

CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

BẤT ĐẲNG THỨC

ĐIỂM RƠI VÀ KỸ THUẬT CHỨNG MINH

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$a, b, x, y \in \mathbb{R}$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$a, b \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$a, b \geq 0$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

$a, b, c \geq 0$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$x > 0$

Mai Thành Luân (Semiconductor Engineer)

SĐT / ZALO 0854070701

TIKTOK Bao Đậu Bách Khoa (IC Design)

MỤC LỤC

Lời nói đầu	4
Chương 1. Đại cương và kỹ thuật biến đổi tương đương	5
A. Kiến thức trọng tâm	5
B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa	8
C. Bài tập có lời giải	13
Chương 2. Bất đẳng thức AM–GM và kỹ thuật điểm rơi	24
A. Kiến thức trọng tâm	24
B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa	26
C. Bài tập có lời giải	34
Chương 3. Kỹ thuật tách, ghép và thêm bớt trong AM–GM	44
A. Kiến thức trọng tâm	44
B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa	46
C. Bài tập có lời giải	52
Chương 4. Kỹ thuật Cauchy ngược dấu	63
A. Kiến thức trọng tâm	63
B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa	64
C. Bài tập có lời giải	71
Chương 5. Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz và dạng Engel	83
A. Kiến thức trọng tâm	83
B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa	85
C. Bài tập có lời giải	92
Chương 6. Phương pháp phản chứng và nguyên lý Dirichlet	103
A. Kiến thức trọng tâm	103
B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa	104
C. Bài tập có lời giải	110
Chương 7. Kỹ thuật hệ số bất định U.C.T	120
A. Kiến thức trọng tâm	120
B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa	122
C. Bài tập có lời giải	130
Chương 8. Bất đẳng thức Schur và phương pháp p, q, r	140
A. Kiến thức trọng tâm	140
B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa	143
C. Bài tập có lời giải	151
Chương 9. Kỹ thuật phân tích bình phương S.O.S	164
A. Kiến thức trọng tâm	164
B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa	168
C. Bài tập có lời giải	175

Chương 10. Ứng dụng đạo hàm: phương pháp tiếp tuyến và dồn biến **187**

A. Kiến thức trọng tâm 187

B. Kỹ thuật và ví dụ minh hoạ 190

C. Bài tập có lời giải 199

Phụ lục. Sổ tay bất đẳng thức và bổ đề **212**

LỜI NÓI ĐẦU

VÌ SAO BẤT ĐẲNG THỨC KHÓ

Bất đẳng thức là một trong những nội dung khó nhất của chương trình bồi dưỡng học sinh giỏi. Khó không phải vì thiếu công cụ: bất đẳng thức AM–GM, bất đẳng thức Cauchy–Schwarz hay bất đẳng thức Schur đều có thể phát biểu gọn trong vài dòng. Khó là vì cùng một bài toán chấp nhận rất nhiều đường đi, mà phần lớn các đường ấy dẫn tới ngõ cụt sau vài bước biến đổi.

Kinh nghiệm giảng dạy cho thấy phần lớn các ngõ cụt ấy có chung một nguyên nhân: người giải sử dụng một đánh giá trung gian làm mất dấu đẳng thức. Khi một đánh giá trung gian đạt dấu đẳng thức tại những bộ giá trị khác với bộ giá trị làm cho bất đẳng thức ban đầu trở thành đẳng thức, chuỗi đánh giá sẽ cho một kết quả yếu hơn điều cần chứng minh, và mọi cố gắng tiếp tục theo chuỗi ấy đều không dẫn tới kết luận.

Khi bài toán có khả năng đạt dấu đẳng thức, việc dự đoán trước *điểm rơi* — bộ giá trị của các biến làm cho dấu đẳng thức xảy ra — nên là một trong những bước đầu tiên, trước khi chọn công cụ đánh giá.

Cần nói thêm rằng *điểm rơi* là thuật ngữ sư phạm quen dùng trong tài liệu tiếng Việt và được giữ lại trong sách này; nó tương ứng với khái niệm trường hợp dấu đẳng thức (*equality case*) của tài liệu quốc tế, chứ không phải một thuật ngữ đã được chuẩn hoá.

Hai lưu ý kèm theo

Nguyên tắc trên cần được hiểu kèm hai lưu ý.

- **Thứ nhất.** Một bài toán có thể có nhiều điểm rơi: do tính thuần nhất, các điểm rơi thường lập thành cả một họ tỉ lệ; cũng có bài mà dấu đẳng thức xảy ra tại nhiều bộ giá trị rời nhau. Vì vậy, đối tượng cần xác định nói cho đủ là *tập điểm rơi* (còn gọi là *họ dấu đẳng thức*) của bài toán, và trong sách, cụm từ *điểm rơi* được hiểu theo nghĩa ấy.
- **Thứ hai.** Có những bài toán không có điểm rơi nào: với bất đẳng thức nghiêm, hoặc với bài toán mà cần tìm không đạt được, thay cho việc tìm điểm rơi ta phải khảo sát đáng điệu của biểu thức trên biên miền xác định cùng các giới hạn của nó.

PHÂN TÍCH TRƯỚC, LỜI GIẢI SAU

Toàn bộ cuốn sách này được tổ chức quanh nguyên tắc ấy. Trong mỗi ví dụ, phần **Phân tích** luôn đi trước phần **Lời giải**: ở đó chúng tôi dự đoán điểm rơi, lập sơ đồ điểm rơi khi cần, và chỉ ra vì sao một đánh giá cụ thể được chọn. Chỉ sau khi đường đi đã rõ, phần tính toán mới được trình bày đầy đủ.

Mai Thành Luân

CHƯƠNG 1

Đại cương và kỹ thuật biến đổi tương đương

01

Từ định nghĩa hiệu không âm đến các hằng bất đẳng thức nền, kỹ thuật tách tổng bình phương và thói quen dự đoán điểm rơi trước khi tính toán.

A. Kiến thức trọng tâm

Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Cho hai biểu thức A và B . Theo định nghĩa,

$$A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0, \quad A > B \Leftrightarrow A - B > 0.$$

Từ định nghĩa suy ra các tính chất được dùng thường xuyên sau đây, với a, b, c, d là các số thực.

- **Bắc cầu.** Nếu $a \geq b$ và $b \geq c$ thì $a \geq c$.
- **Cộng một số vào hai vế.** $a \geq b \Leftrightarrow a + c \geq b + c$.
- **Nhân hai vế với một số.** Nếu $c > 0$ thì $a \geq b \Leftrightarrow ac \geq bc$; nếu $c < 0$ thì $a \geq b \Leftrightarrow ac \leq bc$. Phép nhân với số âm làm đổi chiều bất đẳng thức.
- **Cộng vế theo vế.** Nếu $a \geq b$ và $c \geq d$ thì $a + c \geq b + d$. Không được trừ vế theo vế hai bất đẳng thức cùng chiều.
- **Nhân vế theo vế.** Nếu $a \geq b \geq 0$ và $c \geq d \geq 0$ thì $ac \geq bd$.
- **Luỹ thừa và căn.** Nếu $a \geq b \geq 0$ thì $a^n \geq b^n$ và $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$ với mọi số nguyên dương n .
- **Nghịch đảo.** Nếu $a \geq b > 0$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Bốn dạng đích của phép biến đổi tương đương

Giả sử cần chứng minh $A \geq B$. Tư tưởng của phương pháp biến đổi tương đương là đưa bất đẳng thức đó về một bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Bốn dạng đích thường gặp là:

- **Dạng hiệu không âm.** $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$, rồi chỉ ra $A - B$ là một biểu thức không âm.
- **Dạng tổng bình phương.** $A - B = mX^2 + nY^2 + kZ^2$ với m, n, k là các số dương. Đây là dạng đích quan trọng nhất của chương.
- **Dạng tích các thừa số cùng dấu.** $A - B = X \cdot Y$ với X, Y cùng dấu, hoặc $A - B = X^{2n} \cdot Y$ với $Y \geq 0$.
- **Dạng khai thác điều kiện ràng buộc.** Nếu giả thiết cho $x, y, z \in [\alpha; \beta]$ thì các bất đẳng

thức sau luôn đúng và thường được dùng làm điểm xuất phát:

$$(x - \alpha)(x - \beta) \leq 0, \quad (x - \alpha)(y - \alpha)(z - \alpha) \geq 0, \quad (\beta - x)(\beta - y)(\beta - z) \geq 0.$$

$$a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2},$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca),$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca),$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc.$$

Bổ đề 1.1. (Các hằng bất đẳng thức nền) Với mọi số thực a, b, c ta luôn có

$$a^2 \geq 0, \quad (a - b)^2 \geq 0, \quad a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad (a + b)^2 \geq 4ab,$$

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0, \quad a^2 - ab + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{4}, \quad a^2 + ab + b^2 \geq \frac{3(a + b)^2}{4},$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \quad 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca).$$

Bất đẳng thức $a^2 \geq 0$ có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = 0$; các bất đẳng thức hai biến còn lại có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$; các bất đẳng thức ba biến có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

• **Chứng minh.** Toàn bộ Bổ đề trên được suy ra từ hai đồng nhất thức

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

• **Khai thác đồng nhất thức thứ nhất.** Đồng nhất thức thứ nhất cho $a^2 + b^2 \geq 2ab$, và cũng cho $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0$.

• **Khai thác đồng nhất thức thứ hai.** Đồng nhất thức thứ hai cho $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; hai bất đẳng thức ba biến còn lại theo sau vì

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca),$$

$$(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$$

• **Hạ xuống hai biến.** Lấy $c = 0$ trong đồng nhất thức thứ hai rồi thay b bởi $-b$ thì được $a^2 + ab + b^2 \geq 0$.

• **Hai đánh giá cuối.** Cuối cùng,

$$4\left(a^2 - ab + b^2 - \frac{(a + b)^2}{4}\right) = 3(a - b)^2, \quad 4\left(a^2 + ab + b^2 - \frac{3(a + b)^2}{4}\right) = (a - b)^2,$$

nên hai bất đẳng thức hai biến còn lại cũng đúng.

Bổ đề 1.2. (Một dạng tổng bình phương thuận lợi) Nhiều bất đẳng thức đối xứng ba biến đưa được về dạng

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0,$$

trong đó S_a, S_b, S_c là các biểu thức của a, b, c . Ba điều kiện $S_a \geq 0, S_b \geq 0, S_c \geq 0$ hợp thành một điều kiện đủ để bất đẳng thức đúng, vì khi ấy vế trái là tổng của ba số không âm. Đó không phải điều kiện cần, và một biểu thức nói chung có nhiều cách viết về dạng trên chứ không phải chỉ một cách. Với các biểu thức hoán vị vòng quanh, đồng nhất thức nền là

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Bất đẳng thức trong tam giác

Ba số dương a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |b-c| < a < b+c \\ |c-a| < b < c+a \\ |a-b| < c < a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c > 0 \\ b+c-a > 0 \\ c+a-b > 0 \end{cases}$$

Khi đó phép đặt $x = \frac{b+c-a}{2}, y = \frac{c+a-b}{2}, z = \frac{a+b-c}{2}$ cho ta ba số dương x, y, z với

$$a = y+z, \quad b = z+x, \quad c = x+y,$$

nhờ đó mọi ràng buộc hình học được thay bằng điều kiện đơn giản $x, y, z > 0$.

Bổ đề 1.3. (Hai đánh giá về nghịch đảo) Với mọi số thực dương x, y, z ta có

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9.$$

Dấu đẳng thức lần lượt xảy ra khi $x = y$ và khi $x = y = z$.

Thật vậy, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$. Khai triển tích ở đánh giá thứ hai ta được

$$3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9.$$

Kỹ thuật dự đoán dấu đẳng thức

Trước khi biến đổi, hãy dự đoán *điểm rơi*, tức bộ giá trị của các biến làm cho dấu đẳng thức xảy ra. Ba căn cứ thường dùng:

- **Tính đối xứng.** Nếu bất đẳng thức không đổi khi hoán vị các biến thì điểm rơi thường nằm ở tâm, tức $a = b = c$.
- **Khảo sát trên đường chéo $a = b = c$ khi hai vế lệch bậc.** Với bất đẳng thức đối xứng mà hai vế lệch bậc, hãy thay $a = b = c = t$ để hiệu hai vế trở thành hàm một biến t , rồi tìm

nghiệm kép của hàm ấy. Giá trị t thu được là dự đoán cho giá trị chung của ba biến tại điểm rơi, còn phải được xác nhận lại ở bước chứng minh.

• **Biên của miền.** Nếu các biến bị chặn trong một đoạn, điểm rơi thường nằm ở đầu mút của đoạn chứ không ở tâm.

Việc dự đoán điểm rơi quyết định cách nhóm hạng tử: mỗi bình phương thu được phải triệt tiêu đúng tại điểm rơi đã dự đoán.

B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa

Ví dụ 1.1. Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geq 4(a + b + c)$.

Phân tích. Hai vế đều là đa thức bậc không quá hai, nên phép xét hiệu đưa về một biểu thức bậc hai viết được thành tổng các bình phương. Ở ý a), bất đẳng thức đối xứng nên điểm rơi là $a = b = c$. Ở ý b), vế phải tuyến tính còn vế trái bậc hai, đặt $a = b = c = t$ thì hiệu hai vế bằng $3t^2 - 12t + 12 = 3(t - 2)^2$, triệt tiêu tại $t = 2$. Vậy điểm rơi là $a = b = c = 2$, và ta phải nhóm sao cho xuất hiện các bình phương $(a - 2)^2$.

Lời giải

• **Ý a), nhân đôi hiệu hai vế.** Xét hiệu hai vế rồi nhân đôi để tránh phân số:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

• **Ý b), tách hằng số cho ba biến.** Tách hằng số 12 thành ba phần bằng nhau rồi ghép với từng biến:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 12 - 4(a + b + c) = (a - 2)^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2 \geq 0.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Nhận xét. Cả hai ý đều minh họa một quy tắc chung: sau khi dự đoán điểm rơi, hằng số tự do ở vế trái được tách ra đúng bằng lượng cần thiết để mỗi nhóm trở thành một bình phương triệt tiêu tại điểm rơi đó.

Ví dụ 1.2. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

Phân tích. Bất đẳng thức đối xứng nên điểm rơi là $a = b = c$. Mẫu số của ba phân thức là a, b, c , nên nhân hai vế với $abc > 0$ sẽ khử hết mẫu. Khi đó vế trái trở thành $(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2$, còn vế phải là $abc(a + b + c) = ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab$. Đây đúng là dạng $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ với $x = ab, y = bc, z = ca$.

Lời giải

- **Khử mẫu.** Vì $abc > 0$ nên nhân hai vế với abc , bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2 \geq abc(a + b + c).$$

- **Nhận dạng.** Đặt $x = ab, y = bc, z = ca$. Khi đó $abc(a + b + c) = a^2bc + ab^2c + abc^2 = xy + yz + zx$, nên bất đẳng thức trên chính là $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

- **Kết luận.** Theo hằng bất đẳng thức nền đã nêu ở mục A, bất đẳng thức cuối luôn đúng, vì

$$2[(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 - abc(a + b + c)] = (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 \geq 0.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh; dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab = bc = ca$, tức $a = b = c$.

Nhận xét. Bất đẳng thức này sẽ được chứng minh lại ở Ví dụ 3.5 bằng kỹ thuật ghép cặp AM–GM, không cần khử mẫu. Hai lời giải được giữ song song là có chủ ý: phép khử mẫu quy bài toán về hằng bất đẳng thức nền, còn phép ghép cặp khai thác trực tiếp cấu trúc tích của ba phân thức.

Ví dụ 1.3. Cho a, b, c, d, e là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

Phân tích. Vế phải chỉ chứa các tích ab, ac, ad, ae , tức biến a ghép với từng biến còn lại. Vì bốn biến b, c, d, e có vai trò như nhau nên ta tìm hằng số k để hiệu hai vế viết được thành $(a - kb)^2 + (a - kc)^2 + (a - kd)^2 + (a - ke)^2$. Hệ số của a^2 trong tổng này là 4, nên phải nhân hai vế của bất đẳng thức ban đầu với 4; hệ số của b^2 là $k^2 = 4$, cho $k = 2$. Vậy điểm rơi là $a = 2b = 2c = 2d = 2e$.

Lời giải

- **Nhân hai vế với 4.** Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 - 4ab - 4ac - 4ad - 4ae \geq 0.$$

- **Tách và ghép.** Viết $4a^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2$ rồi ghép mỗi hạng tử a^2 với một trong bốn hạng tử $4b^2, 4c^2, 4d^2, 4e^2$ cùng số hạng chứa tích tương ứng. Vế trái trở thành

$$(a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2 \geq 0.$$

- **Kết luận.** Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng, do đó bài toán được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2b = 2c = 2d = 2e$, chẳng hạn $(a; b; c; d; e) = (2; 1; 1; 1; 1)$.

Ví dụ 1.4. Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng

$$26a^2 + 11b^4 + 25c^2 \geq 12ab^2 + 10b^2c + 40ca.$$

Phân tích. Vế trái chỉ chứa các lũy thừa bậc chẵn của a, b, c , còn vế phải chứa các tích ab^2, b^2c, ca . Ba tích này gợi ba cặp $(a; b^2), (b^2; c), (c; a)$, nên ta tìm ba số dương m, n, k sao cho hiệu hai vế bằng

$$m(a - b^2)^2 + n(b^2 - c)^2 + k(c - a)^2.$$

- **Giải hệ đồng nhất.** Đồng nhất hệ số của ab^2, b^2c, ca ta được $2m = 12, 2n = 10, 2k = 40$, tức $m = 6, n = 5, k = 20$.
- **Kiểm tra hệ số bậc chẵn.** Khi đó hệ số của a^2 là $m + k = 26$, của b^4 là $m + n = 11$, của c^2 là $n + k = 25$, đúng bằng các hệ số ở vế trái.
- **Dự đoán điểm rơi.** Điểm rơi là $a = b^2 = c$.

Lời giải

- **Chuyển về.** Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$26a^2 + 11b^4 + 25c^2 - 12ab^2 - 10b^2c - 40ca \geq 0.$$

- **Tách theo ba cặp đã chọn.** Ta viết lại vế trái thành

$$\begin{aligned} & 6(a^2 - 2ab^2 + b^4) + 5(b^4 - 2b^2c + c^2) + 20(c^2 - 2ca + a^2) \\ &= 6(a - b^2)^2 + 5(b^2 - c)^2 + 20(c - a)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

- **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b^2 = c$, chẳng hạn $a = c = 1, b = \pm 1$ hoặc $a = c = 4, b = \pm 2$.

Nhận xét. Đây là kỹ thuật *hệ số bất định*: giả định trước dạng của tổng bình phương với các hệ số chưa biết, rồi giải hệ đồng nhất thức để tìm chúng. Kỹ thuật dùng được khi hệ ấy có nghiệm không âm; khi đó hiệu hai vế là một tổng bình phương với các hệ số không âm nên hiển nhiên không âm.

Ví dụ 1.5. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b khác không ta luôn có

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Phân tích. Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. Bình phương lên ta có $t^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2$, nên vế trái bằng $t^2 - 2$. Bất đẳng thức trở thành $t^2 - t - 2 \geq 0$, tức $(t - 2)(t + 1) \geq 0$. Điều kiện của biến phụ là $|t| \geq 2$, chính điều kiện này bảo đảm tích trên không âm. Điểm rơi ứng với $t = 2$, tức $a = b$.

Lời giải

- **Đặt biến phụ.** Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. Vì $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ là hai số nghịch đảo cùng dấu nên

$$|t| = \left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{a} \right| \geq 2,$$

tức là $t \geq 2$ hoặc $t \leq -2$.

- **Viết lại bất đẳng thức.** Từ $t^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2$ ta được bất đẳng thức tương đương

$$t^2 - 2 \geq t \Leftrightarrow t^2 - t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t + 1) \geq 0.$$

- **Xét hai trường hợp.** Nếu $t \geq 2$ thì $t - 2 \geq 0$ và $t + 1 > 0$, nên tích không âm. Nếu $t \leq -2$ thì $t - 2 < 0$ và $t + 1 < 0$, nên tích dương.

- **Kết luận.** Trong cả hai trường hợp bất đẳng thức cuối đều đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$, tức $a = b$.

Ví dụ 1.6. Cho các số thực $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng

$$a^5 + b^4 + c^3 \leq ab + bc + ca + 1.$$

Phân tích. Giả thiết $0 \leq a, b, c \leq 1$ kéo theo $a^5 \leq a, b^4 \leq b, c^3 \leq c$, nên chỉ cần chứng minh đánh giá mạnh hơn $a + b + c \leq ab + bc + ca + 1$. Đại lượng $1 - (a + b + c) + (ab + bc + ca)$ chính là ba số hạng đầu trong khai triển của tích $(1 - a)(1 - b)(1 - c)$, mà tích này không âm do mỗi thừa số không âm. Điểm rơi nằm ở biên của đoạn $[0; 1]$ chứ không ở tâm: chẳng hạn $a = b = 1, c = 0$.

Lời giải

• **Khai thác tính bị chặn.** Vì $a, b, c \in [0; 1]$ nên $1 - a \geq 0, 1 - b \geq 0, 1 - c \geq 0$, do đó

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 0.$$

Khai triển về trái ta được

$$1 - (a + b + c) + (ab + bc + ca) - abc \geq 0.$$

• **Bỏ hạng tử abc .** Cũng vì $a, b, c \geq 0$ nên $abc \geq 0$, suy ra

$$a + b + c \leq 1 + (ab + bc + ca) - abc \leq ab + bc + ca + 1.$$

• **So sánh các lũy thừa.** Với $0 \leq a \leq 1$ thì $a^5 \leq a$; tương tự $b^4 \leq b$ và $c^3 \leq c$. Cộng về theo về ba bất đẳng thức này:

$$a^5 + b^4 + c^3 \leq a + b + c.$$

• **Kết luận.** Ghép hai kết quả trên theo tính bắc cầu ta được điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a = b = 1, c = 0$ hoặc $a = 1, b = c = 0$.

Nhận xét. Khi các biến bị chặn trong một đoạn, hai công cụ chuẩn là bất đẳng thức tích $(x - \alpha)(x - \beta) \leq 0$ và phép so sánh các lũy thừa cùng cơ số. Cả hai đều chỉ dùng được nhờ giả thiết về miền giá trị, nên phải nêu rõ giả thiết ở mỗi bước.

Ví dụ 1.7. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

a) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$;

b) $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$.

Phân tích. Giả thiết hình học được dùng dưới dạng đại số $a < b + c, b < c + a, c < a + b$. Với ý a), nhân bất đẳng thức $a < b + c$ với số dương a rồi cộng ba kết quả là đủ. Với ý b), ta nhận thấy $a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c)$, tức mỗi thừa số ở vế phải xuất hiện trong một hiệu hai bình phương; nhân ba hiệu đó lại sẽ cho bình phương của vế phải. Điểm rơi của ý b) là $a = b = c$, tức tam giác đều.

Lời giải

• **Ý a), cộng ba bất đẳng thức cạnh.** Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $0 < a < b + c$. Nhân hai vế với số dương a ta được $a^2 < a(b + c)$. Tương tự $b^2 < b(c + a)$ và $c^2 < c(a + b)$. Cộng về theo về ba bất đẳng thức đó:

$$a^2 + b^2 + c^2 < a(b + c) + b(c + a) + c(a + b) = 2(ab + bc + ca).$$

Đây là một bất đẳng thức ngặt: với ba cạnh của một tam giác, dấu đẳng thức không bao giờ xảy ra.

• **Ý b), dựng hiệu hai bình phương.** Từ $a < b + c$ và $a > |b - c|$ suy ra $a^2 > (b - c)^2$, do đó

$$0 < a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c) \leq a^2.$$

Tương tự $0 < b^2 - (c - a)^2 \leq b^2$ và $0 < c^2 - (a - b)^2 \leq c^2$.

• **Ý b), nhân vế theo vế.** Nhân vế theo vế ba bất đẳng thức dương vừa thu được. Chú ý rằng $a - b + c = c + a - b$, $b - c + a = a + b - c$ và $c - a + b = b + c - a$, nên vế trái của tích bằng

$$\begin{aligned} & (a + b - c)(c + a - b) \cdot (b + c - a)(a + b - c) \cdot (c + a - b)(b + c - a) \\ &= \left[(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \right]^2. \end{aligned}$$

Do đó

$$\left[(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \right]^2 \leq a^2 b^2 c^2 = (abc)^2.$$

• **Ý b), lấy căn bậc hai.** Cả ba số $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$ đều dương, và $abc > 0$, nên lấy căn bậc hai hai vế ta được

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Bất đẳng thức ở ý b) còn đúng với mọi số thực dương a, b, c chứ không riêng ba cạnh tam giác. Thật vậy, tổng của hai trong ba số $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$ luôn bằng hai lần một biến nên luôn dương; do đó trong ba số ấy có nhiều nhất một số không dương. Nếu cả ba số đều dương thì a, b, c là ba cạnh của một tam giác, ta trở về trường hợp vừa chứng minh. Nếu có một số không dương thì hai số còn lại dương, nên tích của ba số không dương, trong khi $abc > 0$. Đây là một trường hợp riêng của bất đẳng thức Schur, được trình bày ở Chương 8.

Ví dụ 1.8. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh bất đẳng thức Nesbitt

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Phân tích. Các mẫu số $b + c$, $c + a$, $a + b$ có vai trò như nhau, nên phép đặt $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$ sẽ làm biểu thức gọn lại. Khi đó $x + y + z = 2(a + b + c)$, do đó $a = \frac{y+z-x}{2}$ và tương tự cho b, c . Vế trái trở thành một tổng chỉ gồm các tỉ số $\frac{x}{y}$, và ta chỉ còn dùng đánh giá $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. Điểm rơi là $x = y = z$, tức $a = b = c$.

Lời giải

• **Đổi biến.** Đặt $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$; khi đó $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 2(a + b + c)$, suy ra

$$a = \frac{y+z-x}{2}, \quad b = \frac{z+x-y}{2}, \quad c = \frac{x+y-z}{2}.$$

• **Viết lại vế trái.** Thay vào biểu thức cần đánh giá:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{1}{2} \left(\frac{y+z-x}{x} + \frac{z+x-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) - 3 \right]. \end{aligned}$$

- **Áp dụng bổ đề.** Mỗi cặp trong ngoặc vuông không nhỏ hơn 2, nên

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{2}(2+2+2-3) = \frac{3}{2}.$$

- **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, tức $a = b = c$.

Nhận xét. Phép đặt $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$ là công cụ chuẩn cho các bất đẳng thức có mẫu số là tổng hai biến. Nó biến một biểu thức phân thức ba biến thành tổng các cặp nghịch đảo, dạng đã được xử lý trọn vẹn ở mục A. Bất đẳng thức Nesbitt sẽ còn trở lại ở Ví dụ 2.8, Ví dụ 5.1, Ví dụ 7.6 và Ví dụ 9.1. Sự lặp lại này là có chủ ý: cùng một đề bài được chứng minh bằng năm kỹ thuật khác nhau, nhờ đó nó đóng vai trò thước đo để so sánh các phương pháp trình bày trong sách.

Ví dụ 1.9*. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2a + 3b + 4c = 6$. Chứng minh rằng

$$\frac{3b+4c+11}{2a+1} + \frac{2a+4c+11}{3b+1} + \frac{2a+3b+11}{4c+1} \geq 15.$$

Phân tích. Ba mẫu số là $2a + 1$, $3b + 1$, $4c + 1$, trong khi các tử số lại chứa đúng hai trong ba biểu thức $2a$, $3b$, $4c$. Điều đó gợi phép đặt $x = 2a + 1$, $y = 3b + 1$, $z = 4c + 1$. Giả thiết cho $x + y + z = (2a + 3b + 4c) + 3 = 9$. Khi đó tử số thứ nhất là $(y - 1) + (z - 1) + 11 = y + z + 9$, và bất đẳng thức chỉ còn chứa ba biến x, y, z với ràng buộc $x + y + z = 9$, dạng mà ta đã có sẵn công cụ ở mục A. Điểm rơi là $x = y = z = 3$, tương ứng $a = 1, b = \frac{2}{3}, c = \frac{1}{2}$.

Lời giải

- **Đổi biến.** Đặt $x = 2a + 1$, $y = 3b + 1$, $z = 4c + 1$. Vì $a, b, c > 0$ nên $x, y, z > 1$, và từ giả thiết

$$x + y + z = (2a + 3b + 4c) + 3 = 6 + 3 = 9.$$

Ngoài ra $3b + 4c + 11 = (y - 1) + (z - 1) + 11 = y + z + 9$, tương tự cho hai tử số còn lại.

- **Viết lại bất đẳng thức.** Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{y+z+9}{x} + \frac{z+x+9}{y} + \frac{x+y+9}{z} \geq 15.$$

- **Tách thành hai nhóm quen thuộc.** Vì $x + y + z = 9$ nên

$$\begin{aligned} & \frac{y+z+9}{x} + \frac{z+x+9}{y} + \frac{x+y+9}{z} \\ &= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

- **Đánh giá từng nhóm.** Theo Bổ đề về nghịch đảo, ba cặp đầu mỗi cặp không nhỏ hơn 2, còn nhóm cuối không nhỏ hơn 9. Do đó tổng trên không nhỏ hơn $2 + 2 + 2 + 9 = 15$.

- **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 3$, tức

$$a = 1, \quad b = \frac{2}{3}, \quad c = \frac{1}{2},$$

và khi đó $2a + 3b + 4c = 2 + 2 + 2 = 6$, phù hợp với giả thiết.

C. Bài tập có lời giải

Bài 1.1. Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng

$$4(a^2 + b^2 + c^2) + 27 \geq 12(a + b + c).$$

Phân tích. Bất đẳng thức đối xứng theo a, b, c , còn hai vế bậc bậc: vế trái bậc hai, vế phải bậc nhất.

- **Dò điểm rơi trên đường chéo.** Theo phép khảo sát trên đường chéo $a = b = c$ ở mục A, ta đặt $a = b = c = t$ để dò điểm rơi; khi đó hiệu hai vế bằng $12t^2 - 36t + 27 = 3(2t - 3)^2$, triệt tiêu tại $t = \frac{3}{2}$.
- **Định hướng phép tách.** Vậy điểm rơi là $a = b = c = \frac{3}{2}$, và phép tách phải sinh ra đúng ba bình phương $(2a - 3)^2, (2b - 3)^2, (2c - 3)^2$. Muốn thế, hằng số 27 được chia đều thành ba phần bằng 9.

Lời giải

- **Tách hằng số cho ba biến.** Chuyển vế phải sang vế trái rồi viết $27 = 9 + 9 + 9$, ta có

$$\begin{aligned} 4(a^2 + b^2 + c^2) + 27 - 12(a + b + c) \\ = (4a^2 - 12a + 9) + (4b^2 - 12b + 9) + (4c^2 - 12c + 9). \end{aligned}$$

- **Ghép mỗi nhóm thành một bình phương.** Mỗi nhóm là một bình phương đúng, vì $4a^2 - 12a + 9 = (2a - 3)^2$, và tương tự cho b với c . Do đó

$$4(a^2 + b^2 + c^2) + 27 - 12(a + b + c) = (2a - 3)^2 + (2b - 3)^2 + (2c - 3)^2.$$

- **Kết luận.** Vế phải là tổng ba bình phương nên không âm, suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2a - 3 = 2b - 3 = 2c - 3 = 0$, tức $a = b = c = \frac{3}{2}$.

Bài 1.2. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có

$$a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3.$$

Phân tích. Hai vế đối xứng theo a, b và cùng thuần nhất bậc bốn, nên điểm rơi dự đoán là $a = b$. Điều đó buộc hiệu hai vế phải chia hết cho $(a - b)^2$. Nhóm hiệu ấy theo nhân tử chung $a - b$ ta được tích $(a - b)(a^3 - b^3)$; phân tích tiếp hiệu hai lập phương sẽ làm lộ nhân tử $(a - b)^2$ cùng thừa số còn lại $a^2 + ab + b^2$, vốn đã được khẳng định không âm ở mục A.

Lời giải

- **Nhóm hiệu hai vế theo nhân tử chung.** Ta có

$$a^4 + b^4 - a^3b - ab^3 = a^3(a - b) - b^3(a - b) = (a - b)(a^3 - b^3).$$

- **Phân tích hiệu hai lập phương.** Vì $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ nên

$$a^4 + b^4 - a^3b - ab^3 = (a - b)^2(a^2 + ab + b^2).$$

• **Đánh giá thừa số thứ hai.** Theo hằng bất đẳng thức nền ở mục A ta có $a^2 + ab + b^2 \geq 0$. Điều này cũng thấy trực tiếp từ đồng nhất thức

$$4(a^2 + ab + b^2) = (2a + b)^2 + 3b^2 \geq 0.$$

• **Kết luận.** Tích của một bình phương với một số không âm là số không âm, nên $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $(a - b)^2 = 0$ hoặc $a^2 + ab + b^2 = 0$. Theo đồng nhất thức vừa nêu, trường hợp thứ hai buộc $2a + b = 0$ và $b = 0$, tức $a = b = 0$, và trường hợp này đã nằm trong trường hợp thứ nhất. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài 1.3. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

Phân tích. Bất đẳng thức đối xứng nên điểm rơi là $a = b = c$.

• **Đọc lại hai vế.** Vế phải viết được thành $abc(a + b + c) = a^2bc + ab^2c + abc^2 = ab \cdot ca + ab \cdot bc + bc \cdot ca$, tức tổng các tích đôi một của ba số ab, bc, ca ; còn vế trái là tổng các bình phương của a^2, b^2, c^2 .

• **Đánh giá qua hai nhíp.** Hai vế cách nhau đúng hai nhíp, vì thế ta dùng hằng bất đẳng thức nền $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ hai lần liên tiếp: lần thứ nhất hạ $a^4 + b^4 + c^4$ xuống $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, lần thứ hai hạ tiếp xuống $abc(a + b + c)$.

Lời giải

• **Áp dụng lần thứ nhất cho ba bình phương.** Thay $x = a^2, y = b^2, z = c^2$ vào hằng bất đẳng thức nền $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ở mục A, ta được

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

• **Áp dụng lần thứ hai cho ba tích.** Thay $x = ab, y = bc, z = ca$ vào cùng hằng bất đẳng thức đó:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab.$$

• **Nhận ra vế phải của đề bài.** Vế trái của đánh giá vừa viết chính là $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, còn vế phải của nó bằng

$$ab^2c + abc^2 + a^2bc = abc(a + b + c).$$

• **Ghép hai đánh giá theo tính bắc cầu.** Từ hai kết quả trên,

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đồng thời $a^2 = b^2 = c^2$ và $ab = bc = ca$; với $a, b, c > 0$ cả hai điều kiện ấy quy về $a = b = c$.

Bài 1.4. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng

$$ab + 3bc + 5ca \leq 0.$$

Phân tích. Biểu thức $ab + 3bc + 5ca$ không đối xứng, nên khó trông cậy vào một phép nhóm đối xứng. Ngược lại, ràng buộc $a + b + c = 0$ cho phép rút hẳn một biến và đưa bài toán về hai biến tự do.

• **Hình dạng sau phép thế.** Sau khi thay $c = -(a + b)$, vế trái trở thành đối của một tam thức bậc hai thuần nhất theo a và b ; chỉ còn phải chứng tỏ tam thức ấy không âm, bằng cách hoàn chỉnh bình phương theo a .

• **Dự đoán điểm rơi.** Vì mọi bình phương thu được đều thuần nhất, đẳng thức chỉ có thể xảy ra khi chúng cùng triệt tiêu, tức tại $a = b = c = 0$.

Lời giải

• **Rút một biến từ ràng buộc.** Từ $a + b + c = 0$ suy ra $c = -(a + b)$. Thay vào vế trái:

$$\begin{aligned} ab + 3bc + 5ca &= ab + 3b[-(a + b)] + 5[-(a + b)]a \\ &= ab - 3ab - 3b^2 - 5a^2 - 5ab \\ &= -(5a^2 + 7ab + 3b^2). \end{aligned}$$

• **Hoàn chỉnh bình phương theo biến a .** Hệ số của a^2 là 5, nên

$$5a^2 + 7ab = 5 \left(a + \frac{7b}{10} \right)^2 - \frac{49b^2}{20},$$

do đó, vì $3 - \frac{49}{20} = \frac{11}{20}$,

$$5a^2 + 7ab + 3b^2 = 5 \left(a + \frac{7b}{10} \right)^2 + \frac{11b^2}{20} \geq 0.$$

• **Kết luận.** Vậy $ab + 3bc + 5ca = -(5a^2 + 7ab + 3b^2) \leq 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a + \frac{7b}{10} = 0$ và $b = 0$, tức $a = b = 0$, kéo theo $c = 0$.

Bài 1.5. Cho hai số thực $a \geq 1$ và $b \geq 1$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab.$$

Phân tích. Hai căn thức $\sqrt{a-1}$ và $\sqrt{b-1}$ cản trở mọi phép biến đổi đa thức, nên trước hết phải chặn chúng bởi biểu thức không chứa căn.

• **Công cụ chặn căn.** Hằng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ở mục A, dùng cho $x = \sqrt{a-1}$ và $y = 1$, cho ngay $\sqrt{a-1} \leq \frac{a}{2}$; dấu đẳng thức ở đó xảy ra khi $\sqrt{a-1} = 1$, tức $a = 2$.

• **Dự đoán điểm rơi.** Vậy điểm rơi dự đoán là $a = b = 2$, khi đó hai vế cùng bằng 4.

• **Kiểm tra đường đi.** Sau khi thay hai căn thức bởi $\frac{a}{2}$ và $\frac{b}{2}$, vế trái được chặn bởi $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2}$, đúng bằng vế phải.

Lời giải

• **Chặn từng căn thức bởi một nhị thức.** Áp dụng $x^2 + y^2 \geq 2xy$ cho $x = \sqrt{a-1} \geq 0$ và $y = 1$, chú ý $x^2 = a-1$, ta được

$$(a-1) + 1 \geq 2\sqrt{a-1} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a-1} \leq \frac{a}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự, $\sqrt{b-1} \leq \frac{b}{2}$.

• **Nhân với hệ số dương.** Vì $a \geq 1 > 0$ và $b \geq 1 > 0$, phép nhân hai vế với một số dương không làm đổi chiều bất đẳng thức. Nhân đánh giá thứ hai với a và đánh giá thứ nhất với b :

$$a\sqrt{b-1} \leq \frac{ab}{2}, \quad b\sqrt{a-1} \leq \frac{ab}{2}.$$

• **Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều.** Cộng vế theo vế hai đánh giá vừa thu được:

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab.$$

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi cả hai đánh giá ở bước đầu đều là đẳng thức, tức $\sqrt{a-1} = 1$ và $\sqrt{b-1} = 1$, nghĩa là $a = b = 2$; khi đó hai vế cùng bằng 4.

Bài 1.6. Cho các số thực $a, b, c \in [0; 4]$ thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng

$$12 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 20.$$

Phân tích. Miền $[0; 4]$ và ràng buộc $a + b + c = 6$ đều cân đối quanh giá trị 2, nên phép đổi biến $x = a - 2, y = b - 2, z = c - 2$ đưa bài toán về dạng gọn nhất: $x, y, z \in [-2; 2]$ và $x + y + z = 0$, đồng thời $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 12$.

• **Hai chặn sau đổi biến.** Chặn dưới trở nên hiển nhiên, còn chặn trên quy về $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$.

• **Công cụ cho chặn trên.** Vì các biến bị chặn trong một đoạn, theo mục A ta dùng hai tích không âm dựng từ hai đầu mút; cộng chúng lại thì các số hạng bậc lẻ triệt tiêu, để lại một chặn dưới cho $xy + yz + zx$. Ràng buộc $x + y + z = 0$ biến chặn ấy thành chặn trên cho tổng bình phương.

• **Dự đoán điểm rơi.** Điểm rơi của chặn dưới nằm ở tâm, còn của chặn trên nằm ở biên.

Lời giải

• **Đổi biến về tâm của đoạn.** Đặt $x = a - 2, y = b - 2, z = c - 2$. Từ $a, b, c \in [0; 4]$ suy ra $x, y, z \in [-2; 2]$; từ $a + b + c = 6$ suy ra $x + y + z = 0$. Ngoài ra

$$a^2 + b^2 + c^2 = (x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4(x+y+z) + 12,$$

nên $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 12$.

• **Chứng minh chặn dưới.** Vì $x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 0$, tức $a = b = c = 2$; giá trị này thỏa mãn $a + b + c = 6$.

• **Dựng hai tích không âm từ hai đầu mút.** Vì $-2 \leq x, y, z \leq 2$ nên sáu số $2-x, 2-y, 2-z, 2+x, 2+y, 2+z$ đều không âm, do đó

$$(2-x)(2-y)(2-z) \geq 0, \quad (2+x)(2+y)(2+z) \geq 0.$$

- **Cộng hai tích để khử phần bậc lẻ.** Khai triển từng tích:

$$(2-x)(2-y)(2-z) = 8 - 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) - xyz,$$

$$(2+x)(2+y)(2+z) = 8 + 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + xyz.$$

Cộng vế theo vế, các số hạng bậc một và bậc ba triệt tiêu, còn lại

$$16 + 4(xy + yz + zx) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad xy + yz + zx \geq -4.$$

- **Chuyển sang tổng bình phương.** Vì $x + y + z = 0$ nên

$$0 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx),$$

suy ra $x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx) \leq 8$.

- **Kết luận.** Vậy $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 12 \leq 20$, và kết hợp với chặn dưới ta được $12 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 20$. Dấu đẳng thức ở chặn trên xảy ra khi và chỉ khi cả hai tích trên cùng bằng 0, chẳng hạn $x = 2, y = 0, z = -2$, tức $(a; b; c) = (4; 2; 0)$ và các hoán vị.

Bài 1.7. Cho các số thực $a, b, c \in [-2; 4]$ thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 24.$$

Phân tích. Các biến bị chặn trong đoạn $[-2; 4]$, nên công cụ tự nhiên là bất đẳng thức tích $(x - \alpha)(x - \beta) \leq 0$ ở mục A với $\alpha = -2$ và $\beta = 4$. Nó hạ mỗi bình phương xuống một biểu thức bậc nhất, sau đó ràng buộc $a + b + c = 0$ triệt tiêu trọn phần bậc nhất và chỉ để lại hằng số. Vì dấu đẳng thức của mỗi tích chỉ đạt ở đầu mút, điểm rơi nằm ở biên: mỗi biến nhận giá trị -2 hoặc 4 ; ràng buộc tổng bằng 0 chọn ra bộ $(4; -2; -2)$.

Lời giải

- **Khai thác miền giá trị của từng biến.** Vì $-2 \leq a \leq 4$ nên $a + 2 \geq 0$ và $a - 4 \leq 0$, do đó tích của chúng không dương:

$$(a + 2)(a - 4) \leq 0.$$

Khai triển tích này ta được $a^2 - 2a - 8 \leq 0$, tức $a^2 \leq 2a + 8$. Lập luận tương tự cho b và c cho $b^2 \leq 2b + 8$ và $c^2 \leq 2c + 8$.

- **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Cộng vế theo vế ba đánh giá trên:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(a + b + c) + 24.$$

- **Dùng ràng buộc để triệt tiêu phần bậc nhất.** Vì $a + b + c = 0$ nên vế phải bằng 24, do đó $a^2 + b^2 + c^2 \leq 24$.

- **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba tích $(a + 2)(a - 4)$, $(b + 2)(b - 4)$, $(c + 2)(c - 4)$ cùng bằng 0, tức mỗi biến nhận giá trị -2 hoặc 4 . Kết hợp với $a + b + c = 0$, chỉ còn khả năng một biến bằng 4 và hai biến còn lại bằng -2 , tức $(a; b; c) = (4; -2; -2)$ và các hoán vị.

Bài 1.8. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ca(c + a - 2b) \geq 0.$$

Phân tích. Về trái đối xứng và thuần nhất bậc ba, nên điểm rơi là $a = b = c$; khi đó mỗi thừa số $a + b - 2c$ đều bằng 0. Điều đó gợi ý rằng sau khi khai triển, biểu thức viết được về dạng tổng bình phương thuận lợi nêu ở mục A, với ba hệ số S_a, S_b, S_c chính là a, b, c – ba số dương theo giả thiết. Đầu mỗi của phép nhóm là đồng nhất thức $ab^2 + ac^2 - 2abc = a(b - c)^2$: mỗi biến đứng làm nhân tử chung cho hiệu bình phương của hai biến còn lại.

Lời giải

• **Khai triển về trái.** Nhân tung từng số hạng:

$$ab(a + b - 2c) = a^2b + ab^2 - 2abc,$$

$$bc(b + c - 2a) = b^2c + bc^2 - 2abc,$$

$$ca(c + a - 2b) = c^2a + ca^2 - 2abc.$$

Cộng ba đẳng thức đó, về trái của bài toán bằng

$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 - 6abc.$$

• **Nhóm lại theo nhân tử chung là từng biến.** Đặt a làm nhân tử chung của hai số hạng ab^2, c^2a và của một lượng $-2abc$; làm tương tự với b cho cặp bc^2, a^2b và với c cho cặp ca^2, b^2c . Mỗi lượng $-2abc$ được dùng đúng một lần, nên ta được

$$\begin{aligned} & a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 - 6abc \\ &= a(b^2 + c^2 - 2bc) + b(c^2 + a^2 - 2ca) + c(a^2 + b^2 - 2ab). \end{aligned}$$

• **Đưa về dạng tổng bình phương thuận lợi.** Mỗi ngoặc là một bình phương đúng, nên về trái của bài toán bằng

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2.$$

• **Kết luận.** Vì $a, b, c > 0$ nên cả ba hệ số $S_a = a, S_b = b, S_c = c$ đều dương, do đó tổng trên không âm. Vậy bất đẳng thức được chứng minh; dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c, c = a$ và $a = b$, tức $a = b = c$.

Bài 1.9. Cho a, b là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2 + 1)^2 \geq 3(a^2b^2 + a^2 + b^2).$$

Phân tích. Cả hai vế chỉ phụ thuộc vào a^2 và b^2 , nên phép đặt $x = a^2, y = b^2$ làm bài toán gọn hẳn một bậc. Bất đẳng thức trở thành $(x + y + 1)^2 \geq 3(xy + x + y)$; khai triển rồi rút gọn thì phần bậc hai và phần bậc nhất tự sắp thành hằng bất đẳng thức nền $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ áp dụng cho bộ ba $(x; y; 1)$. Điểm rơi tương ứng là $x = y = 1$, tức $|a| = |b| = 1$.

Lời giải

• **Đổi biến theo bình phương.** Đặt $x = a^2$ và $y = b^2$; khi đó $x \geq 0, y \geq 0$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(x + y + 1)^2 \geq 3(xy + x + y).$$

• **Khai triển và rút gọn.** Vì $(x + y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$ nên hiệu hai vế bằng

$$\begin{aligned}(x + y + 1)^2 - 3(xy + x + y) &= x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y - 3xy - 3x - 3y \\ &= x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y.\end{aligned}$$

• **Áp dụng hằng bất đẳng thức nền.** Đặt $z = 1$ trong bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ở mục A, ta được

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + y + x,$$

tức hiệu vừa tính không âm.

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức của hằng bất đẳng thức nền xảy ra khi và chỉ khi ba số bằng nhau, tức $x = y = 1$, nghĩa là $a^2 = b^2 = 1$: khi đó $a = \pm 1$ và $b = \pm 1$.

Bài 1.10. Cho a, b là hai số thực khác không. Chứng minh rằng

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 3.$$

Phân tích. Hai hạng tử sau tạo thành một cặp nghịch đảo quen thuộc, nên ta đặt $u = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$; theo Bổ đề về nghịch đảo ở mục A thì $u \geq 2$. Hạng tử đầu cũng biểu diễn được qua u , vì $\frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2b^2} = u + 2$. Nhờ vậy bài toán ba tầng phân thức quy về một bất đẳng thức một biến trên nửa khoảng $u \geq 2$, xử lý được bằng phép quy đồng và phân tích thành nhân tử. Điểm rơi là $u = 2$, tức $a^2 = b^2$.

Lời giải

• **Đặt biến phụ là cặp nghịch đảo.** Vì $a \neq 0$ và $b \neq 0$ nên $a^2 > 0$ và $b^2 > 0$. Đặt

$$u = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}.$$

Áp dụng Bổ đề về nghịch đảo ở mục A cho hai số dương a^2 và b^2 , ta có $u \geq 2$.

• **Biểu diễn hạng tử đầu qua biến phụ.** Quy đồng rồi dùng hằng đẳng thức bình phương của một tổng,

$$u + 2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 = \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{a^2b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2b^2}.$$

Vì $u \geq 2$ nên $u + 2 \geq 4 > 0$, do đó lấy nghịch đảo hai vế rồi nhân với 4 ta được

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{4}{u + 2}.$$

• **Quy bài toán về một biến.** Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{4}{u + 2} + u \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{u + 2} + u - 3 \geq 0.$$

- **Quy đồng và phân tích thành nhân tử.** Vì $u + 2 > 0$,

$$\frac{4}{u+2} + u - 3 = \frac{4 + (u-3)(u+2)}{u+2} = \frac{u^2 - u - 2}{u+2} = \frac{(u-2)(u+1)}{u+2}.$$

- **Kết luận.** Với $u \geq 2$ ta có $u - 2 \geq 0$, $u + 1 > 0$ và $u + 2 > 0$, nên phân thức trên không âm. Vậy bất đẳng thức được chứng minh; dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u = 2$, tức $a^2 = b^2$, nghĩa là $b = \pm a$.

Bài 1.11*. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta có

$$(a+b+c)^4 + (b+c-a)^4 + (c+a-b)^4 + (a+b-c)^4 \leq 28(a^4 + b^4 + c^4).$$

Phân tích. Bốn số hạng ở vế trái ghép được thành hai cặp có dạng $(x-y)^4 + (x+y)^4$: cặp thứ nhất gồm $(a+b+c)^4$ và $(b+c-a)^4$, ứng với $x = b+c$ và $y = a$; cặp thứ hai gồm $(a+b-c)^4$ và $(c+a-b)^4$, ứng với $x = a$ và $y = b-c$.

- **Công cụ khử bậc lẻ.** Hằng đẳng thức $(x-y)^4 + (x+y)^4 = 2(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)$ khử sạch các lũy thừa bậc lẻ, nên sau khi thu gọn chỉ còn các lũy thừa chẵn của a, b, c và bài toán quy về hằng bất đẳng thức nền áp dụng cho a^2, b^2, c^2 .
- **Dự đoán điểm rơi.** Điểm rơi vì thế là $|a| = |b| = |c|$.

Lời giải

- **Ghi nhận hằng đẳng thức nền.** Với mọi số thực x, y ta có

$$(x-y)^4 + (x+y)^4 = 2(x^4 + 6x^2y^2 + y^4),$$

vì khi cộng hai khai triển, các số hạng chứa lũy thừa bậc lẻ của y triệt tiêu từng đôi một.

- **Gộp cặp thứ nhất.** Lấy $x = b+c$ và $y = a$; khi đó $a+b+c = x+y$ và $b+c-a = x-y$, nên

$$(a+b+c)^4 + (b+c-a)^4 = 2[(b+c)^4 + 6a^2(b+c)^2 + a^4].$$

- **Gộp cặp thứ hai.** Lấy $x = a$ và $y = b-c$; khi đó $a+b-c = x+y$ và $c+a-b = x-y$, nên

$$(c+a-b)^4 + (a+b-c)^4 = 2[a^4 + 6a^2(b-c)^2 + (b-c)^4].$$

- **Thu gọn tổng bốn số hạng.** Gọi S là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Cộng hai kết quả trên rồi dùng lại hằng đẳng thức đã ghi nhận cho $(b+c)^4 + (b-c)^4 = 2(b^4 + 6b^2c^2 + c^4)$, cùng với $(b+c)^2 + (b-c)^2 = 2(b^2 + c^2)$, ta được

$$\begin{aligned} S &= 2[(b+c)^4 + (b-c)^4] + 4a^4 + 12a^2[(b+c)^2 + (b-c)^2] \\ &= 4(b^4 + 6b^2c^2 + c^4) + 4a^4 + 24a^2(b^2 + c^2) \\ &= 4(a^4 + b^4 + c^4) + 24(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2). \end{aligned}$$

- **Quy về hằng bất đẳng thức nền.** Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} 4(a^4 + b^4 + c^4) + 24(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) &\leq 28(a^4 + b^4 + c^4) \\ \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &\leq a^4 + b^4 + c^4, \end{aligned}$$

vì hiệu hai vế của dòng trên bằng $24(a^4 + b^4 + c^4) - 24(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ và $24 > 0$. Đánh giá cuối chính là $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ với $x = a^2, y = b^2, z = c^2$, nên nó đúng.

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^2 = b^2 = c^2$, tức $|a| = |b| = |c|$.

Bài 1.12*. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta có

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Phân tích. Hiệu hai vế bất biến qua phép hoán vị vòng quanh $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ nhưng không bất biến khi đổi chỗ hai biến, nên mọi cách nhóm đều phải tôn trọng thứ tự vòng quanh ấy.

• **Trở ngại về điểm rơi.** Ngoài bộ $a = b = c$ bất đẳng thức còn một điểm rơi không tầm thường; vì thế một cách nhóm chỉ dùng ba bình phương $(a - b)^2, (b - c)^2, (c - a)^2$ với ba hệ số không âm khó dẫn tới kết quả, bởi ba biểu thức ấy chỉ cùng triệt tiêu khi $a = b = c$.

• **Định hướng cách nhóm.** Ta đi tìm ba tam thức bậc hai X, Y, Z là ảnh hoán vị vòng quanh của nhau sao cho $X^2 + Y^2 + Z^2$ đúng bằng hai lần hiệu hai vế; khi đó bất đẳng thức trở nên hiển nhiên và tập điểm rơi chính là nghiệm của hệ $X = Y = Z = 0$.

Lời giải

• **Chọn ba tam thức hoán vị vòng quanh.** Đặt

$$X = a^2 - c^2 + ca + bc - 2ab,$$

và gọi Y, Z lần lượt là ảnh thứ nhất, thứ hai của X qua phép thế $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$, tức

$$Y = b^2 - a^2 + ab + ca - 2bc, \quad Z = c^2 - b^2 + bc + ab - 2ca.$$

Cộng ba biểu thức lại, các bình phương triệt tiêu từng đôi và mỗi tích ab, bc, ca xuất hiện với tổng hệ số $1 + 1 - 2 = 0$, nên $X + Y + Z = 0$.

• **Khai triển một bình phương.** Khai triển trực tiếp bình phương của tổng năm số hạng:

$$\begin{aligned} X^2 &= a^4 + c^4 + 4a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2a^2c^2 \\ &\quad - 4a^3b + 2a^3c - 2bc^3 - 2c^3a - 2a^2bc + 6abc^2 - 4ab^2c. \end{aligned}$$

• **Lấy tổng vòng quanh.** Vì Y và Z nhận được từ X bằng phép thế $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$, tổng $X^2 + Y^2 + Z^2$ chính là tổng vòng quanh của biểu thức vừa khai triển. Xét từng nhóm số hạng:

- hai số hạng $a^4 + c^4$ cho $2(a^4 + b^4 + c^4)$;
- bốn số hạng $4a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2a^2c^2$ có tổng hệ số $4 + 1 + 1 - 2 = 4$, cho $4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$;
- hai số hạng $-4a^3b$ và $-2c^3a$ cùng sinh ra tổng vòng quanh $a^3b + b^3c + c^3a$, cho $-6(a^3b + b^3c + c^3a)$;
- hai số hạng $2a^3c$ và $-2bc^3$ cùng sinh ra tổng vòng quanh $ab^3 + bc^3 + ca^3$ với hai hệ số đối nhau nên triệt tiêu;
- ba số hạng $-2a^2bc + 6abc^2 - 4ab^2c$ đều cho tổng vòng quanh $abc(a + b + c)$, với tổng hệ số $-2 + 6 - 4 = 0$ nên cũng triệt tiêu.

• **Thu được đồng nhất thức chốt.** Từ đó

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4) + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 6(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Mặt khác $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$, nên vế phải trên viết gọn thành

$$2\left[(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a)\right].$$

• **Kết luận.** Vậy

$$2\left[(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a)\right] = X^2 + Y^2 + Z^2 \geq 0,$$

tức $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $X = Y = Z = 0$. Bộ $a = b = c$ thoả mãn hệ đó. Vì X, Y, Z đều thuần nhất bậc hai nên mỗi nghiệm của hệ vẫn còn là nghiệm sau khi nhân cả ba biến với cùng một số khác không; ngoài họ nghiệm $a = b = c$, hệ còn một họ nghiệm không tầm thường nữa, sinh bởi bộ

$$(a; b; c) = \left(\sin^2 \frac{4\pi}{7}; \sin^2 \frac{2\pi}{7}; \sin^2 \frac{\pi}{7}\right)$$

cùng các hoán vị vòng quanh của nó.

Nhận xét. Sự tồn tại của điểm rơi thứ hai giải thích vì sao bài toán này khó hơn hẳn các bài đối xứng cùng bậc: nó buộc phép tách tổng bình phương phải dùng ba tam thức bậc hai đầy đủ chứ không phải ba hiệu $a - b, b - c, c - a$. Đẳng thức $X + Y + Z = 0$ tiện dụng khi kiểm tra: nó là điều kiện cần dễ thử nhất để loại nhanh một bộ ba tam thức được đoán sai, trước khi bỏ công khai triển tổng ba bình phương.

CHƯƠNG 2

Bất đẳng thức AM–GM và kỹ thuật điểm rơi

02

Từ một bất đẳng thức cổ điển đến một quy trình làm việc bốn bước: dự đoán dấu đẳng thức, lập sơ đồ điểm rơi, chọn hệ số tách, rồi mới ráp đánh giá.

A. Kiến thức trọng tâm

Bất đẳng thức AM–GM

Cho n số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$. Khi đó

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Bất đẳng thức này có tên gọi đầy đủ là *bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân*, viết tắt theo thông lệ quốc tế là *bất đẳng thức AM–GM* (Arithmetic Mean – Geometric Mean). Ở nước ta, theo cách gọi quen thuộc trong sách giáo khoa, nó còn được gọi là *bất đẳng thức Cauchy* (hay bất đẳng thức Côsi). Trong toàn bộ cuốn sách, chúng tôi thống nhất dùng tên gọi *bất đẳng thức AM–GM*.

Ba cách viết sau đây là tương đương với nhau và đều hay dùng:

$$\text{Dạng 1: } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n};$$

$$\text{Dạng 2: } x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n};$$

$$\text{Dạng 3: } \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n \geq x_1 x_2 \dots x_n.$$

Hai trường hợp riêng $n = 2$ và $n = 3$ được dùng nhiều nhất trong chương trình phổ thông, cần ghi nhớ cùng với điều kiện của dấu đẳng thức.

$$\begin{aligned} x + y &\geq 2\sqrt{xy} \quad (x, y \geq 0), & \text{đẳng thức khi } x = y; \\ x + y + z &\geq 3\sqrt[3]{xyz} \quad (x, y, z \geq 0), & \text{đẳng thức khi } x = y = z. \end{aligned}$$

Các hệ quả thường dùng

Với mọi số thực x, y, z ta có

$$x^2 + y^2 \geq 2xy;$$

$$2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2;$$

$$(x + y)^2 \geq 4xy;$$

$$x^2 - xy + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{4};$$

$$x^2 + xy + y^2 \geq \frac{3(x + y)^2}{4};$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx;$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2;$$

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx);$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z); \quad 3(x^4 + y^4 + z^4) \geq (xy + yz + zx)^2.$$

Ngoài ra $(xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x + y + z)$, và với $x, y \geq 0$ thì $\sqrt{2(x + y)} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Trong mọi bất đẳng thức trên, dấu đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau. Với các bất đẳng thức chỉ chứa hai biến, đó đồng thời là điều kiện cần.

Bổ đề 2.1. (bất đẳng thức cộng mẫu) Với các số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ ta có

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n},$$

tương đương với $(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = \dots = x_n$. Hai trường hợp dùng nhiều nhất là

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}.$$

• **Chứng minh.** Ta chứng minh dạng tích trước, rồi chia hai vế để thu được dạng thứ nhất.

• **Đánh giá từng thừa số.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho n số dương ở mỗi thừa số, ta được $x_1 + \dots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$ và

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}$$

• **Nhân theo vế.** Hai bất đẳng thức trên cùng chiều với hai vế đều dương, nên nhân theo vế ta được

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$$

• **Trở về dạng thứ nhất.** Chia hai vế cho $x_1 + \dots + x_n > 0$ thu được dạng thứ nhất.

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức của cả hai đánh giá cùng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = \dots = x_n$.

Nhận xét. Bổ đề trên chính là *dạng Engel* của bất đẳng thức Cauchy–Schwarz trong trường hợp các tử số bằng 1. Chương 5 sẽ trình bày dạng tổng quát; ở chương này ta chỉ dùng dạng vừa nêu, và nó được suy ra trực tiếp từ AM–GM nên lời giải vẫn tự đứng được.

Bổ đề 2.2. Với mọi số thực dương a, b ta có $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

• **Chứng minh.** Bất đẳng thức tương đương với $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$. Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương ở mỗi dòng:

$$a^3 + a^3 + b^3 \geq 3\sqrt[3]{a^6b^3} = 3a^2b, \quad a^3 + b^3 + b^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3b^6} = 3ab^2.$$

Cộng theo vế rồi chia cho 3 ta được $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 = ab(a + b)$.

Điểm rơi và quy trình bốn bước

Điểm rơi của một bất đẳng thức là bộ giá trị của các biến, thỏa mãn mọi giả thiết, tại đó dấu đẳng thức xảy ra. Bất đẳng thức AM–GM chỉ chặt tại nơi các số được ghép bằng nhau; vì vậy mỗi đánh giá trung gian trong lời giải đều phải *bảo toàn điểm rơi*: dấu đẳng thức của nó phải xảy ra đúng tại bộ giá trị đã dự đoán. Thật vậy, nếu bộ giá trị dự đoán đúng là nơi đẳng thức của bài toán xảy ra, mà một đánh giá trung gian lại đặt sai chỗ dấu đẳng thức, thì chuỗi lập luận tuy vẫn đúng nhưng kết quả thu được đã yếu hơn kết quả cần chứng minh.

Quy trình bốn bước dùng xuyên suốt chương:

• **Dự đoán dấu đẳng thức.** Trước hết, nếu biểu thức đối xứng với các biến thì dự đoán các biến bằng nhau. Nếu các biến có vai trò khác nhau thì so sánh vai trò từng nhóm để dự đoán tỉ lệ giữa chúng. Nếu ràng buộc có dạng bất phương trình thì dấu đẳng thức thường rơi vào *biên* của miền xác định.

• **Lập sơ đồ điểm rơi.** Tiếp theo, ấn định trước dạng bộ số sẽ đem vào AM–GM, để lại một hệ số k chưa biết, rồi viết điều kiện các số ấy bằng nhau *tại điểm rơi*. Giải ra k .

• **Tách và ghép theo hệ số vừa tìm.** Sau đó viết lại biểu thức thành tổng của các nhóm đúng theo hệ số k , phân dư giữ lại để dùng giả thiết.

• **Ráp đánh giá và kiểm tra.** Cuối cùng, áp dụng AM–GM cho từng nhóm, dùng ràng buộc cho phần dư, cộng lại, rồi kiểm tra rằng tất cả các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra tại điểm rơi đã dự đoán.

Sai lầm thường gặp. Xét bài toán: cho $a \geq 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của $A = a + \frac{1}{a}$. Nhiều lời giải viết ngay $A \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$ rồi kết luận $\min A = 2$. Kết luận này sai, vì dấu đẳng thức của đánh giá đó đòi hỏi $a = \frac{1}{a}$, tức $a = 1$, trái với giả thiết $a \geq 3$. Đánh giá tuy đúng nhưng dấu đẳng thức của nó *không xảy ra được* trên miền đã cho, nên 2 chỉ là một chặn dưới chứ không phải giá trị nhỏ nhất. Ví dụ 2.1 dưới đây xử lý đúng tình huống này.

B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa

Ví dụ 2.1. Cho số thực $a \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a + \frac{1}{a}$.

Phân tích. Trên nửa khoảng $[3; +\infty)$, khi a tăng thì số hạng a tăng nhiều hơn mức giảm của số hạng $\frac{1}{a}$, nên A tăng theo a . Ta dự đoán A nhỏ nhất tại biên $a = 3$, khi đó $A = \frac{10}{3}$. Không được ghép trực tiếp cặp $\left(a; \frac{1}{a}\right)$ vì dấu đẳng thức của nó rơi vào $a = 1$; phải tách a thành hai phần với một hệ số thích hợp.

Điểm rơi. $a = 3$. Ghép cặp $\left(\frac{a}{k}; \frac{1}{a}\right)$ và buộc hai số này bằng nhau tại điểm rơi:

$$a = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{k} = \frac{1}{a}, \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{k} = \frac{1}{3} \Rightarrow k = 9.$$

Lời giải

• **Tách biểu thức.** Với hệ số $k = 9$ vừa tìm, ta viết

$$A = a + \frac{1}{a} = \frac{a}{9} + \frac{1}{a} + \frac{8a}{9}.$$

• **Ráp đánh giá.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho hai số dương $\frac{a}{9}$ và $\frac{1}{a}$, rồi dùng giả thiết $a \geq 3$ cho phần dư:

$$A \geq 2\sqrt{\frac{a}{9} \cdot \frac{1}{a}} + \frac{8a}{9} = \frac{2}{3} + \frac{8a}{9} \geq \frac{2}{3} + \frac{8 \cdot 3}{9} = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}.$$

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Đánh giá thứ nhất trở thành đẳng thức khi $\frac{a}{9} = \frac{1}{a}$, tức $a = 3$ (do $a > 0$); đánh giá thứ hai trở thành đẳng thức cũng khi $a = 3$. Hai dấu đẳng thức xảy ra đồng thời.

Đáp số. $\min A = \frac{10}{3}$, đạt được khi $a = 3$.

Nhận xét. Hệ số $k = 9$ không được chọn tùy tiện mà là nghiệm của một phương trình bậc nhất, sinh ra từ yêu cầu “hai số đem vào AM–GM phải bằng nhau tại điểm rơi”. Ngoài cặp $\left(\frac{a}{k}; \frac{1}{a}\right)$, ta có thể chọn $\left(ka; \frac{1}{a}\right)$, $\left(a; \frac{k}{a}\right)$ hoặc $\left(a; \frac{1}{ka}\right)$; mỗi cách cho một giá trị k khác nhau nhưng cùng dẫn tới một cách tách.

Ví dụ 2.2. Cho số thực $a \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a + \frac{1}{a^2}$.

Phân tích. Lập luận như ví dụ trước, ta dự đoán điểm rơi $a = 3$ và $A = 3 + \frac{1}{9} = \frac{28}{9}$. Sơ đồ điểm rơi cho cặp $\left(\frac{a}{k}; \frac{1}{a^2}\right)$ là

$$a = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{k} = \frac{1}{a^2}, \\ \frac{1}{a^2} = \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{k} = \frac{1}{9} \Rightarrow k = 27.$$

• **Ghép hai số chưa đủ.** Nếu chỉ ghép hai số $\frac{a}{27}$ và $\frac{1}{a^2}$ thì

$$A \geq 2\sqrt{\frac{a}{27} \cdot \frac{1}{a^2}} + \frac{26a}{27} = \frac{2}{3\sqrt{3a}} + \frac{26a}{27},$$

và biến a vẫn còn ở mẫu.

• **Chỗ dễ sai chiều.** Muốn tiếp tục, người giải thường viết $a \geq 3 \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt{3a}} \geq \frac{2}{9}$ — đây là một đánh giá sai chiều: mẫu số càng lớn thì phân thức càng nhỏ, nên ta có $\frac{2}{3\sqrt{3a}} \leq \frac{2}{9}$. Kết quả cuối cùng có thể vẫn đúng số nhưng lập luận đã hỏng.

• **Cách chữa.** Tách a thành hai phần bằng nhau để dùng AM–GM cho ba số, khi đó biến a bị khử hoàn toàn.

Lời giải

• **Tách biểu thức.** Ta viết

$$A = a + \frac{1}{a^2} = \frac{a}{27} + \frac{a}{27} + \frac{1}{a^2} + \frac{25a}{27}.$$

• **Ráp đánh giá.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương $\frac{a}{27}, \frac{a}{27}, \frac{1}{a^2}$:

$$\frac{a}{27} + \frac{a}{27} + \frac{1}{a^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{27} \cdot \frac{a}{27} \cdot \frac{1}{a^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{729}} = \frac{1}{3}.$$

Kết hợp với $\frac{25a}{27} \geq \frac{25 \cdot 3}{27} = \frac{25}{9}$ do $a \geq 3$, ta được

$$A \geq \frac{1}{3} + \frac{25}{9} = \frac{3}{9} + \frac{25}{9} = \frac{28}{9}.$$

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Đánh giá đầu là đẳng thức khi $\frac{a}{27} = \frac{1}{a^2}$, tức $a^3 = 27$, tức $a = 3$; đánh giá sau cũng là đẳng thức khi $a = 3$.

Đáp số. $\min A = \frac{28}{9}$, đạt được khi $a = 3$.

Nhận xét. Nguyên tắc rút ra cho dạng bài này: khi chặn dưới cần tìm là một hằng số, nên tách sao cho bộ số đem vào AM–GM có tích không còn chứa biến. Nếu tích còn biến thì bước sau lại phải đánh giá thêm một lần nữa, và đó là chỗ dễ đi sai chiều. Với biểu thức chứa $\frac{1}{a^n}$, thông thường ta tách a thành n phần bằng nhau.

Ví dụ 2.3. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a + b \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = ab + \frac{64}{ab}$.

Phân tích. Biểu thức chỉ phụ thuộc vào tích $t = ab$. Từ giả thiết và bất đẳng thức $(a + b)^2 \geq 4ab$ ta có $0 < t \leq \frac{(a + b)^2}{4} \leq 4$, nên chỉ cần khảo sát t trên nửa khoảng $(0; 4]$. Trên nửa khoảng ấy, biểu thức $t + \frac{64}{t}$ giảm khi t tăng, nên A nhỏ nhất khi t lớn nhất, tức $t = 4$; điều đó đòi hỏi đồng thời $a = b$ và $a + b = 4$.

Điểm rơi. $a = b = 2$, khi đó $ab = 4$. Ghép cặp $\left(k ab; \frac{64}{ab}\right)$ và buộc chúng bằng nhau tại điểm rơi: $4k = \frac{64}{4} = 16 \Rightarrow k = 4$.

Lời giải

• **Chặn trên của tích.** Từ $(a - b)^2 \geq 0$ suy ra $(a + b)^2 \geq 4ab$, do đó

$$ab \leq \frac{(a + b)^2}{4} \leq \frac{4^2}{4} = 4.$$

• **Tách biểu thức.** Với hệ số $k = 4$ ta viết $A = 4ab + \frac{64}{ab} - 3ab$.

• **Ráp đánh giá.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho hai số dương $4ab$ và $\frac{64}{ab}$, rồi dùng chặn trên $ab \leq 4$ cho phần dư:

$$A \geq 2\sqrt{4ab \cdot \frac{64}{ab}} - 3ab = 2\sqrt{256} - 3ab = 32 - 3ab \geq 32 - 3 \cdot 4 = 20.$$

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Đánh giá thứ nhất là đẳng thức khi $4ab = \frac{64}{ab}$, tức $ab = 4$; đánh giá thứ hai là đẳng thức khi $ab = 4$, mà điều này chỉ xảy ra khi $a = b$ và $a + b = 4$, tức $a = b = 2$.

Đáp số. $\min A = 20$, đạt được khi $a = b = 2$.

Nhận xét. Nếu ghép ngay cặp $\left(ab; \frac{64}{ab}\right)$ thì được $A \geq 16$, nhưng dấu đẳng thức đòi hỏi $ab = 8$, vượt quá chặn trên $ab \leq 4$. Đây đúng là sai lầm thường gặp đã nêu ở mục A: chặn dưới thu được là đúng nhưng không đạt được, nên không phải giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 2.4. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c \geq 16$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{8}{b} + \frac{1}{c}.$$

Phân tích. Các biến có vai trò khác nhau, ràng buộc lại là bất phương trình nên dấu đẳng thức được dự đoán rơi vào biên $a + 2b + 3c = 16$. Với mỗi biến, ta ghép một phần của nó với phân thức nghịch đảo tương ứng; phần còn lại của cả ba biến gộp lại phải đúng bằng một bội của $a + 2b + 3c$ thì mới dùng được giả thiết. Hai yêu cầu đó dẫn tới bộ số $a = 2, b = 4, c = 2$; bộ này nằm đúng trên biên vì $a + 2b + 3c = 2 + 8 + 6 = 16$, nên ta lấy nó làm điểm rơi dự đoán.

Điểm rơi. $a = 2, b = 4, c = 2$. Ba sơ đồ điểm rơi tương ứng là

$$\frac{a}{k} = \frac{3}{a} \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{4}{3}; \quad \frac{b}{m} = \frac{8}{b} \Rightarrow \frac{4}{m} = 2 \Rightarrow m = 2; \quad \frac{c}{n} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{2}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 4.$$

Lời giải

• **Tách biểu thức.** Theo ba hệ số vừa tìm, ta tách $a = \frac{3a}{4} + \frac{a}{4}, b = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}, c = \frac{c}{4} + \frac{3c}{4}$ và nhóm lại:

$$A = \left(\frac{3a}{4} + \frac{3}{a}\right) + \left(\frac{b}{2} + \frac{8}{b}\right) + \left(\frac{c}{4} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{3c}{4}\right).$$

• **Ráp đánh giá.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho từng ngoặc đầu tiên:

$$\frac{3a}{4} + \frac{3}{a} \geq 2\sqrt{\frac{9}{4}} = 3; \quad \frac{b}{2} + \frac{8}{b} \geq 2\sqrt{4} = 4; \quad \frac{c}{4} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1.$$

Ngoặc cuối cùng chính là $\frac{1}{4}(a + 2b + 3c) \geq \frac{16}{4} = 4$. Cộng theo vế bốn đánh giá trên ta được $A \geq 3 + 4 + 1 + 4 = 12$.

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Ba đánh giá đầu là đẳng thức lần lượt khi $a^2 = 4, b^2 = 16, c^2 = 4$, tức $a = 2, b = 4, c = 2$; đánh giá cuối là đẳng thức khi $a + 2b + 3c = 16$. Bộ $(a; b; c) = (2; 4; 2)$ thoả mãn đồng thời tất cả.

