

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)

ĐỀ BÀI

(Đề gồm: 01 trang)

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{3x+4}{2x-3}$.

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 3$ trên đoạn $[-2;1]$.

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Cho số phức z thỏa mãn: $(1+2i)z - (4-5i) = -7+3i$. Tính môđun của z .

b) Giải phương trình: $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin x dx$

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + 4z - \frac{15}{4} = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 13 = 0$. Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (S) . Viết phương trình mặt phẳng (Q) biết (Q) song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Giải phương trình: $\cos 6x + \cos 2x = \cos 4x$.

b) Một hộp chứa 20 quả cầu giống nhau gồm 12 quả màu đỏ và 8 quả màu xanh. Lấy ngẫu nhiên (đồng thời) 3 quả. Tính xác suất để trong 3 quả cầu lấy được có ít nhất một quả màu xanh.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{5}$, $AA' = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC .

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại B , $AB = 2BC$, D là trung điểm của AB , E thuộc đoạn AC sao cho $AC = 3EC$, biết phương trình đường thẳng $CD: x - 3y + 1 = 0$ và $E(\frac{16}{3}; 1)$ Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

Câu 9 (1,0 điểm).

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \\ 3y(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4y+2)(\sqrt{1+x+x^2} + 1) = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 10 (1,0 điểm). Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 + \frac{15}{4}xyz$.

Hết

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Họ tên, chữ ký của giám thị 1:.....

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN
(Hướng dẫn chấm có 05 trang)

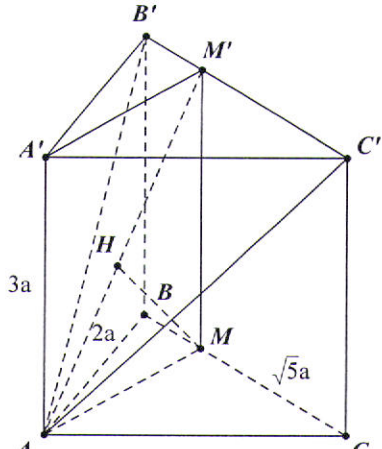
I. Hướng dẫn chung:

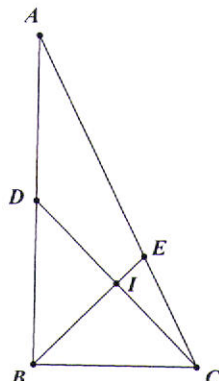
1. Điểm của bài thi theo thang điểm 10, phần lẻ được tính đến 0,25 điểm. Giám khảo giữ nguyên điểm lẻ, không được làm tròn điểm.
2. Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm sai lệch hướng dẫn chấm.
3. Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng giải theo cách khác mà lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

II. Đáp án và thang điểm:

Câu	Ý	Hướng dẫn – Đáp án	Điểm											
1		Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{3x+4}{2x-3}$.	1,0											
	a) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.		0,25											
	b) Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = -\frac{17}{(2x-3)^2}; y' < 0, \forall x \in D$;													
	Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ và $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$; - Cực trị: Hàm số không có cực trị. - Giới hạn, tiệm cận: Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{3}{2}$ suy ra tiệm cận ngang $y = \frac{3}{2}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} y = +\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng $x = \frac{3}{2}$;		0,25											
	- Bảng biến thiên:	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$+\infty$</td><td>$\frac{3}{2}$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	y'		-	-	y	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$
x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$											
y'		-	-											
y	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$											
c) Đồ thị: - Đồ thị cắt trục Ox tại điểm $\left(\frac{-4}{3}; 0\right)$, cắt trục Oy tại điểm $\left(0; \frac{-4}{3}\right)$; - Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng.		0,25												

