

VỀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TAM THỨC BẬC HAI VÀ NGUYÊN LÝ DIRICHLET VÀO CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

Ngày 24 tháng 2 năm 2021

Tóm tắt nội dung

Bất đẳng thức là một bài toán đã không còn xa lạ trong các kỳ thi học sinh giỏi Toán và các kỳ thi Olympic Toán trong nước cũng như trên thế giới. Bài viết này sẽ giới thiệu cho bạn đọc về hai phương pháp tuy không mới, nhưng có nhiều ứng dụng giúp cho chúng ta phần nào giải quyết một cách dễ dàng các bài toán bất đẳng thức mà các bất đẳng thức thông thường khó có thể giải quyết.

1 Một số bất đẳng thức thông dụng

Vì trong bài viết có đề cập ít nhiều tới các bất đẳng thức thông dụng này, nên mình chỉ xin nêu ra phát biểu của chúng ở phần đầu mà không kèm theo chứng minh. Chứng minh của chúng, bạn đọc có thể tìm kiếm trong các sách, báo cũng như trên Internet.

1.1 Bất đẳng thức AM-GM

Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm thì

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

1.2 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho $2n$ số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó, ta có:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Và dưới đây là một biến thể của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng Engel

Cho n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và các số thực dương $b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó, ta có:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} = \frac{a_2}{\sqrt{b_2}} = \dots = \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}$.

2 Sử dụng định lý dấu của tam thức bậc hai để chứng minh bất đẳng thức

2.1 Cơ sở lý thuyết

2.1.1 Một số tính chất của tam thức bậc hai

Định lý về dấu và nghiệm của tam thức bậc hai.

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) với biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ta có các định lý về nghiệm và dấu của tam thức bậc hai như sau:

- Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x) = 0$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$ và $af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x) = 0$ có hai nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ và $af(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra với khi và chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta > 0$, khi đó $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Lúc này, ta có các trường hợp sau:

a) $af(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

b) $af(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$

c) $af(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$

Chứng minh. Để ý rằng, ta có đẳng thức sau:

$$af(x) = a(ax^2 + bx + c) = a \left[a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \right] = a^2 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4}.$$

Ta xét các khả năng sau:

- Nếu $\Delta < 0$ thì $af(x) = a^2 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left| \frac{\Delta}{4} \right| > 0$ nên $f(x) = 0$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta = 0$ thì $af(x) = a^2 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ (đẳng thức xảy ra với khi và chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$) nên $f(x) = 0$ có hai nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta > 0$, khi đó $f(x) = a^2 \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$.

Ta lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$+\infty$
$x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	-	0	+	+
$x - \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	-	-	-	0
$af(x)$	+	0	-	0

Từ bảng xét dấu, ta có:

a) $af(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

b) $af(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$

c) $af(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$

Định lý về dấu và nghiệm của tam thức bậc hai được chứng minh. ■

Định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai. Nếu tồn tại số thực α sao cho $af(\alpha) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < \alpha < x_2$.

Chứng minh. Dựa vào định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta sẽ chứng minh định lý này bằng phương pháp phản chứng.

Thật vậy, nếu ta giả sử $\Delta \leq 0$, khi đó ta có $af(\alpha) \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (trái với giả thiết).

Suy ra $\Delta > 0$ tức là phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Giả sử $\alpha \notin (x_1, x_2)$, lúc này $af(\alpha) \geq 0$ (trái với giả thiết). Vậy $\alpha \in (x_1, x_2)$.

Chứng minh hoàn tất. ■

Từ đây, ta có một số kết quả sau:

Hệ quả 1. Nếu tồn tại một số thực α sao cho $af(\alpha) \leq 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm.

Hệ quả 2. Nếu tồn tại hai số thực α, β sao cho $f(\alpha).f(\beta) \leq 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm. Hơn nữa, nếu $f(\alpha).f(\beta) < 0$ ($\alpha < \beta$) thì phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$ hoặc $\alpha < x_1 < \beta < x_2$

2.1.2 Sử dụng định lý dấu của tam thức bậc hai vào chứng minh bất đẳng thức

Áp dụng các tính chất trên, ta có các phương pháp chứng minh bất đẳng thức sau:

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) với biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Muốn chứng minh $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ta chứng minh $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$

Ngược lại, để chứng minh $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ta chứng minh $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$

- Muốn chứng minh $\Delta \leq 0$, ta chứng minh $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

- Muốn chứng minh $\Delta \geq 0$, ta chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm bằng một trong ba cách sau:

- Chỉ ra các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$
- Chỉ ra một số α sao cho $af(\alpha) \leq 0$
- Chỉ ra hai số α, β sao cho $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$

2.2 Một số bài toán

Dạng 1: Sử dụng định lý dấu của tam thức bậc hai trong chứng minh bất đẳng thức

Bài toán 2.1.1 Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có bất đẳng thức đúng sau

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2) \geq 3(ab + a + b) \quad (2.1.1)$$

Nhận xét. Đây là một bất đẳng thức đối xứng theo hai biến a, b . Ta hãy tìm cách đưa về phương trình bậc hai theo a hoặc b .

Lời giải. Ta viết lại bất đẳng thức (2.1.1) dưới dạng:

$$f(a) = (b^2 + 2)a^2 - 3(b + 1)a + 2b^2 - 3b + 4 \geq 0$$

Ta có $f(a)$ là một tam thức bậc hai với hệ số của a^2 là $b^2 + 2 \geq 0$ và có biệt thức:

$$\begin{aligned} \Delta_a &= 9(b + 1)^2 - 4(b^2 + 2)(2b^2 - 3b + 4) = 9b^2 + 18b + 9 - 8b^4 + 12b^3 - 32b^2 - 24b + 32 \\ &= -(8b^4 - 12b^3 + 8b^2 + 4b^3 + 8b^2 + 3b + 23b^2) - 46b + 23 = -(b - 1)^2(8b^2 + 4b + 23) \leq 0 \end{aligned}$$

Do đó, theo định lý dấu của tam thức bậc hai ta có $f(a) \geq 0$.

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$. ■

Ta thấy ngoài việc đưa bất đẳng thức về dạng tam thức bậc hai, việc để tính Δ với các số mũ lớn và tìm cách đưa nó về một biểu thức để so sánh với 0 cũng là một việc cần thiết. Vậy để phân tích được ra các nhân tử như thế, chúng ta cần phải dựa vào "điểm rơi" giúp cho việc phân tích Δ dễ dàng hơn.

Bài toán 2.1.2 Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a + d = b + c$. Chứng minh rằng nếu lấy m sao cho $|ad - bc| \leq 2m$ thì ta có bất đẳng thức sau:

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + m^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.1.2)$$

Lời giải. Ta có:

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + m^2 = [x^2 - (a + d)x + ad] [x^2 - (b + c)x + bc]$$

Mặt khác, theo giả thiết thì $a + d = b + c \Leftrightarrow x^2 - (a + d)x = x^2 - (b + c)x$ nên ta có

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + m^2 = [x^2 - (a + d)x]^2 + (ad + bc) [x^2 - (a + d)x] + abcd + m^2$$

$$= f(x^2 - (a+d)x)$$

Ta thấy $f(x^2 - (a+d)x)$ là một tam thức bậc hai có hệ số của $[x^2 - (a+d)x]^2$ là $1 > 0$ và có biệt thức:

$$\Delta_{x^2-(a+d)x} = (ad+bc)^2 - 4(abcd+m^2) = (ad-bc)^2 - 4m^2 \leq 0$$

$$(\forall |ab-bc| \leq 2m)$$

Do đó, theo định lý dấu của tam thức bậc hai thì $f(x^2 - (a+d)x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán được chứng minh. ■

Bài toán 2.1.3(Vasile-Cirtoaje) Cho các số thực $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5} \quad (2.1.3)$$

Nhận xét.

