PHAN NHẬT LINH

TÀI LIỆU TOÁN 12

CHƯƠNG TRÌNH MỚI

BIÊN SOẠN THEO CẤU TRÚC ĐỊNH HƯỚNG CỦA BGD 2025

CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018

Liên hệ zalo: **0817. 098. 716**

CHƯƠNG 1

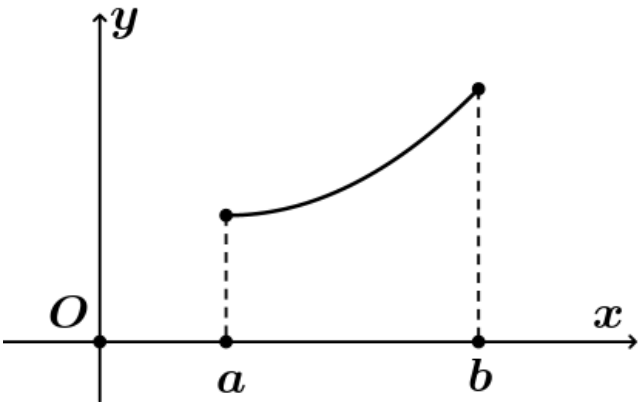
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 01 TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

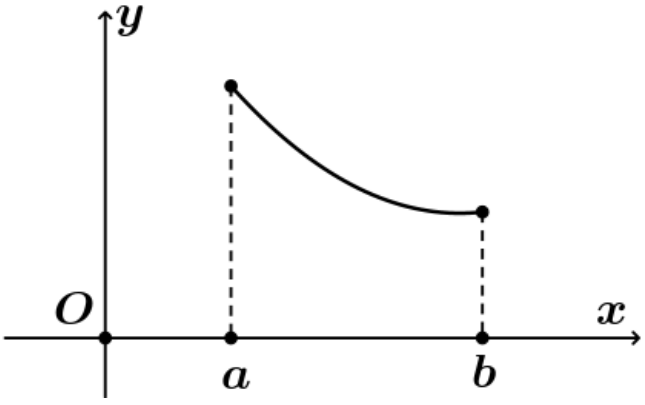
1 Tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên K với K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng



Hình 1. Hàm số đồng biến trên $(a;b)$

- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1,\ x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (**Hình 1**)



Hình 2. Hàm số nghịch biến trên $(a;b)$

- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1,\ x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$
- Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (**Hình 2**)
- Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K.
- Khi xét tính đơn điệu mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu:

Định lí 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

- Nếu $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng K.
- Nếu $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng K.

Chú ý: Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên tập K hoặc nghịch biến trên tập K thì hàm số $y=f(x)$ còn được gọi là đơn điệu trên tập $K\subset\mathbb{R}$.

Định lí 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập $K\subset\mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Nếu $f'(x)\geq 0$ (hoặc $f'(x)\leq 0$) với mọi x thuộc K và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K.

2 Cực trị của hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0\in(a;b)$.

- Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.
- Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

Ghi chú:

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số, kí hiệu $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$, còn điểm $M(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số, kí hiệu f_{CT} hay y_{CT}, còn điểm $M(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại (còn gọi là cực đại) và giá trị cực tiểu (còn gọi là cực tiểu) được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và có điểm cực trị là $x_0\in(a;b)$ thì $f'(x_0)=0$

Định lí: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $K=(x_0-h;x_0+h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$, với $h>0$.

- Nếu $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x_0)<0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x_0)>0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

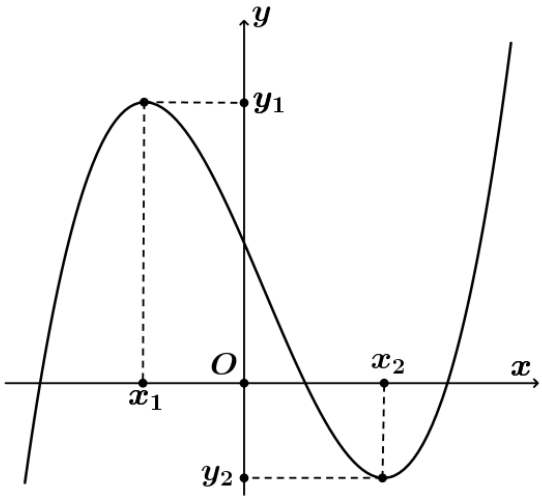
Nhận xét: Định lí trên có thể hiểu một cách đơn giản như sau: Điều kiện đủ để hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại một điểm x_0 là đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 với $x\in(x_0-h;x_0+h)$.

x	x_0-h	x_0	x_0+h
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$		$f_{CĐ}$	

x	x_0-h	x_0	x_0+h
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$		f_{CT}	

Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0)=0$ hoặc $f'(x_0)$ không tồn tại.

Các tên gọi từ đồ thị hàm số:



- $(x_1;y_1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số trong đó: x_1 là điểm cực đại của hàm số; y_1 là giá trị cực đại của hàm số.
- $(x_2;y_2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số trong đó: x_2 là điểm cực tiểu của hàm số; y_2 là giá trị cực tiểu của hàm số.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm khoảng đơn điệu, cực trị của hàm số cho trước

Để xét tính đồng biến, nghịch biến, cực trị của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4:** Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến, cực trị của hàm số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=2x^3+3x^2-12x+2024$ b) $y=x^4+2024$

c) $y=-\dfrac{1}{4}x^4+2x^2+2$ d) $y=x^4-2x^2-2$

Bài tập 2: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$ b) $y=\dfrac{5x+9}{x-1}$.

c) $y=(x-2)(x^2+1)$ d) $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

Bài tập 3: Tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=-x^4+2x^2+3$ b) $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$

c) $y=x^3-4x^2+5x-1$ d) $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

Bài tập 4: Thể tích V (đơn vị: centimét khối) của 1kg nước tại nhiệt độ T $(0°C\le T\le 30°C)$ được tính bởi công thức

$$V(T)=999{,}87-0{,}06426T+0{,}0085043T^2-0{,}0000679T^3$$

Hỏi thể tích $V(T)$, $0°C\le T\le 30°C$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3-3x^2-1$. **B.** $y=x^3-x^2+6x-1$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **D.** $y=x^4+2x^2-1$.

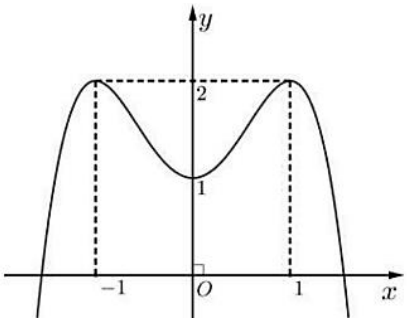
Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-2;1)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$, khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

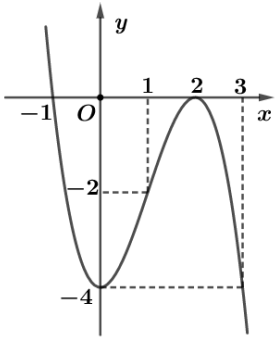
A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 6: Hàm số $y=2x^3-2x^2-2x+1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;1)\cdot$ **B.** $(-\infty;1)\cdot$ **C.** $(0;2)\cdot$ **D.** $(1;2)\cdot$

Câu 7: Hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2;3)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;0)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. Xét các mệnh đề sau:

1) Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$.

2) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

3) Hàm số đã cho không có điểm cực trị.

4) Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Số các mệnh đề **đúng** là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(2x-5)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-3;1)$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

Câu 13: Hàm số $y=-x^4+8x^2+6$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

C. $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Câu 15: Hàm số $y=x^4+x^2-2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x+2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;0)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^4(2-x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(5)>f(4)>f(3)$. **B.** $f(-1)>f(0)>f(1)$.

C. $f(-3)<f(-2)<f(-1)$. **D.** $f(0)<f(1)<f(2)$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(2-x)(x+1)^2(x-1)^5$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 20: Cho hàm số $y=\dfrac{2023x-22}{x+1}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2023)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2023)$.

Câu 21: Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, biết $f'(x)=(x-3)(x+2)(x+5)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $(-\infty;-5)$. **B.** $(-2;3)$. **C.** $(-5;-2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

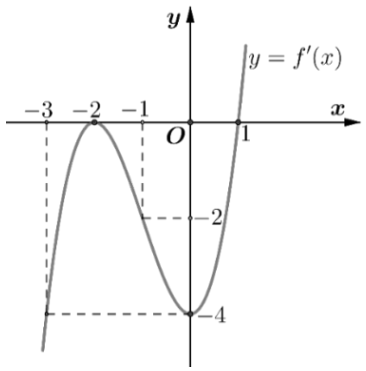
Câu 22: Hàm số $y=-x^4+2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 23: Hàm số $y=\sqrt{8+2x-x^2}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(1;4)$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 25: Hàm số $y=\dfrac{x-7}{x+4}$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(-6;0)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(-5;1)$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;5)$. **B.** $(-3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-3;5)$.

Câu 27: Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-1)^2(3-x)(x^2-x-1)$. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu cực tiểu?

A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2.

Câu 29: Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y=-x^3+3x+4$.

A. $y_{CT}=2$. **B.** $y_{CT}=1$. **C.** $y_{CT}=6$. **D.** $y_{CT}=-1$.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(2-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số là

A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Câu 32: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có tọa độ là

A. $(2;2)$. **B.** $(2;-2)$. **C.** $(0;-2)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x-1,\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 34: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

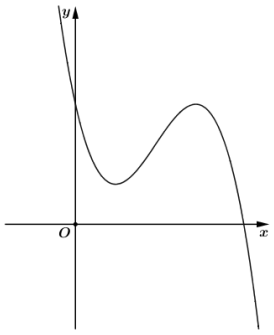
A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^2+2$

a) Tập xác định của hàm số là $D=[0;+\infty)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

c) Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

d) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

Câu 2: Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$.

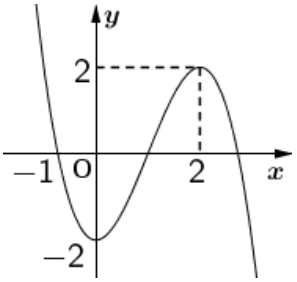
a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

d) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(2;+\infty)$

c) Với mọi $x\in(0;2)$ thì hàm số $y=f(x)$ luôn nhận giá trị dương

d) Hàm số $y=f(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm nguyên

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(2;+\infty)$

d) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

c) Đạo hàm của hàm số luôn nhỏ hơn 0 với mọi $x\neq 1$.

d) Hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y=\sqrt{x^2+1}$

a) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

b) Hàm số không có cực trị.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

d) Hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^4+x^2+\dfrac{1}{2}$.

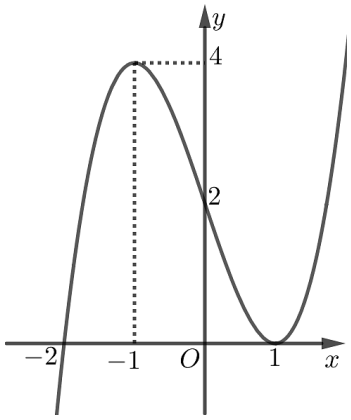
a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0)=0$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x=\pm 1$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 1)=1$.

c) Hàm số đạt cực đại tại các điểm $x=\pm 1$, giá trị cực đại của hàm số là $y(\pm 1)=\dfrac{1}{2}$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0)=\dfrac{1}{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



a) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$ và giá trị cực đại là $y_{CD}=4$

b) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ và giá trị cực tiểu là $y_{CT}=0$

c) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

d) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-2$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	2	↗	2	↘	$-\infty$

a) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

c) Giá trị cực đại của hàm số bằng 2.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $x=1$.

Câu 10: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Phương trình hàm vận tốc là $v(t)=3t^2-6t+9$.

b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t)=6t-12$.

c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t\in(0;1)\cup(3;+\infty)$.

d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t\in(1;3)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$ có đồ thị (C). Tính độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị (C).

Câu 2: Biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $(-1;18)$ và $(3;-16)$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c + d$.

Câu 3: Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị là A và B. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng AB.

Câu 4: Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục toạ độ một tam giác cỉa diện tích S bằng bao nhiêu?

Câu 5: Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu?

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 7: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1;0), x_2 \in (1;2)$ Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các số a, b và c có bao nhiêu số âm?

----------HẾT----------

Dạng 2: Tìm tham số m để hàm số đơn điệu trên một khoảng cho trước

- Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

  Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \le 0 \end{cases}$

  Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \le 0 \end{cases}$

  Trong trường hợp hệ số a có chứa tham số thì ta kiểm tra thêm trường hợp $a = 0$

- Xét hàm phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đạo hàm $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, với $ad - bc \ne 0, c \ne 0$.

  Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y' > 0, \forall x \ne -\dfrac{d}{c} \Leftrightarrow ad - bc > 0$

  Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y' < 0, \forall x \ne -\dfrac{d}{c} \Leftrightarrow ad - bc < 0$

- Xét hàm phân thức $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ có đạo hàm $y' = \dfrac{adx^2 + 2aex + be - dc}{(dx+e)^2}$, với $ad \ne 0$

  Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

  $$y' \ge 0, \forall x \ne -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \ge 0, \forall x \ne -\frac{e}{d}$$

  Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

  $$y' \le 0, \forall x \ne -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \le 0, \forall x \ne -\frac{e}{d}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y = x^3 + mx^2 + 2mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

b) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

c) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m+1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;5)$

d) $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

e) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{mx^2}{2} + x + 6$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$

f) $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$

g) $y = x^3 + mx^2 + m$ nghịch biến trên $(0;2)$

h) $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bài tập 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y = \dfrac{mx+2}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

b) $y=\dfrac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định

c) $y=\dfrac{2x+4}{m-x}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

d) $y=\dfrac{x+7}{2x+m}$ nghịch biến trên $(-2;+\infty)$

e) $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

f) $y=\dfrac{x-9}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$

g) $y=\dfrac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

h) $y=\dfrac{m^2x+5}{2mx+1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$

Bài tập 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y=\dfrac{2x^2+3x+m+1}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng xác định

b) $y=\dfrac{x^2+(m+1)x-1}{2-x}$ (m là tham số) nghịch biến trên từng khoảng xác định

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-4}{x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 2: Cho hàm số $y=mx^3+mx^2-(m+1)x+1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\dfrac{-3}{4}<m<0$. **B.** $\dfrac{-3}{4}\le m\le 0$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\le\dfrac{-3}{4}$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+x^2+mx+1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

A. $m\le\dfrac{1}{3}$. **B.** $m\ge\dfrac{1}{3}$. **C.** $m\ge\dfrac{4}{3}$. **D.** $m\le\dfrac{4}{3}$.

Câu 4: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 6: Số giá trị nguyên của m để hàm số $y=(m-7)x^3+(m-7)x^2-2mx-1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ bằng

A. 7. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 7: Tìm tất cả giá trị của m sao cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+2}$ đồng biến trên các khoảng xác định?

A. $m\geq 2$. **B.** $m<2$. **C.** $m\leq 2$. **D.** $m>2$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x-mx+5$ nghịch biến trên tập xác định.

A. $m\geq 2$. **B.** $m\leq 2$. **C.** $m\geq -2$. **D.** $-2\leq m\leq 2$.

Câu 9: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}mx^3-2mx^2+(m-5)x+2021$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 11: Cho hàm số $y=\dfrac{(m^2-m)x^3}{3}+(m^2-m)x^2+mx+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x+3-\dfrac{m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ sao cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3+(m-1)x^2+(2m+1)x+3m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 2024. **B.** 2023. **C.** 2021. **D.** 2022.

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(8-2m)x+m+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=-4$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Câu 15: Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là $m\in[a;b]$. Giá trị $b-a$ bằng.

A. 4. **B.** 10. **C.** 12. **D.** -3.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\cot x+1}{\cot x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\in(-\infty;-1)\cup\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$. **B.** $m\in(-\infty;-1]\cup\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $m\in\left(-\infty;-1\right]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-\left(m+1\right)x^2+3x-m^2+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l}m\geq 2\\ m\leq -4\end{array}\right.$. **B.** $-4\leq m\leq 2$. **C.** $-4<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-4\end{array}\right.$.

Câu 18: Có bao nhiêu số nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}\cos^3 x-4\cot x-\left(m+1\right)\cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\pi\right)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 19: Cho hàm số $y=\frac{\left(m+1\right)x+2m+2}{x+m}$. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên $\left(-1;+\infty\right)$?

A. $m<1$. **B.** $1\leq m<2$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m<1\\ m>2\end{array}\right.$. **D.** $m>2$.

Câu 20: Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\frac{\cos x+1}{10\cos x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in\left(-10;10\right)$ để hàm số $y=\frac{1-2\sin x}{2\sin x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$?

A. 18. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 22: Cho hàm số $y=\frac{mx+2m+3}{x+m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$. Tìm số phần tử của S.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 23: Cho hàm số $y=\frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(2m-1\right)x-m+2$ nghịch biến trên khoảng $\left(-3;0\right)$.

A. $m\geq -1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m\leq -1$. **D.** $m\leq -\frac{1}{2}$.

Câu 25: Tổng các giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=x^3+mx-\frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ là

A. -10. **B.** -3. **C.** -6. **D.** -7.

Câu 26: Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+1$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ khi và chỉ khi

A. $m\geq 1$. **B.** $1<m<3$. **C.** $m>3$. **D.** $m\geq 3$.

Câu 27: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(4m-3)x+2017$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số thực m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $m=4$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-x^3+6(m+2)x^2-m+1$ đồng biến trên $(-2;-1)$.

A. $m\in\left(-\infty;\frac{-5}{2}\right)$. **B.** $m\in\left(-\infty;\frac{-5}{2}\right]$. **C.** $m\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $(-3;0)$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\frac{(m+1)x+18}{3x+2m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;7)$?

A. 8. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 31: Cho hàm số $y=\frac{\ln x-6}{\ln x-3m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;e)$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\frac{x^2+5x-m-1}{5x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

A. 8. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 6.

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;20]$ để ứng với mỗi, hàm số $y=\frac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$?

A. 17. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 13.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương không lớn hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x^2+2x-1+m}{5x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$?

A. 2012. **B.** 2009. **C.** 2011. **D.** 2010.

Câu 35: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 36: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương bé hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{2x^2+2x-1-5m}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$?

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2020. **D.** 2019.

Câu 37: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $(-\infty;-2]$. **B.** $(-3;-2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=mx^3+mx^2-(m+1)x+1$, với m là tham số

a) Hàm số là hàm số bậc ba khi $m\neq 0$

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m<-\dfrac{3}{4}$ hoặc $m\geq 0$.

d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-\dfrac{3}{4}\leq m<0$.

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+(m+1)x^2+(m^2+2m)x-3$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1=-m$ và $x=-m-2$

c) Không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$ khi và chỉ khi $m\geq -1$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$, với m là tham số.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m\geq 5$.

c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m<5$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ khi và chỉ khi $(5;8)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm và hai nghiệm này là nguyên dương

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-5;-2)$ và $(-2;+\infty)$

d) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{\cot^2 x-2m\cot x+2m^2-1}{\cot x-m}$, với m là tham số

a) Nếu đặt $t=\cot x$ thì bài toán trở thành tìm tham số m nguyên để hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;1)$.

b) Tập xác định của hàm số $y=f(t)$ là $\mathbb{R}$

c) Hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $f'(t)>0,\forall t\in(0;1)$

d) Có 2026 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}\cot^3 x-m\cot^2 x+\cot x+1$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Câu 3: Tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+3m-1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt trong đó có đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 là khoảng $(a;b)$. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?

Câu 4: Hàm số $y=(x+m)^3+(x+n)^3-x^3$ (tham số là m,n) đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4(m^2+n^2)-2m-2n$ bằng bao nhiêu?

Câu 5: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}mx^2+2mx-3m+4$. nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 3 .Tính tổng các phần tử của S .

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

Câu 7: Số các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số $y=\dfrac{-mx-2025}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-2;2)$ là bao nhiêu?

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên không âm m để hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+5x+m+6}{x+2}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

----------HẾT----------

Dạng 3: Tìm tham số m để hàm số có cực trị hoặc đạt cực trị tại điểm cho trước

- Tìm m để hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước ($f(x)$ có đạo hàm tạo điểm x_0)

  Giải điều kiện $y'(x_0)=0$ để tìm m

  Lập bảng biến thiên với m vừa tìm được và chọn giá trị m nào thoả mãn yêu cầu.
- Biện luận cực trị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\neq 0$

  Tính đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$ với $\Delta_{y'}=b^2-3ac$

  Nếu $\begin{cases}\Delta_{y'}>0\\ a\neq 0\end{cases}$ thì hàm số có hai điểm cực trị

  Nếu $\Delta_{y'}\leq 0$ hoặc suy biến $\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}$ thì hàm số không có cực trị

Chú ý:

- Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm phân biệt của $y'=0$ thì $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}$ và $x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}$

  Hệ thức 1: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2$

  Hệ thức 2: $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1.x_2$

  Hệ thức 3: $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1.x_2(x_1+x_2)$
- Các công thức tính toán thường gặp

  Độ dài $MN=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}$

  Khoảng cách từ M đến Δ: $d(M,\Delta)=\dfrac{|A.x_M+B.y_M+C|}{\sqrt{A^2+B^{22}}}$, với $\Delta: Ax+By+C=0$

  Tam giác ABC vuông tại $A\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

  Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$, với $\overrightarrow{AB}=(a_1;b_1)$, $\overrightarrow{AC}=(a_2;b_2)$
- Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=-\dfrac{2}{9a}(b^2-3ac)x+d-\dfrac{bc}{9a}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực tiểu tại $x=3$

b) $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$

c) $y=-x^3+mx^2+(m^2-12)x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$

d) $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$

Bài tập 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (đồ thị hàm số)

a) $y=\frac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+(m^2-4m+3)x-1$ có hai điểm cực trị

b) $y=x^3-3(m+1)x^2+3(3m+7)x+1$ có cực trị

c) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+2024$ không có cực trị

d) $y=\frac{1}{3}(m^2-1)x^3+mx^2+3x+1$ có cực đại

e) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3m+2)x^2+(2m^2+3m+1)x-2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thoả mãn $3x_{CD}^2=4x_{CT}$

f) $y=x^3-3mx+1$ có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A với $A(2;3)$.

g) $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

h) $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác AOB là tam giác cân tại O

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=2$

A. $0<m\le 4$. **B.** $m>4$. **C.** $m=0$. **D.** $0\le m<4$.

Câu 2: Cho hàm số $y=x^3+3(m^2-m+2)x^2+3(3m^2+1)x+2022m$, tìm các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

Câu 3: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^3-(m^2+1)x^2+2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=1$. Khi đó

A. $S=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$. **B.** $S=\{0\}$. **C.** $S=\left\{\frac{3}{2};0\right\}$. **D.** $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 4: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m-1)x$ đạt giá trị cực đại tại $x=1$.

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=3$. **D.** $m=0$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=-x^3+2(2m-1)x^2-(m^2-8)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x=-1$.

A. $m=3$. **B.** $m=-9$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Câu 6: Khi hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-2)x+2021$ đạt cực đại tại $x=1$ thì giá trị của tham số m

thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1;4)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2-(5m+4)x+10$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$.

A. $m=-1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3+(m^2-m+1)x^2+(3m^2-4)x+m+2$. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m^2-2m-3)x+4$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

A. $m=-1$ hoặc $m=3$. **B.** $m=-1$.

C. $m=3$. **D.** $m=1$ hoặc $m=3$.

Câu 10: Giá trị nguyên lớn nhất của tham số m để hàm số $y=\frac{x^2+(m-1)x+3-2m}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;\sqrt{5})$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(\sqrt{5};5)$.

Câu 11: Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(m^2+2)x-m+1$ đạt cực đại tại $x=1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right.$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m=1$. **D.** $m=5$.

Câu 12: Cho biết hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=3$. Khi đó

A. $m\le -1$. **B.** $m\in(2;3)$. **C.** $m\in(1;2)$. **D.** $m\in(0;1)$.

Câu 13: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1+x_2-3x_1x_2=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(-4;-2)$. **B.** $m_0\in(2;4)$. **C.** $m_0\in(0;2)$. **D.** $m_0\in(-2;0)$.

Câu 14: Cho hàm số $y=\left(\frac{m-1}{3}\right)x^3+(m^2-4)x^2+(m^2-9)x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để hàm số có hai điểm cực trị trái dấu?

A. 18. **B.** 19. **C.** 17. **D.** 16.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+3)x^2+(12-m)x+2020$ có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục tung?

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 16: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+(m^2+4m+3)x+2021m+2022$ (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có các điểm cực trị nằm về cùng một phía của trục tung.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $-3<x<-1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-3 \end{array}\right.$. **D.** $\left\{\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-3 \end{array}\right.$.

Câu 17: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2+5m+4)x-1$ có hai điểm cực trị trái dấu?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1

Câu 18: Tìm giá trị của tham số m để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$ thuộc đường thẳng $d: y=x+1$.

A. $m=-5$. **B.** $m=31$. **C.** $m=23$. **D.** $m=5$.

Câu 19: Cho đường cong $(C_m): y=x^3-3(m-1)x^2-3(m+1)x+3$. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho O, A, B thẳng hàng. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 20: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2(3m^2-1)x+\frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^3+4(m-2)x^2-7x+1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-4$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 22: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1+x_2-3x_1x_2=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(-4;-2)$. **B.** $m_0\in(2;4)$. **C.** $m_0\in(0;2)$. **D.** $m_0\in(-2;0)$.

Câu 23: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2$ có hai điểm cực trị dương là

A. $m\in\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;1)\cup(1;2)$.

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 25: Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để hàm số có hai giá trị cực trị trái dấu?

A. 19. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Câu 26: Cho hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}(m-2)x^2-3(m-1)x+1, m$ là tham số. Số giá trị $m>0$ để hàm số có giá trị cực đại, giá trị cực tiểu lần lượt là $y_{CĐ}, y_{CT}$ thỏa mãn $2y_{CĐ}+y_{CT}=4$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 27: Cho hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2-5x+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Câu 28: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-1\right)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+2x^2+mx+1$, với m là tham số

a) Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $-2<m<2$

b) Hàm số có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $m=0$ hoặc $m=2$

c) Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $m\le -2$ hoặc $m\ge 2$

d) Hàm số có hai điểm cực trị thoả mãn $x_{CD}<x_{CT}$ và và chỉ khi $0<m<2$

Câu 2: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3$, với m là tham số

a) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi m

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ khi $m=2$

c) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $2\sqrt{5}$

d) Diểm cực tiểu của đồ thị hàm số luôn thuộc đường thẳng cố định với hệ số góc $k=-3$

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{x^2+2x+3}{2x+1}$

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm nguyên dương phân biệt

b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này nằm về hai phía của trục tung

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y=x+1$

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{x^2-2mx+m+2}{x-m}$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{m\}$

b) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ khi $m=\frac{1}{2}$

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y=2x-2m$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết đồ thị của hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có một điểm cực trị là $A\left(-1;29\right)$ và đi qua điểm $B\left(2;2\right)$. Tính $a+b+c$.

Câu 2: Hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$ khi $m=\frac{a}{b}$. Tính $S=a^2+b^2$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+n$ có điểm cực tiểu là $I\left(1;3\right)$. Khi đó $m+n$ bằng

Câu 4: Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$ thì giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Câu 5: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^3-6x^2+\left(3m+6\right)x-m-6$ đạt cực đại cực tiểu đồng thời hai giá trị cực trị cùng dấu?

Câu 6: Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị $\left(C\right)$ và điểm $C\left(2;4\right)$. Tính tổng bình phương các giá trị của m để $\left(C\right)$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Câu 7: Tồn tại bao nhiêu số dương m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\left(m+1\right)x^3-\left(m+2\right)x^2+3m-2$ cắt và tạo với hai tia Ox,Oy một tam giác có diện tích bằng $\frac{9}{4}$?

Câu 8: Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $b\in\mathbb{N}^*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$. Giá trị biểu thức $T=a+2b$ là

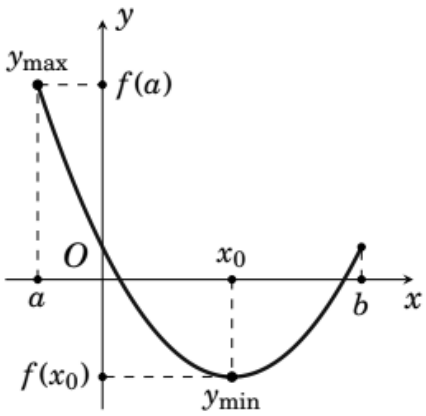
----------HẾT----------

BÀI 02 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D. Khi đó ta có:



- M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x)\le M, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D: f(x_0)=M \end{cases}$. Kí hiệu $\boxed{\max\limits_{x\in D} f(x)=M}$
- m là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x)\ge m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D: f(x_0)=m \end{cases}$. Kí hiệu $\boxed{\min\limits_{x\in D} f(x)=m}$

2 Một số lưu ý

- Khi yêu cầu tìm max min của hàm số màkhoong nói rõ xét trên tập nào thì ta hiểu là tìm max min trên miền xác định của hàm số đó.
- Để tìm max min của hàm số $y=f(x)$ trên miền D ta thường lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên D. Từ bảng biến thiên ta có thể kết luận:

  Điểm ở vị trí cao nhất $\longrightarrow$ Kết luận max

  Điểm ở vị trí thấp nhất $\longrightarrow$ Kết luận min
- Để tìm max min của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ ($f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên $(a;b)$ có thể trừ một số hữu hạn các điểm và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm trong $(a;b)$) thì ta có thể giải theo các bước sau:

  Bước 1: Giải phương trình $f'(0)$ tìm các nghiệm $x_0\in(a;b)$

  Bước 2: Tìm các điểm $x_i\in(a;b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có)

  Bước 3: Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ $(*)$

  Bước 4: Gọi M,m lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước $(*)$ thì ta có thể kết luận: $M=\max\limits_{[a;b]} f(x);\ m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$

- Ta có thể sử dụng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min.
  - Bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm a,b:

    $$\boxed{a+b\ge 2\sqrt{ab}}$$

    Dấu "=" xảy ra khi $a=b$
  - Bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm a,b,c:

    $$\boxed{a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}}$$

    Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$
  - Bất đẳng thức Cauchy cho n số không âm $a_1,a_2,...,a_n$:

    $$\boxed{a_1+a_2+...+a_n\ge n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}$$

    Dấu "=" xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_n$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Bài toán tìm max, min của hàm số y=f(x) trên miền D

- **Phương pháp giải:**

  Bước 1: Tính y'. Giải phương trình $y'=0$ tìm các nghiệm $x_i \in D$ và tìm các điểm $x_j \in D$ mà tại đó y' không xác định.

  Bước 2: Lập bảng biến thiên của hàm số trên D

  Bước 3: Từ bảng biên thiên đưa ra kết luận:

  Điểm ở vị trí cao nhất $\longrightarrow$ Kết luận max

  Điểm ở vị trí thấp nhất $\longrightarrow$ Kết luận min

- **Lưu ý:** Nếu D là đoạn $[a;b]$ và hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì ta có thể làm như sau:

  Bước 1: Giải phương trình $f'(x)=0$ rồi tìm các nghiệm $x_0 \in (a;b)$

  Bước 2: Tìm các điểm $x_i \in (a;b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có)

  Bước 3: Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ $(*)$

  Bước 4: Gọi M, m lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước $(*)$ thì ta có thể kết luận: $M=\max\limits_{[a;b]} f(x);\ m=\min\limits_{x\in D} f(x)$

- **Lưu ý quan trọng:**
  - Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$
  - Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra

a) $y=f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$

b) $y=f(x)=x^3-3x^2+3$ trên đoạn $[1;3]$

c) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$

d) $y=f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

e) $y=1+\dfrac{1}{x}$ trên đoạn $[1;2]$

f) $y=f(x)=\dfrac{4}{x}+x+1$ trên đoạn $[1;3]$

g) $y=f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ trên miền xác định

h) $y=f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

i) $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$

k) $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

l) $y=f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

m) $y=x+\dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra

a) $y=x-\ln x$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};e\right]$

b) $y=x+\cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

c) $y=f(x)=(x^2-2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$

d) $y=\cos 2x+2\sin x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Bài tập 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên miền đã chỉ ra

a) $f(x)=\dfrac{5\sin x+1}{\sin x+2}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$

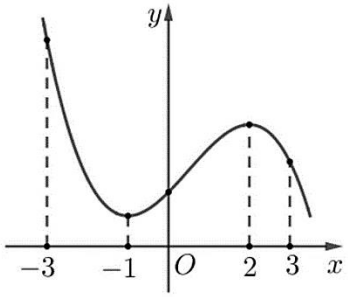
b) $y=\cos^3 x+2\sin^2 x+\cos x$ trên miền xác định

Bài tập 4: Độ giảm huyết áp của một bệnh $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân $(0<x<30)$. Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là bao nhiêu mg ?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên:

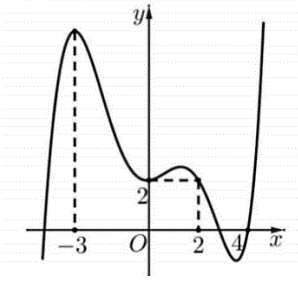


Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;3]$ bằng

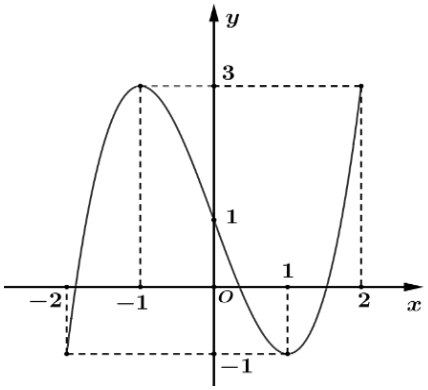
A. $f(2)$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(-3)$. **D.** $f(3)$

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;4]$ bằng:

A. $f(2)$. **B.** $f(-3)$. **C.** $f(4)$. **D.** $f(0)$



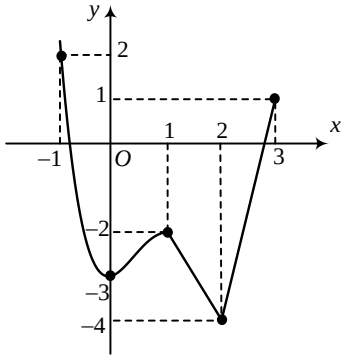
Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;3]$. Khi đó, tổng $M+m$ bằng



A. -6. **B.** -2. **C.** -5. **D.** 2.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	-3		-1		0		1		2
y	-2	↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;2]$.

Tính $M+m$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Biết $f(-2)=f(0)=-3$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[-2;0]$ bằng

A. $f(-1)$. **B.** -3. **C.** $-f(-1)$. **D.** 3.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-3;2]$. Tính $M.m$.

x	-3		0		1		2
$f(x)$	-4	↗	2	↘	0	↗	1

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -8.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau.

x	0		3		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	10	↘	0

Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0)$ tại x_0. Khi đó tích $x_0.f(x_0)$ bằng

A. 30. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 0.

Câu 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-6x$ trên $[-1;4]$ là

A. $-4\sqrt{2}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 40.

Câu 10: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ trên đoạn $[0;4]$. Tính tổng $S=M+n$.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** 4.

Câu 11: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3+3x^2+10$ trên đoạn $[-5;-1]$ bằng

A. 12. **B.** 18. **C.** -40. **D.** 14.

Câu 12: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[2;4]$ là:

A. $\min\limits_{[2;4]} y=5$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} y=0$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} y=3$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y=7$.

Câu 13: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** $\frac{23}{3}$.

Câu 14: Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tổng $S=2M-m$ bằng

A. $S=0$. **B.** $S=-\frac{3}{2}$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=4$.

Câu 15: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ là

A. $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\frac{1}{2}; \min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=-1$.

B. $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\frac{\pi}{4}; \min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\frac{\pi}{6}$.

C. $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}; \min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=1$.

D. $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}; \min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\frac{1}{2}$.

Câu 16: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x}$ trên $[1;2]$

A. $\min\limits_{[1;2]} y=3$. **B.** $\min\limits_{[1;2]} y=2$. **C.** $\min\limits_{[1;2]} y=\dfrac{1}{2}$. **D.** $\min\limits_{[1;2]} y=\dfrac{3}{2}$.

Câu 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$ là

A. 16. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 18: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{16-x^2}$. Tính $M+m$

A. $8-\sqrt{8}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** 0. **D.** 8.

Câu 19: Trên đoạn $[-4;-1]$, hàm số $y=x+\dfrac{9}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. -5. **B.** $-\dfrac{29}{5}$. **C.** $-\dfrac{11}{2}$. **D.** 4.

Câu 20: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{4}{x}+x+1$ trên đoạn $[1;3]$. Tính $M-m$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 21: Trên đoạn $\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{3}{2}\right]$, hàm số $y=2x^3+\dfrac{1}{2x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=\dfrac{3}{2}$. **C.** $x=\dfrac{1}{3}$. **D.** $x=1$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{2x+14}+\sqrt{5-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=-7$. **B.** Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{6}$.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$. **D.** Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$.

Câu 23: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos x-\dfrac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{2}{3}$. **B.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{10}{3}$. **C.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=0$.

Câu 24: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ là

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 25: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+3}{x-2}$ trên $[-2;1]$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. -6. **B.** $\dfrac{-9}{4}$. **C.** $\dfrac{-25}{4}$. **D.** -5.

Câu 26: Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=4x+\sin^2\pi x$ trên đoạn $[-1;2]$. Giá trị của $m+M$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** -2. **D.** -4.

Câu 27: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \cos^2 x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

Câu 28: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{-x^2-4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2};4\right]$.

A. -4. **B.** $-\frac{25}{6}$. **C.** -5. **D.** -2.

Câu 29: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2x+\cos\frac{\pi x}{2}$ trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị của $m+M$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -4.

Câu 30: Cho hàm số $y=\sin x.\cos^2\frac{x}{2}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;\pi]$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 31: Gọi M,m thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[-2;0]$ Tính $P=M+m$?

A. $P=1$ **B.** $P=-3$ **C.** $P=-\frac{13}{3}$ **D.** $P=-5$

Câu 32: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{-x^2+3x+4}$ là bao nhiêu?

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 0.

Câu 33: Cho hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}x^2+1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-25;\frac{11}{10}\right)$. Tìm giá trị của M.

A. $M=1$. **B.** $M=\frac{1}{2}$. **C.** $M=0$. **D.** $\frac{129}{250}$.

Câu 34: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2+\sin x}$ bằng

A. $4\sqrt{2}-4$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $8-4\sqrt{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4;4)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	-4		2		0		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-10	↗	0	↘	-4	↗	10

a) $\min\limits_{(-4;4)} y=-4$ và $\max\limits_{(-4;4)} y=10$.

b) $\max\limits_{(-4;4)} y=10$ và $\min\limits_{(-4;4)} y=-10$.

c) $\max\limits_{(-4;4)} y=0$ và $\min\limits_{(-4;4)} y=-4$

d) Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $(-4;4)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}, x\in(0;+\infty)$.

a) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

b) Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(0;+\infty)$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ và không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$

d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y=-2$

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=0$

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -3.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

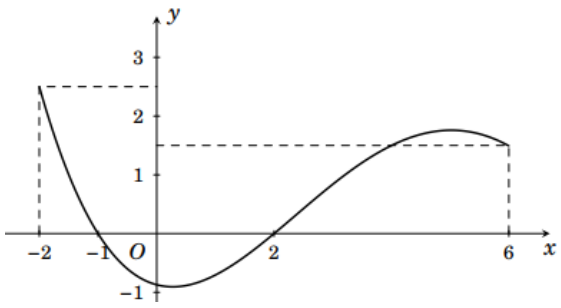
a) Cực đại của hàm số là 4

b) Cực tiểu của hàm số là 3

c) $\max\limits_{\mathbb{R}} y=4$

d) $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.



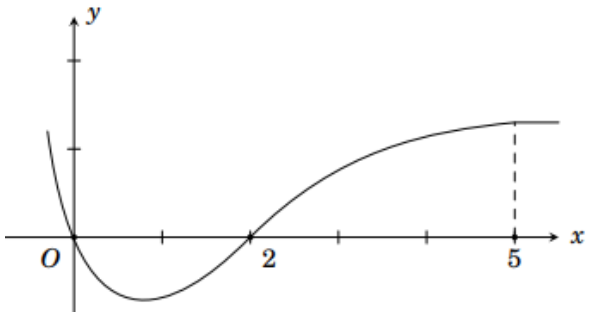
a) $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(-1)$

b) $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(6)$

c) $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(-2)$

d) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-1); f(6)\}$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$



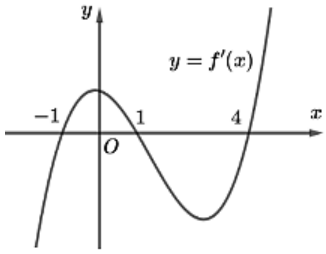
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

c) $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(0)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$

d) $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



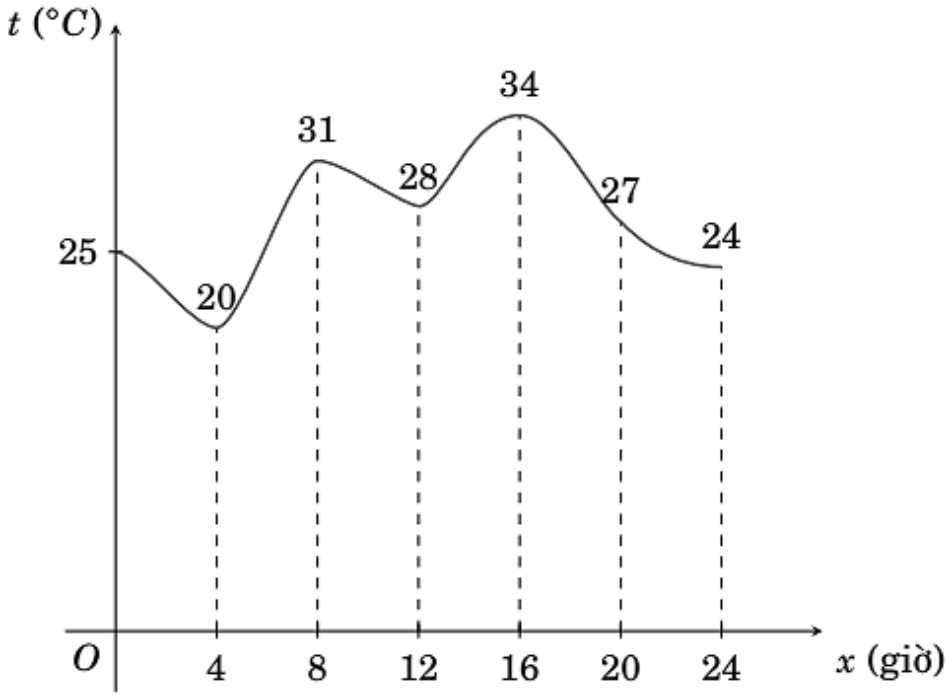
a) Hàm số có hai điểm cực trị

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

c) $f(1) > f(2) > f(4)$

d) Trên đoạn $[1;4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(1)$

Câu 8: Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày



a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là $28°C$

b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là $20°C$

c) Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ

d) Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=4x^3-9x^2-30x$. Với các số nguyên a,b mà $a<b$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(b)-f(a)$ bằng bao nhiêu?

Câu 2: Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x-2\cos^2 x+3\sin x+6$ trên $[0;\pi]$ lần lượt là M,m. Tính tổng $M+m$.

Câu 3: Cho hàm số $y=e^x(x^2-3)$, gọi $M=\frac{a}{e^b}(a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N})$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5;-2]$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$?

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\frac{16}{x}$ trên đoạn $[1;4]$

Câu 5: Cho hàm số $y=x+\frac{1}{x+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;2]$

Câu 6: Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t)=1000+30t^2-t^3(0\le t\le 30)$. Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

----------HẾT----------

Dạng 2: Bài toán tìm max, min của hàm số có chứa tham số

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để

a) Hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0,2)$

b) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ trên $[0;2]$ bằng 8

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2-1-m^2$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng -1

d) Hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-1}{x+2m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ bằng $\dfrac{1}{5}$.

Bài tập 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+m$ trên $[-1;1]$ bằng 0

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x+5m}{x-3}$ trên $[1;2]$ bằng 4

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+m}{x-3}$ (với m là tham số). Giá trị của m để $\max\limits_{[-1;2]}f(x)+\min\limits_{[-1;2]}f(x)=8$ là

A. $m=\dfrac{4}{5}$. **B.** $m=-\dfrac{46}{5}$. **C.** $m=-12$. **D.** $m=\dfrac{18}{5}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=x+\cos^2 x+m$ (m là tham số). Với giá trị nào của tham số m thì $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}y=4$

A. $m=3$. **B.** $m=\dfrac{3}{4}$. **C.** $m=\dfrac{5}{2}$. **D.** $m=0$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+m$. Biết $\max\limits_{(-\infty;0)}f(x)=5$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $(0;+\infty)$ là

A. $\min\limits_{(0;+\infty)}f(x)=1$. **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)}f(x)=2$. **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)}f(x)=3$. **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)}f(x)=-1$.

Câu 4: Cho hàm số $y=(x+m)^3-3(x+m)+1+n$. Biết hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;1]$ bằng 4. Tính $m+n$

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=2$. **C.** $m+n=-1$. **D.** $m+n=1$.

Câu 5: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ là $3\sqrt{2}$. Giá trị của m là

A. $m=2\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$. **C.** $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m=\sqrt{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+m$ (với m là tham số thực). Biết $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x)=5$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $(0;+\infty)$ là

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=1.$ **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=2.$ **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=3.$ **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=-1.$

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Gọi m_0 là giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0<-1.$ **B.** $m_0>4.$ **C.** $1\le m_0<3.$ **D.** $3<m_0\le 4.$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=10^x+x$ và hàm số $g(x)=x^3-mx^2+\left(m^2+1\right)x-2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x+f(x)\right)$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của tham số m bằng

A. $\dfrac{21}{2}$. **B.** 6. **C.** 21. **D.** 5.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 1.

A. $m=20$. **B.** $m=19$. **C.** $m=18$. **D.** $m=21$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng $-\dfrac{9}{2}$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 11: Cho hàm số $y=\left(x^3-3x-m+1\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4 là

A. -2. **B.** 2. **C.** -4. **D.** 4.

Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x-8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng m. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(20;25)$. **B.** $(6;9)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(2;5)$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+4}$. Gọi m_0 là giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;6]$ bằng -4. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(5;7)$. **B.** $m_0\in(1;3)$. **C.** $m_0\in(7;9)$. **D.** $m_0\in(3;5)$.

Câu 14: Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$, với m là tham số. Gọi S là tập các giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;4]$ bằng -1. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -6. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -3.

Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+1}$ với m là số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;2]$ bằng 6.

A. $m=4$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

b) Khi $m=1$ thì hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

c) Khi $m=1$ thì trên đoạn $[1;4]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{2}$

d) Có duy nhất 1 giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, với m là tham số

a) Khi $m=0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$

b) Khi $m=0$ thì hàm số có hai điểm cực trị

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng $m-2$

d) Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Khi đó S có một phần tử

Câu 3: Cho hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$, với m là tham số

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[0;3]$ khi $m\le 0$

b) Khi $m\le 0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ là $3m+9$

c) Khi $\dfrac{9}{4}\le m\le 36$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ là $-m+12\sqrt{m}$

d) Có đúng một giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x+m}$, với m là tham số thực dương

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

b) Trên đoạn $[2;4]$ thì đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị dương

c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;4]$ là $\min\limits_{[2;4]} y=y(2)$

d) Chỉ có duy nhất một giá trị của tham số m để $\min\limits_{[2;4]} y=\dfrac{9}{5}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=ax^3-4(a+2)x+1$ với a là tham số. Nếu $\max\limits_{(-\infty;0]} f(x)=f(-2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x^3+(1+m^2)x+1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ không vượt quá 7. Số phần tử nguyên của S là bao nhiêu?

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y=f(x)=|4x-m|-x^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5?

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+4}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;8]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là bao nhiêu?

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x-m}{x+1}$. Tìm m để $\max\limits_{[1;2]} f(x)+\min\limits_{[1;2]} f(x)=-8$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2020;2020]$ để biểu thức $y=4x^2\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^2}+4mx^3-3mx+m^2$ có giá trị lớn nhất không nhỏ hơn 5?

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{3-m\sqrt{3}.\cos x}{\sin x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2025;2025]$ để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn 4?

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-2}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[-2;0]} y=\dfrac{-1}{3}$. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán?

----------HẾT----------

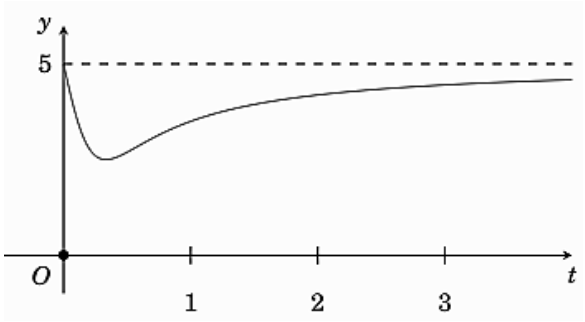
Dạng 3: Bài toán tối ưu, thực tế liên quan đến max min

- **Bài toán chuyển động**
  - Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc
  - Khi đó $s'(t)=v(t)$; $v'(t)=a(t)$
- **Bài toán thực tế - tối ưu**
  - Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$
  - Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

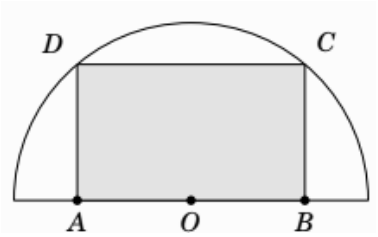
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t)=-t^4+24t^2+500$ (m/s). Trong khoảng thời gian từ $t=0$ (s) đến $t=5$ (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

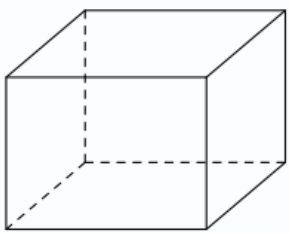
Bài tập 2: Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t\ge 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số có đồ thị là đường cong $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$ như hình bên.Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?



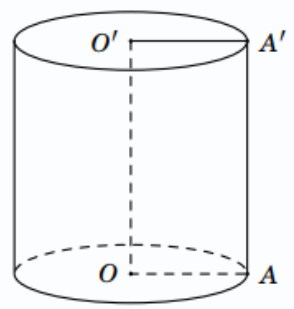
Bài tập 3: Tính diện tích lớn nhất S_{max} của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R=6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Bài tập 4: Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288\,\text{dm}^3$ dm3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?



Bài tập 5: Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích $1000\,\text{cm}^3$. Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/cm^2, trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/cm^2. Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t)=6t^2-t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

A. $t=3$ s. **B.** $t=4$ s. **C.** $t=2$ s. **D.** $t=6$ s.

Câu 2: Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=-t^3+6t^2+t+5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

A. 13 m/s. **B.** 10 m/s. **C.** 9 m/s. **D.** 12 m/s.

Câu 3: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,025x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là bao nhiêu để huyết áp được giảm nhanh nhất?

A. 24 mg. **B.** 20 mg. **C.** 15 mg. **D.** 10 mg.

Câu 4: Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$$N(t)=1000+\frac{100}{100+t^2}\ \text{(con)}$$

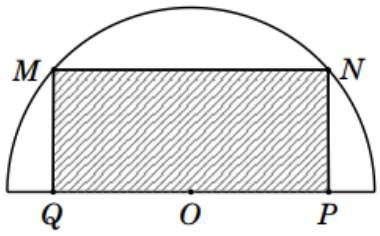
Trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

A. 1008 con. **B.** 1012 con. **C.** 1005 con. **D.** 1020 con.

Câu 5: Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $25\ \text{cm}^2$. **B.** $\frac{125}{4}\ \text{cm}^2$. **C.** $\frac{625}{4}\ \text{cm}^2$. **D.** 125cm^2.

Câu 6: Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R=3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là



A. $\frac{9}{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$.

C. 9. **D.** $9\sqrt{2}$.

Câu 7: Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $10\,\text{cm}$ x $16\,\text{cm}$. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng

A. 3m. **B.** 4m. **C.** 5m. **D.** 2m.

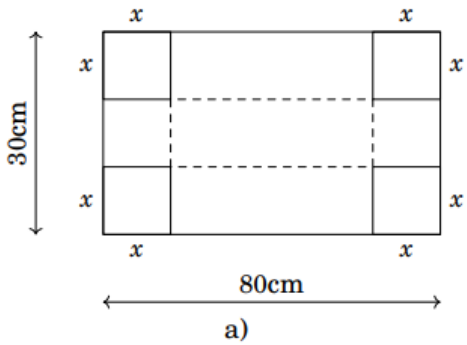
Câu 8: Ông Bình dự định sử dụng hết $5,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\text{m}^3$. **B.** $1,17\text{m}^3$. **C.** $1,51\text{m}^3$. **D.** $1,40\,\text{m}^3$.

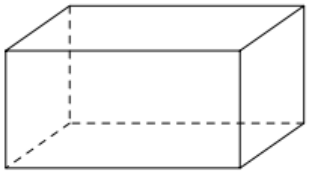
Câu 9: Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}\text{m}^3$. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 700000 đồng/m^2. Tìm kích thước của bể để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là

A. 120 triệu đồng. **B.** 105 triệu đồng. **C.** 115 triệu đồng. **D.** 110 triệu đồng.

Câu 10: Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30cm và chiều dài 80cm (hình a) người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x(\text{cm})$ với $5 \le x \le 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp (hình b). Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

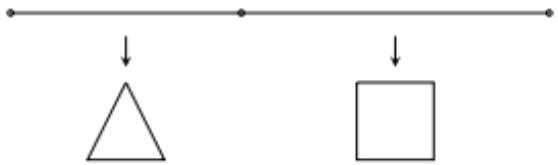


a)


b)

A. $\frac{10}{3}\text{cm}$. **B.** $\frac{20}{3}\text{cm}$. **C.** $\frac{31}{3}\text{cm}$. **D.** $\frac{40}{3}\text{cm}$.

Câu 11: Một sợi dây có chiều dài là 6m được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình thu được là nhỏ nhất?



A. $\frac{12}{4+\sqrt{3}}\text{m}$. **B.** $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\text{m}$. **C.** $\frac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\text{m}$. **D.** $\frac{18}{9+4\sqrt{3}}\text{m}$.

Câu 12: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

A. 30 triệu đồng. **B.** $30,5$ triệu đồng. **C.** $29,5$ triệu đồng. **D.** 32 triệu đồng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô . Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t) = 300\left(t^2 - t^3\right) + 4 \text{ với } 0 \le t \le 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \le t \le 0,5$

a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 1 lít.

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $41,5$ lít

c) $V'(t) = 300\left(2t - 3t^2\right) + 4$, với $0 \le t \le 0,5$

d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất

Câu 2: Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x\left(\text{m}^3\right)$ sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; $0,2$ triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 100m^3 sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất $x\left(\text{m}^3\right)$ sản phẩm trong một ngày và $\overline{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

a) $C = 0,2x + 0,001x^2$ với $0 \le x \le 100$

b) Tổng chi phí sản xuất 100m^3 sản phẩm là 34 triệu đồng

c) $\overline{C} = 0,001x + \dfrac{4}{x} + 0,2$ với $0 \le x \le 100$

d) $\overline{C}$ có giá trị thấp nhất bằng $0,326$ triệu đồng *(kết quả làm tròn ba chữ số thập phân)*

Câu 3: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0 \le x \le 100)$ cho B được biểu diễn bằng công thức $-0,01x^3 + 15x - 100$.

d) A bán cho B khoảng $70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 4: Khi nuôi tôm trong một hồ tự nhiên, một nhà khoa học đã thống kê được rằng: Nếu trên mỗi mét vuông mặt hồ thả x con tôm giống thì cuối vụ mỗi con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).

a) Điều kiện xác định là $x \ge 0$

b) Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x\left(108 - x^2\right)$

c) Để cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên thì cần thả 16 con tôm giống

d) Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là 432 (gam).

Câu 5: Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$.Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên $0,5$ kg? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

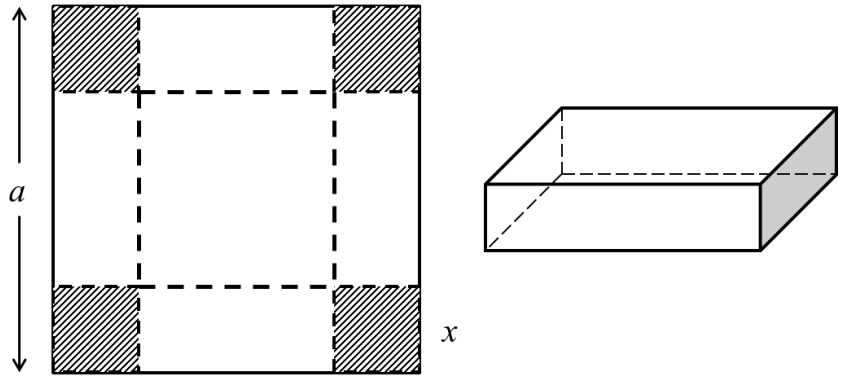
a) Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.

b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là $1,5$ (kg).

c) Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x) = -0,0652x^2 + 16x + 1500$ (kg)

d) Vụ tới ông Thanh phải thả 488 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Câu 6: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh *a*. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



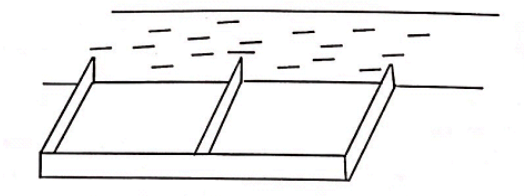
a) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{12}$.

b) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.

c) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.

d) Thể tích hộp lớn nhất bằng $\frac{a^3}{27}$.

Câu 7: Một người nông dân có $15.000.000$ đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$). Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).



a) Số tiền phải làm là: $x.60000 + y.3.50000 = 15000000$ đồng.

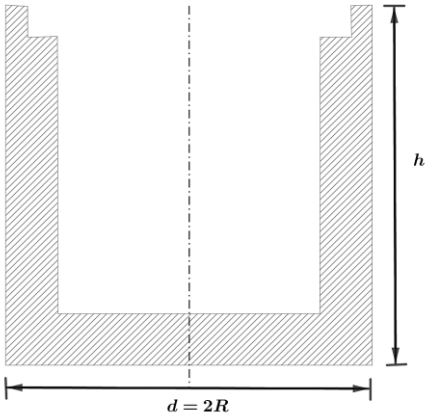
b) Diện tích đất: $S = x.y = x.\frac{500 - 5x}{2} = 250x - \frac{5}{2}x^2$

c) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được $\max\limits_{(0;+\infty)} S = 6250 \left(\text{m}^2\right)$

d) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E là 50m

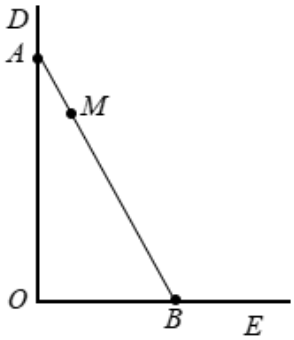
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Bác Nam muốn xây dựng một hố ga không nắp hình trụ với dung tích 3m^3. Hãy tính chi phí ít nhất mà bác Nam phải bỏ ra xây dựng hố ga, biết tiền công và vật liệu cho 1m^3 thành bê tông của hố ga (thành bê tông đáy và thành bê tông xung quang) là 685000 đồng.

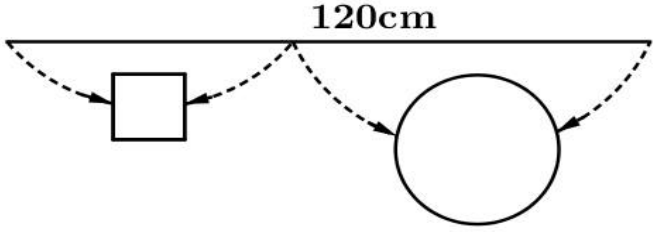


Câu 2: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 24 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

Câu 3: Người ta muốn xây một đoạn đường AB (như hình vẽ) và đoạn đường này phải đi qua điểm M Biết rằng vị trí điểm M cách OD $125m$ và cách OE $1km$. Giả sử chi phí để làm $100m$ đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành được con đường là bao nhiêu?



Câu 4: Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Câu 5: Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức $f(v)=\dfrac{386v}{v^2+2v+5}$ (xe/giây), trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất

Câu 6: Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V=8\left(m^3\right)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là 980.000đ/m^2 và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn đồng).

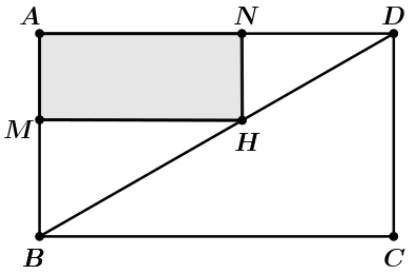
Câu 7: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t (giờ) được cho bởi công thức $c(t)=\frac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Câu 8: Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t)=\frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

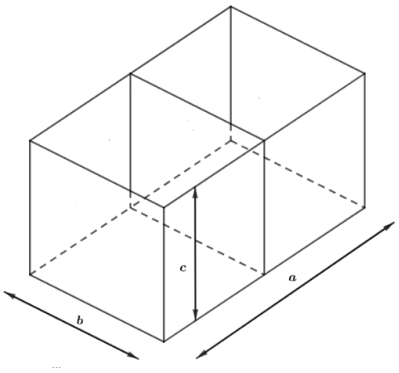
Câu 9: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Câu 10: Một cửa hàng bán vải Thanh Hà với giá bán mỗi kg là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4000 đồng cho một kg thì số vải bán được tăng thêm là 50kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30.000 đồng.

Câu 11: Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 25m^2, người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H, với H thuộc cạnh BD. Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu với chi phí trồng cỏ là 70.000 đồng/m^2?



Câu 12: Người ta cần làm một cái bể cá có hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296m^3$. Người ta cắt các tấm kính ghép lại một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ minh họa) với ba kích thước là a,b,c. Người ta phải thiết kế các kích thước là bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất (giả sử độ dày của kính không đáng kể). Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$



----------HẾT----------

BÀI 03 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

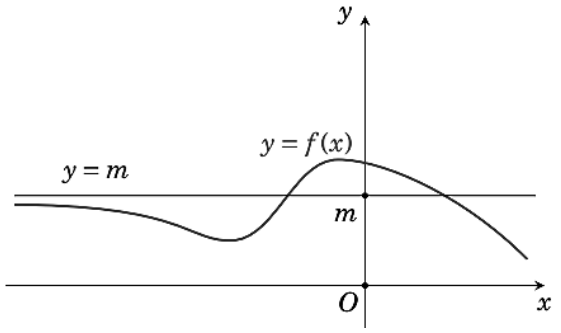
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Đường tiệm cận ngang (TCN)

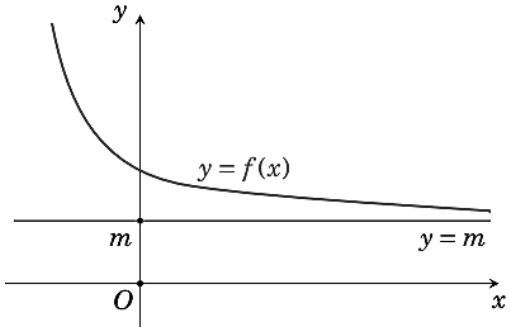
Định nghĩa: Đường thẳng $y=m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $f(x)$ nếu:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=m \text{ hoặc } \lim_{x\to+\infty} f(x)=m$$

Đường thẳng $y=m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ được minh hoạ như hình vẽ dưới đây



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=m$



b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$

Các bước tìm đường tiệm cận ngang:

Bước 1: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

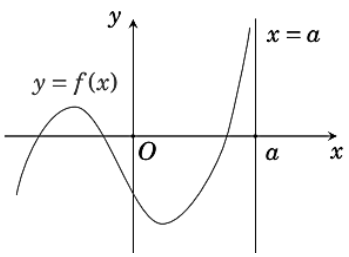
Bước 2: Xem ở "vị trí " nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó

2 Đường tiệm cận đứng (TCĐ)

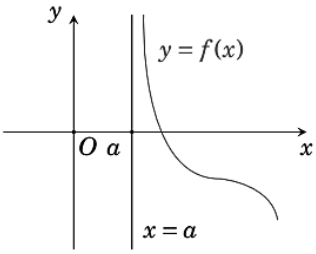
Định nghĩa: Đường thẳng $x=a$ gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

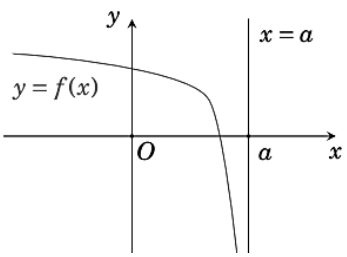
Đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ được minh hoạ như hình vẽ dưới đây



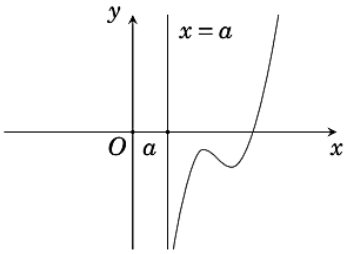
a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$



c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



d) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

Các bước tìm đường tiệm cận đứng:

Bước 1: Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$

Bước 2: Tính giới hạn một bên tại $x = x_0$.

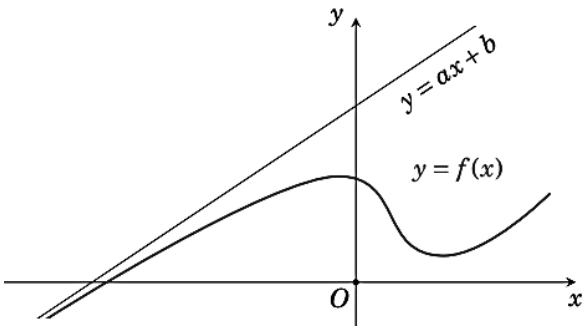
Nếu xảy ra $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

3 Đường tiệm cận xiên (TCX)

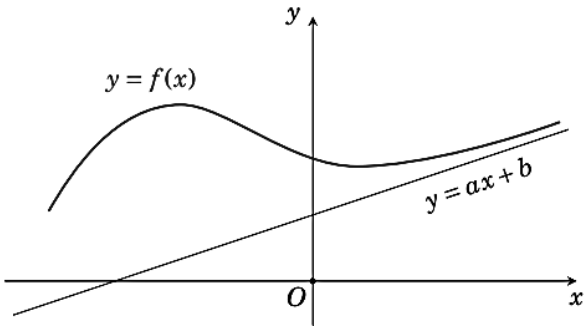
Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b\,(a \neq 0)$ gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$$

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới:



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$

Các bước tìm đường tiệm cận xiên: ta xác định hệ số của a và b trong các trường hợp sau

Bước 1: Tính $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax \right]$

Bước 2: Tính $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - ax \right]$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$. Để tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số thì ta làm như sau:

- **Các bước tìm đường tiệm cận ngang:**

  Bước 1: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

  Bước 2: Xem ở "vị trí " nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó
- **Các bước tìm đường tiệm cận đứng:**

  Bước 1: Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x=x_0$

  Bước 2: Tính giới hạn một bên tại $x=x_0$.

  Nếu xảy ra $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ thì ta kết luận $x=x_0$ là đường tiệm cận đứng.
- **Lưu ý:** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ luôn có TCĐ: $y=-\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y=\dfrac{a}{c}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xác định tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y=f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$ b) $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Bài tập 2: Xác định tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y=f(x)=\dfrac{3-x}{x+2}$. b) $y=f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$

Bài tập 3: Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ b) $y=\dfrac{2x-3}{1-2x}$ c) $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$ d) $y=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có đường tiệm cận ngang là:

A. $y=2$. **B.** $y=0$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-2$.

Câu 2: Đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ có phương trình

A. $y=2$. **B.** $y=3$. **C.** $y=1$. **D.** $y=0$.

Câu 3: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y=x^3-x-1$. **B.** $y=\sqrt{2x^2+3}$. **C.** $y=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$. **D.** $y=\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2+5}$.

Câu 4: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ là:

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=2$.

Câu 5: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{x+2}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $y=0$.

Câu 6: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+6}{x-2}$ là đường thẳng

A. $x=3$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x+6}{x-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x+6}{x-2}=-\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng.

Câu 7: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{x-1}$ là đường thẳng :

A. $x=1$ **B.** $y=2$ **C.** $x=0$ **D.** $y=0$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	2	$\nearrow$	$+\infty$

A. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
D. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

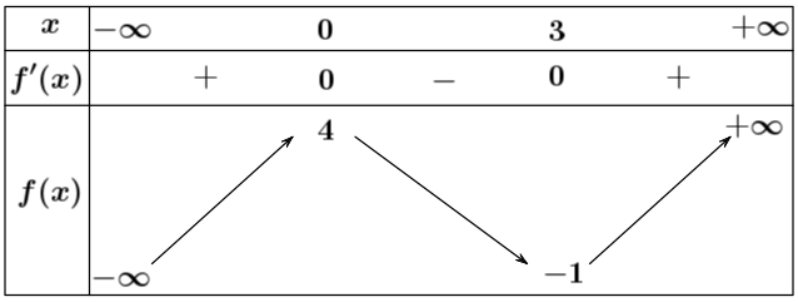
Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	-4	$+\infty$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào sau đây **đúng?**

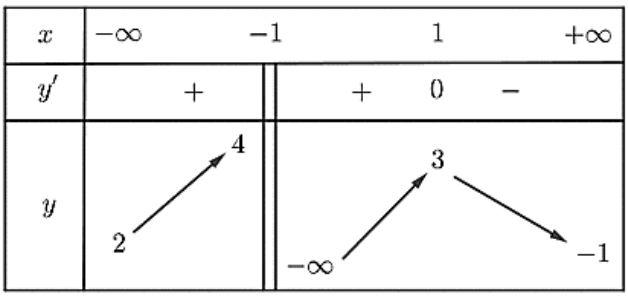
A. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 4$.

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$.

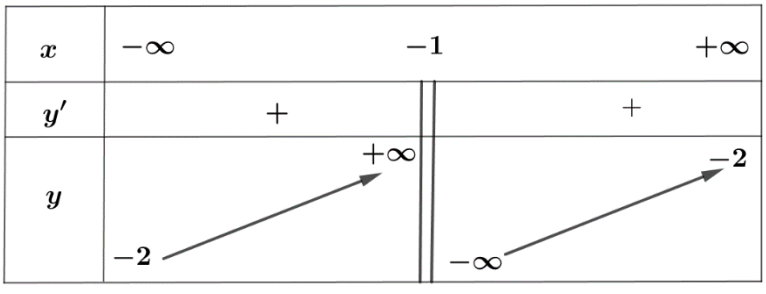
Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau:



Hỏi đồ thị hàm số có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y = -1$ và tiệm cận ngang $x = -2$.

B. Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số có ba tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -2$.

Câu 14: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 15: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 16: Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 17: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-2)\sqrt{x-1}}{x^2-1}$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 18: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 19: Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{3-2x-5x^2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 20: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-|x|-2}{x^2-2x-8}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 21: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 22: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 23: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-1}$ là:

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 24: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 25: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}$

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 26: Tổng số đường tiện cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x^2-x}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 27: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ có phương trình là

A. $y=-2$. **B.** $y=2$. **C.** $y=0$. **D.** $y=-1$.

Câu 28: Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 29: Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 30: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{2x^2-2x}$ là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	2	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

a) $f(-5)<f(4)$

b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0$

d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{5-4x}{2x+3}$ có đồ thị là (C)

a) Hàm số đã cho không có cực trị

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-3$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-2$

d) Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số tạo với hai trục toạ độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}$ có đồ thị là (C)

a) Tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}$

b) Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang, trong đó có một đường là đường thẳng có phương trình $y=-1$.

c) Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$

d) Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 3

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'	$-$		‖	$-$	0	$+$	
y	3	$\searrow$	‖	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	5
		$-\infty$	‖		-2		

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một đường tiệm cận đứng là $x=1$

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một đường tiệm cận ngang là $y=3$

d) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận đứng

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x=2$ và tiệm cận ngang là $y=3$. Tính giá trị biểu thức $a-2b$

Câu 2: Gọi $I(a;b)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+2}$. Tính $T=a+b$

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x^3-9x}{x^3-x^2-5x-3}$ có đồ thị là (C). Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) là bao nhiêu?

Câu 4: Diện tích hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+3}$ và các trục tọa độ bằng bao nhiêu?

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-5}{x+b}\,(a,b\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	1
		$+\infty$	‖		

Tính giá trị biểu thức a^2+b^2.

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tích các khoảng cách từ điểm M bất kì thuộc (C) đến hai đường tiệm cận bằng bao nhiêu?

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi $M(a;b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ dương sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Khi đó tổng $a+2b$ bằng bao nhiêu?

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+2}{2x-3}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang bằng 10 lần khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng.

Câu 9: Cho đồ thị hai hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ và $g(x)=\dfrac{ax+1}{x-2}, a\neq -\dfrac{1}{2}$. Tìm giá trị thực dương của a để các tiệm cận của hai đồ thị hàm số tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 4.

Câu 10: Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+x-1}{4x^2+bx+9}$ có đồ thị (C) và a, b là các hằng số dương thỏa mãn $a.b=4$. Biết rằng (C) có đường tiệm cận ngang $y=c$ và có đúng 1 đường tiệm cận đứng. Tính tổng $T=3a+b-24c$.

----------HẾT----------

Dạng 2: Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$. Để tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số thì ta làm như sau:

- **Các bước tìm đường tiệm cận đứng:**

  Bước 1: Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x=x_0$

  Bước 2: Tính giới hạn một bên tại $x=x_0$.

  Nếu xảy ra $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ thì ta kết luận $x=x_0$ là đường tiệm cận đứng.

- **Các bước tìm đường tiệm cận xiên:** ta xác định hệ số của a và b trong các trường hợp sau

  Bước 1: Tính $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$

  Bước 2: Tính $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]$

- **Lưu ý:**
  - Nếu $a=0$ thì tiệm cận xiên chính là tiệm cận ngang
  - Đối với hàm số phân thức $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ta có thể chia đa thức để biến đổi về dạng

    $$f(x)=a'x+b'+\frac{e}{mx+n} \text{ với } e\neq 0$$

    Suy ra $y=a'x+b'$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xác định tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y=f(x)=x+\dfrac{1}{x+2}$ b) $y=f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$

Bài tập 2: Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y=\dfrac{x^2+2}{2x-4}$ b) $y=\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}$ c) $y=\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$. Tiệm cận xiên của đồ thì hàm số là đường thẳng:

A. $y=2x-1$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=2x-3$. **D.** $y=2x+3$.

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-3}$ có tiện cận xiên là đường thẳng $y=ax+b$. Tính a^2+2b.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 3: Biết tiện cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+2}{x^2-2x}$ cắt trục tọa độ tại hai điểm A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB là

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 3.

Câu 4: Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$ có tiện cận xiên là đường thẳng $d: y=ax+b$. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d.

A. $M(-1;2)$. **B.** $N(2;2)$. **C.** $P(2;-2)$. **D.** $Q(2;-1)$.

Câu 5: Đường thẳng $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$. **B.** $y=\sqrt{x^2-2x+3}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2+x+1}{2x+1}$.

Câu 6: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=2x-1-\dfrac{1}{x+1}$ có phương trình là

A. $y=x+1$. **B.** $y=2x-1$. **C.** $y=x-1$. **D.** $y=2x+1$.

Câu 7: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=x+3+\dfrac{1}{2x+1}$ có phương trình là

A. $y=2x+1$. **B.** $y=x-3$. **C.** $y=x+3$. **D.** $y=2x-1$.

Câu 8: Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-2}$

A. $y=2x-5$. **B.** $y=x-2$. **C.** $y=x+5$. **D.** $y=x-5$.

Câu 9: Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$

A. $y=x+1$. **B.** $y=-3x+1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=x-1$.

Câu 10: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x+5}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $(5;3)$. **B.** $(-4;-5)$. **C.** $(6;-1)$. **D.** $(2;-10)$.

Câu 11: Xác định toạ độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$

A. $(1;2)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $(1;0)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C)

a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

c) Giao điểm hai tiệm cận của đồ thị nằm trên parabol $y=x^2$.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị vuông góc với đường thẳng $x+y-\pi=0$.

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C)

a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

c) Giao điểm của hai tiệm cận nằm trên trục hoành.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị song song với đường thẳng $x+y=0$.

Câu 3: Cho hàm số $(C): y=f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x+3}$ biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$

a) Giao điểm của Δ và trục Ox có hoành lớn hơn 2.

b) Giao điểm của Δ và tiệm cận đứng của (C) có tọa độ là $(-3;-9)$.

c) Gọi $A=\Delta\cap Ox,\ B=\Delta\cap Oy$ thì ta có $S_{OAB}>3$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=ax+b$ trên $[0;3]$ là 4.

Câu 4: Cho hàm số $(C): y=f(x)=\sqrt{4x^2+8x-12}$ và điểm $M\in(C)$ với $x_M<0$

a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận xiên đều là các hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Xét $\Delta_1: y=ax+b\ (b>0)$ là tiện cận xiên của (C) điểm $(1;4)\in\Delta$.

c) Xét $\Delta_2: y=ax+b\ (b<0)$ là tiện cận xiên của (C) khi đó $d_{\max}(M,\Delta_2)<2$.

d) Hoành độ giao điểm của hai đường tiệm cận xiên bằng -2.

Câu 5: Cho hàm số $(C_1): f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$ và $(C_2): g(x)=\dfrac{2x^2-3x-1}{2x-1}$ biết đồ thị hàm số (C_1) có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=x_0$, $y=y_0$; (C_2) có tiện cận xiên là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$

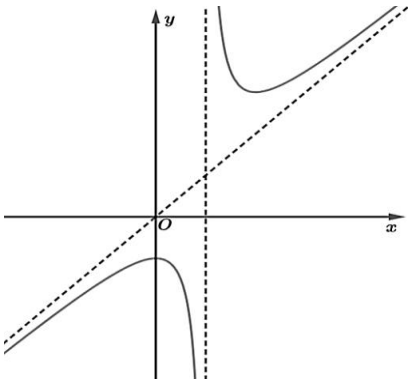
a) Giá trị của biểu thức $S=x_0+2y_0+3b=8$.

b) Đồ thị hàm số (C_2) có tiện cận ngang là đường thẳng $y=1$.

c) Giao điểm của ba đường tiệm cận ở đề bài tạo thành tam giác có diện tích bằng 2.

d) Đồ thị hàm số (C_1) và (C_2) có chung đường tiệm cận đứng.

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



a) Đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=1$.

d) Đường thẳng $y=x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-4}$

Câu 2: Tìm hệ số góc k của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^3+5x^2-1}{x^2-x+1}$

Câu 3: Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3mx-m+2}{x-1}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Câu 4: Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y=mx+\dfrac{1}{x}(*)$, m là tham số. Tìm m để hàm số $(*)$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến đường tiệm cận xiên bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}(1)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0.

----------HẾT----------

Dạng 3: Bài toán về đường tiệm cận của đồ thị hàm số có chứa tham số

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tham số m để đồ thị hàm số

a) $y=\dfrac{4x+1}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng

b) $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng

c) $y=\dfrac{3x-1}{x-m}$ có đường tiệm cận đứng là $x=5$

d) $y=\dfrac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có TCN là $y=1$

e) $y=\dfrac{x+3}{x^2-2mx+9}$ có đúng hai đường tiệm cận gồm một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang

f) $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận gồm một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang

Bài tập 2: Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có hai tiệm cận đứng

b) $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có tiệm cận xiên

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Giá trị m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2m-1}{x+m}$ đi qua điểm $M(3;1)$ là

A. $m=-3$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

A. $m>-2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m<-2$. **D.** $m\neq -2$.

Câu 3: Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2025;2025]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên trái trục tung là

A. 2020. **B.** 2025. **C.** 4041. **D.** 4042.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+4x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19. **B.** 15. **C. 16.** **D.** 17.

Câu 5: Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Giá trị $m+n$ là

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** -6.

Câu 6: Số giá trị nguyên của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-2x+m}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. 5. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-2mx-m-2}$. Biết với $m=\dfrac{a}{b}(a,b\in\mathbb{N},\ \dfrac{a}{b}$ tối giản) thì đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận. Tính $a+b$.

A. $a+b=7$. **B.** $a+b=5$. **C.** $a+b=8$. **D.** $a+b=6$.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị của tham số để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{mx^2-2(m-1)x+m-2}$ có đồ thị (C_m). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để (C_m) có đúng 2 đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 10: Cho đường cong $(C):y=\dfrac{x+a}{x-1}$. Biết điểm M thuộc (C). Tính tổng các giá trị của tham số a để tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng $3\sqrt{2}+2$.

A. $3\sqrt{2}-2$. **B.** 6. **C.** -2. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^3+3x^2+m+1}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $\left[\begin{array}{l}m\le -4\\ m>0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m<-5\\ m>-1\end{array}\right.$. **C.** $-5\le m<-1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m\le -5\\ m>-1\end{array}\right.$.

Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m-1)x+m^2-2m+1}{1-x}$ (1), m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}$.

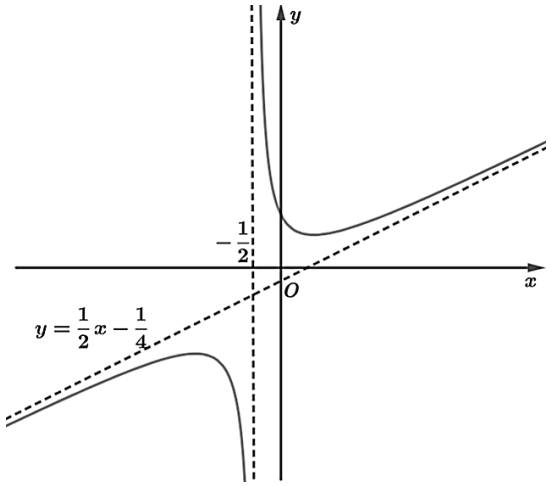
A. $m=\pm 2$. **B.** $m=\pm 3$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=\pm 1$.

Câu 13: Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ có hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 5.

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 5.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{nx^2+1}{mx+1}\ (mn\neq 0)$ có đồ thị (C) như hình vẽ:



a) $\dfrac{n}{m}=-\dfrac{1}{4}$.

b) $m=-\dfrac{1}{2}$.

c) $m+n=3$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{1}{2}x\right]=0$.

Câu 2: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(m+1)x^2+(2m+1)x+m+2}{x+1}$.