Đáp số. $\min A = 12$, đạt được khi $a = 2, b = 4, c = 2$.

Ví dụ 2.5. Cho ba số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 2\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right).$$

Phân tích. Biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán điểm rơi $a = b = c$. Tại đó $\frac{a}{b+c} = \frac{1}{2}$ còn $\frac{b+c}{a} = 2$. Ta ghép $\frac{a}{b+c}$ với một phần của $\frac{b+c}{a}$, phần còn lại giữ nguyên và đánh giá riêng.

Điểm rơi. $a = b = c$. Ghép cặp $\left(\frac{a}{b+c}; m \cdot \frac{b+c}{a}\right)$ và buộc hai số bằng nhau tại điểm rơi: $\frac{1}{2} = 2m \Rightarrow m = \frac{1}{4}$. Như vậy mỗi phân thức $\frac{b+c}{a}$ được chia thành $\frac{b+c}{4a}$ dùng để ghép cặp và $\frac{7}{4} \cdot \frac{b+c}{a}$ để dành lại.

Lời giải

• **Tách biểu thức.** Theo hệ số $m = \frac{1}{4}$ vừa tìm,

$$A = \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{4a}\right) + \left(\frac{b}{c+a} + \frac{c+a}{4b}\right) + \left(\frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{4c}\right) + \frac{7}{4}\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right).$$

• **Đánh giá ba ngoặc đầu.** Với mọi $a, b, c > 0$, theo AM–GM cho hai số dương,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{4a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4a}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

và hai ngoặc còn lại được đánh giá hoàn toàn tương tự. Tổng ba ngoặc không nhỏ hơn 3.

• **Đánh giá phần dư.** Nhóm lại theo từng cặp nghịch đảo,

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6.$$

• **Cộng lại.** Từ hai đánh giá trên, $A \geq 3 + \frac{7}{4} \cdot 6 = 3 + \frac{21}{2} = \frac{27}{2}$.

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Ngoặc thứ nhất là đẳng thức khi $\frac{a}{b+c} = \frac{b+c}{4a}$, tức $b+c = 2a$; tương tự $c+a = 2b$ và $a+b = 2c$. Hệ này cho $a = b = c$, cũng đúng là điều kiện để đánh giá phần dư là đẳng thức.

Đáp số. min $A = \frac{27}{2}$, đạt được khi $a = b = c$.

Ví dụ 2.6. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a + b \leq 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{a^2 + b^2} + \frac{4}{ab} + ab \geq 7.$$

Phân tích. Về trái đối xứng với a, b nên dự đoán điểm rơi $a = b = 1$, khi ấy $a^2 + b^2 = 2ab = 2$ và $ab = 1$. Đại lượng $a^2 + b^2$ nằm ở mẫu, muốn dùng bổ đề cộng mẫu để biến nó thành $(a+b)^2$ thì cần thêm $2ab$ vào mẫu, nghĩa là phải trích ra từ $\frac{4}{ab}$ một phần bằng $\frac{2}{ab}$. Phần $\frac{2}{ab}$ còn lại được chia đôi: một nửa ghép cặp nghịch đảo với ab , một nửa dùng chặn $ab \leq 1$.

Lời giải

• **Hai hệ quả của giả thiết.** Từ $(a-b)^2 \geq 0$ ta có $(a+b)^2 \geq 4ab$, do đó

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \leq 1, \quad (a+b)^2 \leq 4.$$

• **Tách biểu thức.** Ta viết lại về trái thành

$$\frac{4}{a^2 + b^2} + \frac{4}{ab} + ab = \left(\frac{4}{a^2 + b^2} + \frac{2}{ab}\right) + \left(ab + \frac{1}{ab}\right) + \frac{1}{ab}.$$

• **Đánh giá nhóm thứ nhất.** Theo Bổ đề 2.1 cho hai số dương $a^2 + b^2$ và $2ab$,

$$\frac{4}{a^2 + b^2} + \frac{2}{ab} = 4 \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \right) \geq \frac{16}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{16}{(a+b)^2} \geq \frac{16}{4} = 4.$$

• **Đánh giá hai nhóm còn lại.** Theo AM–GM cho hai số dương, $ab + \frac{1}{ab} \geq 2$. Ngoài ra $ab \leq 1$ nên $\frac{1}{ab} \geq 1$.

• **Cộng lại.** Cộng theo về ba đánh giá trên ta được

$$\frac{4}{a^2 + b^2} + \frac{4}{ab} + ab \geq 4 + 2 + 1 = 7.$$

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Nhóm thứ nhất là đẳng thức khi $a^2 + b^2 = 2ab$ và $a + b = 2$; nhóm thứ hai là đẳng thức khi $ab = 1$; đánh giá cuối là đẳng thức khi $ab = 1$. Tất cả cùng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Nhận xét. Việc chia $\frac{4}{ab}$ thành ba phần $\frac{2}{ab}$, $\frac{1}{ab}$ và $\frac{1}{ab}$ không tùy tiện: phần thứ nhất do bổ đề cộng mẫu quy định, phần thứ hai do yêu cầu ghép cặp nghịch đảo với ab tại $ab = 1$ quy định, phần thứ ba là số còn lại. Mỗi phần đều có dấu đẳng thức tại $a = b = 1$, nhờ đó tổng ba đánh giá vẫn chặt.

Ví dụ 2.7. Cho hai số thực a, b thoả mãn $a > b > 0$. Chứng minh rằng $a + \frac{8}{b(a-b)} \geq 6$.

Phân tích. Vế phải là hằng số, nên khi áp dụng AM–GM cho vế trái ta phải khử sạch biến, nghĩa là tích của bộ số đem vào AM–GM không được chứa a, b . Mẫu số $b(a-b)$ gợi ý hai đại lượng dương $a-b$ và b ; mặt khác $a = (a-b) + b$. Vậy ta áp dụng AM–GM cho ba số dương $a-b, b$ và $\frac{8}{b(a-b)}$, tích của chúng bằng 8, không còn biến.

Lời giải

• **Tách biểu thức.** Vì $a > b > 0$ nên $a-b > 0$ và $a = (a-b) + b$, do đó

$$a + \frac{8}{b(a-b)} = (a-b) + b + \frac{8}{b(a-b)}.$$

• **Ráp đánh giá.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương vừa nêu:

$$(a-b) + b + \frac{8}{b(a-b)} \geq 3\sqrt[3]{(a-b) \cdot b \cdot \frac{8}{b(a-b)}} = 3\sqrt[3]{8} = 6.$$

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a-b = b = \frac{8}{b(a-b)}$. Đặt $a-b = b = t > 0$, điều kiện còn lại cho $t = \frac{8}{t^2}$, tức $t^3 = 8$, tức $t = 2$. Vậy $b = 2$ và $a = 4$.

Ví dụ 2.8. Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

(bất đẳng thức Nesbitt).

Phân tích. Điểm rơi là $a = b = c$, tại đó mỗi phân thức bằng $\frac{1}{2}$.

• **Hướng ghép cặp quen thuộc.** Một hướng đi tự nhiên là ghép $\frac{a}{b+c}$ với $\frac{b+c}{4a}$ — hai số này bằng nhau tại điểm rơi — để được $\frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{4a} \geq 1$, cộng ba bất đẳng thức tương tự thì

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 3 - \left(\frac{b+c}{4a} + \frac{c+a}{4b} + \frac{a+b}{4c} \right).$$

• **Hướng ấy bị bác bỏ.** Muốn kết thúc, ta phải chứng minh $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \leq 6$. Đánh giá này sai: với $a = b = 1, c = 2$ vế trái bằng $3 + 3 + 1 = 7 > 6$. Điểm rơi tuy được bảo toàn nhưng chiều bất đẳng thức đã bị đảo, nên hướng đi phải bị bác bỏ.

• **Chuyển hướng.** Ta chuyển sang hướng thứ hai, dựa trên đồng nhất thức $\frac{a}{b+c} + 1 = \frac{a+b+c}{b+c}$.

Lời giải

• **Quy về một bất đẳng thức tích.** Cộng 1 vào mỗi phân thức,

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) + 3 = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right).$$

Vậy chỉ cần chứng minh $2(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9$.

• **Đánh giá thừa số thứ nhất.** Vì $2(a+b+c) = (a+b) + (b+c) + (c+a)$, theo AM–GM cho ba số dương,

$$2(a+b+c) \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

• **Đánh giá thừa số thứ hai.** Cũng theo AM–GM cho ba số dương,

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

• **Nhân theo vế.** Hai bất đẳng thức trên cùng chiều và hai vế đều dương nên được phép nhân theo vế:

$$2(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9,$$

suy ra $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$.

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Cả hai đánh giá đều là đẳng thức khi và chỉ khi $a+b = b+c = c+a$, tức $a = b = c$.

Nhận xét. Ví dụ này cho thấy bảo toàn điểm rơi là điều kiện cần chứ chưa đủ. Hướng đi thứ nhất giữ đúng điểm rơi nhưng lại quy bài toán về một mệnh đề sai, vì phép đánh giá đã đẩy bài toán sang chiều ngược lại. Khi rơi vào tình huống ấy, cách xử lý thường dùng là đổi cách nhóm chứ không phải điều chỉnh hệ số. Đề bài này đã được giải ở Ví dụ 1.8 bằng phép đổi biến $x = b+c, y = c+a, z = a+b$; nó còn trở lại ở Ví dụ 5.1, Ví dụ 7.6 và Ví dụ 9.1.

Ví dụ 2.9*. Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a+b)(a+b+c)^2 \geq 16abc.$$

Phân tích. Bất đẳng thức không đối xứng với cả ba biến, nên dự đoán quen thuộc $a = b = c$ chưa chắc dùng được: thử $a = b = c = 1$ thì vế trái bằng 18, vế phải bằng 16, hai vế không bằng nhau, nên phải loại dự đoán ấy. Ta xét vai trò từng nhóm.

• **Cặp biến bình đẳng.** Trước hết a và b có vai trò như nhau, vì đổi chỗ chúng thì hai vế không đổi; do đó dự đoán $a = b$, và khi ấy $4ab = (a+b)^2$.

• **So vai trò với biến thứ ba.** Viết $16abc = 4c \cdot 4ab$ rồi dùng $4ab \leq (a+b)^2$, ta thấy chỉ cần chứng minh $(a+b)(a+b+c)^2 \geq 4c(a+b)^2$, tức là $(a+b+c)^2 \geq 4c(a+b)$; ở bất đẳng thức này $a+b$ và c hoán đổi được cho nhau, nên dự đoán tiếp $c = a+b$.

• **Chốt điểm rơi.** Tóm lại, dấu đẳng thức được dự đoán xảy ra khi $a = b$ và $c = a+b$, tức $c = 2a = 2b$.

Điểm rơi. $c = 2a = 2b$; chẳng hạn $(a; b; c) = (1; 1; 2)$, khi đó hai vế cùng bằng 32.

Lời giải

• **Chọn hai đánh giá bảo toàn điểm rơi.** Theo hệ quả $(x+y)^2 \geq 4xy$ đã nêu ở mục A,

$$(a+b)^2 \geq 4ab \geq 0, \quad (a+b+c)^2 \geq 4c(a+b) \geq 0.$$

Đánh giá thứ nhất là đẳng thức khi $a = b$, đánh giá thứ hai là đẳng thức khi $c = a+b$; cả hai đều đúng tại điểm rơi đã dự đoán.

• **Nhân theo vế.** Hai bất đẳng thức trên cùng chiều và hai vế đều không âm nên

$$(a+b)^2(a+b+c)^2 \geq 16abc(a+b).$$

• **Rút gọn.** Chia hai vế cho $a+b > 0$ ta được $(a+b)(a+b+c)^2 \geq 16abc$.

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ và $c = a+b$, tức $c = 2a = 2b > 0$.

Nhận xét. Khi các biến không bình đẳng, ta tìm điểm rơi bằng cách so sánh vai trò của từng nhóm đại lượng trong biểu thức, thay vì mặc định cho các biến bằng nhau. Cách làm đó mở rộng được: với bốn biến, cùng lập luận ấy cho $a = b = c$ và $d = a+b+c$, dẫn tới Bài 2.11 ở mục sau.

C. Bài tập có lời giải

Bài 2.1. Cho số thực $a \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^2 + \frac{16}{a}$.

Phân tích. Trên nửa khoảng $[4; +\infty)$, khi a tăng thì số hạng a^2 tăng nhiều hơn mức giảm của số hạng $\frac{16}{a}$, nên A tăng theo a và ta dự đoán A nhỏ nhất tại biên $a = 4$, khi đó $A = 16 + 4 = 20$. Phân thức có mẫu bậc nhất trong khi số hạng kia có bậc hai, vì vậy ta tách $\frac{16}{a}$ thành hai phần bằng nhau rồi dùng AM–GM cho ba số; cách tách ấy làm cho tích của bộ số đem vào AM–GM không còn chứa biến.

Điểm rơi. $a = 4$. Ghép bộ ba $\left(\frac{a^2}{k}; \frac{8}{a}; \frac{8}{a}\right)$ và buộc ba số này bằng nhau tại điểm rơi:

$$a = 4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{k} = \frac{8}{a}, \\ \frac{8}{a} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{16}{k} = 2 \Rightarrow k = 8.$$

Lời giải

• **Tách biểu thức.** Với hệ số $k = 8$ vừa tìm, ta viết

$$A = a^2 + \frac{16}{a} = \frac{a^2}{8} + \frac{8}{a} + \frac{8}{a} + \frac{7a^2}{8}.$$

- **Đánh giá ba số hạng đầu.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương $\frac{a^2}{8}, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$:

$$\frac{a^2}{8} + \frac{8}{a} + \frac{8}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{8} \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}} = 3\sqrt[3]{8} = 6.$$

- **Đánh giá phần dư.** Vì $a \geq 4 > 0$ nên $a^2 \geq 16$, do đó $\frac{7a^2}{8} \geq \frac{7 \cdot 16}{8} = 14$.

- **Cộng hai đánh giá cùng chiều.** Cộng theo vế ta được $A \geq 6 + 14 = 20$.

- **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Đánh giá thứ nhất là đẳng thức khi $\frac{a^2}{8} = \frac{8}{a}$, tức $a^3 = 64$, tức $a = 4$; đánh giá thứ hai là đẳng thức khi $a = 4$. Hai dấu đẳng thức xảy ra đồng thời tại $a = 4$, và giá trị này thỏa mãn giả thiết.

Đáp số. $\min A = 20$, đạt được khi $a = 4$.

Bài 2.2. Cho số thực $a \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a + \frac{9}{a}$.

Phân tích. Cũng như bài trên, A tăng theo a trên nửa khoảng $[4; +\infty)$ nên dự đoán A nhỏ nhất tại biên $a = 4$, khi đó $A = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$. Không được ghép trực tiếp cặp $\left(a; \frac{9}{a}\right)$: dấu đẳng thức của đánh giá ấy đòi hỏi $a = \frac{9}{a}$, tức $a = 3$, nằm ngoài miền đang xét. Phải tách a thành hai phần theo một hệ số thích hợp.

Điểm rơi. $a = 4$. Ghép cặp $\left(\frac{a}{k}; \frac{9}{a}\right)$ và buộc hai số này bằng nhau tại điểm rơi:

$$a = 4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{k} = \frac{9}{a} \\ \frac{9}{a} = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{k} = \frac{9}{4} \Rightarrow k = \frac{16}{9},$$

nghĩa là phần đem ghép cặp là $\frac{a}{k} = \frac{9a}{16}$.

Lời giải

- **Tách biểu thức.** Theo hệ số vừa tìm,

$$A = a + \frac{9}{a} = \frac{9a}{16} + \frac{9}{a} + \frac{7a}{16}.$$

- **Ghép cặp nghịch đảo.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho hai số dương $\frac{9a}{16}$ và $\frac{9}{a}$:

$$\frac{9a}{16} + \frac{9}{a} \geq 2\sqrt{\frac{9a}{16} \cdot \frac{9}{a}} = 2\sqrt{\frac{81}{16}} = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}.$$

- **Đánh giá phần dư.** Vì $a \geq 4$ nên $\frac{7a}{16} \geq \frac{7 \cdot 4}{16} = \frac{7}{4}$.

- **Cộng hai đánh giá cùng chiều.** Cộng theo vế ta được

$$A \geq \frac{9}{2} + \frac{7}{4} = \frac{18}{4} + \frac{7}{4} = \frac{25}{4}.$$

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Đánh giá thứ nhất là đẳng thức khi $\frac{9a}{16} = \frac{9}{a}$, tức $a^2 = 16$, tức $a = 4$ (do $a > 0$); đánh giá thứ hai là đẳng thức cũng khi $a = 4$. Hai dấu đẳng thức xảy ra đồng thời.

Đáp số. $\min A = \frac{25}{4}$, đạt được khi $a = 4$.

Bài 2.3. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a + b \leq 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \geq 1.$$

Phân tích. Về trái đối xứng với a, b nên dự đoán $a = b$; mặt khác ràng buộc là bất phương trình nên dấu đẳng thức được dự đoán rơi vào biên $a + b = 2$. Hai điều đó cho điểm rơi $a = b = 1$, khi ấy $a^2 + b^2 = 2$, $2ab = 2$ và vế trái bằng $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Điều đáng chú ý là hai mẫu số có tổng $(a^2 + b^2) + 2ab = (a + b)^2$, đúng là đại lượng mà giả thiết khống chế; đó chính là dấu hiệu để dùng bổ đề cộng mẫu.

Lời giải

• **Dùng bổ đề cộng mẫu.** Vì $a, b > 0$ nên $a^2 + b^2 > 0$ và $2ab > 0$. Áp dụng Bổ đề 2.1 cho hai số dương $a^2 + b^2$ và $2ab$:

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{4}{(a + b)^2}.$$

• **Dùng ràng buộc của giả thiết.** Từ $0 < a + b \leq 2$ suy ra $0 < (a + b)^2 \leq 4$, do đó

$$\frac{4}{(a + b)^2} \geq \frac{4}{4} = 1.$$

• **Nối hai đánh giá.** Ghép hai bất đẳng thức trên ta được $\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \geq 1$, đúng là điều phải chứng minh.

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Đánh giá thứ nhất là đẳng thức khi $a^2 + b^2 = 2ab$, tức $(a - b)^2 = 0$, tức $a = b$; đánh giá thứ hai là đẳng thức khi $a + b = 2$. Hai điều kiện cùng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Bài 2.4. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $2a + b + c \geq 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = a + b + c + \frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c}.$$

Phân tích. Bài toán có cùng cấu trúc với Ví dụ 2.4: ba biến vai trò khác nhau, ràng buộc là bất phương trình nên dấu đẳng thức được dự đoán rơi vào biên $2a + b + c = 8$. Với mỗi biến ta ghép một phần của nó với phân thức nghịch đảo tương ứng; ba phần còn lại gộp lại phải đúng bằng một bội của $2a + b + c$ thì mới dùng được giả thiết. Hai yêu cầu ấy dẫn tới bộ $a = b = c = 2$; bộ này nằm đúng trên biên vì $2 \cdot 2 + 2 + 2 = 8$, nên ta lấy nó làm điểm rơi dự đoán, khi đó $A = 10$.

Điểm rơi. $a = b = c = 2$. Ba sơ đồ điểm rơi tương ứng là

$$\begin{aligned}\frac{a}{k} = \frac{2}{a} &\Rightarrow \frac{2}{k} = 1 \Rightarrow k = 2; & \frac{b}{m} = \frac{3}{b} &\Rightarrow \frac{2}{m} = \frac{3}{2} \Rightarrow m = \frac{4}{3}; \\ \frac{c}{n} = \frac{3}{c} &\Rightarrow \frac{2}{n} = \frac{3}{2} \Rightarrow n = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Lời giải

• **Tách biểu thức.** Theo ba hệ số vừa tìm, ta tách $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, $b = \frac{3b}{4} + \frac{b}{4}$, $c = \frac{3c}{4} + \frac{c}{4}$ và nhóm lại:

$$A = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) + \left(\frac{3b}{4} + \frac{b}{4}\right) + \left(\frac{3c}{4} + \frac{c}{4}\right) + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4}\right).$$

• **Đánh giá ba ngoặc đầu.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho hai số dương trong mỗi ngoặc:

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \geq 2\sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = 2; \quad \frac{3b}{4} + \frac{b}{4} \geq 2\sqrt{\frac{9}{4}} = 3; \quad \frac{3c}{4} + \frac{c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{9}{4}} = 3.$$

• **Đánh giá phần dư.** Ngoặc cuối cùng chính là $\frac{1}{4}(2a + b + c)$, mà theo giả thiết $2a + b + c \geq 8$, nên

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4} \geq \frac{8}{4} = 2.$$

• **Cộng bốn đánh giá cùng chiều.** Cộng theo vế ta được $A \geq 2 + 3 + 3 + 2 = 10$.

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Ba đánh giá đầu là đẳng thức lần lượt khi $a^2 = 4$, $b^2 = 4$, $c^2 = 4$, tức $a = b = c = 2$ (các biến đều dương); đánh giá cuối là đẳng thức khi $2a + b + c = 8$. Bộ $(a; b; c) = (2; 2; 2)$ thoả mãn đồng thời tất cả các điều kiện ấy.

Đáp số. min $A = 10$, đạt được khi $a = b = c = 2$.

Bài 2.5. Cho hai số thực a, b thoả mãn $a > b > 0$. Chứng minh rằng $a + \frac{27}{b(a-b)} \geq 9$.

Phân tích. Vế phải là hằng số, nên bộ số đem vào AM–GM phải có tích không chứa biến. Mẫu số $b(a-b)$ gợi ra hai đại lượng dương $a-b$ và b ; mặt khác $a = (a-b) + b$. Vậy ta áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương $a-b$, b và $\frac{27}{b(a-b)}$: tích của chúng bằng 27, đúng là một hằng số. Đây là lược đồ của Ví dụ 2.7 với hằng số 8 được thay bởi 27.

Lời giải

• **Tách biểu thức.** Từ $a > b > 0$ suy ra $a-b > 0$, đồng thời $a = (a-b) + b$, do đó

$$a + \frac{27}{b(a-b)} = (a-b) + b + \frac{27}{b(a-b)}.$$

• **Ráp đánh giá.** Ba số $a-b$, b và $\frac{27}{b(a-b)}$ đều dương, nên theo bất đẳng thức AM–GM cho ba số,

$$(a-b) + b + \frac{27}{b(a-b)} \geq 3\sqrt[3]{(a-b) \cdot b \cdot \frac{27}{b(a-b)}} = 3\sqrt[3]{27} = 9.$$

Vậy $a + \frac{27}{b(a-b)} \geq 9$.

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a - b = b = \frac{27}{b(a-b)}$. Đặt $a - b = b = t > 0$, điều kiện còn lại trở thành $t = \frac{27}{t^2}$, tức $t^3 = 27$, tức $t = 3$. Khi đó $b = 3$ và $a = t + b = 6$, bộ số này thoả mãn $a > b > 0$.

Bài 2.6. Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn $abc = 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{8}.$$

Phân tích. Bất đẳng thức có chiều $\leq$, nên mỗi phân thức ở vế trái phải được chặn trên; muốn vậy ta chặn dưới từng mẫu số. Biểu thức đối xứng với ba biến, kết hợp ràng buộc $abc = 8$, ta dự đoán điểm rơi $a = b = c = 2$.

• **Nhận ra bổ đề ở mẫu.** Mẫu $a^3 + b^3 + abc$ chứa tổng $a^3 + b^3$, đúng là vế trái của Bổ đề 2.2.
 • **Hình dung bước rút gọn.** Sau khi thay $a^3 + b^3$ bởi $ab(a + b)$, mẫu số trở thành $ab(a + b + c)$; ba phân thức mới quy đồng được về cùng mẫu $abc(a + b + c)$ và tổng ba tử số là $a + b + c$, nhờ đó rút gọn hết.

Lời giải

• **Chặn dưới từng mẫu số.** Theo Bổ đề 2.2, với mọi $a, b > 0$ ta có $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, do đó

$$a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b) + abc = ab(a + b + c) > 0.$$

Áp dụng bổ đề ấy cho cặp $(b; c)$ rồi cho cặp $(c; a)$, ta cũng có

$$b^3 + c^3 + abc \geq bc(a + b + c) > 0, \quad c^3 + a^3 + abc \geq ca(a + b + c) > 0.$$

• **Chặn trên từng phân thức.** Ở mỗi bất đẳng thức trên hai vế đều dương, nên lấy nghịch đảo sẽ đảo chiều bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a + b + c)}; \quad \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{1}{bc(a + b + c)}; \quad \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{ca(a + b + c)}.$$

Nhân cả tử và mẫu của vế phải thứ nhất với c , của vế phải thứ hai với a , của vế phải thứ ba với b , ba phân thức ấy có chung mẫu số $abc(a + b + c)$:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{c}{abc(a + b + c)}; \quad \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{a}{abc(a + b + c)}; \quad \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{b}{abc(a + b + c)}.$$

• **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Cộng theo vế và dùng $abc = 8$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} &\leq \frac{c + a + b}{abc(a + b + c)} \\ &= \frac{1}{abc} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Ba lần dùng Bổ đề 2.2 lần lượt là đẳng thức khi $a = b, b = c, c = a$, nên cả ba cùng là đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$. Kết hợp với $abc = 8$ ta được $a^3 = 8$, tức $a = b = c = 2$.

Bài 2.7. Cho ba số thực a, b, c bất kì. Chứng minh rằng

$$(a^2 + 2b^2)(b^2 + 2c^2)(c^2 + 2a^2) \geq 27a^2b^2c^2.$$

Phân tích. Trong cả hai vế chỉ có a^2, b^2, c^2 xuất hiện, nên có thể làm việc với ba số không âm ấy thay cho a, b, c . Hệ số $27 = 3^3$ ở vế phải gợi ý đánh giá mỗi thừa số của vế trái bởi 3 lần một căn bậc ba; muốn tích ba căn ấy đúng bằng $a^2b^2c^2$ thì trong mỗi thừa số ta phải tách $2b^2 = b^2 + b^2$ rồi dùng AM–GM cho ba số. Điểm rơi được dự đoán tại $|a| = |b| = |c|$, khi đó mỗi thừa số bằng $3a^2$ và hai vế cùng bằng $27a^6$.

Lời giải

• **Đánh giá thừa số thứ nhất.** Ba số a^2, b^2, b^2 đều không âm, nên theo bất đẳng thức AM–GM cho ba số,

$$a^2 + 2b^2 = a^2 + b^2 + b^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot b^2} = 3\sqrt[3]{a^2b^4} \geq 0.$$

• **Đánh giá hai thừa số còn lại.** Lập lại lập luận trên với bộ ba b^2, c^2, c^2 rồi với bộ ba c^2, a^2, a^2 , ta được

$$b^2 + 2c^2 \geq 3\sqrt[3]{b^2c^4} \geq 0, \quad c^2 + 2a^2 \geq 3\sqrt[3]{c^2a^4} \geq 0.$$

• **Nhân theo vế.** Ba bất đẳng thức trên cùng chiều và mọi vế đều không âm nên được phép nhân theo vế:

$$(a^2 + 2b^2)(b^2 + 2c^2)(c^2 + 2a^2) \geq 27\sqrt[3]{a^2b^4 \cdot b^2c^4 \cdot c^2a^4}.$$

• **Rút gọn vế phải.** Biểu thức dưới dấu căn bằng $a^6b^6c^6$, mà $\sqrt[3]{a^6b^6c^6} = a^2b^2c^2$, nên vế phải bằng $27a^2b^2c^2$. Ta thu được điều phải chứng minh.

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Ba đánh giá ở trên lần lượt là đẳng thức khi $a^2 = b^2, b^2 = c^2, c^2 = a^2$. Cả ba cùng xảy ra khi và chỉ khi $|a| = |b| = |c|$; chẳng hạn bộ $(a; b; c) = (2; -2; 2)$ cũng làm hai vế bằng nhau.

Bài 2.8. Cho hai số thực dương a, b . Chứng minh rằng $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 \geq 8(a + b)\sqrt{ab}$.

Phân tích. Cả hai vế chỉ phụ thuộc vào hai đại lượng đối xứng $s = a + b$ và $p = \sqrt{ab}$: thật vậy $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b = s + 2p$, còn vế phải bằng $8sp$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $(s + 2p)^2 \geq 4 \cdot s \cdot 2p$, đúng là hệ quả $(x + y)^2 \geq 4xy$ đã nêu ở mục A với $x = s$ và $y = 2p$. Vì vế trái đối xứng, điểm rơi được dự đoán tại $a = b$.

Lời giải

• **Đặt hai đại lượng đối xứng.** Đặt $s = a + b > 0$ và $p = \sqrt{ab} > 0$. Khi đó

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b = s + 2p,$$

suy ra $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 = (s + 2p)^2$; đồng thời vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh là $8(a + b)\sqrt{ab} = 8sp$.

- **Dùng hệ quả bình phương tổng.** Áp dụng $(x + y)^2 \geq 4xy$ với $x = s$ và $y = 2p$:

$$(s + 2p)^2 \geq 4 \cdot s \cdot 2p = 8sp.$$

- **Trở về biến ban đầu.** Thay $s = a + b$ và $p = \sqrt{ab}$ vào bất đẳng thức vừa nhận được, ta có $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 \geq 8(a + b)\sqrt{ab}$.
- **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Hệ quả $(x + y)^2 \geq 4xy$ là đẳng thức khi $x = y$, tức $s = 2p$, tức $a + b = 2\sqrt{ab}$. Điều này tương đương với $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$, tức $a = b$.

Bài 2.9. Cho số thực a bất kì. Chứng minh rằng $\frac{a^2 + 5}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 4$.

Phân tích. Vế trái chỉ phụ thuộc vào a^2 , hơn nữa tử số viết được thành $a^2 + 5 = (a^2 + 1) + 4$. Đặt $t = \sqrt{a^2 + 1}$ thì $t \geq 1$ và $t^2 = a^2 + 1$, nên vế trái trở thành $\frac{t^2 + 4}{t} = t + \frac{4}{t}$. Cặp nghịch đảo này có dấu đẳng thức tại $t = 2$; giá trị ấy nằm trong miền $t \geq 1$ nên được phép ghép cặp trực tiếp, không phải tách hệ số như hai bài đầu mục này.

Lời giải

- **Đổi biến về một ẩn.** Đặt $t = \sqrt{a^2 + 1}$. Vì $a^2 \geq 0$ nên $t^2 = a^2 + 1 \geq 1$, do đó $t \geq 1 > 0$; ngoài ra $a^2 + 5 = t^2 + 4$. Vậy

$$\frac{a^2 + 5}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{t^2 + 4}{t} = t + \frac{4}{t}.$$

- **Ghép cặp nghịch đảo.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho hai số dương t và $\frac{4}{t}$:

$$t + \frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} = 2\sqrt{4} = 4.$$

Vậy $\frac{a^2 + 5}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 4$ với mọi số thực a .

- **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức xảy ra khi $t = \frac{4}{t}$, tức $t^2 = 4$, tức $t = 2$ (do $t > 0$); giá trị này thỏa mãn điều kiện $t \geq 1$. Khi đó $a^2 + 1 = 4$, tức $a^2 = 3$, tức $a = \pm\sqrt{3}$.

Bài 2.10. Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$a\left(\frac{a}{2} + \frac{8}{bc}\right) + b\left(\frac{b}{2} + \frac{8}{ca}\right) + c\left(\frac{c}{2} + \frac{8}{ab}\right) \geq 18.$$

Phân tích. Ý tưởng trung tâm là rẽ vế trái thành ba bài một biến cùng dạng. Biểu thức đối xứng nên dự đoán $a = b = c$; bài một biến cho tiếp $a = 2$, vậy điểm rơi dự đoán là $a = b = c = 2$, khi đó vế trái bằng 18.

- **Hai cụm sau khai triển.** Nhân vào từng ngoặc, vế trái gồm hai cụm: cụm bậc hai $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$ và cụm phân thức $\frac{8(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$.
- **Khử sự đan xen ba biến.** Cụm thứ hai còn ba biến đan xen nên chưa tách bài toán ra được; ta hạ nó xuống dạng mỗi số hạng chỉ chứa một biến nhờ hệ quả $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.
- **Đưa về bài một biến.** Sau bước ấy bài toán rã thành ba bài một biến giống hệt nhau, mỗi bài có dạng $\frac{a^2}{2} + \frac{8}{a}$, cùng kiểu với Bài 2.1 ở đầu mục này và được xử lý theo nguyên tắc đã rút ra ở Ví dụ 2.2: tách sao cho tích của bộ số đem vào AM–GM không còn chứa biến, ở đây là tách $\frac{8}{a}$ thành hai phần bằng nhau.

Lời giải

- **Viết gọn về trái.** Nhân vào từng ngoặc rồi quy đồng ba phân thức về mẫu chung abc :

$$\begin{aligned} & a \left(\frac{a}{2} + \frac{8}{bc} \right) + b \left(\frac{b}{2} + \frac{8}{ca} \right) + c \left(\frac{c}{2} + \frac{8}{ab} \right) \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 8 \left(\frac{a^2}{abc} + \frac{b^2}{abc} + \frac{c^2}{abc} \right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{8(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}. \end{aligned}$$

- **Hạ cụm phân thức về một biến.** Theo hệ quả $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ đã nêu ở mục A, và vì $abc > 0$,

$$\frac{8(a^2 + b^2 + c^2)}{abc} \geq \frac{8(ab + bc + ca)}{abc} = \frac{8}{c} + \frac{8}{a} + \frac{8}{b}.$$

- **Nhóm lại thành ba bài một biến.** Từ hai bước trên, vế trái không nhỏ hơn

$$\left(\frac{a^2}{2} + \frac{8}{a} \right) + \left(\frac{b^2}{2} + \frac{8}{b} \right) + \left(\frac{c^2}{2} + \frac{8}{c} \right).$$

- **Đánh giá từng bài một biến.** Tách $\frac{8}{a} = \frac{4}{a} + \frac{4}{a}$ rồi áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương $\frac{a^2}{2}, \frac{4}{a}, \frac{4}{a}$:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{8}{a} = \frac{a^2}{2} + \frac{4}{a} + \frac{4}{a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^2}{2} \cdot \frac{4}{a} \cdot \frac{4}{a}} = 3 \sqrt[3]{8} = 6.$$

Cũng với bộ ba tương ứng của b và của c , ta có $\frac{b^2}{2} + \frac{8}{b} \geq 6$ và $\frac{c^2}{2} + \frac{8}{c} \geq 6$.

- **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Cộng theo vế, vế trái của đề bài không nhỏ hơn $6 + 6 + 6 = 18$.
- **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Hệ quả dùng ở bước thứ hai là đẳng thức khi $a = b = c$; ba đánh giá AM–GM là đẳng thức khi $\frac{a^2}{2} = \frac{4}{a}$, tức $a^3 = 8$, tức $a = 2$, và tương tự $b = 2, c = 2$. Tất cả cùng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Bài 2.11*. Cho bốn số thực dương a, b, c, d . Chứng minh rằng

$$(a + b + c)^2(a + b + c + d)^2 \geq 108abcd.$$

Phân tích. Vế phải tách được thành $108abcd = 27abc \cdot 4d$: phần $27abc$ ứng với bất đẳng thức AM–GM cho ba số a, b, c , phần $4d$ ứng với hệ quả $(x + y)^2 \geq 4xy$ áp dụng cho $x = a + b + c$ và $y = d$.

• **Xét vai trò các biến.** Ba biến a, b, c có vai trò như nhau vì đổi chỗ chúng thì hai vế không đổi, nên dự đoán $a = b = c$; trong đánh giá thứ hai, $a + b + c$ và d hoán đổi được cho nhau nên dự đoán tiếp $d = a + b + c$.

• **Liên hệ với ví dụ trước.** Đây đúng là cách mở rộng Ví dụ 2.9 đã nói ở lời bình của ví dụ ấy, chỉ khác là tăng trong dùng AM–GM cho ba số thay vì hai số.

Điểm rơi. $a = b = c$ và $d = 3a$; chẳng hạn $(a; b; c; d) = (1; 1; 1; 3)$, khi đó vế trái bằng $3^2 \cdot 6^2 = 324$ và vế phải bằng $108 \cdot 3 = 324$.

Lời giải

• **Đánh giá tầng trong.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương a, b, c ta được $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Hai vế đều dương nên lập phương được, và

$$(a + b + c)^3 \geq 27abc \geq 0.$$

• **Đánh giá tầng ngoài.** Theo hệ quả $(x + y)^2 \geq 4xy$ ở mục A với $x = a + b + c$ và $y = d$,

$$(a + b + c + d)^2 \geq 4d(a + b + c) \geq 0.$$

Đánh giá thứ nhất là đẳng thức khi $a = b = c$, đánh giá thứ hai là đẳng thức khi $d = a + b + c$; cả hai đều đúng tại điểm rơi đã dự đoán.

• **Nhân theo vế.** Hai bất đẳng thức trên cùng chiều và mọi vế đều không âm nên được phép nhân theo vế:

$$(a + b + c)^3(a + b + c + d)^2 \geq 27abc \cdot 4d(a + b + c) = 108abcd(a + b + c).$$

• **Rút gọn.** Chia hai vế cho $a + b + c > 0$ ta được $(a + b + c)^2(a + b + c + d)^2 \geq 108abcd$.

• **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ và $d = a + b + c$, tức $a = b = c$ và $d = 3a$.

Bài 2.12. Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{2a}{a^4 + b^2} + \frac{2b}{b^4 + c^2} + \frac{2c}{c^4 + a^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Phân tích. Bất đẳng thức có chiều $\leq$ nên mỗi phân thức ở vế trái phải được chặn trên, muốn vậy ta chặn dưới mẫu số của nó. Điểm rơi phải đồng thời thoả $a = b = c$ và $a^4 = b^2$, nên dự đoán $a = b = c = 1$.

• **Chìa khoá ở mẫu số.** Mẫu $a^4 + b^2$ là tổng của hai số dương có tích $a^4 b^2 = (a^2 b)^2$ là một bình phương, nên AM–GM cho hai số cho ngay $a^4 + b^2 \geq 2a^2 b$ và phân thức được chặn bởi $\frac{1}{ab}$.

- **Phần việc còn lại.** Tiếp theo ta so sánh $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$ với $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, đó là một hệ quả quen thuộc ở mục A.

Lời giải

- **Chặn dưới từng mẫu số.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho hai số dương a^4 và b^2 ,

$$a^4 + b^2 \geq 2\sqrt{a^4 b^2} = 2a^2 b > 0.$$

Lập lại với cặp $(b^4; c^2)$ rồi với cặp $(c^4; a^2)$, ta cũng có $b^4 + c^2 \geq 2b^2 c > 0$ và $c^4 + a^2 \geq 2c^2 a > 0$.

- **Chặn trên từng phân thức.** Ở mỗi bất đẳng thức trên hai vế đều dương, nên tử số dương giữ nguyên còn mẫu số lớn hơn sẽ cho phân thức nhỏ hơn:

$$\begin{aligned} \frac{2a}{a^4 + b^2} &\leq \frac{2a}{2a^2 b} = \frac{1}{ab}; & \frac{2b}{b^4 + c^2} &\leq \frac{2b}{2b^2 c} = \frac{1}{bc}; \\ \frac{2c}{c^4 + a^2} &\leq \frac{2c}{2c^2 a} = \frac{1}{ca}. \end{aligned}$$

- **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Cộng theo vế,

$$\frac{2a}{a^4 + b^2} + \frac{2b}{b^4 + c^2} + \frac{2c}{c^4 + a^2} \leq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}.$$

- **Đánh giá vế phải trung gian.** Theo hệ quả $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ở mục A với $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$,

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

- **Nối hai đánh giá.** Ghép hai bất đẳng thức cuối ta được điều phải chứng minh.

- **Kiểm tra dấu đẳng thức.** Ba đánh giá ở bước đầu là đẳng thức khi $a^4 = b^2$, $b^4 = c^2$, $c^4 = a^2$; vì các biến đều dương, điều đó có nghĩa là $b = a^2$, $c = b^2$, $a = c^2$. Đánh giá cuối là đẳng thức khi $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, tức $a = b = c$. Thay vào $b = a^2$ được $a = a^2$, tức $a = 1$. Vậy tất cả các dấu đẳng thức cùng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

CHƯƠNG 3

Kỹ thuật tách, ghép và thêm bớt trong AM–GM

03

Năm thao tác đưa một biểu thức về đúng dạng áp dụng được bất đẳng thức AM–GM mà vẫn bảo toàn dấu đẳng thức.

A. Kiến thức trọng tâm

Bất đẳng thức AM–GM

Cho n số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$. Khi đó

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Trong các tài liệu trong nước, bất đẳng thức này còn được gọi là bất đẳng thức Cauchy. Hai trường hợp riêng được dùng nhiều nhất là

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad (x, y \geq 0), \quad x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \quad (x, y, z \geq 0).$$

$$(x + y)^2 \geq 4xy, \quad \frac{x^2}{y} \geq 2x - y \quad (y > 0).$$

Hai đánh giá trên đều là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức AM–GM cho hai số: đánh giá thứ nhất tương đương với $(x - y)^2 \geq 0$, còn đánh giá thứ hai chính là $\frac{x^2}{y} + y \geq 2x$. Hai đánh giá này được sử dụng nhiều lần trong chương.

Nguyên tắc bảo toàn dấu đẳng thức

Mọi kỹ thuật của chương đều được xây dựng trên một nguyên tắc duy nhất: mỗi lần áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho một nhóm số, dấu đẳng thức của riêng bước đó phải xảy ra đúng tại điểm rơi của bài toán ban đầu. Quy trình làm việc gồm ba bước.

1. Dự đoán điểm rơi, thường dựa vào tính đối xứng của giả thiết và của biểu thức cần đánh giá.
 2. Chọn cách tách hạng tử, chọn đại lượng thêm vào hoặc chọn hằng số nhân thêm, trong đó để lại một tham số chưa xác định.
 3. Áp dụng điều kiện “các số trong mỗi nhóm bằng nhau tại điểm rơi” để tìm tham số đó.
- Nếu bỏ qua bước thứ ba thì chuỗi đánh giá tuy vẫn đúng nhưng thường chỉ cho một cận

yếu hơn cần cần chứng minh, và khi ấy phép chứng minh không hoàn tất được theo chuỗi đánh giá đó.

Bổ đề 3.1. (tổng nghịch đảo) Với n số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ ta có

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Trường hợp $n = 2$ cho đánh giá quen thuộc $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

• **Chứng minh.** Theo bất đẳng thức AM–GM,

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \cdot n \sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \dots x_n}} = n^2.$$

Chia hai vế cho $x_1 + \dots + x_n > 0$ ta được điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức của cả hai lần áp dụng đều đòi hỏi các số bằng nhau.

Bổ đề này chính là Bổ đề 2.1 ở Chương 2; nó được nhắc lại kèm chứng minh vì được dùng liên tục trong chương.

Bổ đề 3.2. (các lược đồ ghép cặp đối xứng) Cho X, Y, Z và A, B, C là các số không âm. Giả sử ba tích XY, YZ, ZX chặn được bình phương của ba số A, B, C theo một cách ghép nào đó, chẳng hạn

$$XY \geq A^2, \quad YZ \geq B^2, \quad ZX \geq C^2.$$

Khi đó $X + Y + Z \geq A + B + C$ và $XYZ \geq ABC$. Nếu ba bất đẳng thức ghép cặp đi theo chiều ngược lại, tức là $XY \leq A^2, YZ \leq B^2, ZX \leq C^2$, thì $XYZ \leq ABC$.

• **Chứng minh.** Cả hai kết luận, kể cả trường hợp đổi chiều, đều chỉ dùng bất đẳng thức AM–GM cho hai số và phép nhân theo vế.

• **Chặn tổng.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho hai số, $X + Y \geq 2\sqrt{XY} \geq 2A$; tương tự $Y + Z \geq 2B$ và $Z + X \geq 2C$. Cộng ba bất đẳng thức rồi chia cho 2 ta được kết luận thứ nhất.

• **Chặn tích.** Với kết luận thứ hai, nhân ba giả thiết theo vế và chú ý $(XY)(YZ)(ZX) = (XYZ)^2$, ta có $(XYZ)^2 \geq (ABC)^2$; do các số đều không âm nên $XYZ \geq ABC$.

• **Trường hợp đổi chiều.** Khi ba bất đẳng thức ghép cặp đổi chiều, phép nhân theo vế vẫn dùng được và cho $(XYZ)^2 \leq (ABC)^2$, do đó $XYZ \leq ABC$.

Trong các lược đồ trên, việc ghép cặp đều tôn trọng tính đối xứng của bài toán: hai đại lượng được ghép với nhau là hai đại lượng đối xứng đối với biến còn lại.

Năm thao tác của chương

- **Tách hạng tử.** Viết một hạng tử thành tổng nhiều phần với hệ số chưa biết, rồi cân bằng hệ số để dấu đẳng thức khớp điểm rơi.

- **Thêm bớt một đại lượng.** Cộng vào vế trái một đại lượng thích hợp để tạo ra nhóm dùng được AM–GM, sau đó trừ đại lượng ấy đi.
- **Ghép cặp đối xứng.** Nhóm các hạng tử theo cặp hoặc theo bộ ba sao cho tích của chúng là một biểu thức đơn giản ở vế phải.
- **Đánh giá mẫu số.** Thay mẫu số phức tạp bằng mẫu số đơn giản hơn, hoặc tách nghịch đảo của một tổng nhờ Bổ đề 3.1.
- **Nhân thêm hằng số.** Nhân biểu thức dưới căn với các hằng số bằng 1 tại điểm rơi để hạ bậc căn thức bằng bất đẳng thức AM–GM.

B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa

B.1. Tách hạng tử để điểm rơi khớp

Khi vế trái là một tổng các lũy thừa với hệ số khác nhau còn giả thiết lại là một biểu thức đối xứng bậc thấp hơn, ta tách mỗi hạng tử thành nhiều phần với hệ số chưa xác định rồi cân bằng để tất cả các đánh giá cùng đạt dấu đẳng thức tại một điểm.

Ví dụ 3.1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 7$. Chứng minh rằng

$$6a^2 + 6b^2 + c^2 \geq 21.$$

Phân tích. Vế phải là hằng số, còn giả thiết cho $ab + bc + ca$; do đó ta phải làm xuất hiện đồng thời ba tích ab, bc, ca ở vế phải của chuỗi đánh giá. Hai biến a và b có vai trò như nhau nên c^2 được chia đều thành hai nửa: một nửa ghép với phần của $6a^2$ để sinh ra ac , một nửa ghép với phần của $6b^2$ để sinh ra bc ; phần còn lại của $6a^2$ và $6b^2$ ghép với nhau để sinh ra ab .

• **Tách với tham số.** Cụ thể, đặt $6a^2 = ka^2 + (6 - k)a^2$ với $0 < k < 6$ rồi áp dụng bất đẳng thức AM–GM:

$$ka^2 + \frac{c^2}{2} \geq \sqrt{2k}ac, \quad kb^2 + \frac{c^2}{2} \geq \sqrt{2k}bc, \quad (6 - k)a^2 + (6 - k)b^2 \geq 2(6 - k)ab.$$

• **Cân bằng hệ số.** Cộng ba đánh giá lại ta được $6a^2 + 6b^2 + c^2 \geq \sqrt{2k}(ac + bc) + 2(6 - k)ab$. Vế phải là bội của $ab + bc + ca$ khi và chỉ khi $\sqrt{2k} = 2(6 - k)$, tức là $2k^2 - 25k + 72 = 0$, cho $k = \frac{9}{2}$ (nghiệm còn lại $k = 8$ bị loại vì lớn hơn 6).

Điểm rơi. Với $k = \frac{9}{2}$, dấu đẳng thức đòi hỏi $a = b$ và $\frac{9}{2}a^2 = \frac{c^2}{2}$, tức $c = 3a$. Thay vào giả thiết được $7a^2 = 7$, vậy $a = b = 1$ và $c = 3$.

Lời giải

• **Tách và ghép.** Nhân hai vế với 2 rồi tách theo cách vừa tìm được:

$$2(6a^2 + 6b^2 + c^2) = (9a^2 + c^2) + (9b^2 + c^2) + 3(a^2 + b^2).$$

• **Áp dụng AM–GM cho từng nhóm.** Ta có

$$9a^2 + c^2 \geq 6ac, \quad 9b^2 + c^2 \geq 6bc, \quad 3a^2 + 3b^2 \geq 6ab.$$

• **Cộng theo vế.** Suy ra

$$2(6a^2 + 6b^2 + c^2) \geq 6(ab + bc + ca) = 6 \cdot 7 = 42,$$

tức là $6a^2 + 6b^2 + c^2 \geq 21$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 3$.

Nhận xét. Mấu chốt của lời giải không nằm ở cách tách $6 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}$ mà ở phương trình cân bằng hệ số $\sqrt{2k} = 2(6 - k)$. Với các bài toán cùng dạng $pa^2 + pb^2 + qc^2 \geq m$ kèm giả thiết $ab + bc + ca = s$ trong chương này, ta cũng đặt tham số k rồi giải phương trình cân bằng tương ứng; chỉ nghiệm chấp nhận được của phương trình ấy mới làm vế phải của chuỗi đánh giá trở thành bội của $ab + bc + ca$.

Ví dụ 3.2. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3.$$

Phân tích. Vế trái có bậc 3, giả thiết có bậc 2, nên không thể ghép trực tiếp hai hạng tử của vế trái để ra một tích ab . Muốn từ a^3 và b^3 sinh ra ab bằng bất đẳng thức AM–GM cho ba số, ta phải thêm vào một hằng số $t > 0$: $a^3 + b^3 + t \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3t} = 3ab\sqrt[3]{t}$.

Điểm rơi. Giả thiết đối xứng nên dự đoán $a = b = c = 1$. Muốn dấu đẳng thức của đánh giá trên xảy ra tại đó thì $t = a^3 = 1$. Vậy hằng số cần thêm là 1.

Lời giải

• **Thêm hằng số và áp dụng AM–GM.** Với ba số dương $a^3, b^3, 1$ ta có

$$a^3 + b^3 + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3} = 3ab.$$

Tương tự $b^3 + c^3 + 1 \geq 3bc$ và $c^3 + a^3 + 1 \geq 3ca$.

• **Cộng theo vế.** Ta được

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3 \geq 3(ab + bc + ca) = 9,$$

do đó $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Hằng số thêm vào không được chọn tùy ý: nó phải bằng đúng giá trị chung của các biến tại điểm rơi, được nâng lên đúng lũy thừa đang xét. Nếu giả thiết là $ab + bc + ca = 3m^2$ thì điểm rơi là $a = b = c = m$ và hằng số phải thêm là m^3 .

B.2. Kỹ thuật thêm bớt một đại lượng

Khi vế trái chứa những phân thức mà bản thân chúng không ghép được với nhau, ta cộng vào vế trái một đại lượng phụ để mỗi phân thức nằm trong một nhóm dùng được bất đẳng thức AM–GM, sau đó trừ chính đại lượng ấy đi. Đại lượng thêm vào phải triệt tiêu được mẫu số và phải làm dấu đẳng thức khớp điểm rơi.

Ví dụ 3.3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Phân tích. Điểm rơi là $a = b = c$. Tích $\frac{a^2}{b} \cdot b = a^2$ là một bình phương, nên nhóm tự nhiên nhất là cặp $\left(\frac{a^2}{b}, b\right)$; hai cặp còn lại là $\left(\frac{b^2}{c}, c\right)$ và $\left(\frac{c^2}{a}, a\right)$. Tổng các đại lượng thêm vào đúng bằng $a + b + c$, nên sau khi bớt đi ta thu được ngay kết luận.

Lời giải

• **Thêm và ghép cặp.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho hai số dương,

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a, \quad \frac{b^2}{c} + c \geq 2b, \quad \frac{c^2}{a} + a \geq 2c.$$

• **Cộng theo vế rồi bớt.** Ta được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + (a + b + c) \geq 2(a + b + c),$$

suy ra $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.4*. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(b+3c)^2} + \frac{b^3}{(c+3a)^2} + \frac{c^3}{(a+3b)^2} \geq \frac{a+b+c}{16}.$$

Phân tích. Bất đẳng thức thuần nhất bậc một và đối xứng vòng quanh, điểm rơi là $a = b = c$. Mẫu số là một bình phương nên muốn khử nó bằng bất đẳng thức AM–GM cho ba số, hai đại lượng thêm vào phải cùng dạng $\frac{b+3c}{K}$ với $K > 0$ chưa xác định.

Điểm rơi. Tại $a = b = c$ ta có $\frac{a^3}{(b+3c)^2} = \frac{a^3}{16a^2} = \frac{a}{16}$ và $\frac{b+3c}{K} = \frac{4a}{K}$. Ba số trong nhóm bằng nhau khi $\frac{a}{16} = \frac{4a}{K}$, tức $K = 64$.

Lời giải

• **Thêm hai đại lượng phụ.** Với $K = 64$, bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương cho

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{(b+3c)^2} + \frac{b+3c}{64} + \frac{b+3c}{64} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(b+3c)^2} \cdot \frac{b+3c}{64} \cdot \frac{b+3c}{64}} \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{4096}} = \frac{3a}{16}. \end{aligned}$$

Hai đại lượng thêm vào cộng lại bằng $\frac{b+3c}{32}$.

- **Viết hai đánh giá tương tự.** Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{b^3}{(c+3a)^2} + \frac{c+3a}{32} \geq \frac{3b}{16}, \quad \frac{c^3}{(a+3b)^2} + \frac{a+3b}{32} \geq \frac{3c}{16}.$$

- **Cộng theo vế.** Chú ý $(b+3c) + (c+3a) + (a+3b) = 4(a+b+c)$, tổng các đại lượng thêm vào bằng $\frac{4(a+b+c)}{32} = \frac{a+b+c}{8}$. Do đó

$$\frac{a^3}{(b+3c)^2} + \frac{b^3}{(c+3a)^2} + \frac{c^3}{(a+3b)^2} \geq \frac{3(a+b+c)}{16} - \frac{a+b+c}{8} = \frac{a+b+c}{16}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Hằng số K hoàn toàn bị quyết định bởi điểm rơi. Nếu thay mẫu số bởi $(b+kc)^2$ thì lập luận trên cho cận $\frac{a+b+c}{(1+k)^2}$; riêng $k=1$ cho lại kết quả quen thuộc $\frac{a+b+c}{4}$.

B.3. Kỹ thuật ghép cặp đối xứng

Khi hai vế đều là tổng hoặc đều là tích của ba đại lượng, ta không đánh giá từng hạng tử một mà ghép chúng theo cặp, theo các lược đồ của Bổ đề 3.2.

Ví dụ 3.5. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c.$$

Phân tích. Bất đẳng thức có dạng $X + Y + Z \geq A + B + C$ của Bổ đề 3.2 với $X = \frac{ab}{c}, Y = \frac{bc}{a}, Z = \frac{ca}{b}$. Hai đại lượng X và Y đối xứng đối với b , vì $XY = b^2$; tương tự $YZ = c^2$ và $ZX = a^2$. Vậy cách ghép cặp cho đúng bộ ba $A = b, B = c, C = a$, và tổng $A + B + C$ chính là $a + b + c$.

Lời giải

- **Ghép cặp thứ nhất.** Theo bất đẳng thức AM–GM,

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} = 2b.$$

- **Ghép hai cặp còn lại.** Tương tự,

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c, \quad \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a.$$

- **Cộng theo vế rồi chia cho 2.** Ta được

$$2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) \geq 2(a + b + c),$$

tức là điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Đề bài này đã xuất hiện ở Ví dụ 1.2 với lời giải bằng biến đổi tương đương: nhân hai vế với abc rồi nhận ra hằng bất đẳng thức nền. Việc trình bày lại ở đây là có chủ ý, nhằm so sánh hai con đường; lời giải bằng ghép cặp ngắn hơn vì nó không phá vỡ cấu trúc phân thức.

Ví dụ 3.6. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và p là nửa chu vi của tam giác đó. Chứng minh rằng

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{1}{8}abc.$$

Phân tích. Bất đẳng thức có dạng tích với các bất đẳng thức ghép cặp đi theo chiều chặn trên, ứng với khẳng định cuối của Bổ đề 3.2. Bất đẳng thức tam giác cho $p-a, p-b, p-c$ đều dương, còn $(p-a) + (p-b) = 2p-a-b = c$. Vì vậy tích $(p-a)(p-b)$ bị chặn trên bởi $\frac{c^2}{4}$.

Lời giải

• **Ghép từng cặp.** Với hai số dương $p-a$ và $p-b$, hệ quả $(x+y)^2 \geq 4xy$ cho

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{(p-a) + (p-b)}{2} = \frac{c}{2}.$$

Tương tự $\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}$ và $\sqrt{(p-c)(p-a)} \leq \frac{b}{2}$.

• **Nhân ba đánh giá theo vế.** Vì

$$(p-a)(p-b)(p-c) = \sqrt{(p-a)(p-b)} \cdot \sqrt{(p-b)(p-c)} \cdot \sqrt{(p-c)(p-a)},$$

$$\text{nên } (p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{abc}{8}.$$

• **Kết luận.** Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $p-a = p-b = p-c$, tức tam giác đều.

B.4. Kỹ thuật đánh giá mẫu số

Với các biểu thức mà biến nằm dưới mẫu, ta không đánh giá tử số mà chuyển sang đánh giá mẫu số. Công cụ chính là Bổ đề 3.1: nghịch đảo của một tổng được chặn dưới bằng cách tách tổng đó thành hai phần thích hợp.

Ví dụ 3.7. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và p là nửa chu vi. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Phân tích. Vế trái có ba mẫu, vế phải cũng có ba mẫu, nhưng hai bộ mẫu không có quan hệ trực tiếp. Quan hệ đơn giản nổi chúng lại là $(p-a) + (p-b) = c$; vì vậy ta ghép hai phân thức của vế trái với nhau rồi dùng Bổ đề 3.1.

Lời giải

• **Ghép từng cặp mẫu số.** Vì $p-a > 0$ và $p-b > 0$ nên

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{(p-a) + (p-b)} = \frac{4}{c}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}, \quad \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{b}.$$

- **Cộng theo vế.** Vế trái của ba đánh giá cộng lại bằng $2\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right)$, do đó

$$2\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) \geq \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c}.$$

- **Chia cho 2.** Ta được điều phải chứng minh; dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, tức tam giác đều.

Ví dụ 3.8. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a+2b} + \frac{1}{3b+2c} + \frac{1}{3c+2a} \geq \frac{1}{2a+2b+c} + \frac{1}{a+2b+2c} + \frac{1}{2a+b+2c}.$$

Phân tích. Cả hai vế cùng bậc -1 và cùng đối xứng vòng quanh, điểm rơi là $a = b = c$. Không thể so sánh từng phân thức một, vì chẳng hạn $3a+2b$ và $2a+2b+c$ không so sánh được. Ý tưởng là ghép một phân thức của vế trái với một phân thức của vế phải sao cho tổng hai mẫu số chia hết cho 2 và cho ra đúng một mẫu của vế phải.

Lời giải

- **Ghép cặp thứ nhất.** Vì $(3a+2b) + (a+2b+2c) = 2(2a+2b+c)$, Bổ đề 3.1 cho

$$\frac{1}{3a+2b} + \frac{1}{a+2b+2c} \geq \frac{4}{2(2a+2b+c)} = \frac{2}{2a+2b+c}.$$

- **Hai cặp còn lại.** Tương tự, từ $(3b+2c) + (2a+b+2c) = 2(a+2b+2c)$ và $(3c+2a) + (2a+2b+c) = 2(2a+b+2c)$ ta được

$$\frac{1}{3b+2c} + \frac{1}{2a+b+2c} \geq \frac{2}{a+2b+2c}, \quad \frac{1}{3c+2a} + \frac{1}{2a+2b+c} \geq \frac{2}{2a+b+2c}.$$

- **Cộng theo vế và rút gọn.** Đặt $S = \frac{1}{2a+2b+c} + \frac{1}{a+2b+2c} + \frac{1}{2a+b+2c}$ và $T = \frac{1}{3a+2b} + \frac{1}{3b+2c} + \frac{1}{3c+2a}$. Cộng ba bất đẳng thức trên ta được $T + S \geq 2S$, suy ra $T \geq S$, đúng là điều phải chứng minh.

- **Điều kiện dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức đòi hỏi $3a+2b = a+2b+2c$, $3b+2c = 2a+b+2c$ và $3c+2a = 2a+2b+c$, lần lượt tương đương $a = c$, $a = b$ và $b = c$, nghĩa là $a = b = c$.

Nhận xét. Thao tác đặc trưng của kỹ thuật đánh giá mẫu số là chọn cặp ghép sao cho tổng hai mẫu số là bội của một mẫu số ở vế phải. Sau khi cộng, các phân thức của vế phải xuất hiện ở cả hai phía và tự triệt tiêu bớt.

B.5. Kỹ thuật nhân thêm hằng số

Bất đẳng thức AM–GM hạ được bậc của một căn thức nếu ta nhân biểu thức dưới căn với những hằng số phụ. Các hằng số ấy phải được chọn sao cho tại điểm rơi chúng bằng đúng biểu thức dưới căn, khi đó dấu đẳng thức mới được bảo toàn.

Ví dụ 3.9*. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a+2b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+2c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+2a}} \geq 3.$$

Phân tích. Căn bậc ba nằm dưới mẫu nên muốn chặn dưới về trái, ta phải chặn trên các căn thức. Bất đẳng thức AM–GM cho ba số cho phép làm việc đó nếu ta viết biểu thức dưới căn thành tích của ba thừa số: $\sqrt[3]{a+2b} = \sqrt[3]{(a+2b) \cdot 1 \cdot 1}$.

Điểm rơi. Giả thiết đối xứng nên $a = b = c = \frac{1}{3}$, khi đó $a + 2b = 1$. Giá trị này đúng bằng hai hằng số đã nhân thêm, nên dấu đẳng thức được bảo toàn.

Lời giải

• **Hạ bậc căn thức.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương $a + 2b, 1, 1$,

$$\sqrt[3]{a+2b} = \sqrt[3]{(a+2b) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{(a+2b) + 1 + 1}{3} = \frac{a+2b+2}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{\sqrt[3]{a+2b}} \geq \frac{3}{a+2b+2}.$$

• **Viết hai đánh giá tương tự.** Ta có

$$\frac{1}{\sqrt[3]{b+2c}} \geq \frac{3}{b+2c+2}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{c+2a}} \geq \frac{3}{c+2a+2}.$$

• **Cộng theo vế rồi dùng Bổ đề 3.1.** Tổng ba mẫu số ở vế phải bằng $3(a+b+c) + 6 = 9$, do đó

$$\frac{3}{a+2b+2} + \frac{3}{b+2c+2} + \frac{3}{c+2a+2} \geq \frac{3 \cdot 9}{9} = 3.$$

• **Kết luận.** Vế trái không nhỏ hơn 3. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Nhận xét. Số hằng số 1 được nhân thêm phụ thuộc bậc của căn: với căn bậc ba cần hai hằng số, với căn bậc hai chỉ cần một. Nếu điểm rơi không cho $a + 2b = 1$ thì phải nhân thêm hằng số m khác 1 rồi chia lại cho $\sqrt[3]{m^2}$; hằng số m chính là giá trị của biểu thức dưới căn tại điểm rơi.

C. Bài tập có lời giải

Bài 3.1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 9$. Chứng minh rằng

$$10a^2 + 10b^2 + c^2 \geq 36.$$

Phân tích. Vế phải là hằng số còn giả thiết cho $ab + bc + ca$, nên chuỗi đánh giá phải kết thúc ở một bội của $ab + bc + ca$; muốn vậy cả ba tích ab, bc, ca đều phải xuất hiện. Hai biến a và b có vai trò như nhau nên c^2 được chia đều thành hai nửa: một nửa ghép với một phần của $10a^2$ để sinh ra ac , nửa kia ghép với một phần của $10b^2$ để sinh ra bc ; hai phần còn lại của $10a^2$ và $10b^2$ ghép với nhau để sinh ra ab .

• **Tách với tham số.** Cụ thể, đặt $10a^2 = ka^2 + (10 - k)a^2$ với $0 < k < 10$ rồi áp dụng bất đẳng thức AM–GM:

$$ka^2 + \frac{c^2}{2} \geq \sqrt{2k}ac, \quad kb^2 + \frac{c^2}{2} \geq \sqrt{2k}bc, \\ (10 - k)a^2 + (10 - k)b^2 \geq 2(10 - k)ab.$$

• **Cân bằng hệ số.** Cộng ba đánh giá lại ta được $10a^2 + 10b^2 + c^2 \geq \sqrt{2k}(ac + bc) + 2(10 - k)ab$. Về phải là bội của $ab + bc + ca$ khi và chỉ khi $\sqrt{2k} = 2(10 - k)$, tức là $2k^2 - 41k + 200 = 0$, cho $k = 8$ (nghiệm còn lại $k = \frac{25}{2}$ bị loại vì lớn hơn 10).

Điểm rơi. Với $k = 8$, dấu đẳng thức đòi hỏi $a = b$ và $8a^2 = \frac{c^2}{2}$, tức $c = 4a$. Thay vào giả thiết được $a^2 + 4a^2 + 4a^2 = 9a^2 = 9$, vậy $a = b = 1$ và $c = 4$.

Lời giải

• **Tách hạng tử theo hệ số vừa tìm.** Nhân hai vế với 2 rồi tách:

$$2(10a^2 + 10b^2 + c^2) = (16a^2 + c^2) + (16b^2 + c^2) + 4(a^2 + b^2).$$

• **Áp dụng AM–GM cho từng nhóm.** Với hai số không âm $16a^2$ và c^2 ta có $16a^2 + c^2 \geq 2\sqrt{16a^2c^2} = 8ac$; đổi vai trò của a và b được $16b^2 + c^2 \geq 8bc$. Cũng theo bất đẳng thức AM–GM, lần này cho hai số không âm $4a^2$ và $4b^2$,

$$4a^2 + 4b^2 \geq 2\sqrt{16a^2b^2} = 8ab.$$

• **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Suy ra

$$2(10a^2 + 10b^2 + c^2) \geq 8(ab + bc + ca) = 8 \cdot 9 = 72,$$

tức là $10a^2 + 10b^2 + c^2 \geq 36$.

• **Xác định dấu đẳng thức.** Cả ba đánh giá cùng đạt dấu đẳng thức khi và chỉ khi $16a^2 = c^2$, $16b^2 = c^2$ và $a^2 = b^2$, tức là $a = b$ và $c = 4a$. Kết hợp với giả thiết $9a^2 = 9$ ta được $a = b = 1$, $c = 4$; khi đó $10 + 10 + 16 = 36$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$ và $c = 4$.

Bài 3.2. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 3.$$

Phân tích. Vế trái có bậc 4, giả thiết có bậc 2, nên hai hạng tử a^4 và b^4 không thể tự sinh ra tích ab . Muốn dùng bất đẳng thức AM–GM cho bốn số để từ a^4 và b^4 thu được ab , ta phải thêm vào hai hằng số bằng nhau, chẳng hạn $t > 0$: $a^4 + b^4 + t + t \geq 4\sqrt[4]{a^4b^4t^2} = 4ab\sqrt{t}$.

Điểm rơi. Giả thiết đối xứng nên dự đoán $a = b = c = 1$. Dấu đẳng thức của đánh giá trên đòi hỏi $t = a^4 = 1$; vậy hai hằng số phải thêm đều bằng 1.

Lời giải

• **Thêm hai hằng số rồi áp dụng AM–GM cho bốn số.** Với bốn số dương $a^4, b^4, 1, 1$ ta có

$$a^4 + b^4 + 1 + 1 \geq 4\sqrt[4]{a^4b^4 \cdot 1 \cdot 1} = 4ab.$$

- **Viết hai đánh giá tương tự.** Thay bộ (a, b) lần lượt bởi (b, c) và (c, a) ,

$$b^4 + c^4 + 2 \geq 4bc, \quad c^4 + a^4 + 2 \geq 4ca.$$

- **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Mỗi lũy thừa bậc bốn xuất hiện đúng hai lần nên

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + 6 \geq 4(ab + bc + ca) = 12,$$

do đó $a^4 + b^4 + c^4 \geq 3$.

- **Xác định dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức của đánh giá thứ nhất đòi hỏi $a^4 = b^4 = 1$; hai đánh giá còn lại cho $b^4 = c^4 = 1$ và $c^4 = a^4 = 1$. Vậy $a = b = c = 1$, bộ số này thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$ và làm hai vế cùng bằng 3.

Bài 3.3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Phân tích. Bất đẳng thức thuần nhất bậc một và đối xứng vòng quanh nên điểm rơi là $a = b = c$. Mẫu số $b+2c$ là một nhị thức bậc nhất; muốn khử nó bằng bất đẳng thức AM–GM cho hai số, đại lượng thêm vào phải có dạng $\frac{b+2c}{K}$ với $K > 0$ chưa xác định, vì khi đó tích của hai đại lượng là $\frac{a^2}{K}$, một bình phương chia hằng số.

Điểm rơi. Tại $a = b = c$ ta có $\frac{a^2}{b+2c} = \frac{a^2}{3a} = \frac{a}{3}$ và $\frac{b+2c}{K} = \frac{3a}{K}$. Hai số trong nhóm bằng nhau khi $\frac{a}{3} = \frac{3a}{K}$, tức $K = 9$.

Lời giải

- **Thêm một đại lượng phụ.** Với $K = 9$, bất đẳng thức AM–GM cho hai số dương cho

$$\frac{a^2}{b+2c} + \frac{b+2c}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+2c} \cdot \frac{b+2c}{9}} = \frac{2a}{3}.$$

- **Viết hai đánh giá tương tự.** Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{b^2}{c+2a} + \frac{c+2a}{9} \geq \frac{2b}{3}, \quad \frac{c^2}{a+2b} + \frac{a+2b}{9} \geq \frac{2c}{3}.$$

- **Cộng theo vế rồi bớt các đại lượng đã thêm.** Vì $(b+2c) + (c+2a) + (a+2b) = 3(a+b+c)$ nên tổng các đại lượng thêm vào bằng $\frac{3(a+b+c)}{9} = \frac{a+b+c}{3}$. Do đó

$$\frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} \geq \frac{2(a+b+c)}{3} - \frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

- **Xác định dấu đẳng thức.** Ba đánh giá cùng đạt dấu đẳng thức khi và chỉ khi $3a = b+2c$, $3b = c+2a$ và $3c = a+2b$. Trừ hai hệ thức đầu theo vế ta được $3a - 3b = (b+2c) - (c+2a)$, tức $5a = 4b + c$; thay $c = \frac{a+2b}{3}$ từ hệ thức thứ ba vào, ta có $15a = 12b + a + 2b$, suy ra $a = b$, rồi $c = a$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 3.4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$$

Phân tích. Hai vế đều thuần nhất bậc không và đối xứng vòng quanh nên điểm rơi là $a = b = c$. Hai vế lại dùng chung đúng ba mẫu số $b+c, c+a, a+b$ nhưng các tử số bị ghép lệch nhau một nhịp. Vì vậy ta chuyển vế rồi gom các phân thức có cùng mẫu; hiệu thu được là một tổng ba phân thức có tử số chưa xác định dấu, và cách xử lý quen thuộc là cộng thêm một đơn vị vào mỗi phân thức để mọi tử số trở thành dương.

Lời giải

• **Chuyển vế và gom theo mẫu số chung.** Ghép $\frac{a}{b+c}$ với $\frac{b}{b+c}$, ghép $\frac{b}{c+a}$ với $\frac{c}{c+a}$, ghép $\frac{c}{a+b}$ với $\frac{a}{a+b}$, ta thấy bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} \geq 0.$$

• **Cộng thêm một đơn vị vào mỗi phân thức.** Ta có

$$\frac{a-b}{b+c} + 1 = \frac{c+a}{b+c}, \quad \frac{b-c}{c+a} + 1 = \frac{a+b}{c+a}, \quad \frac{c-a}{a+b} + 1 = \frac{b+c}{a+b},$$

nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{c+a}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} \geq 3.$$

• **Áp dụng AM–GM cho ba số dương.** Tích của ba phân thức ở vế trái bằng 1, do đó

$$\frac{c+a}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{c+a}{b+c} \cdot \frac{a+b}{c+a} \cdot \frac{b+c}{a+b}} = 3.$$

• **Xác định dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức đòi hỏi ba phân thức bằng nhau, mà tích của chúng bằng 1 nên mỗi phân thức bằng 1, tức $b+c = c+a = a+b$. Từ đó $a = b = c$; khi ấy hai vế của bất đẳng thức ban đầu cùng bằng $\frac{3}{2}$.

Bài 3.5*. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(2+b)(2+c)} + \frac{b^3}{(2+c)(2+a)} + \frac{c^3}{(2+a)(2+b)} \geq \frac{1}{3}.$$

Phân tích. Giả thiết $abc = 1$ đối xứng nên điểm rơi là $a = b = c = 1$. Mẫu số là tích của hai nhị thức bậc nhất, vì vậy để khử mẫu bằng bất đẳng thức AM–GM cho ba số, hai đại lượng thêm vào phải là $\frac{2+b}{K}$ và $\frac{2+c}{K}$: khi đó tích của ba số là $\frac{a^3}{K^2}$, một lũy thừa bậc ba chia hằng số.

Điểm rơi. Tại $a = b = c = 1$ ta có $\frac{a^3}{(2+b)(2+c)} = \frac{1}{9}$ và $\frac{2+b}{K} = \frac{3}{K}$. Ba số trong nhóm bằng nhau khi $\frac{1}{9} = \frac{3}{K}$, tức $K = 27$.

