

CHỌN ĐỘI TUYỂN THAM DỰ KỲ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA**Trường Phổ thông Năng khiếu – ĐHQG TP.HCM****Năm học: 2026 – 2027****Môn thi: TOÁN (Ngày 1)***Thời gian làm bài: 180 phút***ĐỀ THI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI**

Thực hiện bởi đội ngũ Giáo viên và Trợ giảng của Trung tâm bồi dưỡng năng lực và phát triển tư duy Ocean Education: Lê Viết Ân, Võ Thành Đạt, Lương Trần Công Danh, Hồ Chí Quốc.

Câu 1 (5.0 điểm). Cho đa thức $P(x) = x^{2027} - x^{2026} + x$ và số thực $a_1 \in (0, 1)$. Xét dãy số (a_n) xác định bởi $P(a_{n+1}) = a_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (a_n) xác định duy nhất và $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Câu 2 (5.0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$, đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với cạnh BC tại D . AD cắt (I) tại điểm thứ hai $E \neq D$. Tiếp tuyến tại E của (I) cắt AB, AC tại M, N . Đường thẳng qua N vuông góc với MN cắt MI tại P , đường thẳng qua N vuông góc với AC cắt CI tại Q .

- a) Chứng minh rằng $BN \perp PQ$.
- b) Gọi $K = CM \cap BN$, L là trung điểm của PQ . Chứng minh rằng K, I, L thẳng hàng.

Câu 3 (5.0 điểm). Một số nguyên dương n gọi là “hoàn hảo” nếu tổng tất cả các ước dương của n gấp đôi nó.

- a) Chứng minh rằng số nguyên dương chẵn n là số “hoàn hảo” khi và chỉ khi n có dạng $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ với p và $2^p - 1$ là số nguyên tố.
- b) Chứng minh rằng không thể có số nguyên dương lẻ n nào “hoàn hảo” mà có đúng 3 ước nguyên tố phân biệt.

Câu 4 (5.0 điểm). Cho n là một số nguyên dương. Một hình vuông được chia thành $n \times n$ ô vuông đơn vị. Các giao điểm của những đường kẻ trong hình gọi là nút lưới. Ta chỉ di chuyển từ một nút lưới đến một nút lưới kề nó dọc theo một cạnh của ô vuông. Một đường đi nối hai nút được gọi là ngắn nhất nếu nó sử dụng ít bước di chuyển nhất. Một tập các nút lưới được gọi là “tốt” nếu với hai nút phân biệt bất kỳ thuộc tập đó, số đường đi ngắn nhất nối hai nút ấy là một số lẻ.

- a) Giả sử n là lũy thừa của 2. Chứng minh rằng tồn tại một tập tốt gồm $2n$ nút lưới.
- b) Với n tùy ý, hãy xác định số nút lưới lớn nhất có thể có trong một tập tốt.

— HẾT —

HƯỚNG DẪN GIẢI

CÂU 1.

(5.0 điểm)

Cho đa thức $P(x) = x^{2027} - x^{2026} + x$ và số thực $a_1 \in (0, 1)$. Xét dãy số (a_n) xác định bởi $P(a_{n+1}) = a_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (a_n) xác định duy nhất và $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = x^{2027} - x^{2026} + x - a$ (với $a \in (0, 1)$) trên $[0, 1]$. Ta có $f'(x) = 2027x^{2026} - 2026x^{2025} + 1$. Với $x \in (0, 1)$, ta được $f'(x) > 2025x^{2026} + 1 - 2026x^{2025} \geq 0$ (theo AM–GM). Suy ra f đồng biến trên $(0, 1)$. Mặt khác, ta lại có $f(0) \cdot f(1) = a(a - 1) < 0$ (vì $a \in (0, 1)$). Kết hợp với f liên tục trên $[0, 1]$, ta được phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(0, 1)$.

Bằng quy nạp, ta chứng minh dãy (a_n) xác định duy nhất và $a_n \in (0, 1) \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Với $n = 1$, ta có $a_1 \in (0, 1)$.

Giả sử mệnh đề đúng với n , tức là a_n xác định duy nhất và $a_n \in (0, 1)$.

Xét phương trình $P(x) = a_n \iff x^{2027} - x^{2026} + x - a_n = 0$. Theo chứng minh trên (với $a = a_n \in (0, 1)$), phương trình có duy nhất một nghiệm thuộc $(0, 1)$. Gọi nghiệm đó là a_{n+1} . Vậy a_{n+1} xác định duy nhất và $a_{n+1} \in (0, 1)$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $a_{n+1} = a_n + a_{n+1}^{2026}(1 - a_{n+1})$. Vì $a_{n+1} \in (0, 1)$ nên suy ra $a_{n+1} > a_n$, hay (a_n) là dãy tăng. Đồng thời (a_n) bị chặn trên bởi 1 nên (a_n) hội tụ. Đặt $L = \lim a_n$ ($0 < L \leq 1$). Trong đẳng thức $P(a_{n+1}) = a_n$ cho $n \rightarrow +\infty$, ta được: $L^{2027} - L^{2026} + L = L \iff L = 1$ (vì $0 < L \leq 1$).

Vậy $\lim a_n = 1$. □

CÂU 2.

(5.0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$, đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với cạnh BC tại D . AD cắt (I) tại điểm thứ hai $E \neq D$. Tiếp tuyến tại E của (I) cắt AB, AC tại M, N . Đường thẳng qua N vuông góc với MN cắt MI tại P , đường thẳng qua N vuông góc với AC cắt CI tại Q .

a) Chứng minh rằng $BN \perp PQ$.

b) Gọi $K = CM \cap BN$, L là trung điểm của PQ . Chứng minh rằng K, I, L thẳng hàng.

Lời giải.

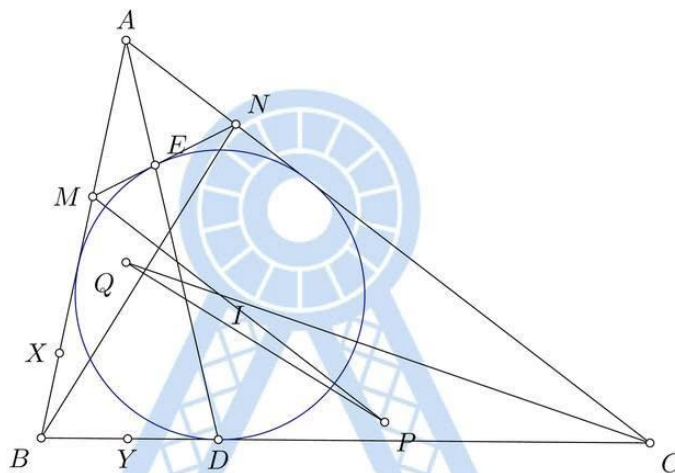
a) Gọi X là điểm đối xứng của N qua MP và Y là điểm đối xứng của N qua QC . Khi đó, ta suy ra $MX = MN$ và $CN = CY$. Theo định lý Pitot, ta có:

$$BC - CN = MB - MN \implies BX = BY.$$

Ta có chuỗi biến đổi sau:

$$NP^2 - NQ^2 = PX^2 - QY^2 = (PB^2 - BX^2) - (BQ^2 - BY^2) = BP^2 - BQ^2.$$

Theo định lý 4 điểm, thì $PQ \perp BN$.



b) Gọi $F = MN \cap BC$ và $G = CM \cap AF$.

