

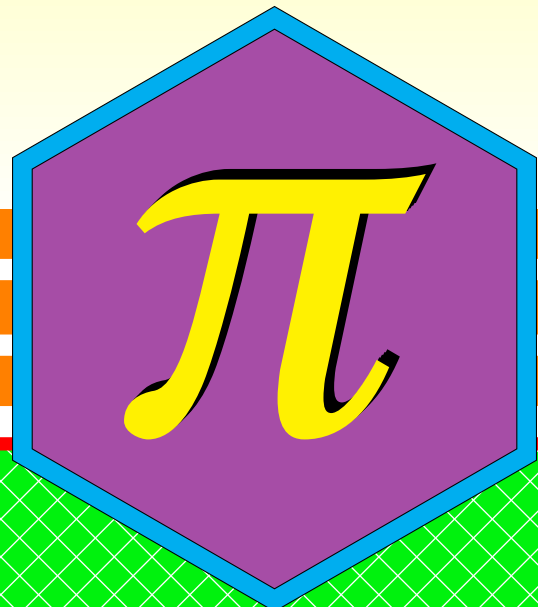


GV: Ngô Đức Tài

TÓM TẮT LÝ THUYẾT MÔN TOÁN



LỚP 12



NĂM HỌC 2026 - 2027

MỤC LỤC

3

CHƯƠNG 1

Đạo hàm và ứng dụng của đạo hàm

- 1** Đạo hàm..... 3
- 2** Ứng dụng của đạo hàm..... 6

16

CHƯƠNG 2

Vectơ và hệ tọa độ trong không gian

- 1** Vectơ trong không gian..... 16
- 2** Tọa độ của vectơ trong không gian 18

22

CHƯƠNG 3

Thống kê

- 1** Các đặc trưng của mẫu số liệu không ghép nhóm 22
- 2** Các đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm 22

27

CHƯƠNG 4

Nguyên hàm và Tích phân

- 1** Nguyên hàm 27
- 2** Tích phân..... 29
- 3** Ứng dụng hình học của tích phân..... 30

CHƯƠNG 5

Tọa độ trong không gian

1	Phương trình mặt phẳng	39
2	Phương trình đường thẳng trong không gian	44
3	Công thức tính góc trong không gian	49
4	Phương trình mặt cầu	50
5	Một số bài toán cực trị trong hình không gian	53
6	Phương pháp tọa độ hóa hình không gian	55

62

CHƯƠNG 6

Tổ hợp - Xác suất

1	Biến cố và định nghĩa cổ điển của xác suất	62
2	Xác suất có điều kiện	63



CHƯƠNG



ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

BÀI 1. Đạo hàm

1. Định nghĩa đạo hàm

Định nghĩa 1.1.

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. **Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và kí hiệu $f'(x_0)$ là**

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

☆ Hàm số $y = f(x)$ có **đạo hàm trên khoảng $(a; b)$** nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc khoảng $(a; b)$, kí hiệu là $y' = f'(x)$.

☆ Đạo hàm của hàm số $y' = f'(x)$ được gọi là **đạo hàm cấp hai** của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu là $y'' = f''(x)$.

— ÔN LUYỆN MÔN TOÁN —

2. Các quy tắc tính đạo hàm

2.1. Bảng đạo hàm các hàm thường gặp

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp
$(C)' = 0$, với $\forall C \in \mathbb{R}$	
$(x)' = 1$	
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	

$\left(\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}\right)' = \frac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx + e)^2}$	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

2.2 Quy tắc tính đạo hàm

$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(k \cdot u)' = k \cdot u'$	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$[f(u(x))]' = u'(x) \cdot f'(u(x))$	

3 Ý nghĩa của đạo hàm trong hình học và vật lí

3.1 Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

- ☆ Một vật chuyển động có phương trình của quỹ đạo s theo thời gian t là $s = s(t)$. Khi đó
 - ◇ Vận tốc tức thời của vật đó là $v(t) = s'(t)$.
 - ◇ Gia tốc tức thời của vật đó là $a(t) = v'(t) = s''(t)$.
- ☆ Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số theo thời gian t có dạng $Q = Q(t)$. Khi đó cường độ tức thời của dòng điện là $I(t) = Q'(t)$.

3.2 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

☆ **Phương trình tiếp tuyến** của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) là $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$, với $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.

☆ **Một số điều kiện thường dùng**

Điều kiện	Công thức
Tiếp tuyến có hệ số góc k	$f'(x_0) = k$
Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = ax + b$	$f'(x_0) = a$
Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$	$f'(x_0) = -\frac{1}{a}$

! Đối với bài toán viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) **đi qua điểm** $A(x_A; y_A)$ thì ta thay tọa độ điểm A vào công thức phương trình tiếp tuyến của (C) là $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$ để tìm x_0 .

3.3 Cách tính đạo hàm của hàm số tại một điểm bằng Casio

☆ Để tính đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 , ta làm như sau

◇ **Bước 1:** Ấn q y rồi nhập hàm số $f(x)$.

◇ **Bước 2:** Ở vị trí $x = \square$ nhập x_0 , rồi ấn =.

☆ Để giải phương trình $f'(x) = 0$ bằng máy tính casio 580, ta làm như sau

◇ **Bước 1:** Ấn q y rồi nhập hàm số $f(x)$.

◇ **Bước 2:** Ở vị trí $x = \square$ nhập x .

◇ **Bước 3:** Ấn q r = ta sẽ được nghiệm của phương trình.

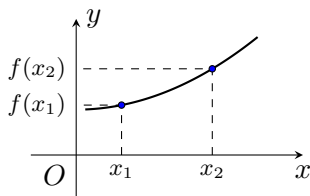
! Phương pháp này chỉ có thể tìm ra một nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$, **không thể** tìm hết tất cả các nghiệm.

BÀI 2. Ứng dụng của đạo hàm

1. Tính đơn điệu của hàm số

☆ Hàm số đồng biến trên K nếu

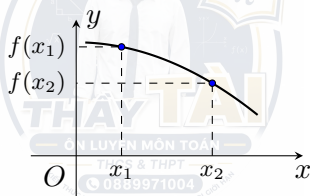
$$\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



Trên K , đồ thị là một "**đường đi lên**" khi xét từ trái sang phải.

☆ Hàm số nghịch biến trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Trên K , đồ thị là một "**đường đi xuống**" khi xét từ trái sang phải.

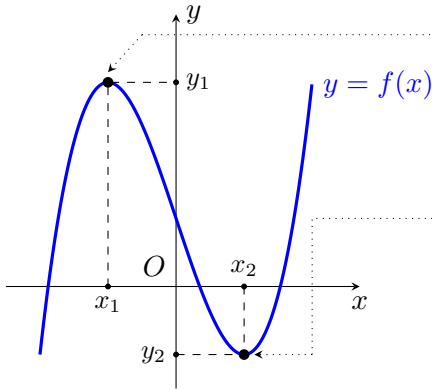
Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

Định lý 1.2.

- Nếu $y' \geq 0$, $\forall x \in (a; b)$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.
- Nếu $y' \leq 0$, $\forall x \in (a; b)$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.

2. Cực trị của hàm số

Các tên gọi:



$(x_1; y_1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số;

- x_1 là điểm cực đại của hàm số;
- y_1 là giá trị cực đại của hàm số.

$(x_2; y_2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số;

- x_2 là điểm cực tiểu của hàm số;
- y_2 là giá trị cực tiểu của hàm số.

Ghi nhớ cách xét dấu:



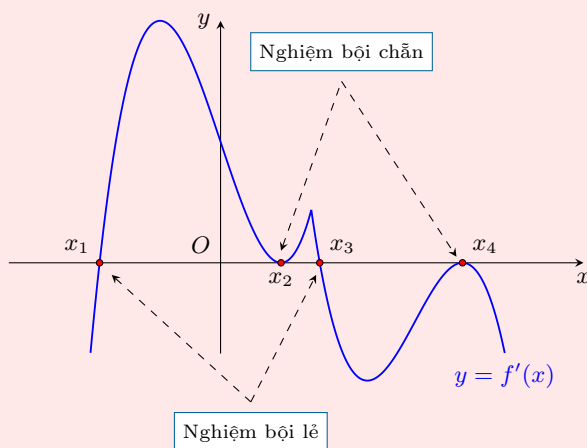
① Nếu

$$f'(x) = (x - a)(x - b)^2(x - c)^{2n}(x - d)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

thì phương trình $f'(x) = 0$ có

- ☆ $x = a$ là nghiệm đơn;
- ☆ $x = b$ là nghiệm kép;
- ☆ $x = c$ là nghiệm bội chẵn;
- ☆ $x = d$ là nghiệm bội lẻ.

② Khi xét dấu $f'(x)$ thì $f'(x)$ sẽ không đổi dấu khi qua nghiệm kép (nghiệm bội chẵn) và đổi dấu khi qua nghiệm đơn (nghiệm bội lẻ).



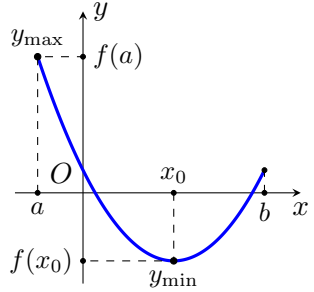
3. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$. Ta có

① M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu

$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = M. \end{cases}$$

Kí hiệu $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = M$



② n là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu

$$\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = n. \end{cases}$$

Kí hiệu $\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = n$

③ Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ($f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$ (có thể trừ một số hữu hạn các điểm) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn các điểm trong $(a; b)$), thì ta có thể giải như sau:

- Giải $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$;
- Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).
- Tính toán $f(a)$, $f(x_0)$, $f(x_i)$, $f(b)$ (*)
- Gọi M , n lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (*) thì

$$M = \max_{[a; b]} f(x); \quad n = \min_{[a; b]} f(x)$$

④ Ta có thể dùng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min.

- Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm a, b :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

- Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm a, b, c :

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

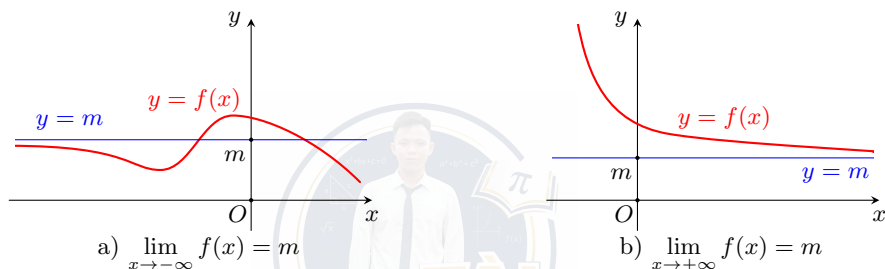
4. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

4.1. Đường tiệm cận ngang (TCN):

- 1 **Định nghĩa:** Đường thẳng $y = m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m.$$

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới



2 Các bước tìm TCN:

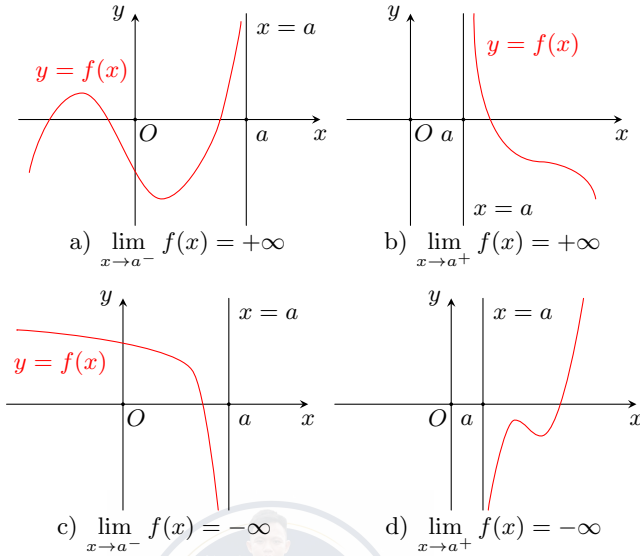
- 1 Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2 Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

4.2. Đường tiệm cận đứng (TCD)

- 1 **Định nghĩa:** Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới.



