

Số báo danh

.....

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 23/9/2025

(Đề thi có 03 câu, gồm 01 trang)

Câu 1 (7 điểm). Cho số nguyên $n \geq 2$. Xét một hoán vị của $a_1, a_2, \dots, a_n$ của n số nguyên dương đầu tiên sao cho

$$a_1 < \frac{a_1 + a_2}{2} < \dots < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

- Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của a_n .
- Gọi k là số nguyên dương sao cho $a_k = n$. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của k .

Câu 2 (6 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ, một điểm được gọi là *điểm nguyên* nếu cả hoành độ và tung độ của nó đều là các số nguyên. Có thể chọn được tối đa bao nhiêu *điểm nguyên* trong mặt phẳng tọa độ, sao cho đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trong chúng chứa đúng 2026 *điểm nguyên*?

Câu 3 (7 điểm). Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AD ($D \in BC$). Các điểm E, F nằm trên cạnh BC sao cho AE, AF đẳng giác trong góc BAC . Lấy một điểm K bất kỳ trên đoạn thẳng AD . Gọi Y, Z tương ứng là hình chiếu vuông góc của A trên KE, KF .

- Gọi Q là điểm đối xứng với A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DYZ . Chứng minh rằng $KQ \perp YZ$.
- Gọi R, S tương ứng là hình chiếu vuông góc của A trên KC, KB . Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác DYZ và DRS tiếp xúc nhau.

..... HẾT

ĐỀ CHÍNH THỨC

Số báo danh

.....

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 24/9/2025

(Đề thi có 03 câu, gồm 01 trang)

Câu 4 (6 điểm). Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn:

$$x! + y! + z! = t^4 + 2025.$$

Câu 5 (7 điểm). Ban tổ chức mời n người mẫu đôi một không quen nhau tham gia trình diễn thời trang trong một sự kiện. Để chuẩn bị cho buổi lễ, Ban tổ chức tiến hành 36 buổi diễn tập, mỗi buổi có ít nhất một người mẫu tham gia. Hai người mẫu trở nên quen nhau nếu họ cùng tham gia ít nhất một buổi diễn tập. Sau khi các buổi diễn tập kết thúc, người ta nhận thấy rằng số người quen của mỗi người mẫu không ít hơn số buổi diễn tập mà người mẫu đó tham gia.

Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho điều đó có thể xảy ra.

Câu 6 (7 điểm). Ký hiệu $\mathbb{R}_{>0}$ là tập hợp các số thực dương. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$, ta có

$$f(x)f(yf(x)) + yf(xy) = \frac{f\left(\frac{x}{y}\right)}{y} + \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x}.$$

..... HẾT