Dễ thấy ta có các hàng điểm điều hòa $(B, C, D, F) = -1$ và $(M, N, E, F) = -1$. Từ đó suy ra:

$$(F, D, B, C) = (F, E, N, M)$$

Đẳng thức trên kéo theo ba đường thẳng ED, MC, NB đồng quy, suy ra $K \in AE$.

Khi đó ta có:

$$(G, K, M, C) = A(G, K, M, C) = (F, D, B, C) = -1$$

Suy ra

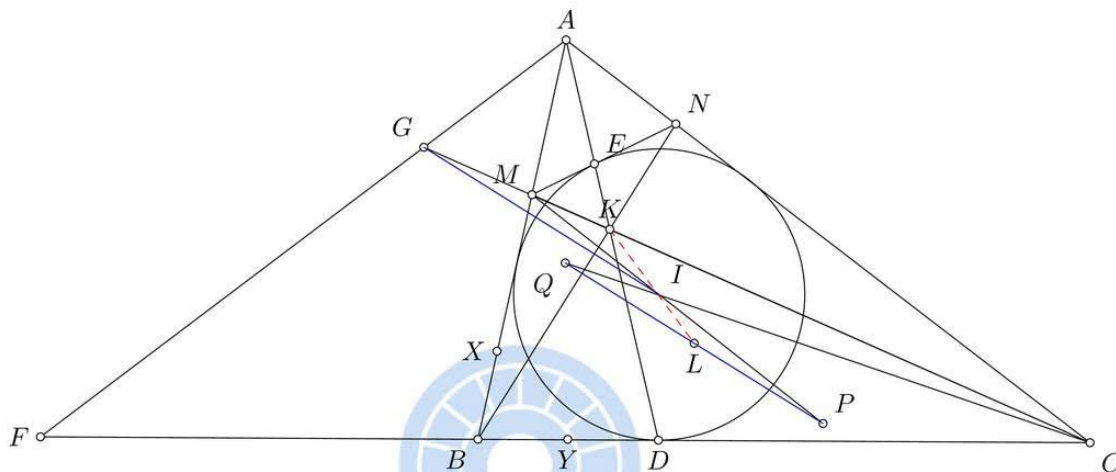
$$I(G, K, M, C) = -1 \quad (1)$$

Tiếp theo, xét cực và đối cực đối với đường tròn (I) . Theo một tính chất quen thuộc, ta có BN là đường đối cực của G đối với (I) , suy ra được $IG \perp BN$.

Mặt khác, $BN \perp PQ$ (câu a). Do cùng vuông góc với BN , ta có:

$$PQ \parallel IG \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra KI đi qua trung điểm của đoạn thẳng PQ . Hay nói cách khác, KI đi qua L . Vậy ba điểm K, I, L thẳng hàng.



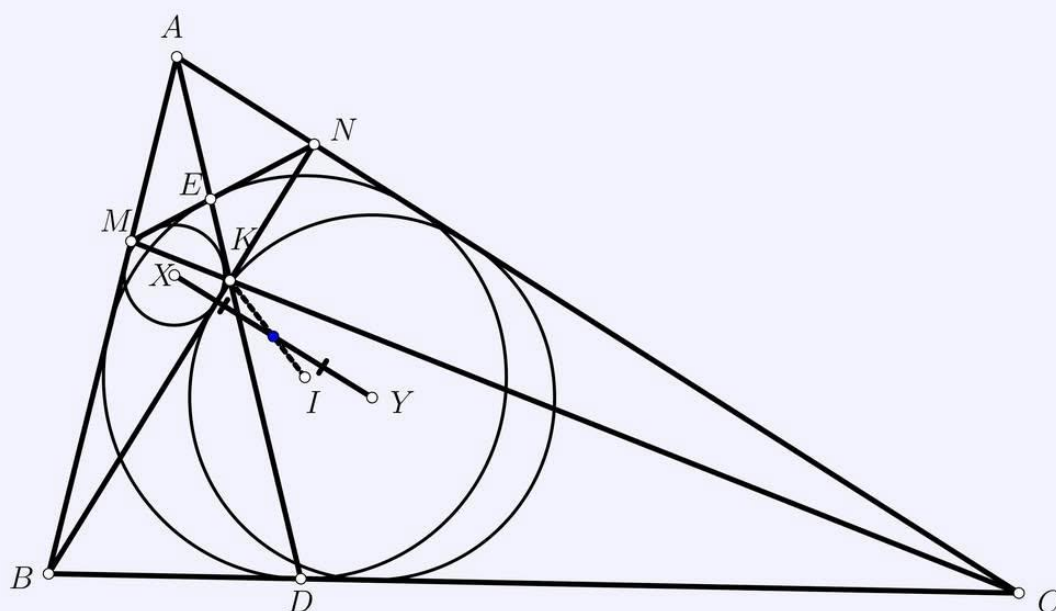
□

Nhận xét

Ta còn có cách giải khác như sau: qua N kẻ đường thẳng vuông góc với IN cắt CM tại R . Khi đó P, Q, R thẳng hàng trên đường cát tuyến trực giao của N đối với tam giác ICM . Khi đó dùng cực và đối cực sẽ ra được cả câu a, b !

Phát triển

Cho tam giác ABC có cạnh BC tiếp xúc với đường tròn nội tiếp (I) tại điểm D . Đường thẳng AD cắt lại (I) tại E . Tiếp tuyến tại E của (I) cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N . Hai đường thẳng BN và CM cắt nhau tại K . Chứng minh rằng nếu X và Y lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BMN và BCN thì đường thẳng IK chia đôi đoạn thẳng XY .



CÂU 3.

(5.0 điểm)

Một số nguyên dương n gọi là “hoàn hảo” nếu tổng tất cả các ước dương của n gấp đôi nó.

- Chứng minh rằng số nguyên dương chẵn n là số “hoàn hảo” khi và chỉ khi n có dạng $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ với p và $2^p - 1$ là số nguyên tố.
- Chứng minh rằng không thể có số nguyên dương lẻ n nào “hoàn hảo” mà có đúng 3 ước nguyên tố phân biệt.

Lời giải.

- Giả sử $n = 2^k p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$, trong đó $2 < p_1 < p_2 < \dots < p_s$ là các số nguyên tố, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Ta có:

$$\sigma(n) = 2n \Leftrightarrow (2^{k+1} - 1) \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} = 2^{k+1} \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s} \quad (*)$$

Đặt $t = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$. Từ (*), ta có:

$$(2^{k+1} - 1)\sigma(t) = 2^{k+1} \cdot t$$

Do $\gcd(2^{k+1} - 1, 2^{k+1}) = 1$ nên từ (*) suy ra:

$$2^{k+1} - 1 \mid p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s} = t$$

Đặt $m = \frac{t}{2^{k+1} - 1} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m \mid t$. Khi đó:

$$\sigma(t) \geq t + m = m(2^{k+1} - 1) + m = m \cdot 2^{k+1} \quad (**)$$

Như vậy, dấu “=” ở (**) phải xảy ra $\Leftrightarrow t$ chỉ có 2 ước là t và $m \Leftrightarrow t$ là số nguyên tố, $m = 1$. Kéo theo $t = 2^{k+1} - 1$ là số nguyên tố. Hơn nữa, nếu $k + 1$ là hợp số thì $k + 1$ có ước dương thật sự $1 < d < k + 1$, dẫn đến $2^d - 1 \mid 2^{k+1} - 1$ và $1 < 2^d - 1 < 2^{k+1} - 1$, mâu thuẫn với $2^{k+1} - 1$ là số nguyên tố. Điều mâu thuẫn cho ta $p = k + 1$ phải là số nguyên tố.