Lời giải

• **Thêm hai đại lượng phụ.** Với $K = 27$, bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương cho

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{(2+b)(2+c)} + \frac{2+b}{27} + \frac{2+c}{27} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(2+b)(2+c)} \cdot \frac{2+b}{27} \cdot \frac{2+c}{27}} \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{729}} = \frac{a}{3}.\end{aligned}$$

• **Viết hai đánh giá tương tự.** Hoàn toàn tương tự,

$$\frac{b^3}{(2+c)(2+a)} + \frac{2+c}{27} + \frac{2+a}{27} \geq \frac{b}{3}, \quad \frac{c^3}{(2+a)(2+b)} + \frac{2+a}{27} + \frac{2+b}{27} \geq \frac{c}{3}.$$

• **Cộng theo vế rồi bớt các đại lượng đã thêm.** Mỗi đại lượng $\frac{2+a}{27}, \frac{2+b}{27}, \frac{2+c}{27}$ xuất hiện đúng hai lần, nên tổng các đại lượng thêm vào bằng $\frac{2(6+a+b+c)}{27}$. Đặt $s = a+b+c$, ta được

$$\frac{a^3}{(2+b)(2+c)} + \frac{b^3}{(2+c)(2+a)} + \frac{c^3}{(2+a)(2+b)} \geq \frac{s}{3} - \frac{12+2s}{27} = \frac{7s-12}{27}.$$

• **Chặn dưới tổng ba biến.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương, $s = a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$. Hàm bậc nhất $\frac{7s-12}{27}$ đồng biến theo s nên

$$\frac{7s-12}{27} \geq \frac{7 \cdot 3 - 12}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

• **Xác định dấu đẳng thức.** Đánh giá thứ nhất đạt dấu đẳng thức khi $2+b = 2+c$ và $\frac{a^3}{(2+b)(2+c)} = \frac{2+b}{27}$; hai đánh giá còn lại cho các điều kiện tương ứng, tất cả cùng xảy ra khi $a = b = c$. Đánh giá $s \geq 3$ cũng đạt dấu đẳng thức tại $a = b = c$. Kết hợp với $abc = 1$ ta được $a = b = c = 1$, khi đó vế trái bằng $3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

Bài 3.6. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

Phân tích. Bất đẳng thức có dạng $X+Y+Z \geq A+B+C$ của Bổ đề 3.2 với $X = \frac{a^2}{b^2}, Y = \frac{b^2}{c^2}, Z = \frac{c^2}{a^2}$. Ta tính $XY = \frac{a^2}{c^2}, YZ = \frac{b^2}{a^2}, ZX = \frac{c^2}{b^2}$, đều là bình phương của các phân thức $\frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}$; tổng ba phân thức ấy chính là vế phải. Hai vế thuần nhất bậc không và đối xứng vòng quanh nên điểm rơi là $a = b = c$.

Lời giải

- **Ghép cặp thứ nhất.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho hai số dương,

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2}} = \frac{2a}{c}.$$

- **Ghép hai cặp còn lại.** Tương tự,

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{2b}{a}, \quad \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq \frac{2c}{b}.$$

- **Cộng theo vế rồi chia cho 2.** Mỗi phân thức của vế trái xuất hiện đúng hai lần nên

$$2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right),$$

tức là điều phải chứng minh.

- **Xác định dấu đẳng thức.** Ba lần ghép cặp cùng đạt dấu đẳng thức khi và chỉ khi $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Nhân ba tỉ số bằng nhau ấy được lập phương của chúng bằng 1, nên mỗi tỉ số bằng 1, tức $a = b = c$; khi đó hai vế cùng bằng 3.

Bài 3.7. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca.$$

Phân tích. Bất đẳng thức thuần nhất bậc hai và điểm rơi là $a = b = c$. Đại lượng thêm vào cho phân thức $\frac{a^3}{b}$ phải khử được mẫu b và phải bằng đúng phân thức ấy tại điểm rơi: tại $a = b = c$ ta có $\frac{a^3}{b} = a^2$, mà $ab = a^2$, nên đại lượng cần thêm là ab . Sau khi cộng ba đánh giá, phần thừa còn lại được xử lý bằng hằng bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Lời giải

- **Thêm một đại lượng phụ.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho hai số dương,

$$\frac{a^3}{b} + ab \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b} \cdot ab} = 2a^2.$$

- **Viết hai đánh giá tương tự.** Hoàn toàn tương tự,

$$\frac{b^3}{c} + bc \geq 2b^2, \quad \frac{c^3}{a} + ca \geq 2c^2.$$

- **Cộng theo vế rồi bớt các đại lượng đã thêm.** Ta được

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca).$$

• **Chứng minh bất đẳng thức phụ.** Cộng ba đánh giá $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ca$ của bất đẳng thức AM–GM rồi chia cho 2, ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

• **Kết hợp hai đánh giá.** Suy ra

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) \geq 2(ab + bc + ca) - (ab + bc + ca) = ab + bc + ca,$$

tức là $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$.

• **Xác định dấu đẳng thức.** Đánh giá thứ nhất đạt dấu đẳng thức khi $\frac{a^3}{b} = ab$, tức $a = b$; hai đánh giá còn lại cho $b = c$ và $c = a$; bất đẳng thức phụ cũng đạt dấu đẳng thức khi $a = b = c$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 3.8*. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 64$. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 6.$$

Phân tích. Giả thiết đối xứng nên điểm rơi là $a = b = c$, kết hợp $abc = 64$ cho $a = b = c = 4$. Về phải gồm hai phần khác hẳn nhau: một tổng ba căn và một hằng số. Điều đó gợi ý chặn về trái bởi $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$ rồi tách đôi cận ấy, một nửa dùng cho tổng ba căn, một nửa dùng cho hằng số 6. Muốn tới được cận $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$ ta ghép cặp hai lần: lần thứ nhất ghép hai hạng tử trong mỗi tử số, lần thứ hai ghép các căn thức thu được với nhau.

Lời giải

• **Ghép cặp trong từng tử số.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho hai số dương b và c ,

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

Tương tự $\frac{c+a}{\sqrt{b}} \geq 2\sqrt{\frac{ca}{b}}$ và $\frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}}$.

• **Đặt ba đại lượng trung gian.** Ký hiệu $X = \sqrt{\frac{bc}{a}}$, $Y = \sqrt{\frac{ca}{b}}$, $Z = \sqrt{\frac{ab}{c}}$. Khi đó $XY = \sqrt{c^2} = c$, $YZ = \sqrt{a^2} = a$ và $ZX = \sqrt{b^2} = b$, còn bước trên cho

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2(X + Y + Z).$$

• **Ghép cặp lần thứ hai.** Theo bất đẳng thức AM–GM, $X + Y \geq 2\sqrt{XY} = 2\sqrt{c}$, $Y + Z \geq 2\sqrt{a}$ và $Z + X \geq 2\sqrt{b}$. Cộng ba bất đẳng thức rồi chia cho 2 ta được $X + Y + Z \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, do đó

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

• **Chặn dưới tổng ba căn thức.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương,

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}} = 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{64} = 6.$$

• **Tách đôi cận vừa thu được.** Viết $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$ rồi thay đánh giá của bước trên vào nhóm thứ hai, ta được

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 6.$$

• **Xác định dấu đẳng thức.** Lần ghép cặp thứ nhất đòi hỏi $b = c, c = a, a = b$; lần ghép cặp thứ hai và đánh giá cuối cùng cũng đòi hỏi $a = b = c$. Kết hợp với $abc = 64$ ta được $a = b = c = 4$; khi đó hai vế cùng bằng 12.

Bài 3.9*. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a-d}{b+d} + \frac{d-b}{c+b} + \frac{b-c}{a+c} + \frac{c-a}{a+d} \geq 0.$$

Phân tích. Bốn tử số $a-d, d-b, b-c, c-a$ đều chưa xác định dấu nên khó đánh giá từng phân thức một. Tổng bốn tử số bằng 0, đó là dấu hiệu quen thuộc cho thao tác cộng thêm một đơn vị vào mỗi phân thức: khi ấy mọi tử số đều dương và bất đẳng thức chuyển thành một cận dưới bằng 4. Điểm rơi không phải là $a = b = c = d$ mà rộng hơn, cụ thể là $a = b$ và $c = d$.

Lời giải

• **Cộng thêm một đơn vị vào mỗi phân thức.** Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a-d}{b+d} + 1 &= \frac{a+b}{b+d}, & \frac{d-b}{c+b} + 1 &= \frac{c+d}{c+b}, \\ \frac{b-c}{a+c} + 1 &= \frac{a+b}{a+c}, & \frac{c-a}{a+d} + 1 &= \frac{c+d}{a+d}, \end{aligned}$$

nên bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a+b}{b+d} + \frac{c+d}{c+b} + \frac{a+b}{a+c} + \frac{c+d}{a+d} \geq 4.$$

• **Nhóm hai phân thức cùng tử số.** Vế trái viết lại thành

$$(a+b) \left(\frac{1}{b+d} + \frac{1}{a+c} \right) + (c+d) \left(\frac{1}{c+b} + \frac{1}{a+d} \right).$$

• **Đánh giá từng tổng nghịch đảo.** Đặt $s = a+b+c+d$. Vì $(b+d) + (a+c) = s$ và $(c+b) + (a+d) = s$ nên Bổ đề 3.1 với $n = 2$ cho

$$\frac{1}{b+d} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{4}{s}, \quad \frac{1}{c+b} + \frac{1}{a+d} \geq \frac{4}{s}.$$

• **Cộng theo vế.** Do $a+b > 0$ và $c+d > 0$, ta được

$$\frac{a+b}{b+d} + \frac{c+d}{c+b} + \frac{a+b}{a+c} + \frac{c+d}{a+d} \geq \frac{4(a+b)}{s} + \frac{4(c+d)}{s} = \frac{4s}{s} = 4,$$

đúng là điều phải chứng minh.

• **Xác định dấu đẳng thức.** Hai lần dùng Bổ đề 3.1 đạt dấu đẳng thức khi và chỉ khi $b + d = a + c$ và $c + b = a + d$. Trừ hai hệ thức theo vế được $d - c = c - d$, tức $c = d$; thay lại được $a = b$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ và $c = d$.

Nhận xét. Điểm rơi của bài này là cả một họ hai tham số chứ không phải một bộ số duy nhất. Đó là hệ quả của việc bất đẳng thức chỉ đối xứng theo cặp (a, b) và cặp (c, d) ; các đánh giá dùng trong lời giải đều được chọn cho bảo toàn đúng tính đối xứng ấy.

Bài 3.10. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{3a+b} + \sqrt{3b+c} + \sqrt{3c+a} \leq 6.$$

Phân tích. Vế trái là tổng ba căn bậc hai, vế phải là hằng số, nên phải chặn trên từng căn thức bằng một biểu thức bậc nhất. Bất đẳng thức AM–GM cho hai số làm được việc đó nếu ta viết biểu thức dưới căn thành tích của chính nó với một hằng số $m > 0$: $\sqrt{3a+b} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{m(3a+b)} \leq \frac{m + (3a+b)}{2\sqrt{m}}$.

Hằng số m phải bằng giá trị của $3a+b$ tại điểm rơi thì dấu đẳng thức mới được bảo toàn.

Điểm rơi. Giả thiết đối xứng theo vòng nên $a = b = c = 1$, khi đó $3a+b = 4$. Vậy hằng số nhân thêm là $m = 4$ và $\sqrt{m} = 2$.

Lời giải

• **Nhân thêm hằng số dưới căn.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho hai số dương 4 và $3a+b$,

$$\sqrt{3a+b} = \frac{1}{2} \sqrt{4(3a+b)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{4 + (3a+b)}{2} = \frac{4 + 3a + b}{4}.$$

• **Viết hai đánh giá tương tự.** Ta có

$$\sqrt{3b+c} \leq \frac{4 + 3b + c}{4}, \quad \sqrt{3c+a} \leq \frac{4 + 3c + a}{4}.$$

• **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Vì $(3a+b) + (3b+c) + (3c+a) = 4(a+b+c) = 12$ nên

$$\sqrt{3a+b} + \sqrt{3b+c} + \sqrt{3c+a} \leq \frac{12 + 12}{4} = 6.$$

• **Xác định dấu đẳng thức.** Ba đánh giá cùng đạt dấu đẳng thức khi và chỉ khi $3a+b = 3b+c = 3c+a = 4$. Từ $c = 4 - 3b$ và $a = 4 - 3c$ ta được $a = 9b - 8$; thay vào $3a+b = 4$ được $28b = 28$, tức $b = 1$, kéo theo $c = 1$ và $a = 1$. Bộ số $a = b = c = 1$ thoả mãn giả thiết và làm vế trái bằng 6.

Bài 3.11*. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq 3.$$

Phân tích. Mỗi hạng tử của vế trái là tích của một biến bậc nhất với một căn bậc hai. Ta giữ nguyên thừa số bậc nhất và chỉ hạ bậc căn thức: muốn dùng bất đẳng thức AM–GM cho $\sqrt{b}$ thì phải ghép b với một hằng số bằng đúng b tại điểm rơi. Ở đây giả thiết đối xứng cho điểm rơi $a = b = c = 1$, nên hằng số ấy là 1.

Lời giải

- **Hạ bậc từng căn thức.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho hai số không âm b và 1 ,

$$\sqrt{b} = \sqrt{b \cdot 1} \leq \frac{b+1}{2}.$$

Tương tự $\sqrt{c} \leq \frac{c+1}{2}$ và $\sqrt{a} \leq \frac{a+1}{2}$.

- **Nhân với các thừa số dương rồi cộng.** Vì a, b, c dương nên $a\sqrt{b} \leq \frac{a(b+1)}{2}$, $b\sqrt{c} \leq \frac{b(c+1)}{2}$ và $c\sqrt{a} \leq \frac{c(a+1)}{2}$. Cộng ba bất đẳng thức,

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \frac{(ab+bc+ca) + (a+b+c)}{2} = \frac{ab+bc+ca+3}{2}.$$

- **Chặn trên tổng ba tích.** Cộng ba đánh giá $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ca$ của bất đẳng thức AM–GM rồi chia cho 2, ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; cộng thêm $2(ab + bc + ca)$ vào hai vế được $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$, do đó

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

- **Kết luận và xác định dấu đẳng thức.** Suy ra $a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \frac{3+3}{2} = 3$. Các đánh giá hạ bậc căn thức đạt dấu đẳng thức khi $a = b = c = 1$, còn đánh giá $ab + bc + ca \leq 3$ đạt dấu đẳng thức khi $a = b = c$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 3.12. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 12$. Chứng minh rằng

$$8(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq ab + bc + ca.$$

Phân tích. Vế phải chứa $ab + bc + ca$ còn vế trái chỉ chứa các căn bậc hai của từng biến; cầu nối tự nhiên nhất giữa hai loại đại lượng ấy là đồng nhất thức $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$. Cộng $a^2 + b^2 + c^2$ vào cả hai vế sẽ biến bài toán thành một bất đẳng thức tách được theo từng biến, khi ấy chỉ còn việc chọn cách tách $16\sqrt{a}$ cho khớp điểm rơi.

Điểm rơi. Giả thiết đối xứng nên $a = b = c = 4$. Tại đó $a^2 = 16$ và $8\sqrt{a} = 16$, hai đại lượng này bằng nhau; đó chính là lý do hệ số 8 xuất hiện trong đề bài.

Lời giải

- **Đưa về dạng tách được theo từng biến.** Nhân hai vế với 2 rồi cộng $a^2 + b^2 + c^2$ vào cả hai vế, bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$a^2 + b^2 + c^2 + 16(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 = 144.$$

- **Tách hạng tử theo điểm rơi.** Viết $16\sqrt{a} = 8\sqrt{a} + 8\sqrt{a}$ rồi áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương $a^2, 8\sqrt{a}, 8\sqrt{a}$:

$$a^2 + 8\sqrt{a} + 8\sqrt{a} \geq 3\sqrt[3]{a^2 \cdot 8\sqrt{a} \cdot 8\sqrt{a}} = 3\sqrt[3]{64a^3} = 12a.$$

- **Viết hai đánh giá tương tự.** Ta có $b^2 + 16\sqrt{b} \geq 12b$ và $c^2 + 16\sqrt{c} \geq 12c$.
- **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 + 16(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 12(a + b + c) = 12 \cdot 12 = 144,$$

đúng là dạng tương đương đã nêu ở bước đầu.

- **Xác định dấu đẳng thức.** Đánh giá thứ nhất đạt dấu đẳng thức khi $a^2 = 8\sqrt{a}$, tức $a\sqrt{a} = 8$, cho $a = 4$; tương tự $b = 4$ và $c = 4$. Bộ số $a = b = c = 4$ thoả mãn $a + b + c = 12$, khi đó vế trái bằng $8 \cdot 6 = 48$ và vế phải bằng 48. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 4$.

CHƯƠNG 4

04

Kỹ thuật Cauchy ngược dấu

Khi bất đẳng thức AM–GM tác động vào mẫu số cho ta chiều ngược với chiều cần chứng minh, hãy tách phần nguyên ra khỏi phân thức rồi chỉ đánh giá phần bị trừ.

A. Kiến thức trọng tâm

Bất đẳng thức AM–GM

Với n số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$ ta luôn có

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Trong tài liệu tiếng Việt bất đẳng thức này thường được gọi là *bất đẳng thức Cauchy*; toàn bộ cuốn sách dùng thống nhất tên gọi *bất đẳng thức AM–GM*.

Hai trường hợp được dùng nhiều nhất trong chương này là

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}, \quad x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \quad (x, y, z \geq 0).$$

Tình huống dẫn tới kỹ thuật

Xét bài toán: cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 6$, chứng minh

$$\frac{4a}{4 + b^2} + \frac{4b}{4 + c^2} + \frac{4c}{4 + a^2} \geq 3.$$

Đẳng thức được dự đoán tại $a = b = c = 2$, khi đó $4 + b^2 = 8 = 4b$. Điều này gợi ý dùng bất đẳng thức AM–GM cho mẫu số: $4 + b^2 \geq 4b$. Nhưng đánh giá mẫu số làm phân thức nhỏ đi, nên

$$\frac{4a}{4 + b^2} \leq \frac{4a}{4b} = \frac{a}{b},$$

tức là ta thu được một bất đẳng thức *ngược chiều* với chiều cần chứng minh, do đó không sử dụng được.

Cách khắc phục là tách phần nguyên ra khỏi phân thức, đưa phân thức chứa mẫu về dạng *bị trừ*. Khi đó việc làm mẫu số nhỏ đi sẽ làm số bị trừ lớn lên, nghĩa là đánh giá lại thuận chiều. Đó chính là nội dung của kỹ thuật.

Quy ước tên gọi. Trong sách này, thao tác *tách phần nguyên ra khỏi phân thức rồi chỉ đánh giá phần bị trừ* được gọi là *kỹ thuật Cauchy ngược dấu*, theo cách gọi quen thuộc của tài liệu tiếng Việt. Đó là tên đặt cho một thao tác biến đổi, không phải tên một định lý đã được chuẩn hoá trong tài liệu quốc tế; mọi lập luận ở chương này đều chỉ dựa vào bất đẳng thức AM–GM và các phép biến đổi tương đương.

$$\frac{ma}{m+t} = a - \frac{at}{m+t}, \quad \frac{m}{m+t} = 1 - \frac{t}{m+t}, \quad \frac{a^3}{a^2+b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2+b^2}.$$

Sau khi tách, các đánh giá đều được đặt lên số bị trừ: mẫu số càng nhỏ thì số bị trừ càng lớn, do đó bất đẳng thức thu được giữ nguyên chiều cần thiết. Từ chương này trở đi, ký hiệu $\sum_{\text{cyc}}$ chỉ tổng lấy theo vòng hoán vị của các biến. Bốn bổ đề dưới đây là những đánh giá phụ trợ được dùng lặp lại trong cả chương.

Bổ đề 4.1. (đánh giá tổng ba tích đôi một) Với mọi số thực a, b, c ta có

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$. Hệ quả trực tiếp: nếu $a, b, c > 0$ thì $a+b+c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}$.

Bổ đề 4.2. (đánh giá vòng bốn biến) Với mọi số thực dương a, b, c, d ta có

$$ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d) \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+c = b+d$.

Đẳng thức giữa hai vế trái là phép nhóm trực tiếp; bất đẳng thức còn lại chính là AM–GM cho hai số $a+c$ và $b+d$.

Bổ đề 4.3. (đánh giá tổng bốn tích ba) Với mọi số thực dương a, b, c, d ta có

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{(a+b+c+d)^3}{16}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Đặt $p = a+c, q = b+d$. Nhóm lại ta được $abc + bcd + cda + dab = ac(b+d) + bd(a+c) = qac + pbd$.

Theo AM–GM, $ac \leq \frac{p^2}{4}$ và $bd \leq \frac{q^2}{4}$, do đó

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{p^2q + q^2p}{4} = \frac{pq(p+q)}{4} \leq \frac{(p+q)^2}{4} \cdot \frac{p+q}{4} = \frac{(a+b+c+d)^3}{16}.$$

Bổ đề 4.4. (căn của tích không vượt quá tổng) Với mọi số thực dương a, b, c ta có

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq a + b + c.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cộng theo về ba bất đẳng thức AM–GM $2\sqrt{ab} \leq a+b, 2\sqrt{bc} \leq b+c, 2\sqrt{ca} \leq c+a$.

B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa

Ví dụ 4.1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng

$$\frac{4a}{4+b^2} + \frac{4b}{4+c^2} + \frac{4c}{4+a^2} \geq 3.$$

Phân tích. Bất đẳng thức có tính hoán vị vòng quanh nên điểm rơi hợp lý nhất là $a = b = c = 2$. Tại đó $4 + b^2 = 8$ và $4b = 8$, nghĩa là AM–GM cho mẫu số đạt dấu đẳng thức đúng ở điểm rơi. Như đã phân tích ở mục A, không được áp bất đẳng thức đó trực tiếp vào mẫu; ý tưởng chốt là tách $\frac{4a}{4+b^2} = a - \frac{ab^2}{4+b^2}$ rồi chỉ đánh giá số bị trừ.

Lời giải

• **Tách phần nguyên.** Với mọi $a, b > 0$ ta có đẳng thức

$$\frac{4a}{4+b^2} = \frac{a(4+b^2) - ab^2}{4+b^2} = a - \frac{ab^2}{4+b^2}.$$

• **Đánh giá số bị trừ.** Theo bất đẳng thức AM–GM, $4 + b^2 \geq 2\sqrt{4b^2} = 4b$, do đó

$$\frac{ab^2}{4+b^2} \leq \frac{ab^2}{4b} = \frac{ab}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{4a}{4+b^2} \geq a - \frac{ab}{4}.$$

• **Cộng ba đánh giá cùng dạng.** Viết thêm hai bất đẳng thức tương tự với các cặp (b, c) và (c, a) rồi cộng theo vế,

$$\frac{4a}{4+b^2} + \frac{4b}{4+c^2} + \frac{4c}{4+a^2} \geq (a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{4} = 6 - \frac{ab+bc+ca}{4}.$$

• **Chặn trên đại lượng phụ.** Theo Bổ đề 4.1, $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 12$. Vì vậy

$$\frac{4a}{4+b^2} + \frac{4b}{4+c^2} + \frac{4c}{4+a^2} \geq 6 - \frac{12}{4} = 3.$$

Điểm rơi. Cả hai đánh giá đã dùng cùng đạt dấu đẳng thức khi $a = b = c = 2$; khi đó mỗi phân thức bằng 1 và tổng bằng 3. Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Nhận xét. Hằng số 4 ở mẫu không được chọn tùy tiện: nó chính là bình phương của giá trị 2 tại điểm rơi. Kinh nghiệm chung khi vận dụng kỹ thuật là chọn hằng số ở mẫu sao cho bất đẳng thức AM–GM dùng cho mẫu số đạt dấu đẳng thức đúng tại điểm rơi đã dự đoán. Nếu chọn sai, chuỗi đánh giá vẫn đúng nhưng không còn chặt và thông thường ta không thu được hằng số ở vế phải.

Ví dụ 4.2. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 9$. Chứng minh rằng

$$\frac{9}{9+a^2} + \frac{9}{9+b^2} + \frac{9}{9+c^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Phân tích. Điểm rơi là $a = b = c = 3$, tại đó $9 + a^2 = 18 = 6a$. Ở dạng này tử số là hằng số nên phần nguyên tách ra cũng là hằng số: $\frac{9}{9+a^2} = 1 - \frac{a^2}{9+a^2}$. Đây là biến thể đơn giản nhất của kỹ thuật trong chương này, không cần đến bổ đề phụ nào.

Lời giải

• **Tách phần nguyên.** Với mọi $a > 0$,

$$\frac{9}{9+a^2} = \frac{(9+a^2)-a^2}{9+a^2} = 1 - \frac{a^2}{9+a^2}.$$

• **Đánh giá số bị trừ.** Theo AM-GM, $9 + a^2 \geq 2\sqrt{9a^2} = 6a$, suy ra

$$\frac{a^2}{9+a^2} \leq \frac{a^2}{6a} = \frac{a}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{9+a^2} \geq 1 - \frac{a}{6}.$$

• **Cộng ba đánh giá.** Cộng theo vế ba bất đẳng thức cùng dạng ta được

$$\frac{9}{9+a^2} + \frac{9}{9+b^2} + \frac{9}{9+c^2} \geq 3 - \frac{a+b+c}{6} = 3 - \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$; khi đó mỗi phân thức bằng $\frac{1}{2}$.

Ví dụ 4.3. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+2}{b^2+4} + \frac{b+2}{c^2+4} + \frac{c+2}{a^2+4} \geq \frac{3}{2}.$$

Phân tích. Điểm rơi vẫn là $a = b = c = 2$, ở đó mỗi phân thức bằng $\frac{1}{2}$. Tử số bây giờ là $a + 2$ chứ không phải a , nên phần nguyên tách ra là $\frac{a+2}{4}$. Sau khi tách, số bị trừ sẽ chứa cả ab lẫn b , và cả hai đại lượng này đều đã kiểm soát được nhờ giả thiết cùng Bổ đề 4.1.

Lời giải

• **Tách phần nguyên.** Với mọi $a, b > 0$,

$$\frac{a+2}{b^2+4} = \frac{a+2}{4} - \frac{(a+2)b^2}{4(b^2+4)}.$$

• **Đánh giá số bị trừ.** Vì $b^2 + 4 \geq 4b$ nên

$$\frac{(a+2)b^2}{4(b^2+4)} \leq \frac{(a+2)b^2}{16b} = \frac{ab+2b}{16}, \quad \text{suy ra} \quad \frac{a+2}{b^2+4} \geq \frac{a+2}{4} - \frac{ab+2b}{16}.$$

- **Cộng ba đánh giá.** Cộng theo vế ba bất đẳng thức cùng dạng,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a+2}{b^2+4} \geq \frac{(a+b+c)+6}{4} - \frac{(ab+bc+ca)+2(a+b+c)}{16} = 3 - \frac{(ab+bc+ca)+12}{16}.$$

- **Chặn trên đại lượng phụ.** Theo Bổ đề 4.1, $ab+bc+ca \leq 12$, do đó

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a+2}{b^2+4} \geq 3 - \frac{12+12}{16} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Nhận xét. So với Ví dụ 4.1, điều duy nhất thay đổi là tử số. Điều đó cho thấy phép tách phần nguyên vẫn thực hiện được khi tử số đổi dạng; chỉ cần tách sao cho phần còn lại có mẫu đúng bằng mẫu cũ, khi ấy số bị trừ được đánh giá bằng AM–GM ở mẫu. Việc kiểm soát số bị trừ sau đó thì còn phụ thuộc dạng của tử số: ở ví dụ này nó sinh thêm hạng tử $2b$, và ta phải dùng tới giả thiết $a+b+c=6$.

Ví dụ 4.4. Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng

$$\frac{x^4}{x^3+2y^3} + \frac{y^4}{y^3+2z^3} + \frac{z^4}{z^3+2x^3} \geq \frac{x+y+z}{3}.$$

Phân tích. Bất đẳng thức thuần nhất bậc một, không có ràng buộc, nên điểm rơi được dự đoán tại $x = y = z$. Mẫu số gồm ba hạng tử nếu ta viết $x^3+2y^3 = x^3+y^3+y^3$, vì vậy lần này phải dùng AM–GM cho ba số. Phần nguyên tách ra là x , vì $\frac{x^4}{x^3+2y^3} = x - \frac{2xy^3}{x^3+2y^3}$.

Lời giải

- **Tách phần nguyên.** Với mọi $x, y > 0$,

$$\frac{x^4}{x^3+2y^3} = \frac{x(x^3+2y^3)-2xy^3}{x^3+2y^3} = x - \frac{2xy^3}{x^3+2y^3}.$$

- **Đánh giá mẫu số bằng AM–GM cho ba số.**

$$x^3+2y^3 = x^3+y^3+y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3y^6} = 3xy^2.$$

- **Suy ra đánh giá thuận chiều.** Từ hai bước trên,

$$\frac{2xy^3}{x^3+2y^3} \leq \frac{2xy^3}{3xy^2} = \frac{2y}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^4}{x^3+2y^3} \geq x - \frac{2y}{3}.$$

- **Cộng ba đánh giá.** Cộng theo vế ba bất đẳng thức cùng dạng ta được

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^4}{x^3+2y^3} \geq (x+y+z) - \frac{2(x+y+z)}{3} = \frac{x+y+z}{3}.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức ở bước AM–GM đòi hỏi $x = y$, tương tự $y = z$ và $z = x$. Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Nhận xét. Trong các bài thuần nhất của chương này, chuỗi đánh giá thường không cần đến bổ đề phụ nào: tổng các số bị trừ tự nó đã là một bội của $x+y+z$. Đó là dấu hiệu thường gặp ở những bài toán mà kỹ thuật Cauchy ngược dấu cho lời giải ngắn gọn.

Ví dụ 4.5. Cho các số thực dương a, b, c, d . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + cd + d^2} + \frac{d^3}{d^2 + da + a^2} \geq \frac{a + b + c + d}{3}.$$

Phân tích. Vẫn là một bất đẳng thức thuần nhất bậc một, hoán vị vòng quanh bốn biến, điểm rơi $a = b = c = d$. Mẫu số $a^2 + ab + b^2$ là tổng ba hạng tử có tích bằng a^3b^3 , nên AM–GM cho ba số sẽ cho $a^2 + ab + b^2 \geq 3ab$, dấu đẳng thức đúng tại $a = b$.

Lời giải

• **Tách phần nguyên.** Với mọi $a, b > 0$,

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} = a - \frac{a^2b + ab^2}{a^2 + ab + b^2} = a - \frac{ab(a + b)}{a^2 + ab + b^2}.$$

• **Đánh giá mẫu số.** Theo AM–GM cho ba số, $a^2 + ab + b^2 \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3} = 3ab$, do đó

$$\frac{ab(a + b)}{a^2 + ab + b^2} \leq \frac{ab(a + b)}{3ab} = \frac{a + b}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq a - \frac{a + b}{3}.$$

• **Cộng bốn đánh giá.** Tổng các số bị trừ là

$$\frac{(a + b) + (b + c) + (c + d) + (d + a)}{3} = \frac{2(a + b + c + d)}{3},$$

vì vậy vế trái không nhỏ hơn $(a + b + c + d) - \frac{2(a + b + c + d)}{3} = \frac{a + b + c + d}{3}$.

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Nhận xét. Bất đẳng thức trung gian $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3}$ cũng đúng và tương đương với $(a + b)(a - b)^2 \geq 0$. Cộng theo vòng, tổng vế phải cũng bằng $\frac{a + b + c + d}{3}$. Như vậy một bài toán có thể được xử lý bằng kỹ thuật Cauchy ngược dấu hoặc bằng kỹ thuật hệ số bất định trình bày ở Chương 7, hai con đường dẫn tới cùng một đánh giá trung gian.

Ví dụ 4.6. Cho các số thực a, b, c thoả mãn $0 < a, b, c < 6$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{6 - a} + \frac{1}{6 - b} + \frac{1}{6 - c} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{54} + \frac{1}{2}.$$

Phân tích. Vế trái không có phân thức nào chứa mẫu bậc hai, nên thoát nhìn kỹ thuật Cauchy ngược dấu chưa dùng được. Ý tưởng chốt là dựng một bất đẳng thức phụ $\frac{1}{6 - t} \geq \frac{t^2 + 9}{54}$ cho $0 < t < 6$, và chính bất đẳng thức phụ này lại là hệ quả trực tiếp của kỹ thuật áp dụng cho phân thức $\frac{9}{9 + t^2}$. Điểm rơi được dự đoán tại $a = b = c = 3$, khi đó cả hai vế cùng bằng 1.

Lời giải

- **Dựng bất đẳng thức phụ.** Với $0 < t < 6$, tách phần nguyên và dùng $9 + t^2 \geq 6t$,

$$\frac{9}{9+t^2} = 1 - \frac{t^2}{9+t^2} \geq 1 - \frac{t^2}{6t} = 1 - \frac{t}{6} = \frac{6-t}{6}.$$

- **Nhân chéo và biến đổi tương đương.** Từ $\frac{9}{9+t^2} \geq \frac{6-t}{6}$ và $6-t > 0$, nhân chéo hai vế dương ta được $(6-t)(9+t^2) \leq 54$; chia hai vế cho số dương $54(6-t)$ ta được

$$\frac{1}{6-t} \geq \frac{t^2+9}{54} \quad (0 < t < 6).$$

- **Cộng ba đánh giá.** Áp dụng lần lượt cho $t = a, t = b, t = c$ rồi cộng theo vế,

$$\frac{1}{6-a} + \frac{1}{6-b} + \frac{1}{6-c} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)+27}{54} = \frac{a^2+b^2+c^2}{54} + \frac{1}{2}.$$

Điểm rơi. Bất đẳng thức phụ đạt dấu đẳng thức khi $t = 3$, nên đẳng thức của bài toán xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Nhận xét. Ví dụ này cho thấy phạm vi tác dụng của kỹ thuật rộng hơn dạng thức ban đầu của đề bài: nó không chỉ giải trực tiếp các tổng phân thức có mẫu bậc hai, mà còn là công cụ để thiết lập các đánh giá phụ một biến kiểu $\frac{1}{6-t} \geq \frac{t^2+9}{54}$, chính là dạng đánh giá thường gặp trong phương pháp tiếp tuyến.

Ví dụ 4.7. Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{yz}}{x+2\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{xz}}{y+2\sqrt{xz}} + \frac{\sqrt{xy}}{z+2\sqrt{xy}}.$$

(Đề dự bị khối B, 2010)

Phân tích. Biểu thức thuần nhất bậc không, hoán vị vòng quanh, nên điểm rơi tự nhiên là $x = y = z$; khi đó mỗi phân thức bằng $\frac{1}{3}$ và $P = 1$. Ta dự đoán $\max P = 1$. Chú ý rằng nếu nhân tử số với 2 thì tử số trở thành đúng phần $2\sqrt{yz}$ có mặt ở mẫu, cho phép tách phần nguyên. Sau khi tách, ta cần chặn dưới phần bị trừ, tức là chặn trên mẫu số, và đây chính là chỗ dùng $2\sqrt{yz} \leq y + z$.

Lời giải

- **Tách phần nguyên.** Với mọi $x, y, z > 0$,

$$\frac{2\sqrt{yz}}{x+2\sqrt{yz}} = \frac{(x+2\sqrt{yz})-x}{x+2\sqrt{yz}} = 1 - \frac{x}{x+2\sqrt{yz}}.$$

- **Chặn trên mẫu số.** Theo AM-GM, $2\sqrt{yz} \leq y + z$, do đó $x + 2\sqrt{yz} \leq x + y + z$ và

$$\frac{x}{x+2\sqrt{yz}} \geq \frac{x}{x+y+z} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{yz}}{x+2\sqrt{yz}} \leq 1 - \frac{x}{x+y+z}.$$

- **Cộng ba đánh giá.** Viết thêm hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng theo vế,

$$2P \leq 3 - \frac{x+y+z}{x+y+z} = 2 \quad \Rightarrow \quad P \leq 1.$$

- **Chỉ ra giá trị đạt được.** Với $x = y = z$ thì mỗi phân thức bằng $\frac{1}{3}$, nên $P = 1$.

Đáp số. $\max P = 1$, đạt được khi và chỉ khi $x = y = z$.

Ví dụ 4.8. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$V = \frac{a+b+c}{a^2+abc} + \frac{a+b+c}{b^2+abc} + \frac{a+b+c}{c^2+abc} \geq \frac{9}{2}.$$

(Đề thi thử Đại học lần 2, trường chuyên Nguyễn Huệ, 2007–2008)

Phân tích. Điểm rơi là $a = b = c = 1$, khi đó $abc = 1$ và mỗi phân thức bằng $\frac{3}{2}$. Đại lượng abc nằm ở mẫu của cả ba phân thức; chặn trên nó bằng 1 sẽ làm mẫu nhỏ đi, tức là làm cả ba phân thức lớn lên, đúng chiều cần thiết. Sau bước đó bài toán trở về đúng dạng chuẩn của kỹ thuật Cauchy ngược dấu.

Lời giải

- **Chặn trên tích abc .** Theo AM–GM, $3 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, suy ra $abc \leq 1$.
- **Hạ mẫu số.** Từ $abc \leq 1$ ta có $a^2 + abc \leq a^2 + 1$, do đó

$$\frac{a+b+c}{a^2+abc} \geq \frac{3}{a^2+1}, \quad \text{và tương tự với } b, c.$$

- **Áp dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu.** Với mọi $a > 0$, tách phần nguyên và dùng $1 + a^2 \geq 2a$,

$$\frac{1}{1+a^2} = 1 - \frac{a^2}{1+a^2} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2},$$

nên cộng theo vế ba bất đẳng thức cùng dạng ta được

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq 3 - \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}.$$

- **Kết luận.** Kết hợp hai bước trên, $V \geq 3 \left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \right) \geq 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

Điểm rơi. Cả ba đánh giá đã dùng cùng đạt dấu đẳng thức tại $a = b = c = 1$, vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Bài toán minh hoạ một tình huống thường gặp: kỹ thuật Cauchy ngược dấu không dùng được ngay, mà chỉ phát huy tác dụng sau một bước làm gọn giả thiết. Trong những tình huống như vậy, nên chặn các đại lượng phụ trước, đưa bài toán về dạng chuẩn, rồi mới tách phần nguyên.

Ví dụ 4.9*. Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{8a}{8+b^2c} + \frac{8b}{8+c^2d} + \frac{8c}{8+d^2a} + \frac{8d}{8+a^2b} \geq 4.$$

Phân tích. Điểm rơi là $a = b = c = d = 2$; khi đó $b^2c = 8$, nên bất đẳng thức $8 + b^2c \geq 2\sqrt{8b^2c}$ đạt dấu đẳng thức đúng ở điểm rơi. Sau khi tách phần nguyên, số bị trừ còn chứa căn thức; ta phải hạ nó về bậc nhất theo từng biến bằng một bước AM–GM nữa, rồi mới dùng được Bổ đề 4.2 và Bổ đề 4.3.

Lời giải

• **Tách phần nguyên.** Với mọi $a, b, c > 0$,

$$\frac{8a}{8+b^2c} = a - \frac{ab^2c}{8+b^2c}.$$

• **Đánh giá mẫu số.** Theo AM–GM, $8 + b^2c \geq 2\sqrt{8b^2c} = 4b\sqrt{2c}$, do đó

$$\frac{ab^2c}{8+b^2c} \leq \frac{ab^2c}{4b\sqrt{2c}} = \frac{abc}{4\sqrt{2c}} = \frac{ab\sqrt{2c}}{8}.$$

• **Hạ căn thức về bậc nhất.** Cũng theo AM–GM, $\sqrt{2c} = \frac{\sqrt{4 \cdot 2c}}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{4+2c}{2} = \frac{c+2}{2}$, dấu đẳng thức khi $c = 2$. Vì vậy

$$\frac{ab\sqrt{2c}}{8} \leq \frac{ab(c+2)}{16} = \frac{abc+2ab}{16}, \quad \text{tức là} \quad \frac{8a}{8+b^2c} \geq a - \frac{abc+2ab}{16}.$$

• **Cộng bốn đánh giá.** Cộng theo vế bốn bất đẳng thức cùng dạng,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{8a}{8+b^2c} \geq 8 - \frac{(abc+bcd+cda+dab) + 2(ab+bc+cd+da)}{16}.$$

• **Chặn trên hai đại lượng phụ.** Theo Bổ đề 4.3, $abc+bcd+cda+dab \leq \frac{8^3}{16} = 32$; theo Bổ đề 4.2, $ab+bc+cd+da \leq \frac{8^2}{4} = 16$. Do đó

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{8a}{8+b^2c} \geq 8 - \frac{32+2 \cdot 16}{16} = 8 - 4 = 4.$$

Điểm rơi. Mọi đánh giá đã dùng cùng đạt dấu đẳng thức khi $a = b = c = d = 2$; khi đó mỗi phân thức bằng 1. Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 2$.

Nhận xét. Điểm đáng lưu ý của lời giải là bước hạ căn thức: đánh giá $\sqrt{2c} \leq \frac{c+2}{2}$ phải được chọn sao cho dấu đẳng thức rơi đúng vào $c = 2$, chứ không phải $c = 1$. Chọn sai hằng số ở bước này thì toàn bộ chuỗi đánh giá tuy vẫn đúng nhưng không còn chặt, và vế phải thu được sẽ nhỏ hơn 4.

C. Bài tập có lời giải

Bài 4.1. Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{4a}{4+b^2} + \frac{4b}{4+c^2} + \frac{4c}{4+d^2} + \frac{4d}{4+a^2} \geq 4.$$

Phân tích. Bài toán là bản bốn biến của Ví dụ 4.1: mỗi phân thức có tử số bậc nhất theo một biến, còn mẫu số chứa bình phương của biến kế tiếp. Điểm rơi được dự đoán tại $a = b = c = d = 2$; khi đó $4 + b^2 = 8$ và $4b = 8$, nghĩa là bất đẳng thức AM–GM dùng cho mẫu số đạt dấu đẳng thức đúng ở điểm rơi. Sau khi tách phần nguyên, tổng các số bị trừ sẽ là $\frac{ab + bc + cd + da}{4}$ – đúng đại lượng đã được Bổ đề 4.2 chặn trên.

Lời giải

• **Tách phần nguyên.** Với mọi $a, b > 0$ ta có đẳng thức

$$\frac{4a}{4+b^2} = \frac{a(4+b^2) - ab^2}{4+b^2} = a - \frac{ab^2}{4+b^2}.$$

• **Đánh giá số bị trừ.** Theo bất đẳng thức AM–GM, $4 + b^2 \geq 2\sqrt{4b^2} = 4b$, do đó

$$\frac{ab^2}{4+b^2} \leq \frac{ab^2}{4b} = \frac{ab}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{4a}{4+b^2} \geq a - \frac{ab}{4}.$$

• **Cộng bốn đánh giá cùng dạng.** Viết bất đẳng thức vừa thu được lần lượt cho các cặp $(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)$ rồi cộng theo vế,

$$\begin{aligned} \frac{4a}{4+b^2} + \frac{4b}{4+c^2} + \frac{4c}{4+d^2} + \frac{4d}{4+a^2} &\geq (a+b+c+d) - \frac{ab+bc+cd+da}{4} \\ &= 8 - \frac{ab+bc+cd+da}{4}. \end{aligned}$$

• **Chặn trên đại lượng phụ.** Theo Bổ đề 4.2,

$$ab + bc + cd + da \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{4} = \frac{8^2}{4} = 16,$$

vì vậy vế trái không nhỏ hơn $8 - \frac{16}{4} = 4$.

Điểm rơi. Dấu đẳng thức ở bốn bất đẳng thức AM–GM đòi hỏi $b = 2, c = 2, d = 2, a = 2$; bộ số $a = b = c = d = 2$ cũng làm Bổ đề 4.2 đạt dấu đẳng thức vì khi đó $a + c = b + d = 4$. Khi ấy mỗi phân thức bằng 1 và tổng bằng 4. Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 2$.

Bài 4.2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2 + 4} + \frac{b^3}{b^2 + 4} + \frac{c^3}{c^2 + 4} \geq 3.$$

Phân tích. Điểm rơi được dự đoán tại $a = b = c = 2$; khi đó $a^2 + 4 = 8$ và $4a = 8$, nên bất đẳng thức AM–GM dùng cho mẫu số đạt dấu đẳng thức đúng ở điểm rơi. Tử số bậc ba, mẫu số bậc hai nên phân nguyên tách ra là một biểu thức bậc nhất. Điểm đáng chú ý là số bị trừ $\frac{4a}{a^2 + 4}$ chỉ phụ thuộc một biến và bị chặn trên bởi hằng số 1, vì vậy lời giải không cần đến bổ đề phụ nào.

Lời giải

• **Tách phần nguyên.** Với mọi $a > 0$,

$$\frac{a^3}{a^2 + 4} = \frac{a(a^2 + 4) - 4a}{a^2 + 4} = a - \frac{4a}{a^2 + 4}.$$

• **Chặn trên số bị trừ.** Theo bất đẳng thức AM–GM, $a^2 + 4 \geq 2\sqrt{4a^2} = 4a$, do đó

$$\frac{4a}{a^2 + 4} \leq \frac{4a}{4a} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^3}{a^2 + 4} \geq a - 1.$$

• **Cộng ba đánh giá.** Viết thêm hai bất đẳng thức cùng dạng với b và c rồi cộng theo vế,

$$\frac{a^3}{a^2 + 4} + \frac{b^3}{b^2 + 4} + \frac{c^3}{c^2 + 4} \geq (a + b + c) - 3 = 6 - 3 = 3.$$

Điểm rơi. Cả ba bất đẳng thức AM–GM cùng đạt dấu đẳng thức khi $a = b = c = 2$; khi đó mỗi phân thức bằng 1 và tổng bằng 3. Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Bài 4.3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{4 + ab} + \frac{4}{4 + bc} + \frac{4}{4 + ca} \geq \frac{3}{2}.$$

Phân tích. Tử số là hằng số nên phân nguyên tách ra cũng là hằng số. Điểm rơi được dự đoán tại $a = b = c = 2$; khi đó $ab = 4$ và $4 + ab = 8 = 4\sqrt{ab}$, nghĩa là bất đẳng thức AM–GM dạng $4 + ab \geq 4\sqrt{ab}$ đạt dấu đẳng thức đúng ở điểm rơi. Sau khi tách, tổng các số bị trừ chứa $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$, chính là đại lượng đã được Bổ đề 4.4 chặn trên bởi $a + b + c$.

Lời giải

• **Tách phần nguyên.** Với mọi $a, b > 0$,

$$\frac{4}{4 + ab} = \frac{(4 + ab) - ab}{4 + ab} = 1 - \frac{ab}{4 + ab}.$$

• **Đánh giá mẫu số.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho hai số 4 và ab ,

$$4 + ab \geq 2\sqrt{4ab} = 4\sqrt{ab},$$

dấu đẳng thức khi và chỉ khi $ab = 4$.

• **Suy ra đánh giá thuận chiều.** Từ hai bước trên,

$$\frac{ab}{4+ab} \leq \frac{ab}{4\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{4} \Rightarrow \frac{4}{4+ab} \geq 1 - \frac{\sqrt{ab}}{4}.$$

• **Cộng ba đánh giá.** Viết thêm hai bất đẳng thức cùng dạng với các cặp (b, c) và (c, a) rồi cộng theo vế,

$$\frac{4}{4+ab} + \frac{4}{4+bc} + \frac{4}{4+ca} \geq 3 - \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{4}.$$

• **Chặn trên tổng các căn.** Theo Bổ đề 4.4, $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq a + b + c = 6$, do đó

$$\frac{4}{4+ab} + \frac{4}{4+bc} + \frac{4}{4+ca} \geq 3 - \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức ở ba bất đẳng thức AM–GM đòi hỏi $ab = bc = ca = 4$, còn dấu đẳng thức ở Bổ đề 4.4 đòi hỏi $a = b = c$; hai điều kiện ấy cùng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$, và bộ số này thoả mãn giả thiết $a + b + c = 6$. Khi đó mỗi phân thức bằng $\frac{1}{2}$.

Bài 4.4*. Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $x + y + z = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$V = \frac{x^2}{2x + y^2} + \frac{y^2}{2y + z^2} + \frac{z^2}{2z + x^2}.$$

Phân tích. Mẫu số $2x + y^2$ không thuần nhất, nên lời giải cần khai thác ràng buộc $x + y + z = 6$. Điểm rơi được dự đoán tại $x = y = z = 2$; khi đó mỗi phân thức bằng $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ và $V = \frac{3}{2}$. Ta dự đoán $\min V = \frac{3}{2}$ và chứng minh $V \geq \frac{3}{2}$.

• **Chọn đánh giá cho mẫu số.** Tại điểm rơi ta có $2x = 4 = y^2$, nghĩa là bất đẳng thức AM–GM dạng $2x + y^2 \geq 2y\sqrt{2x}$ đạt dấu đẳng thức đúng ở điểm rơi.

• **Dự liệu đường đi.** Sau khi tách phần nguyên, số bị trừ còn chứa căn thức, nên cần thêm một bước hạ căn về bậc nhất trước khi dùng Bổ đề 4.1.

Lời giải

• **Tách phần nguyên.** Mẫu số chứa hạng tử $2x$ nên phần nguyên tách ra là $\frac{x}{2}$. Thật vậy, với mọi $x, y > 0$,

$$\frac{x}{2} - \frac{xy^2}{2(2x + y^2)} = \frac{x(2x + y^2) - xy^2}{2(2x + y^2)} = \frac{2x^2}{2(2x + y^2)} = \frac{x^2}{2x + y^2}.$$

• **Đánh giá mẫu số.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho hai số $2x$ và y^2 ,

$$2x + y^2 \geq 2\sqrt{2xy^2} = 2y\sqrt{2x},$$

dấu đẳng thức khi và chỉ khi $2x = y^2$.

- **Đưa số bị trừ về dạng chứa một căn.** Từ đánh giá vừa nêu,

$$\frac{xy^2}{2(2x+y^2)} \leq \frac{xy^2}{4y\sqrt{2x}} = \frac{xy}{4\sqrt{2x}} = \frac{xy\sqrt{2x}}{4 \cdot 2x} = \frac{y\sqrt{2x}}{8}.$$

- **Hạ căn thức về bậc nhất.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho hai số 2 và x ta có $\sqrt{2x} \leq \frac{x+2}{2}$, dấu đẳng thức khi và chỉ khi $x = 2$. Vì vậy

$$\frac{y\sqrt{2x}}{8} \leq \frac{y(x+2)}{16} = \frac{xy+2y}{16}, \quad \text{tức là} \quad \frac{x^2}{2x+y^2} \geq \frac{x}{2} - \frac{xy+2y}{16}.$$

- **Cộng ba đánh giá.** Viết thêm hai bất đẳng thức cùng dạng với các cặp (y, z) và (z, x) rồi cộng theo vế,

$$V \geq \frac{x+y+z}{2} - \frac{(xy+yz+zx) + 2(x+y+z)}{16} = 3 - \frac{(xy+yz+zx) + 12}{16}.$$

- **Chặn trên đại lượng phụ.** Theo Bổ đề 4.1, $xy+yz+zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = 12$, do đó

$$V \geq 3 - \frac{12+12}{16} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

- **Chỉ ra giá trị đạt được.** Với $x = y = z = 2$ thì $x+y+z = 6$ và mỗi phân thức bằng $\frac{4}{4+4} = \frac{1}{2}$, nên $V = \frac{3}{2}$.

Đáp số. $\min V = \frac{3}{2}$, đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

Bài 4.5. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $ab = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{4+b^2} + \frac{b^3}{4+a^2} \geq 2.$$

Phân tích. Ràng buộc là $ab = 4$, điểm rơi được dự đoán tại $a = b = 2$; khi đó $4+b^2 = 8 = 4b$, nghĩa là bất đẳng thức AM–GM dùng cho mẫu số đạt dấu đẳng thức đúng ở điểm rơi. Tử số bậc ba nên phân nguyên tách ra là $\frac{a^3}{4}$. Nhờ giả thiết $ab = 4$, số bị trừ sau khi đánh giá rút gọn thành $\frac{a^2}{4}$, và bài toán quy về một bất đẳng thức một biến theo $s = a + b$, trong đó $s \geq 2\sqrt{ab} = 4$.

Lời giải

- **Tách phần nguyên.** Với mọi $a, b > 0$,

$$\frac{a^3}{4} - \frac{a^3b^2}{4(4+b^2)} = \frac{a^3(4+b^2) - a^3b^2}{4(4+b^2)} = \frac{4a^3}{4(4+b^2)} = \frac{a^3}{4+b^2}.$$

- **Đánh giá số bị trừ.** Theo bất đẳng thức AM–GM, $4+b^2 \geq 4b$, do đó, kết hợp với giả thiết $ab = 4$,

$$\frac{a^3b^2}{4(4+b^2)} \leq \frac{a^3b^2}{16b} = \frac{a^2 \cdot ab}{16} = \frac{4a^2}{16} = \frac{a^2}{4},$$

suy ra $\frac{a^3}{4+b^2} \geq \frac{a^3-a^2}{4}$.

• **Cộng hai đánh giá.** Viết thêm bất đẳng thức cùng dạng với vai trò của a và b đổi chỗ rồi cộng theo vế,

$$\frac{a^3}{4+b^2} + \frac{b^3}{4+a^2} \geq \frac{(a^3+b^3)-(a^2+b^2)}{4}.$$

• **Quy về một biến.** Đặt $s = a + b$. Vì $ab = 4$ nên

$$a^3 + b^3 = s^3 - 3abs = s^3 - 12s, \quad a^2 + b^2 = s^2 - 2ab = s^2 - 8,$$

do đó vế phải ở bước trên bằng $\frac{s^3 - s^2 - 12s + 8}{4}$.

• **Chứng minh bất đẳng thức một biến.** Theo AM-GM, $s = a + b \geq 2\sqrt{ab} = 4$. Ta có

$$\frac{s^3 - s^2 - 12s + 8}{4} - 2 = \frac{s^3 - s^2 - 12s}{4} = \frac{s(s-4)(s+3)}{4} \geq 0$$

vì $s \geq 4$ kéo theo $s > 0$, $s - 4 \geq 0$ và $s + 3 > 0$.

• **Kết luận.** Ghép hai bước cuối, $\frac{a^3}{4+b^2} + \frac{b^3}{4+a^2} \geq 2$.

Điểm rơi. Bất đẳng thức một biến đạt dấu đẳng thức khi $s = 4$; cùng với $ab = 4$ điều đó buộc $a = b = 2$. Khi ấy mỗi phân thức bằng $\frac{8}{8} = 1$ và tổng bằng 2. Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$.

Bài 4.6. Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0 < a, b, c, d < 6$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{6-a} + \frac{1}{6-b} + \frac{1}{6-c} + \frac{1}{6-d} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{54} + \frac{2}{3}.$$

Phân tích. Bài toán là bản bốn biến của Ví dụ 4.6. Các biến hoàn toàn độc lập với nhau và mỗi phân thức chỉ chứa một biến, nên chỉ cần một đánh giá một biến rồi cộng theo vế.

• **Bất đẳng thức phụ một biến.** Đánh giá ấy chính là bất đẳng thức phụ $\frac{1}{6-t} \geq \frac{t^2+9}{54}$ với $0 < t < 6$, được dựng bằng kỹ thuật Cauchy ngược dấu áp dụng cho phân thức $\frac{9}{9+t^2}$.

• **Dự đoán điểm rơi.** Điểm rơi của bất đẳng thức phụ là $t = 3$, nên điểm rơi của bài toán là $a = b = c = d = 3$; khi đó hai vế cùng bằng $\frac{4}{3}$.

Lời giải

• **Dựng bất đẳng thức phụ.** Với $0 < t < 6$, tách phần nguyên rồi dùng bất đẳng thức AM-GM $9 + t^2 \geq 2\sqrt{9t^2} = 6t$,

$$\frac{9}{9+t^2} = 1 - \frac{t^2}{9+t^2} \geq 1 - \frac{t^2}{6t} = 1 - \frac{t}{6} = \frac{6-t}{6}.$$

• **Nhân chéo và biến đổi tương đương.** Nhân hai vế của $\frac{9}{9+t^2} \geq \frac{6-t}{6}$ với số dương $6(9+t^2)$ ta được $(6-t)(9+t^2) \leq 54$. Vì $0 < t < 6$ nên $6-t > 0$; chia hai vế cho số dương $54(6-t)$,

$$\frac{1}{6-t} \geq \frac{t^2+9}{54} \quad (0 < t < 6).$$

Đây đúng là bất đẳng thức phụ đã dựng ở Ví dụ 4.6.

• **Cộng bốn đánh giá.** Áp dụng bất đẳng thức phụ lần lượt cho $t = a, t = b, t = c, t = d$ rồi cộng theo vế,

$$\begin{aligned}\frac{1}{6-a} + \frac{1}{6-b} + \frac{1}{6-c} + \frac{1}{6-d} &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 36}{54} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{54} + \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Điểm rơi. Bất đẳng thức phụ đạt dấu đẳng thức khi và chỉ khi $9 = t^2$, tức $t = 3$. Vậy đẳng thức của bài toán xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 3$; khi đó cả hai vế cùng bằng $\frac{4}{3}$.

Bài 4.7. Cho các số thực a, b, c không nhỏ hơn 2. Chứng minh rằng

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) + 32\left(\frac{1}{4+a^2} + \frac{1}{4+b^2} + \frac{1}{4+c^2}\right) \geq 36.$$

Phân tích. Vế trái gồm hai phần biến thiên ngược nhau: phần đa thức tăng theo các biến, còn tổng ba phân thức giảm. Ý tưởng chốt là chặn dưới tổng ba phân thức bằng kỹ thuật Cauchy ngược dấu để đưa bài toán về một bất đẳng thức đa thức, rồi khai thác điều kiện biên $a, b, c \geq 2$.

• **Dự đoán điểm rơi.** Vì các biến chỉ bị chặn dưới bởi 2 nên điểm rơi được dự đoán ở biên, tức $a = b = c = 2$; khi đó vế trái bằng $24 + 32 \cdot \frac{3}{8} = 36$.

• **Chọn đánh giá cho mẫu số.** Khi đó $4 + a^2 = 8 = 4a$, nên bất đẳng thức AM–GM dùng cho mẫu số đạt dấu đẳng thức đúng ở điểm rơi.

Lời giải

• **Viết gọn phần đa thức.** Khai triển rồi nhóm lại,

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) = 2(ab+bc+ca).$$

• **Chặn dưới từng phân thức.** Với mọi $a > 0$, tách phần nguyên rồi dùng bất đẳng thức AM–GM $4 + a^2 \geq 2\sqrt{4a^2} = 4a$,

$$\frac{4}{4+a^2} = 1 - \frac{a^2}{4+a^2} \geq 1 - \frac{a^2}{4a} = 1 - \frac{a}{4}, \quad \text{tức là} \quad \frac{32}{4+a^2} \geq 8 - 2a.$$

• **Cộng ba đánh giá.** Viết thêm hai bất đẳng thức cùng dạng với b và c rồi cộng theo vế,

$$32\left(\frac{1}{4+a^2} + \frac{1}{4+b^2} + \frac{1}{4+c^2}\right) \geq 24 - 2(a+b+c).$$

• **Quy về bất đẳng thức đa thức.** Ghép hai kết quả trên, vế trái của bài toán không nhỏ hơn $2(ab+bc+ca) + 24 - 2(a+b+c)$. Vì vậy chỉ còn phải chứng minh

$$2(ab+bc+ca) - 2(a+b+c) \geq 12, \quad \text{tương đương} \quad ab+bc+ca - (a+b+c) \geq 6.$$

• **Khai thác điều kiện biên.** Nhóm lại vế trái theo từng biến,

$$ab+bc+ca - (a+b+c) = a(b-1) + b(c-1) + c(a-1).$$

Vì $a, b, c \geq 2$ nên $a \geq 2$ và $b-1 \geq 1$, do đó $a(b-1) \geq 2$; hoàn toàn tương tự $b(c-1) \geq 2$ và $c(a-1) \geq 2$. Cộng ba bất đẳng thức ấy ta được $ab + bc + ca - (a + b + c) \geq 6$.

• **Kết luận.** Vậy về trái không nhỏ hơn $12 + 24 = 36$.

Điểm rơi. Ba bất đẳng thức AM–GM đạt dấu đẳng thức khi $a = b = c = 2$, và các đánh giá $a(b-1) \geq 2$, $b(c-1) \geq 2$, $c(a-1) \geq 2$ cũng đạt dấu đẳng thức đúng tại bộ số đó. Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Bài 4.8*. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^4 y}{4 + x^2} + \frac{y^4 z}{4 + y^2} + \frac{z^4 x}{4 + z^2} \geq 12.$$

Phân tích. Ràng buộc là $xyz = 8$, điểm rơi được dự đoán tại $x = y = z = 2$; khi đó $4 + x^2 = 8 = 4x$, nghĩa là bất đẳng thức AM–GM dùng cho mẫu số đạt dấu đẳng thức đúng ở điểm rơi.

• **Chọn cách tách.** Tử số $x^4 y$ chứa thừa số $x^2 y$, nên cách tách hợp lý là

$$\frac{x^4 y}{4 + x^2} = x^2 y \left(1 - \frac{4}{4 + x^2} \right)$$

trong đó phần trong ngoặc đúng dạng chuẩn của kỹ thuật.

• **Định hướng phần còn lại.** Sau bước đó bài toán quy về việc chặn dưới $x^2 y + y^2 z + z^2 x$ qua $xy + yz + zx$, rồi chặn dưới $xy + yz + zx$ bằng AM–GM cho ba số dưới ràng buộc $xyz = 8$.

Lời giải

• **Tách phần nguyên.** Với mọi $x, y > 0$,

$$\frac{x^4 y}{4 + x^2} = x^2 y \cdot \frac{x^2}{4 + x^2} = x^2 y \left(1 - \frac{4}{4 + x^2} \right).$$

• **Đánh giá số bị trừ.** Theo bất đẳng thức AM–GM, $4 + x^2 \geq 2\sqrt{4x^2} = 4x$, do đó $\frac{4}{4 + x^2} \leq \frac{4}{4x} = \frac{1}{x}$ và

$$\frac{x^4 y}{4 + x^2} \geq x^2 y \left(1 - \frac{1}{x} \right) = x^2 y - xy.$$

• **Cộng ba đánh giá.** Viết thêm hai bất đẳng thức cùng dạng với các cặp (y, z) và (z, x) rồi cộng theo vế,

$$\frac{x^4 y}{4 + x^2} + \frac{y^4 z}{4 + y^2} + \frac{z^4 x}{4 + z^2} \geq (x^2 y + y^2 z + z^2 x) - (xy + yz + zx).$$

• **Chặn dưới theo tổng ba biến.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương $x^2 y, x^2 y, z^2 x$ và dùng $xyz = 8$,

$$x^2 y + x^2 y + z^2 x \geq 3\sqrt[3]{x^5 y^2 z^2} = 3x\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3x\sqrt[3]{64} = 12x.$$

Thực hiện phép hoán vị vòng $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ hai lần ta được thêm $2y^2 z + x^2 y \geq 12y$ và $2z^2 x + y^2 z \geq 12z$. Cộng ba bất đẳng thức,

$$3(x^2 y + y^2 z + z^2 x) \geq 12(x + y + z) \quad \Rightarrow \quad x^2 y + y^2 z + z^2 x \geq 4(x + y + z).$$

• **Chặn dưới theo tổng ba tích đôi một.** Cũng theo AM–GM, $x^2y + 4y \geq 2\sqrt{4x^2y^2} = 4xy$; tương tự $y^2z + 4z \geq 4yz$ và $z^2x + 4x \geq 4zx$. Cộng ba bất đẳng thức,

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 4(xy + yz + zx) - 4(x + y + z).$$

• **Cộng hai chặn dưới.** Cộng theo vế hai kết quả vừa thu được, số hạng $4(x + y + z)$ triệt tiêu và

$$2(x^2y + y^2z + z^2x) \geq 4(xy + yz + zx) \Rightarrow x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(xy + yz + zx).$$

• **Kết thúc bằng AM–GM cho ba tích.** Thay vào bước cộng ba đánh giá,

$$\frac{x^4y}{4+x^2} + \frac{y^4z}{4+y^2} + \frac{z^4x}{4+z^2} \geq 2(xy + yz + zx) - (xy + yz + zx) = xy + yz + zx,$$

và theo AM–GM cho ba số xy, yz, zx thì $xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3\sqrt[3]{64} = 12$.

Điểm rơi. Đánh giá mẫu số $4 + x^2 \geq 4x$ đạt dấu đẳng thức khi và chỉ khi $x = 2$; hai đánh giá cùng dạng viết cho y và z buộc $y = 2$ và $z = 2$. Ngược lại, bộ số $x = y = z = 2$ thoả mãn giả thiết $xyz = 8$ và làm mọi đánh giá còn lại trở thành đẳng thức: khi ấy $2x^2y + z^2x = 24 = 12x$, $x^2y + 4y = 16 = 4xy$ và $xy + yz + zx = 12 = 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$. Khi đó mỗi phân thức bằng $\frac{32}{8} = 4$ và tổng bằng 12. Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

Bài 4.9. Cho hai số thực dương a, b thoả mãn $a + b = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{a^2}{a+2} + \frac{b^2}{b+2}.$$

Phân tích. Ràng buộc là $a + b = 4$, điểm rơi được dự đoán tại $a = b = 2$; khi đó $a + 2 = 4 = 2\sqrt{2a}$, nghĩa là bất đẳng thức AM–GM dùng cho mẫu số đạt dấu đẳng thức đúng ở điểm rơi, và $M = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2$. Ta dự đoán $\min M = 2$ và chứng minh $M \geq 2$. Từ số bậc hai, mẫu số bậc nhất nên phân nguyên tách ra là a ; số bị trừ chứa căn thức và sẽ được kiểm soát nhờ đánh giá $\sqrt{2a} + \sqrt{2b} \leq 4$.

Lời giải

• **Tách phân nguyên.** Với mọi $a > 0$,

$$\frac{a^2}{a+2} = \frac{a(a+2) - 2a}{a+2} = a - \frac{2a}{a+2}.$$

• **Đánh giá mẫu số.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho hai số a và 2, $a + 2 \geq 2\sqrt{2a}$, dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = 2$.

• **Suy ra đánh giá thuận chiều.** Từ hai bước trên,

$$\frac{2a}{a+2} \leq \frac{2a}{2\sqrt{2a}} = \frac{a}{\sqrt{2a}} = \frac{a\sqrt{2a}}{2a} = \frac{\sqrt{2a}}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{a+2} \geq a - \frac{\sqrt{2a}}{2}.$$

• **Cộng hai đánh giá.** Viết thêm bất đẳng thức cùng dạng với b rồi cộng theo vế,

$$M \geq (a+b) - \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{2b}}{2} = 4 - \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{2b}}{2}.$$

- **Chặn trên tổng hai căn.** Đặt $u = 2a, v = 2b$. Theo AM–GM, $2\sqrt{uv} \leq u + v$, do đó

$$(\sqrt{2a} + \sqrt{2b})^2 = u + v + 2\sqrt{uv} \leq 2(u + v) = 4(a + b) = 16,$$

suy ra $\sqrt{2a} + \sqrt{2b} \leq 4$, dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = 2$.

- **Kết luận.** Ghép hai bước trên, $M \geq 4 - \frac{4}{2} = 2$.
- **Chỉ ra giá trị đạt được.** Bộ số $a = b = 2$ thoả mãn $a + b = 4$ và cho $M = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2$.

Đáp số. min $M = 2$, đạt được khi và chỉ khi $a = b = 2$.

Bài 4.10. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $ab + bc + ca = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4a}{4 + b^3} + \frac{4b}{4 + c^3} + \frac{4c}{4 + a^3}.$$

Phân tích. Ràng buộc là $ab + bc + ca = 12$, điểm rơi được dự đoán tại $a = b = c = 2$; khi đó $4 + b^3 = 12$ và mỗi phân thức bằng $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, cho $P = 2$. Ta dự đoán min $P = 2$ và chứng minh $P \geq 2$. Mẫu số bậc ba nên bất đẳng thức AM–GM phải dùng cho ba số; muốn dấu đẳng thức rơi đúng vào $b = 2$, ta nhân cả tử lẫn mẫu của số bị trừ với 2 để mẫu trở thành $8 + b^3 + b^3$, ba số có tích $8b^6$ và bằng nhau đúng khi $b = 2$.

Lời giải

- **Tách phần nguyên.** Với mọi $a, b > 0$,

$$\frac{4a}{4 + b^3} = \frac{a(4 + b^3) - ab^3}{4 + b^3} = a - \frac{ab^3}{4 + b^3}.$$

- **Nhân đôi để cân bằng mẫu số.** Nhân cả tử và mẫu của số bị trừ với 2,

$$\frac{ab^3}{4 + b^3} = \frac{2ab^3}{8 + 2b^3}.$$

- **Đánh giá mẫu số bằng AM–GM cho ba số.** Với ba số dương $8, b^3, b^3$,

$$8 + 2b^3 = 8 + b^3 + b^3 \geq 3\sqrt[3]{8b^6} = 6b^2,$$

dấu đẳng thức khi và chỉ khi $b^3 = 8$, tức $b = 2$.

- **Suy ra đánh giá thuận chiều.** Từ hai bước trên,

$$\frac{2ab^3}{8 + 2b^3} \leq \frac{2ab^3}{6b^2} = \frac{ab}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{4a}{4 + b^3} \geq a - \frac{ab}{3}.$$

- **Cộng ba đánh giá.** Viết thêm hai bất đẳng thức cùng dạng với các cặp (b, c) và (c, a) rồi cộng theo vế,

$$P \geq (a + b + c) - \frac{ab + bc + ca}{3} = (a + b + c) - \frac{12}{3} = (a + b + c) - 4.$$

- **Chặn dưới tổng ba biến.** Theo hệ quả của Bổ đề 4.1,

$$a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)} = \sqrt{36} = 6,$$

do đó $P \geq 6 - 4 = 2$.

• **Chỉ ra giá trị đạt được.** Bộ số $a = b = c = 2$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 12$ và cho $P = 3 \cdot \frac{8}{12} = 2$.

Đáp số. min $P = 2$, đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Bài 4.11. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{a^4 + 3b^4} + \frac{b^5}{b^4 + 3c^4} + \frac{c^5}{c^4 + 3a^4} \geq \frac{a + b + c}{4}.$$

Phân tích. Bất đẳng thức thuần nhất bậc một và không có ràng buộc, nên điểm rơi được dự đoán tại $a = b = c$. Mẫu số viết được thành $a^4 + 3b^4 = a^4 + b^4 + b^4 + b^4$, tức tổng bốn hạng tử có tích $a^4 b^{12}$; vì vậy AM–GM cho bốn số cho $a^4 + 3b^4 \geq 4ab^3$ với dấu đẳng thức đúng tại $a = b$. Phần nguyên tách ra là a , đúng như ở Ví dụ 4.4.

Lời giải

• **Tách phần nguyên.** Với mọi $a, b > 0$,

$$\frac{a^5}{a^4 + 3b^4} = \frac{a(a^4 + 3b^4) - 3ab^4}{a^4 + 3b^4} = a - \frac{3ab^4}{a^4 + 3b^4}.$$

• **Đánh giá mẫu số bằng AM–GM cho bốn số.** Với bốn số dương a^4, b^4, b^4, b^4 ,

$$a^4 + 3b^4 = a^4 + b^4 + b^4 + b^4 \geq 4\sqrt[4]{a^4 b^{12}} = 4ab^3,$$

dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

• **Suy ra đánh giá thuận chiều.** Từ hai bước trên,

$$\frac{3ab^4}{a^4 + 3b^4} \leq \frac{3ab^4}{4ab^3} = \frac{3b}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^5}{a^4 + 3b^4} \geq a - \frac{3b}{4}.$$

• **Cộng ba đánh giá.** Viết thêm hai bất đẳng thức cùng dạng với các cặp (b, c) và (c, a) rồi cộng theo vế,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^5}{a^4 + 3b^4} \geq (a + b + c) - \frac{3(a + b + c)}{4} = \frac{a + b + c}{4}.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức ở ba bất đẳng thức AM–GM lần lượt đòi hỏi $a = b, b = c$ và $c = a$. Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 4.12*. Cho $n \geq 3$ và $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^n}{a_i^{n-1} + (n-2)a_{i+1}^{n-1}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n-1},$$

trong đó quy ước $a_{n+1} = a_1$.

Phân tích. Bài toán là dạng tổng quát của Ví dụ 4.4: mẫu số $x^3 + 2y^3$ ở ví dụ ấy chính là $a_i^{n-1} + (n-2)a_{i+1}^{n-1}$ ứng với $n = 4$, chỉ khác là ví dụ ấy viết cho ba biến còn phát biểu ở đây lấy số biến bằng đúng n . Về trái thuần nhất bậc một và không có ràng buộc, nên điểm rơi được dự đoán tại $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

• **Số biến không cản trở lập luận.** Chỗ khác biệt ấy không ảnh hưởng tới lập luận, vì dù có bao nhiêu biến thì mỗi biến cũng xuất hiện đúng một lần ở vị trí a_{i+1} , nên tổng các số bị trừ luôn tỉ lệ với tổng tất cả các biến.

• **Chọn bậc của AM–GM.** Mẫu số $a_i^{n-1} + (n-2)a_{i+1}^{n-1}$ là tổng của $n-1$ hạng tử, gồm một hạng tử a_i^{n-1} và $n-2$ hạng tử a_{i+1}^{n-1} , vì vậy phải dùng AM–GM cho $n-1$ số.

• **Dự liệu bước cộng.** Sau khi tách phần nguyên, tổng các số bị trừ là một bội của $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, nên lời giải không cần đến bổ đề phụ nào.

Lời giải

• **Tách phần nguyên.** Cố định chỉ số i và đặt $u = a_i, v = a_{i+1}$ cho gọn. Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{u^n}{u^{n-1} + (n-2)v^{n-1}} &= \frac{u(u^{n-1} + (n-2)v^{n-1}) - (n-2)uv^{n-1}}{u^{n-1} + (n-2)v^{n-1}} \\ &= u - \frac{(n-2)uv^{n-1}}{u^{n-1} + (n-2)v^{n-1}}. \end{aligned}$$

• **Đánh giá mẫu số bằng AM–GM cho $n-1$ số.** Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho $n-1$ số dương gồm một số u^{n-1} và $n-2$ số v^{n-1} ,

$$u^{n-1} + (n-2)v^{n-1} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{u^{n-1}(v^{n-1})^{n-2}} = (n-1)uv^{n-2},$$

vì $(u^{n-1}v^{(n-1)(n-2)})^{\frac{1}{n-1}} = uv^{n-2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u = v$.

