:

- $CK = \dfrac{CH}{\sin\alpha} = a\sqrt{3}$.

- $h = CC' = CK \cdot \tan\alpha = a\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 15. Chọn đáp án A



Các mặt phẳng (SIC) và (SIB) cùng vuông góc với $(ABCD)$ nên $SI \perp (ABCD)$.

Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $60°$ hay $\widehat{SCI} = 60°$.

Ta có $IC = a\sqrt{2}$, $SI = IC \cdot \tan\widehat{SCI} = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{6}$.

$S_{ABCD} = \dfrac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \dfrac{(2a + a) \cdot 2a}{2} = 3a^2$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SI \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{6} \cdot 3a^2 = a^3\sqrt{6}$.

Câu 16. Chọn đáp án A

Ta có $R = 180 - 150 = 30$.

Câu 17. Chọn đáp án B

(6) Các khẳng định đúng là (3), (4)

Câu 18. Chọn đáp án A

Gọi A là biến cố hai thẻ lấy ra có tích là một số chia hết cho 10.

- Trường hợp 1: Hai thẻ lấy ra có đúng 1 thẻ ghi số chia hết cho 10.

Có $5 \cdot 45 = 225$ cách.

- Trường hợp 2: Hai thẻ lấy ra đều ghi số chia hết cho 10.

Có $\mathrm{C}_5^2 = 10$ cách.

- Trường hợp 3: Hai thẻ lấy ra có 1 thẻ ghi số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 5 và 1 thẻ ghi số chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 2.

Có $\mathrm{C}_{20}^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 100$ cách.

Suy ra:

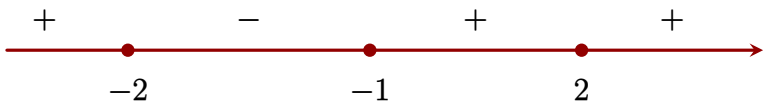
$n(A) = 225 + 10 + 100 = 335$.

Xác suất của biến cố A là:

$P(A) = \dfrac{335}{\mathrm{C}_{50}^2} = \dfrac{67}{245}$.

Câu 19. Chọn đáp án C
Gọi A là biến cố chọn được học sinh đạt học lực Tốt.
Lớp $12A$ có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ.
Vì có 40% học sinh nam đạt học lực Tốt nên số học sinh nam đạt học lực Tốt là:
$40\% \cdot 25 = 10$ (học sinh).
Do có 60% học sinh nữ đạt học lực Tốt nên số học sinh nữ đạt học lực Tốt là:
$60\% \cdot 20 = 12$ (học sinh).
Tổng số học sinh đạt học lực Tốt là:
$10 + 12 = 22 \Rightarrow n(A) = \mathrm{C}_{22}^{1} = 22.$
Tổng số học sinh trong lớp là:
$25 + 20 = 45 \Rightarrow n(\Omega) = \mathrm{C}_{45}^{1} = 45.$
Xác suất chọn ngẫu nhiên một học sinh đạt học lực Tốt là:
$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{22}{45}.$

Câu 20. Chọn đáp án C
Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \\ x = -2. \end{array}\right.$
Xét dấu $f'(x)$ ta được



Nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi x đi qua $x = -1$ nên hàm số có một điểm cực tiểu $x = -1$.

Câu 21. Chọn đáp án B
Tập xác định: $D = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
Ta có:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{(x+1)\sqrt{x^2 - 16}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^2}}{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1 - \dfrac{16}{x^2}}} = 1$, suy ra đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{(x+1)\sqrt{x^2 - 16}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^2}}{-\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1 - \dfrac{16}{x^2}}} = -1$, suy ra đường thẳng $y = -1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Nhận xét: $x + 1 \neq 0, \forall x \in D$.
- Với $x > 4$, ta có:
$y = \dfrac{(x-1)(x-4)}{(x+1)\sqrt{(x-4)(x+4)}} = \dfrac{(x-1)\sqrt{x-4}}{(x+1)\sqrt{x+4}}$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 4^+} y = \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{(x-1)\sqrt{x-4}}{(x+1)\sqrt{x+4}} = 0,$
nên đường thẳng $x = 4$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Với $x < -4$, ta có:

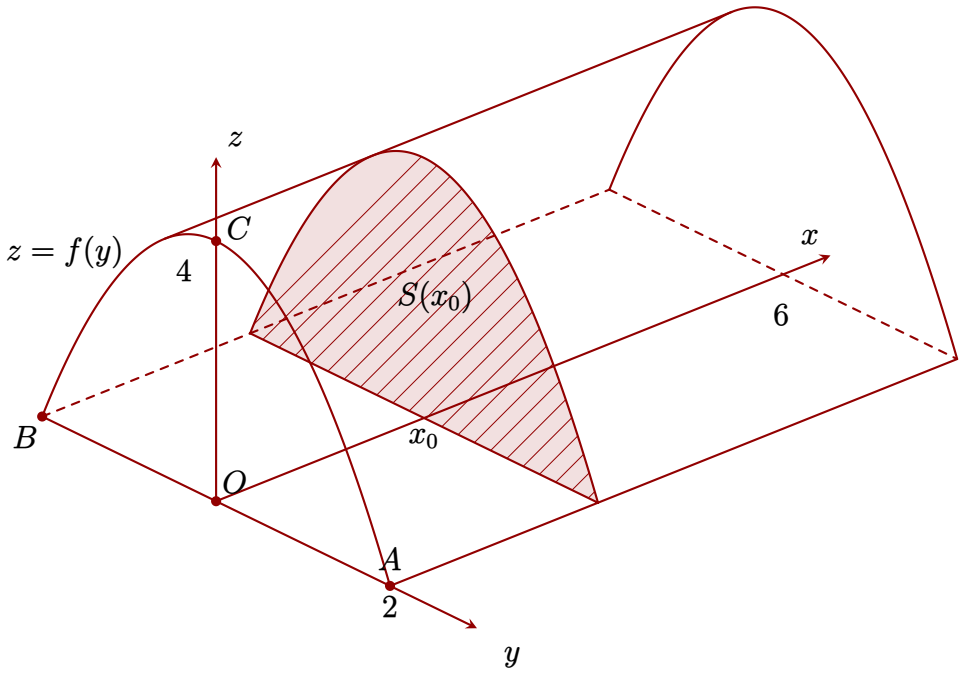
$y = \dfrac{-(x-1)(4-x)}{(x+1)\sqrt{(4-x)(-x-4)}} = \dfrac{-(x-1)\sqrt{4-x}}{(x+1)\sqrt{-x-4}}$.
Lại có:
$\lim\limits_{x\to(-4)^-}[-(x-1)\sqrt{4-x}] = 10\sqrt{2} > 0$
$\lim\limits_{x\to(-4)^-}(x+1)\sqrt{-x-4} = 0$ và $(x+1)\sqrt{-x-4} < 0,\ \forall x < -4$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-4)^-} y = -\infty$.
Do đó, đường thẳng $x = -4$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
Vậy tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là 3.

Câu 22. Chọn đáp án C
Gọi v là vận tốc của tàu (km/h, $v > 0$).
Chi phí nhiên liệu phần thứ nhất cố định là $C_1 = 540$ nghìn đồng trên 1 giờ.
Chi phí nhiên liệu phần thứ hai là $C_2 = kv^3$.
Ta có $C_2 = 80$ khi $v = 10$ km/h nên $k \cdot 10^3 = 80 \Rightarrow k = 0{,}08$.
Vậy $C_2 = 0{,}08v^3$.
Tổng chi phí nhiên liệu trên một giờ là $C = C_1 + C_2 = 540 + 0{,}08v^3$.
Tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km là:
$f(v) = \dfrac{C}{v} = \dfrac{540 + 0{,}08v^3}{v} = \dfrac{540}{v} + 0{,}08v^2$.
Ta có:
$f'(v) = -\dfrac{540}{v^2} + 0{,}16v = 0 \Leftrightarrow 0{,}16v^3 = 540 \Leftrightarrow v^3 = 3375 \Leftrightarrow v = 15$.
Vậy vận tốc của tàu để chi phí đường sông trên 1 km nhỏ nhất bằng 15 km/h.

Câu 23. Chọn đáp án A
Ta có $\displaystyle\int 2\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int (1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Câu 24. Chọn đáp án A
Ta có:
$$\int_a^{2a} \frac{x+2}{x}\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_a^{2a}\left(1+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 2\ln|x|)\Big|_a^{2a} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2a + 2\ln|2a| - (a + 2\ln|a|) = 0$$
$$\Leftrightarrow a + 2\ln 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2\ln 2 \approx -1{,}386 \notin (-1;1).$$

Câu 25. Chọn đáp án B



Xét hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Mặt phẳng $x = x_0$ luôn cắt lều theo thiết diện có diện tích $S(x_0)$ không đổi.
Xét trên mặt phẳng Oyz, đường cong $z = f(y)$ đi qua các điểm $A(2;0)$, $B(-2;0)$ và $C(0;4)$ nên $z = f(y) = -y^2 + 4$.
Do đó: $S(0) = \displaystyle\int_{-2}^{2} |-y^2+4|\,\mathrm{d}y = \frac{32}{3}$. Vậy thể tích của lều bằng:

$$V = \int_0^6 \frac{32}{3}\,\mathrm{d}x = 64\,\mathrm{m}^3.$$

Câu 26. Chọn đáp án **D**
Ta có $A(-2;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;3)$, suy ra $OA = 2$, $OB = 1$, $OC = 3$.
Khối chóp $O.ABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nên có thể tích bằng:
$V = \frac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 1$.

Câu 27. Chọn đáp án **B**
Đường thẳng d_1, d_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u} = (2;1;-2)$ và $\vec{v} = (1;-2;3)$.
Ta có $[\vec{u}, \vec{v}] = (-1;-8;-5)$.
Mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = -[\vec{u}, \vec{v}] = (1;8;5)$.
Ta có $A(0;-3;8) \in d_1$ và $d_1 \subset (P)$ nên $A \in (P)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là:
$1(x-0) + 8(y+3) + 5(z-8) = 0 \Leftrightarrow x + 8y + 5z - 16 = 0$.

Câu 28. Chọn đáp án **D**
Toạ độ điểm A' đối xứng với $A\,(2;-3;5)$ qua trục Oy là $(-2;-3;-5)$.

Câu 29. Chọn đáp án **D**
Gọi I là tâm của mặt cầu (S).
Vì (S) đi qua hai điểm A, B nên $IA = IB$ hay I thuộc mặt phẳng trung trực (Q) của đoạn AB.
Mặt phẳng (Q) đi qua trung điểm $M(1;0;3)$ của AB và có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (10;-2;-4) = 2(5;-1;-2)$.

Do đó, phương trình mặt phẳng (Q) là $5x-y-2z+1=0$.
Mà $I\in(P)$ nên I thuộc đường thẳng giao tuyến d của (P) và (Q).
Giả sử $N(0;b;c)$ là một điểm nằm trên đường thẳng d.
Khi đó, ta có:
$\begin{cases}N\in(P)\\N\in(Q)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0+b-c-1=0\\5\cdot0-b-2c+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow N(0;1;0).$
Lại có $(P),(Q)$ có một véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n}_{(P)}=(1;1;-1)$, $\overrightarrow{n}_{(Q)}=(5;-1;-2)$.
Suy ra d có một véc-tơ chỉ phương là:
$\left[\overrightarrow{n}_{(P)},\overrightarrow{n}_{(Q)}\right]=(-3;-3;-6)=-3(1;1;2).$
Do đó phương trình đường thẳng d là $\begin{cases}x=t\\y=1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})\Rightarrow I(t;1+t;2t).$
$\begin{cases}z=2t\end{cases}$
Khi đó, bán kính mặt cầu (S) là:
$IA=\sqrt{(t+4)^2+t^2+(2t-5)^2}=\sqrt{6t^2-12t+41}=\sqrt{6(t-1)^2+35}\geqslant\sqrt{35}.$
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=1\Leftrightarrow I(1;2;2)$.
Vậy mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất bằng $\sqrt{35}$.

Câu 30. Chọn đáp án B
Gọi I là điểm thoả mãn $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$. Suy ra $I(-23;20;-11)$.
Ta có:
$$\begin{aligned}P&=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|\\&=\left|3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+5\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)-7\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|\\&=\left|\overrightarrow{MI}+\left(3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}\right)\right|\\&=\left|\overrightarrow{MI}\right|\\&=IM.\end{aligned}$$
Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì IM đạt giá trị nhỏ nhất. Mà M thuộc một trong ba trục toạ độ nên M là hình chiếu vuông góc của I lên một trong ba trục toạ độ.
- Với $M\in Ox$, khi đó $M(-23;0;0)\Rightarrow IM=\sqrt{521}$.
- Với $M\in Oy$, khi đó $M(0;20;0)\Rightarrow IM=5\sqrt{26}$.
- Với $M\in Oz$, khi đó $M(0;0;-11)\Rightarrow IM=\sqrt{929}$.
Vậy $P_{\min}=IM_{\min}=\sqrt{521}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M(-23;0;0)$.

Câu 31. Chọn đáp án: a b c d
a) Mệnh đề sai, vì:
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=-2$, trục tung là
$$S=\int\limits_{-2}^{0}\left|x^3+3x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3+3x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{4}x^4+x^3\right)\Big|_{-2}^{0}=4.$$
b) Mệnh đề đúng, vì:
Ta có $x^3+3x^2=x+3\Leftrightarrow x^3+3x^2-x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\\x=1.\end{array}\right.$
Do đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=x^3+3x^2$, $y=x+3$ và hai đường thẳng $x=-3$, $x=0$ được xác định bởi công thức

$$S=\int\limits_{-3}^{-1}\left(x^3+3x^2-x-3\right)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{0}\left(-x^3-3x^2+x+3\right)\,\mathrm{d}x.$$

c) Mệnh đề sai, vì:

Ta có $x^3+3x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=0.\end{array}\right.$

Do đó, thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$, trục hoành xung quanh trục Ox là

$$V=\pi\int\limits_{-3}^{0}\left(x^3+3x^2\right)^2\,\mathrm{d}x=\frac{729}{35}\pi.$$

d) Mệnh đề sai, vì:

Với $x\in[0;1]\Rightarrow x^3+3x^2\leqslant 4$ và $m^2x\geqslant 0\Rightarrow m^2x+5\geqslant 5>x^3+3x^2$.

Do đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=x^3+3x^2$, $y=m^2x+5$ và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$ là

$$S=\int\limits_{0}^{1}\left(m^2x+5-x^3-3x^2\right)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{m^2x^2}{2}+5x-\frac{x^4}{4}-x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}m^2+5-\frac{1}{4}-1=\frac{1}{2}m^2+\frac{15}{4}.$$

Theo giả thiết, ta có:

$$\frac{1}{2}m^2+\frac{15}{4}=4\Leftrightarrow\frac{1}{2}m^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow m^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\in(-1;1).$$

Câu 32. Chọn đáp án: a b c d

Chiều cao (cm)	$[170;175)$	$[175;180)$	$[180;185)$	$[185;190)$	$[190;195)$
Lớp đại diện	172,5	177,5	182,5	187,5	192,5
Đội Sao La	2	4	5	5	4
Đội Kim Ngưu	2	3	4	10	1

a) Mệnh đề đúng, vì:

Gọi X là số trung bình chiều cao của đội Sao La:

$$X=\frac{172{,}5\cdot 2+177{,}5\cdot 4+182{,}5\cdot 5+187{,}5\cdot 5+192{,}5\cdot 4}{20}=183{,}75.$$

Gọi Y là số trung bình chiều cao của đội Kim Ngưu:

$$Y=\frac{172{,}5\cdot 2+177{,}5\cdot 3+182{,}5\cdot 4+187{,}5\cdot 10+192{,}5\cdot 1}{20}=183{,}75.$$

Vậy $X=Y=183{,}75$.

b) Mệnh đề đúng, vì:

Nhóm trung vị chiều cao của đội Sao La là $[180;185)$, ta có:

$$M_e=180+\frac{10-6}{5}\cdot 5=184.$$

Nhóm trung vị chiều cao của đội Kim Ngưu là $[185;190)$, ta có:

$$M_e=185+\frac{10-9}{10}\cdot 5=185{,}5.$$

c) Mệnh đề đúng, vì:

Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên của đội Sao La: có 20 cách.
Chọn được thành viên không thấp hơn 190cm: có 4 cách.
Vậy xác suất là $P=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$.
d) Mệnh đề sai, vì:
Chọn ngẫu nhiên mỗi đội 1 thành viên lên sân khấu giao lưu có: $20\cdot 20=400$ cách.
Chọn hai cầu thủ cùng trong một nhóm chiều cao:
- Trường hợp 1: Nhóm $[170;175)$ có: $2\cdot 2=4$ cách.
- Trường hợp 2: Nhóm $[175;180)$ có: $4\cdot 3=12$ cách.
- Trường hợp 3: Nhóm $[180;185)$ có: $5\cdot 4=20$ cách.
- Trường hợp 4: Nhóm $[185;190)$ có: $5\cdot 10=50$ cách.
- Trường hợp 5: Nhóm $[190;195)$ có: $4\cdot 1=4$ cách.

Vậy xác suất để hai cầu thủ cùng trong một nhóm chiều cao là:
$P=\dfrac{4+12+20+50+4}{400}=\dfrac{9}{40}$.

Câu 33. Chọn đáp án: a b c d
a) Mệnh đề đúng, vì
Giả sử $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$.
Ta có
$$\begin{cases} f(0)=1\\ f(1)=-1\\ f(-1)=3\\ f'(1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} d=1\\ a+b+c+1=-1\\ -a+b-c+1=3\\ 3a+2b+c=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1\\ b=0\\ c=-3\\ d=1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x)=x^3-3x+1.$$
Vậy $f'(2)=9$.
b) Mệnh đề sai, vì
Ta có $y=\dfrac{\ln(x+1)}{f(x)+1}=\dfrac{\ln(x+1)}{x^3-3x+2}$.
Tập xác định $\mathscr{D}=(-1;+\infty)\setminus\{1\}$.
Ta có
$$\lim_{x\to 1^+} y=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x+1)}{(x+2)(x-1)^2}=+\infty,$$
suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x=1$.
c) Mệnh đề sai, vì
Ta có $y=g(x)=f(\sin x+\cos x)=f\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

$$g'(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot f'\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ f'\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{k\pi}{2}.\end{array}\right.$$

Trên $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$, ta có $x\in\left\{0;\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right\}$.

Ta có

$g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=f(0)=1;$

$g(0)=f(1)=-1;$

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\sqrt{2}\right)=1-\sqrt{2};$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(1)=-1;$

$g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=f(0)=1.$

Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]}g(x)=g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=g\left(\frac{3\pi}{4}\right).$

d) Mệnh đề đúng, vì

Xét $g(x)=f(x^2-4x+4)-2025$, ta có

$$g'(x)=(2x-4)f'(x^2-4x+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ f'(x^2-4x+4)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x^2-4x+4=1\\ x^2-4x+4=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=1\\ x=3.\end{array}\right.$$

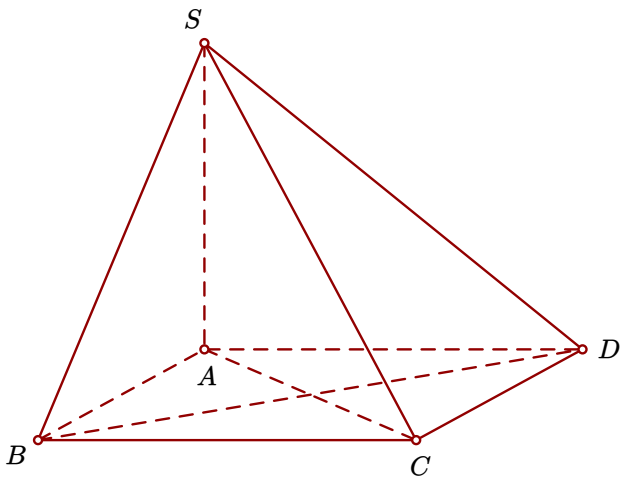
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2026	$\nearrow$	-2024	$\searrow$	-2026	$\nearrow$	$+\infty$
$\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2026	$\searrow$	2024	$\nearrow$	2026 $\searrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$

Vậy hàm số $y = \left|f(x^2 - 4x + 4) - 2025\right|$ có ba điểm cực tiểu.

Câu 34. Chọn đáp án: a b c d

a)



Mệnh đề sai, vì:

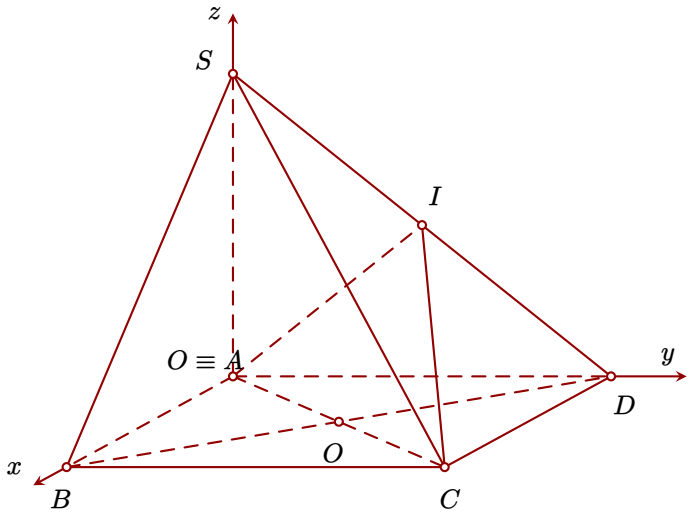
Giả sử $AC \perp SB$.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$

Ta có: $\Rightarrow AC \perp (SAB)$

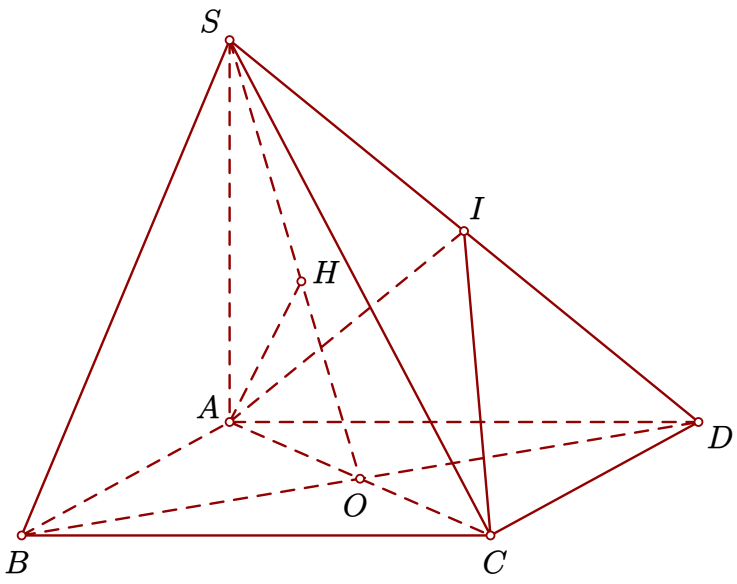
$\Rightarrow AC \perp AB$.

Điều này là vô lý vì $ABCD$ là hình vuông. b)



Mệnh đề sai, vì:
Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.
$\Rightarrow A(0;0;0), B(4a;0;0), C(4a;4a;0), D(0;4a;0), S(0;0;3a) \Rightarrow I\left(0;2a;\dfrac{3a}{2}\right)$.

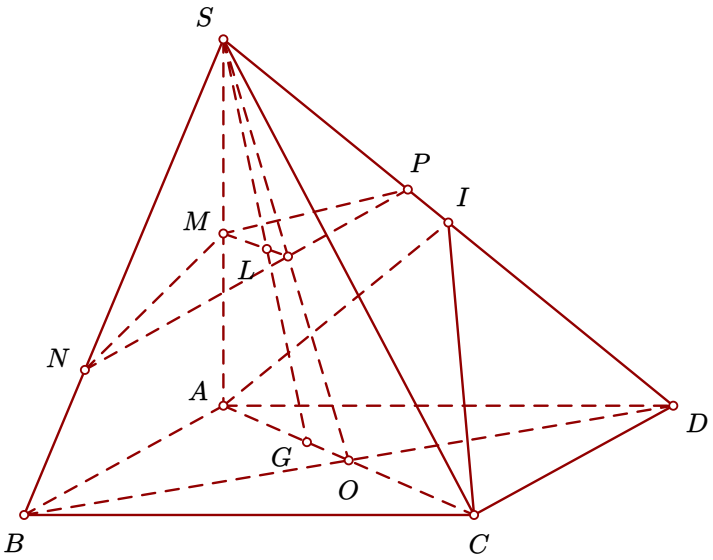
$\overrightarrow{SB} = (4a;0;-3a), \overrightarrow{BC} = (0;4a;0) \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}] = (-12a^2;0;16a^2)$.
Suy ra (SBC) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (3;0;4)$.
Tương tự, (IAC) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (3;-3;4)$.
Suy ra:
$$\cos((AIC),(SBC)) = \frac{|3\cdot 3 + 0\cdot(-3) + 4\cdot 4|}{\sqrt{9+0+16}\cdot\sqrt{9+9+16}} = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$
c)



Mệnh đề sai, vì:
Đặt $AB = a, SA = h$.
Dựng $AH \perp SO$ với $H \in SO \Rightarrow AH \perp (SBD)$.
Do $AC \cap (SBD) = O$ nên $\mathrm{d}(C,(SBD)) = \mathrm{d}(A,(SBD)) = AH \Rightarrow AH = 3 \Rightarrow h > 3$.
Mặt khác:
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AO^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{2}{a^2} + \frac{1}{h^2} \Rightarrow a^2 = \frac{18h^2}{h^2-9}$$
$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2\cdot h = \frac{6h^3}{h^2-9}.$$

Xét hàm số $f(h)=\dfrac{6h^3}{h^2-9}$, ta có $f(10)=\dfrac{6000}{91}>27\sqrt{3}$.

d)



Mệnh đề đúng, vì:

$SA=1, SB=2 \Rightarrow AB=\sqrt{3}$.

Ta có:

$\overrightarrow{SJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{SG}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD})=\dfrac{SA}{6SM}\overrightarrow{SM}+\dfrac{SB}{6SN}\overrightarrow{SN}+\dfrac{SD}{6SP}\overrightarrow{SP}$.

Mà M, N, P, J đồng phẳng nên:

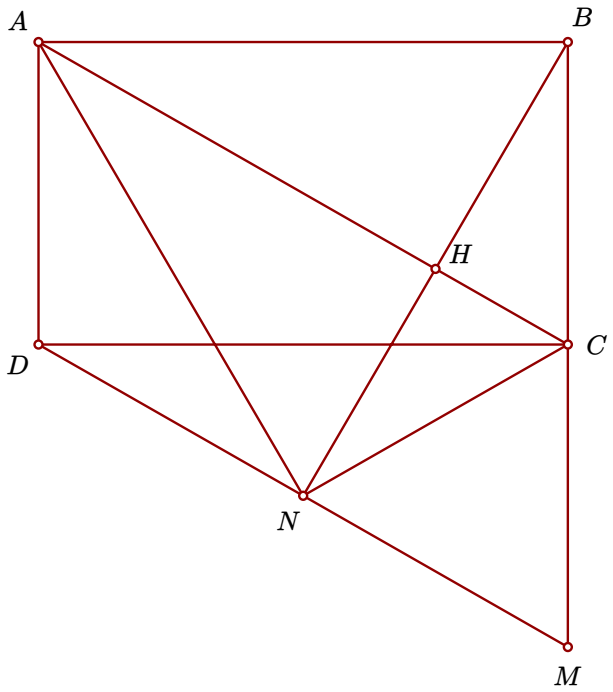
$$\frac{SA}{6SM}+\frac{SB}{6SN}+\frac{SD}{6SP}=1 \text{ hay } \frac{1}{6SM}+\frac{2}{6SN}+\frac{2}{6SP}=1$$

$$\Rightarrow 1=\left(\frac{1}{6SM}+\frac{2}{6SN}+\frac{2}{6SP}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{36}+\frac{4}{36}+\frac{4}{36}\right)\left(\frac{1}{SM^2}+\frac{1}{SN^2}+\frac{1}{SP^2}\right)$$

$\Rightarrow T\geqslant 4$.

Vậy T có giá trị nhỏ nhất là 4.

Câu 35.



Vì tam giác BNM vuông tại N và C là trung điểm của BM nên $NC = BC = CM \quad (1)$.
Vì $AD \parallel CM$ và $AD = CM$ nên tứ giác $ACMD$ là hình bình hành, suy ra $DM \parallel AC$.
Mà $BN \perp DM \Rightarrow AC \perp BN \quad (2)$.
Từ (1) và (2) suy ra AC là đường trung trực của đoạn thẳng BN.
Do đó $AB = AN \Rightarrow \Delta ABC = \Delta ANC$, suy ra tam giác ANC vuông tại N.
Vì $C \in d : 2x + y + 5 = 0 \Rightarrow C(x; -2x - 5)$.
Ta có:
$\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NC} = 0 \Leftrightarrow -9(x-5) + 12(-2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Suy ra $C(1; -7)$.
Ta có phương trình đường thẳng $AC : 3x + y + 4 = 0$.
Đường thẳng NB đi qua N và vuông góc với AC nên có phương trình $x - 3y - 17 = 0$.
Gọi $NB \cap AC = H \Rightarrow H\left(\frac{1}{2}; -\frac{11}{2}\right)$.
Mà H là trung điểm của $BN \Rightarrow B(0; -4)$.
Vậy $B(0; -4), C(1; -7)$.

Câu 36. Điều kiện: $m > 0$.
Bất phương trình $\log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m \Leftrightarrow \log_2(3^x + 1) < m \Leftrightarrow 3^x + 1 < 2^m \quad (1)$.
Với $x \in (-\infty; 0)$, ta có $1 < 3^x + 1 < 2$.
Để (1) đúng với mọi giá trị x thuộc khoảng $(-\infty; 0)$ thì $2^m \geqslant 2 \Leftrightarrow m \geqslant 1$.
Kết hợp với điều kiện và $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [-2025; 2025]$, ta suy ra $m \in \{1; 2; \ldots; 2025\}$.
Vậy có 2025 giá trị thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 37. Ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{2u_{n+1}}{n^2+4n+3} &= \frac{u_n + n^2 + n - 2}{n^2 + n} \\
\Leftrightarrow \frac{2u_{n+1}}{n+3} &= \frac{u_n + n^2 + n - 2}{n} \\
\Leftrightarrow 2nu_{n+1} &= (n+3)(u_n + n^2 + n - 2) \\
\Leftrightarrow 2nu_{n+1} &= (n+3)(u_n + 2n^2 + 4n - n^2 - 3n - 2) \\
\Leftrightarrow 2nu_{n+1} &= (n+3)(u_n - n^2 - 3n - 2) + 2n(n+3)(n+2) \\
\Leftrightarrow 2n\left(u_{n+1} - (n+3)(n+2)\right) &= (n+3)(u_n - n^2 - 3n - 2) \\
\Leftrightarrow 2n\left(u_{n+1} - (n+1)^2 - 3(n+1) - 2\right) &= (n+3)(u_n - n^2 - 3n - 2) \\
\Leftrightarrow u_{n+1} - (n+1)^2 - 3(n+1) - 2 &= \frac{n+3}{2n}(u_n - n^2 - 3n - 2) \quad (*).
\end{aligned}$$

Đặt $v_n = u_n - n^2 - 3n - 2$.
Khi đó $(*) \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{n+3}{2n} v_n$.
Ta có:

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 - 1 - 3 - 2 = 3; \\
v_2 &= \frac{4}{2 \cdot 1} v_1; \\
v_3 &= \frac{5}{2 \cdot 2} v_2; \\
&\vdots \\
v_{n+1} &= \frac{n+3}{2n} v_n.
\end{aligned}$$

Nhân theo vế, ta được:
$v_{n+1} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{2^n \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{2^{n+1}}$.
Khi đó, ta có:

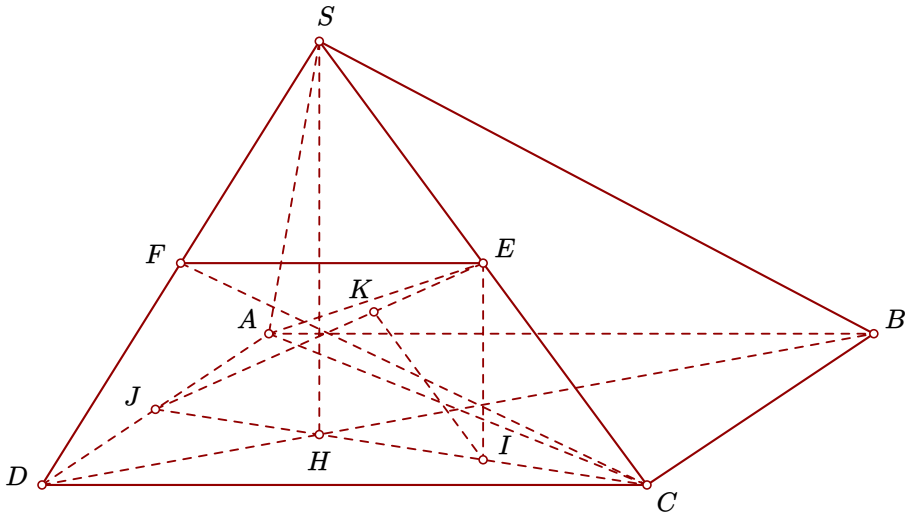
$v_n = \dfrac{(n+2)(n+1)n}{2^n}$

$\Rightarrow u_n = v_n + n^2 + 3n + 2 = \dfrac{(n+2)(n+1)n}{2^n} + n^2 + 3n + 2.$

Ta có:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{4n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n(n+1)(n+2)}{(4n^2+n)\cdot 2^n} + \dfrac{n^2+3n+2}{4n^2+n} \right) = \dfrac{1}{4}.$

Câu 38.



Theo bài ra, ta có tam giác ACD đều và $SA = SC = SD$ nên $S.ACD$ là hình chóp đều.
Gọi H là trọng tâm tam giác ACD, ta có $SH \perp (ACD)$.
Do $(AEF) \perp (SCD)$ nên tam giác SAM cân tại A.

Suy ra $AM = a\sqrt{3}$, $AB = 2a$, $SH = \dfrac{a\sqrt{15}}{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3} a^3.$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của HC, AB, suy ra $IE \perp (ACD)$. Kẻ $IK \perp EJ$.

Ta có: $\mathrm{d}(BC, AE) = \mathrm{d}(C, (ADE)) = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}(I, (ADE)) = \dfrac{3}{2} IK = \dfrac{a\sqrt{35}}{7}.$

Câu 39. Ta có

$y' = 2 + m\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+6}}$

$y'' = m\dfrac{2}{\sqrt{(x^2+4x+6)^3}}.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\dfrac{2}{m} = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+6}} = h(x) \end{cases}$ có nghiệm $x \leqslant -\dfrac{5}{2}$.

Do $h'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow h(x) \leqslant h\left(-\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{1}{3}.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -1$ nên yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\dfrac{2}{m} \in \left(-1; -\dfrac{1}{3}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -1 < -\dfrac{2}{m} \leqslant -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (2; 6].$$

Vậy $m \in \{3; 4; 5; 6\}$.

Sở Thái Bình

Câu 1. Chọn đáp án D

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là $[3{,}0;3{,}3)$.

Tứ phân vị thứ nhất $Q_1 = 3 + \dfrac{\frac{20}{4} - 3}{6}(3{,}3 - 3) = 3{,}1$.

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $[3{,}6;3{,}9)$.

Tứ phân vị thứ ba $Q_3 = 3{,}6 + \dfrac{\frac{20\cdot 3}{4} - (3+6+5)}{4}(3{,}9 - 3{,}6) = 3{,}675$.

Khoảng tứ phân vị $\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 3{,}675 - 3{,}1 = 0{,}575$.

Câu 2. Chọn đáp án C

Điểm	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Giá trị đại diện	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
12A	1	0	11	22	6
12B	0	6	8	14	12

Điểm trung bình lớp 12A

$\overline{x}_A = \dfrac{5{,}5\cdot 1 + 7{,}5\cdot 11 + 8{,}5\cdot 22 + 9{,}5\cdot 6}{1+11+22+6} = 8{,}3.$

Điểm trung bình lớp 12B

$\overline{x}_B = \dfrac{5{,}5\cdot 0 + 6{,}5\cdot 6 + 7{,}5\cdot 8 + 8{,}5\cdot 14 + 9{,}5\cdot 12}{6+8+14+12} = 8{,}3.$

Phương sai lớp 12A

$S_A^2 = \dfrac{1}{40}\left(1\cdot 5{,}5^2 + 11\cdot 7{,}5^2 + 22\cdot 8{,}5^2 + 6\cdot 9{,}5^2\right) - 8{,}3^2 = 0{,}61.$

Độ lệch chuẩn của lớp 12A $S_A = \sqrt{0{,}61}$.

Phương sai lớp 12B

$S_B^2 = \dfrac{1}{40}\left(0\cdot 5{,}5^2 + 6\cdot 6{,}5^2 + 8\cdot 7{,}5^2 + 14\cdot 8{,}5^2 + 12\cdot 9{,}5^2\right) - 8{,}3^2 = 1{,}06.$

Độ lệch chuẩn của lớp 12B $S_B = \sqrt{1{,}06}$.

Vì độ lệch chuẩn của lớp 12A nhỏ hơn lớp 12B nên lớp 12A học đồng đều hơn.

Câu 3. Chọn đáp án D

Từ bảng biến thiên, ta có $\dfrac{a}{b} = 2 \Leftrightarrow a = 2b$ và $\dfrac{-c}{b} = 3 \Leftrightarrow c = -3b$.

Vì $y' > 0$ nên ta có

$ac + 6b > 0$

$\Leftrightarrow 2b(-3b) + 6b > 0$

$\Leftrightarrow -6b^2 + 6b > 0$

$\Leftrightarrow 0 < b < 1$.

Ta có $P = ab + a + c = 2b^2 + 2b - 3b = 2b^2 - b$.

Khi đó, biểu thức P là tam thức bậc hai nên giá trị nhỏ nhất là $-\dfrac{1}{8}$.

Câu 4. Chọn đáp án C

Ta có $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;5)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (0;0;-6) \Rightarrow \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] \cdot \overrightarrow{OC} = -30 \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] \cdot \overrightarrow{OC}\right| = 30.$

Câu 5. Chọn đáp án A

Ta có $[f(3x+1)]^{2024} + [f(1-4x)]^{2025} = 2026x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Với $x=0$, ta có $[f(1)]^{2024}+[f(1)]^{2025}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(1)=-1. \end{array}\right.$

Đạo hàm hai vế ta có

$2024[f(3x+1)]^{2023}\cdot f'(3x+1)\cdot 3+2025[f(1-4x)]^{2024}\cdot f'(1-4x)\cdot(-4)=2026.$

Với $x=0$, ta có $2024[f(1)]^{2023}\cdot f'(1)\cdot 3+2025[f(1)]^{2024}\cdot f'(1)\cdot(-4)=2026.$

Ta thấy $f(1)=0$ không thỏa mãn.

Suy ra $f(1)=-1 \Rightarrow f'(1)=\dfrac{1013}{1014}.$

Câu 6. Chọn đáp án A

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y=ax-b$ đi lên suy ra $a>0$.

Ta có $y=ax-b-\dfrac{c}{x}=0 \Rightarrow ax^2-bx-c=0.$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{b}{a}>0 \Rightarrow b>0 \\ x_1x_2=\dfrac{-c}{a}<0 \Rightarrow c>0. \end{cases}$$

Câu 7. Chọn đáp án A

Ta có $g(x)=f(x)+2x+1 \Rightarrow g'(x)=f'(x)+2.$

$g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<-2 \Leftrightarrow -1<x<1.$

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(-1;1) \Rightarrow g(-1)>g(1).$

Câu 8. Chọn đáp án B

$g(x)=f(x+m)-\dfrac{1}{2}(x+m-1)^2+2024 \Rightarrow g'(x)=f'(x+m)-(x+m-1).$

Đặt $t=x+m \Rightarrow g'=f'(t)-t+1.$

Hàm số đồng biến khi $g'=f'(t)-t+1>0 \Leftrightarrow f'(t)>t-1.$

Vẽ đường thẳng $y=t-1.$

Từ đồ thị suy ra

$$f'(t)>t-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<t<1 \\ t>3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x+m<1 \\ x+m>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1-m<x<1-m \\ x>3-m. \end{array}\right.$$

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$ khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1-m\leqslant 5 \\ 6\leqslant 1-m \end{cases} \\ 3-m\leqslant 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6\leqslant m\leqslant -5 \\ m\geqslant -2. \end{array}\right.$$

Vậy $m\in\{-6;-5;-2;-1\} \Rightarrow -1-2-5-6=-14.$

Câu 9. Chọn đáp án B

$F(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x.$

$F'(x)=(2ax+b)\mathrm{e}^x+(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x$

$\qquad =\left(ax^2+(2a+b)x+b+c\right)\mathrm{e}^x.$

Mà $f(x)=(2024x^2+2025x)\mathrm{e}^x$, suy ra

$$f(x)=(2024x^2+2025x)\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \begin{cases} a=2024 \\ 2a+b=2025 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2024 \\ b=-2023 \\ c=2023. \end{cases}$$

Vậy $a+2b+3c=4047.$

Câu 10. Chọn đáp án A

$f(x)=(x+1)\ln(x+1)-\dfrac{1}{2}x^2-x \Rightarrow f'(x)=\ln(x+1)-x$

$$\Rightarrow g(x)=\ln(x+1) \Rightarrow g(\tan t)=\ln(\tan t+1)=\ln\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos t}$$

$$\Rightarrow g\left(\tan\frac{\pi}{80}\right)+g\left(\tan\frac{2\pi}{80}\right)+g\left(\tan\frac{3\pi}{80}\right)+\cdots+g\left(\tan\frac{19\pi}{80}\right)$$

$$=\ln\left((\sqrt{2})^{19}\cdot\frac{\cos\frac{19\pi}{80}}{\cos\frac{\pi}{80}}\cdot\frac{\cos\frac{18\pi}{80}}{\cos\frac{2\pi}{80}}\cdots\frac{\cos\frac{\pi}{80}}{\cos\frac{19\pi}{80}}\right)=19\ln\sqrt{2}$$

$\Rightarrow m=19, n=2 \Rightarrow m^2+n^2=365.$

Câu 11. Chọn đáp án A

$\vec{a}=(3;-2;1),\ \vec{b}=(2;1;-1) \Rightarrow \vec{a}^2=14,\ \vec{b}^2=6,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=3.$

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$$\Leftrightarrow -3m\vec{a}^2+(-m^2+9)\vec{a}\cdot\vec{b}+3m\vec{b}^2=0$$

$$\Leftrightarrow -42m-3m^2+27+18m=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-9. \end{array}\right.$$

Câu 12. Chọn đáp án B

Từ bảng biến thiên ta có

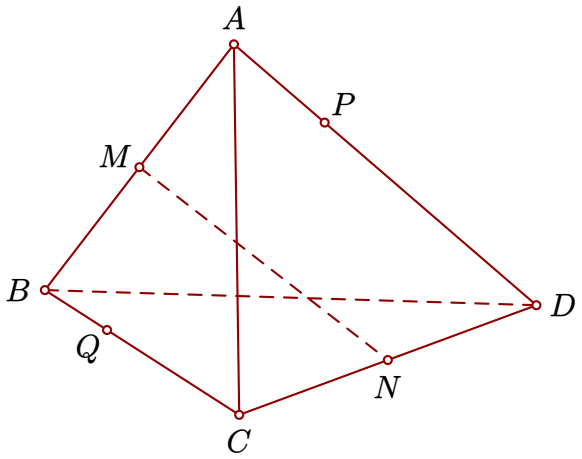
- $f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \\ x=c \\ x=d \end{array}\right.$, $f(x)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=0 \\ x=n \end{array}\right.$ trong đó $m<a<b<0<c<n<d.$

- $\left\{\begin{array}{l} f(x)+1=Ax^2(x-m)(x-n) \\ f(x)-1=A(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \end{array}\right.$

$$\Rightarrow y=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=\frac{A(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}{Ax^2(x-m)(x-n)}.$$

Suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$ có 3 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Câu 13. Chọn đáp án D



Ta có
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{DN}$
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CN}.$
Do đó
$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + 3\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BQ} + \left(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}\right) \\ &= \overrightarrow{0} + 3\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{MN} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BQ} \\ &= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}\right) + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MQ}\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right) + \frac{3}{2}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MQ} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{0} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MQ} \\ \Rightarrow \overrightarrow{MN} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MQ}. \end{aligned}$$

Câu 14. Chọn đáp án A
Ta có phương trình $f(x) - 2m + 1 = 0$ có nghiệm khi $m \in [-3;5]$ nên $f(x) \in [-7;9]$.
Đặt $f(x) = t \Rightarrow t \in [-7;9]$.
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = t^2 + 2t - 3$ trên đoạn $[-7;9]$.
Ta có $y' = 2t + 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow t = -1$ (nhận).
$y(-7) = 32$, $y(-1) = -4$, $y(9) = 96$.
Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là 96.

Câu 15. Chọn đáp án B
Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = -2$ và hai đường tiệm cận ngang là $y = 4$, $y = 5$.
Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 3.

Câu 16. Chọn đáp án C
Ta có
$$\begin{aligned} &\log_3 \frac{x+y}{4xy} = 4xy - 3(x+y) - 1 \\ \Leftrightarrow &\log_3(x+y) - \log_3(4xy) = 4xy - 3(x+y) - 1 \\ \Leftrightarrow &\log_3(x+y) + \log_3 3 + 3(x+y) = \log_3(4xy) + 4xy \\ \Leftrightarrow &\log_3(3(x+y)) + 3(x+y) = \log_3(4xy) + 4xy \quad (*). \end{aligned}$$
Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$.
Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến với $t > 0$.
Suy ra $(*) \Leftrightarrow f(3(x+y)) = f(4xy) \Leftrightarrow 3(x+y) = 4xy \Leftrightarrow x + y = \dfrac{4}{3}xy \quad (1)$.
Theo bài
$$\begin{aligned} P &= (x+y)^2 - 2xy + 3\left(\frac{x+y}{xy}\right) = \frac{16}{9}(xy)^2 - 2xy + 3\cdot\frac{4}{3} \\ &= \left(\frac{4}{3}xy\right)^2 - 2\cdot\frac{4}{3}xy\cdot\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{55}{16} \\ &= \left(\frac{4}{3}xy - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{55}{16} \geqslant \frac{55}{16}. \end{aligned}$$
Vậy $\min P = \dfrac{55}{16} \in (0;5)$.

Câu 17. Chọn đáp án C

Ta có $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 8^2} = 3\sqrt{10}$, $BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1^2 + (-7)^2 + 4^2} = \sqrt{66}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 5 \cdot 1 + (-1) \cdot (-7) + 8 \cdot 4 = 44$.

Suy ra $\overrightarrow{AC}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 = 90 + 2 \cdot 44 + 66 = 244$.

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có

$$BM^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{90 + 66}{2} - \frac{244}{4} = 17 \Rightarrow BM = \sqrt{17}.$$

Câu 18. Chọn đáp án D

Gọi $A(a; b; c)$ là vị trí máy bay sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định để bắt đầu bay về hướng nam.

Sau nửa giờ máy bay bay được 444 km về hướng nam đến vị trí $B(a; b + 444; c)$.

Khi đó tọa độ véc-tơ biểu diễn sự dịch chuyển của máy bay trong nửa giờ đó là $\overrightarrow{AB} = (0; 444; 0)$.

Câu 19. Chọn đáp án C

Theo giả thiết ta có hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $(-1; 9)$ và $(3; -23)$.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Khi đó

$$\begin{cases} f(-1) = 9 \\ f(3) = -23 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 9 \\ 27a + 9b + 3c + d = -23 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -9 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy $a^2 + b^2 + c + d = 5$.

Câu 20. Chọn đáp án B

Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị $x = 2$ và $x = -3$.

Khi đó $g'(x) = 2xf'\left(x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 \\ x^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta có

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 21. Chọn đáp án: a b c d

a) Trọng tâm G của tam giác OAD có tọa độ là $G\left(1; \frac{4}{3}; 0\right)$.

Trong tam giác OAD có $OA = 3$, $OD = 4$, $AD = 5$.

Gọi $I(x; y; z)$, khi đó

$OA\cdot\overrightarrow{ID}+OD\cdot\overrightarrow{IA}+DA\cdot\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{ID}+4\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{0}.$

Ta có

$\overrightarrow{ID}=(-x;4-y;-z)$

$\overrightarrow{IA}=(3-x;-y;-z)$

$\overrightarrow{IO}=(-x;-y;-z)$

$$\Rightarrow\begin{cases}-3x+4(3-x)+5(-x)=0\\3(4-y)+4(-y)+5(-y)=0\\3(-z)+4(-z)+5(-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-12x+12=0\\-12y+12=0\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=0\end{cases}\Rightarrow I(1;1;0).$$

Vậy $\overrightarrow{IG}=\left(0;\frac{1}{3};0\right)$.

b) Ta có $S_{\Delta ABM}=2S_{\Delta ACM}\Leftrightarrow S_{\Delta ABM}=\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$

$$\begin{cases}a+1=\frac{2}{3}\cdot 4\\b-1=\frac{2}{3}\\c-3=\frac{2}{3}\cdot(-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{3}\\b=\frac{5}{3}\\c=1\end{cases}\Rightarrow a+b+1=\frac{13}{3}.$$

c) Ta có $\overrightarrow{AB}\left(3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)=-18.$

$3\overrightarrow{AC}=(0;6;0)$, $\overrightarrow{BC}=(4;1;-3)$, $\overrightarrow{AB}=(-4;1;3)\Rightarrow 3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=(4;7;-3).$

Do đó $\left(3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=4\cdot(-4)+7-9=-18.$

d) Xét biểu thức $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{ND}+NB^2+NC^2.$

Gọi I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}+2\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM}+2\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{0}.$

Trong đó, M là trung điểm AD, G là trọng tâm tam giác BCM nên $I\left(\frac{7}{6};\frac{5}{3};1\right)$.

Ta có

$$\begin{aligned}P&=\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{ND}+NB^2+NC^2=\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{ID}\right)+\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IC}\right)^2\\&=3NI^2+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}+2\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}\right)+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{ID}+IB^2+IC^2\\&=3NI^2+\left(2\overrightarrow{IM}+2\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}\right)+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{ID}+IB^2+IC^2\\&=3NI^2+6\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{ID}+IB^2+IC^2=4IN^2+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{ID}+IB^2+IC^2.\end{aligned}$$

Khi đó $P_{\min}$ khi N là hình chiếu của I trên (Oxy).

Vậy $N\left(\frac{7}{6};\frac{5}{3};0\right)\Rightarrow m+n+p=\frac{17}{6}.$

Câu 22. Chọn đáp án: a b c d

a)

- Tìm tiệm cận ngang: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\frac{2025}{3-2}=2025.$

Vậy đồ thị hàm số $h(x)$ có 2 tiệm cận ngang có phương trình là $y=0$, $y=2025$.

- Tìm tiệm cận đứng: Ta có $f(x)-2=0\Leftrightarrow f(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(-\infty;0)\\x=x_2\in(0;1)\\x=x_3\in(1;2)\end{array}\right.$ (dựa vào bảng biến thiên).

Lại có $\lim\limits_{x\to3^-}h(x)=+\infty.$

Do đó, đồ thị hàm số $h(x)$ có 4 tiệm cận đứng là $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, $x=3$.

Đồ thị hàm số $h(x)=\dfrac{2025}{f(x)-2}$ có tất cả 6 đường tiệm cận (đứng và ngang).

b) Hàm số không xác định tại $x=3$.

c) Ta có $g(x)=|f(|x-2024|)-4|$.

$$g'(x)=\frac{(f(|x-2024|)-4)\cdot(f(|x-2024|)-4)'}{|f(|x-2024|)-4|}$$
$$=\frac{(f(|x-2024|)-4)\cdot f'(|x-2024|)\cdot(x-2024)}{|f(|x-2024|)-4|\cdot|x-2024|}.$$

Khi đó

$$g'(x)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(|x-2024|)-4=0\\ f'(|x-2024|)=0\\ x-2024=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x-2024|=\alpha_1\in(-\infty;0)\quad\text{(vô nghiệm)}\\ |x-2024|=\alpha_2\in(0;1)\\ |x-2024|=\alpha_3\in(1;2)\\ |x-2024|=\alpha_4\in(2;3)\\ |x-2024|=\alpha_5>3\\ |x-2024|=0\\ |x-2024|=1\\ x=2024\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2024\pm\alpha_2\\ x=2024\pm\alpha_3\\ x=2024\pm\alpha_4\\ x=2024\pm\alpha_5\\ x=2024\quad\text{(nghiệm kép)}\\ x=2025\\ x=2023.\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $g(x)$ có 10 điểm cực trị.

d) Ta có $|f(x)-3|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=5\\ f(x)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\beta_1\in(-\infty;0)\\ x=\beta_2\in(0;1)\\ x=\beta_3\in(3;+\infty)\\ x=\gamma_1\in(-\infty;0)\\ x=\gamma_2\in(0;1)\\ x=\gamma_3\in(1;2).\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 23. Chọn đáp án: (a) (b) (c) (d)

a) Tuổi trung bình kết hôn của phụ nữ là $\overline{x}=\dfrac{1}{100}\left[47\cdot20{,}5+40\cdot23{,}5+11\cdot26{,}5+2\cdot29{,}5\right]=22{,}54$.

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với nam giới là

Tứ phân vị thứ nhất là $Q_1=22+\left[\dfrac{\frac{1\cdot100}{4}-10}{27}\right]\cdot3\approx23{,}67$.

Tứ phân vị thứ ba là $Q_3 = 28 + \left[\dfrac{\dfrac{3\cdot 100}{4} - (10+27+31)}{25}\right]\cdot 3 = 28{,}84.$

$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 \approx 5{,}17.$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với nữ giới là

Tứ phân vị thứ nhất là $Q_1 = 19 + \left[\dfrac{\dfrac{1\cdot 100}{4} - 0}{47}\right]\cdot 3 \approx 20{,}6.$

Tứ phân vị thứ ba là $Q_3 = 22 + \left[\dfrac{\dfrac{3\cdot 100}{4} - 47}{40}\right]\cdot 3 = 24{,}1.$

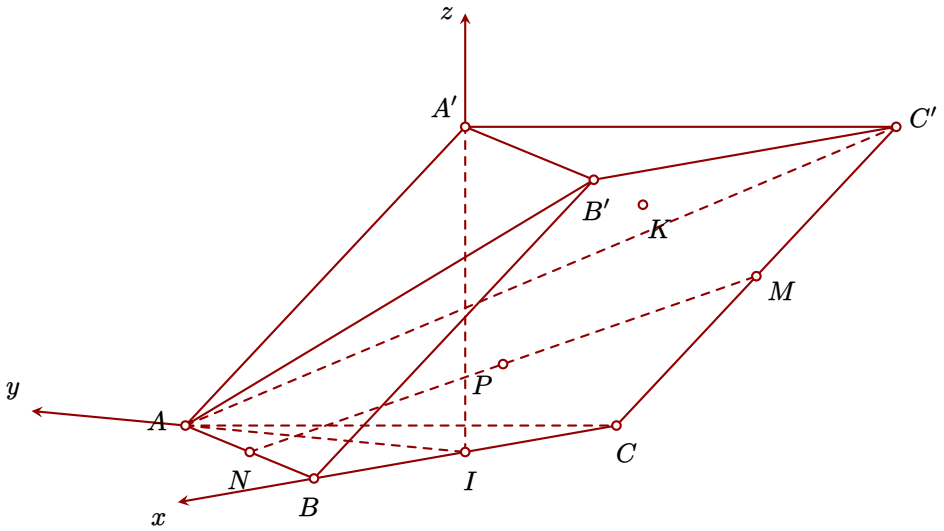
$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 \approx 3{,}5.$

Vì khoảng tứ phân vị của phụ nữ nhỏ hơn khoảng tứ phân vị của nam giới nên phụ nữ có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn so với nam giới.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với nam giới là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 \approx 3{,}5$.

d) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với nam giới là $34 - 19 = 15$ tuổi.

Câu 24. Chọn đáp án: a b c d



Gọi I là trung điểm của BC.

Vì $(A'BC) \perp (ABC)$ nên $A'I \perp (ABC)$.

Lại có $AI \perp BC$.

Vậy ta có 3 cạnh AI, $A'I$, IB đôi một vuông góc nhau tại I.

Có $AI = A'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $IB = \dfrac{a}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, với $B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $A\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $A'\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Từ hệ thức $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'A}$, $\overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{A'A}$, ta suy được tọa độ các điểm $B'\left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $C'\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

a) Ta có $\overrightarrow{A'B} = \left(\dfrac{a}{2};0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{CB'} = \left(a;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Khi đó $\left(\overrightarrow{A'B}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CB'}\right)=\dfrac{a}{2}\cdot a-\dfrac{3a^2}{4}=-\dfrac{a^2}{4}$.

b) Ta có $M\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{AA'}=\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BM}=\left(-a;-\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Khi đó

$$\cos\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\left(\overrightarrow{AA'}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BM}\right)}{\left|\overrightarrow{AA'}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BM}\right|}=\frac{\dfrac{3a^2}{4}}{\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{4}}\cdot\sqrt{a^2+\dfrac{3a^2}{16}+\dfrac{3a^2}{16}}}=\frac{\sqrt{33}}{11}.$$

c) Ta có $\overrightarrow{BC}=(-a;0;0)$, $\overrightarrow{CC'}=\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Suy ra $\left(\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CC'}\right)=0$.

Tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành có 1 góc vuông nên là hình chữ nhật.

d) Gọi N là trung điểm của AB và P là trung điểm của MN.

Ta có $\left|\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KM}\right|=\left|2\overrightarrow{KN}+2\overrightarrow{KM}\right|=2\left|2\overrightarrow{KP}\right|=4KP$.

$\left|\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KM}\right|$ nhỏ nhất khi KP nhỏ nhất.

Suy ra K là hình chiếu của P lên mặt phẳng $(AB'C')$.

Vậy ta có $\left|\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KM}\right|_{\min}=4\mathrm{d}\left(P,(AB'C')\right)$.

$\overrightarrow{AB'}=\left(\dfrac{a}{2};-a\sqrt{3};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC'}=\left(-\dfrac{a}{2};-a\sqrt{3};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow\overrightarrow{n}=(0;1;2)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng $(AB'C')\colon y+2z-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=0$.

Tọa độ điểm P là $P\left(-\dfrac{a}{8};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{8}\right)$.

Vậy $\left|\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KM}\right|_{\min}=4\mathrm{d}\left(P,(AB'C')\right)=4\cdot\dfrac{a\sqrt{15}}{20}=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 25. Chọn đáp án: a b c d

a) Hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}=x+1+\dfrac{1}{x+2}$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có $y'=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗	-3	↘	‖	↘	1	↗	
	$-\infty$				$+\infty$				$+\infty$

Ta có $x^2+3x+3=m|x+2|\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{|x+2|}=m\ (x\neq-2)$.

Ta có $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}, & x>-2\\ -\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}, & x<-2.\end{cases}$

Khi đó, đồ thị hàm số $f(x)$ gồm 2 phần

- Phần 1: Là phần của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ với $x\in(-2;+\infty)$.

- Phần 2: Là phần đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ qua trục Ox với $x\in(-\infty;-2)$.

Ta có bảng biến thiên cho hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>3$.

b) Dễ thấy đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $d_1\colon x=-2$ và tiệm cận xiên là $d_2\colon y=x+1$.

Suy ra tâm đối xứng của đồ thị (C) là $I(-2;-1)$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0^2+3x_0+3}{x_0+2}\right)\in(C)$ $(x_0\neq-2)$.

Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm M có phương trình dạng

$\Delta\colon y=\dfrac{x_0^2+4x_0+3}{(x_0+2)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0^2+3x_0+3}{x_0+2}$.

Gọi $A=\Delta\cap d_1\Rightarrow A\left(-2;\dfrac{-x_0}{x_0+2}\right)$ và $B=\Delta\cap d_2\Rightarrow B(2x_0+2;2x_0+3)$.

Khi đó $IA=\dfrac{2}{|x_0+2|}$, $IB=2\sqrt{2}|x_0+2|$, $AB=\sqrt{4(x_0+2)^2+\dfrac{(2x_0^2+8x_0+6)^2}{(x_0+2)^2}}$.

Chu vi của tam giác IAB là

$T=IA+IB+AB=\dfrac{2}{|x_0+2|}+2\sqrt{2}|x_0+2|+\sqrt{4(x_0+2)^2+\left(2(x_0+2)-\dfrac{2}{x_0+2}\right)^2}$.

Xét $f(x_0)=4(x_0+2)^2+\left(2(x_0+2)-\dfrac{2}{x_0+2}\right)^2=8(x_0+2)^2+\dfrac{4}{(x_0+2)^2}-8$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$\dfrac{2}{|x_0+2|}+2\sqrt{2}|x_0+2|\geqslant4\sqrt[4]{2}$.

Dấu " =" xảy ra khi $(x_0+2)^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$8(x_0+2)^2+\dfrac{4}{(x_0+2)^2}\geqslant8\sqrt{2}$.

Dấu " =" xảy ra khi $(x_0+2)^4=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow(x_0+2)^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $T\geqslant4\sqrt[4]{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-8}=4\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2\sqrt{2}-2}$.

c) Dựa vào bảng biến thiên ở câu a) ta suy ra tổng của giá trị cực đại và giá trị cực tiểu bằng -2.

d) Theo câu b) ta có tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M có hệ số góc $k=\dfrac{x_0^2+4x_0+3}{(x_0+2)^2}$.

Đường thẳng $d\colon x-3y-6=0\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x-2$ có hệ số góc $k_d=\dfrac{1}{3}$.

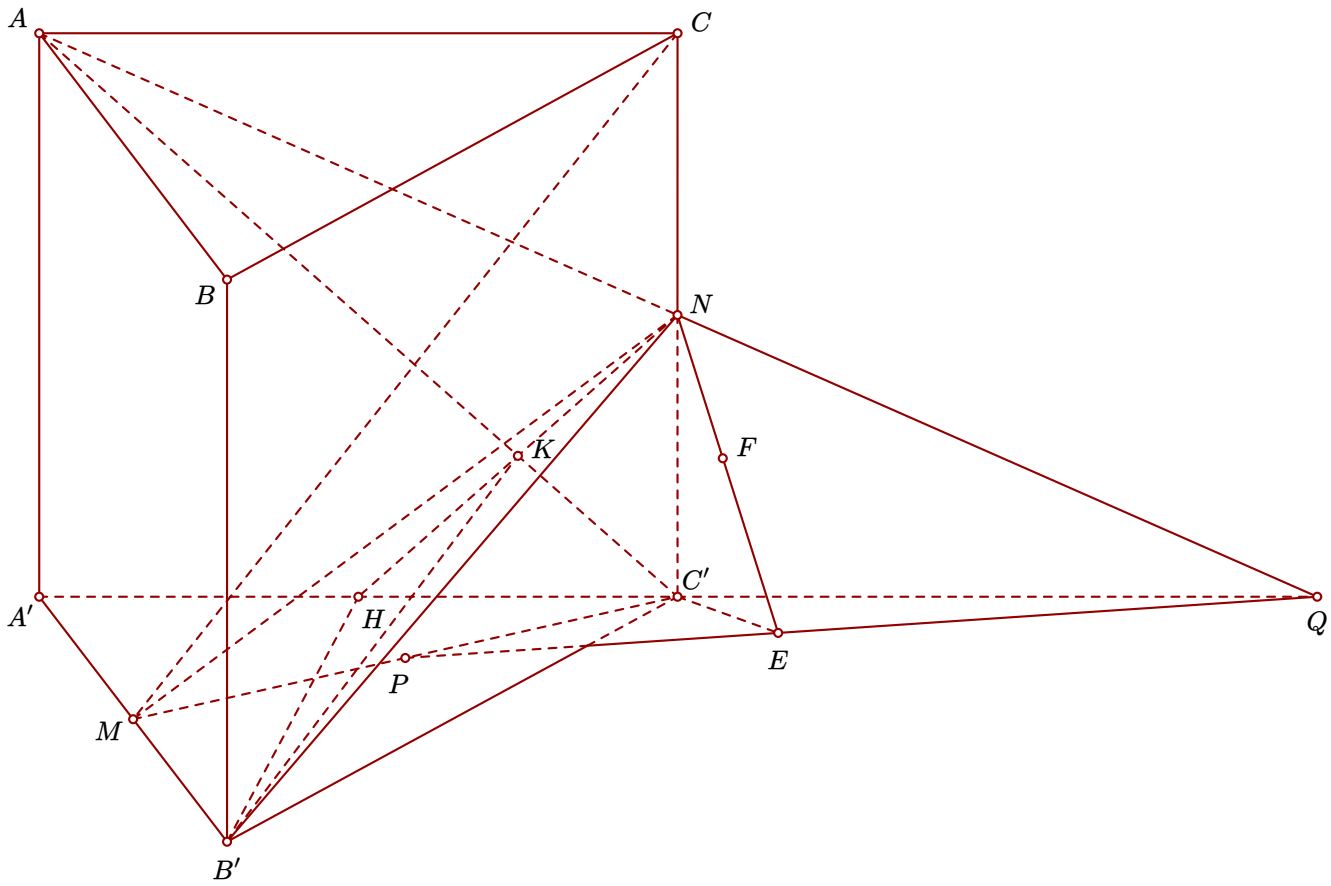
Để tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d thì

$$k \cdot k_d = -1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2+4x_0+3}{(x_0+2)^2} = -3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2+4x_0+3 = -3x_0^2-12x_0-12$$
$$\Leftrightarrow 4x_0^2+16x_0+15 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -\dfrac{3}{2} \\ x_0 = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \quad (*).$$

Với $x_0 = -\dfrac{3}{2}$ ta có tiếp tuyến $\Delta\colon y = -3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow y = -3x-3$ không đi qua điểm $B(2;-5)$.

Với $x_0 = -\dfrac{5}{2}$ ta có tiếp tuyến $\Delta\colon y = -3\left(x+\dfrac{5}{2}\right)-\dfrac{7}{2} \Leftrightarrow y = -3x-11$ không đi qua điểm $B(2;-5)$.

Câu 26. Chọn đáp án: a b c d



Đặt $x = AB \Rightarrow \begin{cases} NC' = \dfrac{x}{2} \\ C'M = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3x^2}{4} = a^2 \Rightarrow x = a.$

a) Gọi $Q = AN \cap A'C' \Rightarrow QC' = a.$

Gọi P là trung điểm của $C'M \Rightarrow NP \parallel CM \Rightarrow CM \parallel (NPQ)$

$\Rightarrow \mathrm{d}(AN, CM) = \mathrm{d}(CM, (NPQ)) = \mathrm{d}(C, (NPQ)) = \mathrm{d}(C', (NPQ)).$

$C'P = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, $\widehat{PC'Q} = 150^\circ$

$$\Rightarrow \begin{cases} PQ = \sqrt{C'P^2 + C'Q^2 - 2C'P \cdot C'Q \cdot \cos 150^\circ} = \dfrac{a\sqrt{31}}{4} \\ S_{\triangle C'PQ} = \dfrac{1}{2} C'Q \cdot C'P \cdot \sin 150^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}. \end{cases}$$

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của C' lên $PQ, NE \Rightarrow \mathrm{d}(C', (NPQ)) = C'F$.

Ta có $C'E = \dfrac{2S_{\triangle C'PQ}}{PQ} = \dfrac{a\sqrt{93}}{62}$

$$\Rightarrow C'F = \frac{C'N \cdot C'E}{\sqrt{C'N^2 + C'E^2}} = \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{93}}{62}\right) : \left(a\sqrt{\frac{17}{62}}\right) = \frac{a\sqrt{102}}{68}.$$

b) Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

c) Ta có

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{C'N} - \overrightarrow{C'M} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C'C} - \overrightarrow{C'A'} - \overrightarrow{C'B'}\right) \\ \overrightarrow{BC'} &= -\overrightarrow{C'C} - \overrightarrow{C'B'} \end{aligned}\right\}$$

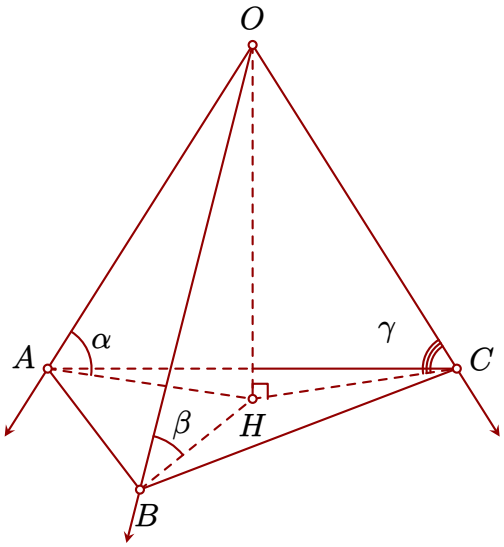
$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{MN}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC'}\right) = -\frac{1}{2}\left[C'C^2 - \left(\overrightarrow{C'A'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{C'B'}\right) - C'B'^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[a^2 - \frac{a^2}{2} - a^2\right] = -\frac{a^2}{2}.$$

d) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B', H lên $A'C', AC' \Rightarrow [A', AC', B'] = \widehat{B'KH}$.

$$\sin[A', AC', B'] = \frac{B'H}{B'K} = \frac{B'H}{\sqrt{B'H^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{2a^2}{16}} = \frac{\sqrt{42}}{7}.$$

Câu 27. Đáp án: 5.



- Gọi H là chân đường cao hạ từ O đến mặt phẳng (ABC), suy ra $\mathrm{d}(O, (ABC)) = OH$.
- Gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi OA, OB, OC với mặt phẳng đáy (ABC), khi đó $OA = \dfrac{OH}{\sin\alpha}, OB = \dfrac{OH}{\sin\beta}, OC = \dfrac{OH}{\sin\gamma}$.
- Ta có $\dfrac{5}{OA} + \dfrac{2}{OB} + \dfrac{3}{OC} = 1$ trở thành $\dfrac{5\sin\alpha}{OH} + \dfrac{2\sin\beta}{OH} + \dfrac{3\sin\gamma}{OH} = 1$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow OH &= 5\sin\alpha + 2\sin\beta + 3\sin\gamma\\ &= 2(\sin\alpha+\sin\beta)+3(\sin\alpha+\sin\gamma)\\ &\leqslant \sqrt{(1^2+1^2)(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)}+\sqrt{(1^2+1^2)(\sin^2\alpha+\sin^2\gamma)}\\ &= \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}+\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\gamma}\right)\\ &\leqslant M.\end{aligned}$$

Giá trị của M chưa tìm được ngay, nhưng nếu có M thì dấu " =" trong mọi đánh giá bất đẳng thức đều xảy ra.

Khi đó $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma\Rightarrow OA=OB=OC$.

Và từ $\dfrac{5}{OA}+\dfrac{2}{OB}+\dfrac{3}{OC}=1\Rightarrow OA=OB=OC=10$.

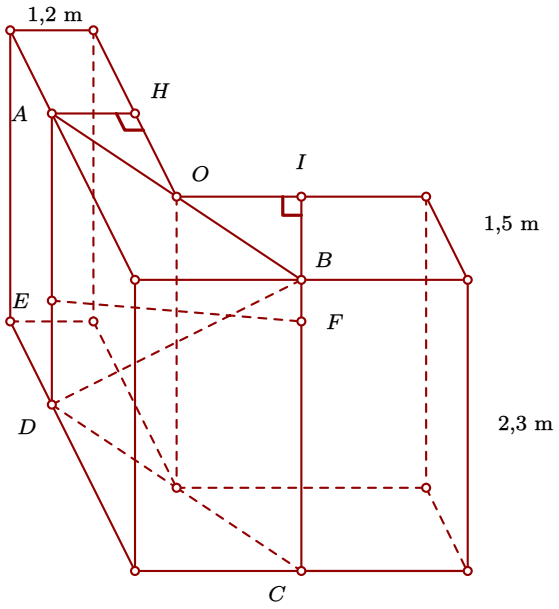
- Ta tính được $AB=10$, $BC=10\sqrt{2}$, $CA=10\sqrt{3}$.

Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại B.

Do đó H là trung điểm của AC.

$$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{OA^2-\frac{AC^2}{4}}=\sqrt{10^2-\frac{(10\sqrt{3})^2}{4}}=5.$$

Câu 28. Đáp án: 4,45.



Gọi chiều dài của ống thép là EF. Khi đó $EF_{\max}=BD$.

Ta có $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{AB^2+2{,}3^2}$.

Gọi $\widehat{AOH}=\alpha$, suy ra $\widehat{IOB}=90^\circ-\alpha$.

Ta có $\sin\alpha=\dfrac{AH}{AO}$ suy ra $OA=\dfrac{1{,}2}{\sin\alpha}$.

Lại có $\sin\widehat{IOB}=\dfrac{1{,}5}{OB}\Rightarrow\sin(90^\circ-\alpha)=\dfrac{1{,}5}{OB}$ nên $OB=\dfrac{1{,}5}{\sin(90^\circ-\alpha)}$.

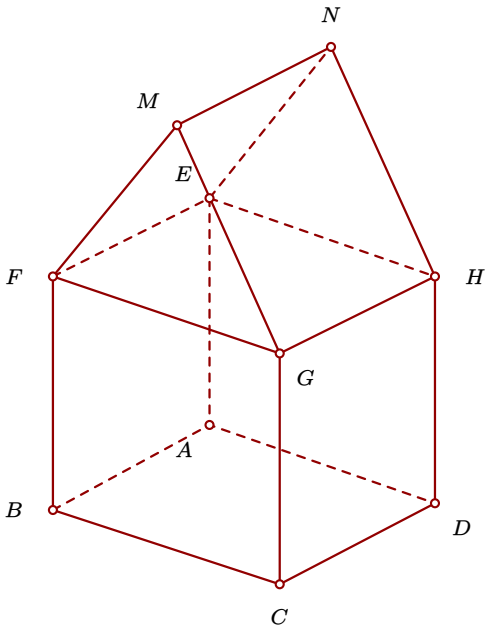
Khi đó $AB=\dfrac{1{,}2}{\sin\alpha}+\dfrac{1{,}5}{\sin(90^\circ-\alpha)}$.

Suy ra $BD=\sqrt{\left(\dfrac{1{,}2}{\sin\alpha}+\dfrac{1{,}5}{\sin(90^\circ-\alpha)}\right)^2+2{,}3^2}$.

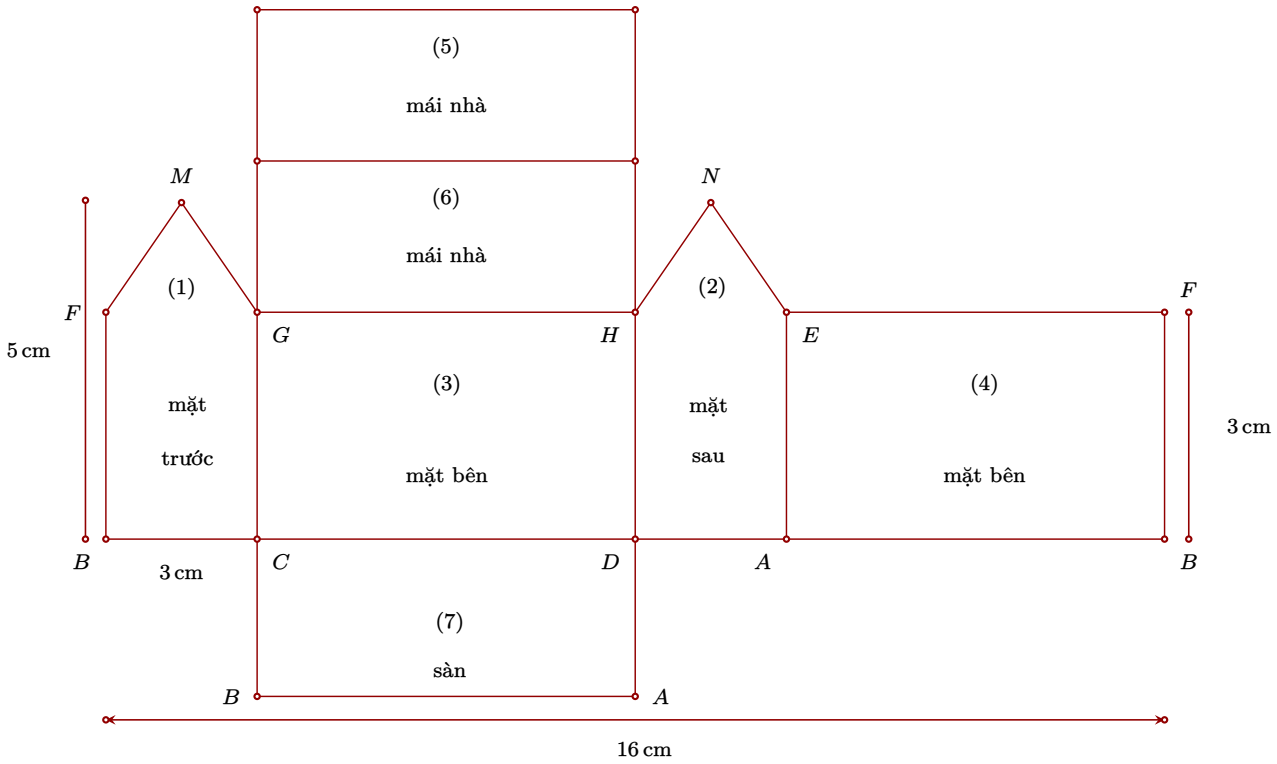
Bấm máy tính ta được $BD_{\min}=4{,}45$ khi $\alpha=47{,}12^\circ$.

Vậy độ dài của ống thép lớn nhất bằng 4,45.

Câu 29. Đáp án: 60.



Ta có thể tích mô hình bằng thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ cộng thể tích khối lăng trụ đứng tam giác $MFG.NEH$.



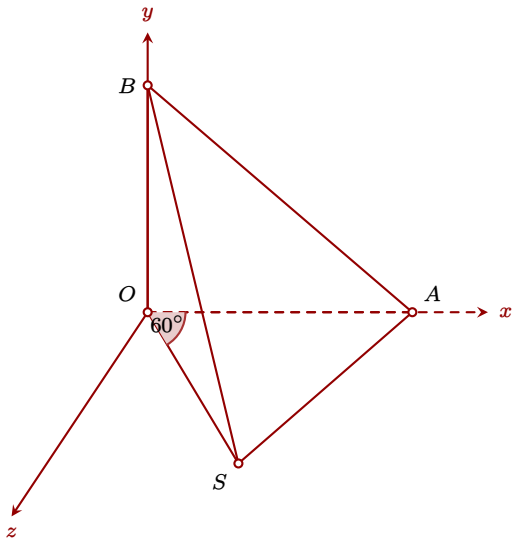
Ta có $CD = \dfrac{16 - 2 \cdot 3}{2} = 5$ cm.

Suy ra $V_{ABCD.EFGH} = BF \cdot BC \cdot CD = 3 \cdot 5 \cdot 3 = 45$ cm^3.

Ta có $V_{MFG.NEH} = CD \cdot S_{MFG} = CD \cdot \dfrac{1}{2} \cdot FG \cdot (5 - 3) = 5 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 15$ cm^3.

Vậy thể tích của mô hình là $45 + 15 = 60$ cm^3.

Câu 30. Đáp án: 5,93.



Gọi $A(x;0;0)$, $B(0;y;0)$, $x>0$, $y>0$.
Vì $OA\cdot OB=4$ nên $xy=4$.
Vì $A\in Ox$, $B\in Oy$, $S\in(Oxz)\Rightarrow OB\perp(SOA)$.
Do đó $[S;OB;A]=\widehat{SOA}\Rightarrow\widehat{SOA}=60^\circ$.
Vì $S(a;0;c)\Rightarrow\tan 60^\circ=\dfrac{c}{a}\Rightarrow c=a\sqrt{3}$.
Ta có $V_{SOAB}=\dfrac{1}{3}OB\cdot S_{\triangle SOA}=\dfrac{1}{3}OB\cdot\dfrac{1}{2}OA\cdot OS\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}OS=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2+c^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.
Suy ra V_{SOAB} lớn nhất khi và chỉ khi a lớn nhất.
Lại có $[S;AB;O]=60^\circ\Rightarrow\cos 60^\circ=\cos\left(\overrightarrow{n}_{(SAB)},\overrightarrow{n}_{(OAB)}\right)$.
Mà $\overrightarrow{n}_{(OAB)}=(0;0;1)$; $\overrightarrow{n}_{(SAB)}=\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]=(yc;xc;(x-a)y)$.
Suy ra $\dfrac{1}{2}=\dfrac{|(x-a)y|}{\sqrt{(x^2+y^2)c^2+(x-a)^2y^2}}\Leftrightarrow(x^2+y^2)c^2=3(x-a)^2y^2$.
$\Rightarrow(x^2+y^2)\cdot 3a^2=3(x-a)^2y^2$
$\Leftrightarrow(x^2+y^2)a^2=(xy-ay)^2$
$\Leftrightarrow(x^2+y^2)a^2=(4-ay)^2$
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+y^2}\cdot a=4-ay\\ \sqrt{x^2+y^2}\cdot a=ay-4\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+y^2}+y}\\ a=\dfrac{4}{y-\sqrt{x^2+y^2}}\quad(\text{loại vì } a>0)\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow a=\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}+y}=\frac{4}{\sqrt{\dfrac{16}{y^2}+y^2}+y}.$$
Xét hàm số $f(y)=\sqrt{\dfrac{16}{y^2}+y^2}+y$, $y>0$.
Ta có a lớn nhất khi $f(y)$ nhỏ nhất.
Ta có
$$f'(y)=\frac{\dfrac{-16}{y^3}+y}{\sqrt{\dfrac{16}{y^2}+y^2}}+1=0\Leftrightarrow\frac{16}{y^3}-y=\sqrt{\frac{16}{y^2}+y^2}\Leftrightarrow\frac{16^2}{y^6}-\frac{48}{y^2}=0\quad(0<y<2)\Leftrightarrow y=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}.$$

Suy ra $\min f(y) = f\left(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\right)$.
Khi đó $P = a^4 + c^4 = 10a^4 \approx 5{,}93$.

Câu 31. Đáp án: 679.
Đặt $v = 2z + 1 > 0$.
Từ giả thiết ta có $(x - v)^2 + (2y - v)^2 = 3(v^2 + 8)$
$\Rightarrow x^2 + 4y^2 - 2v(x + 2y) = v^2 + 24$
$\Rightarrow x^2 + 4y^2 = v^2 + 2v(x + 2y) + 24$, nên
$P = x^2 + 4y^2 - (2z+1)^3 - (2z+1)\dfrac{x^3 + 8y^3}{xy} \leqslant x^2 + 4y^2 - (2z+1)^3 - (2z+1)\cdot 2(x + 2y)$
(vì $x^3 + 8y^3 \geqslant x \cdot 2y \cdot (x + 2y)$).
Khi đó $P \leqslant v^2 + 2v(x + 2y) + 24 - v^3 - 2v(x + 2y) = -v^3 + v^2 + 24 = f(v)$, $v > 0$.
$f'(v) = 2v - 3v^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 0 \\ v = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$
Ta có bảng biến thiên

v	0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(v)$		$-$	0	$+$	
$f(v)$	0	$\searrow$	$\frac{652}{27}$	$\nearrow$	$-\infty$

, nên $\max P = \dfrac{652}{27}$ tại

$$\left\{\begin{array}{l} v = \dfrac{2}{3} \\ x = 2y \\ (x - 2z - 1)^2 + (2y - 2z - 1)^2 = 12z^2 + 12z + 27 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ (x-1)^2 = 27 \\ x = 2y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ x = 1 + 3\sqrt{3} \\ y = \dfrac{1 + 3\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Từ đó $m + n = 679$.
Sửa đề: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $\rightarrow$ Cho ba số thực dương $x, y, 2z + 1$ thỏa mãn.

Câu 32. Đáp án: 6063.
Ta có $f'(x) = \left(\dfrac{2x^2 + x - 2}{2x - 1}\right)' = \dfrac{4x^2 - 4x + 3}{(2x-1)^2}$ và $g'(x) = \dfrac{2021}{(f(x) - 2)^2} \cdot f'(x)$.
Tại $x = 1$ thì $f(1) = 1$, $f'(1) = 3 \Rightarrow g'(1) = 6063$.

Sở Thanh Hóa

Câu 1. Chọn đáp án C

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-3x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{4x^2-3x+1}+(ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{u(x)}{v(x)}.$$

Để giới hạn bằng 0 thì bậc của $u(x)$ nhỏ hơn bậc của $v(x)$.

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2=4\\-3=2ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2.\\b=-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

Vậy $a+8b=2+8\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=2+(-6)=-4.$

Câu 2. Chọn đáp án D

Ta có $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Mà:

$$-1\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2>0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Xét hàm số $y=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$

$\Leftrightarrow(1-y)\sin x+(2-y)\cos x+1-2y=0.$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$(1-y)^2+(2-y)^2\geqslant(1-2y)^2\Leftrightarrow-2\leqslant y\leqslant 1.$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số là $m=-2$, giá trị lớn nhất của hàm số là $M=1$.

Vậy $2M+m=2\cdot 1+(-2)=0.$

Câu 3. Chọn đáp án D

Thu nhập (triệu đồng)	[5; 8)	[8; 11)	[11; 14)	[14; 17)	[17; 20)
Giá trị đại diện	6,5	9,5	12,5	15,5	18,5
Số người	30	55	45	30	20

Mức trung bình của người lao động ở công ty trên là

$$\overline{x}=\frac{6{,}5\cdot 30+9{,}5\cdot 55+12{,}5\cdot 45+15{,}5\cdot 30+18{,}5\cdot 20}{180}\approx 11{,}75.$$

Câu 4. Chọn đáp án B

Ta có

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos 120^\circ$$

$$=9+25-2\cdot 3\cdot 5\cos 120^\circ=49.$$

Vậy $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7.$

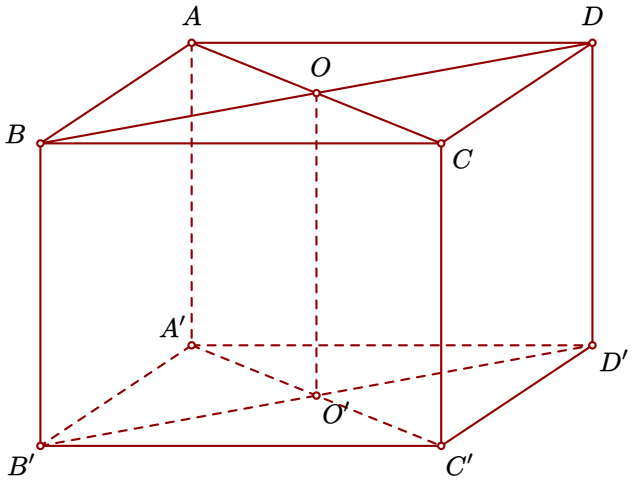
Câu 5. Chọn đáp án A

Ta có $y' = \dfrac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$

Ta có $y' = 0 \Rightarrow x^2+2x-8 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 5 \\ x = -4 \Rightarrow y = -7. \end{array}\right.$

Vậy tọa độ 2 điểm cực trị $A(2;5)$, $B(-4;-7) \Rightarrow AB = \sqrt{36+144} = 6\sqrt{5}$.

Câu 6. Chọn đáp án B



Gọi O, O' lần lượt là trung điểm $BD, A'C'$

Suy ra $O(1;3;0)$, $O'(0;3;4) \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = (-1;0;4)$.

Gọi $D'(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{DD'} = (x-5;y-3;z-2)$.

Mà $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{OO'} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = -1 \\ y-3 = 0 \\ z-2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 6 \end{cases} \Rightarrow D'(4;3;6)$.

Câu 7. Chọn đáp án A

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) \leqslant 0, \forall x \leqslant 2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Vậy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Câu 8. Chọn đáp án D

Ta có $S_n = 3n^2 + 5n$.

$S_1 = u_1 = 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 8$.

$S_2 = u_1 + u_2 = 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 22$.

Suy ra $u_2 = S_2 - u_1 = 22 - 8 = 14$.

Công sai $d = u_2 - u_1 = 14 - 8 = 6$.

Câu 9. Chọn đáp án A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;4;-4) \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = (-2;8;-8)$.

$\overrightarrow{AC} = (-3;2;-2)$.

Suy ra $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (1;6;-6)$.

Câu 10. Chọn đáp án B

Ta có $n(\Omega) = 6.6 = 36$.

Biến cố $\overline{A}$: "không có con xúc xắc nào xuất hiện mặt 6 chấm".

$\Rightarrow n\left(\overline{A}\right) = 5.5 = 25 \Rightarrow P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{25}{36}$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{25}{36} = \dfrac{11}{36}$.

Câu 11. Chọn đáp án C

Phương trình

$$\begin{aligned} 2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0 &\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Câu 12. Chọn đáp án B

Ta có

$$\begin{aligned} \log_6 45 &= \frac{\log_3 45}{\log_3 6} = \frac{\log_3 9 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 3} \\ &= \frac{\log_3 3^2 + \dfrac{1}{\log_5 3}}{\log_3 3 + \dfrac{1}{\log_2 3}} = \frac{2 + \dfrac{1}{b}}{1 + \dfrac{1}{a}} \\ &= \frac{a(1+2b)}{b(a+1)}. \end{aligned}$$

Theo bài ra: $\log_6 45 = \dfrac{a(m+nb)}{b(a+p)}$, do đó: $m = 1$, $n = 2$, $p = 1$.

Vậy $13m + 12n + 2024p = 2061$.

Câu 13. Chọn đáp án A

Ta có $n = 28$.

Tứ phân vị thứ nhất thuộc nhóm $[25; 30)$.

Ta có $Q_1 = 25 + \dfrac{\dfrac{28}{4} - 6}{5} \cdot 5 = \dfrac{180}{7}$.

Tứ phân vị thứ ba thuộc nhóm $[35; 40)$.

Ta có $Q_3 = 35 + \dfrac{\dfrac{3 \cdot 28}{4} - 18}{6} \cdot 5 = 37{,}5$.

Khi đó khoảng tứ phân vị là $\Delta Q = Q_3 - Q_1 = \dfrac{165}{14}$.

Câu 14. Chọn đáp án C

Ta có G là trọng tâm tứ diện $BA'B'C'$ nên $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}\right)$.

Ta có

$$\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{CC'}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}\right)$$
$$=-\frac{3}{4}\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{b}-\frac{3}{4}\overrightarrow{c}.$$

Câu 15. Chọn đáp án B

Gọi V là thể tích không gian phía trong lều, ta có $V=B\cdot h$ với $h=5$ (m). $B=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{36-x^2}}{2}=\frac{x\sqrt{36-x^2}}{4}$.

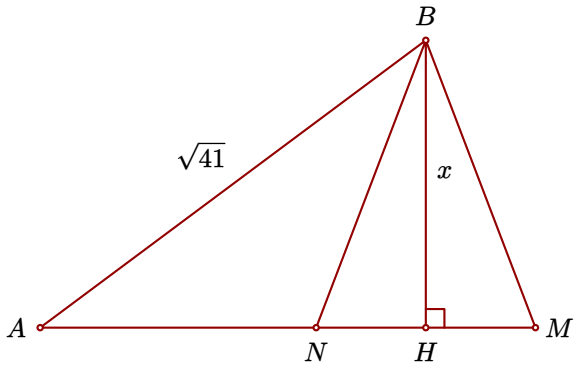
Do đó: $V(x)=\frac{x\sqrt{36-x^2}}{4}\cdot 5=\frac{5x\sqrt{36-x^2}}{4}\Rightarrow V'(x)=\frac{36-2x^2}{\sqrt{36-x^2}}$, $(0<x<6)$. $V'=0\Leftrightarrow x=3\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$3\sqrt{2}$		6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{45}{2}$	↘	0

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có thể tích không gian phía trong lều lớn nhất bằng $\frac{45}{2}$ (m^3) $\Rightarrow a=42; b=5\Rightarrow a+b=42+5=47$.