Vậy $n = 2^k t = 2^{p-1}(2^p - 1)$ và $p, 2^p - 1$ là số nguyên tố.

- Trước hết, xin phát biểu, không chứng minh định lý Euler về số hoàn hảo lẻ và định lý Zsigmondy như sau:

Định lý Euler

Nếu n là một số nguyên dương lẻ và là số hoàn hảo, thì n phải có dạng $n = p^s m^2$, trong đó p là số nguyên tố, s và m là các số nguyên dương thỏa mãn: $p \equiv s \equiv 1 \pmod{4}$ và $\gcd(p, m) = 1$.

Định lý Zsigmondy

Gọi $a > b \geq 1$ là các số nguyên và $n \geq 2$ là một số nguyên. Khi đó $a^n - b^n$ có ít nhất một ước số nguyên tố nguyên thủy (nghĩa là một ước số không chia hết $a^i - b^i$ cho mọi $1 \leq i \leq n-1$) ngoại trừ hai trường hợp sau:

- (i) $2^6 - 1^6$,
- (ii) $n = 2$ và $a + b$ là lũy thừa của 2.

Quy lại bài toán.

Giả sử tồn tại số hoàn hảo lẻ $n = p^a q^b r^c$ với $3 \leq p < q < r$ là các số nguyên tố, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{b+1} - 1}{q - 1} \cdot \frac{r^{c+1} - 1}{r - 1} < \frac{p^{a+1} q^{b+1} r^{c+1}}{(p - 1)(q - 1)(r - 1)} \\ &= \frac{n}{\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{1}{r}\right)} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{1}{r}\right)} > \frac{\sigma(n)}{n} = 2.$$

Nếu $p \geq 5$ thì $q \geq 7, r \geq 11$, cho ta

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{1}{r}\right)} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right)} < 2,$$

cho ta điều mâu thuẫn. Do đó $p = 3$, nếu $q \geq 7$ thì $r \geq 11$, khi đó

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{1}{r}\right)} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right)} < 2,$$

cũng cho ta điều mâu thuẫn. Dẫn đến $q = 5$, nếu $r \geq 17$ thì

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{1}{r}\right)} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{13}\right)} < 2,$$

cũng cho ta điều mâu thuẫn. Vậy $p = 3, q = 5, r \leq 17$.

- Xét $(p, q, r) = (3, 5, 7)$ thì $n = 3^a 5^b 7^c$, do $\sigma(n) = 2n$ nên $5 \mid \sigma(n)$, xét

$$\sigma(n) = \sigma(3^a) \sigma(5^b) \sigma(7^c) = \frac{3^{a+1} - 1}{2} \cdot \frac{5^{b+1} - 1}{4} \cdot \frac{7^{c+1} - 1}{6}.$$

Theo định lý Euler thì n có đúng một ước nguyên tố có số mũ lẻ, và ước nguyên tố đó chia 4 dư 1, nên trong trường hợp này ước nguyên tố đó chính là 5, suy ra a, c chẵn. Ta thấy rằng $5 \nmid \sigma(5^b)$, nên $5 \mid \sigma(3^a)$ hoặc $5 \mid \sigma(7^c)$. Nếu $5 \mid \sigma(3^a)$ thì $5 \mid 3^{a+1} - 1$, cho ta $a + 1$ chia hết cho 4, suy ra a lẻ, điều này mâu thuẫn với định lý Euler vì a phải chẵn. Do đó $5 \mid \sigma(7^c)$, tức là $5 \mid 7^{c+1} - 1$, cũng cho ta $c + 1$ chia hết cho 4, tức là c lẻ. Điều này mâu thuẫn với định lý Euler vì c phải chẵn.

- Xét $(p, q, r) = (3, 5, 11)$ thì

$$\sigma(n) = \sigma(3^a) \sigma(5^b) \sigma(11^c) = \frac{3^{a+1} - 1}{2} \cdot \frac{5^{b+1} - 1}{4} \cdot \frac{11^{c+1} - 1}{10} = 2 \cdot 3^a 5^b 11^c.$$

Theo định lý Euler, ta suy ra được c chẵn, từ đó $c \geq 2$. Ta có hai cách cho trường hợp này như sau:

Cách 1: Ta cũng suy ra $5 \mid \sigma(3^a)$ hoặc $5 \mid \sigma(11^c)$. Ta chỉ xét trường hợp $5 \mid \sigma(11^c)$. Suy ra $5 \mid 11^{c+1} - 1$ và như vậy, suy ra

$$0 \equiv 1 + 11 + 11^2 + \dots + 11^c \equiv c + 1 \pmod{5}.$$

Suy ra $5 \mid c + 1$, kéo theo

$$\frac{11^5 - 1}{11 - 1} \mid \frac{11^{c+1} - 1}{11 - 1}.$$

Mà $\frac{11^5 - 1}{11 - 1} = 1 + 11 + 11^2 + 11^3 + 11^4 = 5 \cdot 3221$, mà 3221 không chia hết cho 2, 3, 5, 11 nên 3221 có ước nguyên tố khác 2, 3, 5, 11, cho ta điều mâu thuẫn.

Cách 2: Áp dụng định lý Zsigmondy cho $11^{c+1} - 1$ với $c + 1 \geq 3$, suy ra $11^{c+1} - 1$ có ước nguyên tố nguyên thủy p_0 sao cho $p_0 \nmid 11^k - 1, \forall 1 \leq k \leq c$. Nói cách khác, $\sigma(n)$ có một ước nguyên tố p_0 mà cấp của 11 modulo p_0 là $\text{ord}_{p_0}(11) = c + 1 \geq 3$. Mặt khác, vì $p_0 \mid \sigma(n) = 2n$ nên $p_0 \in \{2, 3, 5, 11\}$. Rõ ràng $p_0 \neq 11$, suy ra $p_0 \in \{2, 3, 5\}$. Tuy nhiên, ta dễ dàng kiểm tra các cấp: $\text{ord}_2(11) = 1, \text{ord}_3(11) = 2, \text{ord}_5(11) = 1$. Tất cả đều nhỏ hơn 3, mâu thuẫn với $\text{ord}_{p_0}(11) \geq 3$. Vậy trường hợp này không thể xảy ra!

- Xét $(p, q, r) = (3, 5, 13)$ thì trường hợp $5 \mid \sigma(3^a)$ là tương tự (bởi vì a chẵn chẵn chẵn), ta xét trường hợp $5 \mid \sigma(13^c) \Rightarrow 5 \mid 13^{c+1} - 1$. Suy ra $c + 1$ chia hết cho 4 và như vậy c lẻ. Theo định lý Euler, do $13 \equiv 1 \pmod{4}$, mà số mũ của 13 là c lẻ nên $c \equiv 1 \pmod{4}$, điều này mâu thuẫn vì $c \equiv 3 \pmod{4}$.

Bài toán được giải quyết.

□

CÂU 4.