- Đây là một bất đẳng thức ba biến nên nếu đem về dạng tam thức bậc hai thì Δ sẽ chứa ít nhất hai biến.
- Dựa vào nhận xét đây là bất đẳng thức hoán vị, hãy thử giả sử $a = \max\{a, b, c\}$ để so sánh các biến trong Δ .
- Đẳng thức của bất đẳng thức này tại $(a, b, c) = (3, \frac{1}{3}, 1)$ và các hoán vị.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Do $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$ nên

$$b \leq a \leq \frac{3}{1}b = 3b.$$

Bất đẳng thức (1.2) tương đương với:

$$f(c) = (3a-2b)c^2 + (3b^2-2a^2+ab) + ab(3a-2b) \geq 0$$

Ta thấy $f(c)$ là tam thức bậc hai với hệ số của c^2 là $3a-2b > 0$ (vì $a = \max\{a, b, c\}$) và có biệt thức:

$$\Delta_c = (3b^2-2a^2+ab)^2 - 4ab(3a-2b)^2 = -40a^3b - 10ab^3 + 37a^2b^2 + 4a^4 + 9b^4$$

$$= (a-9b)(4a^3-4a^2b+ab^2-b^3) = (a-9b)(a-b)(4a^2+b^2) \leq 0$$

$$(\text{Do } 9a \geq 9b \geq a)$$

Do đó, theo định lý dấu của tam thức bậc hai, ta có $f(c) \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c) = (3, \frac{1}{3}, 1)$ và các hoán vị. ■

Tương tự phương pháp ở **Bài toán 2.1.3** hãy thử sức với bài toán sau:

Bài toán 2.1.4 Cho các số thực $a, b, c \in [1; 4]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{23}{15} \quad (2.1.4)$$

Gợi ý. Điểm rơi xảy ra tại $(a; b; c) = (4; 1; 2)$ và các hoán vị.

Bài toán 2.1.5 Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \leq 1 + 2abc \quad (2.1.5)$$

Nhận xét.

- Đây là một bất đẳng thức đối xứng với "điểm rơi" tại $(a; b; c) = (1; 1; 0)$ và các hoán vị.
- Bất đẳng thức (2.1.5) có thể viết lại thành: $1 + 2abc - a(b + c) - bc \geq 0$ và theo giả thiết, ta có $(b + c)^2 + a^2 = 2 + 2bc$. Hãy thử đặt $b + c = x$, $bc = y$, từ đó đem về dạng tam thức bậc hai.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$.

Từ giả thiết bài toán, ta có: $3a^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 = 2 \Rightarrow a \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$. Ta có các biến đổi tương đương sau:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + (b + c)^2 - 2}{2} = bc$$

$$ab + bc + ca \leq 1 + 2abc \Leftrightarrow 1 + 2abc - (b + c)a - bc \geq 0$$

Vì thế, khi đặt $\begin{cases} b + c = x (x > 0) \\ bc = y (y > 0) \end{cases}$. **Bài toán 2.1.5** được viết lại như sau: Cho các số thực dương a, x, y thỏa mãn $y = \frac{a^2 + x^2 - 2}{2}$. Chứng minh rằng:

$$2ay - xa - y \leq 0 \quad (2.1.5.1)$$

Từ giả thiết bài toán này, ta có thể viết bất đẳng thức (2.1.4.1) lại như sau:

$$(a^2 + x^2 - 2)a - ax - \frac{a^2 + x^2 - 2}{2} + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (a - \frac{1}{2})x^2 - ax + a^3 - \frac{a^2}{2} - 2a + 2 \geq 0$$

Ta thấy $f(x)$ là một tam thức bậc hai với hệ số của x^2 là $2a - 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 1 > 0$ và có biệt thức

$$\begin{aligned} \Delta_x &= a^2 - 4(a - \frac{1}{2})(a^3 - \frac{a^2}{2} - 2a + 2) \\ &= -4(a^4 - a^3 - 2a^2 + 3a - 1) = -4(a^4 - a^3 - 2a^2 + 2a + a - 1) \\ &= -4(a - 1)(a^3 - 2a^2 + 1) = -4(a - 1)^2(a^2 + a - 1) \leq 0 \\ (\text{Do } a &\geq \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow a^2 + a - 1 \geq \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} - 1 > 0) \end{aligned}$$

Vậy, theo định lý dấu của tam thức bậc hai, ta có $f(x) \geq 0$.

Bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c) = (1, 1, 0)$ và các hoán vị. ■

Tương tự bài toán trên, hãy thử sức với bài toán sau.

Bài toán 2.1.6 Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a + ab + 2abc \leq \frac{9}{2} \quad (2.1.6)$$

Gợi ý. Hãy thử rút các số a, b, c theo hai số còn lại từ giả thiết $a + b + c = 3$. Sau đó đưa về dạng tam thức bậc hai.

Bài toán 2.1.7 Cho $k \in (-1; 2)$ và a, b, c là các số đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$[a^2 + b^2 + c^2 + k(ab + bc + ca)] \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right] \geq \frac{9(2-k)}{4} \quad (2.1.7)$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a > b > c$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và Cauchy-Schwarz dạng Engel, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} &\geq \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{a-b+b-c} \right)^2 = \frac{9}{(c-a)^2} \end{aligned}$$

Bây giờ ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + k(ab + bc + ca) &\geq \frac{2-k}{4}(c-a)^2 \\ \Leftrightarrow f(c+a) &= (k+2)(c+a)^2 + 4kb(c+a) + 4b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ta thấy $f(c+a)$ là một tam thức bậc hai với hệ số của $(a+b)^2$ là $k+2 > 0, \forall k \in (-1; 2)$ và có biệt thức:

$$\Delta_{c+a} = 4k^2b^2 - 4b^2(k+2)^2 = 4c^2(k^2 - k - 2) = 4c^2(k+1)(k-2) \leq 0$$

(Vì $k \in (-1; 2)$ nên theo định lý dấu của tam thức bậc hai thì $(k+1)(k-2) < 0$)

Do đó, theo định lý dấu của tam thức bậc hai, ta có $f(c+a) \geq 0$.

Bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $b = 0, a = t, b = -t$ và các hoán vị (t là một số dương).■

Đặc biệt, với $k = 0$ bất đẳng thức (2.1.6) trở thành một bài toán quen thuộc sau:

Bài toán 2.1.8 Cho a, b, c là các số đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right] \geq \frac{9}{2} \quad (2.1.8)$$

Bạn đọc có thể tìm được nhiều cách giải khác nhau của bài toán này trong các sách báo và cả trên Internet.