Câu 16. Chọn đáp án D



Ta có M,N nằm trên mặt cầu tâm B, bán kính $R=2$.

Do $BA=\sqrt{41}>R=2\Rightarrow A$ nằm ngoài đoạn MN. Để S nhỏ nhất thì N phải nằm giữa A,M.

Gọi H là trung điểm $MN\Rightarrow BH\perp MN$, $HM=HN=\frac{1}{2}MN$.

Khi đó: $S=2(AH+HM)+5(AH-NH)=7AH-3NH$.

$S=7\sqrt{AB^2-BH^2}-3\sqrt{R^2-BH^2}=7\sqrt{41-x^2}-3\sqrt{4-x^2}$ với $BH=x, 0\leqslant x<2$.

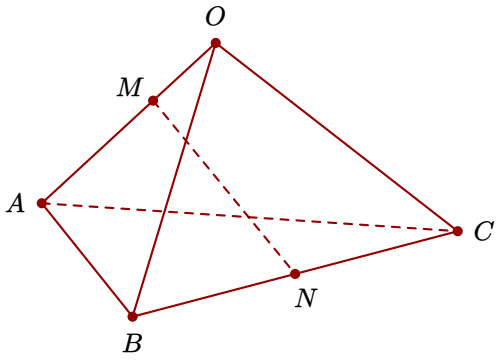
Xét hàm số $f(x)=7\sqrt{41-x^2}-3\sqrt{4-x^2}$ trên $[0;2)$.

$f'(x)=\frac{-7x}{\sqrt{41-x^2}}+\frac{3x}{\sqrt{4-x^2}}=x\left(\frac{-7}{\sqrt{41-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\right)$.

Xét $\frac{-7}{\sqrt{41-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}>0\Leftrightarrow 7\sqrt{4-x^2}<3\sqrt{41-x^2}\Leftrightarrow 196-49x^2<369-9x^2\Leftrightarrow 40x^2+173>0$ (luôn đúng).

Suy ra $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in [0;2)$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;2)$.
Vậy $\min\limits_{[0;2)} f(x) = f(0) = 7\sqrt{41} - 6 \Rightarrow m = 41, n = 6 \Rightarrow 5m + n = 211$.

Câu 17. Chọn đáp án D



Ta có $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.
Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \left|-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right|$$

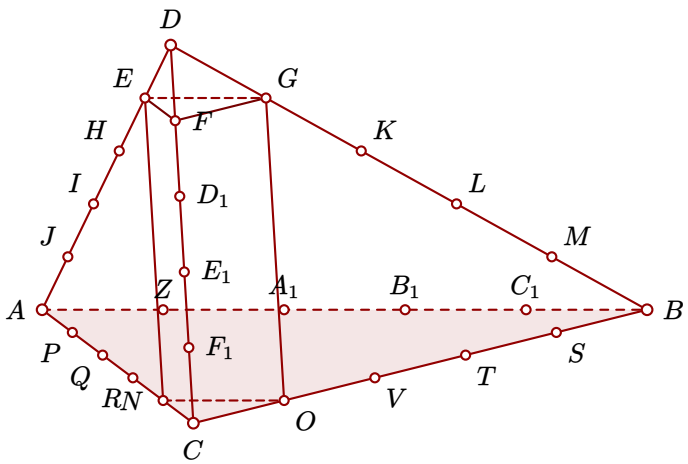
$$\Rightarrow MN^2 = \frac{1}{9}OA^2 + \frac{1}{4}OB^2 + \frac{1}{4}OC^2 - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{25}{36}.$$

Vậy $|\overrightarrow{MN}| = \frac{5}{6}$.

Câu 18. Chọn đáp án C

Ta có $P = \left[\log_a\left(\frac{a^2}{b}\right)\right]^3 - 3\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{b}{a}\right) = (2 - \log_a b)^3 - 6(\log_a b - 1)$.
Do $1 < a \leqslant b \leqslant a^4 \Rightarrow 1 \leqslant \log_a b \leqslant 4$.
Đặt $t = \log_a b \Rightarrow P = -t^3 + 6t^2 - 18t + 14$, $t \in [1;4]$.
Ta có $P' = -3t^2 + 12t - 18 < 0, \forall t \in [1;4]$, do đó hàm $P(t)$ nghịch biến trên đoạn $[1;4]$.
Vậy $P_{\min} = P(4) = -26$.

Câu 19. Chọn đáp án C



Ta xác định số tam giác có ba đỉnh mà mặt phẳng qua các đỉnh của nó chỉ song song với cạnh AB.
Số các đường thẳng song song với cạnh AB đi qua 2 trong 24 điểm chia là 8.
+ Chọn 1 đường thẳng trong 8 đường thẳng đó làm cạnh của tam giác có 8 cách chọn (tương ứng được 2 đỉnh của tam giác).
+ Chọn đỉnh thứ ba sao cho mặt phẳng đi qua 3 đỉnh đó chỉ song song với đường thẳng AB, ta có $24-15=9$ cách chọn.
Số tam giác có 3 đỉnh trong 24 điểm đánh dấu có mặt phẳng đi qua ba đỉnh song song với đúng một cạnh AB của tứ diện là $8\cdot 9=72$.
Số tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán là $6\cdot 72=432$.

Câu 20. Chọn đáp án A
Từ bảng biến thiên, ta có:
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2024}{f(x)-1}=\dfrac{2024}{-8}=-253$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2024}{f(x)-1}=0$.
Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.
Ta thấy
$\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2024}{f(x)-1}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=1$.
Phương trình $f(x)=1$ có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l}x=a\neq 1\\ x=b\neq 1\end{array}\right.$ nên đồ thị hàm số có các đường tiệm cận đứng $x=a$, $x=b$.
Vậy đồ thị hàm số có 5 đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Câu 21. Chọn đáp án: a b c d
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_{45}^{3}$.
a) Số cách lấy 3 quả cầu đánh số chẵn là $\mathrm{C}_{22}^{3}=1540$.
b) Gọi A là biến cố: "tổng 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là số lẻ".
Trường hợp 1: Lấy được 1 quả cầu lẻ và 2 quả cầu chẵn.
Trường hợp 2: Lấy được 3 quả cầu lẻ.
Suy ra $n(A)=\mathrm{C}_{23}^{1}\cdot\mathrm{C}_{22}^{2}+\mathrm{C}_{23}^{3}=7084$.
Vậy xác suất xảy ra biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{7084}{\mathrm{C}_{45}^{3}}=\dfrac{322}{645}$.
c) Gọi B là biến cố: "tổng 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là số chia hết cho 4".
Xét các tập hợp:
$X_0=\{4;8;12;16;20;24;28;32;36;40;44\}$ là tập các số chia hết cho 4.
$X_1=\{1;5;9;13;17;21;25;29;33;37;41;45\}$ là tập các số chia cho 4 dư 1.
$X_2=\{2;6;10;14;18;22;26;30;34;38;42\}$ là tập các số chia cho 4 dư 2.
$X_3=\{3;7;11;15;19;23;27;31;35;39;43\}$ là tập các số chia cho 4 dư 3.
Trường hợp 1: Lấy 3 số thuộc tập $X_0\Rightarrow$ có C_{11}^{3} cách.
Trường hợp 2: Lấy 1 số thuộc tập X_0 và 2 số thuộc tập $X_2\Rightarrow$ có $\mathrm{C}_{11}^{1}\cdot\mathrm{C}_{11}^{2}$ cách.
Trường hợp 3: Lấy ở mỗi tập X_0,X_1,X_3 một số $\Rightarrow$ có $\mathrm{C}_{11}^{1}\cdot\mathrm{C}_{12}^{1}\cdot\mathrm{C}_{11}^{1}$ cách.
Trường hợp 4: Lấy 2 số thuộc tập X_1 và 1 số thuộc tập $X_2\Rightarrow$ có $\mathrm{C}_{12}^{2}\cdot\mathrm{C}_{11}^{1}$ cách.
Trường hợp 5: Lấy 2 số thuộc tập X_3 và 1 số thuộc tập $X_2\Rightarrow$ có $\mathrm{C}_{11}^{2}\cdot\mathrm{C}_{11}^{1}$ cách.
Suy ra $n(B)=\mathrm{C}_{11}^{3}+\mathrm{C}_{11}^{1}\cdot\mathrm{C}_{11}^{2}+\mathrm{C}_{11}^{1}\cdot\mathrm{C}_{12}^{1}\cdot\mathrm{C}_{11}^{1}+\mathrm{C}_{12}^{2}\cdot\mathrm{C}_{11}^{1}+\mathrm{C}_{11}^{2}\cdot\mathrm{C}_{11}^{1}=3553$.
Vậy xác suất xảy ra biến cố B là $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{323}{1290}$.
d) Gọi C là biến cố: "tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số chia hết cho 8".
Xét các tập hợp:
$Y_0=\{4;8;12;16;20;24;28;32;36;40;44\}$ là tập gồm 11 số chia hết cho 4.

$Y_1 = \{2; 6; 10; \ldots; 42\}$ là tập gồm 11 số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4.
$Y_2 = \{1; 3; 5; \ldots; 45\}$ là tập gồm 23 số lẻ.
Trường hợp 1: Lấy 3 số thuộc tập $Y_0 \Rightarrow$ có C_{11}^3 cách.
Trường hợp 2: Lấy 2 số thuộc tập Y_0 và 1 số thuộc tập Y_1 hoặc tập $Y_2 \Rightarrow$ có $\mathrm{C}_{11}^2(\mathrm{C}_{11}^1 + \mathrm{C}_{23}^1)$ cách.
Trường hợp 3: Lấy 1 số thuộc tập Y_0 và 2 số thuộc tập $Y_1 \Rightarrow$ có $\mathrm{C}_{11}^1 \cdot \mathrm{C}_{11}^2$ cách.
Trường hợp 4: Lấy ở mỗi tập Y_0, Y_1, Y_2 một số $\Rightarrow$ có $\mathrm{C}_{11}^1 \cdot \mathrm{C}_{11}^1 \cdot \mathrm{C}_{23}^1$ cách.
Suy ra $n(C) = \mathrm{C}_{11}^3 + \mathrm{C}_{11}^2(\mathrm{C}_{11}^1 + \mathrm{C}_{23}^1) + \mathrm{C}_{11}^1 \cdot \mathrm{C}_{11}^2 + \mathrm{C}_{11}^1 \cdot \mathrm{C}_{11}^1 \cdot \mathrm{C}_{23}^1 = 5423$.
Vậy xác suất xảy ra biến cố C là $\mathrm{P}(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{493}{1290}$.

Câu 22. Chọn đáp án: a b c d

Lớp điểm thi	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$
Giá trị đại diện	1	3	5	7	9
Số học sinh lớp 12E	3	6	12	24	5
Số học sinh lớp 12F	4	5	16	18	7

a) Điểm trung bình môn Toán của lớp 12E và lớp 12F lần lượt là $\overline{x}_E = 5{,}88$; $\overline{x}_F = 5{,}76$.
Dựa vào điểm trung bình môn Toán, vì $\overline{x}_E > \overline{x}_F$ nên ta đánh giá được lớp 12E học tốt môn Toán hơn lớp 12F.
b) Ta tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu thống kê điểm của lớp 12F:

$$Q_1 = x_{13} = 4 + \frac{\frac{50}{4} - (3+6)}{12} \cdot 2 = \frac{55}{12}.$$

$$Q_3 = x_{38} = 6 + \frac{\frac{50 \cdot 3}{4} - (3+6+12)}{24} \cdot 2 = \frac{59}{8}.$$

Khi đó $\Delta Q = Q_3 - Q_1 \approx 2{,}79 < 2{,}9$.
c) Mốt của điểm môn Toán của lớp 12E và lớp 12F lần lượt là
$M_o = 6 + \dfrac{24-12}{24-12+24-5} \cdot 2 \approx 6{,}77$; $M_o' = 6 + \dfrac{18-16}{18-16+18-7} \cdot 2 \approx 6{,}31$.
Vì $M_o > M_o'$ nên điểm thi có số học sinh đạt được nhiều nhất ở lớp 12E lớn hơn ở lớp 12F.
d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm của lớp 12E và lớp 12F lần lượt là $s_E \approx 2{,}05$; $s_F \approx 2{,}19$.

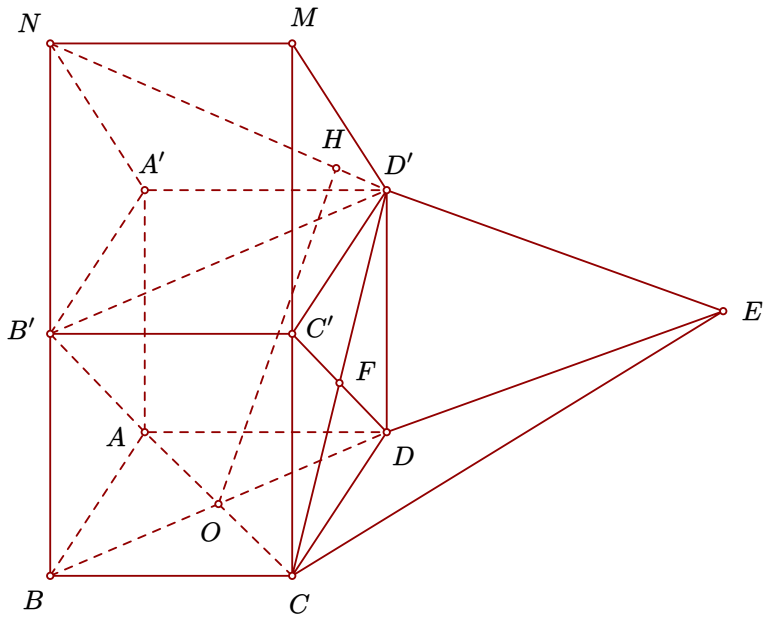
Câu 23. Chọn đáp án: a b c d
a) Mệnh đề sai.
b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 4; -4)$, $\overrightarrow{BC} = (1; -4; 8)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 0; 4)$ nên $AB = 6$, $BC = 9$, $AC = 5$, suy ra chu vi tam giác ABC là 20.
Mà $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5} = 10\sqrt{2}$.
Lại có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AH = \dfrac{2S_{ABC}}{BC} = \dfrac{20\sqrt{2}}{9}$.
c) Gọi $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác trong góc B.
Ta có $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow AD = \dfrac{2}{5} AC \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
Mà $\overrightarrow{AC} = (3; 0; 4)$ và $\overrightarrow{AD} = (a-2; b+1; c-2)$, ta có

$$\begin{cases} a - 2 = \dfrac{2}{5} \cdot 3 \\ b + 1 = \dfrac{2}{5} \cdot 0 \\ c - 2 = \dfrac{2}{5} \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{16}{5} \\ b = -1 \\ c = \dfrac{18}{5} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{16}{5}; -1; \frac{18}{5}\right).$$

d) Đặt $P = 2MA^2 - 3MB^2 + 4MC^2$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(2-a;-1-b;2)$, $\overrightarrow{MB}=(4-a;3-b;-2)$, $\overrightarrow{MC}=(5-a;-1-b;6)$.
$P=2\left[(2-a)^2+(-1-b)^2+4\right]-3\left[(4-a)^2+(3-b)^2+4\right]+4\left[(5-a)^2+(-1-b)^2+36\right]$
$P=3a^2+3b^2-24a+30b+179=3(a-4)^2+3(b+5)^2+56$.
P nhỏ nhất khi $a=4,b=-5$.
Vậy $a+b=-1$.

Câu 24. Chọn đáp án: a b c d



Vì $D'\in(\alpha)\cap(BDD'B')\Rightarrow(\alpha)\cap(BDD'B')$ là đường thẳng d đi qua D'.
Ta có $\sin((\alpha);(BDD'B'))=\dfrac{\mathrm{d}(C,(BDD'B'))}{\mathrm{d}(C,d)}=\dfrac{CO}{\mathrm{d}(C,d)}\geqslant\dfrac{CO}{CD'}$.
Dấu bằng xảy ra khi $CD'\perp d$ hay d là đường thẳng đi qua D' và vuông góc với CD'.
Lấy điểm M,N sao cho C' là trung điểm của CM và B' là trung điểm của BN.
Vì $MC'\parallel D'D$ và $MC'=D'D$ nên tứ giác $MC'DD'$ là hình bình hành.
Do đó $MD'\parallel C'D$, mà $C'D\perp CD'\Rightarrow MD'\perp CD'$.
Mà $A'D'\perp(CDD'C')\Rightarrow A'D'\perp CD'\Rightarrow CD'\perp(MD'A'N)$.
Suy ra $d=(MD'A'N)\cap(BDD'B')\Rightarrow d\equiv D'N$ và $(\alpha)\equiv(CD'N)$.
Khi đó $\Delta=(\alpha)\cap(BDD'B')\Rightarrow\Delta\equiv D'N$; $E=\Delta\cap BD\Rightarrow E=D'N\cap BD$.
a) $(\alpha)\cap(BDD'B')=D'N$.
Vì $AC\perp(BDD'B')\Rightarrow AC\perp D'N$, mà $D'N\perp OH\Rightarrow D'N\perp(OHC)$.
Suy ra $((\alpha);(BDD'B'))=(HC;OH)=\widehat{OHC}$.
b) Vì $DD'\parallel BN$ và $DD'=BB'=\dfrac{1}{2}BN$ nên D là trung điểm của BE.
Suy ra $DE=BD=6\sqrt{2}$.
c) $V_{C'BCE}=2V_{C'BCD}=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot C'C\cdot S_{BCD}=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot6\cdot\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot6=72$.
d) Vì O là trung điểm của AC và $C\in(\alpha)$ nên đường thẳng AC cắt mặt phẳng (α) tại C, suy ra: $\mathrm{d}(A,(\alpha))=2\mathrm{d}(O,(\alpha))$.
Theo ý a), ta có:
$AC\perp(BDD'B')\Rightarrow CO\perp(BDD'B')$.
Mà $OH\subset(BDD'B')$ nên $CO\perp OH$, do đó tam giác COH vuông tại O.
Lại có $\Delta\perp CO$ (do $CO\perp(BDD'B')$) và $\Delta\perp OH$, suy ra $\Delta\perp(COH)$.
Mặt khác $\Delta\subset(\alpha)$ nên $(\alpha)\perp(COH)$ theo giao tuyến CH.
Trong tam giác vuông COH, kẻ $OK\perp CH$ tại K. Suy ra $OK\perp(\alpha)$, do đó:

$\mathrm{d}(O,(\alpha))=OK$.
Ta tính các độ dài:
- $ABCD$ là hình vuông cạnh 6 nên $AC=6\sqrt{2}\Rightarrow CO=\dfrac{AC}{2}=3\sqrt{2}$.
- Xét tam giác EDD' vuông tại D trong mặt phẳng $(BDD'B')$:
Theo ý b), $DE=6\sqrt{2}$ và $DD'=6$.
Suy ra $ED'=\sqrt{ED^2+DD'^2}=\sqrt{(6\sqrt{2})^2+6^2}=6\sqrt{3}$.
Do đó $\sin\widehat{D'ED}=\dfrac{DD'}{ED'}=\dfrac{6}{6\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Vì D là trung điểm của BE nên các điểm E,D,O thẳng hàng theo thứ tự đó, suy ra:
$EO=ED+DO=6\sqrt{2}+3\sqrt{2}=9\sqrt{2}$.
Tam giác EHO vuông tại H (với $\Delta\equiv ED'$) có:
$OH=EO\cdot\sin\widehat{D'ED}=9\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=3\sqrt{6}$.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông COH đường cao OK:
$\dfrac{1}{OK^2}=\dfrac{1}{CO^2}+\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{(3\sqrt{2})^2}+\dfrac{1}{(3\sqrt{6})^2}=\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{54}=\dfrac{2}{27}\Rightarrow OK=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.
Vậy khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) là:
$\mathrm{d}(A,(\alpha))=2OK=2\cdot\dfrac{3\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{6}\neq 2\sqrt{6}$.

Câu 25. Chọn đáp án: a b c d
a) Ta có $P(t)=115+20\sin(180\pi t)$.
Chu kì của hàm số: $T=\dfrac{2\pi}{180\pi}=\dfrac{1}{90}$.
b) $P(t)=115+20\sin(180\pi t)\Rightarrow P'(t)=3600\pi\cos(180\pi t)$.
$P'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{360}+\dfrac{k}{180}\ (k\in\mathbb{Z})$.
Trong thời gian 1 giờ đồng hồ (phút), ta xét $t\in[0;60]$.
Ta có: $0\leqslant\dfrac{1}{360}+\dfrac{k}{180}\leqslant 60\Leftrightarrow -0{,}5\leqslant k\leqslant 10799{,}5$, do $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0;1;\ldots;10799\}$.
Số điểm cực trị của hàm số là 10800 nên số điểm cực đại và số điểm cực tiểu bằng nhau và bằng 5400.
Vậy số lần huyết áp tâm thu xảy ra trong khoảng thời gian một giờ đồng hồ chính là số điểm cực đại của hàm số và bằng 5400.
c) Chỉ số huyết áp là $\dfrac{P_{\max}}{P_{\min}}=\dfrac{115+20}{115-20}=\dfrac{135}{95}$.
d) Tốc độ thay đổi huyết áp là đạo hàm của hàm số.
$$P'(t)=3600\pi\cos(180\pi t)=1800\pi\Leftrightarrow\cos(180\pi t)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{540}+\dfrac{k}{90}\\ t=-\dfrac{1}{540}+\dfrac{k}{90}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$
Trong 1 phút nên $t\in[0;1]$.
Trường hợp 1: $0\leqslant\dfrac{1}{540}+\dfrac{k}{90}\leqslant 1\Leftrightarrow -0{,}16\leqslant k\leqslant 89{,}83$, do $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0;1;\ldots;89\}$.
Trường hợp 2: $0\leqslant-\dfrac{1}{540}+\dfrac{k}{90}\leqslant 1\Leftrightarrow 0{,}16\leqslant k\leqslant 90{,}16$, do $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{1;2;\ldots;90\}$.
Vậy kết hợp hai trường hợp, ta có số lần mà tốc độ thay đổi huyết áp bằng 1800π mmHg/phút là 180.

Câu 26. Chọn đáp án: a b c d

Ta có: $y=\dfrac{x^2+x-6}{x+1}=x-\dfrac{6}{x+1}$, $y'=\dfrac{x^2+2x+7}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2+6}{(x+1)^2}>0$

a) Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến của đồ thị (C) với đường thẳng d.

Suy ra $f'(x_0)=7\Leftrightarrow\dfrac{(x_0+1)^2+6}{(x_0+1)^2}=7\Leftrightarrow 1+\dfrac{6}{(x_0+1)^2}=7\Leftrightarrow(x_0+1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2.\end{array}\right.$

Với $x_0=0\Rightarrow y_0=-6$, tiếp tuyến có phương trình: $y=7x-6$.

Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=4$, tiếp tuyến có phương trình: $y=7(x+2)+4=7x+18$.

Vậy chỉ có một tiếp tuyến song song với đường thẳng d.

b) Để y nguyên thì $x+1$ phải là ước của 6.

Số 6 có các ước: $\pm1;\pm2;\pm3;\pm6$ (có 8 ước).

Ứng với mỗi ước đó thì cho một giá trị nguyên của x và cũng cho một giá trị nguyên của y.

Vậy có 8 điểm trên đồ thị (C) có hoành độ và tung độ là số nguyên.

c) Giả sử phương trình AB là $y=a$. Hoành độ A,B là nghiệm của phương trình

$\dfrac{x^2+x-6}{x+1}=a\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\x^2-(a-1)x-a-6=0\quad(1).\end{cases}$

Vì $\begin{cases}\Delta=a^2+2a+25>0\\(-1)^2+(a-1)-a-6=-6\neq0\end{cases}$

nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác -1.

Khi đó $AB=|x_1-x_2|=\sqrt{\Delta}=\sqrt{a^2+2a+25}=\sqrt{(a+1)^2+24}\geqslant2\sqrt{6}$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

Hay giá trị nhỏ nhất của AB bằng $2\sqrt{6}$ khi $a=-1$.

d) **Cách 1:** Đường tròn (T) có tâm $I(-1;-1)$ là giao của 2 đường tiệm cận của đồ thị (C) nên I là tâm đối xứng của (C). Gọi $A\left(-1+a;a-1-\dfrac{6}{a}\right)$ với $a>0$ là điểm thuộc nhánh bên phải tiệm cận đứng của (C).

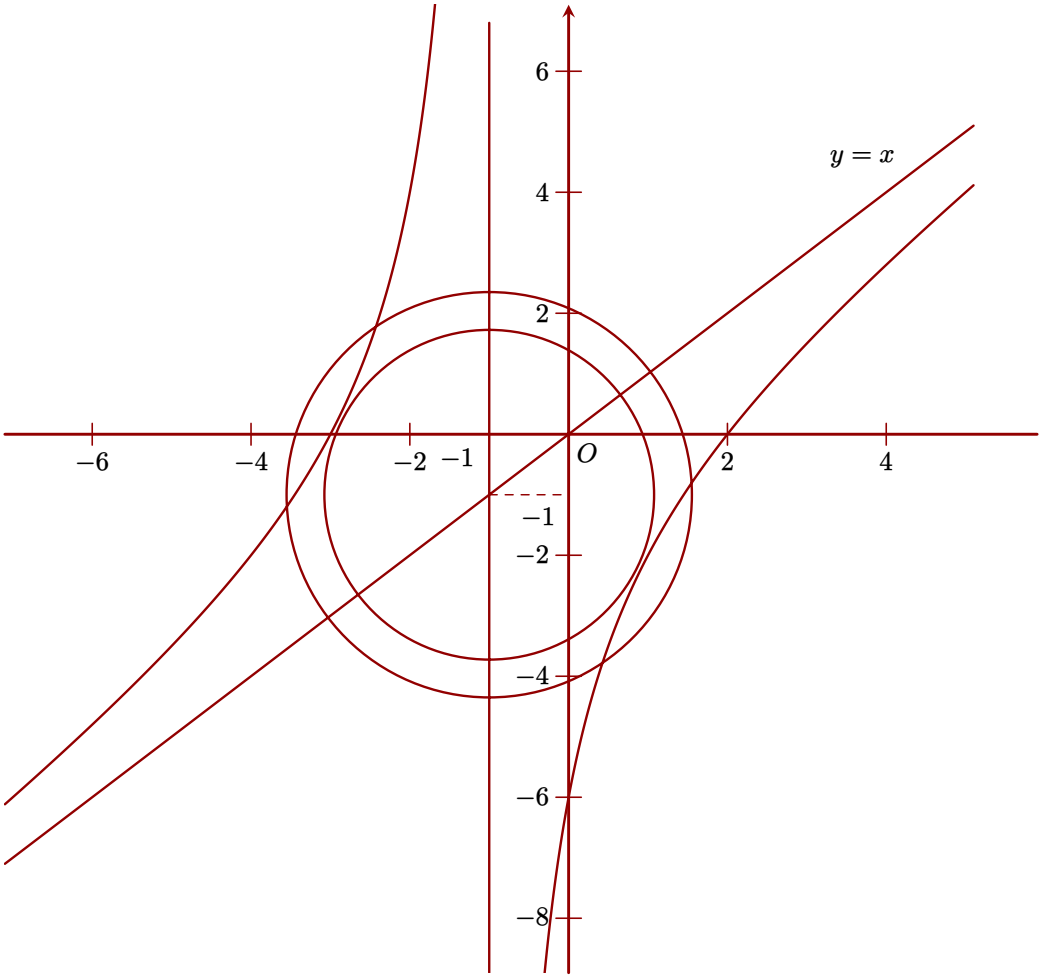
(T) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $R>IA_{\min}$.

Ta có $IA=\sqrt{a^2+\left(a-\dfrac{6}{a}\right)^2}=\sqrt{2a^2+\dfrac{36}{a^2}-12}\geqslant\sqrt{2\sqrt{2a^2\cdot\dfrac{36}{a^2}}-12}=2\sqrt{3\sqrt{2}-3}$.

$IA_{\min}=2\sqrt{3\sqrt{2}-3}\Leftrightarrow2a^2=\dfrac{36}{a^2}\Leftrightarrow a=\sqrt[4]{18}$.

$\Rightarrow R>2\sqrt{3\sqrt{2}-3}\Leftrightarrow R^2>12(\sqrt{2}-1)$ thì đường tròn (T) cắt đồ thị (C) tại 4 điểm phân biệt.

Cách 2: Đường tròn (T) có tâm $I(-1;-1)$ là giao hai đường tiệm cận của đồ thị (C) nên $I(-1;-1)$ cũng là tâm đối xứng của (C).



Gọi $M\left(a; a-\dfrac{6}{a+1}\right)$ là điểm thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại đó vuông góc với IM.

Đường thẳng IM: $\dfrac{x+1}{a+1}=\dfrac{y+1}{a-\dfrac{6}{a+1}+1} \Rightarrow y=\dfrac{a^2+2a-5}{(a+1)^2}\cdot x-\dfrac{6}{(a+1)^2}$.

Có hệ số góc $k_1=\dfrac{(a+1)^2-6}{(a+1)^2}$.

Tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k_2=\dfrac{(a+1)^2+6}{(a+1)^2}$.

Suy ra $k_1k_2=-1 \Leftrightarrow \dfrac{(a+1)^2-6}{(a+1)^2}\cdot\dfrac{(a+1)^2+6}{(a+1)^2}=-1 \Leftrightarrow (a+1)^4=18 \Leftrightarrow a=-1\pm\sqrt[4]{18}$.

Với $a=-1-\sqrt[4]{18} \Rightarrow M\left(-1-\sqrt[4]{18}; -1-\sqrt[4]{18}+\dfrac{6}{\sqrt[4]{18}}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{IM}=\left(-\sqrt[4]{18}; -\sqrt[4]{18}+\dfrac{6}{\sqrt[4]{18}}\right) \Rightarrow IM=\sqrt{\left(-\sqrt[4]{18}\right)^2+\left(-\sqrt[4]{18}+\dfrac{6}{\sqrt[4]{18}}\right)^2}=\sqrt{12(\sqrt{2}-1)}$.

Chú ý: Đường tròn tâm I đường kính $AB_{\min}=4\sqrt{3(\sqrt{2}-1)}$ tiếp xúc với hai nhánh của đồ thị (C) tại hai điểm A, B. Để cắt đồ thị (C) tại bốn điểm thì $R>2\sqrt{3(\sqrt{2}-1)}$.

Câu 27. Đáp án: 188.

Ta có $f'(x)=-3x^2+6x$.

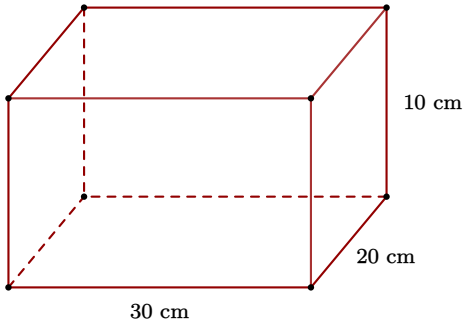
Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với mặt đường tại tiếp điểm $M(x_0;y_0)$ với $x_0>0$.

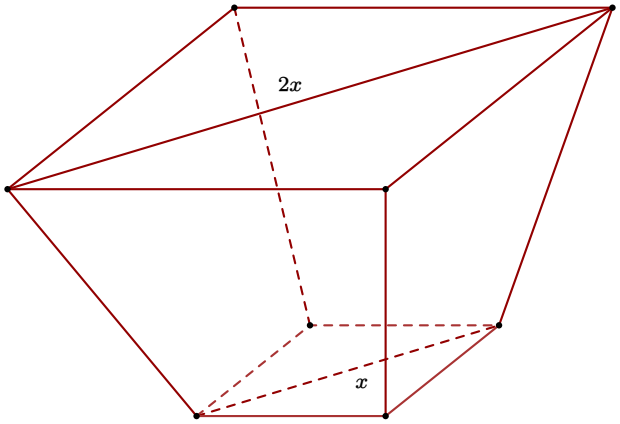
Khi đó:

$$f'(x_0)=-9 \Leftrightarrow -3x_0^2+6x_0=-9 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0=3 \\ x_0=-1 \text{ (loại)} \end{bmatrix} \Rightarrow M(3;1).$$

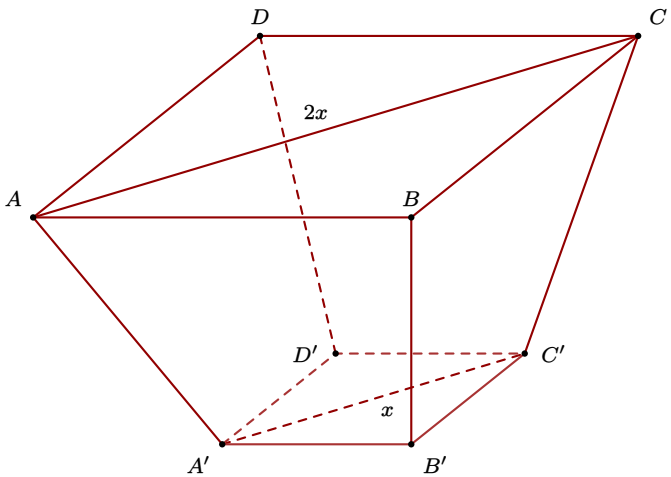
Độ dài cây cầu ngắn nhất bằng khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $9x + y - 45 = 0$.
$h = \dfrac{|9 \cdot 3 + 1 - 45|}{\sqrt{9^2 + 1^2}} \approx 1,877.$
Vì đơn vị của hệ trục là 100 m nên độ dài ngắn nhất của cây cầu là 188m.

Câu 28. Đáp án: 2314.
Cách 1.

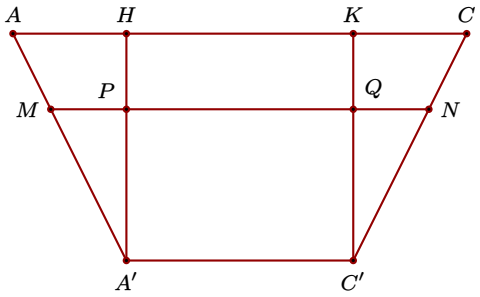




Thể tích khay thứ nhất: $V_1 = 30 \cdot 20 \cdot 10 = 6000$ (cm^3).
Thể tích nước có trong khay thứ hai: $V_2' = \dfrac{1}{5}V_1 = \dfrac{1}{5} \cdot 6000 = 1200$ (cm^3).
Gọi chiều cao của khay thứ hai là h (cm).
Giả sử khay thứ hai có hình dạng chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ sau:



Dễ dàng chứng minh được ACC′A′ là hình thang cân. Lấy MN song song với AC; H, K lần lượt là hình chiếu của A′, C′ trên AC; P, Q lần lượt là giao điểm của $A'H$ và MN, C′K và MN.



Vì Mực nước (ngang với MN) trong khay thứ hai cao bằng $\dfrac{2}{3}$ chiều cao của khay đó nên $C'Q = \dfrac{2}{3}C'K = \dfrac{2}{3}h$.

Vì H, K lần lượt là hình chiếu của A', C' trên AC nên $A'H \perp AC$, $C'K \perp AC$

Suy ra $A'H \parallel C'K$ và $\widehat{A'HK} = 90^\circ$ mà $HK \parallel A'C'$ nên $HKC'A'$ là hình chữ nhật.

Từ đó ta có $A'C' = HK = x$.

Dễ dàng chứng minh được $\Delta A'HA = \Delta C'KC$ nên $AH = CK$.

$\Rightarrow AH = CK = \dfrac{AC - HK}{2} = \dfrac{2x - x}{2} = \dfrac{x}{2}$.

$\Delta A'AH$ có $MP \parallel AH$, nên theo hệ quả định lí Thales ta có:

$\dfrac{MP}{AH} = \dfrac{A'P}{A'H} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MP = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{3}$.

Tương tự $\Delta C'CK$ có $QN \parallel CK$ nên ta cũng có $QN = \dfrac{x}{3}$.

Do đó $MN = MP + PQ + QN = \dfrac{x}{3} + x + \dfrac{x}{3} = \dfrac{5x}{3}$.

Theo giả thiết ta có thể tích nước trong khay thứ hai bằng thể tích khối chóp cụt tứ giác đều với đáy lớn (hình vuông) nhận MN là đường chéo có diện tích S_1' và đáy nhỏ (hình vuông) nhận $A'C'$ làm đường chéo có diện tích S_2', chiều cao bằng $h' = \dfrac{2}{3}h$.

Gọi V_2' là thể tích nước trong khay thứ hai.

$S_1' = \dfrac{MN^2}{2} = \dfrac{\left(\dfrac{5x}{3}\right)^2}{2} = \dfrac{25x^2}{18}$; $S_2' = \dfrac{A'C'^2}{2} = \dfrac{x^2}{2}$.

$\Rightarrow V_2' = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3}h \cdot \left(\dfrac{25x^2}{18} + \sqrt{\dfrac{25x^2}{18} \cdot \dfrac{x^2}{2}} + \dfrac{x^2}{2}\right) = \dfrac{49}{81}x^2h$.

Thể tích nước trong khay thứ hai là 1200 cm^3, nên ta có:

$V_2' = \dfrac{49}{81}x^2h = 1200 \Rightarrow x^2h = \dfrac{97200}{49}$.

Mặt khác, thể tích khay thứ hai bằng thể tích khối chóp cụt tứ giác đều với đáy lớn (hình vuông) nhận AC là đường chéo có diện tích S_1, và đáy nhỏ (hình vuông) nhận $A'C'$ làm đường chéo có diện tích S_2, chiều cao bằng h.

Gọi V_2 là thể tích khay thứ hai.

$S_1 = \dfrac{AC^2}{2} = \dfrac{(2x)^2}{2} = 2x^2$; $S_2 = \dfrac{A'C'^2}{2} = \dfrac{x^2}{2}$.

$\Rightarrow V_2 = \dfrac{1}{3}h \cdot \left(2x^2 + \sqrt{2x^2 \cdot \dfrac{x^2}{2}} + \dfrac{x^2}{2}\right) = \dfrac{7}{6}x^2h$.

Mà $x^2h = \dfrac{97200}{49} \Rightarrow V_2 = \dfrac{7}{6} \cdot \dfrac{97200}{49} = \dfrac{16200}{7}$ (cm^3).

Vậy thể tích của chiếc khay thứ hai bằng $\dfrac{16200}{7}$ $(\text{cm}^3) \approx 2314$ (cm^3).

Cách 2.

Thể tích khay thứ nhất là $V = 10 \cdot 20 \cdot 30 = 6000$ (cm^3).

Thể tích nước ở khay thứ hai là $V_1 = \dfrac{1}{5} \cdot 6000 = 1200$ (cm^3).
Gọi V_2 là thể tích khay thứ hai, ta có tỉ số thể tích nước ở khay thứ hai và thể tích khay thứ hai là:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1\left(S_1 + S + \sqrt{S_1 \cdot S}\right)}{h\left(S_2 + S + \sqrt{S_2 \cdot S}\right)} = \frac{h_1\left(\dfrac{25}{9}S + S + \sqrt{\dfrac{25}{9}S \cdot S}\right)}{h\left(4S + S + \sqrt{4S \cdot S}\right)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\dfrac{49}{9}}{7} = \frac{14}{27}$$

Suy ra $V_2 = \dfrac{27}{14}V_1 \approx 2314$ (cm^3).

Câu 29. Đáp án: 3029.
Xét phép thử: Lấy ngẫu nhiên 3 số hạng liên tiếp từ 2021 số hạng đã được sắp thứ tự tăng dần: $C_4^4; C_5^4; \ldots; C_{2023}^4; C_{2024}^4$.
+ Số hạng đầu có thể chọn từ $\{C_4^4; C_5^4; \ldots; C_{2022}^4\} \Rightarrow$ có 2019 cách chọn.
+ Với mỗi cách chọn số hạng đầu tiên chỉ có 1 cách chọn 2 số hạng tiếp theo.
Suy ra $n(\Omega) = 2019$.
Gọi A là biến cố "Tổng 3 số hạng được chọn là một số lẻ".
Xét số có dạng C_n^4 với $n \geqslant 4$, ta có $C_n^4 = \dfrac{n!}{4!(n-4)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$.

Ta nhận thấy $n, n-1, n-2, n-3$ là 4 số tự nhiên liên tiếp nên $n(n-1)(n-2)(n-3) \vdots 4!$, $\forall n \geqslant 4$, hơn nữa $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$ là số chẵn khi và chỉ khi trong 4 số $n, n-1, n-2, n-3$ có 1 số chia hết cho 8, tức là n phải có dạng $n = 8k + i$ với $i \in \{0; 1; 2; 3\}, k \in \mathbb{N}$.
Như vậy dãy $C_4^4; C_5^4; \ldots; C_{2023}^4; C_{2024}^4$ khi viết theo tính chẵn, lẻ sẽ có dạng:
Lẻ, lẻ, lẻ, lẻ, chẵn, chẵn, chẵn, chẵn, lẻ, lẻ, lẻ, lẻ, …, lẻ, chẵn.
Để lấy được 3 số liên tiếp có tổng là một số lẻ, ta có 3 trường hợp sau:
Với bộ 3 số có dạng $C_{8k+4}^4, C_{8k+5}^4, C_{8k+6}^4$, ta có $\begin{cases} 4 \leqslant 8k+4 \\ 8k+6 \leqslant 2024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geqslant 0 \\ k \leqslant 252{,}25 \end{cases}$, vì $k \in \mathbb{N}$ nên có 253 giá trị k thỏa mãn.
Với bộ 3 số có dạng $C_{8k+5}^4, C_{8k+6}^4, C_{8k+7}^4$, ta có $\begin{cases} 4 \leqslant 8k+5 \\ 8k+7 \leqslant 2024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geqslant -0{,}125 \\ k \leqslant 252{,}125 \end{cases}$, vì $k \in \mathbb{N}$ nên có 253 giá trị k thỏa mãn.
Vậy trường hợp này có $253 + 253 = 506$ bộ 3 số thỏa mãn.
$\begin{cases} 4 \leqslant 8k-1 \\ 8k+1 \leqslant 2024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geqslant 0{,}625 \\ k \leqslant 252{,}825 \end{cases}$, vì $k \in \mathbb{N}$ nên có 252 giá trị k thỏa mãn.
$\begin{cases} 4 \leqslant 8k+2 \\ 8k+4 \leqslant 2024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geqslant 0{,}25 \\ k \leqslant 252{,}5 \end{cases}$, vì $k \in \mathbb{N}$ nên có 252 giá trị k thỏa mãn.
Từ đó ta có $n(A) = 506 + 252 + 252 = 1010 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1010}{2019}$.
Vậy $a + b = 1010 + 2019 = 3029$.

Câu 30. Đáp án: -651.
Đặt $z = 3x$, ta được $z > y > 0$ và $z + y + zy \geqslant 7$.
Khi đó $1 + 30xy - 5y^2 = 1 + 10zy - 5y^2 > 1 + 10y^2 - 5y^2 = 5y^2 + 1 > 1$ và $P = z^2 + \dfrac{1}{4}(z+5y)^2 - 2\ln\left(1 + 10zy - 5y^2\right)$.
Theo giả thiết ta được $z \geqslant \dfrac{7-y}{y+1}$.
Ta có $z^2 + \dfrac{1}{4}(z+5y)^2 = \dfrac{5(z^2 + 2zy + 5y^2)}{4}$.
Mà

$$\begin{aligned} z^2+2zy+5y^2 &= (z+y)^2+4y^2 \\ &\geqslant [8(z+y)-16]+[8y-4] \\ &= 8(z+2y)-20 \\ &\geqslant 8\left[\frac{7-y}{y+1}+2y\right]-20 \\ &= 8\left[\frac{8}{y+1}+2(y+1)\right]-44 \\ &\geqslant 64-44=20. \end{aligned}$$

Nên $z^2+\dfrac{(z+5y)^2}{4} \geqslant 25$, dấu "=" xảy ra khi $z=3$, $y=1$ hay $x=y=1$.

Mặt khác ta có $10zy-5y^2-\dfrac{5(z^2+2zy+5y^2)}{4}=\dfrac{-5(z-3y)^2}{4} \leqslant 0$ (dấu "=" xảy ra khi $z=3$, $y=1$ hay $x=y=1$).

Suy ra $1+10zy-5y^2 \leqslant z^2+\dfrac{(z+5y)^2}{4}+1$.

Đặt $t=z^2+\dfrac{(z+5y)^2}{4}+1 \geqslant 26 \Rightarrow \ln\left(1+10zy-5y^2\right) \leqslant \ln t \Rightarrow P \geqslant t-1-2\ln t$.

Xét hàm số $f(t)=t-1-2\ln t$ với $t \geqslant 26$.

Có $f'(t)=1-\dfrac{2}{t}=\dfrac{t-2}{t}>0, \forall t \geqslant 26 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[26;+\infty)$.

$\Rightarrow P \geqslant f(t) \geqslant f(26)=25-2\ln 26=25-\ln 676$.

Do đó $P_{\min}=25-\ln 676$ khi $z=3$, $y=1$ hay $x=y=1$.

Vậy $a=25$, $b=676 \Rightarrow a-b=-651$.

Câu 31. Đặt phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=-x^3+3x^2-4x+3$ là $(*)$.

$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=f(-x)$.

Xét hàm số $f(x)=x^3+3x^2+4x+3 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x+4=3(x+1)^2+1>0, \forall x \in [-2;1]$

Vậy $f(x)$ là hàm đồng biến trên $[-2;1] \subset \mathbb{R}$.

Do đó $\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}=-x \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+x^3+m=0$.

Ta xét hàm số $h(x)=f^3(x)+f(x)+x^3+m$, với $x \in [-2;1]$.

$h'(x)=3f'(x)f^2(x)+f'(x)+3x^2=f'(x)\left(3f^2(x)+1\right)+3x^2>0, \forall x \in [-2;1]$

Vậy $h(x)$ là hàm đồng biến trên $[-2;1] \subset \mathbb{R}$.

Suy ra

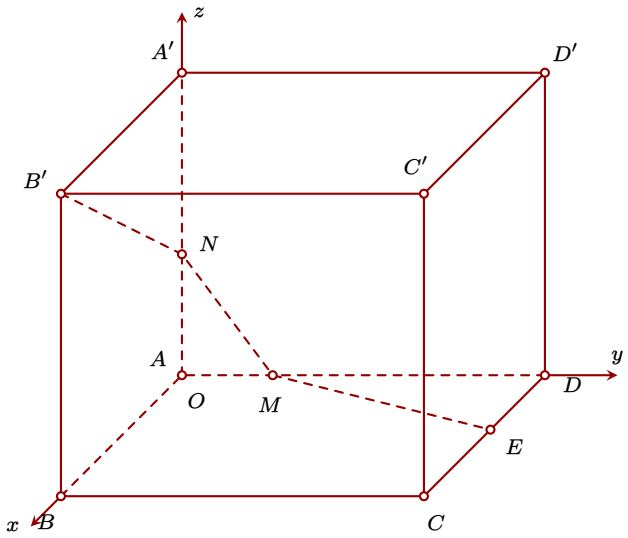
$\min\limits_{[-2;1]} h(x)=h(-2)=f^3(-2)+f(-2)-8+m=m-10$

$\max\limits_{[-2;1]} h(x)=h(1)=f^3(1)+f(1)+1+m=m+1343$.

Khi đó phương trình $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi $\min\limits_{[-2;1]} h(x) \leqslant 0 \leqslant \max\limits_{[-2;1]} h(x) \Leftrightarrow -1343 \leqslant m \leqslant 10$.

Mà m là số nguyên không âm nên $m \in \{0;1;2;\ldots;10\}$. Có tất cả 11 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 32.



Chọn hệ toạ độ $Oxyz$ sao cho O trùng với A; các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD và AA'. Ta có $B'(10;0;10)$ và $E(5;10;0)$.

$N \in Oz \Rightarrow N(0;0;a)$; $M \in Oy \Rightarrow M(0;b;0)$ (điều kiện $0 \leqslant a, b \leqslant 10$).

$\Rightarrow B'N = \sqrt{100 + (a-10)^2}$; $MN = \sqrt{a^2 + b^2}$; $ME = \sqrt{5^2 + (b-10)^2}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} B'N + MN + ME &= \sqrt{100 + (a-10)^2} + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{25 + (b-10)^2} \\ &= \sqrt{(10-a)^2 + 10^2} + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{5^2 + (10-b)^2} \\ &\geqslant \sqrt{(10 - a + a + 5)^2 + (10 + b + 10 - b)^2} = 25. \end{aligned}$$

(Áp dụng bất đẳng thức Mincôpxki).

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{10-a}{10} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{10-b} = \dfrac{10-a+a+5}{10+b+10-b} = \dfrac{15}{20} \Rightarrow a = \dfrac{5}{2}; b = \dfrac{10}{3}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy độ dài đoạn dây điện ngắn nhất bằng 25 dm.

Sở Vĩnh Phúc

Câu 1. Chọn đáp án D

Cỡ mẫu là $n = 8 + 10 + 16 + 24 + 13 + 7 + 4 = 82$.

Gọi mẫu số liệu điểm trung bình môn Toán xếp theo thứ tự không giảm là $x_1, x_2, \ldots, x_{82}$.

Do $\dfrac{n}{4} = \dfrac{82}{4} = 20{,}5$ nên tứ phân vị thứ nhất Q_1 thuộc nhóm $[7{,}5; 8)$.

Khi đó

$$Q_1 = 7{,}5 + \frac{20{,}5 - (8+10)}{16} \cdot 0{,}5 = \frac{485}{64}.$$

Do $\dfrac{3n}{4} = \dfrac{3 \cdot 82}{4} = 61{,}5$ nên tứ phân vị thứ ba Q_3 thuộc nhóm $[8{,}5; 9)$.

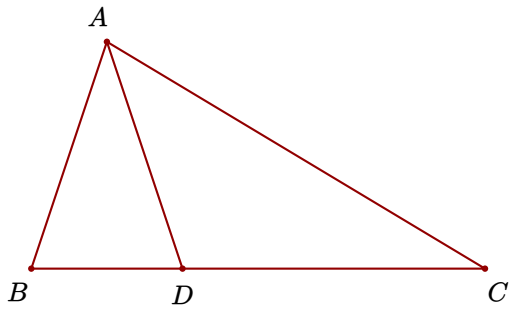
Khi đó

$$Q_3 = 8{,}5 + \frac{61{,}5 - (8+10+16+24)}{13} \cdot 0{,}5 = \frac{449}{52}.$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\Delta Q = Q_3 - Q_1 = \frac{449}{52} - \frac{485}{64} \approx 1{,}06.$$

Câu 2. Chọn đáp án C



Giả sử cạnh tam giác đều ABC bằng 1. Khi đó $CD = \dfrac{2}{3}$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ACD, ta có

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos C$$

$$= 1 + \frac{4}{9} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{9} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ACD, bán kính đường tròn ngoại tiếp R là

$$\frac{AD}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{AD}{2\sin 60^\circ} = \frac{\dfrac{\sqrt{7}}{3}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{9}.$$

Nửa chu vi và diện tích tam giác ACD lần lượt là

$$p = \frac{AC + CD + AD}{2} = \frac{1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{\sqrt{7}}{3}}{2} = \frac{5 + \sqrt{7}}{6}.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot CD \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Bán kính đường tròn nội tiếp r là

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{5+\sqrt{7}}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}.$$

Vậy tỉ số cần tìm là $\dfrac{R}{r} = \dfrac{\sqrt{21}}{9} \cdot \dfrac{5+\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \dfrac{7+5\sqrt{7}}{9}$.

Câu 3. Chọn đáp án C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	7	↘	-25	↗	$+\infty$

Vậy giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là $y_{\text{CT}} = -25$ tại $x = 3$.

Câu 4. Chọn đáp án D

Tiệm cận ngang: $y = \dfrac{a}{b} = 2 \Leftrightarrow a = 2b$ (1).

Tiệm cận đứng: $x = -\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow b = -3$.

Thay $b = -3$ vào (1), ta được $a = -6$.

Vậy $a = -6$, $b = -3$.

Câu 5. Chọn đáp án B

Do vectơ $\overrightarrow{b}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{a} = (1; -2; 4)$ nên tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a} = (k; -2k; 4k) \Rightarrow x_0 = k, y_0 = -2k, z_0 = 4k$.

Ta có

$|\overrightarrow{b}| = \sqrt{k^2 + (-2k)^2 + (4k)^2} = \sqrt{21} \Leftrightarrow \sqrt{21k^2} = \sqrt{21} \Leftrightarrow |k| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -1. \end{array}\right.$

Gọi $\overrightarrow{j} = (0; 1; 0)$ là vectơ đơn vị trên trục Oy. Vectơ $\overrightarrow{b}$ tạo với tia Oy một góc nhọn khi và chỉ khi

$\cos\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{j}\right) > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{j} > 0 \Leftrightarrow y_0 > 0 \Leftrightarrow -2k > 0 \Leftrightarrow k < 0$.

Do đó, chọn $k = -1 \Rightarrow \overrightarrow{b} = (-1; 2; -4)$, tức là $x_0 = -1, y_0 = 2, z_0 = -4$.

Vậy $x_0 + y_0 + z_0 = -1 + 2 - 4 = -3$.

Câu 6. Chọn đáp án B

Ta có $a > 0$, $d > 0$ và phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \ (1) \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} > 0 \ (2). \end{cases}$$

Từ (1), (2) và $a > 0$, suy ra $b < 0$ và $c > 0$.

Câu 7. Chọn đáp án B

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$.

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(1; 1)$ và $B(3; 5)$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là d: $2x - y - 1 = 0$.

Câu 8. Chọn đáp án B

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 9. Ta có $y'=\dfrac{-2m^2+m-3}{(x-3)^2}$.

Vì $-2m^2+m-3=-2\left(m-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{23}{8}<0,\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên $y'<0,\ \forall x\neq 3$.

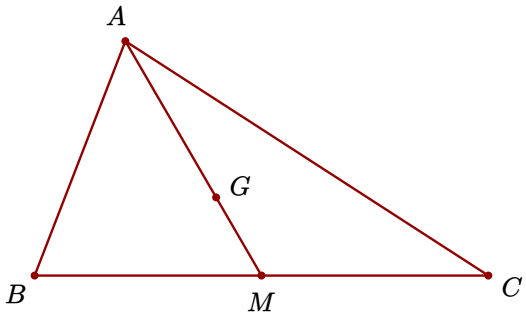
Do đó hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định, suy ra hàm số nghịch biến trên đoạn $[0;1]$.

Khi đó

$$\min_{[0;1]} y=y(1)=-2\Leftrightarrow\frac{1+2m^2-m}{1-3}=-2\Leftrightarrow 2m^2-m-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Vậy $m\in\left\{-1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Câu 10. Chọn đáp án A



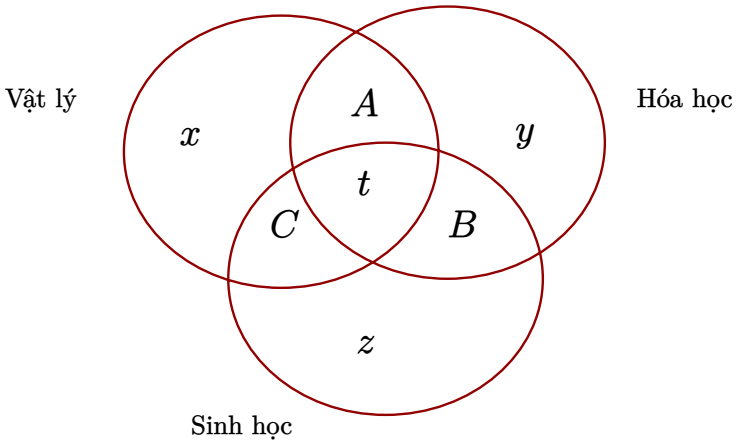
Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC, ta có:

$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=2\cdot\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AG}$.

Mặt khác, $\overrightarrow{AG}=(2-1;1-(-1);-3-(-2))=(1;2;-1)$.

Suy ra $\overrightarrow{u}=3\overrightarrow{AG}=(3;6;-3)$.

Câu 11. Chọn đáp án C



Từ biểu đồ Ven và giả thiết của bài toán, ta có:

$$\begin{cases} x+y+z=3t \\ x+A+C+t=24 \\ y+A+B+t=20 \\ z+B+C+t=22 \\ x+y+z+A+B+C+t=40 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3t \\ (x+y+z)+2(A+B+C)+3t=66 \\ (x+y+z)+(A+B+C)+t=40 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(A+B+C)+6t=66 \\ (A+B+C)+4t=40 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=12 \\ t=7. \end{cases}$$
Vậy số học sinh đăng kí học đúng hai môn là $A+B+C=12$.

Câu 12. Chọn đáp án A
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Ta có $y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\neq 1$.
Do đó, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 13. Chọn đáp án D
Gọi E là biến cố: "Cả hai học sinh đều nhận được phần thưởng và hai phần thưởng nhận được là khác nhau".
Vì sau khi rút thăm mỗi bạn đều hoàn lại phiếu vào hộp nên kết quả rút thăm của hai học sinh A và B là hai biến cố độc lập.
Xác suất để học sinh rút được phần thưởng là hộp bút, quyển vở, cặp sách lần lượt là:
$P_1=7{,}5\%=0{,}075$, $P_2=5\%=0{,}05$, $P_3=2{,}5\%=0{,}025$.
Để cả hai học sinh đều nhận được phần thưởng và hai phần thưởng nhận được là khác nhau, ta xét các trường hợp sau:
- Trường hợp 1: Học sinh A nhận hộp bút, học sinh B nhận quyển vở, xác suất là:
$0{,}075\cdot 0{,}05=0{,}00375$.
- Trường hợp 2: Học sinh A nhận hộp bút, học sinh B nhận cặp sách, xác suất là:
$0{,}075\cdot 0{,}025=0{,}001875$.
- Trường hợp 3: Học sinh A nhận quyển vở, học sinh B nhận hộp bút, xác suất là:
$0{,}05\cdot 0{,}075=0{,}00375$.
- Trường hợp 4: Học sinh A nhận quyển vở, học sinh B nhận cặp sách, xác suất là:
$0{,}05\cdot 0{,}025=0{,}00125$.
- Trường hợp 5: Học sinh A nhận cặp sách, học sinh B nhận hộp bút, xác suất là:
$0{,}025\cdot 0{,}075=0{,}001875$.
- Trường hợp 6: Học sinh A nhận cặp sách, học sinh B nhận quyển vở, xác suất là:
$0{,}025\cdot 0{,}05=0{,}00125$.
Do các trường hợp trên là xung khắc đôi một, xác suất của biến cố E là:
$$\begin{aligned} P(E)&=2\cdot(0{,}075\cdot 0{,}05+0{,}075\cdot 0{,}025+0{,}05\cdot 0{,}025)\\ &=2\cdot(0{,}00375+0{,}001875+0{,}00125)\\ &=0{,}01375=\frac{11}{800}. \end{aligned}$$

Câu 14. Chọn đáp án C

Ta có $\overrightarrow{AH}=(x_0-2;y_0;z_0)$, $\overrightarrow{BC}=(1;-1;3)$, $\overrightarrow{BH}=(x_0;y_0-2;z_0)$.
Vì $AH\perp BC$ nên: $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow(x_0-2)\cdot1+y_0\cdot(-1)+z_0\cdot3=0\Leftrightarrow x_0-y_0+3z_0=2\quad(1)$.
Hai vectơ $\overrightarrow{BH}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương, suy ra:
$\dfrac{x_0}{1}=\dfrac{y_0-2}{-1}=\dfrac{z_0}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0+y_0=2\\3x_0-z_0=0\end{cases}\quad(2)$.
Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases}x_0-y_0+3z_0=2\\x_0+y_0=2\\3x_0-z_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{4}{11}\\y_0=\dfrac{18}{11}\\z_0=\dfrac{12}{11}.\end{cases}$$
Vậy $x_0+y_0+z_0=\dfrac{4}{11}+\dfrac{18}{11}+\dfrac{12}{11}=\dfrac{34}{11}$.

Câu 15. Chọn đáp án C

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\cdot\dfrac{-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}\right]=+\infty$.
Vì
$\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}=-1<0$.

Câu 16. Chọn đáp án: a b c d
a) Tổng doanh thu của cửa hàng trong tháng là
$A(x)=2\,500\,000\cdot15+400\,000x=37\,500\,000+400\,000x$ (đồng).
Tổng chi phí của cửa hàng trong tháng là
$B(x)=2\,000\,000\cdot15+350\,000x+20\,000\,000=50\,000\,000+350\,000x$ (đồng).
Lợi nhuận (tiền lãi) của cửa hàng trong tháng là
$T(x)=A(x)-B(x)=50\,000x-12\,500\,000$ (đồng).
Tổng số sản phẩm bán ra gồm cả hai loại là $x+15$ sản phẩm ($x\in\mathbb{N}^*$). Do đó, tiền lãi trung bình cho mỗi sản phẩm bán ra trong tháng là
$L(x)=\dfrac{50\,000x-12\,500\,000}{x+15}$ (đồng/sản phẩm).
b) Ta có
$L'(x)=\dfrac{50\,000\cdot15-(-12\,500\,000)}{(x+15)^2}=\dfrac{13\,250\,000}{(x+15)^2}>0,\ \forall x\geqslant0$.
Do đó, hàm số $L(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.
Vậy tiền lãi trung bình cho mỗi sản phẩm bán ra trong tháng sẽ tăng lên khi số lượng sản phẩm phổ thông bán ra tăng lên.
c) Nếu mỗi tháng cửa hàng bán được 485 sản phẩm phổ thông thì tiền lãi trung bình cho mỗi sản phẩm bán ra trong tháng là
$L(485)=\dfrac{50\,000\cdot485-12\,500\,000}{485+15}=\dfrac{11\,750\,000}{500}=23\,500$ (đồng/sản phẩm).
d) Ta có
$\lim\limits_{x\to+\infty}L(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50\,000x-12\,500\,000}{x+15}=50\,000$.

Vì hàm số $L(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ và có tiệm cận ngang $y=50\,000$ khi $x\to+\infty$, nên khi số lượng sản phẩm phổ thông x tăng lên thì tiền lãi trung bình trên mỗi sản phẩm bán ra cũng tăng nhưng luôn nhỏ hơn và không vượt quá 50 000 đồng/sản phẩm.

Câu 17. Chọn đáp án: a b c d

a) Nếu mảng tường có kích thước 3 m $\times$ 2 m thì bạn A phải dùng hai miếng dán và chỉ có duy nhất 1 cách dán là đặt dọc cả hai miếng dán.

b) Nếu mảng tường có kích thước 3 m $\times$ 3 m thì bạn A phải dùng ba miếng dán và chỉ có đúng 2 cách dán: hoặc đặt dọc cả 3 miếng, hoặc đặt ngang cả 3 miếng.

c) Số cách dán mảng tường gồm các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Cả 6 miếng dán đều đặt dọc, có 1 cách.
- Trường hợp 2: Cả 6 miếng dán đều đặt ngang (chia thành 2 khối kích thước 3 m $\times$ 3 m gồm các miếng dán ngang), có 1 cách.
- Trường hợp 3: Có 3 miếng dán dọc và 3 miếng dán ngang, có $\mathrm{C}_4^1=4$ cách xếp khối 3 miếng dán ngang vào các vị trí xen kẽ.

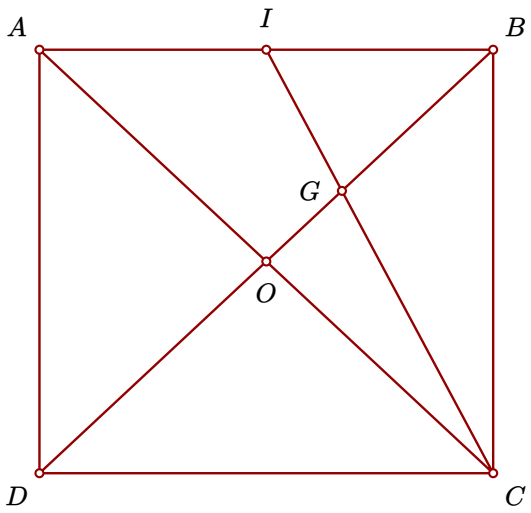
Vậy có tất cả $1+1+4=6$ cách dán.

d) Do mỗi khối dán ngang gồm đúng 3 miếng ghép lại thành một hình vuông kích thước 3 m $\times$ 3 m chiếm chiều rộng 3 m, ta xét các trường hợp theo số nhóm miếng dán ngang:

- Trường hợp 1: Không có miếng nào nằm ngang (14 miếng dán dọc), có 1 cách.
- Trường hợp 2: Có 1 nhóm ngang (3 miếng dán ngang) và 11 miếng dán dọc. Xếp 1 nhóm ngang vào 12 vị trí, có $\mathrm{C}_{12}^1=12$ cách.
- Trường hợp 3: Có 2 nhóm ngang (6 miếng dán ngang) và 8 miếng dán dọc. Xếp 2 nhóm ngang vào 10 vị trí, có $\mathrm{C}_{10}^2=45$ cách.
- Trường hợp 4: Có 3 nhóm ngang (9 miếng dán ngang) và 5 miếng dán dọc. Xếp 3 nhóm ngang vào 8 vị trí, có $\mathrm{C}_8^3=56$ cách.
- Trường hợp 5: Có 4 nhóm ngang (12 miếng dán ngang) và 2 miếng dán dọc. Xếp 4 nhóm ngang vào 6 vị trí, có $\mathrm{C}_6^4=15$ cách.

Tổng số cách dán là $1+12+\mathrm{C}_{10}^2+\mathrm{C}_8^3+\mathrm{C}_6^4=1+12+45+56+15=129$ (cách).

Câu 18. Chọn đáp án: a b c d



a) Ta có hình vuông $ABCD$ có $B(3;0;8)$ và $D(-5;-4;0)$ nên

$$BD=\sqrt{(-5-3)^2+(-4-0)^2+(0-8)^2}=\sqrt{64+16+64}=12\Rightarrow AB=BC=\frac{BD}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}.$$

Gọi I là trung điểm của cạnh AB, suy ra $BI=3\sqrt{2}$. Khi đó

$$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=2|\overrightarrow{CI}|=2\sqrt{BI^2+BC^2}=2\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(6\sqrt{2})^2}=6\sqrt{10}.$$

b) Vì tam giác BCE vuông tại B nên cạnh huyền CE luôn lớn hơn cạnh góc vuông BC, do đó $BC < CE$.
c) Gọi O là giao điểm của AC và BD, suy ra O là trung điểm của BD.
Vì $G(x_0;y_0;z_0)$ là trọng tâm của tam giác ABC nên
$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}(-8;-4;-8) = \left(-\frac{8}{3};-\frac{4}{3};-\frac{8}{3}\right)$.
Suy ra
$$\begin{cases} x_0 = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3} \\ y_0 = 0 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \\ z_0 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right).$$
d) Gọi $A(x_0;y_0;0) \in (Oxy)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3-x_0;-y_0;8)$ và $\overrightarrow{AD} = (-5-x_0;-4-y_0;0)$.
Vì tam giác ABD vuông cân tại A nên
$$\begin{cases} AB^2 = 72 \\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0-3)^2 + y_0^2 + 64 = 72 \\ (x_0-3)(x_0+5) + y_0(y_0+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 6x_0 + y_0^2 + 1 = 0 \\ x_0^2 + 2x_0 + y_0^2 + 4y_0 - 15 = 0. \end{cases}$$
Lấy phương trình thứ hai trừ phương trình thứ nhất, ta được
$8x_0 + 4y_0 - 16 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 4 - 2x_0$.
Thay vào phương trình đầu:
$$x_0^2 - 6x_0 + (4-2x_0)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x_0^2 - 22x_0 + 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2 \\ x_0 = \frac{17}{5} \text{ (loại vì tọa độ nguyên/điều kiện bài toán).} \end{array}\right.$$
Suy ra $A(1;2;0)$, kéo theo $\overrightarrow{AB} = (2;-2;8) = 2(1;-1;4)$.
Đường thẳng CD đi qua điểm $D(-5;-4;0)$ và nhận $\vec{u} = (1;-1;4)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số
$$\begin{cases} x = -5 + t \\ y = -4 - t \\ z = 4t. \end{cases}$$
Điểm $M \in CD \Rightarrow M(-5+t;-4-t;4t)$.
Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Rightarrow K\left(\frac{7}{3};\frac{2}{3};\frac{16}{3}\right)$.
Khi đó $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}| = 3MK$.
Đoạn thẳng MK đạt giá trị nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của K lên đường thẳng CD, tương ứng với $t = \frac{4}{3}$.
Thay tọa độ điểm $M\left(-\frac{11}{3};-\frac{16}{3};\frac{16}{3}\right)$ vào phương trình mặt phẳng $x+y+z=6$, ta được
$-\frac{11}{3} - \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{11}{3} \neq 6$ (mâu thuẫn).

Câu 19. Chọn đáp án: a b c d
a) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.
b) Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(0;2)$ và $(2;-2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f(0)=2 \\ f(2)=-2 \\ f'(0)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ 8a+4b+2c+d=-2 \\ c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2. \end{cases}$$
Suy ra $y=f(x)=x^3-3x^2+2$.
c) Phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-2<m<2$.
d) Xét hàm số $y=f(2\sin x+1)$.
Đặt $t=2\sin x+1$. Vì $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$ nên $-1\leqslant t\leqslant 3$. Khi đó hàm số trở thành $y=f(t)=t^3-3t^2+2$ với $t\in[-1;3]$.
Ta có $f'(t)=3t^2-6t$; $f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in(-1;3) \\ t=2\in(-1;3). \end{array}\right.$
Tính các giá trị $f(0)=2$, $f(2)=-2$, $f(-1)=-2$, $f(3)=2$.
Suy ra $M=\max\limits_{[-1;3]} f(t)=2$ và $m=\min\limits_{[-1;3]} f(t)=-2$. Do đó $M+m=0$.

Câu 20. Chọn đáp án: a b c d
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.
b) Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$.
c) Hàm số có dạng $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ $(a\neq 0,\ d\neq 0)$. Ta có:
Đồ thị có tiệm cận đứng $x=1\Rightarrow -\dfrac{e}{d}=1\Leftrightarrow d=-e$ (1).
Điểm cực đại của đồ thị là $(3;8)$ nên
$\begin{cases} f'(3)=0 \ (2) \\ f(3)=8 \ (3). \end{cases}$
Điểm cực tiểu của đồ thị là $(-1;0)$ nên
$\begin{cases} f'(-1)=0 \ (4) \\ f(-1)=0 \ (5). \end{cases}$
Đồ thị cắt trục tung tại $(0;-1)\Rightarrow f(0)=-1 \quad (6)$.
Chuẩn hóa chọn $d=1\Rightarrow e=-1$.
Từ (1), (2), (3), (4), (5), (6), ta tìm được
$a=1$, $b=2$, $c=1$, $d=1$, $e=-1$.
Suy ra $y=f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}=x+3+\dfrac{4}{x-1}$.
d) Tâm đối xứng của đồ thị là giao điểm của hai đường tiệm cận $I(1;4)$.
Gọi $M\left(a;a+3+\dfrac{4}{a-1}\right)$ với $a>0$, $a\neq 1$ là điểm thuộc đồ thị. Khi đó
$IM=\sqrt{(a-1)^2+\left(a-1+\dfrac{4}{a-1}\right)^2}$.
Đặt $t=(a-1)^2>0$, ta có

$IM = \sqrt{t + \left(t + 8 + \dfrac{16}{t}\right)} = \sqrt{2t + 8 + \dfrac{16}{t}} \geqslant \sqrt{8 + 2\sqrt{2t \cdot \dfrac{16}{t}}} = \sqrt{8 + 8\sqrt{2}}.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

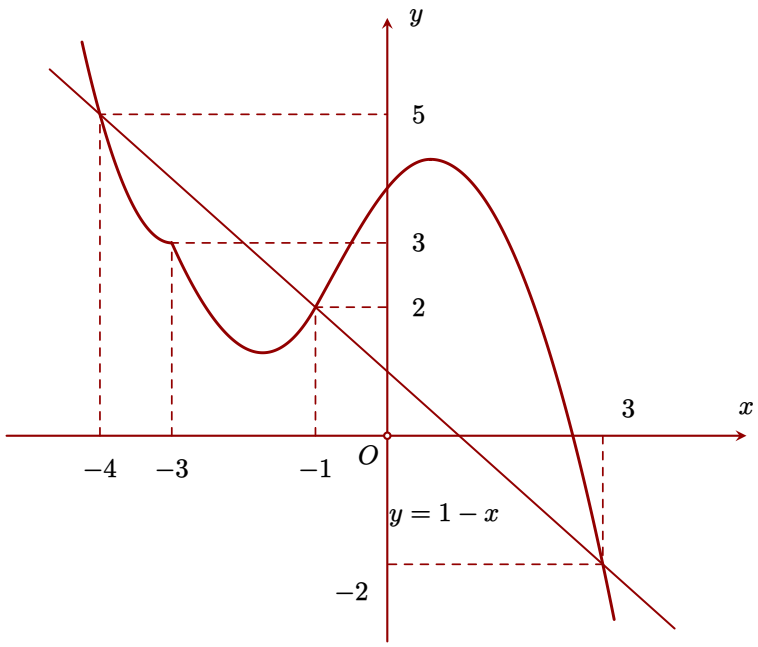
$2t = \dfrac{16}{t} \Leftrightarrow t^2 = 8 \Leftrightarrow t = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (a-1)^2 = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 1 + \sqrt{2\sqrt{2}}$ (do $a > 0$).

Câu 21. Đáp án: .

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ với $x \in [-4; 3]$.

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) = 2\left[f'(x) - (1-x)\right]$.

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x$.



Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $d : y = 1 - x$.

Dựa vào đồ thị, trên đoạn $[-4; 3]$ ta có:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3. \end{bmatrix}$$

Bảng biến thiên:

x	-4		-1		3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$g(-4)$	↘	$g(-1)$	↗	$g(3)$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[-4;3]} g(x) = g(-1) = 2f(-1) + (1-(-1))^2 = 2 \cdot 2 + 4 = 8$ tại $x = -1$.

Câu 22. Đáp án: 0,11.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 6 học sinh trong số 20 học sinh, do đó:

$n(\Omega) = \mathrm{C}_{20}^{6} = 38\,760$.
Gọi A là biến cố: "Trong 6 học sinh được chọn không có hai học sinh nào đứng cạnh nhau".
Đánh số các vị trí của 20 học sinh theo thứ tự vòng tròn theo chiều kim đồng hồ là $1, 2, \ldots, 20$.
Để chọn 6 học sinh không có hai học sinh nào cạnh nhau trong vòng tròn, ta chia thành hai trường hợp:
- Trường hợp 1: Chọn học sinh ở vị trí số 1.
Khi đó, học sinh ở vị trí số 2 và số 20 không được chọn.
Bài toán trở thành chọn 5 học sinh từ tập $\{3, 4, \ldots, 19\}$ gồm 17 phần tử xếp thành hàng ngang sao cho không có hai người nào cạnh nhau.
Theo bài toán chia kẹo Euler (hoặc phương pháp vách ngăn), số cách chọn là:
$\mathrm{C}_{17-5+1}^{5} = \mathrm{C}_{13}^{5} = 1\,287$ (cách).
- Trường hợp 2: Không chọn học sinh ở vị trí số 1.
Khi đó, ta cần chọn 6 học sinh từ tập $\{2, 3, \ldots, 20\}$ gồm 19 phần tử xếp thành hàng ngang sao cho không có hai người nào cạnh nhau.
Số cách chọn là:
$\mathrm{C}_{19-6+1}^{6} = \mathrm{C}_{14}^{6} = 3\,003$ (cách).
Số phần tử của biến cố A là:
$n(A) = \mathrm{C}_{13}^{5} + \mathrm{C}_{14}^{6} = 1\,287 + 3\,003 = 4\,290$.
Xác suất của biến cố A là:
$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4\,290}{38\,760} = \frac{143}{1\,292} \approx 0{,}11.$$

Câu 23. Đáp án: 134.
Ta có
$$MA^2 = (x_M - 1)^2 + (y_M + 2)^2 + (z_M - 1)^2 = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 - 2x_M + 4y_M - 2z_M + 6,$$
$$MB^2 = x_M^2 + (y_M - 2)^2 + (z_M + 1)^2 = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 - 4y_M + 2z_M + 5,$$
$$MC^2 = (x_M - 2)^2 + (y_M + 3)^2 + (z_M - 1)^2 = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 - 4x_M + 6y_M - 2z_M + 14.$$
Khi đó
$$\begin{aligned} T &= MA^2 - MB^2 + MC^2 \\ &= x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 - 6x_M + 14y_M - 6z_M + 15 \\ &= (x_M - 3)^2 + (y_M + 7)^2 + (z_M - 3)^2 - 52. \end{aligned}$$
Vì $(x_M - 3)^2 \geqslant 0$, $(y_M + 7)^2 \geqslant 0$, $(z_M - 3)^2 \geqslant 0$ với mọi x_M, y_M, z_M nên $T \geqslant -52$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} x_M - 3 = 0 \\ y_M + 7 = 0 \\ z_M - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3 \\ y_M = -7 \\ z_M = 3. \end{cases}$$
Suy ra $M(3; -7; 3)$. Khi đó giá trị của biểu thức P là
$P = x_M^2 + 2y_M^2 + 3z_M^2 = 3^2 + 2 \cdot (-7)^2 + 3 \cdot 3^2 = 134$.

Câu 24. Đáp án: 8.
Ta có
$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} y &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{2x^2 - 2x - m} - x - 1} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{\sqrt{2 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{m}{x^2}} - 1 - \dfrac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$
Do đó, đường thẳng $y = \sqrt{2} + 1$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Lại có

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{-\sqrt{2-\frac{2}{x}-\frac{m}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}$$
$$= \frac{1}{-\sqrt{2}-1} = 1-\sqrt{2}.$$

Do đó, đường thẳng $y = 1-\sqrt{2}$ là tiệm cận ngang thứ hai của đồ thị hàm số.
Như vậy, đồ thị hàm số luôn có đúng hai đường tiệm cận ngang.
Đồ thị hàm số có đúng bốn đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng.
Điều này tương đương với phương trình mẫu số bằng 0 có hai nghiệm phân biệt khác 1 và thỏa mãn điều kiện xác định:

$$\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x-m}=x+1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -1 \\ 2x^2-2x-m=(x+1)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -1 \\ x^2-4x-1=m. \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $x^2-4x-1=m$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x\geqslant -1$ và $x\neq 1$.
Xét hàm số $f(x)=x^2-4x-1$ trên $[-1;+\infty)$.
Ta có $f'(x)=2x-4$.
Xét phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2\in[-1;+\infty)$.
Các giá trị tương ứng $f(-1)=4$, $f(2)=-5$, $f(1)=-4$.
Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $[-1;+\infty)$:

x	-1		2		$+\infty$
$y=x^2-4x-1$	-4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1;+\infty)$ và khác 1 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} -5<m\leqslant 4 \\ m\neq -4. \end{cases}$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.
Vậy tập hợp S có 8 phần tử.

Câu 25. Đáp án: 2,5.
Gọi A, B lần lượt là vị trí của chiếc flycam thứ nhất và thứ hai sau khi bay lên.
Theo giả thiết, tọa độ của hai điểm là $A(3;2;5)$ và $B(-6;-6;5)$.
Vị trí cần tìm trên mặt đất là điểm $M(x;y;0)\in(Oxy)$.
Do $z_A=5>0$ và $z_B=5>0$ nên hai điểm A, B nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy).
Gọi $B'(-6;-6;-5)$ là điểm đối xứng với điểm B qua mặt phẳng (Oxy).

Khi đó, với mọi điểm $M \in (Oxy)$, ta có $MB = MB'$, suy ra
$MA + MB = MA + MB' \geqslant AB'$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của đoạn thẳng AB' với mặt phẳng (Oxy), tức là $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB'}$.
Ta có
$\overrightarrow{AM} = (x-3; y-2; -5)$,
$\overrightarrow{AB'} = (-9; -8; -10)$.
Do đó

$$\frac{x-3}{-9} = \frac{y-2}{-8} = \frac{-5}{-10} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = -9 \cdot \dfrac{1}{2} \\ y - 2 = -8 \cdot \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}; -2; 0\right).$$

Vậy khoảng cách từ điểm xuất phát đến vị trí M là

$$OM = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ m}.$$

Câu 26. Đáp án: 12.
Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x-1) + m|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) + m|$.
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thấy hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị đơn.
Do đó, hàm số $u(x) = f(x) + m$ cũng có 3 điểm cực trị.
Số điểm cực trị của hàm số $y = |u(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của $u(x)$ và số nghiệm đơn (hoặc nghiệm bội lẻ) của phương trình $u(x) = 0$.
Để hàm số $y = |f(x) + m|$ có đúng 5 điểm cực trị thì phương trình $f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -m$ phải có đúng 2 nghiệm đơn (hoặc nghiệm bội lẻ).
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị tại đúng 2 điểm phân biệt (không tính điểm tiếp xúc) khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} -m > 2 \\ -6 < -m \leqslant -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ 3 \leqslant m < 6. \end{array}\right.$$

Vì m là số nguyên dương nên $m \in \{3; 4; 5\}$.
Do đó, tập hợp $S = \{3; 4; 5\}$.
Vậy tổng các phần tử của tập hợp S là $3 + 4 + 5 = 12$.

Câu 27. Đáp án: 1200.
Lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa là:
$L(x) = 220x - C(x) = 220x - (x^3 - 3x^2 - 20x + 500) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ (nghìn đồng).
Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ trên đoạn $[1; 18]$.
Ta có $L'(x) = -3x^2 + 6x + 240$.
Xét phương trình $L'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \in [1; 18] \\ x = -8 \notin [1; 18] \text{ (loại).} \end{array}\right.$
Tính giá trị của hàm số tại các điểm: $L(1) = -258$, $L(10) = 1\,200$, $L(18) = -1\,040$.
Suy ra $\max\limits_{[1;18]} L(x) = L(10) = 1\,200$.
Vậy lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày bằng 1 200 nghìn đồng (khi sản xuất và bán ra 10 m vải).

Câu 28. Đáp án: 9.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Ta có: $y' = \dfrac{(2x+m)(x+1) - (x^2 + mx + 2m)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - m}{(x+1)^2}$.
Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B khi và chỉ khi phương trình $x^2 + 2x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1:

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1+m > 0 \\ (-1)^2 + 2(-1) - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -1-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$

Khi $m > -1$, phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = -1 + \sqrt{m+1}$,

$x_2 = -1 - \sqrt{m+1}$.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình $y = 2x + m$, do đó tọa độ hai điểm cực trị là

$A\left(-1+\sqrt{m+1};\, m-2+2\sqrt{m+1}\right)$,

$B\left(-1-\sqrt{m+1};\, m-2-2\sqrt{m+1}\right)$.

Để tồn tại tam giác OAB thì A, B không trùng với gốc tọa độ $O(0;0)$, suy ra $m \neq 0$.

Tam giác OAB vuông tại O khi và chỉ khi:

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(-1+\sqrt{m+1}\right)\left(-1-\sqrt{m+1}\right) + \left(m-2+2\sqrt{m+1}\right)\left(m-2-2\sqrt{m+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow [1-(m+1)] + \left[(m-2)^2 - 4(m+1)\right] = 0$

$\Leftrightarrow -m + \left(m^2 - 4m + 4 - 4m - 4\right) = 0$

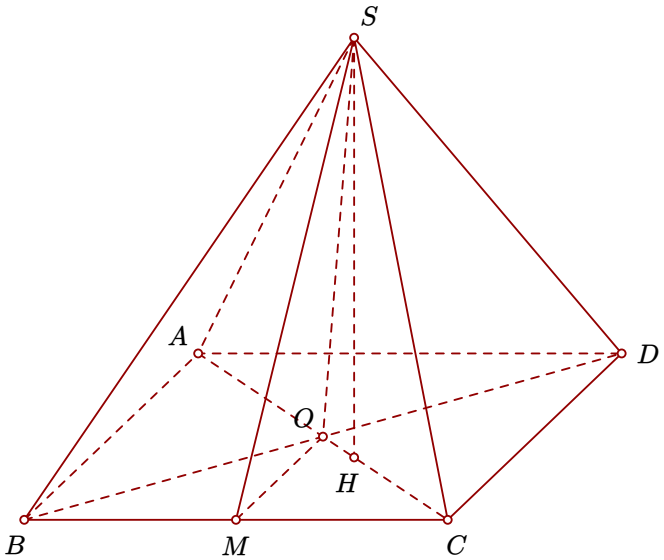
$\Leftrightarrow m^2 - 9m = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = 9 \text{ (thỏa mãn)}. \end{array}\right.$

Do đó, tập hợp $S = \{9\}$.

Vậy tổng các phần tử của tập hợp S bằng 9.

Câu 29. Đáp án: 0,81.



Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh $\sqrt{3}$ nên $AC \perp BD$ tại O.

Mặt khác, $\Delta SBD = \Delta CBD$ (c-c-c) do $SB = SD = CB = CD = \sqrt{3}$ và chung cạnh BD.

Suy ra trung tuyến $SO = CO = OA = \dfrac{1}{2}AC$, do đó ΔSAC vuông tại S.

Ta có $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow OA = OC = \sqrt{2}$.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $SH \perp AC$ tại H.

Vì $(SAC) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$ và $H \in AC$.

Xét ΔSAC vuông tại S có đường cao SH

$SH = \dfrac{SA \cdot SC}{AC} = \dfrac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{30}}{4}$,

$CH = \dfrac{SC^2}{AC} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{CH}{CO} = \dfrac{\frac{3}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(C,(SMO))}{\mathrm{d}(H,(SMO))} = \dfrac{CO}{HO} = 4.$

Vì M là trung điểm của BC nên $OM \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (SMO)$.

Suy ra

$\mathrm{d}(CD,SM) = \mathrm{d}(CD,(SMO)) = \mathrm{d}(C,(SMO)) = 4\mathrm{d}(H,(SMO))$.

Xét tam giác OAB vuông tại O có $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{3-2} = 1$.

Diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}OB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Khoảng cách từ C đến AB là

$\mathrm{d}(C,AB) = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Vì $OM \parallel AB$ và OM đi qua trung điểm BC nên:

$\mathrm{d}(C,OM) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(C,AB) \Rightarrow \mathrm{d}(H,OM) = \dfrac{1}{4}\mathrm{d}(C,OM) = \dfrac{1}{8}\mathrm{d}(C,AB) = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$.

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên

$\dfrac{1}{\mathrm{d}^2(H,(SMO))} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{\mathrm{d}^2(H,OM)} = \dfrac{16}{30} + \dfrac{144}{6} = \dfrac{368}{15} \Rightarrow \mathrm{d}(H,(SMO)) = \dfrac{\sqrt{345}}{92}$.

Vậy

$\mathrm{d}(SM,CD) = 4\mathrm{d}(H,(SMO)) = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{345}}{92} = \dfrac{\sqrt{345}}{23} \approx 0{,}81$.

Câu 30. Đáp án: 4048.

Điều kiện: $x,y,z > 0$ và $x,y,z \neq 1$.

Đặt $a = \log_2 x$, $b = \log_2 y$, $c = \log_2 z$ $(a,b,c \neq 0)$.

Hệ điều kiện đã cho trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2024} \\ a+b+c = 2024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+bc+ca = \dfrac{abc}{2024} \\ a+b+c = 2024 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) = abc.$$

Biến đổi phương trình trên:

$(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 0 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0. \end{array}\right.$$

Do vai trò của x,y,z (hay a,b,c) là đối xứng nên không mất tính tổng quát, giả sử $a+b=0$.

Khi đó

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=2024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 0 \\ \log_2 z = 2024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ z = 2^{2024}. \end{cases}$$

Thay vào biểu thức T, ta được

$$\begin{aligned} T &= \log_2[xyz(x+y+z) - xy - z(x+y) + 1] \\ &= \log_2[1 \cdot z(x+y+z) - 1 - z(x+y) + 1] \\ &= \log_2[z(x+y) + z^2 - z(x+y)] \\ &= \log_2(z^2) \\ &= \log_2\left[\left(2^{2024}\right)^2\right] \\ &= \log_2(2^{4048}) \\ &= 4048. \end{aligned}$$

Vậy $T = 4048$.

Liên Trường Bắc Ninh

Câu 1. Chọn đáp án D

Vì hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc ba nên đồ thị hàm số $y=g(x)$ có một tiệm cận ngang $y=0$.

Vì $x^4-x^2+2\,020=0$ vô nghiệm nên để đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 6 tiệm cận thì phương trình $f^2(x)-2(m+1)f(x)+5(2m-3)=0$ có 5 nghiệm phân biệt.

Ta có $f^2(x)-2(m+1)f(x)+5(2m-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=5\ (1) \\ f(x)=2m-3\ (2). \end{array}\right.$

Xét phương trình (1). Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy

$f(x)=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=a>3. \end{array}\right.$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt nên để đồ thị hàm số có 6 tiệm cận thì (2) có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm ở phương trình (1).

Từ đồ thị hàm số, ta thấy điều kiện thỏa mãn là $3<2m-3<5 \Leftrightarrow 3<m<4$.

Vậy không có giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 2. Chọn đáp án C

Đặt $x^3-3x^2+2=t$.

Xét hàm số $t=x^3-3x^2+2$ trên $[1;3)$.

Ta có $t'=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ (\text{loại}) \\ x=2. \end{array}\right.$

$y(1)=0$, $y(2)=-2$, $y(3)=2$ nên $t\in[-2;2)$.

Vậy phương trình có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1;3)$ khi phương trình $f(t)=m^2-3m$ có nghiệm thuộc $[-2;2)$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy phương trình $f(t)=m^2-3m$ có nghiệm $t\in[-2;2)$ khi

$$-2\leqslant m^2-3m\leqslant 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2\geqslant 0 \\ m^2-3m-4\leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty) \\ m\in[-1;4] \end{cases}$$

$$\Rightarrow m\in[-1;1]\cup[2;4].$$

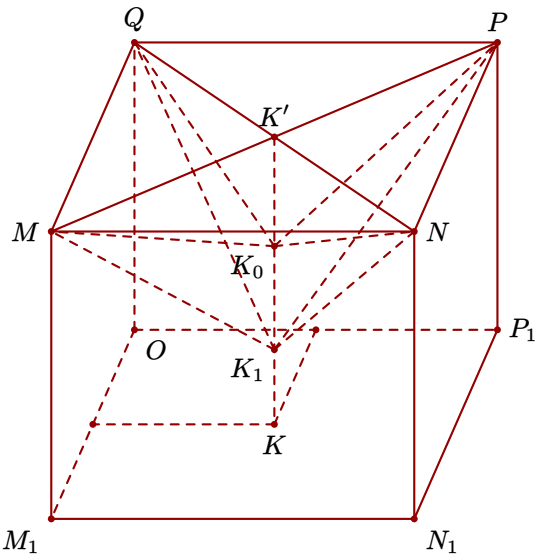
Vậy có 6 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 3. Chọn đáp án C

Ta có $y=\dfrac{x^2+3x-2}{x+3}=x-\dfrac{2}{x+3}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{2}{x+3}-x\right)=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y=x$.