2	Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 3$ trên đoạn $[-2;1]$.		1,0
		Ta có $f'(x) = x^3 - 9x$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 3$	0,25
		Xét trên đoạn $[-2;1]$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	0,25
		Mặt khác $f(-2) = -11; f(1) = -\frac{5}{4}; f(0) = 3$.	0,25
		Vậy $\min_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = -11$.	0,25
3	a) Cho số phức z thỏa mãn: $(1+2i)z - (4-5i) = -7+3i$. Tính môđun của z.		1,0
	b) Giải phương trình: $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$ ($x \in \mathbb{R}$)		
	a)	Ta có $(1+2i)z - (4-5i) = -7+3i \Rightarrow (1+2i)z = -3-2i \Rightarrow z = -\frac{3+2i}{1+2i} = -\frac{7-4i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{4}{5}i$	0,25
		Suy ra $ z = \sqrt{\left(-\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{5}$.	0,25
	b)	Phương trình tương đương: $13 \cdot 13^{2x} - 13^x - 12 = 0$. Đặt $13^x = t, t > 0$. Ta được phương trình $13t^2 - t - 12 = 0$ $\Leftrightarrow t = 1$ và $t = -\frac{12}{13}$ (loại). Với $t = 1 \Rightarrow 13^x = 1 \Rightarrow x = 0$	0,25
4	Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin x dx$		1,0
		Đặt $\begin{cases} u = \pi - x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = -\cos x \end{cases}$	0,25
		$I = -(\pi - x) \cos x \Big _0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x dx$	0,25
		$I = -(\pi - x) \cos x \Big _0^{\pi} - \sin x \Big _0^{\pi} = \pi$.	0,5
5	Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + 4z - \frac{15}{4} = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 13 = 0$. Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (S). Viết phương trình mặt phẳng (Q) biết (Q) song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).		1,0
		Phương trình mặt cầu $(S): (x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 3^2$ Suy ra mặt cầu có tâm $I(\frac{1}{2}; 1; -2)$ và bán kính $R = 3$.	0,5
		Do mặt phẳng (Q) song song với (P) nên phương trình của mp (Q) có dạng $2x - y + 2z + D = 0, D \neq 13$. Vì (Q) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (Q)) = R \Rightarrow \frac{ 1 - 1 - 4 + D }{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3$	0,25
		$\Leftrightarrow D - 4 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 13 \\ D = -5 \end{cases}$. Do $D \neq 13 \Rightarrow D = -5$ Vậy phương trình mặt phẳng (Q) cần tìm là $2x - y + 2z - 5 = 0$.	0,25

6	a) Giải phương trình: $\cos 6x + \cos 2x = \cos 4x$. b) Một hộp chứa 20 quả cầu giống nhau gồm 12 quả màu đỏ và 8 quả màu xanh. Lấy ngẫu nhiên (đồng thời) 3 quả. Tính xác suất để trong 3 quả cầu lấy được có ít nhất một quả màu xanh.		1,0
	a	$pt \Leftrightarrow 2 \cos 4x \cdot \cos 2x = \cos 4x \Leftrightarrow \cos 4x(2 \cos 2x - 1) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$	0,25
	b	Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{20}^3$. Gọi A là biến cố “Chọn được 3 quả cầu trong đó có ít nhất một quả cầu màu xanh”. Thì $\bar{A}$ là biến cố “Chọn được 3 quả cầu màu đỏ”	0,25
		$\Rightarrow n(\bar{A}) = C_{12}^3 \Rightarrow p(\bar{A}) = \frac{C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{11}{57}$. Vậy xác suất của biến cố A là $p(A) = 1 - \frac{11}{57} = \frac{46}{57}$.	0,25
7	Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2a, BC = a\sqrt{5}, AA' = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC.		1,0
		Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - 4a^2} = a$ Thể tích khối lăng trụ $V = AA' \cdot S_{ABC} = AA' \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC =$ $= \frac{1}{2} 3a \cdot 2a \cdot a = 3a^3$	0,25
			0,25
	Vì $BC \parallel B'C'$ nên $BC \parallel (AB'C')$. Do đó $d(AB', BC) = d(BC, (AB'C'))$. Gọi M, M' lần lượt là chân đường cao hạ từ A và A' trong các tam giác ABC và $AB'C'$. Ta có $B'C' \perp (AMM'A')$ nên $(AB'C') \perp (AMM'A')$. Gọi H là chân đường cao hạ từ M của tam giác AMM' . Ta có: $\begin{cases} HM \perp AM' \\ HM \perp B'C' (B'C' \perp AMM'A') \end{cases} \Rightarrow HM \perp (AB'C') \Rightarrow d(BC, (AB'C')) = d(M, (AB'C')) = HM$		0,25
	Vì tam giác AMM' và ABC vuông nên $\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MM'^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{9a^2} \Rightarrow HM = \frac{6a}{7}$ Vậy $d(AB', BC) = \frac{6a}{7}$.		0,25

