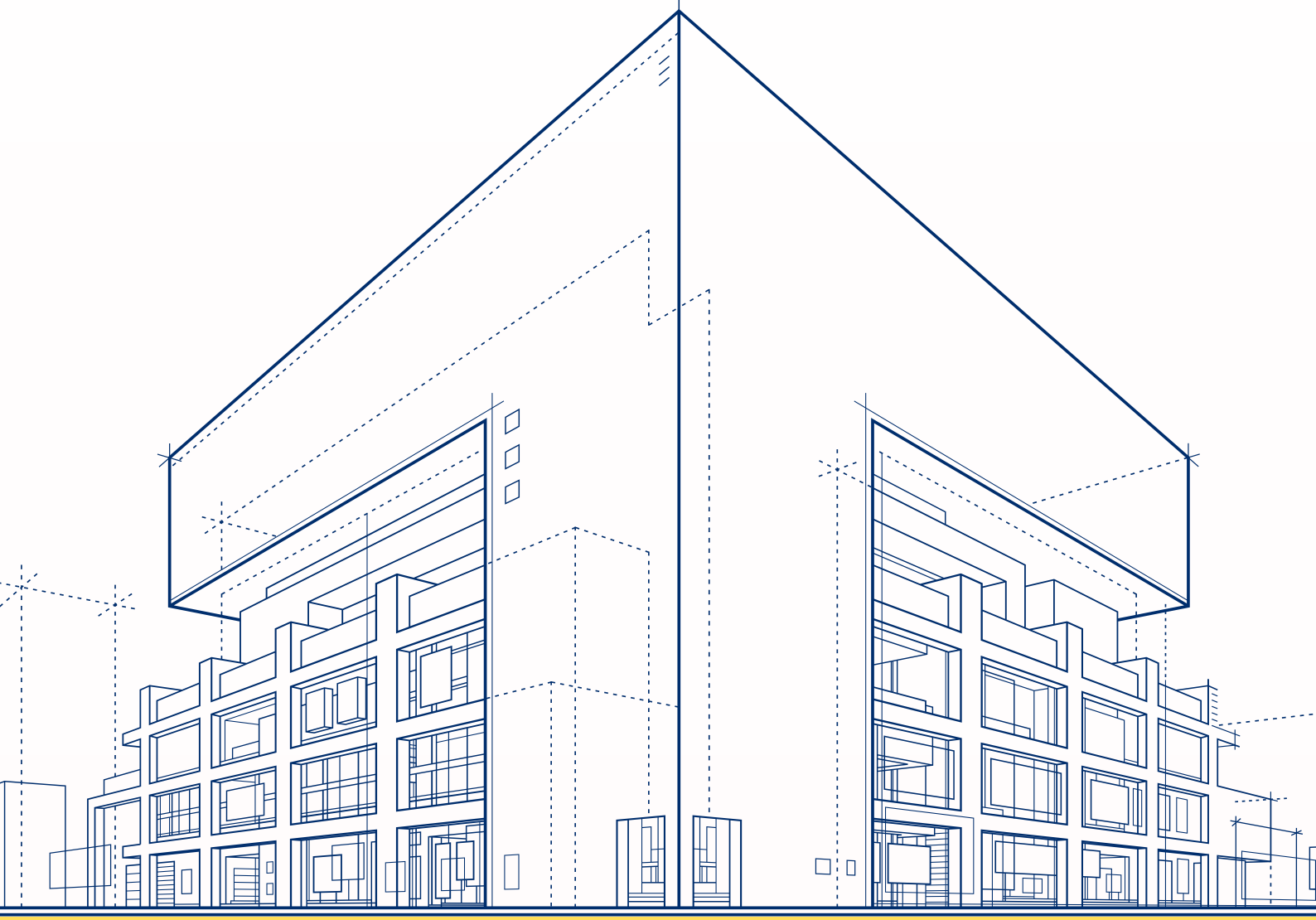
TOÁN TỪ TÂM

QUAN HỆ Vuông góc



TÁC GIẢ
TOÁN TỪ TÂM

MỤC LỤC

Bài 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. Lý thuyết

1. Góc giữa 2 đường thẳng 4
2. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian 4

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng 5
Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc 8

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 10
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai 13
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 16

Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

A. Lý thuyết

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 18
2. Liên hệ giữa tính song song – vuông góc của đường thẳng & mặt phẳng 19
3. Phép chiếu vuông góc 20
4. Định lý ba đường vuông góc 21
5. Góc giữa đường thẳng & mặt phẳng 21
6. Kiến thức bổ trợ 21
   6.1. Một số mô hình thường gặp 21
   6.2. Các hệ thức lượng trong tam giác 22
   6.3. Các chú ý khác 23

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng 24
Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc 27

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 29
B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai 31
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 33

Bài 3. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. Lý thuyết

1. Góc giữa hai mặt phẳng 35
2. Hai mặt phẳng vuông góc 35
3. Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc 36
4. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương 37

5. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều 38

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng bằng cách dùng định nghĩa 40

Dạng 2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa trên giao tuyến 42

Dạng 3. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa vào định lý hình chiếu 44

Dạng 4. Tổng hợp các phương pháp xác định góc giữa hai mặt phẳng 45

Dạng 5. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc 49

Dạng 6. Thiết diện 52

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 55

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai 58

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 60

Bài 4. KHOẢNG CÁCH & THỂ TÍCH

A. Lý thuyết

1. Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, đến 1 mặt phẳng 62

1.1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng 62

1.2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng 62

2. Khoảng cách giữa đường và mặt song song, hai mặt song song 63

2.1. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song 63

2.2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song 63

3. Đường vuông góc chung và khoảng cách hai đường chéo nhau 63

3.1. Định nghĩa 63

3.2. Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau 63

4. Thể tích khối chóp 64

5. Thể tích khối lăng trụ 65

6. Công thức tính diện tích đáy 66

7. Tỷ số diện tích 67

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Khoảng cách từ chân đường cao đến một mặt bên 68

Dạng 2. Khoảng cách từ điểm bất kỳ đến một mặt phẳng 70

Dạng 3. Khoảng cách hai đường chéo nhau 72

Dạng 4. Chóp có cạnh bên vuông góc với đáy 75

Dạng 5. Chóp có mặt bên vuông góc với đáy 81

Dạng 6. Chóp đều 85

Dạng 7. Lăng trụ đứng 91

C. Luyện tập
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 95
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai 97
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 100

Bài 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG – MẶT PHẲNG & GÓC NHỊ DIỆN
A. Lý thuyết
1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng 103
2. Góc nhị diện 103
3. Góc phẳng nhị diện 104
B. Các dạng bài tập
Dạng 1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng 105
Dạng 2. Góc nhị diện 110
C. Luyện tập
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 116
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai 120
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 123

TOÁN TỪ TÂM

Chương 08
Bài 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A Lý thuyết

1. Góc giữa 2 đường thẳng

Định nghĩa:

Góc giữa hai đường thẳng a,b trong không gian, kí hiệu (a,b), là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

Nhận xét

(1) Xác định góc giữa đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O; song song với đường thẳng còn lại

(2) Với hai đường thẳng a và b bất kì: $0^\circ \le (a,b) \le 90^\circ$.

⌘ Để tính số đo của góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ta có thể thực hiện tính thông qua góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

- *Bước 1.* Sử dụng tính chất sau: $\begin{cases} (d_1,d_2)=\alpha \\ d_2 // d_3 \end{cases} \Rightarrow (d_1,d_2)=(d_1,d_3)=\alpha$
- *Bước 2.* Áp dụng định lí côsin trong tam giác để xác định góc.

2. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

Định nghĩa:

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.
Kí hiệu $a \perp b$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng

Phương pháp

» $(a,b)=(a',b')$ với $a'//a$ và $b'//b$

» $a\perp b\Leftrightarrow(a,b)=90^\circ$

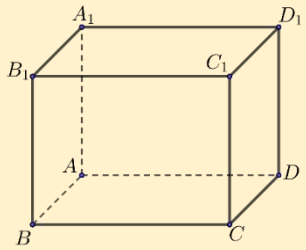
» $\begin{cases}b//c\\a\perp c\end{cases}\Rightarrow a\perp b$

Ví dụ 1.1.

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ (hình vẽ bên).
Xác định góc giữa các cặp đường thẳng

(1) A_1C_1 và AB

(2) B_1C và BD.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $SA=AB$ và $SA\perp BC$.
Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.3.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa 2 đường thẳng:

(1) AB và $B'C'$ (2) AC và $B'C'$ (3) $A'C'$ và $B'C$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 1.5.

Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó, cosin góc giữa SB và AC bằng

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.6.

Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120°$ và cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp

» ***Dùng định nghĩa:*** *Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$. Kí hiệu: $a \perp b$.*

» ***Dùng định lí:*** $\begin{cases} b // c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$

Ví dụ 2.1.

Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{CBD} = 90^0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Chứng minh rằng MN vuông góc với BC.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2.2.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC.

(1) Chứng minh: $MN \perp CD$.

(2) Tính cosin của góc giữa MC và MD.

(3) Gọi E là trung điểm của AC. Chứng minh: $QE \perp PE$.

(4) Chứng minh: $AB \perp CD$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$, $SA\perp AB$, $SA\perp AD$, $SA\perp AC$ và $SA=2a$.

(1) Chứng minh: $SA\perp BC$, $SA\perp CD$.

(2) Gọi I là trung điểm của CD. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AI.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong không gian, góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' thỏa mãn

A. Cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

B. Lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

C. Cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

D. Lần lượt song song với a và b.

» Câu 2. Trong không gian, hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng

A. 90^0. **B.** 45^0. **C.** 0^0. **D.** 180^0.

» Câu 3. Trong không gian, cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau khi đó

A. Hai đường thẳng a và b có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

B. Hai đường thẳng a và b luôn cắt nhau.

C. Hai đường thẳng a và b chéo nhau.

D. Hai đường thẳng a và b song song nhau.

» Câu 4. Trong không gian cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, nếu đường thẳng c vuông góc với đường thẳng a thì

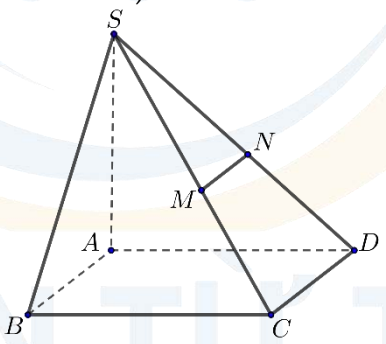
A. Đường thẳng c vuông góc với đường thẳng b.

B. Đường thẳng c song song với đường thẳng b.

C. Đường thẳng c song song hoặc trùng với đường thẳng b.

D. Đường thẳng c cắt đường thẳng b tại một điểm.

» Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD (tham khảo hình vẽ).



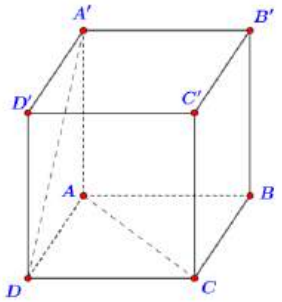
Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $MN \perp AC$. **B.** $MN \perp BD$. **C.** $MN \perp AB$. **D.** $MN \perp BC$.

» Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC'?

A. $A'D$. **B.** AC. **C.** BB'. **D.** AD'.

» Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng

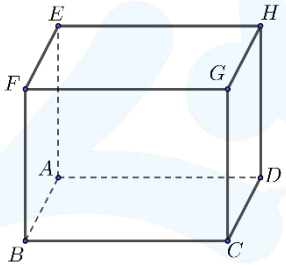


A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

» Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với BD.

A. CC'. **B.** $B'C'$. **C.** AB. **D.** $B'C$.

» Câu 9. Cho hình lăng trụ $ABCD.EFGH$ có 6 mặt đều là hình vuông. Tính góc giữa hai đường thẳng EG và GD.



A. 83°. **B.** 90°. **C.** 50°. **D.** 60°.

» Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $BC=a, BA=4a, SB=\sqrt{5}a$. Biết $SB\perp BC$ và $SB\perp BA$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và DA.

A. $69,61^\circ$. **B.** $65,91^\circ$. **C.** $82,71^\circ$. **D.** $77,71^\circ$.

» Câu 11. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. BB'. **B.** $B'D'$. **C.** AD'. **D.** $B'D$.

» Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là hình thoi. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $AB\perp AD$. **B.** $BD\perp A'C'$. **C.** $DD'\perp DC$. **D.** $BD\perp AB$.

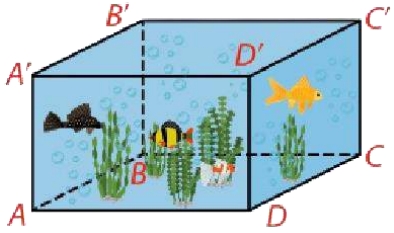
» Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $AB\perp AD$. **B.** $IJ\perp SA$. **C.** $IJ\perp BD$. **D.** $BD\perp AB$.

» Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SAB=SAD=90°$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD. Đường thẳng HK vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. AC. **B.** SB. **C.** SD. **D.** AB.

» Câu 15. Ta biết hình hộp chữ nhật có 6 mặt là các hình chữ nhật. Quan sát một bể nuôi cá cảnh hình hộp chữ nhật sau và cho biết góc giữa hai đường thẳng AA' và $C'D'$ bằng góc nào sau đây?



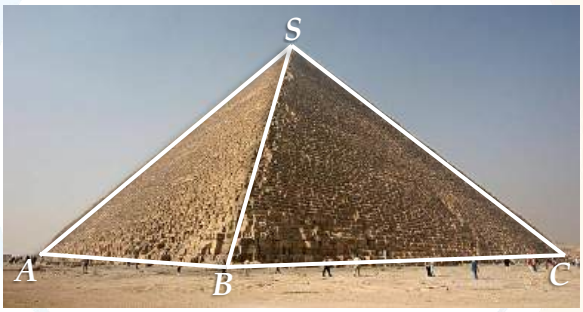
A. $(A'A, AB)$. **B.** $(A'A, AD)$. **C.** $(A'A, AB)$. **D.** $(A'A, AB')$.

» Câu 16. Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện hoành, quá giang, rui, cột tương ứng được đánh số 1,2,3,4, trong hình sau, những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?



A. $1-4;2-4;1-3$ **B.** $2-4;1-3$ **C.** $1-4;3-4;1-2$ **D.** $1-4,2-4,3-4$

» Câu 17. Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình vuông $ABCD$ có cạnh dài khoảng $230m$, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng $219m$. Tính gần đúng góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp.



A. $58°19'$. **B.** $61°29'$. **C.** $45°6'$. **D.** $30°7'$.

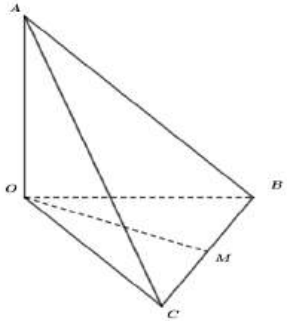
» Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết $MN=\sqrt{3}a$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

» Câu 19. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$ và $AA'=a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

» Câu 20. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=OB=OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

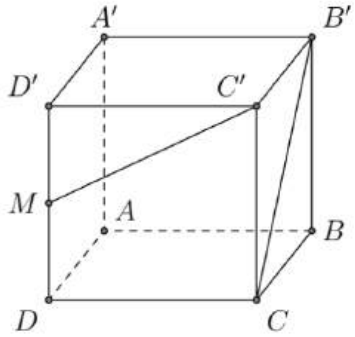


A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0

» Câu 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$; gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

» Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của DD' *(tham khảo hình vẽ)*. Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$



A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

» Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=a$, $BC=a\sqrt{2}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AB và SC ta được kết quả:

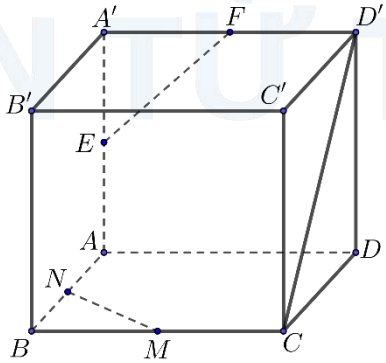
A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 24. Trong không gian, cho hai đường thẳng bất kỳ.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa hai đường thẳng trong không gian là góc giữa 2 đường thẳng cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.		
(b)	Hai đường thẳng vuông góc thì cắt nhau.		
(c)	Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.		
(d)	Nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó song song với nhau.		

» Câu 25. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (như vẽ bên), gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của $BC, AB, AA', A'D'$.



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Cạnh MN và AA' vuông góc với nhau.		

(b)	Góc giữa MN và CD' bằng góc giữa AC và CD'.		
(c)	Góc giữa EF và CC' bằng góc giữa AD' và CC'.		
(d)	Góc giữa EF và CD' bằng $30°$.		

» Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Gọi G là trọng tâm ΔSBC

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa IJ và SA bằng $90°$.		
(b)	Góc giữa IJ với CD bằng $60°$.		
(c)	Cosin của góc giữa BI với SA bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.		
(d)	Cosin của góc giữa DG và SB bằng $\frac{1}{3}$.		

» Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với AB và AD, $SC=a\sqrt{3}$.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SA\perp BC$		
(b)	$SA\perp CD$		
(c)	$BC\perp SB$		
(d)	K là hình chiếu của A lên SB thì $SC\perp AK$		

» Câu 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BD//B'D'$		
(b)	$(AC,B'D')=90^\circ$		
(c)	Tam giác ACD' đều		
(d)	$(AC,A'B)=30^\circ$		

» Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm của đoạn SB,SD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$MN//BD$		
(b)	MN và AC là hai đường thẳng chéo nhau		
(c)	$AC\perp BD$		
(d)	$(MN,AC)=90^\circ$		

» Câu 30. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, M là trung điểm cạnh BC, N là trung điểm của AC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$MN//AB$		
(b)	$MD=ND=\frac{a\sqrt{2}}{2}$		
(c)	$(AB,DM)=(MN,DM)$		

(d)	$\cos\left(AB,DM\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		

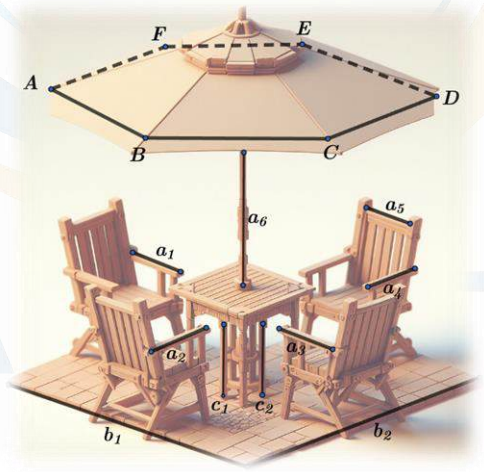
» Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. Gọi E là trung điểm của AB. Biết $AB=2a, AD=DC=a$, đồng thời $SA\perp AB, SA\perp AD$ và $SA=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\left(SB,DC\right)=SBA$		
(b)	$\tan SBA=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$		
(c)	$DE//BC$		
(d)	$\left(SD,BC\right)\approx 52,42^{\circ}$		

» Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a. Cho biết $SA=a\sqrt{3}$, $SA\perp AB, SA\perp AD$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\left(AB,SA\right)=90^{\circ}$		
(b)	$SA\perp CD$		
(c)	$\left(SD,BC\right)=\left(SD,CD\right)$		
(d)	$SDA=60°$		

» Câu 33. Một ô che nắng có viền khung hình lục giác đều $ABCDEF$. Biết các thanh gỗ a_1,a_3,a_5 song song nhau, các thanh $a_2;a_4$ song song nhau đồng thời trục của cây dù a_6 vuông góc với các đường AB,BC,CD,a_1,a_2 và song song với các đường chân bàn $c_1;c_2$. Các đường gạch lát $b_1 // AB, b_2 // CD$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?



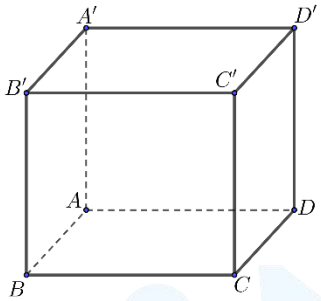
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$a_6\perp a_3; a_6\perp a_4; a_6\perp a_5$		
(b)	$a_6\perp ED; a_6\perp EF; a_6\perp FA$		
(c)	$c_1\perp a_1; c_2\perp a_2$		
(d)	$b_1\perp b_2$		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác SAB là tam giác đều. Tính sin của góc giữa đường thẳng SA và DC (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Điền đáp số:

» Câu 35. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên dưới).



Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng bao nhiêu? Viết câu trả lời theo đơn vị độ.

Điền đáp số:

» Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tính độ dài đoạn thẳng MN biết góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng $30°$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Điền đáp số:

» Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD. Góc giữa đường thẳng MN và AC bằng bao nhiêu độ?

Điền đáp số:

» Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, biết $SA=a$, $SC=a\sqrt{3}$. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AD,SD. Góc của hai đường thẳng MN và SC bằng bao nhiêu độ?

Điền đáp số:

» Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB=AC=AD=1$. Góc của hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu độ?

Điền đáp số:

» Câu 40. Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc của hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu độ?

Điền đáp số:

» Câu 41. Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa đường thẳng CD' với mỗi đường thẳng $BB',A'D$.

Điền đáp số:

» Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Tìm số đo của góc (IJ,CD).

Điền đáp số:

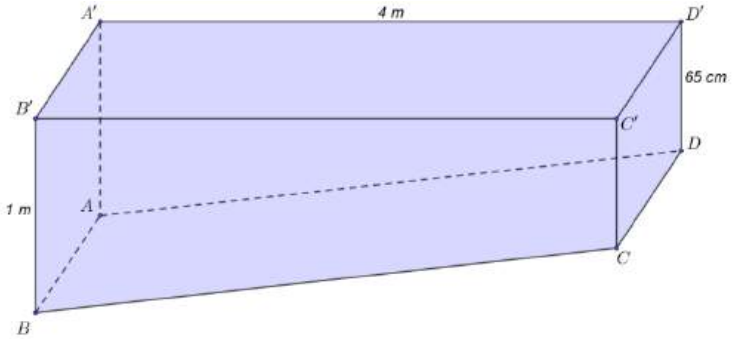
» Câu 43. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=1;BD=3$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính độ dài MN. *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 44.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, ΔSAB đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Góc giữa đường thẳng AK và SH bằng bao nhiêu độ?

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 45.** Bác Minh có một khối gỗ có kích thước như hình vẽ. Biết $ABCD$, $A'B'C'D'$, $A'B'BA$, $CDD'C'$ là các hình chữ nhật, $A'D'DA$, $B'C'CB$ là các hình thang vuông. Bác Minh muốn làm đẹp khối gỗ đó bằng cách cắt khối gỗ theo mặt phẳng (P) đi qua C và song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$.



Khi đó, bác Minh cần đặt mép BC của khối gỗ tạo với lưỡi cắt của máy cắt một góc bao nhiêu độ?

✍ **Điền đáp số:**

---------- Hết ----------

TOÁN TỪ TÂM

Chương 08

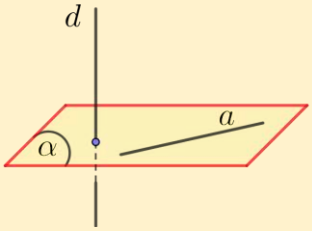
Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

A Lý thuyết

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa:

Đường thẳng d được gọi là ***vuông góc*** với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a ***nằm trong*** mặt phẳng (α)

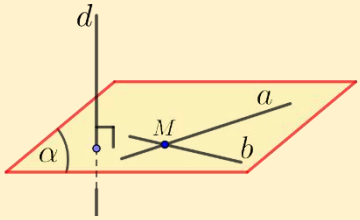


Ký hiệu: $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$

Nhận xét: $\begin{cases} d \perp (P) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp a$

Định lý 1:

Nếu đường thẳng d ***vuông góc*** với hai đường thẳng ***cắt nhau*** cùng thuộc một mặt phẳng thì vuông góc với mặt phẳng ấy.



$$\begin{cases} d \perp a \subset (P) \\ d \perp b \subset (P) \\ a \cap b = M \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$

Định lý 2:

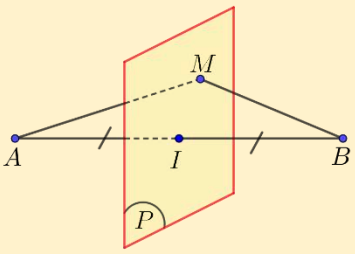
Có duy nhất:

- Một mặt phẳng:
  + đi qua một điểm cho trước, và
  + vuông góc với đường thẳng cho trước.
- Một đường thẳng:
  + đi qua một điểm cho trước, và
  + vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

⌘ *Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng*

Định nghĩa:

Mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

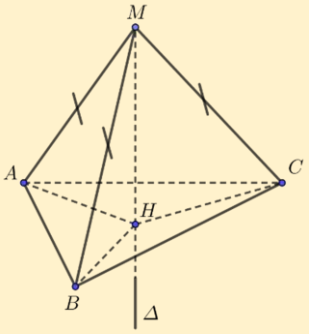


Nhận xét: (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \forall M \in (P), MA = MB$.

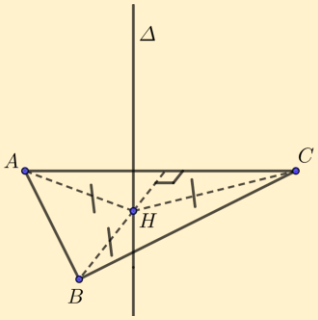
⌘ *Trục của đa giác*

Định nghĩa:

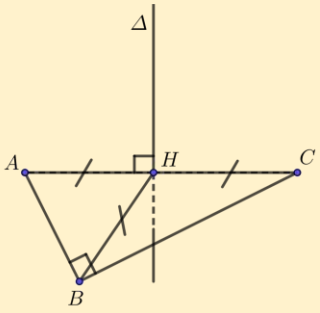
Trục của đa giác là đường thẳng qua tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đó. Nếu một điểm nằm trên trục của đa giác thì nó cách đều các đỉnh của đa giác.



Tam giác thường



Tam giác đều



Tam giác vuông

Chứng minh:

Cho đa giác có n đỉnh $A_1A_2\ldots A_n$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác và d là trục của đa giác.

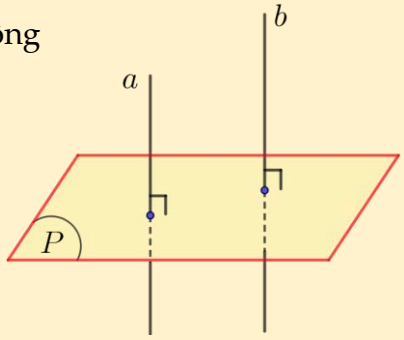
Lấy điểm $I \in d$.

Khi đó: $\Delta IOA_1 = \Delta IOA_2 = \ldots = \Delta IOA_n$ (Δ vuông có 2 cạnh bằng nhau) $\Rightarrow IA_1 = IA_2 = \ldots = IA_n$

2. Liên hệ giữa tính song song – vuông góc của đường thẳng & mặt phẳng

Định lý 3:

(1) Cho hai đường thẳng song song, nếu mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.



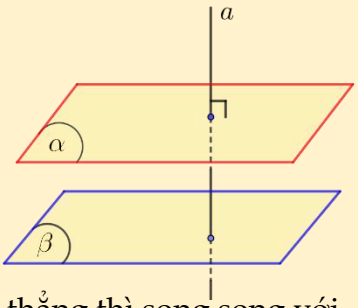
Tóm tắt: $\begin{cases} a // b \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp (P)$

(2) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases} a \neq b \\ a \perp (P);\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a // b$

Định lý 4:

(1) Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì mặt phẳng nào song song với mặt phẳng ấy.



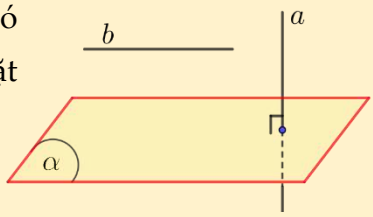
Tóm tắt: $\begin{cases}(\alpha)//(\beta)\\ a\perp(\alpha)\end{cases}\Rightarrow a\perp(\beta)$

(2) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases}(\alpha)\neq(\beta)\\ (\alpha)\perp a\\ (\beta)\perp a\end{cases}\Rightarrow(\alpha)//(\beta)$

Định lý 5:

(1) Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó vuông góc với bất kì đường thẳng nào song song với mặt phẳng ấy.



Tóm tắt: $\begin{cases}a\perp(\alpha)\\ b//(\alpha)\end{cases}\Rightarrow a\perp b$

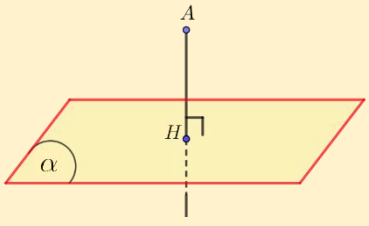
(2) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng *(không chứa đường thẳng đó)* cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases}b\not\subset(\alpha)\\ b\perp a\\ (\alpha)\perp a\end{cases}\Rightarrow b//(\alpha)$

3. Phép chiếu vuông góc

Định nghĩa:

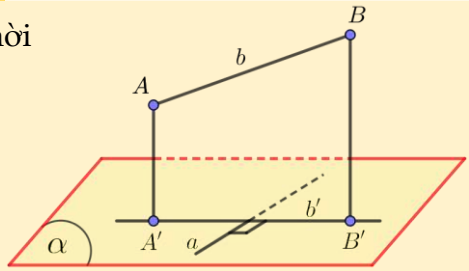
- Cho đường thẳng Δ vuông góc với (α). Phép chiếu song song theo phương của Δ lên (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên (α).
- H là hình chiếu vuông góc *(gọi tắt là hình chiếu)* của A lên (P) nếu $AH\perp(P)$ và $H\in(P)$.



4. Định lý ba đường vuông góc

Định lý 6 (định lý ba đường vuông góc):

- Cho a nằm trong (α) và b không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α).
- Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α).
- Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$.



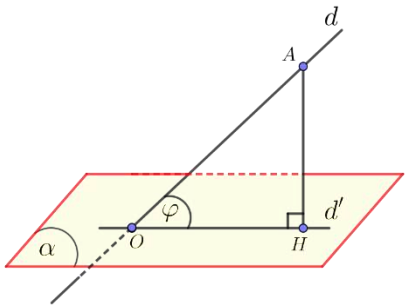
5. Góc giữa đường thẳng & mặt phẳng

Nhận xét

(1) $d \perp (P) \Rightarrow \left(\widehat{d;(P)}\right) = 90°$

(2) $d \not\perp (P) \Rightarrow \left(\widehat{d;(P)}\right) = \left(\widehat{d;d'}\right) = \widehat{AOH}$ với d' là hình chiếu của đường thẳng d lên (P)

Chú ý: $0 \le \left(d;(P)\right) \le 90°$.

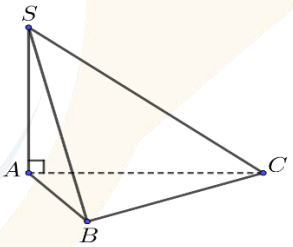


6. Kiến thức bổ trợ

6.1. Một số mô hình thường gặp

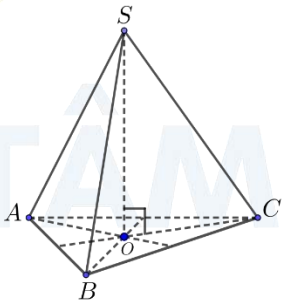
(1). Hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy.

- $SA \perp BC$
- $\Delta SAB, \Delta SAC$ vuông tại A
- A là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).



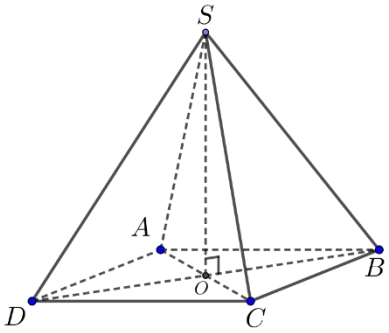
(2). Hình chóp tam giác đều.

- Đáy ΔABC là tam giác đều.
- Mặt bên là các tam giác cân tại S. (hoặc là tam giác đều nếu hình chóp là tứ diện đều).
- O là trọng tâm ΔABC.
- $SO \perp (ABC)$, SO là trục ΔABC.
- $SA = SB = SC$



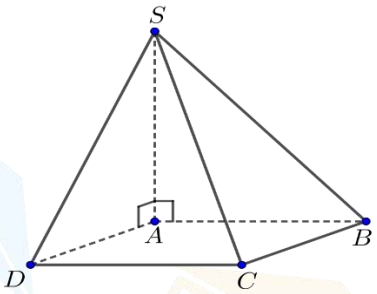
(3). Hình chóp tứ giác đều.

- Đáy $ABCD$ là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân tại S.
- Các tam giác SAC, SBD cân tại S.
- O là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- $SO \perp (ABC)$, SO là trục hình vuông $ABCD$.
- $SA = SB = SC = SD$.



(4). Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi.

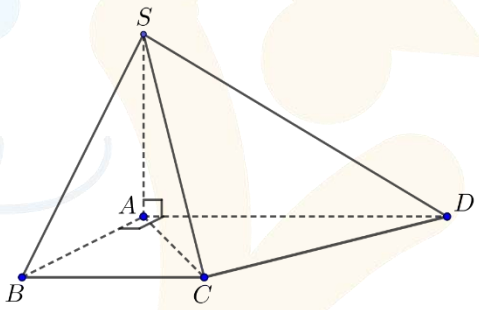
- A là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- Các tam giác SAB, SAC, SAD vuông tại A.
- ***Đặc biệt:*** Nếu $ABCD$ là hình vuông hoặc hình thoi thì AC vuông góc BD.



(5). Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có góc A vuông và SA vuông với đáy.