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=1$

b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1;2)$ khi $m=\dfrac{1}{2}$

c) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $d:3x+4y-5=0$ khi $m=1$

d) Giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) luôn thuộc Parabol $(P):y=-x^2$

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m>0$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $m\neq 0$

d) Tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận là $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}$ có đồ thị là (C) với m là tham số

a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận khi $m\neq\dfrac{1}{3}$

b) Khi $m=1$ thì đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình $y=x-2$

c) Biết đồ thị (C) có hai đường tiệm cận và khi $m=\pm 2$ thì góc tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số bằng $45°$.

d) Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị (C) có đường tiệm cận xiên cắt các trục toạ độ tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4. Khi đó tổng bình phương các phần tử của tập S bằng 4.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+4x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{(2m+1)x^2+3}{\sqrt{x^4+1}}$, m là tham số. Tìm giá trị của m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;-3)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

Câu 5: Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành và trục trung làm hai đường tiệm cận. Tính $m+n$.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+2mx+3m+4}$ có đúng một đường tiệm cận đứng là

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-2mx-m-2}$. Biết với $m=\dfrac{a}{b}(a,b\in\mathbb{N},\dfrac{a}{b}$ tối giản) thì đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận. Tính $a+b$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-bx^2-a^2x+a^2b}$ có đồ thị (C), với a và b là hai tham số nguyên. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số $(a;b)$ để có đúng hai đường tiệm cận (nếu chỉ xét tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

----------HẾT----------

BÀI 04 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐTHS

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

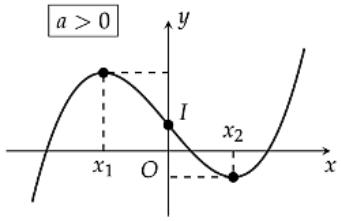
1 Các bước khảo sát hàm số y = f(x)

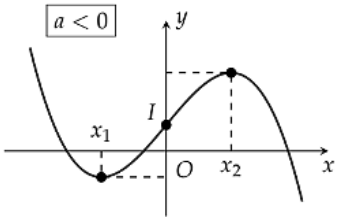
Để khảo sát hàm số $y = f(x)$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số
- **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm tại đó $y' = 0$ hoặc đạo hàm không tồn tại
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
  - Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
- **Bước 3:** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

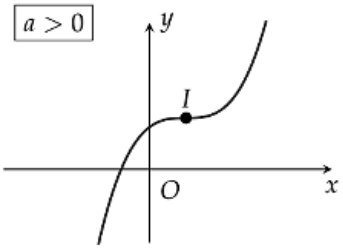
2 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

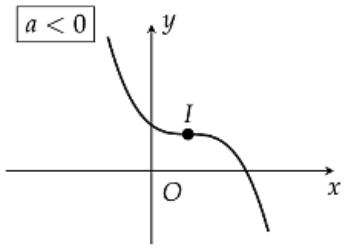
a) **Trường hợp 1:** $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2. Khi đó hàm số có hai điểm cực trị là $x = x_1$ và $x = x_2$



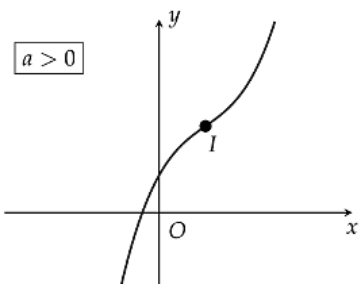


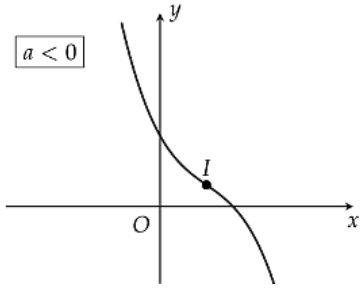
b) **Trường hợp 2:** $y' = 0$ có nghiệm kép $x = x_0$. Khi đó hàm số không có cực trị





b) **Trường hợp 3:** $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó hàm số không có cực trị



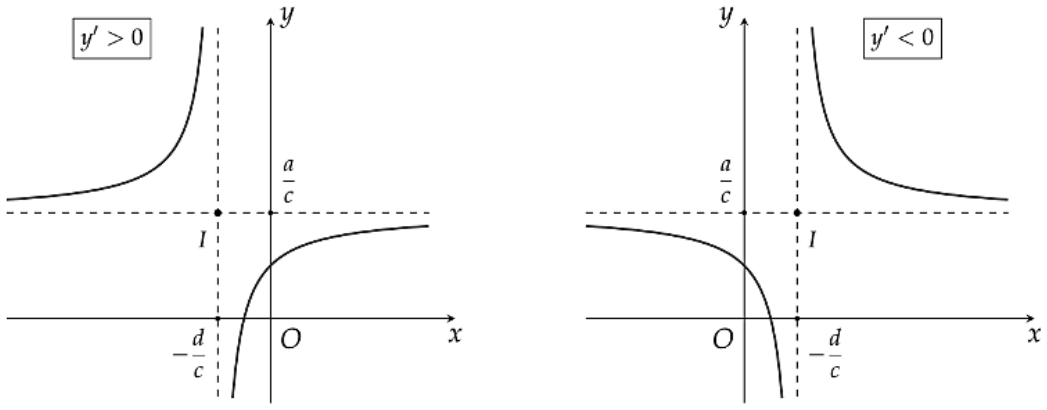


Một số lưu ý cần nhớ về hàm số bậc ba:

- Hàm số không có điểm cực trị khi và chỉ khi $b^2-3ac\le 0$ hoặc $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$
- Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases}a\ne 0\\b^2-3ac>0\end{cases}$
- Liên hệ giữa tổng và tích hạ nghiệm $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}\\x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}\end{cases}$
- Toạ độ tâm đối xứng của đồ thị chính là trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị. Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm của phương trình $y''=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{3a}$
- Tiếp tuyến tại tâm đối xứng sẽ có hệ số góc nhỏ nhất nếu $a>0$ và lớn nhất nếu $a<0$

3 Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c\ne 0,\ ad-bc\ne 0$

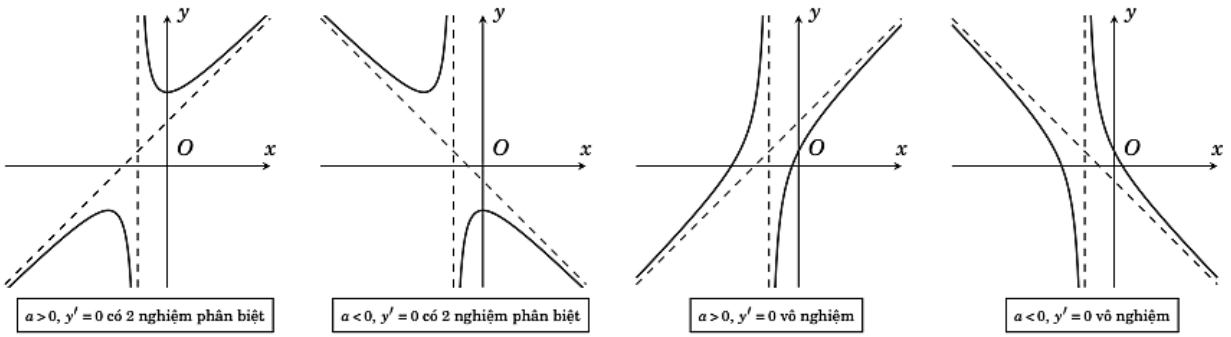
- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng
- Tiệm cận ngang: $y=\dfrac{a}{c}$; tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$
- Giao với Ox: $y=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$; giao với Oy: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{b}{d}$
- Hình dạng đồ thị được minh hoạ như sau:



4 Hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$, $a\ne 0, m\ne 0$ (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{am.x^2+2an.x+b.n-m.c}{(mx+n)^2}$
- Hàm số có hai điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt, không có cực trị khi phương trình $y'=0$ vô nghiệm
- Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng

- Hình dạng đồ thị được minh hoạ như sau:



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

- Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm tại đó $y' = 0$ hoặc đạo hàm không tồn tại
- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
- Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số

Bước 3: Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

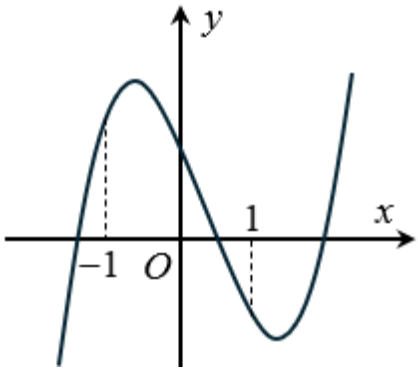
a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$ b) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d < 0$. **B.** $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$.

C. $a > 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0$. **D.** $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$.

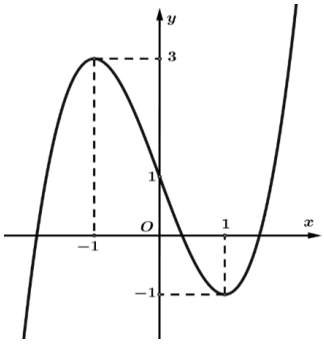
Câu 2: Bảng biến thiên ở hình bên là một trong bốn hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. $y=-x^3-3x^2$. **B.** $y=x^3-3x^2-1$. **C.** $y=x^3+2x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

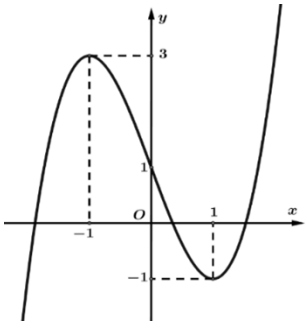
Lời giải

Câu 3: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^3-3x-1$. **C.** $y=-x^3-3x-1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

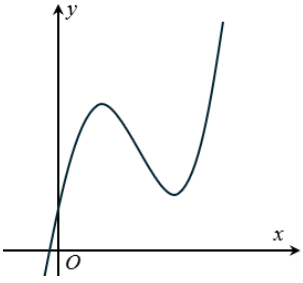
Câu 4: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a>0,b<0,c<0,d>0$. **B.** $a>0,b>0,c<0,d>0$

C. $a>0,b<0,c>0,d>0$ **D.** $a<0,b<0,c<0,d>0$.

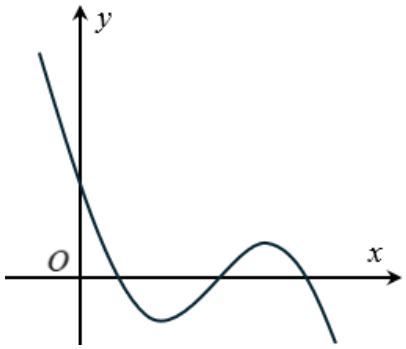
Câu 5: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+1$. **B.** $y=x^3-3x^2+1$.

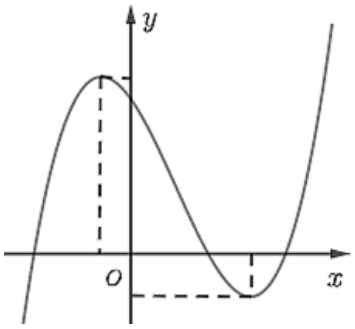
C. $y=-\frac{1}{2}x^3+3x^2+\frac{9}{2}x+1$. **D.** $y=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+1$.

Câu 6: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a<0,b>0,c>0,d>0$.
B. $a<0,b<0,c<0,d>0$.
C. $a>0,b>0,c<0,d>0$.
D. $a<0,b>0,c<0,d>0$.

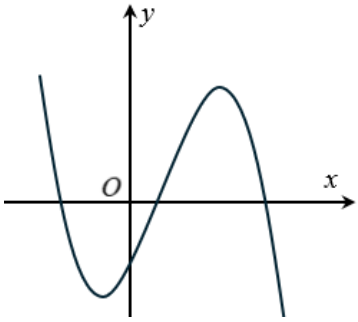
Câu 7: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây đúng?

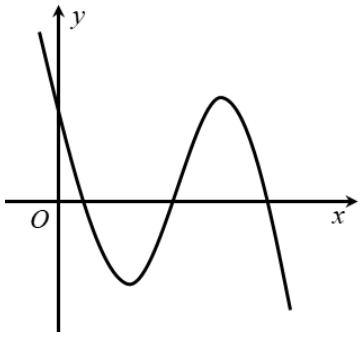
A. $a>0,b<0,c<0,d>0$.
B. $a>0,b>0,c>0,d>0$.
C. $a>0,b<0,c>0,d<0$.
D. $a>0,b>0,c<0,d>0$.

Câu 8: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a<0,b>0,c>0,d<0$.
B. $a<0,b<0,c>0,d<0$.
C. $a>0,b<0,c<0,d>0$.
D. $a<0,b>0,c<0,d>0$.

Câu 9: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ

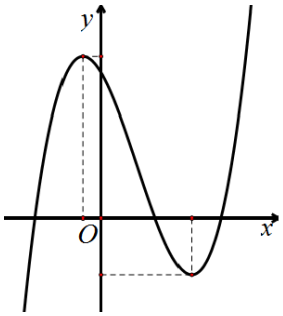


Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a<0,b>0,c>0,d>0$. **B.** $a>0,b>0,c<0,d>0$.

C. $a<0,b<0,c<0,d>0$. **D.** $a<0,b>0,c<0,d>0$.

Câu 10: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau

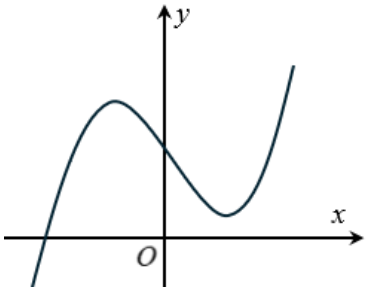


Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<0,b<0,c<0,d>0$. **B.** $a>0,b<0,c>0,d<0$.

C. $a>0,b<0,c<0,d>0$. **D.** $a>0,b<0,c>0,d>0$.

Câu 11: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



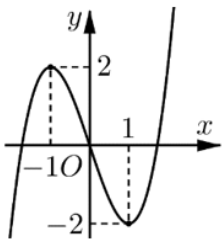
A. $a>0,b>0,c>0,d>0$. **B.** $a>0,b>0,c<0,d>0$.

C. $a>0,b<0,c<0,d>0$. **D.** $a>0,b<0,c<0,d<0$.

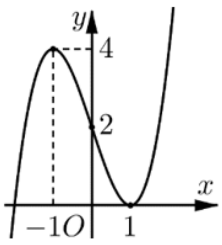
Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

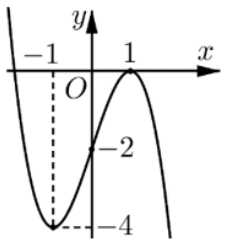
Đồ thị nào thể hiện hàm số $y=f(x)$?



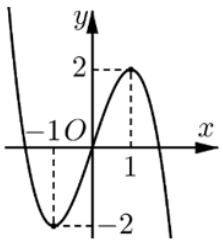
I



II



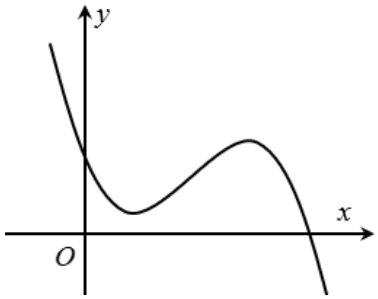
III



IV

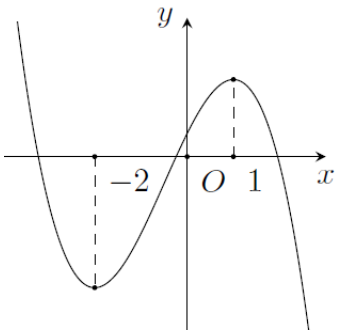
A. *I*. **B.** *II*. **C.** *III*. **D.** *IV*.

Câu 13: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Trong các hệ số a,b,c,d có bao nhiêu số âm ?



A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

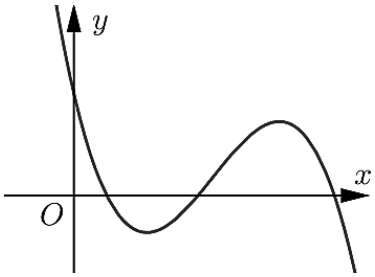
Câu 14: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng?



A. $ab>0,bc<0,cd<0$. **B.** $ab>0,bc<0,cd>0$.

C. $ab>0,bc>0,cd>0$. **D.** $ab<0,bc<0,cd>0$.

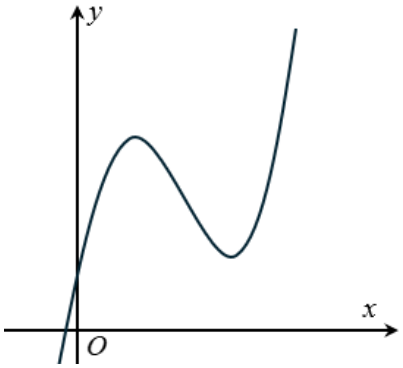
Câu 15: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a<0,b>0,c>0,d>0$. **B.** $a<0,b<0,c<0,d>0$.

C. $a>0,b>0,c<0,d>0$. **D.** $a<0,b>0,c<0,d>0$.

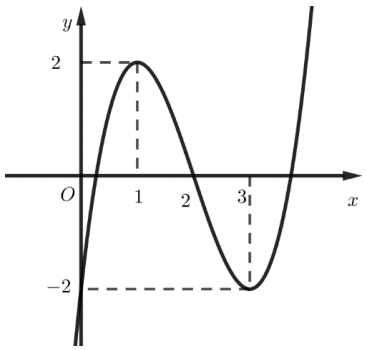
Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0,b>0,c>0,d>0$. **B.** $a>0,b<0,c>0,d>0$.

C. $a<0,b<0,c>0,d<0$. **D.** $a>0,b>0,c<0,d>0$.

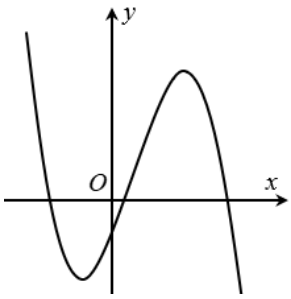
Câu 17: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Số lớn nhất trong các số a, b, c, d là:

A. c. **B.** a. **C.** b. **D.** d.

Câu 18: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $a<0$, $b>0$, $c>0$, $d<0$. **B.** $a<0$, $b<0$, $c>0$, $d<0$.
C. $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$. **D.** $a<0$, $b>0$, $c<0$, $d<0$.

Câu 19: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - 2x - 4$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_3$.

A. $m = 0$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.

Câu 20: Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$.

A. $m \geq -3$. **B.** $m > -2$. **C.** $m > -3$. **D.** $m \geq -2$.

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$, (C_m). Tìm các giá trị của m để đường thẳng d đi qua $I(-1;2)$ có hệ số góc bằng $-m$ cắt đồ thị hàm số (C_m) tại 3 điểm phân biệt.

A. $m < \frac{3}{2}$. **B.** $m > \frac{3}{2}$. **C.** $m \leq -2$ **D.** $m > 2$.

Câu 22: Cho hàm số $y = 2x^3 - 7x^2 + 3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = x^3 - 5x^2 + (3-m)x + 2m$ (với $m \in \mathbb{R}$) có đồ thị (P). Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm phân biệt có hoành độ nằm trong $[-2;4]$. Tổng các giá trị nguyên của m bằng

A. -6. **B.** -10. **C.** -8. **D.** -5.

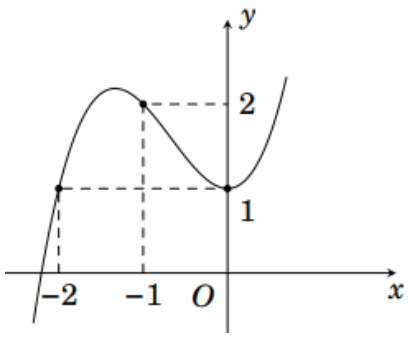
Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 3$.

A. $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$. **B.** $m < 1$. **C.** $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4} < m < 1$.

Câu 24: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị là đường cong (C_m). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



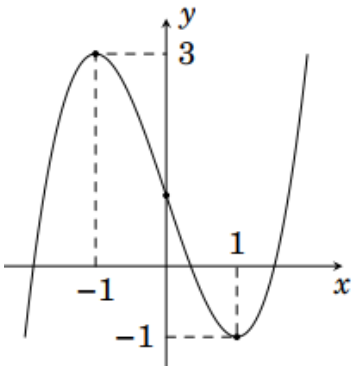
a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có toạ độ $(0;1)$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

d) $2a + 3b + c = 9$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có toạ độ $(0;1)$

b) Đường thẳng đi qua điểm $(0;1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng

c) $a - b + c + d = -1$

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3;18)$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

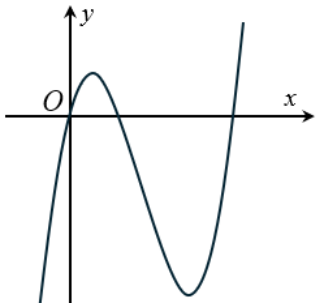
a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4

b) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt

c) Trong bốn hệ số a,b,c,d có đúng hai số âm

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4;20)$

Câu 4: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên.



a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.

c) Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

d) Trong các hệ số a,b,c,d có 2 hệ số dương.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3m^2x + 2024$ có đồ thị (C).

a) (C) luôn có hai điểm cực trị.

b) Khi m thay đổi thì đồ thị (C) luôn có tâm đối xứng cố định.

c) Khi m thay đổ thì đồ thị (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm.

d) Khi (C) có 2 cực trị thì đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y = ax + b$. Đặt $S = a + b$ thì $S \leq 2024$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đường thẳng $y = 3x + m - 2$ cắt đồ thị $y = (x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt là

Câu 2: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=2x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt?

Câu 3: Với m là một tham số thực thì đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ và đường thẳng $y=m$ có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm?

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-m^2+5m=0$ có ba nghiệm thực phân biệt?

Câu 5: Cho hàm số $y=x^3-(m+2)x^2-(2m+13)x-m-2$ có đồ thị (C_m); đường thẳng $d: y=mx+m+8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A,B,C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

Câu 6: Gọi đường thẳng d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m(m>0)$ cắt đồ thị $(C): y=-x^3+6x^2-9x+2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8. Hãy tìm giá trị của tham số m.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2$. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1. Biết rằng $S=\left(\frac{-a}{b};+\infty\right)$; trong đó a,b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Giá trị biểu thức $T=a+b$ bằng bao nhiêu?

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3-2x^2-1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d): y=mx-1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A,B,C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y=2x+1$. Tìm giá trị của tham số m

----------HẾT----------

Dạng 2: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc 1 / bậc 1

Để khảo sát hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$
- **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
  - Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
- **Bước 3:** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ b) $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$

c) $y=\dfrac{x+3}{1-x}$ d) $y=\dfrac{5+x}{2-x}$

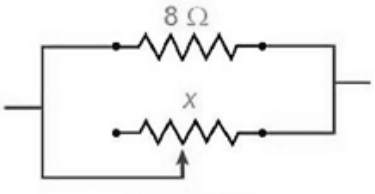
Bài tập 2: Một cốc chứa 30 ml dung dịch KOH (Potassium Hydroxide) với nồng độ 100 mg / ml. Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ 8 mg / ml được trộn vào cốc.

a) Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn $x\,(\text{ml})$ từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.

b) Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x\geq 0$. Khảo sát sự biên thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.

c) Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8 mg/ml

Bài tập 3: Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ (theo Vật Lí Đại Cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).



Giả sử một điện trở $8\,\Omega$ được mắc song song với một biến trở như hình bên. Nếu điện trở đó được ki hiệu là $x(\Omega)$ thì điện trở tương đương R là hàm số của x. Vẽ đồ thị của hàm số $y=R(x),\ x>0$ và dựa vào đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

a) Điện trở tương đương của mạch thay đổi thế nào khi x tăng.

b) Tại sao điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá $8\,\Omega$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

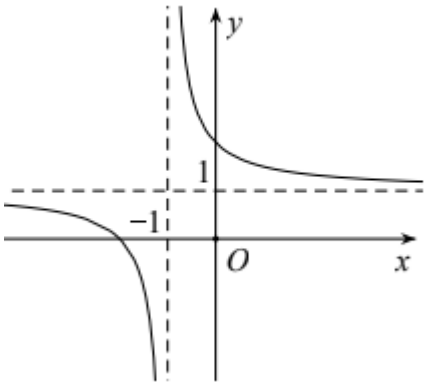
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới đây?

x	0		2		$+\infty$
y'	$-$		$\|$	$-$	
y	2	$\searrow$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	2
		$-\infty$	$\|$		

A. $y=\dfrac{2x-7}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x-2}$.

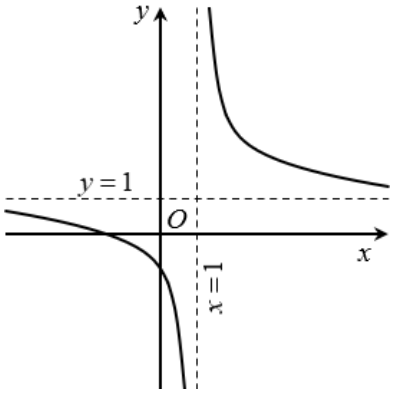
Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

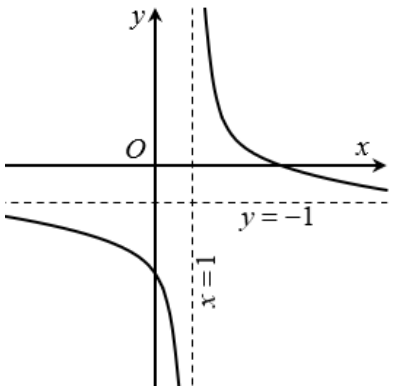
A. $0<b<a$. **B.** $0<a<b$. **C.** $b<0<a$. **D.** $a<b<0$.

Câu 3: Hàm số nào sau đây mà đồ thị có dạng như hình vẽ bên dưới?



A. $y=\dfrac{x}{1-x}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{1-x}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x-1}$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



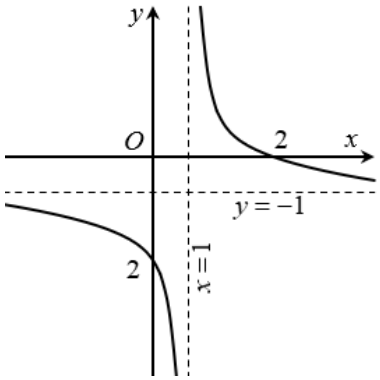
A. $b<0<a$. **B.** $0<b<a$. **C.** $b<a<0$. **D.** $0<a<b$.

Câu 5: Bảng biến thiên sau đây của hàm số nào?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	2

A. $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

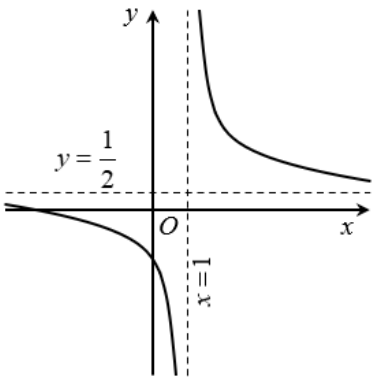
Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên



Tích $a.b$ bằng

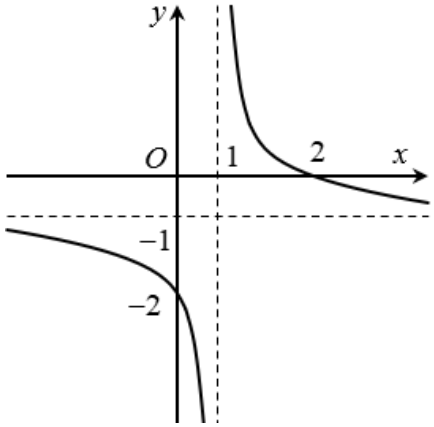
A. 2. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 7: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x}{3x-3}$.

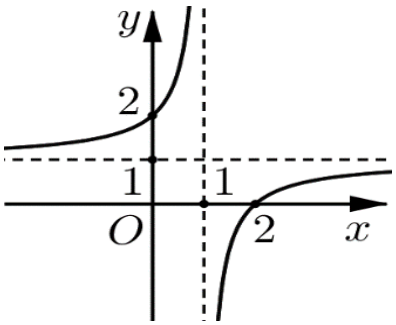
Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị của $a+2b+3c$ bằng

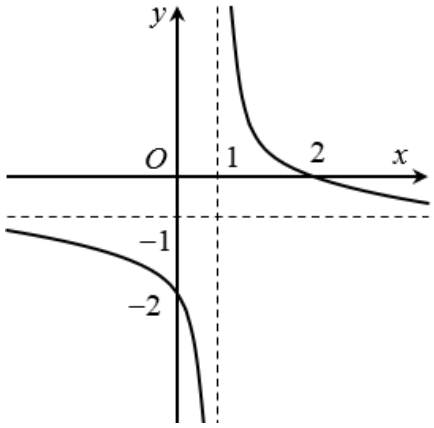
A. 2. **B.** 0. **C.** 6. **D.** -8.

Câu 9: Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$, $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị biểu thức $T=a-3b-2c$ bằng



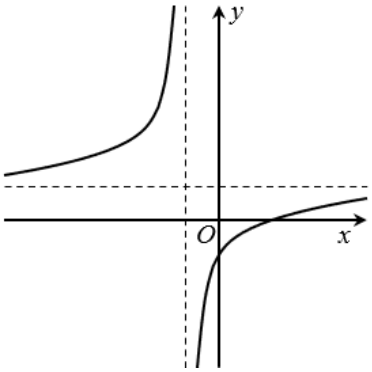
A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -3.

Câu 10: Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



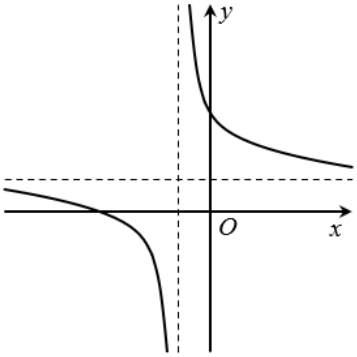
A. $b<a<0$. **B.** $0<b<a$. **C.** $b<0<a$. **D.** $0<a<b$.

Câu 11: Hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



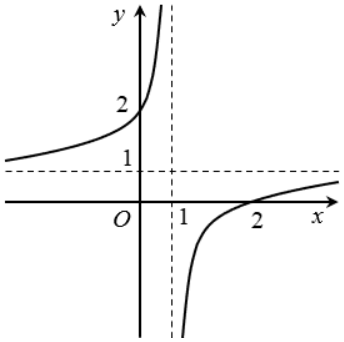
A. $bd>0, ad>0$. **B.** $bd<0, ab>0$. **C.** $ad>0, ab<0$. **D.** $ab<0, ad<0$.

Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



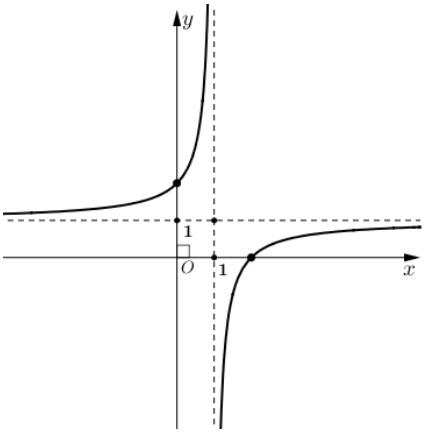
A. $0<a<b$. **B.** $b<0<a$. **C.** $0<b<a$. **D.** $a<b<0$.

Câu 13: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới



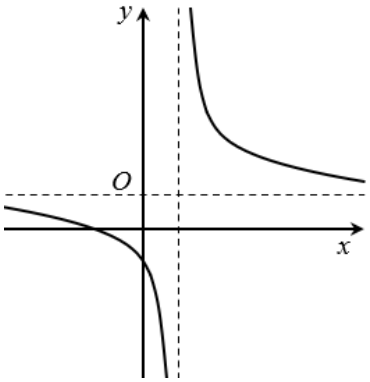
A. $y=x^3-3x+2$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. **D.** $y=-x^4+5x^2-1$.

Câu 14: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **D.** $y=-x^3+3x+2$.

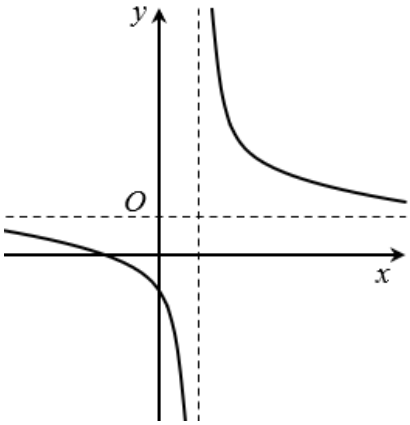
Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{bx-c}{x-a}$ ($a\neq 0$ và $a,b,c\in\mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a>0,b<0,c-ab<0$. **B.** $a>0,b>0,c-ab<0$.

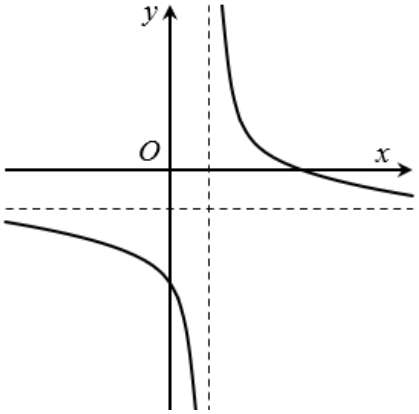
C. $a<0,b>0,c-ab<0$. **D.** $a<0,b<0,c-ab>0$.

Câu 16: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=x^4+x^2+1$ **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ **C.** $y=x^3-3x-1$ **D.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

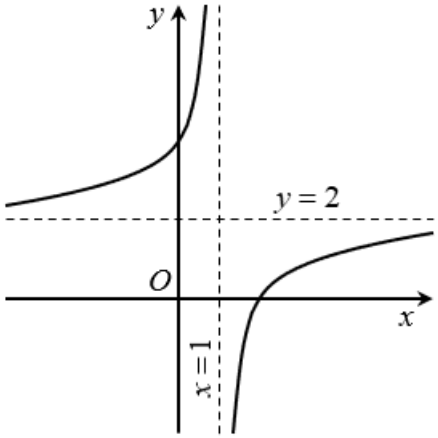
Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+4-b}{cx+b}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a>0,\ b>4,\ c<0$. **B.** $a>0,0<b<4,\ c<0$.

C. $a>0,\ b<0,\ c<0$. **D.** $a<0,\ 0<b<4,\ c<0$.

Câu 18: Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x-3}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}\,(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\left[\begin{array}{l} b>\dfrac{2}{3} \\ b<0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} b>0 \\ b<-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$. **C.** $-\dfrac{2}{3}<b<0$. **D.** $0\le b<\dfrac{2}{3}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

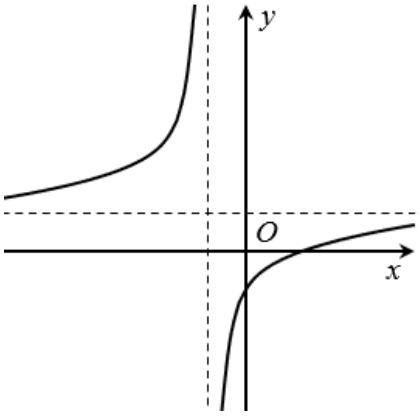
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	2

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

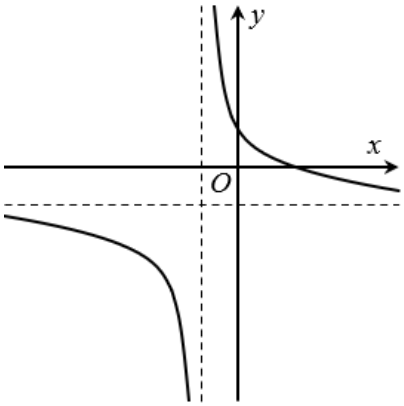
.

Câu 21: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên dưới. Biết rằng a là một số thực dương, hỏi trong các số b,c,d có tất cả bao nhiêu số dương?



A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 22: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\,(a<0)$ có đồ thị như sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab<0,bc<0,cd>0$. **B.** $ab>0,bc<0,cd>0$.

C. $ab>0,bc>0,cd>0$. **D.** $ab<0,bc>0,cd>0$.

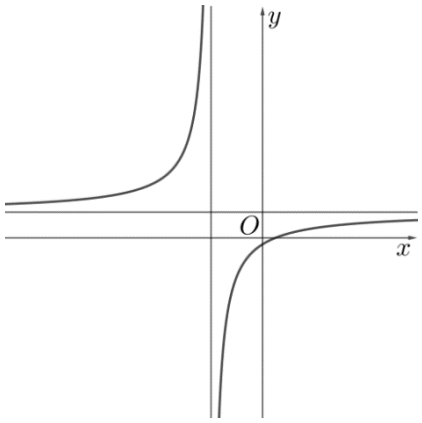
Câu 23: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-4}{bx+c}\ \ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	1

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 24: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

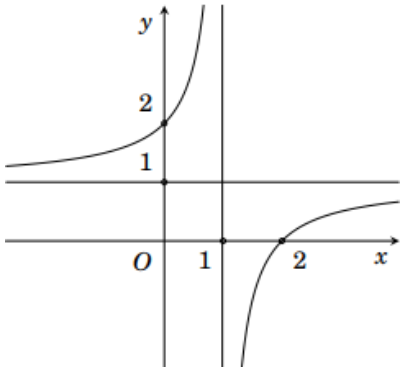


Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $\begin{cases} ad<0 \\ bc<0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} ad<0 \\ bc>0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc>0 \end{cases}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

d) $T=a-3b-2c=-3$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

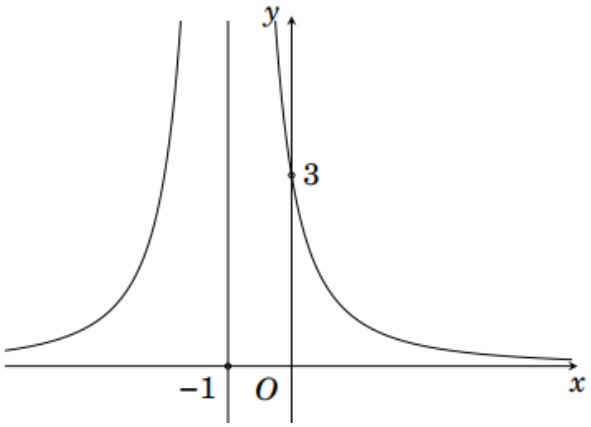
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{2}$

c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3

d) $\left[\begin{array}{l} b>\dfrac{2}{3} \\ b<0 \end{array}\right.$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nhận $x=-1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;-2]$ bằng 8



a) $f'(0)=3$

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8

d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m) với m là tham số

a) Khi $m=2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$

b) Khi $m=2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có toạ độ $I(1;-1)$

c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$ thì $m=2$

d) Với mọi giá trị của tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-m}{x+m}(m\neq 0)$ có đồ thị (C_m). Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y=ax+b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d). Tính giá trị của $a+b$

Câu 2: Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a;b)$. Tính giá trị biểu thức $a+b$

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (H) và đường thẳng Δ có phương trình $y=x+1$. Số giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để đường thẳng Δ cắt đường cong (H) tại hai điểm phân biệt nằm về hai nhánh của đồ thị.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m sao cho đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B và $AB\le 4$.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}(C)$ và đường thẳng $(d):y=x+m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành?

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$ có đồ thị là (C) (m là tham số thực). Tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $d:y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A,B sao cho $OA\perp OB$ bằng bao nhiêu?

Câu 7: Biết rằng có hai giá trị m_1,m_2 của tham số m để đường thẳng $d:y=m-x$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ có đúng một điểm chung. Tính m_1+m_2 bằng bao nhiêu?

Câu 8: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a;b)$. Tính $T=a+b$

Câu 9: Tìm giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2mx+3m+1}{2x-m^2}$ cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ cắt đường thẳng $y=1-x$ tại hai điểm phân biệt.

Câu 11: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $d:y=x+m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB=4$.

Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng $d:y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều.

----------HẾT----------

Dạng 3: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc 2 / bậc 1

Để khảo sát hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}, a\neq 0, m\neq 0$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$
- **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm $y'=\dfrac{am.x^2+2an.x+b.n-m.c}{(mx+n)^2}$. Tìm các điểm tại đó $y'=0$
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
  - Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
- **Bước 3:** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ b) $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

c) $y=\dfrac{2x^2-x+4}{x-1}$ d) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}$

Bài tập 2: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}=x+2m-1+\dfrac{3-2m}{x+1}\ (C_m)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với $m=1$.

b) Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó tới đường thẳng $d: x+y+2=0$ bằng nhau.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-10		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	24	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x-4}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x+4}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x+4}$.

Câu 2: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$ $-\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x-3}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x+3}$.

Câu 3: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-9		-4		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-20	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

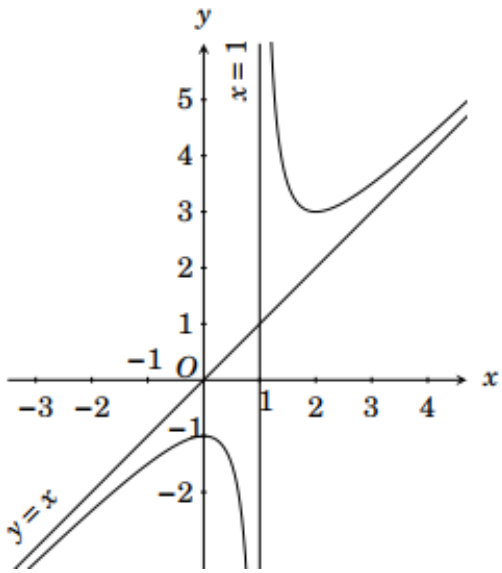
A. $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x+4}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x+2}{-x-4}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.

Câu 4: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

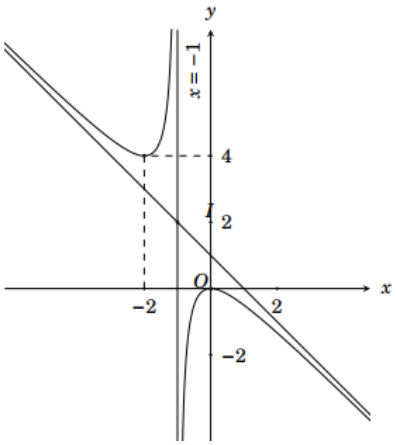
A. $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$.

Câu 5: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



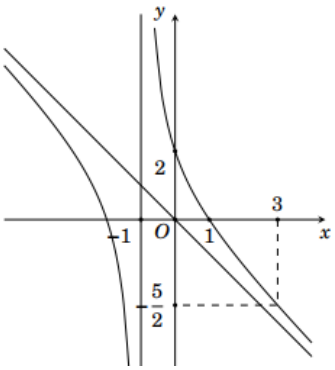
A. $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$.

Câu 6: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2-x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2}{x+1}$.

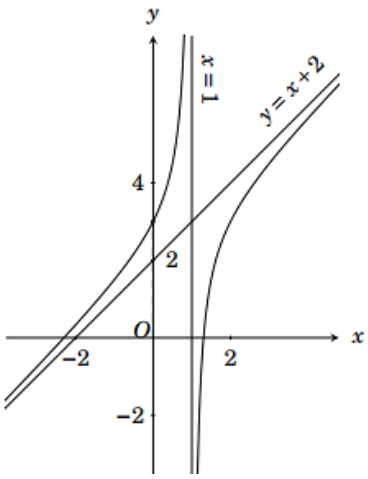
Câu 7: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.

Câu 8: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x-3}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-2x+3}{-x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3}{-x+1}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị (C). Khi đó:

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$

b) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$

c) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$

d) Đồ thị hàm số (C) nhận điểm $I(-2;0)$ làm tâm đối xứng

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-2x+2}{-x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty,0)\cup(2;+\infty)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$ bằng $-\dfrac{19}{3}$

d) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x+y=0$

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng khoảng $(-2,-1)$ và $(-1,0)$

b) Hàm số có hai điểm cực trị.

c) Đồ thị (C) không cắt trục Ox.

d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x-3}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y=-x-6$.

b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3;-9)$ làm tâm đối xứng.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

d) Đồ thị không cắt trục Ox.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang

b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm M. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $3x-4y+2=0$

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

d) Đồ thị không cắt trục Ox.

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}$ (1) với m là số thực

a) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

b) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y=x-2$

c) Khi $m=1$ giao điểm của đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $I(3;-5)$

d) Có 2 giá trị m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0

Câu 7: Cho hàm số $y=x-\dfrac{1}{x+1}$

a) Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=2x-1$

c) Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau

d) Để đường thẳng $y=k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA\perp OB$ khi đó k là nghiệm của phương trình $k^2-k-1=0$

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2(m+1)x-5}{x-1}$ có đồ thị (C) với m là tham số

a) Khi $m=0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x+1$

b) Khi $m=0$ thì đồ thị hàm số không cắt Ox .

b) Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m>4$

d) Tồn tại 1 điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho $x_M>1$ và độ dài IM ngắn nhất (I là tâm đối xứng của (C)) khi đó tung độ $y_M<-4$

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{-mx^2+(4m-2)x+1-4m}{x-1}$ có đồ thị là (C) với m là tham số

a) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

b) Khi $m=1$ đồ thị hàm số không cắt trục Ox

c) Khi $m<-1$ thì hàm số đạt cực đại và cực tiểu trong miền $x>0$

d) Có 2 phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $x-y=0$

Câu 10: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị là đường cong (C)

a) Biết hàm số có 2 điểm cực trị khi đó tổng của giá trị cực đại và giá trị cực tiểu bằng -4

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;1)$

c) Phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng $x-3y-6=0$ đi qua điểm $B\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

c) Để phương trình $x^2+3x+3=m|x+2|$ có 4 nghiệm phân biệt thì $m>2$

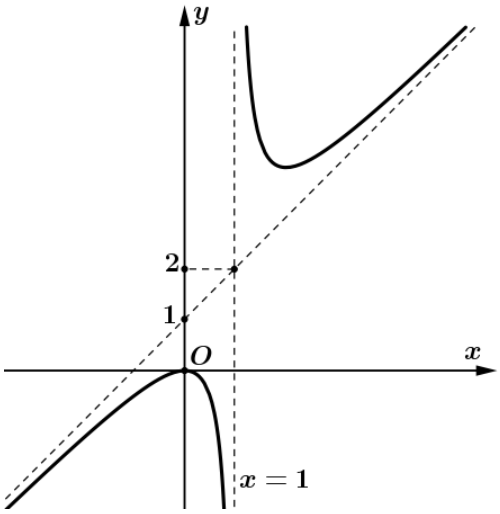
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trên đồ thị $(C):\ y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$ có bao nhiêu cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Câu 2: Tìm được trên đồ thị $(C): y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ hai điểm $M(a;b)$ và $N(c;d)$ có khoảng cách đến đường thẳng $3x+y+6=0$ nhỏ nhất. Khi đó tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$

Câu 3: Biết rằng đường thẳng $y=2x+2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số m. Tìm hoành độ trung điểm của AB

Câu 4: Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y=ax+b+\dfrac{1}{x+c}$



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

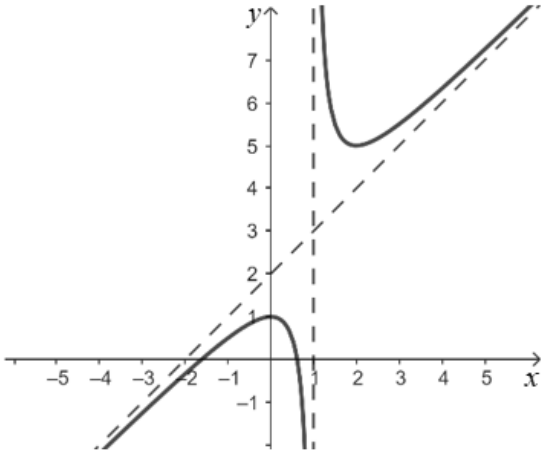
Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2-2m-4}{x-2}(1)$. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta: 2x+y+1=0.$

Câu 6: Tìm m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ tại hai điểm A,B sao cho trung điểm đoạn AB thuộc Oy.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=\sqrt{6}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-2x+m\right)^2-3x-m}{x-3}(C)$ và đường thẳng $(d): y=2x$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-15;15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt.

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}(a>0,m\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số b,c,m,n có tất cả bao nhiêu số dương?



Câu 10: Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+10}{x+2}$ là bao nhiêu?

----------HẾT----------

BÀI 05 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y=f(x)$ đối với x tại điểm $x=a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s=s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v=s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:
$$a(t)=v'(t)=s''(t).$$
- Nếu $C=C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t.
- Nếu $P=P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.
- Nếu $C=C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87 , bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2 Một số bài toán tối ưu hoá đơn giản

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- **Bước 1:** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- **Bước 2:** Chọn một đại lượng thich hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q=Q(x)$
- **Bước 3:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q=Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Bài toán tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y=f(x)$ đối với x tại điểm $x=a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s=s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v=s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:
$$a(t)=v'(t)=s''(t).$$
- Nếu $C=C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t.
- Nếu $P=P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.
- Nếu $C=C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87 , bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất $2\,\text{m}$ với vận tốc ban đầu $24,5\,\text{m/s}$ là $h(t)=2+24,5t-4,9t^2$ *(theo Vật lý Đại Cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).*

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Bài tập 2: Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hinh hoá bằng hàm số $P(t)=\dfrac{a}{b+e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Bài tập 3: Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x)=30000+300x-2,5x^2+0,125x^3$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.

c) So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Bài tập 4: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x)=\dfrac{300x}{100-x}$, $0\le x<100$ (triệu đồng). Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Bài tập 5: Xét phản ứng hoá học tạo ra chất C từ hai chất A và B: $A+B\longrightarrow C$. Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A]=[B]=a$ (mol/l). Khi đó nồng độ của chất C theo thời gian t $(t>0)$ được cho bởi công thức: $[C]=\dfrac{a^2Kt}{aKt+1}$ (mol/l) trong đó K là hằng số dương.

a) Tìm tốc độ phản ứng tại thời điểm $t>0$.

b) Chứng minh nếu $x=[C]$ thì $x'(t)=K(a-x)^2$

c) Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t\to+\infty$

d) Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t\to+\infty$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t)=t^2-\dfrac{1}{6}t^3(m)$. Tìm thời điểm t (giây) mà tạo đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

A. $t=2$. **B.** $t=0,5$. **C.** $t=2,5$. **D.** $t=1$.

Câu 2: Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P=12I-0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

A. 72. **B.** 12. **C.** $-\dfrac{1}{192}$. **D.** $\dfrac{23}{2}$.

Câu 3: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-2t^3+24t^2+9t-3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $289\ (m/s)$. **B.** $105\ (m/s)$. **C.** $111\ (m/s)$. **D.** $487\ (m/s)$.

Câu 4: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x)=0,25x^2(30-x)$ trong đó $x(mg)$ và $x>0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

A. 15mg **B.** 30mg **C.** 40mg **D.** 20mg

Câu 5: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t)=45t^2-t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

A. 25 **B.** 30 **C.** 20 **D.** 15

Câu 6: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

A. $t=10(h)$ **B.** $t=14(h)$ **C.** $t=15(h)$ **D.** $t=22(h)$

Câu 7: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t)=\frac{1}{100}\left(30t^3-\frac{t^4}{4}\right)$ $(0\le t\le 90)$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t)=V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.

B. Tốc độ bơm luôn giảm.

C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.

D. Cả ba đáp án đều sai

Câu 8: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n)=480-20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 14 **B.** 13 **C.** 12 **D.** 11

Câu 9: Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T=-0,008t^3-0,16t+28$ với $t\in[1;10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

A. $27,832^0C$. **B.** $18,4^0C$. **C.** $26,2^0C$. **D.** $25,312^0C$.

Câu 10: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 **B.** 2.350.000 **C.** 2.450.000 **D.** 2.550.000

Câu 11: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ **B.** 43.000đ **C.** 42.000đ **D.** 41.000đ

Câu 12: Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30-\frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

A. 30 **B.** 40 **C.** 50 **D.** 60

Câu 13: Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 ngàn. **B.** 50 ngàn. **C.** 450 ngàn. **D.** 80 ngàn.

Câu 14: Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

A. 29 triệu VNĐ **B.** 27, 5 triệu VNĐ **C.** 29, 5 triệu VNĐ **D.** 27 triệu VNĐ

Câu 15: Công ty dụ lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

A. 1375000. **B.** 3781250. **C.** 2500000. **D.** 3000000.

Câu 16: Bác Tôm có một cái ao có diện tích 50m^2 để nuôi cá. Vụ vừa qua bác nuôi với mật độ $20\,\text{con/m}^2$ và thu được tất cả $1,5$ tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá thu được bác ấy cứ giảm đi 8 con/m^2 thì tương ứng sẽ có mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm $0,5\,\text{kg}$. Hỏi vụ tới bác phải mua bao nhiêu con cá giống để đạt được tổng khối lượng cá thành phẩm cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).

A. 1100 con. **B.** 1000 con. **C.** 500 con. **D.** 502 con.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t)=\frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người).



a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.

c) Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ vậy hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$

d) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm.

Câu 2: Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

$N(t)=100e^{0,012t}$, $N(t)$ được tính bằng triệu người và $0\le t\le 50$

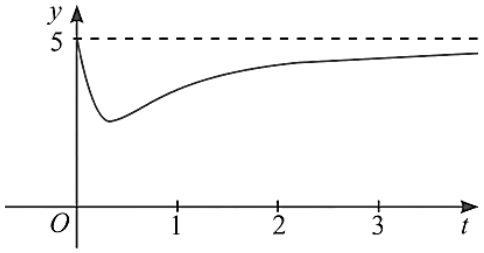
a) Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: $108,763$ (triệu người)

b) Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: $125,488$ (triệu người)

c) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0;50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn [0; 50].

d) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm.

Câu 3: Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ $(t\ge 0)$ khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$. (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)



a) Vào thời điểm $t=1$ thì nồng độ oxygen trong nước là $3,5$ (mg/l)

b) Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5 (mg/l)

c) Vào thời điểm $t=0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất

d) Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là $3,5$ (mg/l)

Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\ge 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Hàm vận tốc là $v(t)=3t^2-12t+9$

b) Hàm gia tốc là $a(t)=6t-12$

c) Trong khoảng từ $t=0$ đến $t=2$ thì vận tốc của chất điểm tăng

d) Từ $t=2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm giảm

Câu 5: Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho toạ độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y=t^3-12t+3, t\ge 0$.

a) Hàm vận tốc là: $v(t)=3t^2-12, t\ge 0$

b) Hạt chuyển động xuống dưới khi $t>2$

c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0\le t\le 3$ là $9m$

d) Khi $t>0$ thì hạt tăng tốc

Câu 6: Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần.

a) Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi. Vậy hàm cầu là: $p(x)=-\dfrac{1}{200}x+19$

b) Công ty giảm giá $4,5$ (triệu đồng)/1 tivi cho người mua thì doanh thu của công ty là lớn nhất

c) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x)=12000-3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, vậy có 2300 ti vi được bán ra thì lợi nhuận là cao nhất.

d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x)=12000-3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8,5 triệu đồng/1 ti vi để lợi nhuận là lớn nhất

Câu 7: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1\le x\le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x)=x^3-3x^2-20x+500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

a) Biểu thức tính $B(x)$ theo x là $B(x)=220x$ (nghìn đồng).

b) Biểu thức tính $L(x)$ theo x là $L(x)=-x^3+3x^2+220x-500$ (nghìn đồng).

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa

d) Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm có thể đạt được là 1000 nghìn đồng.

Câu 8: Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi $P=400-2Q$ và hàm chi phí trung bình $\overline{C}=0,2Q+4+\dfrac{400}{Q}$ trong đó Q là số đơn vị sản phẩm (P và $\overline{C}$ được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm).

a) $Q=90$ là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa;

b) Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 400\$

c) Lợi nhuận tối đa là 17420\$

d) Nếu chính phủ đánh thuế 22\$ / một đơn vị sản phẩm thì giá bán 390\$ để lợi nhuận thu được tối đa

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q(t) = 2t^2 + t$, trong đó t được tính bằng giây (s) và Q được tính theo Culong (C). Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4$ s.

Câu 2: Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Câu 3: Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}$ (km). Vận tốc của tên lửa sau 1 giây là $m.e^n$ (km/s). Tính $T = m + n$ (Biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

Câu 4: Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 (m/s). Trong Vật lý, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = 2 + 24{,}5t - 4{,}9t^2$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Câu 5: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật Logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \dfrac{5000}{1+5e^{-t}}, t \ge 0,$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Câu 6: Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \dfrac{100t}{100 + t^2}$(con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

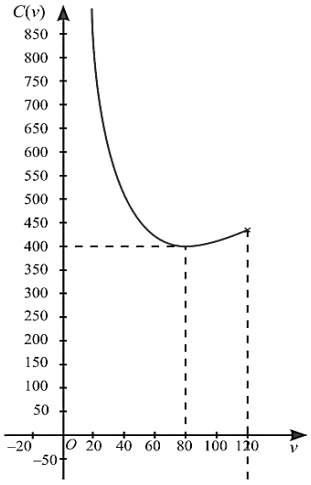
Câu 7: Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức $V = k(R - r)r^2;\ 0 \le r < R,$ trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu so với bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Câu 8: Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Câu 9: Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v(km/h) theo công thức:

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \ \ (0 < v \le 120)$$

Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v, người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ như hình bên.



Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Câu 10: Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

Câu 11: Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 (km/h). Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v(km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơ ngược dòng quãng đường 300 km trên trong khoảng thời gian t với vận tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

Câu 12: Thể tích V của 1 (kg) nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa $0^\circ C$ đến $30^\circ C$) được cho bởi công thức

$$V=999,87-0,06426t+0,0085043t^2-0,0000679t^3\left(m^3\right).$$

Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất?

Câu 13: Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu chi hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x)=-x^2+30x+6, 0\le x\le 30$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ti có thể bán sau đợt quảng cáo?

Câu 14: Công ti truyền hình cáp Vista hiện có 100000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40$/ tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm $0,25$\$ cước thuê bao, công ti có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ti cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

Câu 15: Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó $n=\dfrac{t^3}{3}-6t^2+32t$ $(0\le t\le 12)$. Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu?

Câu 16: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s=-t^3+6t^2+17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?

Câu 17: Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

----------HẾT----------

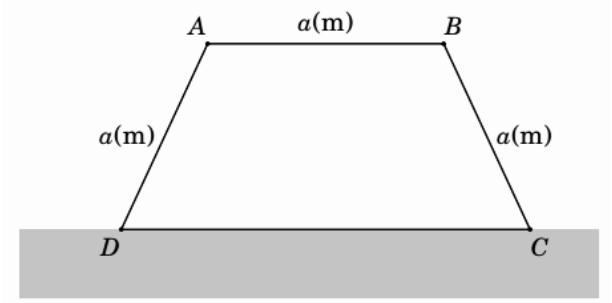
Dạng 2: Một số bài toán tối ưu đơn giản

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

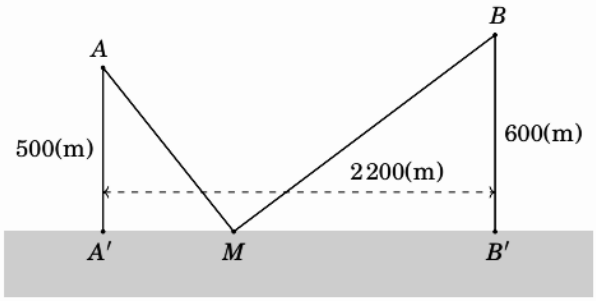
- **Bước 1:** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- **Bước 2:** Chọn một đại lượng thich hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q=Q(x)$
- **Bước 3:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q=Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

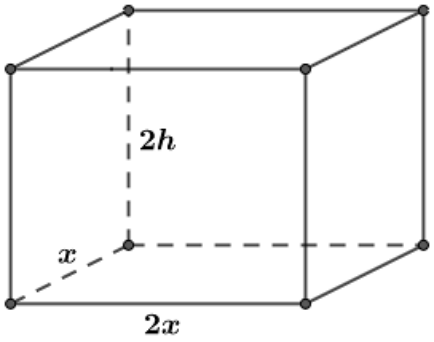
Bài tập 1: Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc theo bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ dưới đây biết rằng bờ sông là đường thẳng CD không phải rào lưới. Hỏi bác nông dân đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



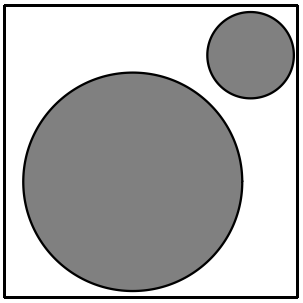
Bài tập 2: Có hai xã A,B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA'=550\,\text{m}$, $BB'=600\,\text{m}$. Người ta đo được $A'B'=2200\,\text{m}$ như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm cạnh bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Bài tập 3: Ông A dự định sử dụng hết $5,5m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

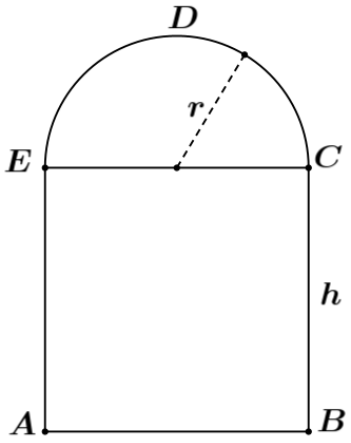


Bài tập 4: Từ một mảnh giấy hình vuông cho trước cắt thành hai hình tròn sao cho tổng diện tích của hai hình tròn là lớn nhất. Gọi $k\ (k \le 1)$ là tỉ số bán kính của chúng khi đó. Hỏi giá trị $\sqrt{k}$ bằng bao nhiêu?



Bài tập 5: Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

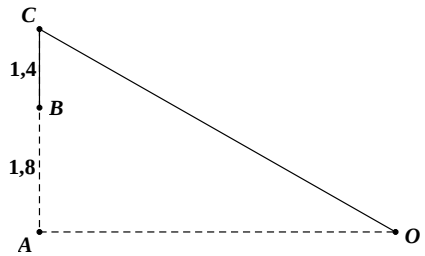
Bài tập 6: Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 4 m để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

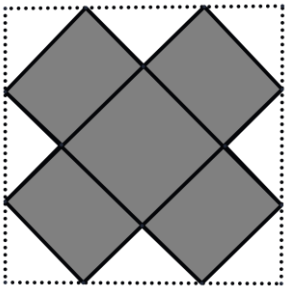
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc BOC là góc nhọn.



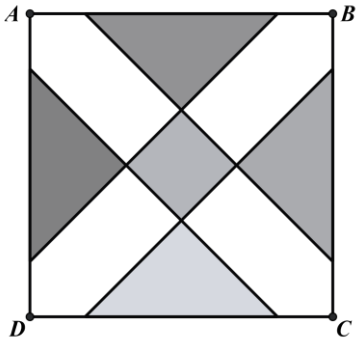
A. $AO = 2,4\,\text{m}$ **B.** $AO = 2\,\text{m}$ **C.** $AO = 2,6\,\text{m}$ **D.** $AO = 3\,\text{m}$

Câu 2: Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gập thành hình hộp chữ nhật không nắp. Tính thể tích lớn nhất của khối hộp.



A. $8\sqrt{2}$. **B.** $10\sqrt{2}$. **C.** $9\sqrt{2}$. **D.** $11\sqrt{2}$.

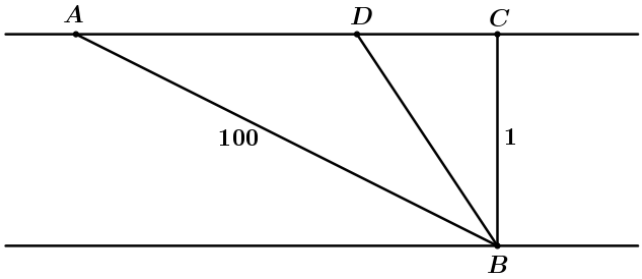
Câu 3: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



A. $\frac{19}{3}$. **B.** $\frac{17}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Câu 4: Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sỹ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất?Biết dòng sông là thẳng,mục tiêu cách chiến sỹ 1km theo đường chim bay và chiến sỹ cách bờ bên kia 100m.

A. $\frac{200\sqrt{2}}{3}$. **B.** $75\sqrt{3}$. **C.** $\frac{200\sqrt{3}}{3}$. **D.** $75\sqrt{2}$.



Câu 5: Một người dự định làm một bể chứa nước hình trụ bằng inốc có nắp đậy với thể tích 1 (m^3). Chi phí mỗi m^2 đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m^2 mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi người đó án kính bể là bao nhiêu để chi phí làm bể ít nhất?

A. $\sqrt[3]{2\pi}$. **B.** $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

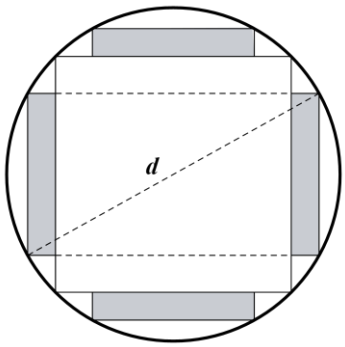
Câu 6: Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là d.

A. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$, dài $\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

B. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{15}d$, dài $\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

C. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{14}d$, dài $\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

D. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{13}d$, dài $\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$



Câu 7: Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/m^2. Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?

A. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu

B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215 triệu

C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu

D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu.

Câu 8: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R, nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

A. $2R^2$ **B.** $5R^2$ **C.** R^2 **D.** $3R^2$

Câu 9: Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

A. 83.200.000 đồng **B.** 382.000 đồng **C.** 83.200 đồng **C.** 8.320.000 đồng.

Câu 10: Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V=8\left(m^3\right)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là $980.000đ/m^2$ và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn đồng).

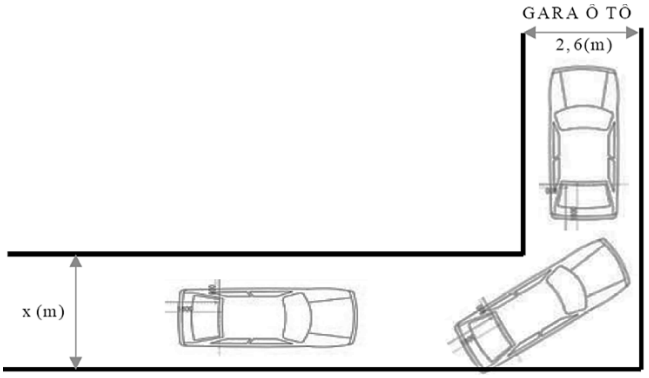
A. 22.770.000 đ. **B.** 27.657.000 đ. **C.** 20.965.000 đ. **D.** 23.235.000 đ.

Câu 11: Dùng một dây thép dài 60 m uốn thành một khung có dạng như hình vẽ. Biết phần dưới là hình chữ nhật và phía trên là một tam giác đều. Diện tích lớn nhất của khung có giá trị bằng:

A. $\frac{900}{6-\sqrt{3}}\left(\mathrm{m}^2\right)$. **B.** $\frac{1200}{6-\sqrt{3}}\left(\mathrm{m}^2\right)$. **C.** $\frac{700}{3+\sqrt{3}}\left(\mathrm{m}^2\right)$. **D.** $\frac{600}{3-\sqrt{3}}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Câu 12: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x\,(\mathrm{m})$, đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2,6\,(\mathrm{m})$. Biết kích thước xe ô tô là $5\mathrm{m}\times 1,9\mathrm{m}$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài $5\,(\mathrm{m})$, chiều rộng $1,9\,(\mathrm{m})$. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất

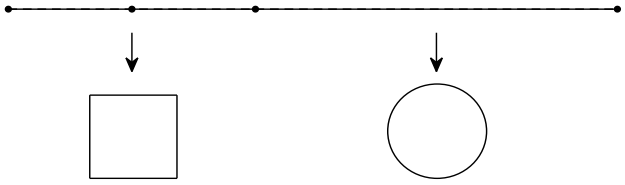
của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được?



A. $x = 3,7\ (\text{m})$. **B.** $x = 2,6\ (\text{m})$. **C.** $x = 3,55\ (\text{m})$. **D.** $x = 4,27\ (\text{m})$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một sợi dây kim loại dài $a\ (\text{cm})$. Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn có độ dài $x\ (\text{cm})$ được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông $(a > x > 0)$.



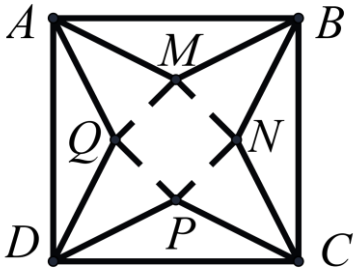
a) Bán kính đường tròn: $r = \dfrac{x}{\pi}$.

b) Diện tích hình vuông: $\left(\dfrac{a-x}{4}\right)^2$.

c) Tổng diện tích hai hình: $\dfrac{(4+\pi).x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.

d) Khi $x = \dfrac{a\pi}{2+\pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

Câu 2. Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $MA^2 = MB^2 + MC^2$ người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau là AMB, BNC, CPD và DQA. Với phần còn lại người ta gấp lên và ghép lại để thành hình chóp tứ giác đều.



Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x > 0$.

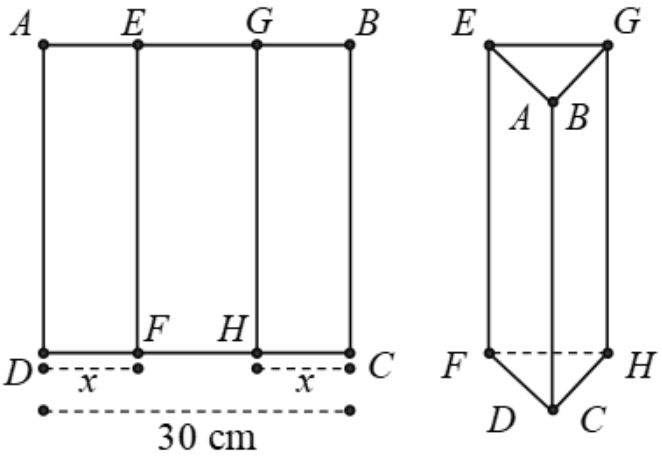
a) Chiều cao của hình chóp là $\sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.

b) Điều kiện của x là: $0 < x < 25\sqrt{2}$

c) Thể tích của khối chóp bằng $\frac{1}{3}.\sqrt{1250x^3 - 25\sqrt{2}x^4}$.

d) Khi cạnh đáy của khối chóp bằng $3\sqrt{2}$dm thì thể tích của khối chóp là lớn nhất

Câu 3. Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm. Người ta gập tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



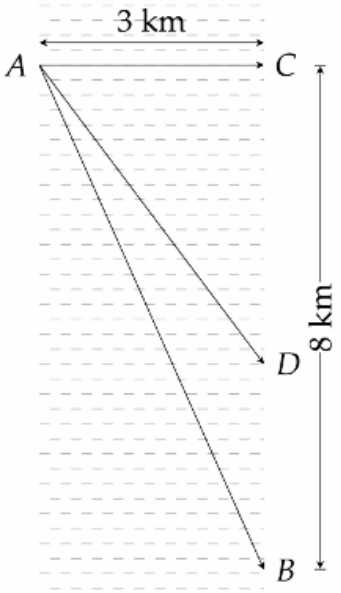
a) Thể tích khối trụ được tính bằng công thức $V = 30S$ trong đó S là diện tích của tam giác AEG

b) Diện tích của tam giác AEG bằng: $\sqrt{30}.\sqrt{(15-x)^2(2x-15)}$

c) Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $x = 10(\text{cm})$

d) Thể tích khối lăng trụ lớn nhất bằng $1250\left(cm^3\right)$

Câu 4. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Gọi $x(\text{km})$ là độ dài quãng đường BD. Xét tính đúng sai trong các khẳng định sau:



a) $8 - x(\text{km})$ là độ dài quãng đường CD.

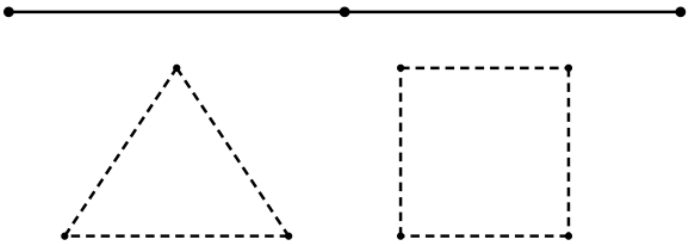
b) Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AD là: $\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$ (giờ)

c) Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{8-x}{8}$

d) Khoảng 1 giờ 20 phút là khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B.

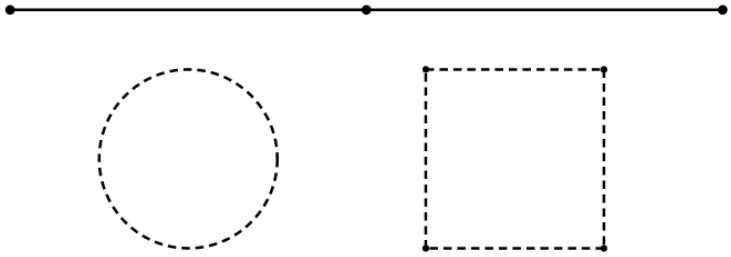
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cắt một đoạn dây dài 60m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một tam giác đều có diện tích S_1, đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

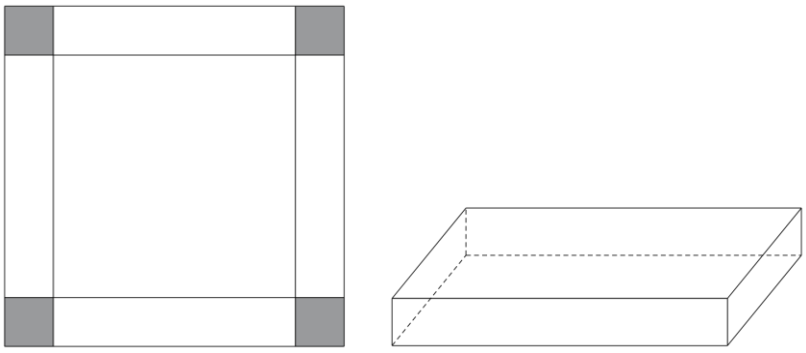
Câu 2: Cắt một đoạn dây dài 30m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một đường tròn có diện tích S_1, đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

Câu 3: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \dfrac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ bằng bao nhiêu?

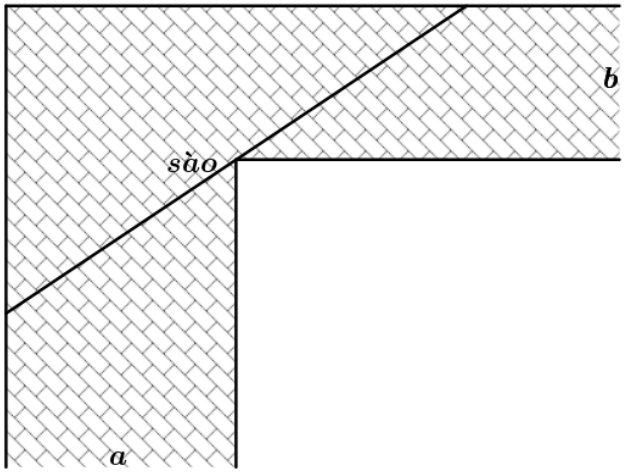
Câu 4: Một tấm bìa hình vuông có diện tích $900\,\text{cm}^2$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm bìa đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm rồi gập tấm bìa lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp có dạng hình hộp chữ nhật. Tìm thể tích lớn nhất mà hình hộp chữ nhật có thể thu được?



Câu 5: Một người nông dân có $15\,000\,000$ đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (hình vẽ dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là $60\,000$ đồng/mét, còn đối vối ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là $50\,000$ đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Câu 6: Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$. Hỏi cái sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu?



----------HẾT----------

CHƯƠNG 1

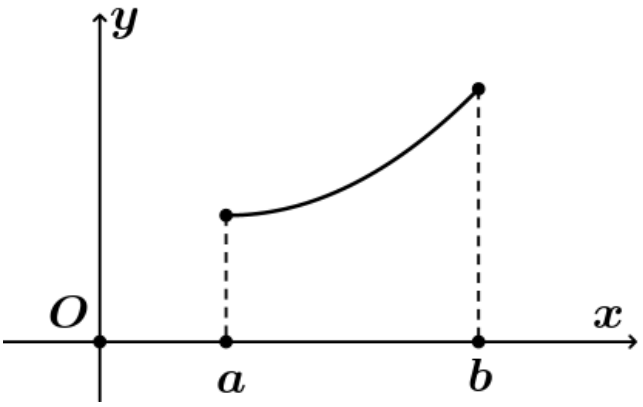
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 01 TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

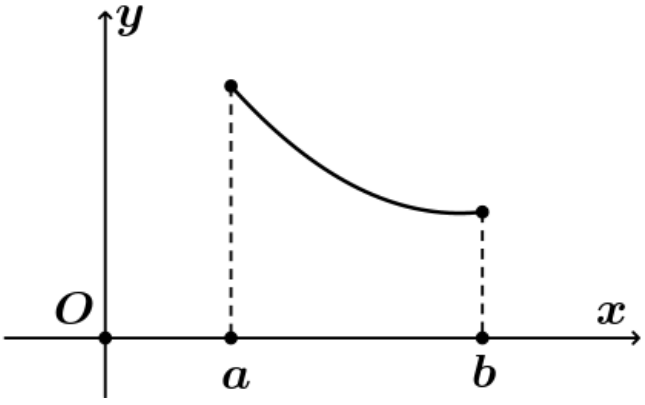
1 Tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên K với K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng



Hình 1. Hàm số đồng biến trên $(a;b)$

- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1,\ x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (**Hình 1**)



Hình 2. Hàm số nghịch biến trên $(a;b)$

- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1,\ x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$
- Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (**Hình 2**)
- Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K.
- Khi xét tính đơn điệu mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu:

Định lí 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

- Nếu $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng K.
- Nếu $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng K.

Chú ý: Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên tập K hoặc nghịch biến trên tập K thì hàm số $y=f(x)$ còn được gọi là đơn điệu trên tập $K\subset\mathbb{R}$.

Định lí 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập $K\subset\mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Nếu $f'(x)\geq 0$ (hoặc $f'(x)\leq 0$) với mọi x thuộc K và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K.

2 Cực trị của hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0\in(a;b)$.

- Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.
- Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

Ghi chú:

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số, kí hiệu $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$, còn điểm $M(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số, kí hiệu f_{CT} hay y_{CT}, còn điểm $M(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại (còn gọi là cực đại) và giá trị cực tiểu (còn gọi là cực tiểu) được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và có điểm cực trị là $x_0\in(a;b)$ thì $f'(x_0)=0$

Định lí: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $K=(x_0-h;x_0+h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$, với $h>0$.

- Nếu $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x_0)<0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x_0)>0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

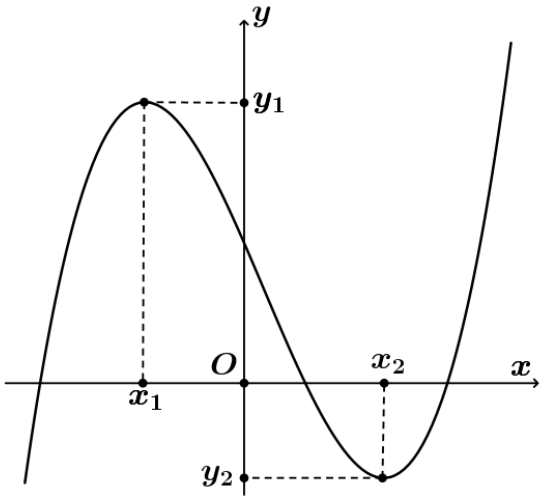
Nhận xét: Định lí trên có thể hiểu một cách đơn giản như sau: Điều kiện đủ để hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại một điểm x_0 là đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 với $x\in(x_0-h;x_0+h)$.

x	x_0-h	x_0	x_0+h
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$		$f_{CĐ}$	

x	x_0-h	x_0	x_0+h
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$		f_{CT}	

Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0)=0$ hoặc $f'(x_0)$ không tồn tại.

Các tên gọi từ đồ thị hàm số:



- $(x_1;y_1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số trong đó: x_1 là điểm cực đại của hàm số; y_1 là giá trị cực đại của hàm số.
- $(x_2;y_2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số trong đó: x_2 là điểm cực tiểu của hàm số; y_2 là giá trị cực tiểu của hàm số.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm khoảng đơn điệu, cực trị của hàm số cho trước

Để xét tính đồng biến, nghịch biến, cực trị của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4:** Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến, cực trị của hàm số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=2x^3+3x^2-12x+2024$ b) $y=x^4+2024$

c) $y=-\dfrac{1}{4}x^4+2x^2+2$ d) $y=x^4-2x^2-2$

Lời giải

a) $y=2x^3+3x^2-12x+2024$

Ta có: $y'=6x^2+6x-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2044	↘	2017	↗	$+\infty$

Quan sát bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-2$, giá trị cực đại $y=2044$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$, giá trị cực tiểu $y=2017$.

b) $y=x^4+2024$

Ta có tập xác định $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=4x^3$; $y'=0\Leftrightarrow 4x^3=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2024	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$, giá trị cực tiểu $y=2024$.

c) $y=-\frac{1}{4}x^4+2x^2+2$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm $y'=-x^3+4x=-x\left(x^2-4\right); y'=0\Leftrightarrow -x\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên các khoảng $(0;2)$ và $(-\infty;-2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=\pm 2$, giá trị cực đại $y=6$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$, giá trị cực tiểu $y=2$.

d) $y=x^4-2x^2-2$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4x$, $y'=0\Leftrightarrow x=0, x=\pm 1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$ và đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$, $(1;+\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$, giá trị cực đại $y=-2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=\pm 1$, giá trị cực tiểu $y=-3$.

Bài tập 2: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$ b) $y=\dfrac{5x+9}{x-1}$.

c) $y=(x-2)(x^2+1)$ d) $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

Lời giải

a) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$

Tập xác định: $D=(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}>0$, $\forall x\in(5;+\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

b) $y=\dfrac{5x+9}{x-1}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-14}{(x-1)^2}<0, \forall x\neq 1$

Vậy hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

c) $y=(x-2)(x^2+1)$

Ta có: $y=(x-2)(x^2+1)=x^3-2x^2+x-2$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm: $y'=3x^2-4x+1$

Giải phương trình: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu đạo hàm

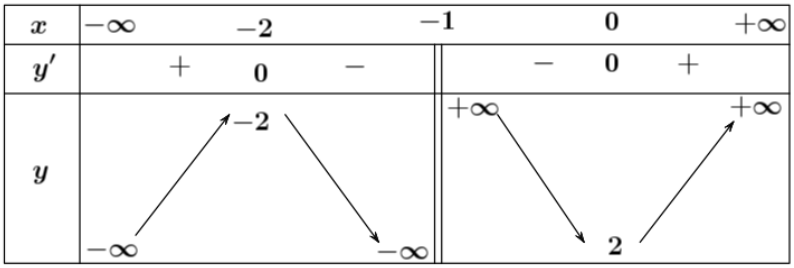
x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu đạo hàm ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ và đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$, $(1;+\infty)$

d) $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1),(-1;0)$ và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$, $(0;+\infty)$.