	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại B, $AB = 2BC$, D là trung điểm của AB, E thuộc đoạn AC sao cho $AC = 3EC$, biết phương trình đường thẳng $CD: x - 3y + 1 = 0$ và $E(\frac{16}{3}; 1)$ Tìm tọa độ các điểm A, B, C.	1,0	
8	Gọi $I = BE \cap CD$ Ta có $\frac{BA}{BC} = \frac{1}{2} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow E$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Vì $BD = BC \Rightarrow BE \perp CD \Rightarrow BE: 3x + y - 17 = 0$ Vì $I = BE \cap CD \Rightarrow I(5; 2)$ Đặt $BC = x, x > 0 \Rightarrow AB = 2x, AC = x\sqrt{5}, EC = \frac{x\sqrt{5}}{3}$ $\left. \begin{aligned} \widehat{CBE} = 45^\circ &\Rightarrow IC = IB = BC \cdot \cos 45^\circ = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ IE^2 = CE^2 - CI^2 &\Rightarrow IE = \frac{x}{3\sqrt{2}} \end{aligned} \right\}$ $\Rightarrow \overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IE} \Rightarrow B(4; 5)$		0,5
	$C \in CD \Rightarrow C(3a - 1; a), \quad \overline{BC}(3a - 5; a - 5) \Rightarrow BC = \sqrt{10a^2 - 40a + 50},$ $\overline{BI}(1; -3) \Rightarrow BI = \sqrt{10}$ Từ hệ thức: $BC = BI\sqrt{2} \Rightarrow BC = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 3 \end{cases}$ Với $a = 1 \Rightarrow C(2; 1)$, từ hệ thức $\overline{EA} = -2\overline{EC} \Rightarrow A(12; 1)$. Với $a = 3 \Rightarrow C(8; 3)$, từ hệ thức $\overline{EA} = -2\overline{EC} \Rightarrow A(0; -3)$.	0,5	
9	Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \\ 3y(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4y+2)(\sqrt{1+x+x^2} + 1) = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$	1,0	
	Điều kiện xác định $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Ta có $xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \Leftrightarrow (x-y)(x^2 - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$	0,25	
	Với $y = x^2 + 1$ thay vào phương trình thứ 2 ta được $3(x^2 + 1)(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x^2 + 6)(\sqrt{1+x+x^2} + 1) = 0$, dễ thấy phương trình vô nghiệm.	0,25	
	Với $y = x$ thay vào phương trình thứ 2 ta được $3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(\sqrt{1+x+x^2} + 1) = 0$ $\Leftrightarrow 3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) = -(2x + 1)(\sqrt{3 + (2x + 1)^2} + 2)$ $\Leftrightarrow 3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) = (-2x - 1)(\sqrt{3 + (-2x - 1)^2} + 2)$	0,25	
	Xét hàm số $f(x) = t(\sqrt{t^2 + 3} + 2)$, ta có $f'(t) = \sqrt{t^2 + 3} + 2 + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0$, suy ra hàm số đồng biến. Từ phương trình trên ta có $f(3x) = f(-2x - 1) \Leftrightarrow 3x = -2x - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$.	0,25	

		Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (\frac{-1}{5}; \frac{-1}{5})$.	
10	Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 + \frac{15}{4}xyz$.		1,0
		Do vai trò của x, y, z bình đẳng nên giả sử $x = \min\{x, y, z\}$ Từ giả thiết suy ra $0 \leq x \leq \frac{1}{3}, y + z = 1 - x$ Ta dễ có $yz \leq \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(1-x)^2}{4}$.	0,25
		Khi đó ta được: $P = x^3 + y^3 + z^3 + \frac{15}{4}xyz = x^3 + (y+z)^3 - 3yz(y+z) + \frac{15}{4}xyz$ $= x^3 + (y+z)^3 + yz[\frac{15}{4}x - 3(y+z)]$ $= x^3 + (1-x)^3 + yz(\frac{27x}{4} - 3) \geq x^3 + (1-x)^3 + \frac{(y+z)^2}{4}(\frac{27x}{4} - 3)$ $= \frac{1}{16}(27x^3 - 18x^2 + 3x + 4) \text{ (do } \frac{27x}{4} - 3 < 0 \text{)}.$	0,5
		Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{16}(27x^3 - 18x^2 + 3x + 4)$ trên đoạn $[0; \frac{1}{3}]$. có $f'(x) = \frac{1}{16}(81x^2 - 36x + 3), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}, x = \frac{1}{3}$. Ta có $f(0) = f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}, f(\frac{1}{9}) = \frac{7}{27}$. Từ đó suy ra $P_{\min} = \frac{1}{4}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ hoặc $x = 0, y = z = \frac{1}{2}$ và các hoán vị của nó.	0,25