- A là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- Các tam giác SAB, SAC, SAD vuông tại A.
- ***Đặc biệt:*** Nếu $AD = 2BC$:

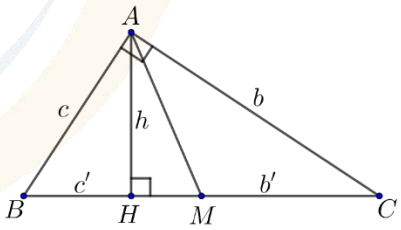
+ Gọi I là trung điểm AD thì $CI \perp AD$.
+ Trong trường hợp thêm $AB = BC$ thì $AC \perp CD$.



6.2. Các hệ thức lượng trong tam giác

(1). Tam giác ABC vuông tại A:

- $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}a \cdot h = \dfrac{1}{2}b.c$
- $a^2 = b^2 + c^2$ (định lý Pitago)
- $b^2 = b' \cdot a$
- $c^2 = c' \cdot a$
- $h^2 = b' \cdot c'$
- $a \cdot h = b.c$
- $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$
- $\dfrac{b'}{c'} = \dfrac{b^2}{c^2}$
- $AM = \dfrac{1}{2}BC$ với M là trung điểm BC.



- $\sin B = \cos C = \dfrac{AC}{BC}$
- $\cos B = \sin C = \dfrac{AB}{BC}$
- $\tan B = \cot C = \dfrac{AC}{AB}$
- $\cot B = \cot C = \dfrac{AB}{AC}$

(2). Tam giác thường:

• ***Định lí côsin:***

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

• ***Tính cosin 1 góc:***

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

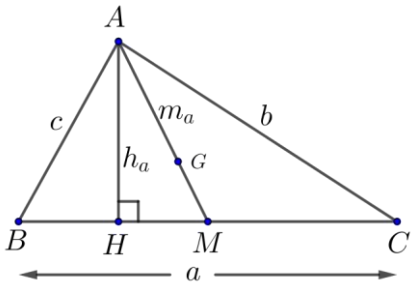
• ***Độ dài trung tuyến:***

$m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$

$m_b^2 = \dfrac{2\left(a^2 + c^2\right) - b^2}{4}$

$m_c^2 = \dfrac{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}{4}$

• ***Định lí sin:*** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$



• ***Diện tích tam giác***

$S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$

$S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

$S = \dfrac{abc}{4R}$

$S = pr; p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Với R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC.

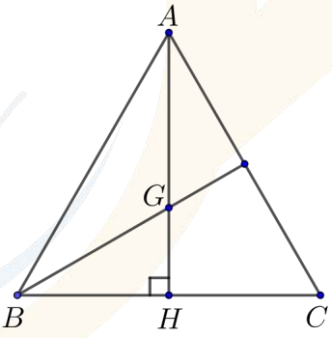
(3). Tam giác đều:

Xét tam giác đều cạnh x.

Diện tích tam giác đều: $S = x^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Đường cao tam giác đều: $h = x.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Với G là trọng tâm ΔABC: $AG = \dfrac{2}{3}.AH = x.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



6.3. Các chú ý khác

» Độ dài đường chéo hình vuông cạnh bằng a là $a\sqrt{2}$.

» Độ dài đường chéo hình chữ nhật có độ dài 2 cạnh là a và b là $\sqrt{a^2 + b^2}$.

» Trong hình vuông và hình thoi, các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và vuông góc nhau.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng

Phương pháp

☑ ***Cách 1.***

Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng chứa trong (P).

☑ ***Cách 2.***

Chứng minh d song song với a mà $a \perp (P)$

☑ ***Cách 3.***

Chứng minh $d \perp (Q)$ và $(Q) // (P)$.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC).

(1) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

(2) Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Chứng minh $AH \perp SC$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 1.2.

Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh:

(1) $BC \perp (OAH)$.

(2) H là trực tâm của ΔABC.

Lời giải

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 1.3.

Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

(1) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

(2) Gọi AH và AK là đường cao của $\Delta SAB, \Delta SAC$. Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

(3) HK cắt tia CB tại I. Chứng minh: ΔAIC vuông.

Lời giải

TOÁN TỪ TÂM

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp

☑ Chứng minh hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, ta làm như sau:

- *Bước 1.* Chọn (P) chứa đường thẳng b
- *Bước 2.* Chứng minh $a \perp (P) \to a \perp b$

Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Chứng minh $HK \perp SC$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $SA \perp (ACBD), AD = 2a, AB = BC = a$. Chứng minh rằng $CD \perp SC$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và SA vuông góc với đáy. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC, SD.

(1) Chứng minh rằng $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.

(2) Chứng minh $SC \perp HK$.

(3) Chứng minh rằng $HK \perp AI$.

Lời giải

TOÁN TỪ TÂM

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong không gian cho điểm O và đường thẳng d. Qua điểm O có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d ?

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 2.

» Câu 2. Khẳng định nào sau đây là **đúng**.

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng vuông góc với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

» Câu 3. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng phân biệt a và b. Biết rằng $a \parallel (P)$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \parallel a$. **B.** Nếu $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (P)$. **D.** Nếu $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

» Câu 4. Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

B. Nếu $a \subset (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$ hoặc $b \subset (P)$.

D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

» Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$, biết SA, SB, SC đôi một vuông góc. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AB \perp (SAC)$. **B.** $SA \perp (SBC)$. **C.** $SB \perp (ABC)$. **D.** $AC \perp (SAB)$.

» Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$, biết $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại A. Đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng nào?

A. $AB \perp (SAC)$. **B.** $AB \perp (ABC)$. **C.** $AB \perp (SBC)$. **D.** $AB \perp (SAB)$.

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BD \perp (SAD)$. **B.** $BD \perp (SCD)$. **C.** $BD \perp (SAC)$. **D.** $BD \perp (ABCD)$.

» Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $SA \perp (SBD)$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $AB \perp (SAD)$. **D.** $AD \perp (SAB)$.

» Câu 9. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng a, b phân biệt biết $a \perp (P)$ và $b \perp (P)$. Khẳng định nào đúng?

A. $(a,b) = 90°$. **B.** $(a,b) = 0°$. **C.** $(a,b) = 60°$. **D.** $(a,b) = 45°$.

» Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Chọn khẳng định đúng?

A. $SC \perp (AEF)$. **B.** $SC \perp (AEC)$. **C.** $SC \perp (AFB)$. **D.** $SC \perp (AED)$.

» Câu 11. Cho hai đường thẳng a, b phân biệt và mặt phẳng (P), biết $a \perp (P)$ và $b \subset (P)$. Khẳng định nào đúng?

A. $(a,b) = 90°$. **B.** $(a,b) = 0°$. **C.** $(a,b) = 60°$. **D.** $(a,b) = 45°$.

» Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $BA \perp (SAD)$. **B.** $BA \perp (SAC)$. **C.** $BA \perp (SBC)$. **D.** $BA \perp (SCD)$.

» Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

A. $CM \perp SB$. **B.** $CM \perp AN$. **C.** $MN \perp MC$. **D.** $AN \perp BC$.

» Câu 14. Cho tứ diện đều $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $MN \perp AB$. **B.** $MN \perp BD$. **C.** $MN \perp CD$. **D.** $AB \perp CD$.

» Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC \perp AD$. **B.** $AC \perp BD$. **C.** $AB \perp (BCD)$. **D.** $DC \perp (ABC)$.

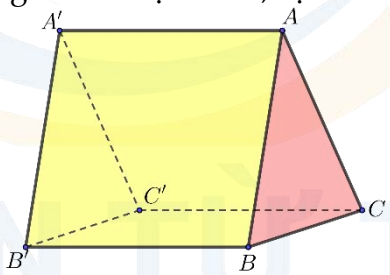
» Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu của tam giác SCD trên mặt phẳng (SAB) là

A. ΔACD. **B.** ΔSAD. **C.** ΔSBC. **D.** ΔSAB.

» Câu 17. Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp (OBC)$. Đường thẳng qua O và vuông góc với (ABC) tại H. Đường thẳng AH vuông góc với đường nào dưới đây?

A. BC. **B.** OA. **C.** AB. **D.** OC.

» Câu 18. Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy như hình dưới đây. Biết đáy là tam giác đều cạnh $2m$, cạnh bên $AA' = 3m$.



Diện tích hình chiếu vuông góc của $\Delta ABB'$ trên mặt phẳng $(BB'C'C)$ là

A. $1,5m^2$. **B.** $3m^2$. **C.** $6m^2$. **D.** $0,75m^2$.

» Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh a. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B và ở trên SB sao cho AM vuông góc với MD. Khi đó, tỉ số $\dfrac{SM}{SB}$ bằng

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

» **Câu 20.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, các mặt bên là các tam giác vuông cân tại S. Gọi G là trọng tâm của ΔABC, (α) là mặt phẳng qua G vuông góc với SC. Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) bằng

A. $\frac{4}{9}a^2$. **B.** $\frac{2}{3}a^2$. **C.** $\frac{4}{3}a^2$. **D.** $\frac{2}{9}a^2$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» **Câu 21.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BC \perp (SAB)$.		
(b)	$CD \perp (SAD)$.		
(c)	$AC \perp (SBD)$.		
(d)	$BD \perp (SAC)$.		

» **Câu 22.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thoi tâm O và $SA = SC, SB = SD$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SO \perp AC$		
(b)	$SO \perp (ABCD)$		
(c)	$AC \perp (SBD)$		
(d)	$(AC, SB) = 60°$		

» **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của A trên các cạnh SB, SD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tam giác SBC vuông		
(b)	Tam giác SCD vuông		
(c)	$SC \perp (AHK)$		
(d)	$HK \perp SC$		

» **Câu 24.** Cho hình chóp $SABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC (biết rằng các trực tâm này không trùng với các đỉnh của tam giác ABC và SBC). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BC \perp (SAH)$.		
(b)	$SB \perp (CHK)$.		
(c)	$HK \perp (SBC)$.		
(d)	$BC \perp (SAB)$.		

» **Câu 25.** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên (ABC). Khi đó:

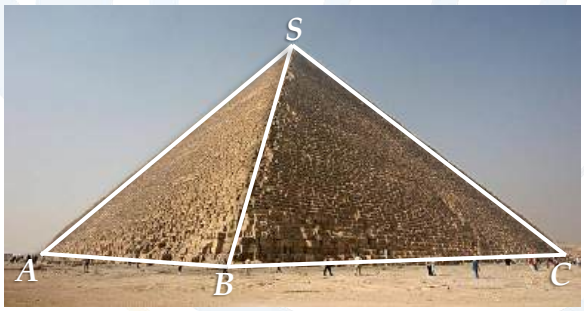
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BC \perp (AOH)$.		

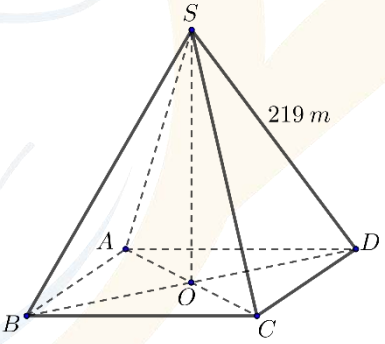
(b)	$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.		
(c)	H là trực tâm ΔABC.		
(d)	$AH\perp(OBC)$.		

» Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Biết $SA=a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng BC vuông góc với đường thẳng AH.		
(b)	Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng (SBC).		
(c)	Đường thẳng SH là hình chiếu của đường thẳng SA lên mặt phẳng (SBC).		
(d)	Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\frac{6a}{11}$.		

» Câu 27. Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng $230\,m$, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng $219\,m$ (kích thước hiện nay). Kim tử tháp Cheops được mô phỏng bởi hình chóp $S.ABCD$ với O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD như hình bên dưới. (Theo *britannica.com*). Khi đó:





	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (gần đúng) là $48,3°$.		
(b)	Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$.		
(c)	Đường thẳng SO vuông góc cạnh đáy AB và BC.		
(d)	Biết rằng độ dài SO chính là chiều cao của kim tử tháp Cheops, ta tính được $SO\approx 146,67\,m$		

» Câu 28. Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi OK là đường cao của tam giác OBC và OH là đường cao của tam giác OAK. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$OA\perp(OBC)$		
(b)	$OB\perp(OAC)$		
(c)	Các cạnh đối nhau trong tứ diện $OABC$ thì vuông góc với nhau		

(d)	OH không vuông góc với mặt phẳng (ABC)		

» **Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tam giác SBC cân tại B.		
(b)	AH vuông góc với mặt phẳng (SBC).		
(c)	$(SC, HK) = 90^\circ$		
(d)	Giả sử HK cắt BC tại D. Khi đó $(AC, AD) = 90°$.		

» **Câu 30.** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Kẻ $OH \perp (ABC)$ tại H. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$		
(b)	Tam giác ABC có ba góc nhọn.		
(c)	H là trọng tâm của tam giác ABC.		
(d)	$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở B. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AC và SC. Góc của hai đường thẳng BH, SC bằng bao nhiêu độ?

✍ **Điền đáp số:** ☐

» **Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2AD = 2CD = 2$. Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3a$. Diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác SBC lên mặt phẳng (SAB) là bao nhiêu?

✍ **Điền đáp số:** ☐

» **Câu 33.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi H là trung điểm của AB và $SH \perp (ABCD)$; gọi K là trung điểm của cạnh AD. Xác định góc của hai đường thẳng AC và SK.

✍ **Điền đáp số:** ☐

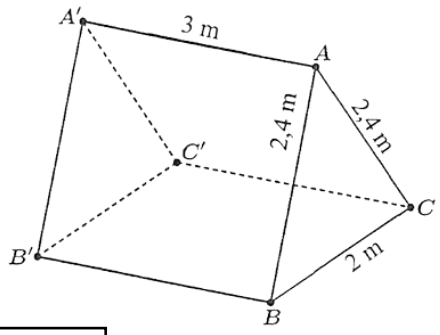
» **Câu 34.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Xác định góc của hai đường thẳng BC, AD

✍ **Điền đáp số:** ☐

» **Câu 35.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và SB. Xác định góc của hai đường thẳng KJ, BD.

✍ **Điền đáp số:** ☐

» **Câu 36.** Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Cho biết $AB = AC = 2,4m; BC = 2m; AA' = 3m$. Diện tích hình chiếu của tam giác ABA' trên mặt phẳng $(BCC'B')$ bao nhiêu m^2?

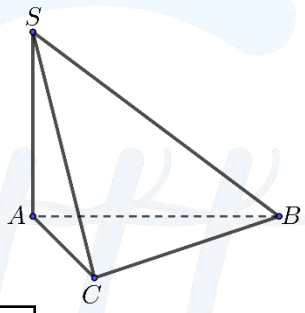


✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 37.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AD. Biết $SH \perp (ABCD)$. Góc giữa hai đường thẳng BK, SC bằng bao nhiêu độ?

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 38.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ (minh họa hình vẽ bên). Tính góc giữa hình chiếu của đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) và AB



✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 39.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh a. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B và ở trên SB sao cho AM vuông góc với MD. Khi đó, tỉ số $\dfrac{SM}{SB}$ bằng

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 40.** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $AA' = 3a$. Mặt phẳng qua A vuông góc với $A'C$ cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại I, J, K. Tính diện tích thiết diện $AIJK$ (làm tròn đến số thập phân thứ 3)

✍ **Điền đáp số:**

---------- Hết ----------

Chương 08
Bài 3. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

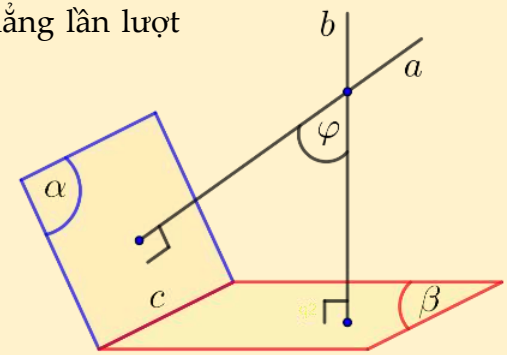
A Lý thuyết

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa:

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left.\begin{array}{l} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$



Chú ý:

+ Nếu $\left[\begin{array}{l} (\alpha)//(\beta) \\ (\alpha)\equiv(\beta) \end{array}\right. \Rightarrow \left((\alpha),(\beta)\right)=0°.$

+ $0°\le\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)\le 90°$.

2. Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa:

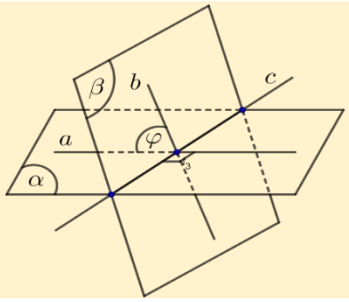
Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

$$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=90°$$

Định nghĩa:

Cho 2 mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến c

$$\begin{cases} a\subset(\alpha),a\perp c \\ b\subset(\beta),b\perp c \end{cases}\Rightarrow\left((\alpha),(\beta)\right)=(a,b)$$



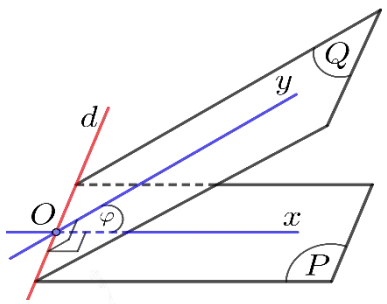
Cách xác định góc dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau:

⌘ **Bước 1.** Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

⌘ **Bước 2.** Chọn điểm O trên d, từ đó:

- Trong (P) dựng $Ox\perp d$.
- Trong (Q) dựng $Oy\perp d$.

Khi đó: $\left((P),(Q)\right)=(Ox,Oy)$.



Lưu ý

Việc xác định điểm O có thể được thực hiện theo cách sau:

(1) Chọn điểm M trên (Q) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu H của nó trên (P).

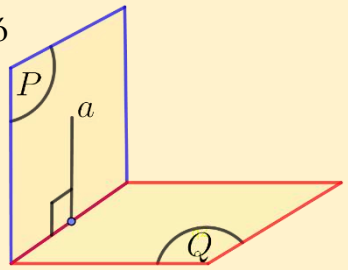
(2) Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{MOH}$.

▶ **Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc:**

Định lý 1:

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau $\Leftrightarrow$ trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$

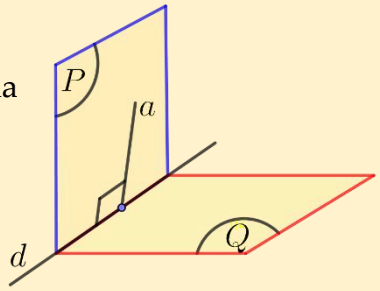


3. Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc

Định lý 2:

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong (Q) mà *vuông góc với giao tuyến* của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (P).

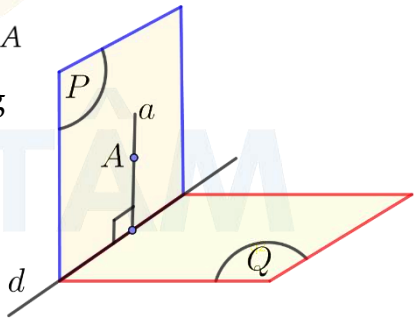
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \Rightarrow a \perp (P) \\ (Q) \supset a \perp d \end{cases}$$



Nhận xét

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và thì A là một điểm trong (P) thì đường thẳng đi qua A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong mặt phẳng (P).

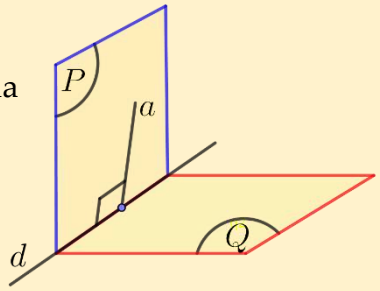
Kí hiệu: $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P).$



Định lý 2:

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong (Q) mà *vuông góc với giao tuyến* của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (P).

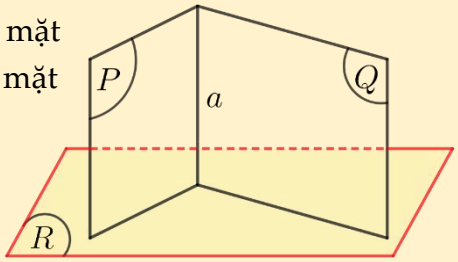
$$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=d\Rightarrow a\perp(P)\\(Q)\supset a\perp d\end{cases}$$



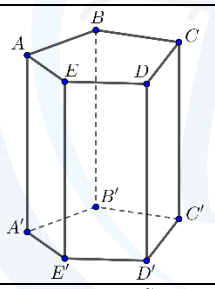
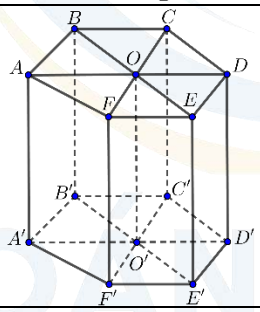
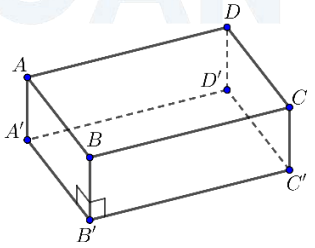
Định lý 3:

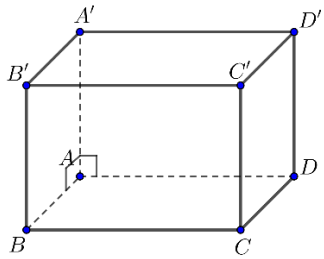
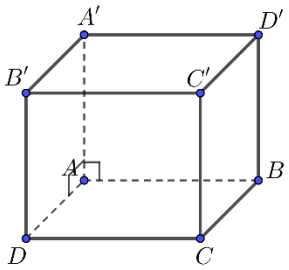
Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng sẽ vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

$$\begin{cases}(P)\cap(Q)=a\\(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$



4. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

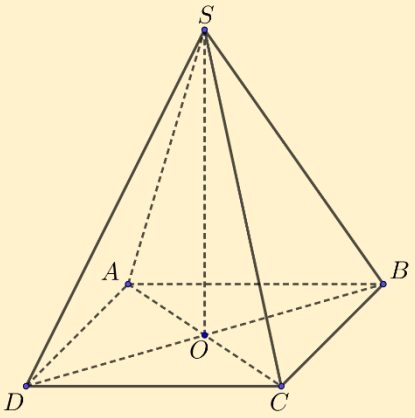
Tên	Hình vẽ	Tính chất
Hình lăng trụ đứng		Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy. • Các mặt bên là các hình chữ nhật. • Các mặt bên vuông góc với hai đáy.
Hình lăng trụ đều		Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
Hình hộp đứng		Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

Hình hộp chữ nhật		Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật. Đường chéo $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ với a,b,c là 3 kích thước.
Hình lập phương		Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

5. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

Định nghĩa hình chóp đều:

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.



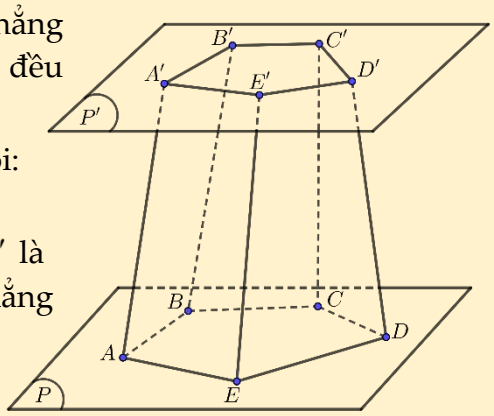
Tính chất:

- Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

TOÁN TỪ TÂM

Định nghĩa hình chóp cụt đều:

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.



▶ Trong hình chóp cụt đều $ABCDE.A'B'C'D'E'$, ta gọi:

+ Các điểm A', B', C', D', E' là các đỉnh.
+ Đa giác $ABCDE$ là đáy lớn, đa giác A', B', C', D', E' là đáy nhỏ. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.

▶ Nhận xét:

- Cạnh của hai đa giác là cạnh đáy. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một
- Các hình thang cân $AA'EE', AA'B'B, BB'C'C, C'CDD', DD'E'E$ là các mặt bên.
- Cạnh bên của mặt bên gọi là cạnh bên của hình chóp cụt đều. Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.
- Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là đường cao. Độ dài đường cao là chiều cao.

TOÁN TỪ TÂM

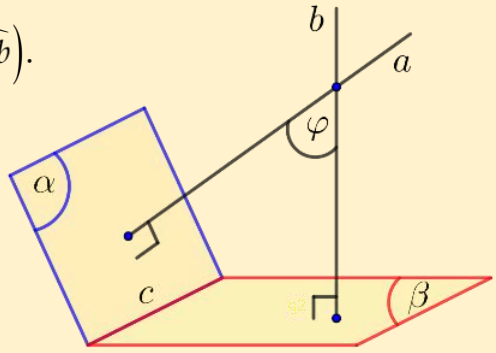
B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng bằng cách dùng định nghĩa

Phương pháp

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left.\begin{array}{l} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$



Chú ý:

+ Nếu $\left[\begin{array}{l} (\alpha)//(\beta) \\ (\alpha)\equiv(\beta) \end{array}\right. \Rightarrow \left((\alpha),(\beta)\right)=0°.$

+ $0°\le\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)\le 90°$.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SDC) bằng?

Lời giải

TOÁN TỪ TÂM

Dạng 2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa trên giao tuyến

Phương pháp

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm

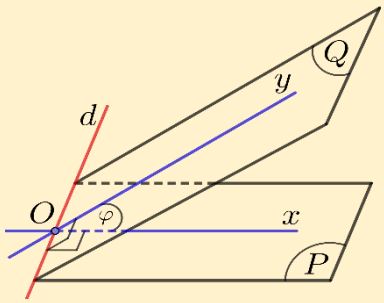
Cách xác định góc dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau:

⌘ **Bước 1.** Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

⌘ **Bước 2.** Chọn điểm O trên d, từ đó:

- Trong (P) dựng $Ox \perp d$.
- Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

Khi đó: $\widehat{((P),(Q))} = \widehat{(Ox,Oy)}$.



Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$, $SA = \sqrt{3}cm, AB = 1cm$. Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy góc bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2.4.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc hợp bởi $(A'BC);(ABC)$. Khi đó, tính $\tan\varphi$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

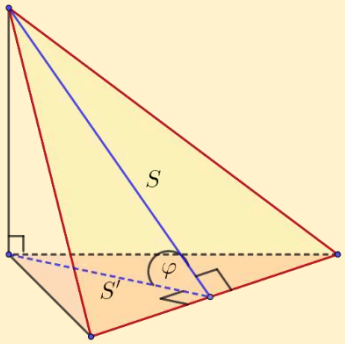
.....

.....

Dạng 3. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa vào định lý hình chiếu

Phương pháp

Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (α) và S' là diện tích hình chiếu của H' của H trên mặt phẳng (β) thì $S' = S.\cos\varphi$ trong đó $\varphi = \left[\widehat{(\alpha);(\beta)}\right]$.



Ví dụ 3.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác SBC vuông cân tại S, có $SB = a$. Mặt phẳng (SBC) hợp với đáy một góc $30°$. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3.2.

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 4. Tổng hợp các phương pháp xác định góc giữa hai mặt phẳng

Ví dụ 4.1.

Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AB=2a$, $AD=a$, $SA=3a$ và SA vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng:

(1) (SBC) và $(ABCD)$ (2) (SBD) và $(ABCD)$ (3) (SBC) và (SAC)

Lời giải

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 4.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA \perp (ABCD)$.

Tính cosin góc giữa mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA = a$ và $SA \perp (ABC)$, $AB = BC = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(SAC);(SBC)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 4.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(SBD);(ABCD)$. Biết $\tan\alpha=\sqrt{2}$, tính góc giữa $(SAC);(SBC)$.

Lời giải

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 4.5.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$.

Tính góc giữa các mặt phẳng:

(1) (SBC) và $(ABCD)$

(2) (SBC) và (SAD)

(3) (SAB) và (SBD)

(4) (SBC) và (SAC)

Lời giải

TOÁN TỪ TÂM

Dạng 5. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta dùng một trong các cách sau:

▶ **Cách 1.** Xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0.

$$\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=90^0 \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta).$$

▶ **Cách 2.** Chứng minh trong mặt này có một đường thẳng vuông góc với mặt kia.

$$\begin{cases} a\subset(\alpha) \\ a\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta).$$

Ví dụ 5.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA=a$, các cạnh còn lại bằng b.
Chứng minh $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 5.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với đáy . Chứng minh $(SAB)\perp(SAD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

(1) Chứng minh: $(SAB)\perp(SAD)$ (2) Chứng minh: $(SAC)\perp(SBD)$

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 5.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh rằng $(SAC)\perp(AHK)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 5.4.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Chứng minh rằng $(SBC)\perp(SAC)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 5.5.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N là các điểm thuộc BC và CD sao cho $BM = \frac{a}{2}, DN = \frac{3a}{4}$. Chứng minh: $(SAM) \perp (SMN)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM

Dạng 6. Thiết diện

Phương pháp

Mặt phẳng (P) đi qua một điểm và vuông góc đường thẳng a cắt hình chóp theo thiết diện.

- Xác định mặt phẳng (P) có tính chất gì?
  Tìm đường thẳng song song với (P).
- Tìm các đoạn giao tuyến của (P) và các mặt của hình chóp:
- Sử dụng tính chất về giao tuyến song song: $\begin{cases} a \subset (Q) \\ a // (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = m // a.$

Ví dụ 6.1.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a, SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SI cắt hình chóp đã cho theo một thiết diện. Tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 6.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, D; $AB = 2a$; $SA = AD = DC = a$; $SA \perp (ABCD)$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) qua SD và $(\alpha) \perp (SAC)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 6.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC. Tính diện tích của thiết diện cắt bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 6.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SB. Khi đó, mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 6.5.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=AC=a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA=a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AC.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ là

A. SOA. **B.** SBA. **C.** SDA. **D.** SOC.

» Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng góc nào sau đây?

A. ASD. **B.** BSC. **C.** ASC. **D.** BSD.

» Câu 3. Cho các đường thẳng a, b và các mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A. $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ a \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

B. $\begin{cases} a \perp b \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \,//\, (\alpha)$.

C. $\begin{cases} a \perp b \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

D. $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$.

» Câu 4. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α). Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và vuông góc với (α)?

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 1.

» Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. $SO \perp (ABCD)$. **B.** $SC \perp (SBD)$. **C.** $(SBD) \perp (ABCD)$. **D.** $(SAC) \perp (ABCD)$.

» Câu 6. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $(ABB') \perp (ACC')$. **B.** $(AC'M) \perp (ABC)$. **C.** $(AMC') \perp (BCC')$. **D.** $(ABC) \perp (ABA')$.

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. $SC \perp (SBD)$. **B.** $SO \perp (ABCD)$.

C. $(SBD) \perp (ABCD)$. **D.** $(SAC) \perp (ABCD)$.

» Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AB \perp BC$. **C.** $AB \perp SC$. **D.** $SB \perp BC$.

» Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với mặt đáy. AH, AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB, SAD. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $BC \perp AH$. **B.** $SA \perp AC$. **C.** $HK \perp SC$. **D.** $AK \perp BD$.

» Câu 10. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $(ABB') \perp (ACC')$. **B.** $(AC'M) \perp (ABC)$.

C. $(AMC') \perp (BCC')$. **D.** $(ABC) \perp (ABA')$.

» Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(BIH) \perp (SBC)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SBC) \perp (ABC)$. **D.** $(SAC) \perp (SBC)$.

» Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA \perp (ABC)$, gọi M là trung điểm của AC. Mệnh đề nào **sai** ?

A. $(SAB) \perp (SAC)$. **B.** $BM \perp AC$. **C.** $(SBM) \perp (SAC)$. **D.** $(SAB) \perp (SBC)$.

» Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'BC'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ACC'A')$

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

» Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $(ACC'A') \perp (BDD'B')$. **B.** $(ABCD) \perp (BCD'A')$.

C. $(A'BC) \perp (ABCD)$. **D.** $A'B \perp (ABCD)$.

» Câu 15. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Gọi d và Δ là hai đường lần lượt vuông góc với mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $((SBC),(ABC)) = (\Delta, d)$. **B.** $((SBC),(ABC)) = 60°$.

C. $((SBC),(ABC)) = (\Delta,(ABC))$. **D.** $((SBC),(ABC)) = (\Delta,(SBC))$.

» Câu 16. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có M là trung điểm của BC. Xác định góc giữa hai mặt phẳng (SBC) với mặt phẳng (ABC).

A. $((SBC),(ABC)) = SBA$. **B.** $((SBC),(ABC)) = MSA$.

C. $((SBC),(ABC)) = SMA$. **D.** $((SBC),(ABC)) = MAS$.

» Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

» Câu 18. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ với $ABCD$ có tâm O. Gọi M là trung điểm của CD. Xác định góc giữa (SCD) với $(ABCD)$.

A. $((SCD),(ABCD)) = SMO$. **B.** $((SCD),(ABCD)) = MSO$.

C. $((SCD),(ABCD)) = SOC$. **D.** $((SCD),(ABCD)) = SOM$.

» Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

» Câu 20. Cho hình chop $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh $2a$, SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 30°. Khi đó mp(SBC) tạo với đáy một góc x. Tính $\tan x$.

A. $\tan x = 2$. **B.** $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\tan x = \dfrac{3}{2}$. **D.** $\tan x = \dfrac{2}{3}$.

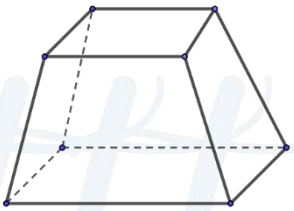
» Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

» Câu 22. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tìm giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

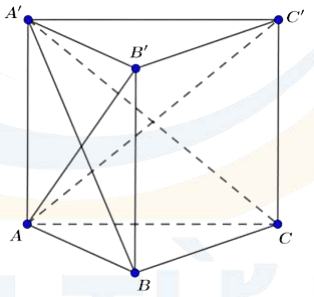
A. $x = \dfrac{a}{3}$. **B.** $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $x = \dfrac{a}{2}$.

» Câu 23. Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 2 m, đáy nhỏ có cạnh bằng 1 m và cạnh bên bằng 2 m như hình vẽ. Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.