• **Suy ra đánh giá thuận chiều.** Từ hai bước trên,

$$\frac{(n-2)uv^{n-1}}{u^{n-1} + (n-2)v^{n-1}} \leq \frac{(n-2)uv^{n-1}}{(n-1)uv^{n-2}} = \frac{(n-2)v}{n-1},$$

tức là, trở lại ký hiệu ban đầu,

$$\frac{a_i^n}{a_i^{n-1} + (n-2)a_{i+1}^{n-1}} \geq a_i - \frac{(n-2)a_{i+1}}{n-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

• **Cộng n đánh giá.** Đặt $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Do quy ước $a_{n+1} = a_1$, dãy $a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$ chỉ là dãy $a_1, \dots, a_n$ viết theo thứ tự khác, nên $\sum_{i=1}^n a_{i+1} = S$. Cộng theo vế n bất đẳng thức ở bước trên,

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^n}{a_i^{n-1} + (n-2)a_{i+1}^{n-1}} \geq S - \frac{(n-2)S}{n-1} = \frac{S}{n-1}.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức ở bất đẳng thức AM–GM ứng với chỉ số i đòi hỏi $a_i = a_{i+1}$; cho i chạy từ 1 đến n ta được đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

CHƯƠNG 5

Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz và dạng Engel

05

Từ bất đẳng thức giữa hai bộ số đến kỹ thuật cộng mẫu: chọn bộ số phụ sao cho điểm rơi được bảo toàn.

A. Kiến thức trọng tâm

Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz

Cho hai bộ số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ phụ thuộc tuyến tính. Nếu $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ không phải bộ số không thì điều đó tương đương với việc tồn tại hằng số λ sao cho $a_i = \lambda b_i$ với mọi i ; khi thêm giả thiết mọi b_i đều khác 0, điều kiện này viết được dưới dạng dãy tỉ số

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Trong tài liệu phổ thông ở nước ta, bất đẳng thức trên thường được gọi là **bất đẳng thức Bunhiacopxki**; tên gọi đầy đủ là bất đẳng thức Cauchy–Bunhiacopxki–Schwarz. Toàn bộ cuốn sách này dùng thống nhất tên **bất đẳng thức Cauchy–Schwarz**, còn dạng cộng mẫu trình bày ngay sau đây được gọi là **dạng Engel** (một số tài liệu trong nước gọi là dạng phân thức).

Với $n = 2$ và $n = 3$ ta có hai trường hợp riêng được dùng nhiều nhất:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2, \quad (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2.$$

Bổ đề 5.1. (dạng Engel với hai số hạng) Cho a, b là các số thực và x, y là các số dương. Khi đó

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

• **Chứng minh.** Vì $x, y > 0$ nên bất đẳng thức tương đương với

$$a^2y(x+y) + b^2x(x+y) \geq (a+b)^2xy \Leftrightarrow a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$, tức là $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Bổ đề 5.2. (bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel) Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực và $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số dương. Khi đó

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \dots = \frac{a_n}{x_n}$ (dãy tỉ số này có nghĩa vì mọi x_i đều dương).

• **Chứng minh.** Xét trường hợp $n = 3$ và viết gọn a, b, c thay cho a_1, a_2, a_3 cùng x, y, z thay cho x_1, x_2, x_3 .

• **Ghép dần các phân thức.** Áp dụng Bổ đề 5.1 hai lần ta được

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

• **Quy nạp lên tổng quát.** Lập luận tương tự và quy nạp theo n cho kết quả tổng quát.

• **Dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi mọi lần áp dụng Bổ đề 5.1 đều có dấu đẳng thức, tức là khi các tỉ số $\frac{a_i}{x_i}$ bằng nhau.

Ba hệ quả thường dùng

Với mọi số thực a, b, c ta có

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca), \quad 3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2,$$

và do đó $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. Cả ba đều có dấu đẳng thức khi $a = b = c$.

Hai bất đẳng thức được viết ở dạng hiển thị trên đây đều quy về $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$; riêng bất đẳng thức thứ hai cũng chính là bất đẳng thức Cauchy–Schwarz áp dụng cho bộ $(a; b; c)$ và bộ số phụ $(1; 1; 1)$.

Ba kỹ thuật chủ đạo

• **Kỹ thuật 1: chọn bộ số phụ.** Khi giả thiết là một ràng buộc tuyến tính hoặc bậc hai, ta ghép biểu thức cần đánh giá với một bộ số phụ $(m; n; k)$ rồi áp dụng Cauchy–Schwarz. Bộ số phụ được chọn từ *điều kiện dấu đẳng thức*, chứ không chọn tùy tiện.

• **Kỹ thuật 2: nhân tử số để tạo bình phương.** Dạng Engel đòi hỏi tử số là bình phương. Với phân thức $\frac{a}{M}$ ta viết $\frac{a}{M} = \frac{a^2}{aM}$; với $\frac{a^3}{M}$ ta viết $\frac{a^3}{M} = \frac{a^4}{aM}$. Cách nhân phải chọn sao cho tổng các mẫu mới rút gọn được theo giả thiết.

• **Kỹ thuật 3: tách mẫu để đảo chiều.** Đọc Bổ đề 5.1 theo chiều ngược lại, $\frac{(a+b)^2}{x+y} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$, ta thu được công cụ đánh giá *trên* cho các phân thức có tử là bình phương. Việc tách $x+y$ phải bảo toàn được dấu đẳng thức tại điểm rơi.

Nhận xét. Một tổng phân thức thường có nhiều cách áp dụng dạng Engel, nhưng chỉ một số cách giữ được điểm rơi. Nguyên tắc kiểm tra nhanh: thay điểm rơi dự đoán vào bất đẳng thức trung gian; nếu ở đó dấu đẳng thức không xảy ra thì cách áp dụng ấy đã làm mất điểm rơi, chặn thu được thường quá yếu và nên thay bằng cách khác.

Như đã quy ước ở Chương 4, ký hiệu $\sum_{\text{cyc}}$ chỉ tổng hoán vị vòng quanh theo bộ ba biến, chẳng hạn

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa

Ví dụ 5.1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \quad (1)$$

và

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

(bất đẳng thức Nesbitt).

Phân tích. Ở bất đẳng thức (1), vế trái đã có sẵn dạng cộng mẫu với tử là bình phương nên áp dụng ngay được Bổ đề 5.2; tổng ba mẫu bằng $2(a+b+c)$, một biểu thức gọn, đó là dấu hiệu cho thấy cách áp dụng này giữ đúng điểm rơi $a=b=c$. Ở bất đẳng thức (2), tử số chưa phải bình phương nên phải tạo ra bình phương trước khi áp dụng.

Lời giải

• **Áp dụng dạng Engel cho vế trái.** Theo bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel,

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} = \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}.$$

• **Xác định dấu đẳng thức của (1).** Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$, tức là $a = b = c$.

• **Tạo bình phương ở tử số cho (2).** Bất đẳng thức (2) không phải là hệ quả trực tiếp của (1); ta áp dụng dạng Engel một lần nữa, nhưng trước hết phải dùng Kỹ thuật 2, nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với chính biến ở tử,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Kết hợp với $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ ta được vế trái không nhỏ hơn $\frac{3}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Nhận xét. Hai phần của ví dụ minh họa khác biệt giữa hai kỹ thuật: ở bất đẳng thức (1) tử số vốn đã là bình phương nên chỉ cần áp dụng bổ đề; ở bất đẳng thức (2) ta phải tự tạo ra bình phương bằng cách nhân tử số. Cách nhân ấy giữ được điểm rơi vì tổng các mẫu mới là $2(ab+bc+ca)$, đạt dấu đẳng thức với $(a+b+c)^2$ tại $a = b = c$. Bất đẳng thức Nesbitt đã được chứng minh bằng biến đổi tương đương ở Ví dụ 1.8 và bằng AM–GM ở Ví dụ 2.8; nó còn trở lại ở Ví dụ 7.6 và Ví dụ 9.1. Ở đây nó chỉ là hệ quả trực tiếp của dạng Engel.

Ví dụ 5.2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c}.$$

Phân tích. Các tử số 1, 4, 9 chính là $1^2, 2^2, 3^2$, nên P đã có dạng Engel với bộ số phụ (1; 2; 3). Tổng các mẫu bằng $a + b + c = 6$ đúng bằng giả thiết, đó là dấu hiệu cho thấy cách áp dụng này giữ được điểm rơi.

Điểm rơi. Dấu đẳng thức của dạng Engel đòi hỏi $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c}$, kết hợp $a + b + c = 6$ cho $a = 1, b = 2, c = 3$.

Lời giải

• **Đưa về dạng cộng mẫu.** Viết lại P dưới dạng cộng mẫu với tử là bình phương:

$$P = \frac{1^2}{a} + \frac{2^2}{b} + \frac{3^2}{c}.$$

• **Áp dụng dạng Engel.** Theo bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel,

$$P \geq \frac{(1+2+3)^2}{a+b+c} = \frac{36}{6} = 6.$$

• **Kiểm tra điểm rơi.** Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c}$ và $a + b + c = 6$, tức là $a = 1, b = 2, c = 3$. Khi đó $P = 1 + 2 + 3 = 6$.

Đáp số. $\min P = 6$, đạt được khi $a = 1, b = 2, c = 3$.

Ví dụ 5.3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + 2b + 3c = 28$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = a^2 + b^2 + c^2.$$

Phân tích. Giả thiết là một ràng buộc tuyến tính, còn biểu thức cần đánh giá là tổng bình phương. Đây đúng là tình huống của bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng hai bộ số: ghép bộ $(a; b; c)$ với một bộ số phụ $(m; n; k)$ sao cho $ma + nb + kc$ trùng với vế trái của giả thiết.

Điểm rơi. Muốn $ma + nb + kc = a + 2b + 3c$ ta chọn $(m; n; k) = (1; 2; 3)$. Điều kiện dấu đẳng thức $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ cùng với $a + 2b + 3c = 28$ cho $a = 2, b = 4, c = 6$.

Lời giải

• **Ghép với bộ số phụ.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho hai bộ số $(1; 2; 3)$ và $(a; b; c)$:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + 2b + 3c)^2.$$

• **Thay giả thiết vào đánh giá.** Thay giả thiết $a + 2b + 3c = 28$ và $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ ta được

$$14P \geq 28^2 = 784 \quad \Rightarrow \quad P \geq 56.$$

• **Kiểm tra điểm rơi.** Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ và $a + 2b + 3c = 28$. Đặt $a = t, b = 2t, c = 3t$ thì $14t = 28$, suy ra $t = 2$, tức là $a = 2, b = 4, c = 6$; khi đó $P = 4 + 16 + 36 = 56$.

Đáp số. min $P = 56$, đạt được khi $a = 2, b = 4, c = 6$.

Nhận xét. Bộ số phụ không được chọn theo cảm tính: nó được xác định bởi yêu cầu tích vô hướng $ma + nb + kc$ phải tỉ lệ với biểu thức đã cho trong giả thiết, trong đó $(1; 2; 3)$ là lựa chọn đơn giản nhất. Đó là nội dung cụ thể của Kỹ thuật 1.

Ví dụ 5.4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+3c} + \frac{b}{c+3a} + \frac{c}{a+3b} \geq \frac{3}{4}.$$

Phân tích. Vế trái là tổng phân thức nhưng tử số chưa phải bình phương, nên chưa dùng ngay được dạng Engel. Theo Kỹ thuật 2, ta nhân cả tử và mẫu của phân thức thứ nhất với a , tương tự cho hai phân thức còn lại; khi đó tổng các mẫu mới là một biểu thức đối xứng gọn.

Lời giải

• **Nhân tử số để tạo bình phương.** Ta viết

$$\frac{a}{b+3c} + \frac{b}{c+3a} + \frac{c}{a+3b} = \frac{a^2}{a(b+3c)} + \frac{b^2}{b(c+3a)} + \frac{c^2}{c(a+3b)}.$$

• **Tính tổng các mẫu.** Khai triển và nhóm lại,

$$a(b+3c) + b(c+3a) + c(a+3b) = 4(ab+bc+ca).$$

- **Áp dụng dạng Engel.** Theo bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel,

$$\frac{a^2}{a(b+3c)} + \frac{b^2}{b(c+3a)} + \frac{c^2}{c(a+3b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{4(ab+bc+ca)}.$$

- **Dùng hệ quả ở mục A.** Do $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ nên

$$\frac{(a+b+c)^2}{4(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{4(ab+bc+ca)} = \frac{3}{4}.$$

- **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Cách nhân tử số nói trên không phải là cách duy nhất, nhưng là một cách giữ được điểm rơi: tại $a = b = c$ cả hai bất đẳng thức trung gian vừa dùng đều trở thành đẳng thức.

Ví dụ 5.5. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a+3b} + \frac{b^3}{b+3c} + \frac{c^3}{c+3a} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{4}.$$

Phân tích. Tử số có bậc ba, là bậc lẻ, nên chưa dùng ngay được dạng Engel. Nhân tử và mẫu của phân thức đầu với a ta được $\frac{a^4}{a(a+3b)}$, tử số trở thành $(a^2)^2$. Cách nhân này đồng thời làm cho tổng các mẫu chỉ chứa $a^2+b^2+c^2$ và $ab+bc+ca$, hai đại lượng so sánh được với nhau.

Lời giải

- **Nhân tử số để hạ về dạng Engel.** Ta viết

$$\frac{a^3}{a+3b} + \frac{b^3}{b+3c} + \frac{c^3}{c+3a} = \frac{(a^2)^2}{a^2+3ab} + \frac{(b^2)^2}{b^2+3bc} + \frac{(c^2)^2}{c^2+3ca}.$$

- **Áp dụng dạng Engel.** Theo bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel,

$$\frac{(a^2)^2}{a^2+3ab} + \frac{(b^2)^2}{b^2+3bc} + \frac{(c^2)^2}{c^2+3ca} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}.$$

- **Đánh giá mẫu số.** Vì $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$ nên mẫu số ở vế phải không vượt quá $4(a^2+b^2+c^2)$, do đó

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{4(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}.$$

- **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 5.6. (IMO 1995) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Phân tích. Nếu áp dụng dạng Engel với tử số là 1^2 thì mẫu chung là $a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b)$, một biểu thức bậc bốn khó xử lý và không rút gọn được theo giả thiết $abc = 1$. Cần một cách viết khác.

• **Cách viết khai thác được giả thiết.** Nhận xét

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{a(b+c)}$$

cho tử số là bình phương, đồng thời tổng các mẫu mới bằng $2(ab+bc+ca)$ và tổng các tử được rút gọn nhờ $abc = 1$.

• **Bài học chung.** Như vậy cùng một tổng có nhiều cách đưa về dạng Engel, nhưng thông thường chỉ cách khai thác được giả thiết mới dẫn tới kết luận.

Lời giải

• **Chọn cách viết tử số.** Với mỗi số hạng ta viết

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{a(b+c)},$$

và tương tự cho hai số hạng còn lại. Tổng các mẫu bằng $a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) = 2(ab+bc+ca)$.

• **Áp dụng dạng Engel.** Theo bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel,

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

• **Khai thác giả thiết $abc = 1$.** Do $abc = 1$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = ab+bc+ca$. Thay vào,

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

• **Chặn dưới tổng $ab+bc+ca$.** Theo bất đẳng thức AM–GM và giả thiết $abc = 1$,

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3,$$

do đó vế trái không nhỏ hơn $\frac{3}{2}$.

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Điểm mấu chốt không nằm ở việc dùng dạng Engel mà ở việc chọn cách viết tử số. Trước khi áp dụng, nên thử tính nhanh tổng các mẫu: nếu tổng đó rút gọn được theo giả thiết thì cách viết là đúng hướng.

Ví dụ 5.7. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{3a + 4b + 5c} + \frac{b^3}{3b + 4c + 5a} + \frac{c^3}{3c + 4a + 5b} \geq \frac{1}{4}.$$

Phân tích. Tử số bậc ba, mẫu số bậc một, giả thiết cho theo $a^2 + b^2 + c^2$. Nhân tử và mẫu với biến ở tử để đưa về $\frac{(a^2)^2}{a(3a + 4b + 5c)}$: khi đó tổng các mẫu chỉ gồm $a^2 + b^2 + c^2$ và $ab + bc + ca$, hai đại lượng đã có sẵn quan hệ.

Lời giải

• **Nhân tử số để tạo bình phương.** Ta viết

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{3a + 4b + 5c} = \frac{(a^2)^2}{a(3a + 4b + 5c)} + \frac{(b^2)^2}{b(3b + 4c + 5a)} + \frac{(c^2)^2}{c(3c + 4a + 5b)}.$$

• **Tính tổng các mẫu.** Khai triển và nhóm lại,

$$\begin{aligned} & a(3a + 4b + 5c) + b(3b + 4c + 5a) + c(3c + 4a + 5b) \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2) + (4ab + 5ab) + (4bc + 5bc) + (5ca + 4ca) \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2) + 9(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

• **Áp dụng dạng Engel.** Theo bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{3a + 4b + 5c} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3(a^2 + b^2 + c^2) + 9(ab + bc + ca)}.$$

• **Đánh giá mẫu số.** Vì $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ nên mẫu số không vượt quá $12(a^2 + b^2 + c^2)$, do đó

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{3a + 4b + 5c} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5.8. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \geq \frac{4}{a + b + c}.$$

Phân tích. Có hai cách tự nhiên để tạo bình phương ở tử:

$$\frac{a}{b^2c^2} = \frac{a^2}{ab^2c^2}$$

hoặc

$$\frac{a}{b^2c^2} = \frac{a^4}{a^3b^2c^2}$$

• **So sánh hai cách theo giả thiết.** Cách thứ nhất cho tử chung là $(a + b + c)^2$, không dính gì tới giả thiết. Cách thứ hai cho tử chung là $(a^2 + b^2 + c^2)^2$, mà giả thiết lại phát biểu đúng theo $a^2 + b^2 + c^2$. Vậy ta chọn cách thứ hai.

• **Bài học chung.** Đây chính là tình huống *nhiều cách áp dụng, chỉ một cách khai thác được giả thiết*.

Lời giải

• **Chọn cách viết tử số.** Viết lại vế trái theo cách khai thác được giả thiết:

$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} = \frac{(a^2)^2}{a^3b^2c^2} + \frac{(b^2)^2}{b^3c^2a^2} + \frac{(c^2)^2}{c^3a^2b^2}.$$

• **Tính tổng các mẫu.** Tổng các mẫu bằng

$$a^3b^2c^2 + b^3c^2a^2 + c^3a^2b^2 = a^2b^2c^2(a + b + c).$$

• **Áp dụng dạng Engel.** Theo bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel,

$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2c^2(a + b + c)}.$$

• **Thay giả thiết vào tử số.** Vì $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc$ nên

$$\frac{(2abc)^2}{a^2b^2c^2(a + b + c)} = \frac{4a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2(a + b + c)} = \frac{4}{a + b + c}.$$

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$; thay $a = b = c$ vào giả thiết được $3a^2 = 2a^3$, suy ra $a = b = c = \frac{3}{2}$.

Nhận xét. Nếu chọn cách viết $\frac{a}{b^2c^2} = \frac{a^2}{ab^2c^2}$ thì đánh giá dạng Engel cho vế phải $\frac{(a + b + c)^2}{abc(ab + bc + ca)}$, và bài toán trở về một bất đẳng thức chưa rút gọn được bằng giả thiết. Cách viết đó không sai nhưng không khai thác được giả thiết, nên không dẫn tới kết luận theo đường này. Đó là lý do nên kiểm tra tổng các mẫu *trước* khi áp dụng.

Ví dụ 5.9*. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2} \leq \frac{1}{8}.$$

Phân tích. Bất đẳng thức ngược chiều so với dạng Engel thông thường, nên phải dùng Kỹ thuật 3: đọc Bổ đề 5.2 theo chiều $\frac{(A + B + C)^2}{x + y + z} \leq \frac{A^2}{x} + \frac{B^2}{y} + \frac{C^2}{z}$. Muốn vậy ta viết số 1 ở tử thành $\frac{(a + b + c)^2}{36}$ nhờ giả thiết, rồi tách mẫu $4a^2 + b^2 + c^2$ thành ba phần tương ứng với ba tử a, b, c .

Điểm rơi. Điểm rơi là $a = b = c = 2$. Điều kiện dấu đẳng thức của Bổ đề 5.2 là ba tỉ số $\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}$ bằng nhau, nên cách tách mẫu phải bảo đảm điều đó tại điểm rơi. Với cách tách $x = 2a^2, y = a^2 + b^2, z = c^2 + a^2$ thì tại $a = b = c = 2$ cả ba tỉ số đều bằng $\frac{1}{4}$, nên điểm rơi được bảo toàn.

Lời giải

- **Tách mẫu số theo điểm rơi.** Từ giả thiết, $(a + b + c)^2 = 36$, do đó

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{36} \cdot \frac{(a + b + c)^2}{2a^2 + (a^2 + b^2) + (c^2 + a^2)}.$$

- **Dùng dạng Engel theo chiều ngược lại.** Áp dụng Bổ đề 5.2 theo chiều ngược lại,

$$\frac{(a + b + c)^2}{2a^2 + (a^2 + b^2) + (c^2 + a^2)} \leq \frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2}.$$

Vậy

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{1}{36} \left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \right).$$

- **Viết hai bất đẳng thức tương tự.** Lập lại lập luận trên cho hai phân thức còn lại,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} &\leq \frac{1}{36} \left(\frac{1}{2} + \frac{c^2}{b^2 + c^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right), \\ \frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2} &\leq \frac{1}{36} \left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{c^2 + a^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right). \end{aligned}$$

- **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Cộng theo vế. Các phân thức ghép lại thành từng cặp có tổng bằng 1:

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + a^2} = 3.$$

Do đó tổng vế phải bằng $\frac{1}{36} \left(\frac{3}{2} + 3 \right) = \frac{1}{36} \cdot \frac{9}{2} = \frac{1}{8}$.

- **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Nhận xét. Cách tách mẫu nói trên được chọn theo tính đối xứng: trong $4a^2 + b^2 + c^2$ biến a đóng vai trò riêng, hai biến b và c đóng vai trò như nhau, nên ta dành cho a phần $2a^2$, còn hai phần còn lại là $a^2 + b^2$ và $c^2 + a^2$. Nếu tách theo cách khác, chẳng hạn $x = 4a^2, y = b^2, z = c^2$, thì tại $a = b = c$ các tỉ số $\frac{a}{4a^2}$ và $\frac{b}{b^2}$ không bằng nhau, dấu đẳng thức bị phá và đánh giá thu được sẽ quá yếu.

C. Bài tập có lời giải

Bài 5.1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z \geq 6$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}} \geq 3.$$

Phân tích. Tử số của cả ba phân thức đều đã là bình phương nên áp dụng ngay được dạng Engel; tổng các mẫu bằng $(x + y + z) + (\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy})$. Muốn thu được một chặn dưới chỉ phụ thuộc $x + y + z$, ta phải chặn trên tổng ba căn thức bằng bất đẳng thức AM–GM. Vì cả hai đánh giá đều đạt dấu đẳng thức tại $x = y = z$, giả thiết $x + y + z \geq 6$ cho dự đoán điểm rơi $x = y = z = 2$.

Lời giải

- **Áp dụng dạng Engel.** Theo Bổ đề 5.2,

$$\frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}} \geq \frac{(x + y + z)^2}{(x + y + z) + (\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy})}.$$

- **Chặn trên tổng các căn thức.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho hai số dương,

$$\sqrt{yz} \leq \frac{y + z}{2}, \quad \sqrt{zx} \leq \frac{z + x}{2}, \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}.$$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều này theo về ta được

$$\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy} \leq x + y + z.$$

- **Thu gọn chặn dưới.** Mẫu số ở vế phải của đánh giá Engel là một số dương và không vượt quá $2(x + y + z)$, nên

$$\frac{(x + y + z)^2}{(x + y + z) + (\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy})} \geq \frac{(x + y + z)^2}{2(x + y + z)} = \frac{x + y + z}{2}.$$

- **Dùng giả thiết.** Vì $x + y + z \geq 6$ nên $\frac{x + y + z}{2} \geq 3$. Nổi ba đánh giá trên ta được vế trái không nhỏ hơn 3.

- **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức đòi hỏi $x = y = z$ (điều kiện của ba bất đẳng thức AM–GM) và $x + y + z = 6$, tức là $x = y = z = 2$. Tại đó điều kiện dấu đẳng thức của dạng Engel cũng được thoả mãn vì ba tỉ số $\frac{x}{x + \sqrt{yz}}, \frac{y}{y + \sqrt{zx}}, \frac{z}{z + \sqrt{xy}}$ cùng bằng $\frac{1}{2}$; khi đó mỗi phân thức bằng $\frac{4}{2 + 2} = 1$ và vế trái bằng 3.

Bài 5.2. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + 3b + 5c = 35$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Phân tích. Giả thiết là một ràng buộc tuyến tính, còn biểu thức cần đánh giá là tổng bình phương; đây đúng là tình huống của Kỹ thuật 1. Ta ghép bộ $(a; b; c)$ với một bộ số phụ $(m; n; k)$ sao cho tích vô hướng $ma + nb + kc$ trùng với vế trái của giả thiết; yêu cầu đó buộc $(m; n; k) = (1; 3; 5)$.

Điểm rơi. Điều kiện dấu đẳng thức của bất đẳng thức Cauchy–Schwarz là $\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$. Đặt $a = t$, $b = 3t$, $c = 5t$ thì $a + 3b + 5c = 35t$, kết hợp giả thiết được $t = 1$, tức là $a = 1, b = 3, c = 5$.

Lời giải

- **Ghép với bộ số phụ.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho hai bộ số $(1; 3; 5)$ và $(a; b; c)$,

$$(1^2 + 3^2 + 5^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + 3b + 5c)^2.$$

- **Thay giả thiết vào đánh giá.** Vì $1^2 + 3^2 + 5^2 = 35$ và $a + 3b + 5c = 35$ nên

$$35P \geq 35^2 = 1225 \quad \Rightarrow \quad P \geq 35.$$

- **Kiểm tra điểm rơi.** Với $a = 1, b = 3, c = 5$ thì $a + 3b + 5c = 1 + 9 + 25 = 35$ nên giả thiết được thoả mãn, và $P = 1 + 9 + 25 = 35$. Vậy chặn dưới 35 là đạt được.

Đáp số. $\min P = 35$, đạt được khi $a = 1, b = 3, c = 5$.

Bài 5.3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2 + 4bc} + \frac{b^2}{c^2 + a^2 + 4ca} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + 4ab} \geq \frac{1}{2}.$$

Phân tích. Tử số đã là bình phương nên áp dụng ngay được dạng Engel. Dấu hiệu cho thấy cách áp dụng này giữ đúng điểm rơi là tổng các mẫu rút gọn được thành $2(a + b + c)^2$, tức là đúng hai lần tử số thu được sau khi áp dụng bổ đề.

Lời giải

• **Tính tổng các mẫu.** Khai triển và nhóm lại,

$$\begin{aligned} & (b^2 + c^2 + 4bc) + (c^2 + a^2 + 4ca) + (a^2 + b^2 + 4ab) \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) + 4(ab + bc + ca) = 2(a + b + c)^2. \end{aligned}$$

• **Áp dụng dạng Engel.** Theo Bổ đề 5.2,

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2 + 4bc} + \frac{b^2}{c^2 + a^2 + 4ca} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + 4ab} \geq \frac{(a + b + c)^2}{2(a + b + c)^2} = \frac{1}{2}.$$

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Theo Bổ đề 5.2, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a}{b^2 + c^2 + 4bc} = \frac{b}{c^2 + a^2 + 4ca} = \frac{c}{a^2 + b^2 + 4ab}.$$

Tổng ba tử số bằng $a + b + c$, tổng ba mẫu số bằng $2(a + b + c)^2$, nên theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, tỉ số chung ấy bằng $\frac{1}{2(a + b + c)}$. Điều kiện trên do đó tương đương với hệ

$$2a(a + b + c) = b^2 + c^2 + 4bc, \quad 2b(a + b + c) = c^2 + a^2 + 4ca, \quad 2c(a + b + c) = a^2 + b^2 + 4ab.$$

Trừ hai đẳng thức đầu theo vế,

$$2(a - b)(a + b + c) = (b^2 - a^2) + 4c(b - a) \Leftrightarrow 3(a - b)(a + b + 2c) = 0,$$

mà $a + b + 2c > 0$ nên $a = b$; trừ hai đẳng thức sau theo vế và lập luận tương tự được $b = c$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$; khi đó mỗi mẫu bằng $6a^2$, mỗi phân thức bằng $\frac{a^2}{6a^2} = \frac{1}{6}$ và tổng bằng $\frac{1}{2}$.

Bài 5.4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + 2b^2}{a + 2b} + \frac{b^2 + 2c^2}{b + 2c} + \frac{c^2 + 2a^2}{c + 2a} \geq a + b + c.$$

Phân tích. Mỗi tử số là tổng ba bình phương, chẳng hạn $a^2 + 2b^2 = a^2 + b^2 + b^2$, nên có thể tách mỗi phân thức thành ba phân thức có tử là bình phương rồi áp dụng dạng Engel một lần cho cả chín số

hạng. Cách tách này giữ được điểm rơi vì tổng chín tử số bằng $3(a+b+c)$ còn tổng chín mẫu số bằng $9(a+b+c)$, hai đại lượng cùng bậc một theo a, b, c .

Lời giải

- **Tách mỗi phân thức thành ba.** Vì $a^2 + 2b^2 = a^2 + b^2 + b^2$ nên

$$\frac{a^2 + 2b^2}{a + 2b} = \frac{a^2}{a + 2b} + \frac{b^2}{a + 2b} + \frac{b^2}{a + 2b},$$

và hoàn toàn tương tự,

$$\frac{b^2 + 2c^2}{b + 2c} = \frac{b^2}{b + 2c} + \frac{c^2}{b + 2c} + \frac{c^2}{b + 2c}, \quad \frac{c^2 + 2a^2}{c + 2a} = \frac{c^2}{c + 2a} + \frac{a^2}{c + 2a} + \frac{a^2}{c + 2a}.$$

Như vậy về trái là tổng của chín phân thức đều có tử là bình phương.

- **Tính tổng các tử và tổng các mẫu.** Chín tử số lần lượt là $a, b, b; b, c, c; c, a, a$, nên tổng của chúng bằng $(a + 2b) + (b + 2c) + (c + 2a) = 3(a + b + c)$. Chín mẫu số gồm ba lần $a + 2b$, ba lần $b + 2c$ và ba lần $c + 2a$, nên tổng của chúng bằng

$$3[(a + 2b) + (b + 2c) + (c + 2a)] = 9(a + b + c).$$

- **Áp dụng dạng Engel cho chín số hạng.** Theo Bổ đề 5.2,

$$\frac{a^2 + 2b^2}{a + 2b} + \frac{b^2 + 2c^2}{b + 2c} + \frac{c^2 + 2a^2}{c + 2a} \geq \frac{[3(a + b + c)]^2}{9(a + b + c)} = \frac{9(a + b + c)^2}{9(a + b + c)} = a + b + c.$$

- **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức đòi hỏi chín tỉ số giữa tử và mẫu bằng nhau; riêng hai tỉ số $\frac{a}{a + 2b}$ và $\frac{b}{a + 2b}$ bằng nhau đã cho $a = b$, tương tự $b = c$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$; khi đó cả hai vế cùng bằng $3a$.

Bài 5.5. (Croatia 2004) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{(x + y)(x + z)} + \frac{y^2}{(y + z)(y + x)} + \frac{z^2}{(z + x)(z + y)} \geq \frac{3}{4}.$$

Phân tích. Tử số đã là bình phương nên áp dụng ngay được dạng Engel. Sau khi áp dụng, tổng các mẫu chỉ gồm $x^2 + y^2 + z^2$ và $xy + yz + zx$, hai đại lượng đã có sẵn quan hệ ở mục A, nên bài toán quy về hệ quả $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Lời giải

- **Tính tổng các mẫu.** Khai triển từng tích,

$$(x + y)(x + z) = x^2 + xy + xz + yz,$$

$$(y + z)(y + x) = y^2 + yz + yx + zx,$$

$$(z + x)(z + y) = z^2 + zx + zy + xy,$$

cộng ba đẳng thức theo vế ta được tổng các mẫu bằng $x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + yz + zx)$.

- **Áp dụng dạng Engel.** Theo Bổ đề 5.2,

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}.$$

- **Quy về hệ quả ở mục A.** Mẫu số ở vế phải là số dương, nên bất đẳng thức

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{4}$$

tương đương với $4(x+y+z)^2 \geq 3[x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)]$. Khai triển hai vế,

$$4(x^2+y^2+z^2) + 8(xy+yz+zx) \geq 3(x^2+y^2+z^2) + 9(xy+yz+zx),$$

tức là $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$. Đó đúng là hệ quả đã nêu ở mục A.

- **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Cả hai đánh giá đều đạt dấu đẳng thức tại $x=y=z$; ngược lại, đánh giá thứ hai quy về $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, chỉ có dấu đẳng thức khi $x=y=z$.

Vậy dấu đẳng thức của bài toán xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$; khi đó mỗi phân thức bằng $\frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$ và tổng bằng $\frac{3}{4}$.

Bài 5.6. (Romania 2004) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{bc(c+a)} + \frac{b}{ca(a+b)} + \frac{c}{ab(b+c)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Phân tích. Tử số của mỗi phân thức là bậc một nên phải nhân thêm để tạo bình phương: $\frac{a}{bc(c+a)} = \frac{a^2}{abc(c+a)}$. Cách nhân này khiến ba mẫu mới có chung thừa số abc , còn $(c+a) + (a+b) + (b+c) = 2(a+b+c)$, nên tổng các mẫu rút gọn được hoàn toàn. Sau đó chỉ còn liên hệ giữa $a+b+c$ và abc , tức là bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương.

Lời giải

- **Nhân tử số để tạo bình phương.** Với $a, b, c > 0$ ta có

$$\frac{a}{bc(c+a)} = \frac{a^2}{abc(c+a)}, \quad \frac{b}{ca(a+b)} = \frac{b^2}{abc(a+b)}, \quad \frac{c}{ab(b+c)} = \frac{c^2}{abc(b+c)}.$$

- **Tính tổng các mẫu.** Ba mẫu mới có chung thừa số abc , do đó

$$abc(c+a) + abc(a+b) + abc(b+c) = abc[(c+a) + (a+b) + (b+c)] = 2abc(a+b+c).$$

- **Áp dụng dạng Engel.** Theo Bổ đề 5.2,

$$\frac{a}{bc(c+a)} + \frac{b}{ca(a+b)} + \frac{c}{ab(b+c)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2abc(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2abc}.$$

- **Chặn trên tích abc .** Theo bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương, $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$; nâng lũy thừa bậc ba hai vế dương ta được $(a+b+c)^3 \geq 27abc$, tức là $abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$.

- **Kết hợp hai đánh giá.** Vì $abc > 0$ nên

$$\frac{a+b+c}{2abc} \geq \frac{a+b+c}{2 \cdot \frac{(a+b+c)^3}{27}} = \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

- **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Đánh giá dạng Engel có dấu đẳng thức khi và chỉ khi

$$\frac{a}{abc(c+a)} = \frac{b}{abc(a+b)} = \frac{c}{abc(b+c)} \Leftrightarrow \frac{a}{c+a} = \frac{b}{a+b} = \frac{c}{b+c},$$

còn bất đẳng thức AM–GM có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$. Tại $a = b = c$ cả hai điều kiện cùng được thoả mãn, khi đó hai vế cùng bằng $\frac{3}{2a^2}$.

Bài 5.7. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2(b+2c)} + \frac{1}{b^2(c+2a)} + \frac{1}{c^2(a+2b)} \geq 1.$$

Phân tích. Giả thiết $abc = 1$ gợi ý làm việc với các nghịch đảo. Viết $\frac{1}{a^2(b+2c)} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{b+2c}$ thì tử số trở thành bình phương và tổng ba mẫu bằng $3(a+b+c)$, một biểu thức rất gọn. Sau khi áp dụng dạng Engel, giả thiết biến tổng các nghịch đảo thành $ab+bc+ca$ và bài toán quy về $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$, chính là hệ quả $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ viết cho $x=ab, y=bc, z=ca$.

Lời giải

- **Đưa về dạng cộng mẫu.** Với $a, b, c > 0$ ta có

$$\frac{1}{a^2(b+2c)} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{b+2c}, \quad \frac{1}{b^2(c+2a)} = \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{c+2a}, \quad \frac{1}{c^2(a+2b)} = \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{a+2b}.$$

- **Tính tổng các mẫu.** $(b+2c) + (c+2a) + (a+2b) = 3(a+b+c)$.

- **Áp dụng dạng Engel.** Theo Bổ đề 5.2,

$$\frac{1}{a^2(b+2c)} + \frac{1}{b^2(c+2a)} + \frac{1}{c^2(a+2b)} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{3(a+b+c)}.$$

- **Khai thác giả thiết $abc = 1$.** Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = ab+bc+ca$, nên vế phải của đánh giá trên bằng $\frac{(ab+bc+ca)^2}{3(a+b+c)}$.

- **Chặn dưới tử số bằng hệ quả ở mục A.** Đặt $x=ab, y=bc, z=ca$. Theo hệ quả $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ ở mục A,

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3(ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab) = 3abc(a+b+c) = 3(a+b+c),$$

trong đó đẳng thức cuối dùng $abc = 1$.

- **Kết luận.** Nổi hai đánh giá,

$$\frac{1}{a^2(b+2c)} + \frac{1}{b^2(c+2a)} + \frac{1}{c^2(a+2b)} \geq \frac{3(a+b+c)}{3(a+b+c)} = 1.$$

Đánh giá ở bước trước đòi hỏi $ab = bc = ca$, tức là $a = b = c$; kết hợp $abc = 1$ được $a = b = c = 1$. Tại đó điều kiện dấu đẳng thức của dạng Engel cũng được thoả mãn vì ba tỉ số $\frac{1/a}{b+2c}, \frac{1/b}{c+2a}, \frac{1/c}{a+2b}$ cùng bằng $\frac{1}{3}$; khi đó mỗi phân thức bằng $\frac{1}{3}$ và tổng bằng 1.

Bài 5.8. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Phân tích. Đây là một chặn *trên* cho tổng phân thức nên phải dùng Kỹ thuật 3: đọc Bổ đề 5.1 theo chiều $\frac{(A+B)^2}{x+y} \leq \frac{A^2}{x} + \frac{B^2}{y}$. Muốn vậy, trước hết nhân cả tử và mẫu với $b+c$ để tử số thành bình phương, rồi tách mẫu thu được thành hai phần sao cho khi cộng ba bất đẳng thức, sáu phân thức ghép lại thành ba cặp cùng mẫu có tổng lần lượt bằng $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$.

Lời giải

- **Tạo bình phương ở tử số.** Vì $b+c > 0$ nên

$$\frac{b+c}{a^2+bc} = \frac{(b+c)^2}{(a^2+bc)(b+c)}.$$

- **Tách mẫu số.** Khai triển và nhóm lại,

$$(a^2+bc)(b+c) = a^2b + a^2c + b^2c + bc^2 = c(a^2+b^2) + b(c^2+a^2).$$

- **Dùng dạng Engel theo chiều ngược lại.** Áp dụng Bổ đề 5.1 với hai tử số b, c và hai mẫu số $c(a^2+b^2), b(c^2+a^2)$,

$$\frac{(b+c)^2}{c(a^2+b^2) + b(c^2+a^2)} \leq \frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{b(c^2+a^2)},$$

tức là $\frac{b+c}{a^2+bc} \leq \frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{b(c^2+a^2)}.$

- **Viết hai bất đẳng thức tương tự.** Thay vòng quanh $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$,

$$\begin{aligned} \frac{c+a}{b^2+ca} &\leq \frac{c^2}{a(b^2+c^2)} + \frac{a^2}{c(a^2+b^2)}, \\ \frac{a+b}{c^2+ab} &\leq \frac{a^2}{b(c^2+a^2)} + \frac{b^2}{a(b^2+c^2)}. \end{aligned}$$

- **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Sáu phân thức ở vế phải ghép lại thành ba cặp cùng mẫu, mỗi cặp có tổng các tử đúng bằng mẫu chung của cặp ấy chia cho một biến:

$$\frac{b^2+a^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2+a^2}{b(c^2+a^2)} + \frac{c^2+b^2}{a(b^2+c^2)} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}.$$

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức đòi hỏi $\frac{b}{c(a^2+b^2)} = \frac{c}{b(c^2+a^2)}$ cùng hai đẳng thức tương tự. Đẳng thức thứ nhất tương đương với $b^2(c^2+a^2) = c^2(a^2+b^2)$, tức là $a^2b^2 = a^2c^2$, cho $b = c$; hai đẳng thức còn lại cho $c = a$ và $a = b$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, khi ấy hai vế cùng bằng $\frac{3}{a}$.

Nhận xét. Bài 8.10 nêu lại đúng bất đẳng thức này, viết theo chiều ngược lại, với hướng giải bằng bất đẳng thức Vornicu–Schur; hãy đối chiếu hai đường đi.

Bài 5.9*. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{a^2+4} + \frac{ca}{b^2+4} + \frac{ab}{c^2+4} \leq \frac{3}{4}.$$

Phân tích. Vế trái là tổng phân thức cần chặn trên, lại có tử số bc chưa phải bình phương. Trước hết dùng giả thiết để viết $a^2 + 4 = 2a^2 + b^2 + c^2$, sau đó dùng bất đẳng thức AM–GM $bc \leq \frac{(b+c)^2}{4}$ để tử số trở thành bình phương; cuối cùng tách $2a^2 + b^2 + c^2 = (a^2 + b^2) + (c^2 + a^2)$ rồi dùng Bổ đề 5.1 theo chiều ngược lại.

Điểm rơi. Điều kiện dấu đẳng thức của Bổ đề 5.1 ở đây là $\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{c}{c^2+a^2}$; cách tách mẫu nói trên bảo toàn điểm rơi vì tại $a = b = c$ hai tỉ số ấy bằng nhau. Bất đẳng thức AM–GM $4bc \leq (b+c)^2$ cũng đạt dấu đẳng thức tại $b = c$, nên mọi đánh giá đều đạt dấu đẳng thức tại $a = b = c$; kết hợp $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ được $3a^2 = 4$, tức là $a = b = c = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

• **Thay số 4 ở mẫu bằng giả thiết.** Vì $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ nên $a^2 + 4 = a^2 + (a^2 + b^2 + c^2) = 2a^2 + b^2 + c^2$, do đó

$$\frac{bc}{a^2+4} = \frac{bc}{2a^2+b^2+c^2}.$$

• **Tạo bình phương ở tử số.** Theo bất đẳng thức AM–GM, $(b-c)^2 \geq 0$ cho $4bc \leq (b+c)^2$, tức là $bc \leq \frac{(b+c)^2}{4}$. Vì mẫu số dương nên

$$\frac{bc}{2a^2+b^2+c^2} \leq \frac{(b+c)^2}{4(2a^2+b^2+c^2)}.$$

• **Tách mẫu số theo điểm rơi.** Viết $2a^2 + b^2 + c^2 = (a^2 + b^2) + (c^2 + a^2)$ rồi áp dụng Bổ đề 5.1 theo chiều ngược lại với hai tử số b, c :

$$\frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2)+(c^2+a^2)} \leq \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2}.$$

Kết hợp hai đánh giá vừa nêu,

$$\frac{bc}{a^2+4} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \right).$$

- **Viết hai bất đẳng thức tương tự.** Thay vòng quanh $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$,

$$\frac{ca}{b^2 + 4} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{c^2}{b^2 + c^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right),$$

$$\frac{ab}{c^2 + 4} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{c^2 + a^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right).$$

- **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Sáu phân thức ở vế phải ghép lại thành ba cặp cùng mẫu, mỗi cặp có tổng bằng 1:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + a^2} \right) = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}.$$

- **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{\sqrt{3}}$; khi đó mỗi phân thức ở vế trái bằng $\frac{4/3}{16/3} = \frac{1}{4}$ và tổng bằng $\frac{3}{4}$.

Bài 5.10*. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}.$$

Phân tích. Lại là một chặn trên nên phải dùng Kỹ thuật 3. Mẫu chốt là đồng nhất thức $(2a+b)(2a+c) = 2a(a+b+c) + (2a^2+bc)$; nó tách mẫu thành hai phần, một phần chỉ chứa a cùng $a+b+c$, phần còn lại là $2a^2+bc$. Bộ tử (2; 1) được chọn để tại $a = b = c$ hai tỉ số $\frac{2}{2a(a+b+c)}$ và $\frac{1}{2a^2+bc}$ bằng nhau, nhờ đó điểm rơi $a = b = c$ được bảo toàn.

Lời giải

- **Tách mẫu số.** Khai triển và nhóm lại,

$$(2a+b)(2a+c) = 4a^2 + 2ab + 2ac + bc = 2a(a+b+c) + (2a^2+bc).$$

- **Dùng dạng Engel theo chiều ngược lại.** Áp dụng Bô đề 5.1 với hai tử số 2, 1 và hai mẫu số $2a(a+b+c)$, $2a^2+bc$,

$$\frac{9}{(2a+b)(2a+c)} = \frac{(2+1)^2}{2a(a+b+c) + (2a^2+bc)} \leq \frac{2^2}{2a(a+b+c)} + \frac{1^2}{2a^2+bc}.$$

Nhân hai vế với số dương $\frac{a^2}{9}$,

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} \leq \frac{2a}{9(a+b+c)} + \frac{1}{9} \cdot \frac{a^2}{2a^2+bc}.$$

- **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Viết hai bất đẳng thức tương tự cho b và c rồi cộng theo vế,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} \leq \frac{2(a+b+c)}{9(a+b+c)} + \frac{1}{9} \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{2a^2+bc} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{2a^2+bc}.$$

Như vậy chỉ còn phải chứng minh $\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{2a^2 + bc} \leq 1$.

• **Đưa chặn trên về chặn dưới.** Với mọi $a, b, c > 0$,

$$\frac{a^2}{2a^2 + bc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{2a^2 + bc} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{bc}{2a^2 + bc} \right),$$

nên $\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{2a^2 + bc} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{2a^2 + bc}$. Do đó bất đẳng thức vừa nêu tương đương với $\sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{2a^2 + bc} \geq 1$.

• **Áp dụng dạng Engel.** Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với bc rồi dùng Bổ đề 5.2,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{2a^2 + bc} = \sum_{\text{cyc}} \frac{(bc)^2}{bc(2a^2 + bc)} \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{\sum_{\text{cyc}} bc(2a^2 + bc)}.$$

• **Tính tổng các mẫu.** Khai triển và nhóm lại,

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} bc(2a^2 + bc) &= (2a^2bc + b^2c^2) + (2ab^2c + c^2a^2) + (2abc^2 + a^2b^2) \\ &= 2abc(a + b + c) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = (ab + bc + ca)^2. \end{aligned}$$

Vậy $\sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{2a^2 + bc} \geq 1$, kéo theo $\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{2a^2 + bc} \leq 1$.

• **Kết luận.** Thay vào đánh giá đã có,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{(2a + b)(2a + c)} \leq \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Dấu đẳng thức của đánh giá Engel đòi hỏi $2a^2 + bc = 2b^2 + ca = 2c^2 + ab$, còn dấu đẳng thức của Bổ đề 5.1 đòi hỏi $a(a + b + c) = 2a^2 + bc$ cùng hai đẳng thức tương tự. Vì

$$a(a + b + c) - (2a^2 + bc) = -a^2 + ab + ac - bc = -(a - b)(a - c),$$

điều kiện thứ hai viết lại thành $(a - b)(a - c) = 0$, $(b - c)(b - a) = 0$, $(c - a)(c - b) = 0$. Nếu $a = b$ thì đẳng thức thứ ba cho $(a - c)(c - a) = 0$, tức $a = c$; các trường hợp còn lại lập luận tương tự. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, khi đó mỗi phân thức ở vế trái bằng $\frac{1}{9}$.

Bài 5.11*. (USAMO 2003) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{(2b + c + a)^2}{2b^2 + (c + a)^2} + \frac{(2c + a + b)^2}{2c^2 + (a + b)^2} \leq 8.$$

Phân tích. Tại $a = b = c$ mỗi phân thức bằng $\frac{16a^2}{6a^2} = \frac{8}{3}$ và tổng bằng đúng 8, nên điểm rơi là $a = b = c$. Tổng ba phân thức phải nhỏ hơn 9 một lượng ít nhất bằng 1; điều đó gợi ý xét hiệu

$3 - \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}$ cho từng số hạng. Hiệu ấy là một phân thức có tử là bình phương, nên bài toán chuyển thành một chặn dưới, thuận chiều với các đánh giá quen thuộc.

Lời giải

• **Biến đổi từng số hạng.** Đặt $s = b + c$. Ta có

$$3(2a^2 + s^2) - (2a + s)^2 = 6a^2 + 3s^2 - 4a^2 - 4as - s^2 = 2(a - s)^2,$$

do đó, vì $2a^2 + (b + c)^2 > 0$,

$$3 - \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} = \frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}.$$

• **Quy bài toán về một chặn dưới.** Cộng ba đẳng thức dạng trên theo vế,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} = 9 - \sum_{\text{cyc}} \frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho tương đương với $\sum_{\text{cyc}} \frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} \geq 1$.

• **Chặn trên các mẫu số.** Vì $(b-c)^2 \geq 0$ nên $(b+c)^2 \leq 2(b^2+c^2)$, suy ra

$$2a^2 + (b+c)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Ba mẫu số đều được chặn trên bởi cùng một số dương ấy, do đó

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} \geq \frac{2[(b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2]}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

• **Đánh giá tử số.** Khai triển và nhóm lại,

$$(b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ca),$$

mà $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$ theo hệ quả ở mục A, nên vế phải không nhỏ hơn

$$3(a^2+b^2+c^2) - 2(a^2+b^2+c^2) = a^2+b^2+c^2.$$

• **Kết luận.** Nối hai đánh giá,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{2(a^2+b^2+c^2)} = 1,$$

tức là tổng ba phân thức ban đầu không vượt quá $9 - 1 = 8$. Cả hai đánh giá đều đạt dấu đẳng thức tại $a = b = c$, nên dấu đẳng thức của bài toán xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$; khi đó mỗi phân thức bằng $\frac{8}{3}$ và tổng bằng 8.

Nhận xét. Bài toán này sẽ được giải lại ở Ví dụ 7.7 bằng kỹ thuật hệ số bất định U.C.T; hãy đối chiếu hai đường đi.

CHƯƠNG 6

Phương pháp phản chứng và nguyên lý Dirichlet

06

Phủ định cho đúng mệnh đề cần chứng minh, rồi dùng nguyên lý Dirichlet để tách ra cặp số nằm cùng phía với điểm rơi.

A. Kiến thức trọng tâm

Nội dung phương pháp phản chứng

Giả sử cần chứng minh mệnh đề P . Thay vì đi thẳng từ giả thiết tới kết luận, ta tạm thời thừa nhận mệnh đề phủ định $\bar{P}$ rồi từ $\bar{P}$ cùng với giả thiết suy ra một điều vô lý. Vì $\bar{P}$ dẫn tới điều vô lý nên $\bar{P}$ sai, do đó P đúng.

- **Lập mệnh đề phủ định.** Viết ra mệnh đề phủ định của điều cần chứng minh và ghi rõ mệnh đề đó.
- **Suy ra điều vô lý.** Kết hợp mệnh đề phủ định với giả thiết, biến đổi để thu được một điều vô lý. Điều vô lý thường thuộc một trong ba dạng: trái với giả thiết; trái với một mệnh đề đã được thừa nhận là đúng; hoặc hai hệ quả thu được mâu thuẫn với nhau.
- **Kết luận về mệnh đề ban đầu.** Khẳng định điều giả sử là sai, tức là mệnh đề P đúng.
- **Chú ý về cách trình bày.** Bước lập mệnh đề phủ định quyết định toàn bộ lời giải: nếu mệnh đề phủ định lập sai thì mọi biến đổi phía sau đều không còn giá trị. Ở bước suy ra điều vô lý, phải chỉ đích danh mệnh đề bị mâu thuẫn, không được dừng lại ở một bất đẳng thức mà chỉ nói là “vô lý”.

Lập mệnh đề phủ định

Dưới đây là các dạng phủ định thường gặp khi làm việc với bất đẳng thức.

- Phủ định của $A \geq B$ là $A < B$; phủ định của $A > B$ là $A \leq B$. Phủ định của “lớn hơn” là “nhỏ hơn hoặc bằng”, không phải “nhỏ hơn”.
- “Trong ba bất đẳng thức đã cho có ít nhất một bất đẳng thức đúng” có phủ định là “cả ba bất đẳng thức đã cho đều sai”.
- “Trong ba bất đẳng thức đã cho có ít nhất một bất đẳng thức sai” có phủ định là “cả ba bất đẳng thức đã cho đều đúng”.
- “Có ít nhất hai trong ba bất đẳng thức là đúng” có phủ định là “có ít nhất hai trong ba bất đẳng thức là sai”.
- “Cả ba số a, b, c đều dương” có phủ định là “tồn tại ít nhất một trong ba số a, b, c không dương”.

- “Không tồn tại bộ số thoả mãn các điều kiện đã nêu” có phủ định là “tồn tại một bộ số thoả mãn các điều kiện đã nêu”.

Bổ đề 6.1. (đánh giá nền của phương pháp phản chứng) Với mọi số thực a, b, c ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Do đó nếu ba số a, b, c không đồng thời bằng nhau, tức là không xảy ra $a = b = c$, thì $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$.

Bổ đề trên là mệnh đề đúng thường được chọn làm đích của mâu thuẫn: một lời giải phản chứng đưa được về bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 < ab + bc + ca$ thì đã hoàn tất.

Nguyên lý Dirichlet phát biểu rằng nếu xếp nhiều hơn n đối tượng vào n nhóm thì có ít nhất một nhóm chứa từ hai đối tượng trở lên. Trong chứng minh bất đẳng thức, nguyên lý này được dùng dưới dạng: ba số thực bất kì được xếp vào hai nhóm “không nhỏ hơn mốc k ” và “nhỏ hơn mốc k ”, nên luôn có hai số cùng một nhóm. Đó chính là nội dung của bổ đề sau.

Bổ đề 6.2. (hai số cùng phía với một mốc) Cho số thực k và ba số thực a, b, c bất kì. Khi đó trong ba số đó luôn tồn tại hai số, chẳng hạn x và y , sao cho

$$(x - k)(y - k) \geq 0.$$

• **Chứng minh.** Xét ba hiệu $a - k, b - k, c - k$. Mỗi hiệu hoặc không âm, hoặc âm; ba số được xếp vào hai nhóm nên có ít nhất hai số cùng nhóm. Tích của hai số cùng dấu (kể cả trường hợp một trong hai bằng 0) là một số không âm.

• **Hệ quả thường dùng.** Nếu điểm rơi của bài toán là $a = b = c = k$ thì ta chọn mốc đúng bằng k . Với $k = 1$ và $c \geq 0$, từ $(a - 1)(b - 1) \geq 0$ ta nhân hai vế với c và thu được đánh giá hạ bậc

$$abc \geq ac + bc - c.$$

Đánh giá này biến hạng tử bậc ba abc thành các hạng tử bậc hai, nhờ đó bài toán quy về một bất đẳng thức quen thuộc.

Sắp thứ tự và giả thiết “không mất tính tổng quát”

Bổ đề 6.2 chỉ khẳng định có hai số cùng phía với mốc, chứ không chỉ ra đó là cặp nào. Cách viết “không mất tính tổng quát, giả sử $(a - 1)(b - 1) \geq 0$ ” là hợp lý khi biểu thức trong bài đối xứng hoàn toàn với ba biến, tức là không đổi qua mọi hoán vị của a, b, c : khi đó việc đổi tên các biến không làm thay đổi bài toán, nên được phép gọi cặp mà bổ đề cung cấp là $(a; b)$. Nếu biểu thức chỉ bất biến qua hoán vị vòng quanh thì không được sắp thứ tự tùy ý; khi đó chỉ có thể giả sử một biến cụ thể là số lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Đây là một lỗi trình bày thường gặp khi vận dụng nguyên lý Dirichlet.

B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa

Ví dụ 6.1. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng trong ba bất đẳng thức sau có ít nhất một bất đẳng thức đúng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3ab; \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 3bc; \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 3ca.$$

Phân tích. Yêu cầu “có ít nhất một bất đẳng thức đúng” có phủ định là “cả ba bất đẳng thức cùng sai”. Ba bất đẳng thức phủ định có cùng vế trái, nên chỉ cần cộng chúng lại là thu được một hệ quả gọn, đối chiếu được với Bổ đề 6.1 ở mục A.

Lời giải

- **Lập mệnh đề phủ định.** Giả sử cả ba bất đẳng thức đã cho đều sai, tức là

$$a^2 + b^2 + c^2 < 3ab, \quad a^2 + b^2 + c^2 < 3bc, \quad a^2 + b^2 + c^2 < 3ca.$$

- **Cộng theo vế.** Cộng ba bất đẳng thức trên ta được

$$3(a^2 + b^2 + c^2) < 3(ab + bc + ca) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 < ab + bc + ca.$$

- **Chỉ ra mâu thuẫn.** Bất đẳng thức vừa thu được trái với đánh giá $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ đúng với mọi số thực a, b, c .

- **Kết luận.** Điều giả sử là sai, do đó trong ba bất đẳng thức đã cho có ít nhất một bất đẳng thức đúng.

Điểm rơi. Khi $a = b = c$ thì cả ba bất đẳng thức trở thành đẳng thức, nên không thể thay dấu $\geq$ trong đề bài bằng dấu $>$. Cũng vì vậy hằng số 3 ở vế phải là hằng số tốt nhất: với mọi $k > 3$, bộ $a = b = c = 1$ làm cả ba bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq k ab$, $a^2 + b^2 + c^2 \geq k bc$, $a^2 + b^2 + c^2 \geq k ca$ cùng sai.

Ví dụ 6.2. Cho các số thực $a, b, c \in (0; 4)$. Chứng minh rằng trong ba bất đẳng thức sau có ít nhất một bất đẳng thức sai:

$$a(4 - b) > 4; \quad b(4 - c) > 4; \quad c(4 - a) > 4.$$

Phân tích. Phủ định của yêu cầu là “cả ba bất đẳng thức cùng đúng”. Ba vế trái đều dương vì $a, b, c \in (0; 4)$, nên được phép nhân ba bất đẳng thức theo vế. Sau khi nhân, các thừa số ghép lại được thành $a(4 - a)$, $b(4 - b)$, $c(4 - c)$, mà mỗi biểu thức dạng này đều bị chặn trên bởi 4.

Lời giải

- **Lập mệnh đề phủ định.** Giả sử cả ba bất đẳng thức đã cho đều đúng. Vì $a, b, c \in (0; 4)$ nên $4 - a$, $4 - b$, $4 - c$ đều dương, do đó cả ba vế trái đều là số dương và ta được phép nhân ba bất đẳng thức theo vế:

$$a(4 - b) \cdot b(4 - c) \cdot c(4 - a) > 64.$$

- **Ghép lại theo từng biến.** Đổi thứ tự các thừa số ở vế trái ta có

$$[a(4 - a)][b(4 - b)][c(4 - c)] > 64.$$

- **Chặn trên từng thừa số.** Với mọi $x \in (0; 4)$,

$$0 < x(4 - x) = 4 - (x - 2)^2 \leq 4.$$

Áp dụng lần lượt cho $x = a, x = b, x = c$ rồi nhân ba bất đẳng thức dương theo vế, ta được

$$[a(4 - a)][b(4 - b)][c(4 - c)] \leq 64.$$

- **Kết luận.** Hai kết quả trên mâu thuẫn với nhau, nên điều giả sử là sai. Vậy trong ba bất đẳng thức đã cho có ít nhất một bất đẳng thức sai.

Điểm rơi. Tại $a = b = c = 2$ cả ba biểu thức $a(4 - b), b(4 - c), c(4 - a)$ cùng bằng 4; đó là vị trí mà cả ba bất đẳng thức đồng thời sát ngưỡng.

Ví dụ 6.3. Cho a, b, c là các số thực thoả mãn đồng thời

$$a + b + c > 0, \quad ab + bc + ca > 0, \quad abc > 0.$$

Chứng minh rằng cả ba số a, b, c đều là số dương.

Phân tích. Phủ định của kết luận là “có ít nhất một trong ba số không dương”. Ba giả thiết đều đối xứng với a, b, c nên có thể giả sử số đó là a . Từ đó lần lượt khai thác ba giả thiết theo thứ tự để ép dấu của abc .

Lời giải

- **Lập mệnh đề phủ định.** Giả sử trong ba số a, b, c có ít nhất một số không dương. Vì cả ba giả thiết đều đối xứng với a, b, c nên không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq 0$.
- **Xác định dấu của a .** Nếu $a = 0$ thì $abc = 0$, trái với giả thiết $abc > 0$. Do đó $a < 0$.
- **Xác định dấu của bc .** Từ $a + b + c > 0$ suy ra $b + c > -a > 0$, do đó $a(b + c) < 0$. Giả thiết thứ hai viết lại thành $a(b + c) + bc > 0$, suy ra

$$bc > -a(b + c) > 0.$$

- **Chỉ ra mâu thuẫn.** Ta có $a < 0$ và $bc > 0$ nên $abc < 0$, trái với giả thiết $abc > 0$.
- **Kết luận.** Điều giả sử là sai, vậy cả ba số a, b, c đều dương.

Ví dụ 6.4. Chứng minh rằng không tồn tại ba số dương a, b, c thoả mãn đồng thời

$$a + \frac{4}{b} < 4, \quad b + \frac{4}{c} < 4, \quad c + \frac{4}{a} < 4.$$

Phân tích. Phủ định của yêu cầu là “tồn tại ba số dương thoả mãn cả ba bất đẳng thức”. Cộng ba bất đẳng thức rồi ghép lại các số hạng để mỗi biến đứng cạnh nghịch đảo của chính nó, khi đó bất đẳng thức AM–GM cho ngay chặn dưới.

Lời giải

- **Lập mệnh đề phủ định.** Giả sử tồn tại ba số dương a, b, c thoả mãn cả ba bất đẳng thức đã cho. Cộng ba bất đẳng thức theo vế ta được

$$a + b + c + \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} < 12.$$

- **Ghép lại theo từng biến.** Vế trái được viết lại thành

$$\left(a + \frac{4}{a}\right) + \left(b + \frac{4}{b}\right) + \left(c + \frac{4}{c}\right) < 12.$$

- **Chặn dưới bằng AM–GM.** Với mọi số dương x , theo bất đẳng thức AM–GM ta có $x + \frac{4}{x} \geq$

$2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$. Áp dụng cho $x = a, x = b, x = c$ rồi cộng lại,

$$\left(a + \frac{4}{a}\right) + \left(b + \frac{4}{b}\right) + \left(c + \frac{4}{c}\right) \geq 12.$$

- **Kết luận.** Hai kết quả trên mâu thuẫn với nhau. Vậy không tồn tại ba số dương a, b, c thoả mãn đồng thời ba bất đẳng thức đã cho.

Nhận xét. Mấu chốt kỹ thuật là bước đổi chỗ các số hạng: ở đề bài mỗi biến ghép với nghịch đảo của biến khác, còn sau khi cộng thì ghép lại được với nghịch đảo của chính nó. Nếu không đổi chỗ, bất đẳng thức AM–GM không dùng được trực tiếp.

Ví dụ 6.5. Cho hai số dương a, b thoả mãn $a^3 + b^3 = 2(a - b)$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 < 2.$$

Phân tích. Giả thiết cho hai vế không cùng bậc: vế trái bậc ba, vế phải bậc một. Muốn so sánh được, phải đồng bậc hoá bằng cách nhân vế phải với một đại lượng bậc hai; đại lượng bậc hai sẵn có trong kết luận chính là $a^2 + b^2$. Đó là lý do phép nhân chứng ở đây tự nhiên: giả sử $a^2 + b^2 \geq 2$ rồi nhân giả thiết với $a^2 + b^2$.

Lời giải

- **Nhận xét mở đầu.** Vì $a > 0$ và $b > 0$ nên $a^3 + b^3 > 0$, do đó $2(a - b) > 0$, tức là $a > b > 0$.
- **Lập mệnh đề phủ định.** Giả sử $a^2 + b^2 \geq 2$. Nhân hai vế của bất đẳng thức này với số dương $a - b$ ta được

$$(a - b)(a^2 + b^2) \geq 2(a - b) = a^3 + b^3.$$

- **Khai triển và thu gọn.** Vì $(a - b)(a^2 + b^2) = a^3 + ab^2 - a^2b - b^3$ nên

$$a^3 + ab^2 - a^2b - b^3 \geq a^3 + b^3 \Leftrightarrow ab^2 - a^2b - 2b^3 \geq 0 \Leftrightarrow b(ab - a^2 - 2b^2) \geq 0.$$

- **Chỉ ra mâu thuẫn.** Do $b > 0$ nên $ab - a^2 - 2b^2 \geq 0$, tức là $a^2 - ab + 2b^2 \leq 0$. Nhưng

$$a^2 - ab + 2b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{7b^2}{4} > 0$$

với mọi $a > b > 0$. Mâu thuẫn.

- **Kết luận.** Điều giả sử là sai, vậy $a^2 + b^2 < 2$.

Nhận xét. Hằng số 2 ở vế phải là hằng số tốt nhất. Thật vậy, xét nhánh nghiệm dương sau.

- **Dựng bộ số thoả mãn giả thiết.** Với mỗi $a \in (0; \sqrt{2})$ ta có $2a - a^3 > 0$; hàm số $g(t) = t^3 + 2t$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ và nhận mọi giá trị không âm, nên phương trình $g(b) = 2a - a^3$ có đúng một nghiệm $b = b(a) > 0$. Cặp $(a; b(a))$ gồm hai số dương và thoả mãn đúng giả thiết $a^3 + b^3 = 2(a - b)$.

- **Tiến sát mốc.** Từ $2b(a) < g(b(a)) = 2a - a^3$ suy ra

$$0 < b(a) < \frac{2a - a^3}{2}$$

nên khi a dần tới $\sqrt{2}$ thì $b(a)$ dần tới 0 và $a^2 + b(a)^2$ dần tới 2. Vậy không thể thay hằng số 2 bằng một hằng số nhỏ hơn.

Ví dụ 6.6. Cho các số thực a, b, c thoả mãn $a \geq 2, b \geq 3, c \geq 4$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 38$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq 10.$$

Phân tích. Ba điều kiện chặn dưới có ba mốc khác nhau. Đặt biến phụ để đưa cả ba về cùng một mốc 0: $a = x + 2, b = y + 3, c = z + 4$ với $x, y, z \geq 0$. Khi đó kết luận trở thành $x + y + z \geq 1$. Nếu phủ định, ta có $0 \leq x, y, z < 1$, và trên khoảng đó $t^2 \leq t$ — đúng chiều cần thiết để chặn trên vế trái của giả thiết.

Lời giải

- **Đặt biến phụ.** Đặt $a = x + 2, b = y + 3, c = z + 4$; điều kiện đề bài cho $x, y, z \geq 0$. Giả thiết trở thành

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 38 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y + 8z = 9,$$

còn bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $x + y + z \geq 1$.

- **Lập mệnh đề phủ định.** Giả sử $x + y + z < 1$. Vì x, y, z không âm nên $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, 0 \leq z < 1$, do đó

$$x^2 \leq x, \quad y^2 \leq y, \quad z^2 \leq z.$$

- **Chặn trên vế trái của giả thiết.** Từ các đánh giá trên và từ $4x + 6y + 8z \leq 8(x + y + z)$ ta được

$$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y + 8z \leq (x + y + z) + 8(x + y + z) = 9(x + y + z) < 9.$$

- **Kết luận.** Ta thu được $9 < 9$, một điều vô lý. Vậy $x + y + z \geq 1$, tức là $a + b + c \geq 10$.

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 0$ và $z = 1$, tức là $a = 2, b = 3, c = 5$; khi đó $a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 9 + 25 = 38$ và $a + b + c = 10$.

Nhận xét. Phép chứng minh chạy được là nhờ hằng số 9 ở vế phải bằng đúng tổng của 1 và hệ số lớn nhất trong ba hệ số 4, 6, 8. Khi ra đề theo mẫu này, nên chọn hằng số ràng buộc đúng như vậy để kết luận là chặn tốt nhất.

Ví dụ 6.7. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Phân tích. Dấu đẳng thức dự đoán tại $a = b = c = 1$, nên ba hiệu $a - 1, b - 1, c - 1$ đồng thời bằng 0 tại điểm rơi. Vế trái chứa hạng tử abc , gợi ý dùng tích $c(a - 1)(b - 1)$. Dấu của $(a - 1)(b - 1)$ chưa được xác định, nên ta dùng nguyên lý Dirichlet để chọn ra một cặp có tích không âm.

Lời giải

• **Chọn cặp cùng phía.** Bất đẳng thức đối xứng hoàn toàn với a, b, c . Theo Bổ đề 6.2 với mốc $k = 1$, trong ba số $a - 1, b - 1, c - 1$ luôn có hai số cùng phía với 0; không mất tính tổng quát, giả sử

$$(a - 1)(b - 1) \geq 0.$$

• **Hạ bậc.** Vì $c \geq 0$ nên $c(a - 1)(b - 1) \geq 0$, tức là

$$abc - ac - bc + c \geq 0.$$

• **Phân tích về trái trừ về phải.** Ta có đồng nhất thức

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 - 2(ab + bc + ca) = (a - b)^2 + (1 - c)^2 + 2(abc - ac - bc + c).$$

• **Kết luận.** Ba số hạng ở vế phải đều không âm, trong đó số hạng cuối không âm nhờ bước hạ bậc. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Đẳng thức đòi hỏi đồng thời $a = b, c = 1$ và $abc - ac - bc + c = 0$. Với $a = b$ và $c = 1$ thì $abc - ac - bc + c = (a - 1)^2$, nên phải có $a = 1$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Đây là bất đẳng thức nền của cả mục: nhiều bài toán đối xứng có điểm rơi $a = b = c = 1$ và chứa abc đều quy được về nó. Hai bài tập ở mục C sử dụng trực tiếp kết quả này. Bài 8.3 nêu lại đúng đề bài này với một hướng giải khác, dựa trên bất đẳng thức Schur bậc một sau phép đặt $a = x^3, b = y^3, c = z^3$.

Ví dụ 6.8. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 11 \geq 7(a + b + c).$$

Phân tích. Thay $a = b = c = 1$ thì hai vế cùng bằng 21, nên điểm rơi là $a = b = c = 1$ và mốc Dirichlet cần chọn là $k = 1$. Hạng tử abc có bậc ba trong khi mọi hạng tử còn lại có bậc không quá hai; đánh giá $abc \geq ac + bc - c$ hạ bậc hạng tử này, đưa bài toán về một bất đẳng thức bậc hai viết được thành tổng các bình phương.

Lời giải

• **Chọn cặp cùng phía.** Bất đẳng thức đối xứng hoàn toàn với a, b, c . Theo Bổ đề 6.2 với mốc $k = 1$, không mất tính tổng quát ta giả sử $(a - 1)(b - 1) \geq 0$. Nhân hai vế với $c > 0$ ta được

$$abc \geq ac + bc - c.$$

• **Hạ bậc về trái.** Từ đánh giá trên,

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 11 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) + ac + bc - c + 11.$$

• **Đưa về tổng bình phương.** Phép chứng minh hoàn tất nếu chỉ ra được

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + ac + bc - c + 11 \geq 7(a + b + c).$$

Nhân hai vế với 2 rồi chuyển vế, bất đẳng thức này tương đương với

$$(b + c - 2)^2 + (c + a - 2)^2 + 5(a - 1)^2 + 5(b - 1)^2 + 4(c - 1)^2 \geq 0,$$

và bất đẳng thức cuối luôn đúng.

• **Kết luận.** Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh; dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Sơ đồ chung của dạng này: với bất đẳng thức đối xứng chứa abc và có điểm rơi $a = b = c = 1$, ta dùng nguyên lý Dirichlet để thay abc bởi $ac + bc - c$; phần còn lại là một bất đẳng thức bậc hai và thường viết được thành tổng các bình phương.

Ví dụ 6.9*. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca - abc \leq 2.$$

Phân tích. Bộ $(1; 1; 1)$ thoả mãn giả thiết và biến về trái thành $3 - 1 = 2$, nên điểm rơi là $a = b = c = 1$ và mốc Dirichlet là $k = 1$. Đánh giá $abc \geq ac + bc - c$ khử được đúng hai hạng tử bc và ca ở vế trái, đưa bài toán về bất đẳng thức một dòng $ab + c \leq 2$, và bất đẳng thức này lấy được trực tiếp từ giả thiết.

Lời giải

• **Chọn cặp cùng phía.** Cả giả thiết lẫn kết luận đều đối xứng hoàn toàn với a, b, c . Theo Bổ đề 6.2 với mốc $k = 1$, không mất tính tổng quát ta giả sử $(a - 1)(b - 1) \geq 0$. Nhân hai vế với $c > 0$ ta được

$$abc \geq bc + ca - c.$$

• **Rút gọn về trái.** Từ đánh giá trên,

$$ab + bc + ca - abc \leq ab + bc + ca - (bc + ca - c) = ab + c.$$

Như vậy chỉ còn phải chứng minh $ab + c \leq 2$.

• **Khai thác giả thiết.** Vì $a^2 + b^2 \geq 2ab$ nên từ giả thiết,

$$4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 2ab + c^2 + abc = ab(2 + c) + c^2.$$

Suy ra $ab(2 + c) \leq 4 - c^2 = (2 - c)(2 + c)$. Do $c > 0$ nên $2 + c > 0$, chia hai vế cho $2 + c$ ta được $ab \leq 2 - c$, tức là $ab + c \leq 2$.

• **Kết luận.** Kết hợp hai bước trên, $ab + bc + ca - abc \leq ab + c \leq 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

C. Bài tập có lời giải

Bài 6.1. Cho a, b, c là ba số dương không đồng thời bằng nhau và thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng trong ba số ab, bc, ca có ít nhất một số nhỏ hơn 1.

Phân tích. Kết luận “có ít nhất một số nhỏ hơn 1” có phủ định là “cả ba số đều không nhỏ hơn 1”. Ba bất đẳng thức phủ định cộng lại cho một chặn dưới của tổng $ab + bc + ca$; ngược lại, giả thiết $a + b + c = 3$ cho phép biểu diễn $a^2 + b^2 + c^2$ qua chính tổng đó. Hai đánh giá gặp nhau tại điểm rơi $a = b = c = 1$, trong khi giả thiết loại trừ đúng trường hợp ba số cùng bằng nhau — đó chính là chỗ sinh mâu thuẫn.

Lời giải

- **Lập mệnh đề phủ định.** Giả sử cả ba số ab, bc, ca đều không nhỏ hơn 1, tức là

$$ab \geq 1, \quad bc \geq 1, \quad ca \geq 1.$$

Cộng ba bất đẳng thức theo vế ta được $ab + bc + ca \geq 3$.