Bài tập 3: Tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=-x^4+2x^2+3$

b) $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$

c) $y=x^3-4x^2+5x-1$

d) $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

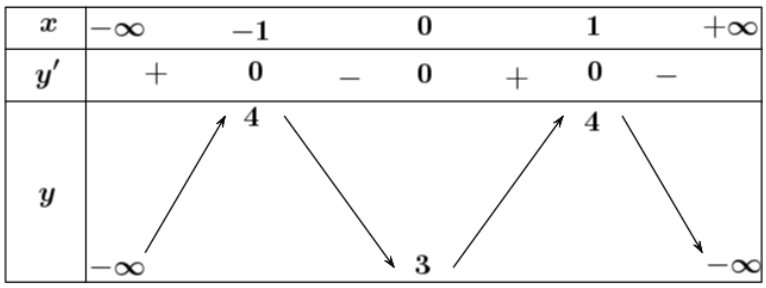
Lời giải

a) $y=-x^4+2x^2+3$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y=-x^4+2x^2+3\Rightarrow y'=-4x^3+4x\ =0\Rightarrow -4x^3+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=4\\x=0\Rightarrow y=3\\x=-1\Rightarrow y=4\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Vậy đồ thị hàm số đạt cực đại tại $A(-1;4),B(1;4)$; đạt cực tiểu tại $C(0;3)$.

b) $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $y=\dfrac{2x+3}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}<0$, $\forall x\in D$ nên hàm số đã cho không có cực trị.

c) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

Ta có: $y' = 3x^2 - 8x + 5$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$\frac{23}{27}$	↗	$+\infty$

Vậy đồ thị hàm số đạt cực đại tại $A(1;1)$ và đạt cực tiểu tại $B\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{23}{27}\right)$.

d) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Vậy các điểm cực trị của hàm số là $x = 0$ và $x = 4$.

Bài tập 4: Thể tích V (đơn vị: centimét khối) của 1kg nước tại nhiệt độ T ($0°C \le T \le 30°C$) được tính bởi công thức

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$$

Hỏi thể tích $V(T)$, $0°C \le T \le 30°C$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

Lời giải

Xét hàm số $V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$ với $T \in [0;30]$

Ta có $V'(T) = -0,0002037T^2 + 0,0170086T - 0,06426T$

Khi $V'(T) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T = 3,966514624 = T_1 \\ T = 79,53176716 \notin [0;30] \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $V(T)$ như sau:

T	0		T_1		30
$V'(T)$		$-$	0	$+$	
$V(T)$	$V(0)$	↘	$V(T_1)$	↗	$V(30)$

Từ bảng biến thiên suy ra, thể tích $V(T)$, $0°C \le T \le 30°C$, giảm trong khoảng nhiệt độ $0°C$ đến nhiệt độ $3,966514624°C$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3-3x^2-1$. **B.** $y=x^3-x^2+6x-1$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **D.** $y=x^4+2x^2-1$.

Lời giải

Ta có: $y=x^3-x^2+6x-1$ suy ra $y'=3x^2-2x+6$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-2x+6=0$ phương trình vô nghiệm. Do đó, $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y=x^3-x^2+6x-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

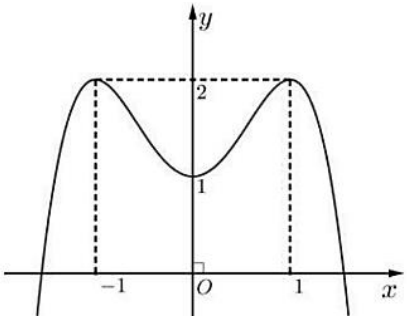
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$, khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

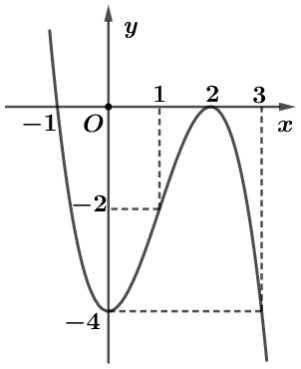
C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{-x+2}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0,\forall x\neq 1.$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Quan sát đồ thị, ta thấy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 6: Hàm số $y=2x^3-2x^2-2x+1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;1)\cdot$ **B.** $(-\infty;1)\cdot$ **C.** $(0;2)\cdot$ **D.** $(1;2)\cdot$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=6x^2-4x-2$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{3}\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 7: Hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2;3)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $y'=\dfrac{-5}{(x-2)^2}<0, \forall x\neq 2.$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

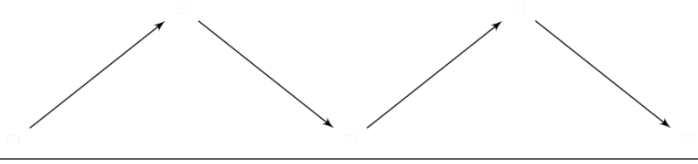
x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;0)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

Lời giải

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$									

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $(-3;0)$

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{4}{(x+1)^2}>0$, với x thuộc khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. Xét các mệnh đề sau:

1) Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$.

2) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

3) Hàm số đã cho không có điểm cực trị.

4) Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Số các mệnh đề **đúng** là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{x+2}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}<0;\forall x\neq 1$ nên hàm số đã cho không có điểm cực trị, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(2x-5)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		$\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$..

Câu 13: Hàm số $y=-x^4+8x^2+6$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

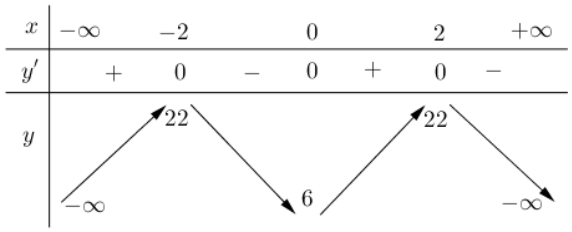
C. $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$y' = -4x^3 + 16x;\ y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 16x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 6 \\ x = 2 \Rightarrow y = 22 \\ x = -2 \Rightarrow y = 22 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Vậy hàm số $y = -x^4 + 8x^2 + 6$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 15: Hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1)$.

Ta có $y' > 0, \forall x > 0$ và $y' < 0, \forall x < 0$. Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

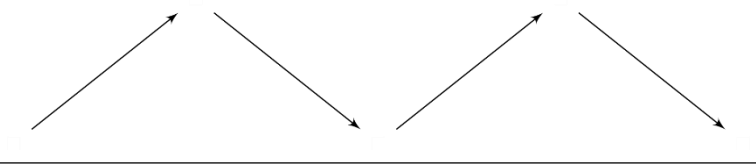
x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;0)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

Lời giải

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$									

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $(-3;0)$

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^4(2-x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(5)>f(4)>f(3)$. **B.** $f(-1)>f(0)>f(1)$.

C. $f(-3)<f(-2)<f(-1)$. **D.** $f(0)<f(1)<f(2)$.

Lời giải

Ta có $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-1;2)$, vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(2-x)(x+1)^2(x-1)^5$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $f'(x)<0\Leftrightarrow(2-x)(x+1)^2(x-1)^5<0\Leftrightarrow(2-x)(x-1)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<1\end{array}\right.$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 20: Cho hàm số $y=\dfrac{2023x-22}{x+1}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2023)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2023)$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{2045}{(x+1)^2}>0\,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Khi đó khẳng định sai là hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Câu 21: Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, biết $f'(x)=(x-3)(x+2)(x+5)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $(-\infty;-5)$. **B.** $(-2;3)$. **C.** $(-5;-2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

$f'(x)=(x-3)(x+2)(x+5)^2<0\Leftrightarrow(x-3)(x+2)<0,(x\neq-5)\Leftrightarrow x^2-x-6<0\Leftrightarrow-2<x<3$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-2;3)$.

Câu 22: Hàm số $y=-x^4+2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

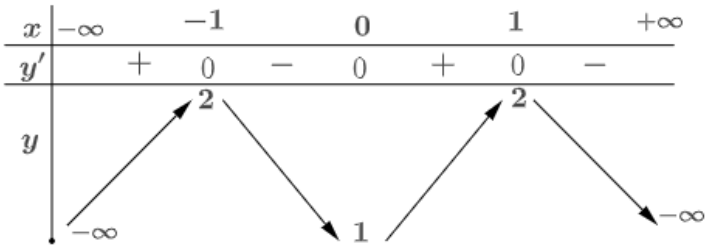
A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-4x^3+4x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(-\infty;-1)$ hàm số đồng biến.

Câu 23: Hàm số $y=\sqrt{8+2x-x^2}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(1;4)$.

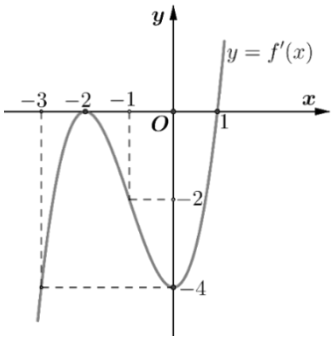
Lời giải

Điều kiện xác định: $-2\le x\le4$

Ta có: $\forall x\in(-2;4),y'=\dfrac{-x+1}{\sqrt{8+2x-x^2}}>0\Leftrightarrow\dfrac{-x+1}{\sqrt{8+2x-x^2}}>0\Leftrightarrow-x+1>0\Leftrightarrow x<1$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được hàm số đồng biến trên $(-2;1)$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy $f'(x)<0, \forall x<1$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Câu 25: Hàm số $y=\dfrac{x-7}{x+4}$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(-6;0)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(-5;1)$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$.

Ta có $y'=\dfrac{11}{(x+4)^2}>0, \forall x\in D$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-4)$ và $(-4;+\infty)$ và đồng biến trên $(1;4)$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;5)$. **B.** $(-3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-3;5)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Đạo hàm: $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$+\infty$ ‖	↘	4	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 27: Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Đạo hàm $y=\dfrac{2x+3}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}<0,\forall x\neq -1$.

Khi đó hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-1)^2(3-x)(x^2-x-1)$. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu cực tiểu?

A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)^2(3-x)(x^2-x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\\x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta suy ra hàm số có một cực tiểu.

Câu 29: Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y=-x^3+3x+4$.

A. $y_{CT}=2$. **B.** $y_{CT}=1$. **C.** $y_{CT}=6$. **D.** $y_{CT}=-1$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-3x^2+3$, $y'=0\Rightarrow -3x^2+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=2\\x=1\Rightarrow y=6\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Vậy giá trị cực tiểu của hàm số $y_{CT}=2$ tại $x=-1$.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)=(x-1)^2(x-2)(x-3)$.

Do $f'(x)=0$ có 1 nghiệm kép $x=1$ và hai nghiệm đơn $x=2, x=3$ nên $f'(x)$ đổi dấu hai lần khi qua $x=2$ và $x=3$. Do đó hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(2-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số là

A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

Câu 32: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có tọa độ là

A. $(2;2)$. **B.** $(2;-2)$. **C.** $(0;-2)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-6x$; $y''=6x-6$. Xét: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Ta thấy: $y''(0)=-6<0\Rightarrow$Hàm số có điểm cực tiểu $x=0$.

Vậy tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(0;2)$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x-1, \forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$, suy ra $f'(x)$ đổi dấu một lần khi x đi qua giá trị $x=1$ nên hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 34: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)^2(2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Nhận thấy $x^2>0\ \forall x\neq 0 \Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm $x=0$ nên $x=0$ không phải là điểm cực trị hàm số.

Tương tự $(x+1)^2>0\ \forall x\neq -1 \Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm $x=-1$ nên $x=-1$ không phải là điểm cực trị hàm số.

$f'(x)$ cùng dấu với nhị thức $2x-1$ nên $x=\dfrac{1}{2}$ là điểm cực trị của hàm số.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là

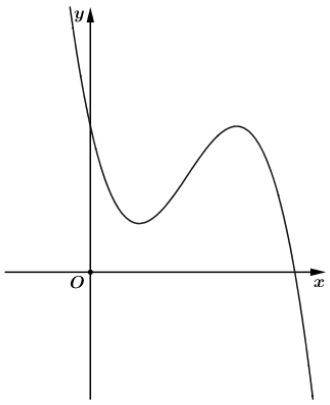
x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-3$ và $x=3$ nên số điểm cực tiểu của hàm số là 2.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $y=f(x) \Rightarrow y'=f'(x)$

Ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt đường thẳng $y=0$ tại 1 điểm suy ra phương trình $f'(x)=0$ có 1 nghiệm đơn. Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực trị.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^2+2$

a) Tập xác định của hàm số là $D=[0;+\infty)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

c) Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

d) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4x$

$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D=[0;+\infty)$.

b) Sai: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

c) Đúng: Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

d) Đúng: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

Câu 2: Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$.

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

d) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có: $y'=\frac{3}{(x+2)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

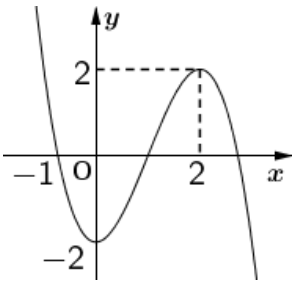
a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) Sai: Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

c) Sai: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

d) Đúng: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(2;+\infty)$

c) Với mọi $x\in(0;2)$ thì hàm số $y=f(x)$ luôn nhận giá trị dương

d) Hàm số $y=f(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$

Lời giải

Từ đồ thị, hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;2)\Leftrightarrow f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<2$.

Xét hàm số $y=f(-x)$ có $y'=-f'(-x)$.

Để hàm số nghịch biến thì $y'<0\Leftrightarrow -f'(-x)<0\Leftrightarrow f'(-x)>0\Leftrightarrow 0<-x<2\Leftrightarrow -2<x<0$.

Suy ra hàm số $y=f(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

a) Đúng: Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

b) Đúng: Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(2;+\infty)$

c) Đúng: Với mọi $x\in(0;2)$ thì hàm số $y=f(x)$ luôn nhận giá trị dương

d) Đúng: Hàm số $y=f(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm nguyên

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(2;+\infty)$

d) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có: $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(2;+\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;1),(1;2)$.

a) Đúng: Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) Đúng: Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm nguyên

c) Sai: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(2;+\infty)$

d) Đúng: Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

c) Đạo hàm của hàm số luôn nhỏ hơn 0 với mọi $x\neq 1$.

d) Hàm số đã cho không có cực trị.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{-4}{(x-1)^2}<0\,\forall x\neq 1.$

Do đó hàm số đã cho không có cực trị.

a) Đúng: Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) Sai: Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

c) Đúng: Đạo hàm của hàm số luôn nhỏ hơn 0 với mọi $x\neq 1$.

d) Đúng: Hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y=\sqrt{x^2+1}$

a) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

b) Hàm số không có cực trị.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

d) Hàm số có hai điểm cực trị.

Lời giải

Xét hàm số $y=\sqrt{x^2+1}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

a) Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

b) Sai: Hàm số có một cực trị.

c) Đúng: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

d) Sai: Hàm số chỉ có một điểm cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x^4 + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = 0$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 1) = 1$.

c) Hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực đại của hàm số là $y(\pm 1) = \dfrac{1}{2}$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $y' = -2x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

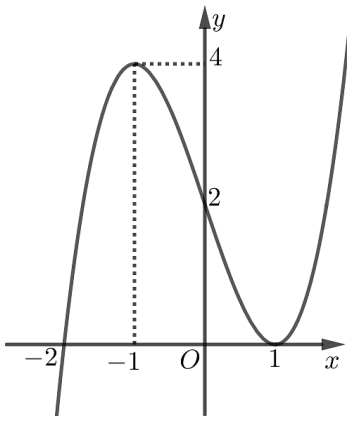
a) Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0)=\frac{1}{2}$.

b) Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x=0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0)=\frac{1}{2}$.

c) Sai: Hàm số đạt cực đại tại các điểm $x=\pm 1$, giá trị cực đại của hàm số là $y(\pm 1)=1$.

d) Đúng: Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0)=\frac{1}{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



a) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$ và giá trị cực đại là $y_{CD}=4$

b) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ và giá trị cực tiểu là $y_{CT}=0$

c) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

d) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-2$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có các nhận xét sau: $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua điểm $x=-2$. Suy ra $x=-2$, $x=-2$ là điểm cực trị và là điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ Mặt khác $f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x=-1$, $x=1$. Suy ra $x=-1$, $x=1$ không là các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

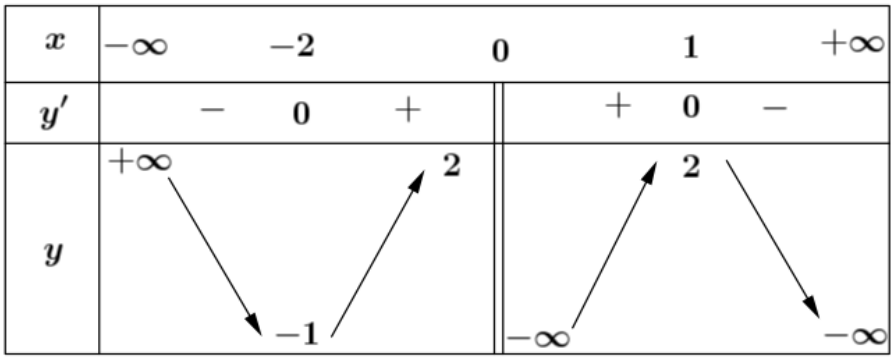
a) Sai: Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$ và giá trị cực đại là $y_{CD}=4$

b) Sai: Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ và giá trị cực tiểu là $y_{CT}=0$

c) Đúng: Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

d) Sai: Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-2$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



a) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

c) Giá trị cực đại của hàm số bằng 2.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $x=1$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đổi dấu từ '$-$' sang '$+$' khi x đi qua $x_1=-2 \Rightarrow y_{CT}=-1$.

Do đó mệnh đề "Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1" và mệnh đề "Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$" là mệnh đề đúng.

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đổi dấu từ '$+$' sang '$-$' khi x đi qua $x_2=1 \Rightarrow y_{CD}=2$ do đó mệnh đề "Giá trị cực đại của hàm số bằng 2" là mệnh đề đúng.

a) Đúng: Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

b) Đúng: Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

c) Đúng: Giá trị cực đại của hàm số bằng 2.

d) Sai: Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $x=1$.

Câu 10: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Phương trình hàm vận tốc là $v(t)=3t^2-6t+9$.

b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t)=6t-12$.

c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t\in(0;1)\cup(3;+\infty)$.

d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t\in(1;3)$.

Lời giải

a) Ta có $v(t)=x'(t)=3t^2-12t+9$ và $a(t)=v'(t)=6t-12$.

b) Xét $v(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=3\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

t	0		1		3		$+\infty$
$v(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra vận tốc của chất điểm tăng khi $t\in(0;1)\cup(3;+\infty)$ và giảm khi $t\in(1;3)$.

a) Sai: Phương trình hàm vận tốc là $v(t)=3t^2-12t+9$.

b) Đúng: Phương trình hàm gia tốc là $a(t)=6t-12$.

c) Đúng: Vận tốc của chất điểm tăng khi $t\in(0;1)\cup(3;+\infty)$.

d) Đúng: Vận tốc của chất điểm giảm khi $t\in(1;3)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+5$ có đồ thị (C). Tính độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị (C).

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-6x$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y(0)=5\\x=2\Rightarrow y(2)=1\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;5)$, $B(2;1)$

Độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị bằng $AB=\sqrt{(2-0)^2+(1-5)^2}=2\sqrt{5}$.

Câu 2: Biết hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị là $(-1;18)$ và $(3;-16)$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+c+d$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2+2bx+c$

Theo giả thiết suy ra: $\begin{cases}y'(1)=3a-2b+c=0\\y(-1)=-a+b-c+d=18\\y'(3)=27a+6b+c=0\\y(3)=27a+9b+3x+d=16\end{cases}$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ -a+b-c+d=18 \\ 27a+6b+c=0 \\ 27a+9b+3x+d=16 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{17}{16}; b=\frac{51}{16}; c=-\frac{153}{16}; d=\frac{101}{16} \Rightarrow P=1.$

Câu 3: Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị là A và B. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng AB.

Lời giải

Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có $y'=3x^2-6x-9$ nên có hai điểm cực trị $A(-1;6)$ và $B(3;-26)$

Phương trình đường thẳng qua AB là $8x+y+2=0$. Khi đó $d(O;AB)=\frac{2}{\sqrt{65}}$.

Câu 4: Biết đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x^2-4x+5}{x-1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục toạ độ một tam giác cỉa diện tích S bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $y'=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ nên hàm số có hai điểm cực trị là $x_1=1-\sqrt{2}; x_2=1+\sqrt{2}$. Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(1+\sqrt{2};2\sqrt{2}-2)$ và $B(1-\sqrt{2};-2-2\sqrt{2})$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=2x-4$

Toạ độ giao điểm của d với hai trục toạ độ là $C(2;0)$ và $D(0;-4)$.

Diện tích tam giác cần tính là $S=\frac{1}{2}OC.OD=4$.

Câu 5: Gọi A,B,C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu?

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Giả sử $A(0;4), B(-1;3), C(1;3)$. Khi đó $AB=AC=\sqrt{2}$ và $BC=2$

Suy ra tam giác ABC vuông cân tại A

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng: $r=\frac{2S_{\Delta ABC}}{AB+BC+CA}=\frac{AB.AC}{2\sqrt{2}+2}=\sqrt{2}-1$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Ta thấy vì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm qua 3 nghiệm $x=-2,\ x=1, x=2$ đổi dấu nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1\in(-1;0), x_2\in(1;2)$ Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các số a,b và c có bao nhiêu số âm?

Lời giải

Hàm số đa thức bậc 3: $y=ax^3+bx^2+cx+d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 nên $a\neq 0$.

Suy ra: x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$.

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a} \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{3a} \end{cases}$.

Áp dụng định lý dấu tam thức bậc 2, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)\Rightarrow a<0$.

Vì $x_1\in(-1;0), x_2\in(1;2)$ nên $\begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1.x_2<0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{-2b}{3a}>0 \\ \dfrac{c}{3a}<0 \end{cases}$ do $a<0\Rightarrow\begin{cases} b>0 \\ c>0 \end{cases}$

Vậy trong các số a,b và c có 1 số âm là a.

----------HẾT----------

Dạng 2: Tìm tham số m để hàm số đơn điệu trên một khoảng cho trước

- Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

  Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$

  Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$

  Trong trường hợp hệ số a có chứa tham số thì ta kiểm tra thêm trường hợp $a = 0$

- Xét hàm phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đạo hàm $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, với $ad - bc \neq 0, c \neq 0$.

  Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y' > 0, \forall x \neq -\dfrac{d}{c} \Leftrightarrow ad - bc > 0$

  Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y' < 0, \forall x \neq -\dfrac{d}{c} \Leftrightarrow ad - bc < 0$

- Xét hàm phân thức $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ có đạo hàm $y' = \dfrac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$, với $ad \neq 0$

  Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

  $$y' \geq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \geq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d}$$

  Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

  $$y' \leq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \leq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y = x^3 + mx^2 + 2mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

b) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

c) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m+1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;5)$

d) $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

e) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{mx^2}{2} + x + 6$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$

f) $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$

g) $y = x^3 + mx^2 + m$ nghịch biến trên $(0;2)$

h) $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Lời giải

a) $y = x^3 + mx^2 + 2mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 3x^2 + 2mx + 2m$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 6m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 6$.

b) $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = -x^2 - 2mx + 2m - 3$

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta_{y'} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ m^2 + 2m - 3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m \le 1.$$

c) $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m+1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;5)$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = x^2 - 2mx - (2m+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2m+1 \end{array}\right.$

Nếu $2m+1 \le -1 \Leftrightarrow m \le -1$ thì $y' \le 0 \Leftrightarrow x \in [2m+1;1]$ nên hàm số không nghịch biến trên khoảng $(0;5)$ nên $m \le -1$ không thoả mãn.

Nếu $2m+1 > -1 \Leftrightarrow m > -1$ thì $y' \le 0 \Leftrightarrow x \in [-1;2m+1]$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;5)$ thì ta có $2m+1 \ge 5 \Leftrightarrow m \ge 2$.

d) $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x + 5 - m$

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$y' \ge 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + (5-m)x, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \le 3x^2 - 6x + 5, \forall x \in (2;+\infty)$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 - 6x + 5$ trên $(2;+\infty)$ có $g'(x) = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	5	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$ ta được $m \le 3x^2 - 6x + 5, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \le 5$.

e) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{mx^2}{2} + x + 6$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = x^2 + mx + 1$.

Để hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty) \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in [1;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^2 + mx + 1 \ge 0, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow m \ge -x - \frac{1}{x}, \forall x \in [1;+\infty)$

Xét hàm số $g(x) = -x - \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ có $g'(x) = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = -x - \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$
$g(x)$	-2	$-\infty$

Từ bảng biến thiên $m \ge -x - \dfrac{1}{x}, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow m \ge -2$.

f) $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ khi $y' \le 0, \forall x \in (-\infty;-3)$

$\Leftrightarrow -3x^2 - 12x + 4m - 9 \le 0 \quad \forall x \in (-\infty;-3) \Leftrightarrow 4m \le 3x^2 + 12x + 9, \forall x \in (-\infty;-3)$.

Đặt $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$ có $f'(x) = 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	1	$-$ 0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	-3	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $4m \le 3x^2 + 12x + 2 \quad \forall x \in (-\infty;-3) \Leftrightarrow 4m \le 0 \Leftrightarrow m \le 0$.

Vậy $m \le 0$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$.

g) $y = x^3 + mx^2 + m$ nghịch biến trên $(0;2)$

Hàm số $y = x^3 + mx^2 + m$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 3x^2 + 2mx$

Hàm số nghịch biến trên $(0;2) \Leftrightarrow y' \le 0, \ \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2mx \le 0, \ \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow m \le -\dfrac{3}{2}x, \ \forall x \in (0;2)$

Xét hàm số $y = -\dfrac{3}{2}x$ trên khoảng $(0;2)$, ta có bảng biến thiên như sau:

x	0	2
y'	$-$	
y	0	-3

Vậy để hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ thì $m \le -3$.

h) $y=(m-1)x^3-3(m-1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Ta có $y'=3(m-1)x^2-6(m-1)x+3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1=0\\\begin{cases}m-1>0\\\Delta'\le 0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\\begin{cases}m>1\\9(m-1)^2-9(m-1)\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\\begin{cases}m>1\\1\le m\le 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 1\le m\le 2$.

Bài tập 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y=\dfrac{mx+2}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

b) $y=\dfrac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định

c) $y=\dfrac{2x+4}{m-x}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

d) $y=\dfrac{x+7}{2x+m}$ nghịch biến trên $(-2;+\infty)$

e) $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

f) $y=\dfrac{x-9}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$

g) $y=\dfrac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

h) $y=\dfrac{m^2x+5}{2mx+1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$

Lời giải

a) $y=\dfrac{mx+2}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ta xét $y'>0\Leftrightarrow m-2>0\Leftrightarrow m>2$

b) $y=\dfrac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{3-m\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{m^2-3m+2}{(x+m-3)^2}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $y'<0,\forall x\ne 3-m$

Hay $m^2-3m+2<0,\forall x\ne 3-m\Leftrightarrow 1<m<2$.

c) $y=\dfrac{2x+4}{m-x}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

Để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì $y'>0$ với $\forall x\in(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases}2m-4(-1)>0\\ m-x\neq 0, x\in(1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\ x\neq m, x\in(1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\ m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\le 1.$

d) $y=\dfrac{x+7}{2x+m}$ nghịch biến trên $(-2;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(-2;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}m-14<0\\ \dfrac{-m}{2}\le -2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 4\\ m<14\end{cases}\Leftrightarrow 4\le m<14.$

e) $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Hàm số $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-m-m^2+6>0\\ m\notin(-\infty;-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<2\\ m\ge -2\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m<2.$

f) $y=\dfrac{x-9}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$

Ta có $y=\dfrac{x-9}{x+3m}$.

Tập xác định: $D=(-\infty;-3m)\cup(-3m;+\infty)$; $y'=\dfrac{3m+9}{(x+3m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-6)\Leftrightarrow\begin{cases}3m+9>0\\ -6\le -3m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-3\\ m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow -3<m\le 2.$

g) $y=\dfrac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

Điều kiện $x\neq m$

Đạo hàm: $y'=\dfrac{m^2-4}{(m-x)^2}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y'<0\\ m\notin(-3;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4<0\\ \left[\begin{array}{l}m\le -3\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ \left[\begin{array}{l}m\le -3\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 1\le m<2.$

h) $y=\dfrac{m^2x+5}{2mx+1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$

Xét $m=0\Rightarrow y=5$ là hàm hằng nên hàm số không nghịch biến.

Vậy $m=0$ không thỏa mãn.

Xét $m \neq 0$.

Tập xác định: $D = \left(-\infty; \frac{-1}{2m}\right) \cup \left(\frac{-1}{2m}; +\infty\right)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' = \frac{m^2 - 10m}{(2mx+1)^2} < 0 \\ \frac{-1}{2m} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m < 0 \\ \frac{6m+1}{2m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 10 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq \frac{-1}{6} \\ m > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 10.$$

Bài tập 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y = \frac{2x^2 + 3x + m + 1}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng xác định

b) $y = \frac{x^2 + (m+1)x - 1}{2 - x}$ (m là tham số) nghịch biến trên từng khoảng xác định

Lời giải

a) $y = \frac{2x^2 + 3x + m + 1}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng xác định

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có $y' = \frac{2x^2 + 4x + 2 - m}{(x+1)^2}$. Hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi

$$2x^2 + 4x + 2 - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq 0$$

b) $y = \frac{x^2 + (m+1)x - 1}{2 - x}$ (m là tham số) nghịch biến trên từng khoảng xác định

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Ta có $y' = \frac{-x^2 + 4x + 2m + 1}{(2-x)^2} = \frac{g(x)}{(2-x)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in D$

Dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $D \Leftrightarrow g(x) = -x^2 + 4x + 2m + 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Điều kiện: $\Delta' \leq 0$ vì $a = -1 < 0 \Leftrightarrow 4 - (-1)(2m+1) \leq 0 \Leftrightarrow 2m + 5 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-4}{x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Ta có: $y'=\dfrac{m+4}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y'>0,\forall x\in D \Leftrightarrow m+4>0\Leftrightarrow m>-4$.

Vì m nguyên âm nên $m\in\{-3;-2;-1\}$. Vậy có 3 giá trị thỏa mãn.

Câu 2: Cho hàm số $y=mx^3+mx^2-(m+1)x+1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\dfrac{-3}{4}<m<0$. **B.** $\dfrac{-3}{4}\le m\le 0$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\le\dfrac{-3}{4}$.

Lời giải

Ta có: $y=mx^3+mx^2-(m+1)x+1\Rightarrow y'=3mx^2+2mx-m-1$

Trường hợp 1: $m=0\Rightarrow y'=-1<0$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (1)

Trường hợp 2: $m\neq 0$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi:

$$\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ (2m)^2-4.3m.(-m-1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ 16m^2+12m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ \dfrac{-3}{4}\le m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{-3}{4}\le m<0\ (2)$$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow\dfrac{-3}{4}\le m\le 0$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+x^2+mx+1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

A. $m\le\dfrac{1}{3}$. **B.** $m\ge\dfrac{1}{3}$. **C.** $m\ge\dfrac{4}{3}$. **D.** $m\le\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3+x^2+mx+1$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=3x^2+2x+m$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\\ \Delta'=1^2-3m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{3}$.

Câu 4: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left(m^2-1\right)x^3+\left(m-1\right)x^2-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Yêu cầu đề bài tương đương với $y'=3\left(m^2-1\right)x^2+2\left(m-1\right)x-1\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi $m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Với $m=1$ thì $y'=-1<0,\forall x\in\mathbb{R}$ do đó giá trị $m=1$ thỏa mãn.

Với $m=-1$ thì $y'=-4x-1\le 0\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{4}$, do đó giá trị $m=-1$ không thỏa mãn.

Khi $m^2-1\ne 0\Leftrightarrow m\ne\pm 1$, YCBT tương đương với

$$\begin{cases} m^2-1<0 \\ \left(m-1\right)^2+3\left(m^2-1\right)\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -1<m<1 \\ -\dfrac{1}{2}\le m\le 1 \end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m<1.$$

Vậy $-\dfrac{1}{2}\le m\le 1$ nên có 2 giá trị nguyên của tham số m là $m=0;m=1$ thoả mãn.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-m}{2}\right\}$, $y'=\dfrac{m^2-4}{\left(2x+m\right)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó thì $m^2-4<0\Leftrightarrow -2<m<2$.
Do đó có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 6: Số giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left(m-7\right)x^3+\left(m-7\right)x^2-2mx-1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ bằng

A. 7. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3\left(m-7\right)x^2+2\left(m-7\right)x-2m$.

Trường hợp 1: $m=7\Rightarrow y'=-14<0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow m=7$.

Trường hợp 2: $m\ne 7$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases} m-7<0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m<7 \\ 7m^2-56m+49\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ 1\le m\le 7 \end{cases} \Leftrightarrow 1\le m<7$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $1\le m\le 7$. Do $m\in\mathbb{Z}$ nên có 7 giá trị nguyên của m.

Câu 7: Tìm tất cả giá trị của m sao cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+2}$ đồng biến trên các khoảng xác định?

A. $m\ge 2$. **B.** $m<2$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m>2$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+2}$ đồng biến trên các khoảng xác định

$\Leftrightarrow y'=\dfrac{2-m}{(x+2)^2}>0, \forall x\ne -2 \Leftrightarrow 2-m>0 \Leftrightarrow m<2$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x-mx+5$ nghịch biến trên tập xác định.

A. $m\ge 2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m\ge -2$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=\sqrt{3}\cos x-\sin x-m$

Hàm số $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x-mx+5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y'=\sqrt{3}\cos x-\sin x-m\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x\le \dfrac{m}{2},\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\le \dfrac{m}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}\ (1)$

Vì $-1\le \sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $(1) \Leftrightarrow \dfrac{m}{2}\ge 1 \Leftrightarrow m\ge 2$.

Câu 9: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}mx^3-2mx^2+(m-5)x+2021$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=mx^2-4mx+m-5$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f'(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m=0$

Khi đó: $f'(x)=-5<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra: nhận $m=0$.

Trường hợp 2: $m\ne 0$

Khi đó: $f'(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ 4m^2-m(m-5)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ -\dfrac{5}{3}\le m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3}\le m<0$

Vậy $-\dfrac{5}{3}\le m\le 0$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0\}$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$. Khi đó ta có: $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}\Rightarrow y'=\dfrac{4-m^2}{(x+4)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$y'>0,\forall x\ne -4 \Leftrightarrow 4-m^2>0 \Leftrightarrow -2<m<2$. Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Câu 11: Cho hàm số $y=\dfrac{(m^2-m)x^3}{3}+(m^2-m)x^2+mx+2.$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $y'=(m^2-m)x^2+2(m^2-m)x+m$.

Trường hợp 1: $m^2-m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Với $m=0$ thì $y'=0.$ Suy ra hàm số đã cho là hàm số hằng.

Do đó $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m=1$ thì $y'=1>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m^2-m\ne 0\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ m\ne 1 \end{cases}$.

Khi đó: Hàm số $y=\dfrac{(m^2-m)x^3}{3}+(m^2-m)x^2+mx+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow (m^2-m)x^2+2(m^2-m)x+m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}.$

Tức là $\begin{cases} m^2-m>0 \\ (m^2-m)^2-(m^2-m)m\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m>0 \\ m^2-2m\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow 1<m\le 2.$ Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=2.$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x+3-\dfrac{m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x\neq 2$.

Ta có: $y'=1+\dfrac{m}{(x-2)^2}$

Hàm số y đồng biến trên $[5;+\infty)\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in[5;+\infty)\Leftrightarrow 1+\dfrac{m}{(x-2)^2}\geq 0,\forall x\in[5;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\geq -(x-2)^2,\forall x\in[5;+\infty)\Leftrightarrow m\geq \max\limits_{[5;+\infty)}\left[-(x-2)^2\right]$ **(*)**

Đặt $g(x)=-(x-2)^2$, ta có $g'(x)=-2(x-2)<0,\forall x\in[5;+\infty)$

x	5	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	-9	$-\infty$

Khi đó $(*)\Leftrightarrow m\geq -9$. Vì m nguyên âm nên $m\in\{-9;-8;-7;...;-1\}$.

Vậy có 9 giá trị m cần tìm.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ sao cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3+(m-1)x^2+(2m+1)x+3m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 2024. **B.** 2023. **C.** 2021. **D.** 2022.

Lời giải

Nếu $m=1\Rightarrow f(x)=3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow m=1$ thỏa mãn.

Nếu $m\neq 1$, ta có $f'(x)=3(m-1)x^2+2(m-1)x+2m+1$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $f'(x)=3(m-1)x^2+2(m-1)x+2m+1\geq 0\,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-1>0\\ \Delta'=(m-1)^2-3(m-1)(2m+1)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\ \left[\begin{array}{l}m\geq 1\\ m\leq -\dfrac{4}{5}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow m\in(1;+\infty).$$

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m\in[1;+\infty)$.

Vì m nguyên thuộc đoạn $[-2024;2024]$ nên $m\in\{1,2,\ldots,2024\}$.

Vậy có 2024 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(8-2m)x+m+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=-4$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=x^2-2mx+8-2m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2-2mx+8-2m\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ m^2+2m-8\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4\leq m\leq 2.$$

Giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(8-2m)x+m+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $m=2$.

Câu 15: Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là $m\in[a;b]$. Giá trị $b-a$ bằng.

A. 4. **B.** 10. **C.** 12. **D.** -3.

Lời giải

Ta có: $y'=-x^2-2mx+2m-3$. Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$\begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<0 \\ m^2-(-1)(2m-3)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2+2m-3\leq 0 \Leftrightarrow -3\leq m\leq 1.$$

Suy ra $a=-3; b=1 \Rightarrow b-a=1-(-3)=4$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{2\cot x+1}{\cot x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\in(-\infty;-1)\cup\left[0;\frac{1}{2}\right]$. **B.** $m\in(-\infty;-1]\cup\left[0;\frac{1}{2}\right)$.

C. $m\in(-\infty;-1]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Đặt $t=\cot x$. Vì hàm số $y=\cot x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ và với $x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ thì $t\in(0;1)$ nên yêu cầu bài toán tương đương với: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{2t+1}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1<0 \\ -m\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} -m\geq 1 \\ -m\leq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m\leq -1 \\ m\geq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -1 \\ 0\leq m<\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in(-\infty;-1]\cup\left[0;\frac{1}{2}\right).$$

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+3x-m^2+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m\geq 2 \\ m\leq -4 \end{array}\right.$. **B.** $-4\leq m\leq 2$. **C.** $-4<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-4 \end{array}\right.$.

Lời giải

Hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+3x-m^2+2$ có $y'=3x^2-2(m+1)x+3$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ **(*)**.

Ta có $y'=3x^2-2(m+1)x+3$ là tam thức bậc hai có hệ số của x^2 bằng $3>0$ và biệt thức $\Delta'=(m+1)^2-9$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow \Delta'\leq 0\Leftrightarrow (m+1)^2-9\leq 0\Leftrightarrow (m+1)^2\leq 9\Leftrightarrow -3\leq m+1\leq 3\Leftrightarrow -4\leq m\leq 2$.

Câu 18: Có bao nhiêu số nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}\cos^3 x-4\cot x-(m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $y'=-\frac{1}{3}.3\cos^2 x.\sin x+\frac{4}{\sin^2 x}+(m+1)\sin x\geq 0$

$\Leftrightarrow -\cos^2 x.\sin x+\frac{4}{\sin^2 x}+(m+1)\sin x\geq 0$

$\Leftrightarrow -(1-\sin^2 x)+\frac{4}{\sin^3 x}+m+1\geq 0\left(\sin x>0,\forall x\in(0;\pi)\right)\Leftrightarrow m\geq -\sin^2 x-\frac{4}{\sin^3 x}$

Vì $x\in(0;\pi)\Rightarrow 1\geq \sin x>0$. Đặt $\sin x=t,(t\in(0;1])$

Đặt $f(t)=-t^2-\frac{4}{t^3}$ với $t\in(0;1]$

Ta có: $f'(t)=-2t+\frac{12}{t^4}=\frac{-2t^5+12}{t^4}>0,\forall t\in(0;1]\Rightarrow \max\limits_{(0;1]} f(t)=f(1)=-5$

Suy ra $m\geq -5$ mà m là giá trị nguyên âm nên $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1\}$

Câu 19: Cho hàm số $y=\frac{(m+1)x+2m+2}{x+m}$. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên $(-1;+\infty)$?

A. $m<1$. **B.** $1\leq m<2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $m>2$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$ có đạo hàm $y'=\frac{(m+1)m-(2m+2)}{(x+m)^2}=\frac{m^2-m-2}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m \notin (-1;+\infty) \\ m^2 - m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \le -1 \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$.

Câu 20: Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = \dfrac{\cos x + 1}{10\cos x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Đặt $t = \cos x (0 < t < 1) \Rightarrow y = \dfrac{t+1}{10t+m} \Rightarrow y' = \dfrac{m-10}{(10t+m)^2}.t'$

Hàm số $y = \dfrac{\cos x + 1}{10\cos x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y' = \dfrac{m-10}{(10t+m)^2}.t' > 0,\ \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Vì trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ hàm số $t = \cos x$ nghịch biến nên $t' < 0, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} m - 10 < 0 \\ -\dfrac{m}{10} \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 10 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -10 \\ m \ge 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -10 \\ 0 \le m < 10 \end{array}\right.$.

Theo đề bài m nguyên dương nên $m \in \{1,2,...,9\}$.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = \dfrac{1 - 2\sin x}{2\sin x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$?

A. 18. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $y = \dfrac{-2\sin x + 1}{2\sin x + m} \Rightarrow y' = \dfrac{-2m-2}{(2\sin x + m)}.\cos x \ge 0, \forall\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right) \Leftrightarrow \dfrac{2m+2}{(2\sin x + m)} \ge 0, \forall\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 \ge 0 \\ m \ne -2\sin x \in (-2;0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-1;+\infty) \\ m \in (-\infty;-2] \cup [0;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in [0;+\infty)$.

Do m nguyên thuộc khoảng $(-10;10) \Rightarrow m \in \{0;1;2;...;9\}$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của tham số m thỏa.

Câu 22: Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 2m + 3}{x + m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $y = \dfrac{mx + 2m + 3}{x + m} \Rightarrow y' = \dfrac{m^2 - (2m+3)}{(x+m)^2} = \dfrac{m^2 - 2m - 3}{(x+m)^2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'<0,\ \forall x\in(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m-3<0\\-m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<3\\m\ge -2\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<3 \text{ mà } m\in\mathbb{Z} \text{ nên } m\in\{0,1,2\}$$

Suy ra: $S=\{0,1,2\}$

Câu 23: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x\ne m$

Ta có $y'=\dfrac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}y'=\dfrac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}>0\ \forall x>2\\m\notin(2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+2m+3>0\\m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<3\\m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow -1<m\le 2.$$

Suy ra $S=\{0;1;2\}$. Vậy số phần tử của S là 3.

Câu 24:] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2$ nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$.

A. $m\ge -1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m\le -1$. **D.** $m\le -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Đạo hàm của hàm số: $y'=x^2-2mx+2m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2m-1\end{array}\right.$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$ khi $(-3;0)$ nằm trong khoảng hai nghiệm.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\le -3<0\le 2m-1\\2m-1\le -3<0\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow 2m-1\le -3\Leftrightarrow m\le -1.$$

Câu 25: Tổng các giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=x^3+mx-\dfrac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là

A. -10. **B.** -3. **C.** -6. **D.** -7.

Lời giải

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' = 3x^2 + m + \dfrac{1}{x^6} \geq 0$ với $\forall x \in (0;+\infty)$ $(*)$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$y' = 3x^2 + \frac{1}{x^6} + m = \left(x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^6} \right) + m \geq 4\sqrt[4]{x^2.x^2.x^2.\frac{1}{x^6}} + m = 4 + m,\ \forall x \in (0;+\infty).$$

$(*) \Leftrightarrow m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -4$

Vì m nguyên âm nên $m \in \{-4;-3;-2;-1\}$. Vậy tổng các giá trị của m là -10.

Câu 26: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + 1$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq 1$. **B.** $1 < m < 3$. **C.** $m > 3$. **D.** $m \geq 3$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + 1 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6(m+1)x + 6m$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

$\Leftrightarrow y' \leq 0,\ \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow 6x^2 - 6(m+1)x + 6m \leq 0,\ \forall x \in (1;3)$.

$\Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m \leq 0,\ \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow m \geq x,\ \forall x \in (1;3)$. Vậy $m \geq 3,\ \forall x \in (1;3)$.

Câu 27: Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (4m-3)x + 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số thực m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $m = 4$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = x^2 - 2mx + (4m-3)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi $y' \geq 0,\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3$.

Giá trị m lớn nhất là 3.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 6(m+2)x^2 - m + 1$ đồng biến trên $(-2\,;-1)$.

A. $m \in \left(-\infty\,; \dfrac{-5}{2}\right)$. **B.** $m \in \left(-\infty\,; \dfrac{-5}{2}\right]$. **C.** $m \in \left[\dfrac{5}{2};+\infty\right)$. **D.** $m \in \left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Ta có: $y' = -3x^2 + 12(m+2)x$.

Hàm số $y = -x^3 + 6(m+2)x^2 - m + 1$ đồng biến trên $(-2\,;-1)$ khi và chỉ khi:

$y' = -3x^2 + 12(m+2)x \geq 0,\ \forall x \in (-2\,;-1) \Leftrightarrow -x^2 + 4mx + 8x \geq 0,\ \forall x \in (-2\,;-1)$

$\Leftrightarrow 4mx \ge x^2 - 8x,\ \forall x \in (-2;-1) \Leftrightarrow m \le \frac{x}{4} - 2,\ \forall x \in (-2;-1) \Leftrightarrow m \le \frac{-2}{4} - 2 = \frac{-5}{2}.$

Câu 29: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $(-3;0)$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{1-x}$ với $x \in (-3;0) \Rightarrow t \in (1;2)$.

Hàm số đã cho trở thành $f(t) = \frac{t+1}{t+m} \Rightarrow f'(t) = \frac{m-1}{(t+m)^2}$.

Ta có $t' = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0,\ \forall x \in (-3;0)$ nên $t = \sqrt{1-x}$ nghịch biến trên $(-3;0)$.

Yêu cầu của bài toán tương đương với tìm m để hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(1;2)$

$\Leftrightarrow f'(t) < 0,\ \forall t \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1<0 \\ t+m \ne 0 \end{cases},\ \forall t \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1<0 \\ -m \ne t \end{cases},\ \forall t \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1<0 \\ -m \notin (1;2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1<0 \\ \left[\begin{array}{l} -m \ge 2 \\ -m \le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le m < 1 \\ m \le -2 \end{array}\right.$. Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [-10;10]$ nên $m \in \{-10;-9;...;0\}$.

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = \frac{(m+1)x+18}{3x+2m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;7)$?

A. 8. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Điều kiện: $3x + 2m - 1 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{-2m+1}{3}$

Đạo hàm $y' = \frac{(m+1)(2m-1)-54}{(3x+2m-1)^2} = \frac{2m^2+m-55}{(3x+2m-1)^2}$

Hàm số $y = \frac{(m+1)x+18}{3x+2m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;7)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2+m-55<0 \\ \frac{-2m+1}{3} \notin (3;7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{11}{2} < m < 5 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{-2m+1}{3} \le 3 \\ \frac{-2m+1}{3} \ge 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{11}{2} < m < 5 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge -4 \\ m \le -10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le m < 5$

Mà $m\in(-10;10)$, m nguyên nên $m\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 9 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-3m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Điều kiện $\ln x-3m\neq 0\Leftrightarrow m\neq\dfrac{1}{3}\ln x$.

Do $x\in(1;\mathrm{e})$ nên $\ln x\in(0;1)\Rightarrow m\in(-\infty;0]\cup\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right)$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{\frac{1}{x}(6-3m)}{(\ln x-3m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$ thì $y'>0$ với mọi $x\in(0;1)$

$\Leftrightarrow\dfrac{\frac{1}{x}(6-3m)}{(\ln x-3m)^2}>0\Leftrightarrow 6-3m>0\Leftrightarrow m<2$.

Do m là số nguyên dương nên $m=1$.

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{x^2+5x-m-1}{5x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

A. 8. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 6.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{5}\right\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{5x^2-2mx+5}{(5x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$ thì $y'\le 0,\forall x\in(1;4)$.

tức là $\begin{cases}5x^2-2mx+5\le 0,\forall x\in(1;4)\\ x\neq\dfrac{m}{5},\forall x\in(1;4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\dfrac{5x^2+5}{2x},\forall x\in(1;4)\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{5}\le 1\\ \dfrac{m}{5}\ge 4\end{array}\right.\end{cases}$ $\left(Do\ 2x>0,\forall x\in(1;4)\right)$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{5x^2+5}{2x},\forall x\in[1;4]$ và có đạo hàm $g'(x)=\dfrac{5x^2-5}{2x^2}>0,\forall x\in[1;4]$.

Hàm số đồng biến trên $(1;4)$ suy ra $\max\limits_{x\in[1;4]}g(x)=g(4)=\dfrac{85}{8}$.

Khi đó ta có $\begin{cases} m \ge \dfrac{5x^2+5}{2x}, \forall x \in (1;4) \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{5} \le 1 \\ \dfrac{m}{5} \ge 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \dfrac{85}{8} \\ \left[\begin{array}{l} m \le 5 \\ m \ge 20 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 20.$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-2;25]$ nên $m \in \{20;21;22;23;24;25\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;20]$ để ứng với mỗi, hàm số $y = \dfrac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$?

A. 17. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 13.

Lời giải

Điều kiện: $x \ne \dfrac{m}{3}$ có đạo hàm $y' = \dfrac{-3x^2+2mx+3}{(3x-m)^2}$.

Hàm số $y = \dfrac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x^2+2mx+3}{(3x-m)^2} \ge 0;\ \forall x \in (2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2+2mx+3 \ge 0;\ \forall x \in (2;3) & (1) \\ \dfrac{m}{3} \notin (2;3) & (2) \end{cases}.$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{3} \ge 3 \\ \dfrac{m}{3} \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 9 \\ m \le 6 \end{array}\right.$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow 2m \ge 3x - \dfrac{3}{x} = g(x),\ \forall x \in (2;3)$.

Mà $g'(x) = 3 + \dfrac{3}{x^2} > 0,\ \forall x \in (2;3) \Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên $(2;3)$.

Do đó $2m \ge 3x - \dfrac{3}{x} = g(x),\ \forall x \in (2;3) \Leftrightarrow 2m \ge g(3) \Leftrightarrow 2m \ge 8 \Leftrightarrow m \ge 4$.

Kết hợp hai điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l} m \ge 9 \\ 4 \le m \le 6 \end{array}\right.$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{4;5;6;9;10;...;20\}$.

Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương không lớn hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-1+m}{5x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$?

A. 2012. **B.** 2009. **C.** 2011. **D.** 2010.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{m}{5}\right\}$ và có đạo hàm $y' = \dfrac{5x^2+2mx-3m+1}{(5x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{5x^2+2mx-3m+1}{(5x+m)^2}\le 0\forall x\in(-3;1)\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+2mx-3m+1\le 0\forall x\in(-3;1)\\-\frac{m}{5}\notin(-3;1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-9m+46\le 0\\-m+6\le 0\\\left[\begin{array}{l}m\le -5\\m\ge 15\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\frac{46}{9}\\m\ge 6\\\left[\begin{array}{l}m\le -5\\m\ge 15\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 15$$

Do nguyên dương không lớn hơn 2024 nên $15\le m\le 2024$. Vậy có tất cả 2010 giá trị.

Câu 35: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)\ge 0,\forall x>1$ và $m\le 1$

Vì $\Delta_g'=2(m+1)^2\ge 0,\forall m$ nên $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1\le x_2\le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases}2g(1)=2(m^2-6m+1)\ge 0\\\dfrac{S}{2}=m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow m\le 3-2\sqrt{2}\approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 36: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương bé hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+2x-1-5m}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$?

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2020. **D.** 2019.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$ và có $y'=\dfrac{2x^2-4mx+3m+1}{(x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;5)$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{2x^2-4mx+3m+1}{(x-m)^2}\le 0\forall x\in(1;5)\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-4mx+3m+1\le 0\forall x\in(1;5)\\m\notin(1;5)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m+3\le 0 \\ -17m+51\le 0 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 1 \\ m\ge 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 3 \\ m\ge 3 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 1 \\ m\ge 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\ge 5$$

Do nguyên dương bé hơn 2024 nên $5\le m\le 2023$. Vậy có tất cả 2019 giá trị.

Câu 37: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $(-\infty;-2]$. **B.** $(-3;-2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{m-(x+1)^2}{\left(x^2+x+m\right)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} y'\le 0 \\ x^2+x+m\ne 0 \end{cases}, \forall x\in(-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m-(x+1)^2}{\left(x^2+x+m\right)^2}\le 0 \\ x^2+x+m\ne 0 \end{cases}, \forall x\in(-1;1)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le (x+1)^2 \\ m\ne -x^2-x \end{cases}, \forall x\in(-1;1)$.

Khi đó $m\le(x+1)^2, \forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow m\le 0$.

Đặt $f(x)=-x^2-x$, $x\in(-1;1)\Rightarrow f'(x)=-2x-1\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$-\dfrac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0		$-$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $m\in(-\infty;-2]\cup\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. Từ $(*)$ và $(**)\Rightarrow m\in(-\infty;-2]$.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 2 - m}{(x-1)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y' \le 0, \forall x \in (1;3) \\ y' \ge 0, \forall x \in (4;6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 - m \le 0, \forall x \in (1;3) \\ x^2 - 2x - 2 - m \ge 0, \forall x \in (4;6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge x^2 - 2x - 2, \forall x \in (1;3) \\ m \le x^2 - 2x - 2, \forall x \in (4;6) \end{cases}$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 2$, $g'(x) = 2x - 2$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		1		3		4		6		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0				$+$				
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\nearrow$	6	$\nearrow$	18		$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có $(*) \Leftrightarrow 3 \le m \le 6$

Vì m là số nguyên nên chọn $m \in \{3;4;5;6\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = mx^3 + mx^2 - (m+1)x + 1$, với m là tham số

a) Hàm số là hàm số bậc ba khi $m \ne 0$

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m < -\dfrac{3}{4}$ hoặc $m \ge 0$.

d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-\dfrac{3}{4} \le m < 0$.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số là hàm số bậc ba khi $m \ne 0$

b) Đúng: Hàm số là hàm đa thức nên tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

c) Sai: Ta có $y' = 3mx^2 + 2mx - (m+1)$

Với $m = 0$ thì $y' = -1 < 0$ (không thoả mãn)

Với $m \ne 0$ thì yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4m^2 + 3m \le 0 \end{cases}$ (không tồn tại)

d) Sai: Với $m=0$ thì $y'=-1<0$ (thoả mãn)

Với $m\neq 0$ thì yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} m<0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ 4m^2+3m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le m<0$

Suy ra $-\frac{3}{4}\le m\le 0$

Câu 2: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m+1)x^2+(m^2+2m)x-3$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1=-m$ và $x=-m-2$

c) Không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$ khi và chỉ khi $m\ge -1$.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số là hàm đa thức nên tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Đúng: Ta có $y'=x^2+2(m+1)x+m^2+2m$. Do $\Delta'=b'^2-ac=(m+1)^2-(m^2+2m)=1>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=-m$ và $x_2=-m-2$.

c) Đúng: Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-m-2$		$-m$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y(-m-2)$	↘	$y(-m)$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Sai: Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-m-2$		$-m$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y(-m-2)$	↘	$y(-m)$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -m-2\le -1 \\ -m\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$$

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$, với m là tham số.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m\ge 5$.

c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m<5$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ khi và chỉ khi $(5;8)$.

Lời giải

a) Điều kiện $x+m\ne 0\Leftrightarrow x\ne -m$. Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

b) Ta có $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m-5>0\Leftrightarrow m>5$.

c) Ta có $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m-5<0\Leftrightarrow m<5$.

d) Hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{m-5}{(x+m)^2}>0\\ -m\notin(-\infty;-8)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>5\\ -m\ge -8\end{cases}\Leftrightarrow 5<m\le 8$$

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm và hai nghiệm này là nguyên dương

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-5;-2)$ và $(-2;+\infty)$

d) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$

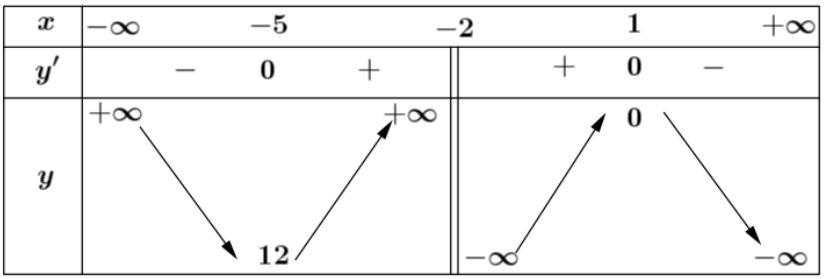
Lời giải

a) Đúng: Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

b) Sai: Đạo hàm $y'=\dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2},\forall x\in D$

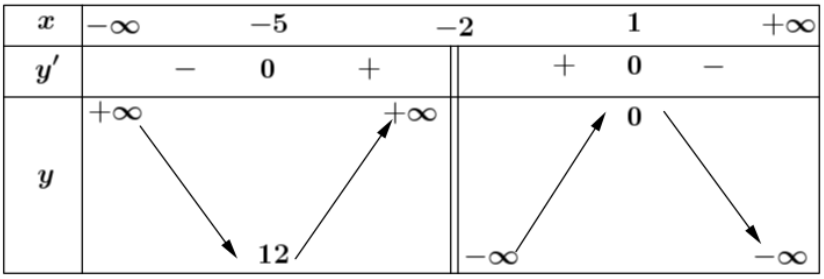
Phương trình $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow -x^2-4x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-5\end{array}\right.$

c) Sai: Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-5;-2)$ và $(-2;1)$

c) Đúng: Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{\cot^2 x-2m\cot x+2m^2-1}{\cot x-m}$, với m là tham số

a) Nếu đặt $t=\cot x$ thì bài toán trở thành tìm tham số m nguyên để hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;1)$.

b) Tập xác định của hàm số $y=f(t)$ là $\mathbb{R}$

c) Hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $f'(t)>0,\forall t\in(0;1)$

d) Có 2026 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Đặt $t=\cot x$. Ta có $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $t\in(0;1)$, $t=\cot x$ là hàm nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó, bài toán trở thành tìm tham số m nguyên để hàm số $y=f(t)=\dfrac{t^2-2mt+2m^2-1}{t-m}$ đồng biến trên $(0;1)$.

Tập xác định của hàm số $y=f(t)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$ và có đạo hàm $f'(t)=\dfrac{t^2-2mt+1}{(t-m)^2}$.

Hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $f'(t)\geq 0,\forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-2mt+1\ge 0, \forall t\in(0;1) \\ m\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \dfrac{t^2+1}{2t}, \forall t\in(0;1) \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} (*).$$

Xét hàm số $y=g(t)=\dfrac{t^2+1}{2t}$ trên khoảng $(0;1)$.

Khi đó $g'(t)=\dfrac{t^2-1}{2t^2}<0, \forall t\in(0;1)$ nên hàm số $y=g(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m\le g(1) \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Mà m là số nguyên và thuộc đoạn $[-2024;2024]$ nên có 2026 giá trị của m thoả mãn.

a) Đúng : Nếu đặt $t=\cot x$ thì bài toán trở thành tìm tham số m nguyên để hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;1)$.

b) Sai: Tập xác định của hàm số $y=f(t)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

c) Sai: Hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $f'(t)\ge 0, \forall t\in(0;1)$

d) Đúng : Có 2026 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

Lời giải

Ta có $y'=-3x^2-2mx+4m+9$

Hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} a<0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<0 \\ m^2+3(4m+9)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2+12m+27\le 0 \Leftrightarrow m\in[-9;-3].$$

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}\cot^3 x-m\cot^2 x+\cot x+1$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Lời giải

Đạo hàm: $y'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}\cot^2 x-2m\dfrac{-1}{\sin^2 x}\cot x+\dfrac{-1}{\sin^2 x}=\dfrac{-1}{\sin^2 x}\left(\cot^2 x-2m\cot x+1\right)$

Hàm số nghịch biến với $\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{-1}{\sin^2 x}\left(\cot^2 x - 2m\cot x + 1\right) \le 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \cot^2 x - 2m\cot x + 1 \ge 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $(*)$

Đặt $t = \cot x, x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t > 0$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2mt + 1 \ge 0, \forall t > 0$ hay $\frac{t}{2} + \frac{1}{2t} \ge m, \forall t > 0$ mà $\frac{t}{2} + \frac{1}{2t} \ge \frac{1}{2}.2 = 1 \Rightarrow 1 \ge m$

Vì m nguyên dương nên $m = 1$.

Câu 3: Tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3m - 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt trong đó có đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 là khoảng $(a;b)$. Giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0		$-$		0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$3m-1$	↘	$3m-3$	↘	$3m-5$	↗	$+\infty$

Ta lại có: $y(1) = 3m - 3$.

Từ bảng bảng biến thiên ta thấy: Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt trong đó có trong đó có đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 khi và chỉ khi:

$$3m - 5 < 0 < 3m - 3 \Leftrightarrow (3m-3)(3m-5) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < \frac{5}{3}.$$

Từ đó suy ra $a = 1$, $b = \frac{5}{3}$ nên $a + b = \frac{8}{3}$.

Câu 4: Hàm số $y = (x+m)^3 + (x+n)^3 - x^3$ (tham số là m, n) đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(m^2 + n^2) - 2m - 2n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $y' = 3(x+m)^2 + 3(x+n)^2 - 3x^2 = 3\left[x^2 + 2(m+n)x + n^2 + m^2\right]$

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ thì

$y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = (m+n)^2 - (m^2 + n^2) \le 0 \Leftrightarrow n.m \le 0$

Mặt khác: $P = 4(m^2 + n^2) - 2m - 2n = 4(m+n)^2 - 2(m+n) - 8m.n$

$$=\left[2(m+n)-\frac{1}{2}\right]^2+(-8mn)-\frac{1}{4}\geq-\frac{1}{4}$$

Vậy $MinP=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=0,m=\frac{1}{4}\\ m=0,n=\frac{1}{4}\end{array}\right.$.

Câu 5: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+2mx-3m+4$. nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 3.Tính tổng các phần tử của S.

Lời giải

Ta có: $y'=x^2-mx+2m=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 và $|x_1-x_2|=3$.

$$\begin{cases}\Delta>0\\ (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-8m>0\\ m^2-8m=9\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=9\end{array}\right.$$

Vậy $S=8$.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{m}{4}\right\}$ và có đạo hàm $y'=\frac{m^2-36}{(4x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;4)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}m^2-36<0\\ -\frac{m}{4}\notin(0;4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6<m<6\\ \left[\begin{array}{l}m\geq0\\ m\leq-16\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq m<6$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của m là $\{0;1;2;3;4;5\}$.

Câu 7: Số các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số $y=\frac{-mx-2025}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-2;2)$ là bao nhiêu?

Lời giải

Điều kiện xác định: $x\neq-m$.

Ta có: $y=\frac{-mx-2025}{x+m}\Rightarrow y'=\frac{-m^2+2025}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;2)$ khi và chỉ khi $y'=\frac{-m^2+2025}{(x+m)^2}>0,\forall x\in(-2;2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+2025>0\\ \left[\begin{array}{l}-m\leq-2\\ -m\geq2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-45;45)\\ m\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-45;-2]\cup[2;45)$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-45;-2] \cup [2;45)$ suy ra $m = \{-44;-43;...;-2;2;3;...;44\}$

Vậy có tất cả 86 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên không âm m để hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+5x+m+6}{x+2}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

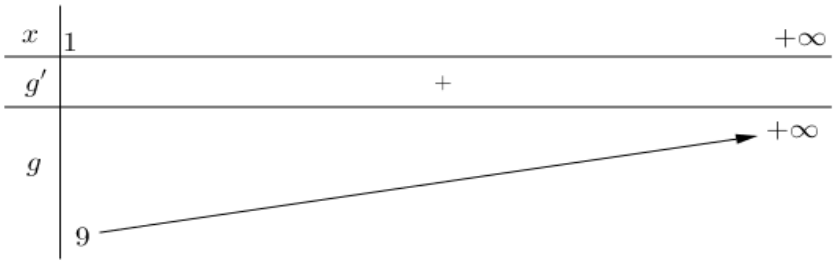
Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2+4x-m+4}{(x+2)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $f'(x) \ge 0, \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+4x-m+4}{(x+2)^2} \ge 0, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow x^2+4x+4 \ge m, \forall x \in (1;+\infty) \Rightarrow m \le \min\limits_{(1;+\infty)} (x^2+4x+4)$

Xét hàm số $g(x) = x^2+4x+4, g'(x) = 2x+4, g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \notin (1;+\infty)$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m \le 9$. Vì $m \ge 0$ nên $m \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy có 10 giá trị của m để hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+5x+m+6}{x+2}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

----------HẾT----------

Dạng 3: Tìm tham số m để hàm số có cực trị hoặc đạt cực trị tại điểm cho trước

- Tìm m để hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước ($f(x)$ có đạo hàm tạo điểm x_0)

  Giải điều kiện $y'(x_0)=0$ để tìm m

  Lập bảng biến thiên với m vừa tìm được và chọn giá trị m nào thoả mãn yêu cầu.
- Biện luận cực trị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\neq 0$

  Tính đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$ với $\Delta_{y'}=b^2-3ac$

  Nếu $\begin{cases}\Delta_{y'}>0\\ a\neq 0\end{cases}$ thì hàm số có hai điểm cực trị

  Nếu $\Delta_{y'}\leq 0$ hoặc suy biến $\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}$ thì hàm số không có cực trị

Chú ý:

- Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm phân biệt của $y'=0$ thì $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}$ và $x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}$

  Hệ thức 1: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2$

  Hệ thức 2: $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1.x_2$

  Hệ thức 3: $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1.x_2(x_1+x_2)$
- Các công thức tính toán thường gặp

  Độ dài $MN=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}$

  Khoảng cách từ M đến Δ: $d(M,\Delta)=\dfrac{|A.x_M+B.y_M+C|}{\sqrt{A^2+B^{22}}}$, với $\Delta: Ax+By+C=0$

  Tam giác ABC vuông tại $A\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

  Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$, với $\overrightarrow{AB}=(a_1;b_1)$, $\overrightarrow{AC}=(a_2;b_2)$
- Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=-\dfrac{2}{9a}(b^2-3ac)x+d-\dfrac{bc}{9a}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực tiểu tại $x=3$

b) $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$

c) $y=-x^3+mx^2+(m^2-12)x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$

d) $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$

Lời giải

a) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực tiểu tại $x=3$

Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-4$; $y''=2x-2m$

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ khi $\begin{cases}y'(3)=0\\y''(3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-6m+5=0\\6-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=1\\m=5\end{array}\right.\\m<3\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$

b) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$

Có $y'=x^2-2mx+m^2-m+1$, $y''=2x-2m$

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$ khi

$\begin{cases}y'(1)=0\\y''(1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2=0\\2-2m<0\end{cases}\Leftrightarrow m=2.$

c) $y=-x^3+mx^2+\left(m^2-12\right)x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=-3x^2+2mx+m^2-12$; $y''=-6x+2m$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ khi $\begin{cases}y'(-1)=0\\y''(-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3.(-1)^2+2m.(-1)+m^2-12=0\\-6.(-1)+2m>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m-15=0\\m>-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=5\quad(TM)\\m=-3\ (L)\end{array}\right.\\m>-3\end{cases}\Leftrightarrow m=5.$

d) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$

Ta có $y'=x^2-2mx+\left(m^2-4\right)$, $y''=2x-2m$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=3$ suy ra $y'(3)=0\Rightarrow m^2-6m+5=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=5\end{array}\right.$.

Với $m=5$ ta có $y''(3)=6-10=-4<0$ suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

Với $m=1$ ta có $y''(3)=6-2=4>0$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Vậy $m=5$ thì hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$.

Bài tập 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (đồ thị hàm số)

a) $y=\frac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+\left(m^2-4m+3\right)x-1$ có hai điểm cực trị

b) $y=x^3-3(m+1)x^2+3(3m+7)x+1$ có cực trị

c) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+2024$ không có cực trị

d) $y=\frac{1}{3}(m^2-1)x^3+mx^2+3x+1$ có cực đại

e) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3m+2)x^2+(2m^2+3m+1)x-2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thoả mãn $3x_{CD}^2=4x_{CT}$

f) $y=x^3-3mx+1$ có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A với $A(2;3)$.

g) $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

h) $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác AOB là tam giác cân tại O.

Lời giải

a) $y=\frac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+(m^2-4m+3)x-1$ có hai điểm cực trị

Đạo hàm $y'=2x^2+2(m-1)x+m^2-4m+3$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2x^2+2(m-1)x+m^2-4m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Delta'>0\Leftrightarrow(m-1)^2-2(m^2-4m+3)>0\Leftrightarrow -m^2+6m-5>0\Leftrightarrow 1<m<5$.

Vậy $1<m<5$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) $y=x^3-3(m+1)x^2+3(3m+7)x+1$ có cực trị

Đạo hàm $y'=3x^2-6(m+1)x+3(3m+7)$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'=9(m+1)^2-9(3m+7)>0\Leftrightarrow m^2-m-6>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3\\m<-2\end{array}\right.$$

c) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+2024$ không có cực trị

Ta có đạo hàm $y'=x^2-2mx+m+2$

Hàm số đã cho không có cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ vô nghiệm hoặc vó nghiệm kép hay $\Delta'_{y'}\le 0\Leftrightarrow m^2-(m+2)\le 0\Leftrightarrow -1\le m\le 2$.

d) $y=\frac{1}{3}(m^2-1)x^3+mx^2+3x+1$ có cực đại

Đạo hàm $y'=(m^2-1)x^2+2mx+3$

Trường hợp 1: $m=1$ ta có $y'=2x+3$

Xét dấu y'

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	

$\Rightarrow m=1$ loại

Trường hợp 2: $m=-1$ ta có $y'=-2x+3$

$y'=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	

$\Rightarrow m=-1$ thỏa mãn

Với $m\neq\pm1$

Hàm số có cực đại $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow m^2-3\left(m^2-1\right)>0\Leftrightarrow 3-2m^2>0\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{6}}{2}<m<\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$ kết hợp với điều kiện ta được $m=0$

e) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3m+2)x^2+\left(2m^2+3m+1\right)x-2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thoả mãn $3x_{CD}^2=4x_{CT}$

Ta có $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3m+2)x^2+\left(2m^2+3m+1\right)x-2\Rightarrow y'=x^2-(3m+2)x+\left(2m^2+3m+1\right)$ có

$\Delta=m^2\geq 0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2m+1\\x=m+1\end{array}\right.$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $m\neq 0$.

Trường hợp 1. $x_{CD}=2m+1;x_{CT}=m+1$.

Do $a=\frac{1}{3}>0$ nên suy ra $x_{CD}<x_{CT}\Leftrightarrow 2m+1<m+1\Leftrightarrow m<0$.

Lại có $3x_{CD}^2=4x_{CT}\Leftrightarrow 3(2m+1)^2=4(m+1)\Leftrightarrow 12m^2+8m-1=0\Leftrightarrow m=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{6}$.

Với điều kiện $m<0\Rightarrow m=\frac{-2-\sqrt{7}}{6}$ thoả mãn.

Trường hợp 2: $x_{CD}=m+1;x_{CT}=2m+1$

Do $a=\frac{1}{3}>0$ nên suy ra $x_{CD}<x_{CT}\Leftrightarrow m+1<2m+1\Leftrightarrow m>0$.

Lại có $3x_{CD}^2=4x_{CT}\Leftrightarrow 3(m+1)^2=4(2m+1)\Leftrightarrow 3m^2-2m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

Với điều kiện $m>0\Rightarrow m=1$ thoả mãn.

f) $y=x^3-3mx+1\,(1)$ có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A với $A(2;3)$

Ta có $y'=3x^2-3m$.

Đồ thị hàm số **(1)** có hai điểm cực trị B và C khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt, suy ra $m>0$.

Khi đó, không giảm tổng quát suy ra $B(\sqrt{m};1-2m\sqrt{m});C\left(-\sqrt{m};2m\sqrt{m}+1\right);A(2;3)$.

Tam giác ABC cân tại A suy ra $AB=AC$.

$AB^2=AC^2\Leftrightarrow\left(\sqrt{m}-2\right)^2+\left(2+2m\sqrt{m}\right)^2=\left(\sqrt{m}+2\right)^2+\left(2-2m\sqrt{m}\right)^2$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{m}-16m\sqrt{m}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} m=0 \quad (\text{lo¹i v× } m>0) \\ m=\dfrac{1}{2} \quad (\text{tháa m·n}) \end{array}\right.$

Với $m=\dfrac{1}{2}$ thì $BC=\sqrt{(2\sqrt{m})^2+(4m\sqrt{m})^2}=\sqrt{4m+16m^3}=\sqrt{4.\dfrac{1}{2}+16.\dfrac{1}{8}}=2$.

Thử lại thấy ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

Gọi I là trung điểm của BC, suy ra $I(0;1)$ và $IA=\sqrt{2^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$.

Vậy diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{1}{2}.IA.BC=\dfrac{1}{2}.2\sqrt{2}.2=2\sqrt{2}$.

g) $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

Ta có $y'=-3x^2+6x+3m^2-3=0\Leftrightarrow -x^2+2x+m^2-1=0\ (1)$

Để hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt, nên $\Delta'=m^2>0$ suy ra $m\neq 0$.

Dễ thấy (1) có hai nghiệm $x_1=1-m$ và $x_2=1+m$ nên $A\left(1-m;-2-2m^3\right)$ và $B\left(1+m;-2+2m^3\right)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Tam giác OAB vuông ở $O\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow(1-m)(1+m)+\left(-2-2m^3\right)\left(-2+2m^3\right)=0$

$\Leftrightarrow 1-m^2+4\left(1-m^6\right)=0\Leftrightarrow\left(1-m^2\right)\left(4m^4+4m+5\right)=0\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=\pm 1$.

h) $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác AOB là tam giác cân tại O.

Ta có $y'=3x^2-6x$. Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị.

Gọi $A(0;m)$; $B(2;m-4)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Tam giác AOB cân tại O khi và chỉ khi $OA=OB$ hay $OA^2=OB^2$.

Mà $\overrightarrow{OA}(0;m)$; $\overrightarrow{OB}(2;m-4)$. Từ đó suy ra $m^2=2^2+(m-4)^2\Leftrightarrow 20-8m=0\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$

A. $0 < m \le 4$. **B.** $m > 4$. **C.** $m = 0$. **D.** $0 \le m < 4$.

Lời giải

Ta có: $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$

Khi đó $y' = 3x^2 - 6x + m; y'' = 6x - 6$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2 \Rightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 + 3\left(m^2 - m + 2\right)x^2 + 3\left(3m^2 + 1\right)x + 2022m$, tìm các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

A. $m = 1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 4$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 6\left(m^2 - m + 2\right)x + 3\left(3m^2 + 1\right) = 3\left[x^2 + 2\left(m^2 - m + 2\right)x + 3m^2 + 1\right]$;

$y'' = 6x + 6\left(m^2 - m + 2\right)$.

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 6m(m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right. \\ m(m-1) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = 3$.

Câu 3: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^3 - \left(m^2 + 1\right)x^2 + 2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. Khi đó

A. $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. **B.** $S = \{0\}$. **C.** $S = \left\{\frac{3}{2}; 0\right\}$. **D.** $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = -x^2 + 2x - 3 \Rightarrow$ Hàm số chỉ có cực đại.

TH2: $m \ne 0 \Rightarrow \begin{cases} y' = 3mx^2 - 2\left(m^2 + 1\right)x + 2 \\ y'' = 6mx - 2\left(m^2 + 1\right) \end{cases}$

Do hàm số đã cho là hàm bậc 3 nên điều kiện cần để hàm đạt cực tiểu tại $x = 1$ là

$y'(1) = 0 \Leftrightarrow 3m - 2\left(m^2 + 1\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow m = \frac{3}{2}$

Khi $m=\frac{3}{2}$ ta có $y''(1)=9-2\left(\frac{9}{4}+1\right)=\frac{5}{2}>0$ nên $m=\frac{3}{2}$ thỏa mãn.

Câu 4: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m-1\right)x$ đạt giá trị cực đại tại $x=1$.

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=3$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^2-2mx+m^2-m-1$ và $y''=2x-2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ nên $y'(1)=0\Leftrightarrow m^2-3m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=3\end{array}\right.$.

Với $m=0$ thì $y''(1)=2>0$ suy ra hàm đạt cực tiểu tại $x=1$ (loại).

Với $m=3$ thì $y''(1)=-4<0$ suy ra hàm đạt cực đại tại $x=1$ (nhận).

Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=-x^3+2(2m-1)x^2-\left(m^2-8\right)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x=-1$.

A. $m=3$. **B.** $m=-9$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=-3x^2+4(2m-1)x-\left(m^2-8\right)$

Hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x=-1\Rightarrow f'(-1)=0\Rightarrow -m^2-8m+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-9\end{array}\right.$

Với $m=1\Rightarrow f(x)=-x^3+2x^2+7x+2$

Có $f'(x)=-3x^2+4x+7;f''(x)=-6x+4$

Mà $\begin{cases}f'(-1)=0\\f''(-1)=10>0\end{cases}\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1\Rightarrow m=1$ không thoả mãn yêu cầu bài ra.

Với $m=-9\Rightarrow f(x)=-x^3-38x^2-73x+2$

Ta có $f'(x)=-3x^2-76x-73;f''(x)=-6x-76$

Mà $\begin{cases}f'(-1)=0\\f''(-1)=-70<0\end{cases}\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x=-1\Rightarrow m=-9$ thoả mãn yêu cầu bài ra.

Vậy $m=-9$ thỏa mãn đề bài.

Câu 6: Khi hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-2\right)x+2021$ đạt cực đại tại $x=1$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1;4)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Ta có $y'=-x^2-2mx+m^2-2$ và $y''=-2x-2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ thì $y'(1)=0$

$\Leftrightarrow -1^2-2m.1+m^2-2=0\Leftrightarrow m^2-2m-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-1\end{array}\right.$.

Với $m=3$ ta có $y''(1)=-2\cdot1-2\cdot3=-8<0$ nên $x=1$ là điểm cực đại.

Suy ra $m=3$ thỏa mãn.

Với $m=-1$ta có $y'=-x^2+2x-1=-(x-1)^2\le0\Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến, nên hàm số không có cực trị.

Suy ra $m=-1$ không thỏa mãn.

Vậy $m=3$ thì hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-2\right)x+2021$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2-(5m+4)x+10$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$.

A. $m=-1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-2(2m+1)x-(5m+4)$ có $y''=6x-2(2m+1)$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-1$ khi $\begin{cases}y'(-1)=0\\y''(-1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m+1=0\\-4m-8<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\m>-2\end{cases}\Rightarrow m=1$.

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3+\left(m^2-m+1\right)x^2+\left(3m^2-4\right)x+m+2$. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2+2\left(m^2-m+1\right)x+3m^2-4$; $y''=6x+2\left(m^2-m+1\right)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ thì $y'(-1)=0\Leftrightarrow m^2+2m-3=0\Leftrightarrow m=1;m=-3$

Thử lại:

Khi $m=1$, $y''(-1)<0$: Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ (Không thỏa yêu cầu bài toán)

Khi $m=-3$, $y''(-1)>0$: Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ (Thỏa yêu cầu bài toán)

Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+\left(m^2-2m-3\right)x+4$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

A. $m=-1$ hoặc $m=3$. **B.** $m=-1$.

C. $m=3$. **D.** $m=1$ hoặc $m=3$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=x^2+2mx+m^2-2m-3$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+\left(m^2-2m-3\right)x+4$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$

$$\Rightarrow y'(0)=0\Leftrightarrow 0^2+2m.0+m^2-2m-3=0\Leftrightarrow m^2-2m-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$$

Với $m=-1,\ y'=x^2-2x, y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.; y''=2x-2\Rightarrow y''(0)=-2<0$

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+\left(m^2-2m-3\right)x+4$ đạt cực đại tại điểm $x=0$ khi $m=-1$.

Vậy $m=-1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m=3,\ y'=x^2+6x,\ y'=0\Leftrightarrow x^2+6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-6 \end{array}\right.; y''=2x+6\Rightarrow y''(0)=6>0$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+\left(m^2-2m-3\right)x+4$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$ khi $m=3$ (thỏa mãn).

Câu 10: Giá trị nguyên lớn nhất của tham số m để hàm số $y=\frac{x^2+(m-1)x+3-2m}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\sqrt{5}\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $\left(\sqrt{5};5\right)$.

Lời giải

Điều kiện xác định $x\neq -m$.

Đạo hàm cấp một và cấp hai của hàm số lần lượt là: $y'=1+\frac{m-3}{(x+m)^2}$, $y''=\frac{-2(m-3)}{(x+m)^3}$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ khi và chỉ khi: $\left\{\begin{array}{l} y'(-1)=0 \\ y''(-1)>0 \\ m\neq 1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+\frac{m-3}{(-1+m)^2}=0 \\ \frac{-2(m-3)}{(-1+m)^3}>0 \\ m\neq 1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Nghiệm nguyên lớn nhất của m là $m=2$ nên chọn khoảng $\left(0;\sqrt{5}\right)$.

Câu 11: Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+\left(m^2+2\right)x-m+1$ đạt cực đại tại $x=1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right.$. **B.** Không tồn tại m.

C. $m=1$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6mx+\left(m^2+2\right)$, $y''=6x-6m$.

Hàm số $y=x^3-3mx^2+\left(m^2+2\right)x-m+1$ đạt cực đại tại $x=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-6m+m^2+2=0 \\ 6-6m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+5=0 \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right. \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow m=5.$$

Câu 12: Cho biết hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=3$. Khi đó

A. $m\le -1$. **B.** $m\in(2;3)$. **C.** $m\in(1;2)$. **D.** $m\in(0;1)$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6x+m$

Hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 khi $\Delta'=(-3)^2-3m>0\Leftrightarrow m<3$

Theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\dfrac{m}{3} \end{cases}$

Theo đề bài ta có $x_1^2+x_2^2=3\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=3\Leftrightarrow 2^2-\dfrac{2}{3}m=3\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$

Vậy $m=\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 13: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1+x_2-3x_1x_2=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(-4;-2)$. **B.** $m_0\in(2;4)$. **C.** $m_0\in(0;2)$. **D.** $m_0\in(-2;0)$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6x+m$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x+m=0(*)$.