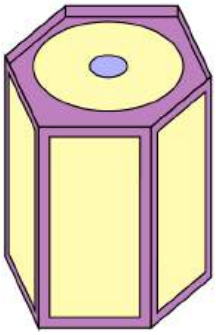
A. $5+3\sqrt{5}$. **B.** $4+3\sqrt{5}$. **C.** $2+3\sqrt{5}$. **D.** 5.

» Câu 24. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$, tính $\cos\alpha$



A. $\dfrac{1}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\dfrac{4}{7}$.

» Câu 25. Một hộp đèn treo trần có hình dạng lăng trụ đứng lục giác đều như hình vẽ, cạnh đáy bằng 10 cm và cạnh bên bằng 50 cm. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.



A. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{20}{3}$. **D.** $\frac{20\sqrt{3}}{5}$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$AB \perp (SAD)$		
(b)	$BC \perp (SAB)$		
(c)	$AC \perp (SBD)$		
(d)	$BC \perp (SCD)$		

» Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$((SAC),(SBD)) = 90°$		
(b)	$((SAC),(SBD)) = 45°$		
(c)	$(SAB) \perp (SBC)$		
(d)	$(SCD) \perp (SAD)$		

» Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$((SAB),(ABCD)) = 90^\circ$		
(b)	$((SBC),(ABCD)) = SAB$		
(c)	$((SBC),(ABCD)) = 60^\circ$		
(d)	$((SBD),(ABCD)) \approx 69,43^\circ$		

» Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$((SCD),(ABCD)) = 45^\circ.$		
(b)	$((SBD),(ABCD)) = SOA$		
(c)	$((SBD),(ABCD)) \approx 58,74^\circ.$		

(d)	$(SBD)\perp(SAC)$		

» **Câu 30.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O với $SO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm cạnh AD và BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$(SMN)\perp(ABCD)$		
(b)	$(SAD)\perp(SMN)$		
(c)	$\big((SBC),(ABCD)\big)=30^\circ$		
(d)	$\big((SBC),(SCD)\big)\approx 80,52^\circ$.		

» **Câu 31.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, biết $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$ và $\big((ACB'),(ABC)\big)=60^\circ$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A'A\perp(ABC)$		
(b)	$\big((ACB'),(ABB'A')\big)=60^\circ$		
(c)	$\big((ACC'A'),(BCC'B')\big)=30^\circ$		
(d)	Tổng diện tích ba mặt bên của hình lăng trụ đã cho bằng $\left(3\sqrt{3}+3\right)a^2$		

» **Câu 32.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(A'B'CD)$ bằng 90°.		
(b)	Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$ bằng 90°.		
(c)	Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(CB'D')$ bằng 90°.		
(d)	Góc giữa đường thẳng EF và mặt phẳng $(BB'D'D)$ bằng 90°.		

» **Câu 33.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm J, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H,K,J lần lượt là hình chiếu của A lên SA,SC,SD. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$AH\perp(SBC)$		
(b)	$AJ\perp(SCD)$		
(c)	$SC\perp(AHJ)$		
(d)	$AK\perp(SBD)$		

» **Câu 34.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Độ dài đường chéo của hình lập phương là $3a$.		
(b)	Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'C')$ vuông góc nhau.		
(c)	Hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $A'C$.		

(d)	Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Một góc phẳng của góc nhị diện $[C,BD,C']$ là COC'.		

» Câu 35. Cho tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$CD \perp (ABO)$ với O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác BCD.		
(b)	Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng $60°$.		
(c)	Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng $\frac{2}{3}$.		
(d)	Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD là MN.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng bao nhiêu độ?

Điền đáp số: ☐

» Câu 37. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng đáy $2a$, đường cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính $\tan\varphi$ của góc giữa mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số: ☐

» Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B, SA \perp (ABC)$, $AB = BC = a, SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng bao nhiêu độ?

Điền đáp số: ☐

» Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng bao nhiêu độ?

Điền đáp số: ☐

» Câu 40. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = \sqrt{2}$, $CD = 2x\sqrt{2}$. Giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau là $x = \frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của $a^2 + 2b$ là

Điền đáp số: ☐

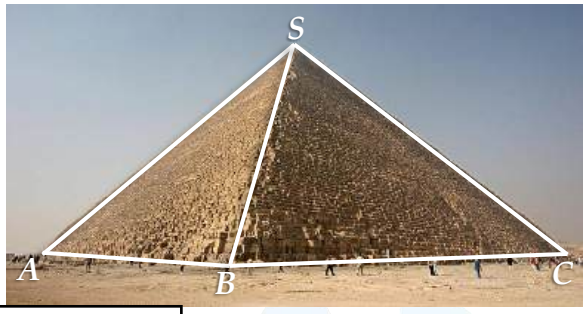
» Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$, gọi AH và AK lần lượt là đường cao trong tam giác SAB và SAC và D là giao điểm của HK và BC. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với bao nhiêu mặt bên và mặt đáy của hình chóp?

Điền đáp số: ☐

» Câu 42. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $A'A = A'B = A'C = a$. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, H là trung điểm BC. Mặt phẳng $(A'AO)$ vuông góc với bao nhiêu mặt bên và mặt đáy của hình lăng trụ?

Điền đáp số:

» Câu 43. Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài $262(m)$ cạnh bên dài $230(m)$. Tính góc được tạo bởi các cạnh bên và mặt đáy (làm trọn đến hàng đơn vị của độ).



Điền đáp số:

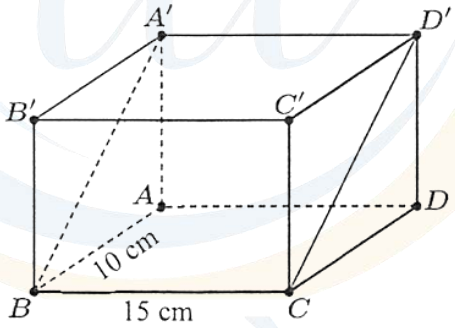
» Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = 1$ và đáy ABC là tam giác đều với độ dài cạnh bằng 2. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC).

Điền đáp số:

» Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(AC'D')$

Điền đáp số:

» Câu 46. Một khối gỗ có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Biết rằng $AB = 10cm, BC = 15cm$ và góc hai mặt phẳng $(BCD'A'), (ABCD)$ bằng 30°. Tổng diện tích tất cả các mặt của khối gỗ đó đạt bao nhiêu cm^2? *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*



Điền đáp số:

» Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng bao nhiêu độ?

Điền đáp số:

---------- Hết ----------

Chương 08

Bài 4. KHOẢNG CÁCH & THỂ TÍCH

A Lý thuyết

1. Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, đến 1 mặt phẳng

1.1. *Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng*

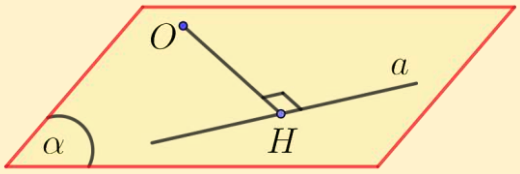
Định nghĩa:

Cho điểm O và đường thẳng a.

Trong mặt phẳng (O,a),

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a.
- Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a.

Kí hiệu : $d(O,a)=OH$.



Nhận xét

- $\forall N \in a : ON \geq d(O,a) = OH$
- $d(O,a)=0 \Leftrightarrow O \in a$

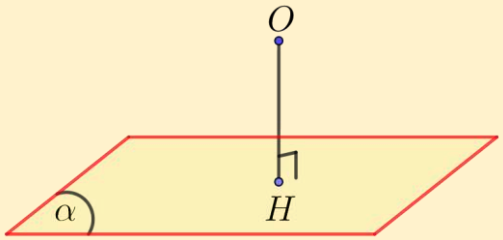
1.2. *Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng*

Định nghĩa:

Cho điểm O và mặt phẳng (α).

- Gọi H là hcvg của O trên mặt phẳng (α).
- Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α).

Kí hiệu : $d(O,(\alpha))=OH$



Nhận xét

- $\forall N \in (P) : ON \geq d(O,(P)) = OH$
- $d(O,(P))=0 \Leftrightarrow O \in (P)$

2. Khoảng cách giữa đường và mặt song song, hai mặt song song

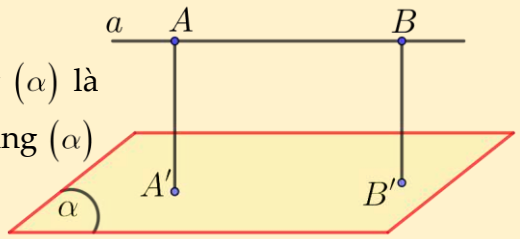
2.1. *Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song*

Định nghĩa:

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α).

• Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α)

Kí hiệu : $d\big(a,(\alpha)\big)=d\big(A,(\alpha)\big)$

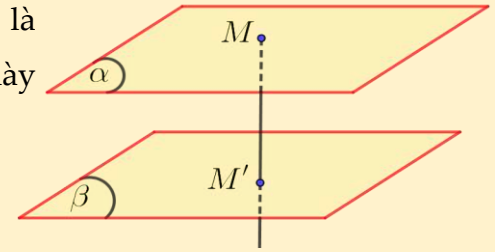


2.2. *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song*

Định nghĩa:

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha),(\beta)$ là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia

Kí hiệu : $d\big((\alpha),(\beta)\big)=d\big(M,(\beta)\big)$ với điểm $M\in(\alpha)$



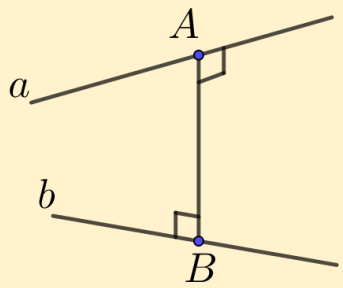
3. Đường vuông góc chung và khoảng cách hai đường chéo nhau

3.1. *Định nghĩa*

Định nghĩa:

- Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b và cùng vuông góc với mỗi đường ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b
- Nếu đường vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b tại A,B thì độ dài đoạn thẳng AB gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b

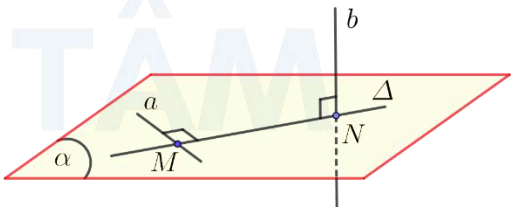
Kí hiệu: $d(a,b)=AB$



3.2. *Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau*

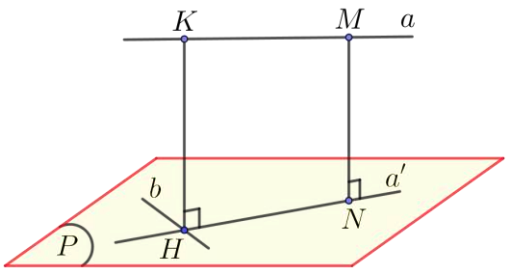
▶ **Cách 1:** Khi a vuông b

- Dựng một mặt phẳng $(\alpha)\supset a,(\alpha)\perp b$ tại N
- Trong (α) dựng $NM\perp a$ tại M
- Đoạn MN là đoạn vuông góc chung của a và b



▶ **Cách 2:** Khi a chéo b

- Dựng một mặt phẳng $(P) \supset b, (P)//a$.
- Dựng a' là hình chiếu của a lên mặt phẳng (P), bằng cách lấy $M \in a$ dựng đoạn $MN \perp (P)$, lúc đó a' là đường thẳng đi qua N và song song với a
- Gọi $H = a' \cap b$, dựng $HK//MN \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của a và b



Nhận xét

(1) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *bằng* khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó với mặt phẳng song song với nó và chứa thẳng còn lại.

(2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *bằng* khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

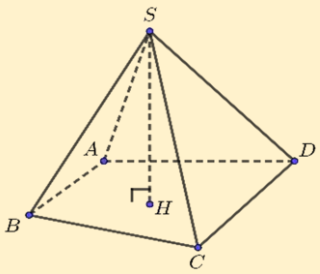
4. Thể tích khối chóp

Định nghĩa:

Công thức tính thể tích khối chóp:

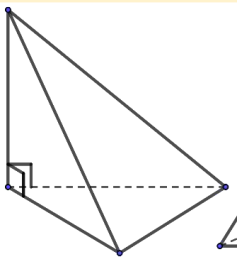
$$V = \frac{1}{3} S.h$$

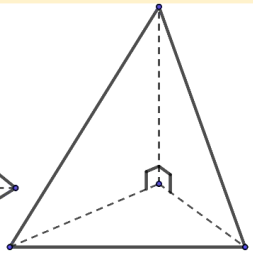
Trong đó:
S là diện tích đáy
h là chiều cao khối chóp
(khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).

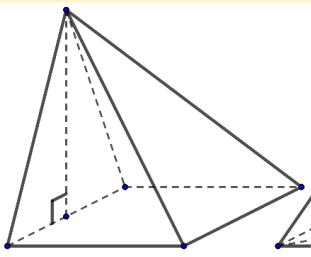


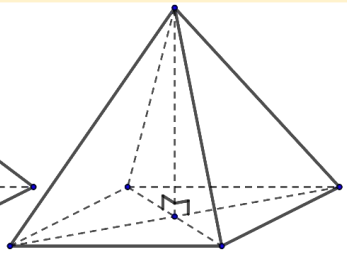
Cách xác định đường cao khối chóp:

Loại	*Đường cao*
Cạnh bên vuông đáy *Hình 1.1*	Đường cao chính là cạnh bên.
Hai mặt bên vuông đáy *Hình 1.2*	Đường cao là giao tuyến của hai mặt bên vuông góc đáy.
Mặt bên vuông đáy *Hình 1.3*	Đường cao của mặt bên vuông góc đáy.
Chóp đều *Hình 1.4*	Đường cao hạ từ đỉnh đến tâm đa giác đáy.


Hình 1.1


Hình 1.2


Hình 1.3


Hình 1.4

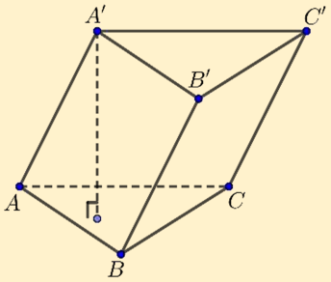
5. Thể tích khối lăng trụ

Định nghĩa:

Công thức tính thể tích khối chóp:

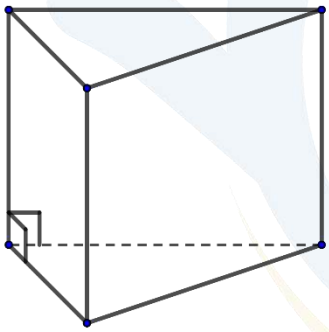
$$V = S.h$$

Trong đó:
S là diện tích đáy
h là chiều cao khối chóp
(khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).

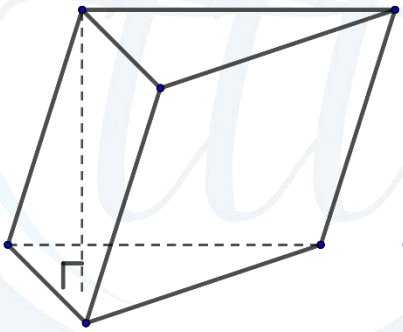


Cách xác định đường cao lăng trụ:

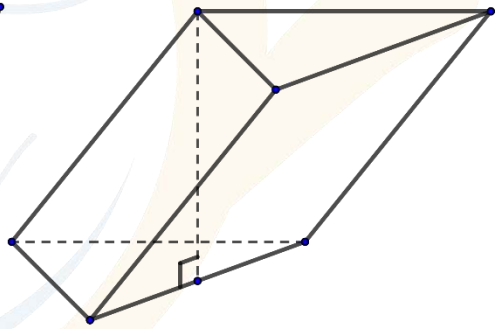
Loại	*Đường cao*
Cạnh bên vuông đáy *Hình 2.1*	Đường cao chính là cạnh bên.
Lăng trụ đứng *Hình 2.1*	Đường cao chính là cạnh bên.
Lăng trụ xiên *Hình 2.2*	Đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đáy.
Lăng trụ có hình chiếu *Hình 2.3*	Đường cao là hình chiếu vuông góc của 1 đỉnh xuống đáy.



Hình 2.1



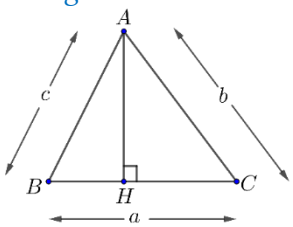
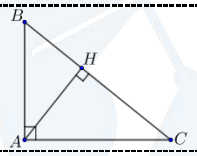
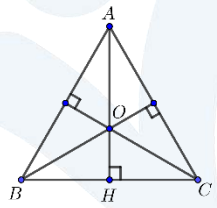
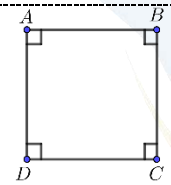
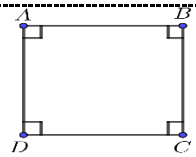
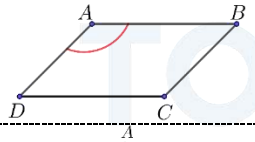
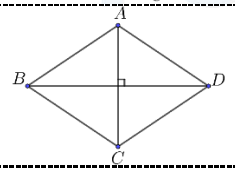
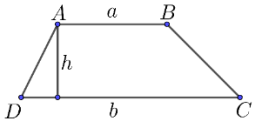
Hình 2.2



Hình 2.3

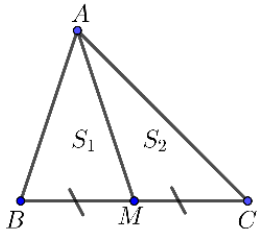
TOÁN TỪ TÂM

6. Công thức tính diện tích đáy.

	$S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$
	$S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$
Tam giác 	$S=\frac{1}{2}ba.\sin A=\frac{1}{2}ca.\sin B=\frac{1}{2}ba.\sin C$
	$S=\frac{abc}{4R}=2R^2.\sin A.\sin B.\sin C$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
	$S=p.r$ với p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC
	$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p=\frac{a+b+c}{2}$ hoặc $S=\frac{1}{4}\sqrt{\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]}$
	*Tam giác vuông* ΔABC vuông tại A: $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}BC.AH$.
	*Tam giác đều* ΔABC đều, cạnh AB: $S=(AB)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}$; Chiều cao tam giác đều $h=AB.\frac{\sqrt{3}}{2}$.
	*Hình vuông cạnh* AB Diện tích hình vuông $ABCD: S=(AB)^2$
	*Hình chữ nhật* Diện tích hình chữ nhật $ABCD: S=AB.CD$
	*Hình bình hành* Diện tích hình bình hành $ABCD: S=AB.AD.\sin BAD$
	*Hình thoi* Diện tích hình thoi $ABCD: S=AB.AD.\sin BAD=\frac{1}{2}AC.BD$
	*Hình thang* Diện tích hình thang $ABCD: S=\frac{1}{2}(AB+CD).h$
	Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S=\frac{1}{2}AC.BD$

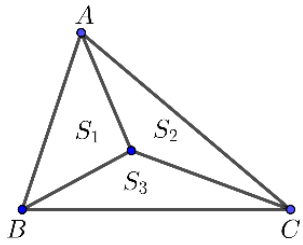
7. Tỷ số diện tích.

Ta có các tỷ số thường gặp sau:



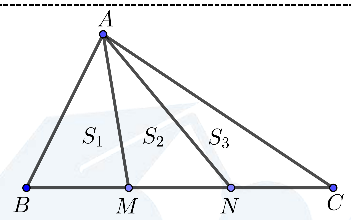
AM trung tuyến,

đặt $S_{ABC}=S\longrightarrow S_1=S_2=\dfrac{S}{2}$.



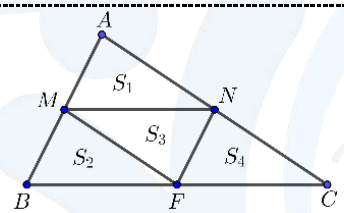
G là trọng tâm,

đặt $S_{ABC}=S\longrightarrow S_1=S_2=S_3=\dfrac{S}{3}$.



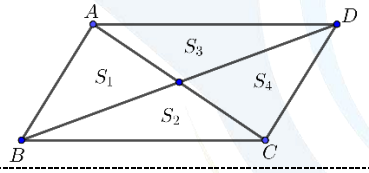
$BM=MN=NC$

đặt $S_{ABC}=S\longrightarrow S_1=S_2=S_3=\dfrac{S}{3}$.

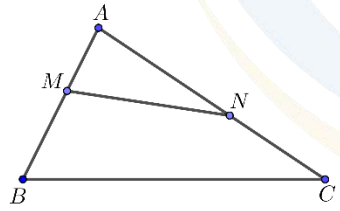


$M;N;F$ lần lượt là trung điểm $AB;AC;BC$

đặt $S_{ABC}=S\longrightarrow S_1=S_2=S_3=S_4=\dfrac{S}{4}$.



$S_{ABCD}=S\longrightarrow S_1=S_2=S_3=S_4=\dfrac{S}{4}$



$\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\dfrac{AM}{AB}.\dfrac{AN}{AC}$

TOÁN TỪ TÂM

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Khoảng cách từ chân đường cao đến một mặt bên

Phương pháp

- **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.
- **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
- **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.

Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất:

"Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trên mặt này vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia."

Nhận xét:

Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Hầu như tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy (ABC).

Hãy xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt bên (SBC).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a, biết $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

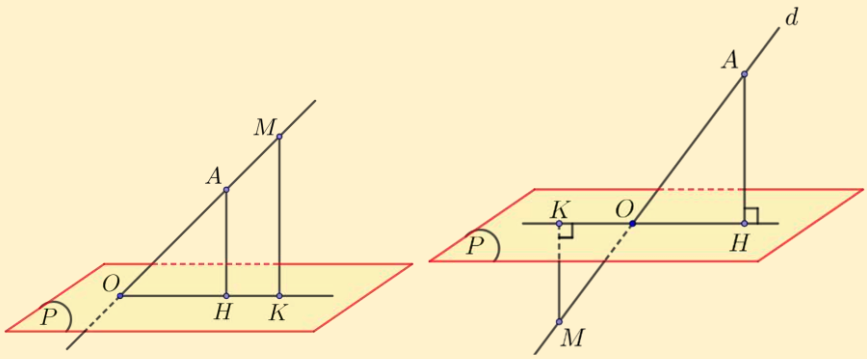
.....

.....

Dạng 2. Khoảng cách từ điểm bất kỳ đến một mặt phẳng

Phương pháp

Từ các điểm yêu cầu, ta quy về chân đường cao:
Giả sử $AM \cap (P) = \{O\}$ như hình vẽ.



Khi đó: $\dfrac{d(M,(P))}{d(A,(P))} = \dfrac{OM}{OA} \Rightarrow d(M,(P)) = \dfrac{OM}{OA} \cdot d(A,(P))$ với $\dfrac{OM}{OA}$ là hằng số.

Để tính được $d(M,(P))$ ta chỉ cần tính $d(A,(P))$ bằng các bước sau:

- **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.
- **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
- **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
  Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60°$. Gọi M là trung điểm BC. Biết $SA = SB = SC = a\sqrt{5}$.

(1) Tính chiều cao của hình chóp.

(2) Tính khoảng cách từ M đến (SAB).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA=3a$, $BC=4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB=2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC}=30^\circ$.

Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM

Dạng 3. Khoảng cách hai đường chéo nhau

Phương pháp

Phương pháp chung: Ta phải chuyển khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

⌘ *Trường hợp 1:*

♻ Nếu đường thẳng $\begin{cases} a \subset (P) \\ b // (P) \end{cases} \Rightarrow d(a,b) = d(b,(P))$.

Khi đó chọn $M \in b$ sao cho có thể tính $d(M,(P))$ là $d(a,b)$.

♻ Nếu không tìm được $\begin{cases} (P) \supset a \\ (P) // b \end{cases}$ thì ta phải dựng $\begin{cases} (Q) \supset a \\ (Q) // b \end{cases}$

⌘ *Trường hợp 2:* a và b lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song nhau.

♻ Nếu đường thẳng $\begin{cases} a \in (P) \\ b \in (Q) \\ (P) // (Q) \end{cases} \Rightarrow d(a,b) = d((P),(Q))$

⌘ *Trường hợp 3:* a là cạnh bên còn b là một cạnh đáy của hình chóp

♻ Ta làm như sau:

(+) Gọi $I = a \cap (P)$ (mặt đáy).

(+) Từ I dựng đường thẳng Δ song song với b.

(+) Khi đó b song song với (P) chứa a và Δ.

(+) Chọn M trên b sao cho có thể tính $d(M,(P))$ là $d(a,b)$.

Để tính được $d(M,(P))$ ta chỉ cần tính $d(A,(P))$ bằng các bước sau:

▶ **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.

▶ **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).

▶ **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.

Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ 3.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD theo a.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa SA và BC theo a.

Lời giải

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 3.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính

(1) $d(AC,SB)$.

(2) Sin của góc giữa SB và mặt phẳng (SAC).

Lời giải

TOÁN TỪ TÂM

Dạng 4. Chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Phương pháp

☑ Đây là dạng dễ xác định được đường cao (h).

☑ Áp dụng công thức: $V=\frac{1}{3}S.h$

Ví dụ 4.1.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.2.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a, BC=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.3.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông canh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=2a$. Thể tích của khối chóp $S.BCD$ là:

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.4.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, ΔABC vuông cân tại A, $SA = BC = a$.

Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.5.

Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

Tính thể tích khối chóp $S.ABC$, biết rằng $SB = a\sqrt{5}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.6.

Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $AB = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{BAC} = 120°$.

Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.7.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $AB = 3a$, $AD = 2a$, $SB = 5a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.8.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB=a$, $AD=3a$, $BC=a$. Biết $SA=a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.9.

Cho hình chóp $SABCD$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $60°$. Tính thể tích khối chóp $SABCD$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.10.

Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AC=a$ biết SA vuông góc với đáy ABC và SC hợp với (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích khối chóp

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.11.

Cho khối chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.12.

Cho khối chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $SA=a$ và diện tích tam giác SBC bằng $3a^2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.13.

Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và SA hợp với (SBC) một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $SABC$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 4.14.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác SBD là tam giác đều. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 4.15.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Tính thể tích $V_{S.ABC}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM

Dạng 5. Chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Phương pháp

☑ Khối chóp có mặt bên vuông góc mặt phẳng đáy.

✈ Áp dụng công thức: $V=\frac{1}{3}S.h$.

✈ Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh của chóp ta kẻ vuông góc vào giao tuyến của mặt bên và mặt đáy.

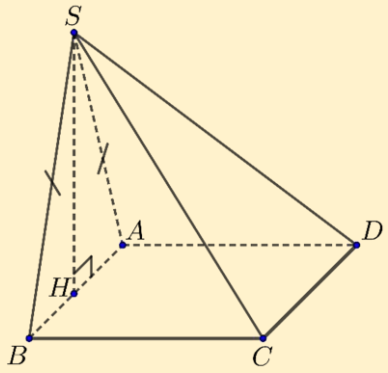
☑ Một số trường hợp thường gặp:

① Mặt bên (SAB) vuông với đáy $(ABCD)$ và SAB là tam giác đều cạnh x

$\to SH\perp(ABCD)\to h=SH=\frac{x\sqrt{3}}{2}$ với H là trung điểm AB.

② Mặt bên (SAB) vuông với đáy $(ABCD)$ và SAB là tam giác cân S tại

$\to SH\perp(ABCD)\to h=SH$ với H là trung điểm AB.



Ví dụ 5.1.

Hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình chữ nhật có $AB=2a\sqrt{3};\ AD=2a$. Mặt bên (SAB) là Δ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối $S.ABD$ là?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 5.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a; hình chiếu của S trên $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AB cạnh bên $SD=\dfrac{3}{2}a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ tính theo a bằng?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 5.4.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân đỉnh A, $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120^\circ$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5.5.

Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác BCD cân tại D và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết AD hợp với (ABC) một góc 60°. Tính thể tích của khối tứ diện đã cho.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5.6.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại C, tam giác SAB đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp.

Lời giải

TOÁN TỪ TÂM

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 5.7.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. SC tạo với (SAB) một góc $45°$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM

Dạng 6. Chóp đều

Phương pháp

☑ Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau.

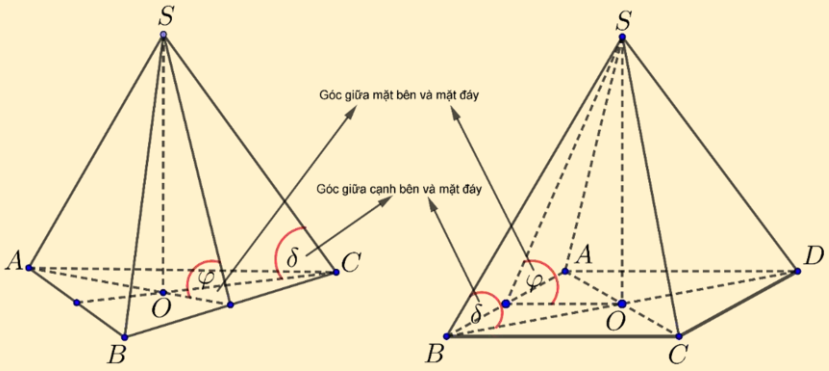
✈ Áp dụng công thức: $V=\frac{1}{3}S.h$.

✈ Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh chóp hạ vuông góc xuống tâm mặt đáy.

☑ Một số kiểu thường gặp:

① Chóp đều $S.ABCD$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là φ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là δ.

② Chóp đều $S.ABC$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là φ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là δ.



Một số công thức tính nhanh:

Chóp đều cạnh x, đáy là tam giác	$V=(x)^3.\frac{\sqrt{2}}{12}$
Chóp đều cạnh x, đáy là tứ giác	$V=(x)^3.\frac{\sqrt{2}}{6}$
Chóp đều, cạnh bên bằng x, đáy là tam giác cạnh y.	$V=\frac{(y)^2\sqrt{3(x)^2-(y)^2}}{12}$
Chóp đều, cạnh bên bằng x, đáy là tứ giác cạnh y.	$V=\frac{(y)^2\sqrt{4(x)^2-2(y)^2}}{6}$
Chóp đều, các mặt bên cùng tạo với đáy góc φ, đáy là tam giác cạnh x.	$V=\frac{(x)^3\tan\varphi}{24}$
Chóp đều, các mặt bên cùng tạo với đáy góc φ, đáy là tứ giác cạnh x.	$V=\frac{(x)^3\tan\varphi}{6}$

Ví dụ 6.1.

Tính chiều cao của hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6.2.

Tính thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6.3.

Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đó theo a.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6.4.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc 60°. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 6.5.

Khối chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và có thể tích bằng $\frac{2}{3}$. Tính độ dài cạnh của khối chóp.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 6.6.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và cạnh bằng a, $SO \perp (ABCD)$, $SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6.7.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có diện tích $16\,\text{cm}^2$, diện tích một mặt bên là $8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6.8.

Cho khối tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a, M là trung điểm DC. Thể tích V của khối chóp $M.ABC$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6.9.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{3a}{4}$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 6.10.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA=1$. Gọi D,E lần lượt là trung điểm của SA,SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $BD \perp AE$.

Lời giải

TOÁN TỪ TÂM

Dạng 7. Lăng trụ đứng

Phương pháp

☑ Áp dụng công thức chính: $V = S.h$.

❍ Tính được diện tích đáy ta xem lại "**Công thức tính diện tích đáy**"

❍ Lăng trụ đứng sẽ có các đường cao song song nhau, tùy vào trường hợp đề ra ta sẽ sử dụng đường cao hợp lý.

	Định nghĩa	*Tính chất*
Hình lăng trụ đứng	Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.	Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.
Hình lăng trụ đều	Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.	Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Ví dụ 7.1.

Khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a, đường cao bằng $a\sqrt{3}$ có thể tích bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 7.2.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$. Đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7.3.

Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đoạn $A'C = a$. Thể tích khối đó thu được?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7.4.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=4a$ và $AA'=a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7.5.

Cho lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng $3a$.
Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7.6.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $C'A=a\sqrt{2}$ và $\widehat{AC'C}=45^\circ$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7.7.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy bằng 45°. Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7.8.

Cho khối hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=120^o$, đường thẳng AC_1 tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60°. Tính thể tích khối hộp đã cho.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7.9.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC, $A'M=a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7.10.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=2a$, biết rằng $(A'BC)$ hợp với đáy (ABC) một góc 45°. Thể tích lăng trụ là bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **SAI** ?

A. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a,b là khoảng cách từ một điểm M thuộc mặt phẳng (α) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kì trên b.

B. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

C. Nếu hai đường thẳng a,b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

D. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc a tới mặt phẳng (α).

» Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $SA\perp(ABC)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

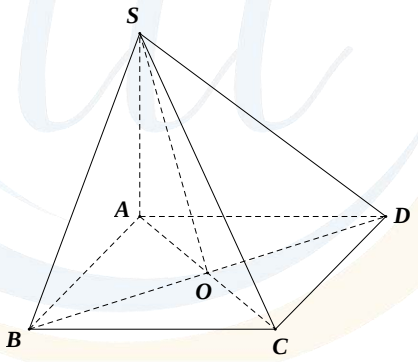
A. Độ dài đoạn AC.

B. Độ dài đoạn AB.

C. Độ dài đoạn AH, trong đó H là hình chiếu vuông góc của A trên SB.

D. Độ dài đoạn AM, trong đó M là trung điểm của SC .

» Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy $ABCD$. Xác định khoảng cách từ điểm S đến AB?



A. SO. **B.** SA. **C.** SB. **D.** SD.

» Câu 4. Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 2. **B.** 15. **C.** 10. **D.** 30.

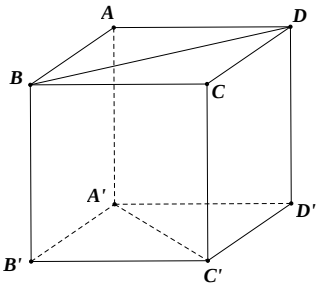
» Câu 5. Cho hình chóp $SABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD=2a$, $SA=a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$ **B.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

» Câu 6. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC'=a\sqrt{3}$.