2 Các bước tìm TCD:

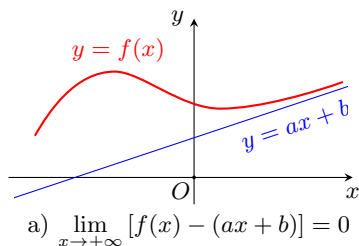
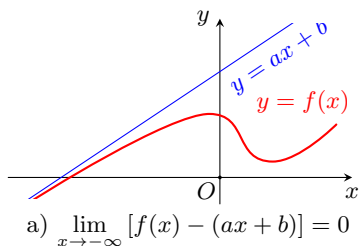
- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

4.3 Đường tiệm cận

- ① **Định nghĩa:** Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới:



- 2 Các bước tìm TCX $y = ax + b$:** Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

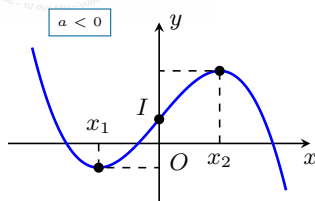
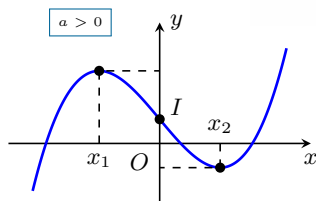
① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

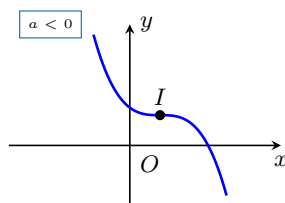
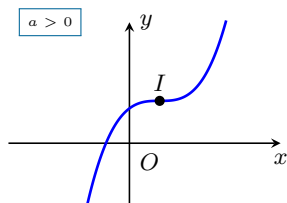
5. Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản

5.1. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

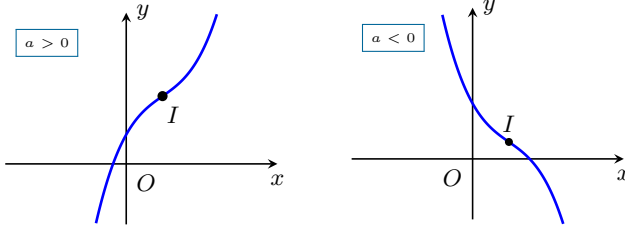
- ✓ **TH1.** $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



- ✓ **TH2.** $y' = 0$ có nghiệm kép x_0 . Khi đó, hàm số không có cực trị.



- ✓ **TH3.** $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



① Hàm số không có điểm cực trị

$$b^2 - 3ac \leq 0 \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$

② Hàm số có hai điểm cực trị

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0. \end{cases}$$



③ Liên hệ tổng tích hai nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

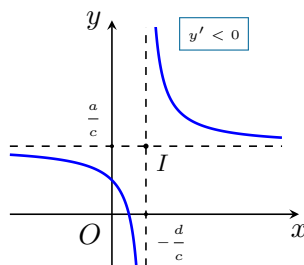
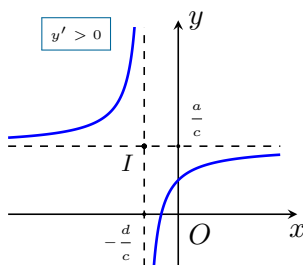
④ Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị, nó chính là trung điểm của đoạn nối 2 điểm cực trị. Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$.

5.2 • Hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

✓ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$; Đạo hàm $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.

✓ Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

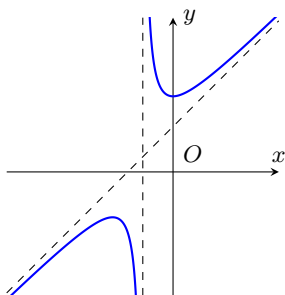
✓ Hình dạng đồ thị:



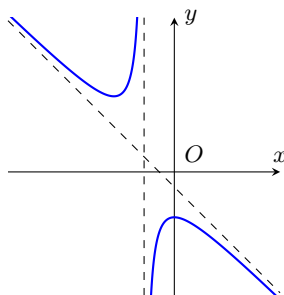
- ① Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.
- ② Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
- ③ Giao với Ox : $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.
- ④ Giao với Oy : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$.

5.3. Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$) (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

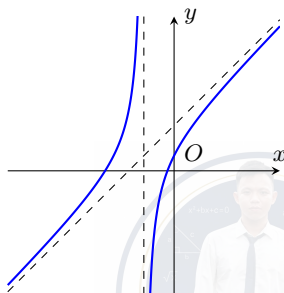
- ✔ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$; Đạo hàm $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx + n)^2}$.
- ✔ Hàm số 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm.
- ✔ Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
- ✔ Hình dạng đồ thị:



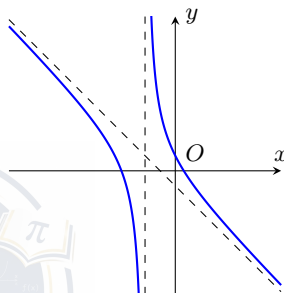
$a > 0, y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a < 0, y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a > 0, y' = 0$ vô nghiệm



$a < 0, y' = 0$ vô nghiệm

VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. Vectơ trong không gian

1. Định nghĩa

Định nghĩa 2.1.

- ☆ Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.
- ☆ Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ là chỉ vectơ có điểm đầu A , điểm cuối B . Ngoài ra, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...
- ☆ $|\overrightarrow{AB}| = AB$ là độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$.
- ☆ Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- ☆ Hai vectơ cùng phương thì chúng có cùng hướng hoặc ngược hướng.
- ☆ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng hướng.} \end{cases}$
- ☆ Vectơ-không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu $\vec{0}$.

2. Các phép toán vectơ

- ☆ **Quy tắc ba điểm:** Với ba điểm A, B, C , ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

- ☆ **Quy tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành $ABCD$, ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

- ☆ **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}.$$

☆ **Quy tắc hiệu:** Với ba điểm A, B, C ta có

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$



Với hai điểm A, B bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

☆ **Tích của một số với một vectơ:** Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và số $k \neq 0$. Khi đó, $k \cdot \vec{a}$ là một vectơ

- ◇ Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.
- ◇ Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$.
- ◇ Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.



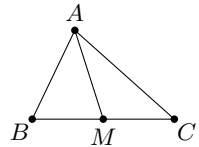
☆ Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Khi đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \neq 0$, sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

☆ Điều kiện để ba điểm A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

☆ **Quy tắc trung điểm:** Nếu M là trung điểm của BC thì

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

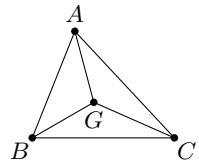
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \text{ với } A \text{ là điểm bất kì.}$$



☆ **Quy tắc trọng tâm:** Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , khi đó ta có

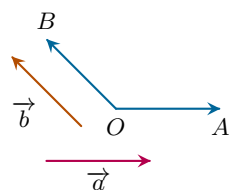
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \text{ với } M \text{ là điểm bất kì.}$$



☆ **Góc giữa hai vectơ:** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì, vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc $\widehat{AOB}$.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \widehat{AOB}$$



★ $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$.

★ Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì $\vec{a} \perp \vec{b}$.

★ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = \widehat{BAC}$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = 180^\circ - \widehat{BAC}$.

★ **Tích vô hướng của hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, và được xác định bởi công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

★ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

★ $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

★ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

BÀI 2. Tọa độ của vectơ trong không gian

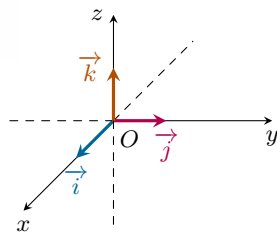
1. Hệ trục tọa độ trong không gian

★ **Gốc tọa độ:** $O(0; 0; 0)$.

★ **Trục tọa độ:** trục hoành Ox , trục tung Oy , trục cao Oz .

★ **Mặt phẳng tọa độ:** (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) đôi một vuông góc với nhau.

★ **Vectơ đơn vị:** $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$.



2. Tọa độ của vectơ

Định nghĩa 2.2.

Trong không gian $Oxyz$, $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

Các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}_1 = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$	$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1; k \cdot a_2; k \cdot a_3)$
$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$	$\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$	$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
$ \vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$

3. Tọa độ của điểm

Định nghĩa 2.3.

Trong không gian $Oxyz$, $\overrightarrow{OM} = x_M \cdot \vec{i} + y_M \cdot \vec{j} + z_M \cdot \vec{k} \Leftrightarrow M(x_M; y_M; z_M)$.

☆ Tọa độ điểm đặc biệt

$M \in Ox$ thì $M(x; 0; 0)$	$M \in (Oxy)$ thì $M(x; y; 0)$
$M \in Oy$ thì $M(0; y; 0)$	$M \in (Oyz)$ thì $M(0; y; z)$
$M \in Oz$ thì $M(0; 0; z)$	$M \in (Oxz)$ thì $M(x; 0; z)$

☆ Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

☆ Độ dài đoạn thẳng $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

☆ Điểm M là trung điểm của $AB \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

☆ Điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC$ thì

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

☆ Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $A + C = B + D$.