Hàm số có hai điểm cực trị x_1,x_2 $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'=9-3m>0$ $\Leftrightarrow m<3$.

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1.x_2=\dfrac{m}{3} \end{cases}\Rightarrow x_1+x_2-3x_1x_2=1\Leftrightarrow 2-m=1\Leftrightarrow m=1$

Vậy $m_0=1\in(0;2)$.

Câu 14: Cho hàm số $y=\left(\frac{m-1}{3}\right)x^3+\left(m^2-4\right)x^2+\left(m^2-9\right)x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để hàm số có hai điểm cực trị trái dấu?

A. 18. **B.** 19. **C.** 17. **D.** 16.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=(m-1)x^2+2\left(m^2-4\right)x+m^2-9.$

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \frac{m^2-9}{m-1}<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ 1<m<3 \end{array}\right.$

Do m nguyên và $m\in[-20;20]$ nên $m\in\{-20;-19;...;-5;-4;2\}$. Vậy có 18 giá trị của m.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+3)x^2+(12-m)x+2020$ có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục tung?

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Ta có $y'=x^2-2(m+3)x+12-m$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục tung $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1,x_2

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta'=\left[-(m+3)\right]^2-(12-m)>0\\ S=x_1+x_2=2(m+3)>0\\ P=x_1x_2=12-m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2+7m-3>0\\ m+3>0\\ 12-m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m>\frac{-7+\sqrt{61}}{2}\\ m<\frac{-7-\sqrt{61}}{2}\end{array}\right.\\ -3<m<12\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \frac{-7+\sqrt{61}}{2}<m<12$. Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;...;11\}$.

Vậy có tất cả 11 giá trị nguyên thỏa mãn.

Câu 16: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+\left(m^2+4m+3\right)x+2021m+2022\ (C)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có các điểm cực trị nằm về cùng một phía của trục tung.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $-3<x<-1$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m>-1\\ m<-3\end{array}\right.$. **D.** $\left\{\begin{array}{l}m>-1\\ m<-3\end{array}\right.$.

Lời giải

Tập xác định : $D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=x^2-2(m+2)x+m^2+4m+3=0$.

Đồ thị hàm số có các điểm cực trị nằm về cùng một phía của trục tung

$\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+2)^2 - (m^2+4m+3) > 0 \\ m^2+4m+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-3 \end{array}\right.$$

Câu 17: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2+5m+4)x-1$ có hai điểm cực trị trái dấu?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1

Lời giải

Ta có: $f'(x)=x^2-2mx+m^2+5m+4$.

Để hàm số có hai điểm cực trị trái dấu thì $f'(x)=0$ có hai nghiệm trái dấu.

Suy ra $ac<0 \Leftrightarrow m^2+5m+4<0 \Leftrightarrow -4<m<-1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-3;-2\}$

Vậy có 2 giá trị m thoả yêu cầu bài toán.

Câu 18: Tìm giá trị của tham số m để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$ thuộc đường thẳng $d: y=x+1$.

A. $m=-5$. **B.** $m=31$. **C.** $m=23$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3x^2-6x-9$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vì $a>0$ nên điểm cực tiểu có toạ độ $I(3;m-27)$ mà $I\in d \Leftrightarrow 3+1=-27+m \Leftrightarrow m=31$.

Câu 19: Cho đường cong $(C_m): y=x^3-3(m-1)x^2-3(m+1)x+3$. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho O,A,B thẳng hàng. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6(m-1)x-3(m+1)=3\left[x^2-2(m-1)x-(m+1)\right]$.

Đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2-2(m-1)x-(m+1)=0\ (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=(m-1)^2+m+1>0 \Leftrightarrow m^2-m+2>0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$.

Ta có $y = y'.\left[\frac{1}{3}x - \frac{m-1}{3}\right] + \left[-2m^2 + 2m - 4\right]x + 4 - m^2$.

Suy ra phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị là

$y = \left(-2m^2 + 2m - 4\right)x + 4 - m^2$.

Do O, A, B thẳng hàng nên $4 - m^2 = 0 \Rightarrow\Rightarrow m = \pm 2$.

Suy ra $S = \{2; -2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 0.

Câu 20: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2\left(3m^2 - 1\right)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $y' = 2x^2 - 2mx - 2\left(3m^2 - 1\right) = 2\left[x^2 - mx - \left(3m^2 - 1\right)\right]$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow x^2 - mx - \left(3m^2 - 1\right) = 0\ (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 + 4\left(3m^2 - 1\right) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 > \frac{4}{13} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{13}}; +\infty\right)$.

Theo Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -\left(3m^2 - 1\right) \end{cases}$.

Theo bài $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0\ \ (ko\ \text{tm}) \\ m = \frac{2}{3}(tm) \end{array}\right.$.

Kết luận: Có 1 giá trị tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 + 4\left(m - 2\right)x^2 - 7x + 1$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2\ \left(x_1 < x_2\right)$ thỏa mãn $\left|x_1\right| - \left|x_2\right| = -4$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $y = x^3 + 4\left(m - 2\right)x^2 - 7x + 1\ (1) \Rightarrow y' = 3x^2 + 8\left(m - 2\right)x - 7$

Xét phương trình $3x^2 + 8\left(m - 2\right)x - 7 = 0\ (2)$

Suy ra hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 với mọi m.

Ta thấy $ac = -21 < 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu

Suy ra hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 với mọi m.

$\Rightarrow x_1 < 0;\ x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| = -x_1;\ |x_2| = x_2$.

Ta có: $|x_1| - |x_2| = -4 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = -4 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = -4 \Leftrightarrow \dfrac{8(m-2)}{3} = -4 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa bài toán.

Câu 22: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in (-4;-2)$. **B.** $m_0 \in (2;4)$. **C.** $m_0 \in (0;2)$. **D.** $m_0 \in (-2;0)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0 (*)$.

Hàm số có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0$ $\Leftrightarrow m < 3$.

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = \dfrac{m}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow 2 - m = 1 \Leftrightarrow m = 1$

Vậy $m_0 = 1 \in (0;2)$.

Câu 23: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ có hai điểm cực trị dương là

A. $m \in \left(\dfrac{1}{2};1\right) \cup (1;+\infty)$. **B.** $m \in \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $m \in (1;+\infty)$. **D.** $m \in (-\infty;1) \cup (1;2)$.

Lời giải

Ta có $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$. Để hàm số có hai điểm cực trị dương thì phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ a.c = 2m - 1 > 0 \\ -\dfrac{b}{a} = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{1}{2};1\right) \cup (1;+\infty). \\ m > 0 \end{cases}$$

Vậy $m \in \left(\dfrac{1}{2};1\right) \cup (1;+\infty)$.

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox ?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của Ox

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + \left(m^2 + 11\right)x - 2m^2 + 2$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^3 - 8x^2 + \left(m^2 + 11\right)x - 2m^2 + 2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Mà $x^3 - 8x^2 + \left(m^2 + 11\right)x - 2m^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 6x^2 + 12x + m^2x - 2m^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - 2\right)\left(x^2 - 6x + m^2 - 1\right) = 0$.

Do đó phương trình trên luôn có một nghiệm $x = 2$ nên phương trình $f(x) = x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - m^2 > 0 \\ -9 + m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{10} < m < \sqrt{10} \\ m \neq \pm 3 \end{cases}$.

Với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 25: Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để hàm số có hai giá trị cực trị trái dấu?

A. 19. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Lời giải

Ta có: $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$.

Hàm số có hai giá trị cực trị trái dấu khi và chỉ khi đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 - 2mx + 1 - m\right) = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 > 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{N}, m < 20$ ta được $1 \leq m < 20$, $m \in \mathbb{N}$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 26: Cho hàm số $y = x^3 - \dfrac{3}{2}(m-2)x^2 - 3(m-1)x + 1, m$ là tham số. Số giá trị $m > 0$ để hàm số có giá trị cực đại, giá trị cực tiểu lần lượt là $y_{CĐ}, y_{CT}$ thỏa mãn $2y_{CĐ} + y_{CT} = 4$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-3(m-2)x-3(m-1); y'=0\Leftrightarrow x^2-(m-2)x-m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=m-1\end{array}\right.$.

Với $m>0$ thì $-1<m-1$. Khi đó hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và đạt cực tiểu tại $x=m-1$.

Do đó: $y_{CD}=y(-1)=\frac{3m}{2}, y_{CT}=y(m-1)=-\frac{1}{2}(m+2)(m-1)^2+1.$

Từ giả thiết: $2y_{CD}+y_{CT}=4\Leftrightarrow 2.\frac{3m}{2}-\frac{1}{2}(m+2)(m-1)^2+1=4$

$\Leftrightarrow 6m-6-(m+2)(m-1)^2=0\Leftrightarrow(m-1)(m^2+m-8)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}\end{array}\right.$.

Do $m>0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\frac{-1+\sqrt{33}}{2}\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 27: Cho hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2-5x+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2+4(m-2)x-5$.

Khi đó $\Delta'=4(m-2)^2+15>0$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$.

Vì $a.c<0$ nên $x_1<0<x_2$

Suy ra: $|x_1|-|x_2|=-2\Leftrightarrow -x_1-x_2=-2\Leftrightarrow\frac{b}{a}=-2\Leftrightarrow\frac{4(m-2)}{3}=-2\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Câu 28: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3

Lời giải

Ta có $y'=x^2-2mx+(m^2-1)$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.\Rightarrow A\left(m-1;\frac{m^3-3m+2}{3}\right)$ và $B\left(m+1;\frac{m^3-3m-2}{3}\right)$

Dễ thấy phương trình đường thẳng $AB: y=-\frac{2}{3}x+\frac{m\left(m^2-1\right)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A,B$ cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$$I\left(m;\frac{m^3-3m}{3}\right)\in d \Rightarrow \frac{m^3-3m}{3}=5m-9 \Leftrightarrow m^3-18m+27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Với $m=3 \Rightarrow A,B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Với $m=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A,B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Tổng các phần tử của S bằng 0.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+2x^2+mx+1$, với m là tham số

a) Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $-2<m<2$

b) Hàm số có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $m=0$ hoặc $m=2$

c) Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $m\le -2$ hoặc $m\ge 2$

d) Hàm số có hai điểm cực trị thoả mãn $x_{CD}<x_{CT}$ và và chỉ khi $0<m<2$

Lời giải

a) Sai: Ta có $y'=mx^2+4x+m$. Hàm số có hai điểm cực trị khi $y'=0$ có hai nghiệm phâ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 4-m^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -2<m<2 \end{cases} (1)$$

b) Sai: Hàm số có đúng một điểm cực trị khi hàm số này suy biến về hàm bậc hai nghĩa là $\frac{m}{3}=0 \Leftrightarrow m=0$.

c) Đúng: Với $m=0$ thì hàm số trở thành $y=2x^2+1$. Hàm số này có một điểm cực tiểu. Điều này không thoả mãn yêu cầu bài toán

Với $m\neq 0$. Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 4-m^2\le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

d) Đúng: Dựa vào đạng dồ thị hàm số bậc ba, hàm số có hai điểm cực trị thoả mãn $x_{CD} < x_{CT}$ khi $m > 2\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra giá trị m cần tìm là $0 < m < 2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$, với m là tham số

a) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi m

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $m = 2$

c) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $2\sqrt{5}$

d) Diểm cực tiểu của đồ thị hàm số luôn thuộc đường thẳng cố định với hệ số góc $k = -3$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{array}\right.$

Do $x_1 \neq x_2$ với mọi m nên hàm số luôn có hai điểm cực trị.

b) Đúng: Dễ thấy $x = m + 1$ là điểm cực tiểu suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $m = 2$

c) Đúng: Với mọi m, toạ độ hai điểm cực trị là $A(m+1; -3m-2)$ và $B(m-1; -3m+2)$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là: $AB = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = 2\sqrt{5}$

d) Đúng: Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{array}\right.$

Vì là hàm số bậc ba với hệ số $a = 1 > 0$ nên điểm cực tiểu của hàm số là $A(m+1; -3m-2)$

Lại có $-3m - 2 = -3(m+1) + 1$ nên điểm cực tiểu của hàm số luôn thuộc đường thẳng $d : y = -3x + 1$ và có hệ số góc $k = -3$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm nguyên dương phân biệt

b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này nằm về hai phía của trục tung

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y = x + 1$

Lời giải

a) Sai: Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

b) Sai: $y'=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$, $y'=0\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y(1)=2 \\ x=-2, y(-2)=-1 \end{array}\right.$.

c) Đúng: Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1;2)$ và $N(-2;-1)$ và hai điểm cực trị này nằm về hai phía của trục tung

d) Đúng: Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị M, N của đồ thị hàm số đã cho là: $y=x+1$.

Chú ý:

Áp dụng tính chất: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ thì giá trị cực trị tương ứng của hàm số là s $y_0=\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}=\dfrac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$. Suy ra với bài toán trên ta có phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=\dfrac{\left(x^2+2x+3\right)'}{(2x+1)'}=x+1$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{x-m}$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{m\}$

b) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ khi $m=\dfrac{1}{2}$

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y=2x-2m$

Lời giải

a) Đúng: Hàm số xác định khi $x-m\neq 0\Leftrightarrow x\neq m$ nên tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

b) Đúng: Đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-2mx+2m^2-m-2}{(x-m)^2}$. Để hàm số có hai điểm cực trị thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác m hay $g(x)=x^2-2mx+2m^2-m-2$ có hai ngiệm phân biệt khác m.

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ g(m)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+m+2>0\\ m^2-m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-1;2)$$

Vì m nguyên nên $m=\{0;1\}$ nên có hai giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.

c) Đúng: Hàm số đạt cực trị tại $x=-1$ thì $y'(-1)=0\Leftrightarrow 2m^2+m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Thử lại với $m=\frac{1}{2}$ thì $y'=\frac{x^2-x-2}{x-\frac{1}{2}}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0.5		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	y_1	↘	$+\infty$	↘	y_2	↗	$+\infty$

Vậy với $m=\frac{1}{2}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

d) Đúng: Cho hàm số $y=\frac{u(x)}{v(x)}$. Nếu hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có dạng $y=\frac{u'(x)}{v'(x)}$.

Áp dụng vào bài toán ta được $y=\frac{\left(x^2-2mx+m+2\right)^2}{\left(x-m\right)^2}=2x-2m$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết đồ thị của hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có một điểm cực trị là $A(-1;29)$ và đi qua điểm $B(2;2)$. Tính $a+b+c$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2+2ax+b$.

Biết đồ thị của hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có một điểm cực trị là $A(-1;29)$ và đi qua điểm $B(2;2)$ nên ta có hệ: $\begin{cases}y(-1)=29\\y'(-1)=0\\y(2)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-1)^3+a.(-1)^2+b.(-1)+c=29\\3.(-1)^2+2a.(-1)+b=0\\2^3+a.2^2+b.2+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=-9\\c=24\end{cases}$.

Khi đó $a+b+c=-3-9+24=12$.

Câu 2: Hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$ khi $m=\frac{a}{b}$. Tính $S=a^2+b^2$.

Lời giải

Ta có $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}\Rightarrow y'=2x^2-2mx-2\left(3m^2-1\right)$.

Để y có hai cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là:

$\Delta' = m^2 + 4\left(3m^2-1\right) = 13m^2 - 4 > 0$ hay $m \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}; +\infty\right)$.

Ta lại có $x_1x_2 + 2\left(x_1+x_2\right) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = \dfrac{2}{3} \text{ (thoả)} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \end{array}\right. \Rightarrow S = 13..$

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n$ có điểm cực tiểu là $I\left(1;3\right)$. Khi đó $m+n$ bằng

Lời giải

Ta có $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n \Rightarrow y' = 3x^2 - 4mx + m^2 \Rightarrow y'' = 6x - 4m$

Do $I\left(1;3\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} I\left(1;3\right) \in y \\ y'\left(1\right) = 0 \\ y''\left(1\right) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - 2m + m^2 + n = 3 \\ m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - 2m + m^2 + n = 3 \\ \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right. \\ m < \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 1 \\ n = 3 \end{array}\right.$

Vậy $m + n = 4$.

Câu 4: Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$ thì giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đạo hàm $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m}, (m > 0) \end{array}\right.$

Tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0; m-1), B\left(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right), C\left(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right)$

Gọi H là trung điểm của cạnh BC thì ta có $\left\{\begin{array}{l} AH = m^2 \\ BC = 2\sqrt{m} \end{array}\right.$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AH \cdot BC = m^2\sqrt{m} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 2$

Câu 5: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + \left(3m+6\right)x - m - 6$ đạt cực đại cực tiểu đồng thời hai giá trị cực trị cùng dấu

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=3x^2-12x+3(m+2)$.

Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-12x+3(m+2)=0\Leftrightarrow x^2-4x+m+2=0$

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

$\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow (-2)^2-(m+2)>0\Leftrightarrow m<2$

$y=\frac{1}{3}(x-2)y'+2(m-2)x+m-2$

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị. Khi đó: $y'(x_1)=0,y'(x_2)=0$

$\Rightarrow$Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị: $y=2(m-2)x+m-2$

$y_1=2(m-2)x_1+m-2$, $y_2=2(m-2)x_2+m-2$

Áp dụng định lí Vi – ét cho phương trình: $\begin{cases}x_1+x_2=4\\x_1.x_2=m+2\end{cases}$

Hai giá trị cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2>0\Leftrightarrow \left[2(m-2)x_1+m-2\right].\left[2(m-2)x_2+m-2\right]>0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2\left[4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1\right]>0\Leftrightarrow (m-2)^2\left[4.4+2(m+2)+1\right]>0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2(2m+21)>0\Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 2\\m>\frac{-21}{2}\end{cases}$. Kết hợp điều kiện ta có: $\frac{-21}{2}<m<2$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-10;-9;,..;-4;-3;-3;-2;-1;0;1\}$. Vậy có 12 số nguyên.

Câu 6: Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $C(2;4)$. Tính tổng bình phương các giá trị của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2+6mx=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x=-2m\end{bmatrix}$.

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow -2m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó $A(0;4m^2-2)$, $B(-2m;4m^3+4m^2-2)\Rightarrow AB=\sqrt{4m^2+16m^6}=2|m|\sqrt{4m^4+1}$.

Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-0}{-2m-0}=\frac{y-(4m^2-2)}{4m^3}\Leftrightarrow 2m^2x+y-4m^2+2=0$.

$d(C,AB)=\frac{|4m^2+4-4m^2+2|}{\sqrt{4m^4+1}}=\frac{6}{\sqrt{4m^4+1}}$.

Diện tích tam giác ABC là

$$S=\frac{1}{2}.AB.d\left(C,AB\right)=6\Leftrightarrow\frac{1}{2}.2\left|m\right|.\sqrt{4m^4+1}.\frac{6}{\sqrt{4m^4+1}}=6\Leftrightarrow\left|m\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$$

Vậy tổng bình phương các giá trị của m là 2.

Câu 7: Tồn tại bao nhiêu số dương m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\left(m+1\right)x^3-\left(m+2\right)x^2+3m-2$ cắt và tạo với hai tia Ox,Oy một tam giác có diện tích bằng $\frac{9}{4}$?

Lời giải

Ta có: $y'=3\left(m+1\right)x^2-2\left(m+2\right)x$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\neq0\\\left(m+2\right)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-1\\m\neq-2\end{cases}$

Lấy y chia y' ta được: $y=\left[3\left(m+1\right)x^2-2\left(m+2\right)x\right]\left(\frac{1}{3}x-\frac{m+2}{9\left(m+1\right)}\right)-\frac{2}{9}\frac{\left(m+2\right)^2}{\left(m+1\right)}x+3m-2$

Do đó đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình

$$d:\ y=-\frac{2}{9}\frac{\left(m+2\right)^2}{\left(m+1\right)}x+3m-2$$

$$d\cap Ox=A\left(\frac{9\left(3m-2\right)\left(m+1\right)}{2\left(m+2\right)^2};0\right),\ d\cap Oy=B\left(0;3m-2\right)\ \left(m>\frac{2}{3}\right).$$

$$S_{\Delta OAB}=\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}\left|\frac{9\left(3m-2\right)\left(m+1\right)}{2\left(m+2\right)^2}\right|.\left|3m-2\right|=\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(3m-2\right)^2\left(m+1\right)}{\left(m+2\right)^2}=1\Leftrightarrow9m^3-4m^2-12m=0\Leftrightarrow m=\frac{2}{9}+\frac{4\sqrt{7}}{9}.$$

Vậy tồn tại 1 số dương m thỏa bài toán.

Câu 8: Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $b\in\mathbb{N}^*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$. Giá trị biểu thức $T=a+2b$ là

Lời giải

Ta có: $y'=2x^2-2mx-2\left(3m^2-1\right).$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m^2+12m^2-4>0\Leftrightarrow |m|>\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Khi đó, ta có $x_1+x_2=m, x_1x_2=1-3m^2$.

$$x_1x_2+2(x_1+x_2)=1\Rightarrow 1-3m^2+2m=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\,(l) \\ m=\frac{2}{3}\,(t/m) \end{array}\right. \Rightarrow a+2b=8.$$

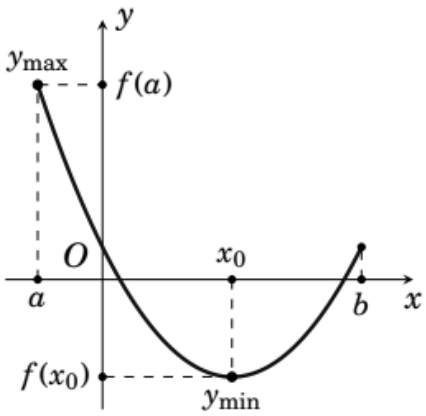
----------HẾT----------

BÀI 02 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D. Khi đó ta có:



- M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x)\le M, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D: f(x_0)=M \end{cases}$. Kí hiệu $\boxed{\max\limits_{x\in D} f(x)=M}$
- m là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x)\ge m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D: f(x_0)=m \end{cases}$. Kí hiệu $\boxed{\min\limits_{x\in D} f(x)=m}$

2 Một số lưu ý

- Khi yêu cầu tìm max min của hàm số màkhoong nói rõ xét trên tập nào thì ta hiểu là tìm max min trên miền xác định của hàm số đó.
- Để tìm max min của hàm số $y=f(x)$ trên miền D ta thường lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên D. Từ bảng biến thiên ta có thể kết luận:

  Điểm ở vị trí cao nhất $\longrightarrow$ Kết luận max

  Điểm ở vị trí thấp nhất $\longrightarrow$ Kết luận min
- Để tìm max min của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ ($f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên $(a;b)$ có thể trừ một số hữu hạn các điểm và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm trong $(a;b)$) thì ta có thể giải theo các bước sau:

  Bước 1: Giải phương trình $f'(0)$ tìm các nghiệm $x_0\in(a;b)$

  Bước 2: Tìm các điểm $x_i\in(a;b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có)

  Bước 3: Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ $(*)$

  Bước 4: Gọi M,m lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước $(*)$ thì ta có thể kết luận: $M=\max\limits_{[a;b]} f(x);\ m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$

- Ta có thể sử dụng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min.
  - Bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm a,b:

    $$\boxed{a+b\ge 2\sqrt{ab}}$$

    Dấu "=" xảy ra khi $a=b$
  - Bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm a,b,c:

    $$\boxed{a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}}$$

    Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$
  - Bất đẳng thức Cauchy cho n số không âm $a_1,a_2,...,a_n$:

    $$\boxed{a_1+a_2+...+a_n\ge n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}$$

    Dấu "=" xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_n$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Bài toán tìm max, min của hàm số y=f(x) trên miền D

- **Phương pháp giải:**

  Bước 1: Tính y'. Giải phương trình $y'=0$ tìm các nghiệm $x_i \in D$ và tìm các điểm $x_j \in D$ mà tại đó y' không xác định.

  Bước 2: Lập bảng biến thiên của hàm số trên D

  Bước 3: Từ bảng biên thiên đưa ra kết luận:

  Điểm ở vị trí cao nhất $\longrightarrow$ Kết luận max

  Điểm ở vị trí thấp nhất $\longrightarrow$ Kết luận min

- **Lưu ý:** Nếu D là đoạn $[a;b]$ và hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì ta có thể làm như sau:

  Bước 1: Giải phương trình $f'(x)=0$ rồi tìm các nghiệm $x_0 \in (a;b)$

  Bước 2: Tìm các điểm $x_i \in (a;b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có)

  Bước 3: Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ $(*)$

  Bước 4: Gọi M, m lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước $(*)$ thì ta có thể kết luận: $M=\max\limits_{[a;b]} f(x);\ m=\min\limits_{x\in D} f(x)$

- **Lưu ý quan trọng:**
  - Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$
  - Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra

a) $y=f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$

b) $y=f(x)=x^3-3x^2+3$ trên đoạn $[1;3]$

c) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$

d) $y=f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

e) $y=1+\dfrac{1}{x}$ trên đoạn $[1;2]$

f) $y=f(x)=\dfrac{4}{x}+x+1$ trên đoạn $[1;3]$

g) $y=f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ trên miền xác định

h) $y=f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

i) $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$

k) $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

l) $y=f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

m) $y=x+\dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$

Lời giải

a) $y=f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$

Ta có $f'(x)=3x^2-33$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2=11\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{11}$

Xét trên $[2;19]$ ta có $x=\sqrt{11}\in[2;19]$ ta có $f(2)=-58; f(\sqrt{11})=-22\sqrt{11}; f(19)=6232$.

Vậy $\min\limits_{[2;19]} f(x) = f\left(\sqrt{11}\right) = -22\sqrt{11}$; $\max\limits_{[2;19]} f(x) = f(19) = 6232$.

b) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1;3]$

Ta có $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Trên đoạn $[1;3]$ ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;3] \\ x = 2 \in [1;3] \end{array}\right.$.

Khi đó $f(1) = 1$; $f(2) = -1$; $f(3) = 3$. Vậy $\min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = -1$; $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = 3$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$

Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in [2;4]$ và có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

Trên đoạn $[2;4]$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Khi đó: $f(2) = 7$, $f(3) = 6$, $f(4) = \dfrac{19}{3}$. Vậy $\min\limits_{[2;4]} f(x) = 6$; $\max\limits_{[2;4]} f(x) = f(2) = 7$.

d) $y = f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ và $f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$;

Khi đó: $f(0) = -1$; $f(2) = \dfrac{5}{3}$. Vậy $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(0) = -1$; $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = \dfrac{5}{2}$

e) $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ trên đoạn $[1;2]$

Ta có $y' = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \ \forall x \in [1;2]$ nên hàm số nghịch biến trên $[1;2]$.

Do đó: $M = \max\limits_{[1;2]} y = y(1) = 2$, $m = \min\limits_{[1;2]} y = y(2) = \dfrac{3}{2}$.

f) $y = f(x) = \dfrac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1;3]$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[1;3]$ và có đạo hàm $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} + 1$

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \notin (1;3) \\ x = 2 \in (1;3) \end{array}\right.$.Ta có $f(1) = 6; f(2) = 5; f(3) = \dfrac{16}{3}$.

Vậy $\min\limits_{[1;3]} f(x) = 5$; $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 6$.

g) $y=f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ trên miền xác định

Tập xác định: $D=[-2;2]$ và có đạo hàm $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=1\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$

Bảng biến thiên:

x	-2		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	-2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

Vậy $\min\limits_{[-2;2]}f(x)=-2$; $\max\limits_{[-2;2]}f(x)=2\sqrt{2}$.

h) $y=f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ta có $f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}=x+\dfrac{4}{x+1}$.

Khi đó $f'(x)=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{4}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow(x+1)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;2]\\x=-3\notin[0;2]\end{array}\right.$.

Ta có $f(0)=4$; $f(1)=3$; $f(2)=\dfrac{10}{3}$. Vậy $\min\limits_{[0;2]}f(x)=3$ và $\max\limits_{[0;2]}f(x)=4$

i) $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$

Ta có $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$. Suy ra $f'(x)=0$ khi $x=\pm1$. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	2	↘	0	↗	1

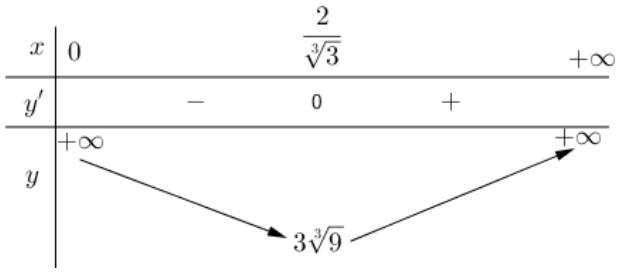
Từ bảng biến thiên, ta có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho lần lượt là 2 và 0.

k) $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $y'=3-\dfrac{8}{x^3}=0\Leftrightarrow 3-\dfrac{8}{x^3}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên $(0;+\infty)$ như sau:



Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$.

l) $y=f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

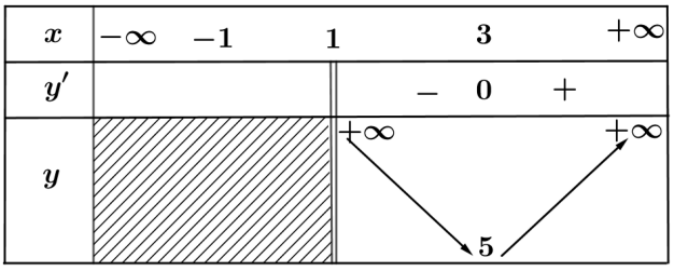
$$f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\geq 2\sqrt{x.\frac{1}{x}}+1\Leftrightarrow f(x)\geq 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=1$.

m) $y=x+\dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$

Ta có: $y=x+\dfrac{4}{x-1}\Rightarrow y=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min\limits_{x\in(1;+\infty)} y=5$.

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra

a) $y=x-\ln x$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};e\right]$

b) $y=x+\cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

c) $y=f(x)=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$

d) $y=\cos 2x+2\sin x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Lời giải

a) $y=x-\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};e\right]$.

Tập xác định $D=(0;+\infty)$. Ta có $y'=1-\frac{1}{x}$. Xét $y'=0\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow x=1\in\left[\frac{1}{2};e\right]$

Xét $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\ln 2,\ y(1)=1, y(e)=e-1$. Do đó $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};e\right]} y=1$ và $M=\max\limits_{\left[\frac{1}{2};e\right]} y=e-1$.

b) $y=x+\cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Hàm số liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ có $y'=1-2\cos x\sin x=1-\sin 2x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \sin 2x=1$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. Do $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

Mặt khác $\begin{cases} y(0)=1 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\end{cases}$. Vậy $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2};\ \min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y=1$.

c) $y=f(x)=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $f(x)=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow f'(x)=2x\mathrm{e}^{2x}+\left(x^2-2\right)2\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^{2x}\left(x^2+x-2\right)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2]\end{array}\right.$. Ta có $f(-1)=-\mathrm{e}^{-2};\ f(1)=-e^2;\ f(2)=2\mathrm{e}^4$

Vậy $M=\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)=2\mathrm{e}^4;\ m=\min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(1)=-\mathrm{e}^2$.

d) $y=\cos 2x+2\sin x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Xét hàm số $y=\cos 2x+2\sin x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $y'=-2\sin 2x+2\cos x=-4\sin x.\cos x+2\cos x=2\cos x(-2\sin x+1)$.

Giải $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0 \\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

Xét trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $y'=0$ có các nghiệm $x=\frac{\pi}{6};x=\frac{\pi}{2}$.

Ta có $y(0)=1;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1; y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$. Suy ra $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=\frac{3}{2},\ \min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=1$.

Bài tập 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên miền đã chỉ ra

a) $f(x)=\frac{5\sin x+1}{\sin x+2}$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$

b) $y=\cos^3 x+2\sin^2 x+\cos x$ trên miền xác định

Lời giải

a) $f(x)=\frac{5\sin x+1}{\sin x+2}$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$

Đặt $t=\sin x$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ thì $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ nên khi đó ta được hàm số $g(t)=\frac{5t+1}{t+2}$

Đạo hàm $g'(t)=\frac{9}{(t+2)^2}>0,\forall t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$

Do $g(0)=\frac{1}{2}; g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{5}$ nên $\min\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} g(t)=g(0)=\frac{1}{2}$ nên $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=\frac{1}{2}$.

b) $y=\cos^3 x+2\sin^2 x+\cos x$ trên miền xác định

Ta có $y=\cos^3 x+2\sin^2 x+\cos x=\cos^3 x+2\left(1-\cos^2 x\right)+\cos x=\cos^3 x-2\cos^2 x+\cos x+2$

Đặt $t=\cos x$ với $t\in[-1;1]$ ta được $f(t)=t^3-2t^2+t+2$

Ta có $f'(t)=3t^2-4t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\in[-1;1]\\ t=\frac{1}{3}\in[-1;1]\end{array}\right.$ mà $f(-1)=-2;\ f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{58}{27};\ f(1)=2$

Vậy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=\max\limits_{[-1;1]} f(t)=\frac{58}{27}$

Bài tập 4: Độ giảm huyết áp của một bệnh $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân $(0<x<30)$. Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là bao nhiêu mg ?

Lời giải

Ta có: $G'(x)=1,5x-0,075x^2==0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=20\end{array}\right.$. Bảng biến thiên:

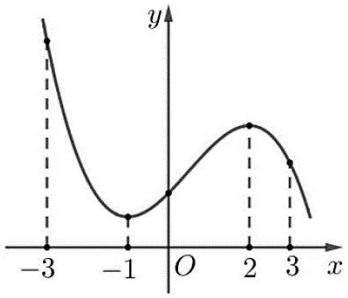
x	0		20		30
$G'(x)$		+	0	−	
$G(x)$	0	↗	G_{max}	↘	0

Vậy để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là $20(mg)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;3]$ bằng

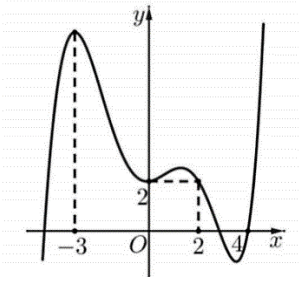
A. $f(2)$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(-3)$. **D.** $f(3)$

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;3]$ bằng $f(-3)$

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;4]$ bằng:

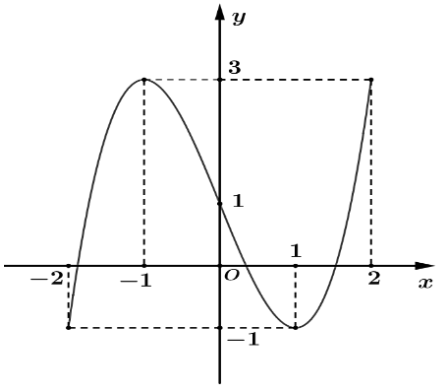
A. $f(2)$. **B.** $f(-3)$. **C.** $f(4)$. **D.** $f(0)$



Lời giải

Quan sát hình vẽ ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;4]$ bằng $f(-3)$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ là

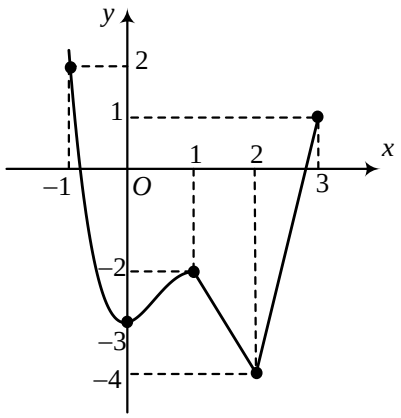
A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

Trên đoạn $[-2;2]$ ta có $f(x)\geq -1$ và $f(x)=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=-1$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;3]$. Khi đó, tổng $M+m$ bằng

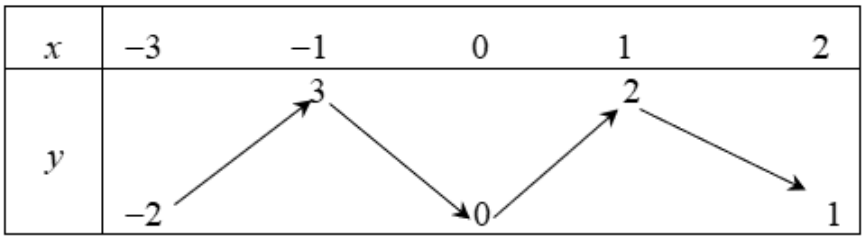


A. -6. **B.** -2. **C.** -5. **D.** 2.

Lời giải

Theo đồ thị, ta có : $M=2$ và $m=-4\Rightarrow M+m=-2$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;2]$.

Tính $M+m$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $M=3, m=-2\Rightarrow M+m=1$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

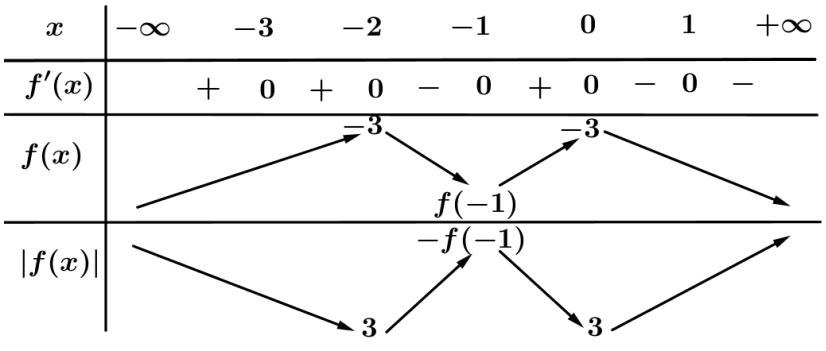
x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

Biết $f(-2)=f(0)=-3$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ trên đoạn $[-2;0]$ bằng

A. $f(-1)$. **B.** -3. **C.** $-f(-1)$. **D.** 3.

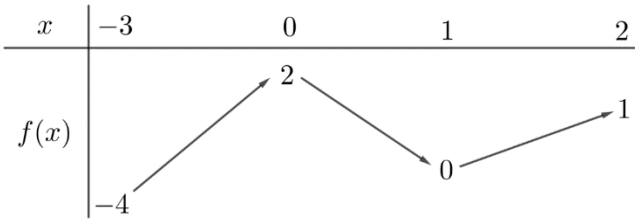
Lời giải

Dựa vào bảng dấu của đạo hàm ta có bảng biến thiên như sau:



Dựa vào bảng biến thiên $y=\left|f(x)\right|$ trên đoạn $[-2;0]$ ta có $\max\limits_{[-2;0]}\left|f(x)\right|=-f(-1)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-3;2]$. Tính $M.m$.



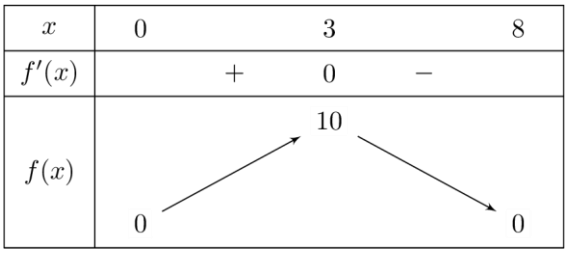
A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -8.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta xác định được $M=2$ và $m=-4$.

Từ đó suy ra $M.m=2.(-4)=-8$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau.



Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0)$ tại x_0. Khi đó tích $x_0.f(x_0)$ bằng

A. 30. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 0.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy, hàm số đạt giá trị lớn nhất là 10 tại $x=3$ nên $x_0.f(x_0)=30$.

Câu 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-6x$ trên $[-1;4]$ là

A. $-4\sqrt{2}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 40.

Lời giải

Ta có $f'(x)=3x^2-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow x=\sqrt{2}\in[-1;4]$.

Khi đó $f(-1)=-1+6=5$, $f\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-6\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$, $f(4)=64-24=40$.

Vậy $\min\limits_{[-1;4]}f(x)=-4\sqrt{2}$ tại $x=\sqrt{2}$.

Câu 10: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ trên đoạn $[0;4]$. Tính tổng $S=M+n$.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Dễ thấy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Ta có: $y(0)=1;\ y(1)=\frac{7}{3};\ y(3)=1;\ y(4)=\frac{7}{3}$.

Vậy $\begin{cases}M=\max\limits_{[0;4]}y=y(1)=y(4)=\frac{7}{3}\\m=\min\limits_{[0;4]}y=y(0)=y(3)=1\end{cases}\Rightarrow S=M+m=\frac{7}{3}+1=\frac{10}{3}$.

Câu 11: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3+3x^2+10$ trên đoạn $[-5;-1]$ bằng

A. 12. **B.** 18. **C.** -40. **D.** 14.

Lời giải

Trên đoạn $[-5;-1]$ ta có hàm số đã cho liên tục và có

$y'=3x^2+6x\Rightarrow 3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.\Rightarrow x=-2;\ y(-5)=-40; y(-2)=14; y(-1)=12$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-5;-1]$ bằng 14.

Câu 12: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[2;4]$ là:

A. $\min\limits_{[2;4]}y=5$. **B.** $\min\limits_{[2;4]}y=0$. **C.** $\min\limits_{[2;4]}y=3$. **D.** $\min\limits_{[2;4]}y=7$.

Lời giải

Ta có $y=x^3-3x+5\Rightarrow y=3x^2-3$. Giải $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\notin[2;4]\\x=-1\notin[2;4]\end{array}\right.$.

Ta có $y(2)=7;\ y(4)=57 \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = y(2)=7$.

Câu 13: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** $\dfrac{19}{3}$. **D.** $\dfrac{23}{3}$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+3}{x-1}\right)'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[2;4]\\x=3\in[2;4]\end{array}\right.$.

Lại có $f(2)=7>f(4)=\dfrac{19}{3}>f(3)=6$ suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ là 7.

Câu 14: Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tổng $S=2M-m$ bằng

A. $S=0$. **B.** $S=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$.

Giải phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=1\Leftrightarrow x=0$.

Ta có $f(0)=-1;f(3)=-\dfrac{1}{2}$ và hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Vậy $M=-\dfrac{1}{2};m=-1\Rightarrow S=2M-m=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1=0$.

Câu 15: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ là

A. $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\dfrac{1}{2};\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=-1$.

B. $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\dfrac{\pi}{4};\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\dfrac{\pi}{6}$.

C. $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2};\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=1$.

D. $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2};\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $f(x)=x+\cos^2 x\Rightarrow f'(x)=1-2\cos x.\sin x=1-\sin 2x$.

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow 1-\sin 2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$. Do $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$.

$f(0)=1;\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ và hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

Suy ra $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2};\ \min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=1$.

Câu 16: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x+2}{x}$ trên $[1;2]$

A. $\min\limits_{[1;2]} y=3$. **B.** $\min\limits_{[1;2]} y=2$. **C.** $\min\limits_{[1;2]} y=\frac{1}{2}$. **D.** $\min\limits_{[1;2]} y=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $y'=-\frac{2}{x^2}<0,\forall x\neq 0$ nên hàm số $y=\frac{x+2}{x}$ nghịch biến trên $[1;2]$

Do đó $\min\limits_{[1;2]} y=y(2)=2$.

Câu 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$ là

A. 16. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $y=\sqrt{16-x^2}\le 4$, dấu "=" khi $x=0$. Vậy $\max\limits_{[-4;4]} y=4$.

Câu 18: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{16-x^2}$. Tính $M+m$

A. $8-\sqrt{8}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Điều kiện xác định $-4\le x\le x$. Đạo hàm $y'=\sqrt{16-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}=\frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$.

Ta có $y'=0\Leftrightarrow 16-2x^2=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{8}$

Xét $y(-4)=y(4)=0;\ y\left(-\sqrt{8}\right)=-8;\ y\left(\sqrt{8}\right)=8$ do đó $M=8,m=-8$. Vậy $M+m=0$.

Câu 19: Trên đoạn $[-4;-1]$, hàm số $y=x+\frac{9}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. -5. **B.** $-\frac{29}{5}$. **C.** $-\frac{11}{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y'=1-\frac{9}{(x-1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 1-\frac{9}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow (x-1)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\notin[-4;-1]\\x=-2\in[-4;-1]\end{array}\right.$.

Ta thấy $y(-4)=-\frac{29}{5};\ y(-2)=-5;\ y(-1)=-\frac{11}{2}$. Vậy $\max\limits_{[-4;-1]} y=y(-2)=-5$.

Câu 20: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{4}{x}+x+1$ trên đoạn $[1;3]$. Tính $M-m$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $y'=-\frac{4}{x^2}+1=\frac{x^2-4}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\in[1;3]\\x=-2\notin[1;3]\end{array}\right.$

Ta có: $y(1)=6,\ y(2)=5,\ y(3)=\frac{16}{3}\ \Rightarrow\ M=6, m=5\Rightarrow M-m=1.$

Câu 21: Trên đoạn $\left[\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right]$, hàm số $y=2x^3+\frac{1}{2x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=\frac{3}{2}$. **C.** $x=\frac{1}{3}$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=8x^2-\frac{1}{2x^2},\ y'=0\Leftrightarrow 8x^2-\frac{1}{2x^2}=0\Leftrightarrow 16x^4=1\Leftrightarrow x^4=\frac{1}{16}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\in\left[\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right]\\x=-\frac{1}{2}\notin\left[\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right]\end{array}\right.$

Ta có: $y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{85}{54},\ y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4},\ y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{85}{12}\Rightarrow\max\limits_{\left[\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right]}y=y\left(\frac{1}{2}\right).$

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{2x+14}+\sqrt{5-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=-7$. **B.** Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{6}$.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$. **D.** Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Tập xác định $D=[-7;5]$.

Ta có $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+14}}-\frac{1}{2\sqrt{5-x}};\ f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{2x+14}=2\sqrt{5-x}\Leftrightarrow x=1(n).$

$f(1)=16;\ f(-7)=2\sqrt{3};\ f(5)=2\sqrt{6}\Rightarrow\max\limits_{[-7;5]}f(x)=16\ x=1$ và $\min\limits_{[-7;5]}f(x)=2\sqrt{3}$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$ là mệnh đề đúng.

Câu 23: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos x-\frac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\max\limits_{[0;\pi]}y=\frac{2}{3}$. **B.** $\max\limits_{[0;\pi]}y=\frac{10}{3}$. **C.** $\max\limits_{[0;\pi]}y=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\max\limits_{[0;\pi]}y=0$.

Lời giải

Đặt $t=\cos x \Rightarrow t\in[-1;1]$. Đặt $f(t)=2t-\frac{4}{3}t^3$, suy ra $f'(t)=2-4t^2$.

Do đó $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{-1}{\sqrt{2}}\in[-1;1] \\ t=\frac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;1] \end{array}\right.$.

Ta có $f(-1)=\frac{-2}{3}$, $f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $f(1)=\frac{2}{3}$.

Vậy $\max\limits_{[0;\pi]} y=\max\limits_{[-1;1]} f(t)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 24: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ là

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Tập xác định: $D=[3;5]$

Ta có $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-3}}-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-3}=\sqrt{5-x}\\ x-3>0\\ 5-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3=5-x\\ x>3\\ x<5\end{cases} \Leftrightarrow x=4$.

Ta có: $f(3)=f(5)=\sqrt{2}$; $f(4)=2$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 2.

Câu 25: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2+x+3}{x-2}$ trên $[-2;1]$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. -6. **B.** $\frac{-9}{4}$. **C.** $\frac{-25}{4}$. **D.** -5.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Ta có $y'=\frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x+3)}{x-2}=\frac{x^2-4x-5}{x-2}=\frac{(x+1)(x-5)}{x-2}$

Đạo hàm $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in[-2;1] \\ x=5\notin[-2;1] \end{array}\right.$.

Khi đó $f(-2)=\frac{-5}{4}$; $f(1)=-5$; $f(-1)=-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M=-1 \\ m=-5 \end{array}\right.$. Suy ra $M+m=-6$.

Câu 26: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=4x+\sin^2 \pi x$ trên đoạn $[-1;2]$. Giá trị của $m+M$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** -2. **D.** -4.

Lời giải

Ta có $f'(x)=4+2\pi\sin\pi x.\cos\pi x=4+\pi\sin 2\pi x$. Do $-1\le\sin 2\pi x\le 1\Rightarrow f'(x)>0\,\forall x\in[-1;2]$

Vậy $m+M=f(-1)+f(2)=-4+\sin^2(-\pi)+8+\sin^2(2\pi)=4$.

Câu 27: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+\cos^2 x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $y=f(x)=x+\cos^2 x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$y'=f'(x)=1-2\sin x.\cos x=1-\sin 2x$; $y'=f'(x)=1-2\sin x.\cos x=1-\sin 2x$.

$y'=0\Leftrightarrow\sin 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ do $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

Khi đó $f(0)=1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. Vậy $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}f(x)=\frac{\pi}{2}$.

Câu 28: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{-x^2-4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2};4\right]$.

A. -4. **B.** $-\frac{25}{6}$. **C.** -5. **D.** -2.

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[\frac{3}{2};4\right]$

$f'(x)=\frac{-x^2+4}{x^2}=0\Leftrightarrow -x^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\notin\left[\frac{3}{2};4\right]\\ x=2\in\left[\frac{3}{2};4\right]\end{array}\right.$; $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{25}{6}$; $f(2)=-4$; $f(4)=-5$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{-x^2-4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2};4\right]$ là -4.

Câu 29: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2x+\cos\frac{\pi x}{2}$ trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị của $m+M$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -4.

Lời giải

Ta có $f'(x)=2-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}>0,\forall x\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[-2;2]$

Khi đó $m+M=f(-2)+f(2)=-4-1+4-1=-2$.

Câu 30: Cho hàm số $y=\sin x.\cos^2\frac{x}{2}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;\pi]$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Ta có: $y=\sin x.\cos^2\frac{x}{2}=\sin x\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)=\frac{1}{4}(2\sin x+\sin 2x)$

Đạo hàm $y'=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}\\x=-\pi+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Xét trên khoảng $(0;\pi)$ ta có nghiệm là $x=\frac{\pi}{3}$; $y(0)=0; y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}; y(\pi)=0$.

Vậy $\max\limits_{[0;\pi]}y=y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 31: Gọi M,m thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[-2;0]$

Tính $P=M+m$?

A. $P=1$ **B.** $P=-3$ **C.** $P=-\frac{13}{3}$ **D.** $P=-5$

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Xét trên $[-2;0]$ hàm số xác định và liên tục.

Đạo hàm $y'=\frac{2x(x-1)-x^2-3}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-2;0]\\x=3\end{array}\right.$

Khi đó $y(-2)=-\frac{7}{3}, y(0)=-3, y(-1)=-2$

Vậy $m=\min\limits_{[-2;0]}y=-3, M=\max\limits_{[-2;0]}y=-2\Rightarrow P=m+M=-5$.

Câu 32: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{-x^2+3x+4}$ là bao nhiêu?

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Tập xác định : $D=[-1;4]$. Ta có $y'=\frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x+4}}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Khi đó $y(-1)=0; y(4)=0; y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$. Vậy $\max\limits_{[-1;4]}y=\frac{5}{2}$.

Câu 33: Cho hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}x^2+1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-25;\frac{11}{10}\right)$. Tìm giá trị của M.

A. $M=1$. **B.** $M=\frac{1}{2}$. **C.** $M=0$. **D.** $\frac{129}{250}$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-3x$; cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	-25		0		1		$\frac{11}{10}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	1	↘		↗	$\frac{129}{250}$

Vậy $M=1$.

Câu 34: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2+\sin x}$ bằng

A. $4\sqrt{2}-4$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $8-4\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2+\sin x}=\frac{2-2\sin^2 x}{2+\sin x}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(2-2\sin^2 x\right)'.(2+\sin x)-(2+\sin x)'\left(2-2\sin^2 x\right)}{(2+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-4\sin x.\cos x.(2+\sin x)-\cos x\left(2-2\sin^2 x\right)}{(2+\sin x)^2}=\frac{-2\cos x.\left(\sin^2 x+4\sin x+1\right)}{(2+\sin x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-2\cos x.\left(\sin^2 x+4\sin x+1\right)}{(2+\sin x)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\\sin x=-2+\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\x=\arcsin\left(-2+\sqrt{3}\right)+k2\pi\\x=\pi-\arcsin\left(-2+\sqrt{3}\right)+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

Do hàm số $y=f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π nên chỉ xét trên đoạn $[-\pi;\pi]$ ta có:

$x\in\left\{\arcsin\left(-2+\sqrt{3}\right);\pi-\arcsin\left(-2+\sqrt{3}\right);\pm\frac{\pi}{2}\right\}$.Tính được: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

$f\left(\arcsin\left(-2+\sqrt{3}\right)\right)=f\left(\pi-\arcsin\left(-2+\sqrt{3}\right)\right)=8-4\sqrt{3}=\max f(x)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4;4)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	-4		2		0		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-10	↗	0	↘	-4	↗	10

a) $\min\limits_{(-4;4)} y=-4$ và $\max\limits_{(-4;4)} y=10$.

b) $\max\limits_{(-4;4)} y=10$ và $\min\limits_{(-4;4)} y=-10$.

c) $\max\limits_{(-4;4)} y=0$ và $\min\limits_{(-4;4)} y=-4$

d) Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $(-4;4)$.

Lời giải

Theo định nghĩa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, ta thấy hàm số không có GTLN, NN trên $(-4;4)$.

a) Sai: $\min\limits_{(-4;4)} y=-4$ và $\max\limits_{(-4;4)} y=10$.

b) Sai: $\max\limits_{(-4;4)} y=10$ và $\min\limits_{(-4;4)} y=-10$.

c) Sai: $\max\limits_{(-4;4)} y=0$ và $\min\limits_{(-4;4)} y=-4$

d) Đúng: Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $(-4;4)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}, x\in(0;+\infty)$.

a) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

b) Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(0;+\infty)$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ và không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$

d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $y=x+\dfrac{4}{x}\Rightarrow y'=1-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^2-4}{x^2}=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-4}{x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}, x\in(0;+\infty)$

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

a) Đúng: Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

b) Sai: Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(0;+\infty)$.

c) Sai: Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ và không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$

d) Sai: Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y=-2$

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=0$

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -3.

Lời giải

a) Sai: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

b) Đúng: Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y=-2$

c) Đúng: Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=0$

d) Đúng: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -3.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

a) Cực đại của hàm số là 4 b) Cực tiểu của hàm số là 3

c) $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 4$ d) $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 3$

Lời giải

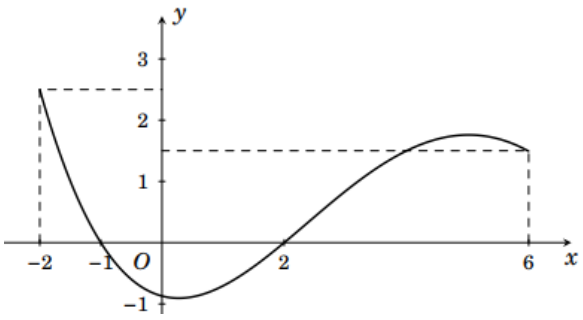
a) Đúng: Cực đại của hàm số là 4

b) Đúng: Cực tiểu của hàm số là 3

c) Đúng: $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 4$

d) Sai: Từ bảng biến thiên ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} = -\infty$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.



a) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-1)$

b) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(6)$

c) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$

d) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-1); f(6)\}$

Lời giải

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↗	$f(6)$

Hàm số đồng biến trên $(-2;-1)$ và $(2;6)$ do $f'(x) > 0$ nên $f(-1) > f(-2)$ và $f(6) > f(2)$

Hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$ do $f'(x) < 0$ suy ra $f(-1) > f(2)$

Từ đó có thể suy ra được $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-2); f(-1); f(2); f(6)\} = \max\{f(-1); f(6)\}$

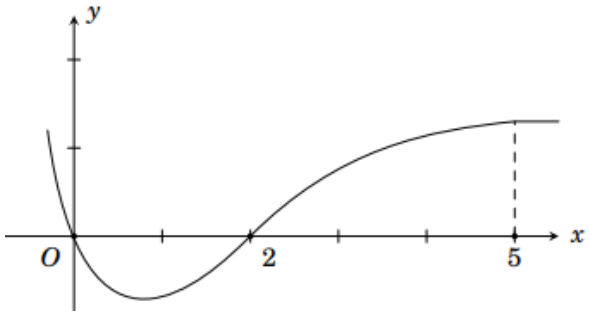
a) Sai: $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-1)$

b) Sai: $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(6)$

c) Sai: $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$

d) Đúng: $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-1); f(6)\}$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$



a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

c) $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(0)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$

d) $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$

Lời giải

Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[0;5]$

x	0		2		3		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(3)$	↗	$f(5)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x)=\max\{f(0);f(5)\}$

Theo bảng biến thiên thì $f(3)>f(2)$ nên $f(3)-f(2)>0$

Theo giả thiết ta có $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)\Leftrightarrow f(5)=f(0)-[f(3)+f(2)]>f(0)$

Suy ra $\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$. Vậy $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$

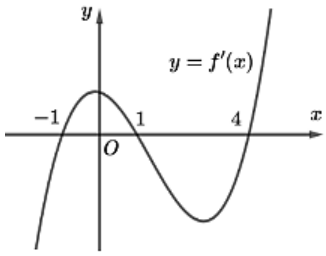
a) Sai: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

b) Đúng: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

c) Sai: $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(0)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$

d) Đúng: $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



a) Hàm số có hai điểm cực trị

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

c) $f(1)>f(2)>f(4)$

d) Trên đoạn $[1;4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(1)$

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=4\end{array}\right.$

Khi đó $f'(x)<0 \Leftrightarrow (-\infty;-1)\cup(1;4)$ và $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1;1)\cup(4;+\infty)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	

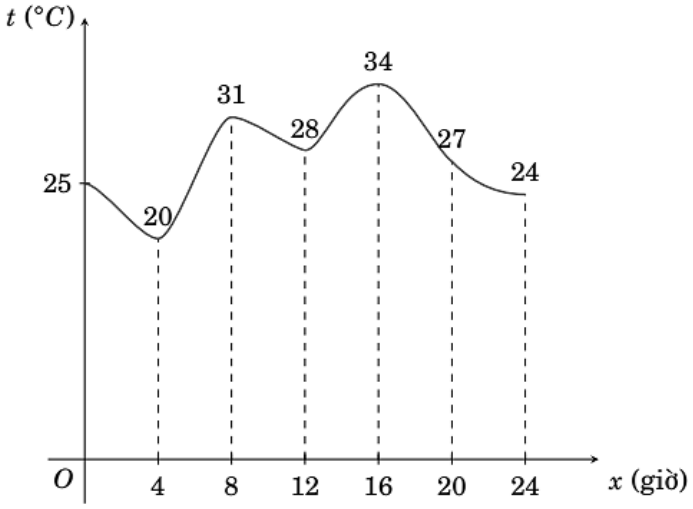
a) Sai: Hàm số có ba điểm cực trị

b) Sai: Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(4;+\infty)$

c) Đúng: $f(1)>f(2)>f(4)$

d) Đúng: Trên đoạn $[1;4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(1)$

Câu 8: Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày



a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là $28°C$

b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là $20°C$

c) Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ

d) Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ

Lời giải

a) Sai: Nhiệt độ cao nhất trong ngày là $34°C$

b) Đúng: Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là $20°C$

c) Đúng: Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ

d) Đúng: Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=4x^3-9x^2-30x$. Với các số nguyên a,b mà $a<b$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(b)-f(a)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f'(x)=12x^2-18x-30=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$2,5$		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$	
y	$-\infty$	↗	17	↘	-63	↗	$-\dfrac{275}{4}$	↘	-64	↗	$+\infty$

Với các số nguyên a,b mà $a<b$, để $f(b)-f(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $\begin{cases}f(b)<0\\f(a)>0\end{cases}$

$\Rightarrow f(b)=f(2)=-64;\ f(a)=f(-1)=17$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(b)-f(a)$ bằng -81.

Câu 2: Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3x-2\cos^2x+3\sin x+6$ trên $[0;\pi]$ lần lượt là M,m. Tính tổng $M+m$.

Lời giải

Ta có $y=\sin^3x-2(1-\sin^2x)+3\sin x+6\Rightarrow y=\sin^3x+2\sin^2x+3\sin x+4$.

Đặt $t=\sin x$. Do $x\in[0;\pi]$ nên $t\in[0;1]$. Khi đó bài toán đã cho trở thành tính tổng của giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f(t)=t^3+2t^2+3t+4$ trên đoạn $[0;1]$.

Ta có $y'=f'(t)=3t^2+4t+3=3\left(t^2+2.\dfrac{2}{3}t+\dfrac{4}{9}\right)+\dfrac{15}{9}>0,\ \forall t\in[0;1]$.

Suy ra hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Khi đó: $M=\max\limits_{[0;1]}f(t)=f(1)=10;\ m=\min\limits_{[0;1]}f(t)=f(0)=4$. Vậy $M+m=14$.

Câu 3: Cho hàm số $y=e^x(x^2-3)$, gọi $M=\dfrac{a}{e^b}(a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N})$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5;-2]$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$?

Lời giải

Ta có: $y'=e^x(x^2+2x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\in[-5;-2]\\x=1\notin[-5;-2]\end{array}\right.$

Ta có $y(-5)=\frac{22}{e^5}; y(-3)=\frac{6}{e^3}; y(-2)=\frac{1}{e^2}$. Khi đó $\max\limits_{[-5;-2]} y=\frac{6}{e^3}\Rightarrow a=6; b=3\Rightarrow a+b=9$.

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\frac{16}{x}$ trên đoạn $[1;4]$

Lời giải

Ta có: $y=x^2+\frac{16}{x}\Rightarrow y'=2x-\frac{16}{x^2}=0\Rightarrow 2x-\frac{16}{x^2}=0\Rightarrow 2x^3-16=0\Rightarrow x=2\in[1;4]$

Khi đó: $y(1)=17; y(2)=12; y(4)=20.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\frac{16}{x}$ trên đoạn $[1;4]$ bằng 12.

Câu 5: Cho hàm số $y=x+\frac{1}{x+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;2]$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Ta có: $y=x+\frac{1}{x+2}\Rightarrow y'=\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=0\Rightarrow x^2+4x+3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\end{array}\right.$.

Khi đó: $y(-1)=0$ và $y(2)=\frac{9}{4}$.

Do đó: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;2]$ là $y(-1)=0$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;2]$ là $y(2)=\frac{9}{4}$.

Câu 6: Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t)=1000+30t^2-t^3(0\le t\le 30)$. Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

Lời giải

Xét hàm số $N(t)=1000+30t^2-t^3(0\le t\le 30)$.

Ta có: $N'(t)=60t-3t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=20\end{array}\right.$

t	0		20		30
N'		+	0	−	
N		↗	5000	↘	

Với $t=20$ giây thì số vi khuẩn lớn nhất.

----------HẾT----------

Dạng 2: Bài toán tìm max, min của hàm số có chứa tham số

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để

a) Hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0,2)$

b) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ trên $[0;2]$ bằng 8

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2-1-m^2$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng -1

d) Hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-1}{x+2m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ bằng $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

a) Hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0,2)$

Điều kiện xác định $x\neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ nên $-m\notin[0;2]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-m<0\\-m>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0\\m<-2\end{array}\right.(*)$

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}=\dfrac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-m+1\\x_2=-m-1\end{array}\right.$

Vì $x_1-x_2=2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0,2)$.

Ta thấy: $-m+1>-m-1,\forall m$ do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0,2)$ thì $0<-m+1<2\Leftrightarrow -1<m<1(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $0<m<1$.

b) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ trên $[0;2]$ bằng 8

Ta có $y(0)=-\dfrac{m}{2};y(2)=\dfrac{2-m}{4}$.

Hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ xác định trên $[0;2]$ và đạt các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tại hai đầu mút.

Do đó $\underset{[0;2]}{max}\,y+\underset{[0;2]}{min}\,y=-\dfrac{m}{2}+\dfrac{2-m}{4}=\dfrac{-3m+2}{4}$.

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{-3m+2}{4}=8\Leftrightarrow -3m+2=32\Leftrightarrow m=-10$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2-1-m^2$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng -1

Ta có $y'=-3x^2+6x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ \ (\text{nhan})\\x=2\ \ (\text{loai})\end{array}\right.$.

Khi đó $f(-2)=19-m^2$; $f(0)=-1-m^2$ và $f(1)=1-m^2$.

Do đó $\min\limits_{[-2;1]} f(x) = f(0) = -1-m^2$ suy ra $-1-m^2 = -1 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

d) Hàm số $y = \dfrac{mx - m^2 - 1}{x + 2m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ bằng $\dfrac{1}{5}$.

Ta có $y' = \dfrac{3m^2 + 1}{(x+2m)^2} > 0, \forall x \neq -2m$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $[1;3]$ khi $\begin{cases} -2m \notin [1;3] \\ y(3) = \dfrac{-m^2 + 3m - 1}{2m + 3} = \dfrac{1}{5} \ (*) \end{cases}$

Giải $(*)$: $\dfrac{-m^2 + 3m - 1}{2m + 3} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow -5m^2 + 15m - 5 = 2m + 3 \Leftrightarrow -5m^2 + 13m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \ (tm) \\ m = \dfrac{8}{5} \ (tm) \end{array}\right.$

Bài tập 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$ trên $[-1;1]$ bằng 0

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x + 5m}{x - 3}$ trên $[1;2]$ bằng 4

Lời giải

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$ trên $[-1;1]$ bằng 0

Hàm số liên tục và xác định trên $[-1;1]$ và có đạo hàm

$f'(x) = -3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$

Xét $f(-1) = -2 + m;\ f(1) = -4 + m$ suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = -2 + m$

Theo đề bài $-2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x + 5m}{x - 3}$ trên $[1;2]$ bằng 4 có đạo hàm $y' = \dfrac{-3 - 5m}{(x-3)^2}$

Trường hợp 1: $-3 - 5m > 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{3}{5}$

Suy ra $y' > 0$ thì $\min\limits_{[1;2]} y = y(1) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}(1 + 5m) = 4 \Leftrightarrow m = -\dfrac{9}{5}$ (nhận)

Trường hợp 2: $-3 - 5m < 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{3}{5}$

Suy ra $y' < 0$ thì $\min\limits_{[1;4]} y = y(2) \Leftrightarrow -2 + 5m = 4 \Leftrightarrow m = -\dfrac{6}{5}$ (loại)

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+m}{x-3}$ (với m là tham số). Giá trị của m để $\max\limits_{[-1;2]} f(x)+\min\limits_{[-1;2]} f(x)=8$ là

A. $m=\dfrac{4}{5}$. **B.** $m=-\dfrac{46}{5}$. **C.** $m=-12$. **D.** $m=\dfrac{18}{5}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=\dfrac{-6-m}{(x-3)^2}$.

Nếu $m=-6\Rightarrow y=2$ (loại).

Nếu $m\neq -6$ khi đó $y'<0,\forall x\in[-1;2]$ hoặc $y'>0,\forall x\in[-1;2]$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất tại $x=1,x=2$.

Theo bài ra ta có:

$$\max_{[-1;2]} f(x)+\min_{[-1;2]} f(x)=8\Leftrightarrow f(-1)+f(2)=8\Leftrightarrow \frac{-2+m}{-4}+\frac{4+m}{-1}=8\Leftrightarrow m=-\frac{46}{5}$$

Câu 2: Cho hàm số $y=x+\cos^2 x+m$ (m là tham số). Với giá trị nào của tham số m thì $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y=4$

A. $m=3$. **B.** $m=\dfrac{3}{4}$. **C.** $m=\dfrac{5}{2}$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Ta có: $y'=1-2\sin x.\cos x=1-\sin 2x\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=x+\cos^2 x+m$

Do đó $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y=y(0)=1+m=4\Leftrightarrow m=3$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+m$. Biết $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x)=5$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $(0;+\infty)$ là

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=1$. **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=2$. **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=3$. **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=-1$.

Lời giải

Xét trên khoảng $(-\infty;0)$ có $f'(x)=3x^2-3\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-1$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$m+2$	↘	m

Khi đó ta có $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x)=5 \Leftrightarrow m+2=5 \Leftrightarrow m=3 \Rightarrow f(x)=x^3-3x+3$.

Xét trên khoảng $(0;+\infty)$. Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=1$.

Câu 4: Cho hàm số $y=(x+m)^3-3(x+m)+1+n$. Biết hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;1]$ bằng 4. Tính $m+n$

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=2$. **C.** $m+n=-1$. **D.** $m+n=1$.

Lời giải

Ta có: $y'=3(x+m)^2-3=3(x+m+1)(x+m-1)$

Giải phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-m=x_2 \\ x=-1-m=x_1 \end{array}\right.$

Để hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ thì $x_1 \le 0 < 2 \le x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3.y'(0)\le 0 \\ 3.y'(2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(0)\le 0 \\ y'(2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2-3\le 0 \\ 3(2+m)^2-3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1\le 0 \\ (2+m)^2-1\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\le m\le 1 \\ -1\le 2+m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le m\le 1 \\ -3\le m\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1 \quad (1)$$

Với $m=-1$ thì $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;1] \\ x=2\notin[-1;1] \end{array}\right.$

Ta có $y(0)=n+3,\ y(1)=n+1,\ y(-1)=n-1 \Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} y=n+3=4 \Rightarrow n=1 \quad (2)$

Từ (1) vào $(2) \Rightarrow m+n=0$.

Câu 5: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ là $3\sqrt{2}$. Giá trị của m là

A. $m=2\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$. **C.** $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m=\sqrt{2}$.

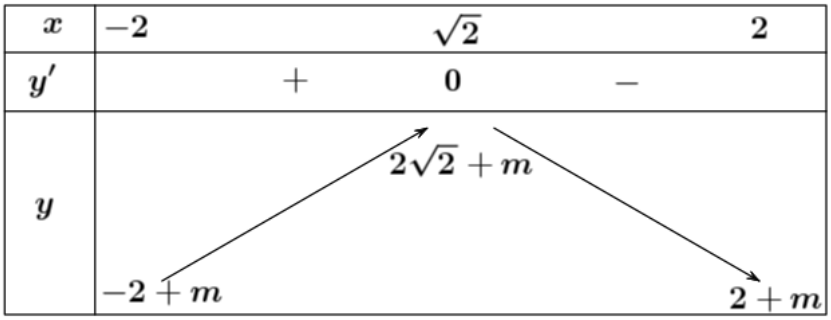
Lời giải

Điều kiện xác định: $-2\le x\le 2$.

Ta có: $y=x+\sqrt{4-x^2}+m \Rightarrow y'=1+\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là $3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}+m=3\sqrt{2} \Leftrightarrow m=\sqrt{2}$.

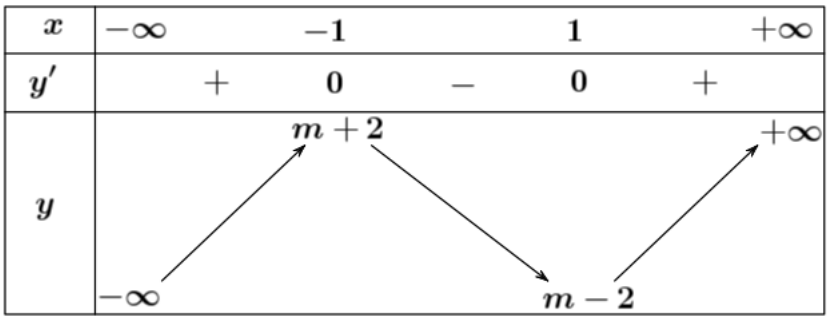
Câu 6: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+m$ (với m là tham số thực). Biết $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x)=5$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $(0;+\infty)$ là

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=1$. **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=2$. **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=3$. **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=-1$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=3x^2-3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Vậy $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x)=f(-1) \Rightarrow f(-1)=5 \Leftrightarrow m+2=5 \Leftrightarrow m=3$.

$\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)=m-2=3-2=1$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Gọi m_0 là giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0<-1$. **B.** $m_0>4$. **C.** $1\le m_0<3$. **D.** $3<m_0\le 4$.

Lời giải

Ta có: $y'=\dfrac{-m-1}{(x-1)^2}$. Với $x\neq 1$.

Nếu $-m-1>0 \Leftrightarrow m<-1$

$\Rightarrow y'>0 \Rightarrow$ hàm số đã cho đồng biến trên $[2;4] \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y=y(2)=m+2$.

Theo giả thiết: $m+2=3 \Leftrightarrow m=1$ (loại).

Nếu $-m-1<0 \Leftrightarrow m>-1$

$\Rightarrow y' < 0 \Rightarrow$ hàm số đã cho nghịch biến trên $[2;4] \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = y(4) = \dfrac{4+m}{3}$.

Theo giả thiết: $\dfrac{m+4}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$. Vậy $m_0 = 5$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = 10^x + x$ và hàm số $g(x) = x^3 - mx^2 + (m^2+1)x - 2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $g(x + f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của tham số m bằng

A. $\dfrac{21}{2}$. **B.** 6. **C.** 21. **D.** 5.

Lời giải

Đặt $t = x + f(x)$ vì $x \in [0;1] \Rightarrow t \in [1;12]$.

Xét $g(t) = t^3 - mt^2 + (m^2+1)t - 2$ trên $[1;12]$

$\Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 2mt + m^2 + 1$ có $\Delta' = m^2 - 3(m^2+1) = -2m^2 - 3 < 0 \ \forall m$.

$\Rightarrow g'(t) > 0 \forall t \in [1;12] \Rightarrow y = g(t)$ đồng biến trên $[1;12]$.

Vậy $M = \max\limits_{t\in[1;12]} g(t) = g(12) = 12m^2 - 144m + 1738 \Rightarrow M$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = \dfrac{144}{2.12} = 6$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 1.

A. $m = 20$. **B.** $m = 19$. **C.** $m = 18$. **D.** $m = 21$.

Lời giải

Hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ và $y' = -3x^2 - 6x$

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;2] \\ x = -2 \notin [-1;2] \end{array}\right.$

$y(-1) = m - 2; y(0) = m; \ y(2) = m - 20$

Suy ra: $\min\limits_{x\in[-1;2]} y = 1 \Leftrightarrow m - 20 = 1 \Leftrightarrow m = 21$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x - m^2}{x + 8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng $-\dfrac{9}{2}$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Hàm số $y = \dfrac{x - m^2}{x + 8}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$ nên hàm số xác định và liên tục trên đoạn

$[0;3]$.

Ta có $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0,\forall m\in\mathbb{R},x\neq -8$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $[0;3]$.

Suy ra $\underset{[0;3]}{\text{Min}}\, y=y(0)=-\dfrac{m^2}{8}$. Từ giả thiết suy ra $-\dfrac{m^2}{8}=-\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow m^2=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\m=-6\end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11: Cho hàm số $y=\left(x^3-3x-m+1\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4 là

A. -2. **B.** 2. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $t=g(x)=x^3-3x+1$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $x\in[-1;1]$ thì $t\in[-3;1]$

Bài toán trở thành: Tìm m để hàm số $y=f(t)=(t-m)^2$ có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-3;1]$ bằng 4.

Ta có $f'(t)=2(t-m)=0\Leftrightarrow t=m$.

Nếu $m\in[-3;1]$ thì $\min\limits_{[-3;1]} f(t)=f(m)=0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m>1$ thì $\min\limits_{[-3;1]} f(t)=f(1)=(1-m)^2$

$\Leftrightarrow(1-m)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\ (ktm)\\m=3\ (tm)\end{array}\right.$

Nếu $m<-3$ thì $\min\limits_{[-3;1]} f(t)=f(-3)=(-3-m)^2$

$\Leftrightarrow (-3-m)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-5 \ (tm) \\ m=-1 \ (ktm) \end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m=3; m=-5$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của m là -2.

Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x-8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng m. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(20;25)$. **B.** $(6;9)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(2;5)$.

Lời giải

Ta có : $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0, \forall x \neq -8$

Do đó $\min\limits_{[0;3]} y = y(0) = \dfrac{-m^2}{8}$. Theo giả thiết $\min\limits_{[0;3]} y = -3 \Rightarrow \dfrac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+4}$. Gọi m_0 là giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;6]$ bằng -4. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in (5;7)$. **B.** $m_0 \in (1;3)$. **C.** $m_0 \in (7;9)$. **D.** $m_0 \in (3;5)$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+4} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{m^2+4}{(x+4)^2}>0, \forall m$. Hàm số đồng biến trên $[0;6]$.

Suy ra: $\min\limits_{[0;6]} f(x) = f(0) = -\dfrac{m^2}{4} = -4 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4$ suy ra $m=4$.

Câu 14: Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$, với m là tham số. Gọi S là tập các giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;4]$ bằng -1. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -6. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -3.

Lời giải

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-m+2}{(x+m)^2}>0, \forall x \neq m$.

Suy ra $\max\limits_{[0;4]} y = -1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y(4)=-1 \\ m \notin [0;4] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2+m-6=0 \\ \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m=-3.$

Khi đó $S=\{-3\}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng -3.

Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+1}$ với m là số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;2]$ bằng 6.

A. $m=4$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng 6 khi:

$$y(0)+y(2)=6\Leftrightarrow -m+\frac{2-m}{3}=6\Leftrightarrow m=-4.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

b) Khi $m=1$ thì hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

c) Khi $m=1$ thì trên đoạn $[1;4]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{2}$

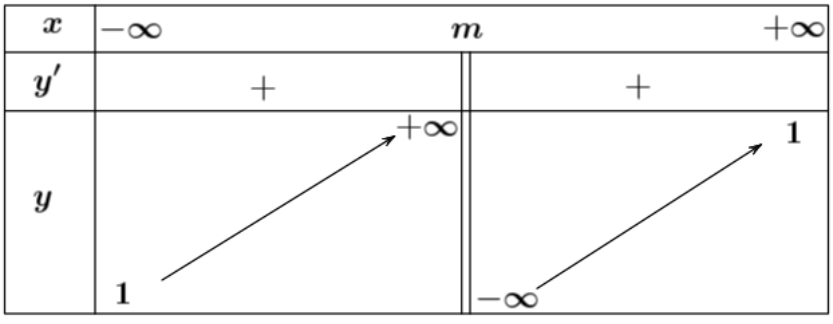
d) Có duy nhất 1 giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

Lời giải

a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

b) Đúng: Khi $m=1$ thì hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Ta có $y'=\dfrac{m^2-m+2}{(x-m)^2}>0,\forall m$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$



c) Sai: Khi $m=1$ thì trên đoạn $[1;4]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{2}$

d) Đúng: Có duy nhất 1 giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

Từ bảng biến thiên, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng -1 khi $\begin{cases}m<0\\ f(4)=-1\end{cases}$

$$\begin{cases}m<0\\ \dfrac{2-m^2}{4-m}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m^2+m-6=0\end{cases}\Leftrightarrow m=-3$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, với m là tham số

a) Khi $m=0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$

b) Khi $m=0$ thì hàm số có hai điểm cực trị

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng $m-2$

d) Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Khi đó S có một phần tử

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$ có đạo hàm $f'(x)=3x^2-3$. Bảng biến thiên như sau:

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	↘	$-2+m$	↗	$2+m$

Trường hợp 1: $2+m<0\Leftrightarrow m<-2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3\Leftrightarrow m=-1$ (loại)

Trường hợp 2: $\begin{cases}2+m>0\\ m<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<0$.

Khi đó $|m-2|=2-m>2>2+m\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-(-2+m)=2-m=3\Leftrightarrow m=-1$ (thoả mãn)

Trường hợp 3: $\begin{cases}-2+m<0\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<2$.

Khi đó $|m-2|=2-m<2<2+m\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=2+m=3\Leftrightarrow m=1$ (thoả mãn)

Trường hợp 4 : $-2+m>0\Leftrightarrow m>2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=2+m=3\Leftrightarrow m=1$ (loại)

a) Sai: Khi $m=0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$

b) Đúng: Khi $m=0$ thì hàm số có hai điểm cực trị

c) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng $m-2$

d) Sai: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Khi đó S có hai phần tử

Câu 3: Cho hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$, với m là tham số

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[0;3]$ khi $m\le 0$

b) Khi $m\le 0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ là $3m+9$

c) Khi $\frac{9}{4} \le m \le 36$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ là $-m+12\sqrt{m}$

d) Có đúng một giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20.

Lời giải

Ta có $y' = m - \frac{36}{(x+1)^2}$.

Với $m \le 0$, hàm số nghịch biến trên $[0;3]$ nên $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) = 3m+9$

Suy ra $3m+9 = 20 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3}$ (không thỏa mãn)

Với $m > 0$, ta có: $y' = \frac{m(x+1)^2 - 36}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x+1 = \pm\frac{6}{\sqrt{m}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \frac{6}{\sqrt{m}} \\ x = -1 - \frac{6}{\sqrt{m}} (loai) \end{array}\right.$

Khi $0 \le -1 + \frac{6}{\sqrt{m}} \le 3 \Leftrightarrow \frac{9}{4} \le m \le 36$, ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	0		$-1+\frac{6}{\sqrt{m}}$		3
y'		$-$	0	$+$	
y	36	↘	$-m+12\sqrt{m}$	↗	$3m+9$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y\left(-1+\frac{6}{\sqrt{m}}\right) = -m+12\sqrt{m} = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 100 (loai) \end{array}\right.$.

Khi $-1 + \frac{6}{\sqrt{m}} > 3 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$, ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	0		3
y'		$-$	
y	36	↘	$3m+9$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) = 3m+9 = 20 \Leftrightarrow m = \frac{11}{9}$ (loại).

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng 20 khi $m = 4$.

a) Đúng: Hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[0;3]$ khi $m \le 0$

b) Đúng: Khi $m \le 0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ là $3m+9$

c) Đúng: Khi $\frac{9}{4} \le m \le 36$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ là $-m+12\sqrt{m}$

d) Sai: Có đúng một giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20.

Câu 4: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x + m}$, với m là tham số thực dương

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

b) Trên đoạn $[2;4]$ thì đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị dương

c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;4]$ là $\min\limits_{[2;4]} y = y(2)$

d) Chỉ có duy nhất một giá trị của tham số m để $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{9}{5}$

Lời giải

a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

b) Đúng: Trên đoạn $[2;4]$ thì đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị dương

Với $m > 0$ ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 + 1}{(x+m)^2} > 0, \forall x \in [2;4]$

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y = y(2) = \dfrac{2m+3}{m+2} = \dfrac{9}{5} \Leftrightarrow m = 3$

c) Sai: Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;4]$ là $\min\limits_{[2;4]} y = y(4)$

d) Đúng: Chỉ có duy nhất một giá trị của tham số m để $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{9}{5}$ là $m = 3$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = ax^3 - 4(a+2)x + 1$ với a là tham số. Nếu $\max\limits_{(-\infty;0]} f(x) = f(-2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = 3ax^2 - 4(a+2)$

Khi đó: $\max\limits_{(-\infty;0]} f(x) = f(-2) \Rightarrow f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a - 4(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Suy ra $f(x) = x^3 - 12x + 1$; $f'(x) = 3x^2 - 12$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2)$	↘	1	↘	-13	↗	$+\infty$

Vậy với $a = 1$ thì hàm số đạt $\max\limits_{(-\infty;0]} f(x) = f(-2)$ và khi đó $\max\limits_{[0;3]} f(x) = 1$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x^3+(1+m^2)x+1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ không vượt quá 7. Số phần tử nguyên của S là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f(x)=x^3+(1+m^2)x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+1+m^2>0,\ x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $[0;1]$

$\max\limits_{[0;1]} f(x)=f(1)=m^2+3$. Yêu cầu bài toán tương đương $m^2+3\le 7 \Leftrightarrow -2\le m\le 2.$

Vậy $S=\{-2,-1,0,1,2\}$ hay S có 5 phần tử.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y=f(x)=|4x-m|-x^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5?