A. $V=a^3$ **B.** $V=\dfrac{3\sqrt{6}a^3}{4}$ **C.** $V=3\sqrt{3}a^3$ **D.** $V=\dfrac{1}{3}a^3$

» Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. a **B.** $\sqrt{2}a$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ **D.** $\sqrt{3}a$

» Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AB=\frac{a}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

» Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC bằng

A. a. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

» Câu 10. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$ và $A'B=a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{a^3}{2}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

» Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Biết $SA=a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BC bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

» Câu 12. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** a.

» Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, biết $AB=4a, SB=6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỷ số $\frac{a^3}{3V}$ là

A. $\frac{\sqrt{5}}{80}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{40}$ **C.** $\frac{\sqrt{5}}{20}$ **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{80}$

» Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$ và $AD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{15}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $V=\frac{4a^3\sqrt{15}}{15}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

» **Câu 15.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính độ dài đường cao SH.

A. $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $SH=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $SH=\dfrac{a}{2}$. **D.** $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

» **Câu 16.** Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Biết $ASC=90°$, tính thể tích V của khối chóp đó.

A. $V=\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

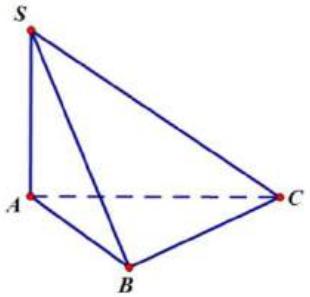
» **Câu 17.** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa $A'C$ và hình chiếu của nó là $45°$, biết $A'C=a\sqrt{2}$. Tính độ dài CC'.

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** a^2 **D.** a

» **Câu 18.** Cho một chậu nước hình chóp cụt đều (hình vẽ) có chiều cao bằng $3dm$, đáy là lục giác đều, độ dài cạnh đáy lớn bằng $2dm$ và độ dài cạnh đáy nhỏ bằng $1dm$. Tính thể tích của chậu nước

A. $\dfrac{21\sqrt{3}}{2}dm^3$. **B.** $\dfrac{21\sqrt{2}}{4}dm^3$. **C.** $\dfrac{21}{2}dm^3$. **D.** $\dfrac{21\sqrt{6}}{4}dm^3$.

» **Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45^0 (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng



A. $\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

» **Câu 20.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\dfrac{a^3}{3}$ **B.** a^3 **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$ **D.** $\dfrac{a^3}{2}$

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 21.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'CD'$ có cạnh a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $B'D$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng DB' là BH.		
(b)	Độ dài đoạn $BH=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.		
(c)	$d(B,AC)=\dfrac{1}{2}AC$		

(d)	$d\left(B,AA'\right)=BA'$		

» **Câu 22.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Biết $BC=2AB=2AD=2a, SB=a\sqrt{3}$. Cạnh bên SB vuông góc với mặt đáy, E là trung điểm BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$d\left(D,\left(SAB\right)\right)=a$		
(b)	$d\left(E,\left(SBD\right)\right)=EA$		
(c)	$d\left(B,\left(SCD\right)\right)=BJ=\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$, với J là hình chiếu vuông góc của điểm B lên SD		
(d)	$d\left(I,\left(SCD\right)\right)=a\sqrt{30}$, với I là giao điểm AC và BD		

» **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh a. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Vẽ đường cao AH của tam giác SAB. Vẽ đường cao AK của tam giác SAD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BC\perp AH$		
(b)	Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$		
(c)	Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(SBD\right)$ bằng: $\dfrac{a\sqrt{2}}{7}$		
(d)	Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $\left(AHK\right)$ bằng: $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$		

» **Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a\sqrt{2}$, $AC=a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$AD//\left(SBC\right)$		
(b)	Khoảng cách từ D đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$		
(c)	Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD, AB bằng: $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$		
(d)	Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng: $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$		

» **Câu 25.** Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy và tam giác SAB đều cạnh $2a$. Biết tam giác ABC vuông tại C và cạnh $AC=a\sqrt{3}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SH\perp\left(ABC\right)$		
(b)	$d\left(S,\left(ABC\right)\right)=a\sqrt{3}$		
(c)	$d\left(C,\left(SAB\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$		

(d)	Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{6}$		

» Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B có $AB=1, ACB=30^\circ$. Biết SA vuông góc với mặt đáy và $SA=2$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$d\left(A,SB\right)=AH$		
(b)	$d\left(B,\left(SAC\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$		
(c)	$BC=\sqrt{3}$		
(d)	Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng: $\frac{\sqrt{3}}{6}$		

» Câu 27. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC\cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Trong mặt phẳng $\left(A'B'C'\right)$, kẻ $A'H\perp B'C'$ tại H. Khi đó: $B'C'\perp\left(AA'H\right)$		
(b)	$d\left(\left(ABC\right),\left(A'B'C'\right)\right)=a$		
(c)	Diện tích đáy của lăng trụ là: $a^2\sqrt{5}$		
(d)	Thể tích khối lăng trụ là: $a^3\sqrt{3}$		

» Câu 28. Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB=x$, các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Diện tích tam giác BCD bằng $S_{BCD}=3\sqrt{3}$		
(b)	$V_{ABCD}=\frac{\sqrt{3}}{3}x\sqrt{36-x^2}$		
(c)	Khi $x=3$ thì $V=\frac{9}{4}$		
(d)	Khi $x=3\sqrt{2}$ thì thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.		

» Câu 29. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi O là giao điểm AC và BD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$d\left(SO,CD\right)=OE$ với E là trung điểm CD.		
(b)	$d\left(AD,SB\right)=\frac{1}{2}d\left(A,\left(SBC\right)\right)$		
(c)	Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SE. $d\left(AB,SC\right)=2d\left(O,\left(SCD\right)\right)=2OH$.		
(d)	Gọi $G;F$ lần lượt là trung điểm $BC;AD$. $d\left(GF,SE\right)=\frac{1}{2}OH$.		

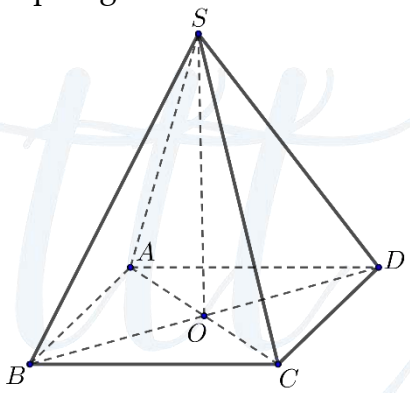
» **Câu 30.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là H là trung điểm BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A'H$ là đường cao hình lăng trụ.		
(b)	Tam giác $A'HA$ vuông tại A'.		
(c)	$A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}$		
(d)	Đường cao của khối lăng trụ trên là $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.		

» **Câu 31.** Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với cạnh bên là $32,32m$ và cạnh đáy là $34m$.



Giả sử người ta kí hiệu hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ tâm O như hình vẽ.



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Chiều cao của kim tự tháp là SA.		
(b)	Khoảng cách từ đỉnh tháp đến mặt phẳng đáy là SO.		
(c)	Chiều cao của kim tự tháp là $\sqrt{SB^2-OB^2}$.		
(d)	Chiều cao của kim tự tháp là gần bằng $24,2$ *(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=\sqrt{3}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng bao nhiêu? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

✍ **Điền đáp số:** ☐

» Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\dfrac{a}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Điền đáp số:

» Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Tính SA ? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Điền đáp số:

» Câu 35. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$. Tính chiều cao của hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$?

Điền đáp số:

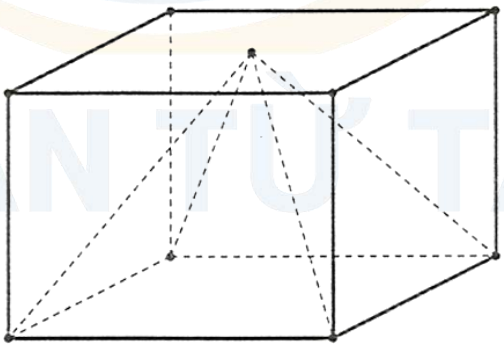
» Câu 36. Một bể cá được làm bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $0,6m;2m;0,8m$. Tìm thể tích của bể cá đó.

Điền đáp số:

» Câu 37. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh 2. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AB,CD. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số:

» Câu 38. Một cái hộp hình lập phương, bên trong nó đựng một mô hình đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều mà đỉnh của hình chóp đó trùng với tâm của một mặt chiếc hộp, giả sử hình vuông đáy của hình chóp trùng với một mặt của chiếc hộp (mặt này cùng với mặt chứa đỉnh hình chóp là hai mặt đối nhau). Biết cạnh của chiếc hộp bằng $30cm$, thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp (mô hình đồ chơi được làm bởi chất liệu nhựa đặc bên trong) đạt bao nhiêu dm^3?



Điền đáp số:

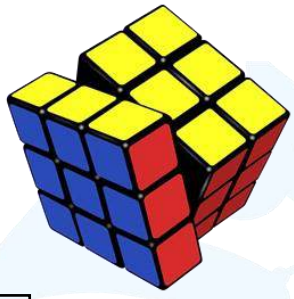
» Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 1, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tìm thể tích khối chóp $S.ABCD$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số:

» Câu 40. Một hình chóp cụt đều $ABC\cdot A'B'C'$ có cạnh đáy lớn bằng 4, cạnh đáy nhỏ bằng 2 và chiều cao của nó bằng $\frac{3}{2}$. Tìm thể tích của khối chóp cụt đều đó. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số:

» Câu 41. Một khối rubik 3×3 (được chia làm 27 khối lập phương nhỏ) có dạng một hình lập phương với kích thước cạnh bằng $6cm$. Tìm thể tích của khối rubik đó, biết khoảng hở giữa các khối lập phương nhỏ không đáng kể.



Điền đáp số:

» Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD), SA=2, ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Gọi O là tâm của $ABCD$. Tính khoảng cách từ S đến DM với M là trung điểm OC. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số:

» Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(A'BD),(CB'D')$. *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Điền đáp số:

» Câu 44. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC=2$, $AB=\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Điền đáp số:

---------- Hết ----------

Chương 08

Bài 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG & MẶT – GÓC NHỊ DIỆN

A Lý thuyết

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Xác định góc giữa đường và mặt:

- ***Trường hợp 1.*** $d \perp (P) \Rightarrow \widehat{(d,(P))} = 90^\circ$
- ***Trường hợp 2.*** d không vuông góc với (P).

Khi đó ta làm như sau:

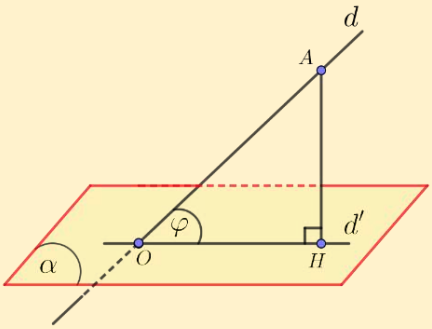
» ***Bước 1.*** Tìm $d \cap (P) = \{O\}$.

» ***Bước 2.*** Trên d lấy điểm A khác O.

Tìm hình chiếu H của A lên (α).

Ta chọn điểm A trên d thỏa: $A \in \Delta$ vuông góc với (α).

(Khi đó hình chiếu của A là giao điểm của Δ và (α)).



» ***Bước 3.*** Suy ra $\left(\widehat{d,(P)}\right) = \left(\widehat{AI,HI}\right) = \widehat{AIH} = \varphi$.

Chú ý: $0 \le \left(d;(P)\right) \le 90^\circ$.

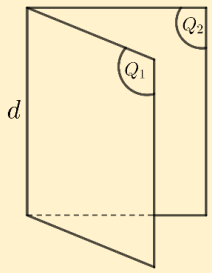
2. Góc nhị diện

Định nghĩa:

» Cho hai nửa mặt (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d.

» Hình tạo bởi (P_1), (Q_1) và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1), kí hiệu $[P_1,d,Q_1]$.

» Hai nửa mặt (P_1), (Q_1) gọi là hai mặt của nhị diện và d gọi là cạnh của nhị diện



Chú ý

(1) Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.

(2) Góc nhị diện $[P_1;d;Q_1]$ còn được ký hiệu là $[M;d;N]$ với $M;N$ tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng $(P_1);(Q_1)$.

3. Góc phẳng nhị diện

Định nghĩa:

» *Góc phẳng nhị diện* của góc nhị diện là góc:

✓ có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện,

✓ có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Chú ý

(1) Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ $0°$ đến $180°$.

(2) Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn $90°$.

(3) Đối với hai điểm M,N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $\left[M,a,N\right]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M,N.

(4) Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện lại cũng là góc nhị diện vuông.

Phương pháp xác định góc nhị diện:

Để xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (P) & (Q), ta thực hiện theo các bước:

▶ **Bước 1:** Xác định giao tuyến $a=(P)\cap(Q)$.

▶ **Bước 2:** Tìm $Ox\subset(P):Ox\perp a$ và $Oy\subset(Q):Oy\perp a$.

▶ **Bước 3:** Kết luận $\left[P;a;Q\right]$

TOÁN TỪ TÂM

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp

- ***Trường hợp 1.*** $d \perp (P) \Rightarrow \widehat{(d,(P))} = 90^\circ$
- ***Trường hợp 2.*** d không vuông góc với (P). Khi đó ta làm như sau:

» ***Bước 1.*** Tìm $d \cap (P) = \{O\}$.

» ***Bước 2.*** Trên d lấy điểm A khác O.

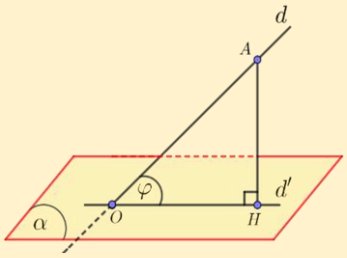
Tìm hình chiếu H của A lên (α).

Ta chọn điểm A trên d thỏa: $A \in \Delta$ vuông góc với (α).

(Khi đó hình chiếu của A là giao điểm của Δ và (α)).

» ***Bước 3.*** Suy ra $\left(\widehat{d,(P)}\right) = \left(\widehat{AI,HI}\right) = \widehat{AIH} = \varphi$.

Chú ý: $0 \le (d;(P)) \le 90^\circ$



Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm hình chiếu của:

(1) SC, SB, SO lên mặt phẳng $(ABCD)$.

(2) AC, SC, SD lên mặt phẳng (SAB).

(3) SB, DC lên mặt phẳng (SAC)

(4) SA, AC lên mặt phẳng (SCD).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, ABC là tam giác vuông cân tại B. Cho độ dài các cạnh $SA = AB = a$. Xác định và tính:

(1) Góc giữa SB và (ABC).

(2) Góc giữa SC và (SAB).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $SO \perp (ABCD)$. Xác định:

(1) Góc giữa SA và $(ABCD)$.

(2) Góc giữa SA và (SBD).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 1.4.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. ΔABC đều cạnh a. Tính

(1) Góc giữa đường thẳng SB và (ABC) (2) Góc giữa đường thẳng SC và (SAB)

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.5.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc giữa SC và (SAB)

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 1.6.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, có $AB=a;BC=a\sqrt{3}$. Biết $SA\perp(ABC)$, SB tạo với đáy một góc $60°$ và H là trung điểm của BC.

(1) Tính cosin góc giữa SC và mặt phẳng (ABC).

(2) Tính cosin góc giữa SH và mặt phẳng (ABC).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.7.

Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA\perp(ABC)$, $AB=a,SA=a\sqrt{3}$.

(1) Tính góc giữa đường thẳng SC và (ABC).

(2) Gọi H,K lần lượt là đường cao của $\Delta SAB,\Delta SAC$. Tính góc giữa đường thẳng AK và (SBC).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Góc nhị diện

Phương pháp

Định nghĩa: Cho hai nửa mặt (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d.

Hình tạo bởi (P_1), (Q_1) và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1)

Kí hiệu $[P_1,d,Q_1]$.

Cách xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng $(P)\&(Q)$, ta thực hiện theo các bước:

» ***Bước 1.*** Xác định giao tuyến $a=(P)\cap(Q)$.

» ***Bước 2.*** Tìm $Ox\subset(P):Ox\perp a$ và $Oy\subset(Q):Oy\perp a$.

» ***Bước 3.*** Kết luận $[P;a;Q]$

Chú ý:

(1) Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ 0° đến 180°.

(2) Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90°.

(3) Đối với hai điểm M,N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $[M,a,N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M,N.

(4) Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện lại cũng là góc nhị diện vuông.

Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Xác định góc phẳng của góc nhị diện $[S,BC,A]$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy $ABCD$. Xác định góc phẳng của góc nhị diện $[S,BD,A]$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Tính góc phẳng nhị diện $\left[B,SA,C\right]$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2.4.

Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=AD$ và $BC=BD$. Gọi I là trung điểm của CD.
Xác định góc phẳng nhị diện $\left[A,CD,B\right]$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 2.5.

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a.
Tính cosin số đo góc nhị diện $\left[S,CD,A\right]$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2.6.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp\left(ABCD\right)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC=a$
Tính số đo của góc nhị diện $\left[S,DA,B\right]$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 2.7.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng a, $AC = a, SA = \frac{1}{2}a$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC.

(1) Tính số đo của các góc nhị diện $[B,SA,D]; [S,BD,A]; [S,BD,C]$.

(2) Chứng minh rằng $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B,SC,D]$.

Lời giải

TOÁN TỪ TÂM

Ví dụ 2.8.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB=SB=a$, $SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính số đo của góc nhị diện $[B,SA,D]$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2.9.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo góc nhị diện $[A',B'D,C']$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2.10

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SBC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, biết α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) và $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{26}}{13}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S,AC,B]$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Nếu A là một điểm không thuộc mặt phẳng (P) và A' là hình chiếu của A trên (P) thì

A. Đường thẳng AA' nằm trên mặt phẳng (P).

B. Đường thẳng AA' vuông góc với mặt phẳng (P).

C. Đường thẳng AA' song song với mặt phẳng (P).

D. Đường thẳng AA' không cắt mặt phẳng (P).

» Câu 2. Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì hình chiếu của a trên (P) là

A. Đường thẳng a' song song với a.

B. Đường thẳng a' vuông góc với a.

C. Đường thẳng a' nằm trên mặt phẳng (P).

D. Là giao điểm H của đường thẳng a với mặt phẳng (P).

» Câu 3. Cho đường thẳng a cắt mặt phẳng (P) tại điểm A và đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P). Trên đường thẳng a lấy điểm M khác A. Gọi H là hình chiếu của M trên (P). Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

A. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên (P) là đường thẳng AH.

B. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên (P) là đường thẳng đi qua M.

C. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên (P) là đường thẳng đi qua H và song song với a.

D. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên (P) là đường thẳng đi qua H và vuông góc với a.

» Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

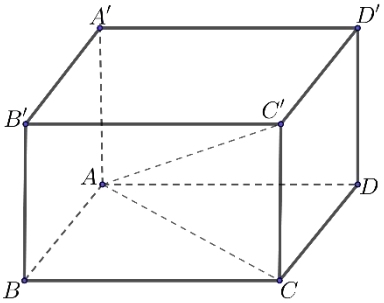
A. Hình chiếu vuông góc của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng song song.

B. Hình chiếu vuông góc của một hình bình hành là một hình bình hành.

C. Phép chiếu vuông góc biến một tam giác thành một tam giác nếu mặt phẳng chứa tam giác không song song với phương chiếu.

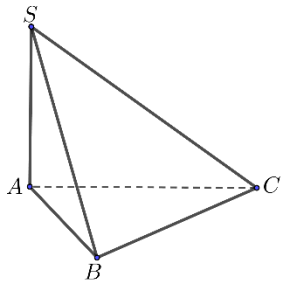
D. Phép chiếu vuông góc không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

» Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (*tham khảo hình vẽ*). Hình chiếu vuông góc của điểm C' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm



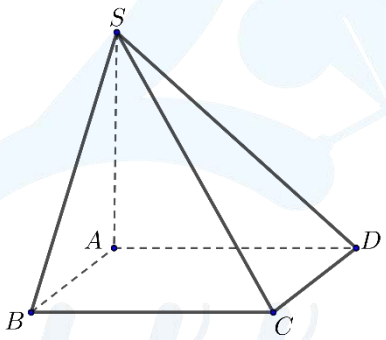
A. C. **B.** A. **C.** D. **D.** B.

» Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), (*tham khảo hình vẽ*). Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SB trên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng



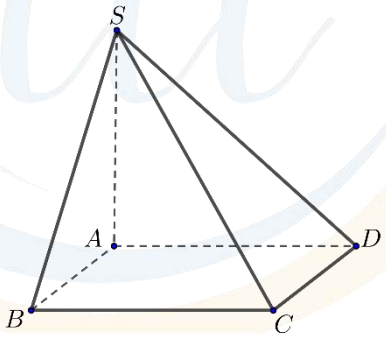
A. BC **B.** AB. **C.** AC. **D.** SA.

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy (*tham khảo hình vẽ*). Hình chiếu vuông góc của tam giác ΔSCD mặt phẳng $(ABCD)$ là



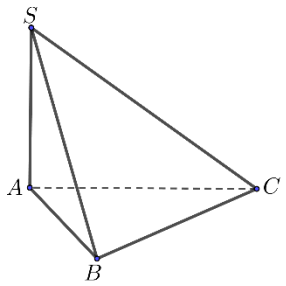
A. ΔABC **B.** ΔACD. **C.** ΔBCD. **D.** ΔABD.

» Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh, SA vuông góc với mặt phẳng đáy (*tham khảo hình vẽ*). Góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ là góc nào sau đây?



A. SAC **B.** CSA **C.** SCA **D.** ABC

» Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB=a\sqrt{2}$ (*tham khảo hình vẽ*). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

» Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Góc phẳng nhị diện $[S,AB,C]$ là SBC.

B. Góc phẳng nhị diện $[D,SA,C]$ là DAC.

C. Góc phẳng nhị diện $[S,AC,B]$ là SOB.

D. Góc phẳng nhị diện $[D,SA,B]$ là BSD.

» Câu 11. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết đáy $ABCD$ là hình vuông. Xác định góc giữa $A'C$ và $(ABCD)$.

A. $A'CA$. **B.** $A'CA$. **C.** $A'AD$. **D.** $CA'A$.

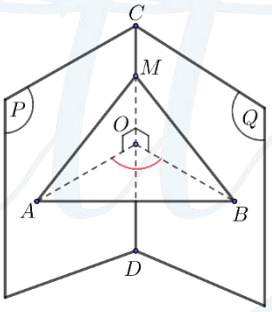
» Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ như hình vẽ. Biết $SA\perp(ABC)$, H là điểm thuộc đoạn thẳng BC. Xác định góc nhị diện $[H,SA,B]$.

A. HAB. **B.** HBA. **C.** CHA. **D.** CAH.

» Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và . Góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SAC)

A. ACD. **B.** CBA. **C.** DAC. **D.** CAS.

» Câu 14. Cho hai mặt phẳng $(P),(Q)$ có giao tuyến là đường thẳng CD. Điểm $A\in(P);B\in(Q)$ và AO,BO cùng vuông góc với CD. M là một điểm bất kì thuộc CD $(M\neq O)$. Xác định góc nhị diện $[A,CD,B]$



A. AOB. **B.** AMO. **C.** AMB. **D.** OAB.

» Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $2a$, $SA=a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Số đo của góc nhị diện $[S,BD,A]$?

A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

» Câu 16. Cho hình chóp $O.ABC$ có OA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $OA=\dfrac{3a}{2}$, tam giác ABC đều cạnh bằng a. Gọi H là trung điểm BC. Góc giữa đường thẳng OH và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

» Câu 17. Khẳng định nào sau đây đúng?

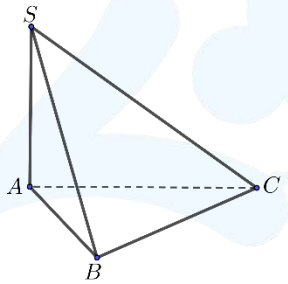
A. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

B. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b song song với hình chiếu a' của a trên (P).

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

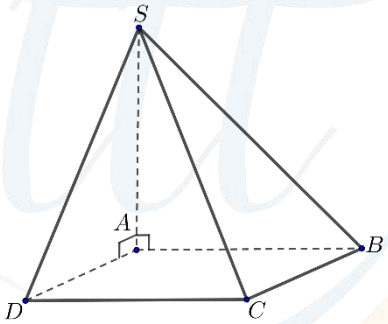
D. Cho đường thẳng a tùy ý và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

» Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B (*tham khảo hình vẽ*). Đường thẳng SB vuông góc với đường thẳng nào sau đây?



A. SC. **B.** BC. **C.** AC. **D.** SA.

» Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $BD \perp SC$. **B.** $BD \perp SD$. **C.** $AD \perp SD$. **D.** $AD \perp SC$.

» Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại O, $SO \perp (ABCD)$, tam giác SAC là tam giác đều. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Xác định góc nhị diện $[M,SO,D]$.

A. MOD. **B.** SOM. **C.** SOD. **D.** MOA.

» Câu 21. Một chiếc máy bay cất cánh từ một đường băng và giữ vận tốc không đổi với độ lớn $240\,\text{km/h}$ trong suốt 2 phút đầu kể từ khi cất cánh. Đường bay lên là một đường thẳng tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc $30°$. Hỏi sau thời gian 1 phút kể từ lúc cất cánh, máy bay đạt độ cao bao nhiêu km so với mặt đất?

Chú ý: Độ cao của máy bay so với mặt đất là khoảng cách từ máy bay (coi là một điểm) đến hình chiếu của nó trên mặt đất.

A. $2\,\text{km}$. **B.** $2{,}5\,\text{km}$. **C.** $4\,\text{km}$. **D.** $4{,}5\,\text{km}$.

» Câu 22. Một con diều được thả dây căng, tạo với mặt đất một góc $60°$. Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài 10 m. Hỏi con diều cách mặt đất bao nhiêu centimét (lấy

giá trị nguyên gần đúng)?

A. $866(\text{cm})$. **B.** $1154(\text{cm})$. **C.** $1000(\text{cm})$. **D.** $87(\text{cm})$.

» Câu 23. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB=4a$, $AD=3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Tính góc nhị diện $[S,BC,O]$

A. $\alpha\approx 75°46'$. **B.** $\alpha\approx 71°21'$. **C.** $\alpha\approx 68°31'$. **D.** $\alpha\approx 65°21'$.

» Câu 24. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB=OC=a\sqrt{6}$, $OA=a$. Tính góc nhị diện $[A,BC,O]$

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

» Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin\alpha$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 26. Cho hình chóp $SABCD$, $ABCD$ là hình vuông có tâm O và $SA=SB=SC=SD$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm O.		
(b)	Hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$ là SO.		
(c)	$BD\perp SA$		
(d)	Hình chiếu vuông góc của ΔSOB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là ΔOBC.		

» Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA=SC$ và $SB=SD$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình chiếu vuông góc của điểm S lên $(ABCD)$ là điểm O.		
(b)	Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SO lên $(ABCD)$ là điểm O.		
(c)	Hình chiếu vuông góc của ΔSAB lên $(ABCD)$ là ΔOAB.		
(d)	Hình chiếu vuông góc của ΔBCD lên (SBD) là ΔSBD.		

» Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa đường thẳng AE và mặt phẳng (SBC) bằng $90°$.		
(b)	Góc giữa đường thẳng AF và mặt phẳng (SCD) bằng $60°$.		
(c)	Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng $45°$.		
(d)	Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (AEF) bằng $30°$.		

» Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$		
(b)	$(SB,(ABCD))\approx 54,75^\circ$		
(c)	$(SC,(ABCD))=45^\circ$		

(d)	$(SC,(SAB))=60^\circ$.		

» **Câu 30.** Cho tứ diện $ABCD$ có AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau. Biết rằng $AB=AC=a, AD=a\sqrt{3}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$AC\perp(ABD)$		
(b)	$(CD,(ABD))=30^\circ$		
(c)	Góc phẳng nhị diện $[A,BC,D]\approx 87,79^\circ$		
(d)	Góc phẳng nhị diện $[C,AB,D]=90^\circ$		

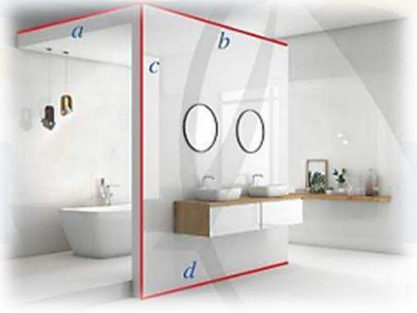
» **Câu 31.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SO\perp(ABC)$		
(b)	$(SA,(ABC))=(SA,OA)$		
(c)	$(SA,(ABC))=60^\circ$		
(d)	$(SM,(ABC))\approx 70,9^\circ$.		

» **Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số đo của góc nhị diện $[S,AB,D]$ bằng số đo góc SDA.		
(b)	Số đo của góc nhị diện $[S,AD,B]$ bằng $90°$.		
(c)	Số đo của góc nhị diện $[S,BD,C]$ bằng số đo của góc SCO.		
(d)	Số đo của góc nhị diện $[S,BD,C]$ bằng $135°$.		

» **Câu 33.** Cho hình ảnh thiết kế phòng vệ sinh của một biệt thự.

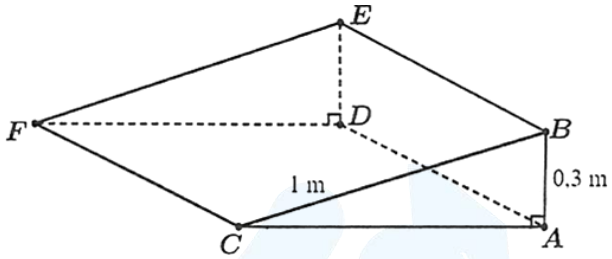


	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi đó đường thẳng c vuông góc với đường thẳng a.		
(b)	Khi đó đường thẳng c vuông góc với đường thẳng b.		
(c)	Đường thẳng a không vuông góc với đường thẳng d.		
(d)	Khi đó đường thẳng c vuông góc với $\text{mp}(a;b)$.		

» **Câu 34.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC\cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $3a$. Khi đó:

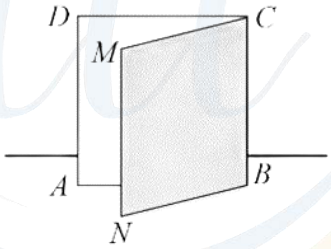
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Gọi M là trung điểm $A'B'$, ta có $C'M = a\sqrt{2}$		
(b)	Góc phẳng nhị diện $[C, A'B', C']$ bằng 60°		
(c)	Gọi K là trung điểm AB, M là trung điểm $A'B'$, khi đó: $A'B' \perp MK$		
(d)	Góc phẳng nhị diện $[A, A'B', C]$ bằng 30°		

» **Câu 35.** Một tấm cầu dốc kê bậc thềm được làm bằng cao su như hình vẽ sau. Biết $BCFE$ là hình vuông có cạnh bằng $1m$ và $AB = 0,3m$. Khi đó:



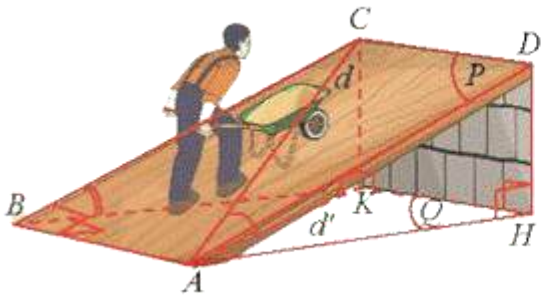
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin BCA = 0,5$		
(b)	$(BC, (ACFD)) \approx 17,46^\circ$		
(c)	$BF = \sqrt{2}\,m$		
(d)	$(BF, (ACFD)) \approx 15,25^\circ$		

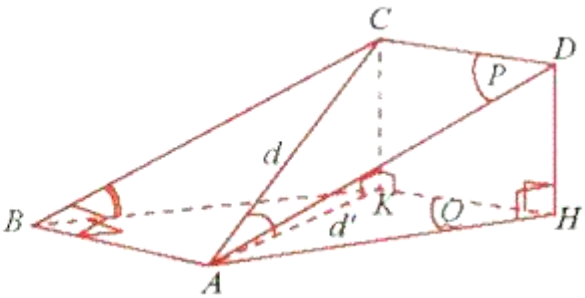
» **Câu 36.** Hình dưới đây minh họa một cánh cửa và khung cửa. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$ ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Chiều rộng BN của cửa là $1,2\,\text{m}$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa đường thẳng MN và mặt sàn là $90°$		
(b)	Số đo của góc nhị diện $[A, BC, N]$ bằng số đo góc nhị diện $[A, BC, M]$		
(c)	Biết khoảng cách AN là $1,2\,\text{m}$, khi đó góc mở cửa là $60°$		
(d)	Khi số đo góc mở cửa là $30°$, thì khoảng cách DM xấp xỉ $0,38\,\text{m}$ (*làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2*).		

» **Câu 37.** Trong lao động, mặt phẳng nghiêng thường được sử dụng vì tính tiện dụng của nó. Hình vẽ sau minh họa một mặt phẳng nghiêng dung để vận chuyển đồ, có độ nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang là $30°$, vận chuyển lên mặt phẳng có độ cao 1m. Quan sát hình vẽ và xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:





	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	CAK được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (Q)		
(b)	CAK là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[C,AB,K]$		
(c)	Mặt phẳng nghiêng có độ dài khoảng $1,73\text{m}$		
(d)	Biết chiều rộng của mặt phẳng nghiêng đang sử dụng là 1m, khi đó sin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (Q) là $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.		

» Câu 38. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi đó $BP \perp SC$		
(b)	Khi đó $BP \perp NM$		
(c)	Khi đó $BP \perp SA$		
(d)	Khi đó $BP \perp MA$		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên hình có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với BC ?