☆ Điều kiện để ba điểm A, B, C thẳng hàng là

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = k(x_C - x_A) \\ y_B - y_A = k(y_C - y_A) \\ z_B - z_A = k(z_C - z_A) \end{cases}$$

☆ Điểm M chia đoạn AB theo tỉ lệ $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ với $k \neq 1$ thì

$$M \left(\frac{x_A - kx_B}{1 - k}; \frac{y_A - ky_B}{1 - k}; \frac{z_A - kz_B}{1 - k} \right).$$

☆ Điểm M thỏa mãn điều kiện $a \cdot \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{MB} + c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì

$$\begin{cases} x_M = \frac{a \cdot x_A + b \cdot x_B + c \cdot x_C}{a + b + c} \\ y_M = \frac{a \cdot y_A + b \cdot y_B + c \cdot y_C}{a + b + c} \\ z_M = \frac{a \cdot z_A + b \cdot z_B + c \cdot z_C}{a + b + c} \end{cases}$$

☆ Điểm D là **chân đường phân giác** trong AD của $\triangle ABC$ thì

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}.$$

☆ Điểm E là **chân đường phân giác ngoài** AE của $\triangle ABC$ thì

$$\overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{EC}.$$

☆ Điểm I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ thì

$$\begin{aligned} BC \cdot \overrightarrow{IA} + CA \cdot \overrightarrow{IB} + AB \cdot \overrightarrow{IC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{BC \cdot x_A + CA \cdot x_B + AB \cdot x_C}{BC + CA + AB} \\ y_I = \frac{BC \cdot y_A + CA \cdot y_B + AB \cdot y_C}{BC + CA + AB} \\ z_I = \frac{BC \cdot z_A + CA \cdot z_B + AB \cdot z_C}{BC + CA + AB} \end{cases} \end{aligned}$$

4. Tích có hướng của hai vectơ và ứng dụng

Định nghĩa 2.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó, **tích có hướng** của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ, ký hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$, có tọa độ xác định bởi

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

☆ Tính chất và ứng dụng

Tính chất	
$\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$ và $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$
$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$	$ [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$
Ứng dụng trong tính diện tích, thể tích	
Diện tích tam giác ABC $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [\vec{AB}, \vec{AC}] $	Diện tích hình bình hành $ABCD$ $S_{ABCD} = [\vec{AB}, \vec{AD}] $
Thể tích tứ diện $ABCD$ $V = \frac{1}{6} [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} $	Thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ $V = [\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'} $
Tính đồng phẳng	
$\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng thì $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$	
A, B, C, D đồng phẳng thì $[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = 0$	

THỐNG KÊ

BÀI 1. Các đặc trưng của mẫu số liệu không ghép nhóm

BÀI 2. Các đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm

1. Mẫu số liệu ghép nhóm

Định nghĩa 3.1.

Mẫu số liệu ghép nhóm là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm. Mỗi nhóm số liệu là tập hợp gồm các giá trị của số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định. Nhóm số liệu thường được cho dưới dạng $[a; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

☆ Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm sang mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau

- ◇ **Bước 1:** Chia miền giá trị của mẫu số liệu thành các nhóm.
- ◇ **Bước 2:** Đếm số giá trị của mẫu số liệu thuộc mỗi nhóm (tần số) và lập bảng thống kê cho mẫu số liệu ghép nhóm.

☆ Độ dài của nhóm $[a; b)$ là $b - a$.

! ☆ Không nên chia thành quá nhiều nhóm hoặc quá ít nhóm.

☆ Các nhóm không giao nhau, các nhóm nên có độ dài như nhau và tổng độ dài các nhóm lớn hơn khoảng biến thiên.

2. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	$\dots$	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	m_2	$\dots$	m_k
Giá trị đại diện	x_1	x_2	$\dots$	x_k



Giá trị đại diện của nhóm $[a_i; a_{i+1})$ là $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$.

2.1 • Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

☆ **Số trung bình** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là $\bar{x}$, được tính theo công thức

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k}{n},$$

trong đó $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$.



Đối với số liệu rời rạc, người ta thường cho các nhóm dưới dạng $k_1 - k_2$, trong đó $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Nhóm $k_1 - k_2$ được hiểu là nhóm gồm các giá trị $k_1, k_1 + 1, \dots, k_2$. Khi đó, ta cần hiểu chỉnh lại mẫu số liệu ghép nhóm bằng cách chuyển nhóm $k_1 - k_2$ thành nhóm $[k_1 - 0,5; k_2 + 0,5)$.

☆ **Ý nghĩa:** Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng số trung bình của mẫu số liệu gốc, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

2.2 • Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

☆ Để tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau

- ◇ **Bước 1:** Xác định nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm. Giả sử đó là nhóm thứ p : $[a_p; a_{p+1})$.
- ◇ **Bước 2:** Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = a_p + \frac{\frac{n}{2} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

nếu $p = 1$, ta quy ước $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$.

- ☆ **Ý nghĩa:** Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng trung vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu. Nếu mẫu số liệu **có giá trị bất thường** thì ta dùng trung vị thay cho số trung bình để đại diện cho mẫu số liệu.

2.3 • Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- ☆ Để tính **tứ phân vị thứ nhất Q_1** của mẫu số liệu ghép nhóm, đầu tiên ta xác định nhóm chứa Q_1 , giả sử đó là nhóm thứ p : $[a_p; a_{p+1})$. Khi đó

$$Q_1 = a_p + \frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p).$$

- ☆ Để tính **tứ phân vị thứ ba Q_3** của mẫu số liệu ghép nhóm, đầu tiên ta xác định nhóm chứa Q_3 , giả sử đó là nhóm thứ p : $[a_p; a_{p+1})$. Khi đó

$$Q_3 = a_p + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p).$$

- ☆ **Tứ phân vị thứ hai Q_2** chính là trung vị M_e .

- ☆ **Ý nghĩa:** Các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng các tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, chúng chia mẫu số liệu thành 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

2.4 • Một của mẫu số liệu ghép nhóm

- ☆ Để tìm **một** của mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau

- ◇ **Bước 1:** Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm chứa một) của mẫu số liệu ghép nhóm, giả sử đó là nhóm j : $[a_j; a_{j+1})$.

- ◇ **Bước 2:** Một của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = a_j + \frac{m_j - m_{j-1}}{(m_j - m_{j-1}) + (m_j - m_{j+1})} \cdot (a_{j+1} - a_j).$$

- ☆ **Ý nghĩa:** Một của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng một của mẫu số liệu gốc, nó được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

3. Các số đặc trưng đo độ phân tán

3.1. Khoảng biến thiên

- ☆ **Khoảng biến thiên** của mẫu số liệu ghép nhóm được tính theo công thức

$$R = a_{k+1} - a_1.$$

- ☆ Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.
- ☆ Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm **chịu ảnh hưởng** của giá trị bất thường
- ☆ **Ý nghĩa:** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đo mức độ phân tán của mẫu số liệu đó. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

3.2. Khoảng tứ phân vị

- ☆ **Khoảng tứ phân vị** của mẫu số liệu ghép nhóm được tính theo công thức

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1.$$

- ☆ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc.
- ☆ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm **không chịu ảnh hưởng** của giá trị bất thường.
- ☆ **Ý nghĩa:** Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.



Để xác định **giá trị bất thường** của mẫu số liệu ghép nhóm ta làm tương tự như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm.

3.3 Phương sai và độ lệch chuẩn

- ☆ **Phương sai** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s^2 , là một số được tính theo công thức

$$s^2 = \frac{m_1(x_1 - \bar{x})^2 + m_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + m_k(x_k - \bar{x})^2}{n}.$$

- ☆ **Độ lệch chuẩn** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s , là căn bậc hai số học của phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, nghĩa là

$$s = \sqrt{s^2}.$$

- ☆ Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc.
- ☆ **Ý nghĩa:** Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm dùng để đo độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán. Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức

$$s^2 = \frac{1}{n} (m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 + \dots + m_k \cdot x_k^2) - (\bar{x})^2.$$

4 Cách sử dụng máy tính Casio để tính các số đặc trưng

- ☆ Để tính các số đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm, thì ta làm như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm ở phía trên, nhưng phải bật cột tần số trong thống kê. Các giá trị của cột x chính là các giá trị đại diện của từng nhóm.
- ☆ Máy tính Casio **chỉ có thể** tính được số trung bình $\bar{x}$, phương sai $\sigma^2 x$, độ lệch chuẩn σx . Các đại lượng Q_1 , Med, Q_3 mà máy tính hiển thị đều **không chính xác**.

CHƯƠNG 4

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

BÀI 1. Nguyên hàm

1. Định nghĩa

Định nghĩa 4.1.

- ☆ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $\mathcal{K}$. Hàm số $F(x)$ gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{K}$ nếu $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathcal{K}$.
- ☆ Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) + C$, với $C \in \mathbb{R}$.

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ với } C \in \mathbb{R}$$

 Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì khi đó tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho $G(x) = F(x) + C$.

2. Tính chất của nguyên hàm

- ☆ $\int f'(x) dx = f(x) + C$, với $C \in \mathbb{R}$.
- ☆ $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$, với $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ☆ $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

3. Nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

$\int 0 dx = C$	$\int 1 dx = x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

☆ Một số công thức nguyên hàm đặc biệt

$\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax + b + C$
$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax + b) + C$
$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax + b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax + b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax + b) + C$
$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$
$\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$

4 • Ý nghĩa vật lí của nguyên hàm

- ☆ Một vật chuyển động có phương trình vận tốc theo thời gian t là $v(t)$ thì phương trình chuyển động của vật là $s(t) = \int v(t) dt$.
- ☆ Một vật chuyển động có phương trình gia tốc theo thời gian t là $a(t)$ thì phương trình vận tốc của vật là $v(t) = \int a(t) dt$.

BÀI 2. Tích phân

1. Định nghĩa

Định nghĩa 4.2.

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ gọi là **tích phân** từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu

$$\text{là } \int_a^b f(x) dx.$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Tính chất của tích phân

$$\star \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$\star \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$\star \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ với } k \in \mathbb{R}.$$

$$\star \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$\star \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$\star \text{ Tích phân } \textbf{không} \text{ phụ thuộc vào } \textbf{ẩn}, \text{ nghĩa là } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

3. Ý nghĩa vật lí của tích phân

Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t có phương trình là $v = v(t)$. Khi đó

☆ Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian từ t_1 tới t_2 là

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

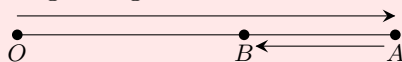
☆ Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ t_1 tới t_2 là

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt.$$

☆ Độ dịch chuyển là khoảng cách từ vị trí đầu đến vị trí cuối của vật, cho biết độ dài và sự thay đổi vị trí của vật.

☆ Quãng đường là độ dài của vật thực hiện được trong suốt quá trình chuyển động.

! ☆ **Ví dụ:** Một vật di chuyển từ điểm O đến điểm A sau đó lùi lại về điểm B trong khoảng thời gian t_1 tới t_2 như hình vẽ sau



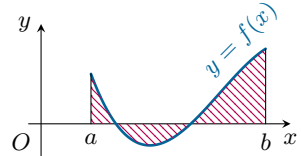
Khi đó, độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian t_1 tới t_2 bằng đoạn OB , còn quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ t_1 tới t_2 bằng $OA + AB$.

Bài 3. Ứng dụng hình học của tích phân

1. Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

- ☆ Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị
hàm số $y = f(x)$, hai đường thẳng $x = a$,

$$x = b \text{ và trục } Ox \text{ là } S = \int_a^b |f(x)| dx.$$



- ☆ Nếu đề bài chưa cho a, b thì a, b là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.



- ☆ Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nhiều hơn 2 nghiệm thì a, b lần lượt là nghiệm nhỏ nhất và nghiệm lớn nhất của phương trình $f(x) = 0$.

- ☆ Nếu đề bài cho hình phẳng giới hạn bởi trục Oy thì nghĩa là đề bài cho hình phẳng giới hạn bởi đường $x = 0$.