(5.0 điểm)

Cho n là một số nguyên dương. Một hình vuông được chia thành $n \times n$ ô vuông đơn vị. Các giao điểm của những đường kẻ trong hình gọi là nút lưới. Ta chỉ di chuyển từ một nút lưới đến một nút lưới kề nó dọc theo một cạnh của ô vuông. Một đường đi nối hai nút được gọi là ngắn nhất nếu nó sử dụng ít bước di chuyển nhất. Một tập các nút lưới được gọi là “tốt” nếu với hai nút phân biệt bất kỳ thuộc tập đó, số đường đi ngắn nhất nối hai nút ấy là một số lẻ.

- Giả sử n là lũy thừa của 2. Chứng minh rằng tồn tại một tập tốt gồm $2n$ nút lưới.
- Với n tùy ý, hãy xác định số nút lưới lớn nhất có thể có trong một tập tốt.

Lời giải.

Ta phát biểu định lý Kummer như sau:

Định lý Kummer

Giá trị của $v_p(C_n^m)$ bằng với số lần “nhớ” khi cộng m và $n - m$ trong hệ cơ số p , hay nói cách khác:

$$v_p(C_n^m) = \frac{S_p(m) + S_p(n - m) - S_p(n)}{p - 1}$$

với $S_p(k)$ là tổng các chữ số của k khi được biểu diễn ở hệ cơ số p .

Chứng minh: Áp dụng hệ thức Legendre $v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p - 1}$, ta có:

$$v_p(C_n^m) = v_p\left(\frac{n!}{m!(n - m)!}\right) = v_p(n!) - v_p(m!) - v_p((n - m)!) = \frac{S_p(m) + S_p(n - m) - S_p(n)}{p - 1}.$$

- Giả sử tất cả các nút lưới có tọa độ $(x; y)$ với $x, y \in \mathbb{N}$ và $0 \leq x, y \leq n$. Ta chọn $2n$ điểm, gồm $n + 1$ điểm có $y = 0$ và $n - 1$ điểm có $y = n$ (trừ $(0; n)$ và $(n; n)$). Ta chứng minh tập hợp này là tập tốt.

Với 2 điểm $P_1(x_1; y_1)$ và $P_2(x_2; y_2)$, đặt $X = |x_1 - x_2|$ và $Y = |y_1 - y_2|$. Để đi từ P_1 đến P_2 , ta cần đi tối thiểu X cạnh song song với trục hoành và tối thiểu Y cạnh song song với trục tung.

Do đó đường đi ngắn nhất cần $X + Y$ cạnh và có C_{X+Y}^X đường đi, do cần chọn vị trí X cạnh song song trục hoành trong $X + Y$ cạnh. Để C_{X+Y}^X lẻ thì $v_2(C_{X+Y}^X) = 0$, theo định lý Kummer ta có:

$$v_2(C_{X+Y}^X) = S_2(X) + S_2(Y) - S_2(X + Y) = 0 \Leftrightarrow S_2(X + Y) = S_2(X) + S_2(Y)$$

Hay nói cách khác, phép cộng X cho Y không có nhớ trong hệ nhị phân.

Với 2 điểm P_1 và P_2 phân biệt thì $Y = 0$ hoặc $Y = n = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$), do đó k chữ số cuối của Y luôn bằng 0 và phép cộng X cho Y không có nhớ. Vậy tập hợp $2n$ điểm này là tập tốt.

- b) Xét n là một số nguyên dương tùy ý. Đặt $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$, tức là $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Ta sẽ chứng minh số nút lưới lớn nhất trong một tập tốt luôn là $2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}$.

Đầu tiên, ta chứng minh một tập tốt không thể có quá 2^{k+1} điểm.

Định nghĩa phép “cộng không nhớ” giữa hai số tự nhiên (ký hiệu là $\oplus$): cộng hai số trong hệ nhị phân theo từng cột nhưng bỏ hết các phép nhớ.

Ví dụ: $6 \oplus 3$, ta có $6 = (110)_2$ và $3 = (011)_2$. Cột giữa $1 + 1 = 0$ (viết 0, không nhớ 1 sang trái) $\rightarrow 101_2 = 5$. Vậy $6 \oplus 3 = 5$.

Gán cho mỗi nút (x, y) một nhãn là số $x \oplus y$.

Nếu hai nút khác nhau $P_1(x_1, y_1)$ và $P_2(x_2, y_2)$ có cùng nhãn thì $x_1 \oplus y_1 = x_2 \oplus y_2$. Suy ra

$$(x_1 \oplus y_1) \oplus (x_2 \oplus y_2) = (x_2 \oplus y_2) \oplus (x_2 \oplus y_2) = 0 \quad (\text{vì } a \oplus a = 0)$$

Lại có: $p \oplus q = 0$ kéo theo $p = q$ (vì $p = p \oplus 0 = p \oplus (q \oplus q) = (p \oplus q) \oplus q = 0 \oplus q = q$). Áp dụng với $p = x_1 \oplus x_2$ và $q = y_1 \oplus y_2$, ta được $x_1 \oplus x_2 = y_1 \oplus y_2$.

Đặt $x_1 \oplus x_2 = y_1 \oplus y_2 = d$. Do 2 điểm này phân biệt, $x_1 \oplus x_2$ và $y_1 \oplus y_2$ không đồng thời bằng 0 nên $d > 0$ hay d nguyên dương.

Gọi j là vị trí đầu tiên tính từ phải sang trái mà d có chữ số 1 ($j \geq 0$). Hai số x_1, x_2 giống nhau ở mọi vị trí bên phải vị trí j nhưng khác nhau tại vị trí j , nên $X = |x_1 - x_2|$ chia hết cho 2^j và không chia hết cho 2^{j+1} . Tức là trong hệ nhị phân, X chắc chắn có chữ số 1 tại vị trí j . Chứng minh tương tự, Y cũng có chữ số 1 tại vị trí j .

Theo Định lý Kummer, vị trí j trong phép cộng X cho Y sẽ có nhớ, do đó $v_2(C_{X+Y}^X) > 0$ nên số đường đi ngắn nhất giữa 2 điểm này là số chẵn (không thỏa mãn tính chất tập tốt).

Vậy trong một tập tốt, hai nút khác nhau không thể cùng nhãn. Vì tọa độ các nút bị giới hạn bởi $0 \leq x, y \leq n < 2^{k+1}$, mỗi tọa độ được viết trong hệ nhị phân bằng nhiều nhất $k + 1$ chữ số (ở các vị trí $0, 1, \dots, k$), do đó mọi nhãn $x \oplus y$ đều nhỏ hơn 2^{k+1} . Do đó chỉ có tối đa 2^{k+1} nhãn khác nhau (từ 0 đến $2^{k+1} - 1$) được gán, suy ra một tập tốt có nhiều nhất 2^{k+1} nút.

Chọn một lưới ô vuông $2^k \times 2^k$ bên trong lưới ô vuông $n \times n$ kể trên, ta có thể xây dựng một tập tốt gồm $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ điểm theo cách xác định ở câu a).

Vậy, số nút lưới lớn nhất có thể có trong một tập tốt đối với n tùy ý là $2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}$.