Điền đáp số: ☐

» Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a Biết $SA=2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc nhị diện $[S;BC;A]$. Tính $a+b$ biết $\tan\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{b}}(a,b\in\mathbb{N})$.

Điền đáp số: ☐

» Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi K hình chiếu vuông góc của điểm C trên mặt phẳng (SBD). Biết rằng $SA=AC=2\sqrt{5}$. Tính độ dài CK.

Điền đáp số: ☐

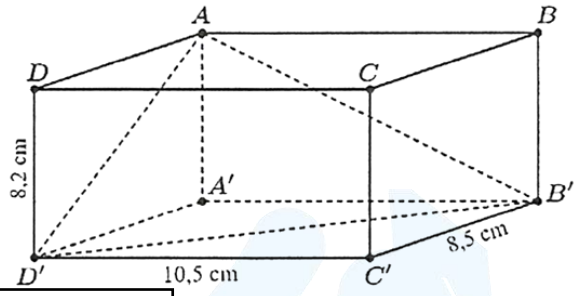
» Câu 42. Kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao $98m$ và cạnh đáy $180m$. Số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp đó bằng bao nhiêu độ? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số: ☐

» Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa $A'C$ với mặt phẳng $(ABCD)$. *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

Điền đáp số:

» Câu 44. Một hộp phấn không bụi có dạng hình hộp chữ nhật, chiều cao hộp phấn bằng $8,2cm$ và đáy của nó có hai kích thước là $8,5cm;10,5cm$ (xem hình vẽ sau). Tìm góc phẳng nhị diện $[A,B'D',A']$ *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*



Điền đáp số:

» Câu 45. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy tâm O, cạnh a và cạnh bên là $2a$. Tính góc phẳng nhị diện $[S,BC,O]$? *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

Điền đáp số:

» Câu 46. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm O cạnh a và cạnh bên là $a\sqrt{7}$. Tính góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng đáy? *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

Điền đáp số:

» Câu 47. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=2a, AA'=3a$. Tính góc phẳng nhị diện $[A',BD,A]$? *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

Điền đáp số:

» Câu 48. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm O cạnh a và cạnh bên là $a\sqrt{7}$. Tính góc phẳng nhị diện $[S,BC,O]$? *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).*

Điền đáp số:

» Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AB. Cạnh bên SB tạo với đáy một góc $60°$. Gọi φ là góc tạo bởi SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{x}}{y}$, trong đó y là số nguyên dương nhỏ hơn 10. Tính giá trị của $S=x+y$.

Điền đáp số:

» Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân $(AD//BC)$ và $BC=2$, $AB=AD=CD=1$. Mặt bên SBC là tam giác đều. Tính độ dài SD để SD vuông góc với AC.

Điền đáp số:

» Câu 51. Một khay đá viên gồm 6 ngăn nhỏ có dạng là các hình chóp cụt với miệng và đáy là hình vuông (xem hình, kích thước của miệng lớn hơn của đáy).



Ta đo được độ dài cạnh đáynhỏ, cạnh đáy lớn lần lượt bằng 1 cm, 3 cm và chiều cao mặt bên bằng $\sqrt{2}$ cm. Tính cosin góc giữa đường chéo của viên đá với cạnh đáy của viên đá (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)

✍ **Điền đáp số:** ☐

---------- Hết ----------

TOÁN TỪ TÂM

Chương 08
Bài 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A Lý thuyết

1. Góc giữa 2 đường thẳng

Định nghĩa:

Góc giữa hai đường thẳng a,b trong không gian, kí hiệu (a,b), là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

Nhận xét

(1) Xác định góc giữa đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O; song song với đường thẳng còn lại

(2) Với hai đường thẳng a và b bất kì: $0^\circ \le (a,b) \le 90^\circ$.

⌘ Để tính số đo của góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ta có thể thực hiện tính thông qua góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

- *Bước 1.* Sử dụng tính chất sau: $\begin{cases} (\widehat{d_1,d_2}) = \alpha \\ d_2 // d_3 \end{cases} \Rightarrow (\widehat{d_1,d_2}) = (\widehat{d_1,d_3}) = \alpha$
- *Bước 2.* Áp dụng định lí côsin trong tam giác để xác định góc.

2. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

Định nghĩa:

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Kí hiệu $a \perp b$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng

Phương pháp

» $(a,b)=(a',b')$ với $a'//a$ và $b'//b$

» $a\perp b\Leftrightarrow (a,b)=90^\circ$

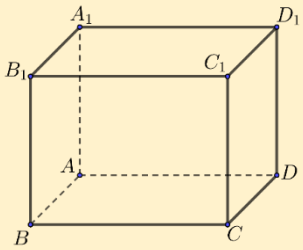
» $\begin{cases} b//c \\ a\perp c \end{cases}\Rightarrow a\perp b$

Ví dụ 1.1.

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ (hình vẽ bên).
Xác định góc giữa các cặp đường thẳng

(1) A_1C_1 và AB

(2) B_1C và BD.

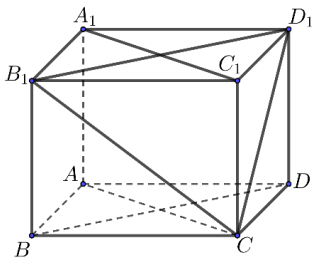


Lời giải

(1) A_1C_1 và AB

Vì $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình lập phương

Nên $A_1C_1//AC\Rightarrow (A_1C_1,AB)=(AC,AB)=\widehat{BAC}=45^\circ$



(2) B_1C và BD.

Ta có: $B_1D_1//BD\Rightarrow (B_1C,BD)=(B_1C,B_1D_1)=\widehat{CB_1D_1}=60^\circ$,

vì ΔCB_1D_1 *đều.*

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $SA=AB$ và $SA\perp BC$.
Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

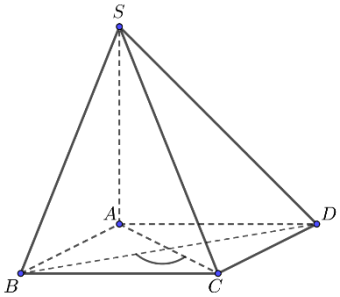
Lời giải

• Ta có: $\left.\begin{matrix} BC//AD \\ SA\perp BC \end{matrix}\right\}\Rightarrow \widehat{SAD}=90^\circ$

$\rightarrow (\widehat{SD,BC})=(\widehat{SD,AD})=\widehat{SDA}$

• ΔSAD vuông tại A có:

$\tan\widehat{SDA}=\dfrac{SA}{AD}=1\Rightarrow \widehat{SDA}=45^\circ\Rightarrow (\widehat{SD,BC})=45^\circ$.

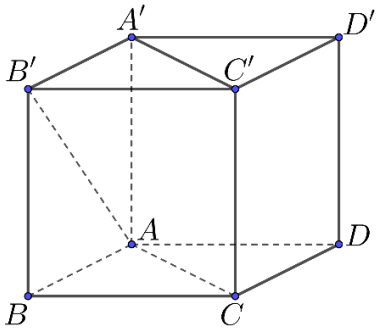


Ví dụ 1.3.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa 2 đường thẳng:

(1) AB và $B'C'$ (2) AC và $B'C'$ (3) $A'C'$ và $B'C$

Lời giải



(1) AB và $B'C'$

Ta có $AB//A'B'$ mà $\left(\widehat{A'B',B'C'}\right)=90°$ nên $\left(\widehat{AB,B'C'}\right)=90°$

(2) AC và $B'C'$

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\left(\widehat{AC,BC}\right)=45°$.

Ta có $BC//B'C'$ nên $\left(\widehat{AC,B'C'}\right)=45°$

(3) $A'C'$ và $B'C$

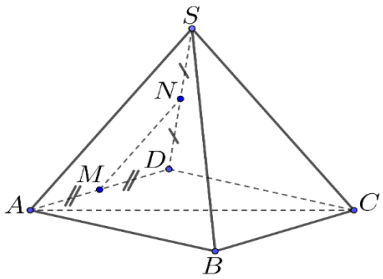
Ta có $AC//A'C'$ và $\Delta ACB'$ là Δ đều

Do đó $\left(\widehat{A'C',B'C}\right)=\left(\widehat{AC,B'C}\right)=60°$.

Ví dụ 1.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc $(MN,\ SC)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



- Ta có: $MN//SA\Rightarrow\left(MN,SC\right)=\left(SA,SC\right)$.
- Lại có: $AC=a\sqrt{2}$.
- Xét ΔSAC, nhận thấy: $AC^2=SA^2+SC^2$.
- Theo định lí Pitago đảo, ΔSAC vuông tại S.

$\longrightarrow\widehat{ASC}=90^0$ hay $\left(\widehat{MN,SC}\right)=\left(\widehat{SA,SC}\right)=90^0$.

Ví dụ 1.5.

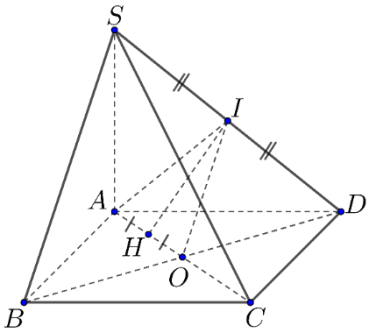
Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Khi đó, cosin góc giữa SB và AC bằng

Lời giải

Gọi I là trung điểm của SD

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của ΔSBD

$$\Rightarrow \begin{cases} OI // SB \\ OI = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2+AB^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3a^2+a^2}}{2} = a \end{cases}$$



Vì $OI // SB \Rightarrow \widehat{(SB,AC)} = \widehat{(OI,AC)} = \widehat{AOI}$

Ta có: $AI = \dfrac{SD}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2+AD^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3a^2+a^2}}{2} = a$

$\Rightarrow AI = OI \Rightarrow \Delta AOI$ cân tại I.

Gọi H là trung điểm của $OA \Rightarrow IH \perp OA$. Và $OH = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

Xét ΔOHI, ta có: $\cos\widehat{HOI} = \dfrac{OH}{OI} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \longrightarrow \cos\widehat{(SB,AC)} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Ví dụ 1.6.

Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120°$ và cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC

Lời giải

Ta có $BC // B'C' \Rightarrow \widehat{(AB',BC)} = \widehat{(AB',B'C')}$

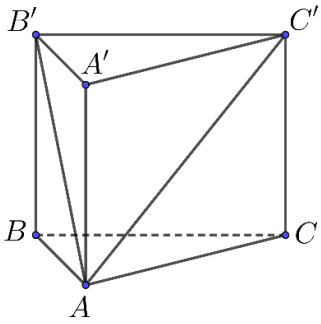
Xét $\Delta AB'C'$ có $AB' = AC' = \sqrt{AB^2+BB'^2} = a\sqrt{3}$

Áp dụng định lý cosin cho ΔABC, ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

$= a^2 + a^2 - 2.a.a.\cos 120° = 3a^2 \Rightarrow BC = B'C' = a\sqrt{3}$

$\rightarrow \Delta AB'C'$ đều, do đó $\widehat{(AB',BC)} = \widehat{(AB',B'C')} = \widehat{AB'C'} = 60°$



Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp

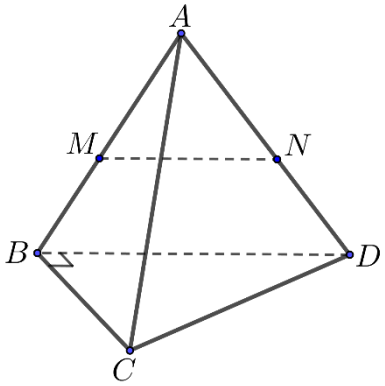
» **Dùng định nghĩa:** *Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$. Kí hiệu: $a \perp b$.*

» **Dùng định lí:** $\begin{cases} b // c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$

Ví dụ 2.1.

Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{CBD} = 90^0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Chứng minh rằng MN vuông góc với BC.

Lời giải



Xét tam giác ABD có M, N tương ứng là trung điểm của AB, AD.

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của ΔABD.

$\Rightarrow MN // BD$ mà $BD \perp BC \left(\widehat{CBD} = 90°\right)$.

$\Rightarrow MN \perp BC$.

Ví dụ 2.2.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC.

(1) Chứng minh: $MN \perp CD$.

(2) Tính cosin của góc giữa MC và MD.

(3) Gọi E là trung điểm của AC. Chứng minh: $QE \perp PE$.

(4) Chứng minh: $AB \perp CD$.

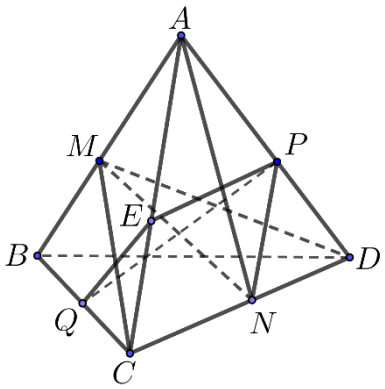
Lời giải

(1) *Chứng minh:* $MN \perp CD$.

Ta có: $MC = MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta MCD$ cân tại M.

Mà: N là trung điểm của CD

Nên: $MN \perp CD$.



(2) *Tính cosin của góc giữa* MC *và* MD.

Tính cosin của góc giữa MC và MD.

Ta có: $\cos(MC, MD) = \cos\widehat{CMD} = \dfrac{MC^2 + MD^2 - CD^2}{2MC \cdot MD}$

$$\Rightarrow \cos(MC, MD) = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

(3) *Gọi* E *là trung điểm của* AC. *Chứng minh:* $QE \perp PE$.

Tương tự câu (1), ta có $QP \perp AD$.

$$PQ^2 = QD^2 - PD^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Ta thấy: PE, QE lần lượt là đường trung bình của ΔACD và ΔABC .

Nên: $QE = PE = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra: $QE^2 + PE^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2} = PQ^2$.

$\Rightarrow \Delta PQE$ vuông tại E.

Hay: $PE \perp QE$.

(4) *Chứng minh:* $AB \perp CD$.

Ta có: $\begin{cases} AB // QE \\ CD // PE \\ PE \perp QE \end{cases} \Rightarrow AB \perp CD$.

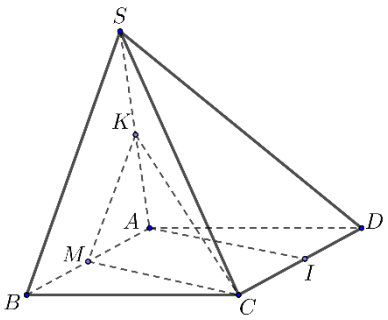
Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp AB$, $SA \perp AD$, $SA \perp AC$ và $SA = 2a$.

(1) Chứng minh: $SA \perp BC$, $SA \perp CD$.

(2) Gọi I là trung điểm của CD. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AI.

Lời giải



(1) *Chứng minh:* $SA \perp BC$, $SA \perp CD$.

Ta có: $\begin{cases} SA \perp AD \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} SA \perp AB \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow SA \perp CD$.

(2) *Gọi* I *là trung điểm của* CD. *Tính cosin góc giữa hai đường thẳng* SB *và* AI.

Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AB và SA thì MK là đường trung bình ΔSAB.

Khi đó $MK // SB$.

Ta thấy: Tứ giác $AICM$ là hình bình hành

Nên: $MC // AI$.

Suy ra $(SB, AI) = (MK, CM)$.

Ta có: $MK = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AB^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tương tự: $MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \dfrac{3a}{2}$ và $KC = \sqrt{KA^2 + AC^2} = 2a$.

Khi đó : $\cos \widehat{KMC} = \dfrac{KM^2 + MC^2 - KC^2}{2 \cdot KM \cdot MC} = \dfrac{\frac{5}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2 - 4a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3a}{2}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{15}$.

$\Rightarrow \cos(SB, AI) = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}$.

Chương 08
Bài 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong không gian, góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' thỏa mãn

A. Cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.
B. Lần lượt song song hoặc trùng với a và b.
C. Cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.
D. Lần lượt song song với a và b.

Lời giải

Chọn A

Do định nghĩa: Trong không gian, góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

» Câu 2. Trong không gian, hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng

A. 90^0. **B.** 45^0. **C.** 0^0. **D.** 180^0.

Lời giải

Chọn A

Do định nghĩa: Trong không gian hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

» Câu 3. Trong không gian, cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau khi đó

A. Hai đường thẳng a và b có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.
B. Hai đường thẳng a và b luôn cắt nhau.
C. Hai đường thẳng a và b chéo nhau.
D. Hai đường thẳng a và b song song nhau.

Lời giải

Chọn A

Do tính chất: Trong không gian hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau thì có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

» Câu 4. Trong không gian cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, nếu đường thẳng c vuông góc với đường thẳng a thì

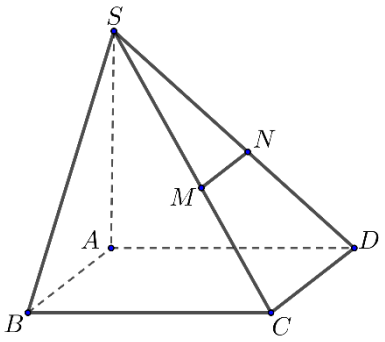
A. Đường thẳng c vuông góc với đường thẳng b.
B. Đường thẳng c song song với đường thẳng b.
C. Đường thẳng c song song hoặc trùng với đường thẳng b.
D. Đường thẳng c cắt đường thẳng b tại một điểm.

Lời giải

Chọn A

Do tính chất: Trong không gian cho hai đường thẳng song song với nhau, nếu đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc đường thẳng kia.

» Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD (tham khảo hình vẽ).



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $MN \perp AC$. **B.** $MN \perp BD$. **C.** $MN \perp AB$. **D.** $MN \perp BC$.

Lời giải

Chọn D

Ta có MN là đường trung bình của tam giác SCD. Suy ra $MN//CD$

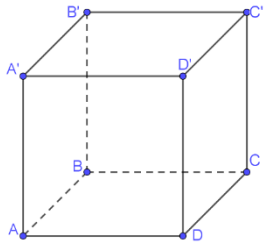
Ta có $\begin{cases} MN//CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow MN \perp BC$

» Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC'?

A. $A'D$. **B.** AC. **C.** BB'. **D.** AD'.

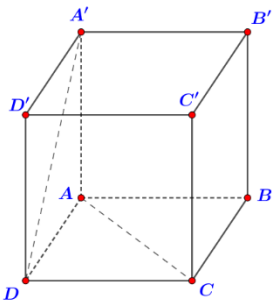
Lời giải

Chọn A



Ta có: $A'D//B'C$, $B'C \perp BC' \Rightarrow A'D \perp BC'$

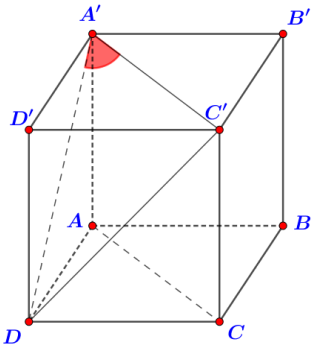
» Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\widehat{(AC, A'D)} = \widehat{(A'C', A'D)} = \widehat{DA'C'} = 60°$.

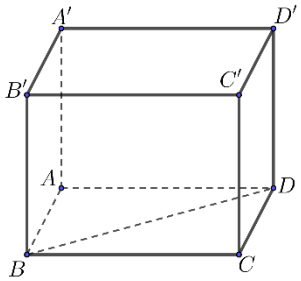
Vì $A'D = A'C' = C'D$.

» Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với BD.

A. CC'. **B.** $B'C'$. **C.** AB. **D.** $B'C$.

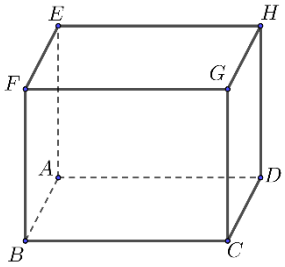
Lời giải

Chọn A



Đường thẳng vuông góc với BD là CC'.

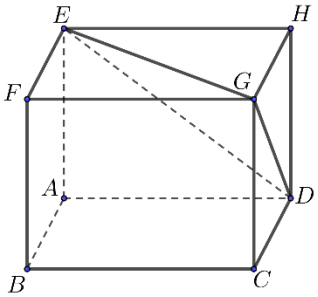
» Câu 9. Cho hình lăng trụ $ABCD.EFGH$ có 6 mặt đều là hình vuông. Tính góc giữa hai đường thẳng EG và GD.



A. 83°. **B.** 90°. **C.** 50°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn D



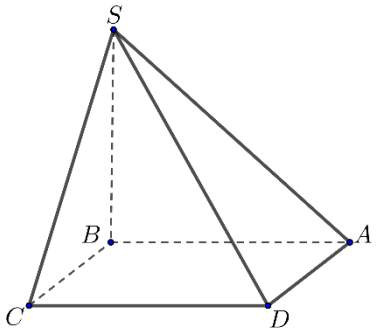
Xét ΔEGD có $EG=GD=ED$ (đều là đường chéo của các hình vuông bằng nhau)
Nên ΔEGD đều
Vì ΔEGD đều nên $\left(EG,GD\right)=\widehat{EGD}=60^\circ$.

» Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $BC=a, BA=4a, SB=\sqrt{5}a$. Biết $SB\perp BC$ và $SB\perp BA$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và DA.

A. $69,61^\circ$. **B.** $65,91^\circ$. **C.** $82,71^\circ$. **D.** $77,71^\circ$.

Lời giải

Chọn B



Vì $AD//BC\Rightarrow\left(SC,DA\right)=\left(SC,BC\right)=\widehat{SCB}$ (vì ΔSBC vuông tại B)

$\tan\widehat{SCB}=\dfrac{SB}{BC}=\dfrac{\sqrt{5}a}{a}=\sqrt{5}$.

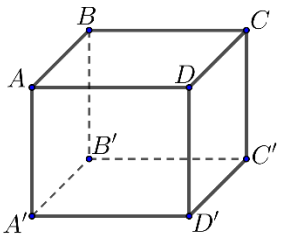
Suy ra $\left(SC,DA\right)=\widehat{SCB}=65,91^\circ$.

» Câu 11. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. BB'. **B.** $B'D'$. **C.** AD'. **D.** $B'D$.

Lời giải

Chọn A



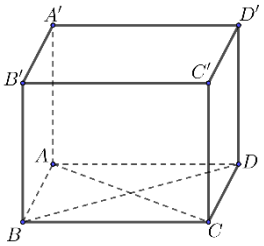
Do $\left(\widehat{AD,BB'}\right)=\left(\widehat{AD,DD'}\right)=\widehat{ADD'}=90°$

» Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là hình thoi. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $AB\perp AD$. **B.** $BD\perp A'C'$. **C.** $DD'\perp DC$. **D.** $BD\perp AB$.

Lời giải

Chọn B



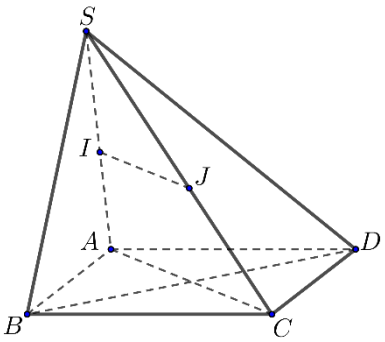
Do $\left(\widehat{BD, A'C'}\right) = \left(\widehat{BD, AC}\right) = 90°$ (Vì BD, AC là hai đường chéo của hình thoi)

» Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $AB \perp AD$. **B.** $IJ \perp SA$. **C.** $IJ \perp BD$. **D.** $BD \perp AB$.

Lời giải

Chọn C



Do I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC

$\Rightarrow IJ // AC$

Mà $AC \perp BD$ (Vì BD, AC là hai đường chéo của hình thoi)

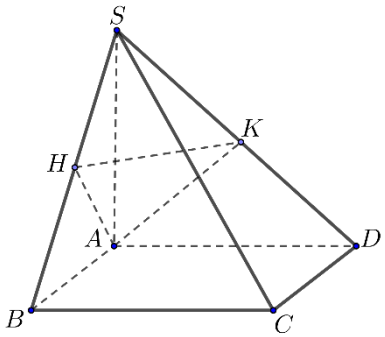
$\Rightarrow IJ \perp BD$

» Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{SAB} = \widehat{SAD} = 90°$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD. Đường thẳng HK vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. AC. **B.** SB. **C.** SD. **D.** AB.

Lời giải

Chọn A



Ta có : $\widehat{SAB} = \widehat{SAD} = 90°$

$AB = AD$ (Vì $ABCD$ là hình thoi)

SA cạnh chung

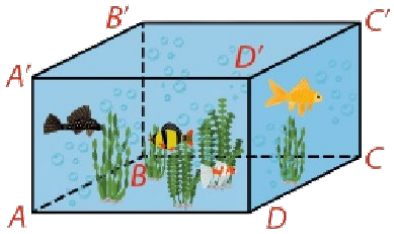
$\Rightarrow \Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow AH = AK,\ SB = SD,\ SH = SK$

Theo định lí Thales $\frac{SH}{SB}=\frac{SK}{SD}\Rightarrow HK//BD$

Mà $AC\perp BD$ (Vì BD,AC là hai đường chéo của hình thoi)

$\Rightarrow HK\perp AC$

» Câu 15. Ta biết hình hộp chữ nhật có 6 mặt là các hình chữ nhật. Quan sát một bể nuôi cá cảnh hình hộp chữ nhật sau và cho biết góc giữa hai đường thẳng AA' và $C'D'$ bằng góc nào sau đây?



A. $(A'A,AB)$. **B.** $(A'A,AD)$. **C.** $(A'A,AB)$. **D.** $(A'A,AB')$.

Lời giải

Chọn A

Do $D'C'$ song song với AB

Nên góc giữa hai đường thẳng AA' và $C'D'$ bằng góc $(A'A,AB)$

» Câu 16. Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện hoành, quá giang, rui, cột tương ứng được đánh số 1,2,3,4, trong hình sau, những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?



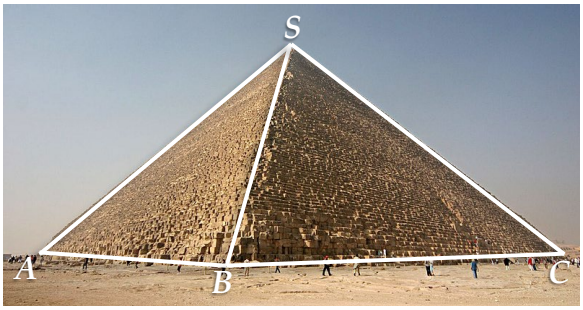
A. $1-4;2-4;1-3$ **B.** $2-4;1-3$ **C.** $1-4;3-4;1-2$ **D.** $1-4,2-4,3-4$

Lời giải

Chọn A

Ta có các cặp đường thẳng vuông góc nhau ở trong hình là 1 và 4, 1 và 3, 2 và 4.

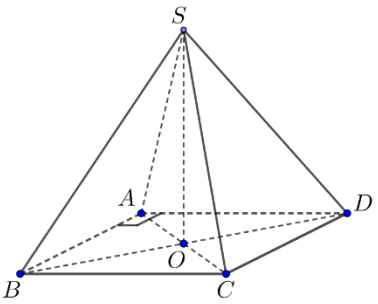
» Câu 17. Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình vuông $ABCD$ có cạnh dài khoảng $230\,m$, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng $219\,m$. Tính gần đúng góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp.



A. $58°19'$. **B.** $61°29'$. **C.** $45°6'$. **D.** $30°7'$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $(SC,AB)=(SC,CD)=\widehat{SCD}$

$\cos(SCD)=\dfrac{219^2+230^2-219^2}{2.219.230}\Rightarrow \widehat{SCD}\approx 58°19'$

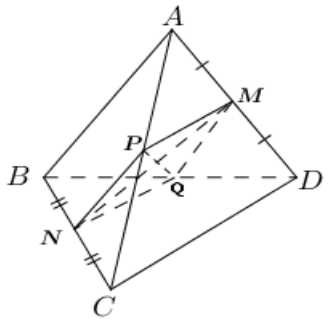
Hay $(SC,AB)\approx 58°19'$

» Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết $MN=\sqrt{3}a$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AC và BD. Khi đó ta có

$\begin{cases} PM//NQ//CD \\ PM=NQ=\dfrac{CD}{2} \end{cases}\Rightarrow PMQN$ là hình bình hành.

Ta cũng có $MQ//NP//AB, MQ=NP=\dfrac{AB}{2}$.

Do $AB=CD=2a\Rightarrow PM=MQ=QN=NP=a$.

Gọi $(\widehat{AB,CD})=\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\left|\cos\left(\widehat{MPN}\right)\right|$.

Áp dụng định lí Côsin ta có

$MN^2 = PM^2 + PN^2 - 2PM.PN.\cos\left(\widehat{MPN}\right)$

$\Leftrightarrow 3a^2 = a^2 + a^2 - 2.a.a.\cos\left(\widehat{MPN}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{MPN}\right) = \dfrac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2.a.a} = \dfrac{-1}{2}$

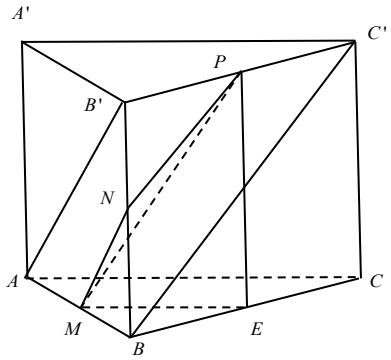
nên $\cos\alpha = \left|\cos\left(\widehat{MPN}\right)\right| = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\widehat{AB, CD}\right) = 60°$

» Câu 19. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N, P, E lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng $AB, BB', B'C', BC$.

Suy ra $MN // AB'$ và $NP // BC'$.

Khi đó góc giữa đường thẳng AB' và BC' là góc giữa hai đường thẳng MN và NP.

Ta có: $MN = NP = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

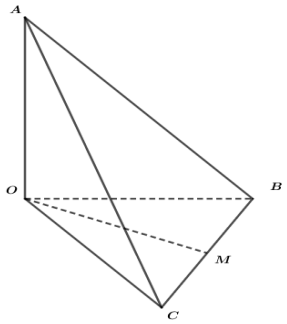
Xét tam giác PEM vuông tại E, $MP^2 = PE^2 + ME^2 = 2a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{9a^2}{4}$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác MNP, ta có

$$\cos MNP = \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2.MN.NP} = \frac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{9a^2}{4}}{2.\dfrac{3a^2}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Do đó góc MNP bằng 120^0 nên góc giữa đường thẳng AB' và BC' bằng 60^0.

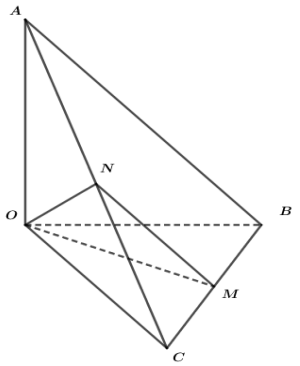
» Câu 20. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng



A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0

Lời giải

Chọn C



Đặt $OA=a$ suy ra $OB=OC=a$ và $AB=BC=AC=a\sqrt{2}$

Gọi N là trung điểm AC ta có $MN//AB$ và $MN=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra góc $\left(\widehat{OM,AB}\right)=\left(\widehat{OM,MN}\right)$. Xét $\widehat{OMN}$

Trong tam giác OMN có $ON=OM=MN=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên OMN là tam giác đều

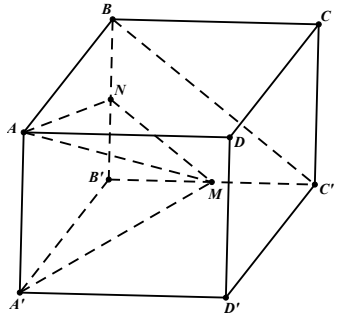
Suy ra $\widehat{OMN}=60^0$. Vậy $\left(\widehat{OM,AB}\right)=\left(\widehat{OM,MN}\right)=60^0$.

» Câu 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$; gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử cạnh của hình lập phương là $a>0$.

Gọi N là trung điểm đoạn thẳng BB'. Khi đó, $MN//BC'$ nên $\left(AM,BC'\right)=\left(AM,MN\right)$.

Xét tam giác $A'B'M$ vuông tại B' ta có: $A'M=\sqrt{A'B'^2+B'M^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác $AA'M$ vuông tại A' ta có: $AM=\sqrt{AA'^2+A'M^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{5a^2}{4}}=\dfrac{3a}{2}$.

Có $AN=A'M=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $MN=\dfrac{BC'}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

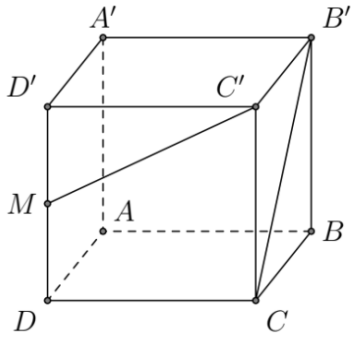
Trong tam giác AMN ta có:

$$\cos\widehat{AMN}=\frac{MA^2+MN^2-AN^2}{2.MA.MN}=\frac{\dfrac{9a^2}{4}+\dfrac{2a^2}{4}-\dfrac{5a^2}{4}}{2.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{6a^2}{4}.\frac{4}{6a^2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\widehat{AMN}=45°$.

Vậy $(AM,BC')=(AM,MN)=\widehat{AMN}=45°$.