Câu 4. Chọn đáp án A



Gọi M_1, N_1, P_1, K lần lượt là hình chiếu của M, N, P, K_0 lên mặt phẳng (Oxy).
Ta thấy $MNPQ.M_1N_1P_1O$ là hình hộp chữ nhật.
Gọi K' là giao hai đường chéo MP và NQ. Khi đó $KQ = KP = KN = KM$.
Ta có $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$ và camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng từ điểm K_0 xuống điểm K_1 nên các điểm K', K_0, K_1, K thẳng hàng.
Ta có $K_0(a;b;25)$ và $K_1(a;b;19)$.
Ta có $MNPQ.M_1N_1P_1O$ là hình hộp chữ nhật nên $KK' = OQ$, suy ra cao độ của K' bằng 30.
Do đó, $K'(a;b;30)$.
Ta có $\overrightarrow{K'Q} = (-a;-b;0)$, $\overrightarrow{NK'} = (a-90;b-120;0)$.
Vì K' là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật $MNPQ$ nên K' là trung điểm của NQ.
Suy ra $\overrightarrow{K'Q} = \overrightarrow{NK'} \Rightarrow \begin{cases} -a = a-90 \\ -b = b-120 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 45 \\ b = 60. \end{cases}$
Vậy $K_1(45;60;19)$ và $a+b = 45+60 = 105$.

Câu 5. Chọn đáp án A
Tập xác định $\mathscr{D} = [1;9]$.
Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{9-x}} = \dfrac{\sqrt{9-x}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\sqrt{9-x}}$.
Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x}-\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 5 \in (1;9)$.
$y(1) = 2\sqrt{2}$, $y(5) = 4$, $y(9) = 2\sqrt{2}$.
Vậy $M = 4$, $m = 2\sqrt{2}$ suy ra $M + m = 4 + 2\sqrt{2}$.

Câu 6. Chọn đáp án D
Dựa vào đồ thị, hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

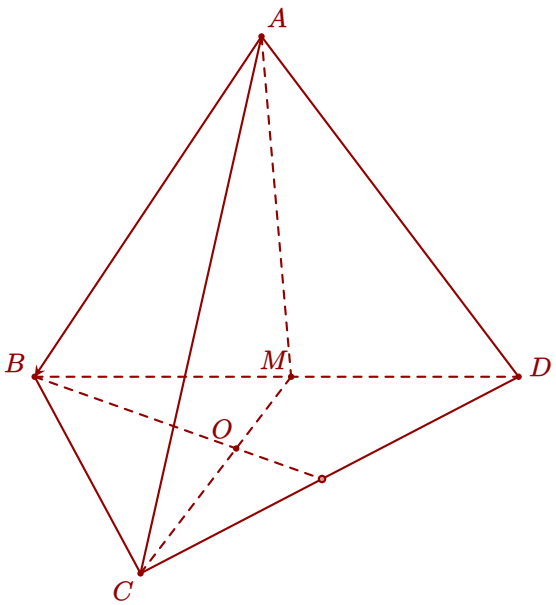
Câu 7. Chọn đáp án A
Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2-1)$.
Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m-1 \\ x = m+1 \end{array}\right. \Rightarrow y' \geqslant 0,\ \forall x \in (-\infty;m-1] \cup [m+1;+\infty)$.
Do đó để hàm số đồng biến trên $(2\,024;+\infty) \Leftrightarrow m+1 \leqslant 2\,024 \Leftrightarrow m \leqslant 2\,023$.
Do m nguyên và chia hết cho 3 nên $m \in \{-2\,022;\ldots;0;3;\ldots;2\,022\}$.
Vậy có $(2\,022 + 2\,022) : 3 + 1 = 1\,349$ số.

Câu 8. Chọn đáp án D
Tiệm cận ngang $y = a \Rightarrow a = -1$
Giao điểm trục tung $x = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow b = -2$
Vậy $b < a < 0$.

Câu 9. Chọn đáp án C
Giá trị trung bình là
$\overline{x} = \dfrac{1}{18}(6 \cdot 22{,}5 + \ldots + 1 \cdot 42{,}5) \approx 28{,}3.$
Độ lệch chuẩn là
$s = \sqrt{\dfrac{1}{18}(6 \cdot 22{,}5^2 + \ldots + 1 \cdot 42{,}5^2) - 28{,}3^2} \approx 5{,}76.$

Câu 10. Chọn đáp án A
Dễ thấy hai mặt phẳng $(AB'C'D)$ và $(A'KC)$ cắt nhau theo giao tuyến KO. Khi đó G là giao điểm của KO với AB'. Lại có tứ giác $AB'C'D$ là hình bình hành tâm O nên $\dfrac{AG}{KC'} = \dfrac{AO}{OC'} = 1 \Rightarrow AG = KC' = \dfrac{2}{3}AB'$.
Khi đó:
$$\begin{aligned}\overrightarrow{GK} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC'} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}\right) + \overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}.\end{aligned}$$

Câu 11. Chọn đáp án C



Do tứ diện $ABCD$ đều nên O là trọng tâm tam giác đều BCD.
Gọi M là trung điểm của BD, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{MC}\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}\right)\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}\\&=\frac{2}{3}a\cdot a\cdot\cos 60^\circ-\frac{2}{3}a\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 30^\circ\\&=-\frac{a^2}{6}.\end{aligned}$$

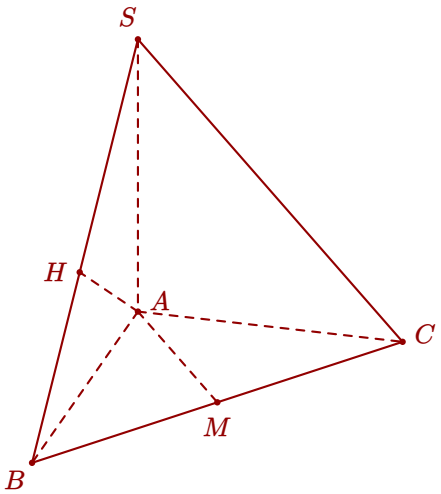
Câu 12. Chọn đáp án C

Ta có tam giác ABC cân tại A. Góc nhị diện cần tìm là $\widehat{BAC}$.

Xét tam giác ABC có $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=-\dfrac{233}{392}$.

Suy ra $\widehat{BAC}\approx 126{,}47^\circ$.

Câu 13. Chọn đáp án D



Ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=7a^2\Rightarrow BC=a\sqrt{7}$.

Mà $AM^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=\dfrac{3a^2}{4}\Rightarrow AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow\cos\widehat{BAM}=\dfrac{AB^2+AM^2-BM^2}{2AB\cdot AM}=0$.

Suy ra $AM\perp AB\Rightarrow AM\perp(SAB)$.

Từ A kẻ $AH\perp SB$ tại $H\Rightarrow AH=\mathrm{d}(SB,AM)$.

Ta có ΔSAB vuông cân tại $A\Rightarrow AH=\dfrac{1}{2}SB=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14. Chọn đáp án A

Vì máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay nên $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x-940=70\\y-550=25\\z-9=1\end{cases}\begin{cases}x=1010\\y=575\\z=10\end{cases}\Rightarrow$

$x+y+z=1\,595$.

Câu 15. Chọn đáp án D

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=(3+7+15)\cdot(10+6+9)=625$.

TH1: Lấy được hai quả màu trắng có $3 \cdot 10 = 30$ cách.
TH2: Lấy được hai quả cầu đỏ có $7 \cdot 6 = 42$ cách.
TH3: Lấy được hai quả cầu xanh có $15 \cdot 9 = 135$ cách.
Khi đó, số cách lấy được hai quả cùng màu là: $30 + 42 + 135 = 207$ cách.
Xác suất lấy được hai quả cùng màu là: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{207}{625}$.

Câu 16. Chọn đáp án A

Ta có $f'(t) = \dfrac{2\,024(1+4\mathrm{e}^{-t})'}{(1+4\mathrm{e}^{-t})^2} = \dfrac{2\,024 \cdot 4\mathrm{e}^{-t}}{(1+4\mathrm{e}^{-t})^2}$, $\forall t \in (0;+\infty)$.

$$f''(t) = \frac{8\,096\left[(-\mathrm{e}^{-t})(1+4\mathrm{e}^{-t})^2 + \mathrm{e}^{-t} \cdot 2 \cdot 4\mathrm{e}^{-t}(1+4\mathrm{e}^{-t})\right]}{(1+4\mathrm{e}^{-t})^4}$$
$$= \frac{8\,096(1+4\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t}(-1+4\mathrm{e}^{-t})}{(1+4\mathrm{e}^{-t})^4}.$$

Xét phương trình $f''(t) = 0 \Leftrightarrow -1 + 4\mathrm{e}^{-t} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-t} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow t = \ln 4 = 2\ln 2$.
Bảng biến thiên.
Vậy tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất sau $2\ln 2 \approx 1{,}38$ tháng.

Câu 17. Chọn đáp án D

Từ đồ thị thấy $A(0;3)$, $B(2;-1)$ là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(0) = 0 \\ f(2) = -1 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ c = 0 \\ 8a + 4b = -4 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ c = 0 \\ a = 1 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

Vậy $\displaystyle\int_0^2 |f'(x)|\mathrm{d}x = \int_0^2 |3x^2 - 6x|\mathrm{d}x = 4$.

Câu 18. Chọn đáp án B

Ta có $v(t) = \displaystyle\int a(t)\mathrm{d}t = \int (4-2t)\mathrm{d}t = 4t - t^2 + C$, $t \in (0;+\infty)$.
Lúc bắt đầu chuyển động $t = 0$: $v(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = 4t - t^2$.
Khi đó $v(t) = 4t - t^2 = -(t-2)^2 + 4 \leqslant 4$.
$\Rightarrow v_{\max} = 4$ m/s $\Leftrightarrow t = 2$ s.
Vậy $s = \displaystyle\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 (4t - t^2)\mathrm{d}t = \dfrac{16}{3}$ m.

Câu 19. Chọn đáp án C

Ta có
$u_1 = 0$.
$u_2 = u_1 + 4 \cdot 1 + 3$.
$u_3 = u_2 + 4 \cdot 2 + 3$.
$u_4 = u_3 + 4 \cdot 3 + 3$.
$\ldots$
$u_n = u_{n-1} + 4(n-1) + 3$.
Cộng vế với vế của các đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} u_n &= 4\cdot 1 + 4\cdot 2 + \ldots + 4(n-1) + 3(n-1) \\ &= 4[1+2+\ldots+(n-1)] + 3(n-1) \\ &= \frac{4n(n-1)}{2} + 3n - 3 \\ &= \frac{4n^2+2n-6}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $\lim \dfrac{u_n}{n^2} = \lim \dfrac{4n^2+2n-6}{2n^2} = \lim \dfrac{4+\dfrac{2}{n}-\dfrac{6}{n^2}}{2} = 2.$

Câu 20. Chọn đáp án C

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như sau:

x	-2		-1		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$, ta thấy nếu hàm số đạt giá trị lớn nhất thì chỉ có thể đạt được tại $x = -1$ hoặc $x = 6$.

Mặt khác, dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta thấy:

$$-\int_{-1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x < \int_{2}^{6} f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(-1) - f(2) < f(6) - f(2) \Leftrightarrow f(-1) < f(6).$$

Câu 21. Chọn đáp án C

Thể tích của phần ngôi nhà có dạng là hình lăng trụ có đáy là tam giác ABE là

$V_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot 12 = 48\ (\mathrm{m}^3)$.

Thể tích của phần ngôi nhà có dạng hình lăng trụ có đáy là hình chữ nhật $BECD$ là

$V_2 = 4{,}3\cdot 4\cdot 12 = 206{,}4\ (\mathrm{m}^3)$.

Vậy thể tích của ngôi nhà là $V = V_1 + V_2 = 48 + 206{,}4 = 254{,}4\ (\mathrm{m}^3)$.

Câu 22. Chọn đáp án A

Điều kiện: $4^x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$ $(*)$.

Xét hàm số $f(x) = 3^{2-x} + 3 - 2x$ trên tập $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = -3^{2-x}\ln 3 - 2 < 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm, mà $f(2) = 0$.

Do đó $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng xét dấu.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$3^{2-x}+3-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$4^x - 2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{3^{2-x}+3-2x}{4^x-2}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{1}{2};2\right] \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=2 \Rightarrow a\cdot b=1$.

Câu 23. Chọn đáp án D

Ta có $F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}+C$ mà $F(0)=\frac{1}{\ln 2} \Rightarrow C=0 \Rightarrow F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$.

$T=F(0)+F(1)+F(2)+\cdots+F(2017)$

$=\frac{1}{\ln 2}\left(1+2+2^2+\cdots+2^{2017}\right)$

$=\frac{2^{2018}-1}{\ln 2}$.

Câu 24. Chọn đáp án A

Ta có $a-4=\int\limits_0^a (2x+5)\mathrm{d}x=(x^2+5x)\big|_0^a=a^2+5a \Leftrightarrow a^2+4a+4=0 \Leftrightarrow a=-2$.

Do đó có 1 giá trị thực của a thỏa mãn.

Câu 25. Chọn đáp án D

Ta có $xy=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{y}$ $(y\neq 0)$, thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung là

$V=\pi\int\limits_1^4\left(\frac{4}{y}\right)^2\mathrm{d}y=16\pi\int\limits_1^4\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=16\pi\left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_1^4$

$=12\pi$.

Câu 26. Chọn đáp án C

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n}_P=(1;-1;-1)$.

Gọi giao điểm của Δ và d là $M(-1+2t;1+t;2+3t)$, ta có $\overrightarrow{AM}=(-2+2t;t;4+3t)$.

Vì $\Delta \parallel (P)$ nên ta có $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}_P=0 \Leftrightarrow -2+2t-t-4-3t=0 \Leftrightarrow 2t=-6 \Leftrightarrow t=-3$, suy ra $\overrightarrow{AM}=(-8;-3;-5)$ hay $\overrightarrow{u}=(8;3;5)$ là vectơ chỉ phương của Δ.

Phương trình của Δ là $\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{5}$.

Câu 27. Chọn đáp án B

Ta có

$f(x)+2xf'(x)=4x\sqrt{x},\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)+\frac{2x}{2\sqrt{x}}f'(x)=\frac{4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)+\sqrt{x}f'(x)=2x$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x}f(x)\right]'=2x$

$\Leftrightarrow \int\left[\sqrt{x}f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}f(x)=x^2+C$.

Với $x=1$, ta có $\sqrt{1}f(1)=1^2+C \Leftrightarrow C=0$.

Vậy $\sqrt{x}f(x)=x^2 \Leftrightarrow f(x)=x\sqrt{x}$.

Suy ra $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^4 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{62}{5}$.

Câu 28. Chọn đáp án D
Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{n}_1 = (3;-2;2)$.
Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là $\overrightarrow{n}_2 = (5;-4;3)$.
Suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n}_P = [\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2] = (2;1;-2)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là $2x + y - 2z = 0$.

Câu 29. Chọn đáp án C
Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;1;0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;0;1)$.
Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1;1;1)$.
Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Lại có $\cos((ABC),(\alpha)) = \dfrac{|1\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Suy ra diện tích tam giác $A'B'C'$ là $S_{A'B'C'} = S_{ABC}\cdot\cos((ABC),(\alpha)) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 30. Chọn đáp án B
Gọi điểm $N(x_1;y_1;z_1)$, suy ra phương trình đường thẳng ON là $\begin{cases} x = x_1 t \\ y = y_1 t \\ z = z_1 t \end{cases}$ với t là tham số.
Gọi $M(x_1t;y_1t;z_1t)$, thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta được
$x_1t + 2y_1t + 2z_1t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{6}{x_1 + 2y_1 + 2z_1}$.
Mà $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM} = 1 \Leftrightarrow x_1^2t + y_1^2t + z_1^2t = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \dfrac{x_1 + 2y_1 + 2z_1}{6}$.
Suy ra điểm N luôn thuộc mặt cầu có tâm $I\left(\dfrac{1}{12};\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{6}\right)$.

Câu 31. Chọn đáp án: a b c d
a) Mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8$ có tâm $I(0;0;3)$, bán kính $R_1 = 2\sqrt{2}$.
Tứ giác $ABDI$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ID} \Rightarrow D(3;3;5)$.
b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;3;2)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.
c) Mặt phẳng (P) đi qua A và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm M, N, P.
A là trực tâm tam giác $MNP \Rightarrow OA \perp (MNP)$ hay $OA \perp (P)$.
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{OA} = (1;1;1)$ và đi qua $A(1;1;1)$ có phương trình là $x + y + z - 3 = 0$.
Khi đó $d(B,(P)) = \dfrac{|4+4+3-3|}{\sqrt{3}} = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$.
d) Mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8$ có tâm $I(0;0;3)$, bán kính $R_1 = 2\sqrt{2}$.
Gọi $M(x;y;z)$. Ta có $|2MA - MB| \geqslant 0$, do đó $\min|2MA - MB| = 0 \Leftrightarrow 2MA = MB$.
Khi đó:
$(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 4\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2\right]$
$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2z - 29 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{2}{3}z - \dfrac{29}{3} = 0$.
Ta có hệ phương trình
$$\begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{2}{3}z - \dfrac{29}{3} = 0 \\ x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8 \\ z = 2. \end{bmatrix}$$
Do đó M thuộc đường tròn (C) là giao tuyến của (S) và (P): $z - 2 = 0$.
Ta có $d(I,(P)) = 1$ nên đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{R_1^2 - d^2} = \sqrt{7}$.

Câu 32. Chọn đáp án: a b c d

a) Ta có
$$\overline{x} = \frac{6{,}75 \cdot 8 + 7{,}25 \cdot 10 + 7{,}75 \cdot 16 + 8{,}25 \cdot 24 + 8{,}75 \cdot 13 + 9{,}25 \cdot 7 + 9{,}75 \cdot 4}{82} = \frac{333}{41} \approx 8{,}12.$$
b) Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_{82}$ là điểm trung bình môn Toán của 82 học sinh xếp theo thứ tự không giảm. Khi đó
$x_1, \ldots, x_8 \in [6{,}5; 7)$, $x_9, \ldots, x_{18} \in [7; 7{,}5)$, $x_{19}, \ldots, x_{34} \in [7{,}5; 8)$, $x_{35}, \ldots, x_{58} \in [8; 8{,}5)$, $x_{59}, \ldots, x_{71} \in [8{,}5; 9)$, $x_{72}, \ldots, x_{78} \in [9; 9{,}5)$, $x_{79}, \ldots, x_{82} \in [9{,}5; 10]$.
Do đó, trung vị của mẫu số liệu thuộc nhóm $[8; 8{,}5)$.
Vậy trung vị của mẫu số liệu là
$$M_e = Q_2 = 8 + \frac{\frac{82}{2} - (8 + 10 + 16)}{24}(8{,}5 - 8) \approx 8{,}15.$$
c) Mốt M_0 thuộc nhóm $[8; 8{,}5)$. Do đó
$u_m = 8$; $u_{m+1} = 8{,}5 \Rightarrow u_{m+1} - u_m = 8{,}5 - 8 = 0{,}5$.
$n_{m-1} = 16$; $n_m = 24$; $n_{m+1} = 13$.
Suy ra $M_0 = 8 + \dfrac{24 - 16}{(24 - 16) + (24 - 13)}(8{,}5 - 8) \approx 8{,}21$.
d) Ta có
$$s_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1 (c_1 - \overline{x})^2 + n_2 (c_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_k (c_k - \overline{x})^2\right] \approx 0{,}61 < 1.$$

Câu 33. Chọn đáp án: a b c d

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $x > 0$.
b) Hàm số có đạo hàm là $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 2}$, $\forall x > 0$.
c) Theo bài ra, ta có:
$$\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant \log_2 x \leqslant 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2^6 = 64.$$
d) Theo bài ra, ta có:
$$[f(2x)]^2 - (m+2)f(x) + m - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\log_2 x + 1)^2 - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - m\log_2 x + m - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = m - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2^{m-1}. \end{array}\right.$$
Phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2] \Leftrightarrow 1 \leqslant 2^{m-1} < 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant m < 2$.

Câu 34. Chọn đáp án: a b c d

a) Chọn 2 thẻ từ 40 thẻ nên $n(\Omega) = \mathrm{C}_{40}^2 = 780$.
b) Số tấm thẻ mang số chia hết cho 2 là 20.
Số tấm thẻ mang số chia hết cho 5 là 8.
Số tấm thẻ mang số chia hết cho cả 2 và 5 là 4.
Xét A_1: "Tích các số ghi trên hai thẻ lấy ra không chia hết cho 5".
$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{\mathrm{C}_{32}^2}{\mathrm{C}_{40}^2} = \frac{124}{195}.$$
c) Dễ dàng nhận thấy A_1 và A_2 là hai biến cố độc lập.
d) Xét biến cố A: "Tích các số ghi trên hai thẻ lấy ra chia hết cho 10".
Trường hợp 1: Trong hai tấm lấy ra có 1 tấm chia hết cho 10 và 1 tấm bất kì. Khi đó, số cách chọn là $4 \cdot 39 - \mathrm{C}_4^2 = 150$ cách rút.

Trường hợp 2: Trong hai tấm thẻ lấy ra có 1 tấm chỉ chia hết cho 2 và 1 tấm chỉ chia hết cho 5. Khi đó, số cách chọn là $16 \cdot 4 = 64$ cách rút.
$\Rightarrow n(A) = 150 + 64 = 214$ cách.
$\Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{214}{780} = \dfrac{107}{390}$.

Câu 35. Chọn đáp án: a b c d

a) Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \dfrac{1}{4}$.

b) $S_{(H)} = \displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{16}{3}$.

c) Ta có

$S_2 = \displaystyle\int_k^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \dfrac{2}{3}k^{\frac{3}{2}} = \dfrac{16}{3} - \dfrac{2}{3}\sqrt{k^3} \Leftrightarrow 3S_2 = 16 - 2\sqrt{k^3} = 2\left(8 - \sqrt{k^3}\right)$.

d) Ta có $S_1 = \displaystyle\int_0^k \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}\sqrt{k^3}$.

Khi đó

$S_1 = 3S_2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}\sqrt{k^3} = 16 - 2\sqrt{k^3} \Leftrightarrow \dfrac{8}{3}\sqrt{k^3} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{k^3} = 6 \Leftrightarrow k^3 = 36 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{36}$.

Câu 36. Chọn đáp án: a b c d

a) Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = x - 2 + \dfrac{4}{x - 1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty}[y - (x-2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty}[y - (x-2)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$.

Do đó $y = x - 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty \Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

b) Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có tọa độ là $(3;3)$. Vậy $a^2 + b = 3^2 + 3 = 12$.

c) I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $\Rightarrow I(1;-1)$.

Tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

$y = y'(2)(x-2) + y(2) \Leftrightarrow y = -3(x-2) + 4 \Leftrightarrow y = -3x + 10$.

Đường thẳng Δ cắt tiệm cận đứng tại điểm $A \Rightarrow A(1;7)$.

Đường thẳng Δ cắt tiệm cận xiên tại điểm $B \Rightarrow B(3;1)$.

Ta có $IA = 8$, $IB = 2\sqrt{2}$, $AB = 2\sqrt{10}$, $p = \dfrac{IA + IB + AB}{2} = \dfrac{8 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{10}}{2}$.

Diện tích tam giác IAB là $S_{IAB} = \sqrt{p(p - IA)(p - IB)(p - AB)} = 8$.

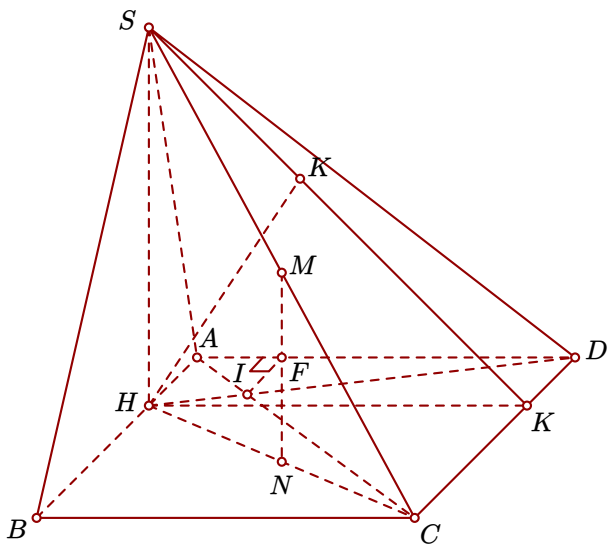
d) Phương trình $\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}=m$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<2<x_2<15$ khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$ tại hai điểm có hoành độ x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<2<x_2<15$.
Từ bảng biến thiên, ta có $4<m<\dfrac{93}{7}$.
Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{5;6;7;8;9;10;11;12;13\}$.
Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37. Chọn đáp án: a b c d
a) Ta có $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC'}$.
b) Mặt bên của hình lăng trụ tam giác đều là các hình chữ nhật bằng nhau nên các đường chéo bằng nhau.
Suy ra $\left|\overrightarrow{AB'}\right|=\left|\overrightarrow{BC'}\right|=AB'=\sqrt{AA'^2+AB^2}=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{3}$.
c) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC'}&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC'}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}\right)\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}^2\\&=-AB\cdot BC\cdot\cos\widehat{ABC}+0+0+CC'^2\\&=-a\cdot a\cdot\cos 60^\circ+\left(a\sqrt{2}\right)^2\\&=\frac{3a^2}{2}.\end{aligned}$$

d) Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC'}}{\left|\overrightarrow{AB'}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC'}\right|}=\dfrac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$.
Suy ra $\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right)=60^\circ$.

Câu 38. Chọn đáp án: a b c d



a) Ta có $(SAB)\perp(ABCD)$, $SH\perp AB\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.
$AB^2=SA^2+SB^2$ nên tam giác SAB vuông tại S.

$\dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{SB^2}=\dfrac{4}{3a^2}\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có $(SC,(ABCD))=(SC,HC)=\widehat{SCH}$.

$CH=\sqrt{BH^2+BC^2}=\sqrt{SB^2-SH^2+BC^2}=\sqrt{3a^2-\dfrac{3a^2}{4}+4a^2}=\dfrac{5a}{2}$.

$\tan\widehat{SCH}=\dfrac{SH}{HC}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

c) Ta có $AB\parallel CD\Rightarrow AB\parallel(SCD)\Rightarrow d(AB,SC)=d(AB,(SCD))=d(H,(SCD))$.

Kẻ $HK\parallel AD\ (K\in CD)\Rightarrow CD\perp(SHK)\Rightarrow(SCD)\perp(SHK)$.

Kẻ $HE\perp SK\ (E\in SK)\Rightarrow HE\perp(SCD)\Rightarrow d(H,(SCD))=HE$.

$\dfrac{1}{HE^2}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{4}{3a^2}+\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{19}{12a^2}\Rightarrow HE=\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

d) Gọi N là trung điểm của HC thì $MN\parallel SH\Rightarrow MN\perp(ABCD)\Rightarrow V_{AMID}=\dfrac{1}{3}MN\cdot S_{AID}$.

$MN=\dfrac{SH}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Kẻ $IF\parallel CD\ (F\in AD)\Rightarrow IF\perp AD$.

$\dfrac{IF}{CD}=\dfrac{AI}{AC}=\dfrac{AH}{CD}=\dfrac{\frac{a}{2}}{2a}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow IF=\dfrac{a}{2}$.

$S_{AID}=\dfrac{1}{2}IF\cdot AD=\dfrac{a^2}{2}\Rightarrow V_{AMID}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 39. Bất phương trình $(x+1)+\log_3(x+1)\geqslant 3^{3y}+3y$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t+\log_3 t$ trên $(0;+\infty)$

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 3}>0,\forall t\in(0;+\infty)$

Nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$

Bất phương trình $\Leftrightarrow f(x+1)\geqslant f\left(3^{3y}\right)\Leftrightarrow x+1\geqslant 3^{3y}\Leftrightarrow x\geqslant 3^{3y}-1$

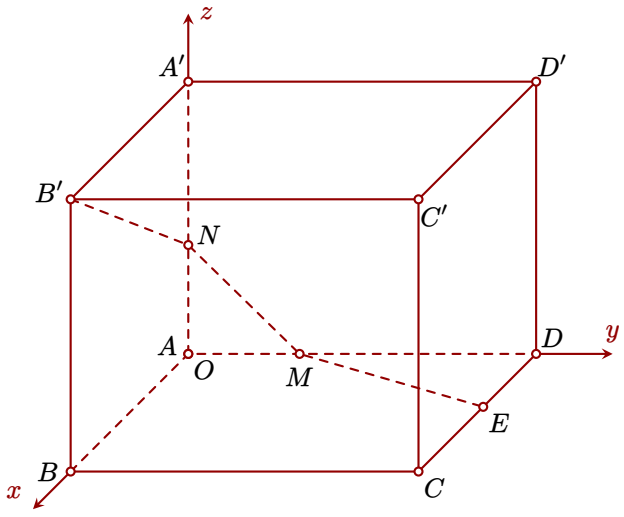
Do $0\leqslant x\leqslant 2024$ nên $3^{3y}-1\leqslant 2024\Leftrightarrow y\leqslant 2$

Do đó có vô số giá trị nguyên của y

Dễ thấy ứng với mỗi giá trị nguyên $y\leqslant 2$ luôn có ít nhất 1 giá trị nguyên x thỏa mãn $x\geqslant 3^{3y}-1, 0\leqslant x\leqslant 2024$

Do đó có vô số cặp $(x;y)$ nguyên thỏa mãn bất phương trình.

Câu 40. Đáp án: 10.

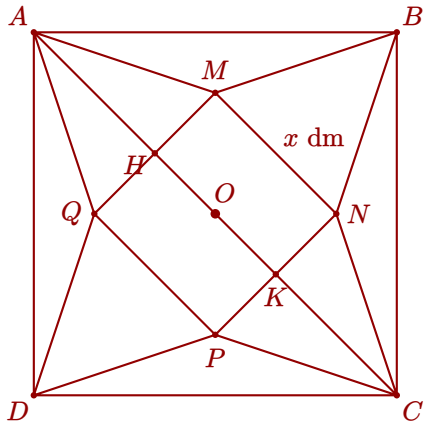


Chọn hệ toạ độ $Oxyz$ sao cho O trùng với A; các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD và AA'.
Ta có $B'(4;0;4)$ và $E(2;4;0)$.
$N \in Oz \Rightarrow N(0;0;a)$; $M \in Oy \Rightarrow M(0;b;0)$ (điều kiện $0 \leqslant a, b \leqslant 4$).
Suy ra $B'N = \sqrt{16+(a-4)^2}$, $MN = \sqrt{a^2+b^2}$, $ME = \sqrt{4+(b-4)^2}$.
Ta có

$$\begin{aligned} B'N + MN + ME &= \sqrt{16+(a-4)^2} + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{4+(b-4)^2} \\ &= \sqrt{(4-a)^2+4^2} + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{2^2+(4-b)^2} \\ &\geqslant \sqrt{(4-a+a+2)^2+(4+b+4-b)^2} = 10 \end{aligned}$$

(áp dụng bất đẳng thức Mincôpxki).
Dấu "=" xảy ra khi
$\dfrac{4-a}{4} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{4-b} = \dfrac{4-a+a+2}{4+b+4-b} = \dfrac{6}{8} \Rightarrow a = 1, b = \dfrac{4}{3}$ (thoả mãn điều kiện).
Vậy độ dài đoạn dây điện ngắn nhất bằng 10 dm.

Câu 41. Đáp án: 80.



Gọi cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều là x (m) với $0 < x < 10\sqrt{2}$.
Ta có $AH = \dfrac{AC - HK}{2} = 10\sqrt{2} - \dfrac{x}{2}$.
Đường cao của hình chóp tứ giác đều là

$$h = \sqrt{AH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(10\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{200 - 10\sqrt{2}x}.$$

Thể tích khối chóp là

$$V = \frac{1}{3}hx^2 = \frac{1}{3}x^2\sqrt{200-10\sqrt{2}x} = \frac{1}{3}\sqrt{x^4(200-10\sqrt{2}x)}.$$

Để tìm giá trị lớn nhất của V, ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4(200 - 10\sqrt{2}x)$ với $0 < x < 10\sqrt{2}$.
Ta có $f'(x) = x^3(-50\sqrt{2}x + 800)$, $f'(x) = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = 8\sqrt{2}$.
Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	0		$8\sqrt{2}$		$20\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f\left(8\sqrt{2}\right)$	↘	$-128 \cdot 10^6$

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{(0;10\sqrt{2})} f(x) = f(8\sqrt{2}) = 655360$ tại $x = 8\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng

$V_{\max} = \dfrac{1}{3}\sqrt{(8\sqrt{2})^4(200 - 10\sqrt{2}\cdot 8\sqrt{2})} = \dfrac{256\sqrt{10}}{3}$ m^3.

Diện tích tấm bạt bị cắt là

$S = \dfrac{1}{2}\cdot h_{AB}\cdot AB\cdot 4 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{20 - 8\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot 20\cdot 4 = 80$ m^2.

Câu 42. Đáp án: 4.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$ suy ra $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$[f(x+1)-4]\sqrt{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x+1)-4 = 0 \\ \sqrt{x^2-4} = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x+1) = 4 \\ x = -2 \\ x = 2. \end{bmatrix}$$

$$f(x+1) = 4 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+1 = a \in (-1;1) \\ x+1 = 2 \\ x+1 = b \in (4;+\infty) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1+a \in (-2;0) \\ x = 1 \\ x = -1+b = x_0 \in (3;+\infty). \end{bmatrix}$$

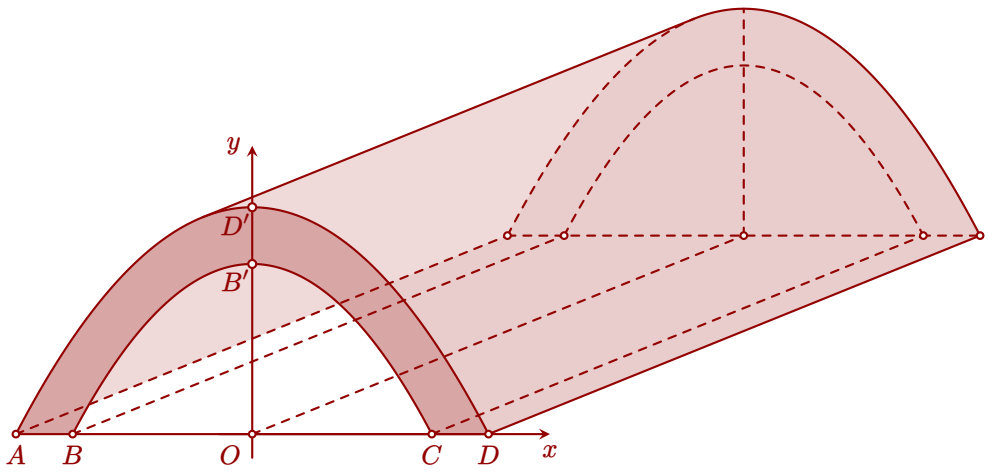
Ta thấy $x = 1$ và $x = -1+a \in (-2;0)$ không thuộc tập xác định.

Ta có $\lim\limits_{x\to-2^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to2^+} y = -\infty \Rightarrow x = -2, x = 2$ là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} y = +\infty \Rightarrow x = x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang.

Câu 43. Đáp án: 40.



Chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ.

Gọi $(P_1)\colon y = ax^2 + c$ là parabol đi qua hai điểm $A\left(\dfrac{19}{2};0\right)$ và $B(0;2)$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a\cdot\left(\dfrac{19}{2}\right)^2 + c = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{8}{361} \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1)\colon y = -\dfrac{8}{361}x^2 + 2.$$

Gọi $(P_2)\colon y = ax^2 + c$ là parabol đi qua hai điểm $C(10;0)$ và $D\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$.

Ta có hệ phương trình

$\begin{cases} a \cdot 10^2 + c = 0 \\ c = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{40} \\ c = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2)\colon y = -\dfrac{1}{40}x^2 + \dfrac{5}{2}.$

Thể tích của khối bê tông là

$V = 5 \cdot 2 \left[\displaystyle\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} \right) \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2 \right) \mathrm{d}x \right] = 40 \text{ m}^3.$

Câu 44. Đáp án: 1.

Gọi A' là điểm đối xứng của $A(1;-6;1)$ qua (P).

Đường thẳng $AA' \perp (P)$ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -6 + t \\ z = 1. \end{cases}$

Gọi $H = AA' \cap (P) \Rightarrow H(1+t;-6+t;1)$.

Mà $H \in (P) \Rightarrow 1 + t - 6 + t + 7 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(0;-7;1)$, suy ra $A'(-1;-8;1)$.

Vì $B \in Oz \Rightarrow B(0;0;b)$.

Chu vi tam giác ABC là

$C_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = AB + A'C + BC \geqslant AB + A'B.$

Suy ra $C_{\triangle ABC} \geqslant \sqrt{37 + (b-1)^2} + \sqrt{65 + (b-1)^2} \geqslant \sqrt{37} + \sqrt{65}.$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} b = 1 \\ C = BA' \cap (P). \end{cases}$

Khi đó $B(0;0;1) \Rightarrow BA'\colon \begin{cases} x = s \\ y = -6s \\ z = 1. \end{cases}$

Vì $C = BA' \cap (P) \Rightarrow C \in BA' \Rightarrow C(s;-6s;1)$.

Lại có $C \in (P) \Rightarrow s - 6s + 7 = 0 \Rightarrow s = \dfrac{7}{5} \Rightarrow C\left(\dfrac{7}{5};-\dfrac{42}{5};1\right)$.

Vậy B có cao độ bằng 1.

Tham khảo Sở Phú Thọ

Câu 1. Chọn đáp án B

Ta có $\widehat{BAC} = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$.

Vì $\triangle ABD$ vuông tại D nên $\widehat{ABC} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

Áp dụng định lý sin trong $\triangle ABC$, ta có $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{BC}{\sin A}$

$\Leftrightarrow AC = \dfrac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \dfrac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18{,}51.$

$\triangle ACD$ vuông tại D, $\sin \widehat{CAD} = \dfrac{CD}{AC} \Leftrightarrow CD = AC \cdot \sin \widehat{CAD} = 18{,}51 \cdot \sin 40^\circ \approx 11{,}9.$

Vậy chiều cao của tòa nhà là $7 + 11{,}9 = 18{,}9$.

Câu 2. Chọn đáp án B

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$, hay $A(2; -1)$.

Do $M(0; -1)$ là trung điểm của AC nên ta có $C(-2; -1)$.

Vì $BC \perp AH$ nên đường thẳng BC có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (1; -2)$.

Khi đó BC đi qua điểm $C(-2; -1)$ có phương trình là

$1(x + 2) - 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0.$

Câu 3. Chọn đáp án C

Gọi phương trình chính tắc của (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$.

(E) có đỉnh $A(5; 0)$ nên $a = 5$.

(E) đi qua $M\left(3; \dfrac{16}{5}\right)$, ta có $\dfrac{9}{25} + \dfrac{256}{25b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 16.$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

Câu 4. Chọn đáp án D

Do mẫu số liệu có giá trị bất thường nên ta không nên sử dụng số trung bình làm số đặc trưng đo xu thế trung tâm.

Câu 5. Chọn đáp án D

Mẫu số liệu có 45 giá trị nên tứ phân vị thứ 3 là $Q_3 = \dfrac{x_{34} + x_{35}}{2}$.

Do x_{34}, x_{35} cùng thuộc nhóm $[40; 60)$ nên ta có

$Q_3 = 40 + \dfrac{\frac{3}{4} \cdot 45 - (5 + 19 + 8)}{6} \cdot 20 \approx 45{,}83.$

Vậy điểm ngưỡng để đưa ra danh sách 25% trường đại học có chỉ số nghiên cứu tốt nhất Việt Nam là trên mức 45,83.

Câu 6. Chọn đáp án C

Số đường chéo của đa giác đều n đỉnh $(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3)$ là $\mathrm{C}_n^2 - n$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_n^2 - n = 135 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 135 \\ &\Leftrightarrow n^2 - 3n - 270 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = 18. \end{aligned}$$

Vậy đa giác đã cho có 18 đỉnh.

Câu 7. Chọn đáp án D
Số cách xếp 8 học sinh thành hàng ngang là 8!.
Xếp ba thầy giáo A, B, C sao cho mỗi thầy ngồi giữa 2 học sinh là A_7^3.
Vậy số cách xếp chỗ thỏa mãn là $8! \cdot \mathrm{A}_7^3 = 8467200$.

Câu 8. Chọn đáp án C
Số cách ba sinh viên A, B, C vào ba quán ăn một cách độc lập là $n(\Omega) = 3^3 = 27$.
Số cách hai sinh viên vào cùng một quán, còn người kia vào quán khác là $n(A) = \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_3^2 \cdot 2 = 18$.
Xác suất của biến cố hai sinh viên vào cùng một quán, còn người kia vào quán khác là
$\dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{18}{27} = \dfrac{2}{3}$.

Câu 9. Chọn đáp án B
Số cách chọn một em học sinh trong khối là $n(\Omega) = 120$.
Số học sinh chỉ tham gia câu lạc bộ Toán là $60 - 15 = 45$.
Số học sinh chỉ tham gia câu lạc bộ Ngoại ngữ là $40 - 15 = 25$.
Số học sinh không tham gia câu lạc bộ nào là $n(A) = 120 - 45 - 15 - 25 = 35$.
Xác suất để em này không tham gia bất kì một câu lạc bộ nào (Toán hoặc Ngoại ngữ) bằng
$\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{35}{120} = \dfrac{7}{24}$.

Câu 10. Chọn đáp án A
Điều kiện: $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \dfrac{\pi}{4} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$.
Vậy tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 11. Chọn đáp án D
$$2\sin x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$
Với họ nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ thì nghiệm dương nhỏ nhất là $\dfrac{5\pi}{3}$ và nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{\pi}{3}$.
Với họ nghiệm $x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ thì nghiệm dương nhỏ nhất là $\dfrac{4\pi}{3}$ và nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{2\pi}{3}$.
Do đó phương trình đã cho có nghiệm dương nhỏ nhất là $\dfrac{4\pi}{3}$, nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{\pi}{3}$.
Vậy tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất bằng π.

Câu 12. Chọn đáp án B
Ta có cấp số cộng 1, 7, 13, ..., x có $u_1 = 1$, công sai $d = 6$ và đặt $u_n = x$.
Khi đó

$1+7+13+\cdots+x=280$
$\Leftrightarrow S_n=280$
$\Leftrightarrow n\cdot u_1+\dfrac{(n-1)n}{2}\cdot d=280$
$\Leftrightarrow n+3n(n-1)=280$
$\Leftrightarrow 3n^2-2n-280=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=10 \\ n=-\dfrac{28}{3}\ \text{(loại)}. \end{array}\right.$
Vậy $x=u_{10}=u_1+9d=55$.

Câu 13. Chọn đáp án B
$S=\lim\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$ với $n=1$ thì $S=\dfrac{1}{2}$.
Dễ thấy với $n\in\mathbb{N}^*$ có $S\geqslant\dfrac{1}{2}\quad(1)$.
Khi $n\to+\infty$:
$n^2+1>n^2\Leftrightarrow\dfrac{1}{n^2+1}<\dfrac{1}{n^2}$;
$n^2+2>n^2\Leftrightarrow\dfrac{2}{n^2+2}<\dfrac{2}{n^2}$;
$\vdots$
$n^2+n>n^2\Leftrightarrow\dfrac{n}{n^2+n}<\dfrac{n}{n^2}$.
Nên
$S=\lim\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$
$\leqslant\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$
hay
$S\leqslant\lim\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right)$
$=\lim\left(\dfrac{n(n+1)}{2n^2}\right)$
$=\lim\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\quad(2)$.
Từ (1) và (2), suy ra $S=\dfrac{1}{2}$.

Câu 14. Chọn đáp án C
Ta có $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-4}{x^2-9}=1$ nên $f(3)-4=0\Leftrightarrow f(3)=4$.
Mà

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{f(x)}-2}{x^2-4x+3} &= \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-4}{(x^2-4x+3)\left(\sqrt{f(x)}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-4}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{f(x)}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(f(x)-4)(x+3)}{(x-1)(x^2-9)\left(\sqrt{f(x)}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 3}\left[\frac{f(x)-4}{x^2-9}\cdot\frac{x+3}{(x-1)\left(\sqrt{f(x)}+2\right)}\right]\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-4}{x^2-9}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{(x-1)\left(\sqrt{f(x)}+2\right)}\\ &= 1\cdot\frac{3+3}{(3-1)(\sqrt{4}+2)}\\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Câu 15. Chọn đáp án C

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ nên $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)$. (1)

Mặt khác ta có: $\begin{cases} f(1)=a+\dfrac{5}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-3x-3)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x-3}{x+1}=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a+\dfrac{5}{2}=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow a=-5$.

Câu 16. Chọn đáp án A

Ta có $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot AD\cdot S_{ABC}$.

Ta có $S_{ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$, $p=\dfrac{AB+AC+BC}{2}=12$.

$S_{ABC}=\sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}=24$.

Do AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), suy ra $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot AD\cdot S_{ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot 4\cdot 24=32$.

Câu 17. Chọn đáp án A

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm 1$. Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

Câu 18. Chọn đáp án B

Ta có $y'=\dfrac{1}{(e^x+1)\ln 10}.(e^x+1)'=\dfrac{e^x}{(e^x+1)\ln 10}$.

Câu 19. Chọn đáp án A

Xét hàm số $g(x)=f(x)-(2m+4)x-5$ có

$g'(x)=f'(x)-(2m+4)=3x^2+6x+4-(2m+4)=3x^2+6x-2m$.

$g''(x)=6x+6>0,\ \forall x\in(0;2)$.

x	0		2
g''		$+$	
g'	$-2m$	$\nearrow$	$24-2m$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$ khi $g'(x) \leqslant 0,\ \forall x \in (0;2)$.
Từ đó ta có $24-2m \leqslant 0 \Leftrightarrow m \geqslant 12$.
Mà m nguyên thuộc $(-2025;2025)$ nên có 2013 giá trị của m thỏa mãn.

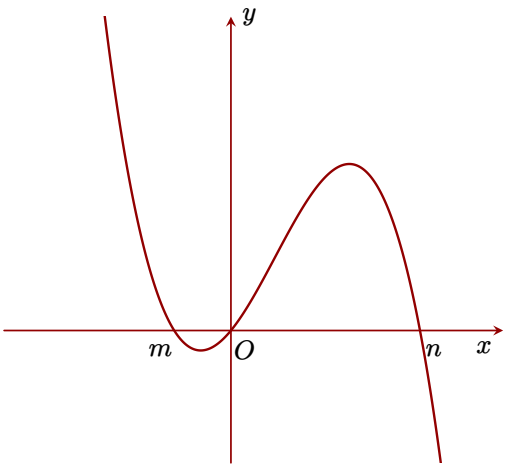
Câu 20. Chọn đáp án B
Xét hàm số $y=f(g(x))$ có $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f'(g(x))=0 \\ g'(x)=0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} g(x)=a\ (-3<a<0) \\ g(x)=b\ (0<b<2) \\ g(x)=c\ (c>2) \\ g'(x)=0. \end{bmatrix}$$

Vậy phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi qua các nghiệm này nên hàm số $y=f(g(x))$ có 3 điểm cực trị.

Câu 21. Chọn đáp án B



Giả sử đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ là m, 0, n như hình vẽ $(m,n\in\mathbb{R},\ m<0<n)$.

Khi đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=m \\ x=0 \\ x=n. \end{bmatrix}$

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2$ như sau:

x	$-\infty$		m		0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(m)$	↘	0	↗	$f(n)$	↘	$-\infty$

Ta có $4f(x)+5=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{5}{4}$.

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $\Delta\colon y=-\dfrac{5}{4}$ nên phương trình $4f(x)+5=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 22. Chọn đáp án **D**

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+4m}}=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+4m}}=1$ nên đồ thị hàm số luôn có 2 đường tiệm cận ngang là $y=\pm1$.

Do đó, đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+4m}}$ có đúng 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có đúng 2 đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow x^2+4m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2

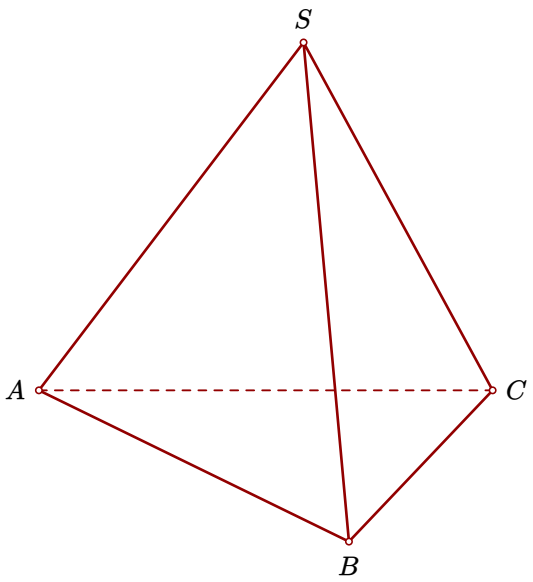
$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ 2^2+4m\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m\neq -1. \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases} m\in[-10;10] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m\in\{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23. Chọn đáp án **D**



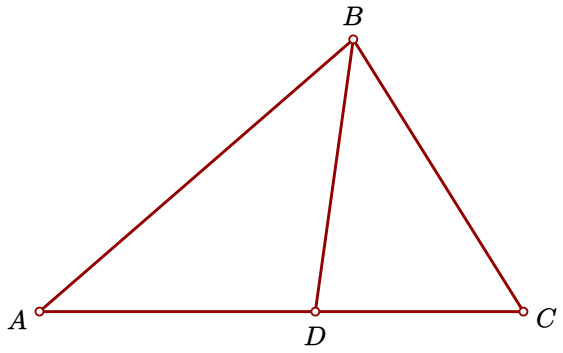
Ta có $AB^2+AC^2=BC^2$, $SB^2+SC^2=BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ và $\triangle SBC$ lần lượt vuông tại A và S.

Do đó

$$\begin{aligned}\cos\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right) &= \frac{\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB}}{SC\cdot AB}\\ &= \frac{\overrightarrow{SC}\cdot\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)}{SC\cdot AB}\\ &= \frac{\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SA}}{SC\cdot AB}\\ &= \frac{-2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}{2\cdot 2}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right) = 120^\circ.$

Câu 24. Chọn đáp án A



Ta có $AB=\sqrt{26}$, $BC=\sqrt{104}$.

Vì $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC nên

$$\begin{aligned}\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}=\frac{1}{2} &\Rightarrow DC=2DA\\ &\Rightarrow \overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DA}\\ &\Rightarrow \overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0}\\ &\Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right).\end{aligned}$$

Câu 25. Chọn đáp án A

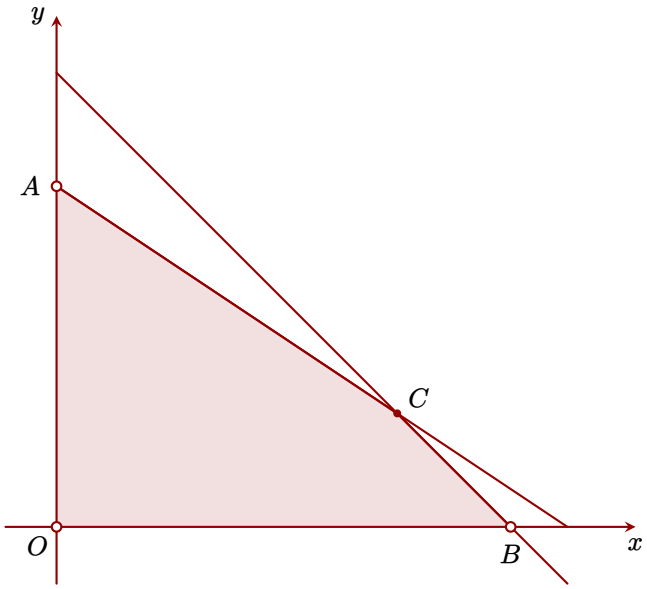
Gọi x, y lần lượt là số mét vuông trồng đậu và trồng cà.

Số công để trồng đậu và cà là $\frac{x}{100}\cdot 10+\frac{y}{100}\cdot 15=0{,}1x+0{,}15y$.

Số tiền lãi là $\frac{x}{100}\cdot 7+\frac{y}{100}\cdot 9=0{,}07x+0{,}09y$.

Ta có hệ $\begin{cases}x>0\\ y>0\\ x+y\leqslant 800\\ 0{,}1x+0{,}15y\leqslant 90.\end{cases}$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ trên mặt phẳng tọa độ.



Vẽ $d_1: x+y=800$; $d_2: 0{,}1x+0{,}15y=90$.
$A(0;600)$, $B(800;0)$, $C(600;200)$.
Thay tọa độ của A, B, C vào biểu thức T ta được kết quả là 54 triệu; 56 triệu; 60 triệu.
Vậy lãi lớn nhất là 60 triệu.

Câu 26. Chọn đáp án A
Nếu bác Minh đi 25km thì bác Minh phải trả số tiền là
$T = 10.000 + 20.14100 + (25-20).12300 = 353500$ đồng.

Câu 27. Chọn đáp án D
Khoảng cách ngắn nhất từ tâm bánh xe đến góc tường khi bánh xe tiếp xúc với 2 cạnh của góc tường.
Khi đó khoảng cách là $\dfrac{30}{\sin 30^\circ} = 60$.

Câu 28. Chọn đáp án B
Ta có
$h = 3\cos\left(\dfrac{\pi t}{8}+\dfrac{\pi}{4}\right)+12 \leqslant 3+12=15$

$\Rightarrow h_{\max}=15 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi t}{8}+\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi t}{8}+\dfrac{\pi}{4}=k2\pi$

$\Leftrightarrow t=-2+16k\in[0;24) \Leftrightarrow \dfrac{1}{8}\leqslant k<\dfrac{13}{8} \Rightarrow k=1 \Rightarrow t=14.$

Câu 29. Chọn đáp án D
Gọi số sầu riêng mà ông A thu hoạch được là x ($x=2m$, $m\in\mathbb{N}^*$).
Số sầu riêng còn lại sau lần bán thứ nhất là $S_1 = x-\dfrac{x}{2}-1=\dfrac{x}{2}-1=\dfrac{x-2}{2}$.
Số sầu riêng còn lại sau lần bán thứ hai là $S_2=\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{x-2}{4}-1=\dfrac{x-2}{4}-1=\dfrac{x-2-2^2}{2^2}$.
...
Số sầu riêng còn lại sau lần bán thứ n là $S_n=\dfrac{x-(2+2^2+\cdots+2^n)}{2^n}=\dfrac{x-2^{n+1}+2}{2^n}$.
Theo bài ra, ta có $S_7=0 \Rightarrow x-2^8+2=0 \Leftrightarrow x=254$.

Câu 30. Chọn đáp án D

Đặt $t=\sqrt{6^x}>0$, ta được phương trình ẩn t

$3t^2-(7m-48)t+2m^2-16m=0 \quad (*)$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2\geqslant 2$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1\cdot t_2\geqslant 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(7m-48)^2-12(2m^2-16m)>0\\ 7m-48>0\\ m^2-8m\geqslant 9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}25m^2-480m+2304>0\\ m>\dfrac{48}{7}\\ \left[\begin{array}{l}m\geqslant 9\\ m\leqslant -1\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m\geqslant 9\\ m\neq \dfrac{48}{5}.\end{cases}$$

Vậy $m\in\{9;10;11;\ldots;19\}\Rightarrow$ có 11 giá trị.

Câu 31. Chọn đáp án A

Ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là 672,7 mmHg nên ta có

$760\cdot \mathrm{e}^{1000i}=672{,}7$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{1000i}=\frac{672{,}7}{760}$$

$$\Leftrightarrow i=\frac{\ln\frac{672{,}7}{760}}{1000}.$$

Áp suất không khí ở độ cao 3000 m là

$P=760\cdot \mathrm{e}^{3000i}$

$$=760\cdot \mathrm{e}^{3000\cdot\frac{\ln\frac{672{,}7}{760}}{1000}}$$

$=527{,}03$ mmHg.

Câu 32. Chọn đáp án C

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.

Ta có

$\overrightarrow{IA}=(3-x_I;-1-y_I;1-z_I)$

$2\overrightarrow{IB}=(0-2x_I;-6-2y_I;6-2z_I)$

$\overrightarrow{IC}=(1-x_I;7-y_I;1-z_I)$.

Do đó $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=(4-4x_I;-4y_I;8-4z_I)$.

$$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow \begin{cases}4-4x_I=0\\ -4y_I=0\\ 8-4z_I=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_I=1\\ y_I=0\\ z_I=2.\end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})+2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})=4\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=4\overrightarrow{MI}$.

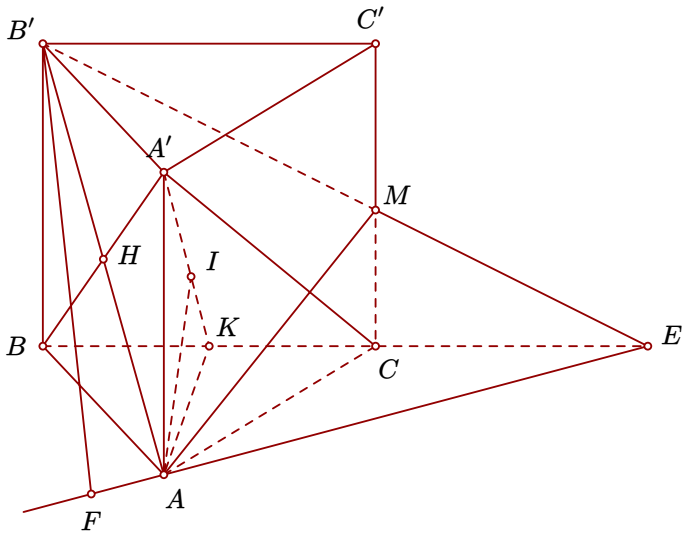
Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=4\left|\overrightarrow{MI}\right|=4MI$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI có độ dài nhỏ nhất, khi đó M trùng I.

Vậy $M(1;0;2)$.

Giá trị $T=abc=0$.

Câu 33. Chọn đáp án: a b c d



Ta có $\widehat{(A'C,(ABC))} = \widehat{(A'C,AC)} = \widehat{A'CA} = 45^\circ$.
Suy ra $AC = AB = AA' = 4$; $A'B = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$.
a) Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng $V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = AA' \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 32$.
b) Gọi H là hình chiếu của A lên $A'B \Rightarrow AH \perp A'B$.
Vì $\triangle A'AB$ cân nên H là trung điểm của $A'B$.
Ta có $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp A'A \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'AB) \Rightarrow AC \perp AH$.
Ta có $\begin{cases} AH \perp AC \\ AH \perp A'B \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}(AC, A'B) = AH = \frac{1}{2}A'B = 2\sqrt{2}$.
c) Gọi K là trung điểm cạnh $BC \Rightarrow AK \perp BC$.
Gọi I là hình chiếu của A lên $A'K \Rightarrow AI \perp A'K$.
Ta chứng minh được $AI \perp (A'BC) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(A'BC)) = AI$.
Ta có $AK = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{2}$.
Xét $\triangle A'AK$ có $AI = \dfrac{AA' \cdot AK}{\sqrt{AA'^2 + AK^2}} = \dfrac{4 \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \mathrm{d}(A,(A'BC)) = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
Ta có $\mathrm{d}(M,(A'BC)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(A,(A'BC)) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
d) Mở rộng mặt phẳng $(AB'M)$ là mặt phẳng $(AB'E)$.
Hai mặt phẳng $(AB'M)$ và (ABC) có giao tuyến là AE.
Gọi P là hình chiếu của B lên $AE \Rightarrow BP \perp AE$.
Suy ra $B'P \perp AE$.
Suy ra góc nhị diện giữa hai mặt phẳng $(AB'M)$ và (ABC) là góc $\alpha = \widehat{B'PB}$.
Ta có $BE = 2BC = 8\sqrt{2} \Rightarrow S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AK \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = 16$.
Xét $\triangle ABE$ có $AE = \sqrt{BA^2 + BE^2 - 2BA \cdot BE \cdot \cos 45^\circ} = 4\sqrt{5}$.
Suy ra $BP = \dfrac{2S_{\triangle ABE}}{AE} = \dfrac{2 \cdot 16}{4\sqrt{5}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.
Xét $\triangle B'BP$ có $B'P = \sqrt{B'B^2 + BP^2} = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.
Suy ra $\cos\alpha = \dfrac{BP}{B'P} = \dfrac{2}{3}$.

Câu 34. Chọn đáp án: a b c d

a) Ta có $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x-2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ f'(x^2-2x-2) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2-2x-2 = -2 \\ x^2-2x-2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Ta có

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		0		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng trên ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

b) Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \geqslant \sqrt{2} \\ x \leqslant -\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Ta có

$$h'(x) = f'\left(1-\sqrt{x^2-2}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 1-\sqrt{x^2-2} = -2 \\ 1-\sqrt{x^2-2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{11} \\ x = \pm\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Ta có

x	$-\infty$		$-\sqrt{11}$		$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$		$\sqrt{11}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$				$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗		↘		↗				↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số có 4 điểm cực trị.

c) Ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đồ thị hàm số bậc ba

$\Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2$.

Xét hàm số $k(x) = x^2 - 4x + f\left(\sqrt{x^2-4x+16}\right)$.

Đặt $t = \sqrt{x^2-4x+16}$ với $x \in [0;2]$

$\Rightarrow t \in [2\sqrt{3}; 4]$.

Khi đó, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $k(x)$ trên $[0;2]$ bằng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $v(t) = f(t) + t^2 - 16$ trên đoạn $[2\sqrt{3}; 4]$.

Ta có

$v'(t) = f'(t) + 2t > 0, \quad \forall t \in (2\sqrt{3}; 4)$

$\Rightarrow \min\limits_{[2\sqrt{3};4]} v(t) = v\left(2\sqrt{3}\right) = f\left(2\sqrt{3}\right) - 4$

$\Rightarrow \max\limits_{[2\sqrt{3};4]} v(t) = v(4) = f(4).$

Suy ra hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $k(x)$ trên đoạn $[0;2]$ là

$$\begin{aligned}\max_{[0;2]} k(x) - \min_{[0;2]} k(x) &= f(4) - \left(f\left(2\sqrt{3}\right) - 4\right)\\ &= f(4) - f\left(2\sqrt{3}\right) + 4\\ &= 80 - 24\sqrt{3}.\end{aligned}$$

d) Gọi $u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $u'(x) = f(x)$.

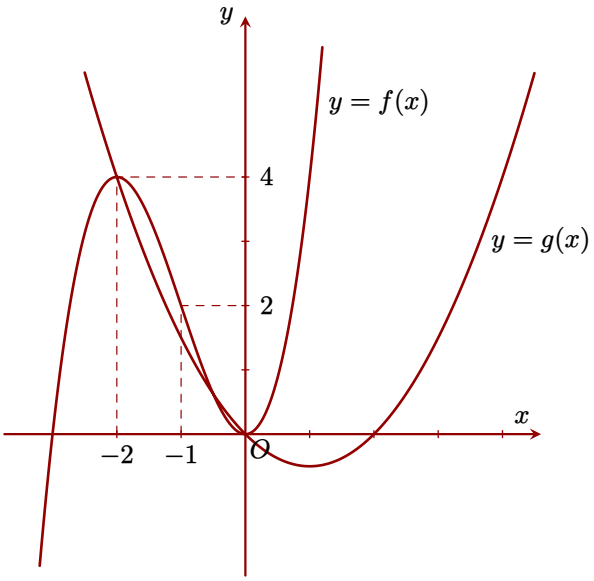
Ta có

$u(x) > \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} + m \Leftrightarrow m < u(x) - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} \quad (1).$

Xét hàm số $q(x) = u(x) - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2}$, ta có

$q'(x) = f(x) - \dfrac{x^2}{2} + x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x.$

Vẽ parabol $y = g(x) = \dfrac{x^2}{2} - x$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm $(0;0)$ và $(-2;4)$.



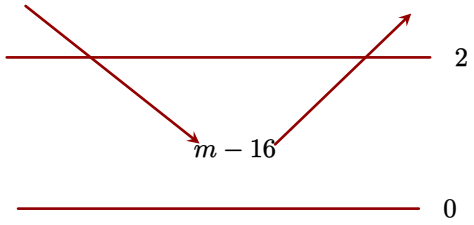
Ta có

x	-2		0
$q'(x)$		$+$	
$q(x)$		$u(-2) + \dfrac{10}{3}$	

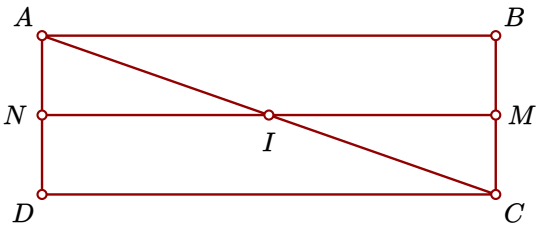
Vậy bất phương trình $u(x) > \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} + m$ đúng với mọi $x \in (-2;0)$ khi và chỉ khi $m \leqslant u(-2) + \dfrac{10}{3}$.

Câu 35. 1) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \text{ (nghiệm kép).}\end{array}\right.$

Xét $g(x)=f(x^2-8x+m)$.
$g'(x)=(2x-8)f'(x^2-8x+m)$.
$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=4\\x^2-8x+m=0\\x^2-8x+m=2\end{bmatrix}\quad(*)$
Để $(*)$ có đúng ba điểm cực trị thì
$\begin{bmatrix}x^2-8x+m=0\\x^2-8x+m=2\end{bmatrix}\quad(1)$
có đúng hai nghiệm đơn phân biệt khác 4.
Đồ thị hàm số $y=x^2-8x+m$ có dạng:



Để (1) có đúng hai nghiệm đơn phân biệt khác 4 thì $0\leqslant m-16<2\Leftrightarrow 16\leqslant m<18$
Khi đó phương trình $x^2-8x+m=2$ có hai nghiệm phân biệt khác 4.
Vậy hàm số luôn có đúng ba điểm cực trị là : $4;x_2;x_3$ trong đó $x_2;x_3$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2-8x+m=2$
Theo giả thiết:
$x_1^2+x_2^2+x_3^2=50$
$\Leftrightarrow 4^2+x_2^2+x_3^2=50$
$\Leftrightarrow x_2^2+x_3^2=34$
$\Leftrightarrow (x_2+x_3)^2-2x_2.x_3=34$
$\Leftrightarrow (x_2+x_3)^2-2x_2.x_3=34\Leftrightarrow 8^2-2(m-2)=34\Leftrightarrow m=17$
Vậy $m=17$
2) Ta có hình vẽ



Đặt $NI=x\Rightarrow IM=25-x;(0\leqslant x\leqslant 25)$
Con đường đi từ A đến C:
$AC=IA+IC$
$IA=\sqrt{100+x^2}$
$IC=\sqrt{(25-x)^2+100}$
Thời gian làm quãng đường IA: $\dfrac{\sqrt{100+x^2}}{15}$
Thời gian làm quãng đường IC: $\dfrac{\sqrt{x^2-50x+725}}{30}$
Thời gian làm xong quãng đường AC:
$t=\dfrac{\sqrt{100+x^2}}{15}+\dfrac{\sqrt{x^2-50x+725}}{30}$

Xét hàm số:

$$f(x)=\frac{\sqrt{100+x^2}}{15}+\frac{\sqrt{x^2-50x+725}}{30}$$

$$f'(x)=\frac{x}{15\sqrt{100+x^2}}+\frac{x-25}{30\sqrt{x^2-50x+725}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{15\sqrt{100+x^2}}=\frac{25-x}{30\sqrt{x^2-50x+725}}$$

$$\Leftrightarrow 675x^4-33750x^3+489375x^2+1125000x-14062500=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\ x\approx -5,397\quad\text{(loại)}\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$.

x	0		5		25
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{5}}{3}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng ta thấy thời gian làm xong quãng đường AC ít nhất là: $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ giờ

Câu 36. Điều kiện xác định $x^6+x^2+1\neq 0$.

Đặt $\log_3\frac{4x^2+2}{x^6+x^2+1}=x^6-3x^2-1$ là $(*)$.

Khi đó

$(*)\Leftrightarrow\log_3(4x^2+2)-\log_3(x^6+x^2+1)=x^6-3x^2-1$

$\Leftrightarrow\log_3(4x^2+2)+(4x^2+2)=\log_3(x^6+x^2+1)+x^6+x^2+1.$

Đặt $f(t)=\log_3 t+t\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0.$

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ đó ta có $f(4x^2+2)=f(x^6+x^2+1)\Rightarrow 4x^2+2=x^6+x^2+1.$

$\Rightarrow 4x^2+2=x^6+x^2+1\Leftrightarrow x^6-3x^2-1=0\quad(**).$

Đặt $u=x^2\geqslant 0.$

$(**)\Leftrightarrow u^3-3u-1=0.$

Nhận xét khi chưa ràng buộc điều kiện trên thì ta thấy rằng phương trình $g(u)=u^3-3u-1=0$ có $g(-2)\cdot g(-1)<0$, $g(1)\cdot g(2)<0$, $g(-1)\cdot g(0)<0$ nên phương trình $g(u)=0$ có tối đa đúng ba nghiệm trên khoảng $(-2;2)$.

Vậy ta có thể đặt tiếp $u=2\cos a\in(-2;2)$.

$(**)\Leftrightarrow 8\cos^3 a-6\cos a-1=0\Leftrightarrow 2\cos 3a-1=0.$

$\Leftrightarrow\cos 3a=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn)

$\Leftrightarrow\cos 3a=\cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3a=\frac{\pi}{3}+k2\pi\quad(k\in\mathbb{Z})\\ 3a=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\quad(k\in\mathbb{Z})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}\quad(k\in\mathbb{Z})\quad(1)\\ a=-\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}\quad(k\in\mathbb{Z})\quad(2).\end{array}\right.$$

Mà $u = 2\cos a \in (-2;2) \Rightarrow a \in (0;\pi)$.

$(1) \Rightarrow -\dfrac{1}{6} < k < \dfrac{4}{3} \Rightarrow k \in \{0;1\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{\pi}{9} \\ a = \dfrac{7\pi}{9}. \end{array}\right.$

$(2) \Rightarrow \dfrac{1}{6} < k < \dfrac{5}{3} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow a = \dfrac{5\pi}{9}$.

Suy ra ta có các nghiệm lần lượt là $u = 2\cos\dfrac{\pi}{9}$; $u = 2\cos\dfrac{5\pi}{9}$; $u = 2\cos\dfrac{7\pi}{9}$.

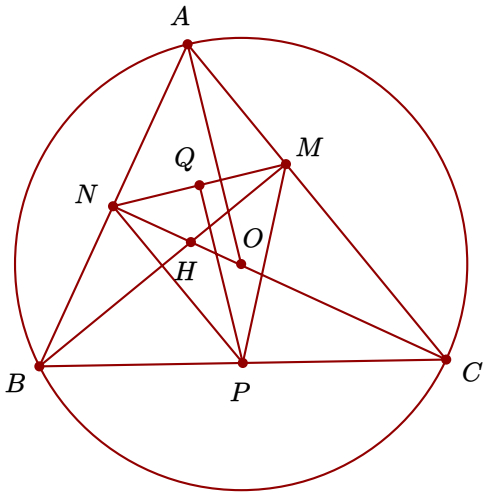
Lại vì $0 > \cos\dfrac{\pi}{2} > \cos\dfrac{5\pi}{9}\left(\dfrac{5\pi}{9} > \dfrac{\pi}{2}\right)$, $0 > \cos\dfrac{\pi}{2} > \cos\dfrac{7\pi}{9}\left(\dfrac{7\pi}{9} > \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên khi so lại với điều kiện đặt ẩn ban đầu là $u = x^2 \geqslant 0$ thì ta chỉ nhận duy nhất nghiệm $u = 2\cos\dfrac{\pi}{9}$.

Suy ra $x^2 = 2\cos\dfrac{\pi}{9} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{9}}$.

Thay vào điều kiện xác định thì ta thấy thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình $(*)$ là $S = \left\{-\sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{9}}; \sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{9}}\right\}$.

Câu 37.



Ta dễ dàng chứng minh được $OA \perp MN$ bằng cách dựng tiếp tuyến của (C) tại A.

Khi đó ta viết được phương trình $OA : x = 0$ từ phương trình $MN : y = -3$.

Lúc này $A = (C) \cap OA$, tức A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ y_A < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A(0;-5)$

Từ đó ta cũng viết được:

Phương trình $AB : x - y - 5 = 0$

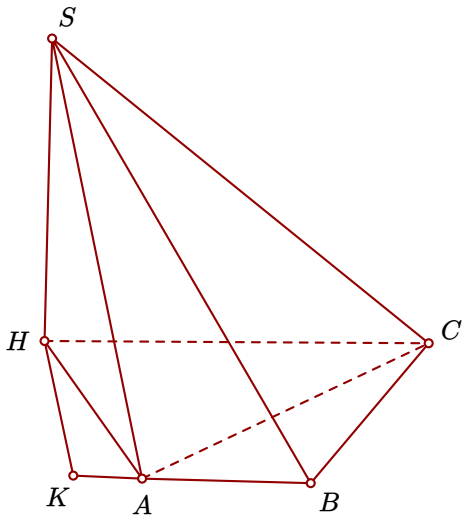
$\Rightarrow B = (C) \cap AB \Rightarrow B(5;0)$

Phương trình $AC : 2x + y + 5 = 0$

$\Rightarrow C = (C) \cap AC \Rightarrow C(-4;3)$

Vậy tọa độ ba đỉnh của tam giác ABC là $A\,(0;-5)\,, B\,(5;0)\,, C\,(-4;3)$.

Câu 38.



1) Gọi $\alpha = ((SAB),(SBC))$, với $(SAB)\cap(SBC) = BC$.

$\sin\alpha = \dfrac{\mathrm{d}(C,(SAB))}{\mathrm{d}(C,SB)} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Đặt $SH = x$.

Gọi K là hình chiếu của H lên AB.

+) Ta có $AC = 3\sqrt{3}$; $\widehat{BAC} = \widehat{ACH} = 30^\circ$; $\widehat{CAH} = 90^\circ$; $\widehat{KAH} = 60^\circ$; $AH = 3$; $CH = 6$.

$\sin 60^\circ = \dfrac{HK}{AH} \Rightarrow HK = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\mathrm{d}(C,(SAB)) = \mathrm{d}(H,(SAB)) = \dfrac{HK\cdot SH}{\sqrt{HK^2+SH^2}} = \dfrac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{27+4x^2}}$.

+) $BC = 3$; $SC = \sqrt{x^2+36}$; $BH = 3\sqrt{3}$; $SB = \sqrt{x^2+27}$.

Do $BC^2 + SB^2 = SC^2 \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B.

$\mathrm{d}(C,SB) = BC = 3$.

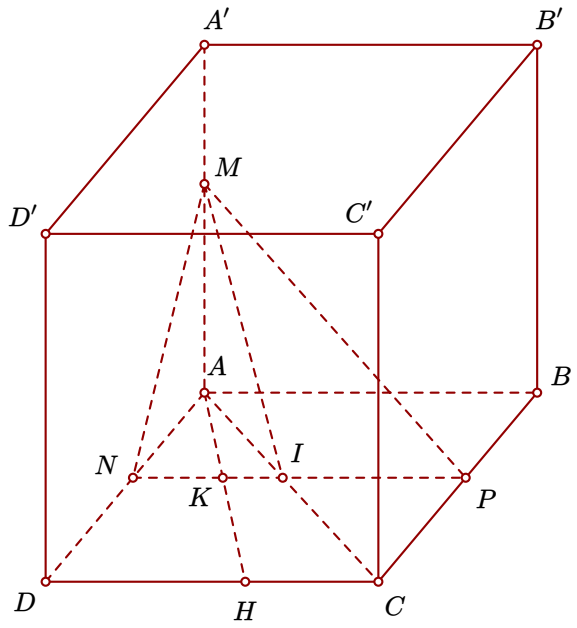
Ta có

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{\frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{27+4x^2}}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{27+4x^2}}$$
$$\Leftrightarrow x = 3\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow SH = 3\sqrt{3}.$$

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\dfrac{9\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27}{4}$.

2)



+ Gọi $I = NP \cap AC$. Khi đó $(A'AC) \cap (MNP) = MI$.
$\sin\alpha = \dfrac{\mathrm{d}(A,(MNP))}{\mathrm{d}(A,MI)}$.
+ Gọi H là hình chiếu của A lên CD, $K = AH \cap NP$.
$AH = 2\sqrt{3}$; $AK = \sqrt{3}$; $AM = \sqrt{3}$
$\mathrm{d}(A,(MNP)) = \dfrac{AK \cdot AM}{\sqrt{AK^2 + AM^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
+ $AC = \sqrt{13}$; $AI = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$; $AM = \sqrt{3}$; $\mathrm{d}(A,MI) = \dfrac{AI \cdot AM}{\sqrt{AI^2 + AM^2}} = \dfrac{\sqrt{39}}{5}$.
+ $\sin\alpha = \dfrac{\mathrm{d}(A,(MNP))}{\mathrm{d}(A,MI)} = \dfrac{5\sqrt{26}}{26}$.

Câu 39. 1)
Gọi bốn số của mẫu số liệu là $a < b < c < d$.
Ta có $\begin{cases} \dfrac{a+b+c+d}{4} = 6 \\ \dfrac{b+c}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow a + d = 14.$
Ta có $b < 5$ nên $b \leqslant 4 \Rightarrow a \leqslant 3 \Rightarrow d \geqslant 11$.
Từ đó khoảng biến thiên $d - a \geqslant 8$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 3$, $d = 11 \Rightarrow b = 4$, $c = 6$.
2)
Trường hợp 1: Lần 1 và 3 trùng nhau.
Xác suất để lần 1 gieo được mặt bất kỳ là $p_1 = 1$.
Xác suất để lần 2 gieo được mặt khác lần 1 là $p_2 = \dfrac{5}{6}$.
Xác suất để lần 3 gieo được mặt giống lần 1 là $p_3 = \dfrac{1}{6}$.
Vì vậy để bạn An phải tung xúc xắc đúng 3 lần là $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = \dfrac{5}{36}$.
Trường hợp 2: Lần 2 và 3 trùng nhau.
Xác suất để lần 1 gieo được mặt bất kỳ là $p_1 = 1$.
Xác suất để lần 2 gieo được mặt khác lần 1 là $p_2 = \dfrac{5}{6}$.

Xác suất để lần 3 gieo được mặt giống lần 2 là $p_3 = \dfrac{1}{6}$.

Vì vậy để bạn An phải tung xúc xắc đúng 3 lần là $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = \dfrac{5}{36}$.

Tổng hợp xác suất cần tìm là $\dfrac{5}{36} + \dfrac{5}{36} = \dfrac{5}{18}$.

THPT Lê Xoay

Câu 1. Chọn đáp án C

Gọi x $(0 \leqslant x \leqslant 15)$ là số máy in cần sử dụng để in lô hàng.

Chi phí cài đặt và bảo dưỡng là $48\,000x$.

Số giờ in hết số ấn phẩm của một máy in là $\dfrac{6\,000}{30x}$, chi phí cài đặt và giám sát là $\dfrac{6\,000}{30x} \cdot 24\,000 + 48\,000x$.

Tổng chi phí in là $C(x) = 48\,000x + \dfrac{4\,800\,000}{x}$.

Ta có $C'(x) = 48\,000 - \dfrac{4\,800\,000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = -10. \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên.

x	0		10		15
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$528\,000$	$\nearrow$	$752\,000$

Vậy để chi phí bỏ ra là ít nhất thì cần sử dụng 10 máy in.

Câu 2. Chọn đáp án B

Tọa độ điểm A là nghiệm hệ $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3;1)$.

Gọi $M(x;y)$ là trung điểm của BC. Suy ra $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2x - 6 \\ 1 = 2y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(3; \dfrac{5}{2}\right)$.

Gọi điểm $B(t; t-2)$. Vì M là trung điểm của BC nên $C(6-t; 7-t)$.

Thay tọa độ điểm C vào phương trình AC ta có phương trình $(6-t) + 2(7-t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 5$.

Suy ra $B(5;3)$, $C(1;2)$. Phương trình BC là $x - 4y + 7 = 0$.

Vậy $m = -4$, $n = 7 \Rightarrow m + n = 3$.

Câu 3. Chọn đáp án C

Gọi Ω là không gian mẫu, $\mathrm{C}_{10}^{3} = 120$.

Gọi A_i là biến cố "bạn B mở được cửa ở lần thử thứ i".

Các cặp số thỏa mãn $(0;1;9)$, $(0;2;8)$, $(0;3;7)$, $(0;4;6)$, $(1;2;7)$, $(1;3;6)$, $(1;4;5)$, $(2;3;5)$.

Suy ra $\mathrm{P}(A_i) = \dfrac{8}{120} = \dfrac{1}{15}$ và $\mathrm{P}\left(\overline{A}_i\right) = \dfrac{14}{15}$.

Gọi E là biến cố "bạn B mở được cửa phòng học".

$E = A_1 \cup \overline{A}_1 A_2 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$.

Suy ra

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E) &= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathrm{P}\left(\overline{A}_2\right)\mathrm{P}(A_3) \\ &= \frac{1}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{15} = \frac{631}{3\,375}. \end{aligned}$$

Câu 4. Chọn đáp án C

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(a-b^2)x^2-4bx-3}{(x-1)^2(x+2)\left(\sqrt{ax^2+1}+bx+2\right)}$.

Đặt $f(x)=(a-b^2)x^2-4bx-3$.

Để $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có kết quả là một số thực thì $f(x)=(a-b^2)x^2-4bx-3$ phải có nghiệm kép $x=1$, do đó $\begin{cases}a-b^2\neq 0\\ \Delta'=b^2+3a=0\\ a-b^2-4b-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b^2\neq 0\\ a=-\dfrac{b^2}{3}\\ 4b^2+12b+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-\dfrac{3}{2}\\ a=-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

Suy ra $a^2+b^2=\dfrac{45}{16}$.

Câu 5. Chọn đáp án B

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+7}{-x+2}$.

Ta có $y=\dfrac{x^2-5x+7}{-x+2}=-x+3+\dfrac{1}{-x+2}$ nên đồ thị có tiệm cận xiên là $(d_1)\colon y=-x+3$ và tiệm cận đứng là $(d_2)\colon x=2$.

$y'=\dfrac{-x^2+4x-3}{(-x+2)^2}$; $y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3.\end{array}\right.$

Đồ thị có 2 điểm cực trị là $A(1;3)$, $B(3;-1)$.

Câu 6. Chọn đáp án C

Gọi R_1, R_2, …, R_n lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, …, $A_nB_nC_n$.

Ta có $S_{A_1B_1C_1}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27}{4R_1}\Rightarrow R_1=\sqrt{3}\Rightarrow S_1=\pi\cdot 3$.

Tương tự, $S_{A_2B_2C_2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{16}=\dfrac{27}{32R_2}\Rightarrow R_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow S_2=\pi\cdot\dfrac{3}{4}$.

$S_{A_3B_3C_3}=\dfrac{9\sqrt{3}}{64}=\dfrac{27}{256R_3}\Rightarrow R_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow S_3=\pi\cdot\dfrac{3}{16}$.

$S_n=\pi\cdot\dfrac{3}{4^{n-1}}$.

Vậy:

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots\\&=3\pi\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}+\cdots\right)\\&=3\pi\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{4}}\\&=4\pi.\end{aligned}$$

Câu 7. Chọn đáp án B

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 8. Chọn đáp án C

Số phần tử không gian mẫu là 24^4.

Chọn 2 lần trong 4 lần để bạn Nam ngồi cùng vị trí có C_4^2 cách.

Chọn 1 trong 24 vị trí để bạn Nam ngồi cùng vị trí đó có 24 cách.

Xếp 2 vị trí còn lại khác vị trí trên để bạn Nam ngồi có $23\cdot 22$ cách.

Xác suất cần tìm là $\dfrac{\mathrm{C}_4^2 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{24^4} = \dfrac{253}{1\,152}$.

Câu 9. Chọn đáp án C

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

Suy ra $\begin{cases} x_A - x_I + 3(x_B - x_I) = 0 \\ y_A - y_I + 3(y_B - y_I) = 0 \\ z_A - z_I + 3(z_B - z_I) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + 3x_B}{4} = -\dfrac{3}{4} \\ y_I = \dfrac{y_A + 3y_B}{4} = \dfrac{11}{4} \\ z_I = \dfrac{z_A + 3z_B}{4} = \dfrac{19}{4}. \end{cases}$

Suy ra $I\left(-\dfrac{3}{4}; \dfrac{11}{4}; \dfrac{19}{4}\right)$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{IB}\right| = \left|4\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}\right| = 4MI$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, khi đó M là hình chiếu của I lên (Oxy).

Vậy $M\left(-\dfrac{3}{4}; \dfrac{11}{4}; 0\right)$, suy ra $T = x_M + y_M + z_M = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{11}{4} = 2$.

Câu 10. Chọn đáp án B

Ta có $2f(x) + 3m + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3 - 3m}{2}$.

Để thỏa mãn thì $-1 < \dfrac{3 - 3m}{2} < 3 \Leftrightarrow -2 < 3 - 3m < 6 \Leftrightarrow -1$.

Câu 11. Chọn đáp án A

Dựa vào đồ thị, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ (cả 3 nghiệm trên đều là nghiệm đơn).

Ta có $y' = -2xf'(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$ (7 nghiệm đều là nghiệm đơn).

Ta có bảng xét dấu của y' như sau

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 12. Chọn đáp án C

Gọi chiều rộng hình hộp là x m $\Rightarrow$ chiều dài hình chữ nhật là $2x$ m.

Diện tích xung quanh là $2xh + 2 \cdot 2xh + 2x^2 = 6{,}5 \Rightarrow h = \dfrac{6{,}5 - 2x^2}{6x}$.

Vì $x, h > 0 \Rightarrow 0 < x < \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Thể tích khối hộp là $V = \dfrac{6{,}5 - 2x^2}{6x} \cdot 2x \cdot x = \dfrac{1}{3} \cdot (6{,}5x - 2x^3)$.

$V' = \dfrac{1}{3} \cdot (6{,}5 - 6x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

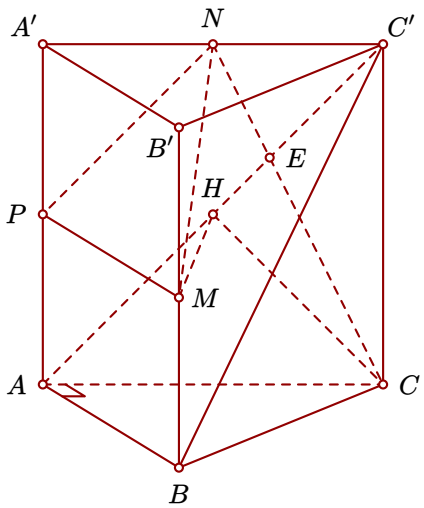
Vậy $V_{\max} = V\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right) \approx 1{,}50\ \mathrm{m}^3$.

Câu 13. Chọn đáp án A
Ta có $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là $(2;-1;5)$.

Câu 14. Chọn đáp án A
Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 có phương trình là $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.
Hàm số $y=x^3-3mx+2$ có $y'=3x^2-3m$, do đó đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=2-2mx$.
Tọa độ giao điểm A, B là nghiệm của hệ
$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=1\\ y=2-2mx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(4m^2+1)x^2-2x(2m+1)+1=0 \quad (1)\\ y=2-2mx.\end{cases}$$
Diện tích của tam giác IAB là $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA\cdot IB\cdot\sin\widehat{AIB}=\dfrac{1}{2}\sin\widehat{AIB}$.
Vậy diện tích lớn nhất khi $\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=0$.
$\overrightarrow{IA}=(x_A-1;1-2mx_A)$; $\overrightarrow{IB}=(x_B-1;1-2mx_B)$.
Vậy $(x_A-1)(x_B-1)+(1-2mx_A)(1-2mx_B)=0\Leftrightarrow(4m^2+1)x_A\cdot x_B-(2m+1)(x_A+x_B)+2=0$.
Mà từ (1) ta có $x_A+x_B=\dfrac{4m+2}{4m^2+1}$; $x_A\cdot x_B=\dfrac{1}{4m^2+1}$.
Ta được $4m^2-8m+1=0$.
Vậy $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

Câu 15. Chọn đáp án D
Từ bảng biến thiên ta có kết quả $\lim\limits_{x\to-\infty}y=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=3$ nên $y=1$, $y=3$ là các đường tiệm cận ngang.
$\lim\limits_{x\to0^-}y=-\infty$ nên $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 16. Chọn đáp án: a b c d



a) Gọi P là trung điểm AA', khi đó $PN\parallel AC'$, $PM\parallel AB$, do đó $(MNP)\parallel(ABC')\Rightarrow MN\parallel(ABC')$.
Vậy góc giữa MN và (ABC') bằng $0°$.
b) Ta có $AB\perp AC$, $AB\perp AA'$ nên $AB\perp(ACC'A')$, do đó AC' là hình chiếu vuông góc của BC' trên $(ACC'A')$.
Vậy góc tạo bởi BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ là $\widehat{AC'B}=30°$.
Theo giả thiết, góc giữa BC' và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{C'BC}=\alpha$.

Đặt $AB = x$. Ta có $BC = \sqrt{x^2 + 3a^2}$, $C'B = 2x$.

Chiều cao hình lăng trụ $h = CC' = BC' \cdot \sin\alpha = 2x \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{4} = \dfrac{x\sqrt{6}}{2}$.

Lại có $BC^2 + CC'^2 = BC'^2 \Leftrightarrow x^2 + 3a^2 + \dfrac{6x^2}{4} = 4x^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$.

Khi đó $h = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot CC' = \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

Thể tích khối chóp $C'.ABB'A'$ bằng $\dfrac{2}{3}V = a^3\sqrt{2}$.

c) Ta có $(MNP) \parallel (ABC')$ nên $\mathrm{d}(MN, AC') = \mathrm{d}((MNP), (ABC')) = \mathrm{d}(N, (ABC')) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(C, (ABC'))$.

Kẻ $CH \perp AC'$ tại H.

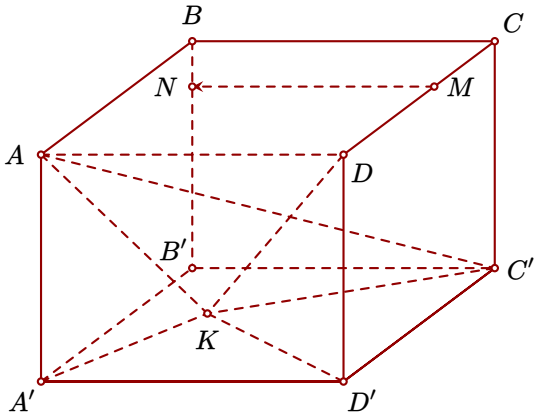
Do $ACC'A'$ là hình vuông nên $CH \perp AC'$, mà $CH \perp AB$ (do $AB \perp (ACC'A')$).

Vậy $CH \perp (ABC') \Rightarrow \mathrm{d}(C, (ABC')) = CH = \dfrac{1}{2}AC' = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}(MN, AC') = \dfrac{a\sqrt{6}}{8}$.

d) $CC' = a\sqrt{3}$.

Câu 17. Chọn đáp án: a b c d



a) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b) Ta có $\overrightarrow{C'K} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{C'D'}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{C'C}\right) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D'} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$.

c) Xét $x = 0 \Rightarrow D \equiv M$, $B \equiv N \Rightarrow MN \equiv BD \Rightarrow BD \perp AC' \Rightarrow \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC'}\right) = 90°$.

d) Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right| \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}\right) = a \cdot a\sqrt{2}\cos(135°) = -a^2$.

Câu 18. Chọn đáp án: a b c d

a) Nếu công ty lắp đường ống theo đường ACB thì số tiền là $9 \cdot 50\,000 + 6 \cdot 130\,000 = 1\,230\,000$ USD.

b) Ta có $MC = x$, $AM = 9 - x$, $BM = \sqrt{36 + x^2}$ $(0 < x < 9)$.