ÔN LUYỆN MÔN TOÁN

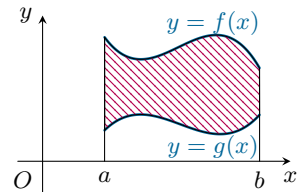
THCS & THPT

☎ 0889971004

TRƯỜNG THPT - TƯ DUY SÁNG - VIỆT NAM CHIA SẺ

- ☆ Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên
tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn
bởi hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai
đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

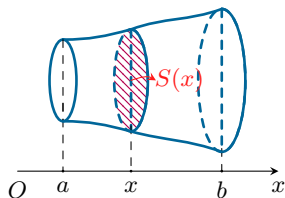


- Nếu đề bài chưa cho a, b thì a, b là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

2. Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể

2.1 • Thể tích của vật thể

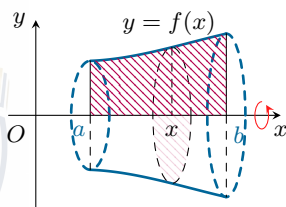
- ☆ Gọi B là phần của vật thể giới hạn bởi 2 mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại a, b . Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$). Khi đó, thể tích V của phần vật thể B là



$$V = \int_a^b S(x) dx$$

2.2 • Thể tích của khối tròn xoay

- ☆ Cho hàm số $f(x)$ liên tục, **không âm** trên $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục Ox , $x = a$, $x = b$ khi quay quanh trục Ox tạo thành một vật thể tròn xoay. Thể tích của vật thể tròn xoay là



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

- ☆ Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ khi quay quanh trục Ox tạo thành một vật thể tròn xoay. Thể tích của vật thể đó là

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx .$$

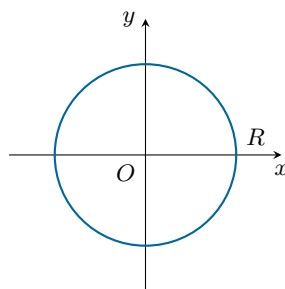
- ☆ Hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục Oy , $y = c$, $y = d$ khi quay quanh trục Oy tạo thành một vật thể tròn xoay. Thể tích của vật thể đó là

$$V = \pi \int_c^d g^2(y) dy .$$

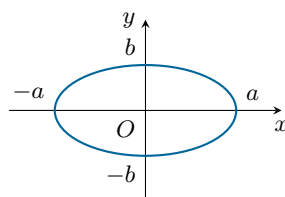
3. Một số phương trình hình phẳng cần nhớ

☆ Phương trình đường thẳng có dạng là $y = ax + b$. Nếu đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox thì phương trình có dạng $y = b$.

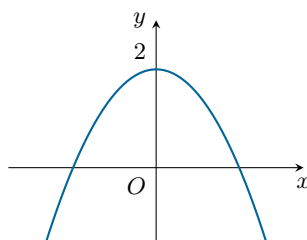
☆ Đường tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính R có phương trình là $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Nếu đặt hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là tâm của đường tròn thì phương trình của đường tròn là $x^2 + y^2 = R^2$. Khi đó, phương trình của nửa đường tròn phía trên trục Ox là $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.



☆ Đường elip có độ dài trục lớn bằng $2a$ và trục bé bằng $2b$ có phương trình là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Khi đó, phương trình của nửa elip phía trên trục Ox là $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

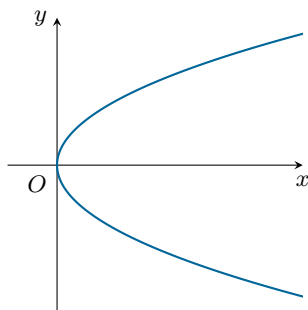


☆ Parabol có trục đối xứng song song hoặc trùng với trục Oy có phương trình là $y = ax^2 + bx + c$. Ta thường đặt hệ trục sao cho trục đối xứng trùng với trục của Oy , khi đó phương trình của parabol có dạng là $y = ax^2 + c$.



☆ Parabol đi qua gốc tọa độ O và nhận trục Ox làm trục đối xứng có phương trình là $x = ay^2$. Khi đó, phương trình của nửa

parabol phía trên trục Ox là $y = \sqrt{\frac{x}{a}}$.

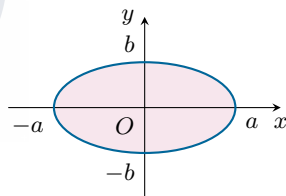


4. Diện tích và thể tích một số hình đặc biệt

4.1. Công thức diện tích hình elip

Cho hình elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Khi đó diện tích của hình elip được tính theo công thức

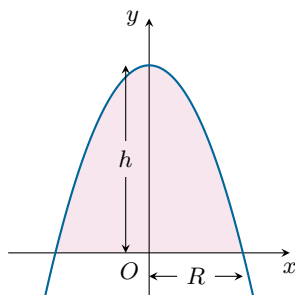
$$S = \pi ab$$



4.2. Công thức diện tích cổng parabol

Đường thẳng $y = m$ vuông góc với trục parabol (P) tạo thành một cổng parabol có diện tích được tính theo công thức

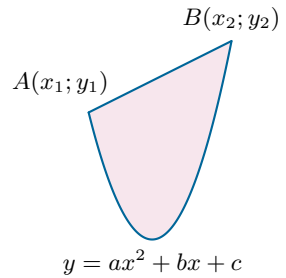
$$S = \frac{4}{3}Rh$$



4.3 Công thức diện tích parabol bị cắt bởi đường chéo

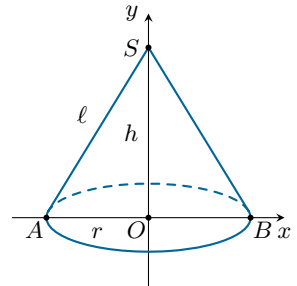
Một parabol $y = ax^2 + bx + c$ có 2 điểm A, B lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thuộc (P) . Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và AB được tính theo công thức

$$S = \frac{a(x_1 - x_2)^3}{6}$$



4.4 Công thức thể tích và diện tích hình nón

Cho đoạn thẳng SA quay xung quanh trục Oy , ta được hình nón (N) có đỉnh S và đáy là đường tròn tâm O bán kính OA . Khi đó $SA = \ell$ gọi là đường sinh, $OA = r$ gọi là bán kính đáy, $SO = h$ gọi là đường cao của hình nón. Ta có $\ell^2 = h^2 + r^2$.



☆ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot \ell$.

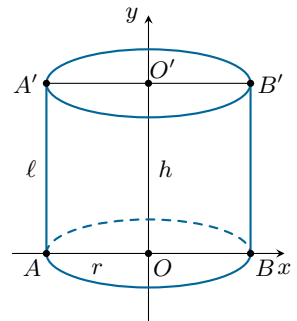
☆ Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi \cdot r \cdot \ell + \pi \cdot r^2.$$

☆ Thể tích: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$.

4.5 Công thức thể tích và diện tích hình trụ

Cho đoạn thẳng AA' quay xung quanh trục Oy , ta được hình trụ (T) có đáy là đường tròn tâm O , bán kính OA . Khi đó $AA' = \ell$ gọi là đường sinh, $OA = r$ gọi là bán kính đáy, $OO' = h$ gọi là chiều cao của hình trụ. Ta có $\ell = h$.



☆ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi \cdot r \cdot h$.

☆ Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2.$$

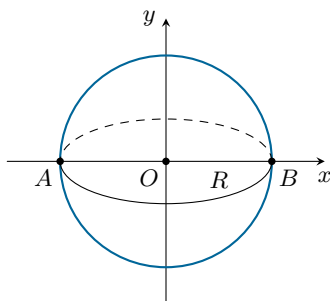
☆ Thể tích: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

4.6 Công thức thể tích và diện tích hình cầu

Cho đường tròn tâm O bán kính R quanh xung quanh trục Ox , ta được hình cầu tâm O bán kính R .

☆ Diện tích của mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

☆ Thể tích của khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.



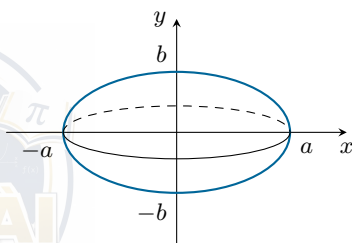
4.7 Công thức thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi Elip

Cho Elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$).

Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi Elip (E)

☆ Quanh trục Ox là $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$.

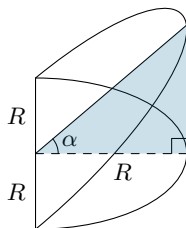
☆ Quanh trục Oy là $V = \frac{4}{3}\pi a^2b$.



4.8 Công thức thể tích hình nêm

☆ Thể tích khối nêm loại I

Chọn trục Ox trùng với đường kính. Thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-R \leq x \leq R$) là một tam giác vuông có độ dài hai cạnh lần lượt là $\sqrt{R^2 - x^2}$ và $\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha$. Khi đó, diện tích thiết diện là $S(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \cdot \tan \alpha$.
 $\Rightarrow$ Thể tích của vật thể là



$$V = \int_{-R}^R S(x) dx = \int_{-R}^R \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \cdot \tan \alpha dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$$

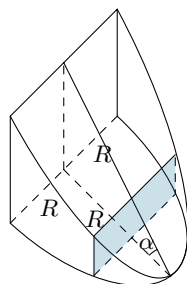
☆ Thể tích khối nêm loại II

Chọn trục Ox trùng với bán kính. Thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq R$) là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh lần lượt là $2\sqrt{R^2 - x^2}$ và $(R - x) \cdot \tan \alpha$. Khi đó, diện tích thiết diện là

$$S(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}(R - x) \cdot \tan \alpha.$$

$\Rightarrow$ Thể tích của vật thể là

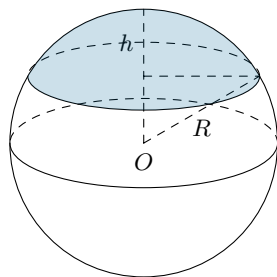
$$\begin{aligned} V &= \int_0^R S(x) dx = \int_0^R 2\sqrt{R^2 - x^2}(R - x) \cdot \tan \alpha dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) R^3 \tan \alpha \end{aligned}$$



4.9 Công thức thể tích khối chỏm cầu

Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h ($0 < h \leq R$) sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục Ox và đường thẳng $x = R - h$, $x = R$ quay quanh trục Ox . Thể tích của khối chỏm cầu là

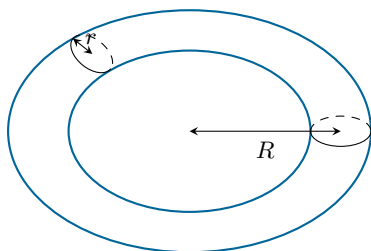
$$V = \pi \int_{R-h}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$$



4.10 Công thức thể tích cái phao

Thể tích của một cái phao có bán kính R và r như hình vẽ là

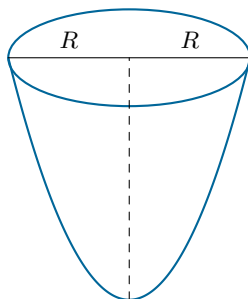
$$V = 2\pi^2 r^2 R$$



4.11 Công thức thể tích chảo Parabol

Khối chảo Parabol có bán kính R và chiều cao h sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình $y = \sqrt{\frac{R^2}{h}x}$, trục Ox và đường thẳng $x = 0$, $x = h$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối chảo Parabol là

$$V = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h} x \, dx = \frac{1}{2} \pi R^2 h$$