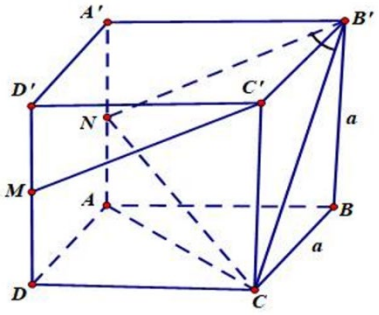
» Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của DD' *(tham khảo hình vẽ)*. Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$



A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của $AA' \Rightarrow B'N//C'M \Rightarrow \widehat{(B'C,C'M)}=\widehat{(B'C,B'N)}$

Xét tam giác $B'NC$ có $B'N=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}; B'C=a\sqrt{2}; NC=\sqrt{2a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{3a}{2}$

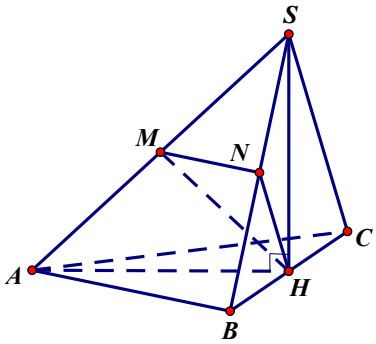
Vậy $\cos\widehat{(B'C,C'M)}=\left|\cos\widehat{NB'C}\right|=\frac{\left|B'N^2+B'C^2-NC^2\right|}{2B'N.B'C}=\frac{a^2}{2.\frac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

» Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=a$, $BC=a\sqrt{2}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AB và SC ta được kết quả:

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



* Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC), theo đầu bài $SA=SB=SC$ và tam giác ΔABC vuông cân tại A ta có H là trung điểm của BC.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB ta có: $\begin{cases} MN \,//\, AB \\ HN \,//\, SC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa AB và SC là góc giữa MN và HN.

Xét tam giác ΔMNH ta có: $MN=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$; $HN=\dfrac{SC}{2}=\dfrac{a}{2}$; $MH=\dfrac{SA}{2}=\dfrac{a}{2}$ (Do ΔSHA vuông tại H)

$\Rightarrow$ tam giác ΔMNH là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{MNH}=60°$. Vậy góc cần tìm là $60°$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 24. Trong không gian, cho hai đường thẳng bất kỳ.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa hai đường thẳng trong không gian là góc giữa 2 đường thẳng cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.		
(b)	Hai đường thẳng vuông góc thì cắt nhau.		
(c)	Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.		
(d)	Nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó song song với nhau.		

Lời giải

(a) Góc giữa hai đường thẳng trong không gian là góc giữa 2 đường thẳng cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Hai đường thẳng vuông góc thì cắt nhau.

Hai đường thẳng vuông góc thì có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

» Chọn SAI.

(c) Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

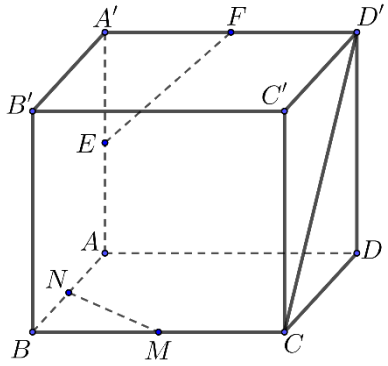
» Chọn ĐÚNG.

(d) Nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó song song với nhau.

Nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chưa kết luận được hai đường thẳng đó song song với nhau như trong hình học phẳng.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 25.** Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (như vẽ bên), gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của $BC, AB, AA', A'D'$.



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Cạnh MN và AA' vuông góc với nhau.		
(b)	Góc giữa MN và CD' bằng góc giữa AC và CD'.		
(c)	Góc giữa EF và CC' bằng góc giữa AD' và CC'.		
(d)	Góc giữa EF và CD' bằng $30°$.		

Lời giải

(a) *Cạnh MN và AA' vuông góc với nhau.*

Ta có: $MN \parallel AC$ (đường trung bình)

Mà $\left(\widehat{AC, AA'}\right) = 90° \Rightarrow \left(\widehat{MN, AA'}\right) = 90°$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Góc giữa MN và CD' bằng góc giữa AC và CD'.*

Ta có: $MN // AC$ (đường trung bình)

Nên góc giữa MN và CD' bằng góc giữa AC và CD'.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Góc giữa EF và CC' bằng góc giữa AD' và CC'.*

Ta có: $EF // AD'$ (đường trung bình)

Nên góc giữa EF và CC' bằng góc giữa AD' và CC'.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Góc giữa EF và CD' bằng $30°$.*

Ta có: $EF // AD'$ (đường trung bình)

Nên góc giữa EF và CD' bằng góc $\left(\widehat{AD', CD'}\right)$.

Xét tam giác ACD' có $AD' = CD' = AC$ (cùng là đường chéo các mặt bên là các hình vuông bằng nhau) nên tam giác ACD' đều.

Vậy $\left(\widehat{AD', CD'}\right) = \widehat{AD'C} = 60°$.

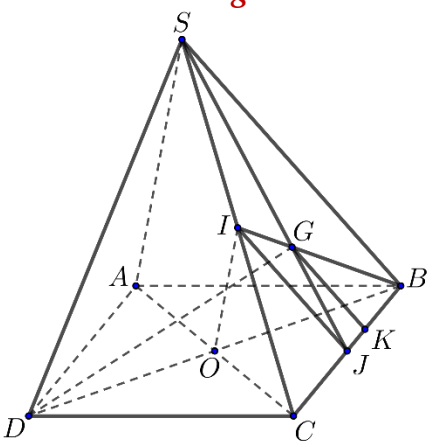
» **Chọn** SAI.

» **Câu 26.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Gọi G là trọng tâm ΔSBC

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa IJ và SA bằng $90°$.		
(b)	Góc giữa IJ với CD bằng $60°$.		
(c)	Cosin của góc giữa BI với SA bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.		
(d)	Cosin của góc giữa DG và SB bằng $\frac{1}{3}$.		

Lời giải



(a) Góc giữa IJ và SA bằng $90°$.

Ta có $IJ // SB \Rightarrow \left(\widehat{IJ,SA}\right) = \left(\widehat{SB,SA}\right) = \widehat{ASB} = 60°$.

» **Chọn** SAI.

(b) Góc giữa IJ với CD bằng $60°$.

Ta có OJ là đường trung bình của ΔBCD nên $OJ // CD \Rightarrow \left(\widehat{IJ,CD}\right) = \left(\widehat{IJ,OJ}\right)$

Xét ΔIOJ có: $\begin{cases} IJ = \frac{SB}{2} = \frac{a}{2} \\ OJ = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2} \\ OI = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2} \end{cases}$

Vậy ΔIOJ đều nên góc giữa IJ và CD bằng $\left(\widehat{IJ,OJ}\right) = \widehat{IJO} = 60°$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Cosin của góc giữa BI với SA bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $OI // SA$ nên $\left(\widehat{BI,SA}\right) = \left(\widehat{BI,OI}\right)$.

Trong ΔIOB, ta có $\cos\widehat{OIB} = \frac{BI^2 + IO^2 - BO^2}{2.BI.OI} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $\cos\left(\widehat{BI,SA}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Cosin của góc giữa DG *và* SB *bằng* $\frac{1}{3}$.

Kẻ $GK//SB$, $K\in BC$. Khi đó góc giữa DG và SB chính là góc giữa DG và GK.

ΔJGK đồng dạng ΔJSB nên ta có: $\frac{GK}{SB}=\frac{JK}{JB}=\frac{JG}{JS}=\frac{1}{3}\Rightarrow GK=\frac{1}{3}a; JK=\frac{1}{3}JB=\frac{1}{3}.\frac{a}{2}=\frac{a}{6}$.

Do đó $CK=CJ+JK=\frac{a}{2}+\frac{a}{6}=\frac{2a}{3}$.

Mà: $DK=\sqrt{DC^2+CK^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}a}{3}$.

Áp dụng định lý cosin trong ΔBDI, ta có:

$$\cos\widehat{DBI}=\frac{BI^2+BD^2-DI^2}{2.DB.BI}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Áp dụng định lý cosin trong ΔBDG, ta có:

$$DG=\sqrt{BD^2+BG^2-2BD.BG.\cos\widehat{DBG}}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2-2.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}}=a.$$

Áp dụng định lý cosin trong ΔKDG, ta có:

$$\cos\widehat{DGK}=\frac{GD^2+GK^2-DK^2}{2.GD.GK}=\frac{a^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{13}a}{3}\right)^2}{2.a.\frac{a}{3}}=-\frac{1}{2}.$$

Suy ra góc giữa hai đường thẳng DG và GK bằng $60°$.

Do đó cosin của góc giữa DG và SB bằng $\frac{1}{2}$.

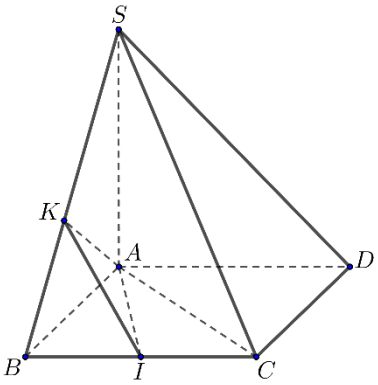
» **Chọn** SAI.

» **Câu 27.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với AB và AD, $SC=a\sqrt{3}$.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SA\perp BC$		
(b)	$SA\perp CD$		
(c)	$BC\perp SB$		
(d)	K là hình chiếu của A lên SB thì $SC\perp AK$		

Lời giải



(a) $SA \perp BC$.

Ta có $BC // AD$ mà $SA \perp AD \Rightarrow SA \perp BC$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $SA \perp CD$.

Ta có $CD // AB$ mà $SA \perp AB \Rightarrow SA \perp CD$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $BC \perp SB$.

Ta có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$, $BC = a$.

Vậy $SC^2 = 3a^2 = SB^2 + BC^2$, $\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B. Vậy $BC \perp SB$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) *K là hình chiếu của A lên SB thì $SC \perp AK$.*

Ta có ΔSAB vuông cân tại A và K là hình chiếu của A lên SB

Nên K là trung điểm SB.

Gọi I là trung điểm BC, khi đó $KI // SC$. Suy ra $(SC, AK) = (KI, AK)$.

Trong ΔAKI, ta có $AK = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $KI = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AI = \sqrt{AB^2 + BI^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $AI^2 = \frac{5a^2}{4} = AK^2 + KI^2$, $\Rightarrow \Delta AKI$ vuông tại K.

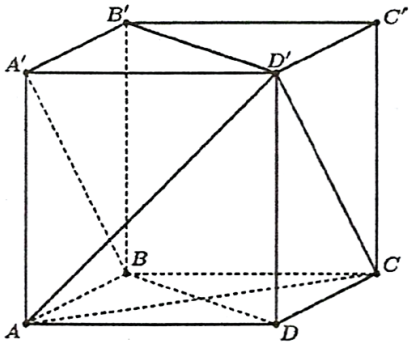
Vậy $KA \perp KI \Rightarrow KA \perp SC$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BD // B'D'$		
(b)	$(AC, B'D') = 90^\circ$		
(c)	Tam giác ACD' đều		
(d)	$(AC, A'B) = 30^\circ$		

Lời giải



(a) $BD//B'D'$

Ta có: $BB'//DD', BB' = DD' \Rightarrow BDD'B'$ là hình bình hành $\Rightarrow BD//B'D'$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\left(AC, B'D'\right) = 90^\circ$

Vì vậy $\left(AC, B'D'\right) = \left(AC, BD\right) = 90^\circ$ *(do AC và BD là hai đường chéo hình vuông $ABCD$).*

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Tam giác ACD' đều

Ta có: $A'D'//BC, A'D' = BC \Rightarrow A'BCD'$ là hình bình hành $\Rightarrow A'B//CD'$.

Vì vậy $\left(AC, A'B\right) = \left(AC, CD'\right)$.

Gọi a là cạnh của hình lập phương thì $AD' = CD' = AC = a\sqrt{2}$ (đường chéo của hình vuông cạnh a).

Suy ra tam giác ACD' đều

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $\left(AC, A'B\right) = 30^\circ$

Nên $\left(AC, CD'\right) = \widehat{ACD'} = 60^\circ$.

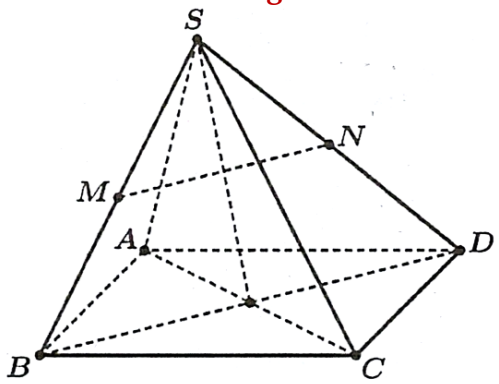
Vậy $\left(AC, A'B\right) = 60^\circ$.

» **Chọn** SAI.

» Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của đoạn SB, SD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$MN//BD$		
(b)	MN và AC là hai đường thẳng chéo nhau		
(c)	$AC \perp BD$		
(d)	$\left(MN, AC\right) = 90^\circ$		

Lời giải



(a) $MN//BD$.

Xét tam giác SBD có MN là đường trung bình, suy ra $MN//BD$. (1)

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *MN và AC là hai đường thẳng chéo nhau.*

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $AC\perp BD$

Mặt khác: $AC\perp BD$ (hai đường chéo trong hình thoi). (2)

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $(MN,AC)=90^\circ$

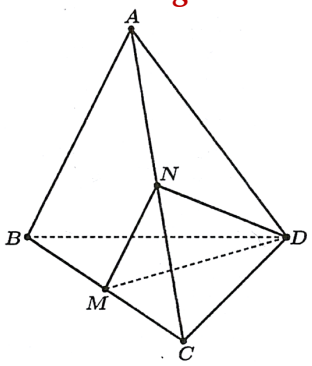
Từ (1) và (2) suy ra $AC\perp MN$ hay $(MN,AC)=90^\circ$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 30. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, M là trung điểm cạnh BC, N là trung điểm của AC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$MN//AB$		
(b)	$MD=ND=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$		
(c)	$(AB,DM)=(MN,DM)$		
(d)	$\cos(AB,DM)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		

Lời giải



(a) $MN//AB$

Gọi N là trung điểm của AC

Nên MN là đường trung bình của $\Delta ABC\Rightarrow\begin{cases}MN//AB(*)\\MN=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a}{2}\end{cases}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $MD=ND=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vì ΔBCD và ΔACD là các tam giác đều cạnh bằng a nên $MD=ND=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

» **Chọn** SAI.

(c) $(AB,DM)=(MN,DM)$

Từ (*) suy ra: $(AB,DM)=(MN,DM)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $\cos\left(AB,DM\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Xét ΔMND, ta có:

$$\cos\widehat{DMN}=\frac{MN^2+MD^2-ND^2}{2MN\cdot MD}=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}>0$$

$\Rightarrow \widehat{DMN}$ là góc nhọn.

Vậy $\left(AB,DM\right)=\left(MN,DM\right)=\widehat{DMN}$ nên $\cos\left(AB,DM\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

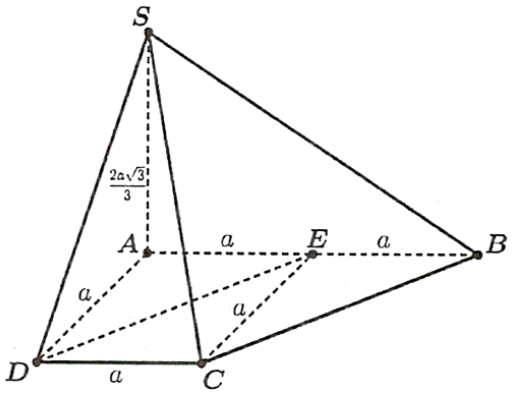
» **Chọn** SAI.

» **Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. Gọi E là trung điểm của AB. Biết $AB=2a, AD=DC=a$, đồng thời $SA\perp AB, SA\perp AD$ và $SA=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\left(SB,DC\right)=\widehat{SBA}$		
(b)	$\tan\widehat{SBA}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$		
(c)	$DE//BC$		
(d)	$\left(SD,BC\right)\approx 52,42^\circ$		

Lời giải



(a) $\left(SB,DC\right)=\widehat{SBA}$

Vì $CD//AB$

$\Rightarrow\left(SB,DC\right)=\left(SB,AB\right)=\widehat{SBA}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\tan\widehat{SBA}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔSAB vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(*\right)$.

» **Chọn** SAI.

(c) $DE//BC$

Gọi E là trung điểm của AB.

Vì $BE//CD, BE=CD=a$ nên $BCDE$ là hình bình hành $\Rightarrow DE//BC$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $(SD,BC)\approx 52,42^\circ$

Khi đó: $(SD,BC)=(SD,DE)$.

Ta có: $SE^2=SA^2+AE^2=\dfrac{4a^2}{3}+a^2=\dfrac{7a^2}{3}; SD^2=SA^2+AD^2=\dfrac{7a^2}{3}$;

$DE^2=AD^2+AE^2=2a^2$.

Suy ra $SE=SD=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}, DE=a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lí hàm côsin cho tam giác SDE, ta được:

$\cos\widehat{SDE}=\dfrac{SD^2+DE^2-SE^2}{2SD\cdot DE}=\dfrac{2a^2}{2\cdot\dfrac{a\sqrt{21}}{3}\cdot a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{42}}{14}>0\Rightarrow\widehat{SDE}$ là góc nhọn.

Vậy $(SD,BC)=(SD,DE)=\widehat{SDE}$.

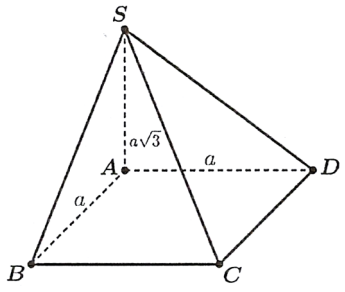
Suy ra: $(SD,BC)=\widehat{SDE}\simeq 62,42^\circ$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a. Cho biết $SA=a\sqrt{3}$, $SA\perp AB, SA\perp AD$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$(AB,SA)=90^\circ$		
(b)	$SA\perp CD$		
(c)	$(SD,BC)=(SD,CD)$		
(d)	$\widehat{SDA}=60°$		

Lời giải



(a) $(AB,SA)=90^\circ$

Ta có $SA\perp AB\Rightarrow(SA;AB)=90°$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $SA\perp CD$

Vì $CD//AB$ (hai cạnh đối trong hình thoi) nên $(CD,SA)=(AB,SA)=90^\circ$.

Vậy $SA\perp CD$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $(SD,BC)=(SD,CD)$

Vì $BC//AD$ (hai cạnh đối trong hình thoi) nên $(SD,BC)=(SD,AD)$.

» **Chọn** SAI.

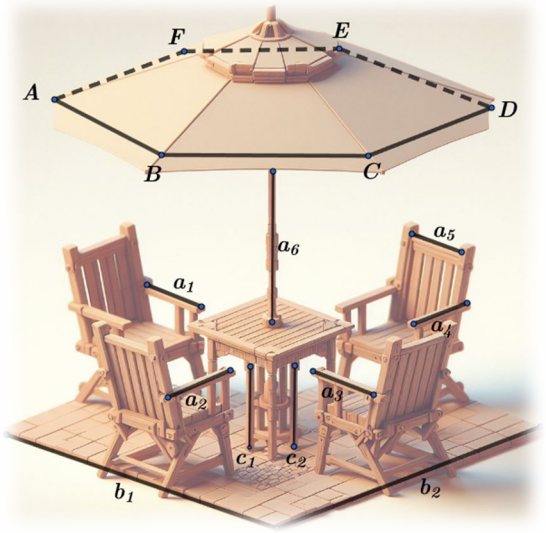
(d) $\widehat{SDA}=60°$

Tam giác SAD vuông tại A có: $\tan\widehat{SDA}=\dfrac{SA}{AD}=\dfrac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SDA}=60^{\circ}$.

$\Rightarrow(SD,BC)=(SD,AD)=\widehat{SDA}=60^{\circ}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 33. Một ô che nắng có viền khung hình lục giác đều $ABCDEF$. Biết các thanh gỗ a_1,a_3,a_5 song song nhau, các thanh $a_2;a_4$ song song nhau đồng thời trục của cây dù a_6 vuông góc với các đường AB,BC,CD,a_1,a_2 và song song với các đường chân bàn $c_1;c_2$. Các đường gạch lát $b_1//AB,b_2//CD$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$a_6\perp a_3;a_6\perp a_4;a_6\perp a_5$		
(b)	$a_6\perp ED;a_6\perp EF;a_6\perp FA$		
(c)	$c_1\perp a_1;c_2\perp a_2$		
(d)	$b_1\perp b_2$		

Lời giải

(a) $a_6\perp a_3;a_6\perp a_4;a_6\perp a_5$.

Ta có $\begin{cases}a_6\perp a_1\\ a_1//a_3,a_1//a_5\end{cases}\Rightarrow a_6\perp a_3,a_6\perp a_5$

Và $\begin{cases}a_6\perp a_2\\ a_2//a_4\end{cases}\Rightarrow a_6\perp a_4$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $a_6\perp ED;a_6\perp EF;a_6\perp FA$.

Ta có a_6 vuông góc với các đường AB,BC,CD

Mà $AB // DE, BC // EF, CD // AF$ nên $a_6 \perp ED; a_6 \perp EF; a_6 \perp FA$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $c_1 \perp a_1; c_2 \perp a_2$.

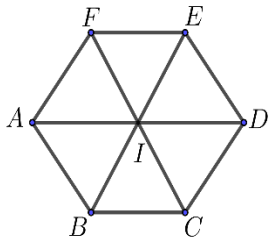
Ta có $c_1 // a_6, c_2 // a_6$ mà $a_6 \perp a_1, a_6 \perp a_2$ nên $c_1 \perp a_1; c_2 \perp a_2$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) $b_1 \perp b_2$.

Ta có $b_1 // AB, b_2 // CD$ nên $(b_1; b_2) = (AB; CD)$

Mà $CD // BI$ nên $(AB, CD) = (AB; BI) = 60°$, suy ra $(b_1; b_2) = 60°$.



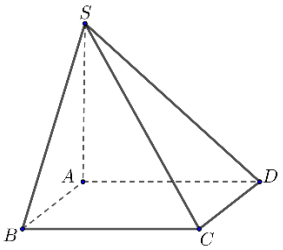
» Chọn SAI.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác SAB là tam giác đều. Tính sin của góc giữa đường thẳng SA và DC (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

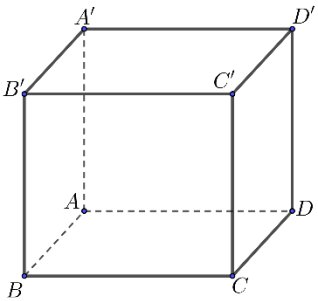
✓ *Trả lời: 0,87*



Vì $AB // DC$ nên $(\widehat{SA, DC}) = (\widehat{SA, AB}) = 60°$ (do tam giác SAB đều).

Do đó $\sin(\widehat{SA, DC}) = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$.

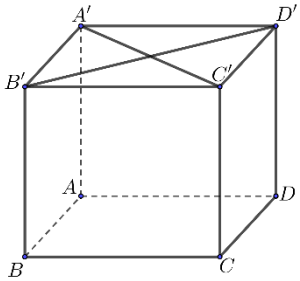
» Câu 35. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên dưới).



Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng bao nhiêu? Viết câu trả lời theo đơn vị độ.

Lời giải

✓ *Trả lời: 90*

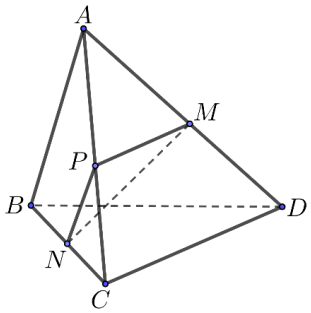


Theo giả thiết $A'B'C'D'$ là hình thoi nên: $\left(\widehat{A'C',BD}\right)=\left(\widehat{A'C',B'D'}\right)=90°$.

» Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tính độ dài đoạn thẳng MN biết góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng $30°$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

✓ *Trả lời: 1,73*



Gọi P là trung điểm của cạnh AC

Thì ta có $PN//AB$ và $PM//CD$, $PN=PM=1$.

Do đó ΔMNP cân tại P nên $\widehat{PNM}<90°$.

Khi đó $\left(\widehat{AB,MN}\right)=\left(\widehat{NP,MN}\right)=\widehat{PNM}=30°\Rightarrow\widehat{MPN}=120°$.

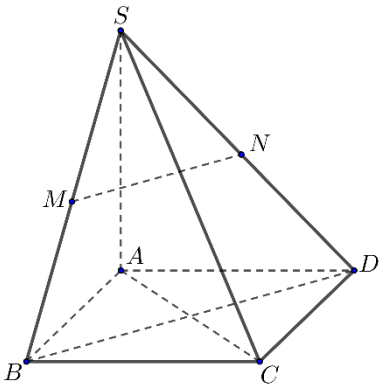
Xét ΔPMN có $MN^2=PM^2+PN^2-2PM.PN.\cos\widehat{MPN}=3$.

Do đó $MN=\sqrt{3}\approx1,73$.

» Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD. Góc giữa đường thẳng MN và AC bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

✓ *Trả lời: 90*



Ta có $MN//BD$ (vì MN là đường trung bình của ΔSBD)

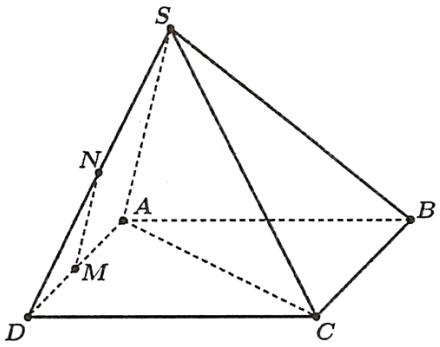
Lại có $AC\perp BD$ (tính chất của hình thoi)

$\Rightarrow MN \perp AC$. Do đó $\left(\widehat{MN;AC}\right)=90°$

» Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, biết $SA=a$, $SC=a\sqrt{3}$. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AD,SD. Góc của hai đường thẳng MN và SC bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

✓ *Trả lời: 90*



Vì MN là đường trung bình của tam giác SAD

Nên $MN//SA \Rightarrow \left(MN,SC\right)=\left(SA,SC\right)$.

Tam giác ABC vuông tại B có:

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=2a.$

Xét tam giác SAC, ta có: $SA^2+SC^2=AC^2\left(\text{do } a^2+(a\sqrt{3})^2=(2a)^2\right)$

Suy ra tam giác SAC vuông tại S.

Vậy $\left(MN,SC\right)=\left(SA,SC\right)=90^\circ$ hay $MN\perp SC$.

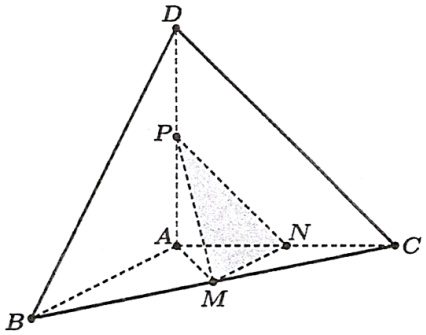
» Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB=AC=AD=1$. Góc của hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

✓ *Trả lời: 90*

Theo định lí Pythagore, ta tính được $BC=CD=BD=\sqrt{2}$.

Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,AC,AD.



Tam giác ABC có MN là đường trung bình

nên $\begin{cases} MN//AB \\ MN=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Tam giác ACD có NP là đường trung bình

nên $\begin{cases} NP // CD \\ NP = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Tam giác ABC vuông tại A có đường trung tuyến $AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác AMP vuông tại A có:

$MP = \sqrt{AM^2 + AP^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} MN // AB \\ NP // CD \end{cases} \Rightarrow (AB, CD) = (MN, NP)$.

Tam giác MNP có: $MN^2 = \frac{1}{4}, NP^2 = \frac{1}{2}, MP^2 = \frac{3}{4}$ hay $MN^2 + NP^2 = MP^2$.

Suy ra tam giác MNP vuông tại N.

Vậy $(AB, CD) = (MN, NP) = 90^\circ$ hay $AB \perp CD$.

» Câu 40. Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc của hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

✓ Trả lời: 90

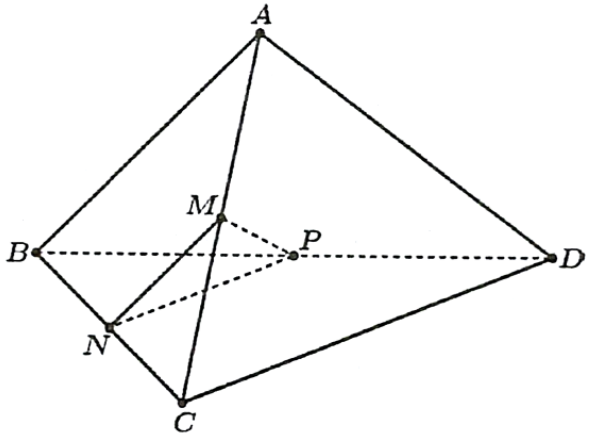
Giả sử tứ diện đều có các cạnh bằng $2a$.

Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AC, BC, BD.

Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $\begin{cases} MN // AB \\ MN = \frac{AB}{2} = a \end{cases}$.

Vì NP là đường trung bình của tam giác BCD nên $\begin{cases} NP // CD \\ NP = \frac{CD}{2} = a \end{cases}$.

Suy ra $(AB, CD) = (MN, NP)$



Các tam giác ABD, BCD là tam giác đều cạnh $2a$ nên

$AP = CP = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Tam giác ACP cân tại P có M là trung điểm AC nên $MP \perp AC$.

Suy ra $MP = \sqrt{CP^2 - CM^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác MNP có $MN^2=a^2, NP^2=a^2, MP^2=2a^2$ hay $MN^2+NP^2=MP^2$.

Suy ra tam giác MNP vuông tại N. Vậy $AB\perp CD$.

» Câu 41. Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa đường thẳng CD' với mỗi đường thẳng $BB', A'D$.

Lời giải

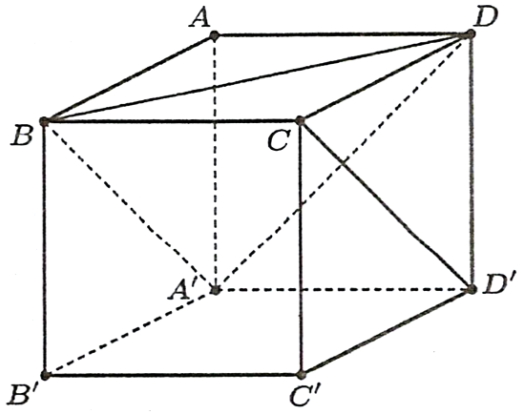
✓ Trả lời: 60

Vì $BB'//CC'$ nên $(BB',CD')=(CC',CD')=\widehat{C'CD'}=45^\circ$ (do $\Delta CC'D'$ vuông cân tại C').

Vì $BC//A'D'; BC=A'D'\Rightarrow BCD'A'$ là hình bình hành.

Suy ra $CD'//A'B$.

Ta có: $(CD',A'D)=(A'B,A'D)$.



Giả sử cạnh của hình lập phương là a, tam giác $A'BD$ có ba cạnh cùng bằng $a\sqrt{2}$ (đường chéo trong các hình vuông cạnh a).

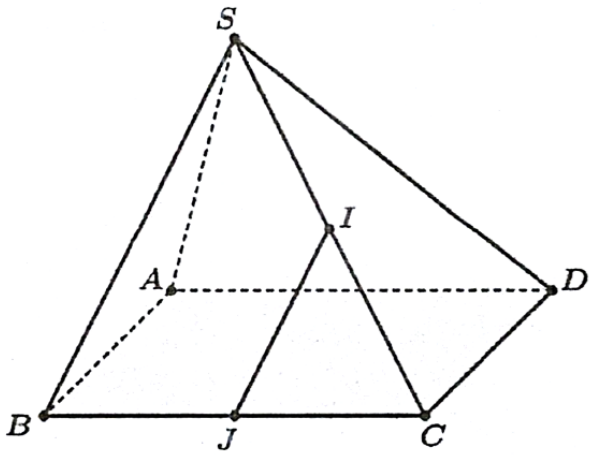
Suy ra tam giác $A'BD$ đều.

Do vậy $(CD',A'D)=(A'B,A'D)=\widehat{BA'D}=60^\circ$.

» Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Tìm số đo của góc (IJ,CD).

Lời giải

✓ Trả lời: 60



Tứ giác $ABCD$ có bốn cạnh bằng nhau nên $ABCD$ là hình thoi, suy ra $CD//AB$.

Ta có IJ là đường trung bình của tam giác SBC nên $\begin{cases} IJ//SB \\ IJ=\dfrac{1}{2}SB=\dfrac{a}{2}. \end{cases}$

Do vậy $(IJ,CD)=(AB,SB)$.

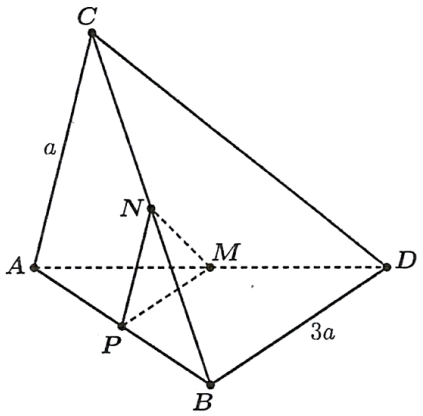
Mặt khác, tam giác SAB có ba cạnh bằng nhau nên $\widehat{SBA}=60^\circ$.

Vậy $(IJ,CD)=(AB,SB)=\widehat{SBA}=60^\circ$.

» Câu 43. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=1;BD=3$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính độ dài MN. *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

Lời giải

✓ *Trả lời: 1,6*



Gọi P là trung điểm đoạn AB,

ta có NP là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow NP=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2};NP//AC.$

Tương tự: MP là đường trung bình của ΔABD

$\Rightarrow MP=\frac{1}{2}BD=\frac{3}{2},MP//BD.$

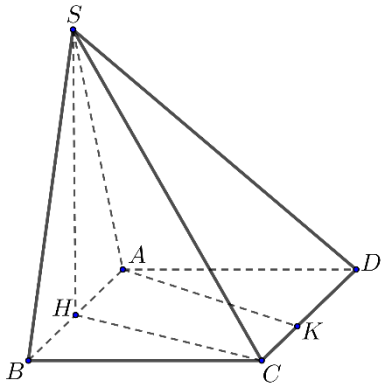
Khi đó: $(AC,BD)=(PN,PM)=\widehat{MPN}=90^\circ$ hay ΔMNP vuông tại P.