Chi phí hoàn thành quãng đường là $S = AM \cdot 50\,000 + BM \cdot 130\,000 = (9 - x) \cdot 50\,000 + 130\,000\sqrt{36 + x^2}$.

Để chi phí thấp nhất thì $S = (9 - x) \cdot 50\,000 + 130\,000\sqrt{36 + x^2}$ phải nhỏ nhất.

$S' = -50\,000 + \dfrac{130\,000x}{\sqrt{36 + x^2}}$; $S' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{130\,000x}{\sqrt{36 + x^2}} = 50\,000 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{36 + x^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{5}{2}$		9
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		↘	$1\,170\,000$	↗	

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là $1\,170\,000$ USD.
c) Khi M là trung điểm của AC thì $MC = 4{,}5$, $AM = 4{,}5$, $BM = \sqrt{36 + 4{,}5^2} = 7{,}5$.
Chi phí hoàn thành quãng đường là $S = AM \cdot 50\,000 + BM \cdot 130\,000 = 4{,}5 \cdot 50\,000 + 130\,000 \cdot 7{,}5 = 1\,200\,000$ USD.
d) Nếu công ty lắp đường ống thẳng theo đường trên biển từ A đến B thì $AB = \sqrt{36 + 9^2} = 3\sqrt{13}$.
Chi phí hoàn thành quãng đường là $S = AB \cdot 130\,000 = 3\sqrt{13} \cdot 130\,000 \approx 1\,406\,164{,}98$ USD.

Câu 19. Chọn đáp án: a b c d
a) Xét phương trình $\log_5^2 x - (m-1)\log_5 x + 4 - m = 0$.
Đặt $t = \log_5 x$. Do $x \in [1;25] \Rightarrow 0 \leqslant t \leqslant 2$. Ta thu được phương trình $t^2 - (m-1)t + 4 - m = 0$.
Yêu cầu bài toán trở thành phương trình $t^2 - (m-1)t + 4 - m = 0$ (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $[0;1]$.

Ta có $t^2 - (m-1)t + 4 - m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 4 = m(t+1) \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2+t+4}{t+1}$.

Xét $f(t) = \dfrac{t^2+t+4}{t+1} = t + \dfrac{4}{t+1}$, $t \in [0;1]$.

$f'(t) = 1 - \dfrac{4}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	0		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	↘	3	↗	$\frac{10}{3}$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi $3 < m \leqslant \dfrac{10}{3}$ nên $a = 3$, $b = \dfrac{10}{3} \Rightarrow a + b = \dfrac{19}{3}$.
b) Đặt $t = \log_3(x-m) \Rightarrow x - m = 3^t$, thế vào phương trình ta được phương trình $\Rightarrow 3^x + x - 3^t = t \Leftrightarrow 3^x + x = 3^t + t \Leftrightarrow x = t$.
Từ $x = t \Leftrightarrow 3^x = x - m \Leftrightarrow 3^x - x = -m$.
Xét $f(x) = 3^x - x$.
$f'(x) = 3^x \ln 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{1}{\ln 3} \Leftrightarrow x = \log_3\left(\dfrac{1}{\ln 3}\right)$.
Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $f\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right) \approx 0{,}996$.

Khi đó phương trình có nghiệm và $m \in (-15;15)$, m nguyên thì m từ $1 \to 14$. Vậy có 14 giá trị.

c) Để hàm số $f(x)$ có đúng 5 điểm cực trị nằm về phía bên phải trục Oy thì $x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x - m = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Ta có $x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = m(3x^2 - 6x + 1) \Leftrightarrow m = \dfrac{x^3 - 3x}{3x^2 - 6x + 1}$ (1).

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{3x^2 - 6x + 1}$, $x > 0$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{3x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 3}{(3x^2 - 6x + 1)^2}$.

Xét phương trình

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 - 2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{3-\sqrt{6}}{3}$		$\frac{3+\sqrt{6}}{3}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Với $f\left(1+\sqrt{2}\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Từ BBT ta có phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt dương khi và chỉ khi $m > 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Mà $m \in [-2\,022; 2\,022]$, m nguyên thì m lấy từ $2 \to 2\,022$ nên có 2 021 giá trị.

d) Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$, $x \in [-2;3]$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

$f(-2) = m - 2$, $f(-1) = 5 + m$, $f(3) = m - 27$.

$\max\limits_{[-2;3]} f(x) = m + 5$, $\min\limits_{[-2;3]} f(x) = m - 27$.

TH1: $m + 5 + m - 27 \geqslant 0 \Leftrightarrow m \geqslant 11$ thì $\max\limits_{[-2;3]} |f(x)| = m + 5 < 50 \Leftrightarrow m < 45$ nên $m = 11 \to 44$.

TH2: $m+5+m-27 < 0 \Leftrightarrow m < 11$ thì $\max\limits_{[-2;3]} |f(x)| = 27 - m < 50 \Leftrightarrow m > -23$ nên $m = -22 \to 10$.

Ta được $m = -22 \to 44$. Tổng các giá trị của m là $-22 - 21 - 20 - \ldots + 0 + 1 + \ldots + 44 = \frac{67}{2}[2 \cdot (-22) + 66 \cdot 1] = 737$.

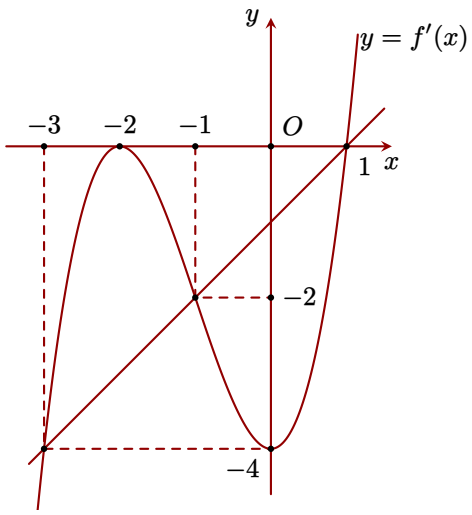
Câu 20. Chọn đáp án: a b c d

a) Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.

b)

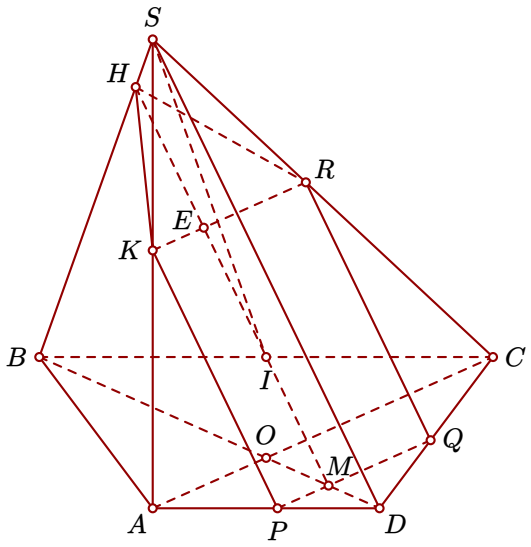


Ta có $g'(x) = f'(x) - x + 1 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > x - 1 \Leftrightarrow x \in (-3; -1) \cup (1; +\infty)$. Do đó hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + x + 2\,024$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

c) Vì hàm số $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba và có đồ thị như hình vẽ nên $f'(x) = a(x+2)^2(x-1)$.
Ta có $f'(0) = -4 \Leftrightarrow -4 = a(0+2)^2(0-1) \Leftrightarrow -4 = -4a \Leftrightarrow a = 1$.
Suy ra $f'(x) = (x+2)^2(x-1)$.
Do đó $f'(2) = 4^2 = 16$.

d) Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 21. Đáp án: 3.



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.
$IA = IB = IC = ID \Rightarrow SA = SB = SC = SD = 2a$.
$\begin{cases} M \in (ABCD) \cap (\alpha) \\ AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (ABCD) \cap (\alpha) = Mx \parallel AC.$
Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của Mx với AD và CD.
$\begin{cases} Q \in (SCD) \cap (\alpha) \\ SD \parallel (\alpha) \\ SD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SCD) \cap (\alpha) = Qy \parallel SD.$
Gọi R là giao điểm của Qy với SC.
$\begin{cases} P \in (SAD) \cap (\alpha) \\ SD \parallel (\alpha) \\ SD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = Pz \parallel SD.$
Gọi K là giao điểm của Pz với SA.
$\begin{cases} M \in (SBD) \cap (\alpha) \\ SD \parallel (\alpha) \\ SD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SBD) \cap (\alpha) = Mt \parallel SD.$
Gọi H là giao điểm của Mt với SB.
Thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $PQRHK$.
$S_{PQRHK} = S_{PQRK} + S_{HKR}$.
Ta có $ABCD$ là nửa lục giác đều tâm I có cạnh bằng a.
$BD = AC = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.
Suy ra $OA = OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
$PQ \parallel AC \Rightarrow \dfrac{DM}{DO} = \dfrac{PQ}{AC} \Rightarrow PQ = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot x}{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}} = 3x.$
$KP \parallel SD \Rightarrow \dfrac{KP}{SD} = \dfrac{AP}{AD} = \dfrac{OM}{OD}$
Suy ra $KP = \dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3} - x\right) \cdot 2a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}} = 2(a - x\sqrt{3}).$

Dễ thấy được $PQRK$ là hình chữ nhật, ta có $S_{PQRK} = PQ \cdot PK = 6x(a - x\sqrt{3})$.

$MH \parallel SD \Rightarrow \dfrac{MH}{SD} = \dfrac{BM}{BD} \Rightarrow MH = \dfrac{(a\sqrt{3} - x) \cdot 2a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2(a\sqrt{3} - x)}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow HE = HM - EM = \dfrac{2(a\sqrt{3} - x)}{\sqrt{3}} - 2(a - x\sqrt{3}) = \dfrac{4x}{\sqrt{3}}$.

$S_{HKR} = \dfrac{1}{2} HE \cdot KR = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4x}{\sqrt{3}} \cdot 3x = 2x^2\sqrt{3}$.

$S_{PQRHK} = S_{PQRK} + S_{HKR} = 6ax - 6x^2\sqrt{3} + 2x^2\sqrt{3} = 2x(3a - 2x\sqrt{3}) \leqslant 3a^2\sqrt{3}$.

$S_{\max} = 3a^2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x\sqrt{3} = 3a - 2x\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $m = 3$.

Câu 22. Đáp án: 8.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2$.

Xét phương trình $f''(x) = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 \\ x = m + 1. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu $f''(x)$.

x	$-\infty$		0		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
$f''(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	$f'(0) = 1 - m^2$	↗	$m^3 - m^2 - 3m + 3$	↘	$m^3 - m^2 - 3m - 1$	↗	$+\infty$

$y = 0$

.

Hàm số $y = f(|x|)$ có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi và chỉ khi phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ 1 - m^2 < 0 \\ (m^3 - m^2 - 3m + 3)(m^3 - m^2 - 3m - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}$.

Suy ra $3 < m^2 < 3 + 2\sqrt{2}$.

Đồng nhất kết quả, ta được $a = 3$, $b = 3$, $c = 2 \Rightarrow T = a + b + c = 8$.

Câu 23. Đáp án: 10.

Số tiền anh Bình thu được cả gốc và lãi sau một kì hạn gửi là $A = 200\,(1 + 0{,}0065)^{12}$.

Số tiền cả gốc và lãi anh Bình phải trả khi thế chấp sổ tiết kiệm là $B = 200\,(1 + 0{,}007)^4$.

Ta có $A - B = 200\left[(1 + 0{,}0065)^{12} - (1 + 0{,}007)^4\right] \approx 10$ triệu đồng.

Câu 24. Đáp án: 51.

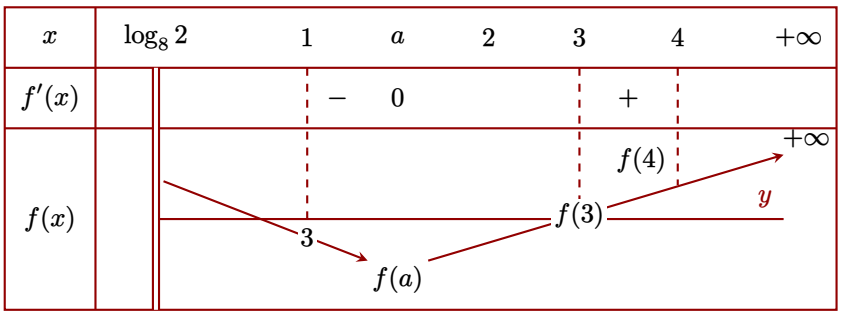
Điều kiện $3^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \log_3 2$.

$3^x - y \leqslant 2\log_2(3^x - 2) \Leftrightarrow y \geqslant f(x) = 3^x - 2\log_2(3^x - 2)$ trên $(\log_3 2; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 - \dfrac{2 \cdot 3^x \ln 3}{(3^x - 2)\ln 2} = 3^x \ln 3 \left(1 - \dfrac{2}{(3^x - 2)\ln 2}\right)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3^x - 2 = \dfrac{2}{\ln 2} \Leftrightarrow x = \log_3\left(\dfrac{2}{\ln 2} + 2\right) = \alpha$.

Ta có bảng biến thiên.



Từ đó ta có $\begin{cases} f(3) \leqslant y \\ f(4) > y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27 - 2\log_2 25 \leqslant y \\ 81 - 2\log_2 79 > y \end{cases} \Leftrightarrow 17{,}71 \leqslant y < 68{,}3.$
Do đó $y \in \{18; 19; 20; \ldots; 68\}$ nên có $68 - 18 + 1 = 51$ giá trị.

Câu 25. Đáp án: 80.
Gọi x là chiều cao của tam giác cân bị cắt bỏ $(0 < x < 10)$.
Khi đó cạnh tam giác cân là $\sqrt{10^2 + x^2} = \sqrt{100 + x^2}$ và đây là độ dài cạnh bên của hình chóp.
Ta có độ dài đường chéo của hình vuông $ABCD$ là $AC = 20 - 2x$.
Đường cao hình chóp $S.ABCD$ là $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{100 + x^2 - (10 - x)^2} = \sqrt{20x}$.
Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\sqrt{20x} \cdot \dfrac{(20 - 2x)^2}{2} = \dfrac{1}{6}\sqrt{20x}(20 - 2x)^2$.
Khi đó $V' = \dfrac{1}{6} \cdot \left(\dfrac{10}{\sqrt{20x}}\right)(20 - 2x)^2 + \dfrac{1}{6}\sqrt{20x} \cdot 2(20 - 2x) \cdot (-2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 10 \text{ (loại).} \end{array}\right.$
Ta có bảng biến thiên.

x	0		2		10
V'		$+$	0	$-$	
V	0	↗	$\dfrac{256\sqrt{10}}{3}$	↘	0

Thể tích lớn nhất bằng $\dfrac{256\sqrt{10}}{3}$ khi $x = 2$.
Diện tích tấm bạt bị cắt là $4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 = 80$ m^2.

Câu 26. Đáp án: 9,5.
Giả sử cần giảm giá bán mỗi cái tivi là x triệu đồng, $0 \leqslant x \leqslant 14$.
Do giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng nên số lượng tivi bán ra tăng lên bây giờ là $\dfrac{10x}{0{,}5} = 20x$.
Khi đó, doanh thu một tháng của cửa hàng là $(100 + 20x)(14 - x) = -20x^2 + 180x + 1\,400$.
Xét hàm số $f(x) = -20x^2 + 180x + 1\,400$ $(0 \leqslant x \leqslant 14)$.
Ta có $f'(x) = -40x + 180$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4{,}5$.
Bảng biến thiên.

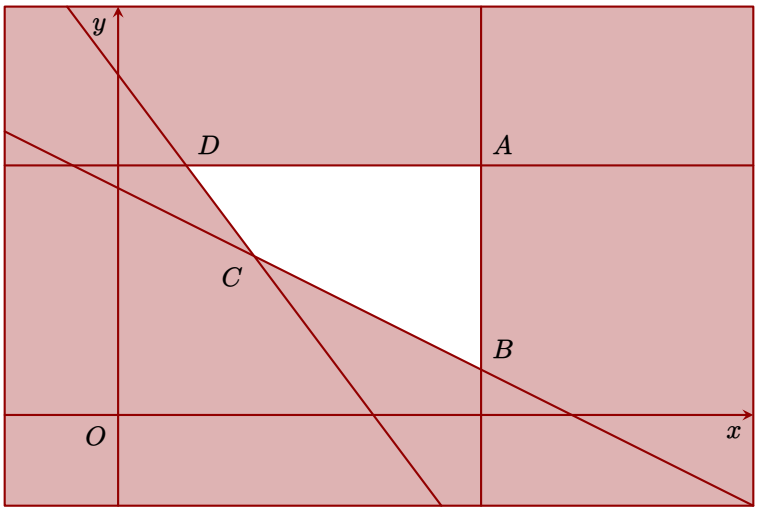
x	0		$4{,}5$		14
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$1\,400$	↗	$1\,805$	↘	0

Từ bảng biến thiên, ta thấy để doanh thu cửa hàng đạt cao nhất thì giá bán mỗi cái tivi là $14 - 4{,}5 = 9{,}5$ triệu đồng.

Câu 27. Đáp án: 1,4.
Giả sử gia đình đó mua x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn.
Số lượng thịt bò và thịt lợn phải là một số không âm nên ta có $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.
Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein trong thức ăn mỗi ngày nên ta có $800x + 600y \geqslant 900 \Leftrightarrow 8x + 6y \geqslant 9$.
Một gia đình cần ít nhất 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày nên ta có $200x + 400y \geqslant 400 \Leftrightarrow x + 2y \geqslant 2$.
Vì gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn nên ta có $x \leqslant 1{,}6$ và $y \leqslant 1{,}1$.
Vậy ta có hệ

$$\begin{cases} 8x + 6y \geqslant 9 \\ x + 2y \geqslant 2 \\ 0 \leqslant x \leqslant 1{,}6 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1{,}1. \end{cases} \quad (*)$$

Gọi đường thẳng d: $8x + 6y = 9$ và d': $x + 2y = 2$.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ là miền tứ giác $ABCD$ (kể cả biên) với
$A(1{,}6; 1{,}1)$ (giao của đường thẳng $x = 1{,}6$ và đường thẳng $y = 1{,}1$);
$B(1{,}6; 0{,}2)$ (giao của đường thẳng d' và đường thẳng $x = 1{,}6$);
$C(0{,}6; 0{,}7)$ (giao của d và d');
$D(0{,}3; 1{,}1)$ (giao của d và đường thẳng $y = 1{,}1$).
Số tiền gia đình phải trả khi mua x kg thịt bò và y kg thịt lợn là
$F(x; y) = 160x + 110y$ (nghìn đồng).
Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $F(x; y)$ khi $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình $(*)$.
Vậy để chi phí ít nhất thì cần mua 0,3 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn $\Rightarrow x + y = 0{,}3 + 1{,}1 = 1{,}4$.

Câu 28. Đáp án: 1.

Ta có $\cos 2x - \sin x + \dfrac{m}{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 2\sin x + \dfrac{m}{3} - 1 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sin x - \dfrac{m}{3} = 0.$

Đặt $t = \sin x$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$, ta có phương trình $2t^2 + 2t - \dfrac{m}{3} = 0$ $(*)$.

Để phương trình (1) có 5 nghiệm $x \in \left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{2}\right)$ thì phương trình $(*)$ có một nghiệm thỏa mãn $-1 < t \leqslant -\dfrac{1}{2}$ và một nghiệm thỏa mãn $-\dfrac{1}{2} < t < 1$.

Ta có phương trình $2t^2 + 2t - \dfrac{m}{3} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t = \dfrac{m}{3}$.

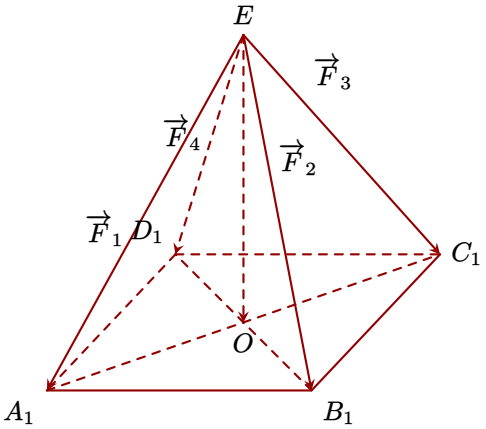
Đặt $f(t) = 2t^2 + 2t$, ta có bảng biến thiên.

t	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	4

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta có $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{m}{3} < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} < m < 0$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29. Đáp án: 270.



Đặt $\overrightarrow{EA} = \vec{F}_1$, $\overrightarrow{EB} = \vec{F}_2$, $\overrightarrow{EC} = \vec{F}_3$, $\overrightarrow{ED} = \vec{F}_4$.

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Ta suy ra $EO \perp (ABCD)$.

Do đó góc giữa đường thẳng EA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{EAO}$, suy ra $\widehat{EAO} = 60°$.

Ta có $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_3\right| = \left|\vec{F}_4\right| = 5\,000\sqrt{3}$ N nên $EA = EB = EC = ED = 5\,000\sqrt{3}$ N.

Tam giác EOA vuông tại O nên $EO = EA \cdot \sin \widehat{EAO} = 5\,000\sqrt{3} \cdot \sin 60° = 7\,500$.

Ta có

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}\\ &= 4\overrightarrow{EO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right)\\ &= 4\overrightarrow{EO}.\end{aligned}$$

Vì chiếc khung sắt chứa xe ô tô ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F}_1+\overrightarrow{F}_2+\overrightarrow{F}_3+\overrightarrow{F}_4=\overrightarrow{P}$, với $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác dụng lên khung sắt chứa xe ô tô.
Suy ra trọng lượng của khung sắt chứa chiếc xe ô tô là $\left|\overrightarrow{P}\right|=4\left|\overrightarrow{EO}\right|=4\cdot 7\,500=30\,000$ N.
Vì trọng lượng của khung sắt là 3 000 N nên trọng lượng của chiếc xe ô tô là $30\,000-3\,000=27\,000$ N $=100\cdot 270$. Suy ra $x=270$.

Câu 30. Đáp án: 13.
Ta có $A(0;0;0)$, $B(5;0;-5)$, $D(0;12;-8)$.
Gọi I là trung điểm BD. Suy ra tọa độ $I\left(\frac{5}{2};6;-\frac{13}{2}\right)$.
Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên I là trung điểm AC.
Vậy ta có $\begin{cases}x_C=2x_I-x_A=5\\ y_C=2y_I-y_A=12\\ z_C=2z_I-z_A=-13.\end{cases}$
Khi đó tọa độ $C(5;12;-13)$.
Suy ra vị trí C thấp hơn vị trí A là 13 cm.

THPT Nam Đàn Nghệ An

Câu 1. Chọn đáp án B

Kích thước của mẫu $n = 5 + 10 + 15 + 12 + 5 + 3 = 50$.

Giá trị đại diện lần lượt là $152; 156; 160; 164; 168; 172$.

Suy ra số trung bình là $\overline{x} = \dfrac{5.152 + 10.156 + 15.160 + 12.164 + 5.168 + 3.172}{50} = 160,88$.

Câu 2. Chọn đáp án D

Áp dụng công thức $C = A(1+r)^n$ với $A = 3{,}2$, $r = 0{,}7\% = 0{,}007$ và $C = 4$.

Ta có

$3{,}2(1+0{,}007)^n \geqslant 4$

$\Leftrightarrow (1+0{,}007)^n \geqslant \dfrac{4}{3{,}2}$

$\Leftrightarrow n \geqslant \log_{1{,}007} \dfrac{4}{3{,}2} \approx 31{,}99.$

Vậy phải mất 32 năm và năm đó là $2024 + 32 = 2056$.

Câu 3. Chọn đáp án C

Có $g'(x) = \left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right) f'\left(\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

Và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \quad (1) \\ \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2} = 1 \quad (2) \\ \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2} = 2. \quad (3) \end{array}\right.$

Xét hàm số $h(x) = \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2}$.

Có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và $h'(x) = (x+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2}\right) = 0$.

Suy ra bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	$\sqrt{2}-1$	↘	0

Từ đó chứng tỏ (2), (3) vô nghiệm.

Vậy $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Có bảng xét dấu của $g'(x)$

(do $g'(0) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) f'\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) < 0$).

x	$-\infty$		-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Câu 4. Chọn đáp án A

Áp dụng công thức $C = A(1+r)^n$ với $A = 3{,}2$; $r = 0{,}7\% = 0{,}007$ và $C = 4$.

Ta có

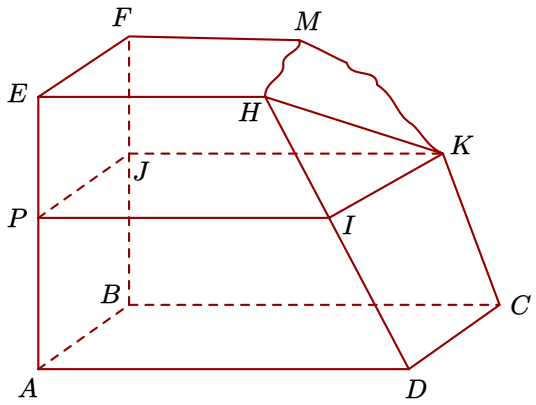
$3{,}2(1+0{,}007)^n \geqslant 4$

$\Leftrightarrow (1+0{,}007)^n \geqslant \dfrac{4}{3{,}2}$

$\Leftrightarrow n \geqslant \log_{1{,}007} \dfrac{4}{3{,}2} \approx 31{,}99.$

Vậy phải mất 32 năm và năm đó là $2024 + 32 = 2056$.

Câu 5. Chọn đáp án B



Ta có $DI = CK = 45$, theo định lí Ta lét ta có

$$\frac{DI}{DH} = \frac{BJ}{BF} \Rightarrow \frac{45}{70} = \frac{BJ}{50} \Rightarrow BJ = \frac{225}{7} \Rightarrow JF = BF - BJ = \frac{125}{7} \approx 17,9\text{cm}$$

Câu 6. Chọn đáp án C

Số tiền tiết kiệm được mỗi tháng khi anh sinh viên bắt đầu đi làm là $0{,}4a$.

Sau 2 năm đầu tiên, tổng số tiền của anh ấy tiết kiệm được là $24 \cdot 0{,}4a = 9{,}6a$.

Sau 12 năm tổng số tiền anh ấy tiết kiệm được là $9{,}6a \cdot \dfrac{(1+10\%)^6 - 1}{(1+10\%) - 1}$.

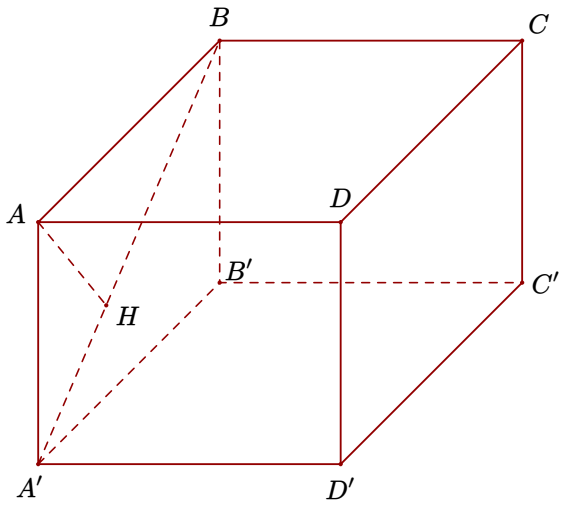
Giá nhà sau 12 năm sẽ tăng lên là $1 \cdot (1+5\%)^6$ (tỷ đồng).

Để mua được nhà sau 12 năm thì

$9{,}6a \cdot \dfrac{(1+10\%)^6 - 1}{(1+10\%) - 1} = 1 \cdot (1+5\%)^6 \cdot 10^9$

$\Rightarrow a = 18092321{,}4 \approx 18092000.$

Câu 7. Chọn đáp án D

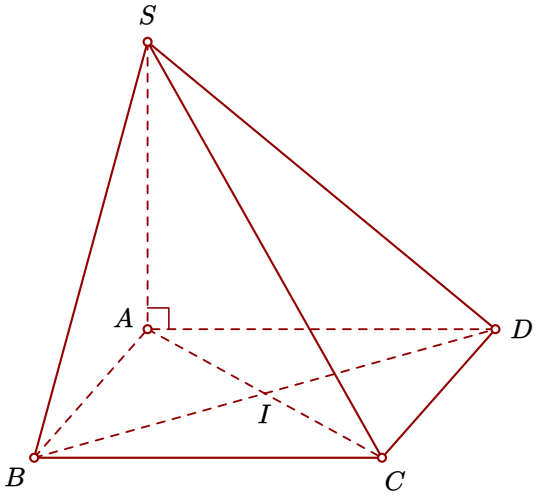


Dễ thấy $(ABA') \perp (BCD'A')$ và $(ABA') \cap (BCD'A') = A'B$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'B$.
Khi đó $AH \perp (BCD'A')$ hay $\mathrm{d}(A,(BCD'A')) = AH = a$.
Xét tam giác vuông $\triangle ABA'$, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{AA'^2}$$
$$\Leftrightarrow AA' = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Thể tích của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $V = AB \cdot AD \cdot AA' = 3a^3\sqrt{2}$.

Câu 8. Chọn đáp án D



Gọi $I = AC \cap BD$, thì I là trung điểm của đoạn AC .
Khi đó ta có $\dfrac{d(C,(SBD))}{d(A,(SBD))} = \dfrac{CI}{AI} = 1$ hay $d(C,(SBD)) = d(A,(SBD)) = \dfrac{6a}{7}$.

Câu 9. Chọn đáp án A
Gọi x là số lần tăng giá mỗi căn hộ.
Khi đó, giá cho thuê mỗi căn hộ là $2\,000\,000 + 100\,000x$ (đồng/tháng).
Số căn hộ bị bỏ trống là $2x$ nên số căn hộ cho thuê là $50 - 2x$ với $0 \leqslant x \leqslant 25$.

Số tiền thu được mỗi tháng khi cho thuê của công ty là
$T = (2\,000\,000 + 100\,000x)(50 - 2x)$
$\Leftrightarrow T = 200\,000(500 + 5x - x^2)$.
Xét hàm số $f(x) = 500 + 5x - x^2$ với $0 \leqslant x \leqslant 25$.
Dễ tìm được $\max\limits_{[0;25]} f(x) = 506{,}25$ khi $x = 2{,}5$.
Vậy để doanh thu lớn nhất thì giá thuê mỗi căn hộ sẽ là
$2\,000\,000 + 100\,000 \cdot 2{,}5 = 2\,250\,000$ (đồng/tháng).

Câu 10. Chọn đáp án B
Gọi d là khoảng cách từ O đến chất điểm, ta có
$d = |x| = \left|3\cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right| = 3\left|\cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right|$.
Với $t \in [0;5]$, ta có
$\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{2t}{3} + \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{10}{3} + \frac{\pi}{3}$
$\Rightarrow \cos\pi \leqslant \cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \cos\frac{\pi}{3}$
hay
$-1 \leqslant \cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \frac{1}{2}$
$\Rightarrow -3 \leqslant x = 3\cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \frac{3}{2}$.
$\Rightarrow d = |x| = 3\left|\cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right| \leqslant 3$
$\Rightarrow \max\limits_{[0;5]} d = 3 \Leftrightarrow \left|\cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right| = 1$
$\Rightarrow \cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = -1$
$\Leftrightarrow \frac{2t}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$
$\Leftrightarrow t = \pi$.

Câu 11. Chọn đáp án A
Xét phép thử: "Đặt ngẫu nhiên hết các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ vào 9 ô vuông của lưới sao cho mỗi ô vuông chỉ được đặt đúng một số."
Mỗi cách xếp 9 chữ số trong các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ vào 9 ô vuông là một hoán vị của 9 phần tử.
Do đó $n(\Omega) = 9!$.
Gọi biến cố A: Tổng các số trên mỗi hàng là số lẻ và tổng các số trên mỗi cột cũng là số lẻ.
Ta có các trường hợp sau:
Trường hợp 1:

L	L	L
L	C	C
L	C	C

L	C	C
L	L	L
L	C	C

L	C	C
L	C	C
L	L	L

Trường hợp 2:

L	L	L
C	C	L
C	C	L

C	C	L
L	L	L
C	C	L

C	C	L
C	C	L
L	L	L

Trường hợp 3:

L	L	L
C	L	C
C	L	C

C	L	C
L	L	L
C	L	C

C	L	C
C	L	C
L	L	L

Như vậy $n(A) = C_3^1.C_3^1.5!.4!$

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{14}$.

Câu 12. Chọn đáp án D

Ta có

$$\begin{aligned}
&\mathrm{C}_n^3\mathrm{C}_n^{n-3} + 4\mathrm{C}_n^3\mathrm{C}_n^{n-2} + 4\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^{n-2} = 12544\\
&\Leftrightarrow \left(\mathrm{C}_n^3\right)^2 + 4\mathrm{C}_n^3\mathrm{C}_n^2 + 4\left(\mathrm{C}_n^2\right)^2 = 12544\\
&\Leftrightarrow \left(\mathrm{C}_n^3 + 2\mathrm{C}_n^2\right)^2 = 12544\\
&\Leftrightarrow \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^2 = 112\\
&\Leftrightarrow \mathrm{C}_{n+1}^3 + \mathrm{C}_n^2 = 112\\
&\Leftrightarrow \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = 112\\
&\Leftrightarrow n^3 + 3n^2 - 4n - 672 = 0\\
&\Leftrightarrow (n-8)(n^2+11n+84) = 0\\
&\Leftrightarrow n = 8.
\end{aligned}$$

Vậy $P = \dfrac{\mathrm{A}_n^2 \cdot \mathrm{C}_{n-1}^4}{n} = 245.$

Câu 13. Chọn đáp án: a b c d

a) Bình chắc chắn đúng 10 câu, mỗi câu 0,5 điểm nên chắc chắn được $10 \cdot 0{,}5 = 5$ điểm.

b) Mỗi câu có 4 phương án trả lời mà chỉ có một đáp án đúng. Xác suất Bình trả lời sai ở một câu là $\dfrac{3}{4}$.

c) Do Bình được chắc chắn 5 điểm nên để đạt được 8 điểm, trong 10 câu còn lại Bình cần trả lời đúng 6 câu và trả lời sai 4 câu. Xác suất là $\mathrm{C}_{10}^6 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^4$.

d) Để đạt được 9 điểm trở lên Bình cần làm đúng ít nhất 8 câu còn lại, xác suất là $\mathrm{C}_{10}^6 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^4$

Câu 14. Chọn đáp án: a b c d

a) $\log_{\sqrt{a}} y = \log_{a^{\frac{1}{2}}} y = 2\log_a y$.

b) Ta có x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên $y^2 = x \cdot z$.

$x \cdot z \leqslant \dfrac{x^2+z^2}{2}$

$\Leftrightarrow y^2 \leqslant \dfrac{x^2+z^2}{2}$

$\Leftrightarrow 2y^2 \leqslant x^2+z^2$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{3}{5}} 2y^2 \geqslant \log_{\frac{3}{5}} \left(x^2+z^2\right)$

hay $\log_{\frac{3}{5}} \left(x^2+z^2\right) \leqslant \log_{\frac{3}{5}} 2y^2$.

c) $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên ta có

$2\log_{\sqrt{a}} y = \log_a x + \log_{\sqrt[3]{a}} z$

$\Leftrightarrow 4\log_a y = \log_a x + 3\log_a z$

$\Leftrightarrow y^4 = x \cdot z^3 \quad (1)$.

Theo giả thiết ở trên ta có $y^2 = x \cdot z$, thay vào (1)

$x^2 \cdot z^2 = x \cdot z^3$

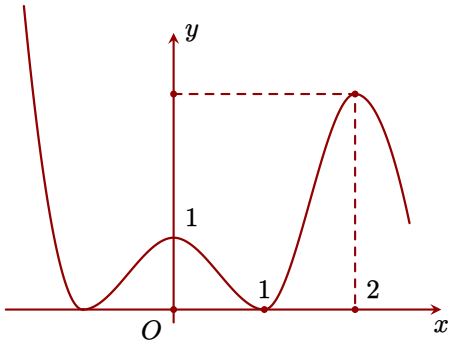
$\Leftrightarrow x = z = y$.

$\log_a x + \log_{\sqrt{a}} y + \log_{\sqrt[3]{a}} z = \log_a y + 2\log_a y + 3\log_a y = 6\log_a y = 3\log_a y^2$.

d) $\dfrac{2023x}{y} + \dfrac{2024y}{z} + \dfrac{60z}{x} = \dfrac{2023y}{y} + \dfrac{2024y}{y} + \dfrac{60y}{y} = 2023 + 2024 + 60 = 4107$.

Câu 15. Chọn đáp án: a b c d

a) Xét hàm số $h(x) = |f(x)|$ trên đoạn $[0;2]$. Đồ thị của hàm số $h(x) = |f(x)|$ như sau:

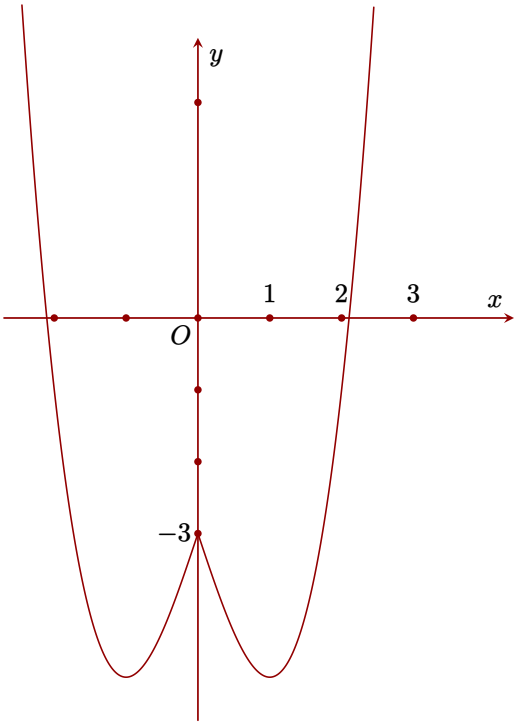


Vậy $\min h(x) = 0$, $\max h(x) = 3$, hay tổng bằng 3.

b) Đúng

c) Thực hiện liên tiếp các bước biến đổi đồ thị sau để được đồ thị hàm số $y = g(|x|)$.

- Bước 1: Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang trái -1 đơn vị.
- Bước 2: Tịnh tiến độ thị ở Bước 1 xuống dưới 2 đơn vị
- Bước 3: Bỏ phần đồ thị bên phải trục Oy và lấy đối xứng phần đồ thị bên phải trục Oy qua trục Oy của đồ thị có được ở Bước 2 ta được đồ thị hàm số $y = g(|x|)$.

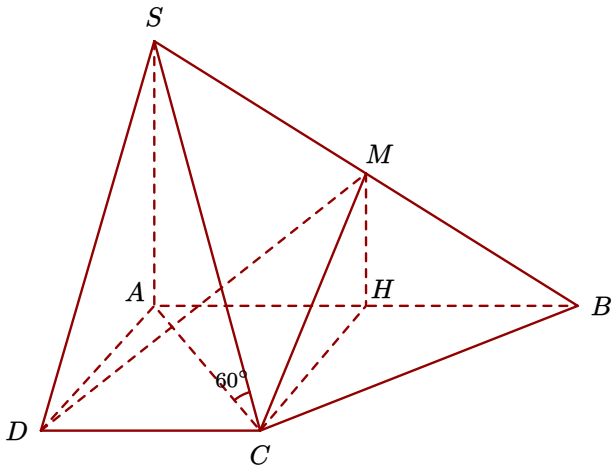


Ta có đồ thị hàm số như hình vẽ trên.
Từ đó suy ra hàm số có 3 điểm cực trị

d) Xét hàm số $g(x)=f(x+1)-2$ có $g'(x)=f'(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên tập chứa $x=1$ nên $g'(0)=f'(1)<0$ hay hàm số $g'(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 16. Chọn đáp án: a b c d



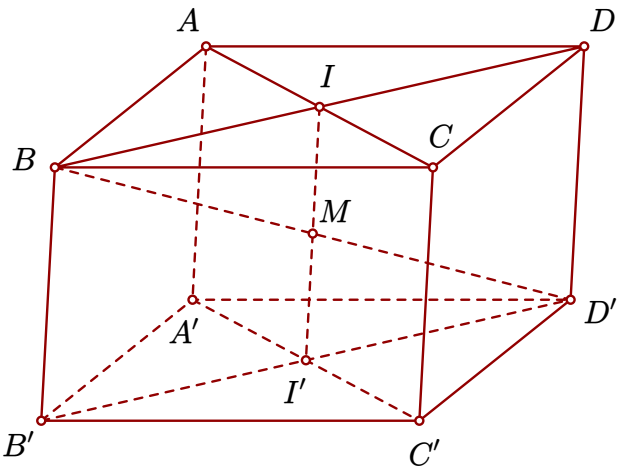
a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$.
b) Gọi H là trung điểm AB suy ra tứ giác $ADCH$ là hình vuông với cạnh bằng 1.
$\Rightarrow AC=\sqrt{2}$.
Ta có MH là đường trung bình của tam giác SAB nên $MH \parallel SA$.
Suy ra $MH \perp (ABCD)$.
Ta có $S_{BCD}=S_{ABCD}-S_{ABD}=\dfrac{1}{2}(AB+CD)\cdot AD-\dfrac{1}{2}AD\cdot AB=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$.
Mặt khác $\widehat{SCA}=60^\circ$ nên $SA=AC\cdot\tan 60^\circ=\sqrt{6}$ suy ra $MH=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $V_{M.BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot MH \cdot S_{BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$.

c) Chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ là $SA = \sqrt{6}$.

d) $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 17. Đáp án: 513.



Gọi M là trung điểm của $BD' \Rightarrow M(5;4;5)$.

M cũng là trung điểm của $II' \Rightarrow I'\left(\dfrac{19}{2};4;\dfrac{27}{2}\right)$.

Vậy $T = x \cdot y \cdot z = 513$.

Câu 18. Đáp án: 60.

$C'(v) = -\dfrac{5400}{v^2} + \dfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow v = 60 \quad (0 < v \leqslant 120)$.

$C(60) = 180$.

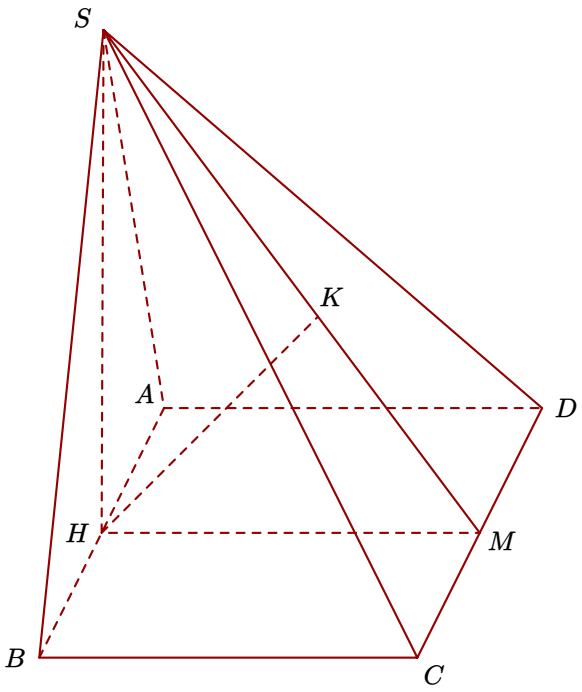
$C(120) = 225$.

Lập bảng biến thiên hàm số $C(v) = \dfrac{5400}{v} + \dfrac{3}{2}v$ $(0 < v \leqslant 120)$ suy ra $\min\limits_{(0;120]} C(v) = C(60) = 180$ đồng.

Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là 60 km/h để tiết kiệm tiền xăng nhất.

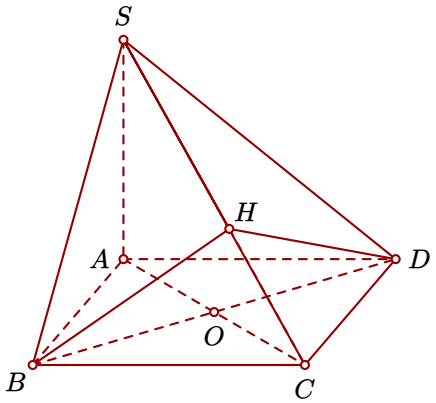
THPT Nguyễn Bính

Câu 1. Chọn đáp án D



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Vì $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(H, (SCD))$.
Gọi M là trung điểm của CD, kẻ $HK \perp SM\ (K \in SM) \Rightarrow HK \perp (SCD)$.
Tam giác SAB vuông cân tại $S \Rightarrow SH = \dfrac{1}{2}AB = a$.
Tam giác SHM vuông tại H, ta có:
$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.
Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 2. Chọn đáp án D



Ta có $(SBC) \cap (SCD) = SC$; kẻ $BH \perp SC$. (1)
Lại có $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$. (2)
Từ (1), (2) $\Rightarrow SC \perp (BHD) \Rightarrow ((SBC), (SCD)) = (BH, HD)$

Mà $\triangle CHO \backsim \triangle CAS \Rightarrow \dfrac{OH}{SA} = \dfrac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{2}$.
Tam giác ODH vuông tại O có $\tan \widehat{ODH} = \dfrac{OH}{OD} = 1 \Rightarrow \widehat{OHD} = 45^\circ$.
Vậy $((SBC),(SCD)) = 90^\circ$.

Câu 3. Chọn đáp án D
Đặt $\begin{cases} f(1) = a \\ f'(1) = b. \end{cases}$
Thay $x = 0$ vào giả thiết $f^2(1+2x) + f^3(1-x) = x$, ta được: $f^2(1) + f^3(1) = 0 \Rightarrow a^3 + a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -1 \end{array}\right.$.
Đạo hàm 2 vế của $f^2(1+2x) + f^3(1-x) = x$, ta có:
$f^2(1+2x) = x - f^3(1-x) \Leftrightarrow 4f'(1+2x)f(1+2x) = 1 + 3f'(1-x)f^2(1-x)$ (1).
Thay $x = 0$ vào (1), ta được: $4f'(1)f(1) = 1 + 3f'(1)f^2(1) \Rightarrow 4ab = 1 + 3a^2b$ (2).
TH1: Với $a = 0$, thay vào (2), ta được $0 = 1$.
TH2: Với $a = -1$, thay vào (2), ta được $-4b = 1 + 3b \Leftrightarrow b = -\dfrac{1}{7} \Rightarrow f'(1) = -\dfrac{1}{7}$.
Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{7}x - \dfrac{6}{7}$.

Câu 4. Chọn đáp án B
Ta có số phần tử của tập S là $n(S) = 9 \cdot 10^5$.
Gọi A là biến cố số chọn được từ S có các chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 0 và 1.
Số cách chọn 4 trong 8 chữ số khác chữ số 0 và 1 là C_8^4.
Xếp 6 chữ số 0, 1 và 4 chữ số vừa chọn ở trên để tạo thành một kết quả thuận lợi cho biến cố A có $6! - 5!$ cách.
Suy ra $n(A) = (6! - 5!)\mathrm{C}_8^4$.
Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{(6! - 5!)\mathrm{C}_8^4}{9 \cdot 10^5} = \dfrac{7}{150}$.

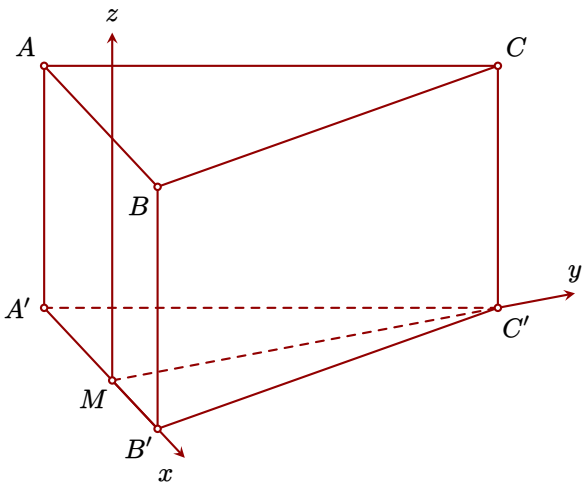
Câu 5. Chọn đáp án C
Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-4}{2-x} = -1$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-4}{2-x} = -1$.
Suy ta tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = -1$.

Câu 6. Chọn đáp án B
Ta có tập xác định hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
$y' = 4x^3 - 12x^2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right.$
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$.

Câu 7. Chọn đáp án D



Đặt $AB = 2x$ với $x > 0$. Gọi M là trung điểm của $A'B'$ suy ra $C'M = x\sqrt{3}$.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho M trùng gốc tọa độ, B' thuộc chiều dương của trục Ox, C' thuộc chiều dương của trục Oy.
Suy ra ta có tọa độ các điểm $M(0;0;0)$, $B'(x;0;0)$, $A'(-x;0;0)$, $A(-x;0;\sqrt{3})$, $B(x;0;\sqrt{3})$, $C'(0;x\sqrt{3};0)$.
$\overrightarrow{AB'} = (2x;0;-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BC'} = (-x;x\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

Ta có AB' vuông góc BC' suy ra $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}. \end{array}\right.$

Vì $x > 0$ suy ra $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AB = a\sqrt{6}$.

Diện tích tam giác ABC bằng: $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{9a^3}{2}$.

Câu 8. Chọn đáp án A

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{2}{3}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \dfrac{2}{3}$. Suy ra đường thẳng $y = \dfrac{2}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Lại có $\lim\limits_{x\to0^+} y$ và $\lim\limits_{x\to0^-} y$ không tồn tại.
$\lim\limits_{x\to3^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to3^-} y = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 3$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 9. Chọn đáp án B

Vì trục hoành, trục tung lần lượt là tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị nên ta có hệ phương trình
$\begin{cases} m - 2 = 0 \\ n + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -2. \end{cases}$
Vậy $m + n = 0$.

Câu 10. Chọn đáp án A

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Dấu của $f'(x)$.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Khoảng nghịch biến của hàm số là $(-2;0)$.

Câu 11. Chọn đáp án A

G là trọng tâm tam giác BDC nên $\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
Suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.
Vậy $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$.

Câu 12. Chọn đáp án B

I là tâm của hình bình hành $ABCD$ nên
$\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{DB'})$.
$\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'})$.
Do đó $2\overrightarrow{OI}=-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})$.

Câu 13. Chọn đáp án C

Ta có $y'=-3x^2-2mx+4m-9$.
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ khi và chỉ khi
$y'\leqslant 0,\ \forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow -3x^2-2mx+4m-9\leqslant 0,\ \forall x\in(-\infty;+\infty)$
$\Leftrightarrow (-m)^2-(-3)(4m-9)\leqslant 0$
$\Leftrightarrow m^2+12m-27\leqslant 0$
$\Leftrightarrow -9\leqslant m\leqslant -3$.
Vậy có 7 giá trị nguyên của m.

Câu 14. Chọn đáp án A

Ta có P là trung điểm của CD nên ta có
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AM}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}-\overrightarrow{b}\right).\end{aligned}$$

Câu 15. Chọn đáp án B

Ta có $g'(x)=[f(2x+7)]'=2f'(2x+7)$.
$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(2x+7)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x+7=-1\\2x+7=0\\2x+7=1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-4\\x=-\dfrac{7}{2}\\x=-3.\end{bmatrix}$$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-4	$-\frac{7}{2}$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	↘	↗	↘ $-\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$.

Câu 16. Chọn đáp án B

Ta có $y' = \dfrac{-3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ nên hàm số không có cực trị.

Câu 17. Chọn đáp án B

Ta có $\overrightarrow{M} = \left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{F}\right] = (yc - bz; az - cx; bx - ay)$.

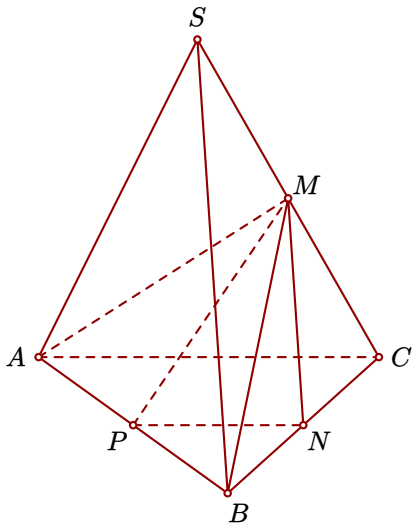
$\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{OP'} = (2x; 2y; 2z)$.

Khi đó $\overrightarrow{M'} = \left[\overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{F}\right] = (2yc - 2bz; 2az - 2cx; 2bx - 2ay)$.

Suy ra $\overrightarrow{M'} = 2(cy - bz; az - cx; bx - ay) = 2\overrightarrow{M}$.

Vậy $k = 2$.

Câu 18. Chọn đáp án B



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SC, BC, AB. Khi đó $\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PN}\right) = \left(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NP}\right)$.

Ta có $\triangle SBC$ có $SB = SC = a$, $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại S. Khi đó $BM = \sqrt{SM^2 + SB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\triangle SAC$ có $SA = SC = AC = a \Rightarrow \triangle SAC$ đều nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle AMB$ có $\cos A = \dfrac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2 \cdot AB \cdot AM} = \dfrac{a^2 + \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{5a^2}{4}}{2 \cdot a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Xét $\triangle MAP$ có $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AP = \dfrac{a}{2}$, $\cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ nên
$PM = \sqrt{AM^2 + AP^2 - 2 \cdot AM \cdot AP \cdot \cos A}$
$PM = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} - 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{6}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét $\triangle MPN$ có $NM = NP = \dfrac{a}{2}$, $PM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó
$$\cos N = \frac{MN^2 + NP^2 - PM^2}{2 \cdot MN \cdot NP} = \frac{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{4}}{2 \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2}} = -\frac{1}{2}.$$
$\Rightarrow \widehat{PNM} = 120^\circ$ hay $\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{AC}\right) = 120^\circ$.

Câu 19. Chọn đáp án D
Ta có $v(t) = S'(t) = 6t - 3t^2$.
Khi đó $v'(t) = 6 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

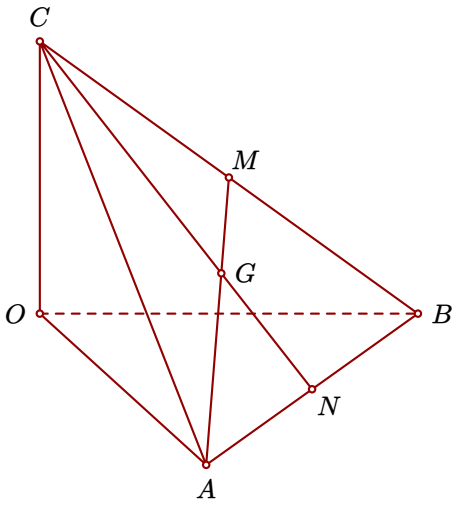
Vậy vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = 1$.

Câu 20. Chọn đáp án C
Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và d
$$-x^2 + 6 = a \Leftrightarrow x^2 = 6 - a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{6-a} \\ x = -\sqrt{6-a}. \end{array}\right.$$
Khi đó $S_1 = 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{6-a}} (-x^2 + 6 - a)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4(6-a)\sqrt{6-a}}{3}$.
Có A, B là các giao điểm của (P_1) và trục $Ox \Rightarrow A(-\sqrt{6}; 0)$, $B(\sqrt{6}; 0)$.
Ta có (P_2) có tọa độ đỉnh $(0; a)$ và đi qua 2 điểm A, B nên $(P_2)\colon y = -\dfrac{a}{6}x^2 + a$.
Khi đó $S_2 = 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{6}} \left(-\frac{a}{6}x^2 + a\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$.
Ta có $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \dfrac{4(6-a)\sqrt{6-a}}{3} = \dfrac{4a\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow (6-a)^3 = 6a^2 \Leftrightarrow a^3 - 12a^2 + 108a = 216$.

Câu 21. Chọn đáp án: a b c d
Ta có
$$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{2f'(x)+1} = 1$$
$\Rightarrow 2f'(x) + 1 + f(x) = f(x)(2f'(x) + 1)$
$\Rightarrow 2f'(x) + 1 + f(x) = 2f(x)f'(x) + f(x)$
$\Rightarrow 2f'(x) + 1 = 2f(x)f'(x)$
$\Rightarrow 2f(x) + x = f^2(x) + C$.

Vì $f(0)=1$ nên $C=1$. Do đó $f(x)=\sqrt{x}+1$ vì $f(x)>0,\ \forall x\in[0;+\infty)$.
a) Ta có $f(4)=\sqrt{4}+1=3$.
b) Ta có $f(x)=\sqrt{x}+1$.
c) Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(\sqrt{x}+1)\,\mathrm{d}x=\frac{2x\sqrt{x}}{3}+x+C$.
d) Ta có $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(\sqrt{x}+1)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}+x\right)\Big|_0^1=\frac{5}{3}$.

Câu 22. Chọn đáp án: a b c d



a) Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.
b) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OG}&=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}OG^2&=\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OG}\\&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\\&=\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)\\&=\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}\right)\\&=\frac{1}{9}\left(1^1+2^2+3^2\right)=\frac{14}{9}.\end{aligned}$$

Suy ra $OG=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$.
d) Ta có G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
Khi đó

$$\begin{aligned}Q&=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+3MO^2\\&=3\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+3MO^2\\&=3MG^2+3MO^2\geqslant 3\cdot 2\cdot MG\cdot MO.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MG = MO$, điều này xảy ra khi M thuộc trung trực của đoạn OG.

Câu 23. Chọn đáp án: a b c d

$y' = -\dfrac{1}{440\,000}x^2 + \dfrac{9}{1\,760}x - \dfrac{81}{44}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{440\,000}x^2 + \dfrac{9}{1\,760}x - \dfrac{81}{44} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 450 \\ x = 1\,800. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		450		$1\,800$		$2\,000$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	840	$\searrow$	$\dfrac{7\,365}{16}$	$\nearrow$	$\dfrac{15\,315}{11}$	$\searrow$	$\dfrac{43\,720}{33}$

a) Dựa vào bảng biến thiên độ cao thấp nhất là $h = \dfrac{7\,365}{16} \approx 460$ m.

b) Dựa vào bảng biến thiên độ cao nhất là $h = \dfrac{15\,315}{11} \approx 1\,392$ m.

c) Độ cao của dãy núi tăng dần trên khoảng $(450; 1\,800) \Rightarrow a = 450,\ b = 1\,800$.
Vậy $5a - b = 450$.

d) Trong khoảng $(0; 450)$ (c lớn nhất) độ cao của dãy núi giảm dần, khi đó diện tích toàn phần của khối lập phương cạnh c là $S = 12\,150\,000$.

Câu 24. Chọn đáp án: a b c d

a) Xét phương trình

$$f'(x) = (x+3)^2(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Nhưng do $x = -3$ là nghiệm bội chẵn nên hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

b) Do hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nên trong 2 cực trị phải có 1 cực đại và 1 cực tiểu.

c) Ta có

$$y = f(x^2 - 6x + 10) \Leftrightarrow y' = (2x - 6)f'(x^2 - 6x + 10).$$

Cho

$$y' = (2x-6)f'(x^2-6x+10) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 3 \\ x^2-6x+10 = -3 \\ x^2-6x+10 = 0 \\ x^2-6x+10 = 1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 3 \\ x^2-6x+13 = 0 \\ x^2-6x+10 = 0 \\ x^2-6x+9 = 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 3 \\ (x-3)^2 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 3.$$

Khi đó hàm số $y = f(x^2-6x+10)$ có 1 cực trị.
d) Ta có

$$y = f(x^2-6x+m) \Leftrightarrow y' = (2x-6)f'(x^2-6x+m).$$

Xét phương trình

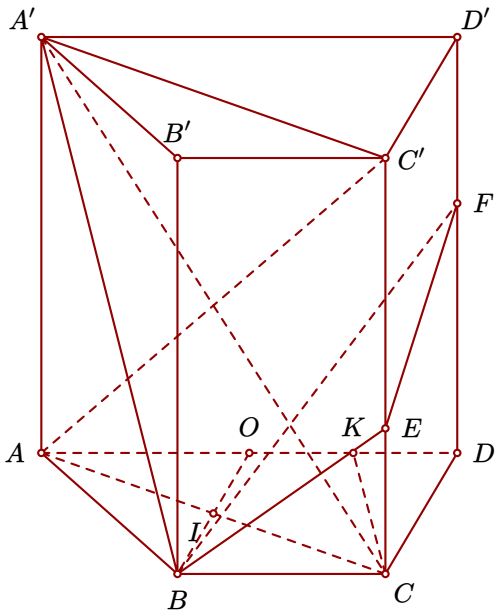
$$y' = (2x-6)f'(x^2-6x+m) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 3 \\ x^2-6x+m = -3 \\ x^2-6x+m = 0 \\ x^2-6x+m = 1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 3 \\ x^2-6x+m+3 = 0 \quad (1) \\ x^2-6x+m = 0 \quad (2) \\ x^2-6x+m-1 = 0. \quad (3) \end{bmatrix}$$

Để hàm số $y = f(x^2-6x+m)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (2), (3) có hai nghiệm phân biệt khác 3 nên

$$\begin{cases} 9-m > 0 \\ 10-m > 0 \\ 3^2-18+m \neq 0 \\ 3^2-18+m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 > m \\ 10 > m \\ m \neq 9 \\ m \neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow 9 > m.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}^+$ nên có 8 giá trị của m.

Câu 25. Chọn đáp án: a b c d



a) Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{A'CA}$.
b) Ta có $AB \parallel CO$ nên $AB \parallel (B'CO)$, do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C$ bằng khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(B'CO)$.
c) $ABCD$ là hình thang cân và $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$ nên $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn tâm O, do đó $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có $\widehat{A'CA} = 45^\circ$ nên $AA' = AC \cdot \tan 45^\circ = AC = a\sqrt{3}$. $S_{ABCD} = \dfrac{(2a+a)\cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Thể tích của hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = AA' \cdot S_{ABCD} = \dfrac{9a^3}{4}$.
d) Ta có $BO \perp (ACA')$ nên $BO \perp A'C$.
Lại có $ACC'A'$ là hình vuông nên $IE \perp A'C$, trong đó E là trung điểm CC'.
Hai mặt phẳng $(BCC'B')$, $(ADD'A')$ song song với nhau nên giao tuyến của mặt phẳng (BOE) với hai mặt phẳng này là BE và OF song song với nhau. Vậy thiết diện của lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $BOFE$.
Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối đa diện chứa đỉnh A và phần còn lại.

Khi đó V_2 là thể tích khối lăng trụ tam giác $BCE.ODF$ có chiều cao $CK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $S_{BCE} = \dfrac{1}{2}CB \cdot CE = \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $V_2 = CK \cdot S_{BCE} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{8}$.

Vậy $V_1 = V - V_2 = \dfrac{9a^3}{4} - \dfrac{3a^3}{8} = \dfrac{15a^3}{8}$.

Câu 26. Chọn đáp án: a b c d
a) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m-2\}$.
b) Với $m = 2$, $y = \dfrac{2x+3}{x+4} \Rightarrow y' = \dfrac{5}{(x+4)^2} > 0$, $\forall x \neq -4$.
Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.
c) Với $m = 0$, $y = \dfrac{3}{x+2} \Rightarrow y' = -\dfrac{3}{(x+2)^2} < 0$, $\forall x \neq -2$.
Vậy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.
d) Có hai trường hợp để hàm số $y = \left|\dfrac{mx+3}{x+m+2}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

TH1: hàm số $y=\dfrac{mx+3}{x+m+2}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và $y(1)\geqslant 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2}>0 \\ -m-2\leqslant 1 \\ y(1)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-3 \end{array}\right. \\ m\geqslant -3 \\ 1\geqslant 0,\ \forall m \end{cases} \Leftrightarrow m>1.$$

TH2: hàm số $y=\dfrac{mx+3}{x+m+2}$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ và $y(1)\leqslant 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2}<0 \\ -m-2\leqslant 1 \\ y(1)\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<1 \\ m\geqslant -3 \\ 1\leqslant 0. \end{cases}$$

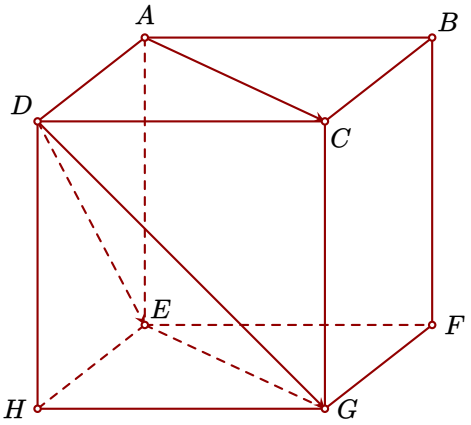
Suy ra không có giá trị của m thỏa mãn.
Vậy số các giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ là $m\in\{2;3;\ldots;10\}$.
Suy ra có 9 giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27. Đáp án: 5.
Xét hàm số $y=x^4-2x^2-3$ có $y'=4x^3-4x$
Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$y=x^4-2x^2-3$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y=\lvert x^4-2x^2-3\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên tta thấy hàm số $y=\left|x^4-2x^2-3\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 28. Đáp án: -0,5.



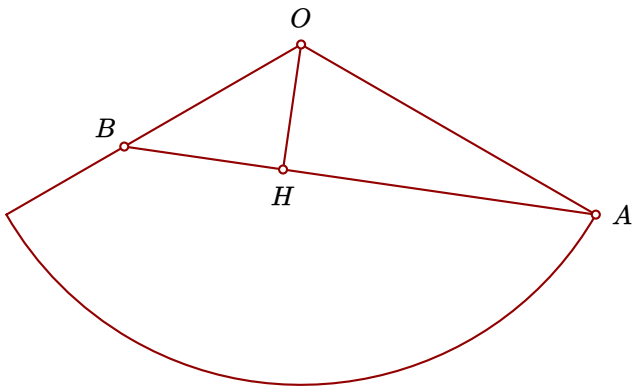
Xét tam giác DEG có $DE = EG = GD = AD\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{DEG} = 60^\circ$.
Ta có $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DE}\right) = \left(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{DE}\right) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DE}\right) = \cos 120^\circ = -0{,}5$.

Câu 29. Đáp án: 1012.
Đặt $t = \sqrt[3]{f(x)+m} \Rightarrow t^3 = f(x) + m \Rightarrow m = t^3 - f(x)$.
Ta có $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) \geqslant x^3 - m \Leftrightarrow f(t) \geqslant x^3 + f(x) - t^3 \Leftrightarrow f(t) + t^3 \geqslant f(x) + x^3$.
Xét hàm số $f(x) = x^5 + 4x^3 + m + 2\,024$.
$f'(x) = 5x^4 + 12x^2 \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, vậy hàm số $f(x) = x^5 + 4x^3 + m + 2\,024$ đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.
Khi đó
$f(t) + t^3 \geqslant f(x) + x^3 \Rightarrow t \geqslant x$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt[3]{f(x)+m} \geqslant x \\
&\Leftrightarrow f(x) + m \geqslant x^3 \\
&\Leftrightarrow m \geqslant x^3 - f(x) \\
&\Leftrightarrow m \geqslant x^3 - x^5 - 4x^3 - m - 2\,024 \\
&\Leftrightarrow 2m \geqslant -x^5 - 3x^3 - 2\,024,\ \forall x \in [0;3].
\end{aligned}$$

Xét hàm $g(x) = -x^5 - 3x^3 - 2\,024$, $\forall x \in [0;3]$.
$g'(x) = -5x^4 - 9x^2 = x^2(-5x^2 - 9) \leqslant 0$, $\forall x \in [0;3]$.
Vậy $\max\limits_{[0;3]} g(x) = g(0) = -2\,024$.
Ta có $2m \geqslant g(x)$, $\forall x \in [0;3] \Rightarrow 2m \geqslant \max\limits_{[0;3]} g(x) = -2\,024 \Rightarrow m \geqslant -1\,012$.

Câu 30. Đáp án: 491.



Cắt hình nón theo đường sinh OA và trải ra mặt phẳng ta được hình quạt như hình vẽ sau.
Gọi α là số đo góc của cung tròn.
Độ dài cung tròn $l = \alpha \cdot 60 = 2\pi \cdot 20 \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.
Vậy góc $\widehat{BOA} = 120^\circ$.
Con đường đi từ A đến B ngắn nhất khi AB là đoạn thẳng.
Gọi H là đỉnh dốc, khi đó H gần điểm O nhất nên H là hình chiếu của O lên đoạn thẳng AB.
Đoạn xuống dốc là HB.
Ta có $AB = \sqrt{OB^2 + OA^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\widehat{BOA}} = 10\sqrt{91}$.
Suy ra $\cos\widehat{OBA} = \dfrac{OB^2 + AB^2 - OA^2}{2 \cdot OB \cdot AB} = \dfrac{8\,000}{1\,000\sqrt{91}} = \dfrac{8}{\sqrt{91}}$.
Khi đó $BH = OB \cdot \cos\widehat{OBA} = \dfrac{400}{\sqrt{91}}$.

Vậy tổng $T = a + b = 400 + 91 = 491$.

Câu 31. Đáp án: 2.

Ta có $y = \dfrac{(m+1)x^2 + (2m+1)x + m + 2}{x+1} = (m+1)x + m + \dfrac{2}{x+1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[y - (m+1)x - m] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x+1} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[y - (m+1)x - m] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+1} = 0$.

Suy ra $y = (m+1)x + m$ là đường tiệm cận xiên của (C).

Điểm $A(2;8)$ thuộc tiệm cận xiên của (C) nên $8 = (m+1)\cdot 2 + m \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 32. Đáp án: 9.

Ta có $\dfrac{SM}{SO} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow SM = \dfrac{a}{b}\cdot SO \Rightarrow MO = \dfrac{b-a}{b}\cdot SO$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
&MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2\\
&= \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}\right)^2\\
&= 4MO^2 + 2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2\\
&= 4MO^2 + 2OA^2 + 2OB^2.
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
P &= MS^2 + 4MO^2 + 2OA^2 + 2OB^2\\
&= \frac{a^2}{b^2}\cdot SO^2 + 4\left(1 - \frac{a}{b}\right)^2\cdot SO^2 + 2OA^2 + 2OB^2\\
&= \left[5\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\cdot\frac{a}{b} + 4\right]\cdot SO^2 + 2OA^2 + 2OB^2.
\end{aligned}$$

P nhỏ nhất khi và chỉ khi $5\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 8\cdot\dfrac{a}{b} + 4$ nhỏ nhất.

Mà $5\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 8\cdot\dfrac{a}{b} + 4 \geqslant \dfrac{4}{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{5}$.

Vậy $a + b = 9$.

Câu 33. Đáp án: 15.

Cạnh đáy của lăng trụ là $90 - 2x$ và chiều cao của lăng trụ là $h = x\tan 60^\circ = x\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ Diện tích đáy của lăng trụ là $S = 6\cdot(90-2x)^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4} = (90-2x)^2\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

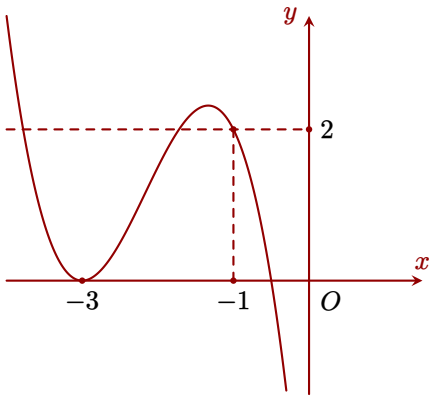
Suy ra thể tích khối lăng trụ là $V = S\cdot h = \dfrac{9x(90-2x)^2}{2}$.

Ta có $V = \dfrac{9}{8}\cdot 4x(90-2x)(90-2x) \leqslant \dfrac{9}{8}\left(\dfrac{4x + 90 - 2x + 90 - 2x}{3}\right)^3 = \dfrac{9}{8}\cdot 60^3 = 243\,000$ cm^3.

Dấu "=" xảy ra khi $4x = 90 - 2x \Leftrightarrow x = 15$ cm.

Vậy khối lăng trụ lục giác đều có thể tích lớn nhất là $243\,000$ cm^3 khi $x = 15$ cm.

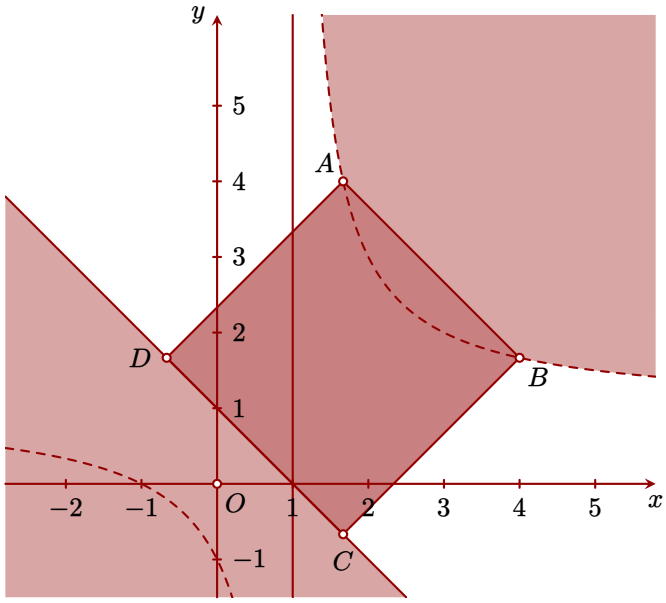
Câu 34. Đáp án: 4.



Từ đồ thị hàm số ta có
$f(x)=A(x+3)^2(x-a)$ với $a\in(-1;0)$.
$f(x)-2=A(x-b)(x-c)(x+1)$ với $b<-3$, $c\in(-3;-1)$.
Xét hàm số $y=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}=g(x)$.
Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$.
Ta có $g(x)=\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{A^2x(x+3)^2(x+1)(x-a)(x-b)(x-c)}=\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{A^2x(x+3)(x-a)(x-b)(x-c)}$.
$\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{x+1}}{-A^2\sqrt{x}(x+3)(x-a)(x-b)(x-c)}=-\infty$.
$\lim\limits_{x\to c^+}g(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{A^2x(x+3)(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty$.
$\lim\limits_{x\to-3^+}g(x)=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{A^2x(x+3)(x-a)(x-b)(x-c)}=-\infty$.
$\lim\limits_{x\to b^+}g(x)=\lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{A^2x(x+3)(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty$.
Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 4 tiệm cận đứng là $x=0$, $x=c$, $x=-3$, $x=b$.

Câu 35. Đáp án: 446.
Xét $\triangle OMH$ vuông tại H có $\cos\widehat{MOH}=\dfrac{OH}{OM}\Rightarrow OH=OM\cdot\cos\widehat{MOH}=14\cdot\cos30^\circ=7\sqrt{3}$.
Xét $\triangle AOH$ vuông tại A, có $\cos\widehat{AOH}=\dfrac{OA}{OH}\Rightarrow OA=OH\cdot\cos\widehat{AOH}=7\sqrt{3}\cdot\cos60^\circ=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.
Xét $\triangle OHB$ vuông tại B, có $\cos\widehat{HOB}=\dfrac{OB}{OH}\Rightarrow OB=OH\cdot\cos\widehat{HOB}=7\sqrt{3}\cdot\cos30^\circ=\dfrac{21}{2}$.
Xét $\triangle OCM$ vuông tại C, có $\cos\widehat{MOC}=\dfrac{OC}{OM}\Rightarrow OC=OM\cdot\cos\widehat{MOC}=14\cdot\cos60^\circ=7$.
Vì $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{i}$ cùng hướng và $OA=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ nên $\overrightarrow{OA}=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i}$.
Vì $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{j}$ cùng hướng và $OB=\dfrac{21}{2}$ nên $\overrightarrow{OB}=\dfrac{21}{2}\overrightarrow{j}$.
Vì $\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{k}$ cùng hướng và $OC=7$ nên $\overrightarrow{OC}=7\overrightarrow{k}$.
Áp dụng quy tắc hình hộp, ta có
$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i}+\dfrac{21}{2}\overrightarrow{j}+7\overrightarrow{k}$.
Suy ra $M\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{2};\dfrac{21}{2};7\right)$.
Vậy $P=abc=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{21}{2}\cdot7\approx446$.

Câu 36. Đáp án: 10,9.



Giả sử hình vuông $ABCD$ có A, B thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ và C, D thuộc đường thẳng $x+y-1=0 \Rightarrow AB \parallel CD$ nên $AB\colon x+y+a=0$ $(a\neq -1)$.

Hoành độ A, B là x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{x+1}{x-1}=-x-a \Leftrightarrow x^2+ax+1-a=0$ $(*)$.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta=a^2+4a-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<2-2\sqrt{2} \\ a>2+2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Giả sử $A(x_1;-x_1-a)$, $B(x_2;-x_2-a) \Rightarrow M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{-x_1-x_2-2a}{2}\right)$ là trung điểm AB.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(M;CD)=AB &\Leftrightarrow \frac{|a+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot|x_2-x_1| \\ &\Leftrightarrow 3a^2+14a-17=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \text{ (loại)} \\ a=-\dfrac{17}{3}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $a=-\dfrac{17}{3} \Rightarrow AB=\dfrac{7\sqrt{2}}{3} \Rightarrow S_{ABCD}=\dfrac{98}{9}\approx 10{,}9$.

THPT Tam Dương

Câu 1. Chọn đáp án A

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + (m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 \\ x = m + 1. \end{array}\right.$

Khi đó $A(m-1; -4m+2)$, $B(m+1; -4m-2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5} = 2R$.

Nên AB là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $IAB \Rightarrow$ tam giác IAB vuông tại I.

Ta có $\overrightarrow{IA}(m-3; -4m+4)$, $\overrightarrow{IB}(m-1; -4m)$.

Suy ra $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow 17m^2 - 20m + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{3}{17}. \end{array}\right.$

Vậy $1 + \dfrac{3}{17} = \dfrac{20}{17}$.

Câu 2. Chọn đáp án D

$y = \ln(4 - x^2)$ có nghĩa $\Leftrightarrow 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 2)$.

Ta có $y' = \dfrac{-2x}{4 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	-2		0		2
y'		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

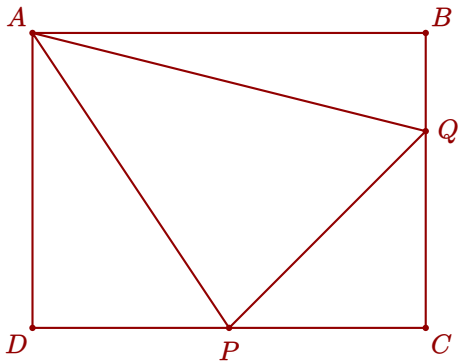
Câu 3. Chọn đáp án A

Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp các học sinh giỏi Toán, Lý, Hóa của lớp 10A.

Số học sinh giỏi ít nhất một môn của lớp 10A là

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 7 + 5 + 6 - 3 - 4 - 2 + 1 = 10. \end{aligned}$$

Câu 4. Chọn đáp án C



Ta có $AD=6, DP=4 \Rightarrow AP=\sqrt{AD^2+DP^2}=\sqrt{36+16}=2\sqrt{13}$.
$AB=8, BQ=2 \Rightarrow AQ=\sqrt{AB^2+BQ^2}=\sqrt{64+4}=2\sqrt{17}$.
$\triangle APQ$ vuông cân tại C nên $PQ=4\sqrt{2}$.
Nửa chu vi $\triangle APQ$:
$p=\dfrac{AP+PQ+AQ}{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{13}+\sqrt{17}$.
Diện tích $\triangle APQ$:
$S=\sqrt{p(p-AP)(p-AQ)(p-PQ)}=20$.
Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle APQ$ bằng
$R=\dfrac{AP\cdot AQ\cdot PQ}{4S}=\dfrac{2\sqrt{13}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{17}}{80}=\dfrac{\sqrt{442}}{5}$.

Câu 5. Chọn đáp án D

Từ đồ thị suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$
Ta có $g'(x)=-2x\cdot f'(2-x^2)$.
$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(2-x^2)=0. \end{array}\right.$
Xét $f'(2-x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x^2=0 \\ 2-x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{2} \\ x=0. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g(\sqrt{-2})$	↘	$g(0)$	↗	$g(\sqrt{2})$	↘	$-\infty$

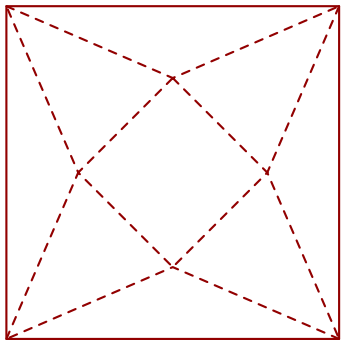
Vậy $\max\limits_{[0;\sqrt{2}]} g(x)=g(\sqrt{2})=f(0)$.

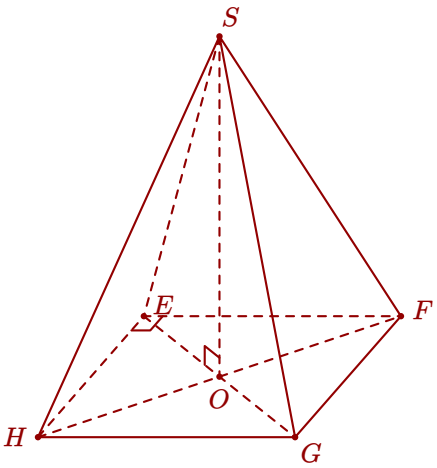
Câu 6. Chọn đáp án A
Giả sử $M(x;y;z)$.
Vì điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$ nên $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}$ $(*)$.
Ta có $\overrightarrow{MA}=(3-x;1-y;-2-z)$, $\overrightarrow{MB}=(2-x;-3-y;5-z)$.
Thay vào $(*)$ ta được

$$\begin{cases} 3-x=-2(2-x) \\ 1-y=-2(-3-y) \\ -2-z=-2(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{3} \\ y=-\dfrac{5}{3} \\ z=\dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Vậy $M\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.

Câu 7. Chọn đáp án B





Gọi cạnh đáy của mô hình kim tự tháp bằng $x \Rightarrow HE = x$ $(0 < x < \sqrt{2})$.
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow O$ cũng là tâm hình vuông $EFGH$.
Xét tam giác OHE vuông cân tại O nên $OH = OE = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow PE = OP - OE = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.
Xét tam giác vuông APE có $AE = \sqrt{AP^2 + PE^2} = \sqrt{1 + \left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$.
Giả sử sau khi gấp lên ta được hình chóp $S.EFGH$, ta có $SO = \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{1 + \left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \dfrac{x^2}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}x}$.
Khi đó $V_{S.EFGH} = \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{EFGH} = \dfrac{1}{3}\sqrt{2 - \sqrt{2}x} \cdot x^2 = \dfrac{1}{3}\sqrt{2x^4 - \sqrt{2}x^5}$.
Xét $g(x) = 2x^4 - \sqrt{2}x^5$.
Ta có $g'(x) = 8x^3 - 5\sqrt{2}x^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$		5
$g(x)'$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	max	↘	

Khi đó thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình bằng $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$. Nên $a = 4$, $b = 5$, suy ra $a + b = 9$.

Câu 8. Chọn đáp án B
Giả sử $OP = x$ (km, $x \in [0; 4]$).
Khi đó $PB = 4 - x$ và $AP = \sqrt{4 + x^2}$.
Thời gian anh Ba đi từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:
$f(x) = \dfrac{\sqrt{4 + x^2}}{6} + \dfrac{4 - x}{10}$ với $x \in [0; 4]$.
$f'(x) = \dfrac{x}{6\sqrt{4 + x^2}} - \dfrac{1}{10}$.

Xét phương trình
$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4+x^2}=5x$
$\Leftrightarrow 36+9x^2=25x^2$
$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{9}{4}$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}\in[0;4] \\ x=-\dfrac{3}{2}\notin[0;4]. \end{array}\right.$
Ta có $f(0)=\dfrac{11}{15}$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{2}{3}$, $f(4)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.
Vậy $\min\limits_{[0;4]} f(x)=\dfrac{2}{3}$ khi $x=\dfrac{3}{2}$.
Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là $\dfrac{2}{3}$ h $=40$ phút.

Câu 9. Chọn đáp án C
Ta có
$\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD'}\right)-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$
$=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}\right)$
$=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.
Khi đó $a=\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{2}{3}$, $c=\dfrac{1}{2}\Rightarrow S=a+b+c=\dfrac{4}{3}$.

Câu 10. Chọn đáp án D
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-2\Rightarrow n=2$.
Ta có $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+2}$, $y'=\dfrac{ax^2+4ax+2b-c}{(x+2)^2}$.
Vì đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(-4;-6)$, $B(0;2)$ và đạt cực tiểu tại $x=0$ nên a,b,c là nghiệm của hệ phương trình:
$\begin{cases} y(-4)=-6 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a-4b+c=12 \\ c=4 \\ 2b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=4. \end{cases}$
Nên $y=\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}=x+\dfrac{4}{x+2}$.
Vì $M(x_0;y_0)$ $(x_0\in\mathbb{Z};y_0\in\mathbb{Z})$ thuộc đồ thị hàm số đã cho nên
$\dfrac{4}{x+2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+2\in\{\pm1;\pm2;\pm4\}\Rightarrow x\in\{-6;-4;-3;-1;0;2\}$.
Thử lại ta thấy cả 6 giá trị đều thỏa mãn. Vậy có 6 điểm M thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 11. Chọn đáp án D
Mốt của mẫu số liệu nằm ở nhóm: $[7;9)$.
Khi đó $M_0=7+\dfrac{14-10}{(14-10)+(14-7)}\cdot(9-7)=7{,}(72)\approx 7{,}73$.

Câu 12. Chọn đáp án A
Gọi X là biến cố: "Có đúng 2 người bắn trúng đích".
Gọi A là biến cố: "Người thứ nhất bắn trúng đích" $\Rightarrow \mathrm{P}(A)=0{,}8\Rightarrow \mathrm{P}(\overline{A})=0{,}2$.
Gọi B là biến cố: "Người thứ hai bắn trúng đích" $\Rightarrow \mathrm{P}(B)=0{,}6\Rightarrow \mathrm{P}(\overline{B})=0{,}4$.

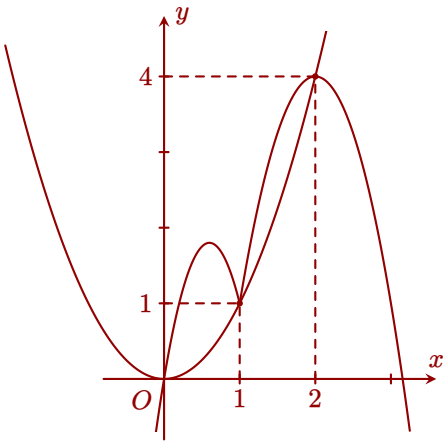
Gọi C là biến cố: "Người thứ ba bắn trúng đích" $\Rightarrow \mathrm{P}(C)=0{,}5 \Rightarrow \mathrm{P}(\overline{C})=0{,}5$.
Ta thấy ba biến cố A, B, C là 3 biến cố độc lập với nhau nên theo công thức nhân xác suất ta có:
$\mathrm{P}(X)=\mathrm{P}(A\cdot B\cdot \overline{C})+\mathrm{P}(A\cdot \overline{B}\cdot C)+\mathrm{P}(\overline{A}\cdot B\cdot C)=0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5+0{,}8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5+0{,}2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}46$.

Câu 13. Chọn đáp án B
Cường độ ánh sáng thay đổi khi từ độ sâu x_1 đến độ sâu x_2 là:
$\dfrac{I_1}{I_2}=\dfrac{I_0\cdot \mathrm{e}^{-\mu x_1}}{I_0\cdot \mathrm{e}^{-\mu x_2}}=\mathrm{e}^{\mu(x_2-x_1)}$
Thay $x_1=2; x_2=20; \mu=1{,}4$ ta có $\dfrac{I_1}{I_2}=\mathrm{e}^{25{,}2}$.

Câu 14. Chọn đáp án D
Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
$y=\dfrac{2x^2-3x-4}{x+1}=2x-5+\dfrac{1}{x+1}$.
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-2x+5)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(y-2x+5)=0$.
Suy ra $y=2x-5$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
Đường thẳng $y=2x-5$ giao với trục Ox tại điểm $A\left(\dfrac{5}{2};0\right)$, giao với trục Oy tại điểm $B(0;-5)$.
Diện tích tam giác OAB là $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot|-5|=\dfrac{25}{4}$.

Câu 15. Chọn đáp án C
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$ $(k\in\mathbb{Z})$.
Ta có: $\cot x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 16. Chọn đáp án: a b c d
a) Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành khi $\left[\begin{array}{l}x<0\\x>c\end{array}\right.$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$, $(c;+\infty)$.
b)



Vẽ thêm parabol $y=x^2$ như hình vẽ trên.
Ta có $g(x)=3f(x)-x^3\Rightarrow g'(x)=3\left[f'(x)-x^2\right]$.
Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)\leqslant 0\Leftrightarrow f'(x)\leqslant x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leqslant 0\\x\geqslant 2.\end{array}\right.$
c) Ta có bảng biến thiên của hàm số f như sau:

x	$-\infty$		0		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$-\infty$

d) Từ hình vẽ thì đồ thị hàm số $y = x^2$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f'(x) - x^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 17. Chọn đáp án: a b c d

a) Ta có $C'(t) = \dfrac{-t^2+1}{20(t^2+t+1)^2}$.

$C'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	$-$	
$C(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{60}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy nồng độ thuốc trong máu lớn nhất tại thời điểm 1 giờ sau khi tiêm.

b) Ta có nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất bằng $\dfrac{1}{60}$ khi $t = 1$ mà $\dfrac{1}{60} < 0{,}02$ nên không có thời điểm nào nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân đạt $0{,}02$ mg/cm^3.

c) Ta có $C'(t) = \dfrac{-t^2+1}{20(t^2+t+1)^2}$, $t \geqslant 0$.

d) Dựa vào bảng biến thiên ta có sau khi tiêm nồng độ thuốc trong máu tăng dần trong 1 giờ và sau đó giảm dần.

Câu 18. Chọn đáp án: a b c d

a) Vì $m \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{-4m}{(x-m)^2}$, $\forall x \neq m$.

b) Với $m = 2$, hàm số $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-2}$ không xác định và gián đoạn tại $x = 2$.

Suy ra hàm số $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-2}$ không tồn tại giá trị lớn nhất trên $[1;3]$.

c) Với $m = 0$ thì hàm số $f(x) = \dfrac{3x}{x} = 3$ là hàm hằng với mọi $x \neq 0$.

d) Trường hợp 1: $m > 0$ suy ra hàm số $f(x)$ có $f'(x) = \dfrac{-4m}{(x-m)^2} < 0$, $\forall x \neq m$.

Khi đó $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 5 \Leftrightarrow f(1) = 5 \Leftrightarrow \dfrac{3+m}{1-m} = 5 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}$ (N).

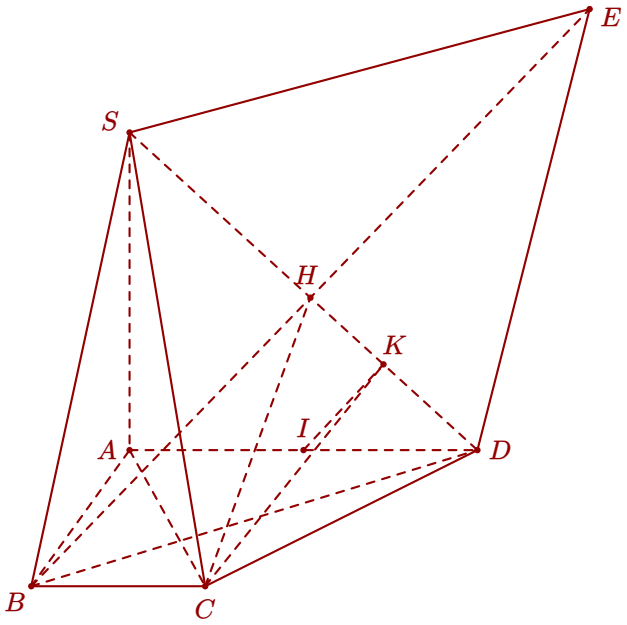
Trường hợp 2: $m<0$ suy ra hàm số $f(x)$ có $f'(x)=\dfrac{-4m}{(x-m)^2}>0,\forall x\neq m$.