- **Biểu diễn tổng bình phương.** Từ giả thiết $a + b + c = 3$ và hằng đẳng thức $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 9 - 2(ab + bc + ca).$$

- **Chặn trên tổng bình phương.** Thay đánh giá $ab + bc + ca \geq 3$ vào đẳng thức trên,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9 - 2(ab + bc + ca) \leq 9 - 2 \cdot 3 = 3 \leq ab + bc + ca.$$

- **Chỉ ra mâu thuẫn.** Ta thu được $a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + bc + ca$. Nhưng ba số a, b, c không đồng thời bằng nhau nên theo Bổ đề 6.1 phải có $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$. Hai kết quả này mâu thuẫn với nhau.

- **Kết luận.** Điều giả sử là sai, vậy trong ba số ab, bc, ca có ít nhất một số nhỏ hơn 1.

Nhận xét. Điều kiện “không đồng thời bằng nhau” không bỏ đi được: với $a = b = c = 1$ thì $a + b + c = 3$ và $ab = bc = ca = 1$, không có số nào nhỏ hơn 1. Như vậy $a = b = c = 1$ là đúng vị trí mà kết luận vừa hết hiệu lực. Ngược lại, lời giải trên chỉ dùng tới mức “ba số không cùng bằng nhau”, nên giả thiết quen gặp “đôi một khác nhau” là mạnh hơn mức cần thiết; chẳng hạn bộ $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$ có hai số bằng nhau mà kết luận vẫn đúng vì $ab = \frac{1}{4} < 1$.

Bài 6.2. Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a^3 + b^3 = 16$. Chứng minh rằng $a + b \leq 4$.

Phân tích. Giả thiết cho tổng các lập phương, kết luận nói về tổng bậc nhất, nên câu nổi tự nhiên là hằng đẳng thức $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. Giả sử phản chứng $a + b > 4$ biến hằng đẳng thức đó thành một chặn dưới cho $ab(a + b)$; chia tiếp cho $a + b$ và dùng $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ thì hai vế cùng bậc hai, mâu thuẫn hiện ra dưới dạng $(a - b)^2 < 0$. Điểm rơi dự đoán là $a = b = 2$ vì khi đó $a^3 + b^3 = 16$ và $a + b = 4$.

Lời giải

- **Lập mệnh đề phủ định.** Giả sử $a + b > 4$.

- **Lập phương tổng và dùng giả thiết.** Vì $a + b > 4 > 0$ nên $(a + b)^3 > 4^3 = 64$. Kết hợp với hằng đẳng thức $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ và giả thiết $a^3 + b^3 = 16$,

$$16 + 3ab(a + b) = (a + b)^3 > 64,$$

suy ra $3ab(a + b) > 48$, tức là

$$ab(a + b) > 16 = a^3 + b^3.$$

- **Chia hai vế cho tổng $a + b$.** Vì $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ nên bất đẳng thức trên viết lại thành

$$ab(a + b) > (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Do $a + b > 4 > 0$, chia hai vế cho $a + b$ ta được $ab > a^2 - ab + b^2$.

• **Chỉ ra mâu thuẫn.** Bất đẳng thức vừa thu được tương đương với $a^2 - 2ab + b^2 < 0$, tức là $(a - b)^2 < 0$. Điều này trái với mệnh đề đúng $(a - b)^2 \geq 0$.

• **Kết luận.** Điều giả sử là sai, vậy $a + b \leq 4$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$; khi đó $a^3 + b^3 = 8 + 8 = 16$ đúng bằng giá trị mà giả thiết đòi hỏi và $a + b = 4$.

Bài 6.3. Cho hai số dương a, b thoả mãn $a^4 + b^4 < 2(a^3 + b^3)$. Chứng minh rằng $a + b < 4$.

Phân tích. Mốc 4 trong kết luận tách thành $2 + 2$, nên phép tịnh tiến $a = x + 2, b = y + 2$ biến mệnh đề phủ định $a + b \geq 4$ thành $x + y \geq 0$ — dạng thuận tiện nhất để khai thác phân tích $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Sau phép đặt, biểu thức $a^4 + b^4 - 2(a^3 + b^3)$ chỉ còn những số hạng mà dấu đều xác định được, và tất cả đều không âm.

Lời giải

• **Lập mệnh đề phủ định.** Giả sử $a + b \geq 4$. Đặt $a = x + 2, b = y + 2$; khi đó $x > -2, y > -2$ và $x + y = a + b - 4 \geq 0$.

• **Khai triển quanh điểm 2.** Với mọi số thực t ta có

$$(t + 2)^4 - 2(t + 2)^3 = (t + 2)^3 [(t + 2) - 2] = t(t + 2)^3 = t(t^3 + 6t^2 + 12t + 8),$$

tức là $(t + 2)^4 - 2(t + 2)^3 = t^4 + 6t^3 + 12t^2 + 8t$. Áp dụng lần lượt cho $t = x$ và $t = y$ rồi cộng hai đẳng thức,

$$a^4 + b^4 - 2(a^3 + b^3) = (x^4 + y^4) + 6(x^3 + y^3) + 12(x^2 + y^2) + 8(x + y).$$

• **Xác định dấu từng số hạng.** Hiển nhiên $x^4 + y^4 \geq 0, x^2 + y^2 \geq 0$ và $x + y \geq 0$. Ngoài ra

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0,$$

nên $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ là tích của hai số không âm, do đó $x^3 + y^3 \geq 0$.

• **Chỉ ra mâu thuẫn.** Bốn số hạng ở vế phải đều không âm nên $a^4 + b^4 - 2(a^3 + b^3) \geq 0$, tức là $a^4 + b^4 \geq 2(a^3 + b^3)$. Điều này trái với giả thiết $a^4 + b^4 < 2(a^3 + b^3)$.

• **Kết luận.** Điều giả sử là sai, vậy $a + b < 4$.

Nhận xét. Hằng số 4 là hằng số tốt nhất. Thật vậy, với $a = b = t$ thì giả thiết trở thành $2t^4 < 4t^3$, tương đương $t < 2$; khi cho t dần tới 2 thì $a + b$ dần tới 4 nhưng không bao giờ đạt. Cũng vì thế bài toán không có dấu đẳng thức: ở bước xác định dấu, bốn số hạng đồng thời bằng 0 khi và chỉ khi $x = y = 0$, tức $a = b = 2$, mà bộ này lại không thoả mãn giả thiết vì khi đó $a^4 + b^4 = 32 = 2(a^3 + b^3)$.

Bài 6.4. Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a + b + c \geq 4abc$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2abc.$$

Phân tích. Giả thiết $a + b + c \geq 4abc$ và kết luận $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2abc$ đều so sánh một biểu thức bậc thấp với abc . Mệnh đề phủ định $a^2 + b^2 + c^2 < 2abc$ cho phép chặn riêng từng bình phương bởi $2abc$, từ đó thu được ba bất đẳng thức bậc hai; cộng chúng lại ta được $2(ab + bc + ca) > a + b + c$. Chỉ cần

nổi thêm đánh giá nền $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ là ép được $4abc > a + b + c$, đúng chiều ngược với giả thiết.

Lời giải

• **Xét riêng trường hợp tầm thường.** Nếu $abc = 0$ thì vế phải bằng 0, trong khi $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$, nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Từ đây chỉ còn phải xét $abc > 0$; vì a, b, c không âm nên khi đó $a > 0, b > 0, c > 0$.

• **Lập mệnh đề phủ định.** Giả sử $a^2 + b^2 + c^2 < 2abc$.

• **So sánh từng bình phương với $2abc$.** Vì $b^2 + c^2 \geq 0$ nên $a^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2abc$; chia hai vế của $a^2 < 2abc$ cho $a > 0$ ta được $a < 2bc$. Hoàn toàn tương tự, từ $b^2 < 2abc$ chia cho $b > 0$ được $b < 2ca$, và từ $c^2 < 2abc$ chia cho $c > 0$ được $c < 2ab$. Cộng ba bất đẳng thức theo vế,

$$a + b + c < 2(ab + bc + ca).$$

• **Dùng đánh giá nền.** Theo Bổ đề 6.1 ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, do đó

$$2abc > a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

và nhân hai vế của $2abc > ab + bc + ca$ với 2 ta được $4abc > 2(ab + bc + ca)$.

• **Chỉ ra mâu thuẫn.** Nổi hai đánh giá vừa có,

$$4abc > 2(ab + bc + ca) > a + b + c,$$

tức là $a + b + c < 4abc$, trái với giả thiết $a + b + c \geq 4abc$.

• **Kết luận.** Điều giả sử là sai, vậy $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2abc$. Bộ $a = b = c = 0$ thoả mãn giả thiết và làm hai vế cùng bằng 0, nên dấu đẳng thức xảy ra tại đó.

Nhận xét. Đó cũng là vị trí duy nhất có đẳng thức. Thật vậy, giả sử đẳng thức xảy ra; ta chỉ ra tích ba số buộc phải bằng không.

• **Ép cả dây chuyền thành đẳng thức.** Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc$ với $abc > 0$ thì lặp lại các bước trên ở dạng không ngặt ta được $a + b + c \leq 2(ab + bc + ca)$ và $4abc \geq 2(ab + bc + ca)$; kết hợp với giả thiết $a + b + c \geq 4abc$ thì mọi bất đẳng thức trong dây chuyền đều là đẳng thức.

• **Loại khả năng tích dương.** Riêng $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ buộc $a = b = c$, và khi đó $3a^2 = 2a^3$ cho $a = \frac{3}{2}$; nhưng bộ này có $a + b + c = \frac{9}{2}$ trong khi $4abc = \frac{27}{2}$, trái với giả thiết.

• **Chốt vị trí đẳng thức.** Vậy bắt buộc $abc = 0$, kéo theo $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, tức $a = b = c = 0$.

Bài 6.5. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1).$$

Phân tích. Thay $a = b = c = 1$ thì hai vế cùng bằng 8, nên điểm rơi là $a = b = c = 1$. Vế phải là một tích, hãy khai triển để hai vế cùng ở dạng đa thức. Khi đó hiệu hai vế, sau khi nhân với 2, tách được đúng thành tổng của hai đại lượng không âm quen thuộc: bất đẳng thức nền ở Ví dụ 6.7 và tổng ba bình phương $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2$ — cả hai đều triệt tiêu tại $a = b = c = 1$.

Lời giải

• **Khai triển vế phải.** Ta có

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1,$$

nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc + 2 \geq (ab + bc + ca) + (a + b + c).$$

• **Nhân hai vế với 2.** Bất đẳng thức trên tương đương với

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc + 4 \geq 2(ab + bc + ca) + 2(a + b + c).$$

• **Tách thành hai đánh giá đã biết.** Chuyển hết sang một vế rồi nhóm lại, ta có đồng nhất thức

$$\begin{aligned} & 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc + 4 - 2(ab + bc + ca) - 2(a + b + c) \\ &= [a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 - 2(ab + bc + ca)] + [a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2(a + b + c)]. \end{aligned}$$

• **Đánh giá từng nhóm.** Nhóm thứ nhất không âm theo Ví dụ 6.7 (áp dụng được vì a, b, c dương nên đặc biệt là không âm). Nhóm thứ hai bằng

$$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0.$$

• **Kết luận.** Tổng của hai đại lượng không âm là không âm, nên bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Dấu đẳng thức đòi hỏi cả hai nhóm cùng bằng 0; riêng nhóm thứ hai bằng 0 đã buộc $a = b = c = 1$, và bộ này cũng làm nhóm thứ nhất bằng 0. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 6.6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 2(ab + bc + ca).$$

Phân tích. Ràng buộc $abc = 1$ được dùng hai lần và theo hai cách khác nhau: một lần để chặn dưới tổng $a + b + c$ bằng bất đẳng thức AM–GM, một lần để viết hằng số 3 thành $2abc + 1$ cho khớp đúng dạng của Ví dụ 6.7. Điểm rơi $a = b = c = 1$ vừa thỏa mãn ràng buộc, vừa là chỗ đẳng thức của cả hai đánh giá đó, nên phép nối hai đánh giá không làm mất dấu đẳng thức.

Lời giải

• **Chặn dưới tổng ba số.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương a, b, c và giả thiết $abc = 1$,

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3.$$

Do đó

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq a^2 + b^2 + c^2 + 3.$$

• **Viết hằng số theo abc .** Vì $abc = 1$ nên $3 = 2abc + 1$, suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1.$$

• **Áp dụng bất đẳng thức nền.** Ba số a, b, c dương nên đặc biệt là không âm; theo Ví dụ 6.7,

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca).$$

• **Nối ba đánh giá.** Ghép liên tiếp ba kết quả trên,

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca).$$

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức ở bước thứ nhất đòi hỏi $a = b = c$; kết hợp với $abc = 1$ ta được $a = b = c = 1$, và bộ này cũng biến đánh giá thứ hai thành đẳng thức. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 6.7. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$abc + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} [(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2] \geq a + b + c.$$

Phân tích. Thay $a = b = c = 1$ thì hai vế cùng bằng 3, nên $a = b = c = 1$ là một điểm rơi và mốc Dirichlet cần chọn là $k = 1$. Vế trái chứa hạng tử bậc ba abc ; đánh giá $ab \geq a + b - 1$ rút ra từ $(a-1)(b-1) \geq 0$ hạ bậc hạng tử này và gom phần còn lại thành đúng một tích $(a+b-2)(c-1)$. Khi đó bài toán quy về việc so sánh tổng ba bình phương với tích ấy, và bất đẳng thức AM–GM cho hai số làm nốt việc này.

Lời giải

• **Chọn cặp cùng phía.** Cả hai vế đều đối xứng hoàn toàn với a, b, c . Theo Bổ đề 6.2 với mốc $k = 1$, không mất tính tổng quát ta giả sử

$$(a-1)(b-1) \geq 0, \quad \text{tức là} \quad ab \geq a + b - 1.$$

• **Hạ bậc hạng tử abc .** Nhân hai vế của $ab \geq a + b - 1$ với số không âm c ta được $abc \geq c(a + b - 1)$. Do đó

$$abc + 2 - (a + b + c) \geq c(a + b - 1) + 2 - (a + b + c) = (a + b - 2)(c - 1),$$

trong đó đẳng thức cuối là một phép nhóm trực tiếp:

$$c(a + b - 1) + 2 - (a + b + c) = (a + b)(c - 1) - 2(c - 1) = (a + b - 2)(c - 1).$$

• **Quy về một bất đẳng thức phụ.** Theo đánh giá trên, để chứng minh bài toán chỉ còn phải chỉ ra

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2] \geq (a + b - 2)(1 - c),$$

vì khi đó

$$abc + 2 - (a + b + c) + \frac{1}{\sqrt{2}} [(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2] \geq (a + b - 2)(c - 1) + (a + b - 2)(1 - c) = 0.$$

• **Đặt ẩn phụ.** Đặt $u = a + b - 2$ và $v = c - 1$. Từ $(a-b)^2 \geq 0$ suy ra $2[(a-1)^2 + (b-1)^2] \geq [(a-1) + (b-1)]^2 = u^2$, tức là $(a-1)^2 + (b-1)^2 \geq \frac{u^2}{2}$. Do đó

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq \frac{u^2}{2} + v^2.$$

• **Áp dụng bất đẳng thức AM–GM.** Vì $\frac{u^2}{2}$ và v^2 đều không âm nên

$$\frac{u^2}{2} + v^2 \geq 2\sqrt{\frac{u^2}{2} \cdot v^2} = \sqrt{2}|uv|.$$

Chia hai vế cho $\sqrt{2}$ rồi kết hợp với bước trên,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2] \geq |uv| \geq -uv = (a + b - 2)(1 - c).$$

Đó đúng là bất đẳng thức phụ cần có.

• **Kết luận.** Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Điểm rơi. Dấu đẳng thức đòi hỏi đồng thời $c(a-1)(b-1) = 0$, $a = b$, $\frac{u^2}{2} = v^2$ và $uv \leq 0$. Do $a = b$, điều kiện thứ nhất thành $c(a-1)^2 = 0$, tức $c = 0$ hoặc $a = 1$.

• **Nhánh dẫn về điểm rơi cũ.** Nếu $a = 1$ thì $b = 1$, $u = 0$, kéo theo $v = 0$, tức $c = 1$.

• **Nhánh cho điểm rơi mới.** Nếu $c = 0$ thì $v = -1$; khi đó điều kiện $uv \leq 0$ buộc $u \geq 0$, còn $\frac{u^2}{2} = v^2 = 1$ cho $u = \sqrt{2}$, tức $a = b = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

• **Thử lại và kết luận.** Thử lại bộ vừa tìm được: vế trái bằng

$$0 + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right) = 2 + \sqrt{2}$$

và vế phải cũng bằng $2 + \sqrt{2}$. Vậy ngoài bộ $a = b = c = 1$, bất đẳng thức còn trở thành đẳng thức tại $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right)$ cùng các hoán vị của bộ này.

Nhận xét. Chính điểm rơi thứ hai giải thích vì sao hệ số $\frac{1}{\sqrt{2}}$ không thể thay bằng một hằng số nhỏ hơn: tại bộ $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right)$ hai vế đã bằng nhau, nên giảm hệ số đi một chút là bất đẳng thức sai ngay.

Bài 6.8*. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) \geq 1.$$

Phân tích. Bộ $(1; 1; 1)$ thỏa mãn giả thiết và biến về trái thành 1, nên điểm rơi là $a = b = c = 1$ và mốc Dirichlet là $k = 1$. Vế trái là một tích ba thừa số cùng dạng $t^2 - t + 1$; ghép hai thừa số ứng với cặp mà nguyên lý Dirichlet không chế được dấu, ta tách ra một hạng tử chứa $(b-1)(c-1)$ cộng với một biểu thức đối xứng chỉ phụ thuộc $b+c$. Nhờ giả thiết $b+c = 3-a$, bài toán quy về một bất đẳng thức một biến.

Lời giải

• **Chọn cặp cùng phía.** Cả giả thiết lẫn kết luận đều đối xứng hoàn toàn với a, b, c . Theo Bổ đề 6.2 với mốc $k = 1$, không mất tính tổng quát ta giả sử $(b-1)(c-1) \geq 0$.

• **Ghép hai thừa số theo cặp đã chọn.** Khai triển trực tiếp cho đồng nhất thức

$$(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) = bc(b-1)(c-1) + b^2 + c^2 - b - c + 1.$$

Vì $b > 0, c > 0$ và $(b-1)(c-1) \geq 0$ nên $bc(b-1)(c-1) \geq 0$, do đó

$$(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) \geq b^2 + c^2 - b - c + 1.$$

• **Đưa về biến tổng $b+c$.** Từ $(b-c)^2 \geq 0$ suy ra $b^2 + c^2 \geq \frac{(b+c)^2}{2}$, nên

$$b^2 + c^2 - b - c + 1 \geq \frac{(b+c)^2}{2} - (b+c) + 1.$$

Thay $b + c = 3 - a$ rồi thu gọn,

$$\frac{(3-a)^2}{2} - (3-a) + 1 = \frac{a^2 - 6a + 9}{2} + a - 2 = \frac{a^2 - 4a + 5}{2}.$$

• **Quy về bất đẳng thức một biến.** Vì $a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, nhân hai vế của đánh giá vừa thu được với $a^2 - a + 1$ ta có

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) \geq \frac{(a^2 - a + 1)(a^2 - 4a + 5)}{2}.$$

Như vậy chỉ còn phải chứng minh $(a^2 - a + 1)(a^2 - 4a + 5) \geq 2$.

• **Chứng minh bất đẳng thức một biến.** Khai triển rồi nhóm lại cho đồng nhất thức

$$(a^2 - a + 1)(a^2 - 4a + 5) - 2 = (a - 1)^2(a^2 - 3a + 3).$$

Ta có $(a - 1)^2 \geq 0$, đồng thời $a^2 - 3a + 3 = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, nên vế phải là tích của một số không âm với một số dương, do đó không âm. Vậy $(a^2 - a + 1)(a^2 - 4a + 5) \geq 2$.

• **Kết luận.** Nối hai bước cuối,

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) \geq \frac{(a^2 - a + 1)(a^2 - 4a + 5)}{2} \geq 1.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Đẳng thức đòi hỏi đồng thời $(a - 1)^2(a^2 - 3a + 3) = 0$ và $b = c$. Điều kiện thứ nhất cho $a = 1$; khi đó $b + c = 2$ và $b = c$ nên $b = c = 1$. Thử lại, bộ $a = b = c = 1$ biến vế trái thành 1. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 6.9*. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(a + b + c).$$

(Việt Nam MO 2006, bảng B)

Phân tích. Điểm rơi là $a = b = c = 1$, nên mốc Dirichlet là $k = 1$. Ràng buộc $abc = 1$ cho phép biến mọi nghịch đảo thành tích của hai biến còn lại: $\frac{1}{ab} = c$ và $\frac{1}{c} = ab$. Nhờ đó, sau khi tách $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ thành một bình phương cộng $\frac{2}{ab}$, cả hai biến c đều bị khử và hiệu hai vế chỉ còn là tổng của ba đại lượng, trong đó đúng một đại lượng cần tới nguyên lý Dirichlet để bảo đảm dấu.

Lời giải

• **Chọn cặp cùng phía.** Cả giả thiết lẫn kết luận đều đối xứng hoàn toàn với a, b, c . Theo Bổ đề 6.2 với mốc $k = 1$, không mất tính tổng quát ta giả sử $(a - 1)(b - 1) \geq 0$.

• **Tách tổng hai nghịch đảo bình phương.** Với mọi a, b dương,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{2}{ab}.$$

- **Dùng ràng buộc để khử biến c .** Từ $abc = 1$ suy ra $\frac{1}{ab} = c$, do đó $\frac{2}{ab} = 2c$; cũng từ $abc = 1$ suy ra $\frac{1}{c} = ab$, do đó $\frac{1}{c^2} = a^2b^2$. Thay hai kết quả này vào vế trái,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + 2c + a^2b^2 + 3.$$

- **Lập hiệu hai vế.** Trừ đi $2(a + b + c)$, hạng tử $2c$ bị khử và ta được

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 - 2(a + b + c) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + a^2b^2 - 2a - 2b + 3.$$

- **Nhóm phần còn lại.** Khai triển trực tiếp cho đồng nhất thức

$$2(a - 1)(b - 1) + (ab - 1)^2 = (2ab - 2a - 2b + 2) + (a^2b^2 - 2ab + 1) = a^2b^2 - 2a - 2b + 3.$$

Do đó

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 - 2(a + b + c) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + 2(a - 1)(b - 1) + (ab - 1)^2.$$

- **Đánh giá ba số hạng.** Số hạng thứ nhất và số hạng thứ ba là bình phương nên không âm; số hạng giữa không âm nhờ giả sử $(a - 1)(b - 1) \geq 0$ ở bước chọn cặp. Vậy vế phải không âm.

- **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức đòi hỏi $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ và $ab = 1$, tức $a = b$ và $a^2 = 1$; vì $a > 0$ nên $a = b = 1$, kéo theo $c = \frac{1}{ab} = 1$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Bài 8.9 nêu lại đúng đề bài này với một hướng giải khác, dựa trên phương pháp p, q, r ; hãy so sánh hai cách khai thác ràng buộc $abc = 1$.

Bài 6.10*. Cho a, b, c là các số thực thoả mãn đồng thời

$$a < b < c, \quad a + b + c = 12, \quad ab + bc + ca = 36.$$

Chứng minh rằng $0 < a < 2, 2 < b < 6$ và $6 < c < 8$.

Phân tích. Hai giả thiết cho biết tổng và tổng các tích đôi một, nên đại lượng đầu tiên cần tính là $a^2 + b^2 + c^2$. Sáu chặn phải chứng minh đều có dạng so sánh một biến với một mốc, và mỗi mốc lại là chỗ mà một bất đẳng thức chặt trở thành đẳng thức.

- **Bốn mốc lấy được trực tiếp.** Mốc 8 của c đến từ $a^2 + b^2 > \frac{(a + b)^2}{2}$, mốc 6 của c đến từ $a^2 < ac$ và $b^2 < bc$, mốc 0 của a đến từ $bc < \frac{(b + c)^2}{4}$, còn mốc 2 của b suy ra trực tiếp từ hệ thức $b = 12 - a - c$.
- **Hai mốc cần phản chứng.** Hai mốc 2 của a và 6 của b được lấy ra bằng phép phản chứng kết hợp với đánh giá $(x - 2)(x - 8) \leq 0$ và $(b - 6)(c - 6) \geq 0$.

Lời giải

- **Tính tổng bình phương.** Từ hai giả thiết,

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 12^2 - 2 \cdot 36 = 72.$$

• **Chặn thô hai đầu cho a .** Vì $b < c$ nên $(b - c)^2 > 0$, suy ra $bc < \frac{(b + c)^2}{4}$. Viết lại giả thiết thứ hai dưới dạng $a(b + c) + bc = 36$ rồi thay $b + c = 12 - a$,

$$36 = a(12 - a) + bc < a(12 - a) + \frac{(12 - a)^2}{4}.$$

Nhân hai vế với 4 và thu gọn,

$$144 < 48a - 4a^2 + 144 - 24a + a^2 \Leftrightarrow 0 < 24a - 3a^2 = 3a(8 - a).$$

Tích $3a(8 - a)$ dương nên $0 < a < 8$. Đặc biệt $a > 0$, do đó $0 < a < b < c$.

• **Chặn dưới cho c .** Vì $0 < a < c$ nên $a^2 < ac$, và vì $0 < b < c$ nên $b^2 < bc$. Do đó

$$72 = a^2 + b^2 + c^2 < ac + bc + c^2 = c(a + b + c) = 12c,$$

suy ra $c > 6$.

• **Chặn trên cho c .** Vì $a \neq b$ nên $(a - b)^2 > 0$, suy ra $a^2 + b^2 > \frac{(a + b)^2}{2} = \frac{(12 - c)^2}{2}$. Do đó

$$72 = a^2 + b^2 + c^2 > \frac{(12 - c)^2}{2} + c^2.$$

Nhân hai vế với 2 và thu gọn,

$$144 > (12 - c)^2 + 2c^2 = 144 - 24c + 3c^2 \Leftrightarrow 3c(c - 8) < 0.$$

Vì $c > 6 > 0$ nên $c - 8 < 0$, tức $c < 8$. Kết hợp bước trên, $6 < c < 8$.

• **Chặn trên cho a .** Giả sử ngược lại rằng $a \geq 2$. Khi đó $2 \leq a < b < c < 8$. Với mọi $x \in [2; 8]$ ta có $(x - 2)(x - 8) \leq 0$, tức là $x^2 \leq 10x - 16$, và bất đẳng thức là ngặt khi $2 < x < 8$. Áp dụng cho $x = a$ được $a^2 \leq 10a - 16$; áp dụng cho $x = b$ và $x = c$ được $b^2 < 10b - 16$, $c^2 < 10c - 16$. Cộng ba bất đẳng thức theo vế,

$$72 = a^2 + b^2 + c^2 < 10(a + b + c) - 48 = 120 - 48 = 72,$$

tức là $72 < 72$, vô lý. Vậy $a < 2$, và kết hợp với bước trên, $0 < a < 2$.

• **Chặn dưới cho b .** Từ $b = 12 - a - c$ cùng với $a < 2$ và $c < 8$ suy ra

$$b = 12 - a - c > 12 - 2 - 8 = 2.$$

• **Chặn trên cho b .** Giả sử ngược lại rằng $b \geq 6$. Khi đó $c > b \geq 6$ nên $(b - 6)(c - 6) \geq 0$, tức là $bc \geq 6(b + c) - 36$. Thay vào $a(b + c) + bc = 36$ và dùng $b + c = 12 - a$,

$$36 = a(12 - a) + bc \geq a(12 - a) + 6(12 - a) - 36 = -a^2 + 6a + 36,$$

suy ra $a(6 - a) = 6a - a^2 \leq 0$. Nhưng $0 < a < 2$ nên $a > 0$ và $6 - a > 4 > 0$, do đó $a(6 - a) > 0$. Mâu thuẫn. Vậy $b < 6$, và kết hợp bước trên, $2 < b < 6$.

• **Kết luận.** Ta đã chứng minh $0 < a < 2$, $2 < b < 6$ và $6 < c < 8$.

Nhận xét. Sáu mốc trên đều là mốc tốt nhất. Thật vậy, bỏ điều kiện $a < b < c$ và chỉ giữ $a \leq b \leq c$ thì hệ hai phương trình còn hai nghiệm biên: bộ $(2; 2; 8)$ và bộ $(0; 6; 6)$, đều thỏa mãn $a + b + c = 12$ và $ab + bc + ca = 36$. Bộ thứ nhất chạm ba mốc $a = 2$, $b = 2$ và $c = 8$, bộ thứ hai chạm ba mốc $a = 0$, $b = 6$, $c = 6$; như vậy cả sáu mốc đều bị chạm, và điều kiện ngặt $a < b < c$ loại đúng hai bộ này ra.

CHƯƠNG 7

07

Kỹ thuật hệ số bất định U.C.T

Tìm một đánh giá phụ bậc nhất tiếp xúc với đồ thị tại điểm rơi, nhờ đó tách bất đẳng thức nhiều biến thành các bất đẳng thức một biến.

A. Kiến thức trọng tâm

Ý tưởng tách biến

Xét lớp bài toán: cho các số a, b, c thuộc miền D và thoả mãn $a + b + c = s$, chứng minh rằng

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq k.$$

Ở đây cả vế trái lẫn điều kiện ràng buộc đều là tổng của các biểu thức theo từng biến riêng biệt. Điều đó gợi ý tách bài toán thành ba bất đẳng thức một biến. Nếu tìm được hai hằng số α, β sao cho

$$f(x) \geq \alpha x + \beta \quad (x \in D),$$

thì cộng ba bất đẳng thức đó theo vế ta được ngay

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq \alpha(a + b + c) + 3\beta = \alpha s + 3\beta.$$

Bài toán sẽ được giải quyết nếu $\alpha s + 3\beta = k$. Hai hằng số α, β chưa biết trước, chúng được xác định sau nhờ điều kiện dấu đẳng thức; vì thế kỹ thuật này mang tên *kỹ thuật hệ số bất định*, viết tắt là U.C.T (Undetermined Coefficients Technique).

Bổ đề 7.1. (Nguyên lý tách biến) Cho $D \subset \mathbb{R}$, các số $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$ thoả mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n = s$. Nếu tồn tại hai hằng số α, β sao cho $f(x) \geq \alpha x + \beta$ với mọi $x \in D$ thì

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq \alpha s + n\beta.$$

Bổ đề trên tuy hiển nhiên nhưng cho thấy một điều quan trọng: cặp hệ số (α, β) thực chất chỉ có một bậc tự do.

• **Đường thẳng phải qua điểm rơi.** Thật vậy, dấu đẳng thức của bài toán thường xảy ra tại $a_1 = \dots = a_n = x_0$ với $x_0 = \frac{s}{n}$, khi đó đường thẳng $y = \alpha x + \beta$ buộc phải đi qua điểm $(x_0; f(x_0))$, tức là $\beta = f(x_0) - \alpha x_0$.

• **Chỉ còn một hệ số phải dò.** Thay vào ta được

$$\alpha s + n\beta = \alpha s + n(f(x_0) - \alpha x_0) = nf(x_0),$$

đúng bằng giá trị của vế trái tại điểm rơi. Như vậy hằng số β không cần dò tìm, chỉ còn duy nhất hệ số α phải xác định.

Xác định hệ số bằng điều kiện tiếp xúc

Đường thẳng $y = \alpha x + \beta$ đi qua điểm $(x_0; f(x_0))$ và nằm dưới đồ thị hàm $y = f(x)$ trên toàn miền D . Do đó x_0 là điểm cực tiểu của hàm $x \mapsto f(x) - \alpha x - \beta$; nếu x_0 là điểm trong của D và f khả vi tại x_0 thì đạo hàm của hàm này triệt tiêu tại x_0 , nghĩa là

$$\alpha = f'(x_0), \quad \beta = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Nói cách khác, đánh giá phụ cần tìm chính là bất đẳng thức tiếp tuyến

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in D.$$

Vì lẽ đó U.C.T và phương pháp tiếp tuyến là hai cách phát biểu của cùng một ý tưởng: U.C.T nhấn mạnh việc dò hệ số, còn phương pháp tiếp tuyến nhấn mạnh ý nghĩa hình học của đường thẳng đó.

Khi không muốn dùng đạo hàm, có thể xác định α bằng phép tách nhân tử. Đặt

$$f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0) = (x - x_0)[g(x) - \alpha], \quad g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

• **Chọn hệ số bằng giới hạn.** Chọn $\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ (giới hạn này tồn tại và bằng $f'(x_0)$ khi f khả vi tại x_0) thì thừa số $g(x) - \alpha$ dần tới 0, nên hiệu ở vế trái là vô cùng bé bậc cao hơn $x - x_0$.

• **Nguồn gốc của nhân tử bình phương.** Trong các ví dụ đa thức và phân thức hữu tỉ của chương, sau khi quy đồng hiệu ấy có dạng $\frac{N(x)}{Q(x)}$ với $Q(x) > 0$ trên miền xét; khi đó $N(x_0) = N'(x_0) = 0$, do đó đa thức N chia hết cho $(x - x_0)^2$. Đó là lý do nhân tử $(x - x_0)^2$ thường xuất hiện trong các phép phân tích ở mục B. Cần lưu ý đây là kết luận về đa thức, không phải kết luận tự động cho mọi hàm khả vi.

Bổ đề 7.2. (Dạng tổng quát của U.C.T) Cho các số $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$ thoả mãn

$$h(a_1) + h(a_2) + \dots + h(a_n) = 0.$$

Nếu tồn tại hằng số m sao cho $f(x) \geq m h(x)$ với mọi $x \in D$ thì

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq 0.$$

Bổ đề này bao trùm mọi ràng buộc dạng $a_1^k + \dots + a_n^k = n$: chỉ cần đặt $h(x) = x^k - 1$. Hệ số m được xác định bởi điều kiện tiếp xúc $f'(x_0) = m h'(x_0)$ tại điểm rơi x_0 . Trường hợp $h(x) = x - x_0$ đưa về đúng nguyên lý tách biến đã nêu.

Chuẩn hoá và giới hạn của kỹ thuật

• **Chuẩn hoá.** Nếu bất đẳng thức thuần nhất, nghĩa là hai vế cùng bậc theo bộ biến (a, b, c) , thì phép thay (a, b, c) bởi (ta, tb, tc) không làm thay đổi nội dung bài toán. Khi đó ta được phép giả sử thêm $a + b + c = 3$ (hoặc $a + b + c = 1$) để tạo ra ràng buộc tổng, rồi mới áp

dùng U.C.T.

• **Cấu trúc của đánh giá phụ.** Với các bài toán đa thức và phân thức hữu tỉ của chương, sau khi quy đồng, hiệu $f(x) - m h(x)$ viết được dưới dạng

$$f(x) - m h(x) = \frac{(x - x_0)^2 p(x)}{q(x)}, \quad q(x) > 0.$$

Nếu $p(x) \geq 0$ trên toàn miền D thì bài toán kết thúc. Nếu $p(x) \geq 0$ chỉ đúng trên một phần của D thì phải chia trường hợp: trên phần đó dùng đánh giá phụ, ngoài phần đó tìm một ước lượng thô nhưng đủ mạnh.

• **Giới hạn.** Đánh giá phụ bậc nhất thực chất là một đường đỡ: đường thẳng $y = \alpha x + \beta$ phải nằm dưới đồ thị trên toàn miền D và chạm đồ thị tại mọi giá trị mà biến nhận ở một bộ dấu đẳng thức. Một đường thẳng hoàn toàn có thể chạm đồ thị tại nhiều điểm, chẳng hạn đường $y = 0$ chạm đồ thị $y = (x^2 - 1)^2$ tại cả $x = -1$ lẫn $x = 1$. Vì vậy nếu bài toán có nhiều bộ dấu đẳng thức mà cùng một đường đỡ đi qua tất cả các giá trị tương ứng thì U.C.T vẫn dùng được.

• **Khi nào phải đổi công cụ.** Kỹ thuật chỉ mất hiệu lực khi không có đường thẳng nào bảo toàn được toàn bộ tập dấu đẳng thức; khi đó phải chuyển sang hàm trung gian bậc cao hơn, chia miền, hoặc dùng công cụ khác. Do đó sau khi dò được hệ số, việc kiểm tra bất đẳng thức phụ trên toàn miền D là một bước không được bỏ qua.

B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa

Ví dụ 7.1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq 4.$$

Phân tích. Vế trái là $f(a) + f(b) + f(c)$ với $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{3}$, ràng buộc là tổng ba biến. Dự đoán điểm rơi $a = b = c = 1$, khi đó $f(1) = \frac{4}{3}$ và $3f(1) = 4$ đúng bằng vế phải. Ta đi tìm đánh giá phụ $f(x) \geq \alpha x + \beta$ tiếp xúc tại $x_0 = 1$.

Lời giải

• **Xác định hệ số.** Ta có $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2x}{3}$, suy ra $f'(1) = -\frac{4}{3}$. Vậy $\alpha = -\frac{4}{3}$ và $\beta = f(1) - \alpha = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$. Đánh giá phụ cần chứng minh là

$$\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{3} \geq \frac{8 - 4x}{3}, \quad x > 0.$$

• **Chứng minh đánh giá phụ.** Nhân hai vế với $3x^2 > 0$, bất đẳng thức trên tương đương với

$$x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 + 6x + 3) \geq 0,$$

hiển nhiên đúng với mọi $x > 0$.

- **Cộng ba đánh giá.** Áp dụng đánh giá phụ lần lượt cho $x = a, x = b, x = c$ rồi cộng theo vế:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq 8 - \frac{4(a + b + c)}{3} = 8 - 4 = 4.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Nếu bỏ qua ràng buộc và cố chứng minh trực tiếp $f(x) \geq \frac{4}{3}$ với mọi $x > 0$ thì mệnh đề không đúng. Thật vậy, sau khi nhân hai vế với $3x^2 > 0$, bất đẳng thức đó tương đương với $(x^2 - 1)(x^2 - 3) \geq 0$, tức là nó sai trên toàn khoảng $1 < x < \sqrt{3}$; chẳng hạn với $x = \frac{6}{5}$ thì $f(x) = \frac{1057}{900} < \frac{4}{3}$. Chính vì thế đánh giá phụ bắt buộc phải chứa số hạng bậc nhất ax : nó là nơi điều kiện $a + b + c = 3$ được sử dụng.

Ví dụ 7.2. (Vasile Cirtoaje) Cho a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} + \frac{1}{d^2 + 1} \geq 2.$$

Phân tích. Số biến tăng lên bốn nhưng cấu trúc không đổi: vẫn là tổng bốn hàm cùng dạng với ràng buộc tổng. Điểm rơi $a = b = c = d = 1$ cho $f(1) = \frac{1}{2}$ và $4f(1) = 2$, khớp với vế phải.

Lời giải

- **Xác định hệ số.** Với $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ta có $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$, do đó $f'(1) = -\frac{1}{2}$. Đánh giá phụ cần chứng minh là

$$\frac{1}{x^2 + 1} \geq \frac{1}{2} - \frac{x - 1}{2} = \frac{2 - x}{2}, \quad x > 0.$$

- **Chứng minh đánh giá phụ.** Nhân hai vế với $2(x^2 + 1) > 0$, bất đẳng thức trở thành

$$2 \geq (2 - x)(x^2 + 1) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 1)^2 \geq 0,$$

đúng với mọi $x > 0$.

- **Cộng bốn đánh giá.** Cộng theo vế bốn bất đẳng thức thu được với $x = a, b, c, d$:

$$\sum \frac{1}{a^2 + 1} \geq \frac{8 - (a + b + c + d)}{2} = \frac{8 - 4}{2} = 2.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

Nhận xét. Đánh giá phụ trên còn thu được bằng kỹ thuật “Cauchy ngược dấu”:

$$\frac{1}{a^2 + 1} = 1 - \frac{a^2}{a^2 + 1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2},$$

trong đó ta đã dùng bất đẳng thức AM–GM $a^2 + 1 \geq 2a$. Hai con đường khác nhau nhưng dẫn tới cùng một đường thẳng, đúng như bổ đề đã chỉ ra: đường thẳng ấy là duy nhất. Trường hợp ba biến của cùng bất đẳng thức này, sau phép co giãn, chính là Ví dụ 4.2 ở chương Cauchy ngược dấu.

Ví dụ 7.3. (Vasile Cirtoaje, *Algebraic Inequalities — Old and New Method*) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{c^2 + a + b} \leq 1.$$

Phân tích. Điều kiện $a + b + c = 3$ cho $b + c = 3 - a$, nhờ đó mỗi mẫu số chỉ còn một biến: $a^2 + b + c = a^2 - a + 3$. Bài toán trở thành dạng chuẩn của U.C.T. Vì bất đẳng thức mang dấu $\leq$ nên đánh giá phụ cũng phải mang dấu $\leq$, tức đường thẳng nằm trên đồ thị.

Lời giải

• **Đưa về một biến.** Từ $a + b + c = 3$ ta có $a^2 + b + c = a^2 - a + 3$, và tương tự cho hai mẫu còn lại. Ngoài ra $0 < a, b, c < 3$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{a^2 - a + 3} + \frac{1}{b^2 - b + 3} + \frac{1}{c^2 - c + 3} \leq 1.$$

• **Xác định hệ số.** Đặt $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 3}$ thì $f(1) = \frac{1}{3}$ và

$$f'(x) = \frac{-(2x - 1)}{(x^2 - x + 3)^2}, \quad f'(1) = -\frac{1}{9}.$$

Vậy đánh giá phụ cần chứng minh là

$$\frac{1}{x^2 - x + 3} \leq \frac{1}{3} - \frac{x - 1}{9} = \frac{4 - x}{9}, \quad 0 < x < 3.$$

• **Chứng minh đánh giá phụ.** Do $x^2 - x + 3 > 0$, bất đẳng thức tương đương với

$$(4 - x)(x^2 - x + 3) - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(3 - x) \geq 0,$$

đúng vì $0 < x < 3$.

• **Cộng ba đánh giá.** Cộng theo vế ba bất đẳng thức với $x = a, b, c$ ta được

$$\sum \frac{1}{a^2 - a + 3} \leq \frac{12 - (a + b + c)}{9} = \frac{12 - 3}{9} = 1.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Nhân tử $3 - x$ chính là $b + c$. Điều này cho thấy đánh giá phụ chỉ đúng nhờ ràng buộc $a + b + c = 3$; nếu bỏ ràng buộc và cho x vượt quá 3 thì bất đẳng thức phụ sai. Khi làm bài, việc ghi rõ miền biến thiên của biến là một bước bắt buộc chứ không phải hình thức.

Ví dụ 7.4. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + a^2 + b^2 + c^2 \geq 6.$$

Phân tích. Ràng buộc lần này không phải tổng các biến mà là tổng các lập phương. Ta dùng dạng tổng quát của U.C.T với $h(x) = x^3 - 1$, khi đó $h(a) + h(b) + h(c) = 0$. Điểm rơi vẫn là $a = b = c = 1$, và ràng buộc kéo theo $0 < a, b, c \leq \sqrt[3]{3}$.

Lời giải

• **Xác định hệ số.** Đặt $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 2$ và $h(x) = x^3 - 1$; ta có $f(1) = h(1) = 0$. Từ điều kiện tiếp xúc $f'(1) = m h'(1)$ với $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2x$ và $h'(x) = 3x^2$, ta được $1 = 3m$, tức $m = \frac{1}{3}$. Đánh giá phụ cần chứng minh là

$$\frac{1}{x} + x^2 - 2 \geq \frac{x^3 - 1}{3}, \quad 0 < x \leq \sqrt[3]{3}.$$

• **Chứng minh đánh giá phụ.** Nhân hai vế với $3x > 0$ rồi chuyển vế, ta được

$$\frac{1}{x} + x^2 - 2 - \frac{x^3 - 1}{3} = \frac{(x-1)^2(3+x-x^2)}{3x}.$$

Do $0 < x \leq \sqrt[3]{3} < \frac{3}{2}$ nên $x^2 < \frac{9}{4} < 3 + x$, suy ra $3 + x - x^2 > 0$. Vế phải không âm và đánh giá phụ đúng.

• **Cộng ba đánh giá.** Cộng theo vế ba bất đẳng thức với $x = a, b, c$:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + a^2 + b^2 + c^2 - 6 \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3}{3} = 0.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 7.5. Cho a, b, c là các số thực thoả mãn $a, b, c \geq \sqrt{3} - 1$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + 2a - 2} + \sqrt{b^2 + 2b - 2} + \sqrt{c^2 + 2c - 2} \leq 3.$$

Phân tích. Điều kiện $a \geq \sqrt{3} - 1$ đúng bằng điều kiện để biểu thức dưới dấu căn không âm. Vế trái là tổng ba hàm cùng dạng, bất đẳng thức mang dấu $\leq$ nên ta tìm đường thẳng nằm trên đồ thị và tiếp xúc tại $x_0 = 1$, nơi $\sqrt{1 + 2 - 2} = 1$ và $3 \cdot 1 = 3$ đúng bằng vế phải.

Lời giải

• **Xác định hệ số.** Với $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 2}$ ta có

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x - 2}}, \quad f'(1) = 2.$$

Đánh giá phụ cần chứng minh là

$$\sqrt{x^2 + 2x - 2} \leq 2x - 1, \quad x \geq \sqrt{3} - 1.$$

- **Chứng minh đánh giá phụ.** Vì $x \geq \sqrt{3} - 1 > \frac{1}{2}$ nên $2x - 1 > 0$. Mặt khác

$$(2x - 1)^2 - (x^2 + 2x - 2) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2 \geq 0,$$

do đó

$$\sqrt{x^2 + 2x - 2} = \sqrt{(2x - 1)^2 - 3(x - 1)^2} \leq \sqrt{(2x - 1)^2} = 2x - 1.$$

- **Cộng ba đánh giá.** Cộng theo vế ba bất đẳng thức với $x = a, b, c$ ta được

$$\sum \sqrt{a^2 + 2a - 2} \leq 2(a + b + c) - 3 = 2 \cdot 3 - 3 = 3.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Với biểu thức chứa căn, việc quy đồng rồi phân tích nhân tử thường dẫn tới tính toán phức tạp. Cách viết $x^2 + 2x - 2 = (2x - 1)^2 - 3(x - 1)^2$ giúp nhìn thấy ngay đại lượng bình phương $(x - 1)^2$ đúng tại điểm rơi, đồng thời tránh hoàn toàn phép bình phương hai vế.

Ví dụ 7.6. (Bất đẳng thức Nesbitt) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Phân tích. Bất đẳng thức không có ràng buộc, nhưng cả hai vế đều thuần nhất bậc 0: thay (a, b, c) bởi (ta, tb, tc) với $t > 0$ thì hai vế không đổi. Do đó ta được phép chuẩn hoá $a + b + c = 3$ để tạo ra ràng buộc tổng, sau đó áp dụng U.C.T.

Lời giải

- **Chuẩn hoá.** Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b + c = 3$. Khi đó $b + c = 3 - a$ và bài toán quy về

$$\frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{2}, \quad 0 < a, b, c < 3.$$

- **Xác định hệ số.** Đặt $f(x) = \frac{x}{3-x}$ thì $f(1) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = \frac{3}{(3-x)^2}$, nên $f'(1) = \frac{3}{4}$. Đánh giá phụ cần chứng minh là

$$\frac{x}{3-x} \geq \frac{1}{2} + \frac{3(x-1)}{4} = \frac{3x-1}{4}, \quad 0 < x < 3.$$

- **Chứng minh đánh giá phụ.** Nhân hai vế với $4(3-x) > 0$:

$$4x - (3x-1)(3-x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0.$$

- **Cộng ba đánh giá.** Cộng theo vế ba bất đẳng thức với $x = a, b, c$:

$$\frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3(a+b+c)-3}{4} = \frac{9-3}{4} = \frac{3}{2}.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Đây là lần thứ tư bất đẳng thức Nesbitt xuất hiện trong sách: Ví dụ 1.8 dùng biến đổi tương đương, Ví dụ 2.8 dùng AM–GM với điểm rơi, Ví dụ 5.1 dùng dạng Engel, còn ở đây là U.C.T. Ví dụ 9.1 sẽ khép lại chuỗi này bằng phân tích S.O.S.

Ví dụ 7.7. (USAMO 2003) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c+2a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a+2b)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

Phân tích. Biểu thức ở vế trái tuy nhiều tầng nhưng hai vế đều thuần nhất bậc 0. Chuẩn hoá $a+b+c=1$ sẽ làm gọn từng số hạng: tử số thành $(1+a)^2$, mẫu số thành $2a^2+(1-a)^2$. Sau đó bài toán trở thành dạng chuẩn của U.C.T với điểm rơi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Lời giải

• **Chuẩn hoá.** Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$. Khi đó $b+c+2a=1+a$ và $2a^2+(b+c)^2=2a^2+(1-a)^2=3a^2-2a+1$. Bài toán quy về

$$\frac{(a+1)^2}{3a^2-2a+1} + \frac{(b+1)^2}{3b^2-2b+1} + \frac{(c+1)^2}{3c^2-2c+1} \leq 8,$$

với $0 < a, b, c < 1$.

• **Xác định hệ số.** Đặt $f(x) = \frac{(x+1)^2}{3x^2-2x+1}$. Ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16/9}{2/3} = \frac{8}{3}$ và $3 \cdot \frac{8}{3} = 8$, đúng bằng vế phải.

Tính đạo hàm rồi thay $x = \frac{1}{3}$ ta được $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 4$, do đó đánh giá phụ cần chứng minh là

$$\frac{(x+1)^2}{3x^2-2x+1} \leq \frac{8}{3} + 4\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{12x+4}{3}, \quad 0 < x < 1.$$

• **Chứng minh đánh giá phụ.** Do $3x^2-2x+1 > 0$, bất đẳng thức tương đương với

$$(12x+4)(3x^2-2x+1) - 3(x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3x-1)^2(4x+1) \geq 0,$$

hiển nhiên đúng với mọi $x > 0$.

• **Cộng ba đánh giá.** Cộng theo vế ba bất đẳng thức với $x = a, b, c$:

$$\sum \frac{(a+1)^2}{3a^2-2a+1} \leq \frac{12(a+b+c)+12}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét. Cùng một lời giải hoạt động cho cả họ bài toán có mẫu số $2a^2+(b+c)^2$: chỉ cần thay tử số rồi tính lại hệ số góc tiếp tuyến. Bài tập ở mục C dưới đây với tử số $(b+c-3a)^2$ là một đại diện khác của họ này. Cũng đề bài này đã được nêu ở Bài 5.11 với hướng giải bằng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz; đặt hai lời giải cạnh nhau sẽ thấy rõ U.C.T thay thế được cả chuỗi đánh giá trung gian ở đó bằng một đánh giá phụ duy nhất.

Ví dụ 7.8. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{3a^3 - b^3}{a^2 + ab} + \frac{3b^3 - c^3}{b^2 + bc} + \frac{3c^3 - a^3}{c^2 + ca} \leq 3.$$

Phân tích. Mỗi số hạng phụ thuộc hai biến chứ không phải một, nên đánh giá phụ phải có dạng $ma + nb$ với hai hệ số bất định. Tổng cộng lại cho $(m + n)(a + b + c)$, muốn bằng 3 ta cần $m + n = 1$. Còn lại một bậc tự do, được ấn định bởi điều kiện tiếp xúc tại $a = b$.

Lời giải

• **Thiết lập dạng đánh giá phụ.** Ta tìm hai hệ số m, n với $m + n = 1$ sao cho

$$\frac{3a^3 - b^3}{a^2 + ab} \leq ma + nb, \quad a, b > 0.$$

Cả hai vế đều thuần nhất bậc một, nên đặt $t = \frac{a}{b} > 0$ ta đưa về

$$F(t) = \frac{3t^3 - 1}{t^2 + t} \leq mt + n.$$

• **Xác định hệ số.** Dấu đẳng thức của bài toán xảy ra tại $a = b = c$, tức $t = 1$. Ta có $F(1) = 1 = m + n$, phù hợp với ràng buộc đã nêu. Điều kiện tiếp xúc cho $m = F'(1)$. Từ

$$F'(t) = \frac{9t^2(t^2 + t) - (3t^3 - 1)(2t + 1)}{(t^2 + t)^2}$$

ta được $F'(1) = \frac{18 - 6}{4} = 3$. Vậy $m = 3$ và $n = -2$.

• **Chứng minh đánh giá phụ.** Cần chứng minh $\frac{3a^3 - b^3}{a^2 + ab} \leq 3a - 2b$. Nhân hai vế với $a^2 + ab > 0$ rồi chuyển vế:

$$(3a - 2b)(a^2 + ab) - (3a^3 - b^3) = a^2b - 2ab^2 + b^3 = b(a - b)^2 \geq 0.$$

• **Cộng ba đánh giá.** Áp dụng cho các cặp (a, b) , (b, c) , (c, a) rồi cộng theo vế:

$$\sum \frac{3a^3 - b^3}{a^2 + ab} \leq 3(a + b + c) - 2(a + b + c) = a + b + c = 3.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 7.9*. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $x + y + z = 6$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x^2 + (y + z)^2} + \frac{y^2}{y^2 + (z + x)^2} + \frac{z^2}{z^2 + (x + y)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Phân tích. Ràng buộc cho $y + z = 6 - x$, nên mỗi số hạng chỉ còn một biến. Điểm rơi là $x = y = z = 2$. Điểm đáng chú ý: đánh giá phụ thu được sẽ *không* đúng trên toàn khoảng $(0; 6)$, chỉ đúng khi biến không quá lớn. Đó là tình huống điển hình buộc phải chia trường hợp.

Lời giải

- **Đưa về một biến.** Từ $x + y + z = 6$ ta có

$$x^2 + (y + z)^2 = x^2 + (6 - x)^2 = 2x^2 - 12x + 36,$$

và tương tự cho hai số hạng còn lại. Đặt $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - 12x + 36}$ với $0 < x < 6$; bài toán quy về $f(x) + f(y) + f(z) \geq \frac{3}{5}$.

- **Xác định hệ số.** Ta có $f(2) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ và $3f(2) = \frac{3}{5}$. Đạo hàm

$$f'(x) = \frac{12x(6-x)}{(2x^2-12x+36)^2}, \quad f'(2) = \frac{96}{400} = \frac{6}{25}.$$

Đánh giá phụ dự đoán là

$$\frac{x^2}{2x^2-12x+36} \geq \frac{1}{5} + \frac{6(x-2)}{25} = \frac{6x-7}{25}.$$

- **Miền đúng của đánh giá phụ.** Nhân hai vế với $25(2x^2 - 12x + 36) > 0$ ta được

$$25x^2 - (6x-7)(2x^2-12x+36) = 3(x-2)^2(21-4x).$$

Vậy đánh giá phụ đúng khi và chỉ khi $x \leq \frac{21}{4}$. Ta chia hai trường hợp.

- **Trường hợp mọi biến đều không lớn.** Giả sử $\max\{x, y, z\} \leq \frac{21}{4}$. Áp dụng đánh giá phụ cho cả ba biến rồi cộng theo vế:

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq \frac{6(x+y+z)-21}{25} = \frac{36-21}{25} = \frac{3}{5}.$$

- **Trường hợp có một biến quá lớn.** Giả sử $\max\{x, y, z\} > \frac{21}{4}$, chẳng hạn $x > \frac{21}{4}$. Chia cả tử và mẫu của $f(x)$ cho x^2 ta được

$$f(x) = \frac{1}{2 - \frac{12}{x} + \frac{36}{x^2}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{6}{x} - 1\right)^2}.$$

Trên khoảng $(0; 6)$ đại lượng $\frac{6}{x} - 1$ dương và giảm, do đó f đồng biến. Suy ra

$$f(x) > f\left(\frac{21}{4}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{8}{7} - 1\right)^2} = \frac{49}{50} > \frac{3}{5}.$$

Hai số hạng còn lại dương nên tổng vẫn lớn hơn $\frac{3}{5}$.

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

Nhận xét. Mốc chia trường hợp không được chọn tùy ý: giá trị $\frac{21}{4}$ chính là nghiệm của nhân tử $21 - 4x$, tức là ranh giới miền đúng của đánh giá phụ. Nói chung, khi phân tích được $f(x) - \alpha x - \beta = \frac{(x-x_0)^2 p(x)}{q(x)}$ thì các nghiệm của p nằm trong miền biến thiên sẽ chỉ ra ngay các mốc cần xét.

Cần lưu ý thêm một tình huống mà đánh giá phụ bậc nhất không còn đủ. Xét bài toán “cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$, chứng minh $2(a^3 + b^3 + c^3) + 9 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$ ”. Đặt $f(x) = 2x^3 - 5x^2$ thì bài toán là $f(a) + f(b) + f(c) \geq -9$, với dấu đẳng thức xảy ra tại cả $a = b = c = 1$ lẫn $a = 0, b = c = \frac{3}{2}$.

• **Tiếp tuyến tại điểm rơi không đủ.** Đường thẳng tiếp xúc tại $x_0 = 1$ cho đánh giá phụ $f(x) \geq 1 - 4x$, tương đương $(x - 1)^2(2x - 1) \geq 0$, chỉ đúng khi $x \geq \frac{1}{2}$ nên không dùng được tại $x = 0$.

• **Không đường thẳng nào thay thế được.** Hơn nữa, riêng ở bài toán này, muốn cộng ba đánh giá phụ mà vẫn giữ nguyên được cả hai bộ dấu đẳng thức thì hiệu $f(x) - \alpha x - \beta$ phải triệt tiêu tại đủ ba giá trị $x = 0, x = 1, x = \frac{3}{2}$, tức là

$$f(x) - \alpha x - \beta = 2x(x - 1) \left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Vế phải âm trên khoảng $1 < x < \frac{3}{2}$, chẳng hạn bằng $-\frac{5}{32}$ tại $x = \frac{5}{4}$, nên đường thẳng ấy không nằm dưới đồ thị. Vậy ở bài toán đó U.C.T thuần túy không đủ, phải kết hợp thêm công cụ khác.

C. Bài tập có lời giải

Bài 7.1. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 2(a + b + c) \geq 9.$$

Phân tích. Ràng buộc không phải là tổng các biến mà là tổng các bình phương, nên ta dùng dạng tổng quát của U.C.T với $h(x) = x^2 - 1$; khi đó $h(a) + h(b) + h(c) = 0$. Dự đoán điểm rơi $a = b = c = 1$: tại đó vế trái bằng $3 + 2 \cdot 3 = 9$, đúng bằng vế phải. Ràng buộc còn cho mỗi biến một chặn trên, đó là chi tiết quyết định tính đúng đắn của đánh giá phụ.

Lời giải

• **Chặn miền biến thiên.** Vì $b, c > 0$ nên $a^2 = 3 - b^2 - c^2 < 3$, suy ra $0 < a < \sqrt{3}$. Hoàn toàn tương tự, $0 < b < \sqrt{3}$ và $0 < c < \sqrt{3}$.

• **Xác định hệ số bất định.** Đặt

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3, \quad h(x) = x^2 - 1,$$

thì $f(1) = h(1) = 0$. Từ điều kiện tiếp xúc $f'(1) = m h'(1)$ với $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$ và $h'(x) = 2x$, ta được $1 = 2m$, tức $m = \frac{1}{2}$. Đánh giá phụ cần chứng minh là

$$\frac{1}{x} + 2x - 3 \geq \frac{x^2 - 1}{2}, \quad 0 < x < \sqrt{3}.$$

• **Chứng minh đánh giá phụ.** Nhân hai vế với $2x > 0$ rồi chuyển vế, ta có đồng nhất thức

$$2x \left(\frac{1}{x} + 2x - 3 - \frac{x^2 - 1}{2} \right) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = (x - 1)^2(2 - x).$$

Do $0 < x < \sqrt{3} < 2$ nên $(x-1)^2(2-x) \geq 0$, vậy đánh giá phụ đúng trên toàn miền đang xét.

• **Cộng ba đánh giá cùng chiều.** Thay x lần lượt bởi a, b, c rồi cộng theo vế:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 2(a+b+c) - 9 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 3}{2} = 0.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 7.2. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$8(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{4}.$$

Phân tích. Chuyển toàn bộ các số hạng chứa biến về vế trái, bất đẳng thức trở thành tổng bốn hàm cùng dạng theo từng biến riêng, ràng buộc lại là tổng bốn biến: đúng khuôn của nguyên lý tách biến. Điểm rơi dự đoán là $a = b = c = d = \frac{1}{4}$, tại đó mỗi số hạng bằng $\frac{1}{16}$ và tổng bằng $\frac{1}{4}$, đúng bằng hằng số ở vế phải.

Lời giải

• **Đưa về tổng các hàm một biến.** Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(8a^3 - a^2) + (8b^3 - b^2) + (8c^3 - c^2) + (8d^3 - d^2) \geq \frac{1}{4}.$$

Đặt $f(x) = 8x^3 - x^2$ với $x > 0$.

• **Xác định hệ số bất định.** Ta có $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$ và $4f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$, đúng bằng vế phải. Vì $f'(x) = 24x^2 - 2x$ nên

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Vậy $\alpha = 1$ và $\beta = f\left(\frac{1}{4}\right) - \alpha \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} - \frac{4}{16} = -\frac{3}{16}$. Đánh giá phụ cần chứng minh là

$$8x^3 - x^2 \geq x - \frac{3}{16}, \quad x > 0.$$

• **Chứng minh đánh giá phụ.** Nhân hai vế với $16 > 0$ rồi chuyển vế:

$$16\left(8x^3 - x^2 - x + \frac{3}{16}\right) = 128x^3 - 16x^2 - 16x + 3 = (4x-1)^2(8x+3),$$

đại lượng này không âm với mọi $x > 0$.

• **Cộng bốn đánh giá cùng chiều.** Thay x lần lượt bởi a, b, c, d rồi cộng theo vế:

$$\sum (8a^3 - a^2) \geq (a+b+c+d) - 4 \cdot \frac{3}{16} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Bài 7.3. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Phân tích. Ràng buộc cho $b^2 + c^2 = 3 - a^2$, nhờ đó mỗi số hạng chỉ còn một biến. Vì đại lượng được bảo toàn là tổng các bình phương chứ không phải tổng các biến, đánh giá phụ nên lấy về phải là bội của x^2 thay vì bội của x : khi cộng ba bất đẳng thức, tổng $a^2 + b^2 + c^2$ sẽ được thay bằng 3. Điểm rơi dự đoán là $a = b = c = 1$.

Lời giải

• **Đưa về một biến.** Từ $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ta có $b^2 + c^2 = 3 - a^2$, và tương tự cho hai mẫu số còn lại. Ngoài ra $a^2 = 3 - b^2 - c^2 < 3$ nên $0 < a < \sqrt{3}$, tương tự với b và c . Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a}{3 - a^2} + \frac{b}{3 - b^2} + \frac{c}{3 - c^2} \geq \frac{3}{2}.$$

• **Chọn dạng đánh giá phụ.** Ta tìm hằng số m sao cho

$$\frac{x}{3 - x^2} \geq m x^2, \quad 0 < x < \sqrt{3}.$$

Cộng ba bất đẳng thức như thế sẽ cho vế trái không nhỏ hơn $m(a^2 + b^2 + c^2) = 3m$; muốn kết quả bằng $\frac{3}{2}$ ta phải lấy $m = \frac{1}{2}$.

• **Kiểm tra điều kiện tiếp xúc.** Với $g(x) = \frac{x}{3 - x^2}$ ta có $g(1) = \frac{1}{2}$ và

$$g'(x) = \frac{3 + x^2}{(3 - x^2)^2}, \quad g'(1) = \frac{4}{4} = 1,$$

trong khi hàm $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ cũng nhận giá trị $\frac{1}{2}$ và có đạo hàm bằng 1 tại $x = 1$. Vậy hai đồ thị tiếp xúc nhau đúng tại điểm rơi, đúng như kỹ thuật đòi hỏi.

• **Chứng minh đánh giá phụ.** Nhân hai vế với $2(3 - x^2) > 0$ rồi chuyển vế:

$$2x - x^2(3 - x^2) = x^4 - 3x^2 + 2x = x(x - 1)^2(x + 2) \geq 0,$$

đúng với mọi $0 < x < \sqrt{3}$.

• **Cộng ba đánh giá cùng chiều.** Thay x lần lượt bởi a, b, c rồi cộng theo vế:

$$\frac{a}{3 - a^2} + \frac{b}{3 - b^2} + \frac{c}{3 - c^2} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 7.4. Cho n là số nguyên dương và $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm thoả mãn

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{a_1^2 + 3} + \frac{a_2}{a_2^2 + 3} + \cdots + \frac{a_n}{a_n^2 + 3} \leq \frac{n}{4}.$$

Phân tích. Số biến là một số nguyên dương n tùy ý, nhưng điều đó không gây khó khăn: U.C.T chỉ cần một đánh giá phụ duy nhất rồi cộng n bất đẳng thức, nên cách làm không phụ thuộc n . Điểm rơi dự đoán là $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$, tại đó mỗi số hạng bằng $\frac{1}{4}$ và tổng bằng $\frac{n}{4}$, đúng bằng vế phải. Bất đẳng thức mang dấu $\leq$ nên đường thẳng cần tìm phải nằm trên đồ thị.

Lời giải

• **Xác định hệ số bất định.** Đặt $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$ với $x \geq 0$. Ta có $f(1) = \frac{1}{4}$ và

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 3) - x \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{3 - x^2}{(x^2 + 3)^2}, \quad f'(1) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Đánh giá phụ cần chứng minh là

$$\frac{x}{x^2 + 3} \leq \frac{1}{4} + \frac{x - 1}{8} = \frac{x + 1}{8}, \quad x \geq 0.$$

• **Chứng minh đánh giá phụ.** Do $x^2 + 3 > 0$ và $8 > 0$, sau khi nhân chéo bất đẳng thức trên tương đương với

$$(x + 1)(x^2 + 3) - 8x \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 3) \geq 0,$$

hiển nhiên đúng với mọi $x \geq 0$.

• **Cộng n đánh giá cùng chiều.** Thay x lần lượt bởi $a_1, a_2, \dots, a_n$ rồi cộng theo vế:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i^2 + 3} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + n}{8} = \frac{n + n}{8} = \frac{n}{4}.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

Bài 7.5. (Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Old and New Inequalities*) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} + \frac{1}{1 + c^2} \leq \frac{27}{10}.$$

Phân tích. Vế trái là $f(a) + f(b) + f(c)$ với $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, ràng buộc là tổng ba biến với $s = 1$. Điểm rơi dự đoán là $a = b = c = \frac{1}{3}$, tại đó $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{10}$ và $3f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{27}{10}$, đúng bằng vế phải. Bất đẳng thức mang dấu $\leq$ nên ta tìm đường thẳng nằm trên đồ thị và tiếp xúc tại $x_0 = \frac{1}{3}$.

Lời giải

- **Chặn miền biến thiên.** Vì $b, c > 0$ và $a + b + c = 1$ nên $0 < a < 1$; tương tự $0 < b < 1$ và $0 < c < 1$.
- **Xác định hệ số bất định.** Với $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{9}} = \frac{9}{10}$ và

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-\frac{2}{3}}{\left(\frac{10}{9}\right)^2} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{81}{100} = -\frac{27}{50}.$$

Đánh giá phụ cần chứng minh là

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{9}{10} - \frac{27}{50} \left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{27(2-x)}{50}, \quad 0 < x < 1.$$

- **Chứng minh đánh giá phụ.** Do $1+x^2 > 0$, sau khi nhân chéo bất đẳng thức tương đương với

$$27(2-x)(1+x^2) - 50 \geq 0 \Leftrightarrow -27x^3 + 54x^2 - 27x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (3x-1)^2(4-3x) \geq 0.$$

Vì $0 < x < 1$ nên $4-3x > 1 > 0$, do đó bất đẳng thức cuối đúng.

- **Cộng ba đánh giá cùng chiều.** Thay x lần lượt bởi a, b, c rồi cộng theo vế:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{27(6-(a+b+c))}{50} = \frac{27 \cdot 5}{50} = \frac{27}{10}.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 7.6. (Darij Grinberg, *Old and New Inequalities*) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Phân tích. Bất đẳng thức không có ràng buộc, nhưng hai vế đều thuần nhất bậc -1 : thay (a, b, c) bởi (ta, tb, tc) với $t > 0$ thì cả hai vế cùng được nhân với $\frac{1}{t}$. Do đó ta được phép chuẩn hoá $a+b+c=3$ để tạo ra ràng buộc tổng; khi ấy vế phải bằng $\frac{3}{4}$ và mỗi mẫu số trở thành $(3-a)^2$, tức chỉ còn một biến. Điểm rơi dự đoán là $a=b=c=1$.

Lời giải

- **Chuẩn hoá.** Đặt $t = \frac{3}{a+b+c} > 0$ và thay (a, b, c) bởi (ta, tb, tc) . Vì hai vế cùng được nhân với $\frac{1}{t}$ nên bất đẳng thức không thay đổi nội dung. Vậy không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=3$. Khi đó $b+c=3-a$, đồng thời $0 < a, b, c < 3$, và bài toán quy về

$$\frac{a}{(3-a)^2} + \frac{b}{(3-b)^2} + \frac{c}{(3-c)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

- **Xác định hệ số bất định.** Đặt $f(x) = \frac{x}{(3-x)^2}$ với $0 < x < 3$. Ta có $f(1) = \frac{1}{4}$ và $3f(1) = \frac{3}{4}$, đúng bằng vế phải. Hơn nữa

$$f'(x) = \frac{(3-x)^2 + 2x(3-x)}{(3-x)^4} = \frac{3+x}{(3-x)^3}, \quad f'(1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Đánh giá phụ cần chứng minh là

$$\frac{x}{(3-x)^2} \geq \frac{1}{4} + \frac{x-1}{2} = \frac{2x-1}{4}, \quad 0 < x < 3.$$

• **Chứng minh đánh giá phụ.** Nhân hai vế với $4(3-x)^2 > 0$ rồi chuyển vế:

$$4x - (2x-1)(3-x)^2 = -2x^3 + 13x^2 - 20x + 9 = (x-1)^2(9-2x).$$

Vì $0 < x < 3$ nên $9-2x > 3 > 0$, do đó vế phải không âm và đánh giá phụ đúng.

• **Cộng ba đánh giá cùng chiều.** Thay x lần lượt bởi a, b, c rồi cộng theo vế:

$$\frac{a}{(3-a)^2} + \frac{b}{(3-b)^2} + \frac{c}{(3-c)^2} \geq \frac{2(a+b+c)-3}{4} = \frac{6-3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 7.7. (Phạm Văn Thuận) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-3b)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Phân tích. Hai vế đều thuần nhất bậc 0 nên chuẩn hoá được $a+b+c=3$. Khi ấy tử số thành $(3-4a)^2$ và mẫu số thành $2a^2+(3-a)^2$, mỗi số hạng chỉ còn một biến. Điểm rơi dự đoán là $a=b=c=1$, tại đó mỗi số hạng bằng $\frac{1}{6}$ và tổng bằng $\frac{1}{2}$, đúng bằng vế phải. Đây là một đại diện khác của họ bài toán có mẫu số $2a^2+(b+c)^2$ đã gặp ở Ví dụ 7.7, chỉ khác tử số.

Lời giải

• **Chuẩn hoá.** Vì hai vế thuần nhất bậc 0, phép thay (a, b, c) bởi (ta, tb, tc) với $t > 0$ không làm thay đổi hai vế. Chọn $t = \frac{3}{a+b+c}$, ta được phép giả sử $a+b+c=3$; khi đó $0 < a, b, c < 3$,

$$b+c-3a = (3-a)-3a = 3-4a, \quad 2a^2+(b+c)^2 = 2a^2+(3-a)^2 = 3a^2-6a+9,$$

và tương tự cho hai số hạng còn lại. Bài toán quy về

$$\frac{(3-4a)^2}{3a^2-6a+9} + \frac{(3-4b)^2}{3b^2-6b+9} + \frac{(3-4c)^2}{3c^2-6c+9} \geq \frac{1}{2}.$$

• **Xác định hệ số bất định.** Đặt $f(x) = \frac{(3-4x)^2}{3x^2-6x+9}$. Vì $3x^2-6x+9 = 3[(x-1)^2+2] > 0$ nên f xác định trên toàn khoảng $(0; 3)$. Ta có $f(1) = \frac{1}{6}$ và $3f(1) = \frac{1}{2}$, đúng bằng vế phải. Đạo hàm

$$f'(x) = \frac{-8(3-4x)(3x^2-6x+9) - (3-4x)^2(6x-6)}{(3x^2-6x+9)^2},$$

tại $x=1$ cho $f'(1) = \frac{-8 \cdot (-1) \cdot 6 - 1 \cdot 0}{36} = \frac{48}{36} = \frac{4}{3}$. Đánh giá phụ cần chứng minh là

$$\frac{(3-4x)^2}{3x^2-6x+9} \geq \frac{1}{6} + \frac{4}{3}(x-1) = \frac{8x-7}{6}, \quad 0 < x < 3.$$

• **Chứng minh đánh giá phụ.** Do $3x^2 - 6x + 9 > 0$, sau khi nhân chéo bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} 6(3 - 4x)^2 - (8x - 7)(3x^2 - 6x + 9) &= (96x^2 - 144x + 54) - (24x^3 - 69x^2 + 114x - 63) \\ &= -24x^3 + 165x^2 - 258x + 117 \\ &= 3(x - 1)^2(39 - 8x) \geq 0. \end{aligned}$$

Vì $0 < x < 3$ nên $39 - 8x > 15 > 0$, do đó bất đẳng thức trên đúng.

• **Cộng ba đánh giá cùng chiều.** Thay x lần lượt bởi a, b, c rồi cộng theo vế:

$$\sum \frac{(3 - 4a)^2}{3a^2 - 6a + 9} \geq \frac{8(a + b + c) - 21}{6} = \frac{24 - 21}{6} = \frac{1}{2}.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 7.8. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 5$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2 + 3ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + 3bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + 3ca + a^2} \geq 1.$$

Phân tích. Mỗi số hạng phụ thuộc hai biến chứ không phải một, nên đánh giá phụ phải có dạng $ma + nb$ với hai hệ số bất định, hoàn toàn như ở Ví dụ 7.8. Cộng ba bất đẳng thức theo vòng cho $(m + n)(a + b + c) = 5(m + n)$; muốn vế phải bằng 1 ta cần $m + n = \frac{1}{5}$. Bậc tự do còn lại được ấn định bởi điều kiện tiếp xúc tại $a = b$, ứng với điểm rơi $a = b = c = \frac{5}{3}$.