Bài toán 2.1.9 Cho các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $0 < a \leq a_k \leq b, k = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng:

$$i) (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \leq \frac{n^2(a^2 + b^2)}{2ab} \quad (2.1.9.1)$$

$$ii) \frac{A}{B^2} \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} \quad (2.1.9.2)$$

$$(\text{với } A = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}, B = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}).$$

Nhận xét. Với giả thiết là $0 < a \leq a_k \leq b, k = \overline{1, n}$, dựa vào định lý dấu của tam thức bậc hai, ta sẽ có $(a_k - a)(a_k - b) \leq 0$. Từ nhận xét này hãy thử vận dụng các phép biến đổi và các bất đẳng thức thông dụng để giải quyết bài toán.

Lời giải.

i) Theo định lý dấu của tam thức bậc hai, ta có:

$$a_k \in [a; b] \Leftrightarrow a_k^2 + ab \leq (a+b)a_k \Leftrightarrow a_k + ab \frac{1}{a_k} \leq a+b, k = \overline{1, n}$$

Thay k lần lượt bằng $1, 2, \dots, n$, ta được:

$$a_1 + ab \frac{1}{a_1} \leq a+b$$

$$a_2 + ab \frac{1}{a_2} \leq a+b$$

...

$$a_n + ab \frac{1}{a_n} \leq a+b$$

Cộng vế theo vế của n bất đẳng thức trên lại, ta có:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + ab \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \leq n(a+b) \quad (2.1.9.1.1)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + ab \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq 2\sqrt{ab(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)} \quad (2.1.9.1.2)$$

Từ (1.1.5.1.1) và (1.1.5.1.2) suy ra:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \leq \frac{n^2(a+b)^2}{4ab} \leq \frac{n^2(a^2 + b^2)}{2ab}$$

(Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$)

Bất đẳng thức (2.1.9.1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a = b$.

ii) Từ i) ta có: $a_k^2 - (a+b)a_k + ab \leq 0, k = \overline{1, n}$. Thay k lần lượt bằng $1, 2, \dots, n$, ta được:

$$a_1^2 - (a+b)a_1 + ab \leq 0$$

$$a_2^2 - (a+b)a_2 + ab \leq 0$$

...

$$a_n^2 - (a+b)a_k + ab \leq 0$$

Cộng vế theo vế của n bất đẳng thức trên lại, ta có:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - (a+b)(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + nab \leq 0 \quad (2.1.9.2.1)$$

Chia n ở cả hai vế của bất đẳng thức (2.1.9.2.1), bất đẳng thức trở thành:

$$A - (a+b)B + ab \leq 0 \Leftrightarrow (a+b)B \geq A + ab$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì:

$$A + ab \geq 2\sqrt{Aab}$$

Do đó, ta có:

$$(a+b)B \geq 2\sqrt{Aab} \Rightarrow (a+b)^2 \geq \frac{4A}{B^2}ab \Leftrightarrow \frac{A}{B^2} \leq \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

Bất đẳng thức (2.1.9.2) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a = b$. ■

Bài toán 2.1.10 Cho $2n$ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ thỏa mãn

$0 < m \leq \frac{b_i}{a_i} \leq M, i = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}{(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2} \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} \quad (2.1.10)$$

Lời giải. Vì $0 < m \leq \frac{b_i}{a_i} \leq M, i = \overline{1, n}$ nên theo định lý dấu của tam thức bậc hai ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{b_i}{a_i} - m\right) \left(\frac{b_i}{a_i} - M\right) &\leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b_i}{a_i}\right)^2 - (m+M)\frac{b_i}{a_i} + Mm \leq 0, i = \overline{1, n} \\ &\Leftrightarrow b_i^2 + Mma_i^2 \leq (m+M)a_ib_i, i = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Thay i lần lượt bằng $1, 2, \dots, n$, ta được:

$$b_1^2 + Mma_1^2 \leq (m+M)a_1b_1$$

$$b_2^2 + Mma_2^2 \leq (m+M)a_2b_2$$

...

$$b_n^2 + Mma_n^2 \leq (m+M)a_nb_n$$

Cộng vế theo vế của n bất đẳng thức trên lại, ta có:

$$(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) + Mm(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \leq (m+M)(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)$$

$$\Rightarrow [(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) + Mm(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)]^2 \leq (m+M)^2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

Mặt khác, áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$[(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) + Mm(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)]^2 \geq 4Mm(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

Do đó,

$$\frac{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}{(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2} \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}$$

Bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n = k \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n = mk = Mk \end{cases} \quad (k \neq 0). \blacksquare$

Và dưới đây là một cách phát biểu khác của **Bài toán 2.1.10** như sau:

Bài toán 2.1.11 Cho $2n$ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ thỏa mãn $0 < a \leq a_i \leq A, i = \overline{1, n}$ và $0 < b \leq b_i \leq B, i = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}{(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2} \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{ab}{AB}} + \sqrt{\frac{AB}{ab}} \right)^2 \quad (2.1.11)$$

Gợi ý. Để ý rằng, từ giả thiết bài toán, ta có $0 < \frac{b}{A} \leq \frac{b_i}{a_i} \leq \frac{B}{a}, i = \overline{1, n}$.

Khi này, bài toán quay trở về **Bài toán 2.1.10** với $M = \frac{B}{a}$ và $m = \frac{b}{A}$.

Bài toán 2.1.12(VMO 1986) Cho n bất phương trình::

$$4x^2 - 4a_ix + (a_i - 1)^2 \leq 0, \forall a_i \in \left[\frac{1}{2}; 5 \right], i = \overline{1, n}$$

Gọi x_i là nghiệm bất kỳ của bất phương trình tương ứng với tham số a_i . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + 1 \quad (2.1.12)$$

Lời giải. Ta có:

$$4x^2 - 4a_ix + (a_i - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a_i - \sqrt{2a_i - 1}}{2} \leq x \leq \frac{a_i + \sqrt{2a_i - 1}}{2}, \forall a_i \in \left[\frac{1}{2}; 5 \right], i = \overline{1, n}$$

Suy ra,

$$\frac{a_i - \sqrt{2a_i - 1}}{2} \leq x_i \leq \frac{a_i + \sqrt{2a_i - 1}}{2}, \forall a_i \in \left[\frac{1}{2}; 5 \right], i = \overline{1, n}$$

Mặt khác,

$$\frac{a_i - \sqrt{2a_i - 1}}{2} \geq 0 \Leftrightarrow a_i^2 \geq 2a_i - 1 \Leftrightarrow (a_i - 1)^2 \geq 0, \forall a_i \in \left[\frac{1}{2}; 5 \right], i = \overline{1, n} (\text{đúng})$$

$$\frac{a_i + \sqrt{2a_i - 1}}{2} \leq \frac{5 + \sqrt{2 \cdot 5 - 1}}{2} = 4, \forall a_i \in \left[\frac{1}{2}; 5 \right], i = \overline{1, n}$$

Nên

$$0 \leq x_i \leq 4 \Leftrightarrow x_i^2 \leq 4x_i, i = \overline{1, n}$$

(Theo định lý dấu của tam thức bậc hai)

Thay i lần lượt bằng $1, 2, \dots, n$, ta được:

$$x_1^2 \leq 4x_1$$

$$x_2^2 \leq 4x_2$$

...

$$x_n^2 \leq 4x_n$$

Cộng vế theo vế của n bất đẳng thức trên lại, ta có:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &\leq 4(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} + 4 &\leq \frac{4(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} + 4 \end{aligned}$$

Mà theo bất đẳng thức AM-GM, thì

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} + 4 \geq 4\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

Do đó,

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + 1$$

Bài toán được chứng minh. ■

Dạng 2: Sử dụng định lý đảo về dấu tam thức bậc hai trong chứng minh bất đẳng thức

Bài toán 2.2.1 Cho số thực dương a và số tự nhiên n ($n > 1$). Chứng minh rằng:

$$\frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2} > \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ dấu căn}} \quad (2.2.1)$$

Nhận xét. Ta thấy $\frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$ là một nghiệm của phương trình $f(t) = t^2 - t - a$. Hãy thử

chứng minh xem $f\left(\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ dấu căn}}\right)$ có nhỏ hơn 0 hay không?