Vì vậy $MN=\sqrt{PN^2+PM^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}\approx 1,6$

» Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, ΔSAB đều và $SC=2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Góc giữa đường thẳng AK và SH bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

✓ *Trả lời: 90*



Ta có $\begin{cases} AH = AK = a \\ AH \,//\, AK \end{cases} \Rightarrow AHCK$ là hình bình hành $\Rightarrow AK // CH$.

Do ΔSAB đều cạnh $2a$ nên $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

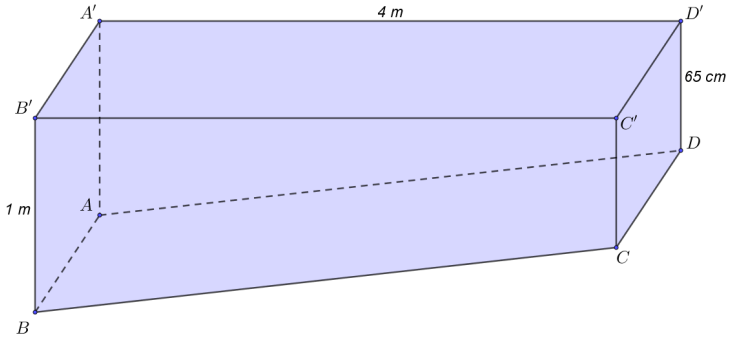
Xét ΔHBC có $HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$.

Xét ΔSHC có : $SH^2 + HC^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(a\sqrt{5}\right)^2 = 8a^2 = SC^2$

$\Rightarrow \Delta SHC$ vuông tại $H \Rightarrow SH \perp HC$.

Mà $AK // CH \Rightarrow SH \perp AK$ Do đó $\left(\widehat{AK;SH}\right) = 90°$

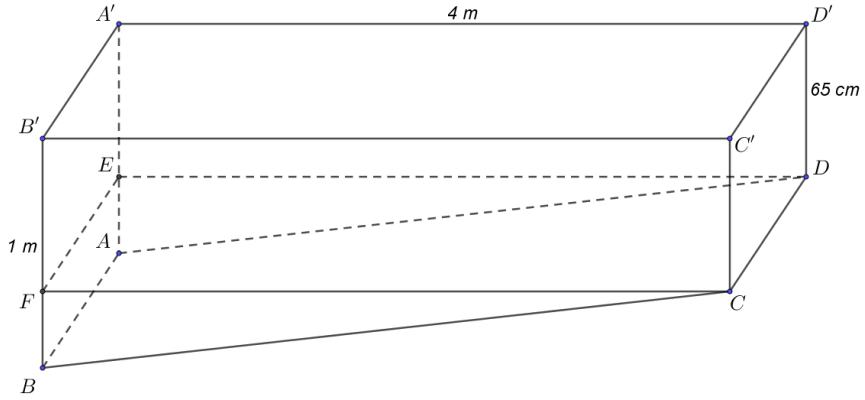
» Câu 45. Bác Minh có một khối gỗ có kích thước như hình vẽ. Biết $ABCD$, $A'B'C'D'$, $A'B'BA$, $CDD'C'$ là các hình chữ nhật, $A'D'DA$, $B'C'CB$ là các hình thang vuông. Bác Minh muốn làm đẹp khối gỗ đó bằng cách cắt khối gỗ theo mặt phẳng (P) đi qua C và song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$.



Khi đó, bác Minh cần đặt mép BC của khối gỗ tạo với lưỡi cắt của máy cắt một góc bao nhiêu độ?

Lời giải

✓ *Trả lời: 5*



Ta có mặt phẳng cắt (P) là mặt phẳng $(CDEF)$.

Khi đó, góc giữa mép BC của khối gỗ và lưỡi cắt của máy cắt là góc $\widehat{BCF}$.
Ta có $FB = 0{,}35$ m, $CF = 4$ m.

Xét tam giác vuông BCF có $\tan BCF = \dfrac{BF}{FC} = \dfrac{0{,}35}{4} = \dfrac{7}{80} \Rightarrow \widehat{BCF} \approx 5°$.

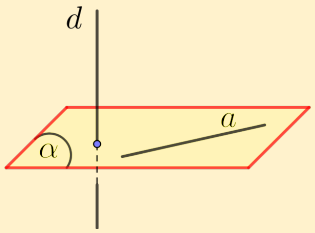
Chương 08
Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

A Lý thuyết

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa:

Đường thẳng d được gọi là ***vuông góc*** với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a ***nằm trong*** mặt phẳng (α)

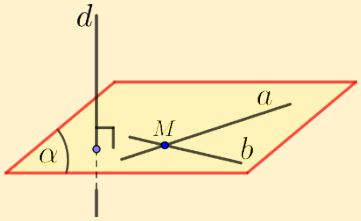


Ký hiệu: $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$

Nhận xét: $\begin{cases} d \perp (P) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp a$

Định lý 1:

Nếu đường thẳng d ***vuông góc*** với hai đường thẳng ***cắt nhau*** cùng thuộc một mặt phẳng thì vuông góc với mặt phẳng ấy.



$$\begin{cases} d \perp a \subset (P) \\ d \perp b \subset (P) \\ a \cap b = M \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$

Định lý 2:

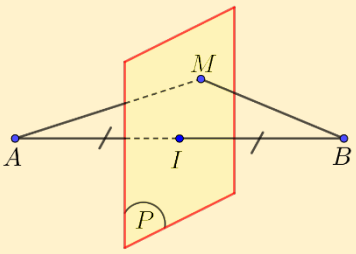
Có duy nhất:

- Một mặt phẳng:
  + đi qua một điểm cho trước, và
  + vuông góc với đường thẳng cho trước.
- Một đường thẳng:
  + đi qua một điểm cho trước, và
  + vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

⌘ *Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng*

Định nghĩa:

Mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.



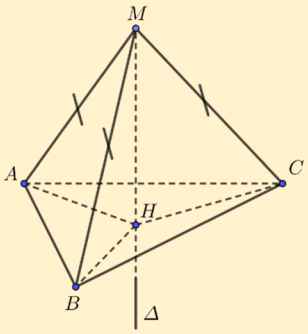
Nhận xét: (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

$\Leftrightarrow \forall M \in (P), MA = MB$.

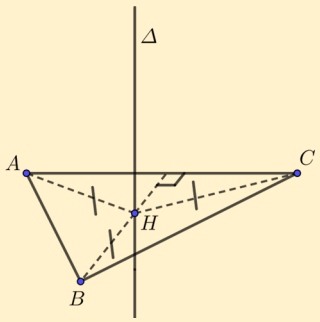
⌘ *Trục của đa giác*

Định nghĩa:

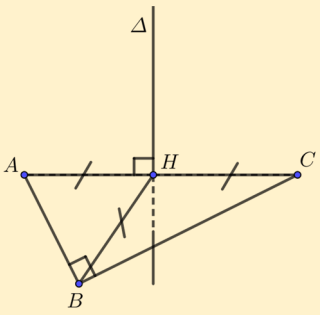
Trục của đa giác là đường thẳng qua tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đó. Nếu một điểm nằm trên trục của đa giác thì nó cách đều các đỉnh của đa giác.



Tam giác thường



Tam giác đều



Tam giác vuông

Chứng minh:

Cho đa giác có n đỉnh $A_1A_2\ldots A_n$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác và d là trục của đa giác.

Lấy điểm $I \in d$.

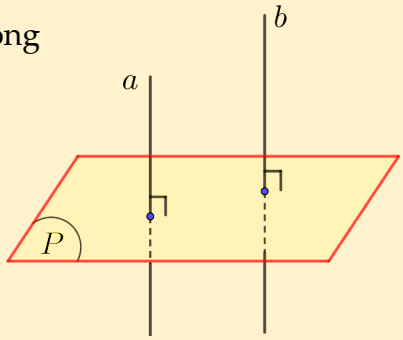
Khi đó: $\Delta IOA_1 = \Delta IOA_2 = \ldots = \Delta IOA_n$ (Δ vuông có 2 cạnh bằng nhau) $\Rightarrow IA_1 = IA_2 = \ldots = IA_n$

2. Liên hệ giữa tính song song – vuông góc của đường thẳng & mặt phẳng

Định lý 3:

(1) Cho hai đường thẳng song song, nếu mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Tóm tắt: $\begin{cases} a // b \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp (P)$

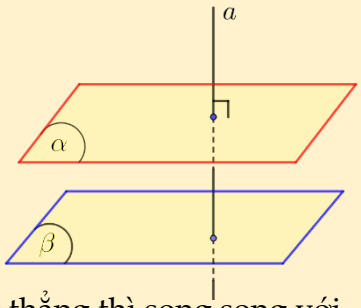


(2) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases} a \neq b \\ a \perp (P)\,;\, b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a // b$

Định lý 4:

(1) Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì mặt phẳng nào song song với mặt phẳng ấy.



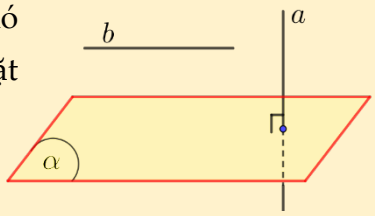
Tóm tắt: $\begin{cases}(\alpha)//(\beta)\\ a\perp(\alpha)\end{cases}\Rightarrow a\perp(\beta)$

(2) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases}(\alpha)\neq(\beta)\\ (\alpha)\perp a\\ (\beta)\perp a\end{cases}\Rightarrow(\alpha)//(\beta)$

Định lý 5:

(1) Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó vuông góc với bất kì đường thẳng nào song song với mặt phẳng ấy.



Tóm tắt: $\begin{cases}a\perp(\alpha)\\ b//(\alpha)\end{cases}\Rightarrow a\perp b$

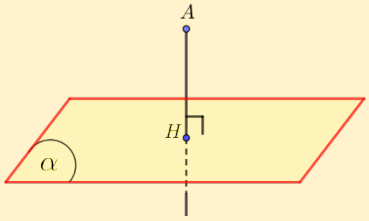
(2) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng *(không chứa đường thẳng đó)* cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases}b\not\subset(\alpha)\\ b\perp a\\ (\alpha)\perp a\end{cases}\Rightarrow b//(\alpha)$

3. Phép chiếu vuông góc

Định nghĩa:

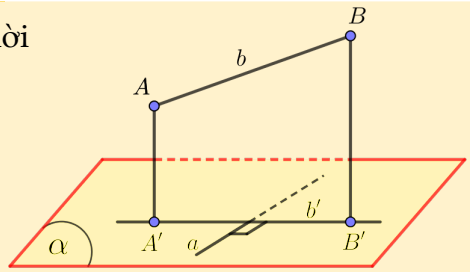
- Cho đường thẳng Δ vuông góc với (α). Phép chiếu song song theo phương của Δ lên (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên (α).
- H là hình chiếu vuông góc *(gọi tắt là hình chiếu)* của A lên (P) nếu $AH\perp(P)$ và $H\in(P)$.



4. Định lý ba đường vuông góc

Định lý 6 (định lý ba đường vuông góc):

- Cho a nằm trong (α) và b không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α).
- Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α).
- Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$.



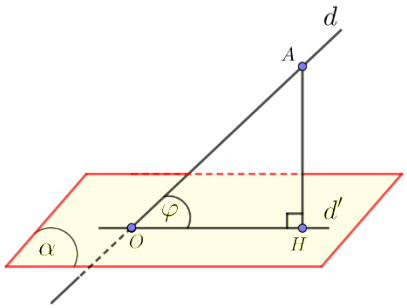
5. Góc giữa đường thẳng & mặt phẳng

Nhận xét

(1) $d \perp (P) \Rightarrow \widehat{(d;(P))} = 90°$

(2) $d \not\perp (P) \Rightarrow \widehat{(d;(P))} = \widehat{(d;d')} = \widehat{AOH}$ với d' là hình chiếu của đường thẳng d lên (P)

Chú ý: $0 \le \widehat{(d;(P))} \le 90°$.

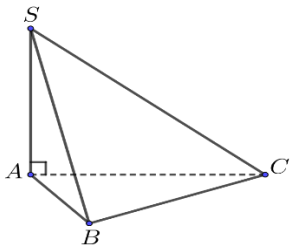


6. Kiến thức bổ trợ

6.1. Một số mô hình thường gặp

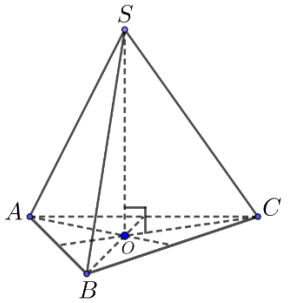
(1). Hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy.

- $SA \perp BC$
- $\Delta SAB, \Delta SAC$ vuông tại A
- A là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).



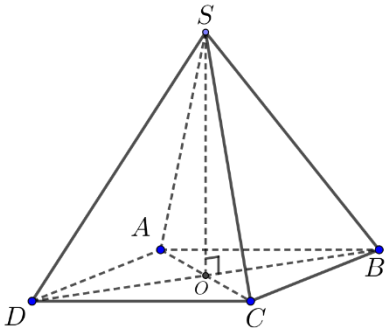
(2). Hình chóp tam giác đều.

- Đáy ΔABC là tam giác đều.
- Mặt bên là các tam giác cân tại S. (hoặc là tam giác đều nếu hình chóp là tứ diện đều).
- O là trọng tâm ΔABC.
- $SO \perp (ABC)$, SO là trục ΔABC.
- $SA = SB = SC$



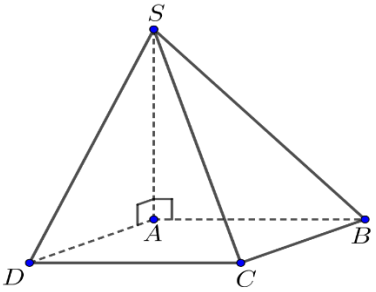
(3). Hình chóp tứ giác đều.

- Đáy $ABCD$ là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân tại S.
- Các tam giác SAC, SBD cân tại S.
- O là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- $SO \perp (ABC)$, SO là trục hình vuông $ABCD$.
- $SA = SB = SC = SD$.



(4). Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi.

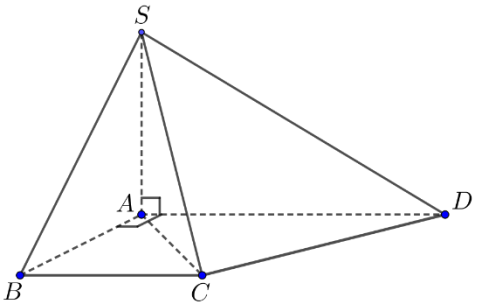
- A là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- Các tam giác SAB, SAC, SAD vuông tại A.
- ***Đặc biệt:*** Nếu $ABCD$ là hình vuông hoặc hình thoi thì AC vuông góc BD.



(5). Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có góc A vuông và SA vuông với đáy.

- A là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- Các tam giác SAB, SAC, SAD vuông tại A.
- ***Đặc biệt:*** Nếu $AD = 2BC$:

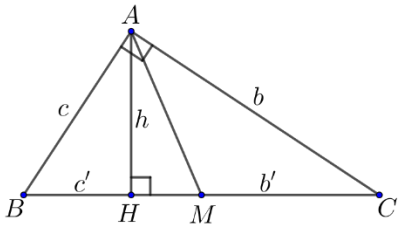
+ Gọi I là trung điểm AD thì $CI \perp AD$.
+ Trong trường hợp thêm $AB = BC$ thì $AC \perp CD$.



6.2. Các hệ thức lượng trong tam giác

(1). Tam giác ABC vuông tại A:

- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}b.c$
- $a^2 = b^2 + c^2$ (định lý Pitago)
- $b^2 = b' \cdot a$
- $c^2 = c' \cdot a$
- $h^2 = b' \cdot c'$
- $a \cdot h = b.c$
- $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$
- $\frac{b'}{c'} = \frac{b^2}{c^2}$
- $AM = \frac{1}{2}BC$ với M là trung điểm BC.



- $\sin B = \cos C = \frac{AC}{BC}$
- $\cos B = \sin C = \frac{AB}{BC}$
- $\tan B = \cot C = \frac{AC}{AB}$
- $\cot B = \cot C = \frac{AB}{AC}$

(2). Tam giác thường:

• ***Định lí côsin:***

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

• ***Tính cosin 1 góc:***

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

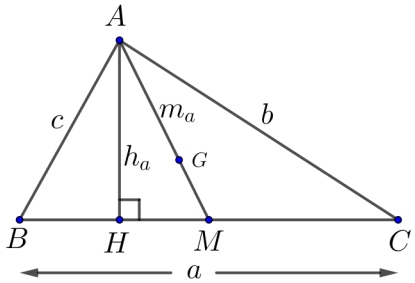
• ***Độ dài trung tuyến:***

$m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$

$m_b^2 = \dfrac{2\left(a^2 + c^2\right) - b^2}{4}$

$m_c^2 = \dfrac{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}{4}$

• ***Định lí sin:*** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$



• ***Diện tích tam giác***

$S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$

$S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

$S = \dfrac{abc}{4R}$

$S = pr; p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Với R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC.

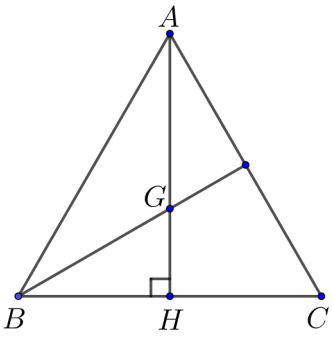
(3). Tam giác đều:

Xét tam giác đều cạnh x.

Diện tích tam giác đều: $S = x^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Đường cao tam giác đều: $h = x.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Với G là trọng tâm ΔABC: $AG = \dfrac{2}{3}.AH = x.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



6.3. Các chú ý khác

» Độ dài đường chéo hình vuông cạnh bằng a là $a\sqrt{2}$.

» Độ dài đường chéo hình chữ nhật có độ dài 2 cạnh là a và b là $\sqrt{a^2 + b^2}$.

» Trong hình vuông và hình thoi, các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và vuông góc nhau.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng

Phương pháp

☑ ***Cách 1.***

Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng chứa trong (P).

☑ ***Cách 2.***

Chứng minh d song song với a mà $a \perp (P)$

☑ ***Cách 3.***

Chứng minh $d \perp (Q)$ và $(Q)//(P)$.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC).

(1) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

(2) Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Chứng minh $AH \perp SC$.

Lời giải

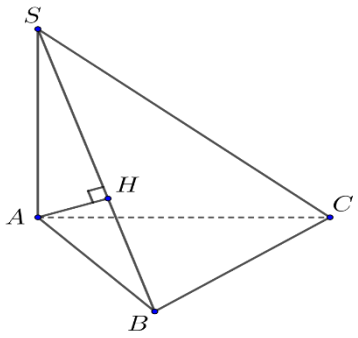
(1) *Chứng minh* $BC \perp (SAB)$.

Ta có $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ (1).

ΔABC vuông tại B hay $AB \perp BC$ (2).

Trong (SAB): $SA \cap AB = A$, (3).

Từ (1), (2) và $(3) \Rightarrow BC \perp (SAB)$.



(2) *Chứng minh* $AH \perp SC$.

Theo câu (1), $BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB)$ nên $AH \perp BC$.

Lại có AH là đường cao của $\Delta SAB \Rightarrow AH \perp SB$.

Trong ΔSBC, $AH \perp BC$ và $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp SC$.

Ví dụ 1.2.

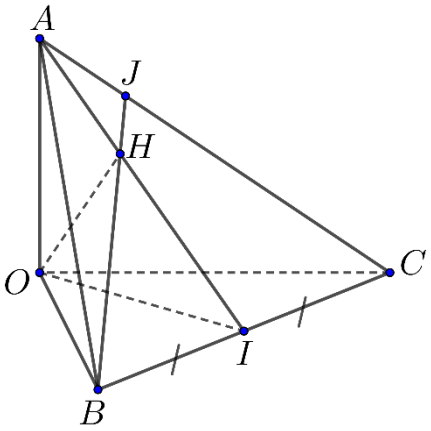
Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh:

(1) $BC \perp (OAH)$.

(2) H là trực tâm của ΔABC.

Lời giải

Gọi I là trung điểm BC



(1) *Chứng minh* $BC \perp (OAH)$..

Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$

Mà $\begin{cases} OH \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{cases}$ nên $OH \perp BC.$

Vậy $BC \perp (OAH).$

(2) *Chứng minh* H là trực tâm của ΔABC.

Do $OH \perp (ABC)$ nên $OH \perp AC(1).$

Ta có $\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases}$ nên $OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC(2).$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH.$

Mặt khác $BC \perp (OAH) \Rightarrow AH \perp BC.$

Vậy H là trực tâm của ΔABC

Ví dụ 1.3.

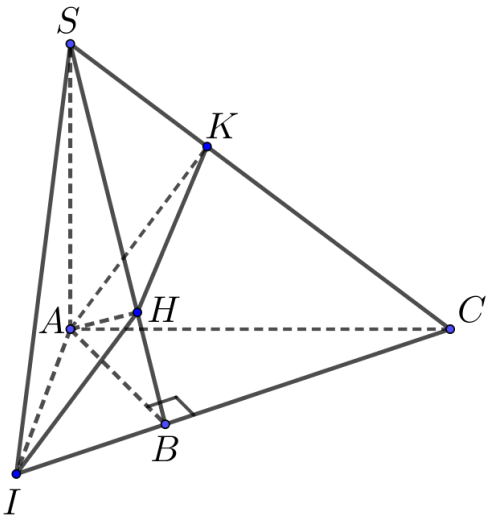
Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

(1) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

(2) Gọi AH và AK là đường cao của $\Delta SAB, \Delta SAC$. Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

(3) HK cắt tia CB tại I. Chứng minh: ΔAIC vuông.

Lời giải



(1) *Chứng minh* $BC \perp (SAB)$.

- Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

(2) *Chứng minh* $SC \perp (AHK)$.

- Ta có: $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC\,(BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$
- Ta có: $\begin{cases} AK \perp SC \\ AH \perp SC\,(AH \perp (SBC)) \Rightarrow SC \perp (AHK). \\ AH, AK \subset (AHK) \end{cases}$

(3) *HK cắt tia CB tại I. Chứng minh:* ΔAIC *vuông.*

- Ta có: $\begin{cases} AI \perp SA\,(SA \perp (ABC)) \\ AI \perp SC\,(SC \perp (AHK)) \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SAC) \Rightarrow AI \perp AC.$

Vậy ΔAIC vuông tại A.

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp

☑ Chứng minh hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, ta làm như sau:

- *Bước 1.* Chọn (P) chứa đường thẳng b
- *Bước 2.* Chứng minh $a \perp (P) \to a \perp b$

Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Chứng minh $HK \perp SC$.

Lời giải

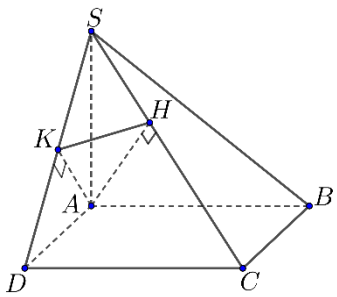
Chọn $(AHK) \supset HK \to$ Chứng minh $SC \perp (AHK)$

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$

Mà $AK \perp SD$ nên $AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SC$.

Mặt khác $AH \perp SC$ nên $SC \perp (AHK)$.

$\Rightarrow HK \perp SC$.



Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $SA \perp (ACBD), AD = 2a, AB = BC = a$. Chứng minh rằng $CD \perp SC$.

Lời giải

Ta có: $\left.\begin{matrix} SA \perp (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow SA \perp CD \quad (1)$.

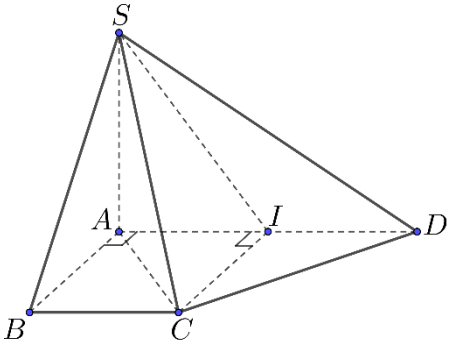
Gọi I là trung điểm AD.

Tứ giác $ABCI$ là hình vuông $\to \widehat{ACI} = 45°$

Mặt khác, ΔCID là Δ vuông cân tại I nên $\widehat{DCI} = 45°$.

Suy ra $\widehat{ACD} = 90°$ hay $AC \perp CD \quad (2)$.

Từ (1) và $(2) \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC$.



Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và SA vuông góc với đáy. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC, SD.

(1) Chứng minh rằng $CD \perp (SAD), BD \perp (SAC)$.

(2) Chứng minh $SC \perp HK$.

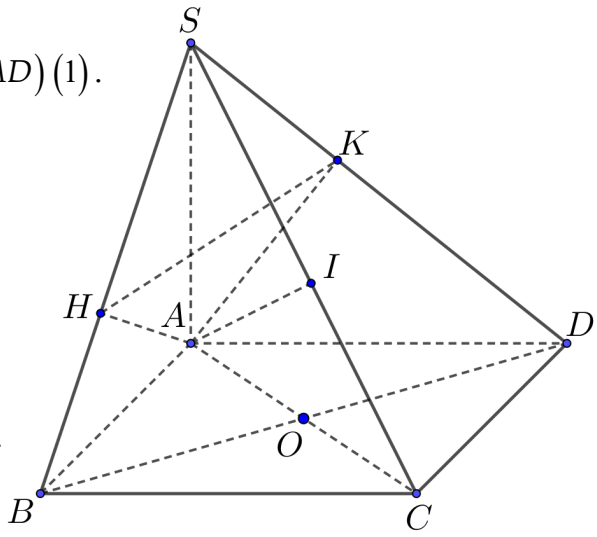
(3) Chứng minh rằng $HK \perp AI$.

Lời giải

(1) *Chứng minh rằng* $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.

⌘ *Chứng minh* $CD \perp (SAD)$

- Theo $ABCD$ là hình vuông nên $CD \perp AD \subset (SAD)$ (1).
- $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$ (2).
- Trong (SAD): $SA \cap AD = A$, (3).
- Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow CD \perp (SAD)$.



⌘ *Chứng minh* $BD \perp (SAC)$

- Theo $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$ (4).
- $SA \perp (ABCD)$ và $BD \subset (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$ (5).
- Trong (SAC): $SA \cap AC = A$, (3).
- Từ (4), (5) và (6) $\Rightarrow BD \perp (SAC)$.

(2) *Chứng minh* $SC \perp HK$.

- Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \\ AB, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$
- Lại có $AH \perp SB$ nên theo hệ quả, ta được $AH \perp SC$.
- Theo *câu* (1), $CD \perp (SAD)$ mà $AK \subset (SAD)$ nên $AK \perp CD$.
- Lại có AK là đường cao của tam giác $SAD \Rightarrow AK \perp SD$.

Nên theo hệ quả $AK \perp SC$.

Trong ΔAKH: $AH \perp SC$ và $AK \perp SC$ nên theo hệ quả $HK \perp SC$.

(3) *Chứng minh rằng* $HK \perp AI$.

- Ta có $\Delta SAB = \Delta SAD (c-g-c) \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD} \Rightarrow HK // BD$ (7).
- Theo *câu* (1), $BD \perp (SAC)$ mà $AI \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp AI$ (8).
- Từ (7) và (8), $HK \perp AI$.

Chương 08
Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Trong không gian cho điểm O và đường thẳng d. Qua điểm O có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d?

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Theo tính chất 1: Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

» **Câu 2.** Khẳng định nào sau đây là **đúng**.

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng vuông góc với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

Lời giải

Chọn C

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

» **Câu 3.** Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng phân biệt a và b. Biết rằng $a \parallel (P)$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \parallel a$.

B. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (P)$.

D. Nếu $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

Lời giải

Chọn B

Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

» **Câu 4.** Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

B. Nếu $a \subset (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$ hoặc $b \subset (P)$.

D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

Lời giải

Chọn D

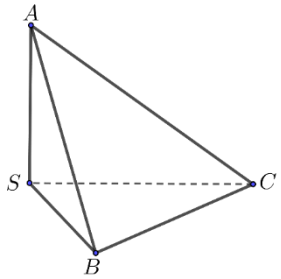
Nếu $a \,//\, (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$. Mệnh đề sai vì đường thẳng b có thể nằm trong mặt phẳng (P).

» Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$, biết SA, SB, SC đôi một vuông góc. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AB \perp (SAC)$. **B.** $SA \perp (SBC)$. **C.** $SB \perp (ABC)$. **D.** $AC \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn B



Vì SA, SB, SC đôi một vuông góc nên $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC)$.

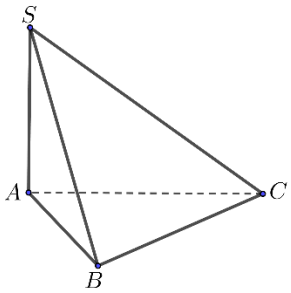
Tương tự ta có $SB \perp (SAC), SC \perp (SAB)$.

» Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$, biết $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại A. Đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng nào?

A. $AB \perp (SAC)$. **B.** $AB \perp (ABC)$. **C.** $AB \perp (SBC)$. **D.** $AB \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn A



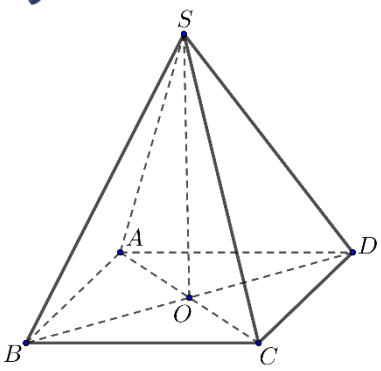
Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp SA \ \ (do\, SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC)$.

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BD \perp (SAD)$. **B.** $BD \perp (SCD)$. **C.** $BD \perp (SAC)$. **D.** $BD \perp (ABCD)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có: hai tam giác SAC và SBD cân tại S.

$\Rightarrow \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$.

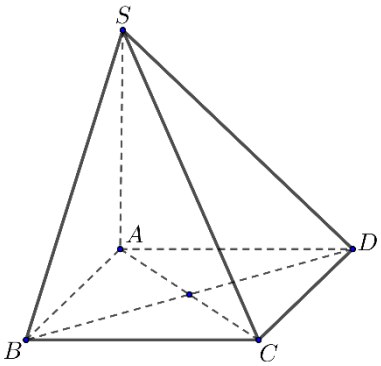
Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

» Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $SA \perp (SBD)$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $AB \perp (SAD)$. **D.** $AD \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

+ $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$.

+ $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$.

+ $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

» Câu 9. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng a, b phân biệt biết $a \perp (P)$ và $b \perp (P)$. Khẳng định nào đúng?

A. $(a,b) = 90°$. **B.** $(a,b) = 0°$. **C.** $(a,b) = 60°$. **D.** $(a,b) = 45°$.

Lời giải

Chọn B

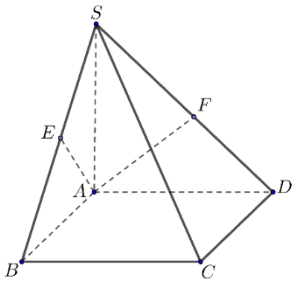
Vì $a \perp (P)$ và $b \perp (P)$ nên $a \,//\, b$. Vậy $(a,b) = 0°$.

» Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Chọn khẳng định đúng?

A. $SC \perp (AEF)$. **B.** $SC \perp (AEC)$. **C.** $SC \perp (AFB)$. **D.** $SC \perp (AED)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có : $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE.$

Ta được : $\begin{cases} AE \perp SB \\ AE \perp BC \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$ (1).

Tương tự : $AF \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (AEF)$.

» Câu 11. Cho hai đường thẳng a, b phân biệt và mặt phẳng (P), biết $a \perp (P)$ và $b \subset (P)$. Khẳng định nào đúng?

A. $(a,b) = 90°$. **B.** $(a,b) = 0°$. **C.** $(a,b) = 60°$. **D.** $(a,b) = 45°$.

Lời giải

Chọn A

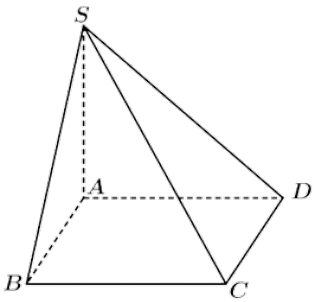
Vì $a \perp (P)$ và $b \subset (P)$ nên $a \perp b$. Vậy $(a,b) = 90°$.

» Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $BA \perp (SAD)$. **B.** $BA \perp (SAC)$. **C.** $BA \perp (SBC)$. **D.** $BA \perp (SCD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$BA \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$)

$BA \perp AD$ (do $ABCD$ là hình vuông)

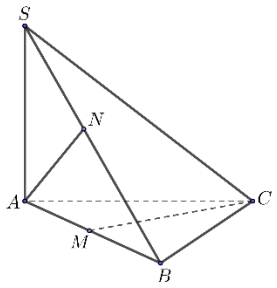
$\Rightarrow BA \perp (SAD)$.

» Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và SB. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

A. $CM \perp SB$. **B.** $CM \perp AN$. **C.** $MN \perp MC$. **D.** $AN \perp BC$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \\ SA, AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB) \Rightarrow CM \perp SB$

Mà $AN \subset (SAB) \Rightarrow CM \perp AN$

Mặt khác $\begin{cases} MN \parallel SA \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN \perp (ABC)$

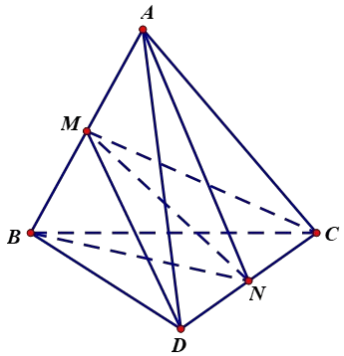
Vì $\begin{cases} MN \subset (SAB) \\ CM \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN \perp CM$.

» Câu 14. Cho tứ diện đều $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $MN \perp AB$. **B.** $MN \perp BD$. **C.** $MN \perp CD$. **D.** $AB \perp CD$.