Lời giải

• **Thiết lập dạng đánh giá phụ.** Ta tìm hai hệ số m, n với $m + n = \frac{1}{5}$ sao cho

$$\frac{a^3}{a^2 + 3ab + b^2} \geq ma + nb, \quad a, b > 0.$$

Cả hai vế đều thuần nhất bậc một, nên đặt $t = \frac{a}{b} > 0$ rồi chia hai vế cho b , ta đưa về

$$F(t) = \frac{t^3}{t^2 + 3t + 1} \geq mt + n.$$

• **Xác định hệ số bất định.** Dấu đẳng thức của bài toán xảy ra tại $a = b = c$, tức $t = 1$. Ta có $F(1) = \frac{1}{5} = m + n$, phù hợp với ràng buộc đã nêu. Điều kiện tiếp xúc cho $m = F'(1)$. Từ

$$F'(t) = \frac{3t^2(t^2 + 3t + 1) - t^3(2t + 3)}{(t^2 + 3t + 1)^2} = \frac{t^4 + 6t^3 + 3t^2}{(t^2 + 3t + 1)^2}$$

ta được $F'(1) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$. Vậy $m = \frac{2}{5}$ và $n = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{5}$.

- **Chứng minh đánh giá phụ.** Cần chứng minh $\frac{a^3}{a^2 + 3ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{5}$ với mọi $a, b > 0$. Vì $a^2 + 3ab + b^2 > 0$, nhân hai vế với $5(a^2 + 3ab + b^2)$ rồi chuyển vế:

$$5a^3 - (2a - b)(a^2 + 3ab + b^2) = 3a^3 - 5a^2b + ab^2 + b^3 = (a - b)^2(3a + b) \geq 0.$$

- **Cộng ba đánh giá cùng chiều.** Áp dụng đánh giá phụ lần lượt cho các cặp (a, b) , (b, c) , (c, a) rồi cộng theo vế:

$$\sum \frac{a^3}{a^2 + 3ab + b^2} \geq \frac{2(a + b + c) - (a + b + c)}{5} = \frac{a + b + c}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{5}{3}$.

Bài 7.9. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc = 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq 4.$$

Phân tích. Ràng buộc là tích chứ không phải tổng, nên không tách trực tiếp theo tổng như các bài trước được. Ý tưởng chốt gồm hai nhịp: trước hết dùng một đánh giá phụ hai biến để hạ mỗi số hạng xuống bậc nhất, đưa về trái về bội của $a + b + c$; sau đó dùng bất đẳng thức AM–GM để chuyển ràng buộc tích thành một chặn dưới cho tổng. Điểm rơi dự đoán là $a = b = c = 2$, phù hợp với $abc = 8$, tại đó mỗi số hạng bằng $\frac{4}{3}$ và tổng bằng 4.

Lời giải

- **Thiết lập đánh giá phụ hai biến.** Ta chứng minh rằng với mọi $x, y > 0$,

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{x + y}{3}.$$

Thật vậy, do $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ và $x + y > 0$, sau khi nhân hai vế với $3(x^2 + xy + y^2) > 0$ bất đẳng thức trên tương đương với

$$3(x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)(x^2 + xy + y^2) \Leftrightarrow 3(x^2 - xy + y^2) \geq x^2 + xy + y^2.$$

Hiệu hai vế bằng $2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x - y)^2 \geq 0$, nên đánh giá phụ đúng.

- **Hạ bậc về trái.** Áp dụng đánh giá phụ lần lượt cho các cặp (a, b) , (b, c) , (c, a) rồi cộng theo vế:

$$\sum \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{(a + b) + (b + c) + (c + a)}{3} = \frac{2(a + b + c)}{3}.$$

- **Khai thác ràng buộc tích.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương và giả thiết $abc = 8$,

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{8} = 6.$$

Kết hợp hai đánh giá trên ta được

$$\sum \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2 \cdot 6}{3} = 4.$$

Điểm rơi. Dấu đẳng thức ở đánh giá phụ đòi hỏi $a = b = c$, còn dấu đẳng thức trong bất đẳng thức AM–GM cũng đòi hỏi $a = b = c$; kết hợp với $abc = 8$ ta được $a = b = c = 2$.

Bài 7.10*. (Vasile Cirtoaje, Romania TST 2006) Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Phân tích. Chuyển về phải sang trái, bất đẳng thức trở thành $f(a) + f(b) + f(c) \geq 0$ với $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$, ràng buộc là tổng ba biến. Điểm rơi dự đoán là $a = b = c = 1$, tại đó $f(1) = 0$. Tuy nhiên đánh giá phụ thu được sẽ *không* đúng trên toàn khoảng $(0; 3)$ mà chỉ đúng khi biến không quá lớn, đúng như tình huống đã gặp ở Ví dụ 7.9*; vì thế phải chia trường hợp, lấy mốc là một chặn dưới cho biến nhỏ nhất.

Lời giải

• **Xác định hệ số bất định.** Đặt $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ với $0 < x < 3$. Ta có $f(1) = 0$ và

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} - 2x, \quad f'(1) = -4.$$

Đánh giá phụ dự đoán là $f(x) \geq f(1) + f'(1)(x - 1) = -4(x - 1)$, tức là

$$\frac{1}{x^2} + 4x \geq x^2 + 4.$$

• **Miền đúng của đánh giá phụ.** Nhân hai vế với $x^2 > 0$ rồi chuyển vế, ta có đồng nhất thức

$$x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 4x - x^2 - 4 \right) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 1 = (x - 1)^2 (1 + 2x - x^2).$$

Vì $1 + 2x - x^2 = 2 - (x - 1)^2$ nên đánh giá phụ đúng khi và chỉ khi $(x - 1)^2 \leq 2$, nghĩa là $0 < x \leq 1 + \sqrt{2}$. Ta chia hai trường hợp theo giá trị nhỏ nhất của bộ biến.

• **Trường hợp có một biến quá nhỏ.** Giả sử $\min\{a, b, c\} < \frac{1}{3}$. Hai vế của bất đẳng thức đều là biểu thức đối xứng theo a, b, c nên không mất tính tổng quát, giả sử biến nhỏ nhất là a , tức $a < \frac{1}{3}$. Khi đó $0 < a^2 < \frac{1}{9}$, suy ra $\frac{1}{a^2} > 9$. Mặt khác, do $a, b, c > 0$ nên

$$(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab + bc + ca) > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < (a + b + c)^2 = 9.$$

Suy ra

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} > 9 > a^2 + b^2 + c^2,$$

bất đẳng thức đúng và thậm chí là bất đẳng thức nghiêm ngặt.

• **Trường hợp mọi biến đều đủ lớn.** Giả sử $a, b, c \geq \frac{1}{3}$. Khi đó

$$a = 3 - b - c \leq 3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3},$$

và tương tự $b, c \leq \frac{7}{3}$. Vì $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} < 2$ nên $\frac{4}{3} < \sqrt{2}$, kéo theo $\frac{7}{3} < 1 + \sqrt{2}$. Vậy cả ba biến đều nằm trong miền đúng của đánh giá phụ.

• **Cộng ba đánh giá cùng chiều.** Vẫn trong trường hợp thứ hai, áp dụng đánh giá phụ cho $x = a$, $x = b$, $x = c$ rồi cộng theo vế:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2 + 12 - 4(a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2 + 12 - 12 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Hai trường hợp trên đã vét hết mọi khả năng, vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Ở trường hợp thứ nhất bất đẳng thức là nghiêm ngặt nên không thể có dấu đẳng thức.

Ở trường hợp thứ hai mỗi biến đều thoả mãn $x \leq \frac{7}{3} < 1 + \sqrt{2}$, do đó $1 + 2x - x^2 > 0$ và hiệu $(x - 1)^2(1 + 2x - x^2)$ chỉ triệt tiêu khi $x = 1$; muốn có đẳng thức thì cả ba đánh giá phụ phải đồng thời trở thành đẳng thức, tức $a = b = c = 1$. Bộ số này thoả mãn $a + b + c = 3$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

CHƯƠNG 8

Bất đẳng thức Schur và phương pháp p, q, r

08

Đưa bất đẳng thức đối xứng ba biến về bộ ba $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$, rồi khép chặt miền biến thiên của r bằng bất đẳng thức Schur.

Lớp bất đẳng thức đối xứng ba biến xuất hiện thường xuyên trong các kỳ thi học sinh giỏi. Với lớp bài này, hai công cụ chủ đạo là bất đẳng thức Schur và phép đổi biến về bộ ba p, q, r . Bất đẳng thức Schur cung cấp một chặn dưới cho abc theo $a + b + c$ và $ab + bc + ca$; chặn ấy có thể nhận giá trị âm, nên khi sử dụng phải kết hợp thêm với chặn hiển nhiên $abc \geq 0$. Còn phép đổi biến p, q, r thì biến một biểu thức ba biến thành một biểu thức ba ẩn ràng buộc lẫn nhau. Khi biểu thức thu được là bậc nhất theo r , bài toán quy về việc kiểm tra tại hai đầu mút của miền biến thiên của r ; đó chính là nội dung cốt lõi của chương này.

A. Kiến thức trọng tâm

Bất đẳng thức Schur

Với mọi số thực không âm a, b, c và mọi số thực $k > 0$, ta luôn có

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-c)(b-a) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hoặc hai trong ba số bằng nhau và số còn lại bằng 0.

- **Chứng minh.** Ta sắp thứ tự ba biến rồi nhóm về trái thành hai số hạng không âm.
- **Sắp thứ tự và nhóm về trái.** Biểu thức ở vế trái đối xứng đối với a, b, c , nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Chú ý $(c-a)(c-b) = (a-c)(b-c)$, vế trái được viết lại thành

$$(a-b)[a^k(a-c) - b^k(b-c)] + c^k(a-c)(b-c).$$

- **Đánh giá dấu từng số hạng.** Từ $a \geq b \geq c \geq 0$ suy ra $a^k \geq b^k \geq 0$ và $a-c \geq b-c \geq 0$, do đó $a^k(a-c) \geq b^k(b-c)$. Kết hợp với $a-b \geq 0$ và $c^k(a-c)(b-c) \geq 0$, cả hai số hạng đều không âm. Bất đẳng thức được chứng minh.

Hai trường hợp được dùng nhiều nhất là $k = 1$ và $k = 2$.

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3abc &\geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a), \\ a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) &\geq ab(a^2+b^2) + bc(b^2+c^2) + ca(c^2+a^2). \end{aligned}$$

Trong suốt chương, ta luôn quy ước

$$p = a + b + c, \quad q = ab + bc + ca, \quad r = abc.$$

Bổ đề 8.1. (Bất đẳng thức Schur qua bộ ba p, q, r) Với mọi $a, b, c \geq 0$, bốn bất đẳng thức sau tương đương với nhau:

$$(i) \quad a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a);$$

$$(ii) \quad p^3 + 9r \geq 4pq;$$

$$(iii) \quad a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca) \quad (p > 0);$$

$$(iv) \quad abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Từ dạng (ii), với $p > 0$ ta có chặn dưới thứ nhất của r ; bất đẳng thức Schur bậc hai, viết theo p, q, r là $p^4 + 4q^2 + 6pr \geq 5p^2q$, cho chặn dưới thứ hai:

$$r \geq \max \left\{ 0, \frac{p(4q - p^2)}{9} \right\} \quad \text{và} \quad r \geq \max \left\{ 0, \frac{(4q - p^2)(p^2 - q)}{6p} \right\}.$$

• **Giải thích.** Cả bốn dạng đều được quy về dạng (ii).

• **Từ (i) sang (ii).** Từ các đồng nhất thức $a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3pq + 3r$ và $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) = pq - 3r$, dạng (i) trở thành $p^3 - 3pq + 3r + 3r \geq pq - 3r$, tức là (ii).

• **Từ (ii) sang (iii).** Chia hai vế của (ii) cho $p > 0$ rồi dùng $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q$ thu được (iii).

• **Từ (iv) về (ii).** Cuối cùng, khai triển trực tiếp cho

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = -p^3 + 4pq - 8r,$$

nên (iv) tương đương với $r \geq -p^3 + 4pq - 8r$, tức là (ii).

Dạng (iv) tiện dùng khi bài toán xuất hiện các biểu thức $a+b-c$: nó khẳng định rằng tích của ba đại lượng $a+b-c, b+c-a, c+a-b$ không vượt quá abc , kể cả khi một trong ba đại lượng đó âm.

• **Lưu ý về cách dùng.** Đại lượng $4q - p^2$ có thể nhận cả giá trị âm lẫn giá trị không âm; khi $4q < p^2$ thì chặn $r \geq p(4q - p^2)/9$ còn yếu hơn cả chặn hiển nhiên $r \geq 0$. Khi lời giải cần một chặn dưới thực sự chặt, ta phải kết hợp thêm $r \geq 0$, tức dùng dạng có dấu max, và thường phải chia trường hợp theo dấu của $4q - p^2$.

Bất đẳng thức Vornicu–Schur

Cho $a \geq b \geq c \geq 0$ và $x, y, z \geq 0$. Khi đó bất đẳng thức

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$$

đúng nếu xảy ra một trong các điều kiện sau:

1. $x \geq y$ hoặc $z \geq y$;
2. $ax \geq by$;
3. $bz \geq cy$, với giả thiết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác;
4. $\sqrt{x} + \sqrt{z} \geq \sqrt{y}$.

• **Chứng minh điều kiện 1.** Viết về trái dưới dạng

$$z(a-c)(b-c) + (a-b)[x(a-c) - y(b-c)].$$

Nếu $x \geq y$ thì $x(a-c) \geq y(b-c)$ vì $a-c \geq b-c \geq 0$, nên cả hai số hạng đều không âm. Nếu $z \geq y$, ta đổi vai trò bằng cách viết về trái thành $x(a-b)(a-c) + (b-c)[z(a-c) - y(a-b)]$ và lập luận tương tự.

• **Chứng minh điều kiện 2.** Nếu $b = 0$ thì từ $a \geq b \geq c \geq 0$ suy ra $c = 0$, khi đó về trái bằng $xa^2 \geq 0$. Xét trường hợp $b > 0$: vì $b(a-c) - a(b-c) = c(a-b) \geq 0$ nên $a-c \geq \frac{a}{b}(b-c)$. Suy ra

$$z(a-c)(b-c) + (a-b)[x(a-c) - y(b-c)] \geq z(a-c)(b-c) + \frac{(a-b)(b-c)(ax-by)}{b} \geq 0.$$

• **Chứng minh điều kiện 3.** Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a \geq b \geq c > 0$ và $b+c-a > 0$, do đó $c(a-c) - b(a-b) = (b-c)(b+c-a) \geq 0$, tức $a-c \geq \frac{b}{c}(a-b)$. Suy ra

$$x(a-b)(a-c) + (b-c)[z(a-c) - y(a-b)] \geq x(a-b)(a-c) + \frac{(a-b)(b-c)(bz-cy)}{c} \geq 0.$$

• **Chứng minh điều kiện 4.** Ta xét riêng hai trường hợp biên, rồi xử lý trường hợp còn lại bằng bất đẳng thức AM-GM.

• **Hai trường hợp biên.** Nếu $a = b$ thì về trái bằng $z(c-a)(c-b) = z(a-c)^2 \geq 0$; nếu $b = c$ thì về trái bằng $x(a-b)(a-c) = x(a-b)^2 \geq 0$.

• **Trường hợp $a > b > c$.** Chia hai vế cho $(a-b)(b-c) > 0$, bất đẳng thức tương đương với $x \cdot \frac{a-c}{b-c} + z \cdot \frac{a-c}{a-b} \geq y$. Vì $a-c = (a-b) + (b-c)$ nên về trái bằng

$$x + z + x \cdot \frac{a-b}{b-c} + z \cdot \frac{b-c}{a-b} \geq x + z + 2\sqrt{xz} = (\sqrt{x} + \sqrt{z})^2 \geq y,$$

trong đó ta đã dùng bất đẳng thức AM-GM.

Trong bốn điều kiện trên, điều kiện 1 được dùng nhiều nhất ở các bài toán của chương này: chỉ cần sắp thứ tự $a \geq b \geq c$ rồi so sánh hai trong ba hệ số x, y, z .

Bộ ba p, q, r

Với $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$, ta có các đồng nhất thức

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= p^2 - 2q, & a^3 + b^3 + c^3 &= p^3 - 3pq + 3r, \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= q^2 - 2pr, & (a+b)(b+c)(c+a) &= pq - r, \\ a^4 + b^4 + c^4 &= p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr, \\ ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) &= pq - 3r, \\ ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) &= p^2q - 2q^2 - pr, \\ (a+b)(a+c) + (b+c)(b+a) + (c+a)(c+b) &= p^2 + q, \end{aligned}$$

và, với $a, b, c \geq 0$, các bất đẳng thức ràng buộc

$$\begin{aligned} p^2 &\geq 3q, & p^3 &\geq 27r, & q^2 &\geq 3pr, & pq &\geq 9r, \\ 2p^3 + 9r &\geq 7pq, & p^2q + 3pr &\geq 4q^2, & p^4 + 4q^2 + 6pr &\geq 5p^2q. \end{aligned}$$

• **Nguồn gốc các ràng buộc.** Bốn ràng buộc đầu là các dạng của bất đẳng thức AM–GM. Ràng buộc $2p^3 + 9r \geq 7pq$ nhận được bằng cách cộng $p^3 + 9r \geq 4pq$ (Schur bậc một) với $p^3 \geq 3pq$ (hệ quả của $p^2 \geq 3q$). Ràng buộc $p^2q + 3pr \geq 4q^2$ là hệ quả của đồng nhất thức

$$ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2 = p^2q + 3pr - 4q^2.$$

Ràng buộc cuối chính là Schur bậc hai.

Bổ đề 8.2. (Miền biến thiên của r khi cố định p và q) Cho trước $p > 0$ và q với $p^2 \geq 3q \geq 0$. Tập các giá trị r sao cho tồn tại bộ số không âm (a, b, c) với $a + b + c = p$, $ab + bc + ca = q$, $abc = r$ là một đoạn $[r_1; r_2]$. Tại $r = r_2$ bộ số đạt được có hai số bằng nhau; tại $r = r_1$ bộ số đạt được có hai số bằng nhau, hoặc có một số bằng 0.

• **Chứng minh.** Ta quy bài toán về việc đếm nghiệm của một phương trình bậc ba, rồi đọc miền biến thiên cần tìm từ bảng biến thiên.

• **Quy về phương trình bậc ba.** Ba số a, b, c nhận p, q, r làm ba tổng đối xứng cơ bản khi và chỉ khi chúng là ba nghiệm, kể cả bội, của phương trình $g(t) = r$, trong đó $g(t) = t^3 - pt^2 + qt$.

• **Khảo sát hàm bậc ba.** Ta có $g'(t) = 3t^2 - 2pt + q$ với biệt thức $4p^2 - 12q \geq 0$, nên g' có hai nghiệm $t_1 \leq t_2$ thoả mãn $t_1 + t_2 = \frac{2p}{3} > 0$ và $t_1 t_2 = \frac{q}{3} \geq 0$; do đó $0 \leq t_1 \leq t_2$. Hàm g đồng biến trên $(-\infty; t_1]$, nghịch biến trên $[t_1; t_2]$ và đồng biến trên $[t_2; +\infty)$. Đặt $M = g(t_1)$ và $m = g(t_2)$ thì $m \leq M$, đồng thời $M \geq g(0) = 0$ vì $0 \leq t_1$.

• **Đếm nghiệm theo bảng biến thiên.** Từ bảng biến thiên, phương trình $g(t) = r$ có đúng ba nghiệm thực kể cả bội khi và chỉ khi $m \leq r \leq M$; khi đó nhánh $(-\infty; t_1]$ chứa đúng một nghiệm u , còn hai nghiệm kia nằm trong $[t_1; +\infty)$.

• **Giữ cả ba nghiệm không âm.** Giả sử thêm $r \geq 0$. Vì $g(u) = r \geq 0 = g(0)$, vì u và 0 cùng thuộc nhánh đồng biến $(-\infty; t_1]$, nên $u \geq 0$; hai nghiệm còn lại đều không nhỏ hơn $t_1 \geq 0$. Ngược lại, nếu ba nghiệm đều không âm thì $r = abc \geq 0$. Vậy tập giá trị cần tìm đúng bằng đoạn

$$[r_1; r_2] = [\max\{0; m\}; M],$$

và đoạn này khác rỗng vì $M \geq m$ và $M \geq 0$.

• **Nhận diện bộ số tại hai đầu mút.** Cuối cùng, tại $r = r_2 = M = g(t_1)$ ta có $g(t_1) - r = 0$ và $g'(t_1) = 0$, nên t_1 là nghiệm bội của $g(t) - r$: bộ ba nghiệm có hai số bằng nhau. Tại $r = r_1$, nếu $r_1 = m = g(t_2)$ thì lập luận tương tự cho thấy t_2 là nghiệm bội, bộ ba nghiệm có hai số bằng nhau; nếu $r_1 = 0 > m$ thì $g(0) = 0 = r$, tức một trong ba nghiệm bằng 0.

Nếu $F(a, b, c)$ đối xứng và là hàm bậc nhất theo r khi p, q được giữ cố định, thì trên mỗi họ bộ số ứng với p, q cho trước, F đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất tại một đầu mút của đoạn $[r_1; r_2]$. Do đó, nếu F có giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất trên toàn miền đang xét thì giá trị ấy đạt được tại một bộ số có hai số bằng nhau, hoặc có một số bằng 0.

Đây là lý do khiến hai trường hợp $b = c$ và $c = 0$ thường được kiểm tra đầu tiên khi dự đoán điểm rơi của một bất đẳng thức đối xứng ba biến. Trong các bài toán của chương này, ta hiếm khi phải xác định tường minh r_1, r_2 : thông thường chỉ cần biết F đơn điệu theo r rồi thay chặn dưới $r \geq \max\{0, p(4q - p^2)/9\}$ hoặc chặn trên $r \leq pq/9$ vào.

B. Kỹ thuật và ví dụ minh hoạ

Ví dụ 8.1. Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$5(a^2 + b^2 + c^2) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3) + 9.$$

Phân tích. Hai vế đều là tổng đối xứng của các lũy thừa, nên chỉ cần thay bằng biểu diễn theo p, q, r là bất đẳng thức trở thành một quan hệ tuyến tính giữa q và r . Điểm rơi cần dự đoán trước: ngoài bộ $a = b = c = 1$, dạng bậc ba còn hay nhận thêm điểm rơi biên $c = 0, a = b$.

Lời giải

• **Đưa về bộ ba p, q, r .** Đặt $p = a + b + c = 3, q = ab + bc + ca, r = abc$. Theo các đồng nhất thức ở mục A,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9 - 2q, \quad a^3 + b^3 + c^3 = 27 - 9q + 3r.$$

• **Rút gọn về quan hệ giữa q và r .** Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$5(9 - 2q) \leq 2(27 - 9q + 3r) + 9 \Leftrightarrow 45 - 10q \leq 63 - 18q + 6r \Leftrightarrow 4q - 9 \leq 3r.$$

• **Áp dụng Schur bậc một.** Theo bất đẳng thức Schur bậc một, $p^3 + 9r \geq 4pq$. Thay $p = 3$ ta được $27 + 9r \geq 12q$, tức là $3r \geq 4q - 9$. Đó đúng là bất đẳng thức vừa thu được ở bước trên.

Điểm rơi. Dấu đẳng thức của Schur bậc một xảy ra khi $a = b = c$ hoặc khi hai số bằng nhau và số thứ ba bằng 0. Với ràng buộc $a + b + c = 3$, ta được $a = b = c = 1$ hoặc $(a, b, c) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$ cùng các hoán vị.

Nhận xét. Ví dụ này cho thấy bước chuyển sang p, q, r đôi khi biến bài toán thành đúng một bất đẳng thức đã biết. Quy tắc thực hành: quy mọi tổng đối xứng về p, q, r trước, rồi mới chọn công cụ. Cũng bất đẳng thức này sẽ được chứng minh lại ở Ví dụ 9.3 bằng phân tích S.O.S.; giữ song song hai lời giải là có chủ ý, vì chúng cho thấy phương pháp p, q, r và S.O.S. tuy khác nhau về hình thức nhưng cùng dựa trên bất đẳng thức Schur bậc một.

Ví dụ 8.2. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng

$$3 + \frac{96}{abc} \geq 10 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Phân tích. Cả hai vế đều quy đồng được về mẫu chung $abc = r$; tử số khi đó là một biểu thức bậc nhất theo r và bậc nhất theo q . Đây là tình huống điển hình để dùng chặn dưới r của Schur.

Lời giải

• **Quy đồng rồi đổi sang p, q, r .** Đặt $p = 6, q = ab + bc + ca, r = abc > 0$. Vì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{q}{r}$, nhân hai vế với $r > 0$ ta thấy bất đẳng thức tương đương với

$$3r + 96 \geq 10q.$$

• **Chặn dưới của r theo Schur.** Theo bất đẳng thức Schur bậc một, $9r \geq p(4q - p^2) = 6(4q - 36)$, do đó

$$r \geq \frac{8q - 72}{3}, \quad \text{tức là} \quad 3r \geq 8q - 72.$$

• **Đánh giá phần còn lại theo q .** Từ đó

$$3r + 96 - 10q \geq (8q - 72) + 96 - 10q = 24 - 2q = 2(12 - q).$$

Mặt khác $q \leq \frac{p^2}{3} = 12$, nên $2(12 - q) \geq 0$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Cả hai đánh giá đều trở thành đẳng thức khi $q = 12$, tức là $a = b = c = 2$. Khi đó vế trái bằng $3 + \frac{96}{8} = 15$ và vế phải bằng $10 \cdot \frac{3}{2} = 15$.

Ví dụ 8.3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{12}{ab + bc + ca} + abc \geq 5.$$

Phân tích. Vế trái là hàm bậc nhất đồng biến theo r , nên thay r bởi chặn dưới của Schur sẽ cho một hàm chỉ còn phụ thuộc q . Hàm một biến thu được có dạng tổng của $\frac{12}{q}$ và một bội của q , gọi ngay đến bất đẳng thức AM–GM.

Lời giải

• **Viết bất đẳng thức theo q và r .** Đặt $p = 3$, $q = ab + bc + ca > 0$, $r = abc > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh là

$$\frac{12}{q} + r \geq 5.$$

• **Khử r bằng chặn Schur.** Theo bất đẳng thức Schur bậc một với $p = 3$, ta có $27 + 9r \geq 12q$, suy ra $r \geq \frac{4q - 9}{3}$. Vì vế trái đồng biến theo r ,

$$\frac{12}{q} + r \geq \frac{12}{q} + \frac{4q - 9}{3} = \frac{12}{q} + \frac{4q}{3} - 3.$$

• **Xử lý hàm một biến theo q .** Theo bất đẳng thức AM–GM,

$$\frac{12}{q} + \frac{4q}{3} \geq 2\sqrt{\frac{12}{q} \cdot \frac{4q}{3}} = 2\sqrt{16} = 8.$$

Do đó $\frac{12}{q} + r \geq 8 - 3 = 5$, chính là điều phải chứng minh.

Điểm rơi. Đẳng thức ở đánh giá AM–GM xảy ra khi $\frac{12}{q} = \frac{4q}{3}$, tức $q^2 = 9$, tức $q = 3$; kết hợp với $p = 3$ được $a = b = c = 1$. Khi đó $r = 1$ và Schur cũng đạt đẳng thức. Vế trái bằng $\frac{12}{3} + 1 = 5$.

Nhận xét. Thứ tự các bước ở đây là nhịp chung của cả chương: khử r bằng Schur trước, sau đó xử lý hàm một biến theo q bằng công cụ sơ cấp. Cần kiểm tra kỹ chiều đơn điệu theo r trước khi thay chặn: nếu hệ số của r âm thì phải dùng chặn trên $r \leq \frac{pq}{9}$ chứ không phải chặn dưới của Schur.

Ví dụ 8.4. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

(Phạm Kim Hùng)

Phân tích. Từ $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ suy ra $0 < a, b, c \leq \sqrt{3} < 2$, nên các mẫu số đều dương. Quy đồng mẫu số, cả tử lẫn mẫu là những đa thức đối xứng, do đó chuyển được sang p, q, r ; hơn nữa giả thiết cho ngay $q = \frac{p^2 - 3}{2}$, nghĩa là chỉ còn hai ẩn p và r .

Lời giải

• **Quy đồng mẫu số.** Đặt p, q, r như thường lệ. Khai triển trực tiếp,

$$\sum (2-b)(2-c) = 12 - 4p + q, \quad (2-a)(2-b)(2-c) = 8 - 4p + 2q - r.$$

Vì mọi mẫu số đều dương nên bất đẳng thức tương đương với

$$12 - 4p + q \geq 3(8 - 4p + 2q - r) \Leftrightarrow 8p + 3r \geq 12 + 5q.$$

• **Khử q theo p .** Giả thiết cho $p^2 - 2q = 3$, tức $q = \frac{p^2 - 3}{2}$, và khi đó $4q - p^2 = p^2 - 6$. Theo bất đẳng thức Schur bậc một,

$$9r \geq p(4q - p^2) = p(p^2 - 6) \quad \Rightarrow \quad 3r \geq \frac{p(p^2 - 6)}{3}.$$

• **Rút về đa thức một biến.** Thay hai kết quả trên vào, ta chỉ còn phải chứng minh

$$8p + \frac{p(p^2 - 6)}{3} - 12 - \frac{5(p^2 - 3)}{2} \geq 0.$$

Nhân hai vế với $6 > 0$ rồi rút gọn, bất đẳng thức trên trở thành

$$2p^3 - 15p^2 + 36p - 27 \geq 0 \Leftrightarrow (2p - 3)(p - 3)^2 \geq 0.$$

• **Xét dấu trên miền của p .** Vì $p^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 = 3$ nên $p \geq \sqrt{3} > \frac{3}{2}$, do đó $2p - 3 > 0$ và $(p - 3)^2 \geq 0$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Đẳng thức đòi hỏi $p = 3$; kết hợp với $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ta được $a = b = c = 1$, khi đó mỗi số hạng vế trái bằng 1.

Nhận xét. Phép thay $a \mapsto 2a, b \mapsto 2b, c \mapsto 2c$ biến bất đẳng thức này thành Ví dụ 10.7, ở đó nó được chứng minh bằng phương pháp tiếp tuyến với hàm trung gian bậc hai. Hai lời giải được giữ lại cạnh nhau để đối chiếu: phương pháp p, q, r khai thác ràng buộc bằng cách khép miền biến thiên của p , còn phương pháp tiếp tuyến khai thác nó bằng cách tách tổng.

Ví dụ 8.5. Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 7abc \geq 10.$$

(Vasile Cirtoaje)

Phân tích. Giả thiết cố định $q = 3$, nên vế trái chỉ còn phụ thuộc p và r với hệ số của r dương. Chặn dưới của Schur có dạng $\max\{0; p(12 - p^2)/9\}$, và dấu của $12 - p^2$ thay đổi tại $p = 2\sqrt{3}$; đó chính là mốc chia trường hợp.

Lời giải

• **Chuyển sang hai ẩn p và r .** Đặt p, q, r như thường lệ, $q = 3$. Khi đó

$$a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3pq + 3r = p^3 - 9p + 3r,$$

nên bất đẳng thức cần chứng minh là $p^3 - 9p + 10r \geq 10$. Ngoài ra $p^2 \geq 3q = 9$, tức $p \geq 3$.

• **Trường hợp $p \geq 2\sqrt{3}$.** Khi đó $p^2 \geq 12$, suy ra $p^3 \geq 12p$. Vì $r \geq 0$,

$$p^3 - 9p + 10r - 10 \geq 12p - 9p - 10 = 3p - 10 \geq 6\sqrt{3} - 10 > 0.$$

• **Trường hợp $3 \leq p < 2\sqrt{3}$.** Theo bất đẳng thức Schur bậc một, $9r \geq p(4q - p^2) = p(12 - p^2)$, do đó $10r \geq \frac{10p(12 - p^2)}{9}$ và

$$p^3 - 9p + 10r - 10 \geq p^3 - 9p + \frac{10p(12 - p^2)}{9} - 10 = \frac{-p^3 + 39p - 90}{9} = \frac{(p - 3)[(16 - p^2) + 3(4 - p) + 2]}{9}.$$

Với $3 \leq p < 2\sqrt{3} < 4$ ta có $p - 3 \geq 0$, $16 - p^2 > 0$ và $4 - p > 0$, nên vế phải không âm.

Điểm rơi. Trong trường hợp thứ hai, đẳng thức xảy ra khi $p = 3$, kết hợp với $q = 3$ được $a = b = c = 1$; khi đó $r = 1$ và vế trái bằng $3 + 7 = 10$.

Nhận xét. Mỗi khi chặn dưới của Schur được dùng ở dạng có $\max$, ta phải chia trường hợp theo dấu của $4q - p^2$, với mốc chia là $p^2 = 4q$; hai nhánh sau đó được xử lý bằng hai đánh giá khác nhau. Ngược lại, nếu riêng chặn $9r \geq p(4q - p^2)$ đã đủ để kết thúc lời giải, như ở Ví dụ 8.4, thì không cần chia trường hợp.

Ví dụ 8.6. Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 8$. Chứng minh rằng

$$4(a + b + c - 4) \leq abc.$$

(Nguyễn Phi Hùng)

Phân tích. Điểm rơi của bài toán không phải $a = b = c$: thử bộ $(2; 2; 0)$ thấy hai vế cùng bằng 0. Điểm rơi biên như vậy gợi ý rằng bất đẳng thức Schur bậc một có thể chưa đủ chặt, nên ở đây ta thử đến bậc hai.

Lời giải

- **Khử q theo p .** Giả thiết cho $p^2 - 2q = 8$, tức $q = \frac{p^2 - 8}{2}$. Từ đó

$$4q - p^2 = p^2 - 16, \quad p^2 - q = \frac{p^2 + 8}{2}.$$

Chú ý $p^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 = 8$, nên $p \geq 2\sqrt{2} > 0$.

- **Chặn dưới của r theo Schur bậc hai.** Theo bất đẳng thức Schur bậc hai,

$$r \geq \frac{(4q - p^2)(p^2 - q)}{6p} = \frac{(p^2 - 16)(p^2 + 8)}{12p}.$$

- **Rút về đa thức một biến.** Như vậy chỉ còn phải chứng minh

$$\frac{(p^2 - 16)(p^2 + 8)}{12p} \geq 4(p - 4).$$

Nhân hai vế với $12p > 0$ rồi chuyển vế, bất đẳng thức trên tương đương với

$$p^4 - 56p^2 + 192p - 128 \geq 0 \Leftrightarrow (p - 4)^2(p^2 + 8p - 8) \geq 0.$$

- **Xét dấu trên miền của p .** Vì $p \geq 2\sqrt{2}$ nên $p^2 + 8p - 8 \geq 8 + 16\sqrt{2} - 8 > 0$, còn $(p - 4)^2 \geq 0$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi $p = 4$, đồng thời Schur bậc hai đạt đẳng thức; điều đó ứng với $(a, b, c) = (2; 2; 0)$ và các hoán vị. Khi đó hai vế cùng bằng 0.

Nhận xét. Giả thiết dạng $a^2 + b^2 + c^2 = \text{const}$ luôn cho phép khử q theo p ; sau khi khử tiếp r bằng Schur, bài toán rút về một bất đẳng thức đa thức một biến p . Về việc chọn bậc của Schur: nếu điểm rơi là $a = b = c$ thì bậc một thường đã đủ; nếu điểm rơi nằm ở biên dạng $a = b, c = 0$ với $a \neq 0$ thì nên thử bậc hai. Hiệu của chặn bậc hai và chặn bậc một bằng $\frac{(4q - p^2)(p^2 - 3q)}{18p}$, nên chặn bậc hai chặt hơn đúng trên miền $4q \geq p^2$.

Ví dụ 8.7. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b} \geq a + b + c.$$

(Hojo Lee)

Phân tích. Hiệu của mỗi phân thức với biến tương ứng phân tích được thành tích: $\frac{a^2 + bc}{b + c} - a = \frac{(a - b)(a - c)}{b + c}$. Sau khi đưa được về tổng dạng $\sum x(a - b)(a - c)$, ta chỉ cần so sánh các hệ số, tức là dùng bất đẳng thức Vornicu–Schur.

Lời giải

- **Tách từng phân thức thành tích.** Với mọi $a, b, c > 0$,

$$\frac{a^2 + bc}{b + c} - a = \frac{a^2 + bc - ab - ac}{b + c} = \frac{(a - b)(a - c)}{b + c}.$$

Viết ba đẳng thức tương tự rồi cộng lại, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a-b)(a-c)}{b+c} + \frac{(b-c)(b-a)}{c+a} + \frac{(c-a)(c-b)}{a+b} \geq 0.$$

• **Sắp thứ tự và đặt hệ số.** Về trái đối xứng đối với a, b, c , nên không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Đặt

$$x = \frac{1}{b+c}, \quad y = \frac{1}{c+a}, \quad z = \frac{1}{a+b},$$

thì $x, y, z > 0$ và về trái đúng bằng $x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b)$.

• **So sánh hai hệ số.** Từ $a \geq b$ suy ra $b+c \leq c+a$, do đó $x \geq y$. Theo điều kiện 1 của bất đẳng thức Vornicu-Schur, tổng trên không âm. Bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$; khi đó mỗi phân thức bằng a và hai vế cùng bằng $3a$.

Ví dụ 8.8*. Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng

$$a^4(b+c) + b^4(c+a) + c^4(a+b) \leq \frac{1}{12}(a+b+c)^5.$$

(Vasile Cirtoaje)

Phân tích. Bất đẳng thức thuần nhất bậc năm nên chuẩn hoá được $p = 1$. Sau khi chuyển sang p, q, r , về trái là hàm bậc nhất theo r với hệ số $5q-1$; dấu của hệ số này đổi tại $q = \frac{1}{5}$, và đó là mốc chia trường hợp. Điểm rơi không phải $a = b = c$: thử $a = 0$ và b, c là hai nghiệm của $t^2 - t + \frac{1}{6} = 0$ thì hai vế bằng nhau.

Lời giải

• **Chuẩn hoá và đổi biến.** Do tính thuần nhất, ta chuẩn hoá $p = a + b + c = 1$. Dùng các đồng nhất thức ở mục A,

$$a^4(b+c) + b^4(c+a) + c^4(a+b) = p^3q - 3pq^2 - p^2r + 5qr = q(1-3q) + r(5q-1).$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $q(1-3q) + r(5q-1) \leq \frac{1}{12}$, với $0 \leq q \leq \frac{1}{3}$ và $r \geq 0$.

• **Trường hợp $q \leq \frac{1}{5}$.** Khi đó $5q-1 \leq 0$ và $r \geq 0$, nên $r(5q-1) \leq 0$. Theo bất đẳng thức AM-GM,

$$q(1-3q) + r(5q-1) \leq q(1-3q) = \frac{1}{3} \cdot 3q(1-3q) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{3q+1-3q}{2} \right)^2 = \frac{1}{12}.$$

• **Trường hợp $q > \frac{1}{5}$.** Khi đó $5q-1 > 0$, ta cần một chặn trên cho r . Ràng buộc $pq \geq 9r$ cho $r \leq \frac{q}{9}$, do đó

$$q(1-3q) + r(5q-1) \leq q(1-3q) + \frac{q(5q-1)}{9} = \frac{q(8-22q)}{9} = \frac{1}{36}(-88q^2 + 32q - 3) + \frac{1}{12}.$$

Tam thức $-88q^2 + 32q - 3$ có biệt thức $32^2 - 4 \cdot 88 \cdot 3 = -32 < 0$ và hệ số bậc hai âm, nên nó luôn âm. Vậy vế trái nhỏ hơn $\frac{1}{12}$.

• **Gộp hai trường hợp.** Trong cả hai trường hợp bất đẳng thức đều đúng, nên bài toán được giải quyết.

Điểm rơi. Bất đẳng thức chỉ có thể xảy ra ở trường hợp thứ nhất, khi $3q = 1 - 3q$ và $r = 0$, tức $q = \frac{1}{6}$, $r = 0$. Tương ứng với $a = 0$ và b, c là hai nghiệm của $t^2 - t + \frac{1}{6} = 0$, tức $(a, b, c) = \left(0; \frac{3 + \sqrt{3}}{6}; \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)$ cùng các hoán vị và các bộ tỉ lệ với nó.

Nhận xét. Đây là minh họa trực tiếp cho Bổ đề về miền biến thiên của r : vì biểu thức bậc nhất theo r , giá trị lớn nhất của nó chỉ có thể đạt tại một đầu mút, tức tại $r = 0$ (một biến bằng 0) hoặc tại đầu mút ứng với hai biến bằng nhau. Việc chia hai trường hợp theo dấu của $5q - 1$ chính là việc chọn xem phải xét đầu mút nào.

Ví dụ 8.9*. Cho các số thực không âm x, y, z , trong đó không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx) \left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4}.$$

(Iran MO 1996, Ji Chen)

Phân tích. Bất đẳng thức thuần nhất bậc 0 và có hai điểm rơi rời nhau: $x = y = z$ và $x = y, z = 0$. Chuyển hẳn sang p, q, r sẽ cho một đa thức bậc hai theo r ; điều đáng chú ý là đa thức đó phân tích được thành tổ hợp với hệ số không âm của đúng ba ràng buộc đã biết ở mục A.

Lời giải

• **Tính hai tổng đối xứng.** Đặt $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, $r = xyz$. Theo các đồng nhất thức ở mục A,

$$(x+y)(y+z)(z+x) = pq - r, \quad (x+y)(x+z) + (y+z)(y+x) + (z+x)(z+y) = p^2 + q.$$

Từ đó

$$\sum (y+z)^2(z+x)^2 = (p^2 + q)^2 - 2(pq - r) \cdot 2p = p^4 - 2p^2q + q^2 + 4pr.$$

• **Quy về một đa thức đối xứng.** Vế trái của bất đẳng thức bằng $\frac{q(p^4 - 2p^2q + q^2 + 4pr)}{(pq - r)^2}$, và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4q(p^4 - 2p^2q + q^2 + 4pr) - 9(pq - r)^2 \geq 0,$$

tức là

$$4p^4q - 17p^2q^2 + 4q^3 + 34pqr - 9r^2 \geq 0.$$

• **Phân tích thành tổ hợp ba ràng buộc.** Khai triển trực tiếp cho đồng nhất thức

$$\begin{aligned} 4p^4q - 17p^2q^2 + 4q^3 + 34pqr - 9r^2 &= 3pq(p^3 + 9r - 4pq) \\ &\quad + q(p^4 + 4q^2 + 6pr - 5p^2q) + r(pq - 9r). \end{aligned}$$

• **Kết luận về dấu.** Ba biểu thức trong ngoặc lần lượt không âm theo bất đẳng thức Schur bậc một, bất đẳng thức Schur bậc hai và ràng buộc $pq \geq 9r$; ba hệ số $3pq, q, r$ cũng không âm. Vậy tổng ở vế phải không âm, bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Với $x = y = z$ ta có $p^3 + 9r - 4pq = 0$, $p^4 + 4q^2 + 6pr - 5p^2q = 0$ và $pq - 9r = 0$, nên cả ba số hạng cùng triệt tiêu. Với $x = y, z = 0$ thì $r = 0$ và hai ngoặc đầu cũng bằng 0. Đó chính là hai bộ điểm rơi của bài toán.

Nhận xét. Vì bất đẳng thức có hai điểm rơi rời nhau nên trong một dãy đánh giá dùng chung cho toàn miền, mọi đánh giá trung gian đều phải đạt đẳng thức tại cả hai điểm ấy; một đánh giá chỉ chặt tại một trong hai điểm sẽ làm hỏng lời giải. Cách khắc phục của phương pháp p, q, r là không đánh giá từng phần, mà phân tích toàn bộ hiệu thành tổ hợp hệ số không âm của những ràng buộc mà cả hai điểm rơi đều làm cho đẳng thức xảy ra.

C. Bài tập có lời giải

Bài 8.1. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab + bc + ca).$$

Phân tích. Vế trái chứa đúng một phân thức, mẫu số của nó là $a + b + c > 0$, nên nhân hai vế với $a + b + c$ sẽ biến toàn bộ bất đẳng thức thành một đa thức đối xứng bậc ba. Mọi tổng đối xứng có mặt đều biểu diễn được qua p, q, r , và kết quả thu được đúng là một trong bốn dạng tương đương của bất đẳng thức Schur bậc một. Điểm rơi dự đoán là $a = b = c$.

Lời giải

• **Đưa về bộ ba p, q, r .** Đặt $p = a + b + c > 0$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Theo đồng nhất thức ở mục A ta có $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q$. Nhân hai vế của bất đẳng thức cần chứng minh với $p > 0$, nó tương đương với

$$p(p^2 - 2q) + 9r \geq 2pq \Leftrightarrow p^3 + 9r \geq 4pq.$$

• **Áp dụng Schur bậc một.** Bất đẳng thức $p^3 + 9r \geq 4pq$ chính là dạng (ii) trong Bổ đề về bất đẳng thức Schur qua bộ ba p, q, r ở mục A, đúng với mọi $a, b, c \geq 0$. Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Điểm rơi. Dạng (ii) đạt đẳng thức khi $a = b = c$, hoặc khi hai số bằng nhau và số thứ ba bằng 0. Vì ở đây a, b, c đều dương nên chỉ còn khả năng $a = b = c$; khi đó vế trái bằng $3a^2 + 3a^2 = 6a^2$ và vế phải cũng bằng $6a^2$.

Nhận xét. Bài 9.2 nêu lại đúng đề bài này với hướng giải bằng phân tích S.O.S.; giữ song song hai lời giải cho thấy dạng (iii) của Schur bậc một là điểm gặp nhau của hai phương pháp.

Bài 8.2. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$4(ab + bc + ca) - 3abc \leq 9.$$

Phân tích. Với $p = 3$ cố định, vế trái là hàm bậc nhất theo r với hệ số -3 âm, nên nó lớn nhất khi r nhỏ nhất; do đó phải thay r bởi chặn dưới của bất đẳng thức Schur chứ không phải chặn trên. Sau khi thay, hệ số của q triệt tiêu hoàn toàn, dấu hiệu cho biết bài toán có đúng hai bộ điểm rơi của Schur bậc một.

Lời giải

- **Viết bất đẳng thức theo q và r .** Đặt $p = a + b + c = 3$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Bất đẳng thức cần chứng minh là

$$4q - 3r \leq 9.$$

- **Chặn dưới của r theo Schur.** Theo bất đẳng thức Schur bậc một, $p^3 + 9r \geq 4pq$. Thay $p = 3$,

$$27 + 9r \geq 12q \Leftrightarrow 3r \geq 4q - 9.$$

- **Thay chặn vào vế trái.** Vì hệ số của r ở vế trái bằng $-3 < 0$, việc thay $3r$ bởi đại lượng nhỏ hơn hoặc bằng nó làm vế trái tăng lên. Do đó

$$4q - 3r \leq 4q - (4q - 9) = 9.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $3r = 4q - 9$, tức khi bất đẳng thức Schur bậc một trở thành đẳng thức. Kết hợp với $a + b + c = 3$, điều đó cho $(a, b, c) = (1; 1; 1)$ hoặc $(a, b, c) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$ cùng các hoán vị. Kiểm tra trực tiếp: với bộ thứ nhất vế trái bằng $4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 9$; với bộ thứ hai vế trái bằng $4 \cdot \frac{9}{4} - 0 = 9$.

Bài 8.3. Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca).$$

(Darij Grinberg)

Phân tích. Bất đẳng thức không thuần nhất: số hạng 1 đứng riêng, còn $2abc$ có bậc ba trong khi các số hạng khác đều bậc hai. Cầu nối giữa hai bậc là bất đẳng thức AM–GM cho bộ ba $abc, abc, 1$, cho ra $3\sqrt[3]{(abc)^2}$ – một đại lượng bậc hai theo căn bậc ba của các biến. Vì vậy ta đổi biến $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ để mọi thứ trở lại thành đa thức, rồi dùng Schur bậc một cho bộ (x^2, y^2, z^2) . Điểm rơi dự đoán là $a = b = c = 1$.

Lời giải

- **Đổi biến để khử căn.** Vì $a, b, c \geq 0$, ta đặt $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c}$, tức $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ với $x, y, z \geq 0$. Khi đó

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^6 + y^6 + z^6, \quad ab + bc + ca = x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3.$$

- **Đánh giá số hạng chứa abc .** Theo bất đẳng thức AM–GM cho ba số không âm $abc, abc, 1$,

$$2abc + 1 = abc + abc + 1 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3x^2y^2z^2.$$

- **Áp dụng Schur bậc một cho bộ (x^2, y^2, z^2) .** Dạng (i) của bất đẳng thức Schur bậc một ở mục A, viết cho ba số không âm x^2, y^2, z^2 , cho

$$\begin{aligned} x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 &\geq x^2y^2(x^2 + y^2) + y^2z^2(y^2 + z^2) \\ &\quad + z^2x^2(z^2 + x^2). \end{aligned}$$

- **Hạ vế phải xuống tổng cần có.** Với mọi $x, y \geq 0$ ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy$; nhân hai vế với $x^2y^2 \geq 0$,

$$x^2y^2(x^2 + y^2) - 2x^3y^3 = x^2y^2(x - y)^2 \geq 0.$$

Viết hai bất đẳng thức tương tự cho cặp (y, z) và cặp (z, x) rồi cộng cả ba theo vế,

$$\begin{aligned} x^2y^2(x^2 + y^2) + y^2z^2(y^2 + z^2) + z^2x^2(z^2 + x^2) \\ \geq 2(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3). \end{aligned}$$

- **Ghép các đánh giá.** Nối hai kết quả trên,

$$x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \geq 2(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3),$$

tức là $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq 2(ab + bc + ca)$. Kết hợp với $2abc + 1 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$,

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq 2(ab + bc + ca).$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Bất đẳng thức ở bước AM–GM đòi hỏi $abc = 1$; bất đẳng thức ở bước cuối đòi hỏi $x = y = z$, tức $a = b = c$. Hai điều kiện đó cho $a = b = c = 1$, khi đó vế trái bằng $3 + 2 + 1 = 6$ và vế phải bằng $2 \cdot 3 = 6$.

Nhận xét. Đề bài này chính là Ví dụ 6.7, ở đó nó được chứng minh bằng nguyên lý Dirichlet; hai hướng giải được giữ song song để đối chiếu.

Bài 8.4. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

(APMO 2004)

Phân tích. Khai triển vế trái cho bốn nhóm: $a^2b^2c^2$, tổng $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, tổng $a^2 + b^2 + c^2$ và hằng số 8. Điểm rơi là $a = b = c = 1$, tại đó $abc = 1$ và $ab = bc = ca = 1$; vì vậy ta tách $8 = 1 + 6 + 1$ để mỗi phần hằng số ghép được với một nhóm sao cho đánh giá AM–GM tương ứng đạt đẳng thức đúng tại điểm rơi ấy. Phần bậc hai còn lại chính là bất đẳng thức của Bài 8.3.

Lời giải

- **Khai triển vế trái.** Nhân hai thừa số đầu, $(a^2 + 2)(b^2 + 2) = a^2b^2 + 2a^2 + 2b^2 + 4$; nhân tiếp với $c^2 + 2$ rồi nhóm lại,

$$\begin{aligned} (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) &= a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &\quad + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8. \end{aligned}$$

- **Tách hằng số theo điểm rơi.** Viết $8 = 1 + 6 + 1$ và phân bổ ba phần đó cho ba nhóm được xử lý dưới đây.

- **Đánh giá nhóm chứa $a^2b^2c^2$.** Theo bất đẳng thức AM–GM cho hai số $a^2b^2c^2$ và 1,

$$a^2b^2c^2 + 1 \geq 2abc.$$

• **Đánh giá nhóm chứa các tích đôi một.** Cũng theo AM–GM, $a^2b^2 + 1 \geq 2ab$, $b^2c^2 + 1 \geq 2bc$ và $c^2a^2 + 1 \geq 2ca$. Cộng ba bất đẳng thức rồi nhân hai vế với 2,

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 6 \geq 4(ab + bc + ca).$$

• **Đánh giá nhóm bậc hai còn lại.** Theo Bài 8.3 ở trên,

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca),$$

còn $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$ nên $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(ab + bc + ca)$. Cộng hai bất đẳng thức đó,

$$4(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc + 1 \geq 5(ab + bc + ca).$$

• **Cộng các đánh giá lại.** Từ hai đánh giá đầu,

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 2abc + 4(ab + bc + ca) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 1.$$

Áp dụng đánh giá thứ ba cho phần $4(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc + 1$ ở vế phải,

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 4(ab + bc + ca) + 5(ab + bc + ca) = 9(ab + bc + ca).$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Các đánh giá AM–GM đạt đẳng thức khi $abc = 1$ và $ab = bc = ca = 1$; đánh giá cuối đạt đẳng thức khi $a = b = c$. Tất cả cùng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$, lúc đó vế trái bằng $3^3 = 27$ và vế phải bằng $9 \cdot 3 = 27$.

Bài 8.5. Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \geq 5(a + b + c).$$

(Trần Nam Dũng)

Phân tích. Bất đẳng thức không thuần nhất và chứa đồng thời bậc một, bậc hai lẫn bậc ba, nên không chuyển thẳng sang p, q, r được. Ý tưởng là nhân hai vế với 6 rồi tách $48 = 3 + 45$: phần 3 ghép với $6abc$ để AM–GM đưa về $\frac{27abc}{a+b+c}$ – đúng đại lượng có mặt trong dạng (iii) của bất đẳng thức Schur; phần 45 ghép với $-30(a+b+c)$ nhờ đánh giá $30p \leq 5(p^2 + 9)$. Điểm rơi dự đoán là $a = b = c = 1$, và cả ba đánh giá vừa nêu đều đạt đẳng thức tại đó.

Lời giải

• **Loại bỏ trường hợp tầm thường.** Nếu $a = b = c = 0$ thì vế trái bằng 8 còn vế phải bằng 0, bất đẳng thức đúng. Từ đây trở đi giả sử $p = a + b + c > 0$.

• **Nhân hai vế rồi tách hằng số.** Nhân hai vế với $6 > 0$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$12(a^2 + b^2 + c^2) + 6abc + 48 \geq 30p,$$

trong đó ta viết $48 = 3 + 45$.

- **Đánh giá nhóm chứa abc .** Nếu $abc = 0$ thì bất đẳng thức

$$6abc + 3 \geq \frac{27abc}{p}$$

hiển nhiên đúng, vì vế trái bằng 3 còn vế phải bằng 0. Nếu $abc > 0$ thì theo AM–GM cho ba số $abc, abc, 1$,

$$6abc + 3 = 3(abc + abc + 1) \geq 9\sqrt[3]{(abc)^2},$$

đồng thời $p = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ cho

$$9\sqrt[3]{(abc)^2} = \frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{27abc}{p}.$$

Vậy trong mọi trường hợp $6abc + 3 \geq \frac{27abc}{p}$.

- **Đánh giá nhóm chứa p .** Vì $(p - 3)^2 \geq 0$ nên $p^2 - 6p + 9 \geq 0$, tức là

$$30p \leq 5(p^2 + 9) = 5p^2 + 45.$$

- **Ghép hai đánh giá.** Thay lần lượt hai kết quả trên,

$$\begin{aligned} 12(a^2 + b^2 + c^2) + 6abc + 48 - 30p &\geq 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27abc}{p} + 45 - 5p^2 - 45 \\ &= 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27abc}{p} - 5p^2. \end{aligned}$$

Thay tiếp $p^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$, vế phải bằng

$$7(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27abc}{a + b + c} - 10(ab + bc + ca).$$

- **Chứng minh bất đẳng thức phụ cuối cùng.** Theo dạng (iii) của bất đẳng thức Schur bậc một ở mục A,

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a + b + c} \geq 2(ab + bc + ca).$$

Mặt khác, từ đồng nhất thức

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

suy ra $4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0$. Nhân hai vế của bất đẳng thức Schur nói trên với 3 rồi cộng với bất đẳng thức vừa nêu, ta được

$$7(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27abc}{a + b + c} \geq 10(ab + bc + ca).$$

Vậy đại lượng ở bước trước không âm, và bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Điểm rơi. Cả ba đánh giá cùng đạt đẳng thức khi $a = b = c = 1$: khi đó $abc = 1$, $p = 3$, dạng (iii) của Schur thành đẳng thức và $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Lúc ấy vế trái bằng $2 \cdot 3 + 1 + 8 = 15$ và vế phải bằng $5 \cdot 3 = 15$.

Bài 8.6. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$12 + 9abc \geq 7(ab + bc + ca).$$

(Vasile Cirtoaje)

Phân tích. Giả thiết dạng tổng bình phương cho phép khử q theo p ; hệ số của r ở vế trái dương nên thay r bởi chặn dưới của Schur là hợp lý. Sau hai phép khử ấy, bài toán rút về một bất đẳng thức đa thức bậc ba theo một biến p trên đoạn $[\sqrt{3}; 3]$. Điểm rơi dự đoán là $a = b = c = 1$, ứng với $p = 3$.

Lời giải

• **Khoanh miền biến thiên của p .** Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Từ $p^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2q = 3 + 2q$ suy ra $q = \frac{p^2 - 3}{2}$. Vì $q \geq 0$ nên $p^2 \geq 3$; vì $p^2 \geq 3q = \frac{3(p^2 - 3)}{2}$ nên $p^2 \leq 9$. Vậy $\sqrt{3} \leq p \leq 3$.

• **Chặn dưới của r theo Schur.** Ta có $4q - p^2 = 2(p^2 - 3) - p^2 = p^2 - 6$, nên bất đẳng thức Schur bậc một ở dạng $9r \geq p(4q - p^2)$ cho

$$9r \geq p(p^2 - 6).$$

• **Rút về đa thức một biến.** Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $12 + 9r - 7q \geq 0$. Nhân đại lượng ở vế trái với 2 > 0 rồi thay $q = \frac{p^2 - 3}{2}$,

$$2(12 + 9r - 7q) = 24 + 18r - 7(p^2 - 3) = 45 + 18r - 7p^2.$$

Thay tiếp $18r \geq 2p(p^2 - 6)$,

$$45 + 18r - 7p^2 \geq 45 + 2p^3 - 12p - 7p^2 = 2p^3 - 7p^2 - 12p + 45.$$

• **Phân tích thành nhân tử.** Khai triển trực tiếp cho đồng nhất thức

$$2p^3 - 7p^2 - 12p + 45 = (p - 3)^2(2p + 5).$$

Với $\sqrt{3} \leq p \leq 3$ ta có $2p + 5 > 0$ và $(p - 3)^2 \geq 0$, nên vế phải không âm. Bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Đẳng thức đòi hỏi $p = 3$; kết hợp với $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ta được $q = 3$, do đó $a = b = c = 1$. Khi đó vế trái bằng $12 + 9 = 21$ và vế phải bằng $7 \cdot 3 = 21$.

Bài 8.7. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{6 - ab} + \frac{1}{6 - bc} + \frac{1}{6 - ca} \leq \frac{3}{5}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Phân tích. Ba mẫu số chứa ba tích ab, bc, ca , nên phép đổi biến tự nhiên là đặt $u = ab, v = bc, w = ca$: cả ba tổng đối xứng cơ bản của u, v, w đều biểu diễn được qua p, q, r . Sau khi quy đồng, bất đẳng thức trở thành một đa thức bậc hai theo r , và điều đáng chú ý là đa thức đó tách được thành

tổng của một bội không âm của biểu thức Schur với tích $r(1-r)$. Điều này phù hợp với việc bài toán có hai bộ điểm rơi: $(1; 1; 1)$ và $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$.

Lời giải

• **Kiểm tra dấu của các mẫu số.** Đặt $p = a + b + c = 3$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$, và $u = ab$, $v = bc$, $w = ca$. Vì a, b, c không âm nên $u, v, w \geq 0$ và

$$u + v + w = q \leq \frac{p^2}{3} = 3.$$

Do đó mỗi tích không vượt quá 3, kéo theo $6 - ab, 6 - bc, 6 - ca$ đều không nhỏ hơn 3; mọi mẫu số đều dương.

• **Tính ba tổng đối xứng của u, v, w .** Khai triển trực tiếp,

$$u + v + w = q, \quad uv + vw + wu = abc(a + b + c) = 3r, \quad uvw = (abc)^2 = r^2.$$

• **Quy đồng hai vế.** Đặt $M = (6 - u)(6 - v)(6 - w) > 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{6-u} + \frac{1}{6-v} + \frac{1}{6-w} &= \frac{(6-v)(6-w) + (6-w)(6-u) + (6-u)(6-v)}{M} \\ &= \frac{108 - 12(u+v+w) + (uv+vw+wu)}{M} = \frac{108 - 12q + 3r}{M}, \end{aligned}$$

$$M = 216 - 36(u+v+w) + 6(uv+vw+wu) - uvw = 216 - 36q + 18r - r^2.$$

Vì $M > 0$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$5(108 - 12q + 3r) \leq 3(216 - 36q + 18r - r^2),$$

tức là, sau khi rút gọn rồi chia hai vế cho 3,

$$36 - 16q + 13r - r^2 \geq 0.$$

• **Tách thành hai phần.** Khai triển trực tiếp cho đồng nhất thức

$$36 - 16q + 13r - r^2 = 4(9 - 4q + 3r) + r(1 - r).$$

• **Chứng minh từng phần không âm.** Theo bất đẳng thức Schur bậc một với $p = 3$ ta có $27 + 9r \geq 12q$, tức $9 + 3r \geq 4q$, nghĩa là $9 - 4q + 3r \geq 0$. Mặt khác theo AM-GM,

$$r = abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1,$$

và $r \geq 0$, nên $r(1-r) \geq 0$. Vậy $36 - 16q + 13r - r^2 \geq 0$ và bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Đẳng thức đòi hỏi đồng thời $9 - 4q + 3r = 0$ và $r(1-r) = 0$. Với $(a, b, c) = (1; 1; 1)$ thì $q = 3, r = 1$: cả hai điều kiện đều thoả mãn. Với $(a, b, c) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$ thì $q = \frac{9}{4}, r = 0$: cũng thoả mãn.

Kiểm tra trực tiếp, trường hợp thứ nhất về trái bằng $3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$, còn trường hợp thứ hai về trái bằng

$$\frac{1}{6-\frac{9}{4}} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{15} + \frac{1}{3} = \frac{3}{5}.$$

Bài 8.8. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab+1}{a+b} + \frac{bc+1}{b+c} + \frac{ca+1}{c+a} \geq 3.$$

(Nguyễn Mạnh Dũng)

Phân tích. Giả thiết $q = 1$ cho đồng nhất thức $(b+c)(c+a) = c^2 + q = c^2 + 1$, nhờ đó tử số sau khi quy đồng gọn lại rất nhiều và bất đẳng thức chỉ còn hai ẩn p, r dưới dạng $(p-1)(p-2) + r(p+3) \geq 0$. Dấu của $p-2$ chia bài toán thành hai trường hợp: khi $p \geq 2$ mọi số hạng đều không âm, khi $p < 2$ mới phải viện đến chặn Schur. Điểm rơi nằm ở biên, tại $(a, b, c) = (1; 1; 0)$.

Lời giải

• **Kiểm tra dấu của các mẫu số.** Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca = 1$, $r = abc$. Vì $q = 1 > 0$ nên không có hai biến nào đồng thời bằng 0, do đó $a + b, b + c, c + a$ đều dương. Ngoài ra $p^2 \geq 3q = 3$, tức $p \geq \sqrt{3}$.

• **Dùng đồng nhất thức của tích hai mẫu số.** Với mọi a, b, c ,

$$(b+c)(c+a) = c^2 + ab + bc + ca = c^2 + q = c^2 + 1.$$

Đặt $N = (a+b)(b+c)(c+a) = pq - r = p - r > 0$. Quy đồng ba phân thức theo mẫu chung N ,

$$\frac{ab+1}{a+b} + \frac{bc+1}{b+c} + \frac{ca+1}{c+a} = \frac{1}{N} \sum (ab+1)(c^2+1).$$

• **Tính tử số theo p và r .** Khai triển,

$$\sum (ab+1)(c^2+1) = \sum abc^2 + \sum ab + \sum c^2 + 3.$$

Ở đây $\sum abc^2 = ab \cdot c^2 + bc \cdot a^2 + ca \cdot b^2 = abc(c+a+b) = pr$, còn $\sum ab = q = 1$ và $\sum c^2 = p^2 - 2q = p^2 - 2$, nên tử số bằng

$$pr + 1 + (p^2 - 2) + 3 = p^2 + pr + 2.$$

Vì $N = p - r > 0$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$p^2 + pr + 2 \geq 3(p-r) \Leftrightarrow (p-1)(p-2) + r(p+3) \geq 0.$$

• **Trường hợp $p \geq 2$.** Khi đó $(p-1)(p-2) \geq 0$ và $r(p+3) \geq 0$, nên tổng ở vế trái không âm.

• **Trường hợp $\sqrt{3} \leq p < 2$.** Khi đó $4q - p^2 = 4 - p^2 > 0$, và bất đẳng thức Schur bậc một cho

$$r \geq \frac{p(4-p^2)}{9} > 0.$$

Vì $p+3 > 0$, thay chặn dưới này vào rồi nhân hai vế với $9 > 0$,

$$9[(p-1)(p-2) + r(p+3)] \geq 9(p-1)(p-2) + p(4-p^2)(p+3).$$

• **Phân tích vế phải thành nhân tử.** Khai triển trực tiếp cho đồng nhất thức

$$9(p-1)(p-2) + p(4-p^2)(p+3) = -(p-2)(p^3 + 5p^2 - 3p + 9).$$

Với $\sqrt{3} \leq p < 2$ ta có $p - 2 < 0$; đồng thời

$$p^3 + 5p^2 - 3p + 9 = p^3 + p(5p - 3) + 9 > 0$$

vì $p > \frac{3}{5}$. Do đó vế phải dương. Bất đẳng thức đúng trong cả hai trường hợp.

Điểm rơi. Đẳng thức chỉ có thể xảy ra ở trường hợp thứ nhất, khi $p = 2$ và $r = 0$. Kết hợp với $q = 1$: một biến bằng 0, chẳng hạn $c = 0$, còn $a + b = 2$ và $ab = 1$, tức $a = b = 1$. Khi đó vế trái bằng $\frac{1+1}{2} + \frac{0+1}{1} + \frac{0+1}{1} = 3$.

Bài 8.9. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(a + b + c).$$

(Việt Nam MO 2006, bảng B)

Phân tích. Ràng buộc $abc = 1$ được bảo toàn qua phép đổi biến nghịch đảo $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$, và phép đổi biến ấy biến $a + b + c$ thành $xy + yz + zx$. Sau khi đổi biến, bất đẳng thức chỉ còn là một liên hệ giữa p và q của bộ mới, mà chính bất đẳng thức Schur bậc một với $r = 1$ cung cấp. Điểm rơi dự đoán là $a = b = c = 1$.

Lời giải

• **Đổi biến nghịch đảo.** Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. Khi đó $x, y, z > 0$ và $xyz = \frac{1}{abc} = 1$; hơn nữa

$$a + b + c = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = xy + yz + zx.$$

• **Viết lại bất đẳng thức theo p và q .** Đặt $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz = 1$. Vì

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = x^2 + y^2 + z^2 = p^2 - 2q,$$

bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$p^2 - 2q + 3 \geq 2q \Leftrightarrow p^2 + 3 \geq 4q.$$

• **Áp dụng Schur bậc một.** Theo dạng (ii) ở mục A, $p^3 + 9r \geq 4pq$; với $r = 1$ đó là $p^3 + 9 \geq 4pq$. Chia hai vế cho $p > 0$,

$$p^2 + \frac{9}{p} \geq 4q.$$

• **Chặn số hạng phụ.** Theo AM–GM, $p = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$, do đó $\frac{9}{p} \leq 3$ và

$$p^2 + 3 \geq p^2 + \frac{9}{p} \geq 4q.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Đẳng thức đòi hỏi $p = 3$, tức $x = y = z = 1$, tức $a = b = c = 1$. Khi đó vế trái bằng $3 + 3 = 6$ và vế phải bằng $2 \cdot 3 = 6$.

Nhận xét. Bài 6.9 nêu cùng đề bài này với hướng giải bằng nguyên lý Dirichlet; hai cách khai thác ràng buộc $abc = 1$ đáng được đặt cạnh nhau để so sánh.

Bài 8.10. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab}.$$

(Hojoo Lee)

Phân tích. Hiệu của từng cặp số hạng tương ứng ở hai vế phân tích được thành tích, cụ thể là $\frac{1}{a} - \frac{b+c}{a^2+bc} = \frac{(a-b)(a-c)}{a^3+abc}$. Cộng ba đẳng thức đó, hiệu hai vế có đúng dạng $\sum x(a-b)(a-c)$ của bất đẳng thức Vornicu–Schur, và việc còn lại chỉ là so sánh hai trong ba hệ số sau khi sắp thứ tự các biến.

Lời giải

• **Phân tích hiệu từng cặp số hạng.** Với mọi $a, b, c > 0$, do $a^2 + bc - ab - ac = a(a-b) - c(a-b) = (a-b)(a-c)$ nên

$$\frac{1}{a} - \frac{b+c}{a^2+bc} = \frac{a^2+bc-a(b+c)}{a(a^2+bc)} = \frac{(a-b)(a-c)}{a^3+abc}.$$

• **Cộng ba đẳng thức cùng dạng.** Viết hai đẳng thức tương tự cho b và cho c rồi cộng cả ba theo vế, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a^3+abc} + \frac{(b-c)(b-a)}{b^3+abc} + \frac{(c-a)(c-b)}{c^3+abc} \geq 0.$$

• **Sắp thứ tự và đặt hệ số.** Vế trái đối xứng đối với a, b, c , nên không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Đặt

$$x = \frac{1}{a^3+abc}, \quad y = \frac{1}{b^3+abc}, \quad z = \frac{1}{c^3+abc};$$

khi đó $x, y, z > 0$ và vế trái đúng bằng $x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b)$.

• **So sánh hai hệ số.** Từ $b \geq c > 0$ suy ra $b^3 + abc \geq c^3 + abc > 0$, do đó $z \geq y$. Theo điều kiện 1 của bất đẳng thức Vornicu–Schur ở mục A, tổng trên không âm. Bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$; khi đó mỗi phân thức ở vế phải bằng $\frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}$, nên hai vế cùng bằng $\frac{3}{a}$.

Nhận xét. Bài 5.8 nêu cùng bất đẳng thức này, viết theo chiều ngược lại, với hướng giải bằng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz.

Bài 8.11*. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} \geq \frac{3}{2}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Phân tích. Hằng số $\frac{3}{2}$ ở vế phải tách được thành tổng của ba đại lượng $\frac{2a(b+c)-bc}{2(ab+bc+ca)}$, vì tổng ba tử số đúng bằng $3(ab+bc+ca)$. Trừ theo từng cặp, hiệu hai vế trở thành một tổng dạng $\sum x(a-b)(a-c)$ nhân với một hệ số dương, và bất đẳng thức Vornicu–Schur giải quyết nốt phần còn lại. Điểm rơi dự đoán là $a = b = c = 1$.

Lời giải

• **Tách vế phải thành ba phần.** Đặt $q = ab + bc + ca > 0$. Khai triển trực tiếp,

$$[2a(b+c)-bc] + [2b(c+a)-ca] + [2c(a+b)-ab] = 4q - q = 3q,$$

do đó

$$\frac{2a(b+c)-bc}{2q} + \frac{2b(c+a)-ca}{2q} + \frac{2c(a+b)-ab}{2q} = \frac{3q}{2q} = \frac{3}{2}.$$

• **Tính hiệu của từng cặp số hạng.** Với $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$,

$$\frac{a}{a+bc} - \frac{2a(b+c)-bc}{2q} = \frac{2aq - (a+bc)[2a(b+c)-bc]}{2q(a+bc)}.$$

Khai triển tử số,

$$\begin{aligned} & 2a(ab+bc+ca) - (a+bc)(2ab+2ac-bc) \\ &= 2a^2b + 2abc + 2a^2c - (2a^2b + 2a^2c - abc + 2ab^2c + 2abc^2 - b^2c^2) \\ &= 3abc - 2abc(b+c) + b^2c^2. \end{aligned}$$

Thay $3 = a + b + c$ vào số hạng đầu rồi rút gọn,

$$\begin{aligned} 3abc - 2abc(b+c) + b^2c^2 &= a^2bc + abc(b+c) - 2abc(b+c) + b^2c^2 \\ &= bc[a^2 - a(b+c) + bc] = bc(a-b)(a-c). \end{aligned}$$

• **Đưa về dạng Vornicu–Schur.** Nhân cả tử lẫn mẫu của phân thức thu được với $a > 0$,

$$\frac{a}{a+bc} - \frac{2a(b+c)-bc}{2q} = \frac{abc}{2q} \cdot \frac{(a-b)(a-c)}{a^2+abc}.$$

Viết hai đẳng thức tương tự cho b và cho c rồi cộng cả ba theo vế, hiệu hai vế của bất đẳng thức cần chứng minh bằng

$$\frac{abc}{2q} \left[\frac{(a-b)(a-c)}{a^2+abc} + \frac{(b-c)(b-a)}{b^2+abc} + \frac{(c-a)(c-b)}{c^2+abc} \right].$$

Vì $\frac{abc}{2q} > 0$, ta chỉ còn phải chứng minh tổng trong ngoặc vuông không âm.

• **Sắp thứ tự và so sánh hai hệ số.** Tổng trong ngoặc vuông đối xứng đối với a, b, c , nên không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Đặt

$$x = \frac{1}{a^2 + abc}, \quad y = \frac{1}{b^2 + abc}, \quad z = \frac{1}{c^2 + abc}.$$

Từ $b \geq c > 0$ suy ra $b^2 + abc \geq c^2 + abc > 0$, do đó $z \geq y$. Theo điều kiện 1 của bất đẳng thức Vornicu–Schur ở mục A,

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Điểm rơi. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$; kết hợp với $a + b + c = 3$ được $a = b = c = 1$. Khi đó mỗi phân thức ở vế trái bằng $\frac{1}{2}$ và vế trái bằng $\frac{3}{2}$.