Lời giải

Hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 thì $|4x-m|-x^2\le 5 \Leftrightarrow |4x-m|\le x^2+5,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-m\le x^2+5,\ \forall x\in\mathbb{R} \\ 4x-m\ge -x^2-5,\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -x^2+4x-5,\ \forall x\in\mathbb{R} \\ m\le x^2+4x+5,\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -1 \\ m\le 1 \end{cases}.$$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ bằng $5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\{-1;1\}$.

Vậy có 2 giá trị m cần tìm.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+4}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;8]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\dfrac{8-m}{\left(\sqrt{x+1}+4\right)^2}$.

Trường hợp 1: Nếu $m<8 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(-1;8)$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;8]} f(x)=f(8)=\dfrac{6+m}{7}<3 \Leftrightarrow m<15$ mà $m<8; m\in\mathbb{N}^* \Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Trường hợp 2: Nếu $m>8 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-1;8)$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;8]} f(x)=f(-1)=\dfrac{m}{4}<3 \Leftrightarrow m<12$ mà $m>8; m\in\mathbb{N}^* \Rightarrow m\in\{9;10;11\}$.

Trường hợp 3: Nếu $m=8 \Rightarrow f(x)=2 \Rightarrow \max\limits_{[-1;8]} f(x)=2<3$ (thỏa mãn) $\Rightarrow m=8$ thỏa mãn.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\}$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x-m}{x+1}$. Tìm m để $\max\limits_{[1;2]} f(x)+\min\limits_{[1;2]} f(x)=-8$.

Lời giải

Đạo hàm: $y'=\dfrac{1+m}{(x+1)^2}$.

Do hàm số $y=f(x)=\dfrac{x-m}{x+1}$ chỉ đồng biến hoặc nghịch biến trên $[1;2]$ khi $m\neq -1$.

Do đó $\max\limits_{[1;2]} f(x)+\min\limits_{[1;2]} f(x)=-8$

$\Leftrightarrow y(1)+y(2)=-8\Leftrightarrow \dfrac{1-m}{2}+\dfrac{2-m}{3}=-8\Leftrightarrow 3(1-m)+2(2-m)=-48\Leftrightarrow m=11$

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2020;2020]$ để biểu thức $y=4x^2\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^2}+4mx^3-3mx+m^2$ có giá trị lớn nhất không nhỏ hơn 5?

Lời giải

Điều kiện $1-x^2\geq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$.

Ta có $y=-4(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+3\sqrt{1-x^2}+m(4x^3-3x)+m^2$.

Đặt $x=\cos t; t\in[0;\pi]\Rightarrow \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=|\sin t|=\sin t$.

Biểu thức y có dạng

$g(t)=3\sin t-4\sin^3 t+m(4\cos^3 t-3\cos t)+m^2=\sin 3t+m\cos 3t+m^2\leq \sqrt{1+m^2}+m^2$.

Giá trị lớn nhất của y là $M=\sqrt{1+m^2}+m^2\geq 5\Leftrightarrow m^2+1+\sqrt{1+m^2}-6\geq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{1+m^2}\geq 2\\ \sqrt{1+m^2}\leq -3\end{array}\right.\Leftrightarrow m^2\geq 3\Leftrightarrow |m|\geq\sqrt{3}$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ nên $m\in\{\pm 2;\pm 3;\pm 4;...;\pm 2020\}$.

Vậy có 4038 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{3-m\sqrt{3}.\cos x}{\sin x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2025;2025]$ để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn 4 ?

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $\forall x\in\mathbb{R}$ do $\sin x+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $y=\dfrac{3-m\sqrt{3}.\cos x}{\sin x+2}\Leftrightarrow y\sin x+2y=3-m\sqrt{3}.\cos x\Leftrightarrow y\sin x+m\sqrt{3}\cos x=3-2y$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $y^2+\left(m\sqrt{3}\right)^2\ge(3-2y)^2$

$\Leftrightarrow y^2-4y+3-m^2\le 0\Leftrightarrow\left(y-2\right)^2\le m^2+1\Leftrightarrow\left|y-2\right|\le\sqrt{m^2+1}$

$\Leftrightarrow-\sqrt{m^2+1}\le y-2\le\sqrt{m^2+1}\Leftrightarrow 2-\sqrt{m^2+1}\le y\le 2+\sqrt{m^2+1}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng $2+\sqrt{m^2+1}$.

Ta có $2+\sqrt{m^2+1}>4\Leftrightarrow\sqrt{m^2+1}>2\Leftrightarrow m^2-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\sqrt{3}\\m>\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $\left[-2022;2022\right]$

nên $m\in\left\{-2025;-2021;...;-3;-2;2;3;4;...;2025\right\}$.

Vậy có 4048 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-2}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[-2;0]}y=\dfrac{-1}{3}$. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán?

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{m^2-m+2}{\left(x-1\right)^2}>0$ với $\forall x\in\left[-2;0\right]$

$\Rightarrow$hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-2}{-x+1}$ đồng biến trên $\left[-2;0\right]\Rightarrow\max\limits_{[-2;0]}y=y\left(0\right)=m^2+2$.

Theo đề bài ta có $\Rightarrow m^2+2=3\Rightarrow m=\pm1$ mà $m>0$ nên ta nhận giá trị $m=1$.

Vậy có 1 giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

----------HẾT----------

Dạng 3: Bài toán tối ưu, thực tế liên quan đến max min

- **Bài toán chuyển động**
  - Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc
  - Khi đó $s'(t)=v(t);\ v'(t)=a(t)$
- **Bài toán thực tế - tối ưu**
  - Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$
  - Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t)=-t^4+24t^2+500$ (m/s). Trong khoảng thời gian từ $t=0$ (s) đến $t=5$ (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

Lời giải

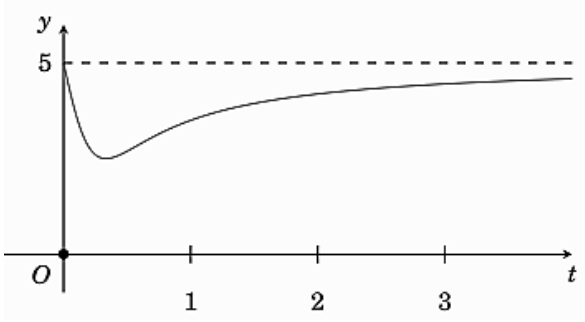
Ta có $v'(t)=-4t^3+48t=-4t\left(t^2-12\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=\pm2\sqrt{3}\end{array}\right.$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;5]$ ta có:

$v(0)=500;\ v\left(2\sqrt{3}\right)=664;\ v(5)=475$

Vậy vận tốc lớn nhất khi $t=2\sqrt{3}\approx4$ giây.

Bài tập 2: Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t\geq0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số có đồ thị là đường cong $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$ như hình bên.Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?



Lời giải

Xét hàm số $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$ trên $[0;+\infty)$ có $y'(t)=\dfrac{135t^2-15}{\left(9t^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$

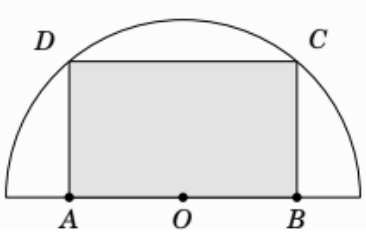
Mặt khác: $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[5-\dfrac{15t}{9t^2+1}\right]=5$ và $\lim\limits_{t\to0}y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[5-\dfrac{15t}{9t^2+1}\right]=5$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	
$y(t)$	5	↘	0	↗	5

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[0;+\infty)}y(t)=0$ và $\max\limits_{[0;+\infty)}y(t)=5$

Bài tập 3: Tính diện tích lớn nhất S_{max} của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R=6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Lời giải

Gọi chiều dài $AD=2x$ với $0<x<6 \Rightarrow AB=\sqrt{36-x^2}$

Diện tích hình chữ nhật là $S=2x.\sqrt{36-x^2}$ và xét hàm số $f(x)=2x\sqrt{36-x^2}$ trên $(0;6)$

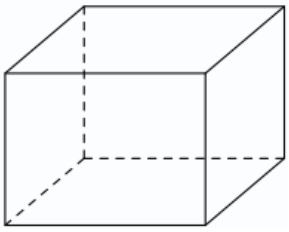
Ta có: $f'(x)=\sqrt{36-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{36-x^2}}=0 \Leftrightarrow x=\pm 3\sqrt{2}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0		$3\sqrt{2}$		6
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$		↗	36	↘	
	0				0

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật đạt được là $36\,\text{cm}^2$.

Bài tập 4: Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288\,\text{dm}^3$ dm3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?



Lời giải

Gọi $x(x>0)$ là chiều rộng của đáy bể. Khi đó chiều dài của đáy bể là $2x$ là chiều cao của bể là $\dfrac{0,144}{x^2}$. Khi đó diện tích cần xây là $2x^2+\dfrac{0,864}{x}$

Xét hàm số $f(x)=2x^2+\dfrac{0,864}{x}$ có $f'(x)=4x-\dfrac{0,864}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=0,6$

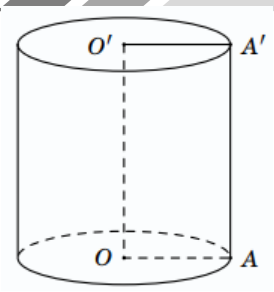
Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0		$0,6$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2,16$	↗	$+\infty$

Từ bảng biên thiên ta có $\min f(x)=f(0,6)=2,16$

Vậy chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây bể là: $500000.2,16=1080000$ đồng.

Bài tập 5: Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích $1000\,\text{cm}^3$. Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/cm^2, trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/cm^2. Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.



Lời giải

Gọi bán kính của đáy bình là $x(\text{cm}),\ x>0$ suy ra chiều cao là $\dfrac{100}{\pi.x^2}(\text{cm})$

Chi phí để sản xuất một chiếc bình là: $T(x)=2.1,2.\pi.x^2+0,75.\dfrac{2000}{x}=2,4\pi x^2+\dfrac{1500}{x}$ nghìn

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là thấp nhất thì $T(x)$ là nhỏ nhất

Xét hàm số $T(x)$ có $T'(x)=4,8\pi x-\dfrac{1500}{x^2}=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{625}{2\pi}}$ (thoả mãn)

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$		12
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$	$+\infty$	↘	$T\left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)$	↗	$T(12)$

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất thì bán kính đáy của bình là $\sqrt[3]{\dfrac{625}{2\pi}}\,\text{cm}$ và chiều cao của bình là $\dfrac{100}{\pi.\left(\sqrt[3]{\dfrac{625}{2\pi}}\right)^2}(\text{cm})$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t)=6t^2-t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

A. $t=3$ s. **B.** $t=4$ s. **C.** $t=2$ s. **D.** $t=6$ s.

Lời giải

Ta có $v(t)=s'(t)=12t-3t^2$; $v'(t)=12-6t=0\Leftrightarrow t=2$

Lập bảng biến thiên ta thấy $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t=2$ giây.

Câu 2: Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=-t^3+6t^2+t+5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

A. 13 m/s. **B.** 10 m/s. **C.** 9 m/s. **D.** 12 m/s.

Lời giải

Ta có $v(t)=s'(t)=-3t^2+12t+1$. Xét hàm số $v(t)=-3t^2+12t+1$ trên đoạn $[0;5]$

$v'(t)=-6t+12=0\Leftrightarrow t=2$

Tính các giá trị $v(0)=1; v(2)=13; v(3)=10$

So sánh các giá trị ta suy ra $\max\limits_{[0;3]} v(t)=13$.

Câu 3: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,025x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là bao nhiêu để huyết áp được giảm nhanh nhất?

A. 24 mg. **B.** 20 mg. **C.** 15 mg. **D.** 10 mg.

Lời giải

Bài toán trở thành tìm $x\in[0;30]$ để hàm số $G(x)=0,025x^2(30-x)$ đạt giá trị lớn nhất

Ta có: $G(x)=0,025x^2(30-x)\Rightarrow G'(x)=0,025(60x-3x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=25\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		20		30
$G'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$G(x)$	0	↗	100	↘	0

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{[0;30]} G(x)=G(20)=100$

Vậy liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhanh nhất là 20 mg.

Câu 4: Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$$N(t)=1000+\frac{100}{100+t^2}\ (\text{con})$$

Trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

A. 1008 con. **B.** 1012 con. **C.** 1005 con. **D.** 1020 con.

Lời giải

Xét hàm số $N(t)=1000+\frac{100}{100+t^2}$ có $N'(t)=\frac{100.(100+t^2)-100t.2t}{(100+t^2)^2}=\frac{100(100-t^2)}{(100+t^2)^2}$

Khi đó với $t>0$ $N'(t)=0\Leftrightarrow 100-t^2=0\Leftrightarrow t=10$

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:

t	0		10		$+\infty$
$N'(t)$		+	0	−	
$N(t)$	1000	↗	1005	↘	1000

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t=10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện nuôi cấy vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

Câu 5: Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 25 cm^2. **B.** $\frac{125}{4}$ cm^2. **C.** $\frac{625}{4}$ cm^2. **D.** 125 cm^2.

Lời giải

Gọi một cạnh góc vuông là x $(0<x<5)$ thì cạnh góc vuông còn lại là $\sqrt{25-x^2}$

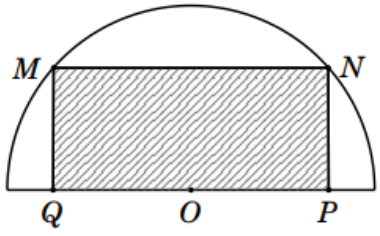
Như vậy, diện tích $S=\frac{x\sqrt{25-x^2}}{2}$. Đặt $f(x)=25x^2-x^4$

Ta có $f'(x)=50x-4x^3$. Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Vì vậy $\max\limits_{(0;5)} f(x)=f\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{625}{4}$

Vậy tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng $\frac{625}{4}$ cm^2.

Câu 6: Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R=3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là



A. $\frac{9}{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 9. **D.** $9\sqrt{2}$.

Lời giải

Đặt $OQ = x$, $(0 < x < 3) \Rightarrow MQ = \sqrt{MO^2 - OQ^2} = \sqrt{9 - x^2}$

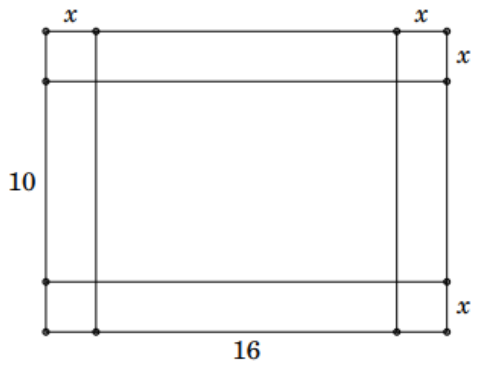
Ta có $S_{MNPQ} = PQ.MQ = 2x.\sqrt{9 - x^2} \le 2.\frac{x^2 + 9 - x^2}{2} = 9$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $10\,\text{cm}$ x $16\,\text{cm}$. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng

A. $3\,\text{m}$. **B.** $4\,\text{m}$. **C.** $5\,\text{m}$. **D.** $2\,\text{m}$.

Lời giải



Giả sử độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng $x, (0 < 2x < 10, 0 < x < 5)$.

Khi đó hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng x, chiều rộng bằng $10 - 2x$ và chiều dài bằng $16 - 2x$

Suy ra hình hộp chữ nhật có thể tích $V = x(10 - 2x)(16 - 2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$

Xét hàm số $f(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$ trên $(0;5)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{20}{3} \end{array}\right.$. Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên $(0;5)$ như sau:

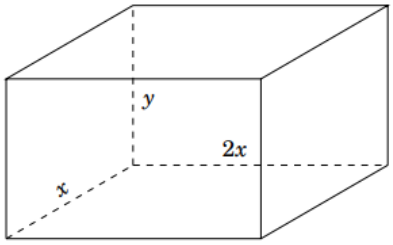
x	0		2		5
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(0;5)$ tại $x = 2$ hay hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất khi độ dài cạnh hình vuông của miếng tôn bị cắt bỏ bằng 2m.

Câu 8: Ông Bình dự định sử dụng hết $5,5\,\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\,\text{m}^3$. **B.** $1,17\,\text{m}^3$. **C.** $1,51\,\text{m}^3$. **D.** $1,40\,\text{m}^3$.

Lời giải



Gọi $x, 2x, y$ với $x, y > 0$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể cá.

Theo giả thiết ta có: $2.2xy + 2.xy + 2x^2 = 5,5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5,5 \Leftrightarrow y = \dfrac{5,5 - 2x^2}{6x}$

Do $y > 0$ nên $5,5 - 2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \dfrac{\sqrt{11}}{2}$

Thể tích bể cá là: $V(x) = 2x^2 y = 2x^2 . \dfrac{5,5 - 2x^2}{6x} = -\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{11}{6}x$

Xét hàm số $V(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{11}{6}x$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)$ có $V'(x) = -2x^2 + \dfrac{11}{6} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{11}{12}}$

Bảng biến thiên:

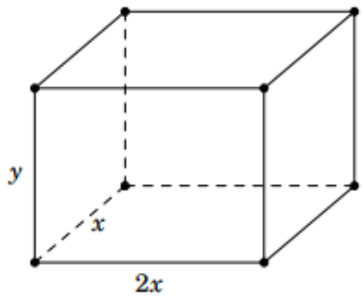
x	0		$\sqrt{\frac{11}{12}}$		$\frac{\sqrt{11}}{2}$
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	y_0	↘	

Thể tích lớn nhất của bể cá là $V\left(\sqrt{\dfrac{11}{12}}\right) = 1,17\text{m}^3$

Câu 9: Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}\text{m}^3$. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 700000 đồng/m^2. Tìm kích thước của bể để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là

A. 120 triệu đồng. **B.** 105 triệu đồng. **C.** 115 triệu đồng. **D.** 110 triệu đồng.

Lời giải



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).

Với giả thiết của bài toán, thể tích bể cá là: $V = 2x^2 y = \dfrac{500}{3} \Rightarrow y = \dfrac{250}{3x^2}$

Để chi phí thuê nhân công ít nhất thì tổng diện tích các mặt của bể cá phải nhỏ nhất.

Tổng diện tích các mặt của bể cá $S = 2xy + 2.2xy + 2x^2 = 6xy + 2x^2 = \dfrac{500}{x} + 2x^2$

Xét hàm số $S(x) = \dfrac{500}{x} + 2x^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$ có $S'(x) = -\dfrac{500}{x^2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$

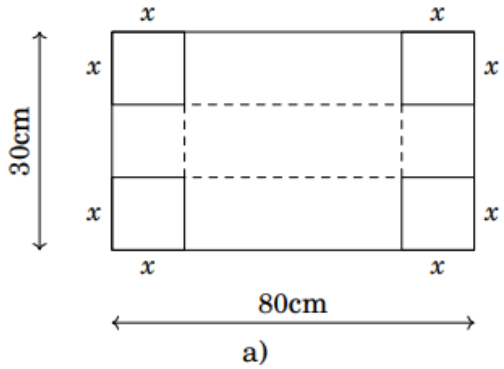
Bảng biến thiên:

x	0		5		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	↘	150	↗	$+\infty$

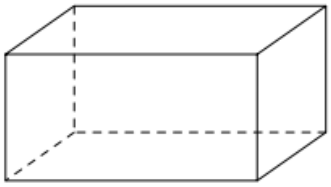
Do đó $\min S = 150$ tại $x = 5$.

Khi đó chi phí thuê nhân công là: $T = 150.700000 = 105$ triệu đồng.

Câu 10: Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng $30\,\text{cm}$ và chiều dài $80\,\text{cm}$ (hình a) người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x(\text{cm})$ với $5 \le x \le 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp (hình b). Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



a)


b)

A. $\dfrac{10}{3}\text{cm}$. **B.** $\dfrac{20}{3}\text{cm}$. **C.** $\dfrac{31}{3}\text{cm}$. **D.** $\dfrac{40}{3}\text{cm}$.

Lời giải

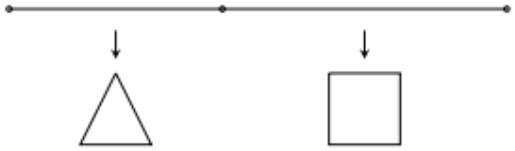
Thể tích chiếc hộp là: $V(x) = x(30-2x)(80-2x) = 2400x - 220x^2 + 4x^3$ với $5 \le x \le 10$

Ta có $V'(x) = 12x^2 - 440x + 2400 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{20}{3} \in [5;10] \\ x = 30 \notin [5;10] \end{array}\right.$

$V(5) = 700; V\left(\dfrac{20}{3}\right) = \dfrac{200000}{27}; V(10) = 6000$

Do đó $\max\limits_{[5;10]} V(x) = \dfrac{200000}{27}$ khi $x = \dfrac{20}{3}$. Vậy để thể tích hộp là lớn nhất khi $x = \dfrac{20}{3}\text{cm}$.

Câu 11: Một sợi dây có chiều dài là $6\,\text{m}$ được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình thu được là nhỏ nhất?



A. $\frac{12}{4+\sqrt{3}}\text{m}$. **B.** $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\text{m}$. **C.** $\frac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\text{m}$. **D.** $\frac{18}{9+4\sqrt{3}}\text{m}$.

Lời giải

Gọi độ dài cạnh hình tam giác đều là $x(\text{m})$. Khi đó độ dài cạnh hình vuông là $\frac{6-3x}{4}$

Tổng diện tích khi đó là: $S=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\left(\frac{6-3x}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\left[\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-36x+36\right]$

Xét hàm số $f(x)=\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-36x+36, x\in(0;6)$

Ta có $f(x)$ là hàm tam thức bậc hai có $-\frac{b}{2a}=\frac{18}{9+4\sqrt{3}}\in(0;6)$ và $a>0$

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-\frac{b}{2a}=\frac{18}{9+4\sqrt{3}}\in(0;6)$

Vậy diện tích nhỏ nhất khi $x=\frac{18}{9+4\sqrt{3}}\text{m}$

Câu 12: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

A. 30 triệu đồng. **B.** $30,5$ triệu đồng. **C.** $29,5$ triệu đồng. **D.** 32 triệu đồng.

Lời giải

Gọi giá bán mới là x (triệu đồng) với $27\le x\le 31$

Khi đó số xe bán ra là $600+(31-x).200$

Lợi nhuận thu được là: $f(x)=\left[600+(31-x).200\right](x-27)=(-200x+6800)(x-27)$

$=-200x^2+12200x-183600=-200\left(x-\frac{61}{2}\right)^2+2450\le 2450$

Dấu "$=$" xảy ta khi $x-\frac{61}{2}=0\Leftrightarrow x=30,5$

Vậy giá bán mới là $30,5$ triệu đồng thì lợi nhuận lớn nhất thu được là 2450 triệu đồng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô . Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t)=300\left(t^2-t^3\right)+4 \text{ với } 0\le t\le 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0\le t\le 0,5$

a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 1 lít.

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $41,5$ lít

c) $V'(t)=300\left(2t-3t^2\right)+4$, với $0\le t\le 0,5$

d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất

Lời giải

a) Sai: Số xăng trong bình ban đầu là $V(0)=4$ lít

b) Đúng: Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $V=V\left(\frac{1}{2}\right)=41,5$ lít

c) Sai: Xét hàm số $V(t)=300\left(t^2-t^3\right)+4$ với $0\le t\le 0,5$

Đạo hàm $V'(t)=300t(2-3t)$

d) Đúng: Cho $V'(t)=0\Leftrightarrow 300t(2-3t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in[0;0,5] \\ t=\frac{2}{3}\in[0;0,5]\end{array}\right.$

Các giá trị $V(0)=4; V\left(\frac{1}{2}\right)=41,5$

Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Câu 2: Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x\left(\text{m}^3\right)$ sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; $0,2$ triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 100m^3 sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất $x\left(\text{m}^3\right)$ sản phẩm trong một ngày và $\overline{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

a) $C=0,2x+0,001x^2$ với $0\le x\le 100$

b) Tổng chi phí sản xuất 100m^3 sản phẩm là 34 triệu đồng

c) $\overline{C}=0,001x+\frac{4}{x}+0,2$ với $0\le x\le 100$

d) $\overline{C}$ có giá trị thấp nhất bằng $0,326$ triệu đồng *(kết quả làm tròn ba chữ số thập phân)*

Lời giải

a) Sai: Tổng chi phí (triệu đồng) để xí nghiệp sản xuất $x\left(\text{m}^3\right)$ sản phẩm trong một ngày là :

$$C=C(x)=4+0,2x+0,001x^2 \text{ với } 0\le x\le 100$$

b) Đúng: Thay $x=100$ vào hàm $C(x)$ ta thu được kết quả là 34 triệu đồng

c) Đúng: Chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm là

$$\overline{C}=\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{4+0,2x+0,001x^2}{x}=0,001x+\frac{4}{x}+0,2 \text{ với } 0\le x\le 100$$

d) Đúng: Ta có $\overline{C}'(x)=0,001-\frac{4}{x^2}=0\Leftrightarrow 0,001-\frac{4}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=4000\Leftrightarrow x=20\sqrt{10}\in(0;100]$

$\overline{C}\left(20\sqrt{10}\right)=\frac{\sqrt{10}}{25}+\frac{1}{5}\approx 0,326$

Bảng biến thiên

x	0		$20\sqrt{10}$		100
$\overline{C}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\overline{C}(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{10}}{25}+\frac{1}{5}$	↗	$0,34$

Từ bảng biến thiên, ta thấy chi phí trung bình thấp nhất là $\overline{C}\left(20\sqrt{10}\right)\approx 0,326$ (triệu đồng/ m^3 sản phẩm), đạt được khi $x=20\sqrt{10}\approx 63\ m^3$.

Câu 3: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho B được biểu diễn bằng công thức $-0,01x^3+15x-100$.

d) A bán cho B khoảng $70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

a) Đúng: Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là $C(10)=10+30.10=400$ triệu.

b) Sai: Số tiền mà A thu được (gọi là doanh thu) từ việc bán x tấn sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho B là: $R(x)=x.P(x)=x\left(45-0,001x^2\right)=45x-0,001x^3$ triệu đồng

Thay $x=10$ ta được $R(10)=449$ triệu đồng

c) Đúng: Lợi nhuận (triệu đồng) mà A thu được là:

$$P(x)=R(x)-C(x)=x\left(45-0,001x^2\right)-(100+30x)=-0,001x^3+15x-100$$

d) Đúng: Xét hàm số $P(x)=-0,001x^3+15x-100$ với $(0\le x\le 100)$ ta có:

$$P'(x)=-0,003x^2+15=0\Leftrightarrow x^2=5000\Leftrightarrow x=50\sqrt{2}\in[0;100]$$

Ta có $P(0)=-100;\ P\left(50\sqrt{2}\right)=500\sqrt{2}-100\approx 607;\ P(100)=400$

Bảng biến thiên

x	0		$50\sqrt{2}$		100
y'		$+$	0	$-$	
y	100	↗	$500\sqrt{2}-100$	↘	400

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{[0;100]} P = P\left(50\sqrt{2}\right) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 667$

Vậy A thu được lợi nhuận lớn nhất khi bán $50\sqrt{2} \approx 70,7$ tấn sản phẩm cho B mỗi tháng và lợi nhuận lớn nhất thu được khoảng 607 triệu đồng.

Câu 4: Khi nuôi tôm trong một hồ tự nhiên, một nhà khoa học đã thống kê được rằng: Nếu trên mỗi mét vuông mặt hồ thả x con tôm giống thì cuối vụ mỗi con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).

a) Điều kiện xác định là $x \geq 0$

b) Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x\left(108 - x^2\right)$

c) Để cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên thì cần thả 16 con tôm giống

d) Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là 432 (gam).

Lời giải

a) Đúng: Điều kiện xác định là $x \geq 0$

b) Đúng: Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x\left(108 - x^2\right)$

c) Sai: Xét hàm số $f(x) = 108x - x^3$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có

$$f'(x) = 108 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 108 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -6 < 0 \end{array}\right.$$

x	0		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(6)$	↘	

Trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $f(x) = 108x - x^3$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 6$.

Vậy nên thả 6 con tôm giống trên mỗi mét vuông mặt hồ thì cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất.

d) Đúng: Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là $f(6) = 108.6 - 6^3 = 432$ (gam).

Câu 5: Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$.Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên $0,5$ kg? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

a) Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.

b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là $1,5$ (kg).

c) Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x) = -0,0652x^2 + 16x + 1500$ (kg)

d) Vụ tới ông Thanh phải thả 488 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Lời giải

a) Sai: Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là $50.20 = 1000$ con.

b) Đúng: Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là: $\frac{1500}{1000} = 1,5$ (kg).

c) Sai: Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: x (com), $(x > 0)$

Theo đề bài cứ giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm $0,5$ (kg/con)

Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm $0,0625x$ (kg/con).

Tổng số lượng cá thu được ở vụ này được tính bằng công thức:

$$F(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500.$$

Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $F'(x) = -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$

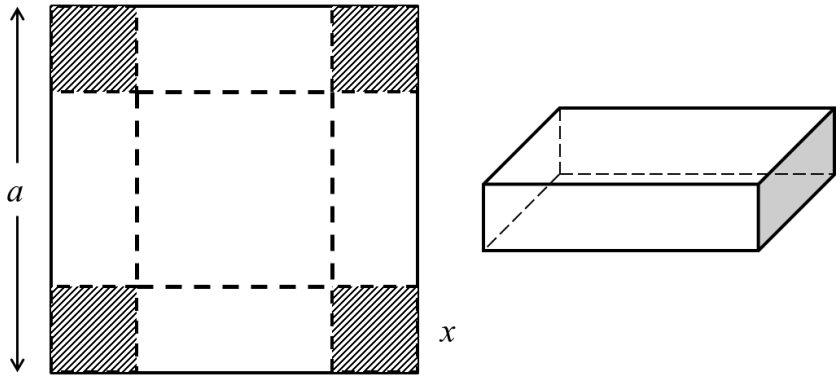
Bảng biến thiên như sau:

x	0		488		1000
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$F(max)$	↘	

Vậy ông thanh phải thả số cá giống trong vụ tới là: $1000 - 488 = 512$ con.

d) Sai: Vụ tới ông Thanh phải thả 512 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Câu 6: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh *a*. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



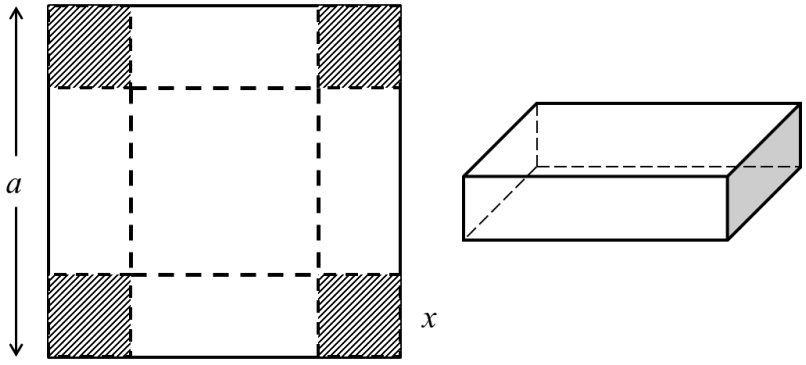
a) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{12}$.

b) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.

c) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.

d) Thể tích hộp lớn nhất bằng $\frac{a^3}{27}$.

Lời giải



Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt $\left(0<x<\frac{a}{2}\right)$.

Thể tích của khối hộp là: $V(x)=x(a-2x)^2\left(0<x<\frac{a}{2}\right)$.

$V'(x)=(a-2x)^2+x.2(a-2x).(-2)=(a-2x)(a-6x)=0\Leftrightarrow x=\frac{a}{6}\left(0<x<\frac{a}{2}\right)$.

Bảng biến thiên:

x	0		$a/6$		$a/2$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	$\frac{2a^3}{27}$	↘	0

Vậy $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)}V(x)=V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2a^3}{27}$.

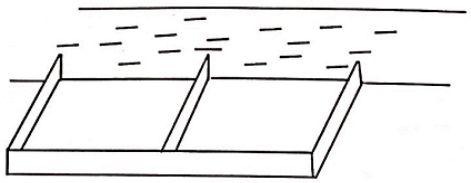
a) Sai: Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{12}$.

b) Đúng: Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.

c) Đúng: Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.

d) Sai: Thể tích hộp lớn nhất bằng $\frac{a^3}{27}$.

Câu 7: Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x>0$). Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y>0$).



a) Số tiền phải làm là: $x.60000+y.3.50000=15000000$ đồng.

b) Diện tích đất: $S=x.y=x.\dfrac{500-5x}{2}=250x-\dfrac{5}{2}x^2$

c) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được $\max\limits_{(0;+\infty)} S=6250\ \left(\text{m}^2\right)$

d) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E là 50m

Lời giải

a) Sai: Số tiền phải làm là: $x.3.50000+y.60000=15.000.000 \Leftrightarrow y=\dfrac{500-5x}{2}$.

b) Đúng: Diện tích đất: $S=x.y=x.\dfrac{500-5x}{2}=250x-\dfrac{5}{2}x^2$

c) Đúng: Ta có: $S'=250-5x$; $S'=0 \Leftrightarrow 250-5x \Leftrightarrow x=50$.

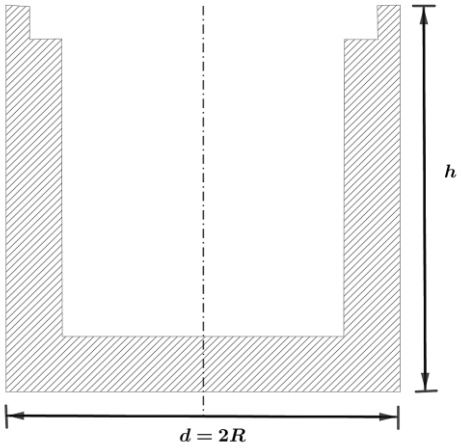
Bảng biến thiên:

x	0		50		$+\infty$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	↗	6250	↘	$-\infty$

d) Đúng: Từ bảng biến thiên có $\max\limits_{(0;+\infty)} S=6250\ \left(\text{m}^2\right)$ khi $x=50$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Bác Nam muốn xây dựng một hố ga không nắp hình trụ với dung tích 3m^3. Hãy tính chi phí ít nhất mà bác Nam phải bỏ ra xây dựng hố ga, biết tiền công và vật liệu cho 1m^3 thành bê tông của hố ga (thành bê tông đáy và thành bê tông xung quang) là 685000 đồng.



Lời giải

Ta có: $V=\pi R^2 h \Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi R^2}=\dfrac{3}{\pi R^2}$.

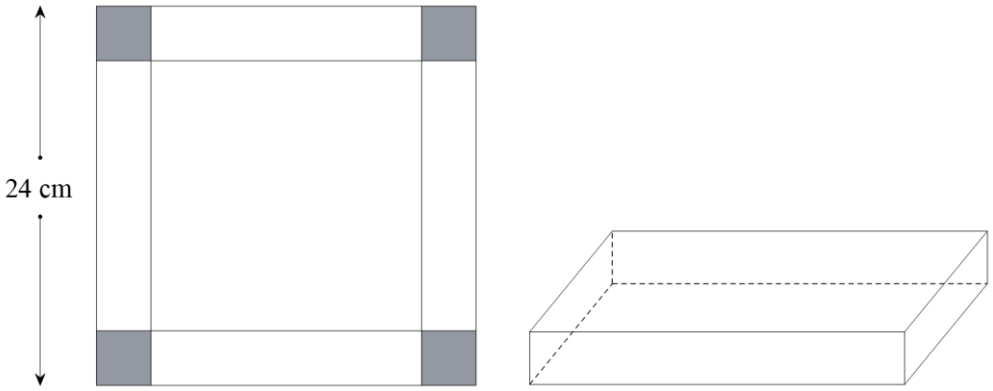
Mặt khác: $S_{xd}=2\pi Rh+\pi R^2=\dfrac{6}{R}+\pi R^2=\dfrac{3}{R}+\dfrac{3}{R}+\pi R^2\geq 3\sqrt[3]{9\pi}\left(m^2\right)$ (Áp dụng BĐT Cauchy).

Để chi phí bác Nam bỏ ra nhỏ nhất khi và chỉ khi diện tích xây dựng hố ga hình trụ nhỏ nhất, và khi đó $S_{xd}=3\sqrt[3]{9\pi}\left(m^2\right)$.

Vậy số tiền bác Nam phải bỏ ra là: $685000.3\sqrt[3]{9\pi}\approx 6260000$ đồng.

Câu 2: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 24 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

Lời giải



Lời giải

Gọi $x(\text{cm})$ là cạnh hình vuông bị cắt $(0<x<12)$.

Thể tích của hộp không nắp bằng $V(x)=x(24-2x)^2$.

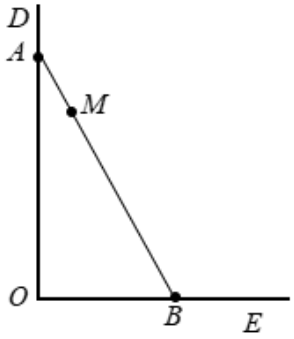
Ta có $V'(x)=(24-2x)(24-6x)$ có $V'(x)=0\Leftrightarrow x=4$

Bảng biến thiên

x	0		4		12
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	1024	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=4$.

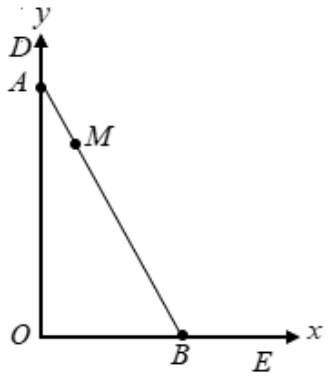
Câu 3: Người ta muốn xây một đoạn đường AB (như hình vẽ) và đoạn đường này phải đi qua điểm M Biết rằng vị trí điểm M cách OD $125m$ và cách OE $1km$. Giả sử chi phí để làm $100m$ đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành được con đường là bao nhiêu?



Lời giải

Đề hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất thì phải chọn A,B sao cho đoạn thẳng AB là bé nhất. Thiết lập khoảng cách giữa hai điểm A,B và tìm giá trị nhỏ nhất.

Chọn hệ toạ độ xOy như hình dưới đây với OD nằm trên tia Oy. Khi đó điểm $M\left(\frac{1}{8};1\right)$.



Gọi $B(m;0), A(0;n)$ $(m,n>0)$. Khi đó ta có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$.

Do đường thẳng đi qua $M\left(\frac{1}{8};1\right)$ nên $\frac{1}{8m}+\frac{1}{n}=1\Rightarrow\frac{1}{n}=1-\frac{1}{8m}=\frac{8m-1}{8m}\Rightarrow n=\frac{8m}{8m-1}$.

Có $AB^2 = m^2 + n^2 = m^2 + \left(\frac{8m}{8m-1}\right) = f(m)$. Xét hàm số $f(m)$, ta có :

$$f'(m) = 2m + 2.\frac{8m}{8m-1}.\frac{-8}{(8m-1)^2} = 2m.\left(1 - \frac{64}{(8m-1)^3}\right); f'(m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 (loai) \\ 1 - \frac{64}{(8m-1)^2} = 0 \end{array}\right.$$

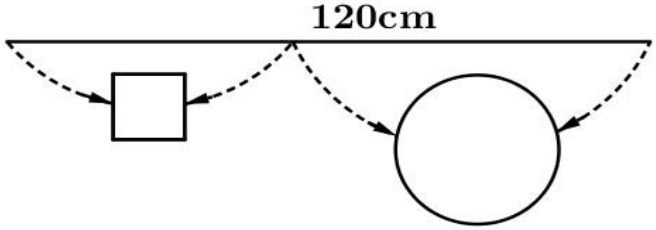
$$\Leftrightarrow (8m-1)^3 = 64 \Leftrightarrow m = \frac{5}{8}$$

$$f(m) \geq f\left(\frac{5}{8}\right) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{8.\frac{5}{8}}{8.\frac{5}{8}-1}\right)^2 = \frac{25}{64} + \frac{25}{16} = \frac{125}{64} \Rightarrow AB \geq \sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{5\sqrt{5}}{8}.$$

Vậy quãng đường ngắn nhất là $\frac{5\sqrt{5}}{8}(\text{km})$

Giá để làm 1 km đường là 1500 triệu đồng $= 1,5$ tỷ đồng nên khi đó chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là $\frac{5\sqrt{5}}{8}.1,5 \approx 2,0963$ (tỷ đồng).

Câu 4: Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Gọi độ là của đoạn dây thứ hai là x cm.

Khi đó, độ dài của đoạn dây thứ nhất là $(120 - x)$ cm $(0 < x < 120)$.

Diện tích của hình vuông bằng $\left(\frac{120-x}{4}\right)^2$ và diện tích của hình tròn bằng $\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$S(x) = \left(\frac{120-x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi} = \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right)x^2 - 15x + 900$, $(0 < x < 120)$.

Ta có $S(x)$ là một hàm số bậc hai, đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{120\pi}{4+\pi} \in (0;120)$.

Vậy $\min S(x) = S\left(\frac{120\pi}{4+\pi}\right) \approx 504\,\text{cm}^2$.

Câu 5: Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức $f(v)=\dfrac{386v}{v^2+2v+5}$ (xe/giây), trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất

Lời giải

Vì v là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm $\Rightarrow v>0$ và $\dfrac{5}{v}>0$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $v+\dfrac{5}{v}\ge 2\sqrt{5}\Rightarrow v+\dfrac{5}{v}+2\ge 2\sqrt{5}+2$

$$\Rightarrow \frac{386}{v+\frac{5}{v}+2}\le \frac{386}{2\sqrt{5}+2}\Rightarrow f(v)=\frac{386v}{v^2+2v+5}\le \frac{386}{2\sqrt{5}+2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow v=\dfrac{5}{v}\Leftrightarrow v^2=5\Leftrightarrow v=\sqrt{5}$ (vì $v>0$)

Vậy vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm là $\sqrt{5}$ km/h thì lưu lượng xe là lớn nhất.

Câu 6: Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V=8\left(m^3\right)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\dfrac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là $980.000đ/m^2$ và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\dfrac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn đồng).

Lời giải

Gọi chiều rộng của bể là $3x\ (m)$, chiều dài bể là $4x\ (\mathrm{m})$ và chiều cao của bể là $\dfrac{2}{3x^2}\ (m)$.

Khi đó tổng diện tích bề mặt xây là:

$$T=(3x+4x).2.\frac{2}{3x^2}+2.3x.4x-\frac{2}{9}.3x.4x=\frac{28}{3x^2}+\frac{64x^2}{3}\ge 2.\sqrt{\frac{28}{3x^2}.\frac{64x^2}{3}}=\frac{32\sqrt{7}}{3}\ \left(m^2\right).$$

Chi phí C (tính theo đồng) xây dựng là: $C=T.980000\ge\dfrac{32\sqrt{7}}{3}.980000\approx 27657000$ (đồng).

Câu 7: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t (giờ) được cho bởi công thức $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}\ (mg/L)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Lời giải

Ta có $c'(t)=\dfrac{-t^2+1}{\left(t^2+1\right)^2},\forall t\in(0;+\infty)$. Cho $c'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$		↗		↘	

Vậy sau khi tiêm 1 giờ, nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân cao nhất.

Câu 8: Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

Lời giải

Xét $P'(t)=\dfrac{-t^2-2t+3}{\left(t^2+t+4\right)^2}=\dfrac{(t-1)(-t-3)}{\left(t^2+t+4\right)^2}$.

$P'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-3\\t=1\end{array}\right.$.

Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t=1$ và $P'(t)<0,\forall t\in(1;+\infty)$ nên sau 1 giờ thì vi khuẩn bắt đầu giảm.

Câu 9: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{2}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $v(t)=s'=-\dfrac{3}{2}t^2+12t$; $v'(t)=-3t+12=0\Leftrightarrow t=4$ và có bảng biến thiên

t	0		4		6
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$		↗	24	↘	

Vậy $\max v(t)=24(m/s)$ khi $t=4$.

Câu 10: Một cửa hàng bán vải Thanh Hà với giá bán mỗi kg là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4000 đồng cho một kg thì số vải bán được tăng thêm là 50kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30.000 đồng.

Lời giải

Gọi x đồng $(30.000 < x < 50.000)$ là giá bán vải mới để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Suy ra giá bán ra đã giảm là $(50.000 - x)$ đồng.

Số lượng vải bán ra đã tăng thêm là $\frac{50(50000-x)}{4000} = 625 - 0,0125.x$.

Tổng số vải bán được là $25 + 625 - 0,0125.x = 650 - 0,0125.x$.

Doanh thu của cửa hàng là $(650 - 0,0125.x)x$.

Số tiền vốn ban đầu để mua vải là $(650 - 0,0125.x)30000$.

Vậy lợi nhuận của cửa hàng là

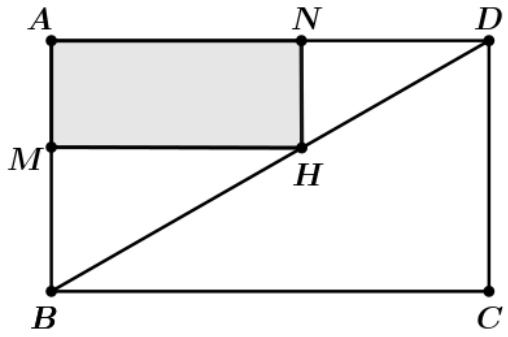
$(650 - 0,0125.x)x - (650 - 0,0125.x)30000 = -0,0125x^2 + 1025x - 19500000$.

Ta có: $f(x) = -0,0125x^2 + 1025x - 19500000 = -0,0125(x - 41000)^2 + 1512500 \le 1512500$.

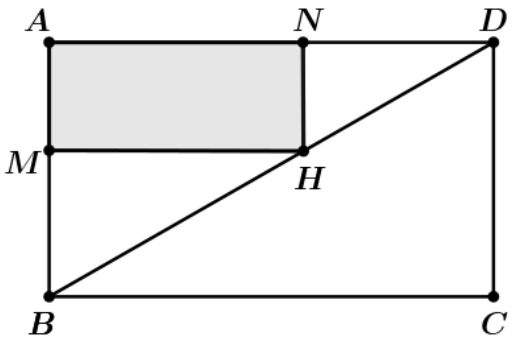
Suy ra $\max f(x) = 1512500$ khi $x = 41.000$ đồng.

Vậy giá bán mỗi cân vải là 41.000 đồng thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 11: Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 25m^2, người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H, với H thuộc cạnh BD. Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu với chi phí trồng cỏ là 70.000 đồng/m^2 ?



Lời giải



Ta có $AB.AD = 25(m^2); \frac{NH}{AB} = \frac{DN}{DA}$. Đặt $\frac{NH}{AB} = \frac{DN}{DA} = x \Rightarrow NH = x.AB; AN = (1-x)AD$

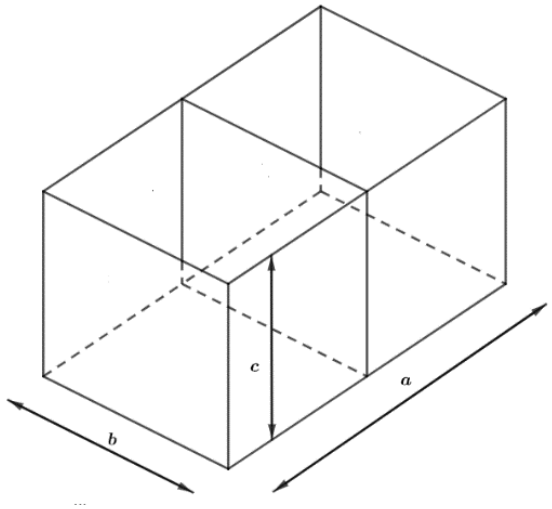
Diện tích đất trồng cỏ là: $S = AN.NH = x.(1-x).AB.AD = 25.x.(1-x)$

Diện tích lớn nhất khi $x.(1-x)$ lớn nhất mà $x.(1-x) \le \dfrac{(x+1-x)^2}{4} = \dfrac{1}{4}$

Diện tích đất trồng cỏ lớn nhất $S = \dfrac{1}{4}.25 = \dfrac{25}{4}$

Số tiền lớn nhất để trồng cỏ: $T = \dfrac{25}{4}.70000 = 437500$ đồng.

Câu 12: Người ta cần làm một cái bể cá có hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296m^3$. Người ta cắt các tấm kính ghép lại một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ minh họa) với ba kích thước là a,b,c. Người ta phải thiết kế các kích thước là bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất (giả sử độ dày của kính không đáng kể). Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T = a+b+c$.



Lời giải

Thể tích bể cá là $V = abc = 1,296$.

Kể cả miếng kính ở giữa, diện tích tổng các miếng kính là $S = ab + 2ac + 3bc$.

Suy ra $\dfrac{S}{V} = \dfrac{S}{1,296} = \dfrac{ab+2ac+3bc}{abc} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{a}.$

Áp dụng Cô si cho 3 số $\dfrac{1}{c};\dfrac{2}{b};\dfrac{3}{a}$ ta có $\dfrac{1}{c} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{a} \ge 3.\sqrt[3]{\dfrac{1}{c}.\dfrac{2}{b}.\dfrac{3}{a}} = 3.\sqrt[3]{\dfrac{6}{1,296}} = 5.$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} abc = 1,296 \\ \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b} = \dfrac{3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,8 \\ b = 1,2 \\ c = 0,6 \end{cases}.$

Vậy để đỡ tốn kính nhất thì $a = 1,8\text{m}; b = 1,2\text{m}; c = 0,6\text{m}$.

Khi đó $T = a+b+c = 1,8+1,2+0,6 = 3,6$.

----------HẾT----------

BÀI 03 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

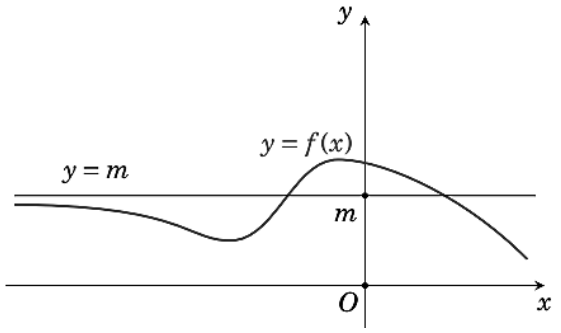
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Đường tiệm cận ngang (TCN)

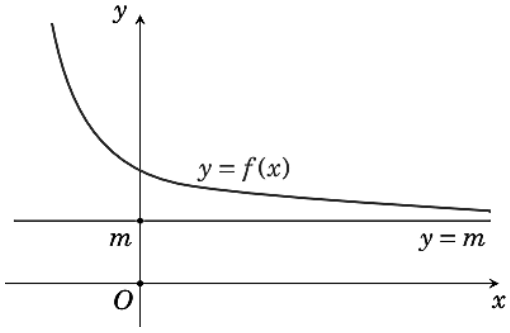
Định nghĩa: Đường thẳng $y=m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $f(x)$ nếu:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=m \text{ hoặc } \lim_{x\to+\infty} f(x)=m$$

Đường thẳng $y=m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ được minh hoạ như hình vẽ dưới đây



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=m$



b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$

Các bước tìm đường tiệm cận ngang:

Bước 1: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

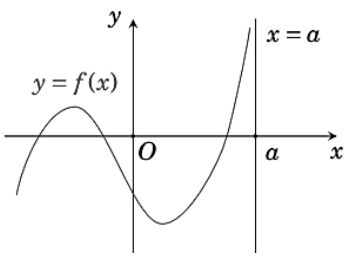
Bước 2: Xem ở "vị trí " nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó

2 Đường tiệm cận đứng (TCĐ)

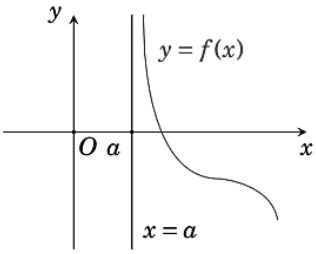
Định nghĩa: Đường thẳng $x=a$ gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

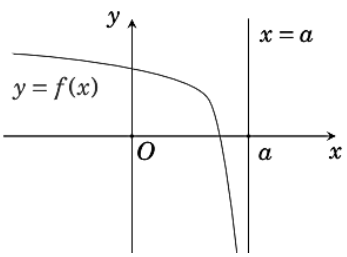
Đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ được minh hoạ như hình vẽ dưới đây



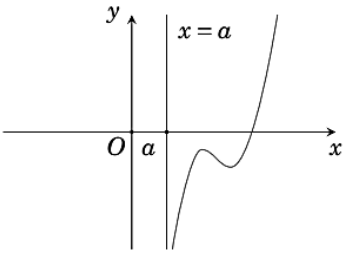
a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$



c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



d) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

Các bước tìm đường tiệm cận đứng:

Bước 1: Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$

Bước 2: Tính giới hạn một bên tại $x = x_0$.

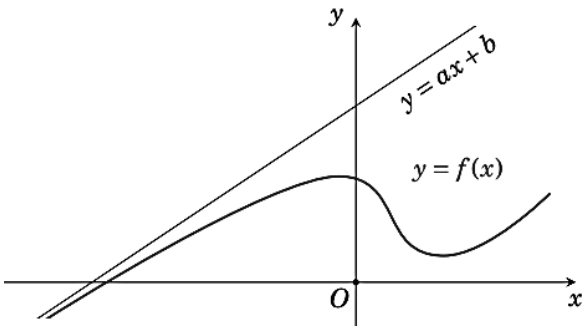
Nếu xảy ra $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

3 Đường tiệm cận xiên (TCX)

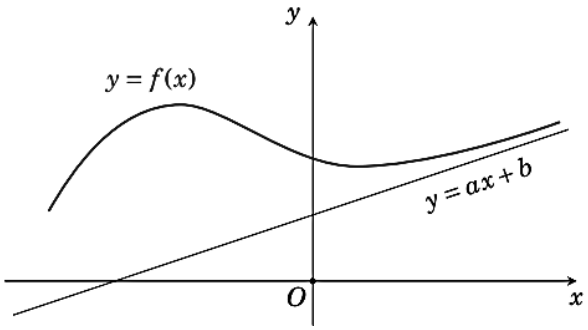
Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b\,(a \neq 0)$ gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$$

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới:



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$

Các bước tìm đường tiệm cận xiên: ta xác định hệ số của a và b trong các trường hợp sau

Bước 1: Tính $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax \right]$

Bước 2: Tính $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - ax \right]$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$. Để tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số thì ta làm như sau:

- **Các bước tìm đường tiệm cận ngang:**

  Bước 1: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

  Bước 2: Xem ở "vị trí " nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó
- **Các bước tìm đường tiệm cận đứng:**

  Bước 1: Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x=x_0$

  Bước 2: Tính giới hạn một bên tại $x=x_0$.

  Nếu xảy ra $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ thì ta kết luận $x=x_0$ là đường tiệm cận đứng.
- **Lưu ý:** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ luôn có TCĐ: $y=-\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y=\dfrac{a}{c}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xác định tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y=f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$ b) $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Lời giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=3$. Tương tự, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=3$.

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1;$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=-1.$

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Bài tập 2: Xác định tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y=f(x)=\dfrac{3-x}{x+2}$. b) $y=f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3-x}{x+2}=+\infty$. Tương tự, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$.

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+2}{x}=+\infty$. Tương tự, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$.

Bài tập 3: Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ b) $y=\dfrac{2x-3}{1-2x}$ c) $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$ d) $y=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$

Lời giải

a) Xét $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x-1}{x+1}=-\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x-1}{x+1}=-\infty$) nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng.

Xét $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{2x-3}{1-2x}=-1$ suy ra $y=-1$ là tiệm cận ngang

Xét $\begin{cases}\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+}\dfrac{2x-3}{1-2x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}\dfrac{2x-3}{1-2x}=-\infty\end{cases}$ suy ra $x=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng

c) Điều kiện xác định $x\neq \pm 1$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=1\\ \lim\limits_{x\to -(1)^-}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$ nên hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$ và một tiệm cận đứng $x=-1$

d) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$

- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} y=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=0$ suy ra $y=0$ là tiệm cận ngang
- $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty$ nên $x=1$ là đường TCĐ
- $\lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^+} y=+\infty$ nên $x=2$ là đường TCĐ

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có đường tiệm cận ngang là:

A. $y=2$. **B.** $y=0$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x-2}{x^2-4}=0$ suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Câu 2: Đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ có phương trình

A. $y=2$. **B.** $y=3$. **C.** $y=1$. **D.** $y=0$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$ nên $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 3: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y=x^3-x-1$. **B.** $y=\sqrt{2x^2+3}$. **C.** $y=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$. **D.** $y=\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2+5}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{4x^2+5}=\dfrac{3}{4}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=\dfrac{3}{4}$.

Câu 4: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ là:

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+x-2}{x-2}=+\infty\Rightarrow$ TCĐ: $x=2$.

Câu 5: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{x+2}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $y=0$.

Lời giải

Tập xác đinh $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

• $\lim\limits_{x\to-2^+} y=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{3}{x+2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-} y=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{3}{x+2}=-\infty$ suy ra $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 6: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+6}{x-2}$ là đường thẳng

A. $x=3$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x+6}{x-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x+6}{x-2}=-\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng.

Câu 7: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{x-1}$ là đường thẳng :

A. $x=1$ **B.** $y=2$ **C.** $x=0$ **D.** $y=0$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$. Vậy đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	‖ $-\infty$	↘	2	↗	3

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Quan sát bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to 0^-} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

A. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
D. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=2$ nên $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-} y=-\infty\end{cases}$ nên $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	2	↘	‖ $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=2, \lim\limits_{x\to 0^{(+)}} y=+\infty$ nên hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$ và tiệm cận đứng là $x=0$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây **đúng?**

A. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=4$.
C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=0$.

Lời giải

Từ BBT của hàm số $y=f(x)$ ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=4, \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=4, \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-1, \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-1$ nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	2	↗	4 ‖ $-\infty$	↗	3	↘	-1

Hỏi đồ thị hàm số có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

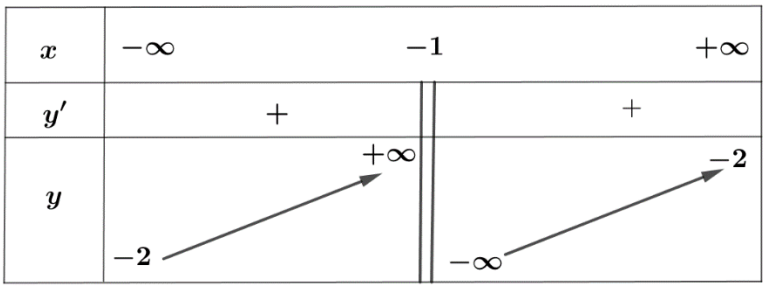
Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-1^+} y=-\infty \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=2\Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=-1\Rightarrow y=-1$ là tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, có bảng biến thiên như sau.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y=-1$ và tiệm cận ngang $x=-2$.

B. Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số có ba tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=-2$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-2\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-2$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=+\infty\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 14: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)=2\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y=2$.

• $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}\right)=+\infty$ suy ra đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x=-1$.

• $\lim\limits_{x\to(1)^+} y=\lim\limits_{x\to(1)^+}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}\right)=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to(1)^-} y=\lim\limits_{x\to(1)^-}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}\right)=\dfrac{1}{2}$

Suy ra $x=1$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Câu 15: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$

• $\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$

• $\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$

• $\lim\limits_{x\to-1^+} y=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to-1^-} y=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x-2}{x+1}=+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận tiệm cận đứng $x=-1$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận

Câu 16: Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{2x^2+x-1}{x-1}=2x+3+\dfrac{2}{x-1}$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+3+\dfrac{2}{x-1}\right)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+3+\dfrac{2}{x-1}\right)=+\infty$, suy ra đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

• $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x^2+x-1}{x-1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x^2+x-1}{x-1}=+\infty$, suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Câu 17: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-2)\sqrt{x-1}}{x^2-1}$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Tập xác định: $D=(1;+\infty)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-2)\sqrt{x-1}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-2)}{(x+1)\sqrt{x-1}}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-2)\sqrt{x-1}}{x^2-1}=0$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-2)\sqrt{x-1}}{x^2-1}$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Câu 18: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Ta có:

$$\lim_{x\to 1^{\pm}}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to -1^{\pm}}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to -1^{\pm}}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1^{\pm}}\frac{x-2}{x+1}=\mp\infty.$$

Hàm số có tiệm cận đứng là $x=-1$.

Câu 19: Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{3-2x-5x^2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $-5x^2-2x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$.

Với $x=-1$ thì $x^2-1=0$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=\dfrac{3}{5}$.

Câu 20: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-|x|-2}{x^2-2x-8}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{x^2-|x|-2}{x^2-2x-8}\Leftrightarrow y=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x-8} & khi\ x\ge 0\\ \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x-8} & khi\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow y=\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-4)} & khi\ x\ge 0\\ \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-4)} & khi\ x<0\end{cases}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;4\}$.

$$\lim_{x\to 4^{+}}y=\lim_{x\to 4^{+}}\frac{x^2-|x|-2}{x^2-2x-8}=\lim_{x\to 4^{+}}\frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-4)}=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to 4^-} y=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x^2-|x|-2}{x^2-2x-8}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-4)}=-\infty \Rightarrow x=4$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -2} y=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-|x|-2}{x^2-2x-8}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-4)}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=-2$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 21: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2;-2\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0.$

Nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Mà $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{x+2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$; $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$.

Nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x=-2$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 2.

Câu 22: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$.

$y=\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-3}=0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-3}=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x\to3^+} y=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to3^-} y=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$ nên đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 2.

Câu 23: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-1}$ là:

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=3$, suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=3$.

• $\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=\dfrac{(3x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{3x+1}{x+1}$.

• $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{3x+1}{x+1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{3x+1}{x+1}=+\infty$, suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-1$

Vậy tổng số đường tiệm cận ngang và đứng của đồ thị hàm số là 2.

Câu 24: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Tập xác định $D=[-9;+\infty)\setminus\{0;-1\}$

$\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 25: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}$

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm2\}$

Ta có $\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}=\dfrac{(x-2)(x-1)}{(2-x)(2+x)}=\dfrac{-(x-1)}{2+x}=\dfrac{1-x}{x+2}$

• $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(2-x)(2+x)}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{1-x}{2+x}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng.

• $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-(x-1)}{2+x}=-1$ suy ra đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 2.

Câu 26: Tổng số đường tiện cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x^2-x}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=0$ nên $y=0$ là tiệm cận ngang

• $\lim\limits_{x\to1}y=\infty$ nên $x=1$ là tiệm cận đứng.

• $\lim\limits_{x\to0}y=\infty$ nên $x=0$ là tiệm cận đứng.

Vậy có ba đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 27: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ có phương trình là

A. $y=-2$. **B.** $y=2$. **C.** $y=0$. **D.** $y=-1$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+1}{x^2-4}=0$

Vậy đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 28: Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}=\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)}$.

• $\lim\limits_{x\to(-4)^+}y=+\infty\Rightarrow x=-4$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

• $\lim\limits_{x\to4}y=\dfrac{5}{8}\Rightarrow x=4$ không là tiệm cận đứng của đồ thị.

Vậy đồ thị có 1 tiệm cận đứng.

Câu 29: Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

• $\lim\limits_{x\to(-4)^+}y=\lim\limits_{x\to(-4)^+}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to(-4)^+}\dfrac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to(-4)^+}\dfrac{x+1}{x+4}=-\infty$

(vì $\lim\limits_{x\to(-4)^+}(x+1)=-3$ và $\lim\limits_{x\to(-4)^+}(x+4)=0$)

• $\lim\limits_{x\to(-4)^-} y=\lim\limits_{x\to(-4)^-}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to(-4)^-}\dfrac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to(-4)^-}\dfrac{x+1}{x+4}=+\infty$

(vì $\lim\limits_{x\to(-4)^-}(x+1)=-3$ và $\lim\limits_{x\to(-4)^-}(x+4)=0$)

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-4$

• $\lim\limits_{x\to4^+} y=\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{x+1}{x+4}=\dfrac{5}{8}$

• $\lim\limits_{x\to4^-} y=\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{x+1}{x+4}=\dfrac{5}{8}$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x=-4$.

Câu 30: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{2x^2-2x}$ là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Tập xác định: $D=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$

Tiệm cận đứng: $\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{2x(x-1)}=+\infty$

(Do $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2\right)=5+\sqrt{3}>0;\ \lim\limits_{x\to1^+}\left(2x(x-1)\right)=0;\ 2x(x-1)>0,\forall x>1$)

$\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{2x(x-1)}=-\infty$

(Do $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2\right)=5+\sqrt{3}>0;\ \lim\limits_{x\to1^-}\left(2x(x-1)\right)=0;\ 2x(x-1)<0,\forall x:0<x<1$)

Suy ra đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	2	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

a) $f(-5) < f(4)$

b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$

d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

Lời giải

a) Đúng: Từ bảng biến thiên ta thấy $f(-5) < 2$ và $f(4) > 2$ nên $f(-5) < f(4)$

b) Sai: Do $\lim\limits_{x \to 0^-} y = -\infty$ nên hàm số có không có giá trị nhỏ nhất.

c) Đúng: Do $\lim\limits_{x \to 0^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$

d) Sai: Do $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$

Câu 2: Cho hàm số $y = \dfrac{5 - 4x}{2x + 3}$ có đồ thị là (C)

a) Hàm số đã cho không có cực trị

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$

d) Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số tạo với hai trục toạ độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

• $\lim\limits_{x \to -\left(\frac{3}{2}\right)^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\left(\frac{3}{2}\right)^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{3}{2}$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$

Diện tích hình chữ nhật cần tìm là $S = \left|-\dfrac{3}{2}\right| . |2| = 3$ (đvdt)

a) Đúng: Hàm số đã cho không có cực trị

b) Sai: Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{3}{2}$

c) Đúng: Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$

d) Đúng: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số tạo với hai trục toạ độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

Câu 3: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2}$ có đồ thị là (C)

a) Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}$

b) Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang, trong đó có một đường là đường thẳng có phương trình $y = -1$.

c) Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$

d) Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 3

Lời giải

a) Sai: Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

b) Sai: Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}=-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}=-1$ nên hàm số chỉ có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.

c) Đúng: $\lim\limits_{x\to2} y=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(2-x)(2+x)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1-x}{x+2}=-\dfrac{1}{4}$

• $\lim\limits_{x\to-2^+} y=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(2-x)(2+x)}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{\dfrac{x^2-3x+2}{2-x}}{x+2}=-\infty$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

d) Sai: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 2

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'	$-$		‖	$-$	0	$+$	
y	3	↘	‖ $-\infty$	$+\infty$	↘	↗	5
			‖		-2		

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một đường tiệm cận đứng là $x=1$

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một đường tiệm cận ngang là $y=3$

d) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận đứng

Lời giải

a) Sai: Hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1);(1;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

b) Đúng: Do $\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x=1$

c) Đúng: Do $\lim\limits_{x\to-\infty} y=3$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y=3$

d) Đúng: Dựa vào đồ thị, ta có $f(x)+2=0\Leftrightarrow f(x)=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=x_0\in(-\infty;1)\end{array}\right.$.

Hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{f(x)+2}$ có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{x_0;1;2\}$.

Hàm số $y=g(x)$ liên tục trên mỗi khoảng xác định của nó.

Các giới hạn: $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{f(x)+2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{f(x)+2}=0$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{f(x)+2}=0$; $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{f(x)+2}=+\infty$.

Vậy hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận đứng là $x=x_0$ và $x=2$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x=2$ và tiệm cận ngang là $y=3$. Tính giá trị biểu thức $a-2b$

Lời giải

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ là: $x=\dfrac{2}{b}$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ là: $y=\dfrac{a}{b}$.

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases}\dfrac{2}{b}=2\\ \dfrac{a}{b}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases}\Rightarrow a-2b=3-2.1=1$

Câu 2: Gọi $I(a;b)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+2}$. Tính $T=a+b$

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+2}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}y=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

• $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-2)^-}y=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-2)^+}y=-\infty\end{cases}$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$.

Vậy giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là điểm $I(-2;1)$ nên $T=-2+1=-1$

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x^3-9x}{x^3-x^2-5x-3}$ có đồ thị là (C). Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) là bao nhiêu?

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$ và có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang

• $\lim\limits_{x\to-1}y=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)^2}=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng

• $\lim\limits_{x\to3}y=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x(x+3)}{(x+1)^2}=\dfrac{18}{16}=\dfrac{9}{8}$ nên đường thẳng $x=3$ không là tiệm cận đứng.

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) là 2.

Câu 4: Diện tích hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+3}$ và các trục tọa độ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $x=-3$;

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=2$.

Hai đường tiệm cận tạo với các trục tọa độ một hình chữ nhật có chiều dài bằng 3, chiều rộng bằng 2.

Diện tích hình chữ nhật: $S=2.3=6$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-5}{x+b}\,(a,b\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	1

Tính giá trị biểu thức a^2+b^2.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, suy ra đường tiệm cận đứng là: $x=2$ và đường tiện cận ngang là: $y=1$.

Từ hàm số $f(x)=\dfrac{ax-5}{x+b}\,(a,b\in\mathbb{R})$ suy ra đồ thị hàm số có ra đường tiệm cận đứng là: $x=-b$ và đường tiện cận ngang là: $y=a$.

Do đó ta có: $\begin{cases}-b=2\\a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\\a=1\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=5$.

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tích các khoảng cách từ điểm M bất kì thuộc (C) đến hai đường tiệm cận bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $\Delta_1: x=-1\Leftrightarrow x+1=0$

Đường tiệm cận ngang là $\Delta_2: y=2\Leftrightarrow y-2=0$.

Giả sử $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C), x_0\neq -1$.

Ta có: $d\left(M;\Delta_1\right)=\left|x_0+1\right|$ và $d\left(M;\Delta_2\right)=\left|\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}-2\right|=\dfrac{3}{\left|x_0+1\right|}$.

Suy ra $d\left(M;\Delta_1\right).d\left(M;\Delta_2\right)=\left|x_0+1\right|.\dfrac{3}{\left|x_0+1\right|}=3$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi $M(a;b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ dương sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Khi đó tổng $a+2b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang $y=2$ và đường tiệm cận đứng $x=1$. Khi đó:

Khoảng cách từ $M\left(a;b\right)$ đến tiệm cận ngang là: $\left|b-2\right|=\left|\dfrac{2a-1}{a-1}-2\right|=\dfrac{1}{\left|a-1\right|}$ (do $M\in\left(C\right)$)

Khoảng cách từ $M\left(a;b\right)$ đến tiệm cận đứng là: $\left|a-1\right|$.

Ta có $\left|a-1\right|+\dfrac{1}{\left|a-1\right|}\ge 2\sqrt{\left|a-1\right|\dfrac{1}{\left|a-2\right|}}=2$.

Vậy tổng khoảng cách nhỏ nhất là 2 khi $\left|a-1\right|=\dfrac{1}{\left|a-1\right|}$.

$$\Leftrightarrow\left(a-1\right)^2=1\Leftrightarrow a^2-2a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\left(loai\right)\\a=2\end{array}\right.\Rightarrow b=\frac{2.2-1}{2-1}=3\Rightarrow a+2b=8.$$

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+2}{2x-3}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang bằng 10 lần khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng.

Lời giải

Ta có các đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}$ và $y=1$ lần lượt là đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số mà $M\in\left(C\right)\Rightarrow M\left(x;\dfrac{2x+2}{2x-3}\right)$ với $x\ne\dfrac{3}{2}$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng bằng $\left|x-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{\left|2x-3\right|}{2}$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang bằng $\left|\dfrac{2x+2}{2x-3}-1\right|=\dfrac{5}{\left|2x-3\right|}$.

Khi đó: $\dfrac{5}{|2x-3|}=10.\dfrac{|2x-3|}{2}\Leftrightarrow (2x-3)^2=1\Leftrightarrow 4x^2-12x+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}M(2;6)\\M(1;-4)\end{array}\right.$.

Câu 9: Cho đồ thị hai hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ và $g(x)=\dfrac{ax+1}{x-2}, a\neq -\dfrac{1}{2}$. Tìm giá trị thực dương của a để các tiệm cận của hai đồ thị hàm số tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 4.

Lời giải

Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ có hai đường tiệm cận là $x=1$ và $y=1$.

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{ax+1}{x-2}$ có hai đường tiệm cận là $x=2$ và $y=a$.

Hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường tiệm cận của hai đồ thị trên có hai kích thước lần lượt là 1 và $|a-1|$.

Theo giả thiết, ta có $|a-1|.1=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=5\\a=-3\end{array}\right.$. Vì $a>0$ nên chọn $a=5$.

Câu 10: Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+x-1}{4x^2+bx+9}$ có đồ thị (C) và a, b là các hằng số dương thỏa mãn $a.b=4$. Biết rằng (C) có đường tiệm cận ngang $y=c$ và có đúng 1 đường tiệm cận đứng. Tính tổng $T=3a+b-24c$.

Lời giải

Theo giả thiết $a>0$, $b>0$.

Với $ab=4$ ta có $y=\dfrac{ax^2+x-1}{4x^2+bx+9}=\dfrac{\frac{4}{b}x^2+x-1}{4x^2+bx+9}=\dfrac{4x^2+bx-b}{b\left(4x^2+bx+9\right)}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{b+9}{b\left(4x^2+bx+9\right)}$.

Đồ thị (C) có đúng 1 đường tiệm cận đứng nên $4x^2+bx+9=0$ có nghiệm kép

Suy ra $\Delta=b^2-4.4.9=0\Leftrightarrow b=12$ (do $b>0$).

Ta có $ab=4$ suy ra $a=\dfrac{1}{3}$; $c=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2+x-1}{4x^2+bx+9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{4+\frac{b}{x}+\frac{9}{x^2}}=\dfrac{a}{4}$ suy ra $c=\dfrac{1}{12}$.

Vậy $T=3a+b-24c=11$.

----------HẾT----------

Dạng 2: Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$. Để tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số thì ta làm như sau:

- **Các bước tìm đường tiệm cận đứng:**

  Bước 1: Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x=x_0$

  Bước 2: Tính giới hạn một bên tại $x=x_0$.

  Nếu xảy ra $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ thì ta kết luận $x=x_0$ là đường tiệm cận đứng.

- **Các bước tìm đường tiệm cận xiên:** ta xác định hệ số của a và b trong các trường hợp sau

  Bước 1: Tính $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$

  Bước 2: Tính $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]$

- **Lưu ý:**
  - Nếu $a=0$ thì tiệm cận xiên chính là tiệm cận ngang
  - Đối với hàm số phân thức $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ta có thể chia đa thức để biến đổi về dạng

    $$f(x)=a'x+b'+\frac{e}{mx+n} \text{ với } e\neq 0$$

    Suy ra $y=a'x+b'$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xác định tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y=f(x)=x+\dfrac{1}{x+2}$ b) $y=f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$

Lời giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$. Tương tự $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x$.

b) Ta có: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+2}{x^2+x}=1$; $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+2}{x+1}=-2$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=-2$

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x-2$.

Bài tập 2: Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y=\dfrac{x^2+2}{2x-4}$ b) $y=\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}$ c) $y=\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}$

Lời giải

a) Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2+2}{2x-4}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+2}{2x-4}=+\infty$

Vậy đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\dfrac{2}{x}}{2x-4}=\dfrac{1}{2}$; $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x-4}-\dfrac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+2}{2x-4}=1.$

Ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=1$

Do đó đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}x+1$

b) Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}=+\infty$

Vậy đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

- $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3-\dfrac{6}{x}}{x+2}=2$
- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7x-6}{x+2}=-7.$

Ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x\right]=-7$

Do đó đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=2x-7$

c) Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{5}{2}\right)^-}\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{5}{2}\right)^+}\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}=+\infty$

Vậy đường thẳng $x=-\dfrac{5}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

- $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+9+\dfrac{11}{x}}{2x+5}=1$
- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+11}{2x+5}=2.$

Ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=2$

Do đó đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$. Tiệm cận xiên của đồ thì hàm số là đường thẳng:

A. $y=2x-1$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=2x-3$. **D.** $y=2x+3$.

Lời giải

Chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases} y=2x+1-\dfrac{1}{x-2} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-1}{x-2}=0 \end{cases} \Rightarrow$ Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y=2x+1$.

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-3}$ có tiện cận xiên là đường thẳng $y=ax+b$. Tính a^2+2b.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases} y=x+1+\dfrac{5}{x-3} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5}{x-3}=0 \end{cases} \Rightarrow$ Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y=x+1$ nên $a^2+2b=3$.

Câu 3: Biết tiện cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+2}{x^2-2x}$ cắt trục tọa độ tại hai điểm A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB là

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải

Chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases} y=x+2+\dfrac{4x+2}{x^2-2x} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x+2}{x^2-2x}=0 \end{cases} \Rightarrow TCX\ d: y=x-2.$

Ta có $d\cap Ox$ tại điểm $(0;-2)$ và $d\cap Oy$ tại điểm $(2;0)$

Suy ra $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2(dvdt)$.

Câu 4: Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$ có tiện cận xiên là đường thẳng $d: y=ax+b$. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d.

A. $M(-1;2)$. **B.** $N(2;2)$. **C.** $P(2;-2)$. **D.** $Q(2;-1)$.

Lời giải

Chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases} y = x + \dfrac{2x+1}{x^2-1} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x+1}{x^2-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow TCX\ d: y = x \Rightarrow N(2;2) \in d$.

Câu 5: Đường thẳng $y = x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$. **B.** $y = \sqrt{x^2-2x+3}$. **C.** $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$. **D.** $y = \dfrac{2x^2+x+1}{2x+1}$.

Lời giải

Xét $y = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$ khi đó $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - x \right] = 2 \Rightarrow TCX: y = x+2$ (loại)

Câu 6: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{1}{x+1}$ có phương trình là

A. $y = x+1$. **B.** $y = 2x-1$. **C.** $y = x-1$. **D.** $y = 2x+1$.

Lời giải

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (2x-1) \right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-1}{x+1} = 0$ nên đường thẳng $y = 2x-1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 7: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{2x+1}$ có phương trình là

A. $y = 2x+1$. **B.** $y = x-3$. **C.** $y = x+3$. **D.** $y = 2x-1$.

Lời giải

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (x+3) \right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{2x+1} = 0$ nên đường thẳng $y = 2x-1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 8: Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-2}$

A. $y = 2x-5$. **B.** $y = x-2$. **C.** $y = x+5$. **D.** $y = x-5$.

Lời giải

Ta có: $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x}{x(x-2)} = 1;\ b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - x \right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{x-2} = 5$

Vậy đường thẳng $y = x+5$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho khi $x \to +\infty$

Tương tự do $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - x \right] = 5$ nên đường thẳng $y = x+5$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho khi $x \to -\infty$.

Câu 9: Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$

A. $y=x+1$. **B.** $y=-3x+1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=x-1$.

Lời giải

- $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-2x}=1$
- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{x-2}=-1$

Tương tự do $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=-1$

Vậy đường thẳng $y=x-1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho

Câu 10: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x+5}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $(5;3)$. **B.** $(-4;-5)$. **C.** $(6;-1)$. **D.** $(2;-10)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$

- $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x}{x^2+5x}=2$
- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2-3x}{x+5}-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-13x}{x+5}=-13$

Tương tự do $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x\right]=-13$

Vậy đường thẳng $y=2x-13$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng này đi qua điểm $(6;-1)$.

Câu 11: Xác định toạ độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$

A. $(1;2)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $(1;0)$.

Lời giải

Ta viết lại $y=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}=2x-1+\dfrac{1}{x-1}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và đường tiệm cận xiên là đường thẳng $2x-1$

Xét hệ phương trình $\begin{cases}x=1\\y=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ nên giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(1;1)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C)

a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

c) Giao điểm hai tiệm cận của đồ thị nằm trên parabol $y=x^2$.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị vuông góc với đường thẳng $x+y-\pi=0$.

Lời giải

a) Đúng: Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b) Sai: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y=x$ đi qua gốc toạ độ nên không hình thành được tam giác.

c) Đúng: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$ và đường tiệm cận xiên là $y=x$ nê giao điểm hai tiệm cận của đồ thị là $I(1;1)$ nằm trên parabol $y=x^2$.

d) Đúng: Đường tiệm cận xiên của đồ thị $y=x$ vuông góc với đường thẳng $y=-x+\pi$

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C)

a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

c) Giao điểm của hai tiệm cận nằm trên trục hoành.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị song song với đường thẳng $x+y=0$.

Lời giải

a) Đúng: Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận: đường tiệm cận đứng có phương trình $x=1$ và đường tiệm cận ngang có phương trình $y=x-1$.

b) Đúng: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cắt hai trục toạ độ Ox, Oy lần lượt tại hai điểm $A(1;0)$, $B(0;-1)$ nên tam giác OAB là tam giác vuông cân

c) Đúng: Giao điểm hai tiệm cận của đồ thị là $A(1;0)$ nằm trên trục hoành.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị $y=x-1$ vuông góc với đường thẳng $y=-x$

Câu 3: Cho hàm số $(C): y=f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x+3}$ biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$

a) Giao điểm của Δ và trục Ox có hoành lớn hơn 2.

b) Giao điểm của Δ và tiệm cận đứng của (C) có tọa độ là $(-3;-9)$.

c) Gọi $A=\Delta\cap Ox$, $B=\Delta\cap Oy$ thì ta có $S_{OAB}>3$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=ax+b$ trên $[0;3]$ là 4.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-2x\right]=-3$ nên đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình là $y=2x-3$

a) Sai: $\Delta\cap Ox\Rightarrow y=0\Leftrightarrow 2x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}<2$

b) Đúng: TCĐ $x=-3$ với $x_0=-3\Rightarrow y_0=2\cdot(-3)-3=-9$

c) Sai: $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A(-3;0)$ và $B=\Delta\cap Ox\Rightarrow B\left(0;\dfrac{3}{2}\right)\Rightarrow S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{4}<3$

d) Sai: $y=2x-3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra giá trị lớn nhất trên $[0;3]$ là $2.3-3=3$

Câu 4: Cho hàm số $(C):y=f(x)=\sqrt{4x^2+8x-12}$ và điểm $M\in(C)$ với $x_M<0$

a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận xiên đều là các hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Xét $\Delta_1:\ y=ax+b\ (b>0)$ là tiện cận xiên của (C) điểm $(1;4)\in\Delta$.

c) Xét $\Delta_2:\ y=ax+b\ (b<0)$ là tiện cận xiên của (C) khi đó $d_{\max}(M,\Delta_2)<2$.

d) Hoành độ giao điểm của hai đường tiệm cận xiên bằng -2.