Lời giải. Đặt $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, ..., $x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ dấu căn}}$.

Vì $a > 0$ nên $x_i > x_{i-1}$, $i = \overline{2, n}$. Từ cách đặt, ta có:

$$x_n^2 = a + x_{n-1} \Rightarrow x_n^2 < a + x_n \Leftrightarrow x_n^2 - x_n - a < 0 \quad (1.2.1.1)$$

Xét tam thức bậc hai: $f(t) = t^2 - t - a$ ($a > 0$) có hai nghiệm là

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{4a + 1}}{2} < \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2} = t_2.$$

Mặt khác, từ (1.3.1) ta có $f(x_n) < 0$. Do đó, theo định lý đảo về dấu tam thức bậc hai thì

$t_1 < x_n < t_2$ với t_1, t_2 là hai nghiệm của $f(t) = 0$ tức là:

$$x_n < \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$$

Bài toán được chứng minh. ■

Bài toán 2.2.2 Cho số thực dương $a_i \in [0; 1], i = \overline{1, n}$. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n + 1)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \quad (2.2.2)$$

Nhận xét. Bất đẳng thức này có thể giải bằng AM-GM với nhận xét $a_i \geq a_i^2, i = \overline{1, n}$. Tuy nhiên, ở đây mình xin trình bày cách giải bằng tam thức bậc hai.

Nhận thấy $(a_1 + a_2 + \dots + a_n + 1)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ có nét tương đồng với điều kiện có nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ là $b^2 \geq 4ac$. Hãy thử xem $(a_1 + a_2 + \dots + a_n + 1)$ là b , $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ là a hoặc c . Sau đó, hãy thử tìm một số α sao cho $f(\alpha) \leq 0$.

Lời giải. Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n + 1)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$. Do $x_i \in [0; 1], i = \overline{1, n}$ nên ta có $a_i \geq a_i^2, i = \overline{1, n}$.

Nên ta có $f(-1) = 1 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n + 1) \leq 0$. Vậy, theo định lý đảo về dấu tam thức bậc hai thì $f(x) = 0$ luôn có nghiệm hay:

$$\Delta_x = (a_1 + a_2 + \dots + a_n + 1)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n + 1)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi có duy nhất một số trong $a_1, a_2, \dots, a_n$ bằng 1 và $n - 1$ số còn lại bằng 0. ■

Bài toán 2.2.3 Chứng minh rằng nếu:

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0 \quad (m \neq 0)$$

Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng:

$$b^2 \geq 4ac \quad (2.2.3)$$

Lời giải. Với $ac \leq 0$, ta thấy bất đẳng thức (2.2.3) luôn đúng.

Với $ac > 0$. Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ta có:

$$\begin{aligned} f(0) &= c \\ f\left(\frac{m}{m+1}\right) &= \frac{m^2a}{(m+1)^2} + \frac{mb}{m+1} + c \end{aligned}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \cdot f\left(\frac{m}{m+1}\right) \cdot f(0) &= \left(\frac{ma}{(m+1)^2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m}\right) c \\ &= \left(\frac{ma}{(m+1)^2} - \frac{a}{m+2}\right) c = \frac{-ac}{(m+1)^2(m+2)} < 0 \end{aligned}$$

Do đó, $f\left(\frac{m}{m+1}\right) \cdot f(0) < 0$.

Suy ra, theo định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai, ta có $f(x) = 0$ luôn có nghiệm hay $b^2 \geq 4ac$. ■

Sau đây mình xin trình bày một lời giải khác của bài toán này, như sau:

Lời giải khác. Ta thấy với $ac = 0$ thì bất đẳng thức (2.2.3) luôn đúng.

Với $ac \neq 0$. Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Tương tự với lời giải trên, ta cũng tính $f(0)$, $f\left(\frac{m}{m+1}\right)$ và $f(1)$

Khi đó,

$$\begin{aligned} mf(1) + (m+1)^2 \cdot f\left(\frac{m}{m+1}\right) &= ma + mb + mc + m^2a + m(m+1)b + (m+1)^2c \\ &= m(m+1)a + m(m+2)b + mc + (m+1)^2c = -(m+2)(m+1)c + mc + (m+1)^2c = -c \\ &\Rightarrow f(0) \cdot \left[mf(1) + (m+1)^2 \cdot f\left(\frac{m}{m+1}\right) \right] = -c^2 < 0 \end{aligned}$$

Do đó, tồn tại ít nhất một trong hai số $f(0) \cdot f(1)$ và $f(0) \cdot f\left(\frac{m}{m+1}\right)$ nhỏ hơn 0.

Suy ra, theo định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai, ta có $f(x) = 0$ luôn có nghiệm hay $b^2 \geq 4ac$. ■

Nhận xét. Với cách giải này và nhận xét $(0; 1) \in [0; 1]$ và $\left(0; \frac{m}{m+1}\right) \in [0; 1]$ theo **Hệ quả 2.** của định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai, ta cũng có thể chỉ ra được $f(x)$ luôn có nghiệm thuộc $[0; 1]$.

Bài toán 2.2.4 Cho các số thực a, b, c, d, p, q thỏa mãn:

$$p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 0$$

Chứng minh rằng:

$$(p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \leq (pq - ac - bd)^2 \quad (2.2.4)$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta có:

$$(p^2 - a^2 - b^2) + (q^2 - c^2 - d^2) > 0$$

Suy ra, tồn tại ít nhất một trong hai số $(p^2 - a^2 - b^2)$ và $(q^2 - c^2 - d^2)$ dương.

Không mất tính tổng quát, giả sử $p^2 - a^2 - b^2 > 0 \Rightarrow p^2 > a^2 + b^2 \geq 0 \Rightarrow p \neq 0$.

Xét tam thức bậc hai

$$\begin{aligned} f(t) &= (p^2 - a^2 - b^2)t^2 - 2(pq - ac - bd)t + (q^2 - c^2 - d^2) \\ &= (pt - q)^2 - (at - c)^2 - (bt - d)^2 \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{q}{p}\right) &= -\left(a \cdot \frac{q}{p} - c\right)^2 - \left(b \cdot \frac{q}{p} - d\right)^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow (p^2 - a^2 - b^2)f\left(\frac{q}{p}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Do đó, theo định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai ta có $f(t) = 0$ luôn có nghiệm, tức là:

$$\Delta'_t = (pq - ac - bd)^2 - (p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \geq 0$$

Bài toán được chứng minh. ■

Bài toán 2.2.5 Cho các số thực a, b, c thỏa mãn:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$\begin{cases} -\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \leq b \leq \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \leq c \leq \frac{4}{3} \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Nhận xét. Bất đẳng thức $-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$ hay $\frac{16}{9} - x^2 \geq 0$ gọi cho ta đến Δ của tam thức bậc hai $f(t) = t^2 + \frac{4}{3}t + \frac{x^2}{4}$. Bằng định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai hãy thử chỉ ra $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $f(\alpha) \leq 0$.