Bài 8.12*. Cho các số thực không âm a, b, c , trong đó không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2} \geq a+b+c.$$

(Darij Grinberg)

Phân tích. Mỗi phân thức có tử số là một tích, nên viết tử số thành bình phương rồi dùng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel sẽ gộp cả ba phân thức về một. Bất đẳng thức thu được sau đó thuần nhất và đối xứng; chuyển sang p, q, r thì hiệu hai vế rút gọn đúng thành $r(2p^3 + 9r - 7pq)$, mà $2p^3 + 9r \geq 7pq$ là một ràng buộc đã có ở mục A. Trường hợp có một biến bằng 0 phải tách riêng, vì khi ấy một mẫu số của dạng Engel bằng 0.

Lời giải

• **Trường hợp có một biến bằng 0.** Do tính đối xứng, giả sử $c = 0$. Khi đó a và b không đồng thời bằng 0; hơn nữa nếu một trong hai bằng 0 thì cùng với c ta có hai số cùng bằng 0, trái giả thiết. Vậy $a, b > 0$ và vế trái bằng

$$\frac{a^2b}{b^2} + \frac{b^2a}{a^2} + 0 = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}.$$

Nhân bất đẳng thức cần chứng minh với $ab > 0$, nó tương đương với

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b),$$

tức $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$, hiển nhiên đúng.

• **Áp dụng Cauchy–Schwarz dạng Engel.** Từ đây giả sử $a, b, c > 0$. Viết lại mỗi phân thức,

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2} = \frac{[a^2(b+c)]^2}{a^2(b+c)(b^2+c^2)},$$

rồi áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel cho ba phân thức đó,

$$\sum \frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2} \geq \frac{[\sum a^2(b+c)]^2}{\sum a^2(b+c)(b^2+c^2)}.$$

- **Quy về một bất đẳng thức đa thức.** Mẫu số ở vế phải dương, nên bất đẳng thức đã cho sẽ đúng nếu

$$\left[\sum a^2(b+c) \right]^2 \geq (a+b+c) \sum a^2(b+c)(b^2+c^2).$$

- **Chuyển sang bộ ba p, q, r .** Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Khai triển trực tiếp cho đồng nhất thức

$$\left[\sum a^2(b+c) \right]^2 - p \sum a^2(b+c)(b^2+c^2) = r(2p^3 + 9r - 7pq).$$

- **Dùng ràng buộc có sẵn.** Theo ràng buộc $2p^3 + 9r \geq 7pq$ ở mục A và $r > 0$, vế phải không âm. Vậy bất đẳng thức đa thức ở bước trước đúng, và bài toán được giải quyết.

Điểm rơi. Đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel đòi hỏi $b^2 + c^2 = c^2 + a^2 = a^2 + b^2$, tức $a = b = c$; khi đó, với $a = b = c = t$ ta có $2p^3 + 9r - 7pq = 54t^3 + 9t^3 - 63t^3 = 0$ nên đánh giá thứ hai cũng thành đẳng thức, và hai vế cùng bằng $3t$. Ngoài ra, ở trường hợp biên đẳng thức còn xảy ra khi $a = b, c = 0$ cùng các hoán vị: chẳng hạn với $(a, b, c) = (1; 1; 0)$ hai vế cùng bằng 2.

CHƯƠNG 9

Kỹ thuật phân tích bình phương S.O.S

09

Đưa bất đẳng thức ba biến về tổng ba bình phương có hệ số, rồi chỉ còn phải xét dấu của ba hệ số ấy sau khi đã sắp thứ tự các biến.

Hầu hết các bất đẳng thức ba biến trong chương trình chuyên có dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Điều đó gợi ý rằng hiệu giữa hai vế phải triệt tiêu khi ba biến bằng nhau, nên nó có thể viết được thành một tổ hợp của ba bình phương $(a - b)^2, (b - c)^2, (c - a)^2$ với các hệ số là những biểu thức của a, b, c . Cách viết ấy được gọi là *phân tích bình phương*, viết tắt theo thông lệ quốc tế là S.O.S (*Sum Of Squares*). Sau khi phân tích xong, bài toán chuyển thành một bài toán mới đơn giản hơn nhiều: xét dấu ba hệ số. Chương này trình bày bảng các phân tích cơ sở, các tiêu chuẩn về dấu đủ dùng ở mức thi học sinh giỏi, và kỹ thuật sắp thứ tự biến trước khi xét dấu.

A. Kiến thức trọng tâm

Dạng S.O.S và quy ước gọi tên

Cho biểu thức $F(a, b, c)$ thỏa mãn $F(t, t, t) = 0$ với mọi t . Nếu tìm được ba biểu thức S_a, S_b, S_c của a, b, c sao cho

$$F(a, b, c) = S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2,$$

thì ta nói F có một *dạng* S.O.S. Khi đó bất đẳng thức $F \geq 0$ đúng nếu S_a, S_b, S_c đồng thời không âm. Bộ ba hệ số ấy nói chung không được xác định duy nhất bởi F ; trong sách, bộ hệ số cụ thể lập được ở mỗi lời giải được gọi là *dạng chính tắc* S.O.S, và đó chỉ là một quy ước gọi tên nội bộ.

- **Quy ước tên chỉ số.** Hệ số đứng trước $(b - c)^2$ mang tên S_a , nghĩa là chỉ số ghi tên biến *không* xuất hiện trong bình phương tương ứng. Quy ước này giúp các tiêu chuẩn được phát biểu gọn hơn.
- **Vì sao chính tắc chỉ là quy ước.** Một biểu thức F có thể có nhiều bộ hệ số S.O.S khác nhau. Thật vậy, với mọi a, b, c ta có đồng nhất thức

$$(a - b)(a - c)(b - c)^2 - (a - b)(b - c)(c - a)^2 + (b - c)(a - c)(a - b)^2 = 0,$$

vì vế trái bằng $(a - b)(b - c)(a - c)[(b - c) - (a - c) + (a - b)]$ và ngoặc vuông bằng 0. Cộng ba hệ số ấy vào S_a, S_b, S_c ta được một dạng S.O.S khác của cùng một F . Vì vậy chữ *chính tắc* ở đây chỉ có nghĩa là bộ hệ số vừa lập được trong lời giải đang xét, không hàm ý tính duy nhất.

- **Ba bước làm việc.** Thứ nhất, dùng bảng phân tích cơ sở để đưa hiệu hai vế về dạng chính tắc. Thứ hai, sắp thứ tự các biến, chẳng hạn $a \geq b \geq c$; điều này luôn làm được với bất đẳng thức đối xứng. Thứ ba, xét dấu S_a, S_b, S_c và áp dụng một tiêu chuẩn thích hợp.

• **Vì sao phải sắp thứ tự.** Trong đa số bài toán, ba hệ số không đồng thời không âm; thường chỉ có một hệ số có thể âm, và đó là hệ số ứng với biến lớn nhất hoặc biến nhỏ nhất. Sau khi sắp thứ tự, ta biết rõ hệ số nào có nguy cơ âm và bù trừ nó bằng hai hệ số còn lại. Với bất đẳng thức chỉ có tính hoán vị vòng quanh, hiệu hai vế nói chung không đối xứng, nên ngoài ba bình phương còn xuất hiện tích $(a-b)(b-c)(c-a)$. Ta thống nhất các ký hiệu

$$D = (a-b)(b-c)(c-a), \quad P = (a+b)(b+c)(c+a), \quad U = a^2b + b^2c + c^2a, \quad V = ab^2 + bc^2 + ca^2.$$

Bảng phân tích cơ sở

Phân đối xứng. Với mọi số thực a, b, c :

$$(A1) \quad a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2];$$

$$(A2) \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2];$$

$$(A3) \quad (a+b)(b+c)(c+a) - 8abc = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2;$$

$$(A4) \quad a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) \\ = \frac{1}{2}[(b+c-a)(b-c)^2 + (c+a-b)(c-a)^2 + (a+b-c)(a-b)^2].$$

Với a, b, c dương:

$$(A5) \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \right].$$

Phân hoán vị. Với mọi số thực a, b, c :

$$(H1) \quad V - U = D; \quad (H2) \quad P = U + V + 2abc;$$

$$(H3) \quad ab^3 + bc^3 + ca^3 - a^3b - b^3c - c^3a = (a+b+c)D;$$

$$(H4) \quad V - 3abc = \frac{1}{2}[D + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2].$$

Với a, b, c dương:

$$(H5) \quad \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = -\frac{D}{P};$$

$$(H6) \quad \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{D}{P} \right).$$

• **Ghi chú.** Vế trái của (A3) còn viết được là $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) - 6abc$, vì $(a+b)(b+c)(c+a) = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc$. Đẳng thức (A4) chính là dạng S.O.S của bất đẳng thức Schur bậc một; nó cho thấy ngay vì sao bất đẳng thức đó vẫn đúng dù một trong ba hệ số $b+c-a, c+a-b, a+b-c$ có thể âm.

• **Cách dùng.** Hai đẳng thức (H1) và (H2) giữ vai trò then chốt: chúng cho phép chuyển qua lại giữa ba đại lượng U, V, P chỉ nhờ một mình D . Hai đẳng thức (H5) và (H6) biến những tổng phân thức hoán vị quen thuộc thành một hằng số cộng với bội của D/P , nhờ đó bài toán rút gọn về việc so sánh các bội của D .

Bổ đề 9.1. (Hai phép quy về dạng chính tắc) Với mọi số thực A, B, C và a, b, c :

$$\begin{aligned} & A(a-b)^2 + B(b-c)^2 + C(c-a)^2 \\ &= (A+C)(a-b)(a-c) + (A+B)(b-c)(b-a) + (B+C)(c-a)(c-b); \\ & A(2a-b-c)^2 + B(2b-c-a)^2 + C(2c-a-b)^2 \\ &= (4A+B+C)(a-b)(a-c) + (A+4B+C)(b-c)(b-a) \\ & \quad + (A+B+4C)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

• **Chứng minh.** Cả hai đẳng thức đều kiểm được bằng cách quy về hai biến hiệu.

• **Đưa về hai biến hiệu.** Đặt $u = a - b, v = b - c$, khi đó $c - a = -(u + v), a - c = u + v, b - a = -u, c - b = -v$.

• **Đẳng thức thứ nhất.** Vế trái bằng $(A+C)u^2 + 2Cuv + (B+C)v^2$. Vế phải bằng

$$(A+C)u(u+v) - (A+B)uv + (B+C)v(u+v) = (A+C)u^2 + (A+C-A-B+B+C)uv + (B+C)v^2,$$

tức đúng bằng $(A+C)u^2 + 2Cuv + (B+C)v^2$.

• **Đẳng thức thứ hai.** Ta viết $2a - b - c = (a - b) + (a - c)$ nên

$$\sum A(2a - b - c)^2 = (A+B)(a-b)^2 + (B+C)(b-c)^2 + (C+A)(c-a)^2 + 2 \sum A(a-b)(a-c),$$

rồi áp dụng đẳng thức thứ nhất cho ba hệ số $A+B, B+C, C+A$.

• **Ý nghĩa.** Phép biến đổi thứ nhất nối dạng chính tắc S.O.S với dạng $\sum x(a-b)(a-c)$; phép thứ hai đặc biệt hữu ích khi bài toán có ràng buộc $a+b+c$ cho trước, vì khi $a+b+c = 3$ ta có $3(a-1) = 2a-b-c$.

Bổ đề 9.2. (Tiêu chuẩn về dấu của S_a, S_b, S_c) Giả sử $a \geq b \geq c$ và đặt $x = a - b \geq 0, y = b - c \geq 0$. Khi đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 = (S_b + S_c)x^2 + 2S_bxy + (S_a + S_b)y^2.$$

Do đó tổng trên không âm nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

(T1) $S_b \geq 0, S_a + S_b \geq 0, S_b + S_c \geq 0$;

(T2) $S_a + S_b \geq 0, S_b + S_c \geq 0$ và $(S_a + S_b)(S_b + S_c) \geq S_b^2$;

(T3) $c \geq 0, b > 0, S_b \geq 0, S_c \geq 0$ và $b^2S_a + a^2S_b \geq 0$.

Ngoài ra, với biểu thức viết ở dạng liên hợp qua Bổ đề 9.1 ta có tiêu chuẩn

(T4) nếu $a \geq b \geq c$ và $x, y, z \geq 0$ mà $x \geq y$ hoặc $z \geq y$ thì

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0.$$

• **Chứng minh đẳng thức.** Vì $c - a = -(x + y)$ nên $(c - a)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; thay vào rồi nhóm theo x^2, xy, y^2 ta được ngay kết quả.

• **Chứng minh (T1).** Cả ba số hạng $(S_b + S_c)x^2, 2S_bxy, (S_a + S_b)y^2$ đều không âm.

• **Chứng minh (T2).** Nếu $S_b \geq 0$ thì đã xong theo (T1). Nếu $S_b < 0$, theo bất đẳng thức AM-GM,

$$(S_b + S_c)x^2 + (S_a + S_b)y^2 \geq 2\sqrt{(S_a + S_b)(S_b + S_c)}xy \geq 2|S_b|xy = -2S_bxy.$$

• **Chứng minh (T3).** Từ $a \geq b \geq c \geq 0$ suy ra $c(a-b) \geq 0$, tức $b(a-c) \geq a(b-c)$, do đó $(a-c)^2 \geq \frac{a^2}{b^2}(b-c)^2$. Nhân bất đẳng thức này với $S_b \geq 0$ rồi cộng thêm $S_a(b-c)^2$ ta được

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 \geq \frac{b^2 S_a + a^2 S_b}{b^2} (b-c)^2 \geq 0,$$

còn $S_c(a-b)^2 \geq 0$. Cộng lại được điều phải chứng minh.

• **Chứng minh (T4).** Trong mỗi trường hợp, ta tách về trái thành hai số hạng không âm.

• **Trường hợp $x \geq y$.** Viết về trái thành $z(a-c)(b-c) + (a-b)[x(a-c) - y(b-c)]$. Vì $a-c \geq b-c \geq 0$ nên $x(a-c) \geq y(b-c)$, do đó cả hai số hạng đều không âm.

• **Trường hợp $z \geq y$.** Ta viết về trái thành $x(a-b)(a-c) + (b-c)[z(a-c) - y(a-b)]$ và lập luận tương tự.

Dạng S.O.S hoán vị vòng, ký hiệu riêng S.O.C

Với bất đẳng thức hoán vị vòng quanh, dạng thích hợp là

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq S(a-b)(b-c)(c-a).$$

Cách viết này được gọi là *dạng S.O.S hoán vị vòng*; để cho gọn, từ đây trong sách ta ký hiệu nó là S.O.C. Cần lưu ý S.O.C là ký hiệu riêng của sách, không phải ký hiệu thông dụng như S.O.S; điểm khác biệt so với dạng S.O.S đối xứng nằm ở vế phải, nơi xuất hiện thêm tích $D = (a-b)(b-c)(c-a)$. Vì hai vế chỉ không đổi qua phép hoán vị vòng quanh, sáu thứ tự có thể có của ba biến rút về hai lớp: lớp $a \geq b \geq c$ (gồm cả $b \geq c \geq a$ và $c \geq a \geq b$) ứng với $D \leq 0$, và lớp $c \geq b \geq a$ (gồm cả $b \geq a \geq c$ và $a \geq c \geq b$) ứng với $D \geq 0$. Nếu $S \geq 0$ và vế trái không âm thì lớp thứ nhất là hiển nhiên, vì khi đó vế phải không dương. Vậy chỉ còn phải xét $c \geq b \geq a$. Đặt $x = b-a \geq 0$, $y = c-b \geq 0$, khi đó $c-a = x+y$, $D = xy(x+y)$ và

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 = (S_b + S_c)x^2 + 2S_b xy + (S_a + S_b)y^2.$$

Do đó bất đẳng thức đúng nếu $S_a + S_b \geq 0$, $S_b + S_c \geq 0$ và

$$2\sqrt{(S_a + S_b)(S_b + S_c)} + 2S_b \geq S(c-a).$$

• **Phép đặt biến khử tham số.** Khi các hệ số S_a, S_b, S_c cộng kênh, ta đặt

$$b = a + x, \quad c = a + x + y \quad (x, y \geq 0),$$

ứng với thứ tự $c \geq b \geq a$. Với phép đặt này, mọi hiệu của ba biến đều chỉ phụ thuộc x và y . Trong các bài bậc ba của chương này, sau khi khai triển, biến a chỉ còn xuất hiện tuyến tính, tức hiệu hai vế có dạng

$$a G(x, y) + H(x, y).$$

Vì $a \geq 0$, nếu kiểm được thêm rằng $G(x, y) \geq 0$ với mọi $x, y \geq 0$ thì $a G(x, y) \geq 0$, nên có thể cho $a = 0$ mà không làm yếu bất đẳng thức; phần $a G(x, y)$ bị bỏ đi chính là phần dư dùng để làm chặt bài toán.

• **Điều kiện phải kiểm trước khi cho $a = 0$.** Việc xét dấu của G là bắt buộc và phải làm trước khi cho $a = 0$. Nếu G đổi dấu trên miền $x, y \geq 0$ thì $a G(x, y)$ có thể âm, khi ấy $a G(x, y) + H(x, y) \leq H(x, y)$; chứng minh được $H \geq 0$ chỉ cho một mệnh đề *yếu hơn*, không kéo theo bất đẳng thức ban đầu, nên

phép cho $a = 0$ không hợp lệ. Ngoài ra, với những biểu thức bậc cao hơn, biến a nói chung không còn xuất hiện tuyến tính sau phép đặt, nên lập luận trên không dùng được.

B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa

Ví dụ 9.1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (\text{bất đẳng thức Nesbitt}).$$

Phân tích. Hiệu hai vế triệt tiêu tại $a = b = c$, lại đối xứng hoàn toàn, nên đưa được về dạng chính tắc S.O.S. Ta thiết lập phân tích (A5) bằng cách trừ $\frac{1}{2}$ vào từng phân thức rồi ghép các số hạng theo từng hiệu.

Lời giải

• **Tách từng phân thức.** Với mỗi hạng tử,

$$\frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} = \frac{2a-b-c}{2(b+c)} = \frac{(a-b) + (a-c)}{2(b+c)}.$$

• **Ghép theo từng hiệu.** Cộng ba đẳng thức tương tự rồi gom hai số hạng cùng chứa $a-b$, ta được

$$\frac{a-b}{2(b+c)} + \frac{b-a}{2(c+a)} = \frac{a-b}{2} \cdot \frac{(c+a) - (b+c)}{(b+c)(c+a)} = \frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}.$$

• **Dạng chính tắc.** Làm tương tự với hai cặp còn lại,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \right].$$

• **Kết luận.** Cả ba hệ số đều dương nên vế phải không âm; ở đây ba hệ số cùng dấu nên không cần sắp thứ tự biến. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Phân tích vừa lập chính là (A5) trong bảng cơ sở và sẽ còn được dùng lại nhiều lần.

Nhận xét. Đây là lần thứ năm và cũng là lần cuối bất đẳng thức Nesbitt được chứng minh trong sách; bốn lời giải trước nằm ở Ví dụ 1.8 (biến đổi tương đương), Ví dụ 2.8 (AM–GM với điểm rơi), Ví dụ 5.1 (dạng Engel) và Ví dụ 7.6 (U.C.T). Đối chiếu năm lời giải là cách ngắn nhất để thấy phạm vi áp dụng của từng kỹ thuật.

Ví dụ 9.2*. Cho a, b, c là các số thực không âm, trong đó không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

Phân tích. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$ và cả tại $a = b, c = 0$. Với hai điểm rơi cách xa nhau như vậy, không nên kỳ vọng cả ba hệ số của dạng chính tắc đều không âm. Phân tích cụ thể dưới đây cho thấy S_a thật sự có thể âm, chẳng hạn tại $(a, b, c) = (10, 1, 1)$ thì $S_a = -178$; do đó cần sắp thứ

tự biến rồi dùng tiêu chuẩn (T3). Hai hạng tử của vế trái đều nằm sẵn trong bảng cơ sở: hạng tử đầu dùng (A1), hạng tử sau dùng (A3).

Điểm rơi. $a = b = c$, và $a = b, c = 0$ cùng các hoán vị.

Lời giải

Đặt $q = ab + bc + ca$ và $P = (a + b)(b + c)(c + a)$.

• **Tách hai phần.** Theo (A1) và (A3),

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{q} - 1 = \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2q}, \quad 1 - \frac{8abc}{P} = \frac{a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2}{P}.$$

• **Dạng chính tắc.** Trừ hai đẳng thức trên cho nhau, vế trái trừ 2 bằng

$$\frac{S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2}{2qP},$$

trong đó, sau khi quy đồng và dùng $P = (a + b + c)q - abc$,

$$S_a = q(b + c - a) - abc, \quad S_b = q(c + a - b) - abc, \quad S_c = q(a + b - c) - abc.$$

• **Sắp thứ tự biến.** Do biểu thức đối xứng, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$; khi đó $b > 0$, vì nếu $b = 0$ thì $c = 0$, trái với giả thiết không có hai số nào đồng thời bằng 0. Ta có

$$S_c = q(a + b - c) - abc \geq ab(a + b - c) - abc = ab(a + b - 2c) \geq 0,$$

vì $q \geq ab$ và $a + b - c \geq 0$. Tiếp theo,

$$S_b = q(a - b) + qc - abc = q(a - b) + c(q - ab) = q(a - b) + c^2(a + b) \geq 0.$$

• **Kiểm tiêu chuẩn (T3) của Bổ đề 9.2.** Chỉ còn phải kiểm $b^2S_a + a^2S_b \geq 0$. Trước hết

$$a^2(c + a - b) + b^2(b + c - a) = c(a^2 + b^2) + (a^3 + b^3) - ab(a + b) = c(a^2 + b^2) + (a + b)(a - b)^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} b^2S_a + a^2S_b &= q[c(a^2 + b^2) + (a + b)(a - b)^2] - abc(a^2 + b^2) \\ &= c(a^2 + b^2)(q - ab) + q(a + b)(a - b)^2 \\ &= c^2(a + b)(a^2 + b^2) + q(a + b)(a - b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

• **Kết luận.** Theo (T3), tổng $S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2$ không âm, nên bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$, hoặc khi hai biến bằng nhau và biến còn lại bằng 0.

Nhận xét. Với những bài có hai điểm rơi như trên, tiêu chuẩn (T3) thường là công cụ thích hợp: nó cho phép hệ số ứng với biến lớn nhất mang dấu âm, miễn là được hai hệ số kia bù lại theo trọng số a^2, b^2 .

Ví dụ 9.3. Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh bất đẳng

thức

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 9 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2) \quad (\text{Nguyễn Thúc Vũ Hoàng}).$$

Phân tích. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$ và cả tại $a = 0, b = c = \frac{3}{2}$. Vì có hai điểm rơi nên phép đánh giá từng biến một cách độc lập nói chung không đủ. Ta tách hiệu hai vế thành ba số hạng dạng $(t - 1)^2(2t - 1)$ bằng một *đồng nhất thức*, rồi dùng phép quy về dạng chính tắc thứ hai của Bổ đề 9.1.

Điểm rơi. $a = b = c = 1$; và $a = 0, b = c = \frac{3}{2}$ cùng các hoán vị.

Lời giải

• **Đồng nhất thức một biến.** Với mọi số thực t ta có

$$2t^3 - 5t^2 + 4t - 1 = (t - 1)^2(2t - 1),$$

tức là $2t^3 + 3 - 5t^2 = (t - 1)^2(2t - 1) - 4(t - 1)$.

• **Cộng ba đồng nhất thức.** Áp dụng cho $t = a, t = b, t = c$ rồi cộng lại, chú ý $a + b + c - 3 = 0$:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 9 - 5(a^2 + b^2 + c^2) = (a - 1)^2(2a - 1) + (b - 1)^2(2b - 1) + (c - 1)^2(2c - 1).$$

• **Quy về dạng chính tắc.** Vì $3(a - 1) = 3a - (a + b + c) = 2a - b - c$, nhân hai vế với 9 ta được

$$9 \sum (a - 1)^2(2a - 1) = \sum (2a - b - c)^2(2a - 1),$$

trong đó tổng lấy theo hoán vị vòng quanh. Áp dụng Bổ đề 9.1 với $A = 2a - 1, B = 2b - 1, C = 2c - 1$ và chú ý

$$4A + B + C = 8a - 4 + (2b - 1) + (2c - 1) = 8a + 2(3 - a) - 6 = 6a,$$

ta thu được

$$\sum (2a - b - c)^2(2a - 1) = 6[a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b)].$$

• **Kết luận.** Do biểu thức đối xứng, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Khi đó ba hệ số $6a, 6b, 6c$ không âm và $6a \geq 6b$, nên theo tiêu chuẩn (T4) của Bổ đề 9.2 tổng trên không âm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$, hoặc khi một biến bằng 0 và hai biến còn lại bằng $\frac{3}{2}$.

Nhận xét. Phép quy về dạng chính tắc thứ hai đặc biệt hợp với các bài có ràng buộc $a + b + c$ cho trước: mọi hiệu $a - 1$ đều biến thành $2a - b - c$, và bài toán quy đúng về dạng của tiêu chuẩn (T4). Đề bài này đã được giải ở Ví dụ 8.1 bằng phương pháp p, q, r , nơi nó rút gọn thành đúng bất đẳng thức Schur bậc một; hai lời giải được giữ lại cạnh nhau để đối chiếu hai cách khai thác cùng một bất đẳng thức nền.

Ví dụ 9.4*. Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh bất đẳng thức

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \leq 4.$$

Phân tích. Về trái chỉ có tính hoán vị vòng quanh, nên ở đây ta dùng dạng S.O.C. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$ và tại $(a, b, c) = (0, 1, 2)$; điểm rơi thứ hai lệch hẳn khỏi đường chéo, báo hiệu rằng sau khi đặt $b = a + x, c = a + x + y$ ta sẽ phải cho $a = 0$ và $x = y$.

Điểm rơi. $a = b = c = 1$; và $(a, b, c) = (0, 1, 2)$ cùng các hoán vị vòng quanh.

Lời giải

Vì hai vế thuần nhất hoá được, bất đẳng thức tương đương với

$$4(a + b + c)^3 \geq 27(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc).$$

Đặt $p = a + b + c$ và giữ nguyên các ký hiệu U, V, P, D ở mục A.

• **Trường hợp $a \geq b \geq c$.** Khi đó $D \leq 0$, mà theo (H1) thì $V - U = D$, nên $V \leq U$. Kết hợp với (H2),

$$V + abc \leq \frac{U + V}{2} + abc = \frac{P}{2}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM–GM,

$$P = (a + b)(b + c)(c + a) \leq \left(\frac{(a + b) + (b + c) + (c + a)}{3} \right)^3 = \frac{8p^3}{27}.$$

Do đó $27(V + abc) \leq \frac{27P}{2} \leq 4p^3$.

• **Trường hợp $c \geq b \geq a$.** Dùng (A2), (A3) và (H1), ta phân tích

$$4p^3 - 27(V + abc) = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) - \frac{3}{2}[(a + b)(b + c)(c + a) - 8abc] + \frac{27}{2}(U - V),$$

và sau khi nhân hai vế với 2 rồi thay các phân tích cơ sở vào,

$$2[4p^3 - 27(V + abc)] = S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2 - 27D,$$

trong đó $S_a = a + 4b + 4c, S_b = 4a + b + 4c, S_c = 4a + 4b + c$.

• **Đặt biến.** Với $c \geq b \geq a$, đặt $b = a + x, c = a + x + y$ ($x, y \geq 0$). Khi đó $b - a = x, c - b = y, c - a = x + y, D = xy(x + y)$, và một phép khai triển trực tiếp cho

$$2[4p^3 - 27(V + abc)] = 18a(x^2 + xy + y^2) + 2(5x^3 + 4y^3 - 6x^2y - 3xy^2).$$

• **Kết thúc.** Số hạng đầu không âm. Với số hạng sau, theo bất đẳng thức AM–GM,

$$2(x^3 + x^3 + y^3) \geq 6x^2y, \quad x^3 + y^3 + y^3 \geq 3xy^2,$$

cộng lại được $5x^3 + 4y^3 \geq 6x^2y + 3xy^2$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 0$, tức $a = b = c = 1$; hoặc khi $a = 0$ và $x = y$, tức $(a, b, c) = (0, 1, 2)$ cùng các hoán vị vòng quanh.

Nhận xét. Phần $18a(x^2 + xy + y^2)$ bị bỏ đi chính là phần dư. Giữ lại nó, ta nhận được kết quả chặt hơn: nếu $k = \min\{a, b, c\}$ và $t = \max\{a, b, c\}$ thì $4(a + b + c)^3 \geq 27(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc) + \frac{27}{4}k(t - k)^2$.

Ví dụ 9.5. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc + |(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

Phân tích. Cả hai vế không đổi khi hoán vị các biến, nên có thể sắp thứ tự tùy ý. Vế trái trừ abc đã có sẵn phân tích (A2); việc còn lại là so sánh tổng ba bình phương với tích D , và đó đúng là nội dung của một đánh giá AM–GM đơn giản.

Điểm rơi. $a = b = c$.

Lời giải

Do vế trái đối xứng và vế phải không đổi khi hoán vị, ta giả sử $c \geq b \geq a \geq 0$ và đặt $x = b - a \geq 0$, $y = c - b \geq 0$. Khi đó

$$(a-b)(b-c)(c-a) = (-x)(-y)(x+y) = xy(x+y) \geq 0,$$

nên dấu giá trị tuyệt đối có thể bỏ đi.

• **Dùng phân tích (A2).** Bất đẳng thức tương đương với $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 3xy(x+y)$, tức

$$\frac{a+b+c}{2} \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right] \geq 3xy(x+y).$$

• **Đánh giá tổng bình phương.** Vì $c - a = x + y$ nên

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 2(x^2 + xy + y^2) \geq 6xy,$$

do $x^2 + xy + y^2 - 3xy = (x-y)^2 \geq 0$.

• **Kết luận.** Từ hai đánh giá trên, chỉ còn phải chứng minh

$$3(a+b+c)xy \geq 3xy(x+y) = 3xy(c-a),$$

tức là $a+b+c \geq c-a$, hiển nhiên đúng vì tương đương với $2a+b \geq 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Bất đẳng thức vừa chứng minh mạnh hơn dạng thường gặp với hệ số $\frac{3}{4}$ ở vế phải. Có thể hỏi hệ số 1 đứng trước $|(a-b)(b-c)(c-a)|$ đã lớn nhất chưa. Nếu thay nó bằng hằng số k thì tại $(a, b, c) = (3, 1, 0)$ bất đẳng thức trở thành $\frac{28}{3} \geq 6k$, nên mọi k dùng được đều thỏa $k \leq \frac{14}{9}$. Vậy hằng số tốt nhất nằm trong đoạn $[1; \frac{14}{9}]$; xác định chính xác giá trị ấy đòi hỏi khảo sát hàm số một biến, vượt ra ngoài phạm vi chương.

Ví dụ 9.6. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{8x}{x+y} + \frac{8y}{y+z} + \frac{8z}{z+x} + \frac{2(xy^2 + yz^2 + zx^2 + xyz)}{x^2y + y^2z + z^2x + xyz} \geq 14.$$

Phân tích. Cả hai nhóm ở vế trái đều là tổng hoán vị vòng quanh và đều đo được bằng một mình D : nhóm đầu qua (H6), nhóm sau qua (H1). Nếu các hệ số ăn khớp thì hiệu hai vế sẽ rút gọn thành một bình phương đúng của D .

Điểm rơi. Khi trong ba số có hai số bằng nhau.

Lời giải

Giữ nguyên các ký hiệu $U = x^2y + y^2z + z^2x$, $V = xy^2 + yz^2 + zx^2$, $P = (x + y)(y + z)(z + x)$ và $D = (x - y)(y - z)(z - x)$; ngoài ra ký hiệu L là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh.

• **Nhóm thứ nhất.** Theo (H6),

$$\frac{8x}{x+y} + \frac{8y}{y+z} + \frac{8z}{z+x} = 8 \cdot \frac{1}{2} \left(3 - \frac{D}{P} \right) = 12 - \frac{4D}{P}.$$

• **Nhóm thứ hai.** Theo (H1) ta có $V - U = D$, do đó

$$\frac{2(V + xyz)}{U + xyz} = 2 + \frac{2(V - U)}{U + xyz} = 2 + \frac{2D}{U + xyz}.$$

• **Rút gọn.** Cộng hai kết quả trên rồi trừ 14,

$$L - 14 = \frac{2D}{U + xyz} - \frac{4D}{P} = \frac{2D[P - 2(U + xyz)]}{(U + xyz)P}.$$

Theo (H2) thì $P = U + V + 2xyz$, nên $P - 2(U + xyz) = V - U = D$. Vậy

$$L - 14 = \frac{2D^2}{(U + xyz)P} \geq 0.$$

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $D = 0$, tức khi trong ba số x, y, z có hai số bằng nhau.

Nhận xét. Ví dụ này cho thấy lợi ích của việc phân tích theo D : khi các hệ số được chọn đúng, toàn bộ hiệu hai vế rút gọn thành một bình phương của D , và bài toán kết thúc mà không cần một tiêu chuẩn nào.

Ví dụ 9.7*. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a+3}{(a+1)^2} + \frac{b+3}{(b+1)^2} + \frac{c+3}{(c+1)^2} \geq 3 \quad (\text{UK TST 2005}).$$

Phân tích. Ràng buộc $abc = 1$ cho phép đặt $a = \frac{y}{x}$, $b = \frac{z}{y}$, $c = \frac{x}{z}$. Sau phép đặt, mỗi hạng tử trở thành một phân thức thuần nhất bậc 0 theo x, y ; đặt tiếp $u = \frac{x-y}{x+y}$ và các đại lượng tương ứng, bài toán rút về một bất đẳng thức giữa $\sum u^2$ và tích uvw , mà (H5) cho biết $u + v + w = -uvw$.

Điểm rơi. $a = b = c = 1$.

Lời giải

• **Đổi biến.** Vì $abc = 1$ nên tồn tại x, y, z dương với $a = \frac{y}{x}$, $b = \frac{z}{y}$, $c = \frac{x}{z}$. Khi đó

$$\frac{a+3}{(a+1)^2} = \frac{\frac{y}{x} + 3}{\left(\frac{x+y}{x}\right)^2} = \frac{x(y+3x)}{(x+y)^2} = \frac{3x^2 + xy}{(x+y)^2}.$$

• **Tách theo đại lượng u .** Đặt

$$u = \frac{x-y}{x+y}, \quad v = \frac{y-z}{y+z}, \quad w = \frac{z-x}{z+x}.$$

Từ $1+u = \frac{2x}{x+y}$ và $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ ta có

$$\frac{3x^2}{(x+y)^2} = \frac{3}{4}(1+u)^2, \quad \frac{xy}{(x+y)^2} = \frac{1-u^2}{4},$$

nên $\frac{3x^2+xy}{(x+y)^2} = \frac{u^2}{2} + \frac{3u}{2} + 1$. Cộng ba đẳng thức tương tự, về trái của bất đẳng thức bằng

$$\frac{u^2+v^2+w^2}{2} + \frac{3(u+v+w)}{2} + 3.$$

• **Quy về một bất đẳng thức của u, v, w .** Theo (H5),

$$u+v+w = -\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = -uvw.$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $u^2+v^2+w^2 \geq 3uvw$.

• **Kết thúc.** Nếu $uvw \leq 0$ thì điều đó hiển nhiên. Nếu $uvw > 0$ thì theo bất đẳng thức AM–GM,

$$u^2+v^2+w^2 \geq 3\sqrt[3]{u^2v^2w^2} = 3(uvw)^{2/3}.$$

Mặt khác $|u| < 1, |v| < 1, |w| < 1$ nên $0 < uvw < 1$, do đó $(uvw)^{2/3} \geq uvw$. Kết hợp lại được $u^2+v^2+w^2 \geq 3uvw$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 9.8. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{2(a^2b+b^2c+c^2a)-abc}{2(ab^2+bc^2+ca^2)-abc} \geq 2.$$

Phân tích. Hạng tử đầu đối xứng và có phân tích (A1); hạng tử sau chỉ hoán vị vòng quanh và lệch khỏi 1 đúng một bội của D . Sau khi trừ 2, bài toán trở thành so sánh tổng ba bình phương với một bội của D , và ta xử lý bằng cách sắp thứ tự rồi đánh giá thô tổng bình phương.

Điều rới. $a = b = c$.

Lời giải

Đặt $q = ab+bc+ca$ cùng các ký hiệu U, V, D như trên, và ký hiệu L là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Theo bất đẳng thức AM–GM thì $V \geq 3abc$, nên $2V-abc > 0$ và biểu thức có nghĩa.

• **Tách hai phần.** Theo (A1) và (H1),

$$L-2 = \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2q} + \frac{2(U-V)}{2V-abc} = \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2q} - \frac{2D}{2V-abc}.$$

• **Trường hợp $a \geq b \geq c$.** Khi đó $D \leq 0$ nên cả hai số hạng đều không âm, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

• **Trường hợp $c \geq b \geq a$.** Đặt $x = b - a \geq 0$, $y = c - b \geq 0$; khi đó $c - a = x + y$ và $D = xy(c - a)$. Ngoài ra

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(x^2 + xy + y^2) \geq 6xy.$$

Do đó chỉ cần chứng minh

$$\frac{6xy}{2q} \geq \frac{2xy(c - a)}{2V - abc}, \quad \text{tức là} \quad 3(2V - abc) \geq 2q(c - a).$$

• **Một đánh giá mạnh hơn.** Ta chứng minh $2V - abc \geq q(c - a)$. Khai triển trực tiếp,

$$2V - abc - q(c - a) = 2ab^2 + bc^2 + 3a^2c + a^2b - abc - ac^2 = c[c(b - a) + 3a^2 - ab] + 2ab^2 + a^2b.$$

Vì $c \geq b$ và $b - a \geq 0$ nên $c(b - a) \geq b(b - a)$, suy ra

$$c(b - a) + 3a^2 - ab \geq b^2 - ab - ab + 3a^2 = (b - a)^2 + 2a^2 \geq 0.$$

Vậy $2V - abc - q(c - a) \geq 0$, và do $c \geq a$ nên $3(2V - abc) \geq 3q(c - a) \geq 2q(c - a)$.

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh trong cả hai trường hợp. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Bước đánh giá $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 6xy$ là bước then chốt: nó thay tổng ba bình phương bằng một bội của xy , đúng thừa số xy có trong D , nhờ đó x và y được triệt tiêu và bài toán quy về một bất đẳng thức đa thức đơn giản của a, b, c .

C. Bài tập có lời giải

Bài 9.1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

Phân tích. Hiệu hai vế triệt tiêu tại $a = b = c$ và biểu thức hoàn toàn đối xứng, nên phân tích cơ sở (A3) dùng được ngay: nó cho luôn dạng chính tắc với ba hệ số là chính a, b, c . Vì cả ba hệ số đều dương nên không cần sắp thứ tự biến; đây là trường hợp thuận lợi nhất của kỹ thuật S.O.S.

Điểm rơi. $a = b = c$.

Lời giải

• **Kiểm lại phân tích cơ sở.** Khai triển vế phải của (A3),

$$\begin{aligned} a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 &= ab^2 + ac^2 + bc^2 + a^2b + a^2c + b^2c - 6abc \\ &= ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) - 6abc. \end{aligned}$$

Mặt khác $(a + b)(b + c)(c + a) = ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc$, nên trừ hai đẳng thức cho nhau ta được đúng (A3):

$$(a + b)(b + c)(c + a) - 8abc = a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2.$$

• **Xét dấu ba hệ số.** Dạng chính tắc vừa lập có $S_a = a$, $S_b = b$, $S_c = c$. Vì a, b, c dương nên cả ba hệ số đều dương; theo dạng chính tắc S.O.S ở mục A, tổng ba số hạng không âm.

• **Kết luận.** Vậy $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a(b - c)^2 = b(c - a)^2 = c(a - b)^2 = 0$; do ba hệ số đều khác 0, điều đó tương đương với $b = c$, $c = a$, $a = b$, tức $a = b = c$.

Bài 9.2. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca).$$

Phân tích. Vế trái có mẫu $a+b+c$; nhân hai vế với $a+b+c > 0$ thì bất đẳng thức trở thành một đa thức đối xứng bậc ba, và đa thức ấy đúng bằng vế trái của phân tích cơ sở (A4). Dạng chính tắc thu được có ba hệ số $b+c-a, c+a-b, a+b-c$; hệ số ứng với biến lớn nhất có thể âm, đúng tình huống mà tiêu chuẩn (T3) được lập ra để xử lý.

Điểm rơi. $a = b = c$.

Lời giải

• **Khử mẫu.** Vì $a+b+c > 0$, bất đẳng thức tương đương với

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c) + 9abc - 2(ab+bc+ca)(a+b+c) \geq 0.$$

• **Nhận ra vế trái của (A4).** Ký hiệu $\Sigma = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$. Khai triển trực tiếp,

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c) = a^3 + b^3 + c^3 + \Sigma, \quad 2(ab+bc+ca)(a+b+c) = 2\Sigma + 6abc.$$

Do đó vế trái của bất đẳng thức vừa viết bằng $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - \Sigma$.

• **Đưa về dạng chính tắc.** Theo (A4),

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - \Sigma = \frac{1}{2}[(b+c-a)(b-c)^2 + (c+a-b)(c-a)^2 + (a+b-c)(a-b)^2],$$

nên chỉ còn phải chứng minh tổng trong ngoặc vuông không âm, tức là xét dạng chính tắc với $S_a = b+c-a, S_b = c+a-b, S_c = a+b-c$.

• **Sắp thứ tự các biến.** Biểu thức đối xứng nên giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Khi đó $S_c = a+b-c \geq a > 0$ vì $b \geq c$, và $S_b = c+a-b \geq c > 0$ vì $a \geq b$. Chỉ có $S_a = b+c-a$ là có thể âm.

• **Kiểm điều kiện của tiêu chuẩn (T3).** Ta đã có $c > 0, b > 0, S_b \geq 0, S_c \geq 0$; còn lại phải kiểm $b^2 S_a + a^2 S_b \geq 0$. Chú ý $a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2$, ta được

$$\begin{aligned} b^2(b+c-a) + a^2(c+a-b) &= c(a^2 + b^2) + a^3 + b^3 - ab(a+b) \\ &= c(a^2 + b^2) + (a+b)(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

• **Kết luận.** Theo (T3) của Bổ đề 9.2, tổng $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2$ không âm, nên bất đẳng thức được chứng minh. Muốn có dấu đẳng thức thì trong chuỗi đánh giá của (T3) phải có $S_c(a-b)^2 = 0$; vì $S_c > 0$ nên $a = b$. Khi đó $b^2 S_a + a^2 S_b = c(a^2 + b^2) > 0$, buộc $(b-c)^2 = 0$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Bất đẳng thức này chính là Bài 8.1, ở đó nó được giải bằng phương pháp p, q, r . Hai lời giải được giữ song song để thấy rằng cùng một bất đẳng thức Schur bậc một có thể tiếp cận từ hai hướng: hoặc quy về ba đại lượng đối xứng cơ bản, hoặc phân tích thành tổng ba bình phương có hệ số.

Bài 9.3. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2).$$

Phân tích. Hiệu hai vế là bất đẳng thức Schur bậc hai, viết gọn được thành $\sum a^2(a-b)(a-c)$. Bổ đề 9.1 nổi dạng ấy với dạng chính tắc S.O.S; đọc bổ đề theo chiều ngược, ta tìm được ba hệ số $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$ cùng các biểu thức tương tự. Hệ số ứng với biến lớn nhất có thể âm nên lại dùng tiêu chuẩn (T3).

Điểm rơi. $a = b = c$; và hai biến bằng nhau, biến còn lại bằng 0.

Lời giải

• **Rút gọn hiệu hai vế.** Vế phải bằng $a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b)$, còn $a^2bc + b^2ca + c^2ab = abc(a+b+c)$. Vì $a^2(a-b)(a-c) = a^4 - a^3(b+c) + a^2bc$ và tương tự cho hai số hạng còn lại, ta được

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) - ab(a^2 + b^2) - bc(b^2 + c^2) - ca(c^2 + a^2) \\ = a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

• **Quy về dạng chính tắc.** Áp dụng đẳng thức thứ nhất của Bổ đề 9.1 với

$$A = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2), \quad B = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2), \quad C = \frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2),$$

khi đó $A + C = a^2$, $A + B = b^2$, $B + C = c^2$, nên

$$\begin{aligned} a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b) \\ = \frac{1}{2} \left[(b^2 + c^2 - a^2)(b-c)^2 + (c^2 + a^2 - b^2)(c-a)^2 + (a^2 + b^2 - c^2)(a-b)^2 \right]. \end{aligned}$$

Vậy dạng chính tắc có $S_a = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$, $S_b = \frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2)$, $S_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$.

• **Tách trường hợp suy biến.** Biểu thức đối xứng nên giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Nếu $b = 0$ thì $c = 0$ và bất đẳng thức trở thành $a^4 \geq 0$, hiển nhiên đúng. Từ đây giả thiết thêm $b > 0$.

• **Dấu của S_b và S_c .** Vì $a \geq c$ nên $2S_c = a^2 + b^2 - c^2 \geq b^2 > 0$; vì $a \geq b$ nên $2S_b = c^2 + a^2 - b^2 \geq c^2 \geq 0$. Chỉ có S_a là có thể âm.

• **Kiểm điều kiện của tiêu chuẩn (T3).** Ta có

$$\begin{aligned} 2(b^2S_a + a^2S_b) &= b^2(b^2 + c^2 - a^2) + a^2(c^2 + a^2 - b^2) \\ &= a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + c^2(a^2 + b^2) = (a^2 - b^2)^2 + c^2(a^2 + b^2) \geq 0. \end{aligned}$$

• **Kết luận.** Theo (T3) của Bổ đề 9.2, dạng chính tắc không âm, nên bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức đòi $S_c(a-b)^2 = 0$; vì $S_c > 0$ nên $a = b$, và khi đó $2(b^2S_a + a^2S_b) = 2a^2c^2$, nên hoặc $c = 0$, hoặc $(b-c)^2 = 0$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$, hoặc khi hai biến bằng nhau và biến còn lại bằng 0.

Bài 9.4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Phân tích. Hai vế cùng nhận giá trị $\frac{3}{2}$ tại $a = b = c$, nên trừ $\frac{3}{2}$ vào cả hai vế sẽ làm lộ ra hai dạng chính tắc đã có sẵn trong bảng cơ sở: (A5) cho vế trái và (A1) cho vế phải. Hiệu của chúng lại là một dạng chính tắc, với hệ số ứng với $(a-b)^2$ tỉ lệ với $q - c^2$, trong đó $q = ab + bc + ca$; hệ số ứng với biến lớn nhất có thể âm nên dùng tiêu chuẩn (T3).

Điểm rơi. $a = b = c$.

Lời giải

Đặt $q = ab + bc + ca$.

• **Trừ $\frac{3}{2}$ vào vế trái.** Theo (A5),

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \right].$$

• **Trừ $\frac{3}{2}$ vào vế phải.** Vì $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2q$ nên

$$\frac{(a+b+c)^2}{2q} - \frac{3}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - q}{2q} = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{4q},$$

trong đó đẳng thức cuối chính là (A1).

• **Dạng chính tắc của hiệu.** Trừ hai đẳng thức trên cho nhau, hiệu hai vế của bất đẳng thức cần chứng minh bằng

$$\left[\frac{1}{2(b+c)(c+a)} - \frac{1}{4q} \right] (a-b)^2 + \left[\frac{1}{2(c+a)(a+b)} - \frac{1}{4q} \right] (b-c)^2 + \left[\frac{1}{2(a+b)(b+c)} - \frac{1}{4q} \right] (c-a)^2.$$

Vì $(b+c)(c+a) = q + c^2$ nên hệ số đầu bằng $\frac{2q - (q + c^2)}{4q(b+c)(c+a)} = \frac{q - c^2}{4q(b+c)(c+a)}$. Làm tương tự với hai hệ số kia,

$$S_a = \frac{q - a^2}{4q(c+a)(a+b)}, \quad S_b = \frac{q - b^2}{4q(a+b)(b+c)}, \quad S_c = \frac{q - c^2}{4q(b+c)(c+a)}.$$

• **Sắp thứ tự các biến.** Biểu thức đối xứng nên giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Khi đó

$$q - c^2 = ab + c(a+b-c) \geq ab > 0, \quad q - b^2 = ca + b(a+c-b) \geq ca > 0,$$

vì $a \geq c$ kéo theo $a+b-c \geq b > 0$ và $a \geq b$ kéo theo $a+c-b \geq c > 0$. Vậy $S_b > 0$ và $S_c > 0$; chỉ có S_a là có thể âm.

• **Kiểm điều kiện của tiêu chuẩn (T3).** Ta có

$$b^2 S_a + a^2 S_b = \frac{1}{4q(a+b)} \left[\frac{b^2(q-a^2)}{c+a} + \frac{a^2(q-b^2)}{b+c} \right],$$

nên chỉ cần chứng minh $E := b^2(b+c)(q-a^2) + a^2(c+a)(q-b^2) \geq 0$. Khai triển trực tiếp cho hai đẳng thức

$$q - a^2 = 2ca - (a-b)(a+c), \quad q - b^2 = 2bc + (a-b)(b+c),$$

thay vào rồi nhóm lại,

$$\begin{aligned} E &= 2abc[b(b+c) + a(c+a)] + (a-b)(a+c)(b+c)(a^2 - b^2) \\ &= 2abc[b(b+c) + a(c+a)] + (a+b)(a+c)(b+c)(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

• **Kết luận.** Theo (T3) của Bổ đề 9.2, dạng chính tắc không âm, nên bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức đòi $S_c(a-b)^2 = 0$; vì $S_c > 0$ nên $a = b$, khi đó $E = 2abc[b(b+c) + a(c+a)] > 0$ buộc $(b-c)^2 = 0$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Hệ số S_a thật sự có thể âm: với $(a, b, c) = (10, 1, 1)$ thì $q - a^2 = 21 - 100 = -79 < 0$. Vì vậy lời giải không thể dừng lại ở nhận xét cả ba hệ số đều không âm, mà phải sắp thứ tự biến rồi dùng một tiêu chuẩn chấp nhận được một hệ số âm; ở đây ta chọn (T3).

Bài 9.5. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Phân tích. Về trái đối xứng còn về phải chỉ hoán vị vòng quanh, nên hiệu hai vế còn chứa thêm tích $D = (a-b)(b-c)(c-a)$: đây là dạng S.O.C. Ghép (A2), (A3) và (H1) ta được hiệu bằng nửa tổng ba bình phương có hệ số cộng thêm nửa D . Nếu $D \geq 0$ thì kết thúc ngay; nếu $D < 0$ thì chỉ riêng số hạng $(c+a)(c-a)^2$ đã đủ bù cho $|D|$, vì $|D|$ cũng chứa thừa số $c-a$.

Điểm rơi. $a = b = c$.

Lời giải

Giữ nguyên các ký hiệu $U = a^2b + b^2c + c^2a$, $V = ab^2 + bc^2 + ca^2$, $P = (a+b)(b+c)(c+a)$ và $D = (a-b)(b-c)(c-a)$ của mục A.

• **Thu gọn số thứ tự phải xét.** Về trái đối xứng, còn U không đổi qua phép hoán vị vòng quanh $(a, b, c) \mapsto (b, c, a)$, nên hiệu hai vế cũng không đổi qua phép hoán vị ấy. Theo mục A, sáu thứ tự có thể có của ba biến rút về hai lớp: lớp $D \leq 0$ với đại diện $a \geq b \geq c$ và lớp $D \geq 0$ với đại diện $c \geq b \geq a$. Vậy chỉ cần xét hai đại diện đó.

• **Biểu diễn U qua P và D .** Theo (H2) thì $U + V = P - 2abc$, còn theo (H1) thì $V - U = D$. Trừ hai đẳng thức cho nhau,

$$2U = (P - 2abc) - D, \quad \text{tức là} \quad U = \frac{P - 2abc}{2} - \frac{D}{2}.$$

• **Đưa về dạng hoán vị S.O.C.** Từ đó

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - U &= (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) - \frac{P - 8abc}{2} + \frac{D}{2} \\ &= \frac{a+b+c}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \\ &\quad - \frac{a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2}{2} + \frac{D}{2} \\ &= \frac{(a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2}{2} + \frac{D}{2}, \end{aligned}$$

trong đó đẳng thức thứ hai dùng (A2) cho nhóm đầu và (A3) cho nhóm sau, còn đẳng thức cuối do $a + b + c - a = b + c$ và tương tự.

• **Trường hợp $c \geq b \geq a$.** Khi đó $a - b \leq 0, b - c \leq 0, c - a \geq 0$ nên $D \geq 0$. Cả hai số hạng ở vế phải đều không âm, bất đẳng thức đúng.

• **Trường hợp $a \geq b \geq c$.** Đặt $x = a - b \geq 0$ và $y = b - c \geq 0$; khi đó $a - c = x + y$ và $D = -xy(x + y) \leq 0$, tức $|D| = xy(x + y)$. Ta phải chứng minh

$$(a + b)(a - b)^2 + (b + c)(b - c)^2 + (c + a)(c - a)^2 \geq xy(x + y).$$

• **Một số hạng đã đủ bù.** Vì $c \geq 0$ nên

$$(c + a)(c - a)^2 - (a - c)^3 = (a - c)^2[(c + a) - (a - c)] = 2c(a - c)^2 \geq 0,$$

do đó $(c + a)(c - a)^2 \geq (a - c)^3 = (x + y)^3$. Mặt khác $(x + y)^2 \geq 4xy \geq xy$ nên $(x + y)^3 \geq xy(x + y)$. Hai số hạng còn lại không âm, vậy bất đẳng thức trên đúng.

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh trong cả hai trường hợp. Dấu đẳng thức trong cả hai đều đòi $(a + b)(a - b)^2 = (b + c)(b - c)^2 = 0$; vì a, b, c không âm nên mỗi đẳng thức ấy buộc hai biến tương ứng bằng nhau. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 9.6. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3(a^2b + b^2c + c^2a) \geq 5(ab^2 + bc^2 + ca^2).$$

Phân tích. Hai vế chỉ không đổi qua hoán vị vòng quanh nên hiệu của chúng có dạng S.O.C. Viết $3U - 5V$ qua hai đại lượng $U + V$ và $V - U$ rồi dùng (H2), (H1), (A2), (A3), ta được hiệu bằng tổng ba bình phương có hệ số trừ đi $4D$. Trường hợp $D \leq 0$ xong ngay; trường hợp còn lại dùng phép đặt biến $b = a + x, c = a + x + y$ để khử biến a và quy về một bất đẳng thức hai biến.

Điểm rơi. $a = b = c$.

Lời giải

Giữ nguyên các ký hiệu U, V, P, D của mục A.

• **Thu gọn số thứ tự phải xét.** Cả hai vế đều không đổi qua phép hoán vị vòng quanh $(a, b, c) \mapsto (b, c, a)$, nên theo mục A sáu thứ tự có thể có của ba biến rút về hai lớp: lớp $D \leq 0$ với đại diện $a \geq b \geq c$ và lớp $D \geq 0$ với đại diện $c \geq b \geq a$. Vậy chỉ cần xét hai đại diện đó.

• **Tách $3U - 5V$ theo $U + V$ và $V - U$.** Vì $3U - 5V = -(U + V) - 4(V - U)$, kết hợp (H2) với (H1) ta được $3U - 5V = -(P - 2abc) - 4D$.

• **Đưa về dạng hoán vị S.O.C.** Do đó

$$\begin{aligned} 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3U - 5V &= 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) - (P - 8abc) - 4D \\ &= (a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \\ &\quad - [a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2] - 4D \\ &= (a + b)(a - b)^2 + (b + c)(b - c)^2 + (c + a)(c - a)^2 - 4D, \end{aligned}$$

trong đó đẳng thức thứ hai dùng (A2) và (A3).

• **Trường hợp $a \geq b \geq c$.** Khi đó $D \leq 0$ nên $-4D \geq 0$; ba số hạng đầu cũng không âm, bất đẳng thức đúng.

• **Trường hợp $c \geq b \geq a$.** Đặt $b = a + x$, $c = a + x + y$ với $x, y \geq 0$. Khi ấy $a - b = -x$, $b - c = -y$, $c - a = x + y$ và $D = xy(x + y)$. Ngoài ra $a + b = 2a + x$, $b + c = 2a + 2x + y$, $c + a = 2a + x + y$, nên

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b)^2 + (b + c)(b - c)^2 + (c + a)(c - a)^2 \\&= 2a[x^2 + y^2 + (x + y)^2] + x^3 + (2x + y)y^2 + (x + y)^3 \\&= 4a(x^2 + xy + y^2) + 2x^3 + 2y^3 + 3x^2y + 5xy^2.\end{aligned}$$

Trừ đi $4D = 4x^2y + 4xy^2$ ta được

$$(a + b)(a - b)^2 + (b + c)(b - c)^2 + (c + a)(c - a)^2 - 4D = 4a(x^2 + xy + y^2) + 2x^3 + 2y^3 - x^2y + xy^2.$$

• **Kết thúc bằng AM–GM.** Số hạng $4a(x^2 + xy + y^2)$ không âm. Với phần còn lại, theo bất đẳng thức AM–GM cho ba số không âm x^3, x^3, y^3 ta có $2x^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^6y^3} = 3x^2y$, do đó

$$2x^3 + 2y^3 - x^2y + xy^2 = (2x^3 + y^3 - 3x^2y) + 2x^2y + y^3 + xy^2 \geq 0.$$

• **Kết luận.** Bất đẳng thức được chứng minh trong cả hai trường hợp. Ở trường hợp thứ nhất, dấu đẳng thức buộc ba số hạng bình phương triệt tiêu, tức $a = b = c$. Ở trường hợp thứ hai, dấu đẳng thức buộc $y^3 = 0$ và $2x^3 + y^3 - 3x^2y = 0$, tức $y = 0$ rồi $x = 0$, cũng cho $a = b = c$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 9.7*. Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Chứng minh rằng

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq 16 + abc.$$

Phân tích. Cả giả thiết lẫn hai vế đều không đổi qua hoán vị vòng quanh, nên ta được quyền chọn biến nào đứng ở vị trí giữa. Chọn b là số đứng giữa thì hiệu $b(a^2 + c^2) - (ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc)$ rút gọn thành tích $a(a - b)(b - c)$, một số không âm. Nhờ đó bài toán ba biến quy ngay về bài toán một biến $b(12 - b^2) \leq 16$.

Điểm rơi. $a = b = c = 2$; và $(a, b, c) = (0, 2, 2\sqrt{2})$ cùng các hoán vị vòng quanh.

Lời giải

• **Chọn biến đứng giữa.** Giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ và hai vế $ab^2 + bc^2 + ca^2$, $16 + abc$ đều không đổi qua phép hoán vị vòng quanh $(a, b, c) \mapsto (b, c, a)$. Ba phép hoán vị vòng quanh lần lượt đưa b, c, a vào vị trí thứ hai, nên có thể giả sử b là số đứng giữa theo thứ tự lớn bé, tức là $(a - b)(b - c) \geq 0$.

• **Một đồng nhất thức then chốt.** Với mọi số thực a, b, c ,

$$b(a^2 + c^2) - (ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc) = a(a - b)(b - c).$$

Thật vậy, vế trái bằng $a^2b - ab^2 - ca^2 + abc = a(ab - b^2 - ca + bc)$, mà $ab - b^2 - ca + bc = b(a - b) - c(a - b) = (a - b)(b - c)$.

• **Chặn trên bằng một biến.** Vì $a \geq 0$ và $(a - b)(b - c) \geq 0$ nên $a(a - b)(b - c) \geq 0$, do đó

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc \leq b(a^2 + c^2) = b(12 - b^2).$$

• **Bài toán một biến.** Từ $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ và $b \geq 0$ suy ra $0 \leq b \leq 2\sqrt{3}$. Với mọi $b \geq 0$,

$$16 - b(12 - b^2) = b^3 - 12b + 16 = (b - 2)^2(b + 4) \geq 0.$$

• **Kết luận.** Kết hợp hai đánh giá, $ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc \leq 16$, tức là bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức đòi $b = 2$ và $a(a - b)(b - c) = 0$. Khi $b = 2$ thì $a^2 + c^2 = 8$; nếu $a = 0$ thì $c = 2\sqrt{2}$, cho bộ $(0, 2, 2\sqrt{2})$; nếu $a = b = 2$ thì $c = 2$; nếu $b = c = 2$ thì $a = 2$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 2$ và tại $(0, 2, 2\sqrt{2})$ cùng các hoán vị vòng quanh.

Nhận xét. Cũng có thể mở đầu theo dạng S.O.C: khi $a \geq b \geq c$ thì $D \leq 0$ nên $V \leq U$, do đó $2(V - abc) \leq U + V - 2abc = P - 4abc$ và bài toán quy về $(a + b)(b + c)(c + a) \leq 32 + 4abc$. Đánh giá ấy đúng nhưng chặt tại $a = b = c = 2$ và vẫn còn ba biến, nên lối đi qua đồng nhất thức ở trên ngắn hơn hẳn.

Bài 9.8*. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{3xyz}{(x+y)(y+z)(z+x) - 2xyz} \geq 2.$$

Phân tích. Cả bốn phân thức đều rơi vào bảng cơ sở: ba phân thức đầu trừ $\frac{3}{2}$ thì dùng (A5), phân thức cuối trừ $\frac{1}{2}$ thì dùng (A3). Quy đồng theo mẫu chung $2P(P - 2xyz)$ ta được một dạng chính tắc với $S_x = P(y + z - x) - 2xyz(y + z)$. Sau khi sắp thứ tự $x \geq y \geq z$, hai hệ số S_y, S_z không âm còn $S_x + S_y$ rút gọn thành một biểu thức hiển nhiên không âm; đó đúng là ba điều kiện của tiêu chuẩn (T1).

Điểm rơi. $x = y = z$.

Lời giải

Ký hiệu L là vế trái, $P = (x + y)(y + z)(z + x)$, $U = x^2y + y^2z + z^2x$ và $V = xy^2 + yz^2 + zx^2$. Theo (H2) thì $P - 2xyz = U + V > 0$, nên phân thức cuối có nghĩa.

• **Ba phân thức đầu.** Vì $(y + z)(z + x) = \frac{P}{x + y}$ và tương tự cho hai tích còn lại, phân tích (A5) viết lại thành

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} - \frac{3}{2} = \frac{(x+y)(x-y)^2 + (y+z)(y-z)^2 + (z+x)(z-x)^2}{2P}.$$

• **Phân thức thứ tư.** Theo (A3),

$$\frac{3xyz}{P - 2xyz} - \frac{1}{2} = \frac{8xyz - P}{2(P - 2xyz)} = -\frac{x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2}{2(P - 2xyz)}.$$

• **Dạng chính tắc.** Cộng hai kết quả rồi quy đồng theo mẫu $2P(P - 2xyz) > 0$,

$$L - 2 = \frac{S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2}{2P(P - 2xyz)},$$

trong đó

$$S_x = (P - 2xyz)(y + z) - Px = (y + z)[(x + y)(z + x)(y + z - x) - 2xyz],$$

$$S_y = (P - 2xyz)(z + x) - Py = (z + x)[(x + y)(y + z)(z + x - y) - 2xyz],$$

$$S_z = (P - 2xyz)(x + y) - Pz = (x + y)[(y + z)(z + x)(x + y - z) - 2xyz].$$

- **Bổ đề dấu chứng minh tại chỗ.** Với mọi $\alpha \geq \beta \geq 0$ và $\gamma \geq 0$, đặt $u = \alpha - \beta \geq 0$; khi đó

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma) - 2\alpha\beta\gamma = 2\beta^2u + \beta u^2 + \gamma u^2 + \beta\gamma u + \gamma^2u + 2\beta\gamma^2 \geq 0.$$

Thật vậy, thay $\alpha = \beta + u$ thì

$$\begin{aligned} (2\beta + u)(\beta + \gamma)(u + \gamma) &= (2\beta + u)(\beta u + \beta\gamma + \gamma u + \gamma^2) \\ &= 2\beta^2u + 2\beta^2\gamma + 2\beta\gamma u + 2\beta\gamma^2 + \beta u^2 + \beta\gamma u + \gamma u^2 + \gamma^2u, \end{aligned}$$

còn $2\alpha\beta\gamma = 2\beta^2\gamma + 2\beta\gamma u$; trừ hai biểu thức cho nhau được đúng về phải.

- **Hai hệ số không âm.** Hai vế của bất đẳng thức đối xứng nên giả sử $x \geq y \geq z > 0$. Áp dụng bổ đề với $(\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z)$, hợp lệ vì $x \geq y$, ta được $(x + y)(y + z)(z + x - y) - 2xyz \geq 0$, do đó $S_y \geq 0$. Áp dụng bổ đề với $(\alpha, \beta, \gamma) = (y, z, x)$, hợp lệ vì $y \geq z$, ta được $(y + z)(z + x)(x + y - z) - 2xyz \geq 0$, do đó $S_z \geq 0$.

- **Tổng hai hệ số đầu.** Cộng hai biểu thức của S_x và S_y ,

$$S_x + S_y = 2Pz - 2xyz(x + y + 2z) = 2z[P - xy(x + y + 2z)].$$

Vì $(y + z)(z + x) = xy + z(x + y + z)$ nên $P = (x + y)[xy + z(x + y + z)]$, do đó

$$\begin{aligned} P - xy(x + y + 2z) &= z(x + y)(x + y + z) - 2xyz = z[(x + y)^2 + z(x + y) - 2xy] \\ &= z[x^2 + y^2 + z(x + y)]. \end{aligned}$$

Vậy $S_x + S_y = 2z^2[x^2 + y^2 + z(x + y)] \geq 0$.

- **Kết luận bằng tiêu chuẩn (T1).** Với thứ tự $x \geq y \geq z$, ba điều kiện của (T1) là $S_y \geq 0$, $S_x + S_y \geq 0$ và $S_y + S_z \geq 0$; cả ba đều vừa được kiểm. Vậy tử số của dạng chính tắc không âm, tức $L \geq 2$.

- **Xét dấu đẳng thức.** Đặt $u = x - y \geq 0$ và $v = y - z \geq 0$. Theo Bổ đề 9.2,

$$S_x(y - z)^2 + S_y(z - x)^2 + S_z(x - y)^2 = (S_y + S_z)u^2 + 2S_y uv + (S_x + S_y)v^2.$$

Vì $z > 0$ nên $S_x + S_y > 0$, do đó tổng bằng 0 buộc $v = 0$, tức $y = z$. Khi $y = z$ thì $S_z = (x + y)[2y(x + y)x - 2xy^2] = 2x^2y(x + y) > 0$, nên $(S_y + S_z)u^2 = 0$ buộc $u = 0$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Bài 9.9*. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$3(a^4 + b^4 + c^4) + a^2 + b^2 + c^2 + 6 \geq 6(a^3 + b^3 + c^3) \quad (\text{Vasile Cirtoaje}).$$

Phân tích. Bài toán có ràng buộc $a + b + c = 3$ và hai điểm rơi khác nhau, nên phải tách hiệu hai vế thành ba số hạng một biến dạng $(t - 1)^2(3t^2 - 2)$, rồi dùng phép quy về dạng chính tắc thứ hai của Bổ đề 9.1 vì $3(a - 1) = 2a - b - c$. Kết quả là một tổng dạng $\sum x(a - b)(a - c)$ với ba hệ số không âm, đúng khuôn của tiêu chuẩn (T4).

Điểm rơi. $a = b = c = 1$; và $(a, b, c) = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ cùng các hoán vị.

Lời giải

- **Đồng nhất thức một biến.** Với mọi số thực t ,

$$3t^4 + t^2 + 2 - 6t^3 + 4(t - 1) = (t - 1)^2(3t^2 - 2).$$

Thật vậy, vế phải bằng $(t^2 - 2t + 1)(3t^2 - 2) = 3t^4 - 6t^3 + t^2 + 4t - 2$, còn vế trái bằng $3t^4 - 6t^3 + t^2 + 4t - 2$.

• **Cộng ba đồng nhất thức.** Áp dụng cho $t = a, t = b, t = c$ rồi cộng lại, chú ý $(a-1) + (b-1) + (c-1) = 0$:

$$3(a^4 + b^4 + c^4) + a^2 + b^2 + c^2 + 6 - 6(a^3 + b^3 + c^3) = \sum (a-1)^2(3a^2 - 2),$$

tổng lấy theo hoán vị vòng quanh.

• **Quy về dạng chính tắc.** Vì $3(a-1) = 3a - (a+b+c) = 2a - b - c$, nhân hai vế với 9 ta được

$$9 \sum (a-1)^2(3a^2 - 2) = \sum (2a - b - c)^2(3a^2 - 2).$$

Áp dụng đẳng thức thứ hai của Bổ đề 9.1 với $A = 3a^2 - 2, B = 3b^2 - 2, C = 3c^2 - 2$ và chú ý

$$4A + B + C = 12a^2 - 8 + (3b^2 - 2) + (3c^2 - 2) = 3(4a^2 + b^2 + c^2 - 4),$$

ta thu được

$$9 \sum (a-1)^2(3a^2 - 2) = 3 \sum (4a^2 + b^2 + c^2 - 4)(a-b)(a-c).$$

• **Sắp thứ tự các biến.** Biểu thức đối xứng nên giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Đặt

$$X = 4a^2 + b^2 + c^2 - 4, \quad Y = 4b^2 + c^2 + a^2 - 4, \quad Z = 4c^2 + a^2 + b^2 - 4.$$

Khi đó $X - Y = 3(a^2 - b^2) \geq 0$ và $Y - Z = 3(b^2 - c^2) \geq 0$, tức $X \geq Y \geq Z$.

• **Chặn dưới hệ số nhỏ nhất.** Vì $a + b = 3 - c$ và $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ nên

$$Z \geq 4c^2 + \frac{(3-c)^2}{2} - 4 = \frac{8c^2 + 9 - 6c + c^2 - 8}{2} = \frac{(3c-1)^2}{2} \geq 0.$$

Vậy $X \geq Y \geq Z \geq 0$.

• **Kết luận bằng tiêu chuẩn (T4).** Ba hệ số X, Y, Z không âm và $X \geq Y$, nên theo (T4) của Bổ đề 9.2,

$$X(a-b)(a-c) + Y(b-c)(b-a) + Z(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Do đó $\sum (a-1)^2(3a^2 - 2) \geq 0$ và bất đẳng thức được chứng minh.

• **Xét dấu đẳng thức.** Tại $a = b = c = 1$ cả ba số hạng đều bằng 0. Ngoài ra, tại $a = b = \frac{4}{3}, c = \frac{1}{3}$ ta có $a - b = 0$ và $Z = \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} - 4 = 0$, nên ba số hạng cũng đều triệt tiêu; đó chính là điểm rơi thứ hai, ứng với chỗ chặn dưới $\frac{(3c-1)^2}{2}$ bằng 0.

Bài 9.10*. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) \leq 4.$$

Phân tích. Vế trái là tích của $a+b+c$ với D , nên nếu $D \leq 0$ thì kết luận hiển nhiên; chỉ còn lớp $c \geq b \geq a$. Ở lớp ấy ta khai thác một tính chất riêng của D : nó không đổi khi trừ cùng một số vào cả ba biến. Nhờ đó dồn được biến nhỏ nhất về 0, và bài toán còn lại chỉ có hai biến, kết thúc bằng một đánh giá AM-GM.

Điểm rơi. $(a, b, c) = (0, \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2}})$ cùng các hoán vị vòng quanh.

Lời giải

Đặt $D = (a - b)(b - c)(c - a)$ và

$$f(a, b, c) = \frac{(a + b + c)D}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \quad ((a, b, c) \neq (0, 0, 0));$$

đây là một biểu thức thuần nhất bậc 0, nên giá trị của nó không đổi khi nhân cả ba biến với cùng một số dương. Với $a^2 + b^2 + c^2 = 4$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $f(a, b, c) \leq \frac{1}{4}$.

• **Loại trường hợp hiển nhiên.** Nếu $D \leq 0$ thì vế trái không dương, bất đẳng thức đúng. Vậy chỉ còn phải xét $D > 0$. Vì cả $a + b + c$ lẫn D đều không đổi qua hoán vị vòng quanh, và theo mục A lớp $D \geq 0$ gồm thứ tự $c \geq b \geq a$ cùng hai hoán vị vòng quanh của nó, ta có thể giả sử $c \geq b \geq a \geq 0$.

• **Đồn biến nhỏ nhất về 0.** Đặt $B = b - a \geq 0$, $C = c - a \geq 0$, rồi $p_0 = B + C > 0$ và $s_0 = B^2 + C^2 > 0$ (hai đại lượng này dương vì $D > 0$ buộc B, C khác nhau và khác 0). Do D chỉ phụ thuộc vào các hiệu của ba biến nên

$$D(a, b, c) = D(0, B, C) = BC(C - B) > 0.$$

Ngoài ra $a + b + c = 3a + p_0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3a^2 + 2ap_0 + s_0$. Vậy bất đẳng thức $f(a, b, c) \leq f(0, B, C)$ tương đương với

$$p_0(3a^2 + 2ap_0 + s_0)^2 \geq (3a + p_0)s_0^2.$$

• **Chứng minh phép đồn biến.** Vì $3a^2 + 2ap_0 + s_0 \geq s_0 + 2ap_0 \geq 0$ nên

$$p_0(3a^2 + 2ap_0 + s_0)^2 \geq p_0(s_0 + 2ap_0)^2 = p_0s_0^2 + 4ap_0^2s_0 + 4a^2p_0^3,$$

do đó

$$p_0(3a^2 + 2ap_0 + s_0)^2 - (3a + p_0)s_0^2 \geq a[s_0(4p_0^2 - 3s_0) + 4ap_0^3].$$

Mà $4p_0^2 - 3s_0 = 4(B + C)^2 - 3(B^2 + C^2) = B^2 + C^2 + 8BC \geq 0$, nên vế phải không âm. Vậy $f(a, b, c) \leq f(0, B, C)$.

• **Rút về hai biến.** Theo trên,

$$f(0, B, C) = \frac{(B + C)BC(C - B)}{(B^2 + C^2)^2} = \frac{BC(C^2 - B^2)}{(B^2 + C^2)^2}.$$

• **Đánh giá bằng AM–GM.** Đặt $m = BC > 0$ và $t = C^2 - B^2 > 0$. Khi đó

$$t^2 + 4m^2 = (C^2 - B^2)^2 + 4B^2C^2 = (B^2 + C^2)^2,$$

nên theo bất đẳng thức AM–GM,

$$mt = \frac{1}{2} \cdot (2m) \cdot t \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(2m)^2 + t^2}{2} = \frac{(B^2 + C^2)^2}{4}.$$

Do đó $f(0, B, C) \leq \frac{1}{4}$.