$\max\limits_{[1;3]} f(x)=5\Leftrightarrow f(3)=5\Leftrightarrow \dfrac{9+m}{3-m}=5\Leftrightarrow m=1$ (Loại).

Trường hợp 3: $m=0$ thì hàm số $f(x)=\dfrac{3x}{x}=3$. Do đó $\max\limits_{[1;3]} f(x)=3$.

Vậy $S=\dfrac{1}{3}$.

Câu 19. Chọn đáp án: a b c d



a) Gọi I là trung điểm của $AD\Rightarrow IC=ID=a$. Khi đó, tam giác ICD vuông cân tại I nên $CD=\sqrt{IC^2+ID^2}=a\sqrt{2}$.

b) Gọi K là điểm trên SD sao cho $IK\perp SD$.

Ta có $IC\perp AD$, $IC\perp SA\Rightarrow IC\perp (SAD)\Rightarrow SD\perp IC$.

Do đó $SD\perp (ICK)\Rightarrow CK\perp SD$. Suy ra $\widehat{IKC}=60^\circ$.

Trong tam giác vuông CIK, ta có $IK=\dfrac{CI}{\tan\widehat{IKC}}=\dfrac{a}{\tan 60^\circ}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Gọi M là hình chiếu của A trên SD.

Do I là trung điểm của AD nên $AM=2IK=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Trong tam giác vuông SAD, ta có:

$$\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AD^2}\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{(2a)^2}\Leftrightarrow AS=a\sqrt{2}.$$

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}a\sqrt{2}\cdot\dfrac{(a+2a)\cdot a}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

c) Do E đối xứng với B qua SD nên trung điểm H của BE nằm trên mặt phẳng (SCD), do đó $\mathrm{d}(E,(SCD))=\mathrm{d}(B,(SCD))$ nên $V_{ESCD}=V_{BSCD}=V_{S.BCD}=\dfrac{1}{3}V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

d) Theo câu b) thì $SA=a\sqrt{2}$.

Câu 20. Chọn đáp án: a b c d

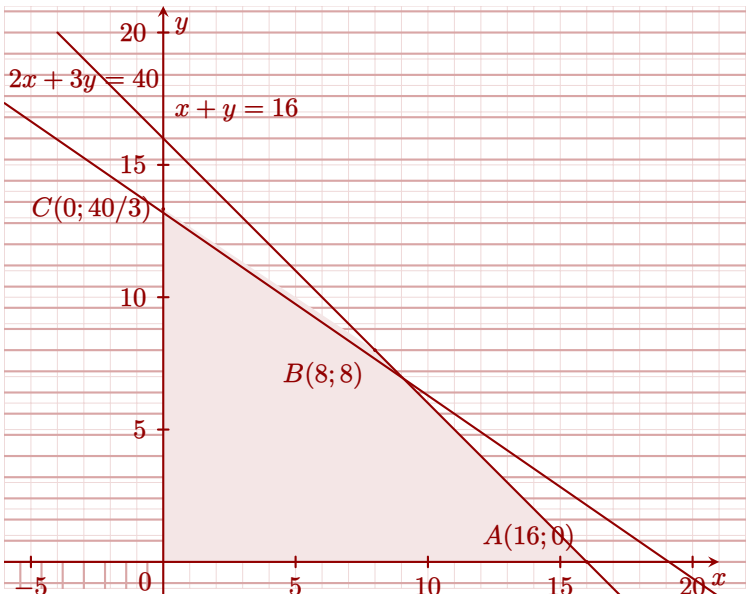
a) Xét cạnh A_1A_2 kết hợp với một trong 16 đỉnh $A_4, A_5, \ldots, A_{19}$ sẽ tạo ra 16 tam giác mà có một cạnh tô màu xanh là A_1A_2. Do đó ứng với 20 cạnh của đa giác ta có số tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho và có đúng một cạnh màu xanh là $20 \cdot 16 = 320$.
b) Số tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho là $C_{20}^3 = 1140$.
c) Tam giác có 3 cạnh cùng màu là tam giác có 3 cạnh màu đỏ, tức là tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho.
Do đó số tam giác có 3 cạnh cùng màu là $1140 - (320 + 20) = 800$.
Vậy xác suất để chọn được tam giác có 3 cạnh cùng màu bằng $\dfrac{800}{1140} = \dfrac{40}{57}$.
d) Số tam giác có đúng 2 cạnh màu xanh là số tam giác có 2 cạnh là cạnh đa giác. Số tam giác này là 20.

Câu 21. Đáp án: 560.
Gọi số bánh chưng gói được là x, số bánh tét học sinh gói được là y.
- Hiển nhiên $x \geqslant 0, y \geqslant 0$.
- Mỗi lớp được sử dụng tối đa 10 kg gạo nếp nên $0{,}5x + 0{,}75y \leqslant 10$.
- Mỗi lớp được sử dụng tối đa 1 kg thịt nên $0{,}05x + 0{,}075y \leqslant 1$.
- Mỗi lớp được sử dụng tối đa 1,6 kg đậu xanh nên $0{,}1x + 0{,}1y \leqslant 1{,}6$.

Từ đó ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 0{,}5x + 0{,}75y \leqslant 10 \\ 0{,}05x + 0{,}075y \leqslant 1 \\ 0{,}1x + 0{,}1y \leqslant 1{,}6 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases} (x, y \in \mathbb{N}).$

Tương đương với hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 3y \leqslant 40 \\ x + y \leqslant 16 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases} (x, y \in \mathbb{N}).$

Biểu diễn từng miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy, ta được như hình dưới.



Miền không bị gạch màu trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình.

Với các đỉnh $O(0;0)$, $A(16;0)$, $B(8;8)$, $C\left(0;\dfrac{40}{3}\right)$.
Gọi F là số tiền thu được, ta có: $F = 30x + 40y$.
Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác:
Tại $O(0;0)$: $F = 30 \cdot 0 + 40 \cdot 0 = 0$.
Tại $A(16;0)$: $F = 30 \cdot 6 + 40 \cdot 0 = 180$.
Tại $B(8;8)$: $F = 30 \cdot 8 + 40 \cdot 8 = 560$.
Tại $C\left(0;\dfrac{40}{3}\right)$: $F = 30 \cdot 0 + 40 \cdot \dfrac{40}{3} = \dfrac{1600}{3}$.
Vậy F đạt giá trị lớn nhất bằng 560 tại $B(8;8)$.

Câu 22. Đáp án: 150.
Ta có cấp số cộng với số hạng đầu, số hạng thứ hai, số hạng thứ ba lần lượt là $u_1 = 16$, $u_2 = 20$, $u_3 = 24$, ..., công sai $d = 4$.
Khi đó $u_{18} = u_1 + 17d = 16 + 17 \cdot 4 = 84$.
Tổng số ghế là $S_{18} = \dfrac{(u_1 + u_{18}) \cdot n}{2} = \dfrac{(16 + 84) \cdot 18}{2} = 900$.
Gọi giá tiền mỗi tấm vé là x nghìn đồng.
Số tiền thu được từ việc bán vé là $900 \cdot x = 135\,000\,000 \Rightarrow x = 150\,000$.

Câu 23. Đáp án: 2028.
Hàm số $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đi qua $O(0;0)$, $A(1;-3)$ và có hai điểm cực trị là $-1;1$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(1) = -3 \\ f''(-1) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = -3 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = 0 \\ c = -\dfrac{9}{2} \\ d = 0. \end{cases}$$

Vậy $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^3 - \dfrac{9}{2}x$ suy ra $f(x) = \dfrac{3x^4}{8} - \dfrac{9x^2}{4} + C$.
Mà $f(1) = 1 \Rightarrow \dfrac{3}{8} - \dfrac{9}{4} + C = 1 \Rightarrow C = \dfrac{23}{8}$.
Vậy $f(x) = \dfrac{3x^4}{8} - \dfrac{9x^2}{4} + \dfrac{23}{8}$.
Đặt $t = \ln x$, khi $x \in (1;\mathrm{e})$ hàm số $t(x)$ tăng từ 0 đến 1.
Bài toán trở thành tìm m để $g(t) = \left|4f(t) - t^2 + 1 - m\right| = \left|\dfrac{3t^4}{2} - 10t^2 + \dfrac{25}{2} - m\right|$ nghịch biến trên $(0;1)$.
Xét hàm $h(t) = \dfrac{3t^4}{2} - 10t^2 + \dfrac{25}{2} - m$ trên $(0;1)$.

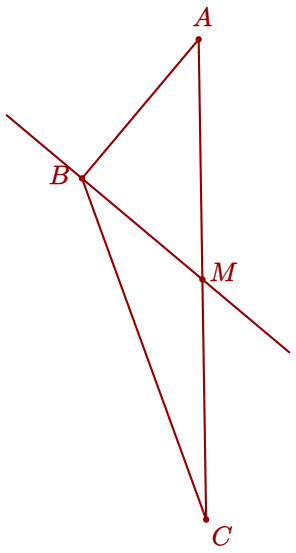
$$h'(t) = 6t^3 - 20t;\ h'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \notin (0;1) \\ t = \sqrt{\dfrac{10}{3}} \notin (0;1) \\ t = -\sqrt{\dfrac{10}{3}} \notin (0;1). \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	0		1
$h'(t)$		$-$	
$h(x)$	$\frac{25}{2}-m$	↘	$4-m$

Do đó để hàm số $g(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$ thì $4-m \geqslant 0 \Leftrightarrow m \leqslant 4$.
Mà $m \in (-2024;2025)$ nên $m \in \{-2023;-2022;\ldots;4\}$.
Vậy có 2028 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24. Đáp án: 3,41.

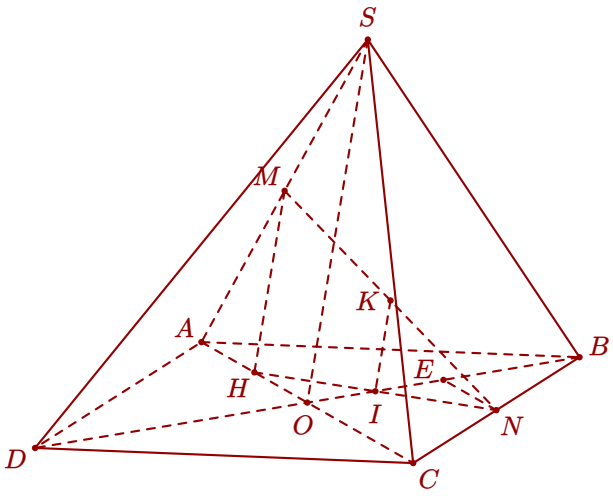


Đặt $AB=t$, ta có $BC=2t$.
$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 120^\circ}=\sqrt{7}t \Rightarrow AM=\dfrac{\sqrt{7}}{2}t$.
$BM^2=\dfrac{BA^2+BC^2}{2}-\dfrac{AC^2}{4}=\dfrac{3}{4}t^2 \Rightarrow BM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$.
Ta có $AB^2+BM^2=t^2+\dfrac{3}{4}t^2=\dfrac{7}{4}t^2=AM^2$ suy ra tam giác ABM vuông tại B.
Do đó B là hình chiếu của A lên BM: $x+y-2=0$.
Đường thẳng AB: $x-y-2=0$.
Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:
$\begin{cases}x-y-2=0\\x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}\Rightarrow B(2;0)$.
Do đó $R=AB=\sqrt{(2-3)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$.
Phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-2)^2+y^2=2$.
Vậy $a+b+R=2+0+\sqrt{2}=2+\sqrt{2}\approx 3{,}41$.

Câu 25. Đáp án: 83.
Gọi r là lãi suất của khoản vay.
Số nợ của anh Long sau tháng thứ nhất là $T_1=600(1+r)-10$.
Số nợ của anh Long sau tháng thứ hai là:
$T_2=T_1(1+r)-10=600(1+r)^2-10(1+r)-10=600(1+r)^2-10\left[1+(1+r)\right]$.

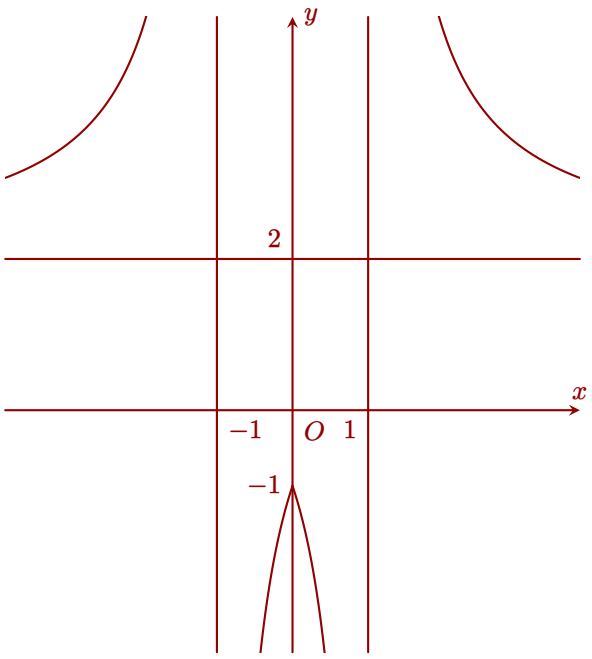
...
Số nợ của anh Long sau tháng thứ n là:
$T_n = 600(1+r)^n - 10\left[1+(1+r)+\cdots+(1+r)^{n-1}\right]$.
Giả sử sau tháng thứ n, anh Long trả được hết số nợ, khi đó:
$T_n = 0 \Leftrightarrow 600(1+r)^n = 10\left[1+(1+r)+\cdots+(1+r)^{n-1}\right] \Leftrightarrow 60(1+r)^n = \dfrac{(1+r)^n-1}{r}$
$\Leftrightarrow (1+r)^n = \dfrac{1}{1-60r} \Leftrightarrow n = \log_{1+r}\left(\dfrac{1}{1-60r}\right)$.
Vậy $n = \log_{1,008}\left(\dfrac{1}{1-60\cdot 0{,}008}\right) \approx 82{,}07$, tức là sau khoảng 83 tháng thì anh Long trả được hết nợ.

Câu 26. Đáp án: 22,6.



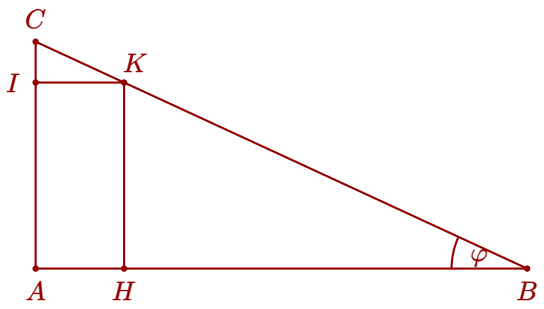
Ta có $SO \perp (ABCD)$. Gọi H là trung điểm của $OA \Rightarrow MH \parallel SO \Rightarrow MH \perp (ABCD)$.
Suy ra $(MN,(ABCD)) = (MN,HN) = 60^\circ$ hay $\widehat{MNH} = 60^\circ$.
Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
$OH = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $HC = OH + OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} + \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$, $NC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$.
Xét ΔHNC, ta có:
$HN = \sqrt{HC^2 + NC^2 - 2HC\cdot CN\cdot\cos 45^\circ} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.
Xét ΔMHN vuông tại H:
$\cos\widehat{MNH} = \dfrac{HN}{MN} \Rightarrow MN = \dfrac{HN}{\cos 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.
Gọi I là giao điểm của HN và BD, qua I kẻ đường thẳng song song với MH cắt MN tại K.
Kẻ $NE \perp BD$. Khi đó $K = MN \cap (SBD)$ và E là hình chiếu của N trên BD.
Suy ra $NE \perp (SBD) \Rightarrow (MN,(SBD)) = (NK,EK) = \widehat{NKE}$.
Tam giác NEK vuông tại E, có:
$NE = \dfrac{OC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$;
$NK = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$
$\Rightarrow \sin\widehat{NKE} = \dfrac{EN}{NK} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} : \dfrac{a\sqrt{10}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$
$\Rightarrow \cos(MN,(SBD)) = \sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow (MN,(SBD)) \approx 26{,}6^\circ$.

Câu 27. Đáp án: 3.



Đồ thị hàm số $f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách:
Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ứng với $x \geqslant 0$.
Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ứng với $x > 0$.
Vậy đồ thị hàm số $f(|x|)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 1$, hai đường tiệm cận đứng là $x = \pm 1$.

Câu 28. Đáp án: .



Giả sử chiều dài của cái thang được mô hình hóa bởi đoạn BC như hình vẽ.
$BC = \dfrac{4}{\sin\phi} + \dfrac{1}{2\cos\phi} = f(\phi)$.
$f'(\phi) = -\dfrac{4\cos\phi}{\sin^2\phi} + \dfrac{\sin\phi}{2\cos^2\phi}$; $f'(\phi) = 0 \Rightarrow -8\cos^3\phi + \sin^3\phi = 0 \Leftrightarrow \tan\phi = 2 \Rightarrow \phi = \alpha$.

φ	0		α		$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(\varphi)$		$-$	0	$+$	
$f(\varphi)$		↘	$f(\alpha)$	↗	

$BC_{\max} \Rightarrow \tan\phi = 2 \Rightarrow \begin{cases} \cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\phi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}. \end{cases}$

Vậy $BC_{\max} = \dfrac{4}{\dfrac{2}{\sqrt{5}}} + \dfrac{1}{2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2} \approx 5{,}59.$

Câu 29. Đáp án: 42,5.

Ta thấy điểm A và B nằm về hai phía so với mặt phẳng (Oxy). Gọi A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy), ta có: $A'(-2;1;-3)$.

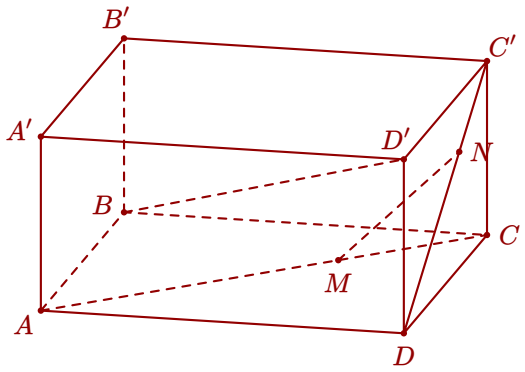
$|MA - MB| = |MA' - MB| \leqslant A'B$, dấu bằng xảy ra khi A', M, B thẳng hàng.

Phương trình đường thẳng $A'B$: $\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 - 3t \\ z = -3 + 2t. \end{cases}$

Điểm $M = A'B \cap (Oxy)$ suy ra $M\left(\dfrac{11}{2}; -\dfrac{7}{2}; 0\right)$.

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 = \left(\dfrac{11}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{7}{2}\right)^2 + 0^2 = \dfrac{85}{2} = 42{,}5.$

Câu 30. Đáp án: 20.



MN song song với BD' nên tồn tại số $k \in \mathbb{R}$ để $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$.

Giả sử $M \in AC$: $\overrightarrow{MC} = x\overrightarrow{AC}$; $N \in DC'$: $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$ $(x, y \neq 0)$.

Ta có

$\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + y\overrightarrow{DC'} \\ &= x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{BA} + y(\overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}) \\ &= x(-\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BA} + y(\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BA}) \\ &= (1 - x - y)\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BB'}. \end{aligned}$$

Do $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$ nên:

$\begin{cases} 1 - x - y = k \\ x = k \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{3} \\ x = y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD'} \Rightarrow MN = \dfrac{1}{3}BD' = \dfrac{60}{3}$ cm $= 20$ cm.

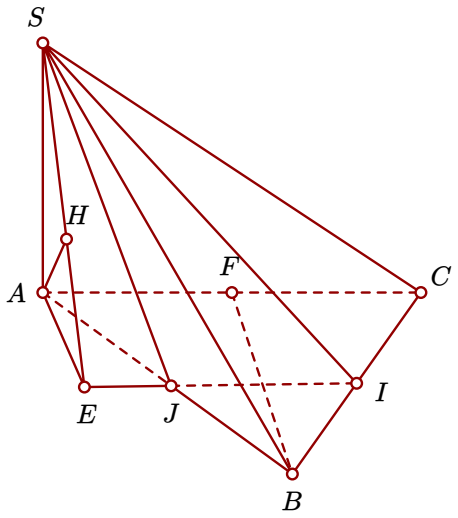
THPT Chuyên Đại học Vinh

Câu 1. Chọn đáp án C
Ta có số đo của góc lượng giác (OG, OP) là $-90^\circ + k360^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Câu 2. Chọn đáp án A
Theo giả thiết ta có:
$\begin{cases} u_{20} = -52 \\ u_{51} = -145 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 19d = -52 \\ u_1 + 50d = -145 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = -3. \end{cases}$
Vậy công thức số hạng tổng quát là $u_n = 5 + (n-1)(-3) = -3n + 8$.

Câu 3. Chọn đáp án C
Ta có $y = (x+1)^2(x-2) = x^3 - 3x - 2$.
$y' = 3x^2 - 3$.
Tại $x = 2$ ta có $y(2) = 0$ và $y'(2) = 9$.
Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 2$ là $y = 9x - 18$.

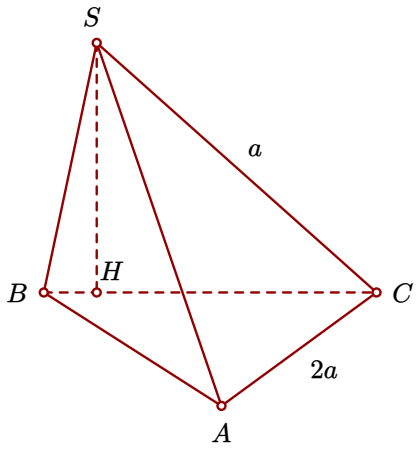
Câu 4. Chọn đáp án D



Gọi J là trung điểm của AB, khi đó $\mathrm{d}(AC, SI) = \mathrm{d}(AC, (SIJ)) = \mathrm{d}(A, (SIJ))$.
Gọi F là trung điểm AC có $BF \perp AC$ và $BF \perp IJ$.
Từ A kẻ đường thẳng song song với BF cắt IJ tại E, khi đó $AE \perp IJ$ và $AE = \dfrac{BF}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Trong (SAE), kẻ $AH \perp SE$ tại H, khi đó $AH \perp (SIJ)$ tại H.
$\mathrm{d}(A, (SIJ)) = AH = \dfrac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 5. Chọn đáp án A
Ta có $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$.
$f'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \text{ (loại).} \end{array}\right.$
$f(0) = 1$ và $f(1) = 2$.
$M = 2$; $m = 1 \Rightarrow M - m = 1$.

Câu 6. Chọn đáp án C



Trong (SBC) kẻ $SH \perp BC$, do $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến BC nên $SH \perp (ABC)$.

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$

$SB = \sqrt{BC^2 - SC^2} = a\sqrt{3}.$

$SH = \dfrac{SB \cdot SC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot a^2\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{2}.$

Câu 7. Chọn đáp án B

Nhóm chứa trung vị là $[6;8)$.

Trung vị $M_e = 6 + \dfrac{\frac{83}{2} - (12+15)}{21} \cdot 2 = \dfrac{155}{21} \approx 7{,}38.$

Câu 8. Chọn đáp án D

Đa giác đều có $2n$ cạnh có n đường chéo qua tâm.

Mỗi cách lấy 2 trong n đường chéo qua tâm ta được một hình chữ nhật.

Vậy có C_n^2 hình chữ nhật.

Có $2n(2n-4)$ tam giác tạo bởi 3 đỉnh của đa giác và có đúng 1 cạnh là cạnh của đa giác đó.

Theo bài ra ta có

$$\mathrm{C}_n^2 = \frac{7}{52} \cdot 2n(2n-4) \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{7}{52} \cdot 2n(2n-4)$$
$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{7}{52} \cdot 2n(2n-4)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 15 \\ n = 0 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy $n = 15$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Chọn đáp án A

Đặt $t = \mathrm{e}^x$. Khi đó, bài toán trở thành tìm m sao cho hàm số

$y = -\dfrac{1}{3}t^3 + (m+3)t^2 + (m+1)t - 4$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Ta có: $y' = -t^2 + 2(m+3)t + (m+1)$, hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$ khi

$-t^2 + 2(m+3)t + (m+1) \geqslant 0, \forall t \in (1;2) \Leftrightarrow m \geqslant \dfrac{t^2 - 6t - 1}{2t+1} \quad (1).$

Xét hàm $g(t) = \dfrac{t^2 - 6t - 1}{2t+1} \Rightarrow g'(t) = \dfrac{2t^2 + 2t - 4}{(2t+1)^2}.$

Ta có bảng biến thiên

t	1		2
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	-2	↗	$-\dfrac{9}{5}$

Từ (1) suy ra $m \geqslant -\dfrac{9}{5}$, mặt khác m là số nguyên không vượt quá 24. Nên $m \in \{-1; 0; 1; \ldots; 24\}$.

Câu 10. Chọn đáp án A

Vì $y = f'(1-x^2)$ là hàm bậc 4 trùng phương có 1 điểm cực trị là $x = 2$ nên cũng có 1 điểm cực trị là $x = -2$.

Đặt $y' = a(x+2)x(x-2) \Rightarrow y = a\left(\dfrac{x^4}{4} - 2x^2\right) + c$.

Mà đồ thị hàm số $y = f'(1-x^2)$ đi qua điểm $(1;1)$, $(2;-1)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -\dfrac{7}{4}a + c = 1 \\ -4a + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{8}{9} \\ c = \dfrac{23}{9} \end{cases} \Rightarrow y = f'(1-x^2) = \frac{8}{9}\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) + \frac{23}{9}.$$

Đặt $1 - x^2 = t \Rightarrow x^2 = 1 - t \Rightarrow f'(t) = \dfrac{8}{9}\left[\dfrac{1}{4}(1-t)^2 - 2(1-t)\right] + \dfrac{23}{9} = \dfrac{2}{9}t^2 + \dfrac{4}{3}t + 1$.

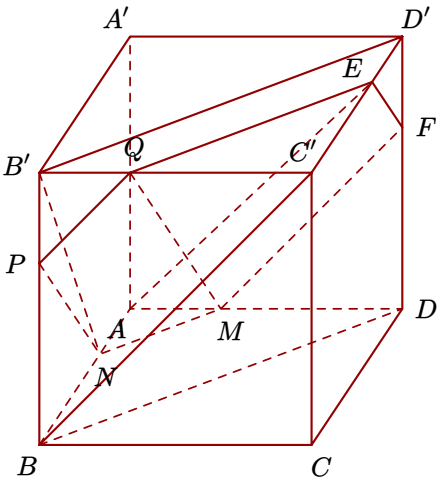
Do đó $f'(x) = \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{4}{3}x + 1$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{2}{x^3} \cdot f'\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = x$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{9}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2 + \dfrac{4}{3}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) + 1 = x$ có 5 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right) + \dfrac{2}{x}$ có 5 điểm cực trị.

Câu 11. Chọn đáp án B



Vì $NP \parallel AB'$ nên $MQ \parallel AB'$.
Vì $MN \parallel B'D'$ nên $QE \parallel B'D'$.
Vì $NP \parallel C'D$ nên $EF \parallel C'D$.

Đặt $AN = x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$. Suy ra $\dfrac{NP}{AB'} = \dfrac{BN}{BA} \Rightarrow \dfrac{NP}{\sqrt{2}} = \dfrac{1-x}{1} \Rightarrow NP = \sqrt{2}(1-x)$;

$\dfrac{MN}{BD}=\dfrac{AN}{AB}\Rightarrow\dfrac{MN}{\sqrt{2}}=\dfrac{x}{1}\Rightarrow MN=x\sqrt{2};$
$\dfrac{QE}{B'D'}=\dfrac{C'Q}{C'B'}=\dfrac{MD}{AD}=\dfrac{BN}{BA}\Rightarrow\dfrac{QE}{\sqrt{2}}=\dfrac{1-x}{1}\Rightarrow QE=\sqrt{2}(1-x);$
$\dfrac{EF}{C'D}=\dfrac{ED'}{C'D'}=\dfrac{B'Q}{B'C'}=\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{AN}{AB}\Rightarrow\dfrac{EF}{\sqrt{2}}=\dfrac{x}{1}\Rightarrow EF=x\sqrt{2}.$
Vì:

$$\dfrac{B'Q}{QC'}=\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{B'P}{B'B}\Rightarrow PQ\parallel BC'$$

$\Rightarrow\dfrac{PQ}{BC'}=\dfrac{B'Q}{QC'}=\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{AN}{AB}\Rightarrow\dfrac{PQ}{\sqrt{2}}=\dfrac{x}{1}\Rightarrow PQ=x\sqrt{2}$
Tương tự ta có $MF\parallel AD'\Rightarrow\dfrac{MF}{AD'}=\dfrac{MD}{AD}=\dfrac{BN}{BA}\Rightarrow\dfrac{MF}{\sqrt{2}}=\dfrac{1-x}{1}\Rightarrow MF=\sqrt{2}(1-x).$
Do đó chu vi của lục giác $MNPQEF$ là
$NP+PQ+QE+EF+FM+MN=3\sqrt{2}(1-x)+3x\sqrt{2}=3\sqrt{2}.$

Câu 12. Chọn đáp án D
Xếp 7 số tự nhiên theo thứ tự nào đó ta có 7! cách.
Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=7!$.
Gọi A là biến cố " hàng ngang nhận được có tổng của 4 số liên tiếp bất kỳ đều chia hết cho 3".
Giả sử các số đó xếp thành dãy $abcdefg$ với $a,b,c,d,e,f,g\in\{12;13;14;\ldots;18\}$.
Ta có $X=\{12;15;18\}$, $Y=\{13;16\}$, $Z=\{14;17\}$.
Thấy rằng $12+13+14+\cdots+18=105\vdots 3$.

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b+c\vdots 3\\ e+f+g\vdots 3\\ a+b+g\vdots 3\\ a+f+g\vdots 3\end{cases}\Rightarrow d\vdots 3,\ a,e \text{ đồng dư; } c,g \text{ đồng dư; } b,f \text{ đồng dư khi chia cho 3.}$$

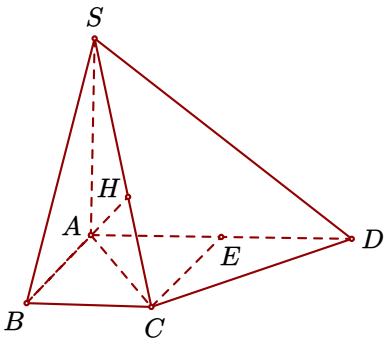
Vì thế cho nên để xếp được dãy thỏa mãn bài toán ta có các công đoạn
- Chọn $d\in X$, có 3 cách chọn.
- Từ mỗi tập $X\setminus\{d\}$, Y, Z chọn 1 số, có $2\cdot2\cdot2=8$ cách chọn.
- Xếp các chữ số ở trên theo thứ tự nào đó ta được dãy abc, có $3!=6$ cách xếp.
- Xếp các số còn lại vào các vị trí tương ứng ta được dãy efg, có 1 cách xếp.

$\Rightarrow n(A)=3\cdot8\cdot6\cdot1=144.$
$\Rightarrow \mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{144}{7!}=\dfrac{1}{35}.$

Câu 13. Chọn đáp án: a b c d
a)
$\mathscr{D}=(2;+\infty)$.
Ta có $\log_2(2\cdot3-4)=\log_2 2=1$.
b)
Ta có $\log_{\sqrt{2}}(2x-4)=\log_{2^{\frac{1}{2}}}(2x-4)=2\log_2(2x-4)=\log_2(2x-4)^2,\quad\forall x\in\mathscr{D}.$
c)
Ta có

$f(x) = \log_{\sqrt{2}} x - 2$
$\Leftrightarrow \log_2(2x-4) = \log_{\sqrt{2}} x - 2$ (điều kiện: $x > 2$)
$\Leftrightarrow \log_2(2x-4) + 2 = 2\log_2 x$
$\Leftrightarrow \log_2 4(2x-4) = \log_2 x^2$
$\Leftrightarrow x^2 = 8x - 16$
$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$
$\Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn).
Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x - 2$ là $\{4\}$.
d)
Ta có
$f(x) > x - 6$
$\Leftrightarrow \log_2(2x-4) > x - 6$ (điều kiện: $x > 2$)
$\Leftrightarrow 2x - 4 > 2^{x-6}$
$\Leftrightarrow 2^{x-6} - 2x + 4 < 0$.
Xét hàm số $g(x) = 2^{x-6} - 2x + 4, \quad x \in (2; +\infty)$.
Ta có $g'(x) = 2^{x-6} \cdot \ln 2 - 2$.
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^{x-6} \cdot \ln 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 6 = \log_2 \dfrac{2}{\ln 2} \Leftrightarrow x = \log_2 \dfrac{2}{\ln 2} + 6 = a$.
Bảng biến thiên:
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy tập hợp các nghiệm nguyên của bất phương trình $g(x) < 0$ là $\{3; 4; 5; \ldots; 9\}$.
Vậy có 7 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 14. Chọn đáp án: a b c d



a)
Ta có $CD \cap (SBC) = \{C\}$.
b)
Tứ giác $ABCE$ có $AE \parallel BC$, $AE = AB = BC$, $\widehat{BAE} = 90^\circ$.
Suy ra $ABCE$ là hình vuông, do đó $BE \perp AC$.
Mà $BE \perp SA$.
Suy ra $BE \perp (SAC) \Rightarrow BE \perp SC$.
c)
Ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$.
Do đó góc giữa SC với mặt đáy bằng $\widehat{SCA} = 45^\circ$.
Suy ra ΔSAC vuông cân tại A nên $SA = AC = a\sqrt{2}$.
Ta có ΔCDE vuông cân tại E.
Suy ra $V_{S.CDE} = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta CDE} = \dfrac{1}{3} SA \cdot \dfrac{1}{2} EC \cdot ED = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2} a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

d)
Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(E,(SCD))}{\mathrm{d}(A,(SCD))}=\dfrac{DE}{DA}=\dfrac{1}{2}$.
Kẻ $AH\perp SC$.
Ta có $AC\perp CD$ và $CD\perp SA\Rightarrow CD\perp(SAC)\Rightarrow CD\perp AH$.
Do đó $AH\perp(SCD)$.
Suy ra $\mathrm{d}(A,(SCD))=AH$.
Vì ΔSAC vuông cân tại A nên $AH=\dfrac{SC}{2}=\dfrac{AC\sqrt{2}}{2}=a$.
Vậy $\mathrm{d}(E,(SCD))=\dfrac{a}{2}$.

Câu 15. Chọn đáp án: a b c d
a)
Ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_{16}^{1}\cdot\mathrm{C}_{20}^{1}=320$.
b)
Gọi A là biến cố chọn được hai bạn cùng đăng ký tổ hợp tự nhiên.
Ta có $n(A)=\mathrm{C}_{10}^{1}\cdot\mathrm{C}_{8}^{1}=80$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{80}{320}=\dfrac{1}{4}$.
c)
Số cách chọn hai bạn cùng đăng ký tổ hợp xã hội là $\mathrm{C}_{6}^{1}\cdot\mathrm{C}_{12}^{1}=72$.
d)
Gọi B là biến cố hai bạn cùng đăng ký tổ hợp xã hội, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{72}{320}=\dfrac{9}{40}$.
Gọi C là biến cố để hai bạn đăng ký cùng tổ hợp dự thi tốt nghiệp $\Rightarrow C=A\cup B$, với A và B là hai biến cố xung khắc.
Xác suất của biến cố C là $\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{40}=\dfrac{19}{40}$.

Câu 16. Chọn đáp án: a b c d
Ta đặt P: "Bạn đạt giải học sinh giỏi Tỉnh";
Q: "Cuối năm học bạn sẽ được Nhà trường khen thưởng".
Khi đó, $P\Rightarrow Q$ đúng.
Trường hợp 1: Nếu P đúng, Q đúng thì $\overline{P}$ sai, $\overline{Q}$ sai nên $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ đúng.
Trường hợp 2: Nếu P sai, Q đúng thì $Q\Rightarrow P$ sai và $\overline{P}$ đúng, $\overline{Q}$ sai nên $\overline{P}\Rightarrow\overline{Q}$ sai và $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ đúng.
Trường hợp 3: Nếu P sai, Q sai thì $\overline{P}$ đúng và $\overline{Q}$ đúng nên $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ đúng.
a) Theo phân tích trên thì A: $\overline{P}\Rightarrow\overline{Q}$ là mệnh đề sai.
b) Theo phân tích trên thì B: $Q\Rightarrow P$ là mệnh đề sai.
c) Theo phân tích trên thì C: $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ là mệnh đề đúng.
d) Theo câu (b) thì B là mệnh đề sai.

Câu 17. Đáp án: 12.
Đặt $1-3x=t\Leftrightarrow x=\dfrac{1-t}{3}$.
Khi đó $f'(t)=\dfrac{1}{9}(t^2-8t+7)$ hay $f'(x)=\dfrac{1}{9}(x^2-8x+7)$.
Có

$$g'(x)=\frac{2(\sqrt{2x+1}-2)}{\sqrt{2x+1}}f'\left(2x-4\sqrt{2x+1}+m\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+1}=2\\ 2x-4\sqrt{2x+1}+m=1\\ 2x-4\sqrt{2x+1}+m=7\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ 2x-4\sqrt{2x+1}=-m+1\quad(1)\\ 2x-4\sqrt{2x+1}=-m+7\quad(2).\end{array}\right.\quad(*)$$

Xét hàm số $h(x)=2x-4\sqrt{2x+1}$ trên $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Có $h'(x)=2-4\cdot\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\dfrac{2\sqrt{2x+1}-4}{\sqrt{2x+1}}=0\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	2		3		a		10		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	$\dfrac{1}{16}$	$\searrow$	$-\dfrac{15}{8}$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(*)$ có đúng hai nghiệm

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m+7\geqslant-4\\ -m+1\leqslant-5\end{cases}\\ \begin{cases}-m+7\geqslant 20\\ -m+1<20\\ -m+1\geqslant-4\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6\leqslant m\leqslant 11\\ -19<m\leqslant-13.\end{array}\right.$$

Vậy có cả thảy 12 giá trị của tham số m.

Câu 18. Đáp án: 2.

Ta có $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sqrt{0+0+4}}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{2}{3}$, suy ra $\overrightarrow{DB}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$.

Do đó $\begin{cases}3(1-a)+2(2-a)=0\\ 3(1-b)+2(-1-b)=0\\ 3(-c)+2(4-c)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{5}\\ b=\dfrac{1}{5}\\ c=\dfrac{8}{5}.\end{cases}$

Vậy $P=\dfrac{7}{5}-1+\dfrac{8}{5}=2$.

Câu 19. Đáp án: 3.
Ta có $g'(x) = (2x+3)f'(x^2+3x-4)$
$\Rightarrow g'(x) = (2x+3)(x^2+3x-4)^2(x^2+3x)\left[(x^2+3x-4)^2+2m(x^2+3x-4)+9\right]$.
Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow g'(x) \geqslant 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$ và $g'(x)=0$ tại hữu hạn điểm thuộc $(1;+\infty)$.
Mà $(2x+3)(x^2+3x-4)^2(x^2+3x) \geqslant 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$.
Nên yêu cầu bài toán tương đương với
$(x^2+3x-4)^2+2m(x^2+3x-4)+9 \geqslant 0, \forall x \in (1;+\infty) \quad (1)$.
Đặt $t = x^2+3x-4$ với $x \in (1;+\infty) \Rightarrow t \in (0;+\infty)$.
$(1) \Leftrightarrow t^2+2mt+9 \geqslant 0, \forall t \in (0;+\infty) \Leftrightarrow 2m \geqslant -t-\dfrac{9}{t}, \forall t \in (0;+\infty)$.
Xét hàm số $h(t) = -t-\dfrac{9}{t},\ t \in (0;+\infty)$.
Ta có $h'(t) = -1+\dfrac{9}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm 3$.
Bảng biến thiên:

t	0		3		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $(1) \Leftrightarrow 2m \geqslant -6 \Leftrightarrow m \geqslant -3$ mà m nguyên âm $\Rightarrow m \in \{-3;-2;-1\}$.
Vậy có 3 giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 20. Ta có
$$\log_2\left(\frac{x^2+y^2}{5x+2y-20}\right)+x^2+y^2-20x-8y+78 \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4(x^2+y^2)}{4(5x+2y-20)}\right)+x^2+y^2-20x-8y+78 \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \log_2(x^2+y^2)-\log_2(20x+8y-80)+(x^2+y^2)-(20x+8y-80) \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \log_2(x^2+y^2)+(x^2+y^2) \leqslant \log_2(20x+8y-80)+(20x+8y-80).$$
Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.
Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2}+1 > 0,\ \forall t \in (0;+\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
Do đó $x^2+y^2 \leqslant 20x+8y-80 \Leftrightarrow (x-10)^2+(y-4)^2 \leqslant 36 \quad (1)$.
$P = x^2+y^2 = OM^2$ với $O(0;0)$, $M(x;y)$.
Từ (1) suy ra $M(x;y)$ thuộc hình tròn tâm $I(10;4)$, bán kính $R=6$.
Suy ra $\min P = |OI-R|^2 = (2\sqrt{29}-6)^2 = 152-24\sqrt{29}$.
Dấu " = " xảy ra khi $\overrightarrow{OM} = \dfrac{OM}{OI}\cdot\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{2\sqrt{29}-6}{2\sqrt{29}}\cdot\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow M\left(\dfrac{290-30\sqrt{29}}{29};\dfrac{116-12\sqrt{29}}{29}\right)$.

Câu 21. Số tất cả các cách xếp 6 học sinh vào 3 hàng sao cho mỗi hàng có đúng 2 học sinh (không tính thứ tự 2 học sinh trên một hàng) là $n(\Omega) = \dfrac{6!}{2^3} = 90$ cách.
Kí hiệu A: " Không có hai học sinh cùng lớp nào được xếp vào cùng một hàng".
Để xếp 6 học sinh vào 3 hàng sao cho mỗi hàng có đúng 2 học sinh và không có hai học sinh cùng lớp nào được xếp vào cùng một hàng ta thực hiện như sau:

- Chọn mỗi lớp 1 học sinh sau đó xếp mỗi học sinh này vào 1 hàng, số cách thực hiện là $2 \cdot 2 = 8$ cách (số cách chọn mỗi lớp 1 học sinh).
- Xếp 3 học sinh còn lại vào các hàng sao cho đủ 2 học sinh trên một hàng và không có hai học sinh cùng lớp trên một hàng, số cách thực hiện là 2.

Vậy $n(A) = 8 \cdot 2 = 16$.

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{16}{90} = \dfrac{8}{45}$.

Câu 22. Vì vận tốc dòng nước là 6km/h nên vận tốc của ca nô là $v - 6$km/h.

Khi đó, thời gian ca nô chạy từ A đến B là $t = \dfrac{300}{v-6}$.

Khi đó $E(v-6) = c(v-6+24)^3 t = c(v+18)^3 \cdot \dfrac{300}{v-6}$.

Xét hàm số $f(v) = \dfrac{(v+18)^3}{v-6}$ trên khoảng $(6; +\infty)$.

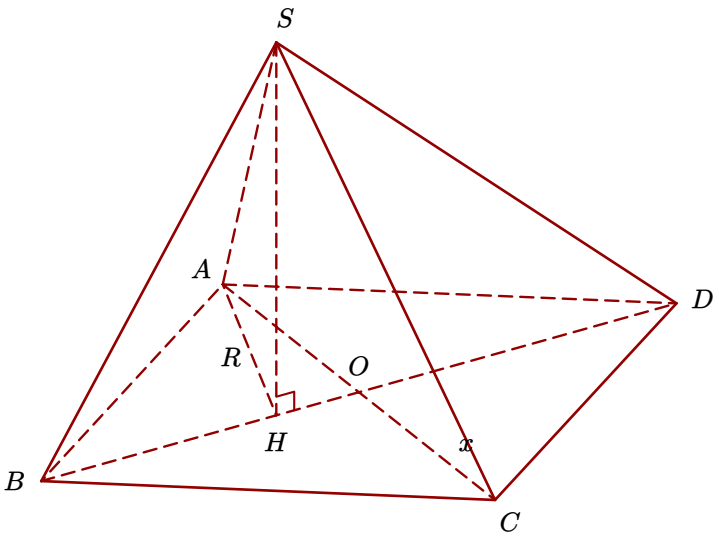
$$f'(v) = \frac{3(v+18)^2(v-6) - (v+18)^3}{(v-6)^2}$$
$$= \frac{(v+18)^2(3v-18-v-18)}{(v-6)^2}$$
$$= \frac{(v+18)^2(2v-36)}{(v-6)^2}$$

$f'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 18$ (loại) hoặc $v = 33$.

x	6		33		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy ca nô chạy với vận tốc $v = 33$km/h thì tốn ít nhiên liệu nhất.

Câu 23.



Giả sử $SA = SB = SC = BA = BC$.

Đặt $AC = x$ $(0 < x < 8)$.

Gọi hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy là H thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC nên $SH^2 = SA^2 - R^2$ (với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

Mặt khác $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}x\sqrt{16 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{x\sqrt{64-x^2}}{4}$ và $S_{\Delta ABC} = \dfrac{4\cdot 4\cdot x}{4R}$ nên $R = \dfrac{16}{\sqrt{64-x^2}}$.

Do đó $SH = \sqrt{SA^2 - R^2} = \dfrac{4\sqrt{48-x^2}}{\sqrt{64-x^2}}$.

Gọi $V(x)$ là thể tích của túp lều ta có

$V(x) = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SH = \dfrac{2}{3}x\sqrt{48-x^2} \Rightarrow V'(x) = \dfrac{96-4x^2}{3\sqrt{48-x^2}}$;

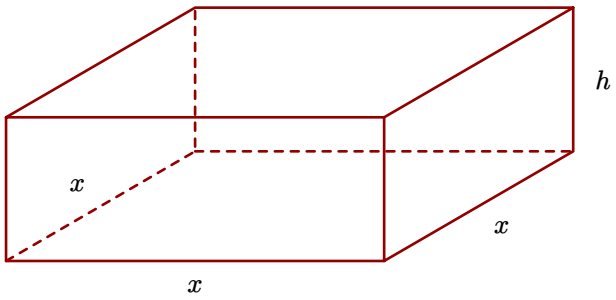
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{6}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$2\sqrt{6}$		8
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	16	↘	0

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có chiều cao của túp lều để khoảng không gian bên trong nó lớn nhất là $h = \dfrac{4\sqrt{48-24}}{\sqrt{64-24}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$ (m).

Câu 24.



Gọi x là độ dài cạnh đáy của bể cá, $0 < x < \sqrt{3}$.

Theo đề bài ta có $x^2 + 4xh = 3 \Leftrightarrow h = \dfrac{3-x^2}{4x}$.

Thể tích của bể cá là $V(x) = x^2h = x^2\cdot\dfrac{3-x^2}{4x} = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}x^3$.

Ta phải tìm $x_0 \in \left(0;\sqrt{3}\right)$ sao cho $V(x_0)$ có giá trị lớn nhất.

Ta có $V'(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4}x^2 = \dfrac{3}{4}(1-x^2)$.

Trên khoảng $\left(0;\sqrt{3}\right)$, ta có $V' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		$\sqrt{3}$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

Vậy tại $x = 1$ bể cá có giá trị lớn nhất, khi đó chiều cao của bể cá là $h = 0{,}5$ m $= 50$ cm.

THPT Đô Lương

Câu 1. Chọn đáp án A

Xét hàm số $T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 98{,}6$ $(0 \leqslant t \leqslant 11)$.

$T'(t) = -0{,}2t + 1{,}2$

$T'(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}2t + 1{,}2 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Vì hàm số liên tục trên $[0; 11]$ nên hàm số chỉ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại các vị trí $t = 0$, $t = 6$, $t = 11$.

$T(0) = 98{,}6$, $T(6) = 102{,}2$, $T(11) = 99{,}7$.

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt bằng $T = 102{,}2$ và $T = 98{,}6$.

Vậy độ chênh lệch nhiệt độ giữa nhiệt độ lớn nhất và nhiệt độ nhỏ nhất trong ngày là $\dfrac{102{,}2 - 32}{1{,}8} - \dfrac{98{,}6 - 32}{1{,}8} = 2^\circ\text{C}$.

Câu 2. Chọn đáp án B

Chia tổ thành 3 nhóm, mỗi nhóm gồm 4 học sinh và phải có ít nhất 1 học sinh nữ nên ta sẽ có các cách chia

Nam	3	3	2
Nữ	1	1	2

Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_8^3 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_2^1$.

Gọi biến cố A " Bạn bí thư và lớp trưởng không cùng nhóm".

Khi đó biến cố $\overline{A}$ " Bạn bí thư và lớp trưởng cùng nhóm".

Gọi B là biến cố " Bí thư và lớp trưởng thuộc nhóm $(1; 3)$".

$n(B) = \mathrm{C}_7^2 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 630$.

Gọi C là biến cố " Bí thư và lớp trưởng thuộc nhóm $(2; 2)$".

$n(C) = \mathrm{C}_7^1 \cdot \mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 = 840$.

Vậy $\mathrm{P}(\overline{A}) = \dfrac{n(B) + n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{7}{32}$.

$\Rightarrow \mathrm{P}(A) = 1 - \dfrac{7}{32} = \dfrac{25}{32}$.

Câu 3. Chọn đáp án D

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \text{ (kép)} \\ x = 2. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ nên $x \in (-2; 0)$.

Câu 4. Chọn đáp án B

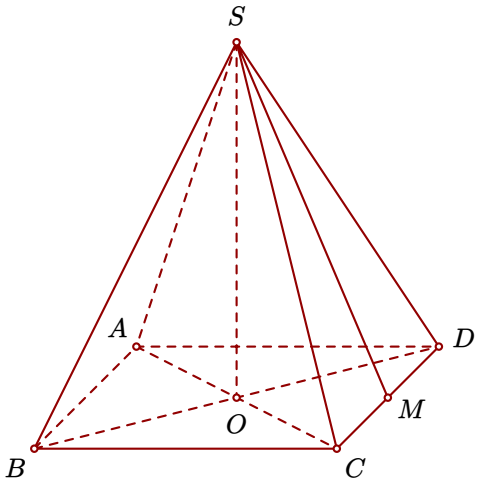
Chiều cao của khối chóp cụt là $h = \dfrac{x}{2} \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích của khối chóp cụt tứ giác đều là $V_1 = \dfrac{1}{3}\left(4x^2 + x^2 + \sqrt{4x^2 \cdot x^2}\right) \cdot \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{3} \cdot 7x^2 \cdot \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{7x^3\sqrt{3}}{6}$ (đơn vị thể tích).

Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V_2 = x \cdot x \cdot 3x = 3x^3$ (đơn vị thể tích).

Tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\frac{7x^3\sqrt{3}}{6}}{3x^3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{18}$.

Câu 5. Chọn đáp án B



Gọi hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ như hình vẽ, $O = AC \cap BD$, M là trung điểm của DC.

Khi đó góc nhị diện tạo bởi mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ là $[S, CD, O]$.

Ta có $SM \perp CD$ và $OM \perp CD$, suy ra $\widehat{SMO}$ là góc phẳng nhị diện $[S, CD, O]$.

Xét tam giác SMO ta có $OM = \dfrac{BC}{2} = 90$ m.

$\tan \widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} = \dfrac{98}{90} = \dfrac{49}{45} \Rightarrow \widehat{SMO} \approx 47{,}4^\circ$.

Vậy số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp là $47{,}4^\circ$.

Câu 6. Chọn đáp án D

Mẫu số liệu có 24 giá trị nên tứ phân vị thứ 3 là $\dfrac{x_{18} + x_{19}}{2}$.

Do x_{18}, x_{19} đều thuộc nhóm $[12; 14)$ nên ta có tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $Q_3 = 12 + \dfrac{\frac{3 \cdot 24}{4} - (3 + 6 + 8)}{7} \cdot 2 \approx 12{,}3$.

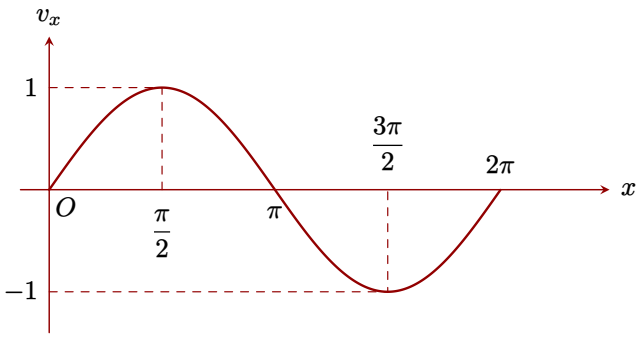
Câu 7. Chọn đáp án A

Do $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$ nên $-0{,}3 \leqslant 0{,}3\sin\alpha \leqslant 0{,}3$.

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0{,}3$ m và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0{,}3$ m.

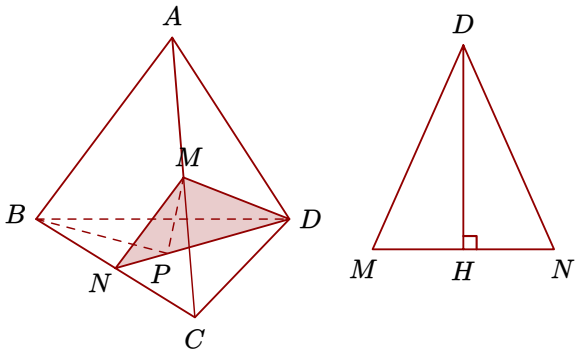
Dựa vào đồ thị hàm số sin, ta thấy vòng quay đầu tiên $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi)$, v_x tăng khi $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ hoặc $\dfrac{3\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

.



Suy ra $a+b+c+d=0+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{2}+2\pi=4\pi$.

Câu 8. Chọn đáp án B



Trong tam giác BCD có P là trọng tâm, suy ra D, P, N thẳng hàng.
Suy ra mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện là tam giác MND.
Ta có $MN=\dfrac{AB}{2}=a$, $DM=DN=\dfrac{AD\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.
Suy ra tam giác MND cân tại D.
Gọi H là trung điểm của MN, suy ra $DH\perp MN$.
Vậy $S_{\Delta MND}=\dfrac{1}{2}\cdot MN\cdot DH=\dfrac{1}{2}\cdot MN\cdot\sqrt{DM^2-MH^2}=\dfrac{a^2\sqrt{11}}{4}$.

Câu 9. Chọn đáp án A
Số tiền du khách đặt trong mỗi lần kể từ lần đầu là một cấp số nhân, có $u_1=20\,000$ đồng và công bội $q=2$.
Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là
$S_9=u_1+u_2+\cdots+u_9=u_1\cdot\dfrac{1-q^9}{1-q}=10\,220\,000$ đồng.
Số tiền mà du khách thắng ở lần thứ 10 là $u_{10}=u_1\cdot q^9=10\,240\,000$ đồng.
Ta có $u_{10}-S_9=20\,000>0$.
Do đó du khách thắng 20 000 đồng.

Câu 10. Chọn đáp án C
Dễ thấy ba véc-tơ $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{B'B}$ đôi một vuông góc.

Câu 11. Chọn đáp án B
Ta có $f'(v)=\dfrac{290{,}4(-0{,}36v^2+264)}{(0{,}36v^2+13{,}2v+264)^2}$.

$$f'(v)=0 \Leftrightarrow -0{,}36v^2+264=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=\dfrac{10\sqrt{66}}{3} \\ v=-\dfrac{10\sqrt{66}}{3}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

v	0		$\dfrac{10\sqrt{66}}{3}$		$+\infty$
$f'(v)$		$+$	0	$-$	
$f(v)$	0	$\nearrow$	$8{,}881$	$\searrow$	0

Vậy lưu lượng xe là lớn nhất gần bằng 8,881 xe/giây.
Kết quả thu được gần với giá trị 8,9 nhất.

Câu 12. Chọn đáp án D
M_1 là độ chấn động của trận động đất 7 độ Richter với biên độ tối đa A_1.
M_2 là độ chấn động của trận động đất 5 độ Richter với biên độ tối đa A_2.
Khi đó $M_1=\log A_1-\log A_0=7$.
$M_2=\log A_2-\log A_0=5$.
Do đó
$M_1-M_2=\log A_1-\log A_2=2$

$\Leftrightarrow \log\dfrac{A_1}{A_2}=2$

$\Leftrightarrow A_1=100A_2$.
Vậy biên độ tối đa của một trận động đất 7 độ Richter sẽ lớn gấp 100 lần biên độ tối đa của một trận động đất 5 độ Richter.

Câu 13. Chọn đáp án: a b c d
a) Dân số quốc gia năm 2035 là $N(12)=100\mathrm{e}^{0{,}012\cdot 12}\approx 115{,}488$ triệu người.
b) Ta có $N'(t)=1{,}2\mathrm{e}^{0{,}012t}$, suy ra $N'(1)=1{,}2$ triệu người/năm.
c) $N'(t)=1{,}2\mathrm{e}^{0{,}012t}>0, \forall t\in(0;50)$.
d) Dân số quốc gia năm 2030 là $N(7)=100\mathrm{e}^{0{,}012\cdot 7}\approx 108{,}763$ triệu người.

Câu 14. Chọn đáp án: a b c d
a)
$$\begin{cases} (BCC'B')\cap(BDD'B')=BB' \\ BC\perp BB' \\ BD\perp BB' \end{cases}$$

$\Rightarrow [(BCC'B'),BB',(BDD'B')]=\widehat{CBD}=45^\circ$.
b)
Thể tích khối tứ diện $AB'CD'$ bằng
$V_{AB'CD'}=V_{ABCD.A'B'C'D'}-V_{B'ABC}-V_{D'ACD}-V_{CB'C'D'}-V_{AA'B'D'}$

$$=a^3-4\cdot\frac{1}{3}a\cdot\frac{a^2}{2}=a^3-\frac{2}{3}a^3=\frac{a^3}{3}.$$

c)
$BD\parallel(CB'D')\Rightarrow \mathrm{d}(BD,CD')=\mathrm{d}(BD,(CB'D'))=\mathrm{d}(O,(CB'D'))=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A,(CB'D'))$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot V_{ACB'D'}}{S_{\Delta CB'D'}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot\dfrac{a^3}{3}}{\dfrac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4a^3}{2\sqrt{3}a^2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

d)
$AB \perp (BCC'B') \Rightarrow AB \perp BB'$.
Trong $(BCC'B')$, $B'C' \perp BB'$ suy ra BB' là đoạn vuông góc chung của AB và $B'C'$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(AB, B'C') = BB' = a$.

Câu 15. Chọn đáp án: a b c d
Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$ ta có bảng xét dấu

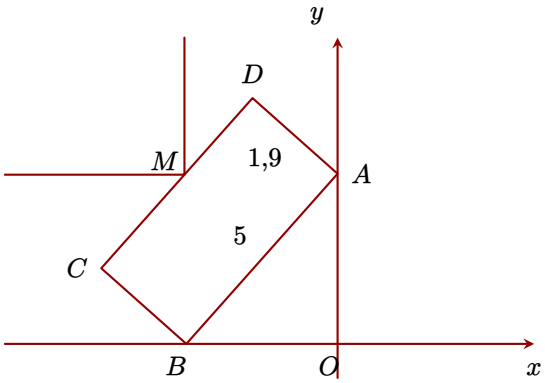
x	$-\infty$		-2		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	

a) Ta thấy hàm số $f(x)$ đạt cực đại duy nhất tại $x = -2$.
b) Ta thấy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
c) Ta có $g'(x) = 2f'(2x+1)$.
Hàm số $g(x)$ đồng biến khi
$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f'(2x+1) \geqslant 0$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1 \leqslant -2 \\ 2x+1 \geqslant 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -\dfrac{3}{2} \\ x \geqslant -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$
Vậy hàm số $g(x) = f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$ là sai.
d) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 16. Chọn đáp án: a b c d
Gọi A, B, C tương ứng là các biến cố người thứ nhất, người thứ hai, người thứ ba câu được cá.
a) $\mathrm{P}(A) = 0{,}5$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}4$; $\mathrm{P}(C) = 0{,}3$.
Gọi M là biến cố " Người thứ ba luôn câu được cá", $M = (A \cup \overline{A}) \cdot (B \cup \overline{B}) \cdot C$.
$\Rightarrow \mathrm{P}(M) = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3$.
b) Gọi N là biến cố " Có ít nhất một người câu được cá".
$\Rightarrow \overline{N}$ là biến cố " Không có người nào câu được cá", $\overline{N} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$.
$\mathrm{P}(N) = 1 - \mathrm{P}(\overline{N}) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}) = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}79$.
c) Gọi T là biến cố " Có đúng một người câu được cá", $T = (A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}) \cup (\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}) \cup (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C)$.
$\mathrm{P}(T) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}44$.
d) Gọi R là biến cố " Có đúng hai người câu được cá", $R = (A \cdot B \cdot \overline{C}) \cup (A \cdot \overline{B} \cdot C) \cup (\overline{A} \cdot B \cdot C)$.
$\mathrm{P}(R) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}29$.

Câu 17. Đáp án: 361.
Ta có tọa độ điểm $A(-300; -200; 10)$.
Tọa độ ra-đa là $B(0; 0; 0{,}08)$.
$\Rightarrow AB = \sqrt{300^2 + 200^2 + (10 - 0{,}08)^2} \approx 361$ km.

Câu 18. Đáp án: 3,7.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.
Khi đó, tọa độ điểm M là $M(-2{,}6;m)$.
Gọi $B(-a;0)$ với $0<a\leqslant 5$, suy ra $A\left(0;\sqrt{25-a^2}\right)$.
Phương trình đoạn chắn của đường thẳng AB là
$$-\frac{x}{a}+\frac{y}{\sqrt{25-a^2}}=1\Leftrightarrow -\frac{x}{a}+\frac{y}{\sqrt{25-a^2}}-1=0.$$
Do $CD\parallel AB$ nên phương trình đường thẳng CD có dạng
$$-\frac{x}{a}+\frac{y}{\sqrt{25-a^2}}-k=0.$$
Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song AB và CD chính là chiều rộng của ô tô và bằng 1,9 m, do đó
$$\mathrm{d}(AB,CD)=\frac{|k-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}}=1{,}9\Leftrightarrow \frac{|k-1|}{\sqrt{\frac{25}{a^2(25-a^2)}}}=1{,}9\Leftrightarrow |k-1|=\frac{9{,}5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$
Vì đường thẳng CD nằm xa gốc tọa độ O hơn đường thẳng AB nên $k>1$, suy ra
$$k=1+\frac{9{,}5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$
Phương trình đường thẳng CD được viết lại
$$-\frac{x}{a}+\frac{y}{\sqrt{25-a^2}}-1-\frac{9{,}5}{a\sqrt{25-a^2}}=0.$$
Điều kiện để ô tô đi qua được là hai điểm M và O nằm khác phía đối với đường thẳng CD (hoặc M nằm trên CD), tức là
$$\left(\frac{2{,}6}{a}+\frac{m}{\sqrt{25-a^2}}-1-\frac{9{,}5}{a\sqrt{25-a^2}}\right)\left(-1-\frac{9{,}5}{a\sqrt{25-a^2}}\right)\leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2{,}6}{a}+\frac{m}{\sqrt{25-a^2}}-1-\frac{9{,}5}{a\sqrt{25-a^2}}\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow m\geqslant \sqrt{25-a^2}+\frac{9{,}5}{a}-\frac{2{,}6\sqrt{25-a^2}}{a},\forall a\in(0;5].$$
Xét hàm số $f(a)=\sqrt{25-a^2}+\dfrac{9{,}5}{a}-\dfrac{2{,}6\sqrt{25-a^2}}{a}$ trên nửa khoảng $(0;5]$.
Đạo hàm
$$f'(a)=\frac{65-9{,}5\sqrt{25-a^2}-a^3}{a^2\sqrt{25-a^2}}.$$
Giải phương trình $f'(a)=0$ trên $(0;5)$ ta được nghiệm duy nhất $a=3$.
Lập bảng biến thiên của $f(a)$ trên $(0;5]$, ta suy ra
$$\max_{(0;5]} f(a)=f(3)=\sqrt{16}+\frac{9{,}5}{3}-\frac{2{,}6\cdot 4}{3}=4-0{,}3=3{,}7.$$
Do đó
$$m\geqslant f(a),\forall a\in(0;5]\Leftrightarrow m\geqslant \max_{(0;5]} f(a)=3{,}7.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m để ô tô đi qua được là 3,7 m.

Câu 19. a) Ta có $y' = (8x+4)f'(4x^2+4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ f'(4x^2+4x) = 0. \end{cases}$

Lại có

$$f'(4x^2+4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+4x = -1 \\ 4x^2+4x = 0 \\ 4x^2+4x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = -1 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Trong đó $x = -\dfrac{1}{2}$ là nghiệm bội chẵn, các nghiệm còn lại là nghiệm đơn.

Ta thấy $y' = 0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt và một nghiệm bội lẻ nên hàm số có 5 điểm cực trị.

Vậy hàm số $y = f(4x^2+4x)$ có 5 điểm cực trị là $x = -\dfrac{1}{2}$; $x = 0$; $x = -1$; $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $g'(x) = -2f'(-2x+1)$.

Suy ra

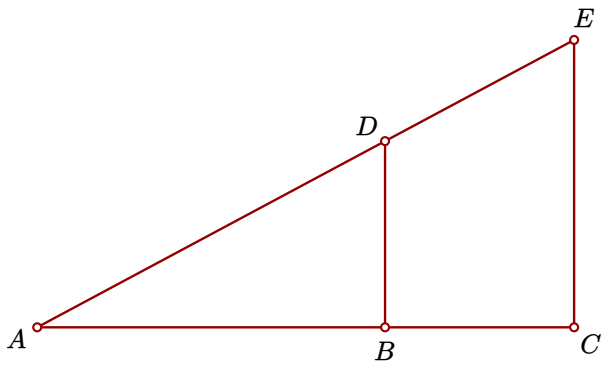
$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(-2x+1) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < -2x+1 < 1 \\ -2x+1 > 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < -1. \end{cases}$$

Vậy hàm số $g(x) = f(-2x+1)$ nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(-\infty;-1)$.

Câu 20. Ta có hình vẽ:



Đặt $AB = a$ m $(a > 0)$.

Suy ra $AD = \sqrt{a^2+4}$.

Ta có

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{EC} \Rightarrow \frac{a}{a+2} = \frac{2}{EC}$$

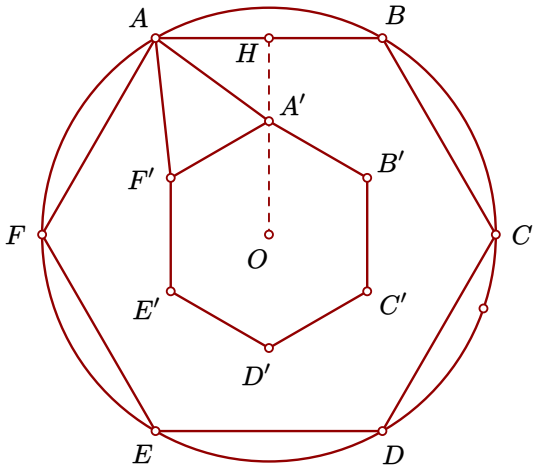
$$\Rightarrow EC = \frac{2(a+2)}{a}.$$

Chiều dài của chiếc thang là

$$AE = \sqrt{AC^2 + CE^2}$$
$$= \sqrt{(a+2)^2 + \frac{4(a+2)^2}{a^2}}$$
$$= \sqrt{\left(a+4+\frac{4}{a}\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)}.$$

Đặt $a + \dfrac{4}{a} = x$ $(x \geqslant 4)$.
Suy ra $AE^2 = (x+4)x = x^2 + 4x$.
Xét hàm số $f(x) = x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = 2x + 4 > 0, \forall x \geqslant 4$, do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[4; +\infty)$.
Cho nên $f(x) \geqslant f(4) = 32$.
Từ đó suy ra $AE \geqslant 4\sqrt{2}$.
Vậy chiều dài tối thiểu của thang bằng $4\sqrt{2}$ m.

Câu 21.



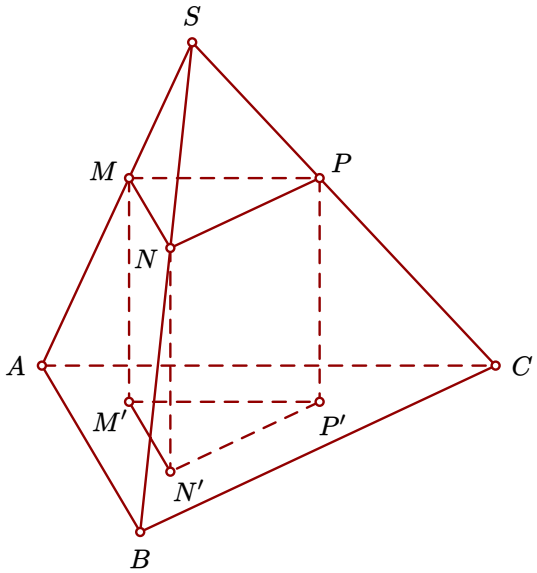
Dễ thấy đường tròn ngoại tiếp lục giác đều $ABCDEF$ có bán kính $R = 6$.
Gọi H là trung điểm của AB, suy ra
$OH = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.
Đặt $R' = x$ là bán kính của đường tròn ngoại tiếp lục giác nhỏ $A'B'C'D'E'F'$, suy ra
$A'H = OH - OA' = 3\sqrt{3} - x$.
Cạnh bên của hình chóp là
$A'A = \sqrt{A'H^2 + HA^2} = \sqrt{x^2 - 6\sqrt{3}x + 36}$.
Diện tích đáy của khối chóp là
$S = 6 \cdot S_{\Delta OA'B'} = 6 \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}$.
Và chiều cao là
$h = \sqrt{A'A^2 - OA'^2} = \sqrt{-6\sqrt{3}x + 36}$.
Suy ra
$$V = \frac{1}{3}S \cdot h$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}x^2}{2} \cdot \sqrt{-6\sqrt{3}x + 36}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-6\sqrt{3}x^5 + 36x^4}$$
$$= f(x).$$

Ta có
$f'(x)=\dfrac{\sqrt{3}(-30\sqrt{3}x^4+144x^3)}{4\sqrt{-6\sqrt{3}x^5+36x^4}}$.
Dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x=\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$.
Suy ra thể tích lớn nhất là $V=\dfrac{576\sqrt{15}}{125}$ dm^3.

Câu 22. Đặt A là biến cố " Mã OTP là dãy kí tự $abcd$ với $a<b<c<d$".
Số kết quả có thể là $n(\Omega)=10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=10^4$.
Số kết quả thuận lợi
Do mỗi cách sắp tăng dần là một tập con gồm 4 phần tử của tập $\{0;1;2;\ldots;9\}$,
suy ra $n(A)=\mathrm{C}_{10}^4=210$.
Vậy $\mathrm{P}(A)=\dfrac{210}{10^4}=\dfrac{21}{1000}$.

Câu 23. Lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R=0{,}5$ dm.
Khi đó hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng $h=1{,}5$ dm và đáy là hình chữ nhật có chiều dài bằng $x=2R=1$ dm và chiều rộng
$y=\sqrt{R^2+R^2-2R\cdot R\cos 120^\circ}=R\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dm.
Vậy thể tích khối hộp là
$V=h\cdot x\cdot y=1{,}5\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\approx 1{,}299$ dm^3.

Câu 24.



Đặt $\dfrac{SM}{SA}=x$ $(0<x<1)$.
Vì $(MNP)\parallel(ABC)$ nên $MN\parallel AB$, $NP\parallel BC$ và $MP\parallel AC$.
Suy ra $\triangle MNP\backsim\triangle ABC$ theo tỉ số đồng dạng $k=x$, do đó $\dfrac{S_{MNP}}{S_{ABC}}=x^2$.
Lại có $\dfrac{\mathrm{d}(M,(ABC))}{\mathrm{d}(S,(ABC))}=\dfrac{MA}{SA}=1-x$.
Khi đó
$\dfrac{V_{MNP.M'N'P'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{\mathrm{d}(M,(ABC))\cdot S_{MNP}}{\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(S,(ABC))\cdot S_{ABC}}=3(1-x)x^2$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương $2-2x$, x, x, ta có
$\dfrac{V_{MNP.M'N'P'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{3}{2}(2-2x)\cdot x\cdot x \leqslant \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2-2x+x+x}{3}\right)^3 = \dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{4}{9}.$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2-2x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ (thỏa mãn $0 < x < 1$).
Vậy $\max\left(\dfrac{V_{MNP.M'N'P'}}{V_{S.ABC}}\right) = \dfrac{4}{9}.$

THPT Ngô Gia Tự

Câu 1. Chọn đáp án A

Ta có $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=+\infty.$

Câu 2. Chọn đáp án B

Hàm số $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.
Cách vẽ đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ từ đồ thị hàm số $y=f(x)$:
- Bỏ phần đồ thị bên trái trục Oy.
- Giữ nguyên phần đồ thị bên phải trục Oy, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị này qua trục Oy.
Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ bằng $2k+1$ (với k là số điểm cực trị dương của hàm số $y=f(x)$).
Do đó, hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 3. Chọn đáp án B

Gọi $M(a;b;c)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(a-2;b;c),\overrightarrow{BM}=(a;b-2;c),\overrightarrow{CM}=(a;b;c-2).$
Theo giả thiết:

$$\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90^\circ\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM}=0\\ \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AM}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)a+b(b-2)+c^2=0\\ a^2+b(b-2)+c(c-2)=0\\ a(a-2)+b^2+c(c-2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2-2a-2b=0\\ a^2+b^2+c^2-2b-2c=0\\ a^2+b^2+c^2-2a-2c=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.$$

Thay vào phương trình đầu tiên ta có:

$$3a^2-4a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=\dfrac{4}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(0;0;0)\\ M\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)\end{array}\right.\text{(thỏa mãn).}$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Chọn đáp án D

Ta có
$S_{AMN}=S_{ABCD}-(S_{ABM}+S_{CMN}+S_{ADN})=\dfrac{15}{2}.$
$AM=\sqrt{16+9}=5,\ MN=\sqrt{10},\ AN=3\sqrt{5}.$
Khi đó $S_{AMN}=\dfrac{AM\cdot MN\cdot AN}{4R}=\dfrac{75\sqrt{2}}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}.$

Câu 5. Chọn đáp án D

Gọi A là biến cố: "Người thứ nhất bắn trúng đích".
B là biến cố: "Người thứ hai bắn trúng đích".
C là biến cố: "Người thứ ba bắn trúng đích".
Ta có $\mathrm{P}(A)=0{,}8;\ \mathrm{P}(B)=0{,}6;\ \mathrm{P}(C)=0{,}5\Rightarrow\mathrm{P}(\overline{A})=0{,}2;\ \mathrm{P}(\overline{B})=0{,}4;\ \mathrm{P}(\overline{C})=0{,}5.$
Gọi D là biến cố: "Có đúng hai người bắn trúng đích". Khi đó

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(A\cap B\cap \overline{C}) + \mathrm{P}(A\cap \overline{B}\cap C) + \mathrm{P}(\overline{A}\cap B\cap C)\\ &= \mathrm{P}(A)\cdot \mathrm{P}(B)\cdot \mathrm{P}(\overline{C}) + \mathrm{P}(A)\cdot \mathrm{P}(\overline{B})\cdot \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(\overline{A})\cdot \mathrm{P}(B)\cdot \mathrm{P}(C)\\ &= 0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5 + 0{,}8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5 + 0{,}2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5\\ &= 0{,}46.\end{aligned}$$

Câu 6. Chọn đáp án D

$M\in(Oxy)\Rightarrow M(a;b;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(a-2;b+2;-1)$ và $\overrightarrow{AB}=(-2;3;1)$.

Ba điểm A,B,M thẳng hàng nên

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2=-2k\\ b+2=3k\\ -1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=-5\\ k=-1\end{cases}\Rightarrow M(4;-5;0).$$

Câu 7. Chọn đáp án B

Hàm số có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có $y'=\dfrac{5}{(x+2)^2}>0$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 8. Chọn đáp án C

Gọi số bạn thích cả hai môn này là $2x$ $(x\in\mathbb{N})$. Khi đó số bạn không thích cả hai môn này là x.

Số bạn thích ít nhất một trong hai môn thể thao này là $18+15-2x=33-2x$.

Số bạn không thích môn nào trong hai môn này là $27-(33-2x)=2x-6$.

Theo bài ra ta có $2x-6=x\Rightarrow x=6$.

Vậy số bạn nam thích đá bóng nhưng không thích bơi lội là $18-2x=18-2\cdot 6=6$.

Câu 9. Chọn đáp án D

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=-\dfrac{m}{2}$.

Vì tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho đi qua $M\left(-1;\sqrt{2}\right)$ nên $-\dfrac{m}{2}=-1\Rightarrow m=2$.

Câu 10. Chọn đáp án A

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Ta có $y'=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=2\\ x=-2\Rightarrow y=-1.\end{array}\right.$$

Do đạo hàm đổi dấu qua hai nghiệm $x=1$, $x=-2$ nên hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(1;2)$, $B(-2;-1)\Rightarrow AB=3\sqrt{2}$.

Câu 11. Chọn đáp án D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-4;2;2)\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-3;1;0)$.

Gọi $D(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{AD}=(x-2;y;z+2)$.

$$\Rightarrow\begin{cases}x-2=-3\\ y=1\\ z+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=1\\ z=-2\end{cases}\Rightarrow D(-1;1;-2).$$

Câu 12. Chọn đáp án D

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[2;4]$. Ta có

$f(x) = x + \dfrac{9}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \dfrac{9}{x^2}$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \in [2;4] \\ x = -3 \notin [2;4]. \end{array}\right.$

Ta có $f(2) = 6{,}5$; $f(4) = 6{,}25$; $f(3) = 6$.

Suy ra $6 \leqslant f(x) \leqslant 6{,}5$.

Vậy $b - a = 6{,}5 - 6 = 0{,}5$.

Câu 13. Chọn đáp án: a b c d

a) Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = -6 \\ x = 0 \Rightarrow y = -2. \end{array}\right.$

Suy ra hai điểm cực trị của (C) là $A(-2;-6)$ và $B(0;-2)$. Do đó $(AB)\colon y = 2x - 2$.

b) Ta có $y = x - 3 + \dfrac{1}{x+1}$ nên đồ thị (C) có tiệm cận đứng $d_1\colon x = -1$ và tiệm cận xiên $d_2\colon y = x - 3$.

Với $M(x_M; y_M)$ thuộc (C), ta có

$$d(M, d_1) + d(M, d_2) = \frac{|x_M + 1|}{\sqrt{1}} + \frac{|x_M - y_M - 3|}{\sqrt{2}}$$
$$= |x_M + 1| + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{|x_M + 1|} \geqslant \frac{2}{\sqrt[4]{2}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$|x_M + 1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{|x_M + 1|} \Leftrightarrow |x_M + 1| = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = -1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} > -1 \\ x_M = -1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} < -1. \end{array}\right.$$

Với $x_M = -1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} > -1$ thì $y_M \approx -1{,}97 < -1{,}9$.

c) Theo câu a).

d) Ta có $A(-2;-6)$, $B(0;-2)$ và phương trình $(AB)\colon 2x - y - 2 = 0$. Suy ra $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ và $d(M, AB) = \dfrac{|2 \cdot 1 - (-3) - 2|}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$, do đó $S_{\triangle MAB} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{5}} = 3$.

Câu 14. Chọn đáp án: a b c d

a) Ta có $y' = -3x^2 + 2024 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{2024}{3}}$. Vậy hàm số có hai điểm cực trị.

b) Bảng biến thiên của hàm số $y = -x^3 + 2024x + 2025$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2024}{3}}$		$\sqrt{\frac{2024}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\sqrt{\frac{2024}{3}}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\sqrt{\frac{2024}{3}}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

Như vậy trên $(0;+\infty)$ hàm số đạt GTLN là $f\left(\sqrt{\dfrac{2024}{3}}\right)$ tại $x=\sqrt{\dfrac{2024}{3}}$.

c) $-\sqrt{\dfrac{2024}{3}}<-20<20<\sqrt{\dfrac{2024}{3}}$ nên hàm số đồng biến trên $(-20;20)$.

d) Đặt $g(x)=f(x-10)-2026$, khi đó

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2024}{3}}+10$		$\sqrt{\frac{2024}{3}}+10$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\sqrt{\frac{2024}{3}}\right)-2026$	$\nearrow$	$f\left(\sqrt{\frac{2024}{3}}\right)-2026$	$\searrow$	$-\infty$

Ta lại có $f\left(\sqrt{\dfrac{2024}{3}}\right)-2026\approx 35047>0$ và $f\left(-\sqrt{\dfrac{2024}{3}}\right)-2026\approx -35049<0$.

Như vậy, số nghiệm của phương trình $g(x)=0$ là 3 nên số điểm cực trị của hàm số $y=|g(x)|=|f(x-10)-2026|$ là 5.

Câu 15. Chọn đáp án: a b c d

a) Ta có tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-m-2\}$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{m(m+2)-3}{(x+m+2)^2}=\dfrac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi

$$\begin{cases} m^2+2m-3>0 \\ -m-2\notin(0;+\infty) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m\geqslant -2 \end{cases}\Leftrightarrow m\in(1;+\infty).$$

b) Ta có tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-m-2\}$.

c) Ta xét phương trình $x+m+2=0\Leftrightarrow x=-m-2$.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng $x=-m-2$ khi $x=-m-2$ là nghiệm của phương trình $mx+3=0$:

$$\Leftrightarrow m(-m-2)+3=0\Leftrightarrow -m^2-2m+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3. \end{array}\right.$$

Vậy với $m=1$, $m=-3$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

d) Ta có khi $m=2$ hàm số là $y=\dfrac{2x+3}{x+4}$, đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(-4;2)$.

Gọi $M\left(x;\dfrac{2x+3}{x+4}\right)$ thuộc đồ thị hàm số.

Khoảng cách

$$\begin{aligned} IM&=\sqrt{(x+4)^2+\left(\frac{2x+3}{x+4}-2\right)^2} \\ &=\sqrt{(x+4)^2+\frac{25}{(x+4)^2}}. \end{aligned}$$

Đặt $t=(x+4)^2$, $t>0$. Ta xét $f(t)=t+\dfrac{25}{t}$, $f'(t)=1-\dfrac{25}{t^2}$.

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=-5. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		-5		0		5		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	-10	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	10	↗ $+\infty$

Với $t>0$ hàm số $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 10.
Vậy IM nhỏ nhất bằng $\sqrt{10}$.

Câu 16. Chọn đáp án: a b c d

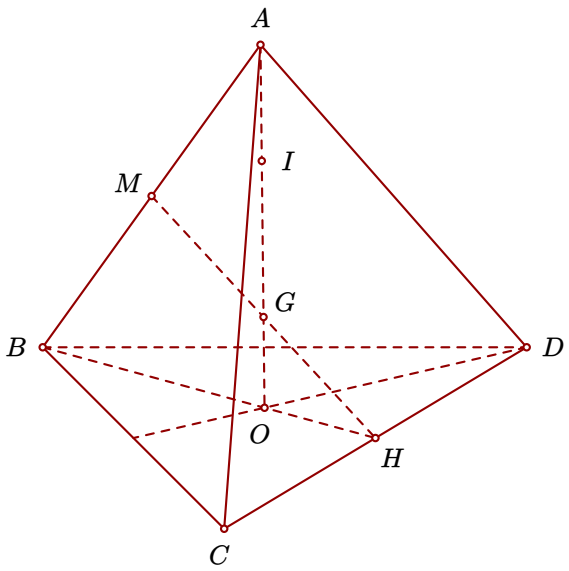
a) Dân số tỉnh X năm 2011 là $A+A\cdot 0{,}4\%=A\cdot 1{,}004$.
Dân số tỉnh X năm 2012 là $A\cdot 1{,}004+A\cdot 1{,}004\cdot 0{,}4\%=A\cdot 1{,}004^2$.
Do đó dân số tỉnh X năm n là $A\cdot 1{,}004^{n-2010}$ $(2010\leqslant n\leqslant 2019)$.
Vậy dân số tỉnh X năm 2017 là $A\cdot 1{,}004^7$.
b) Dân số tỉnh X năm 2019 là $A\cdot 1{,}004^9$.
Dân số tỉnh X năm 2020 là $A\cdot 1{,}004^9\cdot 1{,}0035$.
Dân số tỉnh X năm 2021 là $A\cdot 1{,}004^9\cdot 1{,}0035^2$.
$\Rightarrow A\cdot 1{,}004^9\cdot 1{,}0035^2-A\cdot 1{,}004^7=0{,}0304\Rightarrow A\approx 1{,}96$.
c) Do đó dân số tỉnh X năm m là $A\cdot 1{,}004^9\cdot 1{,}0035^{m+1-2020}$ $(2020\leqslant m\leqslant 2030)$.
Dân số tỉnh X năm 2024 là $A\cdot 1{,}004^9\cdot 1{,}0035^5\approx 2{,}07$.
d) Dân số tỉnh X năm 2030 là $A\cdot 1{,}004^9\cdot 1{,}0035^{11}$.
Dân số năm 2030 tăng so với năm 2010 là $A\cdot 1{,}004^9\cdot 1{,}0035^{11}-A\approx 0{,}15$ triệu người.

Câu 17. Chọn đáp án: a b c d

a) Ta có $\overrightarrow{CD}=(4;-4;10)$.
b) Vì $E\in Ox$ nên $E(x;0;0)$.
Tam giác CDE vuông tại C nên $CD\perp CE\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{CE}\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}=0$.
Mà $\overrightarrow{CD}=(4;-4;10)$ và $\overrightarrow{CE}=(x-1;-3;2)$ nên
$4(x-1)+(-4)(-3)+10\cdot 2=0\Leftrightarrow x=-7\Rightarrow E(-7;0;0)$.
c) Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;5)$, $\overrightarrow{AC}=(1;2;0)$ và $\overrightarrow{AD}=(5;-2;10)$.
Suy ra $m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}=(m+5n;2m-2n;10n)$.
Vì $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$ nên
$$\begin{cases} m+5n=2 \\ 2m-2n=-2 \\ 10n=5 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{1}{2} \\ n=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$
d) Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;5)$ và $\overrightarrow{AC}=(1;2;0)$.
Vì $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{2}{-2}\neq\dfrac{0}{5}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, hay ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

Câu 18. Đáp án: 5.
Dựa vào đồ thị ta có
$f(x) = a(x+3)^2(x-m)$, $m \in (-1;0)$.
$f(x) - 2 = a(x-n)(x-h)(x+1)$, $n \in (-\infty;-3)$, $h \in (-3;-1)$. $g(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{f^2(x)-2f(x)} = \dfrac{1}{a^2(x+3)(x-m)(x-n)(x-h)}$.
Khi đó, đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0$ và có 4 đường tiệm cận đứng là $x = -3, x = m, x = n, x = h$.
Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận đứng và ngang là 5.

Câu 19. Đáp án: 3,6.
Gọi G là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$. Khi đó: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$.
Gọi K thỏa: $4\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} + 4\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{0}$.
$P = 4IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$
$= 4\left(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KD}\right)^2$
$= 7IK^2 + 4KA^2 + KB^2 + KC^2 + KD^2$.
$P_{\min} \Leftrightarrow I \equiv K$.



Ta có
$V_{ABCD} = \dfrac{6^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2} \Rightarrow V_{OABC} = 6\sqrt{2}$.
$BO = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$, $AO = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{6}$.
Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABO, ta có:
$\dfrac{GO}{GA} \cdot \dfrac{MA}{MB} \cdot \dfrac{HB}{HO} = 1 \Rightarrow \dfrac{GO}{GA} \cdot 1 \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow GA = 3GO$.
Khi đó
$IA = \dfrac{3}{7}OA \Rightarrow V_{IABC} = \dfrac{3}{7}V_{OABC} = \dfrac{3}{7} \cdot 6\sqrt{2} = \dfrac{18\sqrt{2}}{7} \approx 3{,}6$.

Câu 20. Đáp án: 337.
Ta có $f(a) = \dfrac{9^a - 2}{9^a + 3}$; $f(1-a) = \dfrac{9^{1-a} - 2}{9^{1-a} + 3} = \dfrac{9 - 2 \cdot 9^a}{9 + 3 \cdot 9^a}$.
Nhận xét

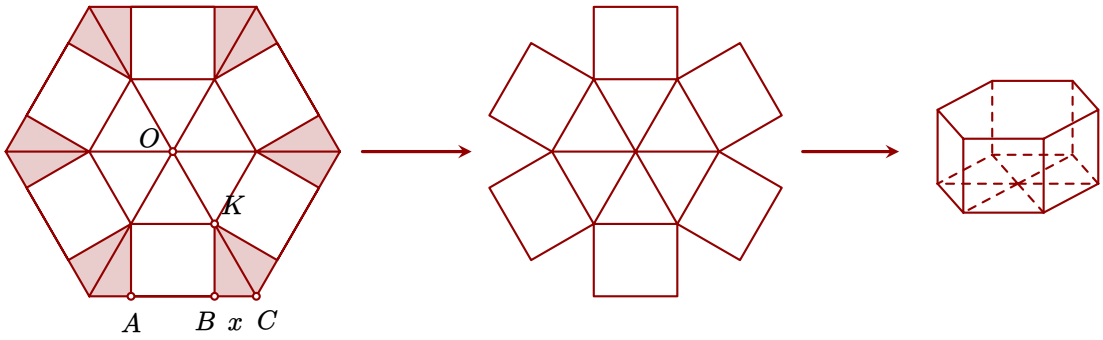
$$f(a)+f(1-a)=\frac{9^a-2}{9^a+3}+\frac{9^{1-a}-2}{9^{1-a}+3}$$
$$=\frac{9^a-2}{9^a+3}+\frac{9-2\cdot 9^a}{9+3\cdot 9^a}=\frac{1}{3}\quad(\forall a).$$

Khi đó

$$S=f\left(\frac{1}{2025}\right)+f\left(\frac{2}{2025}\right)+f\left(\frac{3}{2025}\right)+\cdots+f\left(\frac{2024}{2025}\right)$$
$$=\left[f\left(\frac{1}{2025}\right)+f\left(1-\frac{1}{2025}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2025}\right)+f\left(1-\frac{2}{2025}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{1012}{2025}\right)+f\left(1-\frac{1012}{2025}\right)\right]$$
$$=\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3}}_{1012\text{ số}}$$
$$=1012\cdot\frac{1}{3}\approx 337.$$

Câu 21. Đáp án: 15.

Gọi các điểm có tên như hình vẽ dưới đây.



Ta có: cạnh đáy của lục giác đều là $AB=90-2x$.

$OK=AB=90-2x$ nên $KC=2x$.

Vậy chiều cao của lăng trụ lục giác đều là:

$KB=\sqrt{KC^2-BC^2}=x\sqrt{3}$ (điều kiện: $0<x<45$).

Diện tích đáy của lăng trụ lục giác đều:

$$S=6\cdot(90-2x)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}(90-2x)^2.$$

Thể tích của khối lăng trụ lục giác đều là:

$$V=h\cdot S=x\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}(90-2x)^2$$
$$=\frac{9}{2}x(90-2x)^2=18x^3-1620x^2+36450x.$$

Bảng biến thiên

x	0		15		45
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	$81\,000$	↘	0

Thể tích lớn nhất là $81\,000$ cm^3 tại $x=15$.