Lời giải. Từ giả thiết:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 4 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -2 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các tam thức bậc hai sau:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{a^2}{4} \\ f_2(x) &= x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{b^2}{4} \\ f_3(x) &= x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{c^2}{4} \end{aligned}$$

Với $a + b + c = -2$, ta có:

$$f_1(a) + f_2(b) + f_3(c) = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + \frac{4(a + b + c)}{3} = 2 + \frac{2}{4} - \frac{4 \cdot 2}{3} = -\frac{1}{6} < 0$$

Do đó, luôn tồn tại ít nhất một trong ba số $f_1(a)$, $f_2(b)$, $f_3(c)$ nhỏ hơn hoặc bằng 0. Giả sử $f_1(a) \leq 0$.

Suy ra $f_1(x) = 0$ luôn có nghiệm theo định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai hay

$$\Delta_1 = \frac{16}{9} - a^2 \geq 0 \text{ hay } -\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{4}{3}.$$

Tương tự,

Với $a + b + c = 2$, ta có:

$$f_1(-a) + f_2(-b) + f_3(-c) = -\frac{1}{6} < 0$$

Do đó, luôn tồn tại ít nhất một trong ba số $f_1(-a)$, $f_2(-b)$, $f_3(-c)$ nhỏ hơn hoặc bằng 0. Giả sử $f_1(-a) \leq 0$.

Suy ra $f_1(x) = 0$ luôn có nghiệm theo định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai hay

$$\Delta_1 = \frac{16}{9} - a^2 \geq 0 \text{ hay } -\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{4}{3}.$$

Bài toán được chứng minh. ■

Bài toán 2.2.6 Cho các số thực a, b, c . Chứng minh rằng nếu tồn tại số thực m sao cho $|am^2 + c| \leq |bm|$ thì ta có bất đẳng thức đúng sau:

$$b^2 \geq 4ac \quad (2.2.6)$$

Lời giải. Với $ac = 0$ bất đẳng thức (2.2.6) luôn đúng.

Với $ac \neq 0$, ta có:

$$|am^2 + c| \leq |bm| \Leftrightarrow (am^2 - bm + c)(am^2 + bm + c) \leq 0$$

Xét tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Khi đó, ta có: $f(m)f(-m) \leq 0$.

Do đó, theo định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai, ta có $f(x) = 0$ luôn có nghiệm hay $b^2 \geq 4ac$.

Bài toán được chứng minh. ■

3 Sử dụng nguyên lý Dirichlet để chứng minh bất đẳng thức

3.1 Nguyên lý Dirichlet và ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức

3.1.1 Cơ sở lý thuyết

Nguyên lý Dirichlet, được phát biểu đầu tiên bởi nhà toán học Pháp P. L. Dirichlet (1805 – 1859) như sau:

"Nếu nhốt $n + 1$ chú thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có 2 con thỏ bị nhốt vào cùng một chuồng"

Dựa vào nguyên lý Dirichlet, ta có nhận xét sau:

Cho ba số $x = a - k$, $y = b - k$, $z = c - k$ (với a, b, c là ba biến số và k là số thực bất kỳ), ta luôn tìm được trong ba số x, y, z cùng lớn hơn hoặc bằng 0 hay nhỏ hơn hoặc bằng 0.

Không mất tính tổng quát giả sử hai số đó là x và y .

Lúc đó, ta có: $xy \geq 0$ hay $(a - k)(b - k) \geq 0$

Hơn nữa, với $n(n \geq 3)$ số $x_i = a_i - k, i = \overline{1, n}$ luôn tồn tại hai số $x_i, x_j (i \neq j \text{ và } i, j \in [1; n])$ sao cho $x_i \cdot x_j \geq 0$.

Vậy, để hiểu rõ hơn về ứng dụng trên của nguyên lý Dirichlet trong chứng minh các bài toán bất đẳng thức, chúng ta xét các ví dụ sau.

3.1.2 Một số bài toán

Bài toán 3.1.1 Cho các số thực a, b, c . Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2c^2 + 2 \geq 2(ab + bc + ca) \quad (3.1.1)$$

Phân tích. Nhận thấy đây là một bất đẳng thức đối xứng. Đẳng thức xảy ra khi

$a^2 = b^2 = c^2 = 1$ Theo nguyên lý Dirichlet thì hai trong ba số $a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1$ có ít nhất hai số cùng lớn hơn hoặc bằng hay nhỏ hơn hoặc bằng 1. Mặt khác do tính đối xứng nên có thể giả sử hai số đó là $(a^2 - 1), (b^2 - 1)$. Lúc này, ta có:

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 b^2 \geq a^2 + b^2 - 1 \quad (3.1.1.1)$$

Ta đã thấy chút nét tương đồng giữa hai bất đẳng thức (3.1.1.1) và (3.1.1).

Đến đây, bạn đọc chắc cũng đã nắm chút ít về lối tư duy của phương pháp này.

Lời giải. Theo nguyên lý Dirichlet thì hai trong ba số $a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1$ có ít nhất hai số cùng lớn hơn hoặc bằng hay nhỏ hơn hoặc bằng 1 nên có thể giả sử hai số đó là $(a^2 - 1), (b^2 - 1)$.

Lúc này, ta có:

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 b^2 \geq a^2 + b^2 - 1 \Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq a^2 c^2 + b^2 c^2 - c^2$$

Suy ra,

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2 b^2 c^2 + 2 \geq a^2 c^2 + b^2 c^2 + a^2 + b^2 + 2$$

Bây giờ cần chứng minh

$$a^2 c^2 + b^2 c^2 + a^2 + b^2 + 2 \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow (ac - 1)^2 + (bc - 1)^2 + (a - b)^2 \geq 0$$

Đây là một bất đẳng thức đúng.

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (a^2 - 1)(b^2 - 1) = 0 \\ a = b \\ ac = bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = -1 \\ a = b = c = 1 \end{cases} \blacksquare$$

Từ đây, ta rút ra phương pháp vận dụng nguyên lý Dirichlet trong chứng minh bất đẳng thức như sau:

- Xét bất đẳng thức đối xứng có dạng $f_1(a, b, c) \geq f_2(a, b, c)$ với đẳng thức xảy ra khi có ít nhất hai số bằng nhau và bằng k (k là một hằng số). Theo giả định này, ta sẽ tìm cách liên hệ bất đẳng thức $f_1(a, b, c) \geq f_2(a, b, c)$ với một bất đẳng thức đúng có chứa các số $a - k, b - k, c - k$.
- Dựa vào nguyên lý Dirichlet ta nhận thấy rằng trong ba số $a - k, b - k, c - k$ luôn có hai số cùng lớn hơn hoặc bằng 0 hay cùng nhỏ hơn hoặc bằng 0, tức là tích của hai số này không âm.
- Mặt khác, do tính đối xứng, ta hoàn toàn có thể giả sử tích của hai số bất kỳ trong ba số không âm. Từ nhận định đó, ta có thể suy ra được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bây giờ hãy thử sức với các bài toán sau.