CHƯƠNG



TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. Phương trình mặt phẳng

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

- ☆ Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (P) được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- ☆ Mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = (A; B; C).$$

- ☆ Vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng tọa độ

Mặt phẳng	Vectơ pháp tuyến
(Oxy)	$\vec{n}_{(Oxy)} = [\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k} = (0; 0; 1)$
(Oyz)	$\vec{n}_{(Oyz)} = [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i} = (1; 0; 0)$
(Oxz)	$\vec{n}_{(Oxz)} = [\vec{i}, \vec{k}] = \vec{j} = (0; 1; 0)$

2. Phương trình mặt phẳng

- ☆ Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

- ☆ Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$, với $a \cdot b \cdot c \neq 0$ thì có phương trình là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

- ☆ Phương trình của các mặt phẳng đặc biệt

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

Các hệ số	Phương trình	Tính chất
$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc tọa độ O
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	$(\alpha) // Ox$
$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	$(\alpha) // Oy$
$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	$(\alpha) // Oz$
$A = D = 0$	$By + Cz = 0$	$(\alpha) \supset Ox$
$B = D = 0$	$Ax + Cz = 0$	$(\alpha) \supset Oy$
$C = D = 0$	$Ax + By = 0$	$(\alpha) \supset Oz$
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	$(\alpha) // (Oxy)$
$B = C = 0$	$Ax + D = 0$	$(\alpha) // (Oyz)$
$A = C = 0$	$By + D = 0$	$(\alpha) // (Oxz)$
$A = B = D = 0$	$Cz = 0$	$(\alpha) \equiv (Oxy)$
$B = C = D = 0$	$Ax = 0$	$(\alpha) \equiv (Oyz)$
$A = C = D = 0$	$By = 0$	$(\alpha) \equiv (Oxz)$

3. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

Mối quan hệ	Điều kiện
$(P) \equiv (Q)$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$
$(P) // (Q)$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$
(P) cắt (Q)	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ hoặc $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ hoặc $\frac{C}{C'} \neq \frac{A}{A'}$ hoặc $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$
$(P) \perp (Q)$	$AA' + BB' + CC' = 0$

4. Khoảng cách

☆ Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ tới mặt phẳng (P)

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

☆ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Cho $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(Q): Ax + By + Cz + D' = 0$. Khi đó

$$d((P), (Q)) = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5. Một số dạng toán viết phương trình mặt phẳng thường gặp

- ① Viết phương trình (P) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

☆ Cách xác định $\vec{n}$: $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

- ② Viết phương trình (P) đi qua A và song song với mặt phẳng (Q) .

☆ Cách xác định $\vec{n}$: $\vec{n}_{(P)} = \vec{n}_{(Q)}$.

- ③ Viết phương trình (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d .

☆ Cách xác định $\vec{n}$: $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d$.

- ④ Viết phương trình (P) là mặt phẳng trung trực của AB .

☆ Bước 1: Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

☆ Bước 2: Xác định vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.

☆ Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (P) .

- ⑤ Viết phương trình (P) đi qua A và chứa đường thẳng d .

☆ Cách xác định $\vec{n}$: $\vec{n} = [\vec{u}_d, \overrightarrow{AM}]$, với M là điểm thuộc d .

- ⑥ Viết phương trình (P) chứa hai đường d_1 và d_2 cắt nhau.

☆ Cách xác định $\vec{n}$: $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$.

☆ (P) đi qua điểm M thuộc d_1 (hoặc thuộc d_2).

- ⑦ Viết phương trình (P) chứa d_1 và song song với d_2 , với d_1 và d_2 chéo nhau.

☆ Cách xác định $\vec{n}$: $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$.

☆ (P) đi qua điểm M thuộc d_1 .

- ⑧ Viết phương trình (P) đi qua A và song song với hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 .

☆ Cách xác định $\vec{n}$: $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$.

- ⑨ Viết phương trình (P) vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau (Q) và (R) .

☆ Cách xác định $\vec{n}$: $\vec{n}_{(P)} = [\vec{n}_{(Q)}, \vec{n}_{(R)}]$.

- ⑩ Viết phương trình (P) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (Q) .

☆ Cách xác định $\vec{n}$: $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d, \vec{n}_{(Q)}]$.

☆ (P) đi qua điểm M thuộc d .

- ⑪ Viết phương trình (P) đi qua A , song song đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (Q) .

☆ Cách xác định $\vec{n}$: $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d, \vec{n}_{(Q)}]$.

- ⑫ Viết phương trình (P) song song với (Q) và cách M một khoảng h .

☆ **Bước 1:** Nếu mặt phẳng (Q) : $Ax + By + Cz + D = 0$ thì mặt phẳng (P) có phương trình là $Ax + By + Cz + m = 0$ ($m \neq D$).

☆ **Bước 2:** Với $M(x_0; y_0; z_0)$, ta có

$$d(M, (P)) = h \Rightarrow \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + m|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = h.$$

- ⑬ Viết phương trình (P) chứa d và cách M một khoảng h .

☆ **Bước 1:** Gọi vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n_P} = (A; B; C)$, với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

$$\Rightarrow \vec{n_P} \perp \vec{u_d} \Rightarrow \vec{n_P} \cdot \vec{u_d} = 0. \quad (1)$$

☆ **Bước 2:** Chọn một điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ thuộc $d \Rightarrow A$ cũng thuộc (P) .

$$\Rightarrow (P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Thiết lập phương trình khoảng cách từ M tới (P) theo h . (2)

☆ **Bước 3:** Từ (1) rút C theo A, B (hoặc A, B theo C) rồi thế vào (2).

Giải phương trình đẳng cấp (2) để tìm A, B, C .

14) Viết phương trình (P) chứa d và tạo với (Q) một góc α .

☆ **Bước 1:** Gọi vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n_P} = (A; B; C)$, với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

$$\Rightarrow \vec{n_P} \perp \vec{u_d} \Rightarrow \vec{n_P} \cdot \vec{u_d} = 0. \quad (1)$$

☆ **Bước 2:** Thiết lập phương trình

$$\cos \alpha = |\cos(\vec{n_P}, \vec{n_Q})| = \frac{|\vec{n_P} \cdot \vec{n_Q}|}{|\vec{n_P}| \cdot |\vec{n_Q}|}. \quad (2)$$

☆ **Bước 3:** Từ (1) và (2), tính C theo A, B rồi đưa về phương trình đẳng cấp A, B , từ đó tìm A, B, C .

15) Viết phương trình (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(I; R)$ tại A .

☆ **Cách xác định $\vec{n}$:** $\vec{n}_{(P)} = \vec{IA}$.

6. Một số công thức tính nhanh

☆ Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

Hình chiếu của M trên (P) là $H(x_M - At; y_M - Bt; z_M - Ct)$, trong

$$\text{đó } t = \frac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

☆ Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

Điểm đối xứng của M qua (P) là $H(x_M - 2At; y_M - 2Bt; z_M - 2Ct)$,

$$\text{trong đó } t = \frac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

☆ Mặt phẳng phân giác của hai mặt phẳng $(P): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $(Q): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ là

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

☆ Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng $(Q): ax + by + cz + d_1 = 0$ và $(R): ax + by + cz + d_2 = 0$ ($d_1 \neq d_2$) là

$$ax + by + cz + \frac{d_1 + d_2}{2} = 0.$$

BÀI 2. Phương trình đường thẳng trong không gian

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

☆ Vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d .

☆ Đường thẳng d : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ hoặc $d: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

☆ Vectơ chỉ phương của các trục tọa độ

Trục tọa độ	Vectơ chỉ phương
Ox	$\vec{u}_{Ox} = \vec{i} = (1; 0; 0)$
Oy	$\vec{u}_{Oy} = \vec{j} = (0; 1; 0)$
Oz	$\vec{u}_{Oz} = \vec{k} = (0; 0; 1)$

2. Phương trình đường thẳng

☆ **Phương trình tham số** của đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

☆ **Phương trình chính tắc** của đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ ($a; b; c \neq 0$) là

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

! Một đường thẳng có nhiều phương trình tham số và phương trình chính tắc tùy thuộc vào điểm và vectơ chỉ phương sử dụng để viết phương trình.

3. Vị trí tương đối

3.1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và d' đi qua điểm M' và có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$.

Vị trí	Điều kiện
$d // d'$	$\begin{cases} [\vec{u}, \vec{u}'] = \vec{0} \\ [\vec{u}, \overrightarrow{MM'}] \neq \vec{0} \end{cases}$
$d \equiv d'$	$\begin{cases} [\vec{u}, \vec{u}'] = \vec{0} \\ [\vec{u}, \overrightarrow{MM'}] = \vec{0} \end{cases}$
d cắt d'	$\begin{cases} [\vec{u}, \vec{u}'] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \end{cases}$
d chéo nhau d'	$[\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MM'} \neq 0$

3.2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Vị trí	Điều kiện	Vị trí	Điều kiện
$d \subset (P)$	$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ M \in (P) \end{cases}$	$d // (P)$	$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ M \notin (P) \end{cases}$
d cắt (P)	$\vec{u} \neq k\vec{n}$	$d \perp (P)$	$\vec{u} = k\vec{n}$

4. Khoảng cách

4.1. Khoảng cách từ điểm tới đường thẳng

Cho đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$. Khi đó, khoảng cách từ M tới đường thẳng d là

$$d(M, d) = \frac{|[\overrightarrow{AM}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|}$$

4.2 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho đường thẳng d đi qua điểm M , có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và đường thẳng d' qua M' , có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d và d' là

$$d(d, d') = \frac{|[\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MM'}|}{|[\vec{u}, \vec{u}']|}$$

5 Một số dạng toán viết phương trình đường thẳng thường gặp

- ① Viết phương trình d đi qua hai điểm A, B cho trước.

☆ Cách xác định $\vec{u}$: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

- ② Viết phương trình d đi qua A và song song với đường thẳng d' .

☆ Cách xác định $\vec{u}$: $\vec{u} = \vec{u}_{d'}$.

- ③ Viết phương trình d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) .

☆ Cách xác định $\vec{u}$: $\vec{u} = \overrightarrow{n_{(P)}}$.

- ④ Viết phương trình d đi qua A và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 .

☆ Cách xác định $\vec{u}$: $\vec{u} = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$.

- ⑤ Viết phương trình d đi qua A và song song với hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

☆ Cách xác định $\vec{u}$: $\vec{u} = [\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}}]$.

- ⑥ Viết phương trình d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

☆ Cách xác định $\vec{u}$: $\vec{u} = [\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}}]$.

☆ **Chú ý:** Ta cần tìm thêm một điểm A mà d đi qua, đó là điểm chung của hai mặt phẳng $(P), (Q)$. Để tìm điểm này ta đi giải hệ

phương trình $\begin{cases} (P) \\ (Q) \end{cases}$ bằng cách chọn $z = 0$.

7) Viết phương trình d đi qua A , vuông góc và cắt đường thẳng d' .

☆ **Bước 1:** Tham số hóa phương trình của đường thẳng d' .

☆ **Bước 2:** Gọi $H \in d'$, để H là hình chiếu vuông góc của A lên d' thì $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{u_{d'}}$, khi đó $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AH}$.