□

— HẾT —

CHỌN ĐỘI TUYỂN THAM DỰ KỲ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA**Trường Phổ thông Năng khiếu – ĐHQG TP.HCM****Năm học: 2026 – 2027****Môn thi: TOÁN (Ngày 2)***Thời gian làm bài: 180 phút***ĐỀ THI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI**

Thực hiện bởi đội ngũ Giáo viên và Trợ giảng của Trung tâm bồi dưỡng năng lực và phát triển tư duy Ocean Education: Lê Viết Ân, Võ Thành Đạt, Lương Trần Công Danh, Hồ Chí Quốc.

Câu 1 (6.0 điểm). Tập hợp M gồm các số thực dương được gọi là tập "co cụm bậc hai" nếu như tỷ số giữa phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất của nó nhỏ hơn 2. Chứng minh rằng từ 2000 số thực dương có tổng bằng 1, mỗi số đều nhỏ hơn hay bằng $\frac{1}{100}$ luôn có thể chọn ra một tập con "co cụm bậc hai" có 51 phần tử.

Câu 2 (7.0 điểm). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có $AB = AD$ và $\widehat{BAD} > 90^\circ$. Gọi G là giao điểm khác O của CO với đường tròn (OBD) và L là điểm trên CA sao cho $\widehat{CGL} = 90^\circ$. Lấy E, F đối xứng với G qua OB, OD .

- Chứng minh EF, LG, BD đồng quy.
- Gọi H, K là hình chiếu của L lên CB, CD ; M, N là giao điểm của HG, KG với CA . Chứng minh điểm L có cùng phương tích đối với các đường tròn (GMN) và (OBD) .

Câu 3 (7.0 điểm). Cho đa thức hệ số nguyên $P(x)$ và số nguyên tố p , ta nói $P(x)$ là p -tốt nếu mọi số nguyên có thể thu được từ 0 sau hữu hạn các phép thay sau: thay a bởi $P(a)$, hoặc thay a bởi số nguyên b (nếu tồn tại) sao cho $P(b) \equiv a \pmod{p}$.

- Hỏi có bao nhiêu đa thức 3-tốt có bậc 99 và mọi hệ số thuộc $\{1; 2; \dots; 99\}$?
- Chứng minh rằng với mọi đa thức hệ số nguyên $P(x)$ có bậc 2, tồn tại vô hạn số nguyên tố p sao cho $P(x)$ không là p -tốt.

— HẾT —

HƯỚNG DẪN GIẢI

CÂU 1.

(6.0 điểm)

Tập hợp M gồm các số thực dương được gọi là tập “*co cụm bậc hai*” nếu như tỷ số giữa phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất của nó nhỏ hơn 2. Chứng minh rằng từ 2000 số thực dương có tổng bằng 1, mỗi số đều nhỏ hơn hay bằng $\frac{1}{100}$ luôn có thể chọn ra một tập con “*co cụm bậc hai*” có 51 phần tử.

Lời giải. Gọi $a_1, a_2, \dots, a_{2000}$ là các số dương có tổng bằng 1 và $a_i \leq \frac{1}{100}$ ($i = 1, 2, \dots, 2000$).

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2000}$.

Giả sử không tồn tại một tập “*co cụm bậc hai*” có 51 phần tử được chọn từ 2000 số ở trên.

Xét tập $M_k = \{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+50}\}$ với $k = 1, 2, \dots, 1950$. Rõ ràng M_k không phải là một tập “*co cụm bậc hai*” nên ta có $a_k \leq \frac{1}{2}a_{k+50}$ với mọi $k = 1, 2, \dots, 1950$.

Đặt $S_k = a_k + a_{k+50} + \dots + a_{k+1950}$ với $k = 1, 2, \dots, 50$.

Theo chứng minh trên, ta có

$$\begin{aligned} a_{k+1900} &\leq \frac{1}{2}a_{k+1950} \\ a_{k+1850} &\leq \frac{1}{2}a_{k+1900} \leq \frac{1}{2^2}a_{k+1950} \\ &\dots \\ a_{k+50} &\leq \frac{1}{2}a_{k+100} \leq \frac{1}{2^{38}}a_{k+1950} \\ a_k &\leq \frac{1}{2}a_{k+50} \leq \frac{1}{2^{39}}a_{k+1950} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_k &\leq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{39}}\right) a_{k+1950} = \left(\frac{1 - 1/2^{40}}{1 - 1/2}\right) a_{k+1950} \\ &= \left(2 - \frac{1}{2^{39}}\right) a_{k+1950} < 2a_{k+1950} \leq 2 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{50}. \end{aligned}$$

Dẫn tới

$$\sum_{i=1}^{2000} a_i = \sum_{k=1}^{50} S_k < 50 \cdot \frac{1}{50} = 1 \quad (\text{vô lý}).$$

Vậy điều giả sử là sai, do đó ta có đpcm. □

Cách 2. Ta phân hoạch khoảng $\left(0, \frac{1}{100}\right]$ thành vô hạn các nửa khoảng rời nhau có dạng:

$$I_k = \left(\frac{1}{100 \cdot 2^k}, \frac{1}{100 \cdot 2^{k-1}}\right] \quad \text{với } k = 1, 2, \dots$$

Vì 2000 số đã cho đều dương và không vượt quá $\frac{1}{100}$, nên mỗi số thuộc đúng một khoảng I_k .

Lấy hai số bất kỳ cùng thuộc một khoảng I_k , ta thấy tỉ số của chúng luôn nhỏ hơn 2 (do phần tử lớn hơn không vượt quá $\frac{1}{100 \cdot 2^{k-1}}$, còn phần tử nhỏ hơn lại lớn hơn $\frac{1}{100 \cdot 2^k}$). Do đó, các số nằm trong cùng một khoảng I_k bất kỳ luôn tạo thành một tập “*co cụm bậc hai*”.

Giả sử không có tập “*co cụm bậc hai*” nào gồm 51 phần tử. Khi đó, mỗi khoảng I_k chứa tối đa 50 số.

Gọi M là tập hợp gồm 2000 số đã cho và $n_k = |I_k \cap M|$ là số lượng phần tử của M nằm trong khoảng I_k . Theo giả thiết phản chứng, ta có:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} n_k = 2000 \\ 0 \leq n_k \leq 50, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+ \\ a \leq \frac{1}{100 \cdot 2^{k-1}}, \quad \forall a \in I_k \cap M \end{cases}$$

Khi đó, tổng của 2000 số ban đầu được chặn trên như sau:

$$\sum_{a \in M} a = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{a \in I_k \cap M} a \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} n_k \cdot \frac{1}{100 \cdot 2^{k-1}}$$

Đặt $c_k = \frac{1}{100 \cdot 2^{k-1}}$. Với giả thiết $\begin{cases} 0 \leq n_k \leq 50 \\ \sum_{k=1}^{+\infty} n_k = 2000 \end{cases}$ và dãy (c_k) giảm ngặt, ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{40} 50c_k - \sum_{k=1}^{+\infty} n_k c_k &= \sum_{k=1}^{40} (50 - n_k) c_k - \sum_{k=41}^{+\infty} n_k c_k \\ &\geq c_{40} \sum_{k=1}^{40} (50 - n_k) - c_{41} \sum_{k=41}^{+\infty} n_k \\ &= c_{40} \left(2000 - \sum_{k=1}^{40} n_k \right) - c_{41} \sum_{k=41}^{+\infty} n_k \\ &= (c_{40} - c_{41}) \sum_{k=41}^{+\infty} n_k \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^{+\infty} n_k c_k \leq \sum_{k=1}^{40} 50c_k.$$

Dẫn tới:

$$\begin{aligned}\sum \text{các số} &\leq 50 \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{400} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 2^{39}} \right) \\ &= \frac{50}{100} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{39}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 1/2^{40}}{1 - 1/2} \right) = 1 - \frac{1}{2^{40}} < 1 \quad (\text{vô lý}).\end{aligned}$$

Vậy điều giả sử là sai. Suy ra phải có ít nhất một khoảng chứa từ 51 số trở lên, và chúng tạo thành tập “cơ bản hai” cần tìm. □

CÂU 2.