Câu 22. Đáp án: 50.
Lợi nhuận mà nhà máy A thu được là
$R(x) = x \cdot p(x) - C(x)$
$= x\left(90 - 0{,}01x^2\right) - (100 + 15x)$
$= -0{,}01x^3 + 75x - 100 \quad (0 < x \leqslant 100).$
Xét hàm số $R(x) = -0{,}01x^3 + 75x - 100$ trên $(0; 100]$:
$R'(x) = -0{,}03x^2 + 75 = 0 \Leftrightarrow x = 50$ (do $x > 0$).
Bảng biến thiên

x	0		50		100
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	2 400	↘	

Vậy nhà máy A đạt lợi nhuận lớn nhất khi bán cho nhà máy B 50 tấn sản phẩm mỗi tháng.

Câu 23. Đáp án: 1.
Ta có $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m-1)x - 1$.
Trường hợp 1: $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1. \end{array}\right.$
Nếu $m = 1 \Rightarrow y' = -1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).
Nếu $m = -1 \Rightarrow y' = -4x - 1$ (loại).
Trường hợp 2:
$$\begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 + 3(m^2-1) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ 4m^2 - 2m - 2 \leqslant 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant m < 1.$$
Kết hợp cả hai trường hợp, ta được $-\dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$.

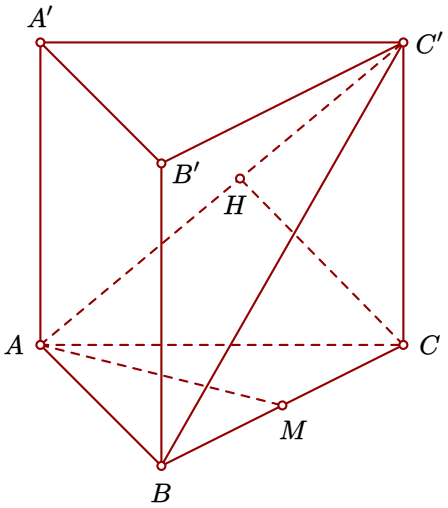
Câu 24. Đáp án: 1,5.
Ta có $\overrightarrow{MA} = (1-x; -1-y; 2)$, $\overrightarrow{MB} = (-1-x; 1-y; 1)$, $\overrightarrow{MC} = (-3-x; -3-y; 4)$, $\overrightarrow{MD} = \left(1-x; \dfrac{1}{2} - y; 1\right)$.
Khi đó
$$T = -3\left(\frac{MA}{MD}\right)^2 - 2\left(\frac{MB}{MD}\right)^2 + \left(\frac{MC}{MD}\right)^2$$
$$= \frac{-4\left(x^2 - 2x + y^2 - y + \dfrac{5}{4}\right) + 15}{\left(x^2 - 2x + y^2 - y + \dfrac{5}{4}\right) + 1}$$
$$= -4 + \frac{19}{(x-1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 1}.$$

Ta có $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+1\geqslant 1$, suy ra $T_{\max}$ khi

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+1=1\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\ y-\dfrac{1}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Do đó $M\left(1;\dfrac{1}{2};0\right)$.
Vậy $x+y=1{,}5$.

Câu 25. Đáp án: 19,5.



Kẻ $AM\perp BC$, $AM\perp CC'\Rightarrow AM\perp (BCC'B')$. Ta có khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là AM và $\dfrac{1}{AM^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}$ (1).
Kẻ $CH\perp AC'$, $CH\perp AB\Rightarrow CH\perp (ABC')$. Ta có khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABC') là CH và $\dfrac{1}{CH^2}=\dfrac{1}{CC'^2}+\dfrac{1}{AC^2}$ (2).
Mà $AM=CH=a$, từ (1) và (2) suy ra $AB=CC'$.
Ta có: $\begin{cases}AB\perp AC\\ AB\perp CC'\end{cases}\Rightarrow AB\perp (ACC'A')\Rightarrow AB\perp AC'$, do đó $((ABC'),(ABC))=(AC',AC)=\alpha$.
Khi đó ta có: $AC=\dfrac{a}{\sin\alpha}$; $\quad AB=CC'=\dfrac{a}{\cos\alpha}$.
Thể tích hình lăng trụ là: $V=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^3}{\sin\alpha\cos^2\alpha}\Rightarrow V=\dfrac{a^3}{2t(1-t^2)}$, $\quad$ với $t=\sin\alpha\in(0;1)$.
Khi đó $V_{\min}\Leftrightarrow f(t)=t(1-t^2)$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Suy ra $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\alpha\approx 35{,}26^\circ$.

Câu 26. Đáp án: 0,14.
Số dãy nhị phân tạo thành là: $n(\Omega)=2^{10}=1024$.
Bài toán được chia thành các trường hợp sau (xếp k chữ số 1 vào giữa và hai đầu của các chữ số 0):
TH0: Chuỗi không có chữ số 1 nào: Có $\mathrm{C}_{11}^{0}=1$ chuỗi.
TH1: Chuỗi có 1 chữ số 1: Có $\mathrm{C}_{10}^{1}=10$ chuỗi.
TH2: Chuỗi có 2 chữ số 1: Có $\mathrm{C}_{9}^{2}=36$ chuỗi.
TH3: Chuỗi có 3 chữ số 1: Có $\mathrm{C}_{8}^{3}=56$ chuỗi.

TH4: Chuỗi có 4 chữ số 1: Có $C_7^4 = 35$ chuỗi.
TH5: Chuỗi có 5 chữ số 1: Có $C_6^5 = 6$ chuỗi.
Suy ra số chuỗi thỏa mãn là
$C_{11}^0 + C_{10}^1 + C_9^2 + C_8^3 + C_7^4 + C_6^5 = 1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6 = 144.$
Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{144}{2^{10}} = \dfrac{144}{1024} \approx 0{,}14.$

Câu 27. Đáp án: 127.
Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ và số nghiệm bội lẻ (nghiệm đổi dấu) của phương trình $f(x) = 0$.
Ta có

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \Rightarrow f(-1) = m - 5 \\ x = 0 \Rightarrow f(0) = m \\ x = 2 \Rightarrow f(2) = m - 32. \end{bmatrix}$$

Hàm số $f(x)$ đã có 3 điểm cực trị nên để hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị thì phương trình $f(x) = 0$ phải có đúng 2 nghiệm bội lẻ.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$m-5$	↗	m	↘	$m-32$	↗	$+\infty$

$m \in \{-99; -98; \ldots; 0\}$: có 100 giá trị.
$m \in \{5; 6; \ldots; 31\}$: có 27 giá trị.
Vậy có tất cả $100 + 27 = 127$ giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Liên trường Bắc Ninh

Câu 1. Chọn đáp án D

Hàm lợi nhuận $L(x) = x \cdot p(x) - C(x) \Rightarrow L(x) = -0{,}001x^3 + 0{,}17x^2 + 23{,}023x - 1800$.

Ta có $L'(x) = -0{,}003x^2 + 0{,}34x + 23{,}023$.

Xét phương trình $L'(x) = 0 \Rightarrow x = 161$.

x	0		2200		$+\infty$
$L'(x)$		$+$	0	$-$	
$L(x)$	-12000	↗	12200	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì $\max\limits_{(0;+\infty)} L(x) = L(161) = 2139{,}992$.

Câu 2. Chọn đáp án C

Gọi A là biến cố "Chọn được học sinh chỉ đánh giá tốt cho Lớp trưởng".

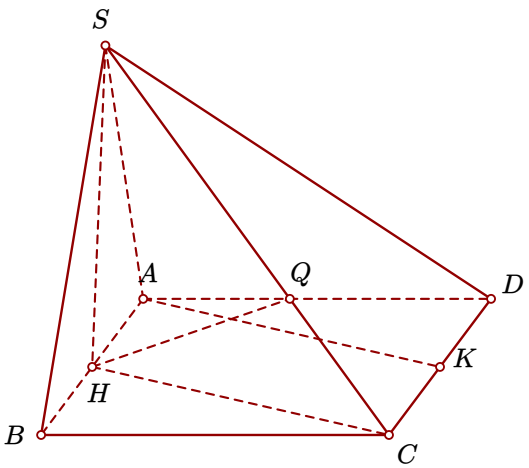
B là biến cố "Chọn được học sinh chỉ đánh giá tốt cho Bí thư".

C là biến cố "Chọn được học sinh chỉ đánh giá tốt cho đúng một bạn trong hai bạn Lớp trưởng hoặc Bí thư".

Ta có $C = A \cup B$.

Ta có $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = 0{,}25 + 0{,}1 = 0{,}35$.

Câu 3. Chọn đáp án D



Do tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên gọi H là trung điểm của AB khi đó $SH \perp (ABCD)$ và $SH = \dfrac{AB}{2} = a$.

Tam giác ADC đều, gọi K là trung điểm của $CD \Rightarrow AK = a\sqrt{3}$.

Kẻ $HCKA$ là hình bình hành $\Rightarrow HC = AK = a\sqrt{3}$.

Kẻ $HQ \perp SC$.

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(AB, SD) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(H, (SCD)) = HQ$.

Tam giác SHC vuông tại H nên

$$\begin{aligned}\frac{1}{HQ^2} &= \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HC^2}\\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2}\\ &= \frac{4}{3a^2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow HQ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng MN là $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. Chọn đáp án B

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2025}{f(x)-3} = 675 \Rightarrow y = 675$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2025}{f(x)-3} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt.

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	0	x_3	3	x_4	$+\infty$
y	$+\infty$		-2		10		-8		6

$y = 3$

Phương trình $f(x) = 3$ có 4 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{2025}{f(x)-3}$ có 4 tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 6 tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Câu 5. Chọn đáp án A

Tập xác định $\mathscr{D} = (-2;+\infty)\setminus\{0\}$.

$$\begin{aligned}&\ln(x^2) = 4\ln(x+2)\\ \Leftrightarrow\ &\ln(x^2) = \ln(x+2)^4\\ \Leftrightarrow\ &x^2 = (x+2)^4\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}(x+2)^2 = x\\ (x+2)^2 = -x\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x^2+3x+4 = 0\\ x^2+5x+4 = 0\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = -1 \text{ (thỏa mãn)}\\ x = -4 \text{ (loại)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 6. Chọn đáp án C

Gọi A là biến cố "Chọn được hai cạnh cùng nằm trên một mặt phẳng".

Số cách chọn 2 cạnh bất kì từ 8 cạnh của hình chóp: $n(\Omega) = \mathrm{C}_8^2 = 28$.

Số cách chọn 2 cạnh trong 3 cạnh của mặt bên: $4\mathrm{C}_3^2$.

Số cách chọn 2 cạnh trong 4 cạnh của mặt đáy: C_4^2.
$n(A) = 4\mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_4^2 = 18$.
$\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{18}{28} = \dfrac{9}{14}$.

Câu 7. Chọn đáp án D
Mặt phẳng $(\alpha)\colon x - my + z + 6m + 3 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; -m; 1)$, và mặt phẳng $(\beta)\colon mx + y - mz + 3m - 8 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (m; 1; -m)$.
Ta có $M\left(-3m + \dfrac{4}{m} - 3; 0; -3m - \dfrac{4}{m}\right) \in \Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.
Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \left(m^2 - 1; 2m; m^2 + 1\right)$.
Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và vuông góc với mặt phẳng (Oxy). Khi đó (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\vec{u}, \vec{k}\right] = \left(2m; 1 - m^2; 0\right)$ (với $\vec{k} = (0; 0; 1)$).
Phương trình mặt phẳng (P) là $2mx + \left(1 - m^2\right) y + 6m^2 + 6m - 8 = 0$.
Vì $I(a; b; c) \in (Oxy)$ nên $I(a; b; 0)$.
Theo giả thiết ta suy ra (P) là tiếp diện của mặt cầu $(S) \Rightarrow \mathrm{d}(I, (P)) = R$ (cố định).
$$\Leftrightarrow \frac{\left|2ma + \left(1 - m^2\right) b + 6m^2 + 6m - 8\right|}{\sqrt{4m^2 + \left(1 - m^2\right)^2}} = R > 0 \text{ (cố định)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\left|2m(a+3) + (6-b)m^2 + b - 8\right|}{m^2 + 1} = R > 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m(a+3) + (6-b)m^2 + b - 8 = R\left(m^2+1\right) \\ 2m(a+3) + (6-b)m^2 + b - 8 = -R\left(m^2+1\right) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2(a+3) = 0 \\ 6 - b = R \\ b - 8 = R \\ R > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2(a+3) = 0 \\ 6 - b = -R \\ b - 8 = -R \\ R > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -3 \\ 6 - b = b - 8 \\ R = 6 - b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -3 \\ 6 - b = b - 8 \\ -R = 6 - b < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$
Suy ra $\begin{cases} a = -3 \\ b = 7 \\ c = 0 \\ R = 1. \end{cases}$
Vậy $a + 2b + 3c + 5R = -3 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 16$.

Câu 8. Chọn đáp án C
Đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 2; -1)$.

Đường thẳng $\Delta_2\colon \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1; 0; 1)$.

Ta có $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) = 45°$.

Câu 9. Chọn đáp án A

Quãng đường đi được trong 12 giây đầu tiên là $s(12) - s(0) = 1440$ cm.

Vậy vận tốc trung bình của chất điểm là $\dfrac{1440}{12} = 120$ cm/s.

Câu 10. Chọn đáp án A

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{25}$ là thời gian giải rubik của 25 người chơi và đã xếp theo thứ tự không giảm.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $\dfrac{x_6 + x_7}{2}$, mà $x_6; x_7$ thuộc nhóm $[10; 12)$ nên ta có:

$$Q_1 = 10 + \frac{\frac{25}{4} - 4}{6} \cdot (12 - 10) = \frac{43}{4}.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $\dfrac{x_{19} + x_{20}}{2}$, mà $x_{19}; x_{20}$ thuộc nhóm $[14; 16)$ nên ta có:

$$Q_3 = 14 + \frac{\frac{3 \cdot 25}{4} - 18}{4} \cdot (16 - 14) = \frac{115}{8}.$$

Do đó, $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \dfrac{29}{8} \approx 3{,}63$.

Câu 11. Chọn đáp án D

$$\lim_{x \to -\infty} \left(ax + 3 + \sqrt{4x^2 + bx + 12}\right) = 5$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \left[x\left(a + \frac{3}{x} - \sqrt{4 + \frac{b}{x} + \frac{12}{x^2}}\right)\right] = 5. \quad (*)$$

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(a + \dfrac{3}{x} - \sqrt{4 + \dfrac{b}{x} + \dfrac{12}{x^2}}\right) = a - 2. \end{cases}$

Nếu $a - 2 < 0$ thì $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[x\left(a + \dfrac{3}{x} - \sqrt{4 + \dfrac{b}{x} + \dfrac{12}{x^2}}\right)\right] = +\infty$, không thỏa mãn $(*)$.

Nếu $a - 2 > 0$ thì $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[x\left(a + \dfrac{3}{x} - \sqrt{4 + \dfrac{b}{x} + \dfrac{12}{x^2}}\right)\right] = -\infty$, không thỏa mãn $(*)$.

Nên $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$, khi đó $(*)$ trở thành

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2x + 3 + \sqrt{4x^2 + bx + 12}\right) = 5$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{12 - b - \frac{3}{x}}{2 + \frac{3}{x} + \sqrt{4 + \frac{b}{x} + \frac{12}{x^2}}} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{12 - b}{4} = 5$$

$\Leftrightarrow b = -8$.

Vậy $2a - b = 2 \cdot 2 + 8 = 12$.

Câu 12. Chọn đáp án A

Ta có hàm cầu là hàm bậc nhất có dạng $p = ax + b$.
Khi đó nếu $x = 400$ thì $p = 350$ và $x = 600$ thì $p = 325$.
Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 400a + b = 350 \\ 600a + b = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{8} \\ b = 400 \end{cases} \Rightarrow p = -\dfrac{1}{8}x + 400.$
Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm cung và đồ thị hàm cầu, khi đó $M(800; 300)$.
Khi đó thặng dư tiêu dùng là $C_s = \dfrac{1}{2} \cdot (400 - 300) \cdot 800 = 40000$ nghìn đồng $= 40$ triệu.

Câu 13. Chọn đáp án C
Ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[5,5; 5,7)$	5,6	3
$[5,7; 5,9)$	5,8	4
$[5,9; 6,1)$	6,0	6
$[6,1; 6,3)$	6,2	5
$[6,3; 6,5)$	6,4	5
$[6,5; 6,7)$	6,6	2

Ta có $\overline{x} = \dfrac{3 \cdot 5{,}6 + 4 \cdot 5{,}8 + 6 \cdot 6{,}0 + 5 \cdot 6{,}2 + 5 \cdot 6{,}4 + 2 \cdot 6{,}6}{25} = \dfrac{761}{125} = 6{,}088.$
$s^2 = \dfrac{3(6{,}088 - 5{,}6)^2 + 4(6{,}088 - 5{,}8)^2 + 6(6{,}088 - 6)^2 + 5(6{,}088 - 6{,}2)^2 + 5(6{,}088 - 6{,}4)^2 + 2(6{,}088 - 6{,}6)^2}{25}$
$0{,}0867.$

Câu 14. Chọn đáp án C
Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ I \in (ABC). \end{cases}$
Ta có
$IA^2 = IB^2$
$\Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 + (c+2)^2 = (a+2)^2 + (b-1)^2 + (c-2)^2$
$\Leftrightarrow a - 2c = -1 \quad (1).$
Tương tự,
$IA^2 = IC^2$
$\Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 + (c+2)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2 + (c-4)^2$
$\Leftrightarrow a + b + 3c = 6 \quad (2).$
Lại có $\overrightarrow{AB} = (-2; 0; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (2; 2; 6)$, $\overrightarrow{AI} = (a; b-1; c+2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-8; 20; -4).$
Ta có
$I \in (ABC)$
$\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{AI} = 0$
$\Leftrightarrow -8a + 20b - 4c - 28 = 0$
$\Leftrightarrow -2a + 5b - c = 7 \quad (3).$
Từ (1), (2) và (3), ta có hệ phương trình $\begin{cases} a - 2c = -1 \\ a + b + 3c = 6 \\ -2a + 5b - c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow I(1; 2; 1).$
Tập hợp các điểm cách đều ba điểm đã cho là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC qua I và nhận véc-tơ $\vec{u} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-8; 20; -4) = -4(2; -5; 1)$ là véc-tơ chỉ phương nên có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 - 5t \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

Câu 15. Chọn đáp án **B**

Vì bốn lực $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$, $\overrightarrow{F}_3$, $\overrightarrow{F}_4$ cùng tác động vào một chất điểm S làm cho chất điểm đứng yên nên ta có:

$\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3 + \overrightarrow{F}_4 = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{F}_4 = -(\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3) \Rightarrow |\overrightarrow{F}_4| = |\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3|$.

Suy ra

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{F}_4| &= \sqrt{|\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3|^2} \\ &= \sqrt{|\overrightarrow{F}_1|^2 + |\overrightarrow{F}_2|^2 + |\overrightarrow{F}_3|^2 + 2(\overrightarrow{F}_1 \cdot \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_2 \cdot \overrightarrow{F}_3 + \overrightarrow{F}_1 \cdot \overrightarrow{F}_3)} \\ &= \sqrt{(|\overrightarrow{F}_1|^2 + |\overrightarrow{F}_2|^2 + |\overrightarrow{F}_3|^2) + 6|\overrightarrow{F}_1|^2 \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{6 \cdot (30\sqrt{6})^2} = 180 \text{ N}. \end{aligned}$$

Câu 16. Chọn đáp án **D**

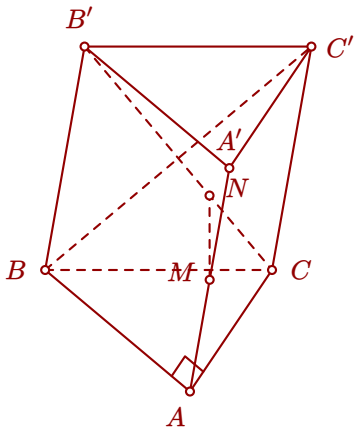
Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau, mặt phẳng (α) song song và cách đều hai mặt phẳng (P), (Q) có phương trình dạng $x - y + 2z + d = 0$ ($d \neq 3$ và $d \neq -6$).

Chọn $M(-d; 0; 0) \in (\alpha)$, khi đó ta có

$$\mathrm{d}(M, (P)) = \mathrm{d}(M, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|-d+3|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|d+6|}{\sqrt{1+1+4}} \Leftrightarrow d = -\frac{3}{2}.$$

Vậy $(\alpha)\colon x - y + 2z - \dfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + 4z - 3 = 0$.

Câu 17. Chọn đáp án **C**



Đặt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{c}$, khi đó $|\overrightarrow{a}| = \left|\overrightarrow{b}\right| = 3$, $|\overrightarrow{c}| = 6$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 9$.

Vì N là trọng tâm tam giác BCC' nên ta có:

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MB} \\ &= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'C'}\right) + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{c}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 36MN^2 = \left(2\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}\right)^2$$
$$= 4\vec{a}^2 + 16\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 16\vec{a}\cdot\vec{b} - 4\vec{a}\cdot\vec{c} - 8\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$= 108$$
$$\Rightarrow MN = \sqrt{3}.$$

Câu 18. Chọn đáp án C

Đặt $I = \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
Khi đó ta có $I = F(4) - F(1) = G(4) - G(1)$.
Từ giả thiết $F(4) + 4G(1) = 4G(4) + F(1) + 2025$ ta có
$[F(4) - F(1)] - 4[G(4) - G(1)] = 2025 \Rightarrow I - 4I = 2025 \Rightarrow I = -675$.

Câu 19. Chọn đáp án B

Gọi số kẹo được thưởng của ba bạn Bình, Khá và Giỏi lần lượt là a, b, c.
Số kẹo được thưởng của Bình, Khá, Giỏi theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên ta có $b^2 = a\cdot c$.
Số kẹo được thưởng của Bình, Khá, Giỏi sau khi tặng theo thứ tự lại tạo thành một cấp số cộng nên ta có dãy $a+84$, $b+54$, $c-138$ lập thành cấp số cộng.
Khi đó:
$b + 54 = \dfrac{a + c - 54}{2} \Leftrightarrow b = \dfrac{a+c}{2} - 81$.
Thay vào $b^2 = a\cdot c$ ta được:
$$\left(\frac{a+c}{2} - 81\right)^2 = a\cdot c$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ac + \frac{c^2}{4} - 81a - 81c + 81^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 2a(c+162) + (c+162)^2 = 648c$$
$$\Leftrightarrow [a - (c+162)]^2 = 648c$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = c + 162 + 18\sqrt{2c} \\ a = c + 162 - 18\sqrt{2c}. \end{array}\right.$$
Thử các đáp án ta có:
Đáp án A: $c - 138 = 288 \Leftrightarrow c = 426$, thay lại ta được $\left[\begin{array}{l} a \approx 1113{,}40 \\ a \approx 62{,}50. \end{array}\right.$ (Loại vì $a, b, c \in \mathbb{N}$)
Đáp án B: $c - 138 = 150 \Leftrightarrow c = 288$, thay lại ta được $\left[\begin{array}{l} a = 882 \text{ (Loại)} \\ a = 18 \Rightarrow b = 72 \text{ (Thỏa mãn)}. \end{array}\right.$
Khi đó cấp số nhân là 18, 72, 288 và cấp số cộng là 102, 126, 150, thỏa mãn điều kiện đề bài.
Đáp án C: $c - 138 = 200 \Leftrightarrow c = 338$, thay lại ta được $\left[\begin{array}{l} a = 968 \text{ (Loại)} \\ a = 32 \Rightarrow b = 104 \text{ (Loại)}. \end{array}\right.$
(Loại vì cấp số nhân phải có công bội là số tự nhiên và c phải là số lớn nhất).
Đáp án D: $c - 138 = 62 \Leftrightarrow c = 200$, thay lại ta được $\left[\begin{array}{l} a = 772 \text{ (Loại)} \\ a = 2 \Rightarrow b = 20 \text{ (Loại)}. \end{array}\right.$
(Loại vì số kẹo còn lại của Giỏi sau khi cho đi không nhiều nhất).

Câu 20. Chọn đáp án C

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$y=f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y=f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$ đạt được tại điểm $x=1$.

Câu 21. Chọn đáp án B

Ta có $y=-3+\dfrac{12}{x+1}$ nhận giá trị nguyên khi $x+1\in\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12\}$.
Tức là có tất cả 12 giá trị x nguyên.
Chọn hai số x nguyên tương ứng với hai điểm phân biệt có $\mathrm{C}_{12}^2=66$ cách.

Câu 22. Chọn đáp án B

Ta có
$$\frac{S_m}{S_n}=\frac{mu_1+m(m-1)d}{nu_1+n(n-1)d}=\frac{m^2}{n^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(u_1-d)m+m^2d}{(u_1-d)n+n^2d}=\frac{m^2}{n^2}$$
$$\Rightarrow u_1=d.$$
Vậy $u_n=u_1+(n-1)d=nd$; $\dfrac{u_{24}}{u_{25}}=\dfrac{24d}{25d}=\dfrac{24}{25}$ nên $24^2-25^2=-49$.

Câu 23. Chọn đáp án B

Ta có
$$\begin{aligned}x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}&=x\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)+y\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right)+z\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}\right)\\&=(x+y+z)\overrightarrow{AM}+\left(x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}+z\overrightarrow{MD}\right)\\&=\overrightarrow{AM}.\end{aligned}$$
Nên $\begin{cases}x+y+z=1\\x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}+z\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{0}\end{cases}\Rightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$ và M là trọng tâm tam giác BCD.

Câu 24. Chọn đáp án D

Tập xác định $\mathscr{D}=[-2;+\infty)$.
Xét $f(x)=\sqrt{x+2}\cdot\left[\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x^2-x-18}-\dfrac{1}{2}\right]$.
Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=5\\x=-4\ \text{(Loại)}\end{array}\right.$ và $f(x)\geqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geqslant 5\\x=-2.\end{array}\right.$

x	-2		5		$+\infty$
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	

Kết hợp giả thiết $x \in [5;2025] \cup \{-2\}$, có 2022 số nguyên.

Câu 25. Chọn đáp án B

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{2024}{2x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \left((2x+1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{2024}{2x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + 2024\cdot\frac{1}{2}\ln(2x+1) + C \\ &= \sqrt{2x+1} + 1012\ln(2x+1) + C. \end{aligned}$$

Xét phương án C:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sqrt{2x+1} + 506\ln(2ex+e)^2 + C \\ &= \sqrt{2x+1} + 1012\ln[e(2x+1)] + C \\ &= \sqrt{2x+1} + 1012(\ln e + \ln(2x+1)) + C \\ &= \sqrt{2x+1} + 1012\ln(2x+1) + C'. \end{aligned}$$

Xét phương án D:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sqrt{2x+1} + 1012\ln(4x+2) + C \\ &= \sqrt{2x+1} + 1012\ln[2(2x+1)] + C \\ &= \sqrt{2x+1} + 1012(\ln 2 + \ln(2x+1)) + C \\ &= \sqrt{2x+1} + 1012\ln(2x+1) + C'. \end{aligned}$$

Câu 26. Chọn đáp án B

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-100;-70;10)$.

Gọi $M(a;b;c)$ là tọa độ vị trí của máy bay ở gần đài kiểm soát nhất.

Suy ra

$$\begin{aligned} & OM \perp AB \\ \Rightarrow\ & \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -100a - 70b + 10c = 0 \\ \Leftrightarrow\ & c = 10a + 7b. \end{aligned}$$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (a-222;b-220;c-10)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\overrightarrow{AB}$ nên

$$\frac{a-222}{-100} = \frac{b-220}{-70} = \frac{c-10}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-222}{-10} = \frac{b-220}{-7} = 10a+7b-10.$$

Suy ra $\begin{cases} a-222 = -10(10a+7b-10) \\ b-220 = -7(10a+7b-10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 101a+70b = 322 \\ 70a+50b = 290 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -28 \\ b = 45. \end{cases}$

Suy ra $c = 10\cdot(-28) + 7\cdot 45 = 35$.

Vậy $a+b-c = -28+45-35 = -18$.

Câu 27. Chọn đáp án D

Đặt $u = 3-x$ ta có

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
u	$+\infty$		3		-1		$-\infty$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	

Do đó
Ta có
$y = f\left(\left|x^2+4x-m\right|\right) = f\left(\left|u^2-10u+21-m\right|\right).$
$y' = \dfrac{(2u-10)\left(u^2-10u+21-m\right)}{\left|u^2-10u+21-m\right|} f'\left(\left|u^2-10u+21-m\right|\right).$
Hàm số $y = f\left(\left|x^2+4x-m\right|\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ khi và chỉ khi hàm số $y = f\left(\left|u^2-10u+21-m\right|\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$
$\Leftrightarrow y'(u) \geqslant 0, \forall u \in (-1;3)$
$\Leftrightarrow \left(u^2-10u+21-m\right) f'\left(\left|u^2-10u+21-m\right|\right) \geqslant 0, \forall u \in (-1;3)$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u^2-10u+21-m \geqslant 0, \forall u \in (-1;3) \\ f'\left(\left|u^2-10u+21-m\right|\right) \geqslant 0, \forall u \in (-1;3) \end{cases} \\ \begin{cases} u^2-10u+21-m \leqslant 0, \forall u \in (-1;3) \\ f'\left(\left|u^2-10u+21-m\right|\right) \leqslant 0, \forall u \in (-1;3) \end{cases} \end{array}\right. (*).$$
Ta có $f'\left(\left|u^2-10u+21-m\right|\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|u^2-10u+21-m\right| \geqslant 3 \\ \left|u^2-10u+21-m\right| \leqslant -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|u^2-10u+21-m\right| \geqslant 3.$
Xét hàm số $g(u) = u^2-10u+21$ trên khoảng $(-1;3)$.
$g'(u) = 2u-10$, $g'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 5$.
Bảng biến thiên

u	-1		3		5
$g'(u)$			$-$		0
$g(u)$	32	$\searrow$		$\searrow$	-4
				0	

Vậy hệ

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \leqslant 0 \\ |u^2-10u+21-m| \geqslant 3,\ \forall u \in (-1;3) \end{cases} \\ \begin{cases} m \geqslant 32 \\ |u^2-10u+21-m| \leqslant 3,\ \forall u \in (-1;3) \end{cases} \end{array}\right.$$

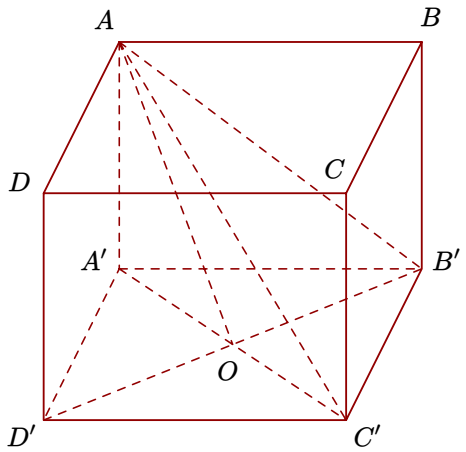
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} u^2-10u+21-m \geqslant 3,\ \forall u \in (-1;3) \\ u^2-10u+21-m \leqslant -3,\ \forall u \in (-1;3) \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} m \geqslant 32 \\ -1 \leqslant u^2-10u+21-m \leqslant 3,\ \forall u \in (-1;3) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} m+3 \leqslant 0 \\ m-3 \geqslant 32 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} m \geqslant 32 \\ m-1 \leqslant 0 \\ m+3 \geqslant 32 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leqslant -3 \\ \text{vô nghiệm.} \end{array}\right.$$

Do $m \in (-2025;2025)$ nên
$m \in \{-2024;-2023;-2022;\ldots;-3\}$.
Vậy có tất cả 2022 giá trị tham số m.

Câu 28. Chọn đáp án A



Gọi $O = A'C' \cap D'B'$, ta có $B'O \perp (ACC')$ nên góc giữa AB' với mặt phẳng (ACC') là góc $\widehat{B'AO}$.
Giả sử hình lập phương có cạnh a, xét tam giác vuông $OB'A$ có $OB' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AB' = a\sqrt{2} \Rightarrow \sin\widehat{OAB'} = \dfrac{OB'}{AB'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OAB'} = 30^\circ$.

Câu 29. Chọn đáp án C
Phương trình $f'(x) = 0$ có các nghiệm là $x = -1; x = 1$ và $x = 3$, ta có bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;3)$.

Câu 30. Chọn đáp án C

Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình tương đương $\mathrm{e}^x + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \leqslant -mx^2+m^2x+1$.

Xét hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ có $f'(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nên hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ và đồ thị đi qua điểm $(0;1)$.

Xét hàm số $g(x) = -mx^2+m^2x+1$.

- Nếu $m=0$ thì $g(x)=1$, khi đó bất phương trình có nhiều hơn một nghiệm.
- Nếu $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số $g(x)$ là một parabol (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = \dfrac{m}{2}$ và đỉnh $I\left(\dfrac{m}{2}; \dfrac{m^3}{4}+1\right)$.

+ Nếu $m<0$ thì (P) quay bề lõm lên trên nên bất phương trình đã cho có nhiều hơn một nghiệm.

+ Nếu $m>0$ thì (P) quay bề lõm xuống dưới và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ nên bất phương trình đã cho luôn có nhiều hơn một nghiệm.

Vậy không tồn tại giá trị nào của tham số m để bất phương trình đã cho có một nghiệm.

Câu 31. Chọn đáp án: a b c d

a) Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2025\mathrm{e}^{-2025x} - 2025\mathrm{e}^{2025x} - 2025\frac{45+2025\dfrac{x}{\sqrt{2025x^2+1}}}{45x+\sqrt{2025x^2+1}} \\ &= -2025\mathrm{e}^{-2025x} - 2025\mathrm{e}^{2025x} - \frac{2025\cdot 45}{45x+\sqrt{2025x^2+1}} < 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} f(-x) &= \mathrm{e}^{2025x} - \mathrm{e}^{-2025x} - 2025\ln\left(-45x+\sqrt{2025x^2+1}\right) \\ &= \mathrm{e}^{2025x} - \mathrm{e}^{-2025x} - 2025\ln\frac{1}{45x+\sqrt{2025x^2+1}} \\ &= -\left[\mathrm{e}^{-2025x} - \mathrm{e}^{2025x} - 2025\ln\left(45x+\sqrt{2025x^2+1}\right)\right] \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Vậy $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Theo câu a) và câu b) ta có

$f(x+2025) + f(m-\mathrm{e}^x) = 0$

$\Leftrightarrow f(x+2025) = -f(m-\mathrm{e}^x)$

$\Leftrightarrow f(x+2025) = f(\mathrm{e}^x - m)$

$\Leftrightarrow x+2025 = \mathrm{e}^x - m$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x - x - 2025 = m \quad (*)$.

Xét hàm số $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 2025$ trên khoảng $(-\infty;3)$.

Ta có $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $(*)$ có đúng 2 nghiệm nhỏ hơn 3 khi $g(0) < m < \mathrm{e}^3 - 2028 \Leftrightarrow -2024 < m < \mathrm{e}^3 - 2028$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2023; -2022; \ldots; -2007\}$.

Vậy có 17 giá trị nguyên của tham số m.

d) Vì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương

$f(\log(2x-3)) \geqslant f(\log(x+4))$

$\Leftrightarrow \log(2x-3) \leqslant \log(x+4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3>0 \\ 2x-3 \leqslant x+4 \end{cases}$

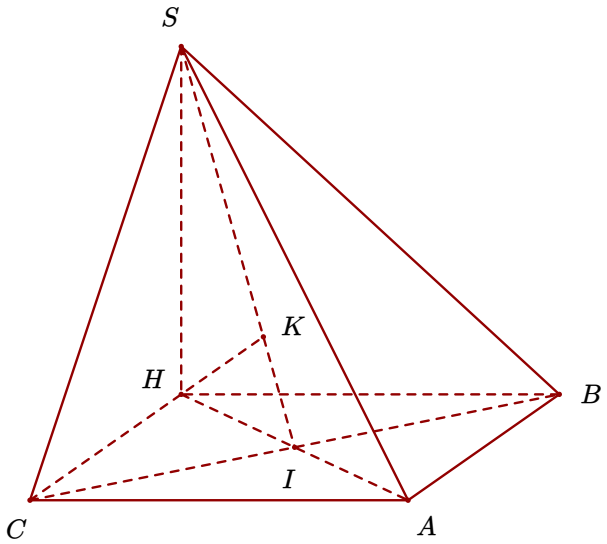
$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x \leqslant 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} < x \leqslant 7.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left(\dfrac{3}{2}; 7\right]$.

Câu 32. Chọn đáp án: a b c d

a)



Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (ABC).

Ta có $\begin{cases} AB \perp SB \text{ (giả thiết)} \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp HB$ (1).

Chứng minh tương tự $AC \perp HC$ (2).

Giả thiết lại có tam giác ABC vuông cân tại A (3).

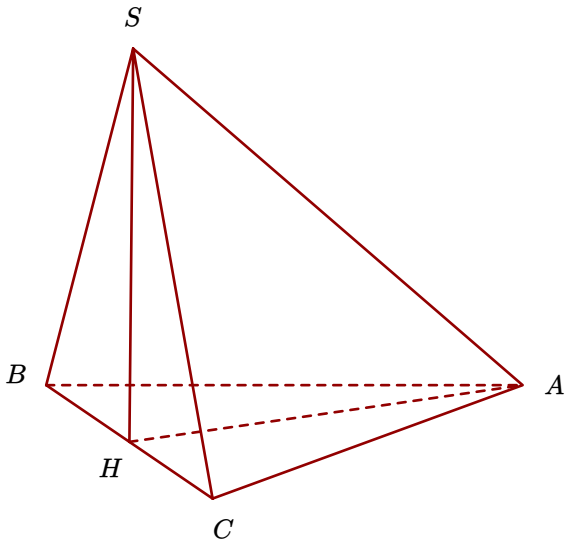
Từ (1), (2), (3) suy ra tứ giác $ABHC$ là hình vuông cạnh a.

Gọi I là tâm hình vuông $ABHC$, K là hình chiếu của H trên SI.

$HI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $HS = \sqrt{SA^2 - HA^2} = 2a$.

$\mathrm{d}(A,(SBC)) = \mathrm{d}(H,(SBC)) = HK = \dfrac{HS \cdot HI}{\sqrt{HS^2 + HI^2}} = \dfrac{2a}{3}$.

b)

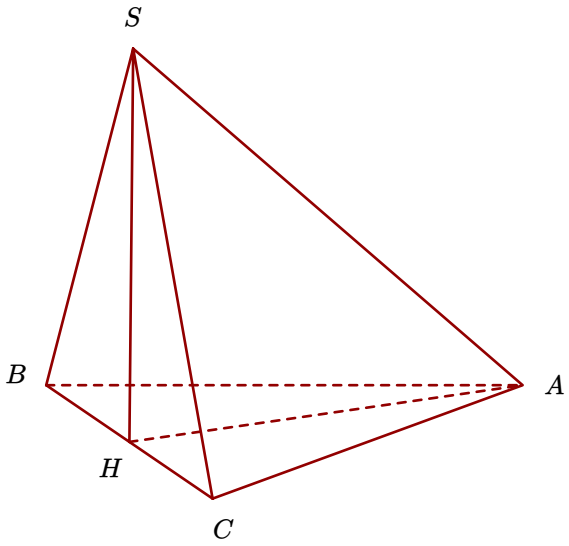


Gọi H là trung điểm của cạnh BC.

Các tam giác SBC và tam giác ABC là các tam giác đều nên $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHA)$, suy ra góc phẳng nhị diện $[S, BC, A] = \widehat{SHA}$.

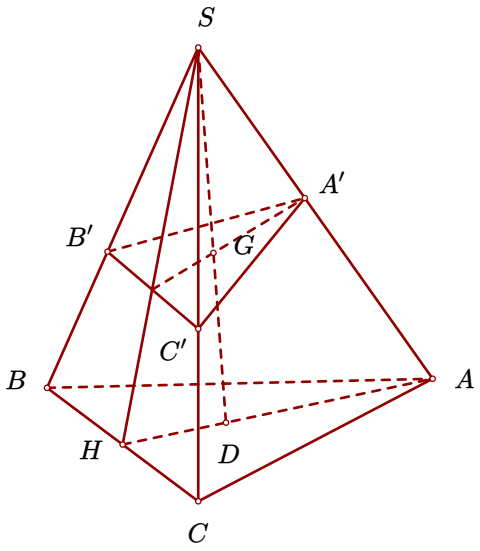
Ta có $SH = AH = SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \triangle SHA$ đều $\Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SHA} = 60°$.

c)



Gọi H là trung điểm của cạnh $BC \Rightarrow SH \perp BC$, mà $BC = (SBC) \cap (ABC)$; $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot a^2\sqrt{3} = a^3$.

d)



Gọi D là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{SG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{SD}$.

Đặt $\dfrac{SA}{SA'} = x$, $\dfrac{SB}{SB'} = y$, $\dfrac{SC}{SC'} = z$.

Ta có $\overrightarrow{SD} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right) \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}\overrightarrow{SG} = \dfrac{1}{3}\left(x\overrightarrow{SA'} + y\overrightarrow{SB'} + z\overrightarrow{SC'}\right)$, mà 4 điểm G, A', B', C' đồng phẳng nên $x + y + z = 4$.

$$\frac{V'}{V} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{xyz} \geqslant \frac{27}{(x+y+z)^3} = \frac{27}{64}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V'}{V}\right)_{\min} = \frac{27}{64} \text{ khi } x = y = z = \frac{4}{3}.$$

Lại có

$x + y + z = 4$ và $x, y, z \geqslant 1$

$\Rightarrow 1 \leqslant x, y, z \leqslant 2$

$\Rightarrow (y-1)(z-1) \geqslant 0$

$\Rightarrow yz - (y+z) + 1 \geqslant 0$

$\Rightarrow yz \geqslant 3 - x$

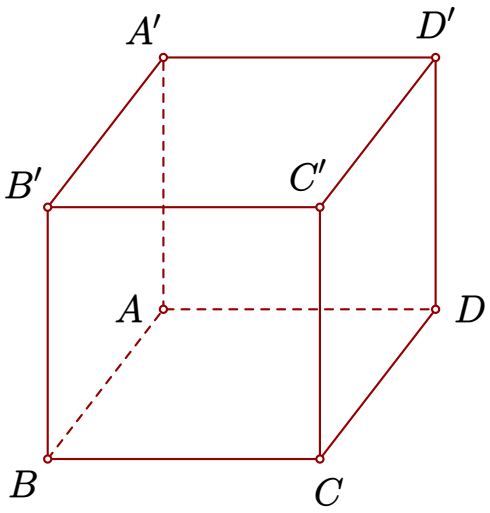
$$\Rightarrow \frac{V'}{V} \leqslant \frac{1}{x(3-x)} = \frac{1}{3x - x^2} = \frac{1}{f(x)}.$$

x	1		1,5		2
$f(x)$	2	↗	$\frac{9}{4}$	↘	2

$$\Rightarrow \left(\frac{V'}{V}\right)_{\max} = \frac{1}{\min\limits_{[1;2]} f(x)} = \frac{1}{2}.$$

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V'}{V}$ bằng $\dfrac{27}{64} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{59}{64} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow a + b = 123$.

Câu 33. Chọn đáp án: a b c d



a) G là trọng tâm tam giác $CB'D'$ nên
$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$
$= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AA'}.$
b) I là trung điểm của đoạn $BB' \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'}\right) = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}\right).$
Suy ra $6\overrightarrow{IG} = 6\left(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AI}\right) = 6\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AA'}\right) = -2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}.$
c) Ta có $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}.$
Suy ra
$2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC'} = -2AB^2 + 2AD^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'}$
$= -2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos 60^\circ = 81.$
d) Ta có $\left|\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GD}\right| = \left|\overrightarrow{DB}\right| = BD = \sqrt{3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ} = 3\sqrt{3}.$

Câu 34. Chọn đáp án: a b c d
a) Ta có tâm E của mặt cầu đường kính AB là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Rightarrow E(-1;1;2)$.
b) Gọi I là hình chiếu của A trên $(P) \Rightarrow AI \perp (P)$.
Khi đó phương trình đường thẳng AI là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + t. \end{cases}$
Vì $I \in (P)$ nên ta có $1 + t + t - 2 + 2 + t - 4 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow I(2;1;3)$.
Gọi M là điểm đối xứng của A qua $(P) \Rightarrow M(3;0;4)$.
Gọi A' là điểm đối xứng của A qua $(Oxy) \Rightarrow A'(1;2;-2)$.
Chu vi tam giác ADE bằng $AD + DE + AE = MD + DE + EA' \geqslant MA'$.
Chu vi tam giác ADE nhỏ nhất bằng $MA' = 2\sqrt{11}$.
c) Ta có Δ_1 cắt Δ_2.
Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ_1 và Δ_2.
Mặt phẳng (Q) đi qua $M(1;0;-2)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0;-5;-5)$.
Nên phương trình mặt phẳng (Q) là $y + z + 2 = 0$.
Gọi $A = \Delta_3 \cap (Q) \Rightarrow A(-2;-1;-1)$.
Gọi $B = \Delta_4 \cap (Q) \Rightarrow B(1;1;-3)$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;2;-2)$ không cùng phương với $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, mà AB, Δ_1, Δ_2 đồng phẳng nên AB cắt Δ_1, Δ_2.

Suy ra AB là đường thẳng cắt 4 đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4.
Đường thẳng này có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (3;2;-2)$.
d) Gọi $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$, $P(0;0;p)$.
Ta có phương trình mặt phẳng (α) là $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{p}=1$.
Vì A là trọng tâm tam giác $MNP \Rightarrow m=3$, $n=6$, $p=6$.
Khi đó phương trình mặt phẳng (α) là $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 2x+y+z-6=0$.

Câu 35. Chọn đáp án: a b c d
a) Mốt của mẫu số liệu là:
$M_0 = 8 + \dfrac{25-10}{(25-10)+(25-12)} \cdot 1 \approx 8{,}54.$
b) Ta có:
$$Q_1 = 7 + \frac{\frac{51}{4} - (1+3)}{10} \cdot (8-7) = 7{,}875$$
$$Q_3 = 8 + \frac{\frac{3\cdot 51}{4} - (1+3+10)}{25} \cdot (9-8) = 8{,}97$$
$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 8{,}97 - 7{,}875 = 1{,}095.$
c) Giá trị trung bình của mẫu số liệu là:
$\overline{x} = \dfrac{1}{51}(1\cdot 5{,}5 + 3\cdot 6{,}5 + 10\cdot 7{,}5 + 25\cdot 8{,}5 + 12\cdot 9{,}5) \approx 8{,}36.$
Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là:
$s^2 = \dfrac{1\cdot(5{,}5-8{,}36)^2 + 3\cdot(6{,}5-8{,}36)^2 + 10\cdot(7{,}5-8{,}36)^2 + 25\cdot(8{,}5-8{,}36)^2 + 12\cdot(9{,}5-8{,}36)^2}{51} \approx 0{,}824.$
Suy ra độ lệch chuẩn $s \approx 0{,}91$.
d) Ta có:
$Q_1 - 1{,}5\cdot\Delta_Q = 7{,}875 - 1{,}5\cdot 1{,}095 = 6{,}2325$
$Q_3 + 1{,}5\cdot\Delta_Q = 8{,}97 + 1{,}5\cdot 1{,}095 = 10{,}6125.$

Câu 36. Chọn đáp án: a b c d
a) Ta có
$$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{10}^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{12} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 24 - (-4) = 28.$$
b) Ta có $V = \displaystyle\int_{-3}^{3} \left(2\sqrt{3^2-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = 144$ (đvtt).
c) Đặt $u(x) = f(x) + xf'(x)$.
Ta có:

$$\int_0^1 [f(x)+xf'(x)]^2\,\mathrm{d}x+45=30\int_0^1 \left[x^2f(x)+x^3f'(x)\right]\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 u^2(x)\,\mathrm{d}x+45=30\int_0^1 x^2u(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 u^2(x)\,\mathrm{d}x-2\cdot 15\int_0^1 x^2u(x)\,\mathrm{d}x+45=0$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[u^2(x)-2\cdot 15x^2u(x)\right]\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \left(15x^2\right)^2\,\mathrm{d}x=0$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[u^2(x)-2\cdot 15x^2u(x)+\left(15x^2\right)^2\right]\,\mathrm{d}x=0$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[u(x)-15x^2\right]^2\,\mathrm{d}x=0$$
$$\Rightarrow u(x)=15x^2$$
$$\Rightarrow f(x)+xf'(x)=15x^2$$
$$\Leftrightarrow [xf(x)]'=15x^2$$
$$\Leftrightarrow xf(x)=5x^3+C.$$

Theo đề $f(1)=5$ nên $C=0$.

Do đó $f(x)=5x^2\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 5x^2\,\mathrm{d}x=\frac{5}{3}$.

d) Ta có $F(x)=x\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{e^x}$ nên:

$$F'(x)=\frac{f(x)}{e^x}\Leftrightarrow (x\ln x)'=\frac{f(x)}{e^x}$$
$$\Leftrightarrow \ln x+1=\frac{f(x)}{e^x}$$
$$\Leftrightarrow f(x)=(\ln x+1)e^x.$$

Câu 37. Chọn đáp án: a b c d

a) Gọi 3 số tạo thành một cấp số nhân có công bội $q=5$ là u_1; $5u_1$; $25u_1$. Ta có

$$\begin{cases}u_1\geqslant 1\\ 25u_1\leqslant 2025\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\geqslant 1\\ u_1\leqslant 81\end{cases}.$$

Với $u_1=1$ ta có cấp số nhân 1; 5; 25.
Với $u_1=2$ ta có cấp số nhân 2; 10; 50.
Với $u_1=3$ ta có cấp số nhân 3; 15; 75.
...
Với $u_1=81$ ta có cấp số nhân 81; 405; 2025.
Vậy số cách chọn được 3 số tạo thành một cấp số nhân có công bội $q=5$ là 81.
b) Có 675 số chia hết cho 3 từ 2025 số nguyên dương đầu tiên là $\{3;6;9;\ldots;2025\}$.
Do đó số cách chọn được 3 số chia hết cho 3 là C_{675}^3.
c) Từ 1 đến 2025 có 1013 số lẻ và 1012 số chẵn.
Số cách chọn được 3 số lẻ trong 1013 số lẻ là C_{1013}^3.
d) Giả sử ba số được chọn lần lượt là a, b, c. Ba số này theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Khi đó $a+c=2b$. Ta có $2b$ là số chẵn, suy ra a, c cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Số cách chọn a, c là $\mathrm{C}_{1013}^2+\mathrm{C}_{1012}^2$.
Ta có số cách chọn được 3 số a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số cộng là $\mathrm{C}_{1013}^2+\mathrm{C}_{1012}^2$.
Gọi A là biến cố chọn được 3 số tạo thành một cấp số cộng, suy ra $\mathrm{P}(A)=\dfrac{\mathrm{C}_{1013}^2+\mathrm{C}_{1012}^2}{\mathrm{C}_{2025}^3}$.
Xác suất chọn được 3 số không tạo thành một cấp số cộng là
$\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A)=1-\dfrac{\mathrm{C}_{1013}^2+\mathrm{C}_{1012}^2}{\mathrm{C}_{2025}^3}\approx 0{,}9992588931.$

Câu 38. Chọn đáp án: a b c d
a) Ta có đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$ nên $-d=1\Leftrightarrow d=-1$.
Suy ra $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{ax^2-2ax-b-c}{(x-1)^2}$.
Vì $\begin{cases}f'(-1)=0\\f'(3)=0\\f'(0)=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a-b-c=0\\b+c=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b+c=3.\end{cases}$
Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3.\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Mặt khác $\min\limits_{(-d;+\infty)}f(x)=1\Rightarrow\min\limits_{(1;+\infty)}f(x)=1\Rightarrow f(3)=1\Rightarrow 9a+3b+c=2\Rightarrow 3b+c=-7$.
Suy ra $b=-5$, $c=8$.
Do đó hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-5x+8}{x-1}=x-4+\dfrac{4}{x-1}$.
Vậy đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường thẳng có phương trình $y=x-4$.
b)

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3.\end{array}\right.$
Do đó điểm cực đại của hàm số đã cho là $x=-1$ và điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x=3$.
c) Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ là sai.
d) Ta có $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.
Gọi tiếp điểm là điểm $M\left(m;\dfrac{m^2-5m+8}{m-1}\right)$ $(m\neq 1)$.
Phương trình tiếp tuyến (d) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm M là $y=\dfrac{m^2-2m-3}{(m-1)^2}(x-m)+\dfrac{m^2-5m+8}{m-1}$.
(d) cắt tiệm cận đứng $x=1$ tại điểm $A\left(1;\dfrac{11-3m}{m-1}\right)$.
(d) cắt tiệm cận xiên $y=x-4$ tại điểm $B(2m-1;2m-5)$.
Giao điểm của hai tiệm cận là $C(1;-3)$.

Tam giác ABC có chu vi là

$$\begin{aligned}AB+BC+CA&=2\sqrt{(m-1)^2+\left(\frac{m^2-2m-3}{m-1}\right)^2}+2\sqrt{2}\sqrt{(m-1)^2}+\frac{8}{\sqrt{(m-1)^2}}\\&=2\sqrt{(m-1)^2+\left(m-1-\frac{4}{m-1}\right)^2}+2\sqrt{2}|m-1|+\frac{8}{|m-1|}\\&=2\sqrt{2(m-1)^2+\frac{16}{(m-1)^2}-8}+2\sqrt{2}|m-1|+\frac{8}{|m-1|}.\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có $2(m-1)^2+\dfrac{16}{(m-1)^2}\geqslant 2\sqrt{32}=8\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $2(m-1)^2=\dfrac{16}{(m-1)^2}\Leftrightarrow (m-1)^4=8\Leftrightarrow (m-1)^2=2\sqrt{2}$.

Và $2\sqrt{2}|m-1|+\dfrac{8}{|m-1|}\geqslant 2\sqrt{16\sqrt{2}}=8\sqrt[4]{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $2\sqrt{2}|m-1|=\dfrac{8}{|m-1|}\Leftrightarrow (m-1)^2=2\sqrt{2}$.

Do đó $AB+BC+CA\geqslant 2\sqrt{8\sqrt{2}-8}+8\sqrt[4]{2}=4\sqrt{2\sqrt{2}-2}+8\sqrt[4]{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $(m-1)^2=2\sqrt{2}$.

Vậy tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai đường tiệm cận của nó một tam giác có chu vi nhỏ nhất bằng $8\sqrt[4]{2}+4\sqrt{2\sqrt{2}-2}$.

Câu 39. Đáp án: 0,5.

Gọi I_A, I_B lần lượt là cường độ của nguồn sáng A, B.

Ta có $I_A=8I_B$.

Gọi x là khoảng cách từ M đến A và $12-x$ là khoảng cách từ M đến B.

Độ sáng tại M do nguồn A tạo ra là $\dfrac{I_A}{x^2}$.

Độ sáng tại M do nguồn B tạo ra là $\dfrac{I_B}{(12-x)^2}$.

Độ sáng tổng cộng của vật thể M là $\dfrac{I_A}{x^2}+\dfrac{I_B}{(12-x)^2}=\dfrac{8I_B}{x^2}+\dfrac{I_B}{(12-x)^2}=I_B\left(\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{1}{(12-x)^2}\right)$.

Đặt $f(x)=\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{1}{(12-x)^2}$ với $0<x<12$.

Để độ sáng tại M là nhỏ nhất, ta cần tìm giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0;12)$.

Ta có $f'(x)=-\dfrac{16}{x^3}+\dfrac{2}{(12-x)^3}$.

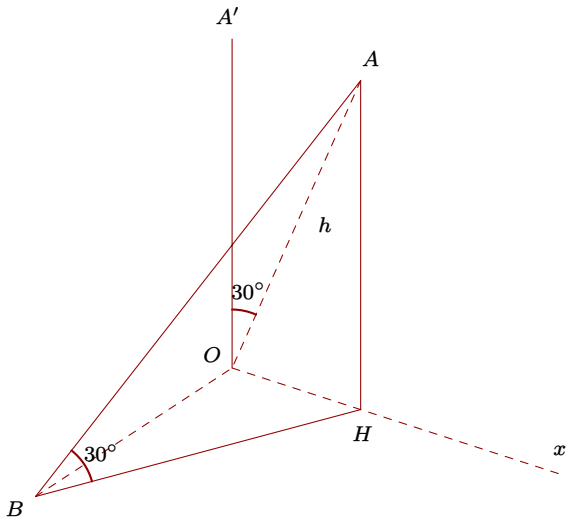
$$\begin{aligned}f'(x)=0&\Leftrightarrow -\frac{16}{x^3}+\frac{2}{(12-x)^3}=0\\&\Leftrightarrow \frac{2}{(12-x)^3}=\frac{16}{x^3}\\&\Leftrightarrow 8(12-x)^3=x^3\\&\Leftrightarrow x=2(12-x)\\&\Leftrightarrow x=8.\end{aligned}$$

Bảng biến thiên:

x	0		8		12
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$0{,}1875$	↗	

Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên khoảng $(0;12)$ là $0{,}1875$ khi $x=8$.
Tỉ số khoảng cách từ M đến hai nguồn sáng bằng $\dfrac{12-x}{x}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

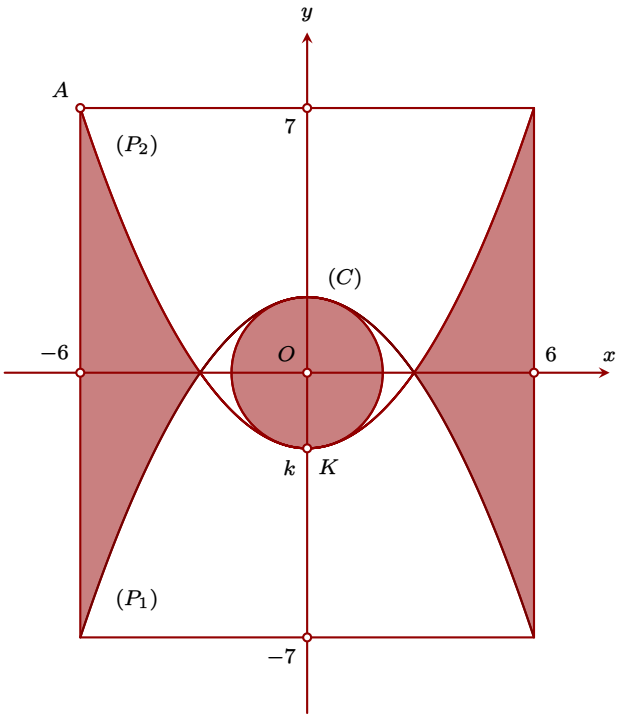
Câu 40. Đáp án: 11,4.



Gọi OA' là cột điện khi chưa bị nghiêng, OA là cột điện sau khi bị nghiêng về hướng Nam $30°$, B là bóng của A trên mặt đất.
Khi đó, $(OAA')\perp(OBx)$ theo giao tuyến Ox.
Hạ $AH\perp Ox\Rightarrow AH\perp(BOx)$.
Suy ra BH là hình chiếu của BA trên $(BOx)\Rightarrow\widehat{ABH}=30°$.
Xét tam giác AOH vuông tại H, ta có $OH=OA\cdot\cos 60°=\dfrac{h}{2}$; $AH=OA\cdot\sin 60°=\dfrac{h\sqrt{3}}{2}$.
Mặt khác, $(ABH)\perp(OAH)$ theo giao tuyến AH;
Mà $BH\perp AH\Rightarrow BH\perp(OAH)\Rightarrow BH\perp Ox$.
Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có $BH=AH\cdot\cot 30°=\dfrac{h\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\dfrac{3h}{2}$.
Xét tam giác BOH vuông tại H, ta có

$$BO^2=OH^2+BH^2\Leftrightarrow 18^2=\frac{h^2}{4}+\frac{9h^2}{4}$$
$$\Rightarrow h=\frac{2\cdot 18}{\sqrt{10}}\approx 11{,}4\text{ m}.$$

Câu 41. Đáp án: 63,6.
Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Gọi $\pm x_0$ là hoành độ giao điểm của hai parabol với Ox $(0 < x_0 < 8)$.
Ta có phương trình của (P_1) là $y = a(x^2 - x_0^2)$, đồng thời (P_1) đi qua điểm có tọa độ $(8; 14)$ nên $14 = a(64 - x_0^2) \Rightarrow a = \dfrac{14}{64 - x_0^2}$.
Vậy $(P_1)\colon y = \dfrac{14}{64 - x_0^2}(x^2 - x_0^2) = f(x)$.

Ta có (P_1) cắt Oy tại điểm có tung độ là $y = \dfrac{-14x_0^2}{64 - x_0^2}$, suy ra bán kính của đường tròn là $r = \dfrac{14x_0^2}{64 - x_0^2}$.

Khi đó, phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{14x_0^2}{64 - x_0^2}\right)^2$.

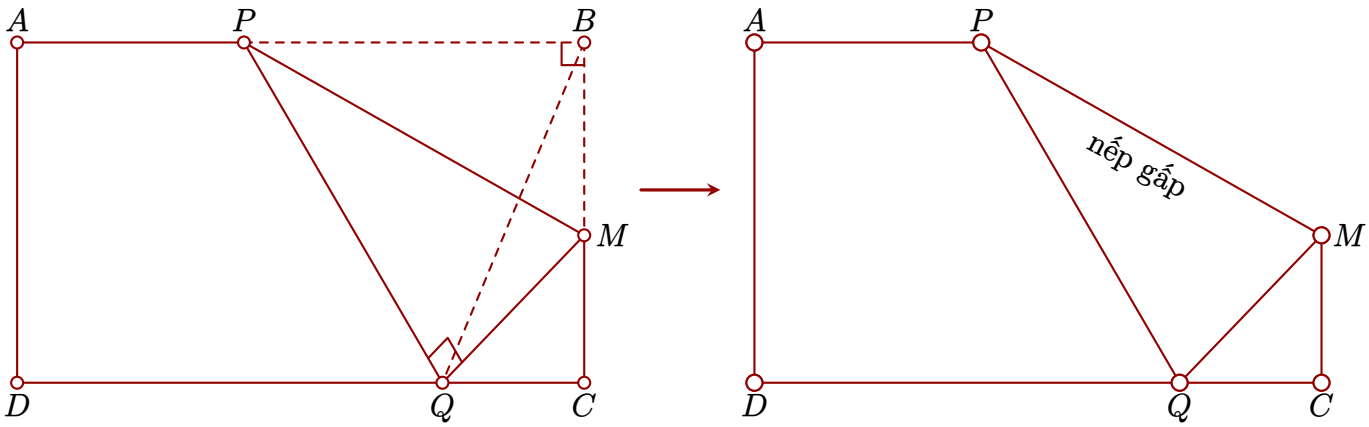
Hàm số có đồ thị là nửa đường tròn nằm dưới trục hoành có phương trình là $y = -\sqrt{\left(\dfrac{14x_0^2}{64 - x_0^2}\right)^2 - x^2} = g(x)$.
Do (C) là đường tròn có duy nhất một điểm chung với các parabol tại các đỉnh của parabol đó nên hệ

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{14}{64 - x_0^2}(x^2 - x_0^2) = -\sqrt{\left(\dfrac{14x_0^2}{64 - x_0^2}\right)^2 - x^2} \quad (1) \\ \dfrac{28x}{64 - x_0^2} = \dfrac{x}{\sqrt{\left(\dfrac{14x_0^2}{64 - x_0^2}\right)^2 - x^2}} \quad (2) \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.
Từ $(2) \Rightarrow \sqrt{\left(\dfrac{14x_0^2}{64 - x_0^2}\right)^2 - x^2} = \dfrac{64 - x_0^2}{28}$, thế vào (1) ta được
$\dfrac{14}{64 - x_0^2}(x^2 - x_0^2) = -\dfrac{64 - x_0^2}{28} \Leftrightarrow x^2 = \left(\dfrac{14x_0^2}{64 - x_0^2} - \dfrac{64 - x_0^2}{28}\right) \cdot \dfrac{64 - x_0^2}{14}$.
Để hệ có nghiệm duy nhất thì phương trình $x^2 = \left(\dfrac{14x_0^2}{64 - x_0^2} - \dfrac{64 - x_0^2}{28}\right) \cdot \dfrac{64 - x_0^2}{14}$ có nghiệm duy

nhất.
Suy ra
$\left(\dfrac{14x_0^2}{64-x_0^2}-\dfrac{64-x_0^2}{28}\right)\cdot\dfrac{64-x_0^2}{14}\leqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{14x_0^2}{64-x_0^2}-\dfrac{64-x_0^2}{28}\leqslant 0$
$\Leftrightarrow -x_0^4+520x_0^2-4096\leqslant 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0^2\leqslant 8 \\ x_0^2\geqslant 512 \text{ (loại)}\end{array}\right.$
$\Rightarrow x_0\leqslant\sqrt{8}\Rightarrow x_0\in(0;\sqrt{8}]$.
Diện tích của hình tròn lớn nhất khi bán kính lớn nhất.
Xét hàm số $f(x)=\dfrac{14x^2}{64-x^2}$ với $0<x\leqslant\sqrt{8}$.
Ta có $f'(x)=\dfrac{1792x}{(64-x^2)^2}>0,\ \forall x\in(0;\sqrt{8}]$, suy ra $\max\limits_{(0;\sqrt{8}]}f(x)=f(\sqrt{8})$.
Tức là hình tròn lớn nhất khi bán kính lớn nhất khi $x_0=\sqrt{8}$.
Khi đó bán kính của hình tròn là $r=\dfrac{14x_0^2}{64-x_0^2}=2$.
Suy ra diện tích hình tròn là $S=\pi r^2=4\pi$.
Khi đó $(P_1)\colon y=\dfrac{1}{4}x^2-2$.
Diện tích phần lát gạch là
$S_G=4\displaystyle\int_{\sqrt{8}}^{8}\left(\frac{1}{4}x^2-2\right)\mathrm{d}x+4\pi=\frac{32(\sqrt{2}+10)}{3}+4\pi\approx 134{,}318\ \mathrm{m}^2$.
Diện tích phần trồng cỏ là
$S_C=28\cdot 16-S_G=448-\left(\dfrac{32(\sqrt{2}+10)}{3}+4\pi\right)\approx 313{,}682\ \mathrm{m}^2$.
Tổng chi phí là $T=240\cdot S_G+100\cdot S_C=63604{,}52$ nghìn đồng $\approx 63{,}6$ triệu đồng.

Câu 42. Đáp án: 14,7.



Đặt $BM=MQ=x$ cm $(0<x<16)$, $BP=y$ $(y>0)$.
Ta có $MC=16-BM=16-x$.
$QC=\sqrt{MQ^2-MC^2}=\sqrt{x^2-(16-x)^2}=4\sqrt{2x-16}$ $(x>8)$.
Ta có

$S_{BCQP} = S_{CQM} + 2S_{MBP}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}BC(QC+BP) = \dfrac{1}{2}QC\cdot MC + 2\cdot\dfrac{1}{2}BM\cdot BP$

$\Leftrightarrow 16(4\sqrt{2x-16}+y) = 4\sqrt{2x-16}\cdot(16-x)+2xy$

$\Rightarrow y = \dfrac{4x}{\sqrt{2x-16}}.$

Chiều dài nếp gấp là $MP = \sqrt{x^2+\left(\dfrac{4x}{\sqrt{2x-16}}\right)^2} = \sqrt{x^2+\dfrac{16x^2}{2x-16}} = \sqrt{\dfrac{2x^3}{2x-16}}.$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-16}$ với $8 < x < 16$.

Có $f'(x) = \dfrac{3x^2(2x-16)-2x^3}{(2x-16)^2} = \dfrac{4x^3-48x^2}{(2x-16)^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 12$.

Suy ra $\max\limits_{x\in(8;16)} f(x) = f(12) = 6^3$.

Vậy chiều dài nếp gấp nhỏ nhất là $MP_{\min} = 6\sqrt{6} \Leftrightarrow x = 12$.

Câu 43. Đáp án: 0,36.

Gọi A là biến cố hai bạn gặp nhau.

Gọi x là số phút Thanh đến điểm hẹn (tính từ 9 giờ 30 phút).

Gọi y là số phút Mai đến điểm hẹn (tính từ 9 giờ 30 phút).

Điều kiện: $0 \leqslant x \leqslant 60$; $0 \leqslant y \leqslant 60$.

Ta biểu diễn số phút x theo trục hoành và số phút y theo trục tung, như vậy số phút đến điểm hẹn của Thanh và Mai được biểu diễn bởi một điểm $(x;y)$ nằm trong hình vuông cạnh 60 (một phút được tính một đơn vị).

Để hai bạn gặp được nhau thì $x;y$ thỏa điều kiện $|x-y| \leqslant 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y \leqslant 12 \\ x-y \geqslant -12 \end{cases}$ $(*)$.

Như vậy, để hai bạn gặp được nhau thì $(x;y)$ phải nằm trong miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$.

Diện tích miền nghiệm: $S = 60^2 - 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(60-12)^2 = 1296$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1296}{60^2} = \dfrac{9}{25} = 0{,}36$.

Câu 44. Đáp án: 240.

Véc-tơ vận tốc của chiếc Flycam: $\overrightarrow{v} = (6;4;1)$ m/s.

Chiếc Flycam bay từ gốc tọa độ O tới vị trí điểm $M(a;b;c)$ sau t giây $(t \geqslant 0)$.

Suy ra $M(6t;4t;t)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (40-6t;203-4t;8-t)$; $\overrightarrow{MB} = (160-6t;22-4t;12-t)$.

Góc quan sát tạo bởi hai tia MA và MB:

$$\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) = \frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{MA\cdot MB}$$
$$= \frac{10962-2120t+53t^2}{\sqrt{(40-6t)^2+(203-4t)^2+(8-t)^2}\cdot\sqrt{(160-6t)^2+(22-4t)^2+(12-t)^2}}$$
$$= \frac{10962-2120t+53t^2}{\sqrt{42873-2120t+53t^2}\cdot\sqrt{26228-2120t+53t^2}} = f(t).$$

Đặt $u(t) = 53t^2-2120t$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{10962+u}{\sqrt{42873+u}\cdot\sqrt{26228+u}} = \dfrac{10962+u}{\sqrt{1124473044+69101u+u^2}} = g(u)$.

$$f'(t) = [g(u)]' = u' \cdot g'(u)$$
$$= (106t - 2120) \cdot \frac{\sqrt{1124473044 + 69101u + u^2} - (10962 + u) \cdot \dfrac{69101 + 2u}{2\sqrt{1124473044 + 69101u + u^2}}}{1124473044 + 69101u + u^2}$$
$$= (106t - 2120) \cdot \frac{2(1124473044 + 69101u + u^2) - (10962 + u)(69101 + 2u)}{2\left(1124473044 + 69101u + u^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= (106t - 2120) \cdot \frac{1491460926 + 47177u}{2\left(1124473044 + 69101u + u^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 20 \\ u \approx -31614 \text{ (vô nghiệm)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 20 \\ 53t^2 - 2120t \approx -31614 \text{ (vô nghiệm)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow t = 20.$$

Bảng biến thiên:

t	0		20		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$0{,}3269$	$\searrow$	$-0{,}98$	$\nearrow$	1

Góc quan sát tạo bởi hai tia MA và MB là lớn nhất khi và chỉ khi $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{t \geqslant 0} f(t) = f(20)$ khi $t = 20$.
Khi đó $M(120; 80; 20)$.
Vậy $a + b + c + t = 120 + 80 + 20 + 20 = 240$.

Minh họa Sở Bà Rịa Vũng Tàu

Câu 1. Chọn đáp án B
Nhóm chứa trung vị là nhóm: $[70;80)$.
Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $M_e = 70 + \dfrac{\frac{40}{2} - (4+5)}{23}.10 \approx 75$.

Câu 2. Chọn đáp án D
Gọi A_1, A_2 lần lượt là biến cố: bóng đèn 1, 2 của hệ thống I bị hỏng.
B_1, B_2 lần lượt là biến cố: bóng đèn 1, 2 của hệ thống II bị hỏng.
Ta có:
$P(A_1) = P(A_2) = P(B_1) = P(B_2) = 0{,}15 \Rightarrow P\left(\overline{A_1}\right) = P\left(\overline{A_2}\right) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.
Gọi A, B lần lượt là biến cố hệ thống I, II bị hỏng.
Ta có:
$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2) \\ &= 1 - P\left(\overline{A_1 A_2}\right) \\ &= 1 - P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \\ &= 1 - 0{,}85 \cdot 0{,}85 = 0{,}2775. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} P(B) &= P(B_1 \cdot B_2) \\ &= P(B_1) \cdot P(B_2) \\ &= 0{,}15 \cdot 0{,}15 = 0{,}0225. \end{aligned}$$
Xác suất để cả 2 hệ thống bị hỏng là:
$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A) \cdot P(B) \\ &= 0{,}2775 \cdot 0{,}0225 \approx 0{,}006. \end{aligned}$$

Câu 3. Chọn đáp án D
Ta có:
$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \dfrac{\pi}{3} = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$
Vì $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{4\pi}{9}; \dfrac{\pi}{3}\right\}$.
Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 4. Chọn đáp án A
Đẳng thức:
$$5 + 16 \cdot 4^{x^2 - 2y} = \left(5 + 4^{2x^2 - 4y}\right) \cdot 7^{2y - x^2 + 2} \quad (1)$$
Đặt $t = x^2 - 2y$. Khi đó đẳng thức (1) trở thành:

$$5+16\cdot 4^t=(5+16^t)\cdot 49\cdot 7^{-t}\Leftrightarrow 5\cdot 7^t+16\cdot 28^t=5\cdot 49+16^t\cdot 49$$
$$\Leftrightarrow 5(7^t-49)+16^t\left(16\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^t-49\right)=0\quad (2)$$

Nhận thấy phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t=2$. Vì vế trái của phương trình (2) là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, vế phải là hàm hằng.

$\Rightarrow t=2\Leftrightarrow x^2-2y=2$

$\Leftrightarrow 2y=x^2-2.$

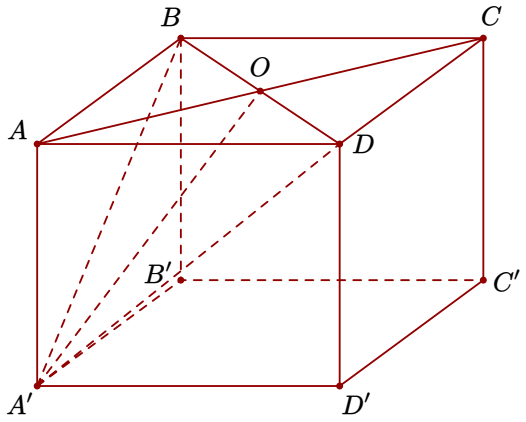
$$\Rightarrow P=\frac{10x+6y+26}{2x+2y+5}$$
$$=\frac{3x^2+10x+20}{x^2+2x+3}$$
$$\Leftrightarrow (3-P)x^2+(10-2P)x+20-3P=0.$$

Để tồn tại x thì:

$\Delta'\geqslant 0\Leftrightarrow (5-P)^2-(3-P)(20-3P)\geqslant 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\leqslant P\leqslant 7$$
$$\Rightarrow M+m=7+\frac{5}{2}=\frac{19}{2}.$$

Câu 5. Chọn đáp án C

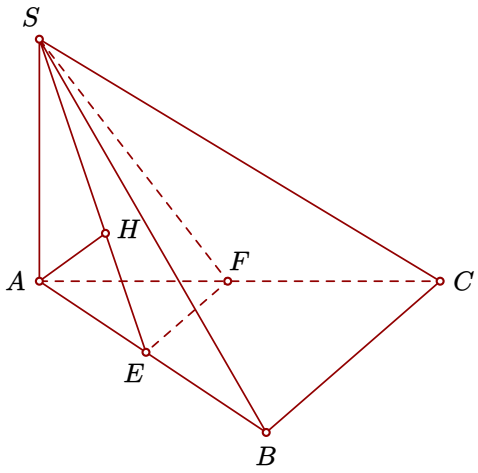


Gọi $O=AC\cap BD$. Khi đó ta có $\begin{cases}AO\perp BD\\A'O\perp BD\end{cases}$ do đó $\widehat{A'OA}$ là góc phẳng nhị diện $[A',BD,A]$.

Ta có:

$$AO=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow A'O=\sqrt{A'A^2+AO^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow \sin\widehat{A'OA}=\frac{AA'}{A'O}=\frac{a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 6. Chọn đáp án D



Gọi F là trung điểm của AC, khi đó:
$BC \parallel EF \Rightarrow BC \parallel (SEF)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(BC, SE) = \mathrm{d}(BC, (SEF)) = \mathrm{d}(B, (SEF))$.
Do E là trung điểm của $AB \Rightarrow \mathrm{d}(B, (SEF)) = \mathrm{d}(A, (SEF))$.
Kẻ $AH \perp SE$.
Do $\begin{cases} EF \perp AB \\ EF \perp SA \end{cases} \Rightarrow EF \perp (SAE) \Rightarrow EF \perp AH \Rightarrow AH = \mathrm{d}(A, (SEF))$.
Ta có:
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{9}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 7. Chọn đáp án B
Vận tốc của tàu con thoi biểu diễn bởi hàm số:
$v(t) = 0{,}001302t^3 - 0{,}09029t^2 + 23$
Gia tốc của tàu con thoi:
$a(t) = v'(t) = 0{,}003906t^2 - 0{,}18058t$
$a'(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}007812t - 0{,}18058 = 0$
$\Leftrightarrow t \approx 23{,}115$
$a(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}003906t^2 - 0{,}18058t = 0$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t \approx 46{,}2 \end{array}\right.$$
Bảng biến thiên:

t	0		46,2		126
$v'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$v(t)$	23	↘	$-41{,}33$	↗	1194

Gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng từ giây thứ 23 (tương ứng điểm cực tiểu của $a(t)$ tại $t \approx 23{,}115$), hoặc từ thời điểm gia tốc đổi dấu dương tại giây thứ 46 ($t \approx 46{,}2$) (làm tròn đến hàng đơn vị) tính từ thời điểm $t = 0$ (s) cho đến khi tên lửa được phóng đi.

Câu 8. Chọn đáp án C
Gọi hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$, $O = AC \cap BD$ thì $SO \perp (ABCD)$.
Gọi cạnh đáy của hình chóp bằng $x = AB = BC = CD = AD$.
Gọi O là tâm hình vuông $MNPQ$ cạnh 20 cm $\Rightarrow O$ cũng là tâm hình vuông $ABCD$.

Xét tam giác OAD vuông cân tại O nên:
$OD = OA = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow AK = OK - OA = 10 - \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.
Xét tam giác vuông MKA có:
$MA = \sqrt{MK^2 + KA^2} = \sqrt{100 + \left(10 - \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$.
Giả sử sau khi gấp lên (với $S \equiv M \equiv N \equiv P \equiv Q$), ta được hình chóp $S.ABCD$, có:

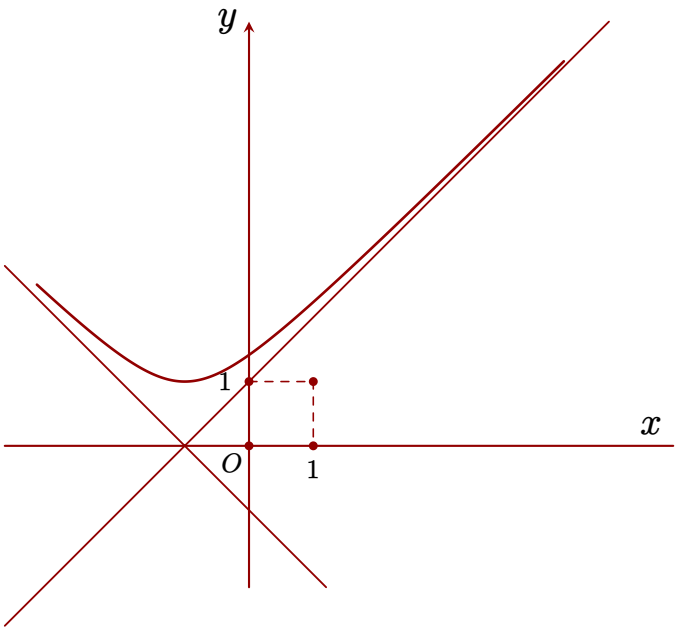
$$\begin{aligned} SO &= \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{MA^2 - OA^2} \\ &= \sqrt{100 + \left(10 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{x^2}{2}} \\ \Rightarrow V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO \\ &= \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{100 + \left(10 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{3} x^2 \sqrt{200 - 10\sqrt{2}x} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{x^4(200 - 10\sqrt{2}x)} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{200x^4 - 10\sqrt{2}x^5}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 200x^4 - 10\sqrt{2}x^5$ với $0 < x < 10\sqrt{2}$.
Với $0 < x < 10\sqrt{2}$:
$f'(x) = 800x^3 - 50\sqrt{2}x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 8\sqrt{2}$.
Ta có bảng biến thiên:

x	0		$8\sqrt{2}$		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	655360	↘	-13254834

Hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 8\sqrt{2}$.
Suy ra $BD = 16 \Rightarrow OD = 8 \Rightarrow ED = 10 - 8 = 2$.
Phần diện tích tấm bạt bị cắt theo yêu cầu trên là:
$S = 4 \cdot S_{\Delta MDN} = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 20 = 80$.

Câu 9. Chọn đáp án C



Trường hợp 1:
Ta có:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}=1,$$

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=1.\end{aligned}$$

Trường hợp 2:
Ta có:

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}=-1,$$

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}-x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}=-1.\end{aligned}$$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận xiên là $y=x+1$ và $y=-x-1$.

Câu 10. Chọn đáp án **D**

Đồ thị hàm số $y=ax+2+\dfrac{b}{x+c}$ có tiệm cận đứng là $x=-c$ và tiệm cận xiên là $y=ax+2$.
Từ đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số có:
+ Phương trình đường tiệm cận đứng là $x=1=-c\Rightarrow c=-1$

+ Đường tiệm cận xiên đi qua hai điểm $A(2;0), B(0;2)$ nên phương trình đường tiệm cận xiên là $y=-x+2$. Suy ra $ax+2=-x+2 \Rightarrow a=-1$.

Lại có đồ thị hàm số đi qua điểm $C(0;3)$ nên ta có: $3=a.0+2+\dfrac{b}{0+c} \Rightarrow b=c=-1$

Vậy $P=a+b+c=-3$.

Câu 11. Chọn đáp án A

Gọi N là trung điểm của BC. Khi đó $MN \parallel AC$.

$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OM}\right)=\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OM}\right)=180^\circ-\widehat{OMN}$.

Xét tam giác OMN:

Ta có $MN=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; OM=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; ON=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Delta OMN$ đều.

Nên $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OM}\right)=\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OM}\right)=180^\circ-\widehat{OMN}=120^\circ$.

Câu 12. Chọn đáp án D

Gọi D là chân đường phân giác góc B của tam giác ABC. Theo tính chất đường phân giác ta có:

$\dfrac{DA}{AB}=\dfrac{DC}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DA}=-\dfrac{AB}{BC}\cdot\overrightarrow{DC} \quad (*)$

Với $\overrightarrow{AB}=(1;-3;4) \Rightarrow AB=\sqrt{26}$ và $\overrightarrow{BC}=(-6;8;2) \Rightarrow BC=\sqrt{104}$.

Suy ra:

$k=-\dfrac{AB}{BC}=-\dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}}=-\dfrac{1}{2}$.

Từ $(*)$ ta có điểm D chia đoạn thẳng AC theo tỉ số k, nên D có tọa độ:

$$\begin{cases} x_D=\dfrac{x_A-kx_C}{1-k}=-\dfrac{2}{3} \\ y_D=\dfrac{y_A-ky_C}{1-k}=\dfrac{11}{3} \\ z_D=\dfrac{z_A-kz_C}{1-k}=1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right).$$

Câu 13. Chọn đáp án: a b c d

a) Từ điểm H kẻ $HK \perp CD$, ta có $CD \perp (SHK)$ nên góc phẳng của nhị diện $[S,CD,A]$ bằng góc $\alpha=\widehat{SKH}$.

Ta có:

$\dfrac{HK}{AI}=\dfrac{HC}{AC}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow HK=\dfrac{3}{4}AI=\dfrac{3}{4}\cdot 4a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$,

$\tan\alpha=\dfrac{SH}{HK}=\dfrac{a\sqrt{3}\cdot 2}{3a\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}$.

b) Ta có $BO \perp (SAC)$ nên góc giữa SB và (SAC) là góc $\widehat{BSO}$.

c) Ta có diện tích đáy $S_{ABCD}=2S_{ABC}=2\cdot\dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4}=8a^2\sqrt{3}$.

d) Gọi I là trung điểm AM, ta có $PI \parallel SM$ nên $SM \parallel (PNI)$.

Do đó $\mathrm{d}(SM,PN)=\mathrm{d}(S,(PNI))=\mathrm{d}(A,(PNI))$ vì P là trung điểm SA.

Do H là trung điểm AO nên $\mathrm{d}(A,(PNI))=2\mathrm{d}(H,(PNI))$.

Ta có tam giác ACD đều nên $AM \perp CD$.

Kẻ $HK \perp NI$, $HK=\dfrac{1}{2}AI=\dfrac{1}{4}AM=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác SAH ta có PO cắt SH tại F nên ta có:

$\dfrac{SP}{PA}\cdot\dfrac{AO}{OH}\cdot\dfrac{HF}{FS}=1$

$\Rightarrow \dfrac{HF}{FS}=\dfrac{1}{2}$ nên $HF=\dfrac{1}{3}SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ $HE\perp FK$ thì:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(H,(PNI)) &= HE\\ &= \frac{HF\cdot HK}{\sqrt{HF^2+HK^2}}\\ &= \frac{a\sqrt{39}}{13}.\end{aligned}$$

Vậy $\mathrm{d}(SM,PN)=\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 14. Chọn đáp án: a b c d

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$y'=\dfrac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{2}\\ x=2+\sqrt{2}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$c'(x)$		$-$	0	$+$	
$c(x)$	$+\infty$	$\searrow$	36	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2-\sqrt{2})$ nên nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

b)

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$7-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$7+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x-8}{x(x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}}=1.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+3x-8}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x-8}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5-\dfrac{8}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=5.$$

Suy ra đường thẳng $y=x+5$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+3x-8}{x-2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+3x-8}{x-2}=-\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Đường tròn $(C)\colon (x+3)^2+(y-1)^2=4$ có tâm $I(-3;1)$.

Tiệm cận xiên $(\Delta)\colon y=x+5\Leftrightarrow x-y+5=0\Rightarrow \mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Tiệm cận đứng $(\Delta_1)\colon x-2=0\Rightarrow \mathrm{d}(I,\Delta_1)=5$.

Tổng khoảng cách từ điểm I đến hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1):

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+5=\dfrac{10+\sqrt{2}}{2}$.

d) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số: $A\left(2+\sqrt{2};7+2\sqrt{2}\right)$.

Điểm cực đại của đồ thị hàm số: $B\left(2-\sqrt{2};7-2\sqrt{2}\right)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số: $y=ax+b$.

Đường thẳng đi qua $A\left(2+\sqrt{2};7+2\sqrt{2}\right)$, $B\left(2-\sqrt{2};7-2\sqrt{2}\right)$, ta có:

$$\begin{cases}7+2\sqrt{2}=(2+\sqrt{2})a+b\\ 7-2\sqrt{2}=(2-\sqrt{2})a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=3.\end{cases}$$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số: $(\Delta_2)\colon y=2x+3$.

Xét hệ:

$$\begin{cases}(x+3)^2+(y-1)^2=4 \quad (2)\\ y=2x+3 \quad (3).\end{cases}$$

Từ (2), (3) ta có:

$$5x^2+14x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-\dfrac{9}{5}\end{array}\right.$$

$x=-1\Rightarrow y=1\Rightarrow M(-1;1)$

$x=-\dfrac{9}{5}\Rightarrow y=-\dfrac{3}{5}\Rightarrow N\left(-\dfrac{9}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $(\Delta_2)\colon y=2x+3\Leftrightarrow 2x-y+3=0$.

Xét điểm $O(0;0)$, $I(-3;1)$. Ta có:

$(2\cdot 0-0+3)\,(2(-3)-1+3)=-12<0$.

Suy ra $O(0;0)$, $I(-3;1)$ nằm khác phía đối với đường thẳng (Δ_2).

$MN=\sqrt{\left(-\dfrac{9}{5}+1\right)^2+\left(-\dfrac{3}{5}-1\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

Diện tích tứ giác $IMON$:

$$\begin{aligned}S_{IMON}&=S_{IMN}+S_{OMN}\\ &=\frac{1}{2}\cdot MN\cdot[\mathrm{d}(I,\Delta_2)+\mathrm{d}(O,\Delta_2)]\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\\ &=\frac{14}{5}.\end{aligned}$$

d)

x	3		$2+\sqrt{2}$		5
y'		$-$	0	$+$	
y	10	$\searrow$	$7+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{32}{3}$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số: $A\left(2+\sqrt{2};7+2\sqrt{2}\right)$.
Điểm cực đại của đồ thị hàm số: $B\left(2-\sqrt{2};7-2\sqrt{2}\right)$.
Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số: $y=ax+b$.
Đường thẳng đi qua $A\left(2+\sqrt{2};7+2\sqrt{2}\right)$, $B\left(2-\sqrt{2};7-2\sqrt{2}\right)$, ta có:
$$\begin{cases}7+2\sqrt{2}=(2+\sqrt{2})a+b\\7-2\sqrt{2}=(2-\sqrt{2})a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$$
Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số: $(\Delta_2):y=2x+3$.
Xét hệ:
$$\begin{cases}(x+3)^2+(y-1)^2=4 \quad (2)\\ y=2x+3 \quad (3)\end{cases}$$
Từ $(2),(3)$ ta có:
$$5x^2+14x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-\dfrac{9}{5}\end{array}\right.$$
$$x=-1\Rightarrow y=1\Rightarrow M(-1;1)$$
$$x=-\frac{9}{5}\Rightarrow y=-\frac{3}{5}\Rightarrow N\left(-\frac{9}{5};-\frac{3}{5}\right)$$
Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $(\Delta_2):y=2x+3\Leftrightarrow 2x-y+3=0$.
Xét điểm $O(0;0),I(-3;1)$. Ta có:
$(2\cdot 0-0+3)\,(2(-3)-1+3)=-12<0$.
Suy ra $O(0;0),I(-3;1)$ nằm khác phía đối với đường thẳng (Δ_2).
$$MN=\sqrt{\left(-\frac{9}{5}+1\right)^2+\left(-\frac{3}{5}-1\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$
Diện tích tứ giác $IMON$:
$$\begin{aligned}S_{IMON}&=S_{IMN}+S_{OMN}\\&=\frac{1}{2}\cdot MN\cdot[\mathrm{d}(I,\Delta_2)+\mathrm{d}(O,\Delta_2)]\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\\&=\frac{14}{5}.\end{aligned}$$

Câu 15. Chọn đáp án: a b c d
a) Với hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $A'(0;0;3)$
$\Rightarrow C(3;3;0)$, $B'(3;0;3)$, $C'(3;3;3)$
$\Rightarrow P\left(3;\frac{3}{2};3\right)$ là trung điểm của $B'C'$.

Trọng tâm của tam giác PDC có tọa độ là $G\left(2;\frac{5}{2};1\right)$.

b) Trọng tâm $G\left(2;\frac{5}{2};1\right)$ của tam giác $PDC \Rightarrow \left|\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right| = 3KG.$

K là điểm thuộc mặt phẳng $(Oxz) \Rightarrow \left|\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right| = 3KG$ đạt giá trị nhỏ nhất khi K là hình chiếu vuông góc của $G\left(2;\frac{5}{2};1\right)$ trên mặt phẳng (Oxz).

Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức là

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right| &= 3\cdot \mathrm{d}(G,(Oxz))\\ &= 3\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{2}.\end{aligned}$$

c) Có $\overrightarrow{AP}\left(3;\frac{3}{2};3\right)$ và $\overrightarrow{BC'}(0;3;3)$:

$$\begin{aligned}\cos(AP,BC') &= \frac{\left|\frac{3}{2}\cdot 3+3\cdot 3\right|}{\sqrt{9+\frac{9}{4}+9}\cdot\sqrt{9+9}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$\Rightarrow (AP,BC') = 45^\circ.$

d) Ta có $\overrightarrow{AD'}(0;3;3)$ và $\overrightarrow{DB}(3;-3;0)$.

Suy ra phương trình các đường thẳng

$$AD':\begin{cases}x=0\\y=t\\z=t\end{cases} \quad \text{và} \quad BD:\begin{cases}x=3+u\\y=-u\\z=0.\end{cases}$$

Gọi $N(0;t;t)$ với $0\leqslant t\leqslant 3\sqrt{2}$ và $M(u+3;-u;0)$.

Có $AN=DM \Leftrightarrow 2t^2=2(u+3)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=u+3\\t=-u-3.\end{array}\right.$

- Với $t=u+3$, vì $0\leqslant t\leqslant 3\sqrt{2} \Rightarrow -3\leqslant u\leqslant 3\sqrt{2}-3$:

$$\begin{aligned}MN &= \sqrt{2(u+3)^2+(2u+3)^2}\\ &= \sqrt{6u^2+24u+27}\\ &= \sqrt{6(u+2)^2+3}\geqslant\sqrt{3},\quad \forall u\in\left[-3;3\sqrt{2}-3\right].\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $u=-2$.

- Với $t=-u-3$, vì $0\leqslant t\leqslant 3\sqrt{2} \Rightarrow -3\leqslant u\leqslant 3\sqrt{2}+3$:

$$\begin{aligned}MN &= \sqrt{2(u+3)^2+3^2}\\ &= \sqrt{2u^2+12u+27}\\ &= \sqrt{2(u+3)^2+9}\geqslant 3,\quad \forall u\in\left[-3;3\sqrt{2}-3\right].\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $u=-3$.

$\Rightarrow \min MN=\sqrt{3}.$

Câu 16. Đáp án: 2063.

Số các số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ A là 8^5.

Suy ra $n(\Omega)=8^5$.

Ta có $2520=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$.

Ta có các bộ số sau thỏa mãn: $\{3;3;8;5;7\}$, $\{2;6;6;5;7\}$, $\{3;4;6;5;7\}$.

$$n(B)=\frac{5!}{2!}+\frac{5!}{2!}+5!=240.$$

Vậy $\mathrm{P}(B)=\frac{240}{8^5}=\frac{15}{2048}$.

Suy ra $a=15$, $b=2048$ và $a+b=2063$.

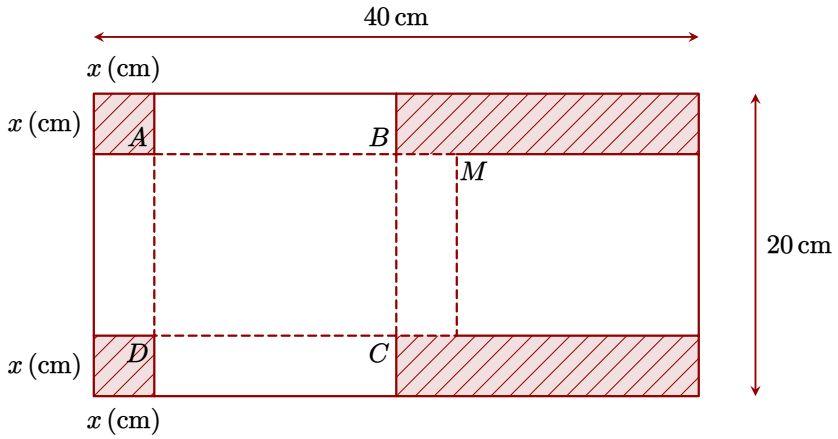
Câu 17. Đáp án: 0,6.
Gọi M là vị trí của tàu A sau khi đi được t giờ.
Gọi N là vị trí của tàu B sau khi đi được t giờ.
Ta có:
$AM = 8t$ (hải lý)
$BN = 6t$ (hải lý)
$\Rightarrow AN = 10 - 6t$ (hải lý).
Khoảng cách giữa hai tàu sau khi đi được t giờ:
$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{AM^2 + AN^2} \\ &= \sqrt{(8t)^2 + (10-6t)^2} \\ &= \sqrt{100t^2 - 120t + 100} \\ &= 10 \cdot \sqrt{t^2 - 2 \cdot t \cdot \frac{3}{5} + \frac{9}{25} - \frac{9}{25} + 1} \\ &= 10 \cdot \sqrt{\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{25}} \geqslant 8. \end{aligned}$$
Khoảng cách giữa hai tàu ngắn nhất bằng 8 hải lý khi:
$t - \frac{3}{5} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{5} = 0{,}6$ (giờ).

Câu 18. Đáp án: 215.
Giá bán: $30 + x$ (nghìn đồng/kg).
Lượng cá bán được: $2000 - 5x$ kg (với 2 tấn = 2000 kg).
Lượng cá thừa: $5x$ (kg).
Doanh thu từ cá bán: $(30 + x)(2000 - 5x)$ (nghìn đồng).
Doanh thu từ cá thừa: $5x \cdot 10$ (nghìn đồng).
Tổng doanh thu (T):
$$\begin{aligned} T &= (30 + x)(2000 - 5x) + 5x \cdot 10 \\ &= 60000 - 150x + 2000x - 5x^2 + 50x \\ &= -5x^2 + 1900x + 60000 \quad \text{(nghìn đồng)}. \end{aligned}$$
Hàm số $T(x) = -5x^2 + 1900x + 60000$ là một hàm số bậc hai có hệ số $a = -5 < 0$, nên đồ thị là một parabol có bề lõm quay xuống dưới.
Giá trị cực đại của T đạt tại đỉnh của parabol:
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1900}{2(-5)} = 190.$$
Giá bán tối ưu:
$30 + x = 30 + 190 = 220$ (nghìn đồng/kg).

Câu 19. Đáp án: 0,87.
Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC, ta có:
$BC = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{1 + 4 + 2} = \sqrt{7}$.
Dựng tứ giác lồi $ABPC$ sao cho $\widehat{PBA} = \widehat{PCA} = 90^\circ$ và H là hình chiếu vuông góc của A trên SP.
Ta có:
$$\left.\begin{matrix} PB \perp AB \\ PB \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow PB \perp (SAB) \Rightarrow PB \perp AM.$$
Lại có:
$$\left.\begin{matrix} AM \perp PB \\ AM \perp SB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AM \perp SP.$$

Tương tự, ta chứng minh được $AN \perp SP$.
Suy ra AM, AH, AN đồng phẳng và $(AMN) \perp SP$.
Do đó $\alpha = \widehat{SAH}$
$\Rightarrow \sin\widehat{SPA} = \dfrac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \tan\widehat{SPA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ta có AP là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, nên:
$$AP = \frac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \frac{\sqrt{7}}{\sin 120^\circ} = \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$
Chiều cao SA của khối chóp:
$$SA = AP \cdot \tan\widehat{SPA} = \frac{2\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{7}.$$
Thể tích khối chóp $S.ABC$:
$$\begin{aligned} V_{S.ABC} &= \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{21}}{6} \approx 0{,}76. \end{aligned}$$

Câu 20. Đáp án: 3,33.



Từ hình vẽ ta thấy, hình hộp chữ nhật có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có các kích thước:

- Chiều cao: $BM = x$ (cm).
- Chiều dài đáy: $AD = 20 - 2x$ (cm).
- Chiều rộng đáy: $AB = \dfrac{40 - 2x}{2} = 10 - x$ (cm).

Vì các kích thước phải dương nên:
$$\begin{cases} x > 0 \\ 10 - x > 0 \\ 20 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 10.$$
Để phần không gian của hộp đựng nhiều quà nhất thì thể tích của khối hộp phải đạt giá trị lớn nhất.
Thể tích khối hộp là:

$V = (20-2x)(10-x)x = 2(x^3-20x^2+100x)$.
Xét hàm số $f(x) = 2(x^3-20x^2+100x)$ trên khoảng $(0;10)$:

$$f'(x) = 2(3x^2-40x+100) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 10 & \text{(loại)} \\ x = \dfrac{10}{3} & \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{10}{3}$		10
y'		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

Từ bảng biến thiên, ta thấy hộp đựng được nhiều quà nhất khi:
$x = \dfrac{10}{3} \approx 3{,}33$ (cm).

Câu 21. Đáp án: 2029.
Ta có:
$15\sqrt[3]{5y+15\cdot 2^x} + 5y = 8^x \Leftrightarrow 15\sqrt[3]{5y+15\cdot 2^x} + 5y + 15\cdot 2^x = 8^x + 15\cdot 2^x \quad (1)$
Xét hàm số $f(t) = t^3 + 15t$.
Ta có $f'(t) = 3t^2 + 15 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Khi đó:
$(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{5y+15\cdot 2^x}\right) = f\left(2^x\right)$
$\Leftrightarrow \sqrt[3]{5y+15\cdot 2^x} = 2^x$
$\Leftrightarrow 5y + 15\cdot 2^x = 8^x$
$\Leftrightarrow 5y = 8^x - 15\cdot 2^x$.
Đặt $u = 2^x \quad (u > 0)$. Ta có:
$5y = u^3 - 15u \quad (2)$
Xét hàm số $g(u) = u^3 - 15u$ với $u > 0$:

$$g'(u) = 3u^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{5} & \\ u = -\sqrt{5} & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

u	0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
$g(u)$	0	↘	$-10\sqrt{5}$	↗	$+\infty$

Do đó, tồn tại số thực $x \Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $u > 0$:
$\Leftrightarrow 5y \geqslant -10\sqrt{5}$
$\Leftrightarrow y \geqslant -2\sqrt{5} \approx -4{,}47$.
Mà y là số nguyên và $y \in [-2024; 2024]$ nên:
$y \in \{-4; -3; \ldots; 2024\}$.

Số giá trị nguyên của y thỏa mãn là:
$2024-(-4)+1=2029$ (giá trị).
Vậy có 2029 số nguyên y thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 22. Đáp án: 50.
Lợi nhuận khi bán x máy là:
$$\begin{aligned} f(x) &= x\cdot p(x)-c(x)\\ &= x(8600-10x)-(x^3-4x^2+500x+1000)\\ &= 8600x-10x^2-x^3+4x^2-500x-1000\\ &= -x^3-6x^2+8100x-1000. \end{aligned}$$
Đạo hàm lợi nhuận:
$$f'(x)=-3x^2-12x+8100$$
$$f'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2-12x+8100=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-54 \quad \text{(loại)}\\ x=50 \quad \text{(nhận)} \end{array}\right.$$
Bảng biến thiên:

x	0		50		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f(50)$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, để lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất thì công ty X phải sản xuất và bán 50 máy.

Câu 23. Đáp án: -22.
Ta có $\overrightarrow{IN}=\left(\frac{3}{2}-a;2-b;6-c\right)$ và $\overrightarrow{OM}=(0;0;4)$.
$\overrightarrow{IN}\cdot\overrightarrow{OM}=0\Rightarrow c=6$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên trục $Oz\Rightarrow H(0;0;6)$.
$IH=\sqrt{a^2+b^2}$; $OM=4\Rightarrow S_{IOM}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot 4=2\sqrt{a^2+b^2}$.
$S_{IOM}=8\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=4\Rightarrow a^2+b^2=16\quad (C)$.
Độ dài đoạn thẳng IN:
$$\begin{aligned} IN &= \sqrt{\left(\frac{3}{2}-a\right)^2+(2-b)^2}\\ &= \sqrt{a^2+b^2-3a-4b+\frac{25}{4}}\\ &= \sqrt{\frac{89}{4}-3a-4b}. \end{aligned}$$
Đặt $T=\frac{89}{4}-3a-4b\Leftrightarrow 12a+16b+4T-89=0\quad (d)$.
Để tồn tại a, b thì đường thẳng d phải có điểm chung với đường tròn (C):
$$\begin{aligned} \mathrm{d}(O,d)\leqslant 4 &\Leftrightarrow \frac{|4T-89|}{\sqrt{12^2+16^2}}\leqslant 4\\ &\Leftrightarrow \frac{|4T-89|}{20}\leqslant 4\\ &\Leftrightarrow -80\leqslant 4T-89\leqslant 80\\ &\Leftrightarrow \frac{9}{4}\leqslant T\leqslant\frac{169}{4}. \end{aligned}$$

Vậy IN đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{\dfrac{169}{4}}=\dfrac{13}{2}$ khi $T=\dfrac{169}{4}\Rightarrow (d)\colon 3a+4b+20=0$.

Giả sử Δ là đường thẳng đi qua O và vuông góc với d tại A.

Ta có:

$$\Delta\colon 4x-3y=0\Rightarrow A\left(-\frac{12}{5};-\frac{16}{5}\right)\Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{12}{5} \\ b=-\dfrac{16}{5}. \end{cases}$$

Do đó:

$5a+5b+c=5\left(-\dfrac{12}{5}\right)+5\left(-\dfrac{16}{5}\right)+6=-12-16+6=-22$.

Sở Bắc Giang

Câu 1. Chọn đáp án B

Ta có

$$\log^2_{\sqrt{a}} b + (\log_b c - 1)\cdot \log_b \sqrt{c} + \log_a \frac{c^3}{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\log_a b)^2 + \frac{1}{2}(\log_b c - 1)\cdot \log_b c + 3\log_a c - \log_a b = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\log^2_a b + 6\log_a b \cdot \log_b c - 2\log_a b + \log^2_b c - \log_b c = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\log^2_a b + 2\log_a b\,(3\log_b c - 1) + \log^2_b c - \log_b c = 0. \quad (*)$$

Coi $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn $\log_a b$.

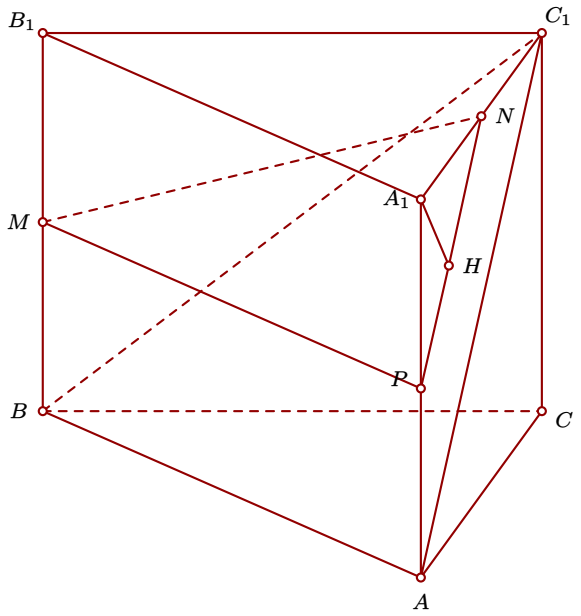
Ta có $\Delta' = (3\log_b c - 1)^2 - 8\left(\log^2_b c - \log_b c\right) = (\log_b c + 1)^2 > 0,\ \forall b, c > 0.$

Khi đó $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt là $\left[\begin{array}{l} \log_a b = \dfrac{1 - 3\log_b c - \log_b c - 1}{8} = -\dfrac{1}{2}\log_b c < 0 \text{ (loại)} \\ \log_a b = \dfrac{1 - 3\log_b c + \log_b c + 1}{8} = \dfrac{1 - \log_b c}{4}. \end{array}\right.$

Ta có $T = \dfrac{4}{\log_b a} + \log_b(bc) = 4\log_a b + \log_b c + 1.$

Từ $\log_a b = \dfrac{1 - \log_b c}{4} \Leftrightarrow 4\log_a b + \log_b c = 1 \Rightarrow T = 2.$

Câu 2. Chọn đáp án D



Ta có $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp A_1A \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACC_1A_1).$

Do đó $(BC_1, (ACC_1A_1)) = \widehat{BC_1A} \Rightarrow \widehat{BC_1A} = 30^\circ.$

Lại có $CC_1 \perp (ABC) \Rightarrow (BC_1, (ABC)) = \widehat{CBC_1}.$

Theo giả thiết $\sin\widehat{CBC_1} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}.$

Gọi P là trung điểm của $A_1A.$

Ta có $\begin{cases} AC_1 \parallel PN \\ AC_1 \not\subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow AC_1 \parallel (MNP).$

Do đó $\mathrm{d}(MN, AC_1) = \mathrm{d}(AC_1, (MNP)) = \mathrm{d}(A, (MNP)).$

Ta có $AA_1 \cap (MNP) = P$, mà P là trung điểm của AA_1 nên $\mathrm{d}(A,(MNP)) = \mathrm{d}(A_1,(MNP))$.

Kẻ $A_1H \perp NP$, ta có $\begin{cases} MP \parallel AB \\ AB \perp (ACC_1A_1) \end{cases} \Rightarrow MP \perp (ACC_1A_1) \Rightarrow A_1H \perp MP.$

Suy ra $A_1K \perp (MNP) \Rightarrow \mathrm{d}(A_1,(MNP)) = A_1K.$

Tam giác PA_1N vuông tại A_1, có AH là đường cao nên $\dfrac{1}{A_1H^2} = \dfrac{1}{A_1P^2} + \dfrac{1}{A_1N^2} \Rightarrow A_1H = \dfrac{A_1P \cdot A_1N}{\sqrt{A_1P^2 + A_1N^2}}$ $(*)$.

Đặt $BC_1 = x$, ta có $\begin{cases} CC_1 = BC_1 \cdot \sin \widehat{C_1BC} = \dfrac{x\sqrt{6}}{4} \\ AB = BC_1 \cdot \sin \widehat{BC_1A} = \dfrac{x}{2} \end{cases}.$

Ta có $\begin{cases} AC_1^2 = CC_1^2 + AC^2 = \dfrac{3x^2}{8} + 3a^2 \\ AC_1^2 = BC_1^2 - AB^2 = x^2 - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{3x^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3x^2}{8} + 3a^2 = \dfrac{3x^2}{4} \Rightarrow x = 2a\sqrt{2}.$

$\Rightarrow CC_1 = a\sqrt{3} \Rightarrow A_1P = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, ta có $A_1N = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Thay vào $(*)$ ta được $A_1H = \dfrac{A_1P \cdot A_1N}{\sqrt{A_1P^2 + A_1N^2}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}.$

Câu 3. Chọn đáp án D

Ta có $y = \dfrac{2x^2 + (m-2)x + 3}{x-1} = 2x + m + \dfrac{m+3}{x-1}.$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $\Leftrightarrow m \neq -3$.

Khi đó đường tiệm cận xiên là $\Delta\colon y = 2x + m \Leftrightarrow 2x - y + m = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi

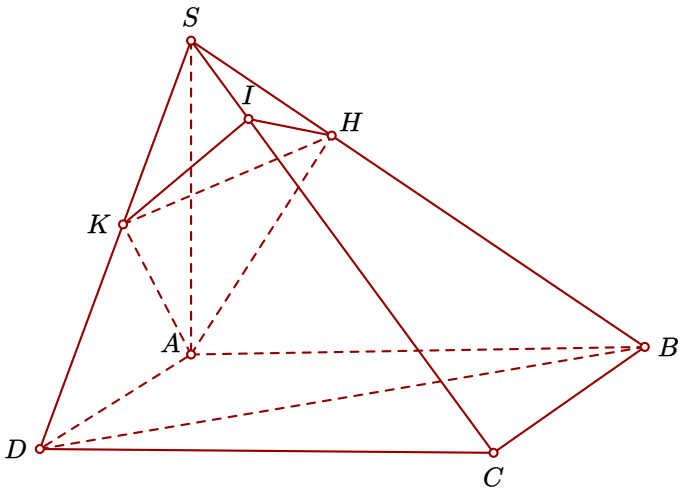
$\mathrm{d}(I,\Delta) < \sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{|2 - 1 + m|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |m+1| < 5 \Leftrightarrow -5 < m + 1 < 5 \Leftrightarrow -6 < m < 4.$

Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \neq -3 \end{cases} \Rightarrow S = \{-5;-4;-2;-1;0;1;2;3\}.$

Tổng tất cả các phần tử của S bằng -6.

Câu 4. Chọn đáp án B



Ta có $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB) \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$.

Do đó

$$\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{SA \cdot 1}{\sqrt{SA^2+1}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3SA^2 = 2(SA^2+1) \Rightarrow SA = \sqrt{2}.$$

Suy ra $SA = AD = \sqrt{2}$.

Gọi K là trung điểm của $SD \Rightarrow AK \perp SD \Rightarrow AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SC$.

Lại có $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Gọi $(AHK) \cap SC = I \Rightarrow IH \perp SC$, $IK \perp SC \Rightarrow [B,SC,D] = \widehat{HIK}$.

Ta có $AK = SK = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $HK = \sqrt{SH^2 + SK^2 - 2SH \cdot SK \cdot \frac{SB^2 + SD^2 - DB^2}{2SB \cdot SD}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\cos[B,SC,D] = \cos\widehat{HIK} = -\cos\widehat{HAK} = -\frac{AH^2 + AK^2 - HK^2}{2AH \cdot AK} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 5. Chọn đáp án A

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

Xét $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow A(0;2) \\ x = 2 \Rightarrow B(2;-2). \end{array}\right.$

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) là $AB\colon y = -2x + 2$.

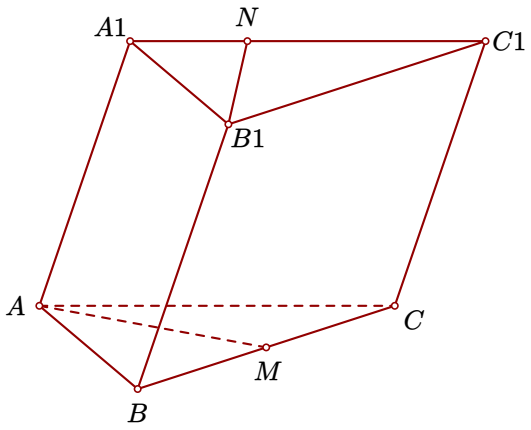
Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) là

$$S = \int_0^2 \left|x^3 - 3x^2 + 2 - (-2x+2)\right| \mathrm{d}x = \int_0^2 \left|x^3 - 3x^2 + 2x\right| \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) \mathrm{d}x - \int_1^2 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Câu 6. Chọn đáp án A

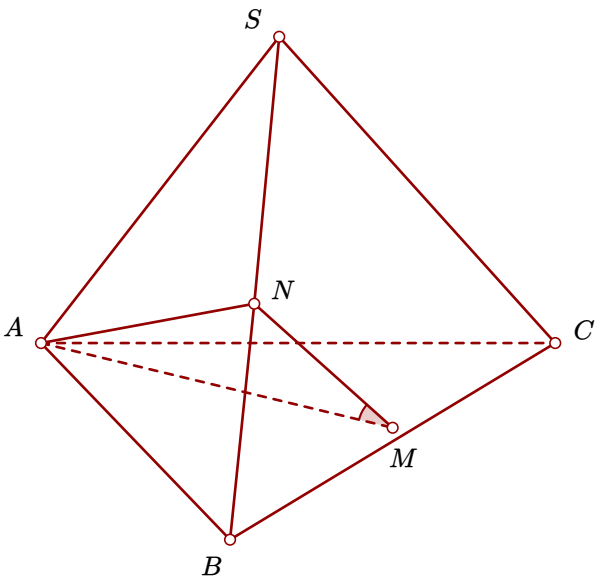


Gọi P trên cạnh BC sao cho $AP = A_1N \Rightarrow BP \parallel B_1N \Rightarrow BP \perp AM$.
Trong tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\cos B = 60^\circ$ (hoặc $\cos A$).
Đặt $\overrightarrow{A_1N} = x\overrightarrow{A_1C_1} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC}$.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BP} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[-AB^2 + xAC^2 + (x-1)AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ\right] = 0\\ &\Leftrightarrow -9 + 16x + (x-1)\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 0\\ &\Leftrightarrow x = \frac{15}{22}.\end{aligned}$$

Suy ra $\dfrac{A_1N}{A_1C_1} = \dfrac{15}{22}$.

Câu 7. Chọn đáp án D



Tam giác ABC đều cạnh bằng 2 nên $AM = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Gọi N là trung điểm của SB, khi đó $MN = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Ta có $AN=\sqrt{\dfrac{AB^2+SA^2}{2}-\dfrac{SB^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{78}}{6}$.

Ta có $\cos\widehat{AMN}=\dfrac{AM^2+MN^2-AN^2}{2\cdot AM\cdot MN}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{AMN}=45^\circ$.

Vậy $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{SC}\right)=\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{NM}\right)=180^\circ-\widehat{AMN}=135^\circ$.

Câu 8. Chọn đáp án A

Ta có $y=x^3-3x+4\Rightarrow y'=3x^2-3$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=2\\x=-1\Rightarrow y=6.\end{array}\right.$

Tọa độ hai điểm cực trị của hàm số đã cho là $A(1;2)$, $B(-1;6)$.

Ta có $\overrightarrow{OA}=(1;2)$, $\overrightarrow{OB}=(-1;6)$.

Khi đó $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\left|1\cdot6-(-1)\cdot2\right|=4$.

Câu 9. Chọn đáp án C

Ta có $y=f(x^2-2x-m)\Rightarrow y'=(2x-2)f'(x^2-2x-m)$.

Hàm số $y=f(x^2-2x-m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ khi $y'\leqslant0,\ \forall x\in(1;3)$

$\Leftrightarrow(2x-2)f'(x^2-2x-m)\leqslant0,\ \forall x\in(1;3)$

$\Leftrightarrow f'(x^2-2x-m)\leqslant0,\ \forall x\in(1;3)\quad(\text{do } 2x-2>0,\ \forall x\in(1;3))$

$\Leftrightarrow-5\leqslant x^2-2x-m\leqslant3$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x\leqslant m+3\\x^2-2x\geqslant m-5\end{cases},\ \forall x\in(1;3).\quad(*)$

Xét hàm số $g(x)=x^2-2x\Rightarrow g'(x)=2x-2$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

x	1	3
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$ 3

Khi đó $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}m+3\geqslant3\\m-5\leqslant-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geqslant0\\m\leqslant4\end{cases}\Leftrightarrow0\leqslant m\leqslant4$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 10. Chọn đáp án B

Ta có

$$\begin{aligned}\int_1^9 \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{e}^x\left(2+\sqrt{x}\mathrm{e}^x\right)}{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^9 \sqrt{\frac{1+2\mathrm{e}^x\sqrt{x}+x\mathrm{e}^{2x}}{x}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^9 \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{x}\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^9 \frac{1+\sqrt{x}\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(2\sqrt{x}+\mathrm{e}^x\right)\Big|_1^9\\ &= \mathrm{e}^9-\mathrm{e}+4.\end{aligned}$$

Suy ra $a=9$, $b=1$, $c=4$.
Vậy $a+b-c=6$.

Câu 11. Chọn đáp án **B**
Ta có

$$f'(x)\cdot\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow\frac{1}{4}f'(x)\cdot\sin^2 x=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{4}{\sin^2 x}$$

$\Rightarrow f(x)=-4\cot x+C$.
Do $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow -4\cot\frac{\pi}{4}+C=0\Leftrightarrow C=4\Rightarrow f(x)=-4\cot x+4$.
Suy ra $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=8$.

Câu 12. Chọn đáp án **C**
Giả sử vị trí ban đầu của máy bay A là $M(a;b;c)$.
Vị trí ban đầu của máy bay B là $N(a;b;c-50)$.
Vị trí của máy bay B sau t giờ kể từ khi xuất phát là $N_t(a;b+960t;c-50)$.
Do máy bay A bay trước máy bay B nửa giờ nên vị trí của máy bay A sau t giờ kể từ khi máy bay B xuất phát là $M_t(a;b+420+840t;c)$.
Khoảng cách giữa hai máy bay sau t giờ kể từ khi máy bay B xuất phát là
$M_tN_t=\sqrt{(120t-420)^2+50^2}\geqslant\sqrt{50^2}=50$, $0\leqslant t\leqslant 5$.
Do đó khoảng cách giữa hai máy bay ngắn nhất là 50 km.
Dấu bằng xảy ra khi $120t-420=0\Leftrightarrow t=3{,}5$.
Vậy sau 3,5 giờ kể từ khi máy bay B xuất phát thì khoảng cách giữa hai máy bay ngắn nhất.

Câu 13. Chọn đáp án **C**
Ta có $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC_1}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

Câu 14. Chọn đáp án **C**
Số các số tự nhiên có 5 chữ số là $n(\Omega)=9\cdot 10^4=90000$.
Gọi số tự nhiên có 5 chữ số mà hai chữ số kề nhau luôn khác nhau là $\overline{abcde}$.
Ta có $a\neq 0\Rightarrow a$ có 9 cách chọn.
$b\neq a$ nên b có 9 cách chọn.
$c\neq b$ nên c có 9 cách chọn.
$d\neq c$ nên d có 9 cách chọn.
$e\neq d$ nên e có 9 cách chọn.

Suy ra có $9^5 = 59049$ số tự nhiên có 5 chữ số mà hai chữ số kề nhau luôn khác nhau.
Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{59049}{90000} = 0{,}6561$.

Câu 15. Chọn đáp án B
Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘		↗	0	↘	$-\infty$

Ta có $y' = 2f(x)\cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2; x = 2 \\ x = -2; x = 1; x = 2. \end{array}\right.$
Ta có bảng xét dấu.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;2)$.

Câu 16. Chọn đáp án B
Ta xét các số x, y sao cho $x + y = 1$.
Khi đó
$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= \frac{9^x - 2}{9^x + 3} + \frac{9^y - 2}{9^y + 3} \\ &= \frac{9^x - 2}{9^x + 3} + \frac{9^{1-x} - 2}{9^{1-x} + 3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$
Ta có
$$\begin{aligned} &f\left(\frac{1}{2024}\right) + f\left(\frac{2}{2024}\right) + f\left(\frac{3}{2024}\right) + \cdots + f\left(\frac{2023}{2024}\right) \\ &= \left[f\left(\frac{1}{2024}\right) + f\left(\frac{2023}{2024}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2024}\right) + f\left(\frac{2022}{2024}\right)\right] + \cdots + f\left(\frac{1012}{2024}\right) \\ &= 1011 \cdot \frac{1}{3} + f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 337 + \frac{1}{6} = \frac{2023}{6}. \end{aligned}$$
Suy ra $a = 2023$, $b = 6$ nên $a + 2b = 2035$.

Câu 17. Chọn đáp án C
Gọi quãng đường AE là x m $(0 \leqslant x \leqslant 1000)$.
Ta có $EB = 1000 - x$, suy ra $EC = \sqrt{(1000-x)^2 + 600^2}$, nên thời gian vận động viên đến điểm C là
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{30000} + \frac{\sqrt{(1000-x)^2 + 600^2}}{6000} \\ &= \frac{x}{30000} + \frac{\sqrt{x^2 - 2000x + 1360000}}{6000}. \end{aligned}$$
Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{30000} + \dfrac{x - 1000}{6000\sqrt{x^2 - 2000x + 1360000}}$.
Khảo sát hàm số $f(x)$ với $0 \leqslant x \leqslant 1000$, ta được bảng biến thiên.

x	0		877		1000
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Vậy $AE = 877$ m.

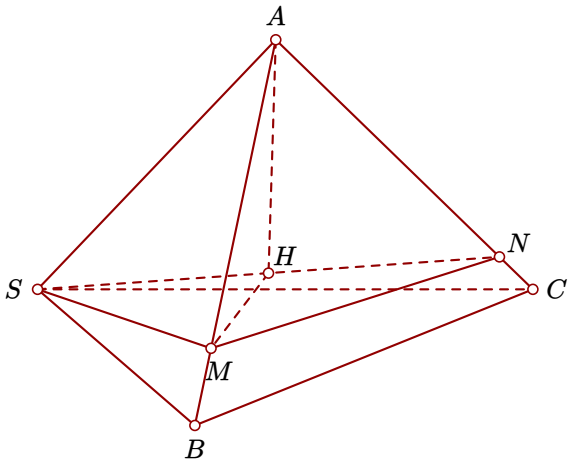
Câu 18. Chọn đáp án A

Ta có vận tốc ô tô chuyển động là $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int (12 - 2t)\,\mathrm{d}t = 12t - t^2 + C$.
Chọn thời điểm ban đầu khi ô tô bắt đầu chuyển động $t = 0$ thì $v(0) = 0$, suy ra $C = 0$.
Vậy $v(t) = 12t - t^2$.

t	0		6		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$	0	↗		↘	

Ô tô đạt vận tốc lớn nhất khi $v(t) = 12t - t^2$ lớn nhất.
Ta có $v(t)$ lớn nhất khi $t = 6$ nên quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi ô tô đạt vận tốc lớn nhất bằng
$S = \displaystyle\int_0^6 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^6 \left(12t - t^2\right)\,\mathrm{d}t = 144$ m.

Câu 19. Chọn đáp án D



Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = AN = 1$.
Ta có $\triangle ASM$ đều $\Rightarrow SM = 1$; $\triangle AMN$ vuông cân tại $A \Rightarrow MN = \sqrt{2}$; $\triangle ASN$ cân tại A có $\widehat{SAN} = 120^\circ$ nên $SN^2 = AS^2 + AN^2 - 2AS \cdot AN\cos 120^\circ = 3 \Rightarrow SN = \sqrt{3}$.
Xét $\triangle SMN$ có $SM = 1$, $MN = \sqrt{2}$, $SN = \sqrt{3} \Rightarrow \triangle SMN$ vuông tại M.
Hình chóp $A.SMN$ có $AS = AM = AN$ và đáy là $\triangle SMN$ vuông tại M nên hình chiếu của A trên (SMN) là trung điểm H của SN.

Trong $\triangle AHM$ có $AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \dfrac{1}{2}$.

Thể tích $V_{A.SMN} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Ta có $\dfrac{V_{A.SMN}}{V_{A.SBC}} = \dfrac{AM}{AB} \cdot \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow V_{A.SBC} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 20. Chọn đáp án C

Do

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 [f(x) + 2g(x)]\,\mathrm{d}x = 3 \\ \displaystyle\int_0^1 [2f(x) + 5g(x)]\,\mathrm{d}x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -3 \\ \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [3f(x) + g(x) - x]\,\mathrm{d}x = -9 + 3 - \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = -\frac{13}{2}.$$

Câu 21. Chọn đáp án: a b c d

a) Dựa vào giả thiết, ta có $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3} \text{ khi } -4 \leqslant x < -1 \\ -x^2 + 2x + 3 \text{ khi } -1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

Suy ra $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{3}x + C_1 \text{ khi } -4 \leqslant x < -1 \\ -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + C_2 \text{ khi } -1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

Vì $f(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;3]$ nên liên tục tại $x = -1$, do đó $\dfrac{1}{3} + C_1 = -\dfrac{5}{3} \Rightarrow C_1 = -2$.

Vậy $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{3}x - 2 \text{ khi } -4 \leqslant x < -1 \\ -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \text{ khi } -1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

Theo đồ thị thì $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in [-4;3]$, dấu "=" xảy ra tại $x = -1;\ x = 3$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[-4;3]$.

Mà $f(0) = 0$ nên $f(x) \leqslant 0, \forall x \in [-4;0]$ và $f(x) \geqslant 0, \forall x \in [0;3]$.

$$S_1 = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{63}{4}.$$

$$S_2 = -\int_{-4}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-4}^{-1} \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2\right)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right)\,\mathrm{d}x = 8 + \frac{13}{12} = \frac{109}{12}.$$

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{189}{109}$.

b) Ta có $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{3}x - 2 \text{ khi } -4 \leqslant x < -1 \\ -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \text{ khi } -1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

Nên $f(2) = \dfrac{22}{3}$.

c) $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2\right)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^2 \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{16}{9} + \frac{25}{4} = \frac{161}{36}.$

d) $\displaystyle\int_{-4}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\big|_{-4}^{1} = f(1) - f(-4) = \frac{11}{3} - \left(-\frac{14}{3}\right) = \frac{25}{3}$.

Câu 22. Chọn đáp án: a b c d

a) Đặt $t = \cos x$, với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [-1;1]$.

Khi đó $y = f\left(\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{2}{3}\cos x\right) = f\left(\frac{2}{3}\cos^2 x - \frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\right)$.

Ta có $y' = \left(\frac{4}{3}t - \frac{2}{3}\right)\cdot f'\left(\frac{2}{3}t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} = -1 \\ \frac{2}{3}t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = 2 \\ t = -1. \end{array}\right.$

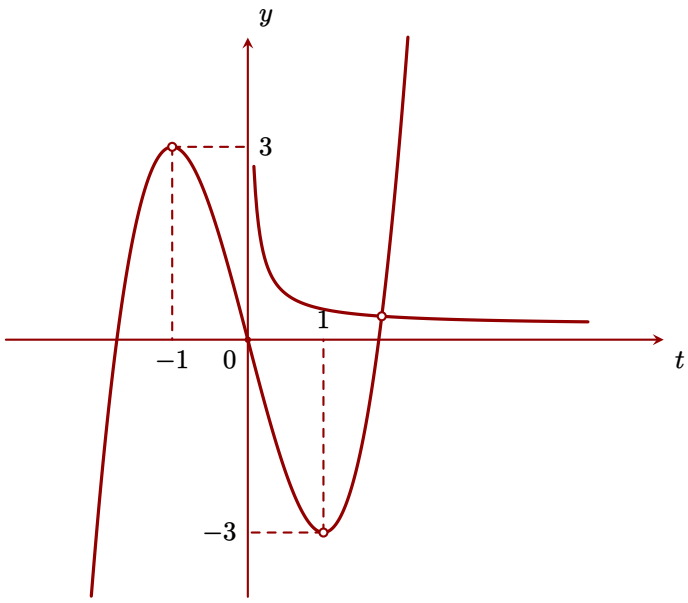
$y\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{33}{16}$, $y(-1) = f(1) = -3$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{2}{3}\cos x\right)$ bằng $\frac{33}{16}$.

b) $F(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{9}{4}x^2 + C$.

Vì $F(0) = 0$ nên $F(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{9}{4}x^2 \Rightarrow F'(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Xét hàm số $G(x) = F(x^4) - x^2$.



Ta có $G'(x) = 4x^3F'(x^4) - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2F'(x^4) - 1 = 0 \quad (*). \end{array}\right.$

Đặt $t = x^4$, $t > 0$.

Phương trình $(*) \Leftrightarrow F'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Dựa vào đồ thị ta suy ra phương trình $F'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ có đúng 1 nghiệm $t = t_0 \in (1;2)$.

Suy ra, phương trình $(*)$ có 2 nghiệm $x = \pm\sqrt[4]{t_0}$.

Do đó, hàm số $G(x)$ có 3 điểm cực trị.

Mặt khác, phương trình $G(x) = 0 \Leftrightarrow F(x^4) = x^2 \quad (1)$.

Đặt $u = x^4$, $u \geqslant 0$.

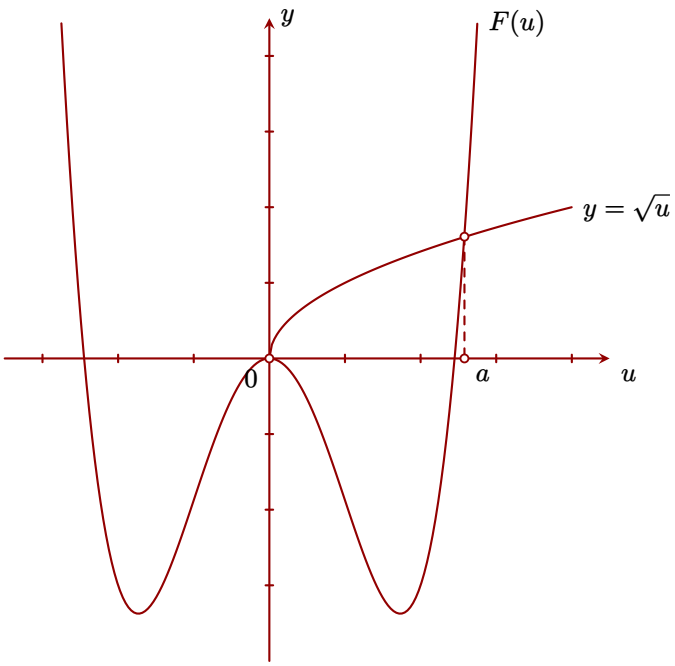
Khi đó $(1) \Leftrightarrow F(u) = \sqrt{u}$.

Từ đồ thị, suy ra phương trình $F(u) = \sqrt{u} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u = 0 \\ u = a > 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \pm\sqrt[4]{a}. \end{bmatrix}$

Do đó, phương trình $G(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt, hay đồ thị của hàm số $G(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x = 0$, $x = \pm\sqrt[4]{a}$.

Suy ra hàm số $y = \left|F(x^4) - x^2\right|$ có 5 điểm cực trị (vì có 1 điểm cực trị trùng với hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $G(x)$ với trục hoành).

c) Giả sử $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



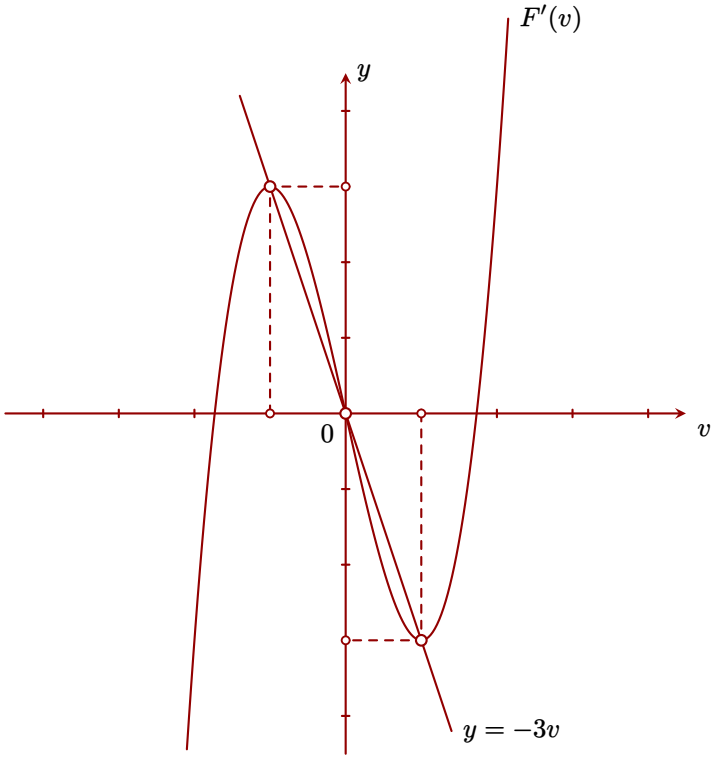
Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào đồ thị ta có

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(1) = -3 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = -3 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = d = 0 \\ c = -\dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x.$$

Suy ra $f(3) = 27$.

d) Hàm số $y = F(x^3 + 1) + \dfrac{3}{2}x^6 + 3x^3 + 2025$.



Ta có $y'=3x^2\cdot F'(x^3+1)+9x^5+9x^2=3x^2\left[F'(x^3+1)+3(x^3+1)\right]$.
Cho $y'\leqslant 0\Leftrightarrow F'(x^3+1)+3(x^3+1)\leqslant 0\Leftrightarrow F'(x^3+1)\leqslant -3(x^3+1)$.
Với $v=x^3+1$, từ đồ thị ta suy ra $F'(v)\leqslant -3v\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v\leqslant -1\\ 0\leqslant v\leqslant 1.\end{array}\right.$
Do đó, $F'(x^3+1)\leqslant -3(x^3+1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+1\leqslant -1\\ 0\leqslant x^3+1\leqslant 1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant -\sqrt[3]{2}\\ -1\leqslant x\leqslant 0.\end{array}\right.$
Suy ra hàm số $y=F(x^3+1)+\dfrac{3}{2}x^6+3x^3+2025$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 23. Chọn đáp án: a b c d
a) Vì $M\in Ox\Rightarrow M(m;0;0)$. Khi đó $\overrightarrow{AM}=(m+2;-3;-1)$, $\overrightarrow{BM}=(m-2;-1;0)$.
Do M cách đều các điểm A, B nên $AM=BM$. Suy ra
$$\sqrt{(m+2)^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{(m-2)^2+(-1)^2+0^2}$$
$\Rightarrow m^2+4m+14=m^2-4m+5$
$\Rightarrow 8m=-9\Rightarrow m=-\dfrac{9}{8}$.
Khi đó tọa độ $M\left(-\dfrac{9}{8};0;0\right)$.
Suy ra $\overrightarrow{CM}=\left(\dfrac{15}{8};1;-1\right)\Rightarrow MC=\sqrt{\left(\dfrac{15}{8}\right)^2+1^2+(-1)^2}=\dfrac{\sqrt{353}}{8}$.
b) Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;-1)\Rightarrow AB=\sqrt{21}$; $\overrightarrow{AC}=(-1;-4;0)\Rightarrow AC=\sqrt{17}$; $\overrightarrow{BC}=(-5;-2;1)\Rightarrow BC=\sqrt{30}$.
Khi đó $BC>AB>AC$. Suy ra $\widehat{A}>\widehat{C}>\widehat{B}$.
Áp dụng định lý côsin trong ΔABC ta có $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\dfrac{21+17-30}{2\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{17}}=0{,}2$.
Suy ra góc $\widehat{BAC}$ là góc nhọn.
c) Vì $ABCD$ là hình thang $\Rightarrow AD\parallel BC\Rightarrow \vec{u}_{AD}=\vec{u}_{BC}=(-5;-2;1)$.

Phương trình đường thẳng AD là $\dfrac{x+2}{-5}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-1}{1}\Rightarrow D(-5t-2;-2t+3;t+1)$.
Ta có $S_{ABCD}=3S_{\Delta ABC}\Leftrightarrow S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}=3S_{\Delta ABC}\Leftrightarrow S_{\Delta ACD}=2S_{\Delta ABC}$.
Mà diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{\sqrt{341}}{2}\Rightarrow S_{\Delta ACD}=\sqrt{341}$.
Mặt khác $\left|\left[\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{341t^2}\Rightarrow\dfrac{1}{2}\sqrt{341t^2}=\sqrt{341}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}D(-12;-1;3)\\D(8;7;-1).\end{array}\right.$
Vì $ABCD$ là hình thang $\Rightarrow D(-12;-1;3)$. Khi đó $x_0=-12,y_0=-1,z_0=3$.
Suy ra $3x_0-4y_0+z_0=3\cdot(-12)-4\cdot(-1)+3=-29$.
d) Ta có
$\overrightarrow{AM}=(a+2;b-3;c-1)\Rightarrow AM^2=(a+2)^2+(b-3)^2+(c-1)^2$;
$\overrightarrow{BM}=(a-2;b-1;c)\Rightarrow MB^2=(a-2)^2+(b-1)^2+c^2$;
$\overrightarrow{CM}=(a+3;b+1;c-1)\Rightarrow MC^2=(a+3)^2+(b+1)^2+(c-1)^2$;
$\overrightarrow{EM}=(a-1;b-1;c-1)\Rightarrow ME^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2$.
Khi đó
$$\begin{aligned}T&=MA^2+MB^2+MC^2+2ME^2\\&=5a^2+2a+19+5b^2-10b+13+5c^2-8c+4\\&=5\left(a+\frac{1}{5}\right)^2+5(b-1)^2+5\left(c-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{138}{5}\geqslant\frac{138}{5}.\end{aligned}$$
Suy ra $\min T=\dfrac{138}{5}$ khi $a=-\dfrac{1}{5};b=1;c=\dfrac{4}{5}$.
Khi đó $2a+b+c=2\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)+1+\dfrac{4}{5}=\dfrac{7}{5}$.

Câu 24. Chọn đáp án: a b c d
a)
Trường hợp 1: Ba điểm được chọn thuộc a. Ta có $5+3+1=9$ cách chọn thỏa mãn.
Trường hợp 2: Ba điểm được chọn thuộc b. Ta có $4+2=6$ cách chọn thỏa mãn.
Xác suất để ba điểm được chọn có một điểm là trung điểm của đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là hai điểm còn lại bằng $\dfrac{15}{286}$.
b) Để chọn được tam giác có diện tích bằng 1 và có ba đỉnh trong 13 điểm trên, ta có 2 trường hợp:
Trường hợp 1: Tam giác có 2 điểm liên tiếp trên a và một điểm trên b, ta có $6\cdot5=30$ tam giác thỏa mãn.
Trường hợp 2: Tam giác có 2 điểm liên tiếp trên b và một điểm trên a, ta có $5\cdot7=35$ tam giác thỏa mãn.
Xác suất chọn được tam giác có diện tích là 1 cm^2 là $\dfrac{30+35}{\mathrm{C}_{13}^3}=\dfrac{5}{22}$.
c) Để ba điểm được chọn tạo thành tam giác, ta có 2 trường hợp:
Trường hợp 1: Tam giác có 2 đỉnh trên a và 1 đỉnh trên b. Ta có $\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_6^1$ cách chọn.
Trường hợp 2: Tam giác có 2 đỉnh trên b và 1 đỉnh trên a. Ta có $\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_6^2$ cách chọn.
Xác suất chọn được ba đỉnh tạo thành tam giác là $\dfrac{\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_6^1+\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_6^2}{\mathrm{C}_{13}^3}=\dfrac{21}{26}$.
d) Số cách chọn 3 điểm từ 13 điểm đã cho là $n(\Omega)=\mathrm{C}_{13}^3=286$.

Câu 25. Đáp án: 0,4.
Gọi A là biến cố " Hạt giống A nảy mầm".
B là biến cố " Hạt giống B nảy mầm".
C là biến cố " Hạt giống C nảy mầm".
D là biến cố " Ít nhất một trong ba loại hạt giống nảy mầm".

E là biến cố " Cả ba hạt giống nảy mầm".
Ta có $\mathrm{P}(A)=a$, $\mathrm{P}(B)=b$, $\mathrm{P}(C)=0{,}8$, $\mathrm{P}(D)=0{,}964$, $\mathrm{P}(E)=0{,}224$.
Vì A, B và C độc lập với nhau nên

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D)&=\mathrm{P}(A\cup B\cup C)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(AB)-\mathrm{P}(BC)-\mathrm{P}(CA)+\mathrm{P}(ABC)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)\\\Rightarrow 0{,}964&=a+b+0{,}8-ab-0{,}8b-0{,}8a+0{,}8ab\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow 0{,}2(a+b-ab)=0{,}164\Leftrightarrow a+b-ab=0{,}82\quad(1)$.
$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)\Rightarrow 0{,}224=0{,}8ab\Leftrightarrow ab=0{,}28\quad(2)$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b-ab=0{,}82\\ab=0{,}28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0{,}4\\b=0{,}7\end{cases}\ (\text{vì } 0\leqslant a<b\leqslant 1).$$

Vậy xác suất để hạt giống A nảy mầm là 0,4.

Câu 26. Đáp án: 0,94.
Ta có

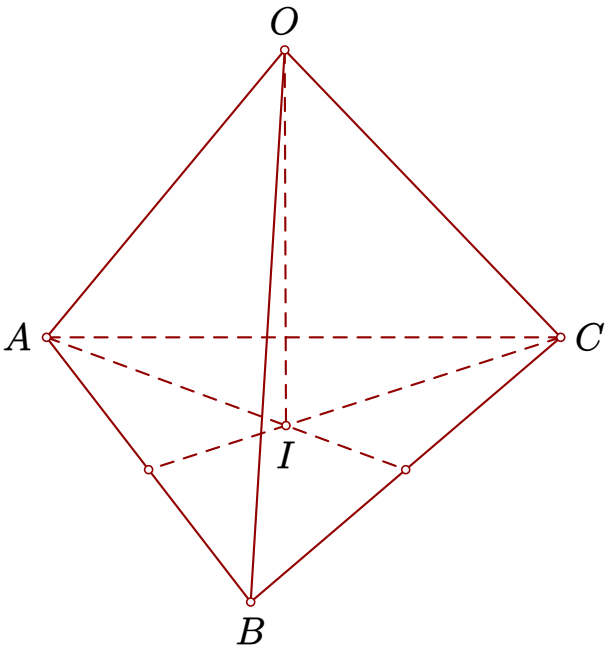
$$\begin{aligned}&2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)\\\Leftrightarrow\ &2^y+2^y+y=2x+2^y+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)\\\Leftrightarrow\ &2\cdot 2^y+y=2\left(x+2^{y-1}\right)+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)\quad(*).\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=2t+\log_2 t$ với $t>0$, ta có $(*)\Leftrightarrow f\left(2^y\right)=f\left(x+2^{y-1}\right)$.
Vì $f'(t)=2+\dfrac{1}{t\ln 2}>0,\ \forall t>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Suy ra

$$\begin{aligned}&f\left(2^y\right)=f\left(x+2^{y-1}\right)\\\Leftrightarrow\ &2^y=x+2^{y-1}\\\Leftrightarrow\ &x=2^{y-1}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{2^{y-1}}{y}.\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(y)=\dfrac{2^{y-1}}{y}$ trên $(0;+\infty)$, ta có
$g'(y)=\dfrac{2^{y-1}(y\ln 2-1)}{y^2}$; $g'(y)=0\Leftrightarrow y=\log_2 \mathrm{e}$.
Ta có $g'(y)<0\Leftrightarrow y\in(0;\log_2 \mathrm{e})$; $g'(y)>0\Leftrightarrow y\in(\log_2 \mathrm{e};+\infty)$.
Do đó $\min\limits_{(0;+\infty)} g(y)=g(\log_2 \mathrm{e})=\dfrac{\mathrm{e}\ln 2}{2}\approx 0{,}94$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y}$ là 0,94.

Câu 27. Đáp án: 75,6.



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{F_3}$.
Khi đó, hai véc-tơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA_1}$ cùng phương, do đó tồn tại số $k\neq 0$ sao cho $\overrightarrow{OA_1}=k\overrightarrow{OA}$.
Tương tự, $\overrightarrow{OB_1}=k\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC_1}=k\overrightarrow{OC}$.
Suy ra $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=k\left|\overrightarrow{OA}\right|=k\cdot l$.
Theo giả thiết, mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 12 N $\Rightarrow k\cdot l\leqslant 12\Rightarrow k\leqslant\dfrac{12}{l}$ (1).
Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{P}$.
Gọi I là tâm của chiếc đèn hình tròn.
Vì tam giác ABC là tam giác đều nên I cũng là trọng tâm của tam giác.
Theo quy tắc trọng tâm trong tam giác ABC ta được:
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow\dfrac{1}{k}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}\right)=3\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow\overrightarrow{P}=3k\overrightarrow{OI}$.
Theo giả thiết, trọng lượng của chiếc đèn là 27 N $\Rightarrow\left|\overrightarrow{P}\right|=27$ N $\Rightarrow OI=\dfrac{9}{k}$.
Ta có $AI=0{,}5$ m $=50$ cm.
Mà hình chóp $O.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên
$OI\perp(ABC)\Rightarrow OI=\sqrt{OA^2-AI^2}=\sqrt{l^2-50^2}$

$$\Rightarrow\frac{9}{k}=\sqrt{l^2-2500}$$

$$\Rightarrow k=\frac{9}{\sqrt{l^2-2500}}.$$

Từ (1) suy ra:

$$\frac{9}{\sqrt{l^2-2500}}\leqslant\frac{12}{l}\Leftrightarrow 3l\leqslant 4\sqrt{l^2-2500}$$

$$\Leftrightarrow 9l^2\leqslant 16\left(l^2-2500\right)$$

$$\Leftrightarrow 7l^2\geqslant 40000$$

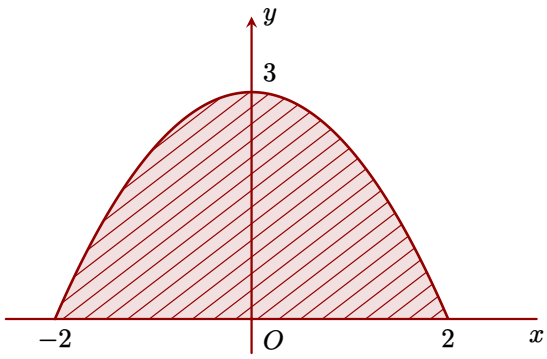
$$\Leftrightarrow l\geqslant\sqrt{\frac{40000}{7}}\approx 75{,}6\text{ cm}.$$

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây gần bằng 75,6 cm.

Câu 28. Đáp án: 160.

Tổng tiền thuế phụ thu cho x sản phẩm là $T = tx$ (nghìn đồng).
Lợi nhuận công ty thu về khi sản xuất và bán hết x sản phẩm là
$L(x) = f(x) - xg(x) - tx = -2x^2 + (320 - t)x - 30$.
Suy ra $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{320 - t}{4} \in (0; 1000]$.
Suy ra $L(x)$ lớn nhất khi $x = \dfrac{320 - t}{4} \in (0; 1000]$.
Khi đó $T = xt = \dfrac{(320 - t)t}{4} \leqslant \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{320 - t + t}{2}\right)^2 = 6400$.
Dấu "=" xảy ra khi $320 - t = t \Rightarrow t = 160 \in (0; 200)$.
Suy ra $T_{\max} = 6400$ khi $t = 160$.
Khi đó $L(x)_{\max} = 3170$.

Câu 29. Đáp án: 89,6.



Xét cánh hoa hình parabol như đề ra.
Gắn hệ tọa độ như hình vẽ (đơn vị trên trục 1 dm).
Cạnh đáy bằng 4 nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $(\pm 2; 0)$, khoảng cách từ đỉnh đến cạnh đáy bằng 3 nên tọa độ đỉnh là $(0; 3)$.
Phương trình của parabol là $f(x) = \dfrac{3}{4}\left(4 - x^2\right)$.
Diện tích mỗi cánh hoa bằng $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \frac{3}{4}\left(4 - x^2\right)\,\mathrm{d}x = 8\ \mathrm{dm}^2$.
Diện tích của hình lục giác đều có cạnh 4 dm bằng $6 \cdot \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$.
Vậy diện tích của hoa văn bằng $6 \cdot 8 + 24\sqrt{3} \approx 89{,}6\ \mathrm{dm}^2$.

Câu 30. Đáp án: 3.
Đồ thị hàm số bậc ba đã cho có điểm cực đại thuộc trục hoành khi và chỉ khi có số thực a thỏa mãn đồng nhất $x^3 - mx^2 + (m+3)x - 4 = (x-a)^2\left(x - \dfrac{4}{a^2}\right)$ và $a < \dfrac{4}{a^2} \Leftrightarrow a < \sqrt[3]{4}$ $(*)$.
Đồng nhất hai vế ta có

$$\begin{cases} m = 2a + \dfrac{4}{a^2} \\ m + 3 = a^2 + \dfrac{8}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2a + \dfrac{4}{a^2} \\ 2a + \dfrac{4}{a^2} = a^2 + \dfrac{8}{a} - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2a + \dfrac{4}{a^2} \\ a^4 - 2a^3 - 3a^2 + 8a - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2a + \dfrac{4}{a^2} \\ \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = \pm 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (*), ta có $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-2 \end{array}\right.$ suy ra $m=6$ hoặc $m=-3$ (đều nguyên).

Khi đó tổng cần tìm bằng 3.

Câu 31. Ta có

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x+\cos x)^2+\cos^2 x}{\sin 2x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sin 2x+\cos^2 x}{\sin 2x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin 2x+\cos^2 x}+1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin 2x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\frac{\pi}{6}$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x(2\tan x+1)}\,\mathrm{d}x+\frac{\pi}{6}.$$

Đặt $t=2\tan x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{2\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$.

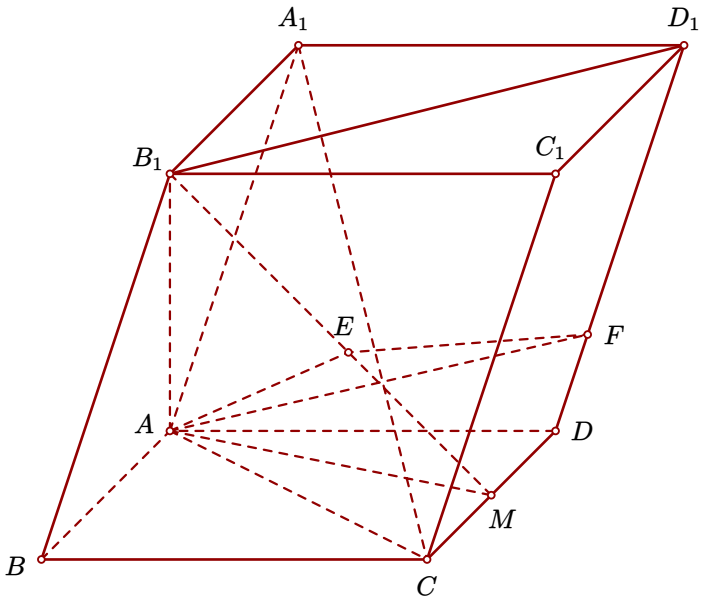
Khi đó

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{1+\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{1+2\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+2\sqrt{3}\right)-\ln\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right)+\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(9-4\sqrt{3}\right)+\frac{\pi}{6}.$$

Câu 32. 1)



Vì hai mặt phẳng (B_1AB) và (B_1AC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; $(B_1AB) \cap (B_1AC) = B_1A \Rightarrow B_1A \perp (ABCD)$.

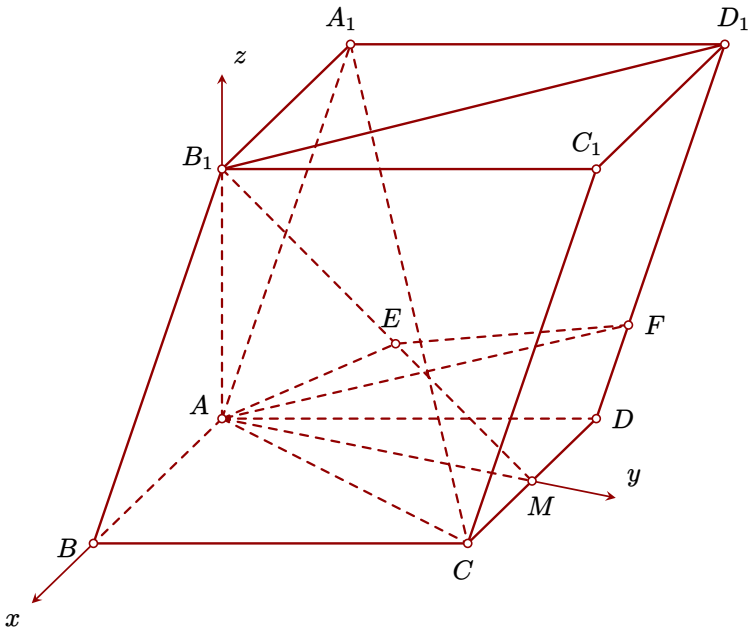
+) $\phi = ((B_1CD),(A_1B_1C_1D_1)) = \widehat{AMB_1}$.

Ta có $\tan\phi = \dfrac{B_1A}{AM} \Leftrightarrow B_1A = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

+) $S_{ABCM} = \dfrac{3}{2} \cdot S_{ABC} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8}$.

Suy ra thể tích khối chóp $B_1.ABCM$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot B_1A \cdot S_{ABCM} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{3a^3}{8}$.

2)



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ $(A(0;0;0))$.

Ta có $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $B_1A = a\sqrt{3} \Rightarrow M\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B_1(0;0;a\sqrt{3})$; $E\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Lại có $B(a;0;0)$; $D\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$; $C\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$. Giả sử $F(x;y;z)$.

Ta có $DF \parallel BB_1 \Rightarrow \overrightarrow{DF} = k \cdot \overrightarrow{BB_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{a}{2} = -ka \\ y - \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = 0 \\ z = ka\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -ka - \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ z = ka\sqrt{3}. \end{cases}$

$\Rightarrow F\left(-ka - \dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};ka\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \left(-a\left(k+\dfrac{1}{2}\right);\dfrac{a\sqrt{3}}{4};a\sqrt{3}\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\right)$; $\overrightarrow{AC}\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Theo giả thiết $EF \perp AC \Rightarrow \left(\overrightarrow{EF}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{a^2}{2}\left(k+\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{3a^2}{8} = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{4}$.

$\Rightarrow F\left(-\dfrac{3a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{AE} = \left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ cùng phương với $\vec{u} = (0;1;2)$; $\Rightarrow \overrightarrow{AF}\left(-\dfrac{3a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$ cùng phương với $\vec{v} = (-\sqrt{3};2;1)$.

$\Rightarrow (AEF)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u},\vec{v}] = (-3;-2\sqrt{3};\sqrt{3})$.

Mặt khác (AEM) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{i} = (1;0;0)$.
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AEM) và (AEF).
$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{i}\right|}{|\overrightarrow{n}|\cdot\left|\overrightarrow{i}\right|} = \dfrac{3}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Câu 33. Để không mất tính tổng quát, giả sử $a \geqslant b \geqslant c$, từ $a^2+b^2+c^2 = 1$, ta có $1 \leqslant 3a^2 \Rightarrow a^2 \geqslant \dfrac{1}{3}$.
Mặt khác, $2bc \leqslant b^2+c^2 = 1-a^2 \Rightarrow 0 \leqslant 2bc \leqslant 1-\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 0 \leqslant bc \leqslant \dfrac{1}{3}$.
Ta có $P^2 = [a(1-4bc)+(b+c)\cdot 1]^2 \leqslant \left[a^2+(b+c)^2\right]\left[(1-4bc)^2+1\right] = (1+2bc)\left[(1-4bc)^2+1\right]$.
Dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{a}{1-4bc} = b+c$.
Đặt $t = bc \Rightarrow 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{3}$, suy ra $P^2 \leqslant (1+2t)\left[(1-4t)^2+1\right] = 32t^3-4t+2$.
Xét hàm số $f(t) = 32t^3-4t+2$ với $t \in \left[0;\dfrac{1}{3}\right]$.
Ta có $f'(t) = 96t^2-4$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$.
Khi đó $f(0) = 2$; $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{50}{27}$; $f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{12}\right) \approx 1{,}4556$.
Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ là 2 khi $t = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = c = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ a = b = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$.
Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\sqrt{2}$.

Sở Phú Thọ

Câu 1. Chọn đáp án C
Gọi x là kết quả của bài kiểm tra cuối cùng.
Khi đó:
$\dfrac{90\%+82\%+78\%+80\%+x}{5} \geqslant 85\% \Leftrightarrow x \geqslant 95\%.$
Vậy ở bài kiểm tra cuối cùng, An cần đạt được ít nhất 95% để được giảm 30% học phí.

Câu 2. Chọn đáp án B
Nhóm chứa mốt là $[80;85)$.
Khi đó, $M_o = 80 + \dfrac{10-9}{(10-9)+(10-5)}(85-80) = 80,8.$

Câu 3. Chọn đáp án D
Ta có
$\sin 2x(1+\cos x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x(1+\cos x) = 0$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = 0\\ \cos x = -1\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$
Vì $x \in (\pi;3\pi)$ nên $\pi < \dfrac{k\pi}{2} < 3\pi \Leftrightarrow 2 < k < 6.$
Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{3;4;5\}$.
Do đó, các nghiệm của phương trình trên khoảng $(\pi;3\pi)$ là $x \in \left\{\dfrac{3\pi}{2};2\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right\}$.
Tổng các nghiệm này bằng $\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi + \dfrac{5\pi}{2} = 6\pi.$

Câu 4. Chọn đáp án A
Theo bài ra, ta có

$$\begin{cases} u_2 = -3 \\ u_1 + u_2 + u_3 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = -3 \\ u_1 + u_3 = -10 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = -3 \\ u_1 \left(1 + q^2\right) = -10 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = -3 \\ \dfrac{1 + q^2}{q} = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = -3 \\ 3q^2 - 10q + 3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = -3 \\ \left[\begin{array}{l} q = 3 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ u_1 = -1 \end{cases} \quad (\text{do } q > 1).$$

Số hạng thứ 10 của cấp số nhân là
$u_{10} = u_1 \cdot q^9 = -1 \cdot 3^9 = -19683.$

Câu 5. Chọn đáp án B

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\ln\left(x^2 - 2x + 4\right) \cdot \left[\ln\left(x^2 - 2x + 4\right)\right]' \\ &= 2\ln\left(x^2 - 2x + 4\right) \cdot \frac{\left(x^2 - 2x + 4\right)'}{x^2 - 2x + 4} \\ &= 2\ln\left(x^2 - 2x + 4\right) \cdot \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 4} \\ &= \frac{4x - 4}{x^2 - 2x + 4} \ln\left(x^2 - 2x + 4\right). \end{aligned}$$

Câu 6. Chọn đáp án A

Ta có
$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left[2024\sin(\pi + x) + \frac{2025}{\cos^2 x}\right] \mathrm{d}x \\ &= -2024 \int \sin x\,\mathrm{d}x + 2025 \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2024\cos x + 2025\tan x + C. \end{aligned}$$

Câu 7. Chọn đáp án A

Do C thuộc trục Oy nên toạ độ điểm C có dạng $C(0; c)$.
Vì trọng tâm G của tam giác ABC thuộc đường thẳng d: $2x - y + 1 = 0$ nên toạ độ của G có dạng $G(t; 2t + 1)$.
Áp dụng công thức toạ độ trọng tâm tam giác, ta có:
$$\begin{cases} t = \dfrac{-1 + 4 + 0}{3} \\ 2t + 1 = \dfrac{2 + 0 + c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow C(0; 7).$$
Ta có:
$\overrightarrow{AB} = (5; -2) \Rightarrow AB = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}.$
$\overrightarrow{AC} = (1; 5) \Rightarrow AC = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}.$
$\overrightarrow{BC} = (-4; 7) \Rightarrow BC = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65}.$

Chu vi của tam giác ABC là:
$P = AB + BC + CA = \sqrt{29} + \sqrt{65} + \sqrt{26} \approx 19.$
Vậy chu vi của tam giác ABC xấp xỉ bằng 19.

Câu 8. Chọn đáp án A

Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (với $a > b > 0$).
Theo bài ra, ta có
$2a = 8 \Rightarrow a = 4$ và $2b = 6 \Rightarrow b = 3$.
Phương trình chính tắc của (E) là
$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$
Gọi $A(x_A; y_A)$ là một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở nằm trong góc phần tư thứ nhất, với $x_A > 0, y_A > 0$.
Do $A \in (E)$ nên
$\dfrac{x_A^2}{16} + \dfrac{y_A^2}{9} = 1.$
Diện tích của hình chữ nhật nội tiếp elip là
$S = (2x_A)(2y_A) = 4x_A y_A = 24 \cdot 2 \cdot \dfrac{x_A}{4} \cdot \dfrac{y_A}{3}.$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có
$S \leqslant 24\left(\dfrac{x_A^2}{16} + \dfrac{y_A^2}{9}\right) = 24 \cdot 1 = 24.$
Dấu " =" xảy ra khi và chỉ khi
$\dfrac{x_A}{4} = \dfrac{y_A}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2\sqrt{2} \\ y_A = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$
Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là 24.

Câu 9. Chọn đáp án D

Đặt $\begin{cases} x = 3 + 5\sin t^\circ \\ y = 4 + 5\cos t^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin t^\circ = \dfrac{x-3}{5} \\ \cos t^\circ = \dfrac{y-4}{5}. \end{cases}$
Mà $\sin^2 t^\circ + \cos^2 t^\circ = 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25.$
Do đó điểm $N(x; y)$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3; 4)$ và bán kính $R = 5$.
Khoảng cách từ N đến gốc tọa độ O là ON.
Ta có $ON \leqslant OI + R = \sqrt{3^2 + 4^2} + 5 = 10.$
Do đó điểm N cách xa gốc tọa độ nhất khi $ON = 10$.
Dấu " =" xảy ra khi I nằm giữa O và N, tức là $\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OI}$.
Suy ra tọa độ điểm $N(x_0; y_0)$ thỏa mãn $\begin{cases} x_0 = 2 \cdot 3 = 6 \\ y_0 = 2 \cdot 4 = 8. \end{cases}$
Vậy $x_0 + y_0 = 6 + 8 = 14.$

Câu 10. Chọn đáp án D

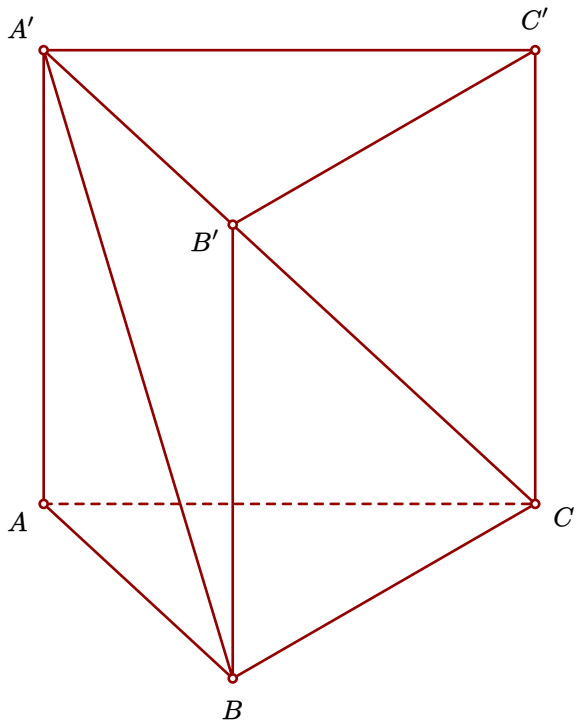
Số phần tử của không gian mẫu là
$n(\Omega) = 10!$.
Gọi A là biến cố: " Mỗi bạn nam đều đứng giữa hai bạn nữ, đồng thời ba bạn Hồng, Huệ, Lan luôn đứng cạnh nhau".
Để xếp thoả mãn yêu cầu bài toán, ta thực hiện các công đoạn sau:
- Bước 1: Xếp ba bạn Hồng, Huệ, Lan đứng liền nhau thành một nhóm X, có 3! cách.

- Bước 2: Xếp nhóm X cùng 4 bạn nữ còn lại thành một hàng ngang (tổng cộng 5 phần tử nữ), có 5! cách.
- Bước 3: Giữa 5 phần tử nữ này có đúng 4 khoảng trống ở giữa các bạn nữ (không tính hai đầu hàng vì mỗi bạn nam bắt buộc phải đứng giữa hai bạn nữ). Ta chọn 3 trong 4 khoảng trống đó rồi xếp 3 bạn nam vào, có A_4^3 cách.

Theo quy tắc nhân, số phần tử của biến cố A là
$n(A) = 3! \cdot 5! \cdot \mathrm{A}_4^3$.
Vậy xác suất của biến cố A là
$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3! \cdot 5! \cdot \mathrm{A}_4^3}{10!} = \frac{1}{210}.$$

Câu 11. Chọn đáp án B
+) Đầu tiên nhốt 6 con vật lớn nhất vào 6 chuồng khác nhau, mà có 9 chuồng vừa cho con vật lớn nhất nên số cách xếp là A_9^6.
+) Nhốt nốt 6 con vật còn lại vào 6 chuồng còn lại có 6! cách.
Vậy số cách xếp thỏa mãn bài toán là $\mathrm{A}_9^6 \cdot 6! = 43545600$.

Câu 12. Chọn đáp án B



Ta biểu diễn các véc-tơ theo ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}$:
$\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}$,
$\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}$.
Do lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên:
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0,$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{AB^2}{2}.$
Vì $A'B \perp B'C$ nên $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{B'C} = 0$:

$$\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{B'C}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-AB^2+AA'^2=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{AB^2}{2}-AB^2+AA'^2=0$$
$$\Leftrightarrow 2AA'^2=AB^2.$$

Mặt khác, xét tam giác vuông $A'AB$ tại A:
$AB^2+AA'^2=A'B^2=6$.
Suy ra:

$$2AA'^2+AA'^2=6\Leftrightarrow 3AA'^2=6\Leftrightarrow\begin{cases}AA'=\sqrt{2}\\AB=2\end{cases}.$$

Diện tích đáy là tam giác đều ABC:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}.$$

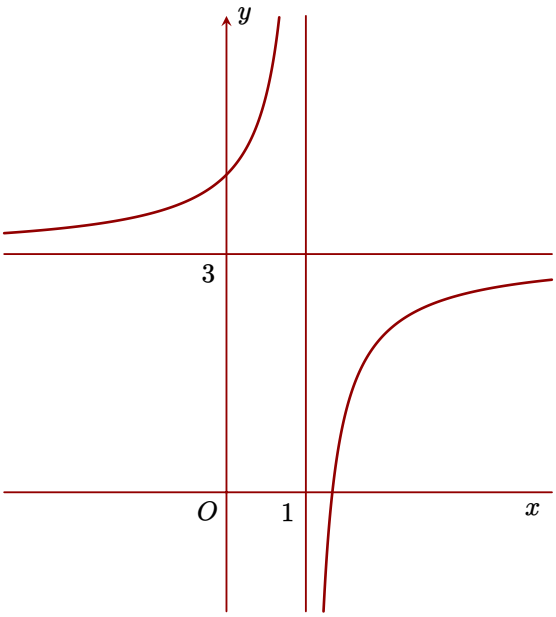
Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là
$V=AA'\cdot S_{\Delta ABC}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

Câu 13. Chọn đáp án A
Do số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng ngay trước là 1 ghế nên coi số ghế mỗi hàng lập thành một cấp số cộng có công sai $d=1$, $u_1=30$ và có 20 số hạng.
Vậy tổng số ghế chính là tổng số khán giả bằng $S_{20}=\frac{20}{2}\left[2\cdot 30+(20-1)\cdot 1\right]=790$.
Suy ra giá tiền của mỗi vé là $\frac{71100000}{S_{20}}=90000$ đồng.

Câu 14. Chọn đáp án B
Ta có $f'(x)=\frac{x^2-4x-2a-b}{(x-2)^2}$.
Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3,\end{array}\right.$ do đó $x^2-4x-2a-b=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3\Rightarrow -2a-b=3$.
Mặt khác $f(0)=1\Leftrightarrow -\frac{b}{2}=1\Leftrightarrow b=-2$.
Suy ra $-2a-(-2)=3\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$.
Hàm số đã cho là $f(x)=\frac{x^2-\frac{1}{2}x-2}{x-2}$.
Dựa vào dấu của $f'(x)$, ta thấy $f'(x)>0$ với mọi $x\in(-4;-3)$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-4;-3]$.
Do đó $\min\limits_{[-4;-3]}f(x)=f(-4)=\frac{(-4)^2-\frac{1}{2}(-4)-2}{-4-2}=-\frac{8}{3}$.
Với $\min\limits_{[-4;-3]}f(x)=\frac{k}{m}=-\frac{8}{3}$ (với $k=-8$, $m=3$), ta có $k-2m=-8-2\cdot 3=-14$.

Câu 15. Chọn đáp án B
Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=1$ nên $b=c$.
Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=3$ nên $-\frac{a}{b}=3\Leftrightarrow a=-3b$.
Khi đó hàm số có dạng $f(x)=\frac{-3bx+2}{bx-b}$ với $b\neq 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $y=-\dfrac{2}{b}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{2}{3b}$.



Dựa vào bảng biến thiên (hoặc hình dáng đồ thị hàm số), ta có

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{b}>3 \\ -\dfrac{2}{3b}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3b+2}{b}<0 \\ \dfrac{3b+2}{3b}<0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}<b<0.$$

Do đó $a+b-c=-3b+b-b=-3b$.

Vì $-\dfrac{2}{3}<b<0$ nên $0<-3b<2 \Rightarrow a+b-c\in(0;2)$.

Câu 16. Chọn đáp án C

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x\geqslant -2 \\ x^2-6x+4m>0 \end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+4m}}=0$ (do $x\geqslant -2$ nên hàm số không xác định khi $x\to-\infty$).

Suy ra đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Để đồ thị hàm số đã cho có đúng ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có đúng hai đường tiệm cận đứng.

Điều này tương đương với phương trình $x^2-6x+4m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1,x_2>-2$ (khi $x=-2$ thì tử số triệt tiêu, xét riêng nếu $x=-2$ là nghiệm thì hàm số không xác định về phía lân cận trái/phải nên không tạo ra đường tiệm cận đứng tại đó).

Xét phương trình $x^2-6x+4m=0\Leftrightarrow -4m=x^2-6x \quad (*)$.

Xét hàm số $g(x)=x^2-6x$ trên khoảng $(-2;+\infty)$:

Ta có $g'(x)=2x-6=0\Leftrightarrow x=3\in(-2;+\infty)$.

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(-2;+\infty)$:

x	-2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	16	↘	-9	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -2 khi và chỉ khi:
$-9 < -4m < 16 \Leftrightarrow -4 < m < \dfrac{9}{4} = 2{,}25$.
Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.
Vậy tập hợp S có 6 phần tử.

Câu 17. Chọn đáp án B
Ta có:
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \\ x = 1 \quad \text{(nghiệm bội chẵn)}. \end{cases}$$
Do $x = 1$ là nghiệm bội chẵn nên $f'(x)$ không đổi dấu qua điểm $x = 1$, các điểm cực trị của $f(x)$ chỉ là $x = 0$ và $x = 5$.
Xét đạo hàm của hàm số $g(x) = f(x^2 + m)$:

x	$-\infty$		0		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘		↘	$f(5)$	↗	$+\infty$

$g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + m) = 2x(x^2 + m)(x^2 + m - 1)^2(x^2 + m - 5)$.
Phương trình $g'(x) = 0$ có các nghiệm đơn hoặc bội lẻ là nghiệm của:
$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
$x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x^2 = -m \quad (1)$,
$x^2 + m - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 - m \quad (2)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x^2 + m$	$+\infty$	↘	m	↗	$+\infty$

$y = 5$
$y = 0$

Để hàm số $g(x)$ có đúng 3 điểm cực trị thì phương trình $g'(x)=0$ phải có đúng 3 nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) phân biệt.
Vì luôn có nghiệm $x=0$, nên tổng số nghiệm đơn khác 0 của (1) và (2) phải bằng 2.
Mặt khác, với mọi m ta luôn có $-m<5-m$. Do đó:
- Phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$, tức là $-m\leqslant 0\Leftrightarrow m\geqslant 0$.
- Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là $5-m>0\Leftrightarrow m<5$.
Suy ra: $0\leqslant m<5$.
Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;3;4\}$.
Vậy có tất cả 5 giá trị nguyên của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18. Chọn đáp án D
Ta có: $h(t)=\int h'(t)\,\mathrm{d}t=\int(3at^2+2bt)\,\mathrm{d}t=at^3+bt^2+C$. Do ban đầu bể không có nước nên $h(0)=0\Rightarrow C=0$, suy ra:
$h(t)=at^3+bt^2$. Sau 2 phút thể tích nước trong bể là 16 dm^3, sau 5 phút thể tích nước trong bể là 175 dm^3, nên ta có hệ phương trình:
$\begin{cases}h(2)=16\\h(5)=175\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8a+4b=16\\125a+25b=175\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2.\end{cases}$ Do đó, hàm thể tích nước trong bể là: $h(t)=t^3+2t^2$.
Thể tích nước trong bể sau khi bơm được 10 phút là: $h(10)=10^3+2\cdot 10^2=1200$ dm^3.

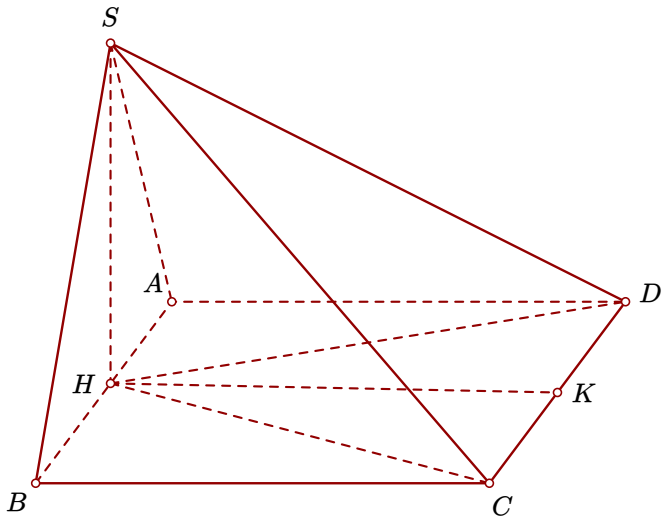
Câu 19. Chọn đáp án D
Ta có
$$f(7)-f(2)=\int_2^7 f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_2^4 f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_4^7 f'(x)\,\mathrm{d}x=S_1-S_2=\pi-\frac{9}{2}.$$
Trong đó:
- S_1 là diện tích của một phần tư hình tròn giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và các trục toạ độ trên đoạn $[2;4]$.
- S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$, trục hoành $y=0$ và hai đường thẳng $x=4$, $x=7$ (tam giác vuông cân).

Câu 20. Chọn đáp án C
Ta có tọa độ các điểm $A\left(-2;-2k+\frac{1}{4}\right)$, $B\left(1;k+\frac{1}{4}\right)$, $C\left(5;5k+\frac{1}{4}\right)$.
Suy ra $\begin{cases}AB=\sqrt{(1-(-2))^2+(3k)^2}=\sqrt{9k^2+9}=3\sqrt{k^2+1}\\BC=\sqrt{(5-1)^2+(4k)^2}=\sqrt{16k^2+16}=4\sqrt{k^2+1}.\end{cases}$
Do đó $BC-AB=\sqrt{k^2+1}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow k^2+1=\frac{25}{16}\Leftrightarrow k^2=\frac{9}{16}\Leftrightarrow k=\frac{3}{4}$ (với $k>0$).
Suy ra phương trình đường thẳng là $g(x)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$.
Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là $x=-2$, $x=1$, $x=5$ (trong đó $x=1$ là nghiệm tiếp xúc), nên
$f(x)-g(x)=a(x+2)(x-1)^2(x-5)$ $(a<0)$.
Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trên đoạn $[1;5]$ bằng $\frac{24}{5}$, do đó
$$\int_1^5[g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x=\frac{24}{5}\Leftrightarrow-\int_1^5 a(x+2)(x-1)^2(x-5)\,\mathrm{d}x=\frac{24}{5}$$
$$\Leftrightarrow\frac{576}{5}a=-\frac{24}{5}$$
$$\Leftrightarrow a=-\frac{1}{24}.$$

Suy ra
$g(x)-f(x)=\dfrac{1}{24}(x+2)(x-1)^2(5-x)=-\dfrac{1}{24}x^4+\dfrac{5}{24}x^3+\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{17}{24}x+\dfrac{5}{12}.$
Khi đó
$$\begin{aligned}f(x)&=g(x)-[g(x)-f(x)]\\&=\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{24}x^4+\frac{5}{24}x^3+\frac{1}{8}x^2-\frac{17}{24}x+\frac{5}{12}\right)\\&=\frac{1}{24}x^4-\frac{5}{24}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{35}{24}x-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$
Do đó $24f(x)+x=x^4-5x^3-3x^2+36x-4.$
Vậy tích phân cần tính là $\displaystyle\int_{-2}^{4}[24f(x)+x]\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{4}(x^4-5x^3-3x^2+36x-4)\,\mathrm{d}x=\frac{156}{5}.$

Câu 21. Chọn đáp án A
Với mọi $x\in[2;4]$, ta có:
$$\begin{aligned}(x+3)f'(x)=f(x)-3x^2f^2(x)&\Leftrightarrow\frac{(x+3)f'(x)-f(x)}{f^2(x)}=-3x^2\\&\Leftrightarrow\frac{f(x)-(x+3)f'(x)}{f^2(x)}=3x^2\\&\Leftrightarrow\left[\frac{x+3}{f(x)}\right]'=3x^2.\end{aligned}$$
Lấy nguyên hàm hai vế, ta được:
$\dfrac{x+3}{f(x)}=\displaystyle\int 3x^2\,\mathrm{d}x=x^3+C.$
Mặt khác:
$f(2)=\dfrac{5}{8}\Rightarrow\dfrac{2+3}{\frac{5}{8}}=2^3+C\Leftrightarrow 8=8+C\Leftrightarrow C=0.$
Suy ra:
$\dfrac{x+3}{f(x)}=x^3\Rightarrow f(x)=\dfrac{x+3}{x^3}.$
Vậy:
$\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_2^4\frac{x+3}{x^3}\,\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^2}\right)\Big|_2^4=\frac{17}{32}.$

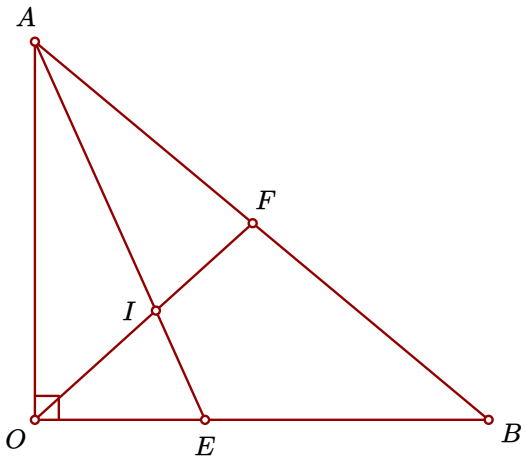
Câu 22. Chọn đáp án C



Áp dụng định lí cosin trong tam giác HBC:
$\cos\widehat{HBC} = \dfrac{BH^2 + BC^2 - HC^2}{2BH \cdot BC} \Rightarrow HC^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow HC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ và $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABCD)$, suy ra $\widehat{SCH} = 30^\circ$.
Do đó:
$SH = HC \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{2}$.
Gọi K là trung điểm của CD.
Tứ giác $HBCK$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HK}$. Khi đó:
$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HS} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HK} - \overrightarrow{HS}$,
$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HK}$.
Do $SH \perp (ABCD)$ nên $\overrightarrow{HS} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$ và $\overrightarrow{HS} \cdot \overrightarrow{HK} = 0$. Suy ra:
$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DH} = \left(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HK} - \overrightarrow{HS}\right)\left(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HK}\right) = HB^2 - HK^2 = \dfrac{a^2}{4} - a^2 = -\dfrac{3a^2}{4}$.
Tính độ dài các đoạn thẳng:
$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4}} = a$
$DH = \sqrt{AH^2 + AD^2 - 2AH \cdot AD \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + a^2 - 2 \cdot \dfrac{a}{2} \cdot a \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.
Ta có:
$\cos\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{DH}\right) = \dfrac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DH}}{SC \cdot DH} = \dfrac{-\dfrac{3a^2}{4}}{a \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{2}} = -\dfrac{3}{2\sqrt{7}} = -\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$.
Suy ra:
$\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{DH}\right) \approx 124{,}54^\circ$.

Câu 23. Chọn đáp án C
Ta có $\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1) \Rightarrow BC = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{30}$.
Vì tứ giác $ABCD$ là hình thang có đáy AD (tức là $AD \parallel BC$) và có cùng chiều cao h kẻ từ A xuống đường thẳng BC, nên $S_{ABCD} = \dfrac{(AD + BC)h}{2} = \dfrac{AD \cdot h}{2} + \dfrac{BC \cdot h}{2} = S_{ACD} + S_{ABC}$.
Mặt khác
$$S_{ABCD} = 3S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{(AD + BC)h}{2} = 3 \cdot \frac{BC \cdot h}{2}$$
$$\Leftrightarrow AD + BC = 3BC$$
$$\Leftrightarrow AD = 2BC.$$
Vì AD cùng hướng với BC nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} = 2(-5; -2; 1) = (-10; -4; 2)$.
Suy ra tọa độ điểm $D(x; y; z)$ thỏa mãn $\begin{cases} x - (-2) = -10 \\ y - 3 = -4 \\ z - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow D(-12; -1; 3)$.
Vậy $x + y + z = -12 + (-1) + 3 = -10$.