Lời giải

Ta có hai đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là: $\left[\begin{array}{l}\Delta_1:y=\sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)=2x+2\\ \Delta_2:y=-\sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)=-2x-2\end{array}\right.$.

a) Sai: Dễ thấy hai đường TCX Δ_2 không đồng biến trên $\mathbb{R}$

b) Đúng: Thay $x=1$ vào Δ_1 ta có $y=2\cdot 1+2=4$

c) Đúng: Ta có đồ thị hàm số và tiệm cận xiên Δ_2

Tập xác định của hàm số $D=(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

Do $x_M<0$ nên điểm M thuộc nhánh đồ thị bên trái nên để $d(M,\Delta_2)$ đạt giá trị lớn nhất thì $M\equiv A(-3;0)$. Vậy $d_{\max}(M,\Delta_2)=d(A,\Delta_2)=\dfrac{\left|-2.(-3)-1.0-2\right|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}<2$

d) Sai: Phương trình hoành độ giao điểm $2x+2=2x-2\Leftrightarrow x=-1\neq -2$

Câu 5: Cho hàm số $(C_1):f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$ và $(C_2):g(x)=\dfrac{2x^2-3x-1}{2x-1}$ biết đồ thị hàm số (C_1) có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=x_0$, $y=y_0$; (C_2) có tiện cận xiên là đường thẳng $\Delta:y=ax+b$

a) Giá trị của biểu thức $S = x_0 + 2y_0 + 3b = 8$.

b) Đồ thị hàm số (C_2) có tiện cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

c) Giao điểm của ba đường tiệm cận ở đề bài tạo thành tam giác có diện tích bằng 2.

d) Đồ thị hàm số (C_1) và (C_2) có chung đường tiệm cận đứng.

Lời giải

a) Đúng: Với (C_1) ta có tiệm cận đứng $x = 2$ và tiệm cận ngang $y = 3$.

Với (C_2) ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{g(x)}{x} = 1$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - x\right] = -1 \Rightarrow TCX\ \Delta : y = x - 1$

a) Đúng: $S = x_0 + 2y_0 + 3b = 2 + 3.3 + 3.(-1) = 8$

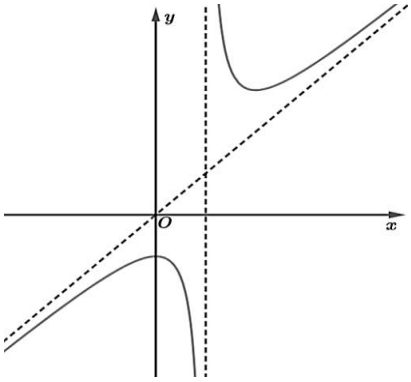
b) Sai: Do bậc tử lớn hơn bậc mẫu nên (C_2) không có tiệm cận ngang

c) Đúng: Giao điểm của ba đường tiệm cận là $(2;3);(2;1)$ và $(4;3)$.

Tam giác vuông tại đỉnh có tọa độ $(2;3) \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(2-2)^2 + (1-3)^2}\cdot\sqrt{(4-2)^2 + (3-3)^2} = 2$

d) Sai: Ta có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $(C_2): x = \dfrac{1}{2} \neq 2$

Câu 6: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



a) Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = -1$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - x\right] = 1$.

d) Đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C).

Lời giải

a) Đúng: Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

b) Sai: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1$

c) Sai: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x - 1} = 0$.

d) Đúng: Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) là $y = x$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-4}$

Lời giải

Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=-\infty \Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Tương tự hàm số có thêm một tiệm cận đứng khác là $x=2$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 3

Câu 2: Tìm hệ số góc k của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^3+5x^2-1}{x^2-x+1}$

Lời giải

Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}.$ nên hàm không có tiệm cận đứng

Ta có: $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-1}{x\left(x^2-x+1\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=2.$

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x^3+5x^2-1}{x^2-x+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7x^2-2x-1}{x^2-x+1}=7.$

$\Rightarrow y=2x+7$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số và có hệ số góc $k=2$.

Câu 3: Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3mx-m+2}{x-1}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải

Ta có $y=\dfrac{2x^2+3mx-m+2}{x-1}=2x+3m+2+\dfrac{2m+4}{x-1}$.

Với $m=-2$ thì hàm số trở thành $y=2x-4$. Đây là hàm số bậc nhất nên không có tiệm cận.

Với $m\neq 2$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(2x+3m+2)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2m+4}{x+2}=0$.

Do đó với $m\neq 2$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta: y=2x+3m+2$.

Δ cắt trục hoành tại điểm $A\left(\dfrac{-3m-2}{2};0\right)$ và cắt trục tung tại $B(0;3m+2)$.

Từ đó $OA=\dfrac{|-3m-2|}{2}=\dfrac{|3m+2|}{2},\ OB=|3m+2|$.

Theo giả thiết: $S_{OAB}=4\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}OA.OB=4\Leftrightarrow\dfrac{|3m+2|}{2}.|3m+2|=8\Leftrightarrow(3m+2)^2=16$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3m+2=-4\\3m+2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2(\text{loaïi})\\m=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\frac{2}{3}$.

Câu 4: Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y=mx+\frac{1}{x}(*)$, m là tham số. Tìm m để hàm số $(*)$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến đường tiệm cận xiên bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Tập xác định: D = $\mathbb{R}$. Ta có $y'=m-\frac{1}{x^2}=\frac{mx^2-1}{x^2}$.

Hàm số $(*)$ có cực trị khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \frac{1}{m}>0\Leftrightarrow m>0$.

Lúc đó $y'=0\Leftrightarrow x_1=-\frac{1}{\sqrt{m}}, x_2=\frac{1}{\sqrt{m}}$. Lập bảng biến thiên để suy ra:

Điểm cực tiểu của (C_m) là $M\left(\frac{1}{\sqrt{m}};2\sqrt{m}\right)$.

Tiệm cận xiên $\Delta: y=mx\Leftrightarrow mx-y=0$.

Theo đề $d(M,\Delta)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\left|\sqrt{m}-2\sqrt{m}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2m=m^2+1\Leftrightarrow m=1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=1$.

Câu 5: Cho hàm số $y=\frac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}(1)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0.

Lời giải

Ta có $y=\frac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}=mx-2+\frac{6m-2}{x+3m}$.

Khi $m=\frac{1}{3}$ đồ thị hàm số không tồn tại hai tiệm cận.

Khi $m\neq\frac{1}{3}$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta_1: y=mx-2\Leftrightarrow mx-y-2=0$

Tiệm cận đứng là $\Delta_2: x=-3m\Leftrightarrow x+3m=0$.

Góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0 nên

$$\cos 45^0=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow m=\pm 1.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\pm 1$.

----------HẾT----------

Dạng 3: Bài toán về đường tiệm cận của đồ thị hàm số có chứa tham số

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tham số m để đồ thị hàm số

a) $y=\dfrac{4x+1}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng

b) $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng

c) $y=\dfrac{3x-1}{x-m}$ có đường tiệm cận đứng là $x=5$

d) $y=\dfrac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có TCN là $y=1$

e) $y=\dfrac{x+3}{x^2-2mx+9}$ có đúng hai đường tiệm cận gồm một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang

f) $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận gồm một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang

Lời giải

a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq 0\\4.(-1)-1.m=0\end{cases}\\m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=0\end{array}\right.$.

b) Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương trình $x^2+x-2=0$.

Hay phương trình $f(x)=x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -2.

Khi đó ta có $\begin{cases}\Delta'>0\\f(1)\neq 0\\f(-2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m>0\\m-1\neq 0\\8+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\m\neq 1\\m\neq -8\end{cases}\Leftrightarrow -8\neq m<1.$

c) Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $-3m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq\dfrac{1}{3}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=m$

Theo yêu cầu bài toán suy ra $m=5$ (thoả mãn)

d) Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $-m(m+1)+10m\neq 0$

Tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}=\dfrac{m+1}{2}$ theo đề bài $\dfrac{m+1}{2}=1\Leftrightarrow m=1$ (thoả mãn)

e) Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1-\dfrac{2m}{x}+\dfrac{9}{x^2}}=0$ nên đồ thị hàm số đã cho luôn có một tiệm cận ngang là

$y=0$. Do đó đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận thì đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng.

Phương trình $f(x)=x^2-2mx+9=0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng $-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta'=m^2-9=0\\ \begin{cases}\Delta'=m^2-9>0\\ f(-3)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-3\\ \begin{cases}m^2-9>0\\ m=-3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-3\end{array}\right.$

f) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng 1 tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2-3=0$ có nghiệm kép hoặc phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2-3=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\Delta=0\\ \begin{cases}\Delta>0\\ 1-(2m+1)+m^2-3=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2m+1)^2-4(m^2-3)=0\\ \begin{cases}(2m+1)^2-4(m^2-3)>0\\ m^2-2m-3=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{13}{4}\\ m=3\\ m=-1\end{array}\right.$$

Bài tập 2: Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có hai tiệm cận đứng b) $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có tiệm cận xiên

Lời giải

a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $g(x)=x^2-mx+1$ có hai nghiệm phân biệt khác $2 \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\neq 0\\ \Delta=m^2-4>0\\ g(2)=2^2-2m+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>2\end{array}\right.\\ m\neq\dfrac{5}{2}\end{cases}$.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm xiên đứng khi và chỉ khi phương trình $g(x)=2x^2-3x+m=0$ không có nghiệm $x=m$ tức là $g(m)\neq 0 \Leftrightarrow 2m^2-2m\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ m\neq 1\end{cases}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Giá trị m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2m-1}{x+m}$ đi qua điểm $M(3;1)$ là

A. $m=-3$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(3;1)$ nên đồ thị hàm có tiệm cận đứng là $x=3$

Suy ra $x+m=0$ có nghiệm là 3 do vậy $3+m=0\Leftrightarrow m=-3$.

Thử lại, với $m=-3\Rightarrow y=\dfrac{2x-7}{x-3}$ có $\lim\limits_{x\to 3^+} y=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-7}{x-3}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^-} y=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x-7}{x-3}=+\infty$.

Vậy $m=-3$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

A. $m>-2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m<-2$. **D.** $m\neq -2$.

Lời giải

Để $x=m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{2x+4}{x-m}$ thì $\begin{cases}v(m)=0\\u(m)\neq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-m=0\\2m+4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\m\neq -2\end{cases}\Rightarrow m\neq -2$$

Câu 3: Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2025;2025]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên trái trục tung là

A. 2020. **B.** 2025. **C.** 4041. **D.** 4042.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=m$ nằm bên trái trục tung

$\Leftrightarrow m<0$.

$$\begin{cases}m\in[-2025;2025]\\m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\{-2025;-2020;...;-1\}.$$

Vậy có 2025 giá trị nguyên của m thoả mãn yêu cầu.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+4x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19. **B.** 15. **C. 16.** **D.** 17.

Lời giải

Ta có đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+4x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình $x^2+4x-m-3$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^2-(-m-3)>0 \\ 1^2+4.1-m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-7 \\ m\neq 2 \end{cases}$

Từ đó ta suy ra $m=\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 5: Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Giá trị $m+n$ là

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải

Điều kiện: $x^2+mx+n-6\neq 0$.

Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=2m-n$.

Vì đồ thị hàm số nhận trục hoành làm tiệm cận ngang nên $2m-n=0$.

Đặt $f(x)=(2m-n)x^2+mx+1$ và $g(x)=x^2+mx+n-6$.

Vì $f(0)\neq 0$ với mọi m, n nên đồ thị nhận trục tung $x=0$ là tiệm cận đứng khi $g(0)=0$ $\Leftrightarrow n=6$. Suy ra $m=\dfrac{n}{2}=3$. Vậy $m+n=9$.

Câu 6: Số giá trị nguyên của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-2x+m}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. 5. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-2x+m}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

Vậy để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-2x+m}$ có đúng ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x^2-2x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn hoặc bằng -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ (x_1+1)(x_2+1)\geq 0 \\ (x_1+1)+(x_2+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ m+2+1>0 \\ 4>0 \end{cases} \Leftrightarrow -3<m<1$. Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0\}$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-2mx-m-2}$. Biết với $m=\dfrac{a}{b}(a,b\in\mathbb{N},\ \dfrac{a}{b}$ tối giản) thì đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận. Tính $a+b$.

A. $a+b=7$. **B.** $a+b=5$. **C.** $a+b=8$. **D.** $a+b=6$.

Lời giải

Để đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì hoặc phương trình $x^2-2mx-m-2=0$ có nghiệm kép $x=2$ hoặc phương trình $x^2-2mx-m-2=0$ phải có hai nghiệm (một nghiệm $x_1=2$ và một nghiệm $x_2\neq 2$).

Do $\Delta'=m^2+m+2>0,\forall m$ nên ta chỉ xét trường hợp thứ hai phương trình $x^2-2mx-m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt. Thay $x=2$ vào phương trình ta được $m=\dfrac{2}{5}$ (thỏa mãn).

Vậy $a=2,b=5,a+b=7$.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị của tham số để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{m-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=m\Rightarrow y=m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 tiệm cận $\Leftrightarrow$ $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 1 tiệm cận đứng.

Ta có: $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m.1^2-1=0\\m.2^2-1=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị tham số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{mx^2-2(m-1)x+m-2}$ có đồ thị (C_m). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để (C_m) có đúng 2 đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Trường hợp 1: $m=0$, ta được hàm số $y=\dfrac{x-2}{2x-2}$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$; tiệm cận ngang $y=\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m\neq 0$, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}y=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Xét phương trình: $mx^2-2(m-1)x+m-2=0(m\neq 0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{m-2}{m}\end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số (C_m) có đúng 2 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số (C_m) chỉ có 1 tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow mx^2-2(m-1)x+m-2=0$ hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 2

hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{m-2}{m}=2\\\dfrac{m-2}{m}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 10: Cho đường cong $(C):y=\dfrac{x+a}{x-1}$. Biết điểm M thuộc (C). Tính tổng các giá trị của tham số a để tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng $3\sqrt{2}+2$.

A. $3\sqrt{2}-2$. **B.** 6. **C.** -2. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}$.

Lời giải

Tiệm cận đứng $x=1$; tiệm cận ngang $y=1$. Ta có: $f'(x)=\dfrac{-1-a}{(x-1)^2}$

Phương trình tiếp tuyến tại M của (C) là $(d):y=\dfrac{-1-a}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+a}{x_0-1}$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng: $A\left(1;\dfrac{x_0+2a+1}{x_0-1}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang: $B(2x_0-1;1)$

Giao hai đường tiệm cận của (C): $I(1;1)$. Khi đó: $IA=\left|\dfrac{2a+2}{x_0-1}\right|$; $IB=2|x_0-1|$.

Ta có: $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB=|2a+2|=3\sqrt{2}+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\a=\dfrac{-3\sqrt{2}-4}{2}\end{array}\right.$

Vậy tổng cần tìm là -2.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^3+3x^2+m+1}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $\left[\begin{array}{l} m \le -4 \\ m > 0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > -1 \end{array}\right.$. **C.** $-5 \le m < -1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \le -5 \\ m > -1 \end{array}\right.$.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 + 3x^2 + m + 1$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $g(1) = 0 \Rightarrow 1 + 3 + m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -5$.

Khi đó $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2$

$\Rightarrow y = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} y = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} = \dfrac{1}{9}$;

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -2^+} y = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^-} y = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} = +\infty$

Nên đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng $x = -2$.

Trường hợp 2: $g(1) \ne 0 \Rightarrow 1 + 3 + m + 1 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne -5$.

Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng khi phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow g(0).g(-2) > 0 \Leftrightarrow (m+1)(m+5) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > -1 \end{array}\right.$.

Kết hợp hai trường hợp ta có những giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m \le -5 \\ m > -1 \end{array}\right.$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m-1)x + m^2 - 2m + 1}{1 - x}$ (1), m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}$.

A. $m = \pm 2$. **B.** $m = \pm 3$. **C.** $m = \pm 4$. **D.** $m = \pm 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y = \dfrac{x^2 + (m-1)x + m^2 - 2m + 1}{1 - x} = -x - m + \dfrac{m^2 - m + 1}{1 - x}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta : y = -x - m$.

Tiệm cận xiên cắt hai trục tọa độ tại hai điểm $A(0; -m)$ và $B(-m; 0)$.

Diện tích tam giác OAB là $S = \dfrac{1}{2} OA.OB = \dfrac{1}{2} |y_A| . |y_B| = \dfrac{1}{2} m^2$.

Theo giả thiết $S = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\pm 1$.

Câu 13: Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ có hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 5.

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 5.

Lời giải

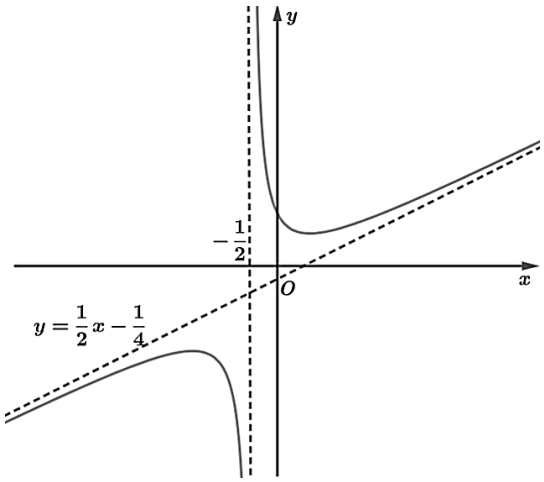
Xét hàm nhất biến $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ có tiệm cận đứng $x=m$ và tiệm cận ngang $y=1$.

Để hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 5 khi và chỉ khi: $|m|.1=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=-5 \end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn và tổng chúng bằng 0.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{nx^2+1}{mx+1}\ (mn\neq 0)$ có đồ thị (C) như hình vẽ:



a) $\dfrac{n}{m}=-\dfrac{1}{4}$.

b) $m=-\dfrac{1}{2}$.

c) $m+n=3$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{1}{2}x\right]=0$.

Lời giải

a) Sai: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^2+1}{mx^2+x}=\dfrac{n}{m}=\dfrac{1}{2}$.

b) Sai: Đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x=-\dfrac{1}{m}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow m=2$

c) Đúng: Từ hai ý a) và b) ta có: $\left\{\begin{array}{l} m=2n \\ m=2 \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} m=2 \\ n=1 \end{array}\right.\Rightarrow m+n=3$; $n=2\Rightarrow m+n=3$

d) Sai: Đường tiệm cận xiên $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{1}{2}x\right]=-\dfrac{1}{4}$.

Câu 2: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(m+1)x^2+(2m+1)x+m+2}{x+1}$.

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=1$

b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1;2)$ khi $m=\dfrac{1}{2}$

c) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $d:3x+4y-5=0$ khi $m=1$

d) Giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) luôn thuộc Parabol $(P):y=-x^2$

Lời giải

a) Sai: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=-1$

b) Đúng: $y=\dfrac{(m+1)x^2+(2m+1)x+m+2}{x+1}=(m+1)x+m+\dfrac{2}{x+1}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta:y=(m+1)x+m$

Vì tiệm cận xiên đi qua điểm $M(1;2)$ nên $2=(m+1).1+m\Leftrightarrow 2m=1\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

c) Sai: Ta có $\Delta:y=(m+1)x+m\Leftrightarrow(m+1)x-y+m=0$.

Tiệm cận xiên vuông góc với đường thẳng $d:3x+4y-5=0$

nên $(m+1).3+4.(-1)=0\Leftrightarrow m+1=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{3}$.

d) Đúng: Giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(-1;-1)\in(P)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m>0$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $m\neq 0$

d) Tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận là $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$

Lời giải

a) Điều kiện $x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq -2$. Vậy tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi hệ số x^2 trên tử phải bằng 0 suy ra $m=0$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $x=-2$ không là nghiệm của tam thức

$$g(x)=mx^2+6x-2\Leftrightarrow g(-2)\neq 0\Leftrightarrow m\neq\frac{7}{2}$$

d) Đồ thị hàm số có chắc chắn một tiệm cận xiên (hoặc ngang). Suy ra để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận thì nó phải có một tiệm cận đứng. Điều này tương đương với $m\neq\dfrac{7}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}$ có đồ thị là (C) với m là tham số

a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận khi $m\neq\dfrac{1}{3}$

b) Khi $m=1$ thì đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình $y=x-2$

c) Biết đồ thị (C) có hai đường tiệm cận và khi $m=\pm 2$ thì góc tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số bằng $45°$.

d) Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị (C) có đường tiệm cận xiên cắt các trục toạ độ tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4. Khi đó tổng bình phương các phần tử của tập S bằng 4.

Lời giải

Ta có: $y=mx-2+\dfrac{6m-2}{x+3m}$

a) Đúng: Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận khi và chỉ khi $6m-2\neq 0\Leftrightarrow m\neq\dfrac{1}{3}$

b) Đúng: Khi $m=1$ thì đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình $y=x-2$

Phương trình hai đường tiệm cận là:

$$\Delta_1: x=-3m\Leftrightarrow x+3m=0 \qquad \Delta_2: y=mx-2\Leftrightarrow mx-y-2=0$$

c) Sai: Vecto pháp tuyến của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(1;0);\overrightarrow{n_2}=(m;-1)$

Góc tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số bằng $45°\Leftrightarrow \cos 45°=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$

$$\Leftrightarrow\frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2m^2=m^2+1\Leftrightarrow m=\pm 1$$

d) Đúng: Hàm số có tiệm cận xiên khi $m\neq 0$ và $m\neq\dfrac{1}{3}$. Khi đó $A(0;-2);B\left(\dfrac{2}{m};0\right)$

Ta có diện tích tam giác $OAB=\dfrac{1}{2}.OA.OB=4\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}.|-2|.\left|\dfrac{2}{m}\right|=4\Leftrightarrow m=\pm 2$ nên tổng bình phương các phần tử của tập S bằng 4.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+4x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=0$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang $y=0$.

Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì đồ thị phải có đúng 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x)=x^2+4x+m=0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=-1$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta'=0\\ \begin{cases}\Delta'>0\\ f(-1)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4-m=0\\ \begin{cases}4-m>0\\ 1-4+m=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=3\end{array}\right.$$

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{m-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=m\Rightarrow$ tiệm cận ngang $y=m$.

Để hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng.

Suy ra $mx^2-1=0$ có một nghiệm bằng 1 hoặc bằng 2.

Khi đó $\left[\begin{array}{l} m-1=0 \\ 4m-1=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$.

Với $m=1\Rightarrow y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{x+1}{x-2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2^+} y=+\infty\Rightarrow$ tiệm cận đứng $x=2$.

Với $m=\dfrac{1}{4}\Rightarrow y=\dfrac{\dfrac{1}{4}x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{x+2}{4(x-1)}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty\Rightarrow$ tiệm cận đứng $x=1$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa bài.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{(2m+1)x^2+3}{\sqrt{x^4+1}}$, m là tham số. Tìm giá trị của m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;-3)$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=2m+1\Rightarrow d: y=2m+1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Do $A(1;-3)\in d\Leftrightarrow 2m+1=-3\Leftrightarrow m=-2$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

Lời giải

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-2m-m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó, đồ thị hàm số có:

Tiệm cận đứng: $x=1$, song song với Oy và cắt Ox tại điểm $A(1;0)$.

Tệm cận ngang: $y=2m$, song song với Ox và cắt Oy tại điểm $B(2m;0)$.

Diện tích hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận cùng với hai trục tọa độ là

$S=OA.OB=1.|2m|=8\Rightarrow m=\pm 4$.

Câu 5: Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành và trục trung

làm hai đường tiệm cận. Tính $m+n$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}2m-n=0\\n-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=3\\n=6\end{cases}$. Vậy $m+n=9$.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+2mx+3m+4}$ có đúng một đường tiệm cận đứng là

Lời giải

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+2mx+3m+4}$ có đúng một đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2+2mx+3m+4=0$ có duy nhất một nghiệm hoặc phương trình $x^2+2mx+3m+4=0$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm $x=-1$ và một nghiệm x khác -1.

Trường hợp 1: Phương trình $x^2+2mx+3m+4=0$ có duy nhất một nghiệm

Suy ra $\Delta'=0\Leftrightarrow m^2-3m-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=4\end{array}\right.$.

Trường hợp 2: Phương trình có một nghiệm bằng -1, một nghiệm khác -1.

Khi đó ta có: $(-1)^2+2.(-1)m+3m+4=0\Leftrightarrow m=-5$.

Thử lại thấy với $m=-5$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện.

Vậy $m\in\{-5;-1;4\}$ nên có ba giá trị.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-2mx-m-2}$. Biết với $m=\dfrac{a}{b}(a,b\in\mathbb{N},\dfrac{a}{b}$ tối giản) thì đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận. Tính $a+b$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{x^2-2mx-m-2}=0\Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x^2-2mx-m-2=0(1)$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 2.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta=0\\\begin{cases}\Delta>0\\f(2)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4m^2+4m+8=0\\\begin{cases}4m^2+4m+8>0\\2^2-2m.2-m-2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}vn\\m=\dfrac{2}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\frac{2}{5}.$$

Vậy $a=2,b=5\Rightarrow a+b=7.$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-bx^2-a^2x+a^2b}$ có đồ thị (C), với a và b là hai tham số nguyên. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số $(a;b)$ để có đúng hai đường tiệm cận (nếu chỉ xét tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

Lời giải

Ta có: $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-bx^2-a^2x+a^2b}=\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-a)(x+a)(x-b)}$, ĐKXĐ: $\begin{cases}x\neq\pm a\\ x\neq b\end{cases}$.

Đồ thị (C) của hàm số $f(x)$ luôn có một đường tiệm cận ngang nên để đồ thị (C) của hàm số $f(x)$ luôn có hai tiệm cận thì đồ thị (C) phải có đúng một tiệm cận đứng.

Trường hợp 1: Phương trình $(x-a)(x+a)(x-b)=0$ có nghiệm $x=1$ và $x=4$, ta có các bộ $(a;b)$ thỏa mãn là $(1;4)$, $(-1;4)$, $(4;1)$ và $(-4;1)$.

Trường hợp 2: Phương trình có nghiệm đơn $x=-a=1$ và nghiệm kép $x=a=b$ ta có bộ $(a;b)$ thỏa mãn là $(-1;-1)$.

Trường hợp 3: Phương trình có nghiệm đơn $x=-a=4$ và nghiệm kép $x=a=b$ ta có bộ $(a;b)$ thỏa mãn là $(-4;-4)$.

Trường hợp 4: Phương trình có nghiệm bội ba hay $a=b=0$ ta có bộ $(a;b)$ thỏa mãn là $(0;0)$

Vậy có tất cả 7 cặp $(a;b)$ thỏa mãn.

----------HẾT----------

BÀI 04 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐTHS

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

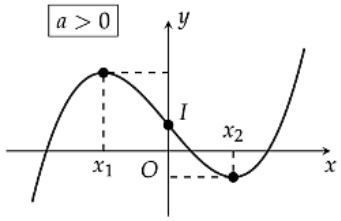
1 Các bước khảo sát hàm số y = f(x)

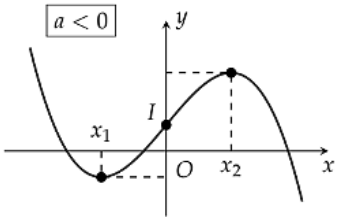
Để khảo sát hàm số $y = f(x)$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số
- **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm tại đó $y' = 0$ hoặc đạo hàm không tồn tại
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
  - Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
- **Bước 3:** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

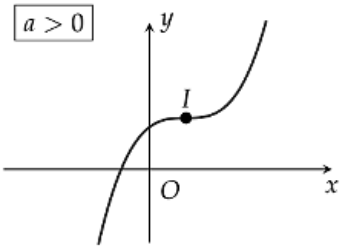
2 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

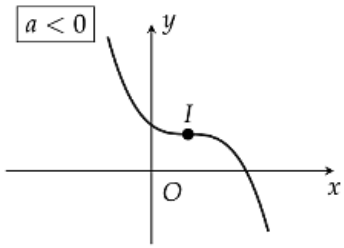
a) **Trường hợp 1:** $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2. Khi đó hàm số có hai điểm cực trị là $x = x_1$ và $x = x_2$



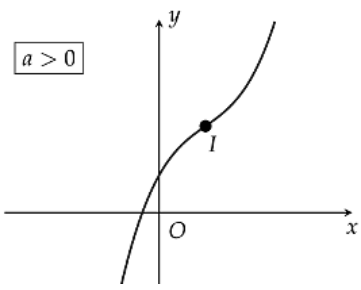


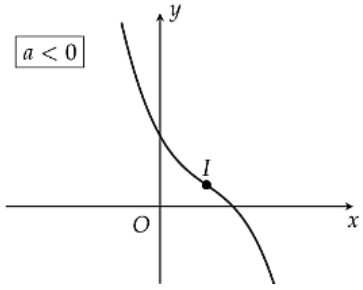
b) **Trường hợp 2:** $y' = 0$ có nghiệm kép $x = x_0$. Khi đó hàm số không có cực trị





b) **Trường hợp 3:** $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó hàm số không có cực trị



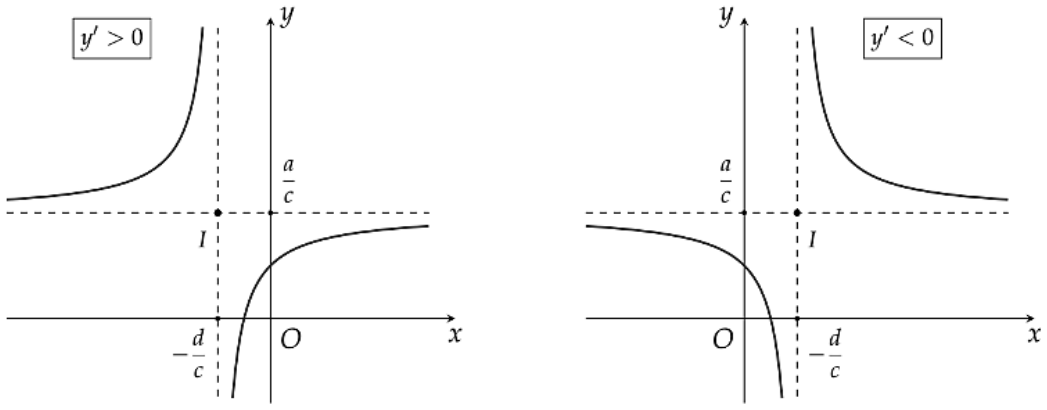


Một số lưu ý cần nhớ về hàm số bậc ba:

- Hàm số không có điểm cực trị khi và chỉ khi $b^2-3ac\le 0$ hoặc $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$
- Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases}a\ne 0\\b^2-3ac>0\end{cases}$
- Liên hệ giữa tổng và tích hạ nghiệm $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}\\x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}\end{cases}$
- Toạ độ tâm đối xứng của đồ thị chính là trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị. Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm của phương trình $y''=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{3a}$
- Tiếp tuyến tại tâm đối xứng sẽ có hệ số góc nhỏ nhất nếu $a>0$ và lớn nhất nếu $a<0$

3 Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c\ne 0,\ ad-bc\ne 0$

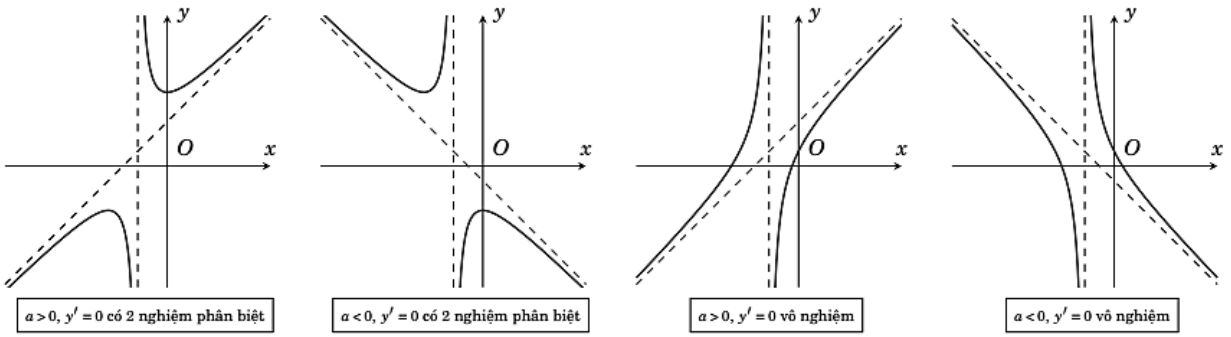
- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng
- Tiệm cận ngang: $y=\dfrac{a}{c}$; tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$
- Giao với Ox: $y=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$; giao với Oy: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{b}{d}$
- Hình dạng đồ thị được minh hoạ như sau:



4 Hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$, $a\ne 0, m\ne 0$ (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{am.x^2+2an.x+b.n-m.c}{(mx+n)^2}$
- Hàm số có hai điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt, không có cực trị khi phương trình $y'=0$ vô nghiệm
- Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng

- Hình dạng đồ thị được minh hoạ như sau:



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

- Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm tại đó $y'=0$ hoặc đạo hàm không tồn tại
- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
- Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số

Bước 3: Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=x^3-3x^2+1$ b) $y=-2x^3-3x^2+1$

c) $y=x^3+3x^2+3x+2$ d) $y=x^3-3x^2+4x-2$

Lời giải

a) $y=x^3-3x^2+1$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

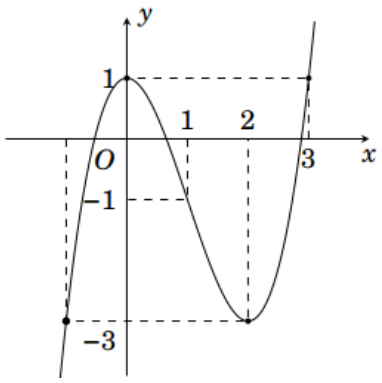
Sự biến thiên: $y'=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0; y_{CD}=1$ và đạt cực tiểu tại $x=2; y_{CT}=-3$.



Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(2;-3);(-1;-3);(3;1)$

Đồ thị nhận điểm $I(1;-1)$ làm tâm đối xứng

b) $y=-2x^3-3x^2+1$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

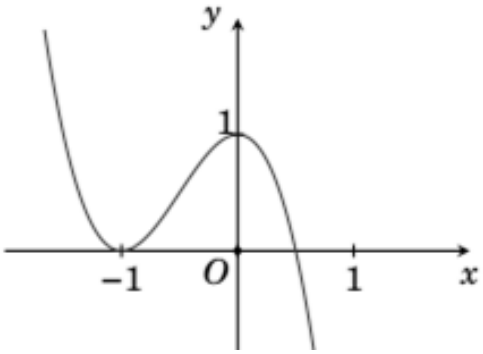
Sự biến thiên: $y'=-6x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty;\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;+\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0;y_{CD}=1$ và đạt cực tiểu tại $x=-1;y_{CT}=0$.



Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1;-4);(-2;5)$

Đồ thị nhận điểm $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng

c) $y=x^3+3x^2+3x+2$

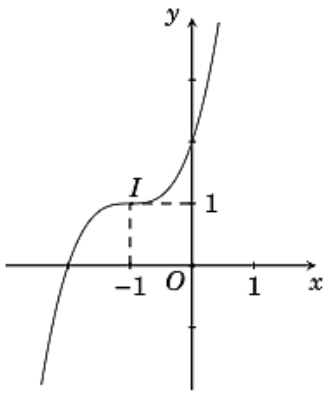
Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y'=3x^2+6x+3=0\Leftrightarrow x=-1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty;\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và hàm số không có cực trị



Đồ thị nhận điểm $I(-1;1)$ làm tâm đối xứng

d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x + 4 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} = -\infty; \lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$

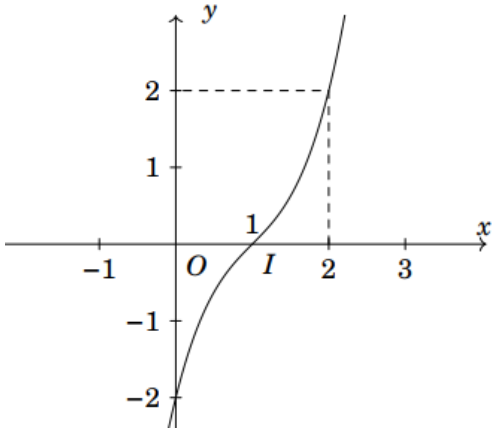
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và hàm số không có cực trị

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(2;2);(0;-2);(1;0)$

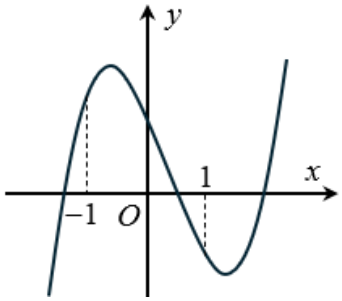
Đồ thị nhận điểm $I(1;0)$ làm tâm đối xứng



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d<0$. **B.** $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.

C. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$. **D.** $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

Lời giải

Nhìn vào nhánh phải của đồ thị ta thấy đồ thị có hướng đi lên suy ra $a>0$

Nhìn vào giao điểm của đồ thị với trục tung ta thấy đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương suy ra $d>0$.

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị $x_1,\ x_2$ với $x_1.x_2<0\Leftrightarrow\dfrac{c}{3a}<0\Leftrightarrow c<0$ (vì $a>0$)

Vì $-1<x_1<0$ và $x_2>1$ nên $x_1+x_2>0\Leftrightarrow\dfrac{-2b}{3a}>0\Leftrightarrow -2b>0\Leftrightarrow b<0$ (vì $a>0$)

Vậy $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

Câu 2: Bảng biến thiên ở hình bên là một trong bốn hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

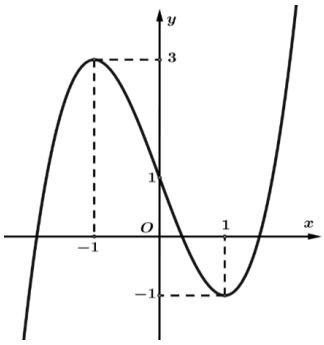
A. $y=-x^3-3x^2$. **B.** $y=x^3-3x^2-1$. **C.** $y=x^3+2x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Lời giải

Ta thấy đây là hàm số bậc ba và $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$ nên $a<0$

Ta có $f(0)=1$ nên hàm số cần tìm là $y=-x^3+3x+1$

Câu 3: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^3-3x-1$. **C.** $y=-x^3-3x-1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

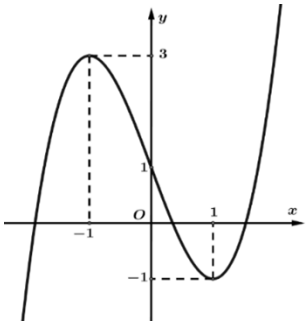
Lời giải

Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a\neq 0\right)$.

Nhìn vào nhánh phải của đồ thị ta thấy đồ thị có hướng đi lên suy ra $a>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $y=1$. Vậy hàm số thỏa đề là $y=x^3-3x+1$.

Câu 4: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a>0,b<0,c<0,d>0$. **B.** $a>0,b>0,c<0,d>0$

C. $a>0,b<0,c>0,d>0$ **D.** $a<0,b<0,c<0,d>0$.

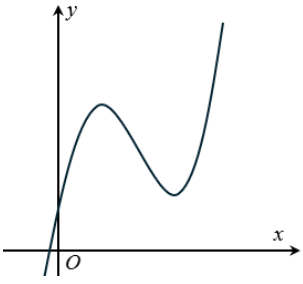
Lời giải

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy: $a>0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d>0$.

Hàm số có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ thỏa mãn: $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0\\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{b}{a}<0\\ \dfrac{c}{a}<0\end{cases}\Rightarrow b<0;c<0$.

Câu 5: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+1$.

B. $y=x^3-3x^2+1$.

C. $y=-\frac{1}{2}x^3+3x^2+\frac{9}{2}x+1$.

D. $y=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+1$.

Lời giải

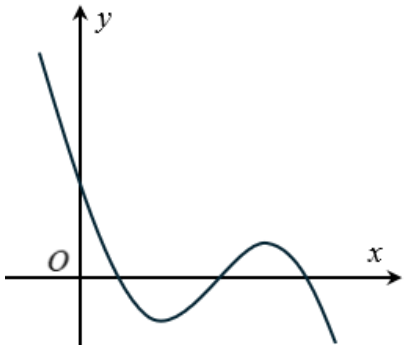
Dựa vào dạng đồ thị ta có $a>0$.

$y=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+1\Rightarrow y(1)=1$ (loại); $y=x^3-3x^2+1\Rightarrow y(1)=-1$ (loại).

Xét hàm $y=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+1$, $y'=\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{9}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=3\\x=3\Rightarrow y=1.\end{array}\right.$

Vậy đồ thị là của hàm số $y=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+1$.

Câu 6: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a<0,b>0,c>0,d>0$.

B. $a<0,b<0,c<0,d>0$.

C. $a>0,b>0,c<0,d>0$.

D. $a<0,b>0,c<0,d>0$.

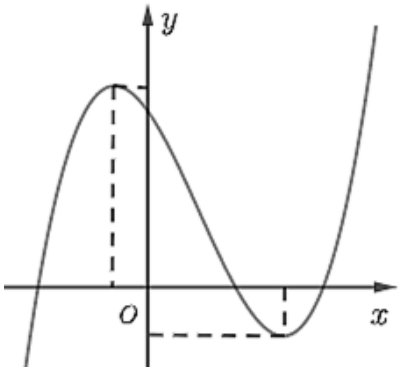
Lời giải

Dựa vào đồ thị suy ra $a<0$.

Giao điểm của đồ thị với trục Oy suy ra $d>0$.

Dựa vào cực trị ta có $x_1.x_2=\frac{c}{a}>0\Rightarrow c<0\Rightarrow x_1+x_2=\frac{-b}{a}>0\Rightarrow b>0$.

Câu 7: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a>0,b<0,c<0,d>0$. **B.** $a>0,b>0,c>0,d>0$.

C. $a>0,b<0,c>0,d<0$. **D.** $a>0,b>0,c<0,d>0$.

Lời giải

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$ theo hình vẽ:

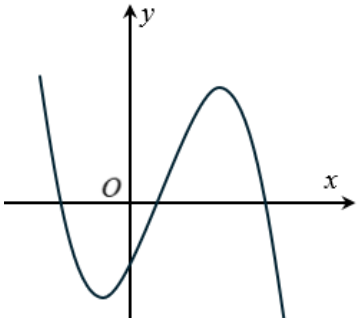
Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0,d)$ nằm phía trên trục hoành nên $d>0$;

Hàm số có hai cực trị trái dấu nên $ac<0$ mà $a>0$, do đó $c<0$.

Điểm uốn của đồ thị có hoành độ dương nên $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{2b}{6a}>0\Leftrightarrow ab<0$.

Do $a>0$ nên $b<0$.

Câu 8: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a<0,b>0,c>0,d<0$. **B.** $a<0,b<0,c>0,d<0$.

C. $a>0,b<0,c<0,d>0$. **D.** $a<0,b>0,c<0,d>0$.

Lời giải

Ta thấy nhánh đồ thị ngoài cùng bên phải hướng xuống suy ra $a<0$

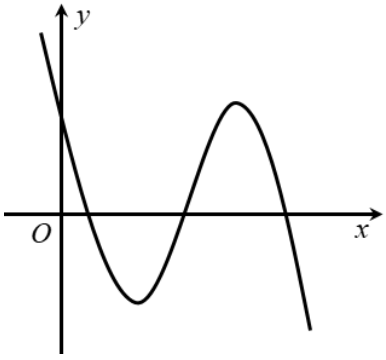
Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm suy ra $d<0$

Gọi x_1,x_2 là 2 điểm cực trị của hàm số.

Ta có: $x_1+x_2=\frac{-b}{3a}>0\Rightarrow b>0$ và $x_1.x_2=\frac{c}{3a}<0\Rightarrow c>0$

Vậy $a<0,b>0,c>0,d<0$.

Câu 9: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a<0,b>0,c>0,d>0$. **B.** $a>0,b>0,c<0,d>0$.

C. $a<0,b<0,c<0,d>0$. **D.** $a<0,b>0,c<0,d>0$.

Lời giải

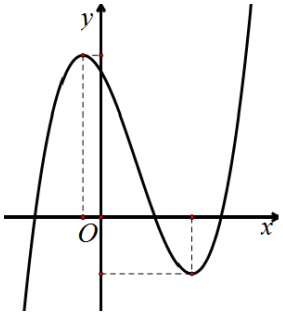
Do nhánh bên phải của đồ thị đi xuống nên $a<0$.

Đồ thị cắt trục tung ở phần dương nên $d>0$.

Đồ thị có 2 cực trị tại hai giá trị x dương nên phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\Rightarrow 3ax^2+2bx+c=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Rightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-3ac>0\\-\dfrac{2b}{3a}>0\\\dfrac{c}{3a}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b>0\\c<0\end{cases}.$$

Câu 10: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau

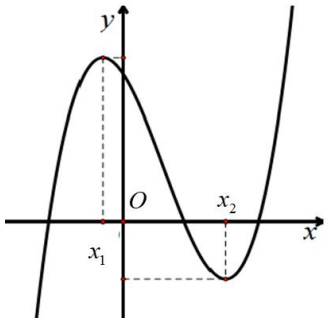


Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<0,b<0,c<0,d>0$. **B.** $a>0,b<0,c>0,d<0$.

C. $a>0,b<0,c<0,d>0$. **D.** $a>0,b<0,c>0,d>0$.

Lời giải



Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty\Rightarrow a>0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tọa độ $(0;d)$ suy ra $d>0$.

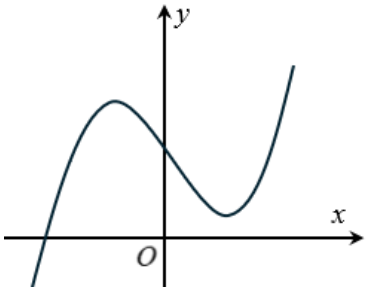
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số.

Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0 \\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a}<0 \end{cases}$, mà $a>0$, suy ra $b<0$, $c<0$.

Vậy $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$.

Câu 11: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a>0,b>0,c>0,d>0$.
B. $a>0,b>0,c<0,d>0$.
C. $a>0,b<0,c<0,d>0$.
D. $a>0,b<0,c<0,d<0$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm bậc ba ta nhận xét:

Nhánh cuối đồ thị hàm số đồng biến nên $a>0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

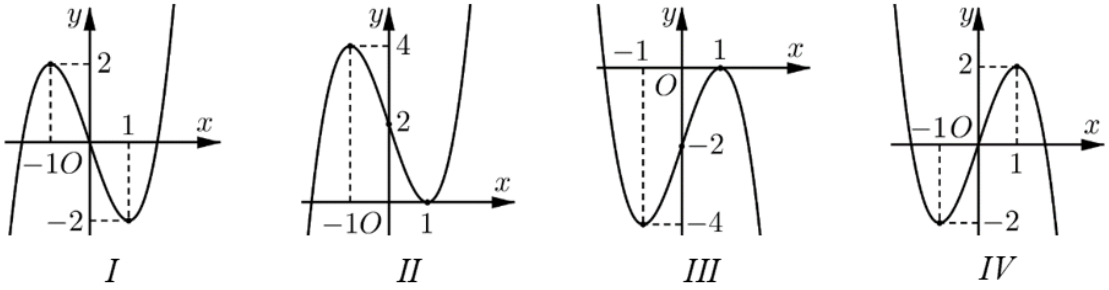
Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về 2 phía trục tung nên $ac<0\Rightarrow c<0$.

Đồ thị hàm số có hoành độ điểm uốn dương nên $ab<0\Rightarrow b<0$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Đồ thị nào thể hiện hàm số $y=f(x)$?



A. I.
B. II.
C. III.
D. IV.

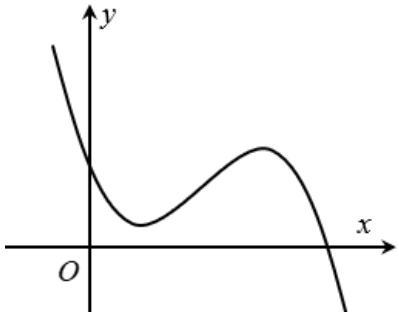
Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

Hàm số có giá trị cực đại bằng 2 và giá trị cực tiểu bằng -2 nên loại **B** và **C.**

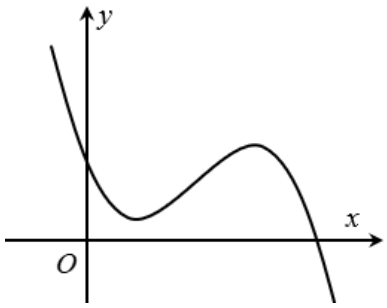
Khi $x \to +\infty$ thì $y \to +\infty$ nên chỉ có chọn **A** là phù hợp.

Câu 13: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Trong các hệ số a, b, c, d có bao nhiêu số âm ?



A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

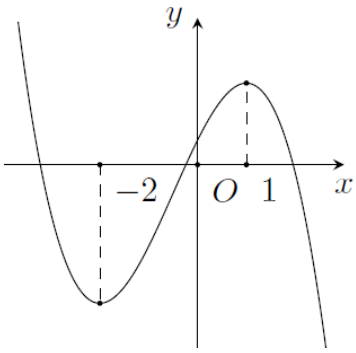
Lời giải



Dựa vào hình dạng đồ thị: đồ thị hàm bậc ba có hệ số $a < 0$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Đồ thị có hai điểm cực trị cùng nằm bên phải trục tung nên $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2. Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ x_1 . x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$. Vậy $a < 0, c < 0$.

Câu 14: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng?



A. $ab > 0, bc < 0, cd < 0$. **B.** $ab > 0, bc < 0, cd > 0$.

C. $ab > 0, bc > 0, cd > 0$. **D.** $ab < 0, bc < 0, cd > 0$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta có các nhận xét.

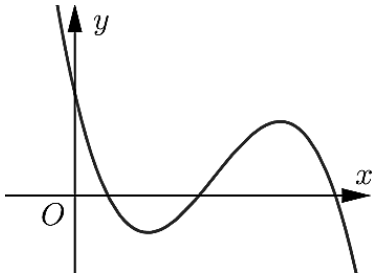
Dựa vào dáng điệu đồ thị, ta suy ra $a<0$.

Đồ thị cắt trục tung lại điểm có tung độ dương suy ra $d>0$.

Hàm số có các điểm cực trị $x=1$ và $x=-2$ nên phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ có hai nghiệm là $x=1$ và $x=-2$. Ta có $\frac{-2b}{3a}=-1$ và $\frac{c}{3a}=-2$. Do đó $b<0$ và $c>0$.

Như vậy $ab>0$, $bc<0$ và $cd>0$.

Câu 15: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a<0,b>0,c>0,d>0$.
B. $a<0,b<0,c<0,d>0$.
C. $a>0,b>0,c<0,d>0$.
D. $a<0,b>0,c<0,d>0$.

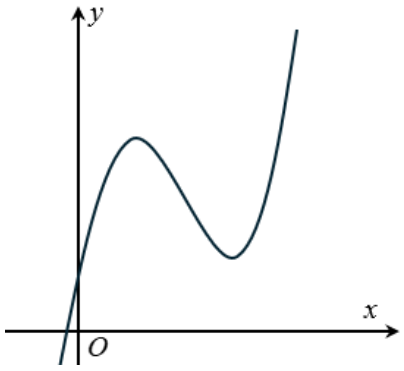
Lời giải

Ta có $a<0$ và đồ thị cắt Oy tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Mặt khác: $y'=3ax^2+2bx+c; y''=6ax+2b$ và từ đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ dương và điểm uốn có hoành độ dương.

Khi đó $\begin{cases} a.c>0 \\ -\dfrac{b}{3a}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>0 \\ c<0 \end{cases}$ do $a<0$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0,b>0,c>0,d>0$.
B. $a>0,b<0,c>0,d>0$.
C. $a<0,b<0,c>0,d<0$.
D. $a>0,b>0,c<0,d>0$.

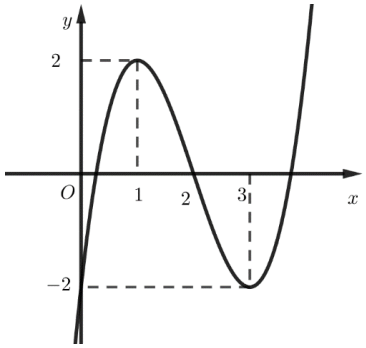
Lời giải

Dựa vào dạng đồ thị hàm bậc ba ta có $a>0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $M(0;1)$ suy ra $d=1>0$.

Hàm số có hai điểm cực trị dương suy ra $\begin{cases} -\dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<0 \\ c>0. \end{cases}$. Vậy $a>0, b<0, c>0, d>0$.

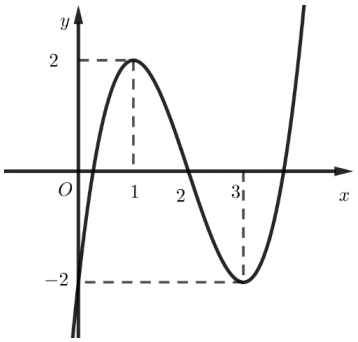
Câu 17: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Số lớn nhất trong các số a, b, c, d là:

A. c. **B.** a. **C.** b. **D.** d.

Lời giải



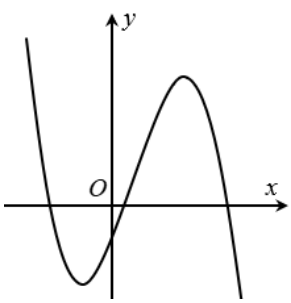
Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$

Đồ thị ham số có hai điểm cực trị là $M(1;2)$ và $N(3;-2)$ nên:

$$\begin{cases} a.1^3+b.1^2+c.1+d=2 \\ a.3^3+b.3^2+c.3+d=-2 \\ 3a.1^2+2b.1+c=0 \\ 3a.3^2+2b.3+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=2 \\ 27a+9b+3c+d=-2 \\ 3a+2b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=9 \\ d=-2 \end{cases}$$

Vậy $c=9$ là số lớn nhất.

Câu 18: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$. **B.** $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d<0$.
C. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$. **D.** $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d<0$.

Lời giải

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Nhìn vào đồ thị ta có: Phần bên phải của đồ thị đi xuống nên $a<0$.

Giao điểm với trục tung nằm phía dưới điểm O nên $d<0$.

Hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục tung nên suy ra phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac<0\Leftrightarrow c>0$. Điểm uốn lệch phải so với trục tung nên $-\dfrac{b}{3a}>0\Leftrightarrow b>0$.

Vậy suy ra $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.

Câu 19: Tìm m để đồ thị của hàm số $y=x^3+3mx^2-2x-4$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là $x_1,\ x_2,\ x_3$ thỏa mãn $x_1+x_2=2x_3$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^3+3mx^2-2x-4$ và trục hoành ta có

$x^3+3mx^2-2x-4=0\ (1)$.

Áp dụng định lý Vi-et ta có $x_1+x_2+x_3=3x_3=-3m\Rightarrow x_3=-m$.

Thay $x_3=-m$ vào (1) ta được $2m^3+2m-4=0\Leftrightarrow m=1$.

Thử lại : Thay $m=1$ vào (1) ta được $x^3+3x^2-2x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-1\pm\sqrt{5}\end{array}\right.$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy $m=1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 20: Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ cắt đường thẳng $y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thoả mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2>5$.

A. $m\ge -3$. **B.** $m>-2$. **C.** $m>-3$. **D.** $m\ge -2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-3x^2+2=m(x-1)\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-2x-2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x-2-m=0\ (*)\end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ cắt đường thẳng $y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $1\Leftrightarrow\begin{cases}1+2+m>0\\1-2-2-m\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow m>-3$.

Gọi x_2, x_3 là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 > 4 \Leftrightarrow 4 - 2(-2 - m) > 4 \Leftrightarrow m > -2$. Vậy $m > -2$.

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m,\ (C_m)$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng d đi qua $I(-1;2)$ có hệ số góc bằng $-m$ cắt đồ thị hàm số (C_m) tại 3 điểm phân biệt.

A. $m < \frac{3}{2}$. **B.** $m > \frac{3}{2}$. **C.** $m \le -2$ **D.** $m > 2$.

Lời giải

Ta có phương trình đường thẳng $d: y = -mx - m + 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m) :

$x^3 + 3x^2 + mx + m = -mx - m + 2,\ (1) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 2mx + 2m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 2m - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x^2 + 2x + 2m - 2 = 0,\ (2) \end{array}\right.$

Để cho d và (C_m) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - (2m - 2) > 0 \\ 1 - 2 + 2m - 2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$

Câu 22: Cho hàm số $y = 2x^3 - 7x^2 + 3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = x^3 - 5x^2 + (3-m)x + 2m$ (với $m \in \mathbb{R}$) có đồ thị (P). Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm phân biệt có hoành độ nằm trong $[-2;4]$. Tổng các giá trị nguyên của m bằng

A. -6. **B.** -10. **C.** -8. **D.** -5.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$2x^3 - 7x^2 + 3x = x^3 - 5x^2 + (3-m)x + 2m \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + mx - 2m = 0$ (1).

Đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm phân biệt có hoành độ nằm trong $[-2;4]$ khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-2;4]$.

$(1) \Leftrightarrow (x^2 + m)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [-2;4] \\ x^2 + m = 0\ (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-2;4] \Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-2;4]$ và khác 2.

Đặt $g(x) = x^2 + m \Rightarrow g'(x) = 2x$, ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên của $y=g(x)$

x	-2		0		2		4
$g'(x)$		-	0		+		
$g(x)$	$m+4$	↘	m	↗	$m+4$	↗	$m+16$

Từ bảng biến thiên phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-2;4]$ và khác 2

$\Leftrightarrow m<0<m+4\Leftrightarrow -4<m<0$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, nên $m\in\{-3;-2;-1\}$. Tổng các giá trị nguyên của m bằng -6.

Câu 23: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1,x_2,x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<3$.

A. $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{1}{2}\\ m\neq 0\end{cases}$. **B.** $m<1$. **C.** $-\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}<m<1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-2x^2+(1-m)x+m=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2-x-m)=0\ (1)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_3=1\\ x^2-x-m=0\ (2)\end{array}\right.$. Điều kiện để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt là phương trình

(2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ \Delta=1+4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m>-\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

Khi đó phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Ta có $x_1^2+x_2^2+x_3^2<3\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2<2\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2<2\Leftrightarrow 1^2+2m<2\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{1}{2}\\ m\neq 0\end{cases}$.

Câu 24: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị là đường cong (C_m). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3-2x^2+(1-m)x+m=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2-x-m)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\left(=x_3\right) \\ x^2-x-m=0(*) \end{array}\right.$$

Đề đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 thì phương trình $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 và thỏa mãn: $x_1^2+x_2^2+1^2=6$.

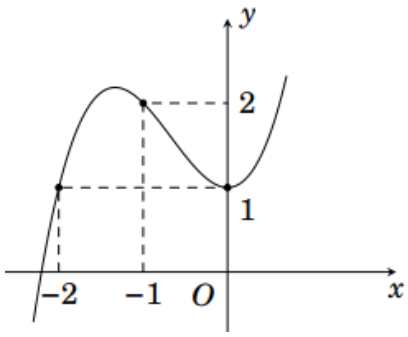
Từ đó ta có điều kiện sau: $\begin{cases} \Delta=1+4m>0 \\ x_1^2+x_2^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{1}{4} \\ \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1.x_2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{1}{4} \\ 1+2m=5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{1}{4} \\ m=2(t/m) \end{cases}$$

Vậy $m=2$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có toạ độ $(0;1)$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

d) $2a+3b+c=9$

Lời giải

a) Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, giá trị cực tiểu là $y=1$

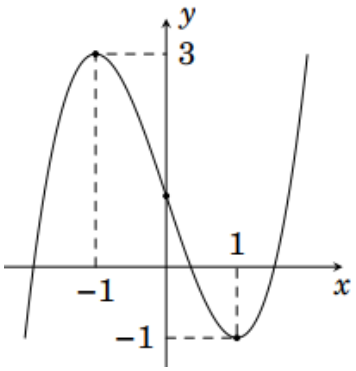
b) Đúng: Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có toạ độ $(0;1)$

c) Sai: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;x_0)$ với $-2<x_0<-1$

d) Sai: Đồ thị đi qua ba điểm $(-2;1);(-1;2);(0;1)$ và đạt cực trị tại $x=1$ nên ta được hệ:

$$\begin{cases} -8a+4b-2c+d=1 \\ -a+b-c+d=2 \\ d=1 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1;b=2;c=0;d=1 \Rightarrow 2a+3b+c=8$$

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có toạ độ $(0;1)$

b) Đường thẳng đi qua điểm $(0;1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng

c) $a-b+c+d=-1$

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3;18)$

Lời giải

a) Đúng: Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(-1;3)$ và $(1;-1)$ suy ra toạ độ tâm đối xứng là $(0;1)$ nên đồ thị hàm số cắt trục tung tại $(0;1)$.

b) Đúng: Do $I(0;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị nên đường thẳng qua nó sẽ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt I,A,B với I là trung điểm của AB. Suy ra $x_A+x_B=2x_I$.

Vậy ba điểm này có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.

c) Đúng: Ta có: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Từ hình vẽ ta có: $\begin{cases} f(-)=3 \\ f(1)=-1 \\ f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=3 \\ a+b+c+d=-1 \\ 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$

Giải hệ này ta được $a=1;b=0;c=-3;d=1$. Vậy $T=a-b+c+d=-1$

d) Sai: Do $a=1;b=0;c=-3;d=1$ nên hàm số đã cho là $y=x^3-3x+1$

Vậy hàm số không đi qua điểm có toạ độ $(3;18)$

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4

b) Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt

c) Trong bốn hệ số a,b,c,d có đúng hai số âm

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4;20)$

Lời giải

a) Sai: Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$

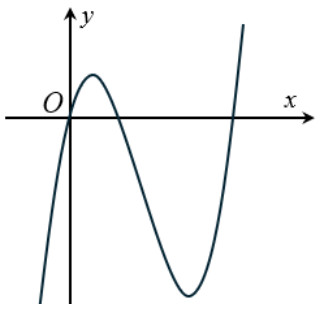
b) Đúng: Kẻ đường thẳng $y=2$ đi qua điểm $(0;2)$ và song song với Ox thì đường thẳng này cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt.

c) Đúng: Từ bảng biến thiên ta có: $\begin{cases} f(-2)=0 \\ f(0)=4 \\ f'(-2)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-1;\ b=-3;\ c=0;d=4$

Vậy có đúng hai số âm trrong bốn số trên

d) Đúng: Do $a=-1;\ b=-3;\ c=0;d=4$ nên hàm số đã cho là $y=-x^3-3x^2+4$. Thay toạ độ điểm $(-4;20)$ vào phương trình thì thoả mãn nên đồ thị hàm số đi qua $(-4;20)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên.



a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.

c) Phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt.

d) Trong các hệ số a,b,c,d có 2 hệ số dương.

Lời giải

Ta có: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ y' = 3ax^2 + 2bx + c$

"Nhánh bên phải" hướng lên $\Rightarrow a > 0$

Đồ thị qua gốc tọa độ $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = d = 0$.

Gọi $x_1; x_2$ là hoành độ các cực trị $x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b < 0; x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c > 0$

a) Sai: Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu

b) Đúng: Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.

c) Đúng: Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

d) Đúng: Trong các hệ số a,b,c,d có 2 hệ số dương.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3m^2x + 2024$ có đồ thị (C).

a) (C) luôn có hai điểm cực trị.

b) Khi m thay đổi thì đồ thị (C) luôn có tâm đối xứng cố định.

c) Khi m thay đổ thì đồ thị (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm.

d) Khi (C) có 2 cực trị thì đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y = ax + b$. Đặt $S = a + b$ thì $S \le 2024$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 3m^2;\ y'' = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2024; y = \dfrac{1}{3}x.y' + \left(-2m^2 + 2024\right)$

Tại các điểm cực trị, $y' = 0$ nên đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số có phương trình $y = -2m^2x + 2024$.

$\Rightarrow a = -2m^2; b = 2024 \Rightarrow S = a + b = -2m^2 + 2024 < 2024$

Lưu ý khi $m = 0$ thì hàm số không có cực trị.

a) Sai: (C) không có điểm cực trị khi $m = 0$

b) Đúng: Khi m thay đổi, (C) luôn có tâm đối xứng cố định.

c) Đúng: Khi m thay đổi, (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm. (Hàm số bậc ba luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm)

d) Sai: Khi (C) có 2 cực trị, đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y = ax + b$. Đặt $S = a + b$ thì $S \le 2024$ (dấu "=" không xảy ra)

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đường thẳng $y=3x+m-2$ cắt đồ thị $y=(x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt là

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $3x+m-2=(x-1)^3 \Leftrightarrow m=x^3-3x^2+1$ (1)

Nhận xét: (1) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $(d): y=m$ và đồ thị $(C): y=x^3-3x^2+1.$

Xét hàm số $y=x^3-3x^2+1;\ y'=3x^2-6x,\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3<m<1$ nên có ba giá trị nguyên của tham số m.

Câu 2: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=2x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-3x^2+mx+1=2x+1 \Leftrightarrow x^3-3x^2+(m-2)x=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-3x+m-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3x+m-2=0 \end{array}\right.$. Đặt $f(x)=x^2-3x+m-2$.

Để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $x^3-3x^2+(m-2)x=0$ phải có 3 nghiệm phân biệt, khi đó $f(x)=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 0. Do đó $\begin{cases} f(0)\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2\neq 0 \\ 9-4(m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ -4m>-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m<\dfrac{17}{4} \end{cases}$.

Do m là số nguyên dương nên $m\in\{1,3,4\}$.

Câu 3: Với m là một tham số thực thì đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ và đường thẳng $y=m$ có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm?

Lời giải

Hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ có tập xác định: $\mathbb{R}$; $y'=3x^2-4x+1;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ x=1 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		$1/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{-23}{27}$	↘	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên đồ thi hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ và đường thẳng $y=m$ có nhiều nhất là ba giao điểm.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-m^2+5m=0$ có ba nghiệm thực phân biệt?

Lời giải

Đặt $f(x)=x^3-3x^2-m^2+5m$.

Để $x^3-3x^2-m^2+5m=0$ có ba nghiệm thực phân biệt thì $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn: $f(x_1).f(x_2)<0$

Ta có: $f'(x)=3x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$f(0)=-m^2+5m$; $f(2)=-m^2+5m-4$.

Khi đó: $f(0).f(2)<0\Leftrightarrow\left(-m^2+5m\right)\left(-m^2+5m-4\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<m<1\\4<m<5\end{array}\right.$

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa mãn.

Câu 5: Cho hàm số $y=x^3-(m+2)x^2-(2m+13)x-m-2$ có đồ thị (C_m); đường thẳng $d:y=mx+m+8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A,B,C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-(m+2)x-(3m+13)x-2m-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=m+5\end{array}\right.$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A,B,C thì $\begin{cases}m\neq -7\\m\neq -6\end{cases}$

Giả sử $B(-1;8),C\left(m+5;m^2+6m+8\right)$. Để tam giác IBC cân tại I

thì $IB^2=IC^2\Leftrightarrow 20=(m+4)^2+\left(m^2+6m+4\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=-6\ (loai)\\m=-2\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

Vậy có ba giá trị của m thỏa mãn nên tổng các giá trị của m bằng -6.

Câu 6: Gọi đường thẳng d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m(m>0)$ cắt đồ thị $(C): y=-x^3+6x^2-9x+2$ tại ba điểm phân biệt A,B,C. Gọi B',C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B,C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8. Hãy tìm giá trị của tham số m.

Lời giải

Phương trình đường thẳng $d: y=m(x-2)$. Phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^3+6x^2-9x+2=m(x-2)\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-4x+m+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\Rightarrow A(2;0) \\ x^2-4x+m+1=0 \end{array}\right.$$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì $\Delta>0\Leftrightarrow 4-m-1>0\Leftrightarrow m<3$.

Giả sử $B(x_1,mx_1-2m), C(x_2,mx_2-2m)\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=m+1 \end{cases}$.

Ta có $B'(0,mx_1-2m), C'(0,mx_2-2m)$.

$$S_{BB'C'C}=\frac{1}{2}B'C'\left(BB'+CC'\right)=8\Leftrightarrow B'C'\left(BB'+CC'\right)=16.$$

Mà $B'C'=\left|m(x_1-x_2)\right|, BB'=|x_1|, CC'=|x_2|$.

Do m dương nên $x_1x_2=m+1>0$ mà $x_1+x_2=4>0\Rightarrow x_1>0, x_2>0$.

$$\Rightarrow B'C'=m|x_1-x_2|, BB'=x_1, CC'=x_2\Rightarrow m|x_1-x_2|(x_1+x_2)=16\Leftrightarrow m|x_1-x_2|=4$$

$$\Leftrightarrow m^2(x_1-x_2)^2=16\Leftrightarrow m^2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=16\Leftrightarrow m^2(16-4m-4)=16$$

$$\Leftrightarrow m^3-3m^2+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1(l) \\ m=2 \end{array}\right.$$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2$. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1. Biết rằng $S=\left(\frac{-a}{b};+\infty\right)$; trong đó a,b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Giá trị biểu thức $T=a+b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-(6m+5)x-2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-(6m+5)x-2=0(*) \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ lớn hơn -1 và khác 1. Ta có: $\begin{cases} \Delta>0 \\ x_1+x_2>-2 \\ (x_1+1)(x_2+1)>0 \\ 1^2-(6m+5)-2\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 36m^2+60m+33>0 \\ 6m+5>-2 \\ 6m+4>0 \\ m\neq -1 \end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{-2}{3}$

Do đó $a=2; b=3\Rightarrow T=a+b=5$

Câu 8: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d): y = mx - 1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$. Tìm giá trị của tham số m

Lời giải

Xét phương trình hoành độ: $x^3 - 2x^2 - 1 = mx - 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2x - m = 0 \ (1) \end{array}\right.$

Suy ra $A(0;-1)$ và hoành độ của điểm B và C là nghiệm của phương trình (1)

Để (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

Khi và chỉ khi: $\begin{cases} \Delta'_{(1)} > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \end{cases} (*)$

Giả sử: $B(x_1; \text{m}\, x_1 - 1)$, $C(x_2; \text{m}\, x_2 - 1)$. Theo Vi–ét ta có $x_1 + x_2 = 2$

Gọi G là trọng tâm của tam giác KBC:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{4 + x_1 + x_2}{3} \\ y_G = \dfrac{11 + mx_1 - 1 + mx_2 - 1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = \dfrac{2m + 9}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(2; \dfrac{2m + 9}{3}\right)$$

Trọng tâm G nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$ suy ra $\dfrac{2m + 9}{3} = 2.2 + 1 \Leftrightarrow m = 3$ thỏa mãn $(*)$

----------HẾT----------

Dạng 2: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc 1 / bậc 1

Để khảo sát hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$
- **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
  - Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
- **Bước 3:** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ b) $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$

c) $y=\dfrac{x+3}{1-x}$ d) $y=\dfrac{5+x}{2-x}$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Sự biến thiên: $y'=-\dfrac{3}{(x-2)^2}<0$ với mọi $x\neq 2$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

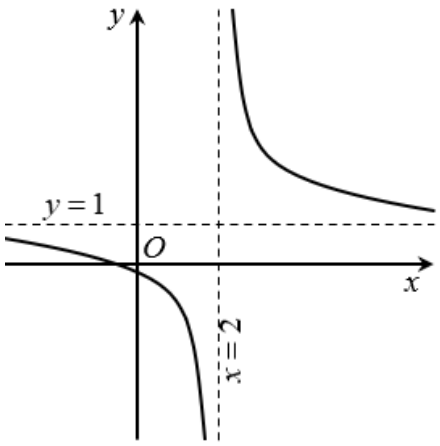
Tiệm cận:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-2}=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-2}=1.$

Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1

Đồ thị



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1;0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.

b) $y=\frac{2x+1}{x+1}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Sự biến thiên: Đạo hàm : $y'=\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\neq -1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

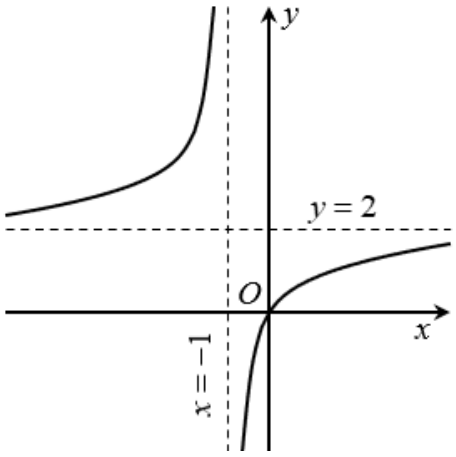
Tiệm cận:

- $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{2x+1}{x+1}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{2x+1}{x+1}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2$

Do đó $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'	$+$		$+$		
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	2

Đồ thị



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;1)$ và giao với trục hoành tại điểm $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(-1;2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này là trục đối xứng.

c) $y=\dfrac{x+3}{1-x}$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Sự biến thiên có đạo hàm $y'=\dfrac{(1-x)+(x+3)}{(1-x)^2}=\dfrac{4}{(1-x)^2}>0$ với mọi $x\neq 1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận

$$\lim_{x\to 1^+} y=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+3}{1-x}=-\infty;\ \lim_{x\to 1^-} y=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+3}{1-x}=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1}=-1;\ \lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1}=-1$$

Do đó $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

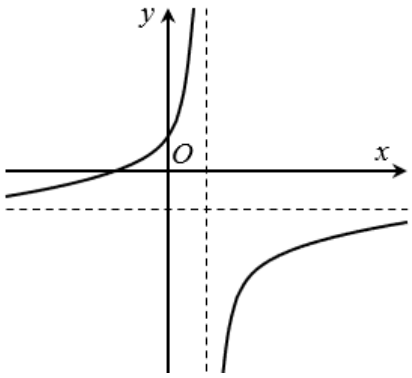
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	-1

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;3)$, giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-3;0)$.

Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



d) $y=\dfrac{5+x}{2-x}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Sự biến thiên: Đạo hàm $y'=\dfrac{7}{(-x+2)^2}>0$ với mọi $x\neq 2$

Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{1-x}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+3}{1-x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$

Do đó $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

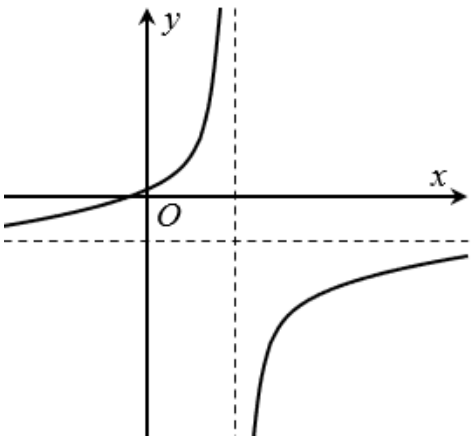
x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	-1

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;3)$, giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-3;0)$.

Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



Bài tập 2: Một cốc chứa 30 ml dung dịch KOH (Potassium Hydroxide) với nồng độ 100 mg / ml. Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ 8 mg / ml được trộn vào cốc.

a) Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn $x\,(\text{ml})$ từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.

b) Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x \ge 0$. Khảo sát sự biên thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.

c) Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8 mg/ml

Lời giải

a) Tổng khối lượng KOH sau khi trộn là: $30.100 + 8x = 3000 + 8x(mg)$.

Tổng thể tích dung dịch sau khi trộn là: $30 + x\,(\text{ml})$

Nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn là $C(x) = \dfrac{3000 + 8x}{30 + x}(\text{mg / ml})$.

b) $C(x) = \dfrac{3000 + 8x}{30 + x}, x \ge 0$. Tập xác định của hàm số là $D = [0; +\infty)$.

Sự biến thiên: Đạo hàm $C'(x) = \dfrac{8(30 + x) - (3000 + 8x)}{(30 + x)^2} = \dfrac{-2760}{(30 + x)^2} < 0$ với mọi $x \ne -30$.

Hàm số luôn nghịch biến trên $[0; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận: $\lim\limits_{x \to +\infty} C(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3000 + 8x}{30 + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{3000}{x} + 8}{\dfrac{30}{x} + 1} = 8$

Do đó $y = 8$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (phần bên phải trục Oy).

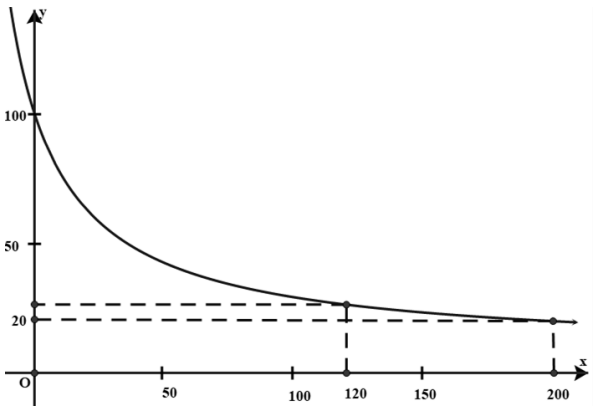
Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
y'	$-$	
y	100 ↘	8

Đồ thị:

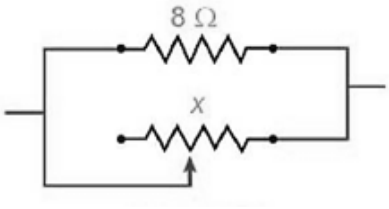
Hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;100)$.

Hàm số đi qua điểm $\left(120; \dfrac{132}{5}\right); (200; 20)$.



c) Vì $C'(x) = \dfrac{-2760}{(30 + x)^2} < 0, \forall x \ge 0$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} C(x) = 8$ nên nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8mg / ml.

Bài tập 3: Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ (theo Vật Ií Đại Cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).



Giả sử một điện trở $8\,\Omega$ được mắc song song với một biến trở như hình bên. Nếu điện trở đó được ki hiệu là $x(\Omega)$ thì điện trở tương đương R là hàm số của x. Vẽ đồ thị của hàm số $y=R(x),\ x>0$ và dựa vào đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

a) Điện trở tương đương của mạch thay đổi thế nào khi x tăng.

b) Tại sao điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá $8\,\Omega$.

Lời giải

Ta có $y=R(x)=\dfrac{8x}{8+x},x>0$ có tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Sự biến thiên: Đạo hàm: $y'=\dfrac{8(8+x)-8x}{(8+x)^2}=\dfrac{64}{(8+x)^2}>0,\forall x>0$

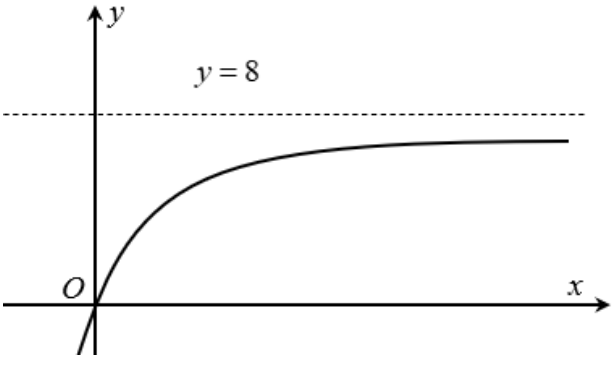
Hàm số luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$ vàm số không có cực trị. Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{\dfrac{8}{x}+1}=8$

Vậy $y=8$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (phần bên phải trục Oy).

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	↗	8

Đồ thị: Đồ thị hàm số giao với Ox,Oy tại $(0;0)$; Đồ thị hàm số đi qua $\left(1;\dfrac{8}{9}\right);\left(2;\dfrac{8}{5}\right)$



a) Vì $y'=\dfrac{64}{(8+x)^2}>0,\forall x>0$ nên khi x tăng thì điện trở tương đương của mạch cũng tăng.

b) Vì $y'=\dfrac{64}{(8+x)^2}>0,\forall x>0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=8$ nên điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá $8\,\Omega$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới đây?

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	2
		$-\infty$			

A. $y=\dfrac{2x-7}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x-2}$.

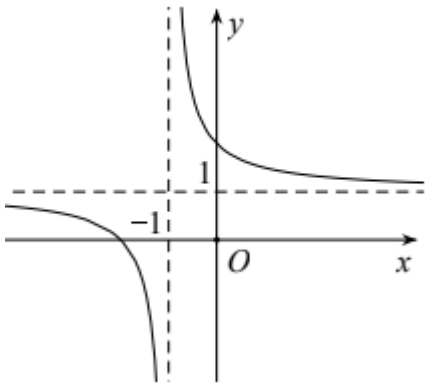
Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ nên ta loại đáp án **B.**

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$ nên ta loại đáp án **D.**

Xét đáp án A có $y'=\dfrac{3}{(x-2)^2}>0$ nên loại đáp án **A.**

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $0<b<a$. **B.** $0<a<b$. **C.** $b<0<a$. **D.** $a<b<0$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng lần lượt là $y=1; x=-1$

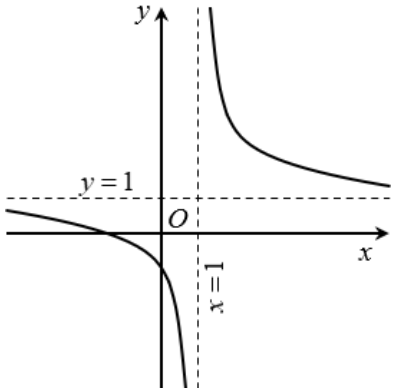
$\Rightarrow \frac{a}{c}=1; \frac{-d}{c}=-1 \Rightarrow a=c; d=c \Rightarrow a=c=d$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn $-1 \Rightarrow \frac{-b}{a}<-1 \Rightarrow \frac{b}{a}>1$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn $1 \Rightarrow \frac{b}{d}>1$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định nên $ad-bc<0$ mà $a=c=d; \frac{b}{a}>1 \Rightarrow b>a>0$

Câu 3: Hàm số nào sau đây mà đồ thị có dạng như hình vẽ bên dưới?

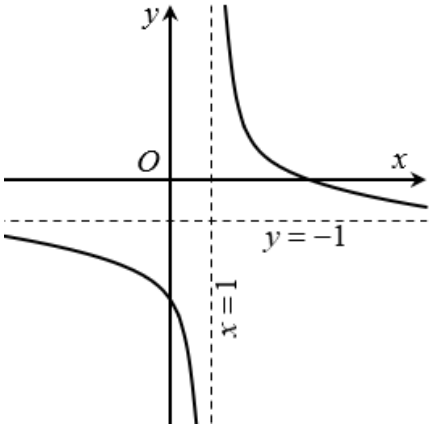


A. $y=\frac{x}{1-x}$. **B.** $y=\frac{x+1}{1-x}$. **C.** $y=\frac{x+1}{x-1}$. **D.** $y=\frac{x}{x-1}$.

Lời giải

Đồ thị trong hình bên có đường tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=1$, và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $M(0;0)$. Mặt khác ta thấy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Do đó chỉ có hàm số $y=\frac{x}{x-1}$ thỏa mãn những yếu tố trên.