• **Kết luận.** Kết hợp hai bước, $f(a, b, c) \leq \frac{1}{4}$, tức là

$$(a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a) \leq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{4} = 4.$$

Dấu đẳng thức ở bước đồn biến đòi $a[s_0(4p_0^2 - 3s_0) + 4ap_0^3] = 0$, mà $s_0 > 0$ và $p_0 > 0$ nên $a = 0$; khi ấy $B = b$, $C = c$ và $B^2 + C^2 = 4$. Dấu đẳng thức ở bước AM–GM đòi $2m = t$; kết hợp với

$t^2 + 4m^2 = (B^2 + C^2)^2 = 16$ được $m = \sqrt{2}$, $t = 2\sqrt{2}$, rồi từ $B^2 + C^2 = 4$ và $C^2 - B^2 = 2\sqrt{2}$ suy ra $B^2 = 2 - \sqrt{2}$, $C^2 = 2 + \sqrt{2}$. Vậy dấu đẳng thức xảy ra tại $(a, b, c) = (0, \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2}})$ cùng các hoán vị vòng quanh.

Nhận xét. Phép dồn biến ở trên chỉ dùng đúng một tính chất của D : nó bất biến khi tịnh tiến cả ba biến. Đó là lý do bài toán chứa thừa số D thường được đưa về trường hợp biến nhỏ nhất bằng 0, giống hết vai trò của phép đặt $b = a + x$, $c = a + x + y$ ở mục A.

CHƯƠNG 10

Ứng dụng đạo hàm: phương pháp tiếp tuyến và dồn biến

10

Đưa bất đẳng thức nhiều biến về một biến rồi khảo sát hàm số; phương pháp tiếp tuyến như trường hợp tuyến tính của kỹ thuật U.C.T; kỹ thuật dồn hai biến bằng nhau và bước đầu làm quen với nhân tử Lagrange.

Các chương trước sử dụng những công cụ thuần túy đại số. Chương này bổ sung một công cụ mạnh hơn, thuộc chương trình lớp 11 và lớp 12: đạo hàm và bảng biến thiên. Tư tưởng chung gồm hai bước. Bước thứ nhất là *dồn biến*: bằng một đánh giá trung gian hoặc một phép đổi biến thích hợp, ta đưa biểu thức nhiều biến về một hàm số chỉ còn phụ thuộc một biến t , đồng thời xác định thật chính xác miền biến thiên của t . Bước thứ hai là khảo sát hàm một biến đó bằng đạo hàm để tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất.

Một biến thể quan trọng của tư tưởng trên là *phương pháp tiếp tuyến*: thay vì dồn về một biến, ta đánh giá riêng từng số hạng bởi một hàm bậc nhất, cụ thể là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm rơi. Phương pháp này chính là kỹ thuật U.C.T đã trình bày ở Chương 7, với hàm trung gian được chọn là hàm bậc nhất, và đạo hàm cho ta cách chọn hàm đó một cách hoàn toàn tự động.

Phần cuối chương giới thiệu ở mức đọc hiểu phương pháp nhân tử Lagrange. Ở đây ta chỉ dùng nó như một công cụ *dự đoán* điểm rơi, còn phần chứng minh vẫn được viết bằng các bất đẳng thức sơ cấp đã học.

A. Kiến thức trọng tâm

Khảo sát hàm một biến trên một miền cho trước

Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$. Khi đó f đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên $[\alpha; \beta]$; các giá trị đó chỉ có thể đạt tại một trong hai đầu mút α, β , hoặc tại một điểm $t_0 \in (\alpha; \beta)$ mà $f'(t_0) = 0$ hoặc f không có đạo hàm tại t_0 .

Nếu f liên tục trên một khoảng và có đúng một điểm dừng t_0 , đồng thời f' đổi dấu từ âm sang dương khi t vượt qua t_0 , thì $f(t) \geq f(t_0)$ trên toàn khoảng đó.

Trong thực hành, quy trình gồm ba bước.

- **Chặn về một đại lượng.** Dùng một đánh giá trung gian (thường là bất đẳng thức AM–GM hoặc bất đẳng thức Cauchy–Schwarz) để chặn biểu thức đã cho bởi một biểu thức chỉ phụ thuộc một đại lượng t .
- **Xác định miền biến thiên.** Xác định *chính xác* miền biến thiên của t . Đây là bước thường bị bỏ qua: nếu lấy miền rộng hơn thực tế thì kết quả khảo sát có thể không đạt được, còn nếu lấy miền hẹp hơn thì lời giải không còn đúng.
- **Khảo sát hàm một biến.** Khảo sát hàm một biến trên miền vừa tìm, rồi đối chiếu điều kiện để mọi dấu đẳng thức trung gian cùng xảy ra.

Phương pháp tiếp tuyến

Cho hàm số f có đạo hàm trên khoảng I và $x_0 \in I$. Đường thẳng

$$d: y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0 . Nếu f lồi trên I , chẳng hạn khi $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$, thì đồ thị nằm phía trên tiếp tuyến:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{với mọi } x \in I.$$

Nếu f lõm trên I , chẳng hạn khi $f''(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$, thì bất đẳng thức trên đổi chiều. Ngoài hai trường hợp ấy, đồ thị không nhất thiết nằm hẳn về một phía của d ; khi đó bất đẳng thức phụ $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ phải được chứng minh trực tiếp trên đúng miền mà các biến có thể nhận. Điều kiện để dấu đẳng thức xảy ra cũng phải kiểm tra riêng cho từng bài: dấu đẳng thức luôn xảy ra tại $x = x_0$, nhưng có thể còn xảy ra tại những điểm khác nữa.

Bổ đề 10.1. (Bổ đề tiếp tuyến cho tổng) Cho hàm số f có đạo hàm trên khoảng I , cho $x_0 \in I$ và đặt $k = f'(x_0)$, $m = f(x_0) - kx_0$. Giả sử

$$f(x) \geq kx + m \quad \text{với mọi } x \in I.$$

Khi đó, với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$, ta có

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq kS + nm.$$

Đặc biệt, nếu $S = nx_0$ thì $f(x_1) + \dots + f(x_n) \geq nf(x_0)$; nếu thêm nữa dấu đẳng thức trong $f(x) \geq kx + m$ chỉ xảy ra tại $x = x_0$ thì dấu đẳng thức của bất đẳng thức tổng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_0$.

Nếu thay giả thiết bởi $f(x) \leq kx + m$ trên I thì mọi bất đẳng thức ở kết luận đổi chiều; chứng minh giữ nguyên.

• **Chứng minh.** Cộng n bất đẳng thức $f(x_i) \geq kx_i + m$ theo $i = 1, 2, \dots, n$ ta được ngay $\sum f(x_i) \geq k \sum x_i + nm = kS + nm$. Khi $S = nx_0$ thì $kS + nm = n(kx_0 + m) = nf(x_0)$.

$$f(x) \geq kx + m \quad (x \in I) \quad \Rightarrow \quad f(x_1) + \dots + f(x_n) \geq kS + nm.$$

Bổ đề trên chỉ ra ba việc phải làm khi dùng phương pháp tiếp tuyến.

• **Dự đoán điểm rơi.** Với ràng buộc $x_1 + \dots + x_n = S$ và biểu thức đối xứng, điểm rơi thường là $x_0 = S/n$.

• **Viết phương trình tiếp tuyến.** Lập tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 ; đạo hàm cho ngay hệ số $k = f'(x_0)$.

• **Chứng minh bất đẳng thức phụ.** Phải chứng minh $f(x) \geq kx + m$ trên toàn miền mà các biến có thể nhận. Đây là mấu chốt: hàm số $h(x) = f(x) - (kx + m)$ thỏa mãn $h(x_0) = 0$ và $h'(x_0) = 0$.

• **Tách nhân tử nghiệm kép.** Cụ thể, với các hàm hữu tỉ thường gặp trong chương này, sau khi quy đồng thì tử số nhận x_0 làm nghiệm bội không nhỏ hơn 2, nên tách được nhân tử $(x - x_0)^2$; với hàm

chứa căn thức, nhân tử ấy xuất hiện sau một phép đổi biến thích hợp. Phần còn lại phải giữ dấu không đổi trên miền đang xét.

Liên hệ với kỹ thuật U.C.T ở Chương 7

Kỹ thuật U.C.T tìm một hàm trung gian g sao cho $f(x) \geq g(x)$ với mọi x thuộc miền đang xét, trong đó tổng $g(x_1) + \dots + g(x_n)$ tính được trực tiếp nhờ giả thiết. Phương pháp tiếp tuyến chính là trường hợp g là hàm bậc nhất, dùng khi giả thiết cho tổng $x_1 + \dots + x_n$. Khi giả thiết cho tổng bình phương $x_1^2 + \dots + x_n^2$, ta chọn hàm trung gian dạng $g(x) = \lambda + \mu x^2$; hai hệ số λ, μ được xác định từ hai điều kiện tiếp xúc

$$g(x_0) = f(x_0), \quad g'(x_0) = f'(x_0),$$

nghĩa là $\mu = \frac{f'(x_0)}{2x_0}$ và $\lambda = f(x_0) - \mu x_0^2$. Cách làm hoàn toàn tương tự với các giả thiết khác.

Bổ đề 10.2. (Dồn hai biến bằng nhau) Cho biểu thức $P(a, b, c)$ đối xứng đối với hai biến b, c , xét trên một miền D ổn định đối với phép thay (b, c) bởi (t, t) , trong đó $t = \frac{b+c}{2}$ hoặc $t = \sqrt{bc}$. Nếu

$$P(a, b, c) \geq P(a, t, t) \quad \text{với mọi } (a, b, c) \in D,$$

thì việc tìm giá trị nhỏ nhất của P trên D quy về việc khảo sát hàm một biến $\varphi(a) = P(a, t, t)$, trong đó t được tính theo a nhờ ràng buộc.

• **Cách dùng.** Khi ràng buộc cho tổng $a + b + c$, ta cố định a và thay (b, c) bởi trung bình cộng $t = \frac{b+c}{2}$. Khi ràng buộc cho tích abc , ta cố định a và thay (b, c) bởi trung bình nhân $t = \sqrt{bc}$; cả hai phép thay đều bảo toàn ràng buộc.

• **Một biến dạng thường gặp.** Nếu P đối xứng hoàn toàn thì có thể giả sử $a \geq b \geq c$ hoặc $c = \min\{a, b, c\}$. Việc sắp thứ tự chỉ hợp lệ khi vai trò ba biến là như nhau trong cả giả thiết lẫn kết luận, và nó phải phục vụ một ý đồ cụ thể: xác định dấu của một hệ số, hoặc chặn miền biến thiên của biến nhỏ nhất.

Nhân tử Lagrange — mức đọc hiểu

Xét bài toán tìm cực trị của hàm $f(x_1, \dots, x_n)$ với ràng buộc $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$. Lập hàm Lagrange

$$L = f + \lambda \varphi,$$

trong đó λ là một hằng số chưa xác định, gọi là *nhân tử Lagrange*. Giả sử f và φ có các đạo hàm riêng liên tục. Nếu cực trị đạt tại một điểm trong của miền và tại điểm đó các đạo hàm riêng của φ không đồng thời bằng 0, tức là $\nabla \varphi \neq 0$, thì điểm đó thoả hệ

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \quad \varphi = 0.$$

Điều kiện $\nabla \varphi \neq 0$ không được bỏ qua: nếu nó không thoả mãn thì điểm cực trị có thể không nghiệm đúng hệ trên. Ngoài ra đây chỉ là *điều kiện cần*: nghiệm của hệ mới là các điểm khả

nghe. Muốn kết luận về cực trị toàn cục, còn phải xét thêm các điểm nằm trên biên của miền, các điểm mà $\nabla \varphi = 0$, rồi so sánh giá trị của f tại tất cả những điểm ấy.

Phương pháp này thuộc chương trình toán bậc đại học và nằm ngoài phạm vi trình bày của sách. Trong khuôn khổ luyện thi, ta chỉ dùng nó theo đúng một mục đích: *dò tìm điểm rơi*. Hệ phương trình trên thường cho ngay tỉ lệ giữa các biến tại điểm cực trị; biết tỉ lệ đó rồi, ta quay lại chọn hệ số cho một bất đẳng thức AM–GM hoặc Cauchy–Schwarz và viết một lời giải hoàn toàn sơ cấp. Lời giải chính thức không được viện dẫn nhân tử Lagrange.

B. Kỹ thuật và ví dụ minh họa

Ví dụ 10.1. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z = 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{x^3 + y^3}{36z}.$$

Phân tích. Giả thiết chứa z ở bậc nhất nên có thể dùng nó để chặn z theo xy . Hai phân thức đầu gợi ngay dạng Engel của bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, sau đó biểu thức chỉ còn phụ thuộc tổng $t = x + y$. Vì biểu thức đối xứng đối với x và y , điểm rơi nằm ở $x = y$.

Lời giải

• **Chặn ẩn phụ bằng giả thiết.** Từ giả thiết và bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$3xy = x^2 + y^2 + z \geq 2xy + z \Rightarrow xy \geq z.$$

• **Đánh giá hai phân thức đầu.** Áp dụng dạng Engel của bất đẳng thức Cauchy–Schwarz rồi dùng $z \leq xy$ và $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$,

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} = \frac{x^2}{x(y+z)} + \frac{y^2}{y(x+z)} \geq \frac{(x+y)^2}{2xy + z(x+y)}.$$

Vì $2xy + z(x+y) \leq xy(2+x+y) \leq \frac{(x+y)^2}{4}(2+x+y)$, ta thu được

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} \geq \frac{4}{x+y+2}.$$

• **Đánh giá số hạng còn lại.** Vì $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) \geq xy(x+y)$ và $xy \geq z$ nên

$$\frac{x^3 + y^3}{36z} \geq \frac{xy(x+y)}{36z} \geq \frac{x+y}{36}.$$

• **Khảo sát hàm một biến.** Đặt $t = x + y > 0$. Từ hai đánh giá trên,

$$P \geq f(t) = \frac{4}{t+2} + \frac{t}{36}.$$

Ta có $f'(t) = -\frac{4}{(t+2)^2} + \frac{1}{36}$, do đó $f'(t) = 0$ khi và chỉ khi $(t+2)^2 = 144$, tức $t = 10$. Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương tại $t = 10$ nên

$$\min_{t>0} f(t) = f(10) = \frac{4}{12} + \frac{10}{36} = \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = \frac{11}{18}.$$

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức đòi hỏi đồng thời $x = y$, $z = xy$ và $x + y = 10$, tức là $x = y = 5$, $z = 25$. Bộ số này thoả giả thiết vì $25 + 25 + 25 = 3 \cdot 25$.

Đáp số. $\min P = \frac{11}{18}$, đạt được khi $x = y = 5$ và $z = 25$.

Nhận xét. Toàn bộ khó khăn nằm ở chỗ chọn đúng đại lượng để dồn về. Ở đây $t = x + y$ được chọn vì cả ba số hạng đều chặn được theo t , và quan trọng hơn, vì mọi dấu đẳng thức trung gian đều tương thích với nhau tại $x = y$.

Ví dụ 10.2. Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a + b + c = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2(a^2 + b^2 + c^2) + abc.$$

Phân tích. Biểu thức đối xứng hoàn toàn, nên được phép sắp thứ tự ba biến. Nếu cố định biến nhỏ nhất c thì P trở thành hàm bậc nhất theo ab ; khi đó chỉ cần biết dấu của hệ số và miền biến thiên của ab là kết luận được ngay. Việc chọn c nhỏ nhất chính là để bảo đảm hệ số đó không đổi dấu.

Lời giải

• **Sắp thứ tự và chặn biến nhỏ nhất.** Vì P đối xứng, không mất tính tổng quát giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó $6 = a + b + c \geq 3c$, suy ra $0 \leq c \leq 2$.

• **Đặt tổng và tích hai biến còn lại.** Đặt $s = a + b = 6 - c$ và $t = ab$. Theo bất đẳng thức AM–GM,

$$0 \leq t \leq \frac{s^2}{4} = \frac{(6-c)^2}{4}.$$

Từ $a^2 + b^2 = s^2 - 2t$ ta được

$$P = 2(s^2 - 2t + c^2) + tc = 2(6-c)^2 + 2c^2 - t(4-c).$$

• **Xét dấu hệ số của tích.** Do $0 \leq c \leq 2$ nên $4 - c > 0$, vậy P là hàm bậc nhất *ngược biến* theo t . Suy ra

$$2(6-c)^2 + 2c^2 - \frac{(4-c)(6-c)^2}{4} \leq P \leq 2(6-c)^2 + 2c^2.$$

• **Khảo sát chặn trên.** Vế phải bằng $g(c) = 4c^2 - 24c + 72$. Trên đoạn $[0; 2]$ ta có $g'(c) = 8c - 24 < 0$, nên g nghịch biến và $\max_{[0;2]} g = g(0) = 72$.

• **Rút gọn chặn dưới.** Vế trái rút gọn được:

$$\begin{aligned} 2(6-c)^2 + 2c^2 - \frac{(4-c)(6-c)^2}{4} &= (6-c)^2 \cdot \frac{8-(4-c)}{4} + 2c^2 \\ &= \frac{(6-c)^2(4+c)}{4} + 2c^2 = \frac{c^3 - 12c + 144}{4} =: h(c). \end{aligned}$$

Trên đoạn $[0; 2]$ ta có $h'(c) = \frac{3c^2 - 12}{4} \leq 0$, nên h nghịch biến và $\min_{[0;2]} h = h(2) = \frac{128}{4} = 32$.

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Vậy $32 \leq P \leq 72$. Dấu đẳng thức bên trái xảy ra khi $c = 2$ và $ab = \frac{(6-c)^2}{4} = 4$, tức $a = b = c = 2$. Dấu đẳng thức bên phải xảy ra khi $c = 0$ và $ab = 0$, tức bộ $(a; b; c) = (6; 0; 0)$ cùng các hoán vị.

Đáp số. $\min P = 32$, đạt được khi $a = b = c = 2$; $\max P = 72$, đạt được khi $(a; b; c) = (6; 0; 0)$ cùng các hoán vị.

Nhận xét. Việc sắp thứ tự phải xuất phát từ một chủ đích rõ ràng. Ở đây, giả thiết $c = \min\{a, b, c\}$ cho ngay $0 \leq c \leq 2$, nhờ đó $4 - c > 0$; nếu không có nó thì hệ số của t có thể đổi dấu và cả hai chiều đánh giá đều không còn đúng.

Ví dụ 10.3. Cho các số thực a, b, c không nhỏ hơn $-\frac{9}{4}$ và thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2 + 9} + \frac{b}{b^2 + 9} + \frac{c}{c^2 + 9} \leq \frac{3}{10}.$$

Phân tích. Vế trái là tổng của ba giá trị cùng một hàm số, giả thiết cho tổng ba biến: đây đúng là tình huống của phương pháp tiếp tuyến. Vì bất đẳng thức đối xứng và $a + b + c = 3$, điểm rơi dự đoán là $a = b = c = 1$; ta viết tiếp tuyến tại $x_0 = 1$.

Lời giải

• **Lập tiếp tuyến tại điểm rơi.** Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 9}$ trên $\left[-\frac{9}{4}; +\infty\right)$. Ta có

$$f(1) = \frac{1}{10}, \quad f'(x) = \frac{9 - x^2}{(x^2 + 9)^2}, \quad f'(1) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}.$$

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

$$y = \frac{1}{10} + \frac{2}{25}(x - 1) = \frac{4x + 1}{50}.$$

• **Chứng minh bất đẳng thức phụ.** Ta chứng minh bất đẳng thức phụ

$$\frac{x}{x^2 + 9} \leq \frac{4x + 1}{50} \quad \text{với mọi } x \geq -\frac{9}{4}.$$

Thật vậy, vì $x^2 + 9 > 0$ nên bất đẳng thức tương đương với $50x \leq (4x + 1)(x^2 + 9)$, tức là

$$4x^3 + x^2 - 14x + 9 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2(4x + 9) \geq 0,$$

điều này đúng vì $x \geq -\frac{9}{4}$ kéo theo $4x + 9 \geq 0$.

• **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Thay x lần lượt bởi a, b, c rồi cộng ba bất đẳng thức cùng chiều,

$$\frac{a}{a^2 + 9} + \frac{b}{b^2 + 9} + \frac{c}{c^2 + 9} \leq \frac{4(a + b + c) + 3}{50} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}.$$

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Trong bất đẳng thức phụ, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x-1)^2(4x+9) = 0$, tức là $x = 1$ hoặc $x = -\frac{9}{4}$. Do đó dấu đẳng thức của bất đẳng thức đã cho đòi hỏi mỗi số a, b, c thuộc tập $\left\{1; -\frac{9}{4}\right\}$.

• **Loại trường hợp biên.** Nếu trong ba số ấy có đúng k số bằng $-\frac{9}{4}$ thì tổng của chúng bằng

$$(3-k) \cdot 1 + k \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = 3 - \frac{13k}{4},$$

tổng này bằng 3 khi và chỉ khi $k = 0$. Vậy ràng buộc $a + b + c = 3$ loại hết các tổ hợp chứa $-\frac{9}{4}$, và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Điều kiện $a, b, c \geq -\frac{9}{4}$ trong đề bài không phải ngẫu nhiên: nó chính là điều kiện để nhân tử $4x + 9$ giữ dấu không âm. Đầu mút $x = -\frac{9}{4}$ vì thế cũng là một nghiệm của dấu đẳng thức trong bất đẳng thức phụ, và phải nhờ ràng buộc tổng mới loại được nó ở bước cuối. Nói cách khác, giả thiết của bài toán được đặt ra vừa đủ cho bất đẳng thức phụ đúng, và đó là dấu hiệu điển hình của một bài toán được xây dựng bằng phương pháp tiếp tuyến.

Ví dụ 10.4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{9+bc} + \frac{b}{9+ca} + \frac{c}{9+ab} \geq \frac{3}{10}.$$

Phân tích. Mỗi số hạng chứa tới ba biến nên chưa dùng ngay được phương pháp tiếp tuyến. Bước chuẩn bị ở đây là khử bc theo a : bất đẳng thức AM-GM cho $bc \leq \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{(3-a)^2}{4}$, đưa mỗi số hạng về một hàm chỉ phụ thuộc một biến. Điểm rơi vẫn là $a = b = c = 1$.

Lời giải

• **Khử tích hai biến trong mẫu.** Theo bất đẳng thức AM-GM, $bc \leq \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{(3-a)^2}{4}$. Do tử số dương và hàm số nghịch biến theo mẫu,

$$\frac{a}{9+bc} \geq \frac{a}{9+\frac{(3-a)^2}{4}} = \frac{4a}{36+(3-a)^2} = \frac{4a}{a^2-6a+45}.$$

Hai số hạng còn lại được đánh giá tương tự. Vậy chỉ cần chứng minh

$$\frac{4a}{a^2-6a+45} + \frac{4b}{b^2-6b+45} + \frac{4c}{c^2-6c+45} \geq \frac{3}{10}.$$

• **Lập tiếp tuyến tại điểm rơi.** Xét hàm số $f(x) = \frac{4x}{x^2-6x+45}$ trên khoảng $(0; 3)$. Mẫu số bằng $(x-3)^2 + 36 > 0$ nên f xác định và có đạo hàm

$$f'(x) = \frac{4(45-x^2)}{(x^2-6x+45)^2}, \quad f(1) = \frac{1}{10}, \quad f'(1) = \frac{176}{1600} = \frac{11}{100}.$$

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

$$y = \frac{1}{10} + \frac{11}{100}(x - 1) = \frac{11x - 1}{100}.$$

• **Chứng minh bất đẳng thức phụ.** Ta chứng minh bất đẳng thức phụ

$$\frac{4x}{x^2 - 6x + 45} \geq \frac{11x - 1}{100} \quad \text{với mọi } x \in (0; 3).$$

Vì mẫu số dương, bất đẳng thức tương đương với $400x \geq (11x - 1)(x^2 - 6x + 45)$, tức là

$$11x^3 - 67x^2 + 101x - 45 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(11x - 45) \leq 0.$$

Với $0 < x < 3$ ta có $11x - 45 < 33 - 45 < 0$, nên bất đẳng thức đúng.

• **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Vì a, b, c dương và có tổng bằng 3 nên cả ba đều thuộc $(0; 3)$. Cộng ba bất đẳng thức phụ,

$$\frac{a}{9 + bc} + \frac{b}{9 + ca} + \frac{c}{9 + ab} \geq \frac{11(a + b + c) - 3}{100} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 10.5*. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c không đồng thời bằng 0 ta có

$$\frac{(b + c - a)^2}{(b + c)^2 + a^2} + \frac{(c + a - b)^2}{(c + a)^2 + b^2} + \frac{(a + b - c)^2}{(a + b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

(Japan MO 2002)

Phân tích. Hai vế cùng bậc 0, tức là bất đẳng thức thuần nhất, nên được phép chuẩn hoá $a + b + c = 1$. Sau khi chuẩn hoá, mỗi số hạng chỉ còn phụ thuộc một biến và tổng ba biến đã biết: bài toán rơi đúng vào khuôn của phương pháp tiếp tuyến, với điểm rơi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Lời giải

• **Chuẩn hoá tổng ba biến.** Vì bất đẳng thức thuần nhất bậc 0, ta chuẩn hoá $a + b + c = 1$. Khi đó $b + c = 1 - a$ và

$$\frac{(b + c - a)^2}{(b + c)^2 + a^2} = \frac{(1 - 2a)^2}{(1 - a)^2 + a^2} = \frac{4a^2 - 4a + 1}{2a^2 - 2a + 1}.$$

Bất đẳng thức trở thành: với $a, b, c \in [0; 1]$ và $a + b + c = 1$,

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{3}{5}, \quad \text{trong đó } f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 - 2x + 1}.$$

• **Rút gọn hàm số và lấy đạo hàm.** Mẫu số $2x^2 - 2x + 1 = x^2 + (x - 1)^2 > 0$ với mọi x . Vì $4x^2 - 4x + 1 = 2(2x^2 - 2x + 1) - 1$ nên

$$f(x) = 2 - \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}, \quad \text{do đó} \quad f'(x) = \frac{4x - 2}{(2x^2 - 2x + 1)^2}.$$

Từ đó $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{5}$ và $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{54}{25}$, nên tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{3}$ là

$$y = \frac{1}{5} - \frac{54}{25} \left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{23 - 54x}{25}.$$

• **Chứng minh bất đẳng thức phụ.** Ta chứng minh bất đẳng thức phụ

$$f(x) \geq \frac{23 - 54x}{25} \quad \text{với mọi } x \in [0; 1].$$

Thật vậy,

$$f(x) - \frac{23 - 54x}{25} = \frac{25(4x^2 - 4x + 1) - (23 - 54x)(2x^2 - 2x + 1)}{25(2x^2 - 2x + 1)} = \frac{2(54x^3 - 27x^2 + 1)}{25(2x^2 - 2x + 1)}.$$

Mặt khác $54x^3 - 27x^2 + 1 = (3x - 1)^2(6x + 1)$, nên với $x \geq 0$ tử số không âm, còn mẫu số dương. Bất đẳng thức phụ được chứng minh.

• **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Cộng ba bất đẳng thức phụ tại $x = a, x = b, x = c$,

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{69 - 54(a + b + c)}{25} = \frac{69 - 54}{25} = \frac{3}{5}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Trong lời giải này bước chuẩn hoá là cần thiết: nếu không cố định $a + b + c$ thì tổng ba vế phải của các tiếp tuyến không tính được, và bước cộng cuối cùng không thực hiện được. Nói tổng quát hơn, phương pháp tiếp tuyến cần *một đại lượng tổng hợp* mà giả thiết cho phép tính được – tổng các biến, tổng bình phương, ... – để hàm trung gian cộng lại thành một số đã biết. Ví dụ 10.7 ngay sau đây là trường hợp đại lượng tổng hợp ấy là tổng bình phương chứ không phải tổng các biến.

Ví dụ 10.6. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

(Russia MO 2002)

Phân tích. Vế phải chưa phải tổng của ba giá trị cùng một hàm số một biến. Dùng đồng nhất thức $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ để thay $ab + bc + ca$ bởi một biểu thức chỉ chứa các bình phương, ta đưa được bất đẳng thức về đúng dạng tách biến.

Lời giải

• **Đưa về dạng tách biến.** Từ $a + b + c = 3$ ta có

$$9 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca),$$

nên $ab + bc + ca = \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a^2 + 2\sqrt{a}) + (b^2 + 2\sqrt{b}) + (c^2 + 2\sqrt{c}) \geq 9.$$

• **Lập tiếp tuyến tại điểm rơi.** Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x}$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Ta có $f(1) = 3$ và $f'(x) = 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$, nên $f'(1) = 3$. Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $y = 3x$.

• **Chứng minh bất đẳng thức phụ.** Ta chứng minh $f(x) \geq 3x$ với mọi $x \geq 0$. Đặt $u = \sqrt{x} \geq 0$, khi đó

$$f(x) - 3x = x^2 - 3x + 2\sqrt{x} = u(u^3 - 3u + 2) = u(u - 1)^2(u + 2) \geq 0.$$

• **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Cộng ba bất đẳng thức phụ,

$$(a^2 + 2\sqrt{a}) + (b^2 + 2\sqrt{b}) + (c^2 + 2\sqrt{c}) \geq 3(a + b + c) = 9.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 10.7. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c} \geq \frac{3}{2}.$$

Phân tích. Lần này giả thiết cho tổng bình phương chứ không cho tổng ba biến, nên hàm trung gian phải có dạng $\lambda + \mu x^2$ như đã nêu ở mục A. Điểm rơi là $a = b = c = 2$; hai hệ số λ, μ được xác định từ điều kiện tiếp xúc tại $x_0 = 2$.

Lời giải

• **Xác định miền của mỗi biến.** Từ giả thiết, mỗi biến thoả $0 < a \leq \sqrt{12} = 2\sqrt{3} < 4$, nên các mẫu số đều dương.

• **Chọn hàm trung gian bậc hai.** Xét $f(x) = \frac{1}{4-x}$ và tìm hàm trung gian dạng $g(x) = \lambda + \mu x^2$ tiếp xúc với f tại $x_0 = 2$. Ta có $f(2) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = \frac{1}{(4-x)^2}$, nên $f'(2) = \frac{1}{4}$. Điều kiện tiếp xúc cho

$$\mu = \frac{f'(2)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{16}, \quad \lambda = f(2) - \mu \cdot 2^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

• **Chứng minh bất đẳng thức phụ.** Ta chứng minh bất đẳng thức phụ

$$\frac{1}{4-x} \geq \frac{1}{4} + \frac{x^2}{16} \quad \text{với mọi } x \in [0; 2\sqrt{3}].$$

Nhân hai vế với $16(4-x) > 0$, bất đẳng thức tương đương với

$$16 \geq (4+x^2)(4-x) \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 \geq 0,$$

điều này đúng với mọi $x \geq 0$.

• **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Cộng ba bất đẳng thức phụ và dùng giả thiết,

$$\frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c} \geq \frac{3}{4} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{16} = \frac{3}{4} + \frac{12}{16} = \frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Nhận xét. So sánh với Ví dụ 10.3, ta thấy phương pháp tiếp tuyến và kỹ thuật U.C.T chỉ là hai cách gọi của cùng một ý tưởng: tìm một hàm trung gian tiếp xúc với hàm đã cho tại điểm rơi, có dạng *cộng được* theo giả thiết. Giả thiết cho tổng các biến thì chọn hàm bậc nhất; giả thiết cho tổng bình phương thì chọn hàm bậc hai khuyết bậc nhất. Sau phép thay $a \mapsto \frac{a}{2}, b \mapsto \frac{b}{2}, c \mapsto \frac{c}{2}$, đề bài trên chính là Ví dụ 8.4, ở đó lời giải đi theo phương pháp p, q, r ; đây là một cặp ví dụ được giữ song song để so sánh hai kỹ thuật.

Ví dụ 10.8*. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1).$$

(MOSP 2001)

Phân tích. Ràng buộc là một tích, nên phép dồn biến thích hợp là thay (b, c) bởi $(\sqrt{bc}, \sqrt{bc})$: phép thay này giữ nguyên abc . Cố định a , tích $bc = \frac{1}{a}$ cũng cố định, chỉ còn tổng $s = b + c$ thay đổi; ta xét về trái như một hàm của s trên miền $s \geq 2\sqrt{bc}$.

Lời giải

• **Cố định một biến.** Đặt

$$F = (a+b)(b+c)(c+a) - 4(a+b+c-1).$$

Cố định $a > 0$ và đặt $s = b + c, p = bc = \frac{1}{a}$. Do $(a+b)(a+c) = a^2 + as + p$, ta viết được

$$F = s(a^2 + as + p) - 4(a + s - 1) = as^2 + \left(a^2 + \frac{1}{a} - 4\right)s - 4a + 4.$$

• **Xét dấu đạo hàm theo tổng.** Xem F là hàm số của s trên nửa khoảng $[2\sqrt{p}; +\infty)$, với $2\sqrt{p} = \frac{2}{\sqrt{a}}$.

Ta có

$$F'(s) = 2as + a^2 + \frac{1}{a} - 4, \quad F'\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right) = 4\sqrt{a} + a^2 + \frac{1}{a} - 4.$$

Theo bất đẳng thức AM–GM,

$$4\sqrt{a} + \frac{1}{a} = 2\sqrt{a} + 2\sqrt{a} + \frac{1}{a} \geq 3\sqrt[3]{2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{a}} = 3\sqrt[3]{4} > 4,$$

bất đẳng thức cuối đúng vì $(3\sqrt[3]{4})^3 = 108 > 64 = 4^3$. Suy ra $F'\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right) > a^2 > 0$.

• **Kết luận chặng dồn biến.** Vì F' đồng biến theo s (hệ số $2a > 0$), ta có $F'(s) > 0$ trên toàn nửa khoảng đang xét. Do đó F đồng biến theo s và

$$F \geq F\Big|_{s=2\sqrt{p}}, \quad \text{tức là} \quad F(a, b, c) \geq F\left(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}\right).$$

• **Xét trường hợp hai biến bằng nhau.** Vậy chỉ còn phải xét trường hợp $b = c$. Đặt $b = c = t > 0$; từ $abc = 1$ suy ra $a = \frac{1}{t^2}$ và

$$F = \left(\frac{1}{t^2} + t\right)^2 \cdot 2t - 4\left(\frac{1}{t^2} + 2t - 1\right) = \frac{2(1+t^3)^2}{t^3} - \frac{4}{t^2} - 8t + 4.$$

Khai triển $\frac{2(1+t^3)^2}{t^3} = \frac{2}{t^3} + 4 + 2t^3$, ta được

$$F = 2t^3 - 8t + 8 + \frac{2}{t^3} - \frac{4}{t^2}.$$

• **Quy về bất đẳng thức đa thức.** Nhân hai vế với $\frac{t^3}{2} > 0$, bất đẳng thức $F \geq 0$ tương đương với

$$G(t) = t^6 - 4t^4 + 4t^3 - 2t + 1 \geq 0.$$

Vì $G(1) = 0$ và $G'(1) = 6 - 16 + 4 - 2 = 0$, đa thức G chia hết cho $(t - 1)^2$. Thực hiện phép chia,

$$G(t) = (t - 1)^2 (t^4 + 2t^3 - t^2 + 1).$$

Với $t > 0$ ta có $t^4 - t^2 + 1 > 0$ (do tam thức $u^2 - u + 1$ có biệt thức âm) và $2t^3 > 0$, nên $t^4 + 2t^3 - t^2 + 1 > 0$. Do đó $G(t) \geq 0$.

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Kết hợp hai chặng trên ta được $F \geq 0$, tức là điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức đòi hỏi $b = c$ và $t = 1$, tức $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Sơ đồ của kỹ thuật dồn biến cổ điển gồm hai chặng: chặng thứ nhất chứng minh $P(a, b, c) \geq P(a, t, t)$, chặng thứ hai khảo sát hàm một biến $P(a, t, t)$. Chặng thứ nhất không nhất thiết phải khai triển trực tiếp; ở đây ta chỉ cần xét dấu đạo hàm theo $s = b + c$, cách làm ngắn hơn và không phải giả thiết thêm về thứ tự ba biến.

Ví dụ 10.9. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + 2b^2 + 3c^2.$$

Phân tích. Biểu thức không đối xứng đối với ba biến, nên không nên mặc định điểm rơi là bộ đối xứng $a = b = c$; một biểu thức không đối xứng vẫn có thể đạt cực trị tại một điểm đối xứng, vì vậy tỉ lệ giữa các biến phải được xác định chứ không được đoán. Ta dùng nhân tử Lagrange để dò tỉ lệ ấy: hệ điều kiện cần cho $a : b : c = 6 : 3 : 2$. Sau đó viết lời giải chính thức bằng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz với bộ hệ số phù hợp.

• **Dò điểm rơi.** Đặt $L = a^2 + 2b^2 + 3c^2 + \lambda(a + b + c - 6)$. Hệ điều kiện cần cho ta

$$2a + \lambda = 0, \quad 4b + \lambda = 0, \quad 6c + \lambda = 0,$$

suy ra $2a = 4b = 6c$, tức là $a : b : c = 6 : 3 : 2$. Kết hợp với $a + b + c = 6$ ta được

$$a = \frac{36}{11}, \quad b = \frac{18}{11}, \quad c = \frac{12}{11}, \quad \text{khi đó } P = \frac{216}{11}.$$

Điểm rơi. $a = \frac{36}{11}, b = \frac{18}{11}, c = \frac{12}{11}$. Tỉ lệ $a : b : c = 6 : 3 : 2$ chính là tỉ lệ nghịch của các hệ số 1, 2, 3; đây là gợi ý để chọn bộ số trong bất đẳng thức Cauchy–Schwarz.

Lời giải

- **Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho hai bộ số $(a, \sqrt{2}b, \sqrt{3}c)$ và $(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$:

$$(a + b + c)^2 \leq (a^2 + 2b^2 + 3c^2) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{6} (a^2 + 2b^2 + 3c^2).$$

- **Thay ràng buộc vào đánh giá.** Thay $a + b + c = 6$ ta được

$$P = a^2 + 2b^2 + 3c^2 \geq \frac{6}{11} \cdot 36 = \frac{216}{11}.$$

- **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy–Schwarz xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a}{1} = \frac{\sqrt{2}b}{1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}c}{1/\sqrt{3}}, \quad \text{tức là } a = 2b = 3c.$$

Kết hợp với $a + b + c = 6$ ta được đúng bộ số đã dò ở trên.

Đáp số. $\min P = \frac{216}{11}$, đạt được khi $a = \frac{36}{11}$, $b = \frac{18}{11}$, $c = \frac{12}{11}$.

Nhận xét. Nhân tử Lagrange không xuất hiện trong lời giải chính thức, và cũng không cần xuất hiện: trong lời giải này vai trò của nó chỉ là chỉ ra tỉ lệ $a : b : c$. Khi đã biết điểm rơi, việc chọn hệ số cho một bất đẳng thức cổ điển trở thành thao tác máy móc. Đó là cách khai thác hợp lý công cụ này trong phạm vi phổ thông.

C. Bài tập có lời giải

Bài 10.1. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy}.$$

Phân tích. Giả thiết và biểu thức chỉ phụ thuộc hai đại lượng đối xứng $x + y$ và xy , mà $x + y$ đã cho, nên phép đặt $t = xy$ đưa P về một hàm một biến. Vì P đối xứng đối với x và y , điểm rơi dự đoán là $x = y = \frac{1}{2}$, ứng với $t = \frac{1}{4}$ — đúng bằng đầu mút phải của miền biến thiên của t . Điểm rơi nằm ở biên nên bước xác định miền của t là bước quyết định: nghiệm của phương trình $f'(t) = 0$ nằm ngoài miền ấy.

Lời giải

- **Đổi biến về tích hai số.** Đặt $t = xy$. Từ $x + y = 1$ ta có

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 1 - 2t,$$

do đó

$$P = \frac{1}{1 - 2t} + \frac{1}{t}.$$

- **Xác định miền biến thiên.** Vì x, y dương nên $t > 0$. Theo bất đẳng thức AM–GM,

$$t = xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

- **Kiểm tra chiều ngược lại.** Với mỗi $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$ hai số x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - X + t = 0$; phương trình này có nghiệm vì $\Delta = 1 - 4t \geq 0$, và hai nghiệm ấy đều dương vì tổng của chúng bằng $1 > 0$ còn tích của chúng bằng $t > 0$. Vậy t nhận đúng mọi giá trị trong nửa khoảng $\left(0; \frac{1}{4}\right]$. Ngoài ra $1 - 2t \geq \frac{1}{2} > 0$ nên P xác định.

- **Xét dấu đạo hàm.** Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{1-2t} + \frac{1}{t}$ trên $\left(0; \frac{1}{4}\right]$. Ta có

$$f'(t) = \frac{2}{(1-2t)^2} - \frac{1}{t^2}.$$

Với $0 < t \leq \frac{1}{4}$ hai số $t\sqrt{2}$ và $1 - 2t$ đều dương, đồng thời

$$t\sqrt{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2} \leq 1 - 2t,$$

nên $2t^2 < (1 - 2t)^2$, suy ra $\frac{2}{(1-2t)^2} < \frac{1}{t^2}$, tức là $f'(t) < 0$ trên toàn miền.

- **Kết luận từ tính đơn điệu.** Hàm số f nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{4}\right]$ nên

$$P = f(t) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + 4 = 2 + 4 = 6.$$

- **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{1}{4}$, tức $xy = \frac{1}{4}$ và $x + y = 1$, nghĩa là $x = y = \frac{1}{2}$. Khi đó $P = \frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/4} = 6$.

Đáp số. $\min P = 6$, đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Bài 10.2. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2 + 2} + \frac{b}{b^2 + 2} + \frac{c}{c^2 + 2} \leq 1.$$

Phân tích. Về trái là tổng ba giá trị của cùng một hàm số một biến, còn giả thiết cho tổng ba biến: đây đúng là khuôn của phương pháp tiếp tuyến. Bất đẳng thức đối xứng và $a + b + c = 3$ nên điểm rơi dự đoán là $a = b = c = 1$; ta viết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 2}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

Lời giải

- **Lập tiếp tuyến tại điểm rơi.** Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ trên khoảng $(0; 3)$. Mẫu số dương với mọi x nên

$$f(1) = \frac{1}{3}, \quad f'(x) = \frac{(x^2 + 2) - x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2 - x^2}{(x^2 + 2)^2}, \quad f'(1) = \frac{1}{9}.$$

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}(x - 1) = \frac{x + 2}{9}.$$

- **Chứng minh bất đẳng thức phụ.** Ta chứng minh

$$\frac{x}{x^2 + 2} \leq \frac{x + 2}{9} \quad \text{với mọi } x > 0.$$

Vì $x^2 + 2 > 0$, bất đẳng thức tương đương với $9x \leq (x + 2)(x^2 + 2)$, tức là

$$x^3 + 2x^2 - 7x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 4) \geq 0,$$

điều này đúng vì $x > 0$ kéo theo $x + 4 > 0$.

- **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Ba số a, b, c đều dương nên thay x lần lượt bởi a, b, c rồi cộng theo vế,

$$\frac{a}{a^2 + 2} + \frac{b}{b^2 + 2} + \frac{c}{c^2 + 2} \leq \frac{(a + b + c) + 6}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

- **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức trong bất đẳng thức phụ chỉ xảy ra khi $x = 1$, nên dấu đẳng thức của bất đẳng thức đã cho xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$; bộ số này thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Bài 10.3. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a + b = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + \frac{4}{ab}.$$

Phân tích. Cả giả thiết lẫn biểu thức đều đối xứng đối với a và b , nên sau khi đặt $t = ab$ thì P chỉ còn phụ thuộc t . Điểm rơi dự đoán là $a = b = 1$, ứng với $t = 1$, tức là đầu mút phải của miền biến thiên; vì vậy phải xác định miền của t trước khi kết luận.

Lời giải

- **Quy đồng hai phân thức đầu.** Với a, b dương,

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 + b^3}{ab}.$$

- **Biểu diễn theo tổng và tích.** Từ $a + b = 2$ và đồng nhất thức $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ ta được $a^3 + b^3 = 8 - 6ab$. Đặt $t = ab$, khi đó

$$P = \frac{8 - 6t}{t} + \frac{4}{t} = \frac{12 - 6t}{t} = \frac{12}{t} - 6.$$

- **Xác định miền biến thiên.** Vì a, b dương nên $t > 0$; theo bất đẳng thức AM–GM,

$$t = ab \leq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = 1.$$

Vậy $t \in (0; 1]$.

• **Kết luận từ tính đơn điệu.** Hàm số $g(t) = \frac{12}{t} - 6$ có $g'(t) = -\frac{12}{t^2} < 0$ nên nghịch biến trên $(0; 1]$. Do đó

$$P = g(t) \geq g(1) = 12 - 6 = 6.$$

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 1$, tức $ab = 1$ và $a + b = 2$, nghĩa là $a = b = 1$. Khi đó $P = 1 + 1 + 4 = 6$.

Đáp số. min $P = 6$, đạt được khi $a = b = 1$.

Bài 10.4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geq 1.$$

Phân tích. Mỗi số hạng đã là giá trị của cùng một hàm số một biến và giả thiết cho tổng ba biến, nên dùng ngay được phương pháp tiếp tuyến. Bất đẳng thức đối xứng nên điểm rơi là $a = b = c = 1$; chiều của bất đẳng thức là $\geq$, do đó ta chờ đợi đồ thị nằm phía trên tiếp tuyến tại $x_0 = 1$.

Lời giải

• **Lập tiếp tuyến tại điểm rơi.** Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$. Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên f xác định trên $\mathbb{R}$ và

$$f(1) = \frac{1}{3}, \quad f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}, \quad f'(1) = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

$$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(x-1) = \frac{2-x}{3}.$$

• **Chứng minh bất đẳng thức phụ.** Ta chứng minh

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} \geq \frac{2-x}{3} \quad \text{với mọi } x > 0.$$

Nhân hai vế với $3(x^2 + x + 1) > 0$, bất đẳng thức tương đương với $3 \geq (2-x)(x^2 + x + 1)$. Khai triển vế phải,

$$(2-x)(x^2 + x + 1) = -x^3 + x^2 + x + 2,$$

nên bất đẳng thức trở thành

$$x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1) \geq 0,$$

điều này đúng vì $x > 0$.

• **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Thay x lần lượt bởi a, b, c rồi cộng theo vế,

$$\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geq \frac{6 - (a + b + c)}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 10.5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8}} \leq 1.$$

Phân tích. Mỗi số hạng đã là hàm của một biến nên chỉ cần lấy tiếp tuyến tại điểm rơi $x_0 = 1$. Bất đẳng thức phụ chứa căn thức, nhưng hai vế của nó đều dương trên miền đang xét nên có thể bình phương để đưa về một bất đẳng thức đa thức.

Lời giải

• **Lập tiếp tuyến tại điểm rơi.** Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}}$ trên khoảng $(0; 3)$. Ta có

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 8} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}}}{x^2 + 8} = \frac{(x^2 + 8) - x^2}{(x^2 + 8)^{3/2}} = \frac{8}{(x^2 + 8)^{3/2}},$$

do đó $f(1) = \frac{1}{3}$ và $f'(1) = \frac{8}{27}$. Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

$$y = \frac{1}{3} + \frac{8}{27}(x - 1) = \frac{8x + 1}{27}.$$

• **Chứng minh bất đẳng thức phụ.** Ta chứng minh

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}} \leq \frac{8x + 1}{27} \quad \text{với mọi } x \in (0; 3).$$

Trên khoảng này hai vế đều dương, nên bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức giữa hai bình phương:

$$\frac{x^2}{x^2 + 8} \leq \frac{(8x + 1)^2}{729} \Leftrightarrow (8x + 1)^2 (x^2 + 8) - 729x^2 \geq 0.$$

Khai triển vế trái,

$$\begin{aligned} (8x + 1)^2 (x^2 + 8) - 729x^2 &= (64x^2 + 16x + 1)(x^2 + 8) - 729x^2 \\ &= 64x^4 + 16x^3 + 513x^2 + 128x + 8 - 729x^2 \\ &= 8(8x^4 + 2x^3 - 27x^2 + 16x + 1) = 8(x - 1)^2 (8x^2 + 18x + 1). \end{aligned}$$

Với $x > 0$ ta có $8x^2 + 18x + 1 > 0$, nên vế trái không âm và bất đẳng thức phụ được chứng minh.

• **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Vì a, b, c dương và có tổng bằng 3 nên cả ba đều thuộc $(0; 3)$. Cộng ba bất đẳng thức phụ,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8}} \leq \frac{8(a + b + c) + 3}{27} = \frac{27}{27} = 1.$$

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 10.6*. Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2).$$

Phân tích. Tại bộ đối xứng $a = b = c = 1$ ta chỉ được $P = 1$, trong khi tại bộ $(2; 1; 0)$ đã có $P = 12$: điểm rơi nằm ở biên của miền, ứng với một biến bằng 0. Biểu thức đối xứng hoàn toàn nên được phép giả sử c nhỏ nhất; khi đó hai nhân tử chứa c đều chặn được bởi các biểu thức không chứa c , nhờ vậy bài toán quy về trường hợp $c = 0$, tức là về hai biến với tổng cho trước.

Lời giải

• **Sắp thứ tự ba biến.** Vì P đối xứng hoàn toàn, không mất tính tổng quát giả sử $c = \min\{a, b, c\}$.

• **Khử biến nhỏ nhất.** Với mọi số thực u, v ta có $u^2 - uv + v^2 = \left(u - \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4} \geq 0$, nên cả ba nhân tử của P đều không âm. Mặt khác $0 \leq c \leq b$ cho

$$b^2 - bc + c^2 = b^2 - c(b - c) \leq b^2,$$

và $0 \leq c \leq a$ cho $c^2 - ca + a^2 = a^2 - c(a - c) \leq a^2$. Nhân ba đánh giá cùng chiều giữa các số không âm,

$$P \leq a^2 b^2 (a^2 - ab + b^2).$$

• **Đặt tổng và tích hai biến còn lại.** Đặt $s = a + b$ và $t = ab$. Vì $c \geq 0$ nên $0 \leq s \leq a + b + c = 3$; theo bất đẳng thức AM-GM, $0 \leq t \leq \frac{s^2}{4}$. Ngoài ra $a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab = s^2 - 3t$, do đó

$$P \leq t^2 (s^2 - 3t).$$

• **Khảo sát theo tích.** Cố định s và xét $g(t) = t^2 (s^2 - 3t) = s^2 t^2 - 3t^3$ trên đoạn $\left[0; \frac{s^2}{4}\right]$. Ta có

$$g'(t) = 2s^2 t - 9t^2 = t(2s^2 - 9t),$$

nên $g'(t) > 0$ khi $0 < t < \frac{2s^2}{9}$ và $g'(t) < 0$ khi $t > \frac{2s^2}{9}$. Vì $\frac{2s^2}{9} < \frac{s^2}{4}$, điểm dừng nằm trong đoạn đang xét, do đó

$$g(t) \leq g\left(\frac{2s^2}{9}\right) = \frac{4s^4}{81} \left(s^2 - \frac{2s^2}{3}\right) = \frac{4s^4}{81} \cdot \frac{s^2}{3} = \frac{4s^6}{243}.$$

• **Khảo sát theo tổng.** Hàm số $s \mapsto \frac{4s^6}{243}$ đồng biến trên $[0; 3]$, nên từ $0 \leq s \leq 3$ ta được

$$P \leq \frac{4s^6}{243} \leq \frac{4 \cdot 3^6}{243} = \frac{2916}{243} = 12.$$

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức đòi hỏi đồng thời $c = 0$, $s = a + b = 3$ và $t = ab = \frac{2s^2}{9} = 2$. Khi đó a, b là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0$, tức $\{a, b\} = \{1, 2\}$. Thử lại với $(a; b; c) = (2; 1; 0)$:

$$P = (4 - 2 + 1)(1 - 0 + 0)(0 - 0 + 4) = 3 \cdot 1 \cdot 4 = 12.$$

Đáp số. $\max P = 12$, đạt được khi $(a; b; c) = (2; 1; 0)$ cùng các hoán vị.

Bài 10.7. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc.$$

Phân tích. So với một bài dồn biến thông thường, bài toán chỉ khác ở chỗ miền xác định là tập các bộ ba cạnh tam giác. Sắp thứ tự để c là cạnh lớn nhất thì bất đẳng thức tam giác cho $c < 3$, còn tính lớn nhất cho $c \geq 2$; miền của c vì thế là nửa khoảng $[2; 3)$. Cố định c , biểu thức Q là hàm bậc nhất theo ab và hệ số của ab giữ dấu không đổi trên miền ấy. Điểm rơi dự đoán là tam giác đều $a = b = c = 2$.

Lời giải

• **Chặn cạnh lớn nhất.** Vì Q đối xứng hoàn toàn, không mất tính tổng quát giả sử $0 < a \leq b \leq c$. Từ $a + b + c = 6$ và $c \geq a, c \geq b$ ta có $3c \geq a + b + c = 6$, suy ra $c \geq 2$. Mặt khác bất đẳng thức tam giác cho $a + b > c$, tức $6 - c > c$, suy ra $c < 3$. Vậy $c \in [2; 3)$.

• **Đưa về hàm bậc nhất theo tích.** Đặt $s = a + b = 6 - c$. Từ $a^2 + b^2 = s^2 - 2ab$ ta được

$$Q = 3(s^2 - 2ab + c^2) + 2abc = 3(6 - c)^2 + 3c^2 - 2ab(3 - c).$$

• **Chặn tích hai cạnh còn lại.** Vì $c < 3$ nên $3 - c > 0$, do đó Q là hàm bậc nhất nghịch biến theo ab .

Theo bất đẳng thức AM–GM, $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(6-c)^2}{4}$, suy ra

$$Q \geq 3(6 - c)^2 + 3c^2 - \frac{(6 - c)^2(3 - c)}{2} = (6 - c)^2 \cdot \frac{6 - (3 - c)}{2} + 3c^2 = \frac{(6 - c)^2(3 + c)}{2} + 3c^2.$$

• **Rút gọn biểu thức chặn.** Khai triển $(6 - c)^2(3 + c) = (36 - 12c + c^2)(3 + c) = c^3 - 9c^2 + 108$, ta được

$$Q \geq \frac{c^3 - 9c^2 + 108}{2} + 3c^2 = \frac{c^3}{2} - \frac{3c^2}{2} + 54 =: h(c).$$

• **Khảo sát hàm một biến.** Trên nửa khoảng $[2; 3)$ ta có

$$h'(c) = \frac{3c^2}{2} - 3c = \frac{3c(c - 2)}{2} \geq 0,$$

nên h đồng biến và $\min_{[2; 3)} h = h(2) = 4 - 6 + 54 = 52$. Vậy $Q \geq 52$.

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức đòi hỏi $c = 2$ và $ab = \frac{(6 - c)^2}{4} = 4$; kết hợp với $a + b = 4$ ta được $a = b = 2$. Bộ $(a; b; c) = (2; 2; 2)$ là ba cạnh của một tam giác đều chu vi 6 và cho $Q = 3 \cdot 12 + 2 \cdot 8 = 52$.

Đáp số. $\min Q = 52$, đạt được khi $a = b = c = 2$.

Bài 10.8*. Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1; 3]$ và thoả mãn $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc.$$

(THPT Quốc gia 2015)

Phân tích. Tử số được lập từ đúng các đại lượng đối xứng cơ bản, nên đồng nhất thức $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$ sẽ rút gọn P thành biểu thức chỉ chứa $q = ab + bc + ca$ và $r = abc$. Điều kiện $a, b, c \in [1; 3]$ được khai thác qua hai tích $(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 0$ và $(3 - a)(3 - b)(3 - c) \geq 0$: chúng chặn r theo q từ hai phía, đồng thời chặn luôn q . Sau đó chỉ còn một hàm một biến theo q .

Lời giải

• **Rút gọn nhờ đồng nhất thức đối xứng.** Đặt $p = a + b + c = 6$, $q = ab + bc + ca$ và $r = abc$. Khai triển bình phương của tổng ba số ab, bc, ca ,

$$q^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12r.$$

Do đó tử số của phân thức bằng $q^2 - 12r + 12r + 72 = q^2 + 72$, và

$$P = \frac{q^2 + 72}{q} - \frac{r}{2} = q + \frac{72}{q} - \frac{r}{2}.$$

• **Chặn tích ba số từ phía dưới.** Vì $a, b, c \geq 1$ nên $(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 0$. Khai triển,

$$abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow r \geq q - 5.$$

• **Chặn tích ba số từ phía trên.** Vì $a, b, c \leq 3$ nên $(3 - a)(3 - b)(3 - c) \geq 0$. Khai triển,

$$27 - 9(a + b + c) + 3(ab + bc + ca) - abc \geq 0 \Leftrightarrow r \leq 3q - 27.$$

• **Chặn tổng các tích đôi một.** Từ $q - 5 \leq r \leq 3q - 27$ suy ra $q - 5 \leq 3q - 27$, tức $q \geq 11$. Mặt khác $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ cho $p^2 \geq 3q$, tức $q \leq \frac{36}{3} = 12$. Vậy $q \in [11; 12]$.

• **Đưa về hàm một biến.** Từ $r \geq q - 5$ ta có $-\frac{r}{2} \leq \frac{5 - q}{2}$, do đó

$$P \leq q + \frac{72}{q} + \frac{5 - q}{2} = \frac{q}{2} + \frac{72}{q} + \frac{5}{2} =: \varphi(q).$$

• **Khảo sát trên đoạn.** Trên đoạn $[11; 12]$ ta có

$$\varphi'(q) = \frac{1}{2} - \frac{72}{q^2} = \frac{q^2 - 144}{2q^2} \leq 0,$$

nên φ nghịch biến và

$$\max_{[11; 12]} \varphi = \varphi(11) = \frac{11}{2} + \frac{72}{11} + \frac{5}{2} = 8 + \frac{72}{11} = \frac{160}{11}.$$

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức đòi hỏi $q = 11$ và $r = q - 5 = 6$. Khi đó a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X - 2)(X - 3) = 0,$$

tức $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$; bộ số này nằm trong đoạn $[1; 3]$ và có tổng bằng 6. Thử lại,

$$P = 11 + \frac{72}{11} - \frac{6}{2} = 8 + \frac{72}{11} = \frac{160}{11}.$$

Đáp số. $\max P = \frac{160}{11}$, đạt được khi $(a; b; c)$ là một hoán vị của $(1; 2; 3)$.

Bài 10.9. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $2a + 3b + 4c = 18$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{4}{c}.$$

Phân tích. Biểu thức và ràng buộc dùng chung bộ hệ số 2, 3, 4, một dấu hiệu cho thấy nên nhân hai đại lượng ấy với nhau.

• **Dò điểm rơi.** Dùng nhân tử Lagrange: với $L = \frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{4}{c} + \lambda(2a + 3b + 4c - 18)$, hệ điều kiện cần cho $-\frac{2}{a^2} + 2\lambda = 0, -\frac{3}{b^2} + 3\lambda = 0, -\frac{4}{c^2} + 4\lambda = 0$, tức $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$, suy ra $a = b = c$; kết hợp ràng buộc được $a = b = c = 2$.

• **Định hướng lời giải chính thức.** Biết điểm rơi rồi, lời giải chính thức chỉ cần một lần dùng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz và không nhắc tới nhân tử Lagrange.

Lời giải

• **Nhân với biểu thức ràng buộc.** Vì $2a + 3b + 4c = 18$ nên

$$P = \frac{1}{18} \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{4}{c} \right) (2a + 3b + 4c).$$

• **Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz.** Với hai bộ số $\left(\sqrt{\frac{2}{a}}, \sqrt{\frac{3}{b}}, \sqrt{\frac{4}{c}} \right)$ và $(\sqrt{2a}, \sqrt{3b}, \sqrt{4c})$,

$$\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{4}{c} \right) (2a + 3b + 4c) \geq (2 + 3 + 4)^2 = 81.$$

• **Suy ra chặn dưới của biểu thức.** Từ hai bước trên, $P \geq \frac{81}{18} = \frac{9}{2}$.

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy–Schwarz xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{2/a}{2a} = \frac{3/b}{3b} = \frac{4/c}{4c} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Thay vào ràng buộc, $9a = 18$, tức $a = b = c = 2$. Khi đó $P = 1 + \frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{2}$.

Đáp số. $\min P = \frac{9}{2}$, đạt được khi $a = b = c = 2$.

Bài 10.10. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{7}{27}.$$

(IMO 1984)

Phân tích. Biểu thức đối xứng hoàn toàn nên được phép giả sử c nhỏ nhất, khi đó $0 \leq c \leq \frac{1}{3}$. Cố định c , biểu thức là hàm bậc nhất theo $t = ab$ với hệ số $1 - 2c$ dương, nên chỉ cần thay t bởi giá trị lớn nhất của nó là $\frac{(1-c)^2}{4}$. Điểm rơi dự đoán là $a = b = c = \frac{1}{3}$, phù hợp với việc dấu đẳng thức của $t \leq \frac{(1-c)^2}{4}$ đòi hỏi $a = b$.

Lời giải

• **Sắp thứ tự ba biến.** Vì vế trái đối xứng hoàn toàn, không mất tính tổng quát giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó $3c \leq a + b + c = 1$, suy ra $0 \leq c \leq \frac{1}{3}$.

• **Đưa về hàm bậc nhất theo tích.** Đặt $t = ab$; từ $a + b = 1 - c$ ta có

$$ab + bc + ca - 2abc = t + c(a + b) - 2tc = t(1 - 2c) + c(1 - c).$$

• **Chặn tích hai biến còn lại.** Vì $0 \leq c \leq \frac{1}{3}$ nên $1 - 2c \geq \frac{1}{3} > 0$, do đó biểu thức trên đồng biến theo t . Theo bất đẳng thức AM-GM, $t = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(1-c)^2}{4}$, suy ra

$$ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{(1-c)^2(1-2c)}{4} + c(1-c).$$

• **Rút gọn biểu thức chặn.** Đặt vế phải là $\psi(c)$. Ta có

$$\psi(c) = \frac{(1-c)[(1-c)(1-2c) + 4c]}{4} = \frac{(1-c)(2c^2 + c + 1)}{4} = \frac{1 + c^2 - 2c^3}{4}.$$

• **Khảo sát hàm một biến.** Trên đoạn $\left[0; \frac{1}{3}\right]$,

$$\psi'(c) = \frac{2c - 6c^2}{4} = \frac{c(1 - 3c)}{2} \geq 0,$$

nên ψ đồng biến và

$$\max_{\left[0; \frac{1}{3}\right]} \psi = \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1 + \frac{1}{9} - \frac{2}{27}}{4} = \frac{28/27}{4} = \frac{7}{27}.$$

Vậy $ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{7}{27}$.

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức đòi hỏi $c = \frac{1}{3}$ và $ab = \frac{(1-c)^2}{4} = \frac{1}{9}$; kết hợp với $a + b = \frac{2}{3}$ ta được $a = b = \frac{1}{3}$. Vậy $a = b = c = \frac{1}{3}$, khi đó vế trái bằng $3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{3} - \frac{2}{27} = \frac{7}{27}$.

Bài 10.11. Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; 2]$ và thoả mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a^3 + b^3 + c^3.$$

Phân tích. Hai chiều của bài toán có hai điểm rơi khác hẳn nhau. Với giá trị nhỏ nhất, điểm rơi đối xứng $a = b = c = 1$ nên dùng ngay bất đẳng thức tiếp tuyến $x^3 \geq 3x - 2$. Với giá trị lớn nhất, điểm rơi nằm ở biên của đoạn $[0; 2]$: cố định biến nhỏ nhất rồi xem $a^3 + b^3$ như hàm bậc nhất theo ab với hệ số âm, khi đó chỉ cần một chặn dưới của ab , và chặn ấy lấy được từ chính điều kiện $a \leq 2, b \leq 2$.

Lời giải

• **Lập tiếp tuyến tại điểm rơi đối xứng.** Xét hàm số $f(x) = x^3$. Ta có $f(1) = 1$ và $f'(1) = 3$, nên tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $y = 3x - 2$.

• **Chứng minh bất đẳng thức phụ.** Với mọi $x \geq 0$,

$$x^3 - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) \geq 0.$$

• **Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều.** Thay x lần lượt bởi a, b, c rồi cộng theo vế,

$$P \geq 3(a + b + c) - 6 = 9 - 6 = 3,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$; bộ số này thuộc $[0; 2]$ và có tổng bằng 3.

• **Sắp thứ tự cho chiều lớn nhất.** Vì P đối xứng hoàn toàn, không mất tính tổng quát giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó $3c \leq a + b + c = 3$, suy ra $0 \leq c \leq 1$.

• **Đưa về hàm bậc nhất theo tích.** Từ $a + b = 3 - c$ và đồng nhất thức $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ ta được

$$P = (3 - c)^3 - 3ab(3 - c) + c^3.$$

• **Chặn dưới tích hai biến còn lại.** Vì $a \leq 2$ và $b \leq 2$ nên $(2 - a)(2 - b) \geq 0$, tức là

$$ab \geq 2(a + b) - 4 = 2(3 - c) - 4 = 2 - 2c.$$

• **Thay vào và rút gọn.** Vì $3 - c > 0$ nên hệ số của ab trong biểu thức của P là số âm, do đó

$$\begin{aligned} P &\leq (3 - c)^3 + c^3 - 3(3 - c)(2 - 2c) \\ &= (27 - 27c + 9c^2 - c^3) + c^3 - (18 - 24c + 6c^2) = 3c^2 - 3c + 9. \end{aligned}$$

• **Dùng miền của biến nhỏ nhất.** Vì $0 \leq c \leq 1$ nên $c(c - 1) \leq 0$, do đó

$$P \leq 9 + 3c(c - 1) \leq 9.$$

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức đòi hỏi $c(c - 1) = 0$ và $(2 - a)(2 - b) = 0$. Nếu $c = 1$ thì $a + b = 2$ và một trong hai số a, b bằng 2, số còn lại bằng $0 < 1 = c$, trái với giả thiết c nhỏ nhất. Vậy $c = 0$, khi đó $a + b = 3$ và một trong hai số bằng 2, số còn lại bằng 1. Thử lại với $(a; b; c) = (2; 1; 0)$: $P = 8 + 1 + 0 = 9$.

Đáp số. $\min P = 3$, đạt được khi $a = b = c = 1$; $\max P = 9$, đạt được khi $(a; b; c) = (2; 1; 0)$ cùng các hoán vị.

Bài 10.12*. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - 6(a + b + c).$$

(Nghệ An MO TST 2010)

Phân tích. Ràng buộc là một tích nên phép dồn biến bảo toàn ràng buộc là thay (b, c) bởi $(\sqrt{bc}, \sqrt{bc})$.

Giả sử a lớn nhất thì $a \geq 1$, và hiệu hai giá trị của P tách được thành tích của $(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2$ với một biểu thức không âm. Sau khi dồn, đặt $t = \sqrt{a} \geq 1$ thì bài toán còn lại là một bất đẳng thức đa thức một biến nhận $t = 1$ làm nghiệm kép.

Lời giải

• **Sắp thứ tự ba biến.** Vì P đối xứng hoàn toàn, không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Khi đó $a^3 \geq abc = 1$, suy ra $a \geq 1$.

• **So sánh với bộ đã dồn.** Đặt $u = \sqrt{b}$, $v = \sqrt{c}$ và $w = \sqrt{bc} = uv$. Bộ (a, w, w) vẫn thỏa mãn ràng buộc vì $a \cdot w \cdot w = abc = 1$. Viết $P = a^3(b^3 + c^3) + (bc)^3 - 6(a + b + c)$, ta được

$$\begin{aligned} P(a, b, c) - P(a, w, w) &= a^3(b^3 + c^3 - 2w^3) - 6(b + c - 2w) \\ &= a^3(u^6 + v^6 - 2u^3v^3) - 6(u^2 + v^2 - 2uv) \\ &= a^3(u^3 - v^3)^2 - 6(u - v)^2 = (u - v)^2 \left[a^3(u^2 + uv + v^2)^2 - 6 \right]. \end{aligned}$$

• **Xét dấu biểu thức trong ngoặc.** Từ $(u - v)^2 \geq 0$ ta có $u^2 + uv + v^2 \geq 3uv$, mà hai vế đều không âm nên $(u^2 + uv + v^2)^2 \geq 9u^2v^2 = 9bc$. Do đó

$$a^3(u^2 + uv + v^2)^2 \geq 9a^3bc = 9a^2 \cdot abc = 9a^2 \geq 9 > 6.$$

Vậy $P(a, b, c) \geq P(a, w, w)$; chỉ còn phải xét trường hợp $b = c$.

• **Đưa về hàm một biến.** Giả sử $b = c$. Đặt $t = \sqrt{a} \geq 1$; từ $ab^2 = abc = 1$ suy ra $b = c = \frac{1}{t}$. Khi đó $ab = ca = t$ và $bc = \frac{1}{t^2}$, nên

$$P = 2t^3 + \frac{1}{t^6} - 6\left(t^2 + \frac{2}{t}\right) = 2t^3 + \frac{1}{t^6} - 6t^2 - \frac{12}{t}.$$

• **Quy về bất đẳng thức đa thức.** Nhân hai vế của $P \geq -15$ với $t^6 > 0$, bất đẳng thức tương đương với

$$G(t) = 2t^9 - 6t^8 + 15t^6 - 12t^5 + 1 \geq 0 \quad (t \geq 1).$$

• **Tách nhân tử nghiệm kép.** Ta có $G(1) = 2 - 6 + 15 - 12 + 1 = 0$ và $G'(t) = 18t^8 - 48t^7 + 90t^5 - 60t^4$ nên $G'(1) = 18 - 48 + 90 - 60 = 0$. Vậy G chia hết cho $(t - 1)^2$; thực hiện phép chia,

$$G(t) = (t - 1)^2(2t^7 - 2t^6 - 6t^5 + 5t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1).$$

• **Chứng minh nhân tử còn lại dương.** Đặt $u = t - 1 \geq 0$ rồi khai triển theo u ,

$$2t^7 - 2t^6 - 6t^5 + 5t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1 = 2u^7 + 12u^6 + 24u^5 + 15u^4 - 6u^3 - 3u^2 + 12u + 9.$$

Theo bất đẳng thức AM–GM, $2u^3 \leq u^2 + u^4$, nên $6u^3 \leq 3u^2 + 3u^4$ và do đó vế phải không nhỏ hơn

$$2u^7 + 12u^6 + 24u^5 + 12u + (12u^4 - 6u^2 + 9).$$

Mà $12u^4 - 6u^2 + 9 = 12\left(u^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{33}{4} > 0$, nên toàn bộ biểu thức trên dương. Suy ra $G(t) \geq 0$, tức là $P \geq -15$.

• **Chỉ rõ dấu đẳng thức.** Dấu đẳng thức đòi hỏi $b = c$ và $t = 1$, tức $a = b = c = 1$. Khi đó $P = 3 - 6 \cdot 3 = -15$.

Đáp số. $\min P = -15$, đạt được khi $a = b = c = 1$.

PHỤ LỤC. SỐ TAY BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BỔ ĐỀ

Các kết quả dưới đây được dùng lại nhiều lần trong sách. Nếu không nói gì thêm, các biến được hiểu là số thực dương. Mỗi hộp có kèm chỉ dẫn tới nơi kết quả được phát biểu và chứng minh trong thân sách.

1. Bất đẳng thức AM–GM

Với mọi số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

• **Xem thêm.** Chương 2, mục A: phát biểu, các hệ quả thường dùng và quy trình bốn bước của kỹ thuật điểm rơi. Chương 3, mục A: các lược đồ tách, ghép và thêm bớt.

2. Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz

Với hai bộ số thực $a_1, \dots, a_n$ và $b_1, \dots, b_n$ ta có

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai bộ số *phụ thuộc tuyến tính*, nghĩa là tồn tại hai số thực λ, μ không đồng thời bằng 0 sao cho $\lambda a_i = \mu b_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Phát biểu này gồm cả trường hợp một trong hai bộ có tất cả các số hạng bằng 0, khi đó hai vế cùng bằng 0. Nếu tất cả b_i đều khác 0 thì điều kiện trên tương đương với dãy tỉ số

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n};$$

còn nếu có một b_i bằng 0 thì dãy tỉ số vô nghĩa, phải dùng dạng phụ thuộc tuyến tính. Dạng cộng mẫu (dạng Engel): với $y_i > 0$,

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$. Ở dạng này mọi mẫu số đều dương theo giả thiết, nên dãy tỉ số vừa viết có nghĩa.

• **Xem thêm.** Bổ đề 5.1 và Bổ đề 5.2 ở Chương 5, mục A.

3. Bất đẳng thức Schur

Với mọi số thực không âm a, b, c và mọi số thực $t > 0$,

$$a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-a)(b-c) + c^t(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Trường hợp $t = 1$ được dùng nhiều nhất. Khai triển ra, nó tương đương với

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a),$$

và theo bộ ba $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$ thì tương đương với

$$p^3 + 9r \geq 4pq.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$, hoặc khi hai trong ba số bằng nhau và số còn lại bằng 0.

• **Xem thêm.** Chương 8, mục A: chứng minh, dạng p , q , r và miền biến thiên của r khi cố định p , q .

4. Các hằng bất đẳng thức cơ sở

Điều kiện của các biến và điều kiện xảy ra dấu đẳng thức khác nhau theo từng dòng, cần phân biệt: hai bất đẳng thức đầu chỉ liên quan tới hai biến nên chỉ đòi hỏi $a = b$.

• **Hai biến, đúng với mọi số thực a, b .**

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad (a+b)^2 \geq 4ab.$$

Cả hai có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$; ở đây không có mặt biến thứ ba.

• **Ba biến, đúng với mọi số thực a, b, c .**

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \quad (a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca),$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2.$$

Cả ba có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

• **Ba biến dương $a, b, c > 0$.**

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9, \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Cả hai có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$. Giả thiết các biến dương không bỏ được: bộ $a = b = 1, c = -1$ làm vế trái của bất đẳng thức thứ nhất bằng 1, còn bộ $a = b = 1, c = -3$ làm vế trái của bất đẳng thức thứ hai bằng $-\frac{5}{2}$.

• **Xem thêm.** Chương 1, mục A: Bổ đề Các hằng bất đẳng thức nền và Bổ đề Hai đánh giá về nghịch đảo. Bất đẳng thức cuối là bất đẳng thức Nesbitt, được chứng minh ở Ví dụ 1.8, 2.8, 5.1, 7.6 và 9.1 bằng năm kỹ thuật khác nhau.