(7.0 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có $AB = AD$ và $\widehat{BAD} > 90^\circ$. Gọi G là giao điểm khác O của CO với đường tròn (OBD) và L là điểm trên CA sao cho $\widehat{CGL} = 90^\circ$. Lấy E, F đối xứng với G qua OB, OD .

- Chứng minh EF, LG, BD đồng quy.
- Gọi H, K là hình chiếu của L lên CB, CD ; M, N là giao điểm của HG, KG với CA . Chứng minh điểm L có cùng phương tích đối với các đường tròn (GMN) và (OBD) .

Lời giải.

- Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của CE, CF . Khi đó $PQ \parallel EF$ và $\widehat{GPO} = \widehat{GQO} = 90^\circ$. Do đó tứ giác $GOPQ$ nội tiếp. Do đó nếu gọi $S = EF \cap BC$ thì:

$$\widehat{GES} = \widehat{GPQ} = \widehat{GOQ} = \widehat{GOD} = \widehat{GBD} = \widehat{GBS}.$$

Suy ra tứ giác $GBES$ nội tiếp.

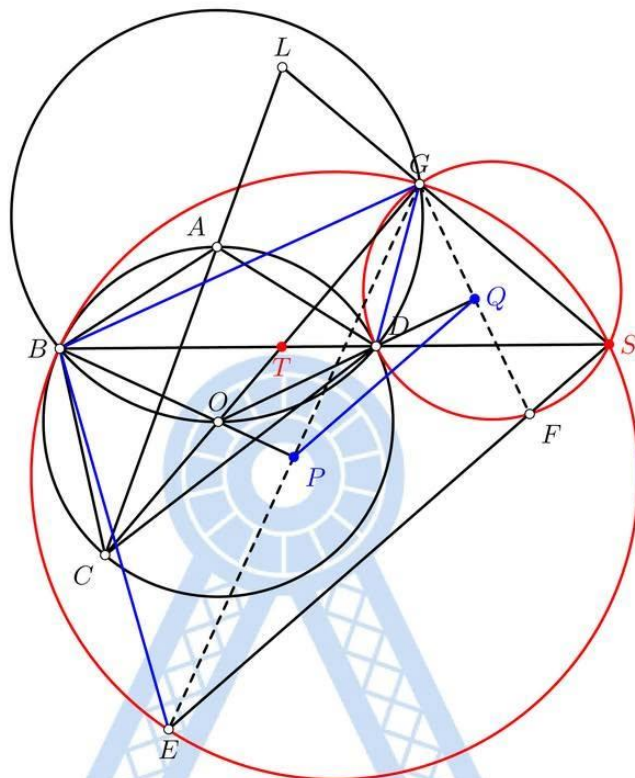
Tương tự: tứ giác $GDFS$ cũng nội tiếp.

Gọi $T = OG \cap BC$. Từ $OB = OD$ nên có $\widehat{DGT} = \widehat{OGB}$ và $\widehat{GDT} = \widehat{GOB}$ nên $\triangle GDT \sim \triangle GOB$ (g-g) nên $\widehat{GTD} = \widehat{GBO}$.

Ta có

$$\widehat{GST} = \widehat{GSB} = \widehat{GEB} = 90^\circ - \frac{\widehat{GBE}}{2} = 90^\circ - \widehat{GBO} = 90^\circ - \widehat{GTS}.$$

Điều này chứng tỏ $\triangle GTS$ vuông tại G , tức $\widehat{OGS} = 90^\circ$ nên hai đường thẳng GS và GL trùng nhau, suy ra GL đi qua S , suy ra đpcm.



Nhận xét

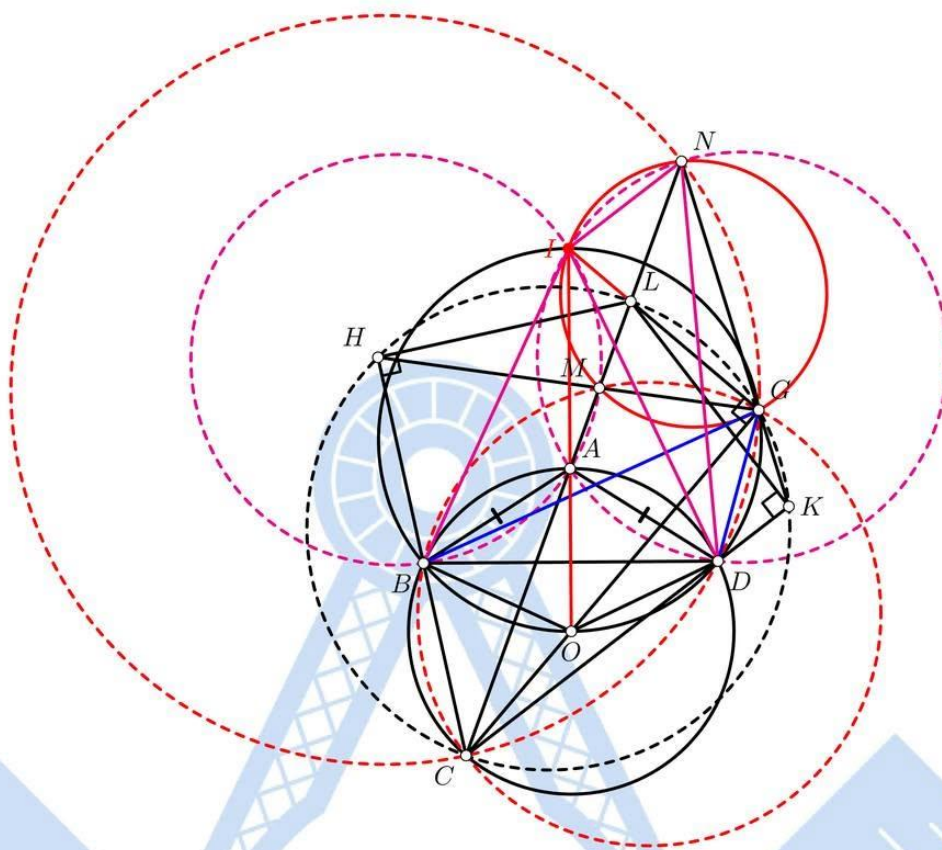
Bài toán có thể giải bằng đường thẳng Simson và Steiner, kết hợp với phép đối xứng cũng rất nhanh!

- b) Gọi I là điểm chính giữa cung BGD của (OBD) . Khi đó OI là đường kính của (OBD) nên $\widehat{IGO} = 90^\circ = \widehat{OGL}$ nên GL đi qua I . Ta sẽ chứng minh I nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác GMN .