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $b<0<a$. **B.** $0<b<a$. **C.** $b<a<0$. **D.** $0<a<b$.

Lời giải

Ta có: $y'=\frac{-a+b}{(x-1)^2}$.

Từ đồ thị suy ra hàm số nghịch biến nên: $-a+b<0 \Leftrightarrow a>b$.

Mặt khác đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-1$ nên $a<0$. Vậy $b<a<0$.

Câu 5: Bảng biến thiên sau đây của hàm số nào?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	2

A. $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

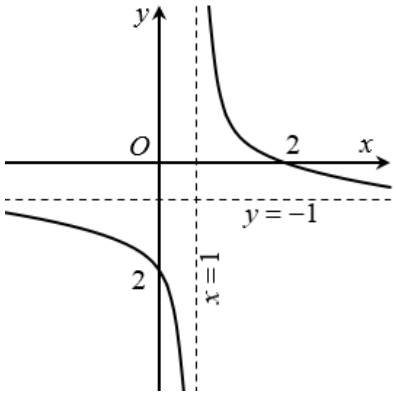
Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ nên loại $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$, $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

Xét phương án $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$: $y=\dfrac{2x+3}{x+1} \Rightarrow y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}<0, \forall x\neq -1$ suy ra hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định (loại).

Xét phương án $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$: $y=\dfrac{2x-1}{x+1} \Rightarrow y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0, \forall x\neq -1$ suy ra hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định (chọn).

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên



Tích $a.b$ bằng

A. 2. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 3.

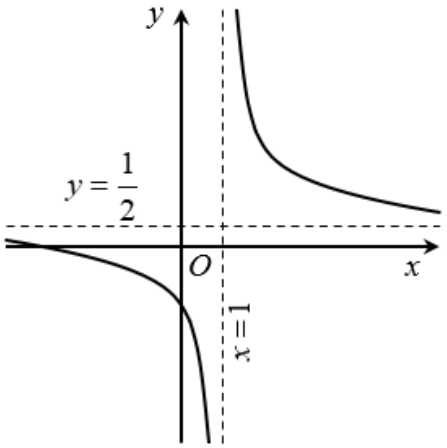
Lời giải

Từ đồ thị ta có tiệm cận ngang $y=-1$ nên $a=-1$.

Và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên

$M(2;0) \in y = \dfrac{-x-b}{x-1} \Leftrightarrow b = -2$. Vậy $a.b = 2$.

Câu 7: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



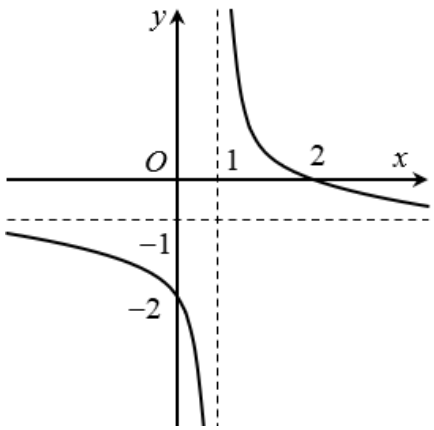
A. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{x+1}{2x-2}$. **D.** $y = \dfrac{2x}{3x-3}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thầy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \dfrac{1}{2}$.

Do đó đáp án **C** thỏa mãn vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x-2} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{2x-2} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ với $a,b,c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị của $a+2b+3c$ bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** 6. **D.** −8.

Lời giải

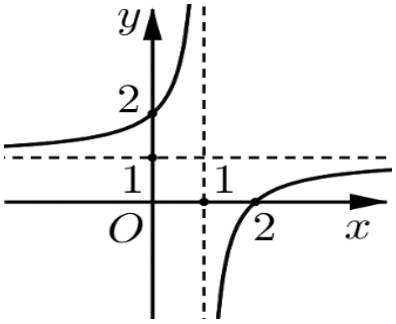
Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $x = -c$ suy ra $-c = 1 \Leftrightarrow c = -1$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $y = a$ suy ra $a = -1$.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $\left(0;\dfrac{b}{c}\right)$ nên $\dfrac{b}{c} = -2$ mà $c = -1$ suy ra $b = 2$.

Vậy, $a+2b+3c = 0$..

Câu 9: Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$, $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị biểu thức $T=a-3b-2c$ bằng



A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -3.

Lời giải

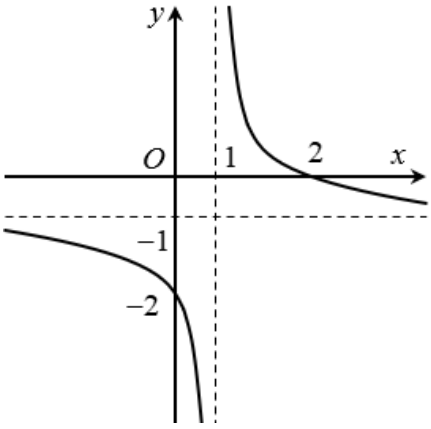
Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1\Rightarrow\dfrac{1}{b}=1\Leftrightarrow b=1$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1\Rightarrow-\dfrac{c}{b}=1\Leftrightarrow b=-c\Rightarrow c=-1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;2)\Rightarrow 2=\dfrac{0+a}{1.0+(-1)}\Leftrightarrow a=-2$.

Vậy $T=a-3b-2c=(-2)-3.1-2.(-1)=-3$.

Câu 10: Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



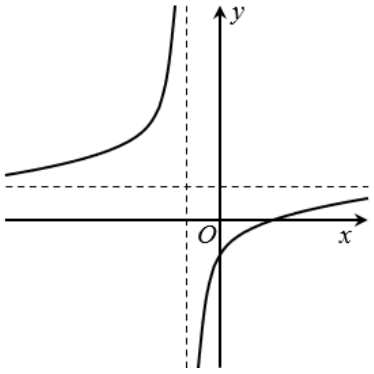
A. $b<a<0$. **B.** $0<b<a$. **C.** $b<0<a$. **D.** $0<a<b$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1\Rightarrow\dfrac{a}{c}=-1\Rightarrow a=-1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;0)\Rightarrow 2a-b=0\Rightarrow b=-2$. Vậy $b<a<0$.

Câu 11: Hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



A. $bd>0, ad>0$. **B.** $bd<0, ab>0$. **C.** $ad>0, ab<0$. **D.** $ab<0, ad<0$.

Lời giải

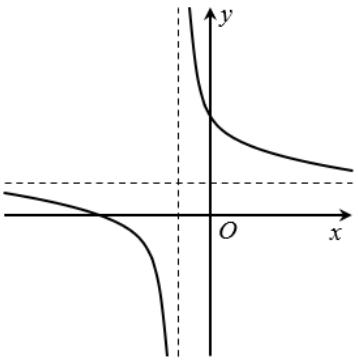
Từ đồ thị suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hành độ dương.

Mặt khác, từ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm $A\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$.

Từ đó suy ra : $-\dfrac{b}{a}>0\Rightarrow ab<0$. Từ hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ suy ra đồ thị có các đường tiệm cận ngang và đứng lần lượt $y=\dfrac{a}{c}; x=-\dfrac{d}{c}$. Từ đồ thị hàm số suy ra

$$\begin{cases}\dfrac{a}{c}>0\\ -\dfrac{d}{c}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ac>0\\ dc>0\end{cases}\Rightarrow adc^2>0\Rightarrow ad>0.$$

Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



A. $0<a<b$. **B.** $b<0<a$. **C.** $0<b<a$. **D.** $a<b<0$.

Lời giải

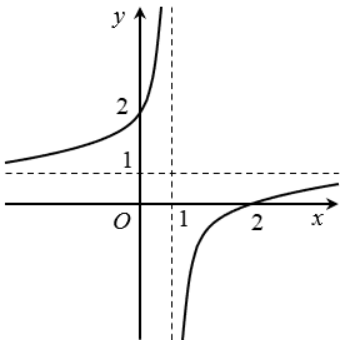
Ta có: $y'=\dfrac{a-b}{(x+1)^2}$, $\forall x\neq -1$. Dựa vào đồ thị ta thấy:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=a\Rightarrow y=a$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Dựa vào đồ thị ta có: $a>0$.

Đồ thị hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)\Rightarrow y'<0, \forall x\neq -1\Leftrightarrow a-b<0$

$\Leftrightarrow a<b\Rightarrow 0<a<b$.

Câu 13: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới



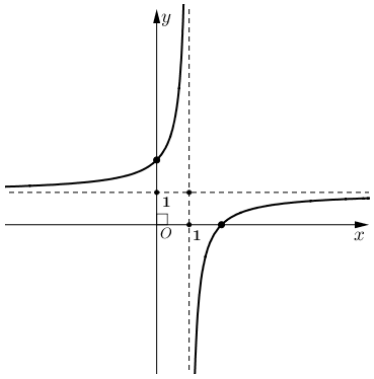
A. $y=x^3-3x+2$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. **D.** $y=-x^4+5x^2-1$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty, \lim\limits_{x\to 1^-} y=+\infty$ nên loại phương án **A**, **D**

Mặt khác quan sát đồ thị thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến nên $y=\dfrac{x-2}{x-1}$.

Câu 14: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

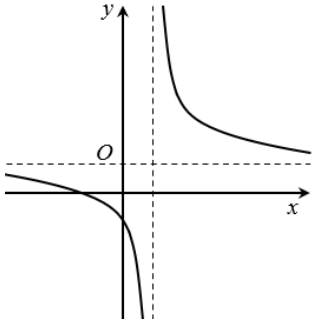


A. $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **D.** $y=-x^3+3x+2$.

Lời giải

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số hữu tỉ bậc 1 trên bậc 1, đồ thị có các đường tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=1$ nên chỉ có hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{bx-c}{x-a}$ ($a\neq 0$ và $a,b,c\in\mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a>0,b<0,c-ab<0$. **B.** $a>0,b>0,c-ab<0$.

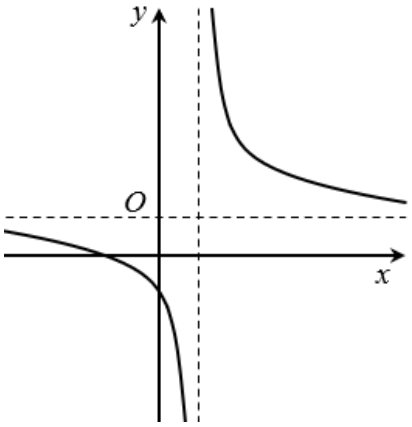
C. $a<0,b>0,c-ab<0$. **D.** $a<0,b<0,c-ab>0$.

Lời giải

Vì hàm số $y=\dfrac{bx-c}{x-a}$ nghịch biến trên tập xác định nên $-ab+c<0\Leftrightarrow c-ab<0.$

Mặc khác tiệm cận đứng $x=a$ nằm bên phải trục tung nên $a>0.$

Câu 16: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



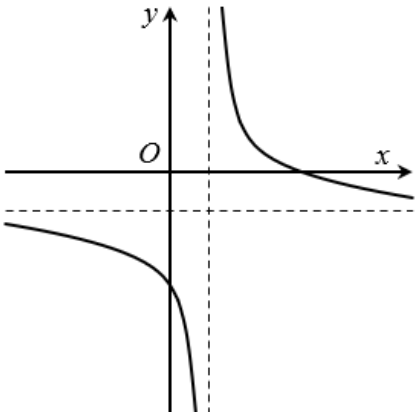
A. $y=x^4+x^2+1$ **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ **C.** $y=x^3-3x-1$ **D.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

Lời giải

Ta thấy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x=1$ và một đường tiệm cận ngang $y=1$

Vậy đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+4-b}{cx+b}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a>0,\ b>4,\ c<0$. **B.** $a>0,0<b<4,\ c<0$.

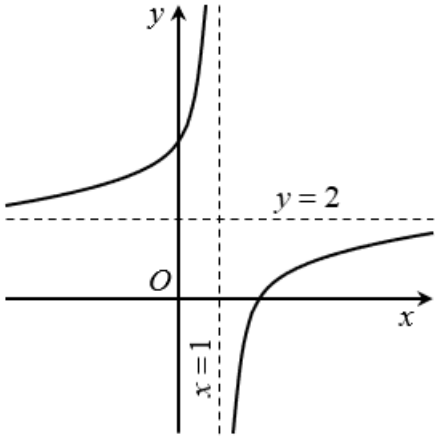
C. $a>0,\ b<0,\ c<0$. **D.** $a<0,\ 0<b<4,\ c<0$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy tiệm cận ngang, tiệm cận đứng, giao của đồ thị với trục tung và trục hoành

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{a}{c}<0 \\ -\dfrac{b}{c}>0 \\ \dfrac{4-b}{b}>0 \\ \dfrac{b-4}{a}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<b<4 \\ a>0 \\ c<0 \end{cases}$.

Câu 18: Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x-3}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=2$.

Từ hình vẽ ta được hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

Hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{1}{(x-1)^2}>0,\ \forall x\neq 1$.

Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\neq 1$.

Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{-5}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\neq 1$.

Do đó hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\left[\begin{array}{l} b>\dfrac{2}{3}. \\ b<0 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} b>0 \\ b<-\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$ **C.** $-\dfrac{2}{3}<b<0.$ **D.** $0\le b<\dfrac{2}{3}.$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-c}{b}\right\}$

Từ bảng biến thiên ta có

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ nên đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$ nên đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{-c}{b}=3 \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c=-3b \\ a=\dfrac{1}{2}b \end{cases}(1)$. Mặt khác : $y'=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}<0\Leftrightarrow ac-b<0\,(2)$.

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{1}{2}b.(-3b)-b<0\Leftrightarrow-\dfrac{3}{2}b^2-b<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b>0 \\ b<-\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	2	↘	‖	↘	2
		$-\infty$	‖	$+\infty$	

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

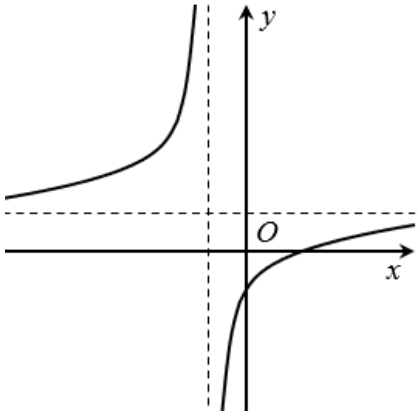
Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=2$ suy ra $\begin{cases} \dfrac{-c}{b}=-1 \\ \dfrac{a}{b}=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c=b \\ a=2b \end{cases}.$

Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó suy ra:

$ac-b<0\Rightarrow 2b^2-b<0\Rightarrow 0<b<\dfrac{1}{2}.$

Suy ra cả ba số a,b,c đều dương.

Câu 21: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên dưới. Biết rằng a là một số thực dương, hỏi trong các số b,c,d có tất cả bao nhiêu số dương?



A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

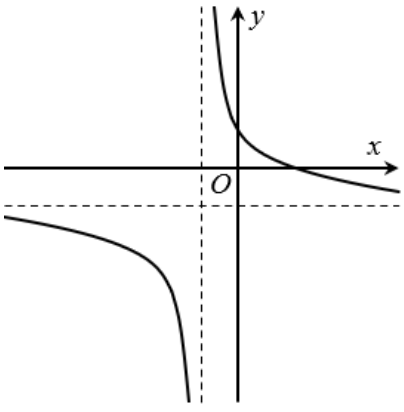
Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}>0$ nên $c>0$.

Đồ thì hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{d}{c}<0$ nên $d>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=-\dfrac{b}{a}>0$ nên $b<0$.

Vậy trong các số b,c,d có 2 số dương,

Câu 22: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(a<0\right)$ có đồ thị như sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab<0,bc<0,cd>0$. **B.** $ab>0,bc<0,cd>0$.

C. $ab>0,bc>0,cd>0$. **D.** $ab<0,bc>0,cd>0$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}<0$, tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}<0$

Mà theo giả thiết $a<0$ nên $c>0$ suy ra $d>0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $\left(0;\frac{b}{d}\right)$ và $\frac{b}{d}>0$ nên $b>0$

Do đó: $ab<0, bc>0, cd>0$

Câu 23: Cho hàm số $f(x)=\frac{ax-4}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	1

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

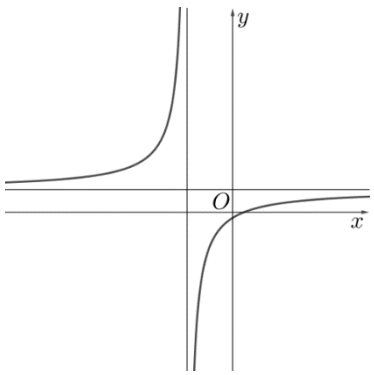
Tiệm cận ngang: $y=\frac{a}{b}=1\Rightarrow a=b$ (1).

Tiệm cận đứng: $x=-\frac{c}{b}=1\Rightarrow c=-b$ (2).

Ta có: $y'=\frac{ac+4b}{(bx+c)^2}>0\Rightarrow ac+4b>0$ (3).

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra: $-b^2+4b>0\Leftrightarrow 0<b<4$. Suy ra $a>0, c<0$.

Câu 24: Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $\begin{cases}ad<0\\bc<0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}ad<0\\bc>0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}ad>0\\bc<0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}ad>0\\bc>0\end{cases}$.

Lời giải

Tiệm cận ngang $y=\frac{a}{c}>0\Rightarrow ac>0\ (1)$

Tiệm cận đứng $x=-\frac{d}{c}<0\Rightarrow \frac{d}{c}>0\Rightarrow cd>0\,(2)$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow \frac{b}{d}<0\Rightarrow bd<0\,(3)$

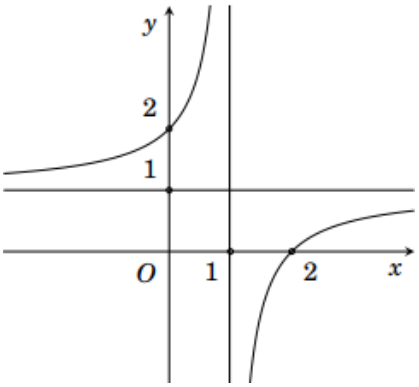
Đồ thị cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương $\Rightarrow -\frac{b}{a}>0\Rightarrow \frac{b}{a}<0\Rightarrow ab<0\,(4)$

Lấy $(3).(4)\Rightarrow adb^2>0\Rightarrow ad>0\,(5)$

Lấy $(1).(4)\Rightarrow bca^2<0\Rightarrow bc<0\ \ (6)$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=\frac{x+a}{bx+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

d) $T=a-3b-2c=-3$

Lời giải

a) Đúng: Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$

b) Đúng: Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$

c) Sai: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

d) Đúng: Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$ nên $\frac{1}{b}=1\Rightarrow b=1$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ nên $-\frac{c}{b}=1$ mà $b=1\Rightarrow c=-1$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;2)$ nên $\frac{a}{c}=2$ mà $c=-1\Rightarrow a=-2$

Vậy $T=a-3b-2c=-2-3.1-2.(-1)=-3$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\frac{ax-1}{bx+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}\searrow -\infty$	$+\infty\searrow \frac{1}{2}$	

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=\frac{1}{2}$

c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3

d) $\left[\begin{array}{l} b>\frac{2}{3} \\ b<0 \end{array}\right.$

Lời giải

a) Đúng: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$ nên nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$

b) Sai: Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=3$

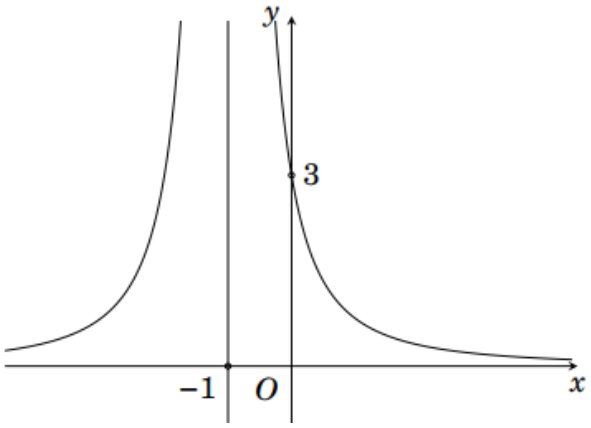
c) Đúng: Đồ thị giao với trục hoành tại điểm thuộc nhánh trái của đồ thị, suy ra hoành độ giao điểm này nhỏ hơn 3

d) Đúng: Từ bảng biến thiên suy ra $\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{b}=\frac{1}{2} \\ -\frac{c}{b}=3 \end{array}\right.$ (1)

Ta có: $y'=\frac{ac+b}{(bx+c)^2}<0,\ \forall x\neq -\frac{c}{b}\Leftrightarrow ac+b<0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{b}{2}.(-3b).+b<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b>\frac{2}{3} \\ b<0 \end{array}\right.$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nhận $x=-1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;-2]$ bằng 8



a) $f'(0)=3$

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8

d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4

Lời giải

a) Đúng: Theo hình vẽ, đồ thị $f'(x)$ qua điểm $(0;3)$ nên $f'(0)=3$

b) Sai: Do $f'(x)>0,\forall x\neq -1$ nên hàm số đã cho $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

c) Sai: Do $f'(x)>0,\forall x\neq -1\Rightarrow \max\limits_{[-3;-2]} f(x)=f(-2)=8$ suy ra $f(-3)\neq 8$

d) Đúng: Ta có $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;3)$ nên $f'(0)=3\Leftrightarrow \dfrac{ad-bc}{d^2}=3$

Mặt khác, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có tiệm cận đứng $x=-1$ nên $-c+d=0$

Vì $f'(x)>0,\forall x\neq 1\Rightarrow \max\limits_{[-3;-2]} f(x)=f(-2)=8\Leftrightarrow \dfrac{-2a+b}{-2c+d}=8$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} ad-bc=3d^2\\ -c+d=0\\ b-2a=8(d-2c)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=d\\ a-b=3d\\ b-2a=-8d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=5d\\ b=2d\\ c=d\end{cases}$

Từ đó suy ra $f(x)=\dfrac{5dx+2d}{dx+d}=\dfrac{5x+2}{x+1}\Rightarrow f(2)=4$

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m) với m là tham số

a) Khi $m=2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$

b) Khi $m=2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có toạ độ $I(1;-1)$

c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$ thì $m=2$

d) Với mọi giá trị của tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó

Lời giải

a) Đúng: Khi $m=2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$

b) Sai: Khi $m=2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có toạ độ $I(-1;1)$

c) Đúng: Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi và chỉ khi $m\left(-\frac{m}{2}\right)-1\neq 0\Leftrightarrow m^2+2\neq 0$ đúng với mọi giá trị m.

Khi đó đường thẳng $-\frac{m}{2}=-1\Leftrightarrow m=2$ là giá trị cần tìm.

d) Đúng: Ta có $y'=\frac{m^2+2}{(2x+m)^2}>0,\forall x\neq -\frac{m}{2}$. Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y=\frac{(2m-1)x-m}{x+m}(m\neq 0)$ có đồ thị (C_m). Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y=ax+b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d). Tính giá trị của $a+b$

Lời giải

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) như sau:

$$\frac{(2m-1)x-m}{x+m}=ax+b\ \Leftrightarrow ax^2+(am+b-2m+1)x+bm+m=0$$

Do (d) luôn tiếp xúc với (C) nên phải luôn có nghiệm kép với $\forall m\neq 0$

Suy ra $a\neq 0$ và $\Delta'=(am+b-2m+1)^2-4am(b+1)=0,\forall m\neq 0$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2m^2+\left[2(a-2)(b+1)-4a(b+1)\right]x+(b+1)^2=0,\forall m\neq 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)^2=0\\2(a-2)(b+1)-4a(b+1)=0\\(b+1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}.$$ Vậy $a+b=1$

Cách 2: Ta có $y=\frac{(2x-1)m-x}{m+x}\Rightarrow y'(m)=\frac{2x^2}{(m+x)^2}\Rightarrow y'(m)=0\Leftrightarrow x=0$.

Dự đoán $A(0;-1)$ là tiếp điểm, nên ta có phân tích như sau

$$y=\frac{(2m-1)x-m}{x+m}=\frac{-2x^2+2x^2+(2m-1)x-m}{x+m}=\frac{-2x^2+(2x-1)(x+m)}{x+m}=\frac{-2x^2}{x+m}+2x-1.$$

Do đó phương trình $\frac{(2x-1)m-x}{m+x}=2x-1$ luôn có nghiệm kép $x=0$ nên $y=2x-1$ là đường thẳng luôn tiếp xúc với (C), suy ra $a=2,b=-1\Rightarrow a+b=1$.

Câu 2: Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a;b)$. Tính giá trị biểu thức $a+b$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x-3}{x+1}=x-2m\Rightarrow x-3=(x+1)(x-2m)$

$\Leftrightarrow x-3=x^2-2mx+x-2m\Leftrightarrow x^2-2mx+3-2m=0$ (1)

Đường thẳng $d: y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-(3-2m)>0\\ S=2m>0\\ P=3-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+2m-3>0\\ m>0\\ m<\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-3\\ m>1\end{array}\right.\\ m>0\\ m<\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<\frac{3}{2}.$$

Vậy với $1<m<\frac{3}{2}$ thì đường thẳng $d: y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương nên $a+b=\frac{5}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (H) và đường thẳng Δ có phương trình $y=x+1$. Số giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để đường thẳng Δ cắt đường cong (H) tại hai điểm phân biệt nằm về hai nhánh của đồ thị.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+m}{x-1}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ f(x)=x^2-x-m-1=0\end{cases}(*)$

Đường thẳng Δ cắt đường cong (H) tại hai điểm phân biệt khi

$\begin{cases}f(1)\neq 0\\ \Delta_{(*)}>0\end{cases}\Leftrightarrow 4m+5>0\Leftrightarrow m>-\frac{5}{4};\forall m\in\mathbb{R}.$

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_1x_2=-m-1\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $(x_1-1)(x_2-1)<0\Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0\Leftrightarrow -m-1<0\Leftrightarrow m>-1$

Suy ra $m\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Vậy có 10 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m sao cho đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B và $AB\le 4$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x+1}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\(x+1)(x+m)=2x-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\x^2+(m-1)x+m+1=0\ (*)\end{cases}$

Đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt $A,B\Leftrightarrow$ Phương trình **(*)** có 2 nghiệm phân biệt khác $-1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\(-1)^2+(m-1).(-1)+m+1\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)^2-4(m+1)>0\\3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2-6m-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3+2\sqrt{3}\\m<3-2\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Giao điểm của 2 đồ thị hàm số lần lượt là $A(x_1;x_1+m)$ và $B(x_2;x_2+m)$, trong đó x_1,x_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình **(*)**.

Theo Vi-et, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=1-m\\x_1x_2=m+1\end{cases}$

$AB=\sqrt{2(x_1-x_2)^2}\le 4\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2\le 8\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\le 8\Leftrightarrow(1-m)^2-4(m+1)\le 8$

$\Leftrightarrow m^2-6m-11\le 0\Leftrightarrow 3-2\sqrt{5}\le m\le 3+2\sqrt{5}$

Kết hợp với $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3+2\sqrt{3}\\m<3-2\sqrt{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3+2\sqrt{3}<m\le 3+2\sqrt{5}\\3-2\sqrt{5}\le m<3-2\sqrt{3}\end{array}\right.$

Có 1 giá trị nguyên dương của m là 7.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}(C)$ và đường thẳng $(d):y=x+m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là: $\dfrac{x+2}{x+1}=x+m(1)$.

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\f(x)=x^2+mx+m-2=0(2)\end{cases}$.

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-4m+8>0\\f(-1)=1-m+m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\forall m\in\mathbb{R}$.

Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm phương trình (2). Theo viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-m\\x_1.x_2=m-2\end{cases}$.

Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow y_1.y_2<0$

$\Leftrightarrow (x_1+m)(x_2+m)<0 \Leftrightarrow x_1.x_2+m(x_1+x_2)+m^2<0 \Leftrightarrow m-2-m^2+m^2<0 \Leftrightarrow m<2$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in(-10;10)\Rightarrow m\in\{-9;-8;...;-1;0;1\}$. Vậy có 11 giá trị m.

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$ có đồ thị là (C) (m là tham số thực). Tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $d: y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A,B sao cho $OA\perp OB$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là

$$\frac{x^2+mx-1}{x-1}=m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x^2+mx-1=mx-m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\g(x)=x^2+m-1=0\end{cases}.$$

Đường thẳng $d: y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $A,B\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1-m>0\\g(1)=m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\setminus\{0\}$.

Gọi $A(x_1;m),B(x_2;m)$. Khi đó x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1x_2=m-1\end{cases}$.

Khi đó $OA\perp OB\Leftrightarrow x_1x_2+m^2=0\Leftrightarrow m^2+m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $d: y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A,B sao cho $OA\perp OB$ bằng $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=3$.

Câu 7: Biết rằng có hai giá trị m_1,m_2 của tham số m để đường thẳng $d: y=m-x$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ có đúng một điểm chung. Tính m_1+m_2 bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ và đường thẳng $d: y=m-x$ là

$\dfrac{x}{x-1}=m-x \Leftrightarrow x^2-mx+m=0(1) \qquad (x\neq 1)$

Đồ thị hàm số và đường thẳng d có 1 điểm chung khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow m^2-4m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right.$ Vậy $m_1=0, m_2=4 \Rightarrow m_1+m_2=4 \in \left(\dfrac{9}{2};7\right)$

Câu 8: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a;b)$. Tính $T=a+b$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x-2m=\dfrac{x-3}{x+1} \Leftrightarrow x^2-2mx-2m+3=0$

Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2+2m-3>0 \\ S=2m>0 \\ P=-2m+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1, m>3 \\ m>0 \\ m<\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<1$ nên $T=a+b=1$

Câu 9: Tìm giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2mx+3m+1}{2x-m^2}$ cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4.

Lời giải

Vì đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4 nên ta có:

$\dfrac{3m+1}{-m^2}=-4 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 3m+1=4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$ vì m nguyên dương nên $m=1$

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ cắt đường thẳng $y=1-x$ tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

Điều kiện $x\neq -1$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x+m}{x+1}=1-x \Leftrightarrow x^2+2x+m-1=0$ $(*)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-(m-1)>0 \\ 1-2+m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m<2$ vì m nguyên dương nên có hai giá trị của m thoả mãn

Câu 11: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB=4$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x-1}{x-1}=x+m\ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x^2+(m-3)x+1-m=0\ (2) \end{cases}$ (C) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ 1^2+(m-3).1+1-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2-4(1-m)>0 \\ -1\neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m+5>0 \\ -1\neq 0 \end{cases} \text{(đúng với mọi } x\in\mathbb{R}\text{)}$$

Khi đó x_A, x_B là nghiệm phân biệt khác 1 của (2).

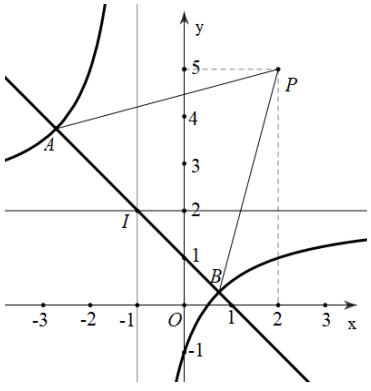
Theo Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_A+x_B=3-m \\ x_A.x_B=1-m \end{cases}$ và

$$AB=4 \Leftrightarrow AB^2=16 \Leftrightarrow (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=16 \Leftrightarrow 2(x_B-x_A)^2=16 \Leftrightarrow (x_B-x_A)^2=8.$$

Suy ra: $(x_B+x_A)^2-4x_Ax_B=8 \Rightarrow (3-m)^2-4(1-m)=8 \Leftrightarrow m^2-2m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều.

Lời giải



Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình $\dfrac{2x-1}{x+1}=-x+m$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 2x-1=(-x+m)(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow x^2-(m-3)x-m-1=0 \ (1)$

Ta có $\Delta_{(1)}=(m-3)^2+4(m+1)=m^2-2m+13=(m-1)^2+12>0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, hay d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1), tọa độ giao điểm của d và (C) là $A(x_1;-x_1+m), B(x_2;-x_2+m)$

Trung điểm của AB là $I\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{-(x_1+x_2)+2m}{2}\right) \equiv I\left(\frac{m-3}{2};\frac{m+3}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{PI}=\left(\frac{m-7}{2};\frac{m-7}{2}\right)$, véctơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d=(1;-1)$, dễ thấy $\vec{u}_d.\overrightarrow{PI}=0$ nên $P \equiv I$ hoặc $PI \perp d$, như vậy hoặc $P \equiv I$ (khi đó P, A, B thẳng hàng) hoặc tồn tại tam giác PAB luôn cân tại P,

Suy ra tam giác PAB tồn tại và đều khi và chỉ khi

$PI=AB\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 8\left(\frac{m-7}{2}\right)^2=3\left[2(x_1-x_2)^2\right] \Leftrightarrow (m-7)^2=3\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]$

$\Leftrightarrow (m-7)^2=3\left[(m-3)^2+4(m+1)\right] \Leftrightarrow m^2+4m-5=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=1 \\ m=-5 \end{bmatrix}.$

Vậy $m \in \{-5;1\}$.

----------HẾT----------

Dạng 3: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc 2 / bậc 1

Để khảo sát hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}, a\neq 0, m\neq 0$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$
- **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm $y'=\dfrac{am.x^2+2an.x+b.n-m.c}{(mx+n)^2}$. Tìm các điểm tại đó $y'=0$
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
  - Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
- **Bước 3:** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$

b) $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

c) $y=\dfrac{2x^2-x+4}{x-1}$

d) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Sự biến thiên: $y=x+1+\dfrac{1}{x-2}$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$. Vậy $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

Trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$ $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

Trên các khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ với $y_{CĐ}=1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ với $y_{CT}=5$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=+\infty$.

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to2^-}y=\lim\limits_{x\to2^-}\left(x+1+\dfrac{1}{x-2}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}y=\lim\limits_{x\to2^+}\left(x+1+\dfrac{1}{x-2}\right)=+\infty$

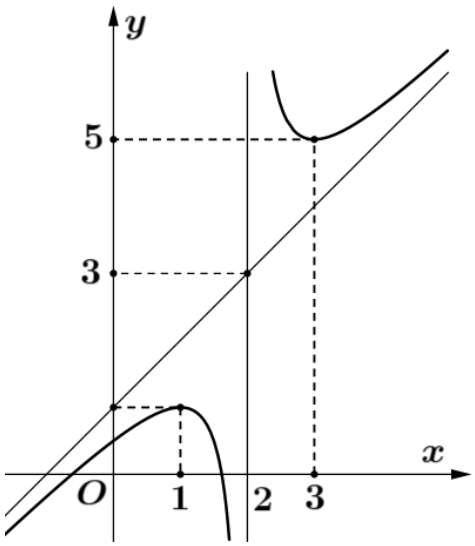
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Đồ thị:



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Ta có $y=0\Leftrightarrow\frac{x^2-x-1}{x-2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

b) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Sự biến thiên: Viết $y=x-\frac{2}{x+1}$ ta có $y'=1+\frac{2}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\neq-1$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. Hàm số không có cực trị.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=+\infty$

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-1^-} y=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-1^+} y=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)=-\infty$

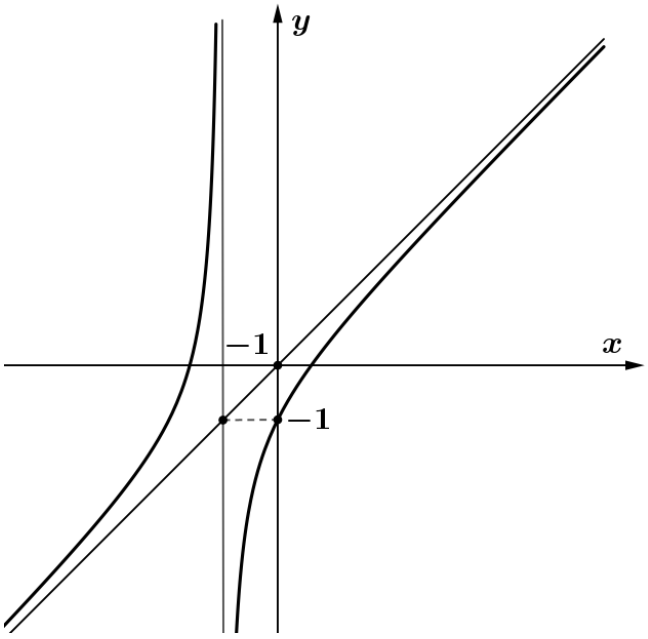
• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{x+1}\right)=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{2}{x+1}\right)=0.$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$+\infty$

Đồ thị :



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0;-2)$

Ta có $y=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2+x-2}{x+1}=0\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=1$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-2;0)$ và $(1;0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Sự biến thiên: Ta có $y=\dfrac{2x^2-x+4}{x-1}=2x+1+\dfrac{5}{x-1}$

Đạo hàm $y'=2-\dfrac{5}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow 2-\dfrac{5}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$.

Trên các khoảng $\left(-\infty;\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{2+\sqrt{10}}{2};+\infty\right)$ có $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

Trên các khoảng $\left(\dfrac{2-\sqrt{10}}{2};1\right)$ và $\left(1;\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}\right)$ có $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Hàm số đạt cực cực đại tại $x=\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}$ và đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x-1}=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x-1}=0.$

Do đó $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=2x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

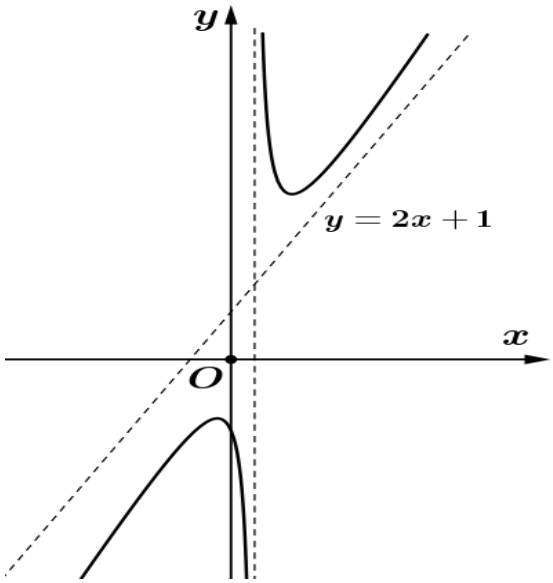
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}\left(-\sqrt{10}+2\right)$		1		$\frac{1}{2}\left(\sqrt{10}+2\right)$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-2\sqrt{10}+3$	↘	$+\infty$	↘	$2\sqrt{10}+3$	↗	$+\infty$

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;-4)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(1;3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Sự biến thiên: Ta có $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}=x-1+\dfrac{4}{x+3}$

Đạo hàm $y'=1-\dfrac{4}{(x+3)^2}=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{4}{(x+3)^2}=0\Leftrightarrow (x+3)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-5\end{array}\right.$

Trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-1;+\infty), y'>0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng này.

Trên các khoảng $(-5;-3)$ và $(-3;-1), y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $x=-5$ với $y_{CD}=-8$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ với $y_{CT}=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=+\infty$;

- $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=-\infty$

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to(-3)^+} y=\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to(-3)^-} y=\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x+3}=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x+3}=0$

Do đó $x=-3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

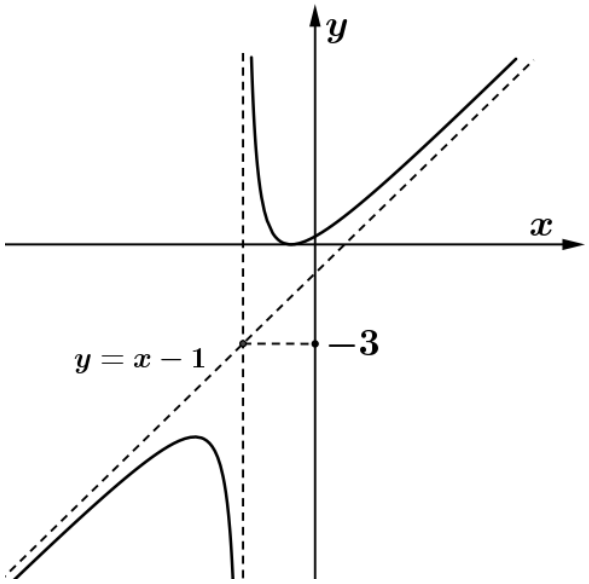
x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-8	↘	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $\left(0;\frac{1}{3}\right)$

Giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-1;0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(-3;-4)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



Bài tập 2: Cho hàm số $y=\frac{x^2+2mx+2}{x+1}=x+2m-1+\frac{3-2m}{x+1}\,(C_m)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với $m=1$.

b) Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó tới đường thẳng $d: x+y+2=0$ bằng nhau.

Lời giải

a) Học sinh tự làm

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đạo hàm: $y'=\frac{x^2+2x+2m-2}{(x+1)^2}$

Hàm số có cực đại, cực tiểu thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$\Leftrightarrow g(x;m)=x^2+2x+2m-2=0 \quad (1)$ (có hai nghiệm $x_1,x_2\neq -1$)

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=3-2m>0\\ g(-1;m)=2m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<\frac{3}{2} \quad (*)$

Gọi $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với $x_1,x_2\neq -1$ là hai nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Vi-ét: $x_1+x_2=-2;x_1.x_2=2m-2$.

Mặt khác đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình là $y=2x+m$ cho nên $y_1=2x_1+m;y_2=2x_2+m\Rightarrow A(x_1;2x_1+m);B(x_2;2x_2+m)$

Theo giả thiết: $\frac{|x_1+y_1+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|x_2+y_2+2|}{\sqrt{2}}\Rightarrow |x_1+y_1+2|=|x_2+y_2+2|$

$\Leftrightarrow |3x_1+2m+2|=|3x_2+2m+2|$

$\Leftrightarrow (3x_1+2m+2)^2-(3x_2+2m+2)^2=0\Leftrightarrow (x_1-x_2)\left[3(x_1+x_2+4m+4)\right]=0$

$\Leftrightarrow 3(x_1+x_2+4m+4)=0,(x_1\neq x_2)\Leftrightarrow 3(-2+4m+4)=0\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn $(*)$

Vậy giá trị m cần tìm là: $m=-\frac{1}{2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-10		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	24	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

A. $y=\frac{x^2-3x+4}{-x-4}$. **B.** $y=\frac{x^2-4x+4}{-x-4}$. **C.** $y=\frac{x^2-5x+4}{x+4}$. **D.** $y=\frac{x^2-4x+4}{x+4}$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=4$ và các giới hạn: $\lim\limits_{x\to -\infty}y=+\infty;\lim\limits_{x\to +\infty}y=-\infty$

Điểm cực đại $A(2;0)$ và điểm cực tiểu $B(-10;24)$. Do đó hàm số cần tìm là $y=\frac{x^2-4x+4}{-x-4}$

Câu 2: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$ $-\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x-3}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x+3}$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=3$ và các giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$

Điểm cực đại $A(5;-9)$ và điểm cực tiểu $B(1;-1)$. Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$

Câu 3: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-9		-4		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-20	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x+4}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x+2}{-x-4}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-4$ và các giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$

Điểm cực đại $A(-9;-20)$ và điểm cực tiểu $B(1;0)$. Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$

Câu 4: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$.

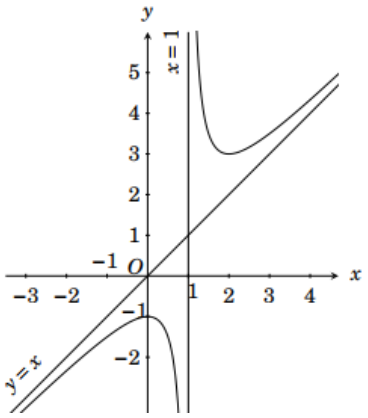
Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và có đạo hàm $y'>0$ với mọi $x\neq 2$

Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$.

Câu 5: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$.

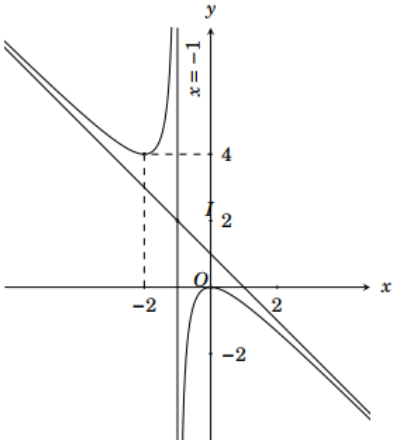
Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận xiên $y=x$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty;\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$. Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$

Câu 6: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2-x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2}{x+1}$.

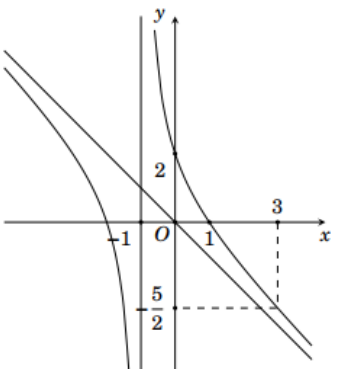
Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$ và tiệm cận xiên $y=-x+1$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty;\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$. Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{-x^2}{x+1}$

Câu 7: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.

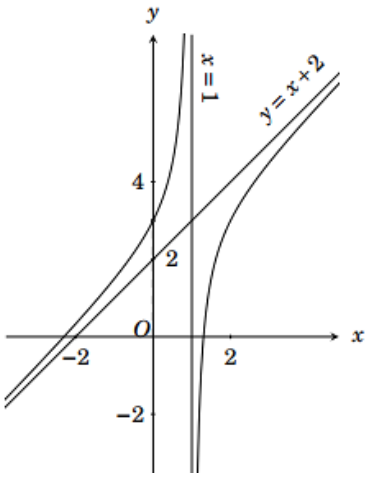
Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$ và tiệm cận xiên $y=-x$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$. Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$

Câu 8: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x-3}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-2x+3}{-x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3}{-x+1}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận xiên $y=x+2$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$

Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x^2+x-3}{x-1}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị (C). Khi đó:

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$

b) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$

c) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$

d) Đồ thị hàm số (C) nhận điểm $I(-2;0)$ làm tâm đối xứng

Lời giải

a) Sai: Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) Đúng: : Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$

Giới hạn, tiệm cận: Ta có $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=x+2+\dfrac{1}{x+2}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x+2}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x+2}\right)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)=0$

c) Đúng: Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$

• $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\left(\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\left(\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}\right)=+\infty$

d) Đúng: Đồ thị hàm số (C) nhận điểm $I(-2;0)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-2x+2}{-x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty,0)\cup(2;+\infty)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$ bằng $-\dfrac{19}{3}$

d) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x+y=0$

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{-2x^2+4x}{(-x+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$ $-\infty$

a) Sai: Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty,0)$ và $(2;+\infty)$

b) Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$

c) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$ bằng -7 đạt tại $x=\dfrac{3}{2}$

d) Đúng: Ta có $2x+y=0\Rightarrow y=-2x$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2-2x+2}{-x+1}-(-2x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{-x+1}\right)=0$ nên đồ thị có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x+y=0$ hay $y=-2x$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng khoảng $(-2,-1)$ và $(-1,0)$

b) Hàm số có hai điểm cực trị.

c) Đồ thị (C) không cắt trục Ox.

d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$

Lời giải

Ta có $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}=-x+2-\dfrac{1}{x+1}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{-x-2x}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

Khi đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$ $-\infty$

a) Đúng: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng khoảng $(-2,-1)$ và $(-1,0)$

b) Đúng: Hàm số có hai điểm cực trị.

c) Sai: Mặt khác $y=0\Leftrightarrow -x^2+x+1=0$ $(*)$

Vậy phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt. Hay (C) luôn cắt Ox tại hai điểm phân biệt.

d) Đúng: Tiệm cận xiên của đồ thị là $y=-x+2$ nên đi qua điểm $A(1;2)$

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x-3}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y=-x-6$.

b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3;-9)$ làm tâm đối xứng.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

d) Đồ thị không cắt trục Ox.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $y=-x-6-\dfrac{14}{x-3}$

Khi đó tiệm cận xiên là $y=-x-6$ và có tiệm cận đứng là $x=3$.

b) Đúng: Suy ra giao điểm 2 tiệm cận là $I(3,-9)$ là tâm đối xứng.

c) Đúng: Ta có: $y'=\dfrac{-x+6x+5}{(x-3)^2}=0\Leftrightarrow x^2-6x-5=0\quad (*)$

Phương trình $(*)$ luôn có 2 nghiệm $x_1<0<x_2$ nên (C) luôn có 2 điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

d) Sai: Ta có $y=0\Leftrightarrow -x^2-3x+4=0$. Phương trình luôn có 2 nghiệm (vì $(-1).4<0$)

Suy ra (C) cắt Ox tại hai điểm phân biệt.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang

b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm M. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $3x-4y+2=0$

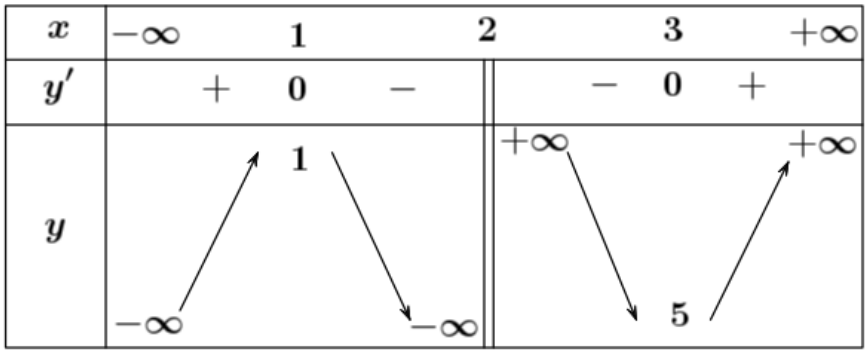
c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

d) Đồ thị không cắt trục Ox.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



a) Sai: Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

b) Đúng: Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ và $y'(0)=\dfrac{3}{4}$ nên phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$

c) Sai: Hàm số đạt cực trị tại $x=1$ và $x=3$ nên 2 điểm cực trị nằm cùng phía đối với Oy.

d) Sai: Ta có $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}$ (1) với m là số thực

a) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

b) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y=x-2$

c) Khi $m=1$ giao điểm của đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $I\left(3;-5\right)$

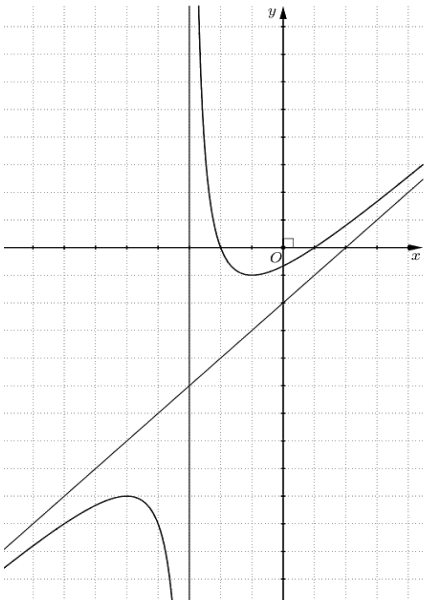
d) Có 2 giá trị m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0

Lời giải

a) Đúng: Khi $m=1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

b) Đúng: Khi $m=1$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y=x-2$

c) Sai : Khi $m=1\Leftrightarrow y=x-2+\dfrac{4}{x+3}$



d) Đúng: Ta có: $y=\dfrac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}=mx-2+\dfrac{6m-2}{x+3m}$

Nếu $m=\dfrac{1}{3}$ đồ thị hàm số không tồn tại hai tiệm cận

Nếu $m\neq\dfrac{1}{3}$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận

$d_1: x=-3m \Leftrightarrow x+3m=0$ và $d_2: y=mx-2 \Leftrightarrow mx-y-2=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1}(1;0); \overrightarrow{n_2}(m;-1)$ lần lượt là véc tơ pháp của d_1 và d_2.

Góc giữa d_1 và d_2 bằng $45^0 \Leftrightarrow \cos 45^0 = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \Leftrightarrow \dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m=\pm 1.$

Câu 7: Cho hàm số $y=x-\dfrac{1}{x+1}$

a) Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=2x-1$

c) Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau

d) Để đường thẳng $y=k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$ khi đó k là nghiệm của phương trình $k^2-k-1=0$

Lời giải

a) Sai: $y=x-\dfrac{1}{x+1}$. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Đạo hàm $y'=1+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0, \forall x \in D$: hàm số luôn luôn đồng biến, không có cực đại, cực tiểu.

- $\lim\limits_{x\to -1^{\mp}} y=\pm\infty: x=-1$ là tiệm cận đứng
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} y=x: y=x$ là tiệm cận xiên

b) Đúng: $M(0;-1), y'(0)=2$

Phương trình tiếp tuyến (T) tại $M: y=2(x-0)-1 \Leftrightarrow y=2x-1$

c) Sai: Tiếp tuyến (T_1) của (C) tại $P(x_1,y_1)$ có hệ số góc $k_1=y'_{x_1}=1+\dfrac{1}{(x_1+1)^2}>0$

Tiếp tuyến (T_2) của (C) tại $Q(x_2,y_2)$ có hệ số góc $k_2=y'_{x_2}=1+\dfrac{1}{(x_2+1)^2}>0$

Do $y'_{x_1}>0, y'_{x_2}>0$ nên không thể có 2 tiếp tuyến của (C) vuông góc nhau

d) Đúng: $y=x-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y=k$:

$$\frac{x^2+x-1}{x+1}=k \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x^2-(k-1)x-(k+1)=0 \quad (*) \end{cases}$$

Do vị trí của (C) trên hệ tọa độ Oxy có thể kết luận $(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_A, x_B \neq -1$

và $\begin{cases} x_A + x_B = k-1 \\ x_A.x_B = -(k+1) \end{cases}$; $A(x_A;k), B(x_B;k)$

$\overrightarrow{OA} = (x_A, k), \overrightarrow{OB} = (x_B, k)$

$$OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + k^2 = 0 \Leftrightarrow -k-1+k^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ k = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Câu 8: Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 2(m+1)x - 5}{x-1}$ có đồ thị (C) với m là tham số

a) Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x+1$

b) Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số không cắt Ox.

b) Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m > 4$

d) Tồn tại 1 điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho $x_M > 1$ và độ dài IM ngắn nhất (I là tâm đối xứng của (C)) khi đó tung độ $y_M < -4$

Lời giải

a) Đúng: Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x+1$

b) Đúng: Khi $m = 0 : y = \dfrac{-x^2 + 2x - 5}{x-1} = -x + 1 - \dfrac{4}{x-1}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 3 \Rightarrow y = -4 \end{array}\right.$

• $\lim\limits_{x \to 1^{\mp}} y = \pm\infty : x = 1$ là đường tiệm cận đứng; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -x+1 : y = -x+1$ là tiệm cận xiên

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$

$x = 0 \Rightarrow y = 5$; $y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 5 = 0$ (vô nghiem)

Đồ thị hàm số không cắt Ox.

c) Sai: $y=\dfrac{-x^2+2(m+1)x-m-5}{x-1}$; $y'=\dfrac{-x^2+2x-2m-2+m+5}{(x-1)^2}=\dfrac{-x^2+2x-m+3}{(x-1)^2}$

Hàm số y có cực đại cực tiểu khi phương trình $-x^2+2x-m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=1-m+3=4-m>0\Leftrightarrow m<4$

Nghiệm $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $y'=0\Leftrightarrow -1+2-m+3\neq 0\Leftrightarrow m\neq 4$

Điều kiện sau cùng: $m<4$

d) Đúng: $x_M>1\Rightarrow M$ thuộc nhánh bên phải của (C) nên $I(1;0)$

Toạ độ điểm $M\left(m;-m+1-\dfrac{4}{m-1}\right)$; $IM^2=(m-1)^2+\left[(-m+1)^2+\dfrac{16}{(m-1)^2}+8\right]$

$=2(m-1)^2+\dfrac{16}{(m-1)^2}+8\geq 2\sqrt{2}(m-1).\dfrac{4}{(m-1)}+8\Rightarrow IM^2\geq 8\left(\sqrt{2}+1\right)\Rightarrow IM\geq\sqrt{8\left(\sqrt{2}+1\right)}$

IM ngắn nhất khi $2(m-1)^2=\dfrac{16}{(m-1)^2}\Leftrightarrow(m-1)^4=8\Leftrightarrow m=1+\sqrt[4]{8}\Rightarrow y_M=-\sqrt[4]{8}-\dfrac{4}{\sqrt[4]{8}}<-4$

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{-mx^2+(4m-2)x+1-4m}{x-1}$ có đồ thị là (C) với m là tham số

a) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

b) Khi $m=1$ đồ thị hàm số không cắt trục Ox

c) Khi $m<-1$ thì hàm số đạt cực đại và cực tiểu trong miền $x>0$

d) Có 2 phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $x-y=0$

Lời giải

a) Đúng: Khi $m=1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

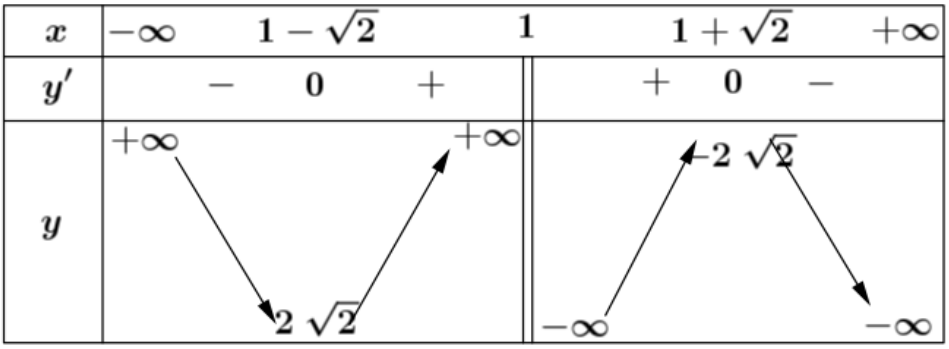
b) Đúng: Khi $m=1$: $y=\dfrac{-x^2+2x-3}{x-1}=-x+1-\dfrac{2}{x-1}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$;

$y'=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow -x^2+2x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{2}\Rightarrow y=2\sqrt{2}\\ x=1+\sqrt{2}\Rightarrow y=-2\sqrt{2}\end{array}\right.$

- $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} y=\pm\infty: x=1$ là tiệm cận đứng; $\lim\limits_{x\to\pm x} y=-x+1: y=-x+1$ là tiệm cận xiên

Bảng biến thiên:



$x=0\Rightarrow y=3$; $y=0\Rightarrow -x^2+2x-3=0$ (vô nghiệm) nên đồ thị hàm số không cắt trục Ox

c) Đúng: $y=\dfrac{-mx^2+(4m-2)x+1-4m}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{-mx^2+2mx-4m+2-1+4m}{(x-1)^2}$

Suy ra $y'=\dfrac{-mx^2+2mx+1}{(x-1)^2}$. Dấu y' là dấu của tam thức $g(x)=-mx^2+2mx+1$

$g(x)$ có $\Delta'=m^2+m$; $g(1)=-m+2m+1=m+1$

Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $\begin{cases}\Delta'>0\\ m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>0\end{array}\right.$

Lúc này hàm số đạt cực đại và cực tiểu tại $x=x_1, x=x_2$ và $\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1\cdot x_2=-\dfrac{1}{m}\end{cases}$.

Giả sử $x_1<x_2$

Theo yêu cầu bài toán: $\begin{cases}x_1>0\\ x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2>0\\ x_1\cdot x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2>0 \text{ (luôn đúng)}\\ -\dfrac{1}{m}>0\end{cases}\Leftrightarrow m<0$

Giao với điều kiện $\Delta'>0$ được $m<-1$

d) Đúng: $y'_x=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x-1)^2}$. Đường thẳng $x-y=0$ có hệ số góc $k=1$

Để tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y=x$ cần và đủ là $y'_x=1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ \dfrac{-x^2+2x+1}{(x-1)^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ -x^2+2x+1=x^2-2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ 2x^2-4x=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=3\\ x=2\Rightarrow y=-3\end{array}\right.$$

Có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán:

$(T_1): y=1(x-0)+3\Leftrightarrow y=x+3$; $(T_2): y=1(x-2)-3\Leftrightarrow y=x-5$

Câu 10: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị là đường cong (C)

a) Biết hàm số có 2 điểm cực trị khi đó tổng của giá trị cực đại và giá trị cực tiểu bằng -4

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;1)$

c) Phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng $x-3y-6=0$ đi qua điểm $B\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

c) Để phương trình $x^2+3x+3=m|x+2|$ có 4 nghiệm phân biệt thì $m>2$

Lời giải

a) Sai: Biết hàm số có 2 điểm cực trị khi đó tổng của giá trị cực đại và giá trị cực tiểu bằng -4

b) Đúng: $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}=x+1+\dfrac{1}{x+2}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=1\\x=-3\Rightarrow y=-3\end{array}\right.$

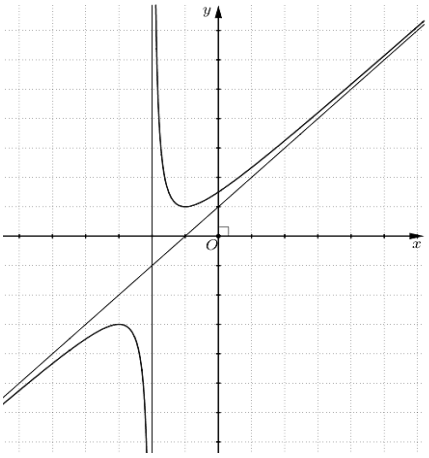
• $\lim\limits_{x\to-2\pm}y=\pm\infty: x=-2$ là tiệm cận đứng; $\lim\limits_{x\to\pm x}y=x+1\Rightarrow y=x+1$ là tiệm cận xiên

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Với $x=0\Rightarrow y=\dfrac{3}{2}$ đồ thị không cắt trục Ox

Đồ thị:



c) Đúng: Đường thẳng $x-3y-6=0$ có hệ số góc $k_1=\frac{1}{3}\Rightarrow$ tiếp tuyến của

(C) vuông góc với đường thẳng này có hệ số góc $k_2=-3$

Xét phương trình $y'_x=-3\Leftrightarrow\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=-3\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-2\\x^2+4x+3=-3x^2-12x-12\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-2\\4x^2+16x+15=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{5}{2}\Rightarrow y=-\frac{7}{2}\\x=-\frac{3}{2}\Rightarrow y=\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

Tại $A\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ có tiếp tuyến $(T_1):y=-3\left(x+\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}\Leftrightarrow y=-3x-11$

Tại $B\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ có tiếp tuyến $(T_2):y=-3\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow y=-3x-3$

d) Sai: $x^2+3x+3=m|x+2|\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-2\\\frac{x^2+3x+3}{|x+2|}=m\end{cases}\Rightarrow$ Số giao điểm của đồ thị (C_1)

$$y=\frac{x^2+3x+3}{|x+2|}=\begin{cases}\frac{x^2+3x+3}{x+2} & (1)\ x>-2\\-\left(\frac{x^2+3x+3}{x+2}\right) & (2):\ x<-2\end{cases}$$

(1): bên phải tiệm cận đứng: giữ nguyên (C)

(2): bên trái tiệm cận đứng: lấy đối xứng của (C) qua trục Ox (C_1) là đường có nét liền, đậm

Số giao điểm của (C_1) và đường thẳng $y=m$ là số nghiệm của phương trình.

Vị trí của đường thẳng $y=m$ để có 4 giao điểm với (C_1) là $m>3$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trên đồ thị $(C):\ y=\frac{x^2-3x+6}{x-2}$ có bao nhiêu cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Lời giải

Gọi $M(x;y);M'(x';y')$ thuộc (C) và đối xứng nhau qua điểm $I\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases}x+x'=1\\y+y'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=1-x\\y'=2-y\end{cases}\Rightarrow M'(1-x;2-y)$.

Vì $M(x;y);M'(x';y')$ thuộc (C) nên ta có $\begin{cases} y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2} \\ 2-y=\dfrac{x^2-x+4}{-x-1} \end{cases}$

$$\Rightarrow 2=\frac{x^2-3x+6}{x-2}+\frac{x^2+x+4}{-x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6=0 \\ x\neq -1, x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\Rightarrow y=-4 \\ x=3\Rightarrow y=6 \end{array}\right.$$

Vậy trên (C) có đúng một cặp điểm: $M(-2,-4);\ M'(3;6)$

Câu 2: Tìm được trên đồ thị $(C): y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ hai điểm $M(a;b)$ và $N(c;d)$ có khoảng cách đến đường thẳng $3x+y+6=0$ nhỏ nhất. Khi đó tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$

Lời giải

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;\dfrac{x_0^2+4x_0+5}{x_0+2}\right)$.

Gọi (d) là khoảng cách từ M đến đường thẳng $3x+y+6=0$

$$d=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|\frac{4x_0^2+16x_0+17}{x_0+2}\right|=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|4(x_0+2)+\frac{1}{x_0+2}\right|\geq\frac{4}{\sqrt{10}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4|x_0+2|=\dfrac{1}{|x_0+2|}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=\dfrac{-3}{2}\Rightarrow y_0=\dfrac{5}{2} \\ x_0=\dfrac{-5}{2}\Rightarrow y_0=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Vậy có hai điểm thoả yêu cầu bài toán là $M_1\left(\dfrac{-3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ và $M_2\left(\dfrac{-5}{2};\dfrac{-5}{2}\right)$

Câu 3: Biết rằng đường thẳng $y=2x+2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số m. Tìm hoành độ trung điểm của AB

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

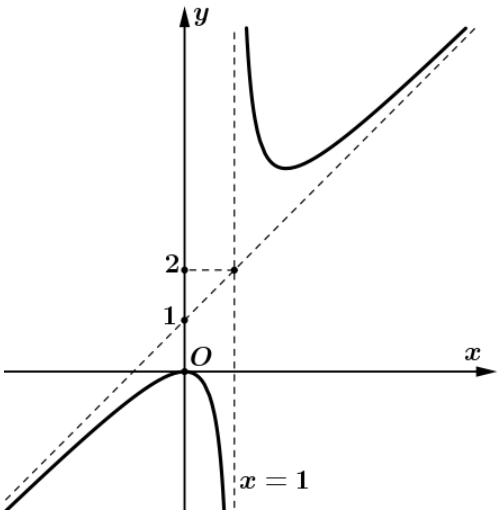
$$\frac{x^2+3}{x+1}=2x+2m\Leftrightarrow x^2+2(1+m)x+2m-3=0\ \ (1),\ (x\neq -1).$$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $2\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=(1+m)^2-(2m-3)>0 \\ (-1)^2+2(1+m).(-1)+2m-3\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4>0,\forall m \\ -4\neq 0 \end{cases}$.

Khi đó, gọi $A(x_1;2x_1+2m);\ B(x_2;2x_2+2m)$

Hoành độ trung điểm của AB là $x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{2+2m}{2} = -m-1$.

Câu 4: Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y = ax + b + \dfrac{1}{x+c}$



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $y = ax + b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. Từ đồ thị ta suy ra được $y = x+1$ là tiệm cận xiên nên $a = 1, b = 1$

$x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nên $c = -1$. Vậy $a+b+c = 3$

Câu 5: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + m^2 - 2m - 4}{x-2}\,(1)$. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta : 2x + y + 1 = 0$.

Lời giải

Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 4 - m^2}{(x-2)^2}$.

Dấu của y' là dấu của $g(x) = x^2 - 4x + 4 - m^2$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 + m^2 = m^2 > 0 \\ 4 - 8 + 4 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ là $x_1 = 2 - m$ hoặc $x_2 = 2 + m$.

Suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(2-m;\ 4-m)$, $B(2+m;\ 4+3m)$

$$d(A,\Delta) = \frac{|9-3m|}{\sqrt{5}}\ ; d(B,\Delta) = \frac{|9+5m|}{\sqrt{5}}.$$

$$d\left(A,\Delta\right)=d\left(B,\Delta\right)\Leftrightarrow\left|9-3m\right|=\left|9+5m\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9-3m=9+5m\\9-3m=-9-5m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-9\end{array}\right.$$

So với điều kiện $m\neq 0$ nhận $m=-9$.

Câu 6: Tìm m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ tại hai điểm A,B sao cho trung điểm đoạn AB thuộc Oy.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $3x^2+\left(1-m\right)x-1=0\ \ \left(x\neq 0\right)$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khác 0 với mọi m

Hoành độ trung điểm I của AB: $x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m-1}{6}$ mà $I\in Oy\Leftrightarrow x_1=0\Leftrightarrow\dfrac{m-1}{6}=0\Leftrightarrow m=1$

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=\sqrt{6}$.

Lời giải

Tọa độ A,B thỏa: $\dfrac{x^2-1}{x}=-x+m\Leftrightarrow 2x^2-mx-1=0,\ \left(x\neq 0\right)\ \left(1\right)$

Ta thấy $\left(1\right)$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 khác 0 với mọi m.

Gọi $A\left(x_1;y_1\right),\ B\left(x_2;y_2\right)\Rightarrow AB^2=\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2=2\left(x_1-x_2\right)^2$

Áp dụng định lí viet cho phương trình $\left(1\right)$ ta có được:

$AB^2=2\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]=\dfrac{m^2}{2}+4$, $AB=6\Leftrightarrow\dfrac{m^2}{2}+4=6\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-2x+m\right)^2-3x-m}{x-3}\left(C\right)$ và đường thẳng $\left(d\right):y=2x$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in\left[-15;15\right]$ để đường thẳng $\left(d\right)$ cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{\left(x^2-2x+m\right)^2-3x-m}{x-3}=2x\Leftrightarrow\left(x^2-2x+m\right)^2-3x-m=2x^2-6x\ \left(x\neq 3\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2x+m\right)^2=2x^2-3x+m\ \left(x\neq 3\right)\ \left(*\right)$$

Đặt: $x^2-2x+m=t$ ta được hệ: $\left\{\begin{array}{l}x^2-2x+m=t\\t^2=2x^2-3x+m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-2x-t+m=0\\2x^2-t^2-3x+m=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow x^2-t^2-x+t=0\Rightarrow (x-t)(x+t-1)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=x \\ t=1-x \end{array}\right.$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} x^2-2x+m=x \\ x^2-2x+m=1-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+m=0\ (1) \\ x^2-x+m-1=0\ (2) \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow (1),(2)$ đều phải có hai nghiệm pb khác 3 và các nghiệm của chúng không trùng nhau. Phương trình $(1),(2)$ đều có hai nghiệm phân

biệt khác 3 khi $\begin{cases} 9-4m>0 \\ 3^3-3.3+m\neq 0 \\ 1-4(m-1)>0 \\ 3^2-3+m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \\ m<\dfrac{5}{4} \\ m\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1,25 \\ m\neq 0 \\ m\neq -5 \end{cases} (**)$

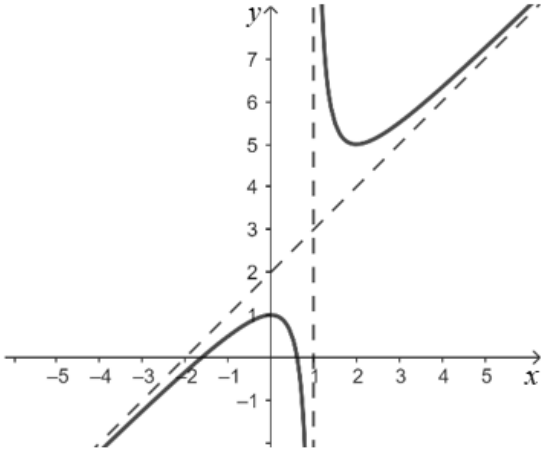
Phương trình $(1),(2)$ không có nghiệm trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+m=0 \\ x^2-x+m-1=0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Hệ phương trình $\begin{cases} 2x-1=0 \\ x^2-3x+m=0 \end{cases}$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ x^2-3x+m=0 \end{cases}$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2-3.\left(\frac{1}{2}\right)+m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \frac{5}{4}\ (***)$

Vậy số giá trị nguyên của $m\in[-15;15]$ đồng thời thỏa mãn $(**)$ và $(***)$ là 15.

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}(a>0,m\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số b,c,m,n có tất cả bao nhiêu số dương?



Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}(a>0,m\neq 0); D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-n}{m}\right\}$

Tiệm cận xiên $y=x+2$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx}\right)=\dfrac{a}{m}=1\Leftrightarrow a=m>0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{(b+n)x+c}{mx+n}\right]=\dfrac{b+n}{m}=2$

$\Leftrightarrow b+n=2m\Leftrightarrow b-m=2m\Leftrightarrow b=3m=3a>0$

Tiệm cận đứng $x=\dfrac{-n}{m}=1\Leftrightarrow n=-m=-a<0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $y_0=\dfrac{c}{n}>0\Rightarrow c<0$

Câu 10: Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+10}{x+2}$ là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{2x^2+3x+10}{x+2}=2x-1+\dfrac{12}{x+2}$

Điểm $M(x;y)\in(C)$ có toạ độ nguyên thì $\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\y\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\12\vdots(x+2)\end{cases}$

12 có 12 ước số nên có 12 điểm có toạ độ nguyên.

----------HẾT----------

BÀI 05 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y=f(x)$ đối với x tại điểm $x=a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s=s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v=s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:
$$a(t)=v'(t)=s''(t).$$
- Nếu $C=C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t.
- Nếu $P=P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.
- Nếu $C=C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87 , bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2 Một số bài toán tối ưu hoá đơn giản

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- **Bước 1:** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- **Bước 2:** Chọn một đại lượng thich hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q=Q(x)$
- **Bước 3:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q=Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Bài toán tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y=f(x)$ đối với x tại điểm $x=a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s=s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v=s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:
$$a(t)=v'(t)=s''(t).$$
- Nếu $C=C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t.
- Nếu $P=P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.
- Nếu $C=C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87 , bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất $2\,\text{m}$ với vận tốc ban đầu $24,5\,\text{m/s}$ là $h(t)=2+24,5t-4,9t^2$ *(theo Vật lý Đại Cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).*

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Lời giải

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v=h'(t)=24,5-9,8t\ (\text{m/s})$.

Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2)=24,5-9,8.2=4,9\ (\text{m/s})$.

b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a=-4,9<0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại

$t=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{24,5}{2\cdot 4,9}=2,5$ (giây). Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là $h(2,5)=32,625\ (m)$.

c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0 , tức là $h=2+24,5t-4,9t^2=0$ hay $t\approx 5,08$ (giây).

Vận tốc của vật lúc chạm đất là $v((5,08)24,5-9,8\cdot 5,08=-25,284\ (\text{m/s})$.

Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).

Bài tập 2: Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t)=\dfrac{a}{b+e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Lời giải

Ta có: $P'(t)=\dfrac{0,75a\mathrm{e}^{-0,75t}}{\left(b+\mathrm{e}^{-0,75t}\right)^2}, t\ge 0$.

Theo đề bài, ta có: $P(0)=20$ và $P'(0)=12$.

Do đó, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{a}{b+1}=20\\ \dfrac{0,75a}{(b+1)^2}=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=20(b+1)\\ \dfrac{15}{b+1}=12.\end{cases}$

Giải hệ phương trình này, ta được $a=25$ và $b=\dfrac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t)=\dfrac{18,75\mathrm{e}^{-0,75t}}{\left(\dfrac{1}{4}+\mathrm{e}^{-0,75t}\right)^2}>0, \forall t\ge 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{25}{\dfrac{1}{4}+\mathrm{e}^{-0.75t}}=100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Bài tập 3: Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x)=30000+300x-2,5x^2+0,125x^3$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.

c) So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Lời giải

a) Hàm chi phí biên là $C'(x)=300-5x+0,375x^2$.

b) Ta có: $C'(200)=300-5\cdot 200+0,375\cdot 200^2=14300$.

Chi phí biên tại $x=200$ là 14300 nghìn đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn vị hàng hoá thứ 201) là khoảng 14300 nghìn đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201 là

$C(201)-C(200)=1004372,625-990000=14372,625$ (nghìn đồng)

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(200)$ đã tính ở câu trên.

Bài tập 4: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x)=\dfrac{300x}{100-x}$, $0\le x<100$ (triệu đồng). Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Lời giải

Xét hàm số $y=C(x)=\dfrac{300x}{100-x}, 0\le x<100$.

Ta có: $y'=\dfrac{30000}{(100-x)^2}>0$, với mọi $x\in[0;100)$. Do đó hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $[0;100)$ và $\lim\limits_{x\to100^-}C(x)=\lim\limits_{x\to100^-}\dfrac{300x}{100-x}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=100$.

Bảng biến thiên:

x	0		100
$C'(x)$		$+$	
$C(x)$	0	↗	$+\infty$

a) Chi phí cần bỏ ra $C(x)$ sẽ luôn tăng khi x tăng.

b) Vì $\lim\limits_{x\to100^-}C(x)=+\infty$ (hàm số $C(x)$ không xác định khi $x=100$) nên nhà máy không thể loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí (dù bỏ ra chi phí là bao nhiêu đi chăng nữa).

Bài tập 5: Xét phản ứng hoá học tạo ra chất C từ hai chất A và B: $A+B\longrightarrow C$. Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A]=[B]=a$ (mol/l). Khi đó nồng độ của chất C theo thời gian t $(t>0)$ được cho bởi công thức: $[C]=\dfrac{a^2Kt}{aKt+1}$(mol/l) trong đó K là hằng số dương.

a) Tìm tốc độ phản ứng tại thời điểm $t>0$.

b) Chứng minh nếu $x=[C]$ thì $x'(t)=K(a-x)^2$

c) Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t\to+\infty$

d) Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t\to+\infty$

Lời giải

a) Tìm tốc độ phản ứng tại thời điểm $t>0$.

Tốc độ phản ứng là đạo hàm của $[C]$ theo biến t

Do đó $[C]' = \left(\dfrac{a^2Kt}{aKt+1}\right)' = \dfrac{a^2K(aKt+1)-a^2Kt.aK}{(aKt+1)^2} = \dfrac{a^2K}{(aKt+1)^2}$

b) Theo câu trên nếu $x=[C]$ thì $x'(t) = \dfrac{a^2K}{(aKt+1)^2}$

Ta lại có $K(a-x)^2 = K\left(a - \dfrac{a^2Kt}{aKt+1}\right)^2 = \dfrac{a^2K}{(aKt+1)^2}$ nên $x'(t) = K(a-x)^2$

c) Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}[C] = \lim\limits_{x\to\infty}[C] = \dfrac{a^2Kt}{aKt+1} = a$ (mol/l) nên nồng độ của chất C dần đến a (mol/l)

d) Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} x'(t) = \lim\limits_{x\to\infty} = \dfrac{a^2K}{(aKt+1)^2} = 0$ (mol/l) nên tốc độ phản ứng dần đến 0.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \dfrac{1}{6}t^3(m)$. Tìm thời điểm t (giây) mà tạo đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

A. $t=2$. **B.** $t=0,5$. **C.** $t=2,5$. **D.** $t=1$.

Lời giải

Ta có $v(t) = s'(t) = 2t - \dfrac{1}{2}t^2$. Suy ra $v'(t) = 2-t$ và $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên

t		2	
$v'(t)$	$+$	0	$-$
$v(t)$		2	

Vậy chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t=2$ (giây).

Câu 2: Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

A. 72. **B.** 12. **C.** $-\dfrac{1}{192}$. **D.** $\dfrac{23}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $P = 12I - 0,5I^2$ với $I \ge 0$ có đạo hàm $P' = 12 - I$; $P' = 0 \Leftrightarrow I = 12$.

Bảng biến thiên:

I	0		12		$+\infty$
$P'(I)$		$+$	0	$-$	
$P(I)$		↗	72	↘	

Công suất tối đa của mạch điện là $72(\mathrm{W})$ đạt được khi cường độ dòng điện là $12(A)$.

Câu 3: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-2t^3+24t^2+9t-3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $289\ (m/s)$. **B.** $105\ (m/s)$. **C.** $111\ (m/s)$. **D.** $487\ (m/s)$.

Lời giải

Ta có $v(t)=s'=-6t^2+48t+9$. Xét hàm số $v(t)=-6t^2+48t+9$, $t\in[0;10]$.

Ta có $v'(t)=-12t+48=0\Leftrightarrow t=4$(Nhận). Ta có $\begin{cases} v(0)=9 \\ v(4)=105 \\ v(10)=-111 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{t\in[0;10]} v(t)=v(4)=105$.

Câu 4: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x)=0,25x^2(30-x)$ trong đó $x(mg)$ và $x>0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

A. 15mg **B.** 30mg **C.** 40mg **D.** 20mg

Lời giải

Ta có: $G(x)=0,25x^2(30-x)=\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{1}{40}x^3$

$G'(x)=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{40}x^2$; $G'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{40}x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0(loai) \\ x=20\ (thoa\ man) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		↗	100	↘	

Dựa vào bảng biến thiên thì bệnh nhân cần tiêm một lượng thuốc $20mg$

Câu 5: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t)=45t^2-t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10

tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

A. 25 **B.** 30 **C.** 20 **D.** 15

Lời giải

Ta có: $G'(t)=90t-3t^2; G''(t)=90-6t=0 \Leftrightarrow 90-6t=0 \Leftrightarrow t=15$

Bảng biến thiên:

t	0		15		$+\infty$
$G''(t)$		$+$	0	$-$	
$G(t)$		↗	675	↘	

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.

Câu 6: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

A. $t=10(h)$ **B.** $t=14(h)$ **C.** $t=15(h)$ **D.** $t=22(h)$

Lời giải

Ta có: $h'=-3\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right).$

$h'=0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow t=-2+6k, \left(k\in Z_{(+)}\right)$

Ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị

k	1	2	3	4
t	4	10	16	22

Ta suy ra được h đạt giá trị lớn nhất khi $t=10\ (h)$

Lưu ý: Ngoài cách trên ta có thể làm như sau

Vì $-1\le cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\le 1 \Rightarrow 9\le 3cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+12\le 15.$

Vậy để h lớn nhất thì $cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow t=-2+12k, \left(k\in Z_{(+)}\right)$

Vậy h đạt giá trị lớn nhất khi $t=10\ (h)$

Câu 7: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t)=\frac{1}{100}\left(30t^3-\frac{t^4}{4}\right)$ $(0\le t\le 90)$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t)=V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.

B. Tốc độ bơm luôn giảm.

C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.