Bài toán 3.1.2 Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca) \quad (3.1.2)$$

Gợi ý. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Hãy thử sử dụng nguyên lý Dirichlet cho ba số $a - 1, b - 1, c - 1$.

Bài toán 3.1.3 Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1) \quad (3.1.3)$$

Gợi ý. Sử dụng bất đẳng thức (3.1.2)

Ta thấy việc sử dụng nguyên lý Dirichlet trong chứng minh bất đẳng thức đạt hiệu quả khá cao. Đặc biệt, đối với các bất đẳng thức không đồng bậc khi mà việc sử dụng các bất đẳng thức thông dụng không mấy hiệu quả thì việc vận dụng hợp lý nguyên lý Dirichlet cùng với một số biến đổi và các bất đẳng thức thông dụng giúp cho ta giải quyết khá "gọn gàng" bài toán. Sau đây, bằng phương pháp này hãy cùng đến với các bài toán trong các kì thi học sinh giỏi và Olympic trong nước cũng như trên thế giới.

Bài toán 3.1.4(APMO 2004) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca) \quad (3.1.4)$$

Lời giải. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8 + a^2b^2c^2 \geq 9(ab + bc + ca)$$

Dựa vào bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2c^2 + 2 \geq 2(ab + bc + ca) \quad (3.1.1)$$

Bây giờ ta cần chứng minh:

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 6 \geq 7(ab + bc + ca) \quad (3.1.4.1)$$

Thực ra bất đẳng thức (3.1.4.1) được suy ra từ hai kết quả quen thuộc sau:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 \geq 2(ab + bc + ca)$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. ■

Ta cũng có một kết quả mạnh hơn của **Bài toán 3.1.4** như sau.

Bài toán 3.1.5 Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2 \quad (3.1.5)$$

Bài toán 3.1.6(Ninh Thuận, 2014) *Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng:*

$$xyz + x^2 + y^2 + z^2 + 5 \geq 3(x + y + z) \quad (3.1.6)$$

Lời giải. Ta thấy trong ba số thực dương $x; y; z$ luôn tồn tại hai số cùng nhỏ hơn hay bằng 1 hoặc lớn hơn hay bằng 1. Giả sử đó là x và y . Khi đó ta có:

$$(x - 1)(y - 1) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq x + y - 1 \Rightarrow xyz \geq zx + yz - z$$

Do đó,

$$xyz + x^2 + y^2 + z^2 + 5 \geq zx + yz - z + x^2 + y^2 + z^2 + 5$$

Nên bây giờ ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} &zx + yz - z + x^2 + y^2 + z^2 + 5 \geq 3(x + y + z) \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{2}(x + z - 2)^2 + \frac{1}{2}(y + z - 2)^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - (x + y) + 1 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1.6.1)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 1 \geq \frac{1}{4}(x + y)^2 + 1 \geq x + y$$

Nên (3.1.6.1) đúng.

Bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. ■

Từ bài toán này ta có thể suy ra được bất đẳng thức sau:

Bài toán 3.1.7 *Cho các số thực dương x, y, z và hằng số k ($k \geq 0$). Ta có bất đẳng thức sau:*

$$xyz + (k + 1)(x^2 + y^2 + z^2) + 5 + 3k \geq (3 + 2k)(x + y + z) \quad (3.1.7)$$

Thực ra bất đẳng thức này được xây dựng từ bất đẳng thức (3.1.6) và các bất đẳng thức sau:
 $x^2 + 1 \geq 2x, y^2 + 1 \geq 2y, z^2 + 1 \geq 2z$.

Đặc biệt, trong đề thi **Hello IMO, 2007**, hằng số $k = 1$. Bài toán như sau:

Bài toán 3.1.8(Hello IMO, 2007) *Cho các số thực dương x, y, z và hằng số k ($k \geq 0$). Chứng minh rằng:*

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z) \quad (3.1.8)$$

Bài toán 3.1.9(USA 2001) *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng:*

$$ab + bc + ca - abc \leq 2 \quad (3.1.9)$$

Lời giải. Dựa vào nguyên lý Dirichlet, ta thấy trong ba số $a - 1, b - 1, c - 1$ luôn tồn tại hai số có tích không âm. Giả sử hai số này là $a - 1, b - 1$. Khi đó ta có:

$$(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a + b - 1 \Rightarrow abc \geq ac + bc - c$$

Do đó,

$$ab + bc + ca - abc \leq ab + c \quad (3.1.9.1)$$

Mặt khác, từ đẳng thức bài cho. Kết hợp sử dụng BĐT AM-GM, ta có:

$$4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 2ab + c^2 + abc \Leftrightarrow 4 - c^2 \geq ab(2 + c) \Rightarrow 2 - c \geq ab \Leftrightarrow 2 \geq ab + c \quad (3.1.9.2)$$

Từ (3.1.9.1) và (3.1.9.2) ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} (a-1)(b-1) = 1 \\ a = b \\ ab + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \blacksquare$$

Bài toán 3.1.10(UK TST 2005) *Cho các số thực dương a, b, c sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a+3}{(a+1)^2} + \frac{b+3}{(b+1)^2} + \frac{c+3}{(c+1)^2} \geq 3 \quad (3.1.10)$$

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh hai bổ đề sau.

Bổ đề 1.

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{a+b+c+1} \geq 1 \quad (3.1.10.1)$$

Chứng minh. Dựa vào nguyên lý Dirichlet, ta thấy trong ba số $a-1, b-1, c-1$ luôn có hai số có tích không âm. Giả sử đúng là $a-1, b-1$. Khi đó ta có:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Rightarrow ab+abc \geq a+b \Rightarrow \frac{c+1}{c} \geq a+b$$

Do đó, theo bất đẳng thức AM-GM thì:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{2}{(a+1)(b+1)} = \frac{2}{ab+1+a+b} \geq \frac{1}{ab+1} = \frac{c}{c+1}$$

Suy ra,

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{a+b+c+1} \geq \frac{c}{c+1} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{\frac{c+1}{c} + c + 1}$$

Mà,

$$\frac{c}{c+1} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{\frac{c+1}{c} + c + 1} = \frac{c(c+1)}{(c+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{c}{(c+1)^2} = 1$$

Nên **Bổ đề 1** được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bổ đề 2.

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{2}{a+b+c+1} + 1 \quad (3.1.10.2)$$

Chứng minh. Ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
(2.1.8.2) &\Leftrightarrow \frac{(a+1)(b+1) + (c+1)(a+1) + (b+1)(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq \frac{2}{a+b+c+1} + 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca+2(a+b+c)+3}{abc+a+b+c+ab+bc+ca+1} \geq \frac{2}{a+b+c+1} + 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca+a+b+c+2+a+b+c+1}{a+b+c+ab+bc+ca+2} \geq \frac{2}{a+b+c+1} + 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{a+b+c+1}{a+b+c+ab+bc+ca+2} \geq \frac{2}{a+b+c+1} \\
&\Leftrightarrow (a+b+c+1)^2 \geq 2(a+b+c+ab+bc+ca+2) \\
&\Leftrightarrow (a+b)^2 + (c+1)^2 + 2(a+b)(c+1) \geq 2(a+b+c+ab+bc+ca+2) \\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3
\end{aligned}$$

Đây là một bất đẳng thức đúng theo AM-GM với $abc = 1$.