Thật vậy, dễ thấy tứ giác $GHCK$ nội tiếp đường tròn đường kính LC và từ $AB = AC$ có được AC là phân giác $\widehat{BCD}$. Chú ý GO là phân giác $\widehat{BGO}$. Do đó:

$$\begin{aligned}
 \widehat{DGN} &= \widehat{DGI} + \widehat{NGL} && (\text{vì } GL \equiv GI) \\
 &= (\widehat{DGO} + \widehat{OGI}) + \widehat{KCL} && (\text{vì tứ giác } GKCL \text{ nội tiếp}) \\
 &= \frac{\widehat{DGB}}{2} + 90^\circ + \frac{\widehat{BCD}}{2} && (\text{vì } GC, CL \text{ là phân giác } \widehat{BGD}, \widehat{BCD}) \\
 &= \frac{180^\circ - \widehat{DOB}}{2} + 90^\circ + \frac{\widehat{BCD}}{2} && (\text{vì tứ giác } GBOD \text{ nội tiếp}) \\
 &= 180^\circ - \widehat{BCD} - \frac{\widehat{BCD}}{2} && (\text{vì } O \text{ là tâm } (BCD)) \\
 &= 180^\circ - \frac{\widehat{BCD}}{2} \\
 &= 180^\circ - \widehat{DCN}.
 \end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $GDCN$ nội tiếp.



Vì $AB = AD$ và $IB = ID$ (vì I là điểm chính giữa cung BGD của (GBD) nên IA là trung trực của BD , từ đó AI là phân giác của $\widehat{BID}$. Từ đó:

$$\widehat{AID} = \frac{\widehat{BID}}{2} = \frac{\widehat{BGD}}{2} = \widehat{CGD} = \widehat{CND} = \widehat{AND}.$$

Do đó tứ giác $AIND$ nội tiếp.

Mặt khác, từ OI là đường kính (BDO) có $ID \perp OD$ nên ID là tiếp tuyến $(ABCD)$. Từ đó

$$\begin{aligned} \widehat{INM} &= \widehat{INA} \\ &= \widehat{IDA} && \text{(vì tứ giác } AIND \text{ nội tiếp)} \\ &= \widehat{ACD} && \text{(vì } AD \text{ là tiếp tuyến } (ABCD)) \\ &= \widehat{LCH} && \text{(vì } AC \text{ là phân giác } \widehat{BCD}) \\ &= \widehat{LGH} && \text{(vì } LHCG \text{ nội tiếp)} \\ &= \widehat{IGM}. \end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $IMGN$ nội tiếp. Tức $I \in (GMN)$.

Từ đó $\mathcal{P}_{L/(GMN)} = \overline{LM} \cdot \overline{LN} = \overline{LI} \cdot \overline{LG} = \mathcal{P}_{L/(OBD)}$, ta có đpcm.

Nhận xét

Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác GMN nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OBD .

□

CÂU 3.

(7.0 điểm)

Cho đa thức hệ số nguyên $P(x)$ và số nguyên tố p , ta nói $P(x)$ là p -tốt nếu mọi số nguyên có thể thu được từ 0 sau hữu hạn các phép thay sau: thay a bởi $P(a)$, hoặc thay a bởi số nguyên b (nếu tồn tại) sao cho $P(b) \equiv a \pmod{p}$.

- Hỏi có bao nhiêu đa thức 3-tốt có bậc 99 và mọi hệ số thuộc $\{1; 2; \dots; 99\}$?
- Chứng minh rằng với mọi đa thức hệ số nguyên $P(x)$ có bậc 2, tồn tại vô hạn số nguyên tố p sao cho $P(x)$ không là p -tốt.

Lời giải.

- Gọi S là tập các số nguyên thu được từ 0.

$P(x)$ là đa thức 3-tốt $\iff S = \mathbb{Z}$.

Quy tắc sinh phần tử của tập S :

- (Quy tắc A):** $u \in S \implies P(u) \in S$.
- (Quy tắc B):** $v \in S$ và $P(u) \equiv v \pmod{3} \implies u \in S$.

Nhận xét 1: Nếu $u \in S$ thì mọi số nguyên x thỏa mãn $x \equiv u \pmod{3}$ cũng thuộc S .

Chứng minh: Với $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, ta có tính chất cơ bản: $x \equiv u \pmod{3} \implies P(x) \equiv P(u) \pmod{3}$. Vì $u \in S \xrightarrow{\text{Quy tắc A}} P(u) \in S$. Lại có $P(x) \equiv P(u) \pmod{3} \xrightarrow{\text{Quy tắc B}} x \in S$.

Nhận xét 1 cho thấy để $S = \mathbb{Z}$, tập S chỉ cần chứa đủ 3 đại diện có số dư là 0, 1, 2 khi chia cho 3.

Nhận xét 2: Có $3^3 = 27$ bộ số dư $(P(0), P(1), P(2))$ modulo 3.

Tập S (xuất phát từ 0) không thể sinh ra toàn bộ $\mathbb{Z} \iff$ tập $\{0, 1, 2\}$ bị phân hoạch thành các tập con X rời nhau thỏa mãn: $x \in X \iff P(x) \in X$.

Các trường hợp thất bại này bao gồm:

- Phân hoạch thành 3 tập $\{0\}, \{1\}, \{2\}$:**
 Vì $0 \in \{0\} \implies P(0) \in \{0\} \implies P(0) \equiv 0 \pmod{3}$.
 Vì $1 \in \{1\} \implies P(1) \in \{1\} \implies P(1) \equiv 1 \pmod{3}$.

$$\text{Vì } 2 \in \{2\} \implies P(2) \in \{2\} \implies P(2) \equiv 2 \pmod{3}.$$

$$\text{Suy ra: } P(x) \equiv x \pmod{3}, \forall x \in \{1, 2, 3\}.$$

$\implies$ Có 1 trường hợp.

- **Phân hoạch thành 2 tập** $\{a\}$ và $\{b, c\}$ (với $\{a, b, c\} = \{0, 1, 2\}$):

$$\text{Vì } a \in \{a\} \implies P(a) \in \{a\} \implies P(a) \equiv a \pmod{3}.$$

$$\text{Vì } b \in \{b, c\} \implies P(b) \in \{b, c\} \implies P(b) \equiv b \text{ hoặc } P(b) \equiv c \pmod{3}.$$

$$\text{Vì } c \in \{b, c\} \implies P(c) \in \{b, c\} \implies P(c) \equiv b \text{ hoặc } P(c) \equiv c \pmod{3}.$$

Có 3 cách chọn a . Với mỗi a , có $2^2 = 4$ cách chọn ảnh cho $P(b)$ và $P(c)$. Trừ đi 1 trường hợp $P(b) \equiv b, P(c) \equiv c$ (đã đếm ở trên). $\implies$ Có $3 \times (4 - 1) = 9$ trường hợp.

Suy ra số bộ $(P(0), P(1), P(2))$ thành công (thỏa mãn $S = \mathbb{Z}$) là: $27 - 1 - 9 = 17$.

Mặt khác, với $x \in \{1, 2\}$, ta có $x^2 \equiv 1 \pmod{3} \implies x^{\text{lẻ}} \equiv x$ và $x^{\text{chẵn}} \equiv 1 \pmod{3}$. Do đó:

$$P(x) \equiv c_0 + \left(\sum_{k \text{ lẻ}} c_k \right) x + \left(\sum_{k \text{ chẵn} \geq 2} c_k \right) \pmod{3}$$

Đặt $A = c_0$, $B = \sum_{k \text{ lẻ}} c_k$ và $C = \sum_{k \text{ chẵn} \geq 2} c_k$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} P(0) \equiv A \pmod{3} \\ P(1) \equiv A + B + C \pmod{3} \\ P(2) \equiv A + 2B + C \equiv A - B + C \pmod{3} \end{cases}$$

Hệ phương trình này xác định duy nhất bộ dư $(A, B, C) \pmod{3}$ từ bộ $(P(0), P(1), P(2))$. Suy ra có đúng 17 bộ (A, B, C) thỏa mãn.