D. Cả ba đáp án đều sai

Lời giải

Xét hàm $V' = \frac{9}{10}t^2 - \frac{1}{100}t^3 \ \ (0 \le t \le 90)$; $V'' = \frac{9}{5}t - \frac{3}{100}t^2 \Rightarrow V'' = 0$ khi $t = 0, t = 60$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số V' đồng biến trên $(0;60)$ và nghịch biến trên $(60;90)$

Câu 8: Khi nuối cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 480 - 20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 14 **B.** 13 **C.** 12 **D.** 11

Lời giải

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích

Ta có: $F(n) = (480 - 20n).n = 480n - 20n^2$

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Bài toán trở thành tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$F'(n) = 480 - 40n$; $F'(n) = 0 \Leftrightarrow 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$

Học sinh tự lập bảng biến thiên.

Vậy phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Câu 9: Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

A. $27,832^0C$. **B.** $18,4^0C$. **C.** $26,2^0C$. **D.** $25,312^0C$.

Lời giải

Xét hàm số $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$.

$T' = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [1;10]$ suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1;10]$.

Nhiệt độ thấp nhất trong phong đạt được là $T_{\min} = T(10) = 18,4^0C$.

Câu 10: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 **B.** 2.350.000 **C.** 2.450.000 **D.** 2.550.000

Lời giải

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x: đồng; $x \ge 2000.000$ đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.

Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là: $\frac{2(x-2.000.000)}{100.000}=\frac{x-2.000.000}{50.000}$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50-\frac{x-2.000.000}{50.000}=-\frac{x}{50.000}+90$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x)=\left(-\frac{x}{50.000}+90\right)x=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$ (bằng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

Câu toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $F(x)=-\frac{1}{50.000}x^2+90x,\ x\ge 2.000.000$

$F'(x)=-\frac{1}{25.000}x+90;\ F'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x+90=0\Leftrightarrow x=2.250.000$

Bảng biến thiên:

x	2 000 000	2 250 000	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	−
$F(x)$		$F(max)$	

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Nhận xét:

Sau khi tìm được hàm $F(x)=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$. Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng biến thiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x, ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho $F(x)$ lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

Câu 11: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ **B.** 43.000đ **C.** 42.000đ **D.** 41.000đ

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng, (x: đồng; $30.000\le x\le 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá $50.000-x$ thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là: $(50000-x).\frac{50}{5000}=\frac{1}{100}(50000-x)$.

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x: $40+\frac{1}{100}(50000-x)=-\frac{1}{100}x+540$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x)=\left(-\frac{1}{100}x+540\right).(x-30.000)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16.200.000$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$F(x)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16.200.000$, điều kiện: $30.000\le x\le 50.000$.

$F'(x)=-\frac{1}{50}x+840;\ F'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{50}x+840=0\Leftrightarrow x=42.000$

Vì hàm $F(x)$ liên tục trên $30.000\le x\le 50.000$ nên ta có:

$F(30.000)=0;\ F(42.000)=1.440.000;\ F(50.000)=800.000$

Vậy với $x=42.000$ thì $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng là 42.000 đồng.

Câu 12: Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30-\frac{5m}{2}\right)^2$ đồng.

Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

A. 30 **B.** 40 **C.** 50 **D.** 60

Lời giải

Chọn B

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất $(0<x\le 60)$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng)

Số tiền thu được: $F(x)=\left(300-\frac{5x}{2}\right)^2.x=90.000x-1500x^2+\frac{25}{4}x^3$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$F'(x)=90000-3000x+\frac{75}{4}x^2;F'(x)=0\Leftrightarrow 90000-3000x+\frac{75}{4}x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=120(loai)\\x=40(\text{t/ m})\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		40		60
$F'(x)$		+	0	−	
$F(x)$		↗	$F(max)$	↘	

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người.

Câu 13: Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 ngàn. **B.** 50 ngàn. **C.** 450 ngàn. **D.** 80 ngàn.

Lời giải

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x > 400$ (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng $x - 400$.

Số phòng cho thuê giảm nếu giá là x: $\dfrac{(x-400)+2}{20} = \dfrac{x-400}{10}$.

Số phòng cho thuê với giá x là $50 - \dfrac{x-400}{10} = 90 - \dfrac{x}{10}$.

Tổng doanh thu trong ngày là: $f(x) = x\left(90 - \dfrac{x}{10}\right) = -\dfrac{x^2}{10} + 90x$.

$f'(x) = -\dfrac{x}{5} + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 450$.

Bảng biến thiên:

x	400		450		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	20250	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

Câu 14: Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

A. 29 triệu VNĐ **B.** 27, 5 triệu VNĐ **C.** 29, 5 triệu VNĐ **D.** 27 triệu VNĐ

Lời giải

Gọi x (triệu VNĐ) là số tiền cần giảm cho mỗi chiếc xe $(0 \le x \le 4)$.

Số lượng xe bán ra được trong một năm sau khi giảm giá là: $x.200 + 600$ (chiếc)

Số lợi nhuận thu được từ việc bán xe trong một năm sau khi giảm giá là: $(x.200 + 600)(4 - x)$

Xét hàm số $f(x)=(x.200+600)(4-x)=200\left(-x^2+x+12\right)\ (0\le x\le 4)$ đạt giá trị lớn nhất là 2450 khi $x=\frac{1}{2}$.

Câu 15: Công ty dụ lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

A. 1375000. **B.** 3781250. **C.** 2500000. **D.** 3000000.

Lời giải

Gọi x (triệu đồng) là giá tua.

Giá đã giảm so với ban đầu là $2-x$.

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán x là: $\frac{(2-x)20}{0,1}=400-200x$.

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là: $150+(400-200x)=550-220x$.

Tổng doanh thu là: $f(x)=x(550-200x)=-200x^2+550x$;

$f'(x)=-400x+550=0\Leftrightarrow x=\frac{11}{8}$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{11}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{3025}{8}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=\frac{11}{8}=1,375$.

Vậy công ty cần đặt giá tua 1375000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378125000 đồng.

Câu 16: Bác Tôm có một cái ao có diện tích 50m^2 để nuôi cá. Vụ vừa qua bác nuôi với mật độ $20\,\text{con/m}^2$ và thu được tất cả $1,5$ tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá thu được bác ấy cứ giảm đi 8 con/m^2 thì tương ứng sẽ có mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm $0,5\,\text{kg}$. Hỏi vụ tới bác phải mua bao nhiêu con cá giống để đạt được tổng khối lượng cá thành phẩm cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).

A. 1100 con. **B.** 1000 con. **C.** 500 con. **D.** 502 con.

Lời giải

Số cá vụ vừa rồi Bác Tôm nuôi là $20.50=1000$ con.

Vậy trọng lượng mỗi con là $1,5$ kg.

Gọi số cá giảm là $8x$ con.

Trọng lượng thu được của vụ tới là: $(1000-400x)(1,5+0,5x)=-200x^2-100x+1500$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=-\dfrac{1}{4}$. Vậy số cá giống ban đầu là 1100 con.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người).



a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.

c) Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ vậy hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$

d) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm.

Lời giải

a) Đúng: Vào đầu năm 1980, ta có $t=10; f(10)=18$. Vậy số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

Vào đầu năm 1995 ta có $t=25; f(25)=22$.

Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 22 nghìn người.

b) Sai: $f'(t)=\dfrac{120}{(t+5)^2}$ với mọi $t>0$; $f(t)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ vì liên tục trên khoảng $(-5;+\infty)$

Vậy hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$.

c) Đúng: Tốc độ tăng dân số vào đầu năm 1990 là:

$$f'(20)=\frac{120}{25^2}=0,192 \text{ do } t=1990-1970=20$$

Tốc độ tăng dân số được dự kiến vào năm 2008 của thị trấn là:

$$f'(38)=\frac{120}{43^2}\approx 0,065 \text{ do } t=2008-1970=38$$

Ta có: $f'(t)=0,125 \Leftrightarrow \dfrac{120}{(t+5)^2}=0,125 \Leftrightarrow t+5=\sqrt{\dfrac{120}{0,125}} \approx 31 \Rightarrow t \approx 26.$

d) Sai: Vậy vào năm 1996, tốc độ tăng dân số của thị trấn là 0,125.

Câu 2: Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

$N(t)=100e^{0,012t}$, $N(t)$ được tính bằng triệu người và $0 \le t \le 50$

a) Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: $108,763$ (triệu người)

b) Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: $125,488$ (triệu người)

c) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0;50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn [0; 50].

d) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm.

Lời giải

a) Đúng: Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: $N(7)=100e^{0,012.7}=100e^{0,084}=108,763$ (triệu người)

b) Sai: Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: $N(12)=100e^{0,012.12}=100e^{0,144}=115,488$ (triệu người)

c) Đúng: Trên đoạn [0; 50] ta có: $N'(t)=0,012.100e^{0,012t}=1,2e^{0,012t}>0, \forall t \in [0;50]$

Do đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn [0; 50].

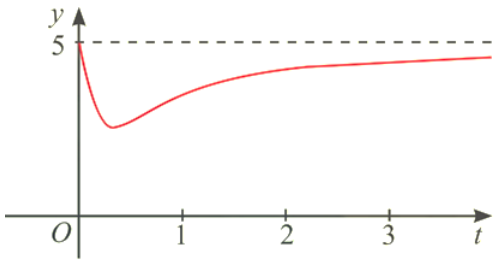
d) Ta có: $N'(t)=1,2e^{0,012t}$

Với tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm ta có:

$$1,6=1,2e^{0,012t} \Leftrightarrow e^{0,012t}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow t=\frac{250\ln\frac{4}{3}}{3} \approx 23,97$$

Vậy vào năm 2046 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm.

Câu 3: Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ $(t \ge 0)$ khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$. (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)



a) Vào thời điểm $t=1$ thì nồng độ oxygen trong nước là $3,5$ (mg/l)

b) Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5 (mg/l)

c) Vào thời điểm $t=0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất

d) Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là $3,5$ (mg/l)

Lời giải

Xét $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$ trên nửa đoạn $[0;+\infty)$ có $y'(t)=\dfrac{135t^2-15}{\left(9t^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{3}\\x=-\dfrac{1}{3}(loai)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	0		$1/3$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	5	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	5

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[0;+\infty)}y(t)=y\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{2}$ và $\max\limits_{[0;+\infty)}y(t)=y(0)=5$

Vậy vào các thời điểm $t=0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất và $t=\dfrac{1}{3}$ giờ thì nồng độ oxygen trong nước thấp nhất.

a) Đúng: Vào thời điểm $t=1$ thì nồng độ oxygen trong nước là $3,5$ (mg/l)

b) Đúng: Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5 (mg/l)

c) Đúng: Vào thời điểm $t=0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất

d) Sai: Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là $2,5$ (mg/l)

Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Hàm vận tốc là $v(t)=3t^2-12t+9$

b) Hàm gia tốc là $a(t)=6t-12$

c) Trong khoảng từ $t=0$ đến $t=2$ thì vận tốc của chất điểm tăng

d) Từ $t=2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm giảm

Lời giải

a) Đúng: Hàm $v(t)=x'(t)=3t^2-12t+9$

b) Đúng: Hàm $a(t)=v'(t)=6t-12$

c) Sai: Tập xác định: $D=[0;+\infty)$ và $a(t)=0\Leftrightarrow t=2$

Bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$a(t)$		$-$	0	$+$	
$v(t)$	9	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

Vậy trong khoảng từ $t=0$ đến $t=2$ thì vận tốc của chất điểm giảm,

d) Sai: Từ $t=2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm tăng

Câu 5: Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho toạ độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y=t^3-12t+3, t\geq 0$.

a) Hàm vận tốc là: $v(t)=3t^2-12, t\geq 0$

b) Hạt chuyển động xuống dưới khi $t>2$

c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0\leq t\leq 3$ là $9m$

d) Khi $t>0$ thì hạt tăng tốc

Lời giải

a) Đúng: Hàm vận tốc là: $v(t)=y'=3t^2-12, t\geq 0$

Hàm gia tốc là: $a(t)=v'(t)=y''=6t, t\geq 0$

b) Sai: Hạt chuyển động lên trên khi $v(t)>0\Leftrightarrow 3t^2-12>0\Leftrightarrow t>2$ (do $t\geq 0$)

Hạt chuyển động xuống dưới khi $v(t)<0\Leftrightarrow 3t^2-12<0\Leftrightarrow 0\leq t<2$ (do $t\geq 0$)

c) Đúng: Ta có: $y(3)-y(0)=3^3-12.3+3-3=-9$

Vậy quãng đường vật đi được trong thời gian $0\leq t\leq 3$ là $9m$.

d) Đúng: Hạt tăng tốc khi $v(t)$ tăng hay $v'(t)>0$. Do đó, $6t>0\Leftrightarrow t>0$

Hạt giảm tốc khi $v(t)$ giảm hay $v'(t)<0\Leftrightarrow 6t<0\Leftrightarrow t<0$ (không thỏa mãn do $t\geq 0$)

Câu 6: Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần.

a) Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi. Vậy hàm cầu là: $p(x)=-\frac{1}{200}x+19$

b) Công ty giảm giá $4,5$ (triệu đồng)/1 tivi cho người mua thì doanh thu của công ty là lớn nhất

c) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x)=12000-3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, vậy có 2300 ti vi được bán ra thì lợi nhuận là cao nhất.

d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x)=12000-3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8,5 triệu đồng/1 ti vi để lợi nhuận là lớn nhất

Lời giải

a) Đúng: Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi. Khi đó hàm cầu là $p=p(x)$.

Theo giả thiết, tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p=p(x)$ là hàm số bậc nhất nên. Do đó, $p(x)=ax+b$ (a khác 0).

Giá tiền $p_1=14$ ứng với $x_1=1000$, giá tiền $p_2=13,5$ ứng với $x_2=1000+100=1100$

Do đó, phương trình đường thẳng $p(x)=ax+b$ đi qua hai điểm $(1000;14)$ và $(1100;13,5)$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}14=1000a+b\\13,5=1100a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{-1}{200}\\b=19\end{cases}$ (thỏa mãn) $\Rightarrow p(x)=-\frac{1}{200}x+19$

b) Đúng: Vì $p=\frac{-1}{200}x+19\Rightarrow x=-200p+3800$

Hàm doanh thu từ tiền bán ti vi là: $R(p)=px=p(-200p+3800)=-200p^2+3800p$

Để doanh thu là lớn nhất thì ta cần tìm p sao cho R đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $R'(p)=-400p+3800$; $R'(p)=0\Leftrightarrow p=\frac{19}{2}$

Bảng biến thiên:

p	0		$19/2$		$+\infty$
$R'(p)$		$+$	0	$-$	
$R(p)$	0	↗	18050	↘	$-\infty$

Vậy công ty nên giảm giá số tiền một chiếc ti vi là: $14-\frac{19}{2}=4,5$ (triệu đồng) thì doanh thu là lớn nhất.

c) Sai: Doanh thu bán hàng của x sản phẩm là: $R(x)=x.p(x)=x.\left(\frac{-1}{200}x+19\right)=\frac{-x^2}{200}+19x$ (triệu đồng). Do đó, hàm số thể hiện lợi nhuận thu được khi bán x sản phẩm là:

$P(x)=R(x)-C(x)=\frac{-x^2}{200}+19x-12000+3x=\frac{-x^2}{200}+22x-12000$ (triệu đồng).

Để lợi nhuận là lớn nhất thì $P(x)$ là lớn nhất. Ta có: $P'(x)=\frac{-x}{100}+22;\ P'(x)=0\Leftrightarrow x=2200$

Bảng biến thiên:

p	0		2200		$+\infty$
$R'(p)$		$+$	0	$-$	
$R(p)$	0	↗	12200	↘	$-\infty$

Vậy có 2200 ti vi được bán ra thì lợi nhuận là cao nhất.

Số ti vi mua tăng lên là: $2200-1000=1200$ (chiếc)

d) Sai: Vậy cửa hàng nên đặt giá bán là: $14-0,5\cdot\frac{1200}{100}=8$ (triệu đồng)

Câu 7: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1\le x\le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x)=x^3-3x^2-20x+500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

a) Biểu thức tính $B(x)$ theo x là $B(x)=220x$ (nghìn đồng).

b) Biểu thức tính $L(x)$ theo x là $L(x)=-x^3+3x^2+220x-500$ (nghìn đồng).

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa

d) Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm có thể đạt được là 1000 nghìn đồng.

Lời giải

Khi bán x mét vải lụa:

a) Đúng: Số tiền thu được là: $B(x)=220x$ (nghìn đồng).

b) Sai: Lợi nhuận thu được là: $L(x)=B(x)-C(x)=-x^3+3x^2+240x-500$ (nghìn đồng).

c) Đúng: Hàm số $L(x)$ xác định trên $[1;18]$.

Đạo hàm $L'(x)=-3x^2+6x+240$; $L(x)=0 \Leftrightarrow x=10$ hoặc $x=-8$ (loại).

Trên khoảng $(1;10)$, $L'(x)>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

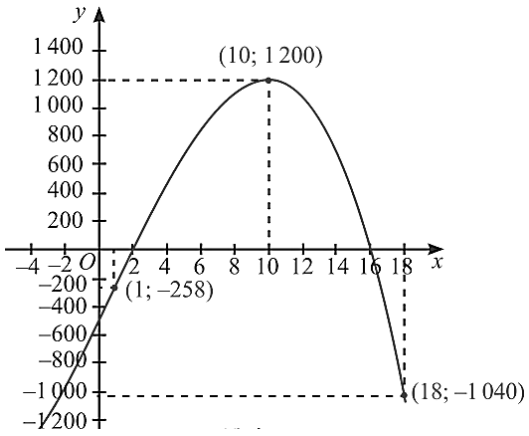
Trên khoảng $(10;18)$; $L'(x)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Cực trị: Hàm số $L(x)$ đạt cực đại tại $x=10$ và $L_{CĐ}=L(10)=1200$.

Bảng biến thiên:

x	1		10		18
$L'(x)$		+	0	−	
$L(x)$	-258	↗	1200	↘	-1040

Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(10;1200)$ và đi qua các điểm $(1;-258);(18;-1040)$ như hình.



d) Sai: Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy khi $x=10$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là 1200. Như vậy, hộ làm nghề dệt cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Lợi nhuận tối đa này là 1200 nghìn đồng.

Câu 8: Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi $P=400-2Q$ và hàm chi phí trung bình $\overline{C}=0,2Q+4+\dfrac{400}{Q}$ trong đó Q là số đơn vị sản phẩm (P và $\overline{C}$ được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm).

a) $Q=90$ là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa;

b) Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 400\$

c) Lợi nhuận tối đa là 17420\$

d) Nếu chính phủ đánh thuế 22\$ / một đơn vị sản phẩm thì giá bán 390\$ để lợi nhuận thu được tối đa

Lời giải

Ta có: Lợi nhuận = Tổng doanh thu - Tổng chi phí.

Tổng doanh thu là R và tổng chi phí là C được cho bởi $R = PQ = 400Q - 2Q^2$

Và $C = Q\overline{C} = 0,2Q^2 + 4Q + 400$ nên lợi nhuận $P = R - C = 400Q - 2Q^2 - \left(0,2Q^2 + 4Q + 400\right).$

Hay $P(Q) = 396Q - 2,2Q^2 - 400.$

a) Đúng: Để tối đa hóa lợi nhuận, ta cho $P'(Q) = 0 \Leftrightarrow 396 - 4,4Q = 0 \Leftrightarrow Q = 90.$

Ta có $P''(Q) = -4,4 < 0$. Vậy P đạt cực đại tại $Q = 90$.

b) Sai: Thay $Q = 90$ vào hàm cầu ta được giá bán trên mỗi sản phẩm để lợi nhuận thu được tối đa: $P = 400 - 2.90 = 220.$

c) Đúng: Lợi nhuận tối đa: $P(90) = 396(90) - 2,2(90)^2 - 400 = 17420.$

d) Sai: Khi chi phí đánh thuế 22\$/một đơn vị sản phẩm, tổng chi phí tăng $22Q$. Hàm chi phí mới là $\overline{C_1} = 0,2Q^2 + 4Q + 400 + 22Q$ và hàm lợi nhuận mới là

$$P = 400Q - 2Q^2 - \left(0,2Q^2 + 4Q + 400 + 22Q\right) = 374Q - 2,2Q^2 - 400$$

Ta có $P_1'(Q) = 0 \Leftrightarrow 374 - 4,4Q = 0 \Leftrightarrow Q = 85.$

Vì $P_1''(Q) = -4,4 < 0$ nên để thu được lợi nhuận tối đa, nhà độc quyền phải sản xuất 85 đơn vị sản phẩm với mức giá $P_1 = 400 - 2.85 = 230\$$, do mức giá này chỉ hơn 10\$ so với trước đó nên chỉ một phần thuế được tính vào người tiêu dùng, phần thuế còn lại do nhà sản xuất gánh chịu. Lợi nhuận bây giờ là 15495.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q(t) = 2t^2 + t$, trong đó t được tính bằng giây (s) và Q được tính theo Culong (C). Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4$ s.

Lời giải

Cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4$ s là $Q'(t) = I(t) = 4t + 1 \Rightarrow t(4) = 17.$

Câu 2: Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Lời giải

Ta có: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1.$

Nhận xét: $v(t)$ có đồ thị là một parabol nên trong $5s$ đầu tiên vận tốc tức thời cúa chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng 13 tại $t = 2s$.

Câu 3: Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t)=e^{t^2+3}+2te^{3t+1}$ (km). Vận tốc của tên lửa sau 1 giây là $m.e^n$ (km/s). Tính $T=m+n$ (Biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

Lời giải

Ta có: $v(t)=s'(t)=2te^{t^2+3}+2e^{3t+1}+6te^{3t+1}\Rightarrow v(1)=2e^4+2e^4+6e^4=10e^4$ (km/s)

Vậy $\begin{cases}m=10\\n=4\end{cases}\Rightarrow T=m+n=10+4=14$

Câu 4: Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 (m/s). Trong Vật lý, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t)=2+24,5t-4,9t^2$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Lời giải

Xét hàm số: $h(t)=2+24,5t-4,9t^2$. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $h'(t)=-9,8t+24,5;\ h'(t)=0\Leftrightarrow -9,8t+24,5=0\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	$-\infty$	↗	$\frac{261}{8}$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t=\dfrac{5}{2}$

Vậy thời điểm vật đạt độ cao lớn nhất là $t=\dfrac{5}{2}$ giây

Câu 5: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật Logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t)=\dfrac{5000}{1+5e^{-t}}, t\ge 0,$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Lời giải

Ta có: $f'(t)=\dfrac{-5000\left(1+5e^{-t}\right)'}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}=\dfrac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$. Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

Đặt $h(t)=\dfrac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$ có $h'(t)=\dfrac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)^2-2.\left(-5e^{-t}\right).\left(1+5e^{-t}\right).25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}$

$=\dfrac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)\left(1+5e^{-t}-10e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}=\dfrac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}$

$h'(t)=0\Leftrightarrow\dfrac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}=0\Leftrightarrow 1-5e^{-t}=0\Leftrightarrow e^{-t}=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow t=\ln 5\ (thoa\ man)$

Ta có bảng biến thiên với $t\in[0;+\infty)$:

t	0		$ln5$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	$\frac{6250}{9}$	↗	1250	↘	0

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5\approx 1,6$ năm thì thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Câu 6: Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t)=1000+\dfrac{100t}{100+t^2}$(con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Lời giải

Xét hàm số $N(t)=1000+\dfrac{100t}{100+t^2}(t>0)$.

Ta có: $N'(t)=\dfrac{100.\left(100+t^2\right)-100t.2t}{\left(100+t^2\right)^2}=\dfrac{100.\left(100-t^2\right)}{\left(100+t^2\right)^2}$.

Khi đó, với $t>0$, $N'(t)=0\Leftrightarrow 100-t^2=0\Leftrightarrow t^2=100\Leftrightarrow t=10$.

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:

t	0		10		$+\infty$
$N'(t)$		$+$	0	$-$	
$N(t)$	1000	↗	1005	↘	1000

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy:

Trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t=10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

Câu 7: Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức $V=k(R-r)r^2;\ 0\le r<R,$ trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu so với bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Lời giải

Ta có: $V'=2kRr-3kr^2$. Nhận xét $V'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} r=0 \\ r=\dfrac{2R}{3}\end{array}\right.$.

Ta có $f(0)=0;\ f\left(\dfrac{2R}{3}\right)=\dfrac{4kR^3}{27}$

Vậy bán kính của khí quản khi ho bằng $\dfrac{2}{3}$ bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ không khí đi vào là lớn nhất.

Câu 8: Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Lời giải

Gọi x là số lần tăng giá 100 nghìn đồng $(x>0)$. Khi đó, số căn được cho thuê là: $100-x$ (căn)

Tổng số tiền thu được trong một tháng là:

$$(100-x)(8000000+100000x)=100000(100-x)(80+x)=100000\left(-x^2+20x+8000\right)$$
$$=100000\left[-(x-10)^2+8100\right]\le 810000000,\forall x>0$$

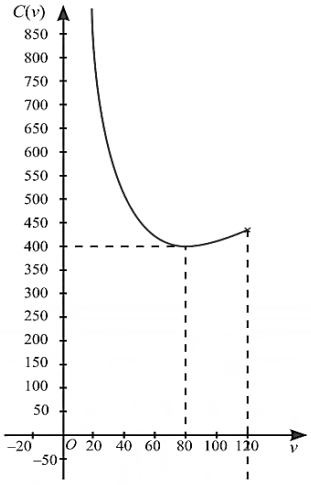
Dấu "=" xảy ra khi $x=10$ (thỏa mãn)

Vậy để thu được doanh thu là lớn nhất thì người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là: $8000000+100000.10=9000000$ (đồng).

Câu 9: Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

$$C(v)=\frac{16000}{v}+\frac{5}{2}v\ \ (0<v\le 120)$$

Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v, người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ như hình bên.



Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Lời giải

Tập xác định: $D=(0;120]$.

Đạo hàm $C'(v)=-\dfrac{16000}{v^2}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{5(v-80)(v+80)}{2v^2}=0\Leftrightarrow v=-80$ (loại) hoặc $v=80$.

Trên khoảng $(0;80), C'(v)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Trên khoảng $(80;120), C'(v)>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

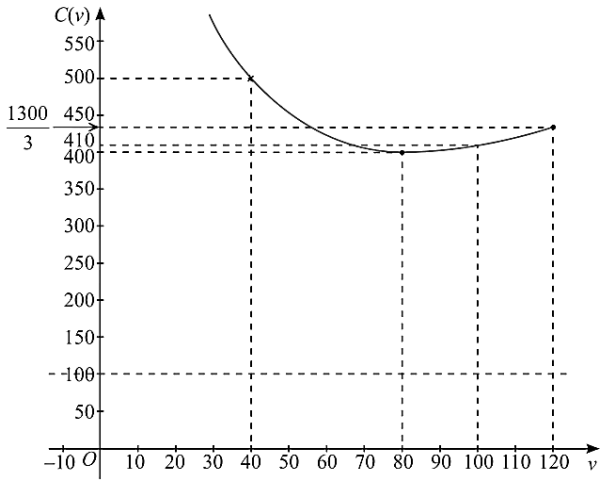
Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v=80, C_{CT}=C(80)=400$.

Giới hạn vô cực và tiệm cận: $\lim\limits_{v\to 0^+}C(v)=\lim\limits_{v\to 0^+}\left(\dfrac{16000}{v}+\dfrac{5}{2}v\right)=+\infty$ nên đường thẳng $v=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

v	0		80		120
$C'(v)$		$-$	0	$+$	
$C(v)$	$+\infty$	↘	400	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(80;400)$ và đi qua các điểm $(40;500),(100;410),\left(120;\dfrac{1300}{3}\right)$ như hình.



Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đạt GTNN khi $v=80$ và GTNN là 400.

Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 80 km/h.

Câu 10: Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

Lời giải

Giả sử giá thuê mỗi căn hộ là x triệu đồng/1 tháng và số căn hộ cho thuê là y.

Khi đó tổng số tiền thu được sẽ là $x.y$.

Theo đề bài, ta có: $y=20-5(x-2)$ (vì cứ mỗi lần tăng giá thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống).

Do đó ta cần tìm giá trị của x sao cho hàm số $f(x)=x\left[20-5(x-2)\right]$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $f'(x)=30-10x=0\Rightarrow 30-10x=0\Rightarrow x=3$

Cuối cùng ta kiểm tra xem điểm cực này có phải là điểm cực đại hay không:

Xác định khoảng: $[-\infty;3],[3;+\infty]$

Chọn $x_1=2\Rightarrow f(x)=10$, chọn $x_2=4\Rightarrow f(x)=-10$

Vì đạo hàm dương với mọi $x<3$ là âm với mọi $x>3\Rightarrow$ hàm số cực đại tại $x=3$

Vì vậy, công ty nên cho thuê mỗi căn hộ với giá 3 triệu đồng/1 tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất.

Câu 11: Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 (km/h). Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v(km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơ ngược dòng quãng đường 300 km trên trong khoảng thời gian t với vận tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

Lời giải

Vận tốc khi cá bơi ngược dòng sẽ là $v-6$ (km/h).

Thời gian để bơi quãng đường 300 km là $t=\dfrac{300}{v-6}(h)$.

Năng lượng tiêu hao là $E(v)=300c\dfrac{v^3}{v-6}(J)$.

Do $c>0\Rightarrow E(v)_{\min}\Leftrightarrow\dfrac{v^3}{v-6}=\left(f(v)\right)_{\min}$.

Với $v>6$ ta có $f'(v)=\dfrac{3v^2(v-6)-v^3}{(v-6)^2}=\dfrac{2v^3-18v}{(v-6)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=0\\v=9.\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta nhận $v=9$ (do $v>6$).

Vậy để năng lượng tiêu hao là thấp nhất thì vận tốc là 9 (km/h).

Câu 12: Thể tích V của 1 (kg) nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa $0^\circ C$ đến $30^\circ C$) được cho bởi công thức

$$V=999{,}87-0{,}06426t+0{,}0085043t^2-0{,}0000679t^3\left(m^3\right).$$

Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất?

Lời giải

Ta có đạo hàm của thể tích:

$$V'(t)=-0{,}06424+2.0{,}0085043t-3\cdot0{,}0000679t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\approx79{,}53138\notin\left(0^\circ;30^\circ\right)\\t\approx3{,}9665.\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên

t	0		$3,9665$		30
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$	$+\infty$	↘	V_{min}	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, khối lượng riêng lớn nhất của vật khi thể tích nhỏ nhất lúc vật có nhiệt độ xấp xỉ gần bằng $4^\circ C$.

Câu 13: Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu chi hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x)=-x^2+30x+6, 0\le x\le30$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ti có thể bán sau đợt quảng cáo?

Lời giải

Ta có $N(x)=-x^2+30x+6\Rightarrow N'(x)=-2x+30\Rightarrow N'(x)=0\Leftrightarrow x=15.$

Đồng thời, ta cũng có $\begin{cases} N(0)=6 \\ N(15)=231 \end{cases} \Rightarrow \max_{x\in[0;30]} N(x)=231 \Leftrightarrow x=15.$
$N(30)=6$

Vậy nếu công ti dành 15 triệu cho việc quảng cáo thì công ti sẽ bán được nhiều nhất là 231 lô hàng.

Câu 14: Công ti truyền hình cáp Vista hiện có 100000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40$/ tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm $0,25\$$ cước thuê bao, công ti có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ti cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là số lần giảm $0,25\$$. Cước thuê bao hàng tháng lúc này là $40-0,25x$ với $0\le x\le 160$ (do mức cước không thể âm), và số thuê bao mới là $1000x$.

Do đó, tổng số thuê bao là $100000+1000x$.

Hàm doanh thu được cho bởi R = (số thuê bao) x (cước mỗi thuê bao trả)

$$R=(100000+1000x)(40-0,25x)=1000(100+x)(40-0,25x)=1000\left(4000+15x-0,25x^2\right)$$

Đạo hàm $R'=0$, ta được $R'=1000(15-0,5x)=0\Leftrightarrow x=30.$

Vì tập xác định của R là khoảng đóng [0; 160] nên R đạt cực đại tại $x=30$ hoặc tại các điểm đầu mút của đoạn [0; 160].

Ta có: $R(0)=4000000;\ R(30)=4225000;\ R(160)=0$

Vậy doanh thu tối đa khi $x=30$. Điều này tương ứng với 30 lần giảm $0,25\$$, tức là cước thuê bao hàng tháng là $40\$-7,5\$=32,5\$$.

Số thuê bao tại mức cước này là $100000+30.(1000)=130000$.

Câu 15: Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó $n=\frac{t^3}{3}-6t^2+32t\ \ (0\le t\le 12)$. Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu?

Lời giải

Đạo hàm $n'(t)=0$ ta có $n'(t)=t^2-12t+32=0\Leftrightarrow(t-4)(t-8)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=8. \end{array}\right.$

Vì tập xác định của n là một khoảng đóng $[0;12]$ nên n đạt cực đại tuyệt đối tại $t=0,t=4,t=8$ hoặc $t=12$:

$$n(0)=\frac{0^3}{3}-6\left(0^2\right)+32.0=0;\ n(4)=\frac{4^3}{3}-6\left(4^2\right)+32.4=\frac{160}{3}$$

$n(8)=\frac{8^3}{3}-6\left(8^2\right)+32.8=\frac{128}{3}$; $n(12)=\frac{12^3}{3}-6\left(12^2\right)+32.12=\frac{288}{3}=96$

Do đó n đạt cực đại khi $t=12$ (năm).

Câu 16: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s=-t^3+6t^2+17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?

Lời giải

Ta có : $v=s'=-3t^2+12t+17$

Ta đi tìm giá trị lớn nhất của $v=-3t^2+12t+17$ trên khoảng $(0;8)$

Mặt khác: $v'=-6t^2+12=0\Rightarrow t=2$

Bảng biến thiên:

t	0		2		8
$V'(t)$		+	0	−	
$V(t)$		↗	29	↘	

Vậy vận tốc lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên là: 29 (m/s).

Câu 17: Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Lời giải

Gọi số máy móc công ty sử dụng để sản xuất là $x\left(x\in \mathrm{N},\ x>0\right)$.

Thời gian cần để sản xuất hết 8000 quả bóng là: $\frac{8000}{30x}$.

Tổng chi phí để sản xuất là: $P(x)=200x+\frac{8000}{30x}.192=200x+\frac{51200}{x}$

Ta có: $P'(x)=200-\frac{51200}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=256\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=16\\x=-16(loai)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		16		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	6400	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy công ty nên sử dụng 16 máy để chi phí hoạt động là thấp nhất.

----------HẾT----------

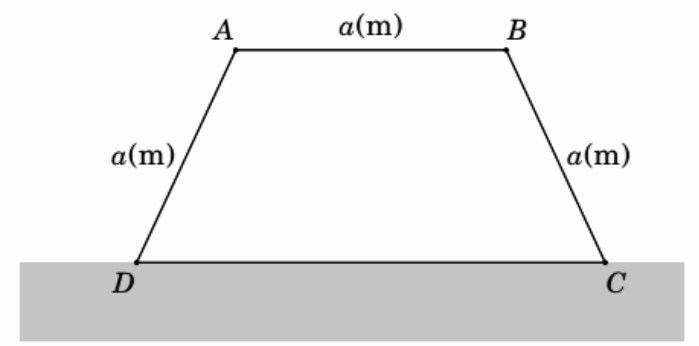
Dạng 2: Một số bài toán tối ưu đơn giản

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

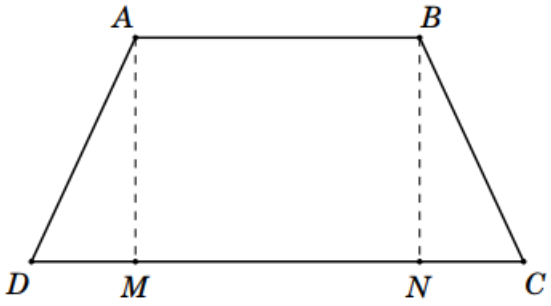
- **Bước 1:** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- **Bước 2:** Chọn một đại lượng thich hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q=Q(x)$
- **Bước 3:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q=Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc theo bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ dưới đây biết rằng bờ sông là đường thẳng CD không phải rào lưới. Hỏi bác nông dân đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Lời giải



Gọi M,N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B lên CD

Đặt $x=MD$, $(0<x<a)$ suy ra $AM=\sqrt{AD^2-MD^2}=\sqrt{a^2-x^2}$

Diện tích của mảnh vườn hình thang cân là $S(x)=\dfrac{(AB+CD)AM}{2}=(a+x)\sqrt{a^2-x^2}$.

Xét hàm số $f(x)=(a+x)\sqrt{a^2-x^2}$ trên khoảng $(0<x<a)$

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{-2x^2-ax+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-a\notin(0<x<a)\\x=\dfrac{a}{2}\in(0<x<a)\end{array}\right.$

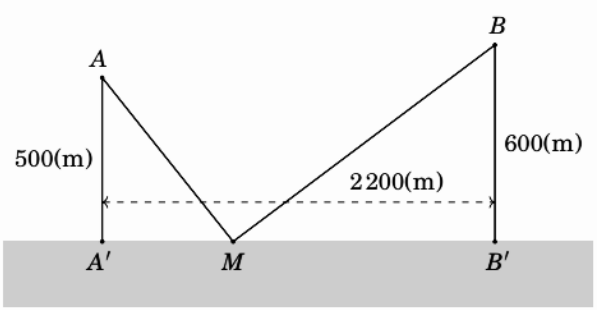
Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0;a)$

x	0		$\frac{a}{2}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	a^2	↗	$\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$	↘	0

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{(0;a)} f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

Vậy bác nông dân có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$ m^2.

Bài tập 2: Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 550\,\text{m}$, $BB' = 600\,\text{m}$. Người ta đo được $A'B' = 2200\,\text{m}$ như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm cạnh bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Lời giải

Đặt $A'M = x\,(0 < x < 2200)$, $B'M = 2200 - x$

Ta có $AM = \sqrt{x^2 + 500^2}$, $BM = \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$

Khi đó tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là:

$$AM + BM = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$ trên khoảng $(0;2200)$

Đạo hàm $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} - \frac{2200 - x}{\sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1000$

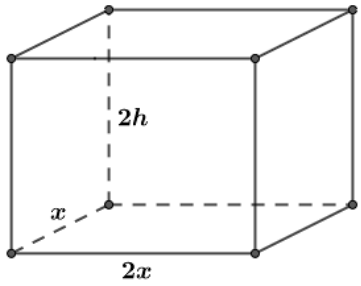
Bảng biến thiên:

x	0		1000		2200
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2780	↘	2460	↗	2856

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông là khoảng $2460\,\text{m}$, tại vị trí M cách điểm A' là $1000\,\text{m}$.

Bài tập 3: Ông A dự định sử dụng hết $5,5m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải



Gọi x m là chiều rộng. $(x>0)$. Chiều dài là $2x$ m . Chiều cao là h m . $h>0$

Theo đề bài, ta có: $2x^2+4xh+2xh=5,5 \Leftrightarrow 2x^2+6xh=5,5 \Leftrightarrow h=\dfrac{5,5-2x^2}{6x}$

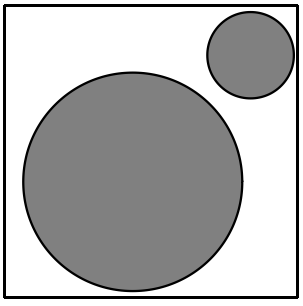
Vì $h>0$ và $x>0$ nên $5,5-2x^2>0 \Leftrightarrow 0<x<\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Suy ra thể tích của bể cá là: $V=2x^2h=\dfrac{5,5}{3}x-\dfrac{2}{3}x^3$ với $0<x<\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

$$V'=\frac{11}{6}-2x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{33}}{6}(N) \\ x=-\dfrac{\sqrt{33}}{6}(L) \end{array}\right.$$

Thể tích lớn nhất của bể cá là: $V_{max}=V\left(\dfrac{\sqrt{33}}{6}\right)\approx 1,17\ m^3$.

Bài tập 4: Từ một mảnh giấy hình vuông cho trước cắt thành hai hình tròn sao cho tổng diện tích của hai hình tròn là lớn nhất. Gọi $k\ (k\le 1)$ là tỉ số bán kính của chúng khi đó. Hỏi giá trị $\sqrt{k}$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi đường chéo hình chữ nhật là a. Ta có: $R+r=\dfrac{a}{1+\sqrt{2}}$.

Tìm max của R^2+r^2. Khảo sát hàm, ta tìm được $R=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ Từ đó ta tìm được $\sqrt{k}=\sqrt{2}-1$.

Bài tập 5: Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Gọi x $(0<x<60)$ là chiều dài của đoạn thứ hai, suy ra $60-x$ là độ dài đoạn thứ nhất.

Khi đó cạnh hình vuông là $15-\dfrac{x}{4}$ nên diện tích hình vuông là $\left(15-\dfrac{x}{4}\right)^2$.

Chu vi của vòng tròn là $2\pi R=x\Rightarrow R=\dfrac{x}{2\pi}$. Khi đó diện tích hình tròn là $\pi R^2=\dfrac{x^2}{4\pi}$.

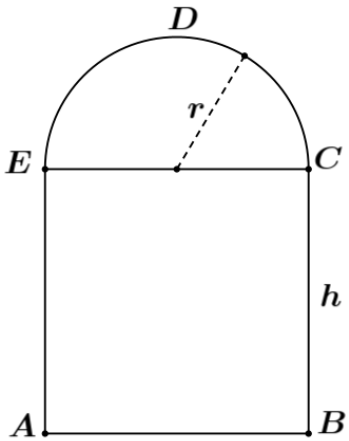
Khi đó tổng diện tích của hai hình sẽ là $f(x)=\dfrac{x^2}{4\pi}+\left(15-\dfrac{x}{4}\right)^2$.

Khi đó ta có $f'(x)=\dfrac{x}{2\pi}-\dfrac{1}{2}\left(15-\dfrac{x}{4}\right)=\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{15}{2}$.

Cho $f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{15}{\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{4}}$. Suy ra tổng diện tích hai hình nhỏ nhất khi $x=\dfrac{60\pi}{4+\pi}$.

Khi đó cạnh hình vuông sẽ là $60-\dfrac{60\pi}{4+\pi}\approx 33,61$.

Bài tập 6: Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 4 m để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.



Lời giải

Ta có $2(h+r)+\pi r=4\ \Rightarrow h=\dfrac{4-2r-\pi r}{2}$.

Diện tích của khung cửa là $S=\dfrac{1}{2}\pi r^2+2rh\ =\dfrac{1}{2}\pi r^2+2r\left(\dfrac{4-2r-\pi r}{2}\right)\ =-\dfrac{\pi+4}{2}.r^2+4r$.

Ta có $h=\dfrac{4-2r-\pi r}{2}>0\Leftrightarrow 0<r<\dfrac{4}{\pi+2}$.

Xét hàm số $S(r)=-\dfrac{\pi+4}{2}.r^2+4r$ trên $\left(0;\dfrac{4}{\pi+2}\right)$ có $S'(r)=-(\pi+4)r+4=0 \Leftrightarrow r=\dfrac{4}{\pi+4}$

Bảng biến thiên

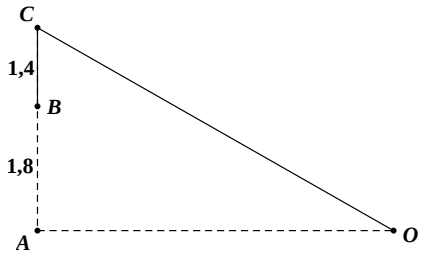
x	0		$4/(\pi+4)$		$4/(\pi+2)$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	$\dfrac{8}{\pi+4}$	↘	

Vậy $S(r)$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow r=\dfrac{4}{\pi+4}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc BOC là góc nhọn.



A. $AO=2,4\,\text{m}$ **B.** $AO=2\,\text{m}$ **C.** $AO=2,6\,\text{m}$ **D.** $AO=3\text{m}$

Lời giải

Đặt độ dài cạnh $AO=x\,\text{cm},\ (x>0)$

Suy ra: $BO=\sqrt{3,24+x^2}, CO=\sqrt{10,24+x^2}$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\cos BOC=\frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2.OB.OC}=\frac{\left(3,24+x^2\right)+\left(10,24+x^2\right)-1,96}{2\sqrt{\left(3,24+x^2\right)\left(10,24+x^2\right)}}=\frac{5,76+x^2}{\sqrt{\left(3,24+x^2\right)\left(10,24+x^2\right)}}$$

Vì góc BOC là góc nhọn nên bài toán trở thành tìm x để $F(x)=\dfrac{5,76+x^2}{\sqrt{\left(3,24+x^2\right)\left(10,24+x^2\right)}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $\left(3,24+x^2\right)=t,(t>3,24)$ suy ra $F(t)=\dfrac{t+\dfrac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}}=\dfrac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}}$

Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t)=\left(\frac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}}\right)'=\frac{1}{25}\left(\frac{25\sqrt{t(t+7)}-(25t+63)\left(\frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}}\right)}{t(t+7)}\right)$$

$$=\frac{1}{25}\left(\frac{50(t^2+7t)-(25t+63)(2t+7)}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}}\right)=\frac{1}{25}\left(\frac{49t-441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}}\right)=0\Leftrightarrow t=9$$

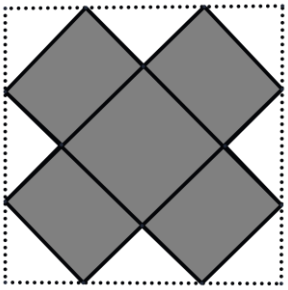
Bảng biến thiên:

t	$3,24$		9		$+\infty$
$F'(t)$		$-$	0	$+$	
$F(t)$		↘	F_{min}	↗	

Thay vào đặt ta có: $(3,24+x^2)=9\Leftrightarrow x^2=\frac{144}{25}\Leftrightarrow x=2,4m$

Vậy để nhìn rõ nhất thì $AO=2,4$ m.

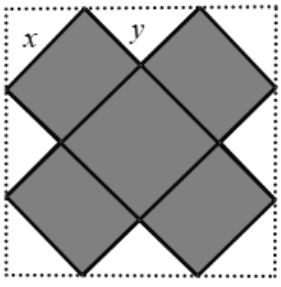
Câu 2: Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gập thành hình hộp chữ nhật không nắp. Tính thể tích lớn nhất của khối hộp.



A. $8\sqrt{2}$. **B.** $10\sqrt{2}$. **C.** $9\sqrt{2}$. **D.** $11\sqrt{2}$.

Lời giải

Đặt kích thước các cạnh như hình vẽ



Ta có $\frac{x}{\sqrt{2}}+y\sqrt{2}+\frac{x}{\sqrt{2}}=6\Leftrightarrow x+y=3\sqrt{2}\Leftrightarrow y=3\sqrt{2}-x$ với $0<x<3\sqrt{2}$.

Thể tích của khối hộp tạo thành là $V=x^2y=x^2\left(3\sqrt{2}-x\right)$.

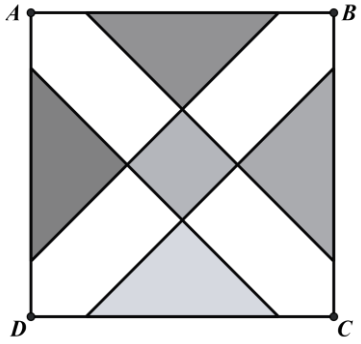
Ta có $V' = 3x\left(2\sqrt{2} - x\right) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	0		$2\sqrt{2}$		$3\sqrt{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	$8\sqrt{2}$	↘	

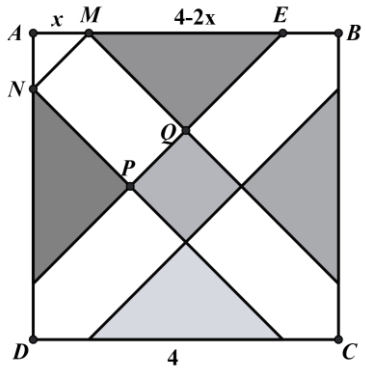
Vậy: $\max V = 8\sqrt{2}$ khi $x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$.

Câu 3: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



A. $\frac{19}{3}$. **B.** $\frac{17}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Lời giải



Đặt $AM = x \ (0 < x < 4) \Rightarrow ME = 4 - 2x$.

$2MQ^2 = (4-2x)^2 \Leftrightarrow MQ^2 = 2(2-x)^2 \Leftrightarrow MQ = \sqrt{2(2-x)}$

Gọi S tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

$S = 4.\frac{MQ^2}{2} + PQ^2 = 2MQ^2 + MN^2 = (4-2x)^2 + \left(x\sqrt{2}\right)^2 = 6x^2 - 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

Bảng biến thiên

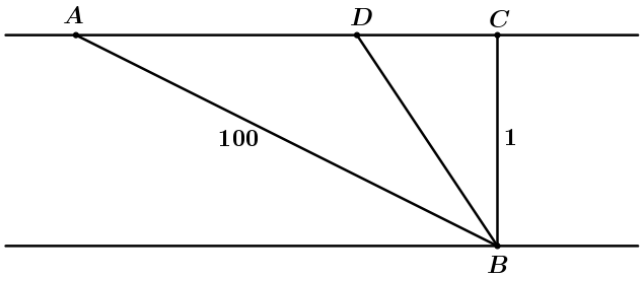
x	0		$4/3$		4
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		↘	$\frac{16}{3}$	↗	

Vậy $S_{\min}=\frac{16}{3}$

Câu 4: Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sỹ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất?Biết dòng sông là thẳng,mục tiêu cách chiến sỹ 1km theo đường chim bay và chiến sỹ cách bờ bên kia 100m.

A. $\frac{200\sqrt{2}}{3}$. **B.** $75\sqrt{3}$. **C.** $\frac{200\sqrt{3}}{3}$. **D.** $75\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi A là mục tiêu; B là vị trí chiến sỹ và BD là đường bơi của chiến sỹ.

Chọn một đơn vị độ dài là 100m suy ra $BC=1; AB=10;\ AC=3\sqrt{11}$

Gọi vận tốc bơi của chiến sỹ là một đơn vị vận tốc thì vận tốc chạy của chiến sỹ là 3 đơn vị vận tốc. Gọi x là quãng đường chiến sỹ bơi suy ra $BD=x$

Vậy quãng đường chiến sỹ chạy là $AD=AC-CD=3\sqrt{11}-\sqrt{x^2-1}$

Thời gian chiến sỹ đến được mục tiêu là: $t=\frac{3\sqrt{11}-\sqrt{x^2-1}}{3}+\frac{x}{1}=\sqrt{11}-\frac{1}{3}\sqrt{x^2-1}+x$

Xét hàm $f(x)=\sqrt{11}-\frac{1}{3}\sqrt{x^2-1}+x$ có $f'(x)=1-\frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\sqrt{2}}{4}(thoa\ man)\\x=-\frac{3\sqrt{2}}{4}(loai)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	1		$\frac{3\sqrt{2}}{4}$		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Vậy thời gian chiến sỹ đến mục tiêu ngắn nhất khi $f(x)_{\min} \Rightarrow x = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

Vậy chiến sỹ phải bơi $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}.100 = 75\sqrt{2}(m)$.

Câu 5: Một người dự định làm một bể chứa nước hình trụ bằng inốc có nắp đậy với thể tích 1 (m^3). Chi phí mỗi m^2 đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m^2 mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi người đó án kính bể là bao nhiêu để chi phí làm bể ít nhất?

A. $\sqrt[3]{2\pi}$. **B.** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$. **C.** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{\pi}}$.

Lời giải

Gọi R và h lần lượt là bán kính và chiều cao của bể chứa nước.

Ta có thể tích bể chứa nước là: $V = 1 \Rightarrow \pi R^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \dfrac{1}{\pi R^2}$.

Diện tích nắp và mặt đáy bể chứa nước là: $S_1 = \pi R^2$.

Diện tích xung quanh của bể chứa nước là: $S_2 = 2\pi Rh = 2\pi R.\dfrac{1}{\pi R^2} = \dfrac{2}{R}$.

Chi phí làm bể chứa nước là: $f(R) = 6\pi R^2 + 2\pi R^2 + 4.\dfrac{2}{R} = 8\pi R^2 + \dfrac{8}{R}$ (trăm nghìn đồng).

Ta có: $f'(R) = 16\pi R - \dfrac{8}{R^2}$. Xét $f'(R) = 0 \Leftrightarrow 16\pi R - \dfrac{8}{R^2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi R^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

R	0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$		$+\infty$
$f'(R)$		$-$	0	$+$	
$f(R)$		↘	CT	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy chi phí làm bể chứa nước thấp nhất khi $R = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.

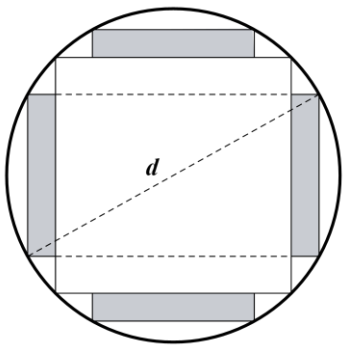
Câu 6: Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là d.

A. Rộng $\dfrac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}}{4}d$

B. Rộng $\dfrac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{15}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}}{4}d$

C. Rộng $\dfrac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{14}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}}{4}d$

D. Rộng $\dfrac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{13}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}}{4}d$



Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng phụ lần lượt là x, y. Đường kính của khúc gỗ là d, khi đó tiết diện ngang của thanh xà có độ dài cạnh là $\frac{d}{\sqrt{2}}$ và $0<x<\frac{d\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}, 0<y<\frac{d}{\sqrt{2}}$

Theo đề Câu ta được hình chữ nhật ABCD như hình vẽ, theo định lý Pitago ta có:

$$\left(2x+\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=d^2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}x}$$

Do đó, miếng phụ có diện tích là: $S(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}$ với $0<x<\frac{d\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $S'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}+\frac{x\left(-8x-2\sqrt{2}d\right)}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}=\frac{-16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}$

$$S'(x)=0 \Leftrightarrow -16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2=0 \Leftrightarrow -16\left(\frac{x}{d}\right)^2-6\sqrt{2}\left(\frac{x}{d}\right)+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$$

Vậy miếng phụ có kích thước $x=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d, y=\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

Câu 7: Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/m^2. Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?

A. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu

B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215 triệu

C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu

D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu.

Lời giải

Gọi x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ chứa nước, $(x>0, y>0, h>0, m)$

Ta có: $\frac{y}{x}=2 \Leftrightarrow y=2x$. Thể tích hồ chứa nước $V=xyh \Leftrightarrow h=\frac{V}{xy}=\frac{576}{x(2x)}=\frac{288}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hồ chứa nước:

$$S(x)=2xy+2xh+2yh=2x(2x)+2x\frac{288}{x^2}+2(2x)\frac{288}{x^2}=4x^2+\frac{1728}{x}$$

Để chi phí nhân công là ít nhất thì diện tích cần xây dựng là nhỏ nhất, mà vẫn đạt thể tích như mong muốn.

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow S(x)=4x^2+\frac{1728}{x} \Rightarrow S'(x)=0 \Leftrightarrow 8x-\frac{1728}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=6$$

Bảng biến thiên:

x	0		6		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		↘	S_{min}	↗	

Vậy kích thước của hồ là: rộng 6m, dài 12m, cao 8m.

Diện tích cần xây: $432m^2$ và chi phí ít nhất là: $432x500.000 = 216.000.000$

Câu 8: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R, nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

A. $2R^2$ **B.** $5R^2$ **C.** R^2 **D.** $3R^2$

Lời giải

Gọi x là độ dài cạnh của hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của hình tròn $(0 < x < R)$

Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $2\sqrt{R^2 - x^2}$

Ta có diện tích của hình chữ nhật là: $S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$S'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2R^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}\ (thoa\ man) \\ x = \dfrac{-R\sqrt{2}}{2}\ (loai) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{R\sqrt{2}}{2}$		R
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	R^2	↘	

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là R^2.

Câu 9: Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

A. 83.200.000 đồng **B.** 382.000 đồng **C.** 83.200 đồng **C.** 8.320.000 đồng.

Lời giải

Diện tích của đáy hộp là: $S = \dfrac{V}{h} = \dfrac{96.000}{60} = 1600cm^2 = 0,16m^2$

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là $x, (x > 0, m)$, chiều rộng của hộp là $\dfrac{0,16}{x}$

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí để làm để cá.

Chi phí để hoàn thành bể cá:

$$F(x)=0,16\times 100.000+2.0,6x.70.000+2.0,6.\frac{0,16}{x}.70.000=16.000+48.000x+\frac{13440}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$F'(x)=84.000-\frac{13440}{x^2}=0\Leftrightarrow 84.000-\frac{13440}{x^2}=0\Leftrightarrow x=0,4$$

Bảng biến thiên:

x	0		$0,4$		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘	F_{min}	↗	

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là: 83.200 đồng

Câu 10: Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V=8\left(m^3\right)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là $980.000đ/m^2$ và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn đồng).

A. 22.770.000 đ. **B.** 27.657.000 đ. **C.** 20.965.000 đ. **D.** 23.235.000 đ.

Lời giải

Gọi chiều rộng của bể là $3x\ (m)$. Ta có chiều dài bể là $4x\ (m)$ và chiều cao của bể là $\frac{2}{3x^2}\ (m)$

Khi đó tổng diện tích bề mặt xây là:

$$T=(3x+4x).2.\frac{2}{3x^2}+2.3x.4x-\frac{2}{9}.3x.4x=\frac{28}{3x^2}+\frac{64x^2}{3}\geq 2.\sqrt{\frac{28}{3x^2}.\frac{64x^2}{3}}=\frac{32\sqrt{7}}{3}\ \left(m^2\right).$$

Chi phí C (tính theo đồng) xây dựng là: $C=T.980000\geq\frac{32\sqrt{7}}{3}.980000\approx 27657000$ (đồng).

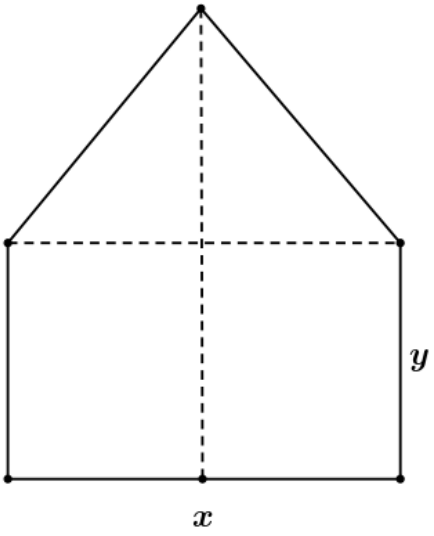
Câu 11: Dùng một dây thép dài 60 m uốn thành một khung có dạng như hình vẽ. Biết phần dưới là hình chữ nhật và phía trên là một tam giác đều. Diện tích lớn nhất của khung có giá trị bằng:

A. $\frac{900}{6-\sqrt{3}}\left(\mathrm{m}^2\right)$. **B.** $\frac{1200}{6-\sqrt{3}}\left(\mathrm{m}^2\right)$. **C.** $\frac{700}{3+\sqrt{3}}\left(\mathrm{m}^2\right)$. **D.** $\frac{600}{3-\sqrt{3}}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Lời giải

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật là x và y như hình vẽ

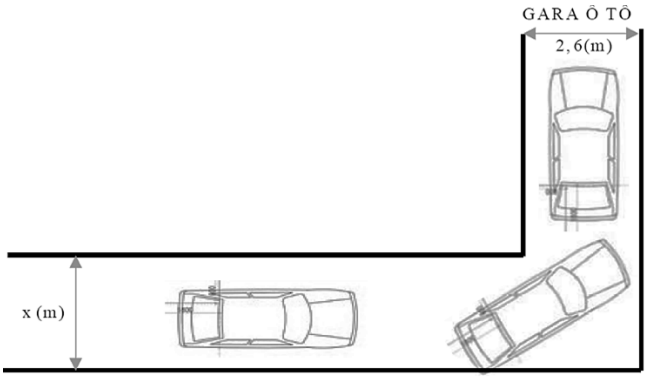
Khi đó chu vi của khung là $(x+2y)+2x=60\Leftrightarrow y=30-\frac{3}{2}x$



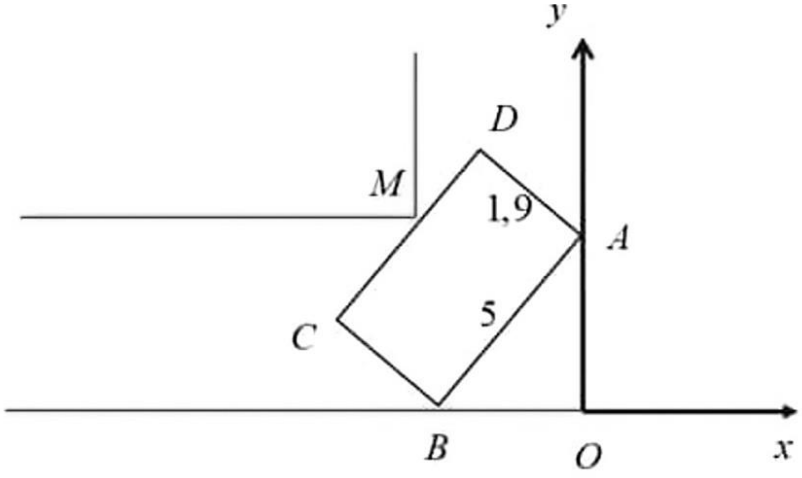
Suy ra diện tích của khung là: $S = xy + \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = x(30 - 1{,}5x) + \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{6-\sqrt{3}}{4}x^2 + 30x = f(x)$

Dễ dàng suy ra được: $S_{\max} = \max f(x) = f\left(\dfrac{60}{6-\sqrt{3}}\right) = \dfrac{900}{6-\sqrt{3}}(\text{m}^2)$

Câu 12: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2{,}6$ (m). Biết kích thước xe ô tô là $5\text{m} \times 1{,}9\text{m}$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài 5 (m), chiều rộng $1{,}9$ (m). Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được?



A. $x = 3{,}7$ (m). **B.** $x = 2{,}6$ (m). **C.** $x = 3{,}55$ (m). **D.** $x = 4{,}27$ (m).



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó $M\left(-2,6\,;\,x\right)$.

Gọi $B\left(-a\,;\,0\right)$ suy ra $A\left(0\,;\,\sqrt{25-a^2}\right)$. Phương trình $AB:\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{\sqrt{25-a^2}}-1=0$.

Do $CD\,//\,AB$ nên phương trình $CD:\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{\sqrt{25-a^2}}-T=0$.

Mà khoảng cách giữa AB và CD bằng $1,9$ m nên

$$\frac{\left|T-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}}=1,9\Rightarrow T=1+\frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M,O nằm khác phía đối với bờ là đường thẳng CD.

Suy ra: $\dfrac{-2,6}{-a}+\dfrac{x}{\sqrt{25-a^2}}-1-\dfrac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}\geq 0\Leftrightarrow x\geq\sqrt{25-a^2}+\dfrac{9,5}{a}-\dfrac{2,6\times\sqrt{25-a^2}}{a}$

Để cho nhanh, chúng ta dùng chức năng **TABLE** trong máy tính:

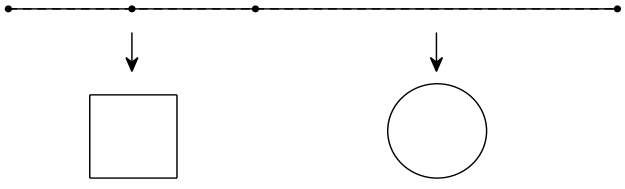
$f\left(X\right)=\sqrt{25-X^2}+\dfrac{9,5}{X}-\dfrac{2,6\times\sqrt{25-X^2}}{X}$ với STEP = $\dfrac{5}{29}$; START = 0; END = 5.

Thấy giá trị lớn nhất của $f\left(X\right)=\sqrt{25-X^2}+\dfrac{9,5}{X}-\dfrac{2,6\times\sqrt{25-X^2}}{X}$ xấp xỉ $3,698$.

Vậy chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị $x=3,7$ (m)

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một sợi dây kim loại dài a $\left(\text{cm}\right)$. Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn có độ dài x $\left(\text{cm}\right)$ được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông $\left(a>x>0\right)$.



a) Bán kính đường tròn: $r=\dfrac{x}{\pi}$.

b) Diện tích hình vuông: $\left(\dfrac{a-x}{4}\right)^2$.

c) Tổng diện tích hai hình: $\dfrac{\left(4+\pi\right).x^2-2a\pi x+\pi a^2}{16\pi}$.

d) Khi $x=\dfrac{a\pi}{2+\pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

Lời giải

a) Sai : Do x là độ dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn $(0 < x < a)$.

Suy ra chiều dài đoạn còn lại là $a - x$.

Chu vi đường tròn: $2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$. Diện tích hình tròn: $S_1 = \pi.r^2 = \dfrac{x^2}{4\pi}$.

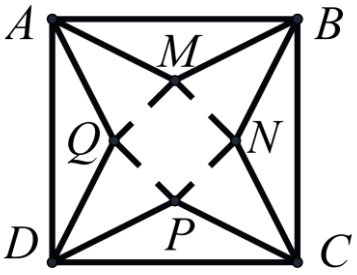
b) Đúng: Diện tích hình vuông: $S_2 = \left(\dfrac{a-x}{4}\right)^2$.

c) Đúng: Tổng diện tích hai hình: $S = \dfrac{x^2}{4\pi} + \left(\dfrac{a-x}{4}\right)^2 = \dfrac{(4+\pi).x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.

Đạo hàm: $S' = \dfrac{(4+\pi).x - a\pi}{8\pi}$; $S' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\pi}{4+\pi}$.

d) Sai: Hàm S chỉ có một cực trị và là cực tiểu tại $x = \dfrac{a\pi}{4+\pi}$ suy ra $S_{\min} \Leftrightarrow x = \dfrac{a\pi}{4+\pi}$.

Câu 2. Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $MA^2 = MB^2 + MC^2$ người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau là AMB, BNC, CPD và DQA. Với phần còn lại người ta gấp lên và ghép lại để thành hình chóp tứ giác đều.



Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x > 0$.

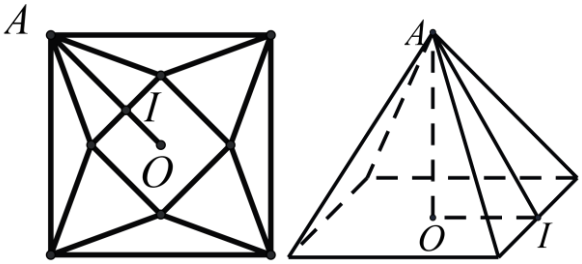
a) Chiều cao của hình chóp là $\sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.

b) Điều kiện của x là: $0 < x < 25\sqrt{2}$

c) Thể tích của khối chóp bằng $\dfrac{1}{3}.\sqrt{1250x^3 - 25\sqrt{2}x^4}$.

d) Khi cạnh đáy của khối chóp bằng $3\sqrt{2}$dm thì thể tích của khối chóp là lớn nhất

Lời giải



a) Đúng : Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x>0$. Ta có $AI = AO - IO = 25\sqrt{2} - \dfrac{x}{2}$.

Chiều cao của hình chóp $h = \sqrt{AI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(25\sqrt{2} - \dfrac{x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.

b) Đúng: Điều kiện $1250 - 25\sqrt{2}x > 0 \Rightarrow x < 25\sqrt{2}$.

c) Sai: Thể tích của khối chóp bằng $V = \dfrac{1}{3}.x^2.\sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x} = \dfrac{1}{3}.\sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}$.

d) Sai: Xét hàm số $y = \dfrac{1}{3}.\sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}$ với $0 < x < 25\sqrt{2}$.

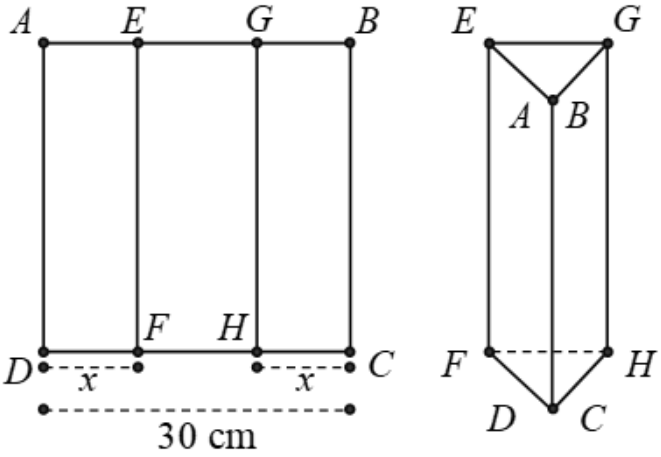
Ta có $y' = \dfrac{1}{3}.\dfrac{5000x^3 - 125\sqrt{2}x^4}{2\sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^3}}$; $y' = 0 \Rightarrow 5000x^3 - 125\sqrt{2}x^4 = 0 \Rightarrow x = 20\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	0		$20\sqrt{2}$		$25\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	y_{max}	↘	0

Vậy để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình bằng $20\sqrt{2}\,\text{cm} = 2\sqrt{2}\,\text{dm}$.

Câu 3. Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm. Người ta gập tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



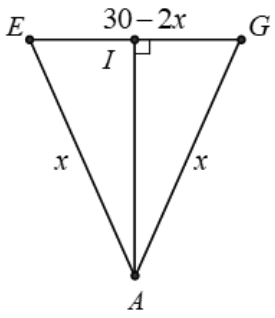
a) Thể tích khối trụ được tính bằng công thức $V = 30S$ trong đó S là diện tích của tam giác AEG

b) Diện tích của tam giác AEG bằng: $\sqrt{30}.\sqrt{(15-x)^2(2x-15)}$

c) Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $x = 10(\text{cm})$

d) Thể tích khối lăng trụ lớn nhất bằng $1250\left(cm^3\right)$

Lời giải



a) Đúng: Đường cao lăng trụ là $AD = AB = 30\text{cm}$ không đổi. Để thể tích lăng trụ lớn nhất chỉ cần diện tích đáy lớn nhất.

Gọi I là trung điểm cạnh $EG \Rightarrow AI \perp EG$ trong tam giác $AEG \Rightarrow IG = 15 - x,\ (0 < x < 15)$

Ta có: $AI = \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{30-2x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - (15-x)^2} = \sqrt{30x - 225}, x \in \left(\dfrac{15}{2}; 15\right)$.

b) Sai: $S_{\Delta AEG} = \dfrac{1}{2} AI.EG = \dfrac{1}{2}(30-2x)\sqrt{30x-225} = \sqrt{15}.\sqrt{(15-x)^2(2x-15)}$

Vậy ta cần tìm $x \in \left(\dfrac{15}{2}; 15\right)$ để $f(x) = (15-x)^2(2x-15)$ lớn nhất.

$f'(x) = -2(15-x)(2x-15) + 2(15-x)^2 = 2(15-x)(30-3x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15 \\ x = 10 \end{array}\right.$.

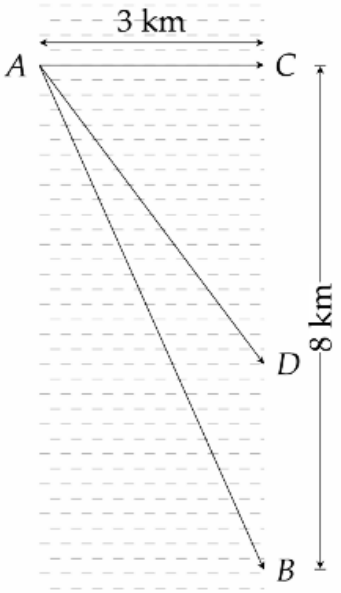
Bảng biến thiên:

x	$15/2$		10		15
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	125	↘	0

c) Đúng: Vậy thể tích lăng trụ lớn nhất khi $x = 10$.

d) Sai: Và thể tích lớn nhất bằng $125.30 = 3750\left(cm^3\right)$

Câu 4. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Gọi $x\ (\text{km})$ là độ dài quãng đường BD. Xét tính đúng sai trong các khẳng định sau:



a) $8 - x\ (\text{km})$ là độ dài quãng đường CD.

b) Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AD là: $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}$ (giờ)

c) Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\dfrac{8-x}{8}$

d) Khoảng 1 giờ 20 phút là khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B.

Lời giải

a) Đúng: Gọi $x\,(\text{km})$ là độ dài quãng đường BD; $8-x\,(\text{km})$ là độ dài quãng đường CD.

b) Sai: Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD=\sqrt{x^2+9}$ là: $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\dfrac{8-x}{8}$ (giờ)

c) Sai: Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$ trên khoảng $(0;8)$

Ta có $f'(x)=\dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}}-\dfrac{1}{8}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9}=4x\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

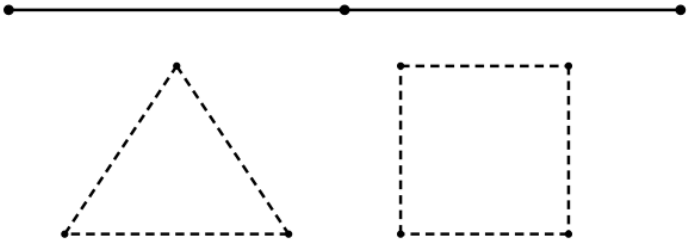
x	0		$9/\sqrt{7}$		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	↘	$1+\frac{\sqrt{7}}{8}$	↗	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

d) Đúng: Dựa vào bảng biến thiên ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1^{\text{h}}20'$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

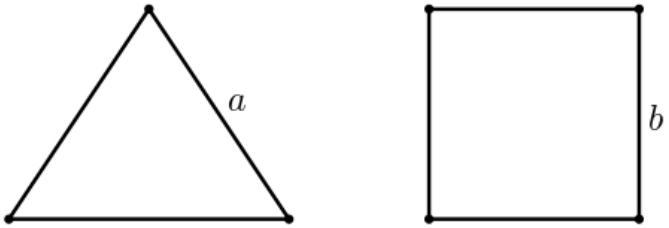
Câu 1: Cắt một đoạn dây dài 60m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một tam giác đều có diện tích S_1, đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi độ dài đoạn dây gấp tam giác đều là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $60 - x$ (mét)



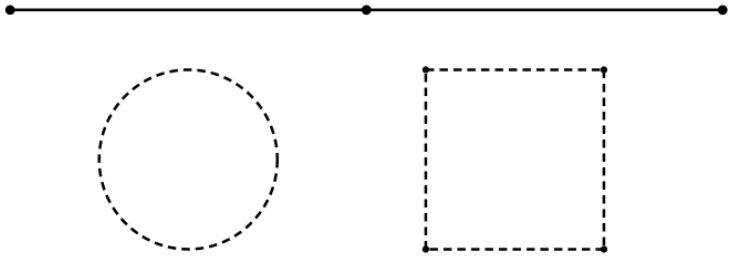
Khi đó $x = 3a \Leftrightarrow a = \dfrac{x}{3} \Rightarrow S_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{36}$

Mặt khác: $60 - x = 4b \Rightarrow b = \dfrac{60-x}{4} \Rightarrow S^2 = b^2 = \left(\dfrac{60-x}{4}\right)^2$

Khi đó $S_1 + S_2 = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{36} + \left(\dfrac{60-x}{4}\right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2 - 1080x + 32400}{144}$

Dễ dàng tính được $\left(S_1 + S_2\right)_{\min} = \min f(x) = f\left(\dfrac{540}{9+4\sqrt{3}}\right) \approx 97{,}87\left(\text{m}^2\right)$.

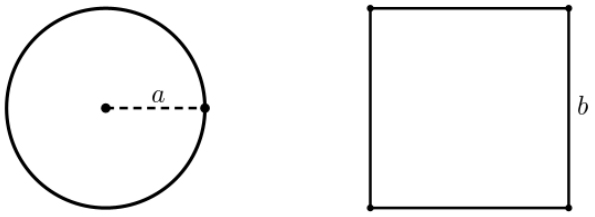
Câu 2: Cắt một đoạn dây dài 30m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một đường tròn có diện tích S_1, đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi độ dài đoạn dây gấp đường tròn là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $30 - x$ (mét)



Khi đó $x = 2\pi a \Leftrightarrow a = \dfrac{x}{2\pi} \Rightarrow S_1 = \pi a^2 = \dfrac{x^2}{4\pi}$

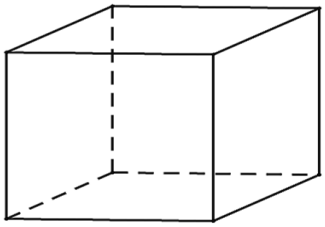
Mặt khác: $30 - x = 4b \Rightarrow b = \dfrac{30-x}{4} \Rightarrow S^2 = b^2 = \left(\dfrac{30-x}{4}\right)^2$

Khi đó $S_1 + S_2 = \dfrac{x^2}{4\pi} + \left(\dfrac{30-x}{4}\right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{(\pi+4)x^2 - 60\pi x + 900\pi}{16\pi}$

Dễ dàng tính được $\left(S_1 + S_2\right)_{\min} = \min f(x) = f\left(\dfrac{30\pi}{\pi+4}\right) \approx 31{,}51\left(\text{m}^2\right)$.

Câu 3: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h=\dfrac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và $x\ (x>0)$.

Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là: $V=2x^2.h \Rightarrow 2x^2.h=48 \Leftrightarrow x^2.h=24$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là

$L=3\left(2x^2+2xh+4xh\right)+2x^2$

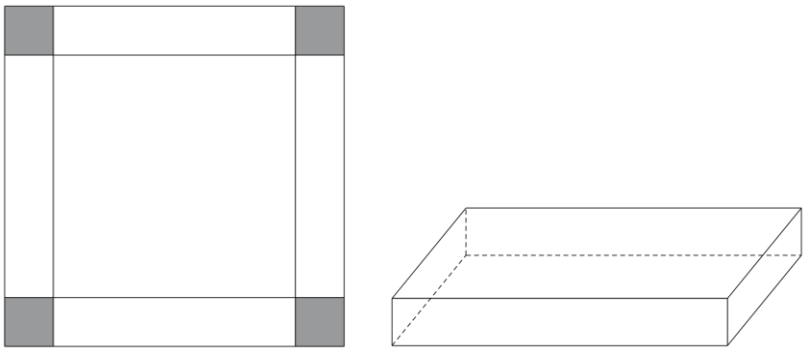
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm ta được:

$L=8x^2+9xh+9xh\geq 3\sqrt[3]{8x^2.9xh.9xh}=3\sqrt[3]{648\left(x^2h\right)^2}=216$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}8x^2=9xh\\x^2h=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{9h}{8}\\\dfrac{9^2}{8^2}.h^3=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\h=\dfrac{8}{3}\end{cases}$

Vậy $m=8, n=3$ và $m+n=11$.

Câu 4: Một tấm bìa hình vuông có diện tích $900\,\text{cm}^2$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm bìa đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm rồi gập tấm bìa lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp có dạng hình hộp chữ nhật. Tìm thể tích lớn nhất mà hình hộp chữ nhật có thể thu được?



Lời giải

Cạnh của tấm bìa là $a=\sqrt{S}=\sqrt{900}=30$ cm, đáy sẽ là hình vuông có cạnh bằng $30-2x$.

Thể tích thu được là: $V=(30-2x)^2 x=f(x)$ với $0\le x\le \dfrac{a}{1}=15$

Dễ dàng tính được: $V_{\max}=\max f(x)=f(5)=2000(\text{cm}^3)$

Câu 5: Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (hình vẽ dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối vối ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Lời giải

Gọi độ dài của hàng rào song sông với bờ sông là x với $x>0$

Gọi độ dài của mỗi hàng rào trong ba hàng rào song song nhau là y với $y>0$

Diện tích đất mà bác nông dân rào được là: $xy(m^2)$

Tổng chi phí là 15 000 000 đồng nên ta có phương trình:

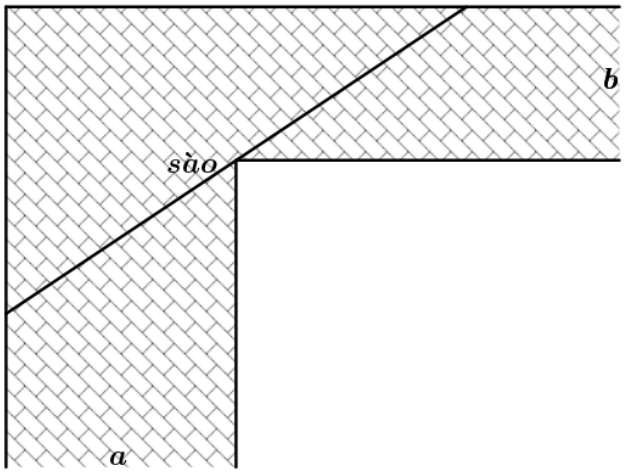
$x60000+3y50000=15000000\Rightarrow 6x+15y=1500$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

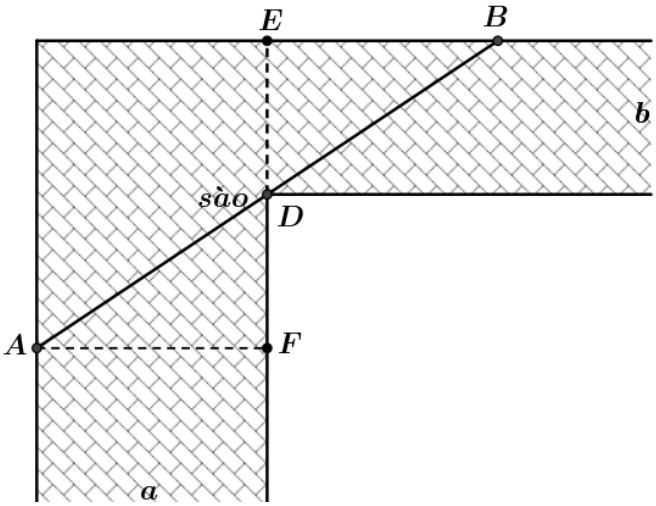
$6x+15y\ge 2\sqrt{6x.5y}\Rightarrow 1500\ge 2\sqrt{90xy}\Rightarrow xy\le 6250$

Vậy diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể tạo rào là $6250(m^2)$

Câu 6: Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a=24$ và $b=3$. Hỏi cái sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu?



Lời giải



Đặt các điểm như hình vẽ.

Đặt $DF = x$, $x > 0$, ta có ΔADF đồng dạng với ΔBED nên $\frac{EB}{ED} = \frac{AF}{DF} \Rightarrow EB = \frac{ab}{x}$

Gọi l là chiều dài của que sào, ta có $l^2 = AB^2 = (x+b)^2 + \left(a + \frac{ab}{x}\right)^2 = f(x)$.

Đạo hàm: $f'(x) = 2(x+b) - 2\frac{ab}{x^2}\left(a + \frac{ab}{x}\right) = 2(x+b)\left(1 - \frac{a^2 b}{x^3}\right)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a^2 b} = 12$.

Dễ dàng suy ra được $\min f(x) = f(12) = 1125$

Vậy giá trị nhỏ nhất của que sào là $l = \sqrt{1125} = 15\sqrt{5}$.

----------HẾT----------