☆ **Bước 3:** Viết phương trình d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$.

8) Viết phương trình d đi qua A và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 .

☆ **Bước 1:** Tham số hóa d_1, d_2 và gọi M, N (theo tham số t_1, t_2) thuộc d_1, d_2 .

☆ **Bước 2:** Thiết lập điều kiện để A, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ cùng phương. Tìm được t_1, t_2 .

☆ **Bước 3:** Thay t_1 vào phương trình của d_1 , tìm được M . Ta có d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AM}$.

9) Viết phương trình d đi qua A vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 .

☆ **Bước 1:** Tham số hóa tọa độ d_2 và gọi M (theo tham số t_2) thuộc d_2 .

☆ **Bước 2:** Thiết lập điều kiện $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{u_{d_1}}$ để tìm t_2 .

☆ **Bước 3:** Thay t_2 vào d_2 để tìm M . Khi đó $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AM}$.

10) Viết phương trình d song song với Δ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 .

☆ **Bước 1:** Tham số hóa d_1, d_2 và gọi M, N (theo tham số t_1, t_2) thuộc d_1, d_2 .

☆ **Bước 2:** Thiết lập điều kiện $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_\Delta}$ để tìm t_1, t_2 .

☆ **Bước 3:** Thay t_1, t_2 vào d_1 và d_2 để tìm M, N . Ta có d đi qua M và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{MN}$.

11) Viết phương trình d nằm trong (P) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 .

☆ **Bước 1:** Tìm giao điểm M, N của d_1, d_2 với (P) .

☆ **Bước 2:** d đi qua M, N . Ta có $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{MN}$.

12) Viết phương trình d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 chéo nhau.

☆ **Bước 1:** Tham số hóa d_1, d_2 và gọi M, N (theo tham số t_1, t_2) thuộc d_1, d_2 .

☆ **Bước 2:** Thiết lập điều kiện
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0 \end{cases}$$
 để tìm t_1, t_2 .

☆ **Bước 3:** Thay t_1, t_2 vào d_1 và d_2 để tìm M, N . Ta có d đi qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = \overrightarrow{MN}$.

13) Viết phương trình d là hình chiếu của Δ xuống mặt phẳng (P) .

☆ **Cách 1**

◇ **Bước 1:** Tìm giao điểm I của Δ và (P) .

◇ **Bước 2:** Lấy điểm M thuộc Δ và tìm hình chiếu vuông góc H của M đến (P) .

◇ **Bước 3:** Viết phương trình đường thẳng d đi qua I và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = \overrightarrow{IH}$.

☆ **Cách 2**

◇ **Bước 1:** Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và vuông góc với (P) .

◇ **Bước 2:** Khi đó đường thẳng d chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

6. Một số công thức tính nhanh

☆ Hình chiếu của $M(x_M; y_M; z_M)$ trên đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ là

$$H(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$$

với
$$t = \frac{a(x_M - x_0) + b(y_M - y_0) + c(z_M - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

☆ Điểm đối xứng của $M(x_M; y_M; z_M)$ qua đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

là

$$M'(2x_0 - x_M + 2at; 2y_0 - y_M + 2bt; 2z_0 - z_M + 2ct)$$

với
$$t = \frac{a(x_M - x_0) + b(y_M - y_0) + c(z_M - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

☆ Phương trình hình chiếu vuông của đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 lên

mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$\begin{cases} x = x_0 - at + [a(B^2 + C^2) - A(bB + cC)]k \\ y = y_0 - bt + [b(A^2 + C^2) - B(aA + cC)]k \\ z = z_0 - ct + [c(A^2 + B^2) - C(aA + bB)]k \end{cases}$$

với
$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aa + Bb + Cc}.$$

BÀI 3. Công thức tính góc trong không gian

1. Góc giữa hai mặt phẳng

☆ Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. Khi đó góc giữa (P) và (Q) được tính theo công thức

$$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q)| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|}$$

2. Góc giữa hai đường thẳng

Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$. Khi đó góc giữa hai d và d' được tính theo công thức

$$\cos(d, d') = \left| \cos(\vec{u}, \vec{u}') \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|}$$

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$. Khi đó, góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) được

tính theo công thức $\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$.

BÀI 4. Phương trình mặt cầu

1. Phương trình mặt cầu

☆ Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

☆ Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Mặt cầu đó có tâm $I(a; b; c)$

và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

2. Vị trí tương đối giữa hai mặt cầu

Cho mặt cầu (S_1) có tâm I_1 , bán kính R_1 và mặt cầu (S_2) có tâm I_2 , bán kính R_2 .

Mối quan hệ	Điều kiện
$(S_1), (S_2)$ ngoài nhau	$I_1 I_2 > R_1 + R_2$
$(S_1), (S_2)$ trong nhau	$I_1 I_2 < R_1 - R_2 $
$(S_1), (S_2)$ tiếp xúc ngoài	$I_1 I_2 = R_1 + R_2$
$(S_1), (S_2)$ tiếp xúc trong	$I_1 I_2 = R_1 - R_2 $
$(S_1), (S_2)$ cắt nhau theo một đường tròn	$ R_1 - R_2 < I_1 I_2 < R_1 + R_2$

3. Vị trí tương đối của mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R và đường thẳng Δ .

Mối quan hệ	Điều kiện
Δ không cắt mặt cầu (S)	$d(I, \Delta) > R$
Δ tiếp xúc với mặt cầu (S)	$d(I, \Delta) = R$
Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B	$d(I, \Delta) < R$

4. Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

Gọi H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) , ta có $IH = d(I, (P))$.

Mối quan hệ	Điều kiện
Mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S)	$d(I, (P)) > R$
Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S)	$d(I, (P)) = R$
Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S)	$d(I, (P)) < R$

! Nếu mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn $C(H, r)$ thì đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.

5. Một số dạng toán viết phương trình mặt cầu thường gặp

① Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB .

☆ **Bước 1:** Tìm tọa độ tâm I là trung điểm của AB .

☆ **Bước 2:** Tính bán kính $R = IA$ (hoặc $= IB$).

☆ **Bước 3:** Viết phương trình mặt cầu (S) .

② Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ tiếp xúc với (P) .

☆ **Cách xác định R :** $R = d(I; (P))$.

③ Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn $(J; r)$.

☆ **Cách xác định R :** $R^2 = IJ^2 + r^2$.

☆ **Chú ý:** $IJ = d(I, (P))$.

④ Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với đường thẳng d tại tiếp điểm H .

☆ **Cách xác định R :** $R = IH = d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}|}{|\overrightarrow{u_d}|}$ với M là một điểm bất kì thuộc d .

- ⑤ Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt đường thẳng d theo dây cung AB .

☆ Cách xác định R : $R^2 = d^2(I, d) + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$.

- ⑥ Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D cho trước.

☆ Cách 1

◇ Bước 1: Gọi I là tâm của mặt cầu.

◇ Bước 2: Thiết lập hệ phương trình
$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2. \end{cases}$$

◇ Bước 3: Giải hệ phương trình tìm được tâm I và bán kính $R = IA$.

◇ Bước 4: Viết phương trình mặt cầu (S) .

☆ Cách 2

◇ Bước 1: Gọi phương trình mặt cầu (S) là

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

◇ Bước 2: Thay tọa độ A, B, C, D vào phương trình của (S) , từ đó lập hệ phương trình.

◇ Bước 3: Giải hệ phương trình tìm được a, b, c, d .

- ⑦ Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm $I \in (P)$.

☆ Bước 1: Gọi tâm $I(a; b; c)$.

☆ Bước 2: Thiết lập hệ phương trình
$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ I \in (P). \end{cases}$$

☆ Bước 3: Giải hệ phương trình tìm được I và bán kính $R = IA$.

☆ Bước 4: Viết phương trình mặt cầu (S) .

- ⑧ Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (S') cho trước.

☆ Bước 1: Tìm tọa độ tâm I' và bán kính R' của mặt cầu (S') .

☆ **Bước 2:** Tìm bán kính R của S .

◇ Nếu tiếp xúc trong thì $II' = |R - R'|$.

◇ Nếu tiếp xúc ngoài thì $II' = R + R'$.

☆ **Bước 3:** Viết phương trình mặt cầu (S).

⑨ **Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B thỏa mãn $\triangle IAB$ vuông hoặc đều.**

☆ **Bước 1:** Tìm mối quan hệ giữa bán kính với AB .

◇ Nếu $\triangle IAB$ vuông thì sẽ vuông cân tại I .

Do đó, cạnh huyền $AB = \sqrt{2}IA \Leftrightarrow IA = \frac{AB}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow R = IA = \frac{AB}{\sqrt{2}}$.

◇ Nếu $\triangle IAB$ đều thì $R = AB$.

☆ **Bước 2:** Áp dụng công thức $R^2 = d^2(I, d) + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ để tìm R .

☆ **Bước 3:** Viết phương trình mặt cầu (S).

Bài 5. Một số bài toán cực trị trong hình không gian

① **Dạng 1:** Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B . Tìm M thuộc mặt phẳng (P) để $MA + MB$ nhỏ nhất.

☆ Nếu A, B **trái phía** với (P).

◇ Để $MA + MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M, A, B$ thẳng hàng. Khi đó M là giao điểm của AB với mặt phẳng (P).

☆ Nếu A, B **cùng phía** với (P).

◇ **Bước 1:** Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua (P).

◇ **Bước 2:** Tìm tọa độ điểm $M = A'B \cap (P)$.

② **Dạng 2:** Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B . Tìm M thuộc mặt phẳng (P) để $|MA - MB|$ lớn nhất.

☆ Nếu A, B **cùng phía** với (P) thì $|MA - MB|$ lớn nhất khi M, A, B thẳng hàng $\Leftrightarrow M = AB \cap (P)$.

☆ Nếu A, B **trái phía** so với (P).

◇ **Bước 1:** Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua (P) .

◇ **Bước 2:** Tìm tọa độ điểm $M = A'B \cap (P)$.

- ③ **Dạng 3:** Cho $M(x_0; y_0; z_0)$ sao cho $x_0 \cdot y_0 \cdot z_0 \neq 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt ba trục tọa độ tại ba điểm A, B, C sao cho V_{OABC} đạt giá trị nhỏ nhất.

☆ **Công thức:** $(P): \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 3$.

- ④ **Dạng 4:** Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ $M \notin d$ đến (P) lớn nhất.

☆ **Tính chất:** $MH \leq ME$ với E và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên d và (P) .

☆ **Công thức:** Mặt phẳng (P) đi qua A thuộc d và có vectơ pháp tuyến $\vec{n_P} = \vec{ME}$.

- ⑤ **Dạng 5:** Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách M một khoảng lớn nhất.

☆ **Tính chất:** $MH \leq MA$, với H là hình chiếu vuông góc của M trên (P) .

☆ **Công thức:** (P) đi qua A và có $\vec{n_P} = \vec{AM}$.

- ⑥ **Dạng 6:** Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho (P) tạo với đường thẳng Δ (không song song với d) một góc lớn nhất.

☆ **Công thức:** (P) qua $A \in d$ và có $\vec{n_P} = [[\vec{u_d}, \vec{u_\Delta}], \vec{u_d}]$.