Câu 24. Chọn đáp án A



Ta có
$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3,$
$OB = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = 4,$
$AB = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(-\frac{8}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 1\right)^2} = 5.$
Vì $OA^2 + OB^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = AB^2$ nên tam giác OAB vuông tại O.
Gọi F là chân đường phân giác trong góc O của tam giác OAB.
Theo tính chất đường phân giác
$\frac{FA}{FB} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \frac{4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{7}.$
Suy ra tọa độ điểm $F\left(\frac{12}{7}; 0; \frac{12}{7}\right) \Rightarrow OF = \sqrt{\left(\frac{12}{7}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{12}{7}\right)^2} = \frac{12\sqrt{2}}{7}.$
Mặt khác, trong tam giác OAB, đoạn AF là cạnh của tam giác OAF.
Theo tính chất đường phân giác, $AF = \frac{3}{7}AB = \frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{15}{7}.$
Tâm đường tròn nội tiếp I thuộc đoạn OF, và AI là đường phân giác trong của góc A trong tam giác OAF, do đó
$\frac{IO}{IF} = \frac{AO}{AF} = \frac{3}{\frac{15}{7}} = \frac{7}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{7}{12}\overrightarrow{OF}.$
Suy ra tọa độ điểm $I\left(\frac{7}{12} \cdot \frac{12}{7}; \frac{7}{12} \cdot 0; \frac{7}{12} \cdot \frac{12}{7}\right) \Rightarrow I(1; 0; 1).$
Do đó $a = 1, b = 0, c = 1.$
Vậy $a + 2b + c = 1 + 2 \cdot 0 + 1 = 2.$

Câu 25. Chọn đáp án B
Gọi A_i là biến cố " An thắng Bình ở ván thứ i", $\mathrm{P}(A_i) = 0{,}2$.
B_i là biến cố " Bình thắng An ở ván thứ i", $\mathrm{P}(B_i) = 0{,}4$.
H_i là biến cố " hai bạn hòa nhau ở ván thứ i", $\mathrm{P}(H_i) = 1 - \mathrm{P}(A_i) - \mathrm{P}(B_i) = 0{,}4$.
C là biến cố " hai bạn dừng chơi sau hai ván cờ".
Ta có $C = H_1A_2 \cup H_1B_2$.
Nên $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(H_1) \cdot \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(H_1) \cdot \mathrm{P}(B_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}24.$

Câu 26. Chọn đáp án A
Ta có $\frac{n}{4} = \frac{45}{4} = 11{,}25$, suy ra nhóm chứa Q_1 là nhóm $[170; 190)$.

$Q_1 = 170 + \dfrac{\dfrac{45}{4} - 8}{15} \cdot (190 - 170) \approx 174{,}33.$

Vậy bác An muốn chọn ra 25% hộ gia đình để khen thưởng hộ gia đình dùng điện tiết kiệm, khi đó bác cần chọn những hộ gia đình có lượng điện tiêu thụ không vượt quá Q_1, tức 174kWh.

Câu 27. Chọn đáp án B

Ta có $h(t) = 60\sin\left(\dfrac{\pi t}{8}\right) \leqslant 60$, sóng đạt chiều cao lớn nhất là 60 cm khi $\sin\left(\dfrac{\pi t}{8}\right) = 1$, suy ra $t = 4 + 16k \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Mà $0 \leqslant t \leqslant 30 \Rightarrow -0{,}25 \leqslant k \leqslant 1{,}625 \Rightarrow k \in \{0; 1\} \Rightarrow t \in \{4; 20\}$.

Vậy $a = 4$, $b = 20$ nên $a + b = 24$.

Câu 28. Chọn đáp án A

Theo bài ra, ta có đồ thị (C) và đường tròn có tiếp tuyến chung tại $B(10; 1) = d \cap (C)$.

$y' = \dfrac{1}{x\ln 10} \Rightarrow y'(10) = \dfrac{1}{10\ln 10}$ là hệ số góc của tiếp tuyến.

Mà tiếp tuyến vuông góc với $AB \Rightarrow k_{AB} = -10\ln 10$ là hệ số góc của đường thẳng AB.

Phương trình đường thẳng AB:

$y = -10\ln 10(x - 10) + 1 \Rightarrow A\left(\dfrac{1 + 100\ln 10}{10\ln 10}; 0\right)$.

Vậy $x_A = \dfrac{1 + 100\ln 10}{10\ln 10} \approx 10{,}04343 \in \left(10; \dfrac{21}{2}\right)$.

Câu 29. Chọn đáp án D

Xét hàm số $f(y) = 3^{x+y} - 6^x + 2$ với $y \geqslant 1$:

$f'(y) = 3^{x+y}\ln 3 > 0, \quad \forall y \geqslant 1 \Rightarrow f(y)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Bất phương trình $f(y) \leqslant 0$ có ít nhất 4 nghiệm nguyên dương y:

$\Leftrightarrow f(4) \leqslant 0$

$\Leftrightarrow 3^{x+4} + 2 \leqslant 6^x$

$\Leftrightarrow 81 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 2 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^x \leqslant 1.$

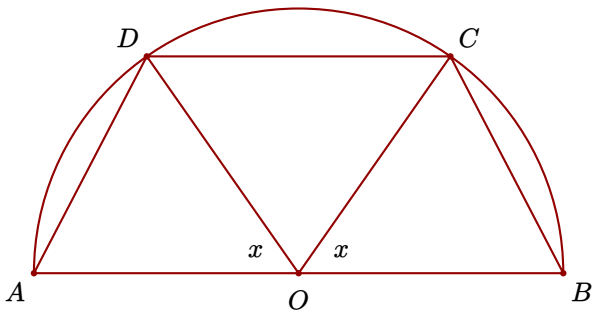
Nhận xét hàm số $g(x) = 81 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 2 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$g(x) = 1 \Leftrightarrow x = x_0 \approx 6{,}33988\ldots \Rightarrow g(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant x_0$.

Vì $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \in (-2025; 2025) \end{cases} \Rightarrow x \in \{7; 8; \ldots; 2023; 2024\}$.

Vậy có 2018 giá rị x thỏa mãn.

Câu 30. Chọn đáp án B

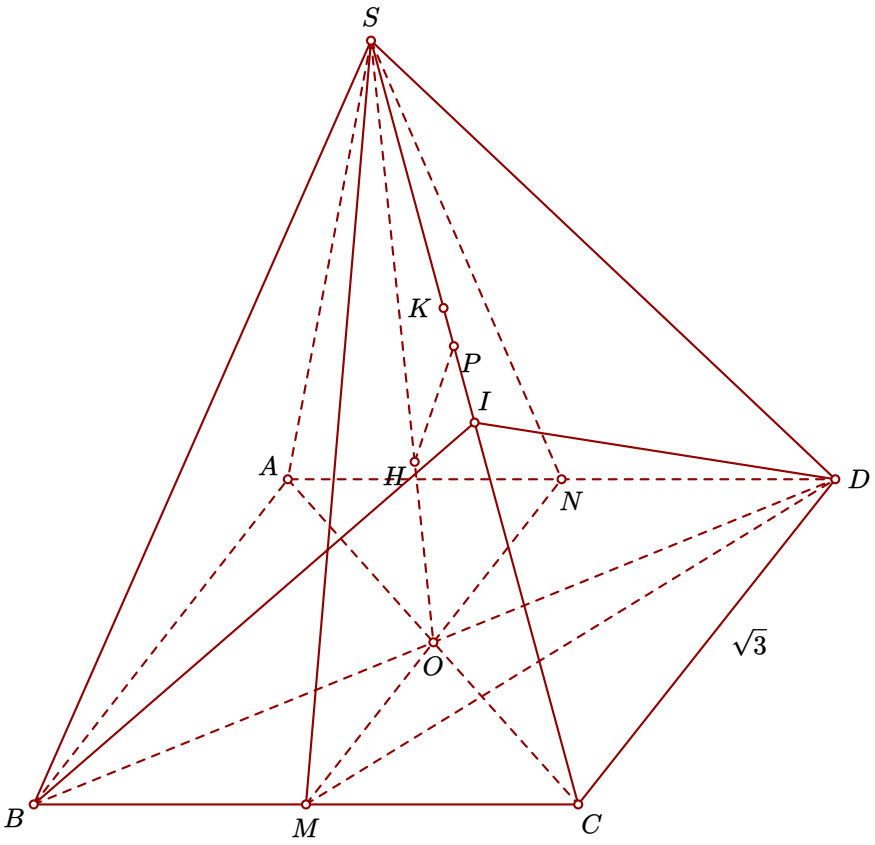


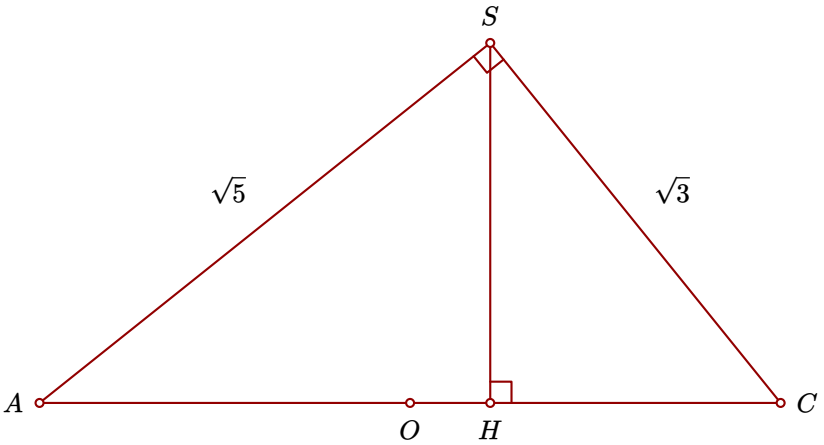
Theo bài ra, ta có $ABCD$ là hình thang cân.
Gọi O là trung điểm của $AB \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{BOC} = x \quad \left(\text{rad}, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.
$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{AOD} + S_{COD} = 4\sin x + 2\sin 2x = S$.
$S' = 4\cos x + 4\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = -1 & \text{(loại)} \\ \cos x = \dfrac{1}{2} & \end{array}\right. \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$.
Vậy, ta được $\max S = S\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$.

Câu 31. Chọn đáp án A
Đưa vào hệ trục tọa độ Oxy, với O là tâm của quả bóng bầu dục.
Ta có phương trình viền của quả bóng là elip:
$\dfrac{x^2}{9^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{y^2}{25} = 1 - \dfrac{x^2}{81} \Leftrightarrow y^2 = 25 - \dfrac{25x^2}{81}$.
Thể tích quả bóng bầu dục:
$$V = \pi \int\limits_{-9}^{9} \left(25 - \frac{25x^2}{81}\right) \mathrm{d}x = \pi \left(25x - \frac{25x^3}{243}\right)\Big|_{-9}^{9} = 300\pi.$$

Câu 32. Chọn đáp án B
Vì M thuộc trục Ox nên $M(x;0;0)$.
Gọi các điểm I, H sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$ và $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$.
Ta có $I(3;-2;0)$ và $H(4;-2;0)$.
Các điểm I và H cùng thuộc mặt phẳng (Oxy).
Gọi K là điểm đối xứng với I qua trục Ox, ta có $K(3;2;0)$.
Khi đó:
$P = 6\left|\overrightarrow{MI}\right| + 3\left|2\overrightarrow{MH}\right| = 6(MI + MH) = 6(MK + MH)$
$\Rightarrow P \geqslant 6KH = 6\sqrt{1^2 + 4^2} = 6\sqrt{17}$.

Câu 33. Chọn đáp án: a b c d





a) Theo giả thiết, ta có $\triangle BCD$ và $\triangle SBC$ lần lượt cân tại C và S.

Do đó $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

b) Ta có $(SAC) \perp (ABCD)$.

Kẻ $SH \perp AC$ $(H \in AC) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Dễ thấy $\triangle SBD = \triangle CBD$ (c-c-c) nên $SO = OC$.

Lại có $OC = OA = \dfrac{1}{2}AC$ nên $SO = \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại S.

Khi đó, ta có

$\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SC^2} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{15} \Rightarrow SH = \dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$.

$AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow OA = OC = \sqrt{2} \Rightarrow BD = 2OB = 2\sqrt{BC^2 - OC^2} = 2$.

$AH = \dfrac{SA^2}{AC} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ và $CH = 2\sqrt{2} - \dfrac{5\sqrt{2}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Suy ra

$V_{S.CDM} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{CDM} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot \dfrac{1}{4} S_{ABCD} = \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 = \dfrac{\sqrt{15}}{12}.$

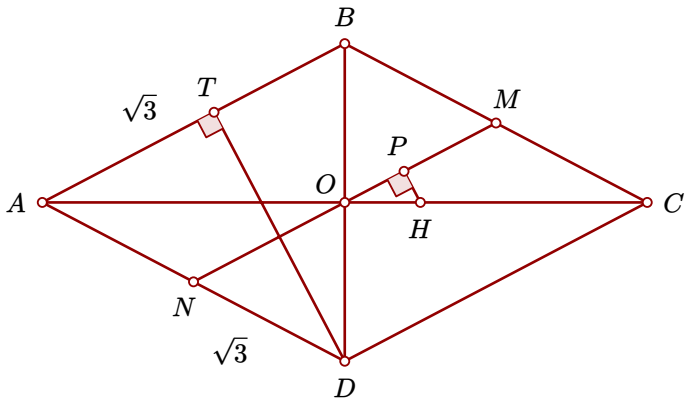
c) Vì $\triangle SBC$ và $\triangle SCD$ đều có cạnh bằng $\sqrt{3}$ nên gọi I là trung điểm của SC.

Suy ra $\begin{cases} BI \perp SC \\ DI \perp SC \end{cases} \Rightarrow$ góc nhị diện $[B, SC, D]$ là $\widehat{BID}$ và $BI = DI = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}.$

Áp dụng định lí cô-sin trong tam giác BID:

$\cos \widehat{BID} = \dfrac{BI^2 + DI^2 - BD^2}{2 \cdot BI \cdot DI} = \dfrac{\dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{4} - 4}{2 \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{3}{2}} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \sin \widehat{BID} = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}.$

d)



Gọi N là trung điểm của AD.

Ta có $CD \parallel MN \subset (SMN) \Rightarrow CD \parallel (SMN) \supset SM$.

Do đó $\mathrm{d}(CD, SM) = \mathrm{d}(CD, (SMN)) = \mathrm{d}(C, (SMN)) = \dfrac{CO}{HO} \cdot \mathrm{d}(H, (SMN))$.

Ta có $\begin{cases} AH = \dfrac{5\sqrt{2}}{4} \\ AO = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AH}{AO} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \dfrac{OH}{OA} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{OH}{OC} = \dfrac{1}{4}.$

Nên $\mathrm{d}(C, (SMN)) = 4\mathrm{d}(H, (SMN))$.

Dựng $HP \perp MN$ $(P \in MN)$ và $HK \perp SP$ $(K \in SP) \Rightarrow \mathrm{d}(H, (SMN)) = HK$.

Theo định lí Ta-lét

$HP = \dfrac{1}{4}\mathrm{d}(C, MN) = \dfrac{1}{8}\mathrm{d}(C, AB) = \dfrac{1}{8} DT = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{AO \cdot BD}{AB} = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{12}.$

Xét $\triangle SHP$ vuông tại H

$HK = \dfrac{SH \cdot HP}{\sqrt{SH^2 + HP^2}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{12}}{\sqrt{\dfrac{15}{8} + \dfrac{6}{144}}} = \dfrac{\sqrt{345}}{92} \Rightarrow \mathrm{d}(CD, SM) = \dfrac{\sqrt{345}}{23}.$

Câu 34. Chọn đáp án: a b c d

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có $f'(x) = ax^2(x - m) \quad (a < 0, m > 0)$.

$f'(x) = ax^3 - amx^2 \Rightarrow f''(x) = 3ax^2 - 2amx.$

Ta có:

$\begin{cases} f'(2) = 4 \\ f''(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a - 4am = 4 \\ 12a - 4am = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ m = 3 \end{cases}$

Vậy $f'(x) = -x^3 + 3x^2$.

a) Tập xác định của hàm số: $D=(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty)$.
Ta có:

$$h'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}\cdot f'\left(\sqrt{x^2-2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2-2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt{11}\\ x=-\sqrt{11}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{11}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{11}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$			0			$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $h(x)=f\left(\sqrt{x^2-2}\right)+2025$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{11})$ và $(\sqrt{2};\sqrt{11})$.
b) Ta có:
$g(x)=f(x^2-2x)+2024\Rightarrow g'(x)=(2x-2)\cdot f'(x^2-2x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ x^2-2x=0\quad\text{(loại)}\\ x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ x=3\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị là $x=1,x=-1,x=3$. Khi đó tổng các điểm cực trị bằng 3.
c) Ta có:

$$k(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3+9x-2025$$

$$\Rightarrow k'(x)=f'(x)-x^2+9=-x^3+3x^2-x^2+9=-x^3+2x^2+9=0\Leftrightarrow x=3.$$

Tính các giá trị:

$$k(-5)=f(-5)-\frac{6085}{3}$$

$$k(5)=f(5)-\frac{6065}{3}$$

$$k(3)=f(3)-2007$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, ta có $f(-5)<f(3)$ và $f(5)<f(3)$.
Do đó, hàm số $k(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3+9x-2025$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-5;5]$ bằng $f(3)-2007$.
d) Bất phương trình:

$$f(x)-\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\log_{\frac{1}{2}}m\right)<0\Leftrightarrow f(x)-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}<\log_2 m$$

Để bất phương trình đúng với mọi $x\in(-2;0)$ thì:

$$\log_2 m>\max_{(-2;0)}g(x)\quad\text{với } g(x)=f(x)-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow g'(x)=f'(x)-\frac{x^2}{2}+x=-x^3+\frac{5}{2}x^2+x$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\quad\text{(loại)}\\ x=-\frac{1}{3}\quad\text{(nhận)}\\ x=3\quad\text{(loại)}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$ trên $(-2;0)$:

x	-2		$-\frac{1}{3}$		0
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

$\max\limits_{(-2;0)} g(x) = g\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{81}$

$\Rightarrow \log_2 m > f\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{81} \Rightarrow m > 2^{f\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{81}}$.

Câu 35. 1)

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y' = \dfrac{x^2+2x+2m-2}{(x+1)^2} = x - 1 + 2m + \dfrac{3-2m}{x+1}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2m - 2 = 0$.

Xét $\Delta' = 3 - 2m$.

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

Khi đó $m < \dfrac{3}{2}$ (1).

Theo định lí Vi-ét, ta có

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = 2m - 2. \end{cases}$

Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Khi đó

$\mathrm{d}(A, \Delta) = \mathrm{d}(B, \Delta) \Leftrightarrow |3x_1 - y_1 - 3| = |3x_2 - y_2 - 3|$ (2).

Trường hợp 1

$(2) \Leftrightarrow 3x_1 - y_1 - 3 = 3x_2 - y_2 - 3$

$\Leftrightarrow 2x_1 + \dfrac{3-2m}{x_1+1} = 2x_2 + \dfrac{3-2m}{x_2+1}$

$\Leftrightarrow 2(x_1 - x_2) + \dfrac{(3-2m)(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)} = 0$

$\Leftrightarrow 2 + \dfrac{3-2m}{(x_1+1)(x_2+1)} = 0$ (vì $x_1 \neq x_2$)

$\Leftrightarrow 2 + \dfrac{3-2m}{2m-2-2+1} = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$ (loại).

Trường hợp 2

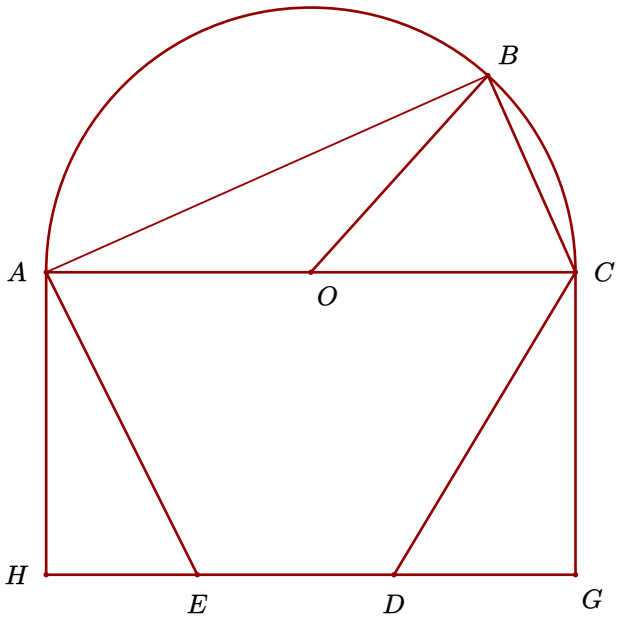
$(2) \Leftrightarrow 3x_1 - y_1 - 3 = -(3x_2 - y_2 - 3)$

$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2) + 2 - 4m - (3-2m)\left(\dfrac{1}{x_1+1} + \dfrac{1}{x_2+1}\right) - 6 = 0$

$\Leftrightarrow -4 - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn).

Vậy $m = -2$.

2)



Ta có $\widehat{ABC} = 90^\circ$.

Suy ra $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ km.

Thời gian chèo thuyền trên đoạn AB là $t_1 = \dfrac{AB}{5} = \dfrac{\sqrt{3}}{10}$ giờ.

- Trong tam giác vuông ABC, ta có

$\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \widehat{BOC} = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow l_{BC} = OA \cdot \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$ km.

Thời gian chạy bộ trên bờ hồ từ B đến C là $t_2 = \dfrac{l_{BC}}{7} = \dfrac{\pi}{42}$ giờ.

- Đặt $HE = x$ km, $DG = y$ km, $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, $x + y \leqslant 1$.

Khi đó $DE = 1 - x - y$; $DC = \sqrt{0{,}6^2 + y^2}$, $AE = \sqrt{0{,}6^2 + x^2}$.

Khi đó thời gian chạy trên đường gấp khúc $CDEA$ tính bởi

$$T(x,y) = \frac{\sqrt{0{,}6^2 + x^2}}{6} + \frac{1 - x - y}{10} + \frac{\sqrt{0{,}6^2 + y^2}}{6} \text{ (giờ)}$$

$$= \frac{\sqrt{0{,}6^2 + x^2}}{6} + \frac{0{,}5 - x}{10} + \frac{0{,}5 - y}{10} + \frac{\sqrt{0{,}6^2 + y^2}}{6} = f(x) + f(y).$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\sqrt{0{,}6^2 + t^2}}{6} + \dfrac{0{,}5 - t}{10}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

$f'(t) = \dfrac{t}{6\sqrt{0{,}6^2 + t^2}} - \dfrac{1}{10}$.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{6\sqrt{0{,}6^2 + t^2}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{\sqrt{0{,}6^2 + t^2}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 25t^2 = 9\left(t^2 + 0{,}36\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{9}{20} \\ t = -\dfrac{9}{20} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Xét bảng biến thiên:

t	0		$\dfrac{9}{20}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$f_{\min}(t)$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta có $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = \dfrac{9}{20}$.

Do đó T đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = y = \dfrac{9}{20}$.

Vì vai trò của $f(x)$ và $f(y)$ như nhau trên đoạn $[0;1]$ nên $f(x)$ và $f(y)$ có cùng giá trị nhỏ nhất trên $[0;1]$.

Suy ra $T(x,y)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ là $2 \cdot f\left(\dfrac{9}{20}\right) = \dfrac{13}{50}$ giờ.

Thời gian ngắn nhất mà anh An di chuyển từ A theo cách trên rồi quay trở về A là
$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{10} + \dfrac{\pi}{42} + \dfrac{13}{50}\right) \cdot 60 \approx 30{,}5$ phút.

Câu 36. Điều kiện

$$\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ \dfrac{x^2+2x+2}{\sqrt{2x+1}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+2x+1-2\sqrt{2x+1}+\log_2(x^2+2x+2)-\log_2\sqrt{2x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+2)-1+\log_2(x^2+2x+2)-2\sqrt{2x+1}-\log_2\left(2\sqrt{2x+1}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+2)+\log_2(x^2+2x+2)=2\sqrt{2x+1}+\log_2\left(2\sqrt{2x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow u+\log_2 u = v+\log_2 v \quad \text{với } u=x^2+2x+2,\ v=2\sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow f(u)=f(v).$$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t$ $(t>0)$.

$f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 2}>0,\ \forall t>0.$

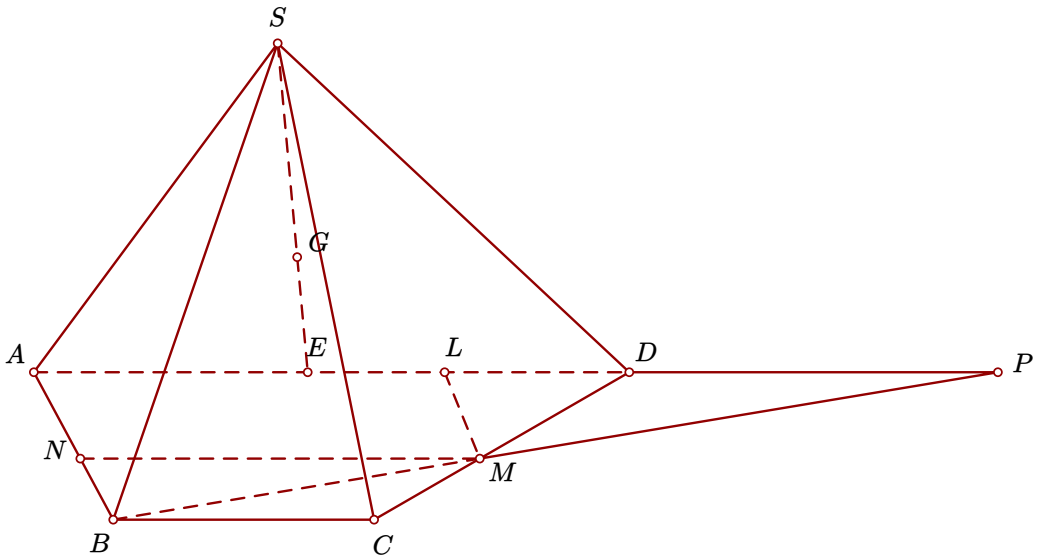
$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+2=2\sqrt{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow (x^2+2x+2)^2=4(2x+1)$$
$$\Leftrightarrow x^4+4x^3+8x^2+8x+4=8x+4$$
$$\Leftrightarrow x^4+4x^3+8x^2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x^2+4x+8)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \quad \text{(thỏa mãn)} \\ x^2+4x+8=0 \quad \text{(vô nghiệm)}. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Câu 37.



Gọi E là trung điểm của đoạn AD, ta có $CE = AB = ED$.
Có $CD = 2\sqrt{2} \Rightarrow CE = ED = 2$.
Do vậy $AD = 4, BD = 2\sqrt{5}$.
Gọi N là trung điểm của AB, suy ra: $MN = 3, S_{\Delta MAB} = \dfrac{1}{2}NM \cdot AB = 3$.
$AM = \sqrt{AN^2 + NM^2} = \sqrt{10} = MB$.
Gọi L là trung điểm của DE, ta có $LA = 3$ và L là trung điểm của AP.
Khi đó $LP = 3 \Rightarrow EP = 4, PA = 6$.
$\dfrac{\mathrm{d}(A,(SBM))}{\mathrm{d}(E,(SBM))} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(E,(SBM)) = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}(G,(SMB))$.
Kẻ $AF \perp BM \Rightarrow AF \perp (SBM), AF = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.
Do đó:
$\mathrm{d}(G,(SMB)) = \dfrac{4}{9}\mathrm{d}(A,(SMB)) = \dfrac{4}{9}AF = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3\sqrt{10}}{5} = \dfrac{4\sqrt{10}}{15}$.

Câu 38. Vì mẫu số liệu thống kê đã cho có mốt là ba giá trị khác nhau nên ta xét 4 trường hợp sau:
Trường hợp 1: $14 = 3x + 2y = x + 3y > 5x - y$.
Xét hệ phương trình
$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x + 3y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện $x, y \in \mathbb{N}$ và $5x - y < 14$).
Khi đó ta có bảng số liệu

Giá trị	-2	8	16	22	26
Tần số	14	14	14	6	8

Ta có số trung bình là
$\overline{x} = \dfrac{(-2) \cdot 14 + 8 \cdot 14 + 16 \cdot 14 + 22 \cdot 6 + 26 \cdot 8}{14 + 14 + 14 + 6 + 8} = \dfrac{81}{7}$.
Phương sai là
$s^2 = \dfrac{(-2)^2 \cdot 14 + 8^2 \cdot 14 + 16^2 \cdot 14 + 22^2 \cdot 6 + 26^2 \cdot 8}{14 + 14 + 14 + 6 + 8} - \left(\dfrac{81}{7}\right)^2 = \dfrac{4681}{49} \approx 95{,}5$.
Trường hợp 2: $14 = 3x + 2y = 5x - y > x + 3y$.
Xét hệ phương trình

$\begin{cases}3x+2y=14\\5x-y=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{42}{13}\\y=\dfrac{28}{13}\end{cases}$ (loại vì $x,y\in\mathbb{N}$).

Trường hợp 3: $14=x+3y=5x-y>3x+2y$.

Xét hệ phương trình

$\begin{cases}x+3y=14\\5x-y=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\y=\dfrac{7}{2}\end{cases}$ (loại vì $x,y\in\mathbb{N}$).

Trường hợp 4: $3x+2y=x+3y=5x-y>14$.

Xét hệ phương trình

$\begin{cases}x+3y=3x+2y\\5x-y=3x+2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ (loại vì $3x+2y>14$).

Vậy phương sai của mẫu số liệu đã cho là 95,5.

Câu 39. Số cách bạn Việt chọn ra ba tấm bìa rồi sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để được một số gồm ba chữ số là $\mathrm{C}_9^3=84$.

Số cách bạn Nam chọn ra ba tấm bìa rồi sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để được một số gồm ba chữ số là $\mathrm{C}_8^3=56$.

Suy ra $n(\Omega)=84\cdot 56=4704$.

Gọi A là biến cố: " Việt thắng Nam".

Để Việt thắng Nam thì trong ba số Việt chọn có ít nhất 1 số lớn hơn ba số Nam chọn.

Gọi ba số Việt chọn là a,b,c với $a>b>c$ và ba số Nam chọn là d,e,f với $d>e>f$.

Trường hợp 1: $c>d$.

+ Với $d=3$: Chọn 3 số a,b,c từ 6 số $\{4;5;6;7;8;9\}$ và sắp xếp theo thứ tự giảm dần nên Việt có C_6^3 cách chọn. Chọn 2 số e,f từ 2 số $\{1;2\}$ và sắp xếp theo thứ tự giảm dần nên Nam có C_2^2 cách chọn.

+ Với $d=4$: Chọn 3 số a,b,c từ 5 số $\{5;6;7;8;9\}$ và sắp xếp theo thứ tự giảm dần nên Việt có C_5^3 cách chọn. Chọn 2 số e,f từ 3 số $\{1;2;3\}$ và sắp xếp theo thứ tự giảm dần nên Nam có C_3^2 cách chọn.

+ Tương tự với $d\in\{5;6\}$ thì Trường hợp 1 có $\mathrm{C}_6^3\cdot\mathrm{C}_2^2+\mathrm{C}_5^3\cdot\mathrm{C}_3^2+\mathrm{C}_4^3\cdot\mathrm{C}_4^2+\mathrm{C}_3^3\cdot\mathrm{C}_5^2=84$ cách chọn.

Trường hợp 2: $b>d\geqslant c$.

+ Với $d=3$: Chọn 2 số a,b từ 6 số $\{4;5;6;7;8;9\}$ có C_6^2 cách chọn. Chọn số c từ 3 số $\{1;2;3\}$ có C_3^1 cách chọn, nên Việt có $\mathrm{C}_6^2\cdot\mathrm{C}_3^1$ cách chọn. Chọn 2 số e,f từ 2 số $\{1;2\}$ nên Nam có C_2^2 cách chọn.

+ Với $d=4$: Chọn 2 số a,b từ 5 số $\{5;6;7;8;9\}$ có C_5^2 cách chọn. Chọn số c từ 4 số $\{1;2;3;4\}$ có C_4^1 cách chọn, nên Việt có $\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_4^1$ cách chọn. Chọn 2 số e,f từ 3 số $\{1;2;3\}$ nên Nam có C_3^2 cách chọn.

+ Tương tự với $d\in\{5;6;7\}$ thì Trường hợp 2 có $\mathrm{C}_6^2\cdot\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_2^2+\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_4^1\cdot\mathrm{C}_3^2+\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{C}_4^2+\mathrm{C}_3^2\cdot\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_5^2+\mathrm{C}_2^2\cdot\mathrm{C}_7^1\cdot\mathrm{C}_6^2=630$ cách chọn.

Trường hợp 3: $a>d\geqslant b$.

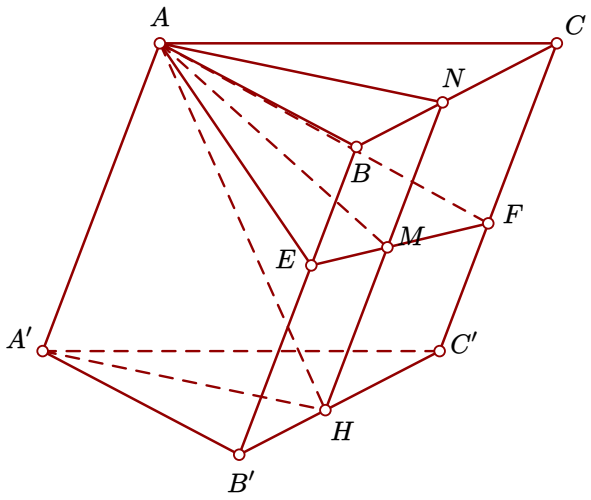
+ Với $d=3$: Chọn số a từ 6 số $\{4;5;6;7;8;9\}$ có C_6^1 cách chọn. Chọn 2 số b,c từ 3 số $\{1;2;3\}$ có C_3^2 cách chọn, nên Việt có $\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_3^2$ cách chọn. Chọn 2 số e,f từ 2 số $\{1;2\}$ nên Nam có C_2^2 cách chọn.

+ Tương tự với $d\in\{4;5;6;7;8\}$ thì Trường hợp 3 có $\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_3^2\cdot\mathrm{C}_2^2+\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{C}_3^2+\mathrm{C}_4^1\cdot\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_4^2+\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_6^2\cdot\mathrm{C}_5^2+\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_7^2\cdot\mathrm{C}_6^2+\mathrm{C}_1^1\cdot\mathrm{C}_8^2\cdot\mathrm{C}_7^2=2016$ cách chọn.

Do đó $n(A)=84+630+2016=2730$.

Vậy xác suất để Việt thắng Nam là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{2730}{4704}=\dfrac{65}{112}$.

Câu 40.

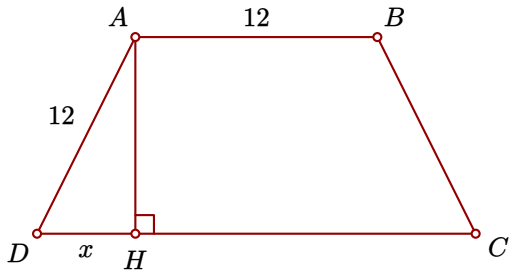


Ta có:
$\begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AEF) \Rightarrow AA' \perp EF \Rightarrow BB' \perp EF.$
Khi đó:
$\mathrm{d}(A, BB') = AE = \sqrt{3}, \quad \mathrm{d}(A, CC') = AF = \sqrt{5}, \quad \mathrm{d}(C, BB') = EF = 2\sqrt{2}.$
Nhận xét: $AE^2 + AF^2 = EF^2$ nên tam giác AEF vuông tại A, suy ra $AM = \dfrac{EF}{2} = \sqrt{2}$.
Ta lại có:
$\begin{cases} AA' \perp (AEF) \\ HN \parallel AA' \end{cases} \Rightarrow HN \perp (AEF) \Rightarrow HN \perp AM.$
Tam giác AHN vuông tại A có đường cao AM nên:
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} - \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow AH = 2.$
Mặt khác:
$\begin{cases} (AA'NH) \perp (ABC) \\ (AA'NH) \perp (AEF) \\ (AA'NH) \cap (ABC) = AN \\ (AA'NH) \cap (AEF) = AM. \end{cases}$
Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AEF) là $\widehat{MAN}$.
Hình chiếu của tam giác ABC lên mặt phẳng (AEF) là tam giác AEF nên:
$S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \widehat{MAN}$
$\Rightarrow \dfrac{1}{2} AE \cdot AF = S_{\triangle ABC} \cdot \dfrac{AM}{AN}$
$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{AE \cdot AF \cdot AN}{AM} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot 2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}.$
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AH = \sqrt{30}.$

Tham Khảo Sở Bắc Ninh

Câu 1. Chọn đáp án C
Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(0;1)$.

Câu 2. Chọn đáp án C



Kẻ AH vuông góc DC tại H
Đặt $DH = x(0 < x < 12)>$ Diện tích mảnh vườn $S(x) = \dfrac{12+(12+2x)}{2}.\sqrt{144-x^2} = (12+x).\sqrt{144-x^2}$
$S'(x) = \dfrac{-2x^2-12x+144}{\sqrt{144-x^2}}$
$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-12 \text{ (L)} \end{array}\right.$

x	0		6		12
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	$108\sqrt{3}$	↘	

Diện tích lớn nhất bằng $108\sqrt{3}$.

Câu 3. Chọn đáp án C
$g'(x) = 2f(x)\cdot f'(x)$.
Do $f'(x)$ là hàm bậc 3, nên $f(x)$ là hàm bậc bốn có nghiệm kép $x=-1;\ x=3$.
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \\ f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=3. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

x		-1		1		3	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$, $(1;3)$.
Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$.

Câu 4. Chọn đáp án C

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=3 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(3)=0 \\ f''(3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2-2m\cdot 3+(m^2-4)=0 \\ 2\cdot 3-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow m=5.$

Câu 5. Chọn đáp án D

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m^2x-m-1}{x+2}$ có tiệm cận đứng khi $x=-2$ không là nghiệm của $x^2+m^2x-m-1=0$.

Tức là $4-2m^2-m-1\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Câu 6. Chọn đáp án C

Vẽ bảng biến thiên của hàm số $u(x)=\left|x^3+7x\right|+m$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\left\|x^2+7x\right\|+m$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Vì hàm $u(x)=\left|x^2+7x\right|+m$ có 1 điểm cực trị nên điều kiện để hàm $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị là $\left[\begin{array}{l} u(x)=9 \\ u(x)=4 \\ u(x)=-4 \end{array}\right.$ có đúng bốn nghiệm bội lẻ.
Từ bảng biến thiên trên, điều này sẽ xảy ra khi và chỉ khi $-4\leqslant m<4$.
Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 7. Chọn đáp án C

Ta có

$$\begin{aligned} f(x)&=\mathrm{e}^x\left(2025-\frac{2024\mathrm{e}^{-x}}{x^5}\right) \\ &=2025\mathrm{e}^x-\frac{2024\cdot \mathrm{e}^x\cdot \mathrm{e}^{-x}}{x^5} \\ &=2025\mathrm{e}^x-\frac{2024}{x^5} \\ &=2025\mathrm{e}^x-2024x^{-5}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x&=\int\left(2025\mathrm{e}^x-2024x^{-5}\right)\,\mathrm{d}x \\ &=2025\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x-2024\int x^{-5}\,\mathrm{d}x \\ &=2025\mathrm{e}^x-2024\cdot\frac{1}{-4x^4}+C \\ &=2025\mathrm{e}^x+\frac{506}{x^4}+C. \end{aligned}$$

Câu 8. Chọn đáp án A

Ta có $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 10.$

Mà $\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ nên

$$\begin{aligned} P &= \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 10 - \int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 10 - 6 = 4. \end{aligned}$$

Câu 9. Chọn đáp án C

Tại thời điểm $t = 6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên

$v(6) = v_0 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2}\cdot 6 + a = v_0 \Leftrightarrow a = v_0 + 15.$

Suy ra $v(t) = -\dfrac{5}{2}t + v_0 + 15.$

Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn.

Ta có $v(k) = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{2}{5}(v_0 + 15) \Leftrightarrow k = \dfrac{2v_0}{5} + 6.$

Tổng quãng đường vật đi được là

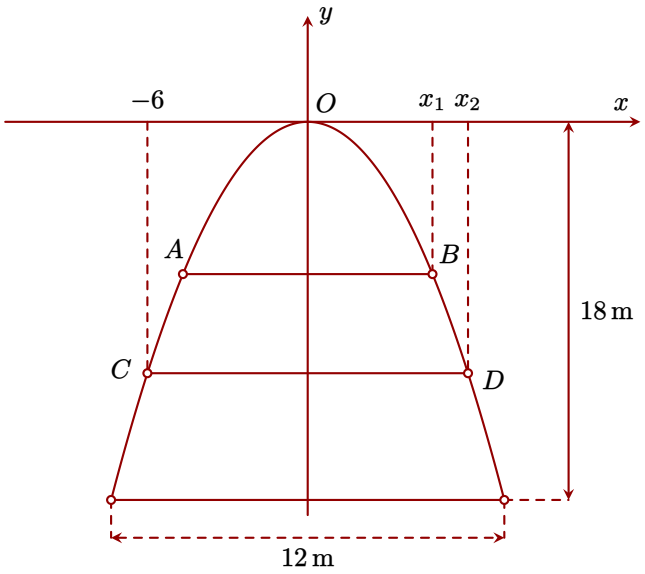
$$\begin{aligned} 80 &= 6v_0 + \int\limits_6^k \left(-\frac{5}{2}t + v_0 + 15\right)\,\mathrm{d}t \\ &\Leftrightarrow 80 = 6v_0 + \left(-\frac{5}{4}t^2 + v_0 t + 15t\right)\Big|_6^k \\ &\Leftrightarrow 80 = 6v_0 - \frac{5}{4}\left(k^2 - 6^2\right) + v_0(k-6) + 15(k-6) \\ &\Leftrightarrow 80 = 6v_0 - \frac{5}{4}\left(\frac{4v_0^2}{25} + \frac{24}{5}v_0\right) + v_0\cdot\frac{2v_0}{5} + 15\cdot\frac{2v_0}{5} \\ &\Leftrightarrow v_0^2 + 30v_0 - 400 = 0 \\ &\Leftrightarrow v_0 = 10. \end{aligned}$$

Câu 10. Chọn đáp án D

Thể tích khối tròn xoay tạo thành là:

$V = \pi \int\limits_4^9 \left(\sqrt{x} - 2\right)^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{11\pi}{6}.$

Câu 11. Chọn đáp án C



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Phương trình parabol có dạng $y = ax^2$ (P). Parabol (P) đi qua điểm có tọa độ $(-6;-18)$ nên

$-18 = a\cdot(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow (P)\colon y = -\dfrac{1}{2}x^2.$

Từ hình vẽ ta có $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol và đường thẳng $AB\colon y = -\dfrac{1}{2}x_1^2$ là

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\int_0^{x_1}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x\right)\Bigg|_0^{x_1} \\ &= \frac{2}{3}x_1^3. \end{aligned}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol và đường thẳng $CD\colon y = -\dfrac{1}{2}x_2^2$ là

$$\begin{aligned} S_2 &= 2\int_0^{x_2}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x\right)\Bigg|_0^{x_2} \\ &= \frac{2}{3}x_2^3. \end{aligned}$$

Từ giả thiết suy ra

$S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

Vậy $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 12. Chọn đáp án A

Ta có toạ độ tâm I của mặt cầu (S) là: $I(-2;0;3)$.

Câu 13. Chọn đáp án D

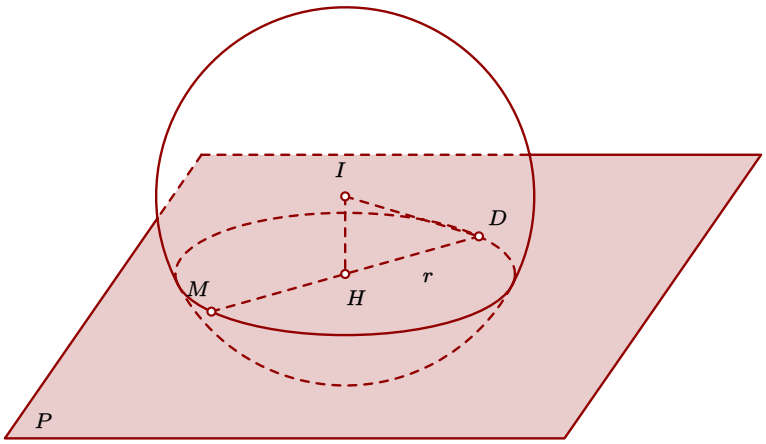
Phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 3+t \\ z = t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

Vì $M \in \Delta$ nên $M(t-1;t+3;t)$.
Ta có $\overrightarrow{MA} = (2-t;2-t;2-t)$ và $\overrightarrow{MB} = (4-t;-2-t;-2-t)$.
Vì tam giác MAB vuông tại M nên $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
$(2-t)(4-t) + (2-t)(-2-t) + (2-t)(-2-t) = 0$
$\Leftrightarrow (2-t)(4-t-4-2t) = 0$
$\Leftrightarrow (2-t)(-3t) = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 0. \end{array}\right.$
Với $t = 2$, ta có $M(1;5;2) \equiv A$, loại.
Với $t = 0$, ta có $M(-1;3;0)$.
Vậy hoành độ của M là -1.

Câu 14. Chọn đáp án A
Phương trình đường thẳng AB.
Véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-2;2;-2) = 2(-1;1;-1)$.
Phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
I thuộc đường thẳng AB nên tọa độ I có dạng $I(-t+2;t+1;-t+1)$.
Điểm I thuộc mặt phẳng (P): $2x+y+z-4=0$, vậy
$2(-t+2)+(t+1)+(-t+1)-4=0 \Leftrightarrow -2t+4+t+1-t+1-4=0 \Leftrightarrow t=1$.
Tung độ của I là $y = t+1 = 1+1 = 2$.

Câu 15. Chọn đáp án C
Véc-tơ chỉ phương của Δ và Δ' là
$\overrightarrow{u_\Delta} = (2;1;3)$ và $\overrightarrow{u_{\Delta'}} = (4;-5;-1)$.
$[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{\Delta'}}] = (14;14;-14)$.
Ta có thể chọn véc-tơ pháp tuyến đơn giản hơn là $\overrightarrow{n}_1 = (1;1;-1)$.
Mặt phẳng (P) có dạng $x+y-z+d=0$.
Mặt cầu có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi
$\mathrm{d}(I,(P)) = R$
$\Leftrightarrow \dfrac{|1+1-1+d|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow \dfrac{|1+d|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 5 \\ d = -7. \end{array}\right.$
Phương trình (P) là (P_1): $x+y-z+5=0$ và (P_2): $x+y-z-7=0$.
Δ và Δ' đi qua điểm $A(-1;-1;3)$ và $B(3;3;-1)$.
Thế toạ độ $A(-1;-1;3)$, $B(3;3;-1)$ vào phương trình mặt phẳng (P_1), (P_2) ta có
Toạ độ điểm A thoả mãn phương trình (P_1) nên đường thẳng $\Delta \subset (P_1)$, loại (P_1).
Toạ độ điểm B thoả mãn phương trình (P_2) nên đường thẳng $\Delta' \subset (P_2)$, loại (P_2).
Vậy không có mặt phẳng nào thoả mãn đề bài.

Câu 16. Chọn đáp án B

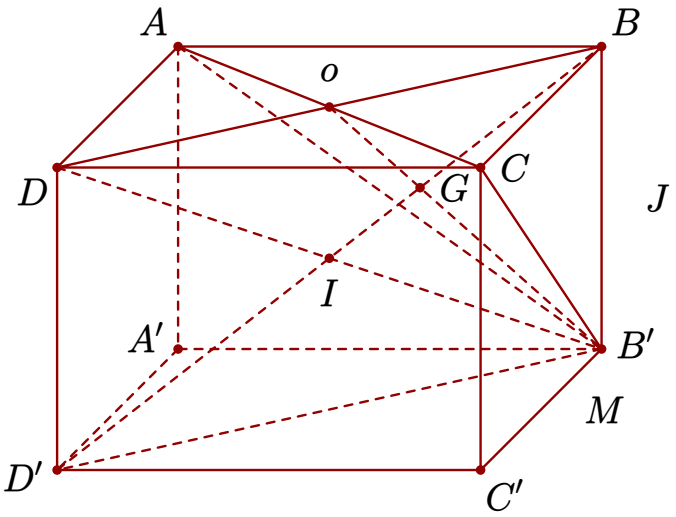


Giả sử $M(x;y;z)$, ta có $MA^2+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=8\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0\quad(1)$.
Mà $M\in(S)$ nên ta có $x^2+y^2+z^2+4x-8y-19=0\quad(2)$.
Trừ (1), (2) theo vế ta được $x-y-2=0$.
Suy ra M thuộc đường tròn (T) là giao của (S) với mặt phẳng $(P)\colon x-y-2=0$.
Thay toạ độ của D vào phương trình của (P) và của (S) thấy thoả mãn nên $D\in(T)$, suy ra giá trị lớn nhất của MD bằng đường kính của (T).
(S) có tâm $I(2;4;0)$ và bán kính $R=\sqrt{39}$.
Khoảng cách từ I với (P) là $h=\mathrm{d}(I,(P))=4\sqrt{2}$.
Bán kính của (T) là $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{7}$.
Suy ra $\max MD=2r=2\sqrt{7}$.

Câu 17. Chọn đáp án **B**
Từ mẫu số liệu đã cho ta có khoảng biến thiên của mẫu số liệu thống kê trên là $R=10-4=6$.

Câu 18. Chọn đáp án **B**
Ta có $\dfrac{n}{2}=\dfrac{56}{2}=28$ nên nhóm chứa trung vị là $[15,5;18,5)$. Do đó ta có số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là $M_e=15,5+\dfrac{28-15}{15}.(18,5-15,5)=\dfrac{181}{10}=18,1$.

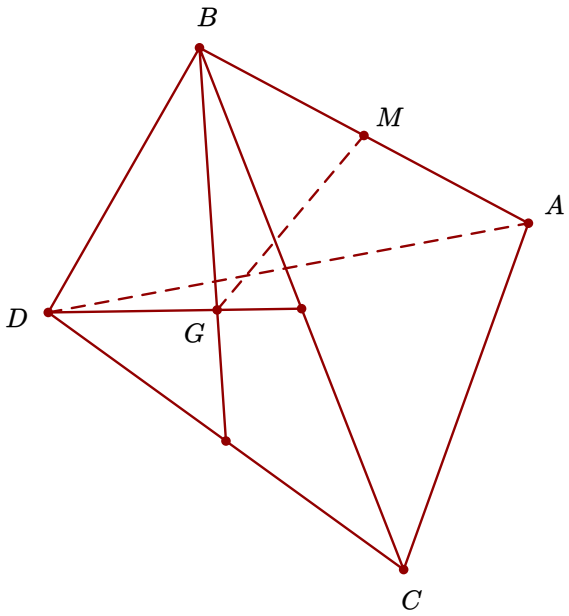
Câu 19. Chọn đáp án **D**



Gọi I là giao điểm BD' và $B'D$, O là giao điểm AC và BD nên $B'O$, BI lần lượt là hai đường trung tuyến của tam giác $BB'D$.

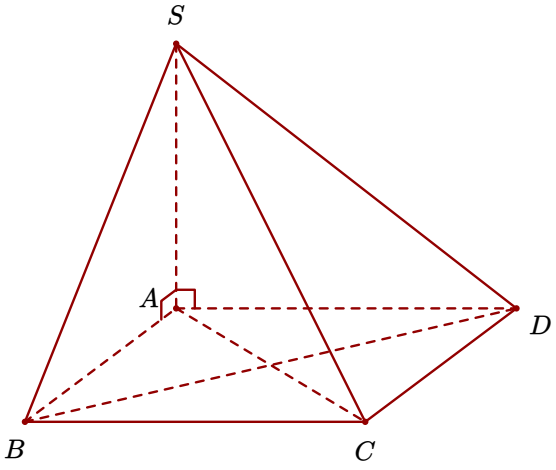
Xét tam giác DBB' có $B'O$ cắt BI tại G nên G là trọng tâm tam giác BDB'.
Trong tam giác $AB'C$ có $B'O$ là đường trung tuyến nên G cũng là trọng tâm tam giác $AB'C$.
Khi đó $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD'}$.
Vậy $\overrightarrow{BD'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD'}$.

Câu 20. Chọn đáp án A



Ta có
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)\\ &= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\ &= -\frac{1}{6}\overrightarrow{x} + \frac{1}{3}\overrightarrow{y} + \frac{1}{3}\overrightarrow{z}.\end{aligned}$$

Câu 21. Chọn đáp án D



Vì $ABCD$ là tứ diện đều và G là trực tâm tam giác BCD nên $AG \perp (BCD) \Rightarrow (ABK) \perp CD$.
$\Rightarrow EG \perp CD$ nên $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ và tam giác AGB vuông tại G.

$\Rightarrow GE = \dfrac{1}{2}AB = 1.$

Xét tam giác MFD có $FM = \sqrt{FD^2 - MD^2} = \sqrt{2}.$

Mặt khác tam giác BEG có $BE = EG = 1$; $BG = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ nên $\cos\widehat{BEG} = \dfrac{1+1-\frac{4}{3}}{2} = \dfrac{1}{3}.$

Ta có $\overrightarrow{FM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}\right).$

Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{GE} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{GE}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{GE}\\ &= \frac{1}{2}\cdot BA\cdot EG\cdot\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{GE}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Mà $FM = \sqrt{2}$; $EG = 1$ nên $\cos\left(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{GE}\right) = \dfrac{\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{GE}}{FM\cdot EG} = \dfrac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{2}\cdot 1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{6}.$

Câu 22. Chọn đáp án **D**

Ta có

$u_1 = 1$

$u_2 = 1 + \dfrac{1}{3}$

$u_3 = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2}$

$\cdots$

$u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^{n-1}}.$

Khi đó $\lim u_n = \lim\left(1\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right) = \dfrac{3}{2}.$

Câu 23. Chọn đáp án **B**

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} &= \lim_{x\to 3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}\\ &= \lim_{x\to 3}\left[-(\sqrt{x+1}+2)\right]\\ &= -4.\end{aligned}$$

Để hàm số liên tục tại $x = 3$ thì $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow m = -4.$

Câu 24. Chọn đáp án **C**

Ta có theo giả thiết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-10}{x-1} = 5 \Rightarrow f(1) = 10.$

Khi đó

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-10}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{4f(x)+9}+3)} &= \lim_{x\to 1}\frac{(f(x)-10)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{4f(x)+9}+3)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{5\cdot(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{4f(x)+9}+3}\\ &= \frac{5\cdot 2}{\sqrt{4\cdot 10+9}+3} = 1.\end{aligned}$$

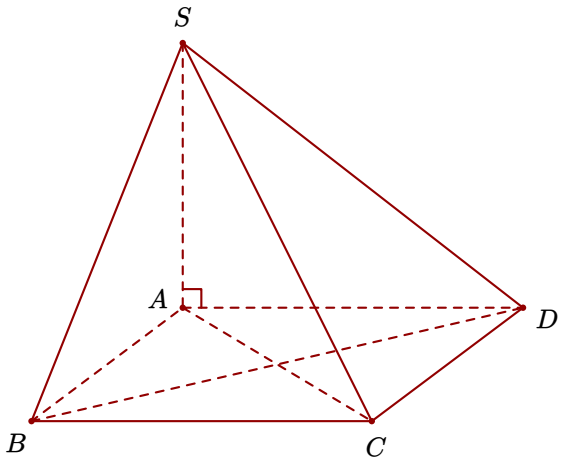
Câu 25. Chọn đáp án C
Sau khi gửi ngân hàng được 1 năm người đó có số tiền là
$T_1 = 100\,(1 + 0,06)$ triệu đồng.
Sau khi gửi ngân hàng được 2 năm người đó có số tiền là
$T_2 = 100\,(1 + 0,06) + 100\,(1 + 0,06)\,.0,06 = 100(1 + 0,06)^2$ triệu đồng.
Sau khi gửi ngân hàng được 3 năm người đó có số tiền là
$T_3 = 100(1 + 0,06)^2 + 100(1 + 0,06)^2.0,06 = 100(1 + 0,06)^3$ triệu đồng.
. . . . . .
Sau khi gửi ngân hàng được n năm người đó có số tiền cả gốc và lãi là
$T_n = 100(1 + 0,06)^{n-1} + 100(1 + 0,06)^{n-1}.0,06 = 100(1 + 0,06)^n$ triệu đồng.
Giả sử để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất n năm. Ta có $T_n = 100(1 + 0,06)^n > 130 \Leftrightarrow 1,06^n > 1,3 \Leftrightarrow n > \log_{1,06} 1,3 \approx 4.5$ năm
Vậy cần ít nhất 5 năm

Câu 26. Chọn đáp án A
Ta có
$$\begin{aligned}\log_6 5 &= \frac{1}{\log_5 6}\\ &= \frac{1}{\log_5(2\cdot 3)}\\ &= \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3}\\ &= \frac{1}{\dfrac{1}{\log_2 5} + \dfrac{1}{\log_3 5}}\\ &= \frac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}\\ &= \frac{ab}{a+b}.\end{aligned}$$
Vậy $\log_6 5 = \dfrac{ab}{a+b}$.

Câu 27. Chọn đáp án D
Ta có số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^2 = 45$.
Ta có từ 1 đến 10 có 5 thẻ ghi số chẵn và 5 thẻ ghi số lẻ.
$A =$ "Rút được một thẻ ghi số chẵn và một thẻ ghi số lẻ" ta có $n(A) = \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 25$.
Xác suất biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{25}{45} = \dfrac{5}{9}$.
$B =$ "Cả hai thẻ rút ra là thẻ chẵn" ta có $n(B) = \mathrm{C}_5^2 = 10$.
Xác suất biến cố B là $\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{45} = \dfrac{2}{9}$.
Ta có $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \dfrac{5}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$.

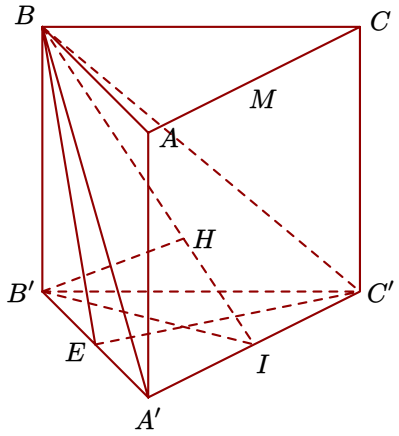
Câu 28. Chọn đáp án B
Gọi A là biến cố lấy được sản phẩm tốt ở lô I. Khi đó $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 0{,}5$.
Gọi B là biến cố lấy được sản phẩm tốt ở lô II. Khi đó $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$; $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 0{,}2$.
Xác suất để trong hai sản phẩm được lấy ra có đúng một sản phẩm có chất lượng tốt bằng
$\mathrm{P}\left(A\overline{B}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{A}B\right) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathrm{P}(B) = 0{,}5$.

Câu 29. Chọn đáp án C



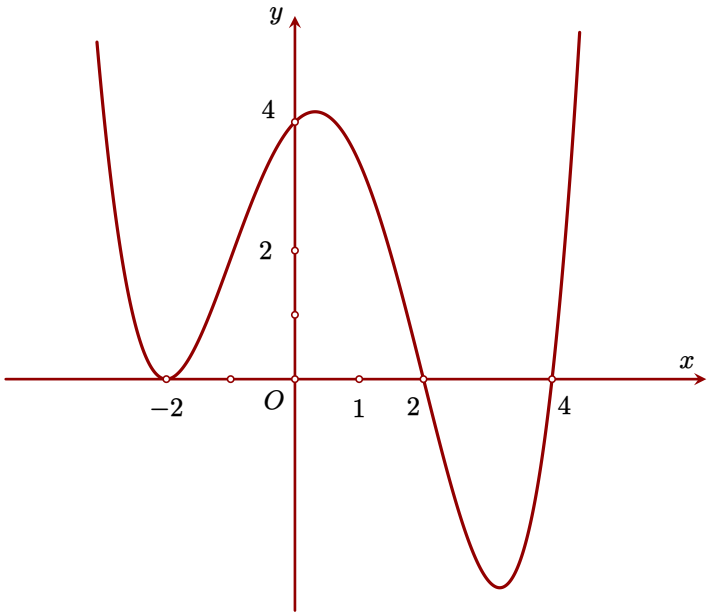
Ta có hình chiếu của SB lên $(ABCD)$ là AB.
Khi đó góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SBA}$.
Xét tam giác SBA vuông tại A, $\tan B = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Câu 30. Chọn đáp án B



Gọi I, E lần lượt là trung điểm $A'C'$; $A'B'$.
Gọi độ dài cạnh đáy lăng trụ là x và cạnh bên là y $(x, y > 0)$.
Khi đó $C'E \perp (ABB'A') \Rightarrow$ góc giữa BC' và $(ABB'A')$ là $\widehat{EBC'}$.
Xét tam giác BEC' vuông tại E, $\sin B = \dfrac{EC'}{BC'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 = 2x^2 \quad (1)$.
Vì $M \in AC$, $AC \parallel A'C' \Rightarrow \mathrm{d}(M, (BA'C')) = \mathrm{d}(A, (BA'C')) = \mathrm{d}(B', (BA'C'))$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của B' lên BI.
Ta có $A'C' \perp (BB'I) \Rightarrow B'H \perp (BA'C') \Rightarrow \mathrm{d}(B', (BA'C')) = B'H$.
Khi đó $\dfrac{1}{B'H^2} = \dfrac{1}{B'I^2} + \dfrac{1}{BB'^2} \Rightarrow \dfrac{11}{6a^2} = \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{4}{3x^2} \quad (2)$.
Từ (1) và (2) suy ra $x = a$; $y = a\sqrt{2}$.
Thể tích hình lăng trụ là $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 31. Chọn đáp án: a b c d



a) Từ đồ thị hàm số suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty; -2)$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

b) Từ đồ thị hàm số $y = f'(x) \Rightarrow f'(x) = a(x+2)^2(x-2)(x-4)$ với $a \neq 0$.

Suy ra $g(x) = \dfrac{x^2-4}{f'(x)} = \dfrac{1}{a(x+2)(x-4)}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 tiệm cận đứng $x = -2$, $x = 4$.

c) Ta có $h(x) = f(4\sin x) \Rightarrow h'(x) = 4\cos x \cdot f'(4\sin x)$.

Khi đó $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = 0 & (1) \\ 4\sin x = -2 & (2) \\ 4\sin x = 2 & (3) \\ 4\sin x = 4 & (4). \end{array}\right.$

Phương trình (2) luôn có nghiệm bội chẵn.

Trên khoảng $(-2\pi; 2\pi)$:

Phương trình (1) có 4 nghiệm bội lẻ $x = -\dfrac{3\pi}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Phương trình (3) có 4 nghiệm bội lẻ $x = -\dfrac{7\pi}{6}$, $x = -\dfrac{11\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Phương trình (4) có 2 nghiệm bội chẵn $x = -\dfrac{3\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Vì thế nên hàm số $h(x)$ có 8 điểm cực trị thuộc khoảng $(-2\pi; 2\pi)$.

d) Ta có

$$f'(x) = a(x+2)^2(x-2)(x-4) = a\left(x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x + 32\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = a\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - 4x^3 + 4x^2 + 32x\right) + C.$$

Ta có $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ và $f(-2) = -\dfrac{19}{5} \Rightarrow a = \dfrac{1}{8}$.

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{2} - 4x^3 + 4x^2 + 32x\right)$.

Khi đó $f(2) = \dfrac{29}{5}$, $f(4) = \dfrac{8}{5}$.

Xét phương trình

$$2^{f(x)} + f(x) = 2m + \log_2\left(m + 2^{f(x)-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2^{f(x)+1} + f(x) + 1 = 2^{\log_2\left(2m+2^{f(x)}\right)} + \log_2\left(2m + 2^{f(x)}\right).$$

Xét hàm số $g(t)=2^t+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Ta có $g(f(x)+1)=g\left(\log_2\left(2m+2^{f(x)}\right)\right)$ nên
$f(x)+1=\log_2\left(2m+2^{f(x)}\right)$
$\Leftrightarrow 2^{f(x)+1}=2m+2^{f(x)}$
$\Leftrightarrow 2m=2^{f(x)}$
$\Leftrightarrow \log_2(2m)=f(x) \quad (*)$.
Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗		↗	$\frac{29}{5}$	↘	$\frac{8}{5}$	↗	$+\infty$

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $\frac{8}{5}<\log_2(2m)<\frac{29}{5}\Leftrightarrow 2^{\frac{8}{5}}<2m<2^{\frac{29}{5}}$.
$\Leftrightarrow 1{,}51<m<27{,}8$, vậy có 26 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32. Chọn đáp án: a b c d
a) Từ giả thiết ta có
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+x\right)\Big|_0^1=4$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+1=4$$
$$\Leftrightarrow 2a+3b=18.$$
Và
$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=14$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+x\right)\Big|_1^2=14$$
$$\Leftrightarrow 14a+9b=78.$$
Ta có hệ phương trình $\begin{cases}2a+3b=18\\14a+9b=78\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=4.\end{cases}$
Vậy nên $a+b=7$.
b) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục hoành là
$$f(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+4x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-\frac{1}{3}.\end{array}\right.$$
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là $\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}\left|3x^2+4x+1\right|\,\mathrm{d}x=$

$$\left|\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}(3x^2+4x+1)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{4}{27}\ \text{đvdt.}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2}{3x^2+4x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{6(3x+1)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{18}\ln|3x+1|+C.\end{aligned}$$

Vậy nên $m=\frac{1}{3}$, $n=-\frac{1}{2}$, $p=\frac{1}{18}\Rightarrow 6m+3n+9p=1$.

d) Ta có

$$[g'(x)]^2+g(x)\cdot g''(x)=f(x)$$

$$\Leftrightarrow [g(x)\cdot g'(x)]'=f(x)$$

$$\Rightarrow \int [g(x)\cdot g'(x)]'\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow g(x)\cdot g'(x)=x^3+2x^2+x+C.$$

Vì $g(0)=g'(0)=2$ nên $C=4$.

Vậy $g(x)\cdot g'(x)=x^3+2x^2+x+4$.

Suy ra

$$\int_0^2 g(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}[g(x)]=\int_0^2(x^3+2x^2+x+4)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{g^2(x)}{2}\right|_0^2=\frac{58}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{g^2(2)}{2}-\frac{g^2(0)}{2}=\frac{58}{3}$$

$$\Leftrightarrow g^2(2)=\frac{64}{3}.$$

Câu 33. Chọn đáp án: a b c d

a)

Nhóm	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$
Giá trị đại diện	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5
Số người công ty A	28	15	20	20	8	9
Số người công ty B	30	18	18	13	12	9

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm của công ty A là

$$\overline{x_A}=\frac{12,5.28+17,5.15+22,5.20+27,5.20+32,5.8+37,5.9}{28+15+20+20+8+9}=22,1\ .$$

b)

Nhóm	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$
Số người công ty B	30	18	18	13	12	9
Tần số tích lũy	30	48	66	79	91	100

Nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{100}{2}=50$ là nhóm $[20;25)$.

Do đó $Q_2=20+\frac{50-48}{18}.5=\frac{185}{9}\approx 20,56$.

c)

Nhóm	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$
Số người công ty A	28	15	20	20	8	9
Tần số tích lũy	28	43	63	83	91	100

- Nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\dfrac{100}{4}=25$ là nhóm $[10;15)$.

Do đó $Q_1=10+\dfrac{25-0}{28}.5=\dfrac{405}{28}$.

- Nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\dfrac{3100}{4}=75$ là nhóm $[25;30)$.

Do đó $Q_3=25+\dfrac{75-63}{20}.5=28$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu của công ty A là $\Delta Q=Q_3-Q_1=28-\dfrac{405}{28}=\dfrac{379}{28}\approx 13,54$

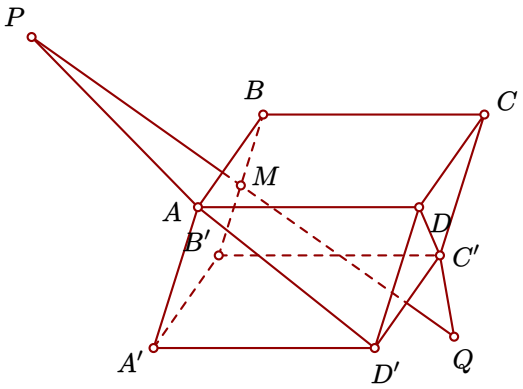
d)

Ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu của công ty A là $s_A\approx 8,0523$.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu của công ty B là $s_A\approx 8,33$.

Vì $s_A<s_B$ nên nếu sử dụng độ lệch chuẩn để đánh giá mức độ phân tán ta thấy mức lương của công ty A đều hơn mức lương của công ty B .

Câu 34. Chọn đáp án: a b c d



a)

$$\left|\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|^2=(AA')^2+AB^2+AD^2+2\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AD}$$
$$=1^2+1^2+1^2+2\cos 60^\circ+2\cos 60^\circ+2\cos 60^\circ$$
$$=6\Rightarrow\left|\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{6}.$$

b)

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{D'D}=-\frac{3}{2}\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}.$$

c)

Ta có $\overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{MP}=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{DQ}-\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DC'}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB'}=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MQ}=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ nên P, M, Q thẳng hàng, vậy đường thẳng PQ đi qua trung điểm của cạnh BB'.

d)

$PQ=\left|\overrightarrow{PQ}\right|$, xét

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MQ}\right|^2$$
$$= \left|\frac{3}{2}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\frac{3}{2}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right|^2$$
$$= 33 \Rightarrow PQ = \sqrt{33}.$$

Câu 35. Chọn đáp án: a b c d

a) Thay toạ độ $A(6;2;-1)$ vào phương trình ta được $\frac{6-2}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{-1-1}{-1}$ (luôn đúng) và thay toạ độ $B(-2;-6;3)$ vào phương trình ta được $\frac{-2-2}{2} = \frac{-6+2}{2} = \frac{3-1}{-1}$ (luôn đúng).

b) Ta có C là trung điểm của đoạn AB nên $C(2;-2;1)$ là tâm của mặt cầu (S). Lại có $\overrightarrow{AB} = (-8;-8;4) \Rightarrow AB = 12$ nên bán kính mặt cầu là $R = \frac{AB}{2} = 6$. Suy ra phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 = 36 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z-27=0$.

c) Gọi $\overrightarrow{n} = (a;b;c)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α). Mặt phẳng (α) chứa AB nên $\left(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}\right) = 0 \Leftrightarrow -8a-8b+4c=0 \Leftrightarrow c = 2a+2b \Rightarrow \overrightarrow{n} = (a;b;2a+2b)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(6;2;-1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (a;b;2a+2b)$ là $ax+by+2(a+b)z-4a=0$.

Lại có khoảng cách từ O đến (α) bằng $\frac{4}{3}$ nên

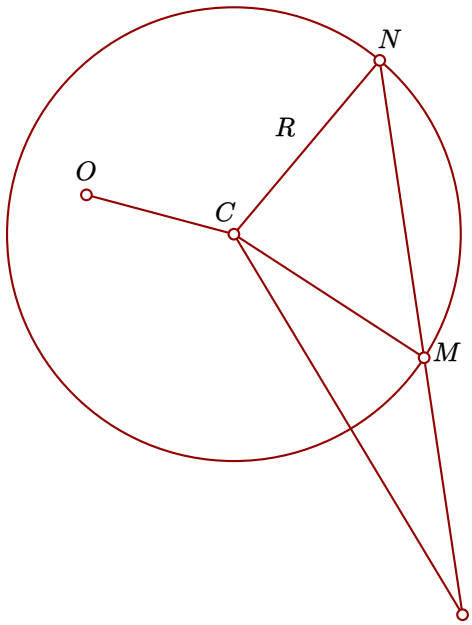
$$\frac{4|a|}{\sqrt{a^2+b^2+4(a+b)^2}} = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow 3|a| = \sqrt{5a^2+8ab+5b^2}$$
$$\Leftrightarrow 4a^2-8ab-5b^2=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a=5b \\ -2a=b. \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $2a=5b$. Chọn $a=5$, $b=2$ thì phương trình mặt phẳng (α) là $5x+2y+14z-20=0$. Khi đó E là giao của (α) và trục Ox nên $E(4;0;0)$ và F là giao của (α) và tia đối của tia Oy nên $F(0;10;0)$ (loại).

Trường hợp 2: $-2a=b$. Chọn $a=1$, $b=-2$ thì phương trình mặt phẳng (α) là $x-2y-2z-4=0$. Khi đó E là giao của (α) và trục Ox nên $E(4;0;0)$ và F là giao của (α) và tia đối của tia Oy nên $F(0;-2;0)$ (thoả mãn).

Suy ra $EF = 2\sqrt{5}$.

d)



Tam giác MAB vuông tại M nên $M \in (S)$ là mặt cầu có đường kính $AB = 12$ suy ra bán kính $R = 6$.
Nhận xét: C là trung điểm của AB nên mặt cầu (S) chứa điểm M có tâm C, $R = 6$.
Lại có $MC = CN$ nên $M, N \in (S)$.
- Xét điểm I thoả mãn $2\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IN} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của IN.
- Ta có
$$\begin{aligned} T &= 2OM^2 - ON^2 \\ &= 2\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}\right)^2 - \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN}\right)^2 \\ &= OI^2 + 2IM^2 - IN^2. \end{aligned}$$
Ta có $IM = 5$, $IN = 10$ nên $T = OI^2 - 50$.
Mặt khác $OI^2 = \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CI}\right)^2 = OC^2 + CI^2 + 2\left(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CI}\right)$.
Lại có $OC = 3$.
Xét tam giác CNI, trung tuyến CM có
$$CM^2 = \frac{2(CN^2 + CI^2) - IN^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow 4 \cdot 6^2 = 2(6^2 + CI^2) - 10^2$$
$$\Leftrightarrow CI^2 = 86 \Leftrightarrow CI = \sqrt{86}.$$
Khi đó
$$\begin{aligned} T = OI^2 - 50 &= OC^2 + CI^2 + 2\left(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CI}\right) - 50 \\ &= 9 + 86 - 2\left(\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CI}\right) - 50 \\ &= 45 - 2CO \cdot CI \cdot \cos\widehat{OCI} \\ &= 45 - 6\sqrt{86}\cos\widehat{OCI} \leqslant 45 + 6\sqrt{86}. \end{aligned}$$
Vậy giá trị lớn nhất của T là $45 + 6\sqrt{86}$ đạt được khi O, C, I thẳng hàng và C nằm giữa O và I.

Câu 36. Chọn đáp án: a b c d
a) $f'(x) = \dfrac{2x - 5}{(x^2 - 5x + 6)\ln 2}$.
b) Ta có $f(x) \leqslant 3 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 5x - 6) \leqslant 3$.
Điều kiện: $x^2 - 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 6. \end{array}\right.$

Bất phương trình $\Leftrightarrow x^2-5x-6\leqslant 2^3\Leftrightarrow x^2-5x-14\leqslant 0\Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 7$.
So sánh điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[-2;-1)\cup(6;7]$.
Suy ra $a=-2$; $b=-1$; $c=6$; $d=7$.
Vậy $4a+3b+2c+d=4\cdot(-2)+3\cdot(-1)+2\cdot 6+7=8$.
c) Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln^2 x-5\ln x-6>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} \ln x<-1 \\ \ln x>6 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x<\mathrm{e}^{-1} \\ x>\mathrm{e}^{6} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<\mathrm{e}^{-1} \\ x>\mathrm{e}^{6}. \end{array}\right.$
Suy ra tập xác định $\mathscr{D}=(0;\mathrm{e}^{-1})\cup(\mathrm{e}^{6};+\infty)$.
Do đó $\begin{cases} a=-1 \\ b=6. \end{cases}$
Vậy $6a+b=6\cdot(-1)+6=0$.
d) Ta có $f(2^x)=m\Leftrightarrow \log_2(2^{2x}-5\cdot 2^x-6)=m\quad(1)$.
Điều kiện: $2^{2x}-5\cdot 2^x-6>0\Leftrightarrow 2^x>6\Leftrightarrow x>\log_2 6$.
Phương trình $(1)\Leftrightarrow 2^{2x}-5\cdot 2^x-6=2^m\quad(2)$.
Đặt $t=2^x$, $t>6$, phương trình (2) trở thành: $t^2-5t-6=2^m\quad(3)$.
Để phương trình (1) có nghiệm thì phương trình (3) có nghiệm $t\in(6;+\infty)$.
Số nghiệm của phương trình (3) là số giao điểm của đồ thị hàm số $g(t)=t^2-5t-6$ trên $(6;+\infty)$ và đường thẳng $y=2^m$.
Ta có $g'(t)=2t-5$; $g'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}\notin(6;+\infty)$.
Bảng biến thiên.

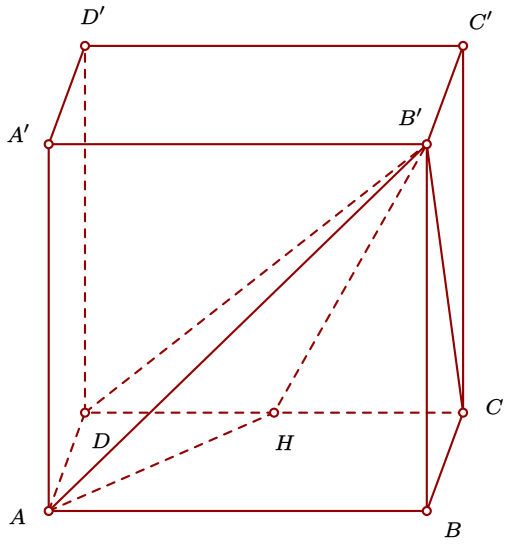
t	6		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$y=2^m$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 2^m>0$, đúng $\forall m\in\mathbb{R}$.
Do $m\in\mathbb{Z}$, $m>0$ và $m\in[-5;5]$ nên $m\in\{1;2;3;4;5\}$.
Vậy có 5 giá trị nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37. Chọn đáp án: a b c d
a) Số cách chọn một học sinh trong số học sinh trên là 10.
b) Số cách xếp ngẫu nhiên 10 học sinh trên thành một hàng là 10! cách.
c) Số cách chọn 3 học sinh đủ cả ba khối là $2\cdot 3\cdot 5=30$.
d) Số phần tử của không gian mẫu
$n(\Omega)=10!$.

Gọi A là biến cố: "Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh trên thành một hàng ngang mà không có 2 học sinh cùng khối đứng cạnh nhau".
Xếp 5 học sinh khối 12 (kí hiệu một học sinh khối 12 bởi C) vào hàng có 5! cách.
Sau khi xếp sẽ có 6 vị trí trống (4 ở giữa và 2 ở đầu), chẳng hạn $1C2C3C4C5C6$.
Nếu xếp xen kẽ 5 học sinh khối 10 và khối 11 từ phía tận cùng bên trái (12345), có 5! cách; tương tự xếp từ phía bên phải (23456) cũng sẽ có 5! cách.
Nếu xếp xen kẽ 5 học sinh khối 10 và khối 11 vào các vị trí 2345 trong đó có một vị trí xếp hai học sinh có $\mathrm{A}_4^3 \cdot 2! \cdot 2 \cdot 3$ cách.
Suy ra $n(A) = 5!\left(2 \cdot 5! + \mathrm{A}_4^3 \cdot 2! \cdot 2 \cdot 3\right) = 63360$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{63360}{10!} = \dfrac{63360}{362880} = \dfrac{11}{63}$.

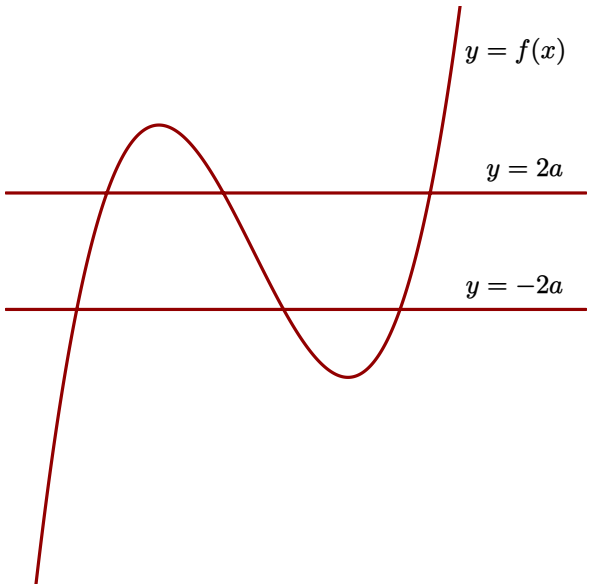
Câu 38. Chọn đáp án: a b c d



a) $\mathrm{d}((ABCD),(A'B'C'D')) = AA' = a$.
b) Ta có $BC' \parallel AD' \Rightarrow (BC', CD') = (AD', CD') = \widehat{AD'C} = 60^\circ$ (vì tam giác ACD' đều).
c) Gọi O là tâm của hình vuông $CDD'C'$, khi đó $CO = \dfrac{1}{2}CD' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Mà $BC \perp (CDD'C') \Rightarrow BC \perp CO$.
$CDD'C'$ là hình vuông nên $C'D \perp CO \Rightarrow \mathrm{d}(BC, C'D) = CO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
d) Xét tam giác $B'CD$ kẻ đường cao $B'H$.
Ta có diện tích tam giác $B'CD$ là $S_{B'CD} = \dfrac{B'H \cdot CD}{2}$.
Theo công thức Hê-rông ta lại có $S_{B'CD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
Suy ra $\dfrac{B'H \cdot a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B'H = a\sqrt{2}$.
Ta có $HD = \sqrt{B'D^2 - B'H^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $AH = \sqrt{HD^2 + AD^2} = \dfrac{3a}{2}$.
Nối $HA \Rightarrow [A, CD, B'] = \widehat{AHB'}$.
Xét tam giác AHB' có $\cos\widehat{AHB'} = \dfrac{HA^2 - HB'^2 + AB'^2}{2 \cdot HA \cdot HB'} = \dfrac{3\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \widehat{AHB'} \approx 58^\circ$.

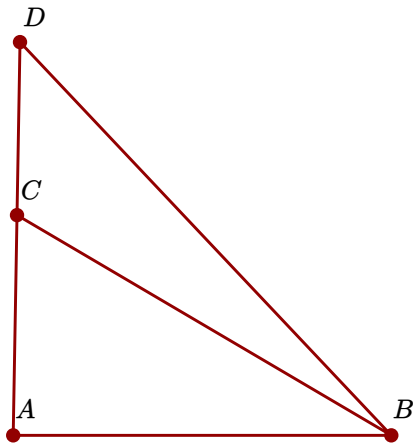
Câu 39. Đáp án: 132.
Giả sử $a > 0$.

Ta có $|f(x)|=22 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=22 \\ f(x)=-22. \end{array}\right.$



Phương trình $f(x)=22$ có 3 nghiệm $x_1=3$; $x_2=15$; $x_3=18$.
Phương trình $f(x)=-22$ có 3 nghiệm $x_4=6$; $x_5=9$; $x_6=21$.
Ta có $f(x)+22=a(x-3)(x-15)(x-18) \Rightarrow d+22=-3\cdot 15\cdot 18a$.
$f(x)-22=a(x-6)(x-9)(x-21) \Rightarrow d-22=-6\cdot 9\cdot 21a$.
Suy ra $\dfrac{d+22}{d-22}=\dfrac{3\cdot 15\cdot 18}{6\cdot 9\cdot 21} \Leftrightarrow d=-132$.
Vậy $|d|=132$.
Tương tự với trường hợp $a<0$.

Câu 40. Đáp án: 9,63.



Giả sử màn hình LED được ký hiệu là CD, ta lần lượt có độ dài đoạn $CD=2{,}4$, $AC=8{,}5$.
Đặt $AB=x$ m với $x>0$.
Ta có

$$\tan\widehat{CBD}=\tan\left(\widehat{ABD}-\widehat{ABC}\right)=\frac{\tan\widehat{ABD}-\tan\widehat{ABC}}{1+\tan\widehat{ABD}\cdot\tan\widehat{ABC}}$$

$$=\frac{\dfrac{AD}{AB}-\dfrac{AC}{AB}}{1+\dfrac{AD\cdot AC}{AB^2}}=\frac{\dfrac{2{,}4}{x}}{1+\dfrac{10{,}9\cdot 8{,}5}{x^2}}=\frac{2{,}4x}{x^2+92{,}65}.$$

Để góc quan sát $\widehat{CBD}$ lớn nhất thì $\tan\widehat{CBD}$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2{,}4x}{x^2+92{,}65}$ với $x>0$.

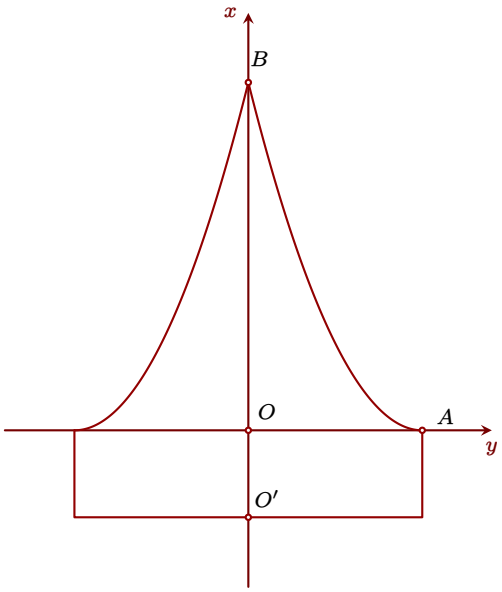
Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và $f'(x)=\dfrac{-2{,}4x^2+222{,}36}{(x^2+92{,}65)^2}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số trên như sau:

x	0		$9{,}63$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$0{,}12$	↘	0

Vậy để khán giả B có góc quan sát màn hình LED là thuận lợi nhất khi góc đối diện với màn hình LED là cực đại, khi đó khoảng cách giữa hai khán giả A và B là 9,63.

Câu 41. Đáp án: 332.



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Giả sử parabol $(P)\colon y=ax^2+bx+c$.

Từ hình vẽ ta thấy (P) đi qua điểm $B(20;0)$ và có đỉnh $A(0;10)$ nên

$$\begin{cases}400a+20b+c=0\\ -\dfrac{b}{2a}=0\\ c=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=10\\ b=0\\ a=-\dfrac{1}{40}\end{cases}\Rightarrow (P)\colon y=-\frac{1}{40}x^2+10.$$

Khi đó, thể tích của chân đế là

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{20}\left(-\frac{1}{40}x^2+10\right)^2\mathrm{d}x+\pi\cdot 10^2\cdot 5\\ &=\frac{3200}{3}\pi+500\pi\\ &=\frac{4700}{3}\pi\ \text{cm}^3=\frac{47\pi}{3}\cdot 10^{-4}\ \text{m}^3.\end{aligned}$$

Vậy số tiền để sản xuất chân đế là $T=2700V\cdot 25\approx 332$ nghìn đồng.

Câu 42. Đáp án: -5.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(2;2;-2)$; $M\in d\Rightarrow M(1-t;-2+t;2t)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-t;-6+t;-2+2t)$.

Có $\mathrm{d}(B,AM)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\sqrt{\dfrac{56t^2-304t+416}{6t^2-20t+40}}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{56t^2-304t+416}{6t^2-20t+40}$; $f'(t)=\dfrac{704t^2-512t-3840}{(6t^2-20t+40)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{30}{11}\\t=-2.\end{array}\right.$

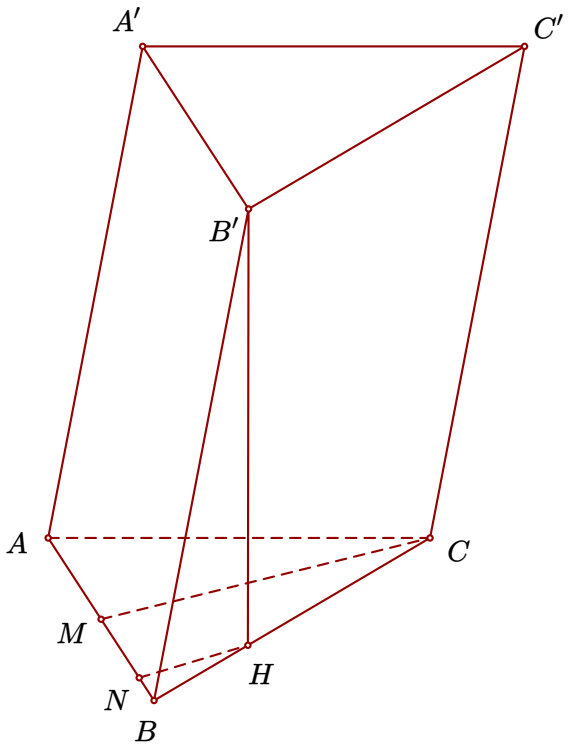
Xét dấu.

t	$-\infty$		-2		$\dfrac{30}{11}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\dfrac{28}{3}$	$\nearrow$	12	$\searrow$	$\dfrac{4}{35}$	$\nearrow$	$\dfrac{28}{3}$

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $M(3;-4;-4)$.

Vậy tổng các thành phần toạ độ điểm M là -5.

Câu 43. Đáp án: 2,62.



Hạ $B'H\perp BC$ $(H\in BC)$.

Vì $(BB'C'C)\perp(ABC)$ nên $B'H\perp(ABC)$.

Hạ $CM\perp AB$ $(M\in AB)$, $HN\perp AB$ $(N\in AB)$.

Ta có $\mathrm{d}(CC',(ABB'A'))=\mathrm{d}(C,(ABB'A'))\Rightarrow\mathrm{d}(C,(ABB'A'))=\dfrac{2\sqrt{12}}{5}$.

Đặt $BH=x$ $(x>0)$.

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(H,(ABB'A'))}{\mathrm{d}(C,(ABB'A'))}=\dfrac{HB}{CB}=\dfrac{x}{2}\Rightarrow \mathrm{d}(H,(ABB'A'))=\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{12}}{5}=\dfrac{x\sqrt{12}}{5}$.

Mà $\mathrm{d}(H,(ABB'A'))=\dfrac{HB'\cdot HN}{\sqrt{HB'^2+HN^2}}$.

Và $HB'=\sqrt{4-x^2}$; $HN=x\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra

$$\frac{\sqrt{4-x^2}\cdot\dfrac{x\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4-x^2+\dfrac{3x^2}{4}}}=\frac{x\sqrt{12}}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{4-x^2}=4\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow 25(4-x^2)=16\left(4-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

Do đó $HB'=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=HB'\cdot S_{ABC}=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}\cdot\dfrac{2^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4\sqrt{21}}{7}\approx 2{,}62.$

Câu 44. Đáp án: 2048.

Mỗi bất phương trình $a_kx+b_ky>c_k$ hoặc $a_kx+b_ky<c_k$ có hai lựa chọn.

Vì có 12 bất phương trình nên số lượng hệ bất phương trình có thể tạo ra là 2^{12}.

Xét một hệ bất phương trình. Nếu ta thay đổi dấu của tất cả các bất phương trình trong hệ đó ta sẽ được một hệ bất phương trình mới.

Vậy nếu hệ ban đầu có nghiệm thì hệ mới sẽ không có nghiệm, và ngược lại nếu hệ ban đầu không có nghiệm thì hệ mới cũng có thể vô nghiệm.

Ta có thể chia tất cả các hệ bất phương trình thành các cặp sao cho mỗi cặp gồm một hệ và hệ đối của nó.

Trong mỗi cặp, có tối đa một hệ có nghiệm. Do đó số lượng hệ vô nghiệm ít nhất là một nửa số lượng hệ có thể tạo ra.

Vậy số lượng hệ vô nghiệm ít nhất là $\dfrac{2^{12}}{2}=2^{11}=2048$.