Vậy **Bổ đề 2** được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Áp dụng vào bài toán. Từ hai bổ đề trên, suy ra:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{2}{(a+1)^2} + \frac{2}{(b+1)^2} + \frac{2}{(c+1)^2} + \frac{2}{a+b+c+1} &\geq \frac{2}{a+b+c+1} + 1 + 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{a+3}{(a+1)^2} + \frac{b+3}{(b+1)^2} + \frac{c+3}{(c+1)^2} \geq 3
\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. ■

Sau đây, bằng phương pháp sử dụng định lý dấu của tam thức bậc hai và nguyên lý Dirichlet, hãy thử sức với mở rộng của **Bài toán 3.1.6** (Ninh Thuận, 2014) như sau:

Bài toán 3.1.11 (Nguyễn Văn Huyện) *Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng với mọi số thực $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, bất đẳng thức sau luôn đúng:*

$$k(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 3k + 2 \geq (2k+1)(a+b+c) \quad (3.1.11)$$

Lời giải. Dựa vào nguyên lý Dirichlet, ta thấy trong ba số $a-1, b-1, c-1$ luôn tồn tại hai số có tích không âm. Giả sử hai số này là $a-1, b-1$. Khi đó ta có:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a+b-1$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$

Do đó,

$$k(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 3k + 2 \geq k \left[\frac{(a+b)^2}{2} + c^2 \right] + (a+b-1)c + 3k + 2$$

Bây giờ ta cần chứng minh

$$k \left[\frac{(a+b)^2}{2} + c^2 \right] + (a+b-1)c + 3k + 2 - (2k+1)(a+b+c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2k\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2(c-2k-1)\frac{a+b}{2} + c^2k - 2ck - 2c + 2 + 3k \geq 0$$

Ta thấy $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ là một tam thức bậc hai có hệ số của $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ là $2k > 0, \forall k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ và có biệt thức

$$\begin{aligned} \Delta_{\frac{a+b}{2}} &= (c-2k-1)^2 - 2k(c^2k - 2ck - 2c + 2 + 3k) \\ &= c^2 + 4k^2 + 1 - 4ck + 4k - 2c - 2c^2k^2 + 4ck^2 + 4ck - 4k - 6k^2 \\ &= -(2k^2c^2 - c^2 - 4k^2 + 2c + 2k^2 - 1) = -(c-1)^2(2k^2 - 1) \leq 0 \\ &\quad (\text{Vì } 2k^2 \geq 2 \cdot \frac{1}{2} = 1) \end{aligned}$$

Vì thế, theo định lý dấu của tam thức bậc hai, ta có $f(t) \geq 0$.

Bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. ■

Bài toán 3.1.12(mathlinks.ro) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + abc)(b^2 + c^2 + abc)(c^2 + a^2 + abc) \geq 3abc(a + b + c)^2 \quad (3.1.12)$$

Nhận xét. Bài toán này có "điểm rơi" tại $a = b = c = 1$ nhưng chúng ta không thể sử dụng nguyên lý Dirichlet cho ba số $a^k - 1, b^k - 1, c^k - 1 (k \neq 0)$ một cách đơn thuần được. Hãy đến với lời giải sau.

Lời giải.

Dựa vào nguyên lý Dirichlet, ta thấy trong ba số $a^2 - abc, b^2 - abc, c^2 - abc$ luôn tồn tại hai số có tích không âm. Giả sử hai số này là $a^2 - abc, b^2 - abc$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} (a^2 - abc)(b^2 - abc) &\geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2 + a^2b^2c^2 \geq a^3bc + ab^3c \\ \Leftrightarrow a^2b^2 + c^2a^2 + a^3bc + ab^3c + 2abc^3 + c^4 + b^2c^2 + a^2b^2c^2 &\geq c^2a^2 + b^2c^2 + c^4 + 2a^3bc + 2ab^3c + 2abc^3 \\ \Leftrightarrow (c^2 + a^2 + abc)(b^2 + c^2 + abc) &\geq (a^2 + b^2 + c^2)(c^2 + 2abc) \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$(c^2 + abc + abc)(abc + a^2 + b^2) \geq abc(a + b + c)^2$$

Và từ giả thiết ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Do đó,

$$(a^2 + b^2 + abc)(b^2 + c^2 + abc)(c^2 + a^2 + abc) \geq 3abc(a + b + c)^2$$

Bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. ■

Bài toán 3.1.13 Cho các số thực dương a, b, c . Đặt

$$x = a + \frac{1}{b}, y = b + \frac{1}{c}, z = c + \frac{1}{a}$$

Chứng minh ta có bất đẳng thức đúng sau:

$$(x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1) \geq 3 \quad (3.1.13)$$

Gợi ý. Bất đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$ tức là $x = y = z = 2$.

Ta có bất đẳng thức (3.1.13) tương đương với $xy + yz + zx \geq 2(x + y + z)$.

Hãy thử áp dụng nguyên lý Dirichlet cho ba số $x-2, y-2, z-2$ sau đó sử dụng một số biến đổi và các bất đẳng thức thông dụng để hoàn thiện bài toán.

Bài toán 3.1.14(Võ Quốc Bá Cẩn) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c , ta có:

$$(a^2 + 3)(b^2 + 3)(c^2 + 3) \geq 4(a + b + c + 1)^2 \quad (3.1.14)$$

Gợi ý. Đẳng thức của bất đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ suy ra $a^2 - 1 = b^2 - 1 = c^2 - 1 = 0$.

Để ý rằng ta có đẳng thức đúng sau:

$$(x^2 + 3)(y^2 + 3) = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 4(x^2 + y^2 + 2)$$

Hãy thử sử dụng nguyên lý Dirichlet cho ba số $a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1$, sau đó sử dụng đẳng thức trên rồi hoàn thiện bài toán.

Bài toán 3.1.15(Việt Nam TST 2005) Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^3 + \left(\frac{y}{y+z}\right)^3 + \left(\frac{z}{z+x}\right)^3 \geq \frac{3}{8} \quad (3.1.15)$$

Gợi ý. Đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z}$ suy ra $a, b, c > 0, abc = 1$

Đẳng thức của bất đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ hay $a = b = c = 1$.

Bất đẳng thức (3.1.15) tương đương với:

$$\left(\frac{1}{1+a}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+b}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+c}\right)^3 \geq \frac{3}{8}$$

Bằng nguyên lý Dirichlet, ta có thể giả sử:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow 2(ab+1) \geq (a+1)(b+1)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì:

$$\left(\frac{1}{1+a}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+b}\right)^3 + \frac{1}{8} \geq \frac{3}{2(a+1)(b+1)} \geq \frac{3}{4(ab+1)} = \frac{3c}{4(c+1)}$$

Công việc còn lại không mấy khó khăn, mình xin dành cho bạn đọc.

Sau đây, mình xin trình bày một ứng dụng nữa của việc sử dụng nguyên lý Dirichlet để chứng minh bất đẳng thức nhưng những bất đẳng thức này được cho thêm các điều kiện của tổng các biến nên cũng phần nào "chặt" hơn.