Cuối cùng, ta đếm số cách chọn hệ số $c_k \in \{1, 2, \dots, 99\}$. Tập này có 99 số, chia đều mỗi loại số dư 0, 1, 2 có 33 số. Với một bộ (A, B, C) cố định:

- $c_0 \equiv A \pmod{3}$: Có 33 cách chọn.
- Tổng của 50 hệ số bậc lẻ $\equiv B \pmod{3}$: Chọn 49 hệ số đầu tiên tùy ý (có 99^{49} cách). Hệ số cuối cùng bị buộc phải nhận một số dư duy nhất để tổng bằng B (có 33 cách chọn giá trị thỏa mãn số dư đó). Nhóm này có $99^{49} \cdot 33$ cách.
- Tổng của 49 hệ số bậc chẵn $\equiv C \pmod{3}$: Tương tự, chọn tùy ý 48 số đầu, số cuối bị cố định số dư. Nhóm này có $99^{48} \cdot 33$ cách.

Số lượng đa thức tạo thành cho một bộ (A, B, C) là:

$$33 \times (99^{49} \cdot 33) \times (99^{48} \cdot 33) = 33^3 \cdot 99^{97}$$

Tổng số đa thức 3-tốt là: $\boxed{17 \cdot 33^3 \cdot 99^{97}}$.

- b) Đặt $\varphi(r) = P(r) \bmod p$. Với $u \in S$ (tập sinh từ 0), dãy lặp $u, \varphi(u), \varphi^2(u), \dots$ luôn tuần hoàn về một chu trình cố định - gọi là *chu trình tối hạn* của u ; quy nạp trực tiếp trên hai quy tắc sinh của đề bài cho thấy **mọi phần tử của S có cùng chu trình tối hạn với 0**. Nếu tồn tại hai chu trình tối hạn phân biệt, các điểm trên chu trình thứ hai không thuộc S , do đó P không p -tốt.

Ta phát biểu và chứng minh các bổ đề sau:

Bổ đề 1

Nếu hàm số $f \in \mathbb{Z}[x]$ không là hàm hằng, thì có vô hạn số nguyên tố p để phương trình $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ có nghiệm nguyên.

Chứng minh: Nếu $f(0) = 0$ thì hiển nhiên $x = 0$ là nghiệm với mọi p .

Giả sử $f(0) = c_0 \neq 0$ và chỉ có hữu hạn $p_1, \dots, p_k$ thỏa mãn, đặt $N = c_0 p_1 \cdots p_k$. Do các số hạng có bậc ≥ 1 trong $f(Nt)$ đều chia hết cho N , ta có thể viết $f(Nt)$ dưới dạng $c_0(1 + N \cdot M(t))$ (với $t \in \mathbb{Z}$). Thừa số sau nguyên tố cùng nhau với mọi p_i , và ta có thể chọn t đủ lớn để nó có giá trị tuyệt đối lớn hơn 1. Khi đó nó có ước nguyên tố mới $q \notin \{p_i\}$ — mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh.

Bổ đề 2

Cho $f \in \mathbb{Z}[x]$ là hàm số bậc 2 có $\Delta B^2 - 4AC \neq 0$. Khi đó có vô hạn số nguyên tố p để phương trình $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ có hai nghiệm phân biệt.

Chứng minh: Theo Bổ đề 1, có vô hạn p để f có một nghiệm $x_0 \bmod p$. Ta loại bỏ hữu hạn giá trị $p \mid A\Delta$. Vì $p \nmid A$ và x_0 là nghiệm, phép chia đa thức trong $\mathbb{F}_p[x]$ cho ta $f(x) \equiv A(x - x_0)(x - x_1) \pmod{p}$ với $x_1 \in \mathbb{F}_p$ nào đó; theo hệ thức Viète ta được $x_0 + x_1 \equiv -B/A \pmod{p}$

Giả sử $x_1 \equiv x_0 \pmod{p}$, khi đó $2x_0 \equiv -B/A \Rightarrow 2Ax_0 + B \equiv 0 \pmod{p}$. Mà $4A \cdot f(x) = (2Ax + B)^2 - \Delta$, thay $x = x_0$ ta có được $\Delta \equiv 0 \pmod{p}$ — vô lí. Ta có điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán, đặt $Q(x) = P(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c$, $\Delta = (b-1)^2 - 4ac$.

Ta thấy $Q(x) \equiv 0 \pmod{p} \iff P(x) \equiv x \pmod{p}$, do đó các nghiệm của $Q(x)$ chính là các điểm bất động của hàm φ kể trên. Xét 2 trường hợp:

- $\Delta \neq 0$. Theo Bổ đề 2, có vô hạn số nguyên tố p để Q có 2 nghiệm phân biệt $x_1 \neq x_2$ sao cho $Q(x_1) \equiv Q(x_2) \equiv 0 \pmod{p}$. Đa thức $P(x)$ có 2 điểm bất động, và do đó nó không p -tốt.
- $\Delta = 0$. Lúc này $Q(x) = a(x - r)^2$ với $r = \frac{1-b}{2a} \in \mathbb{Q}$. Với $p \nmid 2a$, đặt $y = x - r$ ta được $\varphi(y) = ay^2 + y \bmod p$ với điểm bất động duy nhất là $y = 0$.

Ta tính được $\varphi(\varphi(y)) - y = ay^2(a^2y^2 + 2ay + 2)$. Xét $H(y) = a^2y^2 + 2ay + 2 \in \mathbb{Z}[y]$ có $\Delta = -4a^2 \neq 0$ (vì $a \neq 0$), áp dụng Bổ đề 2 cho thấy có vô hạn số nguyên tố p sao cho H có 2 nghiệm phân biệt $y_1 \neq y_2$ và đều khác 0 (theo hệ thức Viète thì $y_1 y_2 = \frac{2}{a^2} \neq 0$).

Với modulo các số nguyên tố p kể trên, ta có $\varphi(\varphi(y)) \equiv y$ nên $\varphi(\varphi(\varphi(y))) \equiv \varphi(y)$, nên $\varphi(y)$ cũng là một trong các nghiệm $\{0; y_1; y_2\}$ của phương trình $\varphi(\varphi(y)) - y \equiv 0 \pmod{p}$.

Mà $\varphi(y_1) \neq y_1$ (do y_1 không bất động) và $\varphi(y_1) \neq 0$ (khi đó $\varphi(\varphi(y_1)) \equiv 0 \neq y_1$), ta bắt buộc có $\varphi(y_1) \equiv y_2$, và chứng minh tương tự ta có $\varphi(y_2) \equiv y_1$.

Như vậy, tồn tại chu trình có độ dài 2 là $\{y_1; y_2\}$ khác 0 và phân biệt với điểm bất động $\{0\}$, suy ra $P(x)$ có 2 chu trình tối hạn và do đó P không p -tốt.

Bài toán đã được giải quyết.

□