- ⑦ **Dạng 7:** Cho $\Delta // (P)$. Viết phương trình đường thẳng d thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d // \Delta$ và cách Δ một khoảng nhỏ nhất.

☆ **Cách làm:** Lấy điểm $A \in \Delta$ và hạ hình chiếu vuông góc của A là A' lên (P) . Khi đó, d đi qua A' và có $\vec{u_d} = \vec{u_\Delta}$.

- ⑧ **Dạng 8:** Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và nằm trong mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ M tới đường thẳng d là lớn nhất (AM không vuông góc với (P)).

☆ **Tính chất:** khoảng cách luôn $\leq MA$.

☆ **Công thức:** d đi qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{u_d} = [\vec{n_P}, \vec{AM}]$.

- ⑨ **Dạng 9:** Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và nằm trong mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ M tới đường thẳng d là nhỏ nhất (AM không vuông góc với (P)).

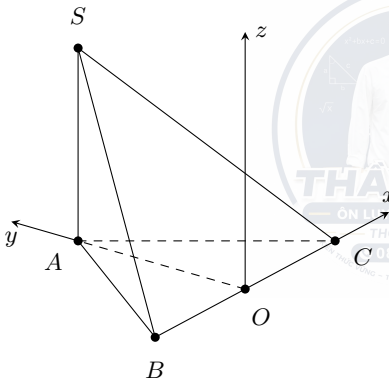
☆ **Công thức:** d đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = \left[\left[\vec{n}_P, \overrightarrow{AM} \right], \vec{n}_P \right]$.

BÀI 6. Phương pháp tọa độ hóa hình không gian

1. Hình chóp

Hình chóp có cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác đều

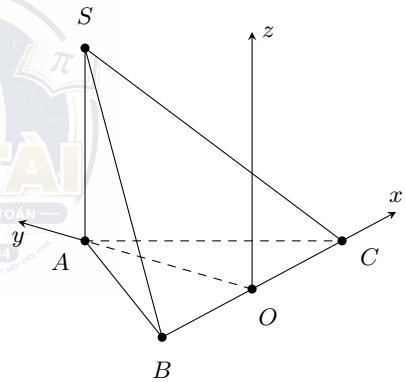


☆ Gọi O là trung điểm của BC . Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{l|l} O(0;0;0) & A\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{2}; 0\right) \\ B\left(-\frac{AB}{2}; 0; 0\right) & C\left(\frac{AB}{2}; 0; 0\right) \\ S\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{2}; SA\right) & \end{array}$$

Đáy là tam giác cân tại A

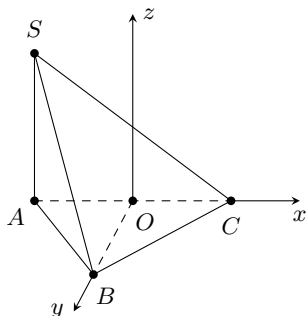


☆ Gọi O là trung điểm của BC . Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{l|l} O(0;0;0) & A(0; OA; 0) \\ B(-OB; 0; 0) & C(OC; 0; 0) \\ S(0; OA; SA) & \end{array}$$

Đây là tam giác cân tại B

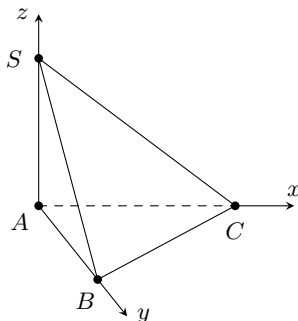


☆ Gọi O là trung điểm của AC .
Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{l|l} O(0; 0; 0) & A(-OA; 0; 0) \\ B(0; OB; 0) & C(OC; 0; 0) \\ & S(-OA; 0; SA) \end{array}$$

Đây là tam giác vuông tại A

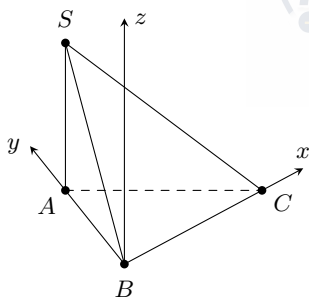


☆ Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{l|l} A(0; 0; 0) & B(0; AB; 0) \\ C(AC; 0; 0) & S(0; 0; SA) \end{array}$$

Đây là tam giác vuông tại B

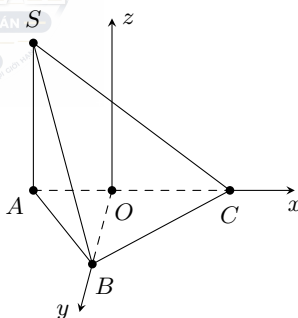


☆ Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{l|l} B(0; 0; 0) & A(0; AB; 0) \\ C(BC; 0; 0) & S(0; AB; SA) \end{array}$$

Đây là tam giác thường

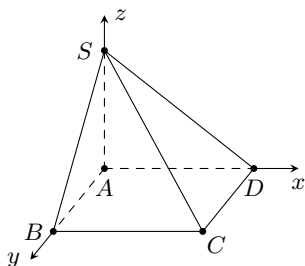


☆ Dựng đường cao BO của $\triangle ABC$. Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{l|l} O(0; 0; 0) & A(-OA; 0; 0) \\ B(0; OB; 0) & C(OC; 0; 0) \\ & S(-OA; 0; SA) \end{array}$$

Đáy là hình vuông, hình chữ nhật

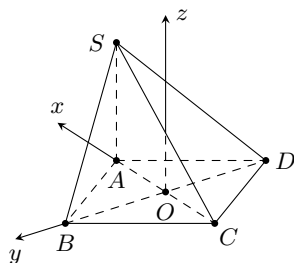


☆ Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{l|l} A(0; 0; 0) & B(0; AB; 0) \\ C(AD; AB; 0) & D(AD; 0; 0) \\ S(0; 0; SA) & \end{array}$$

Đáy là hình thoi

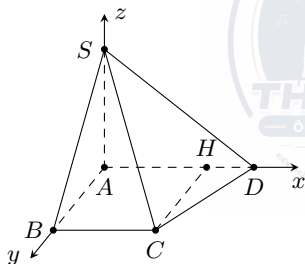


☆ Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{l|l} O(0; 0; 0) & A(OA; 0; 0) \\ B(0; OB; 0) & C(-OC; 0; 0) \\ D(0; -OD; 0) & S(OA; 0; SA) \end{array}$$

Đáy là hình thang vuông



☆ Đặt $CH \perp AD$. Chọn hệ trục như hình vẽ.

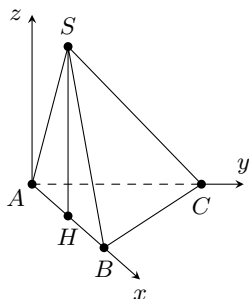
☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{l|l} A(0; 0; 0) & B(0; AB; 0) \\ C(AH; AB; 0) & D(AD; 0; 0) \end{array}$$

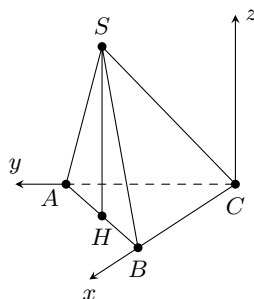
$$S(0; 0; SA)$$

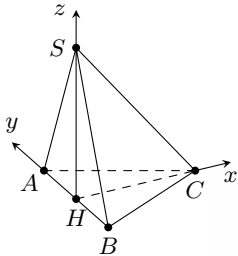
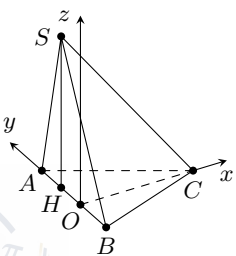
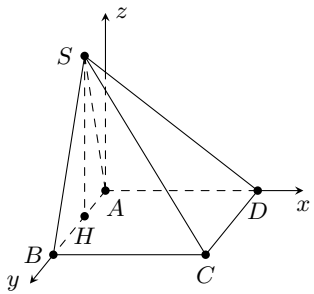
Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác vuông tại A, mặt bên là tam giác cân tại S



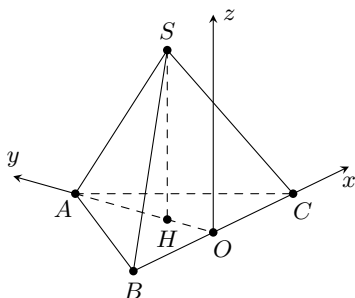
Đáy là tam giác vuông tại C, mặt bên là tam giác cân tại S



☆ Gọi H là trung điểm của AB. Chọn hệ trục như hình vẽ. ☆ Tọa độ điểm <table> <tr> <td>$A(0; 0; 0)$</td> <td>$B(AB; 0; 0)$</td> </tr> <tr> <td>$C(0; AC; 0)$</td> <td>$S\left(\frac{AB}{2}; 0; SH\right)$</td> </tr> </table> Đây là tam giác cân tại C, mặt bên là tam giác cân tại S  ☆ Gọi H là trung điểm của AB. Chọn hệ trục như hình vẽ. ☆ Tọa độ điểm <table> <tr> <td>$H(0; 0; 0)$</td> <td>$A\left(0; \frac{AB}{2}; 0\right)$</td> </tr> <tr> <td>$B\left(0; -\frac{AB}{2}; 0\right)$</td> <td>$C(CH; 0; 0)$</td> </tr> <tr> <td>$S(0; 0; SH)$</td> <td></td> </tr> </table>	$A(0; 0; 0)$	$B(AB; 0; 0)$	$C(0; AC; 0)$	$S\left(\frac{AB}{2}; 0; SH\right)$	$H(0; 0; 0)$	$A\left(0; \frac{AB}{2}; 0\right)$	$B\left(0; -\frac{AB}{2}; 0\right)$	$C(CH; 0; 0)$	$S(0; 0; SH)$		☆ Gọi H là trung điểm của AB. Chọn hệ trục như hình vẽ. ☆ Tọa độ điểm <table> <tr> <td>$A(0; AC; 0)$</td> <td>$B(BC; 0; 0)$</td> </tr> <tr> <td>$C(0; 0; 0)$</td> <td>$S\left(\frac{BC}{2}; \frac{AC}{2}; SH\right)$</td> </tr> </table> Đây là tam giác thường, mặt bên là tam giác thường  ☆ Đặt đường cao CO của $\triangle ABC$ và đường cao SH của $\triangle SAB$. Chọn hệ trục như hình vẽ. ☆ Tọa độ điểm <table> <tr> <td>$O(0; 0; 0)$</td> <td>$A(0; OA; 0)$</td> </tr> <tr> <td>$B(0; -OB; 0)$</td> <td>$C(OC; 0; 0)$</td> </tr> <tr> <td>$S(0; OH; SH)$</td> <td></td> </tr> </table>	$A(0; AC; 0)$	$B(BC; 0; 0)$	$C(0; 0; 0)$	$S\left(\frac{BC}{2}; \frac{AC}{2}; SH\right)$	$O(0; 0; 0)$	$A(0; OA; 0)$	$B(0; -OB; 0)$	$C(OC; 0; 0)$	$S(0; OH; SH)$	
$A(0; 0; 0)$	$B(AB; 0; 0)$																				
$C(0; AC; 0)$	$S\left(\frac{AB}{2}; 0; SH\right)$																				
$H(0; 0; 0)$	$A\left(0; \frac{AB}{2}; 0\right)$																				
$B\left(0; -\frac{AB}{2}; 0\right)$	$C(CH; 0; 0)$																				
$S(0; 0; SH)$																					
$A(0; AC; 0)$	$B(BC; 0; 0)$																				
$C(0; 0; 0)$	$S\left(\frac{BC}{2}; \frac{AC}{2}; SH\right)$																				
$O(0; 0; 0)$	$A(0; OA; 0)$																				
$B(0; -OB; 0)$	$C(OC; 0; 0)$																				
$S(0; OH; SH)$																					
Đây là hình chữ nhật, mặt bên là tam giác thường 	☆ Đặt đường cao đường cao SH trong $\triangle SAB$. Chọn hệ trục như hình vẽ. ☆ Tọa độ điểm <table> <tr> <td>$A(0; 0; 0)$</td> <td>$B(0; AB; 0)$</td> </tr> <tr> <td>$C(AD; AB; 0)$</td> <td>$D(AD; 0; 0)$</td> </tr> <tr> <td>$S(0; AH; SH)$</td> <td></td> </tr> </table>	$A(0; 0; 0)$	$B(0; AB; 0)$	$C(AD; AB; 0)$	$D(AD; 0; 0)$	$S(0; AH; SH)$															
$A(0; 0; 0)$	$B(0; AB; 0)$																				
$C(AD; AB; 0)$	$D(AD; 0; 0)$																				
$S(0; AH; SH)$																					