3.2 Sử dụng nguyên lý Dirichlet kết hợp điều kiện của tổng các biến

3.2.1 Cơ sở lý thuyết

Tương tự ở phần trước, dựa vào nguyên lý Dirichlet ta luôn tìm được trong ba số $a - k, b - k, c - k$ (k là hằng số) hai số cùng lớn hơn hoặc bằng 0 hay nhỏ hơn hoặc bằng 0. Giả sử hai số đó là $a - k$ và $b - k$. Khi đó,

$$\begin{aligned}(a - k)(b - k) \geq 0 &\Leftrightarrow 2(a - k)(b - k) + k^2 + (a + b - k)^2 \geq k^2 + (a + b - k)^2 \\ &\Leftrightarrow k^2 + (a + b - k)^2 \geq k^2 + (a + b - k)^2 - 2(a - k)(b - k) = a^2 + b^2\end{aligned}$$

Như thế, nếu một bất đẳng thức cho điều kiện $a + b + c = S$ và đẳng thức xảy ra khi có ít nhất hai biến bằng nhau và bằng k thì bằng nhận xét ở trên, ta sẽ có:

$$a^2 + b^2 \leq k^2 + (b + c - k)^2 = k^2 + (S - c - k)^2$$

Bằng đánh giá này, bài toán của ta sẽ được quy về một biến và công việc còn lại sẽ không còn mấy khó khăn nữa.

Với phương pháp này, hãy cùng xét các bài toán sau.

3.2.2 Một số bài toán

Bài toán 3.2.1 Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10} \quad (3.2.1)$$

Nhận xét. Đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Do đó, bằng nguyên lý Dirichlet, ta có thể giả sử $\left(a - \frac{1}{3}\right)\left(b - \frac{1}{3}\right) \geq 0$ suy ra được

$$a^2 + b^2 \leq \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - c\right)^2.$$

Việc còn lại của ta là làm xuất hiện $a^2 + b^2$ bằng cách thêm bớt và sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz một cách hợp lý.

Lời giải. Ta có bất đẳng thức (3.2.1) tương đương với:

$$\begin{aligned}&\frac{2a}{a^2 + 1} + \frac{2b}{b^2 + 1} + \frac{2c}{c^2 + 1} \leq \frac{18}{10} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{a}{a^2 + 1} + 1 - \frac{b}{b^2 + 1} + 1 - \frac{c}{c^2 + 1} \geq \frac{6}{5} \\ &\Leftrightarrow \frac{(a - 1)^2}{a^2 + 1} + \frac{(b - 1)^2}{b^2 + 1} + \frac{(c - 1)^2}{c^2 + 1} \geq \frac{6}{5}\end{aligned}$$

Theo nguyên lý Dirichlet, ta có thể giả sử:

$$\left(a - \frac{1}{3}\right)\left(b - \frac{1}{3}\right) \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - c\right)^2$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì:

$$\frac{(a-1)^2}{a^2+1} + \frac{(b-1)^2}{b^2+1} \geq \frac{(a+b-2)^2}{a^2+b^2+2} \geq \frac{(1+c)^2}{\frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - c\right)^2} = \frac{9(1+c)^2}{23-12c+9c^2}$$

Bây giờ, ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & \frac{9(1+c)^2}{23-12c+9c^2} + \frac{(c-1)^2}{c^2+1} \geq \frac{6}{5} \\ \Leftrightarrow & \frac{9(1+c)^2}{23-12c+9c^2} \geq \frac{1+10c+c^2}{5(1+c^2)} \\ \Leftrightarrow & 11-64c+89c^2+6c^3+18c^4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (3c-1)^2(2c^2+2c+11) \geq 0 \end{aligned}$$

Đây là một bất đẳng thức luôn đúng với $\forall c \in \mathbb{R}$.

Bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. ■

Bài toán 3.2.2 Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{5a^2-4a+11} + \frac{1}{5b^2-4b+11} + \frac{1}{5c^2-4c+11} \leq \frac{1}{4} \quad (3.2.2)$$

Lời giải. Ta có bất đẳng thức (3.2.2) tương đương với:

$$\begin{aligned} & \frac{51}{25a^2-20a+55} + \frac{51}{25b^2-20b+55} + \frac{51}{25c^2-20c+55} \leq \frac{51}{20} \\ \Leftrightarrow & 1 - \frac{51}{25a^2-20a+55} + 1 - \frac{51}{25b^2-20b+55} + \frac{51}{25c^2-20c+55} \geq \frac{51}{25c^2-20c+55} - \frac{11}{20} \\ \Leftrightarrow & \frac{(5a-2)^2}{25a^2-20a+55} + \frac{(5b-2)^2}{25b^2-20b+55} \geq \frac{83+44c-55c^2}{100c^2-80c+220} \end{aligned}$$

Theo nguyên lý Dirichlet, ta có thể giả sử:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 1 + (2-c)^2$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì:

$$\begin{aligned} & \frac{(5a-2)^2}{25a^2-20a+55} + \frac{(5b-2)^2}{25b^2-20b+55} \geq \frac{(5a+5b-4)^2}{25(a^2+b^2)-20(a+b)+110} \\ & \geq \frac{(11-5c)^2}{25+25(2-c)^2+50+20c} = \frac{(11-5c)^2}{25c^2-80c+175} \end{aligned}$$

Bây giờ, ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & \frac{(11-5c)^2}{25c^2-80c+175} \geq \frac{83+44c-55c^2}{100c^2-80c+220} \\ \Leftrightarrow & \frac{(c-1)^2(775c^2-2150c+2419)}{(5c^2-16c+35)(5c^2-4c+11)} \geq 0 \end{aligned}$$

Đây là một bất đẳng thức luôn đúng với $\forall c \in \mathbb{R}$.

Bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 3.2.3 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c , ta có bất đẳng thức đúng sau:

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geq \frac{3}{5} \quad (3.2.3)$$

Lời giải. Do bất đẳng thức (3.2.3) thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa $a+b+c=1$.

Khi đó, bất đẳng thức (3.2.3) trở thành:

$$\frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1} + \frac{(1-2b)^2}{2b^2-2b+1} + \frac{(1-2c)^2}{2c^2-2c+1} \geq \frac{3}{5}$$

Theo nguyên lý Dirichlet, ta có thể giả sử:

$$\left(a - \frac{1}{3}\right) \left(b - \frac{1}{3}\right) \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - c\right)^2$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì:

$$\frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1} + \frac{(1-2b)^2}{2b^2-2b+1} \geq \frac{(2-2a-2b)^2}{2(a^2+b^2)-2(a+b)+2} \geq \frac{4c^2}{\frac{2}{9} + 2\left(\frac{2}{3} - c\right)^2 + 2c} = \frac{18c^2}{9c^2-3c+5}$$

Bây giờ, ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} \frac{18c^2}{9c^2-3c+5} + \frac{(1-2c)^2}{2c^2-2c+1} &\geq \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow (3a-1)^2(17a^2-8a+5) &\geq 0 \end{aligned}$$

Đây là một bất đẳng thức luôn đúng với $\forall c \in \mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Hưởng - Tăng Hải Tuân, *Công phá bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [2] Võ Quốc Bá Cẩn - Trần Quốc Anh, *Sử dụng Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm.
- [3] Nguyễn Vũ Thanh, *Bất đẳng thức*, Nhà xuất bản tổng hợp Đồng Tháp, 1993.
- [4] *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam - Bộ Giáo dục và Đào tạo.
- [5] Diễn đàn Toán học VMF - diendantoanhoc.net