Hình chóp đều

Hình chóp tam giác đều

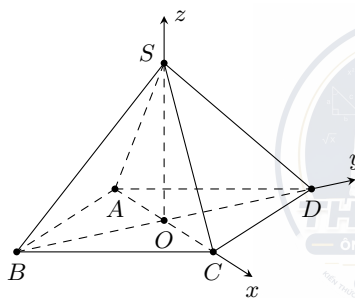


☆ Gọi O là trung điểm của BC .
Chọn hệ trục như hình vẽ.

☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{l|l} O(0; 0; 0) & A\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{2}; 0\right) \\ B\left(-\frac{AB}{2}; 0; 0\right) & C\left(\frac{AB}{2}; 0; 0\right) \\ S\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{6}; SH\right) & \end{array}$$

Hình chóp tứ giác đều



☆ Chọn hệ trục như hình vẽ.

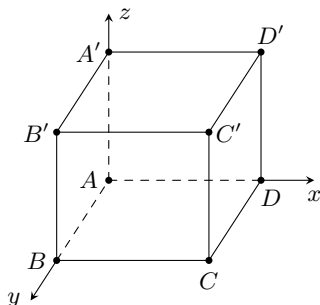
☆ Tọa độ điểm

$$\begin{array}{l|l} O(0; 0; 0) & A\left(-\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right) \\ B\left(0; -\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0\right) & C\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right) \\ D\left(0; \frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0\right) & S(0; 0; SO) \end{array}$$

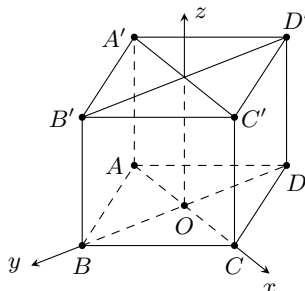
2. Hình lăng trụ

Lăng trụ đứng

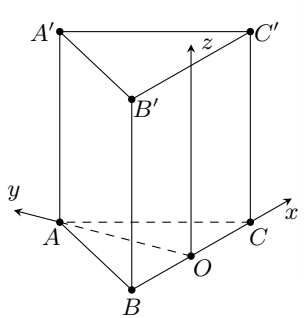
Hình hộp chữ nhật

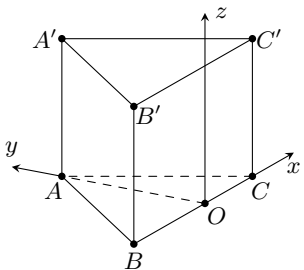


Lăng trụ đứng có đáy là hình thoi



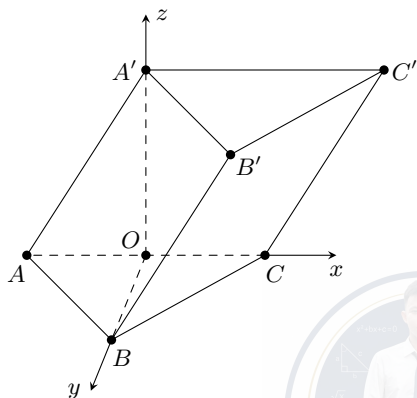
☆ Chọn hệ trục như hình vẽ. ☆ Tọa độ điểm		☆ Gọi O là tâm hình thoi đáy $ABCD$. Chọn hệ trục như hình vẽ. ☆ Tọa độ điểm	
$A(0; 0; 0)$	$B(0; AB; 0)$	$O(0; 0; 0)$	$A(-OA; 0; 0)$
$C(AD; AB; 0)$	$D(AD; 0; 0)$	$B(0; OB; 0)$	$C(OC; 0; 0)$
$A'(0; 0; AA')$	$B'(0; AB; AA')$	$D(0; -OD; 0)$	$A'(-OA; 0; AA')$
$C'(AD; AB; AA')$	$D'(AD; 0; AA')$	$B'(0; OB; AA')$	$C'(OC; 0; CC')$
		$D'(0; -OD; DD')$	

Lăng trụ tam giác đều 		☆ Gọi O là trung điểm của BC. Chọn hệ trục như hình vẽ ☆ Tọa độ điểm	
		$O(0; 0; 0)$	$A\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{2}; 0\right)$
		$B\left(-\frac{AB}{2}; 0; 0\right)$	$C\left(\frac{AB}{2}; 0; 0\right)$
		$A'\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{2}; AA'\right)$	$B'\left(-\frac{AB}{2}; 0; AA'\right)$
		$C'\left(\frac{AB}{2}; 0; AA'\right)$	

Lăng trụ đứng có đáy là tam giác thường 		☆ Dựng đường cao AO trong $\triangle ABC$. Chọn hệ trục như hình vẽ. ☆ Tọa độ điểm	
		$A(0; OA; 0)$	$B(-OB; 0; 0)$
		$C(OC; 0; 0)$	$A'(0; OA; AA')$
		$B'(-OB; 0; AA')$	$C'(OC; 0; AA')$

Lăng trụ xiên

Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh của tam giác đáy

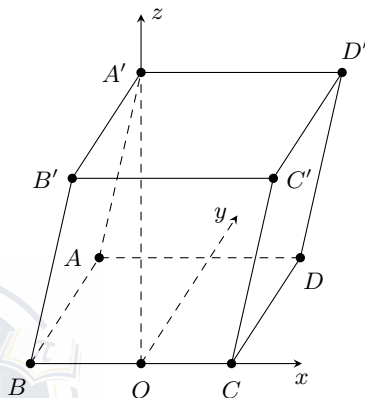


☆ Chọn hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A, B, C, A' .

☆ Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$$

Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông (hình chữ nhật), hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



☆ Chọn hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A, B, C, D, A' .

☆ Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$$

TỔ HỢP - XÁC SUẤT

BÀI 1. Biến cố và định nghĩa cổ điển của xác suất

1. Biến cố

1.1. Định nghĩa

- ☆ **Phép thử ngẫu nhiên** là một thí nghiệm hay một hành động mà kết quả của nó không thể biết được trước khi phép thử được thực hiện.
- ☆ **Không gian mẫu** của phép thử là tập hợp tất cả các kết quả có thể khi thực hiện phép thử, kí hiệu là Ω .
- ☆ **Biến cố** E là một tập con của không gian mẫu Ω .
- ☆ **Kết quả thuận lợi** cho một biến cố E liên quan đến phép thử T là kết quả của phép thử T làm cho biến cố đó xảy ra.

1.2. Các biến cố thường gặp

1.3. Biến cố đối

Cho hai biến cố A và B . Khi đó

- ☆ **Biến cố đối** của biến cố A là biến cố “ A không xảy ra”, kí hiệu là $\overline{A}$.
- ☆ **Biến cố giao** của hai biến cố A và B là biến cố “ A và B cùng xảy ra”, kí hiệu là $A \cap B$ (hay AB).
- ☆ **Biến cố hợp** của hai biến cố A và B là biến cố “ A hoặc B xảy ra”, kí hiệu là $A \cup B$.
- ☆ Hai biến cố A và B được gọi là **xung khắc** với nhau nếu biến cố A xảy ra thì biến cố B không xảy ra và ngược lại. Khi đó $A \cap B = \emptyset$.
- ☆ Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** với nhau nếu sự xảy ra của A **không** làm ảnh hưởng đến việc xảy ra của B .

2. Định nghĩa cổ điển của xác suất

Định nghĩa 6.1.

Cho phép thử T có không gian mẫu là Ω . Giả sử các kết quả có thể của T là đồng khả năng. Nếu E là một biến cố liên quan đến phép thử T thì **xác suất** của E được cho bởi công thức

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)},$$

trong đó $n(\Omega)$ và $n(E)$ tương ứng là số phần tử của không gian mẫu Ω và biến cố E .

☆ Tính chất

$$\diamond P(\emptyset) = 0 \text{ và } P(\Omega) = 1.$$

$$\diamond 0 \leq P(A) \leq 1.$$

3. Các quy tắc tính xác suất

☆ Cho biến cố A . Xác suất của biến cố đối $\bar{A}$ của A là

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

☆ Cho hai biến cố A và B bất kì khi đó

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

☆ Nếu hai biến cố A và B **xung khắc** thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

! Hai biến cố AB và $A\bar{B}$ xung khắc với nhau khi đó

$$P(AB) + P(A\bar{B}) = P(AB \cup A\bar{B}) = P(A)$$

☆ Nếu hai biến cố A và B **độc lập** thì

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

BÀI 2. Xác suất có điều kiện

1. Định nghĩa xác suất có điều kiện

Định nghĩa 6.2.

Cho hai biến cố A và B . Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là **xác suất của A với điều kiện B** , kí hiệu là $P(A | B)$. Nếu $P(B) > 0$ thì

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$



Với mỗi biến cố ngẫu nhiên A và B , trong đó $P(B) > 0$, ta có

$$P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B)$$

2. Công thức nhân xác suất

Định lí 6.3.

Cho hai biến cố A, B là biến cố bất kì. Khi đó

$$P(AB) = P(A | B) \cdot P(B) = P(B | A) \cdot P(A)$$

— ÔN LUYỆN MÔN TOÁN —



Cho hai biến cố A và B thỏa mãn $0 < P(A), P(B) < 1$. Khi đó, A và B **độc lập** khi và chỉ khi $P(A) = P(A | B)$ và $P(B) = P(B | A)$.

3. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

☆ Cho biến cố A và B , Khi đó, ta có **công thức xác suất toàn phần** như sau

$$P(B) = P(B | A) \cdot P(A) + P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A}).$$

☆ Cho A và B là biến cố, với $P(B) > 0$. Khi đó, ta có **công thức Bayes** như sau

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B | A) \cdot P(A) + P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A})}.$$



Công thức Bayes có thể viết dưới dạng

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