Lời giải

Chọn B



- ΔNAB cân tại N nên $MN \perp AB$.
- ΔMCD cân tại M nên $MN \perp CD$.
- $CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp AB$.
- Giả sử $MN \perp BD$

mà $MN \perp AB$. Suy ra $MN \perp (ABD)$ (Vô lí vì $ABCD$ là tứ diện đều)

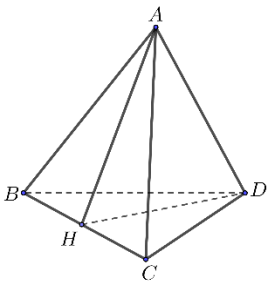
Vậy phương án B sai.

» Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC \perp AD$. **B.** $AC \perp BD$. **C.** $AB \perp (BCD)$. **D.** $DC \perp (ABC)$.

Lời giải

Chọn A



Theo đề bài ta có: ΔABC, ΔDBC lần lượt cân tại A, D.

Gọi H là trung điểm của BC.

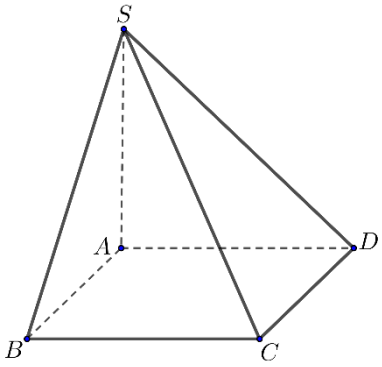
$$\Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ DH \perp BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD \subset (ADH) \\ BC \perp (ADH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD.$$

» Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu của tam giác SCD trên mặt phẳng (SAB) là

A. ΔACD. **B.** ΔSAD. **C.** ΔSBC. **D.** ΔSAB.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} AB \perp AD \\ SA \perp AD \ (SA \perp (ABCD)) \\ SA \cap AB = A \text{ trong } (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow AD \perp (SAB)$.

$\Rightarrow A$ là hình chiếu của D trên (SAB).

Ta có: $\begin{cases} AB \perp CB \\ SA \perp CB \ (SA \perp (ABCD)) \\ SA \cap AB = A \text{ trong } (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow CB \perp (SAB)$.

$\Rightarrow B$ là hình chiếu của C trên (SAB).

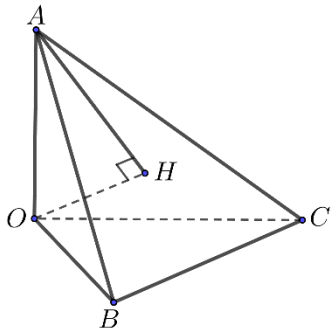
Vậy ΔSAB là hình chiếu của ΔSCD trên (SAB).

» Câu 17. Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp (OBC)$. Đường thẳng qua O và vuông góc với (ABC) tại H. Đường thẳng AH vuông góc với đường nào dưới đây?

A. BC. **B.** OA. **C.** AB. **D.** OC.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$OH \perp (ABC)$.

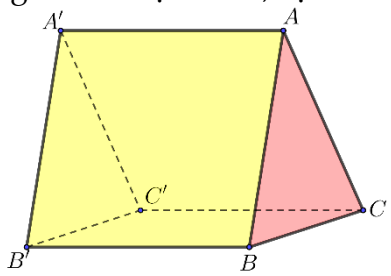
$\Rightarrow H$ là hình chiếu của O trên (ABC).

$\Rightarrow AH$ là hình chiếu của OA lên (ABC).

Mà $BC \subset (SBC), BC \perp OA (OA \perp (OBC))$.

$\Rightarrow BC \perp AH$.

» Câu 18. Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy như hình dưới đây. Biết đáy là tam giác đều cạnh $2m$, cạnh bên $AA' = 3m$.

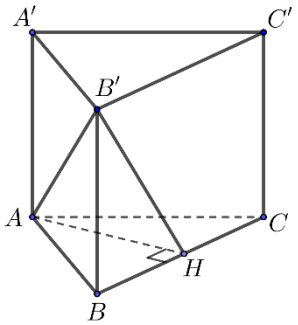


Diện tích hình chiếu vuông góc của $\Delta ABB'$ trên mặt phẳng $(BB'C'C)$ là

A. $1,5m^2$. **B.** $3m^2$. **C.** $6m^2$. **D.** $0,75m^2$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $AH \perp BC$ tại H.

Ta có: $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB' \left(BB' \perp (ABC)\right) \\ BC \cap BB' = B \text{ trong } (BB'C'C) \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (BB'C'C)$.

$\Rightarrow H$ là hình chiếu của A trên $(BB'C'C)$.

$\Rightarrow \Delta BB'H$ là hình chiếu của $\Delta ABB'$ trên $(BB'C'C)$.

Ta có:

+ ΔABC đều $\Rightarrow BH = \dfrac{BC}{2} = 1m$.

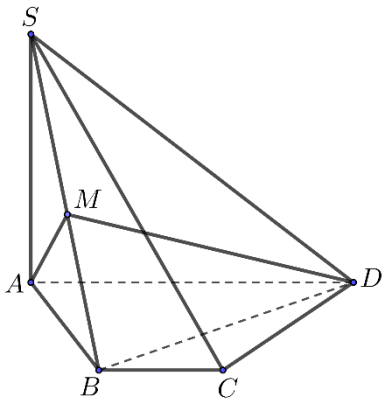
+ $S_{\Delta BB'H} = \dfrac{1}{2} BB'.BH = \dfrac{1}{2}.1.3 = 1,5m^2$.

» Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh a. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B và ở trên SB sao cho AM vuông góc với MD. Khi đó, tỉ số $\dfrac{SM}{SB}$ bằng

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Áp dụng tính chất nửa lục giác đều, ta có $BD \perp AB$.

Mặt khác, $BD \perp SA$. Suy ra $BD \perp (SAB)$, ta được $BD \perp AM$.

Kết hợp $AM \perp MD$, ta được $AM \perp (SBD)$. Suy ra $AM \perp SB$.

Khi đó $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SM.SB}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{3a^2}{4a^2} = \dfrac{3}{4}$.

O trên mặt phẳng (ABC).

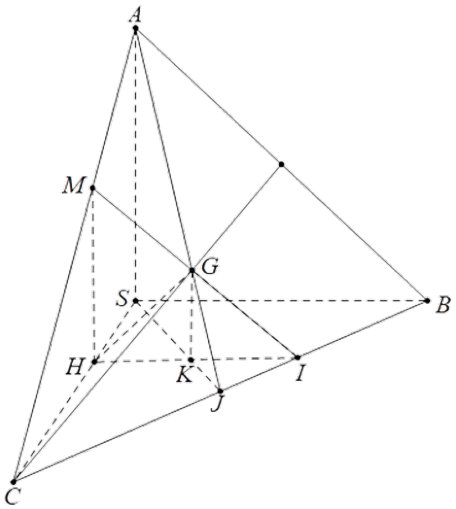
$AH \perp BC$ nên H là trực tâm của tam giác ABC.

» Câu 20. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, các mặt bên là các tam giác vuông cân tại S. Gọi G là trọng tâm của ΔABC, (α) là mặt phẳng qua G vuông góc với SC. Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) bằng

A. $\dfrac{4}{9}a^2$. **B.** $\dfrac{2}{3}a^2$. **C.** $\dfrac{4}{3}a^2$. **D.** $\dfrac{2}{9}a^2$.

Lời giải

Chọn A



Xét ΔSBC vuông cân tại $S, BC = 2a$ ta có:

$SB^2 + SC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2SB^2 = 4a^2 \Leftrightarrow SB^2 = 2a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{2} = SA = SC$.

Gọi J là trung điểm của BC, trong (SJA) kẻ $GK//SA$ cắt SJ tại K.

Trong (SBC) kẻ đường thẳng qua K song song với SB cắt SC; CB lần lượt tại $H; I$.

Trong (SAC) kẻ $HM//SA$ cắt SC tại M.

Do các mặt bên của hình chóp $S.ABC$ là các tam giác vuông tại S nên ta có:

$\begin{cases} SA \perp SC \\ SA \perp SB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC)$ mà $GK//SA \Rightarrow GK \perp (SBC) \Rightarrow GK \perp SC$ (1).

Do $\begin{cases} SB \perp SC \\ IH//SB \end{cases} \Rightarrow IH \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SC \perp (HMI)$. Vậy thiết diện là ΔHMI.

Ta có: $KG//SA; KJ//SB$ và do G là trọng tâm ΔABC nên $\frac{JG}{JA} = \frac{JK}{JS} = \frac{JI}{JB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CI}{CB} = \frac{2}{3}$.

Mặt khác: $HI//SB; HM//SA$ nên ta có:

$\frac{2}{3} = \frac{CI}{CB} = \frac{HI}{SB} \Rightarrow HI = \frac{2}{3}SB = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$

$\frac{2}{3} = \frac{CI}{CB} = \frac{CH}{CS} = \frac{HM}{SA} \Rightarrow HM = \frac{2}{3}SA = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Do $SB \perp ((SAC); HI//SB \Rightarrow HI \perp (SAC) \Rightarrow HI \perp MH \Rightarrow \Delta HMI$ vuông tại H.

Diện tích ΔHIM là: $S_{\Delta HIM} = \frac{1}{2}HM.HI = \frac{1}{2}.\left(\frac{2\sqrt{2}a}{3}\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$.

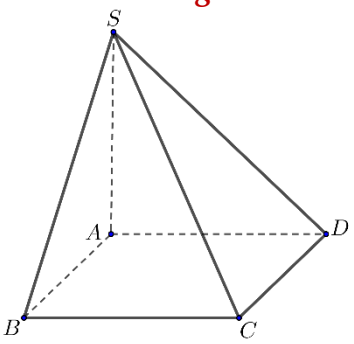
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BC \perp (SAB)$.		

(b)	$CD \perp (SAD)$.		
(c)	$AC \perp (SBD)$.		
(d)	$BD \perp (SAC)$.		

Lời giải



(a) $BC \perp (SAB)$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \ (\text{do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $CD \perp (SAD)$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \ (\text{do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $AC \perp (SBD)$.

Giả sử $AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SB \xrightarrow{AC \perp SA} AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp AB$: vô lí.

» **Chọn** SAI.

(d) $BD \perp (SAC)$.

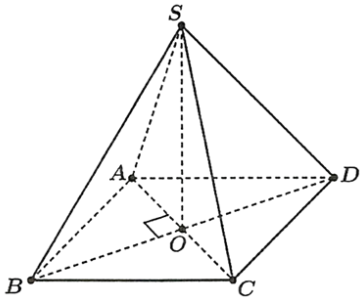
Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \ (\text{do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 22.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thoi tâm O và $SA = SC, SB = SD$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SO \perp AC$		
(b)	$SO \perp (ABCD)$		
(c)	$AC \perp (SBD)$		
(d)	$(AC, SB) = 60°$		

Lời giải



(a) $SO \perp AC$

Tam giác SAC cân tại S (do $SA = SC$), mà O là trung điểm AC nên $SO \perp AC$. (1)

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $SO \perp (ABCD)$

Tam giác SBD cân tại S (do $SB = SD$), mà O là trung điểm BD nên $SO \perp BD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $AC \perp (SBD)$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \ (SO \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $(AC, SB) = 60°$.

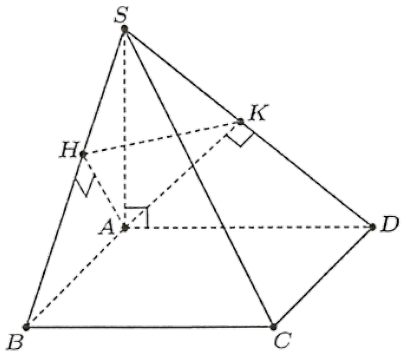
Mà $SB \subset (SBD)$ nên $AC \perp SB \Rightarrow (AC, SB) = 90°$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của A trên các cạnh SB, SD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tam giác SBC vuông		
(b)	Tam giác SCD vuông		
(c)	$SC \perp (AHK)$		
(d)	$HK \perp SC$		

Lời giải



(a) Tam giác SBC vuông.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \ (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Vì $\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ SB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$ hay ΔSBC vuông tại B.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Tam giác SCD vuông.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \ (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Vì $\begin{cases} CD \perp (SAD) \\ SD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD$ hay ΔSCD vuông tại D.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $SC \perp (AHK)$

Ta có: $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \ (BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (1)

Tương tự: $\begin{cases} AK \perp SD \\ AK \perp CD \ (CD \perp (SAD)) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AHK)$,

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $HK \perp SC$.

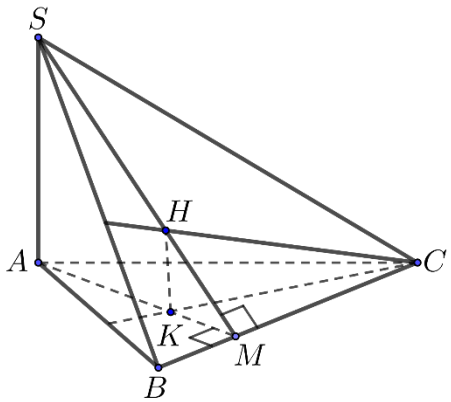
Mà $HK \subset (AHK)$ nên $HK \perp SC$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 24. Cho hình chóp $SABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC (biết rằng các trực tâm này không trùng với các đỉnh của tam giác ABC và SBC). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BC \perp (SAH)$.		
(b)	$SB \perp (CHK)$.		
(c)	$HK \perp (SBC)$.		
(d)	$BC \perp (SAB)$.		

Lời giải



(a) $BC \perp (SAH)$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $SB \perp (CHK)$.

Có $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB$.

Lại có $CH \perp SB$. Từ đó suy ra $SB \perp (CHK)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $HK \perp (SBC)$.

Có $\begin{cases} BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK \\ SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $BC \perp (SAB)$.

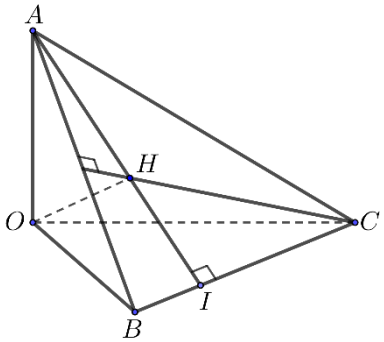
Giả sử $BC \perp (SAB)$, suy ra $CB \perp AB$ (mâu thuẫn giả thiết $K \neq B$).

» **Chọn** SAI.

» Câu 25. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên (ABC). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BC \perp (AOH)$.		
(b)	$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.		
(c)	H là trực tâm ΔABC.		
(d)	$AH \perp (OBC)$.		

Lời giải



(a) $BC \perp (AOH)$.

Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$. (1)

Lại có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (AOH)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.

Gọi $I=AH\cap BC$.

Tam giác vuông AOI, có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OI^2}$.

Tam giác vuông BOC, có $\dfrac{1}{OI^2}=\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.

Từ đó suy ra $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) H *là trực tâm* ΔABC.

Từ $BC\perp(AOH)\Rightarrow BC\perp AH$.

Chứng minh tương tự ta có $AB\perp CH$. Vậy H là trực tâm ΔABC.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $AH\perp(OBC)$.

Giả sử $AH\perp(OBC)$.

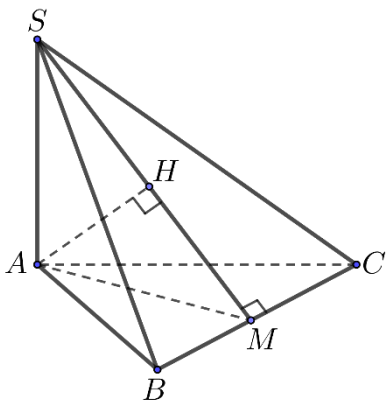
Theo chứng minh trên có $AO\perp(OBC)$. Suy ra A, O, H thẳng hàng: vô lí.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 26.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Biết $SA=a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng BC vuông góc với đường thẳng AH.		
(b)	Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng (SBC).		
(c)	Đường thẳng SH là hình chiếu của đường thẳng SA lên mặt phẳng (SBC).		
(d)	Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\dfrac{6a}{11}$.		

Lời giải



(a) Đường thẳng BC *vuông góc với đường thẳng* AH.

Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM nên $AH\perp SM$

Mặt khác: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \ (do\ SA \perp (ABC)) \\ AM, SA \subset (SAM) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Mà $AH \subset (SAM)$ nên $BC \perp AH$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Đường thẳng* AH *vuông góc với mặt phẳng* (SBC).

Ta có: $\begin{cases} AH \perp SM \\ AH \perp BC \\ SM, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Đường thẳng* SH *là hình chiếu của đường thẳng* SA *lên mặt phẳng* (SBC).

$AH \perp (SBC)$ nên SH là hình chiếu của SA lên (SBC)

» **Chọn** ĐÚNG.

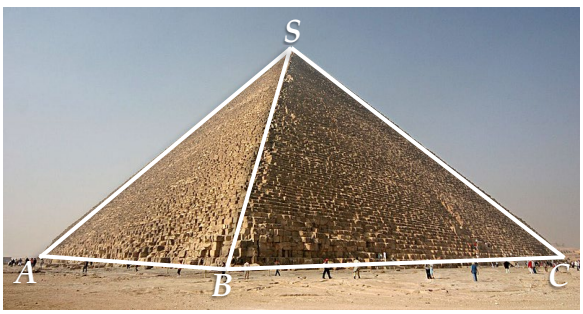
(d) *Độ dài đoạn thẳng* AH *bằng* $\frac{6a}{11}$.

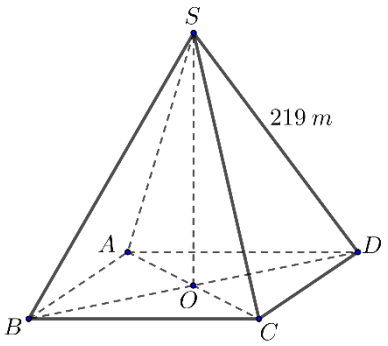
Xét tam giác SAM vuông tại A, ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{2}^2\right)} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{11}{6a^2}$.

$\Rightarrow AH^2 = \frac{6a^2}{11} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{66}}{11}$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 27.** Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng $230\,m$, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng $219\,m$ (kích thước hiện nay). Kim tử tháp Cheops được mô phỏng bởi hình chóp $S.ABCD$ với O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD như hình bên dưới. (Theo *britannica.com*). Khi đó:

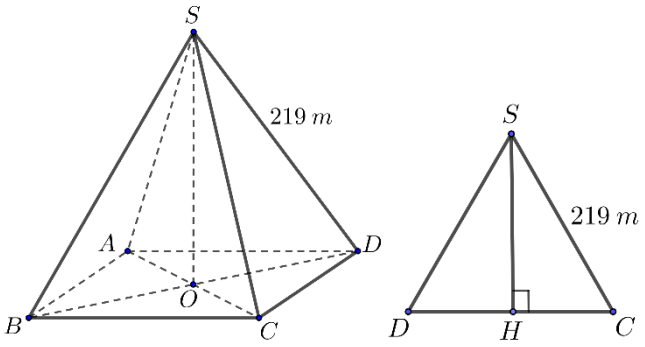




	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (gần đúng) là $48,3°$.		
(b)	Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$.		

(c)	Đường thẳng SO vuông góc cạnh đáy AB và BC.		
(d)	Biết rằng độ dài SO chính là chiều cao của kim tử tháp Cheops, ta tính được $SO \approx 146,67\,m$		

Lời giải



(a) *Góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (gần đúng) là $48,3°$.*

Tính góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB \parallel CD$.

Khi đó $(SC, AB) = (SC, CD) = \widehat{SCD}$.

Gọi H là trung điểm của CD, suy ra $DH = HC = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{230}{2} = 115\,m$.

Vì tam giác SCD có $SC = SD$ nên tam giác SCD cân tại S mà SH là trung tuyến nên SH là đường cao tam giác SCD.

Xét tam giác SHC vuông tại H, ta có: $\cos\widehat{SCD} = \cos\widehat{SCH} = \dfrac{HC}{SC} = \dfrac{115}{219} \Rightarrow \widehat{SCD} \approx 58,3°$.

Vậy góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tử tháp khoảng $58,3°$.

» **Chọn** SAI.

(b) *Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$.*

Xét ΔSAC cân tại S, ta có: SO là đường cao của ΔSAC nên $SO \perp AC$

Xét ΔSBD cân tại S, ta có: SO là đường cao của ΔSBD nên $SO \perp BD$

Ta có: $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \\ AC, BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Đường thẳng SO vuông góc cạnh đáy AB và BC.*

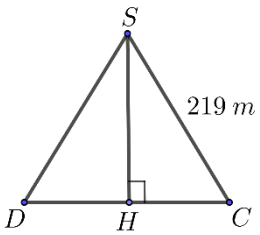
Do $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ AB,\ BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp AB,\ SO \perp BC$.

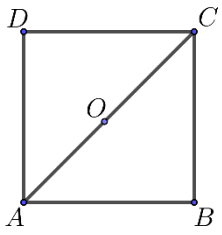
» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Biết rằng độ dài SO chính là chiều cao của kim tử tháp Cheops, ta tính được $SO \approx 146,67\,m$*

Do chiều cao của kim tử tháp chính là chiều cao của tam giác SAC nên cần tính cạnh SO, với O là trung điểm AC, ta có:

Tam giác SAC có cạnh $SA = SC$ nên tam giác SAC cân tại S.





Xét hình vuông $ABCD$, ta có: $AC = AB\sqrt{2} = 230\sqrt{2}\,m$.

$\Rightarrow AO = OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{230\sqrt{2}}{2} = 115\sqrt{2}\,m$.

Xét tam giác SOC vuông tại O, ta có:

$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{219^2 - \left(115\sqrt{2}\right)^2} = 7\sqrt{439}\,m \approx 146,67\,m$.

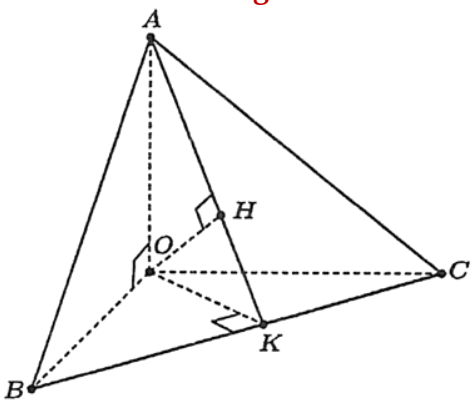
Vậy chiều cao của kim tử tháp Cheops khoảng $146,67\,m$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 28.** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi OK là đường cao của tam giác OBC và OH là đường cao của tam giác OAK. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$OA \perp (OBC)$		
(b)	$OB \perp (OAC)$		
(c)	Các cạnh đối nhau trong tứ diện $OABC$ thì vuông góc với nhau		
(d)	OH không vuông góc với mặt phẳng (ABC)		

Lời giải



(a) $OA \perp (OBC)$.

Ta có:

$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $OB \perp (OAC)$.

$\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Các cạnh đối nhau trong tứ diện $OABC$ thì vuông góc với nhau.

Vì $OA \perp (OBC)$ mà $BC \subset (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$.

Vì $OB \perp (OAC)$ mà $AC \subset (OAC) \Rightarrow OB \perp AC$.

Ta có: $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB)$, mà $AB \subset (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$.

Vậy các cặp cạnh đối nhau của tứ diện $OABC$ vuông góc với nhau.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) OH *không vuông góc với mặt phẳng* (ABC).

Ta có: $\begin{cases} BC \perp OK \\ BC \perp OA \ (OA \perp (OBC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAK)$;

mà $OH \subset (OAK) \Rightarrow OH \perp BC$.

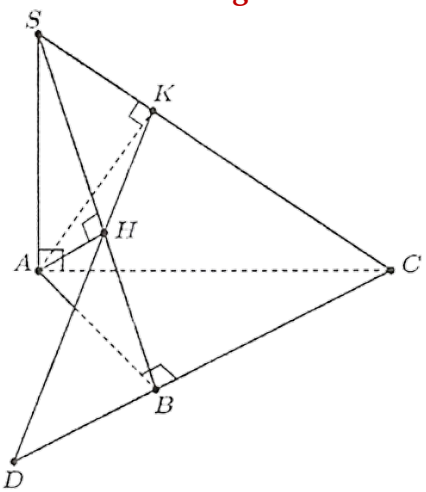
Khi đó: $\begin{cases} OH \perp AK \\ OH \perp BC \\ AK \cap BC = K \\ AK, BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC)$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tam giác SBC cân tại B.		
(b)	AH vuông góc với mặt phẳng (SBC).		
(c)	$(SC, HK) = 90^\circ$		
(d)	Giả sử HK cắt BC tại D. Khi đó $(AC, AD) = 90°$.		

Lời giải



(a) *Tam giác* SBC *cân tại* B.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA (\text{do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$,

mà $SB \subset (SAB)$ nên $BC \perp SB$ hay tam giác SBC vuông tại B.

» **Chọn** SAI.

(b) AH *vuông góc với mặt phẳng* (SBC).

Ta có: $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \ (BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $(SC, HK) = 90^\circ$

Ta có: $\begin{cases} SC \perp AK \\ SC \perp AH \ (AH \perp (SBC)) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$,

mà $HK \subset (AHK)$ nên $SC \perp HK$ hay $(SC, HK) = 90^\circ$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Giả sử HK *cắt* BC *tại* D. *Khi đó* $(AC, AD) = 90°$.

Vì $(AHK) \equiv (ADK)$ mà $SC \perp (AHK)$ nên $SC \perp (ADK) \Rightarrow SC \perp AD$. (1)

Mặt khác $SA \perp AD$ (do $SA \perp (ABC); AD \subset (ABC)$). (2)

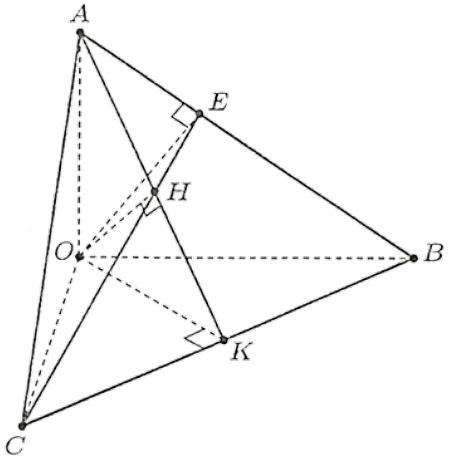
Từ (1) và (2) suy ra $AD \perp (SAC) \Rightarrow AD \perp AC$ hay $(AC, AD) = 90^\circ$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 30.** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Kẻ $OH \perp (ABC)$ tại H. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$		
(b)	Tam giác ABC có ba góc nhọn.		
(c)	H là trọng tâm của tam giác ABC.		
(d)	$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$		

Lời giải



(a) $OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$.

Ta có: $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$;

$\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC$;

$\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Tam giác ABC có ba góc nhọn.*

Kẻ đường cao OK của tam giác vuông OBC thì K nằm giữa B và C.

Vì $\begin{cases} BC \perp OK \\ BC \perp OA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAK) \Rightarrow BC \perp AK$

Do đó AK là đường cao của tam giác ABC, đồng thời K nằm giữa B và C

Nên các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ là góc nhọn.

Tương tự, kẻ đường cao OE của tam giác vuông OAB thì E nằm giữa hai điểm $A; B$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCE) \Rightarrow AB \perp CE$.

Do đó CE là đường cao tam giác ABC, đồng thời E nằm giữa hai điểm A và B

Nên các góc $\widehat{ABC}, \widehat{CAB}$ là góc nhọn.

Vậy tam giác ABC có ba góc đều là góc nhọn.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *H là trọng tâm của tam giác ABC.*

Ta có: $\begin{cases} BC \perp OA \\ BC \perp OH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH$.(1)

Tương tự $\begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp OH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCH) \Rightarrow AB \perp CH$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

» **Chọn** SAI.

(d) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Tam giác OBC vuông tại O có đường cao OK nên $\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.(3)

Tam giác OAK vuông tại O có đường cao OH nên $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OK^2}$.(4)

Thay (3) vào (4), ta được: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

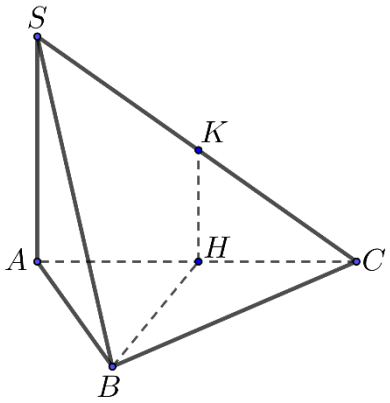
» **Chọn** ĐÚNG.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở B. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AC và SC. Góc của hai đường thẳng BH, SC bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

✓ Trả lời: 90



Tam giác ABC cân tại B có đường trung tuyến BH nên $BH \perp AC$. (1)

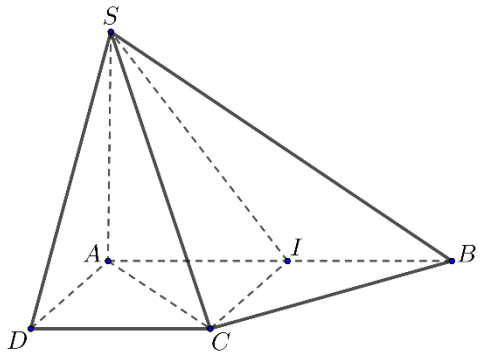
Mặt khác $BH \perp SA$ do $SA \perp (ABC)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAC)$, mà $SC \subset (SAC)$ nên $BH \perp SC$.

» Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2AD = 2CD = 2$. Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3a$. Diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác SBC lên mặt phẳng (SAB) là bao nhiêu?

Lời giải

✓ *Trả lời: 1,5*



Gọi I là trung điểm AB.

Dễ dàng chứng minh $AICD$ là hình vuông $\Rightarrow CI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C

Ta có: $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB)$

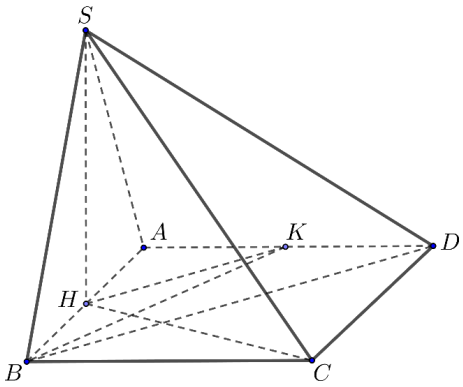
Hình chiếu của ΔSBC trên (SAB) là ΔSIB.

$S_{\Delta SIB} = \frac{1}{2}S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot SA \cdot AB = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{3}{2}$

» Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi H là trung điểm của AB và $SH \perp (ABCD)$; gọi K là trung điểm của cạnh AD. Xác định góc của hai đường thẳng AC và SK.

Lời giải

✓ *Trả lời: 90*

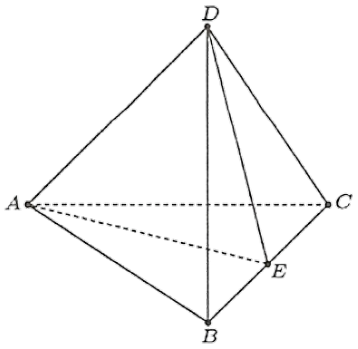


Vì HK là đường trung bình của tam giác ABD nên $HK//BD$,
Mà $BD\perp AC\Rightarrow HK\perp AC$. (1)
Mặt khác $SH\perp AC$ (do $SH\perp(ABCD)$).(2)
Từ (1) và (2) suy ra $AC\perp(SHK)$.
Ta lại có $SK\subset(SHK)$ nên $AC\perp SK$ hay $(AC,SK)=90^\circ$.

» Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC$ và $DB=DC$. Xác định góc của hai đường thẳng BC,AD.

Lời giải

✓ Trả lời: 90

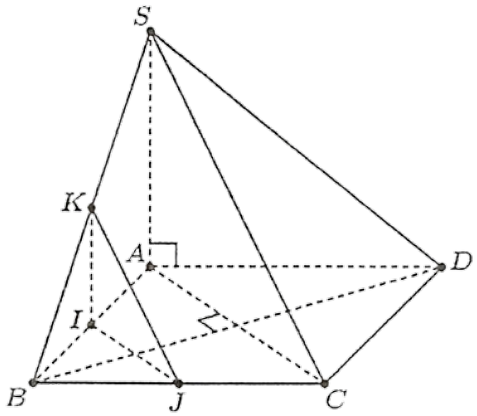


Gọi E là trung điểm đoạn BC.
Vì ΔABC cân tại A có AE là đường trung tuyến nên $AE\perp BC$. (1)
Tương tự, ΔDBC cân tại D có DE là đường trung tuyến nên $DE\perp BC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $BC\perp(ADE)$, mà $AD\subset(ADE)$ nên $BC\perp AD$.

» Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA\perp(ABCD)$. Gọi I,J,K lần lượt là trung điểm của AB,BC và SB. Xác định góc của hai đường thẳng KJ,BD.

Lời giải

✓ Trả lời: 90



Vì $SA \perp (ABCD)$

Nên hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ là AC, mà $BD \perp AC$ nên $BD \perp SC$.

Từ đó, ta có $BD \perp (SAC)$.

Ta có IK, IJ lần lượt là đường trung bình của các tam giác SAB, ABC

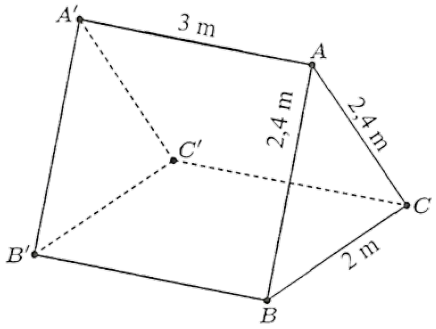
Nên $IK // SA$; $IJ // AC$.

Suy ra $(IJK) // (SAC)$.

Khi đó: $\begin{cases} (IJK) // (SAC) \\ BD \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (IJK)$,

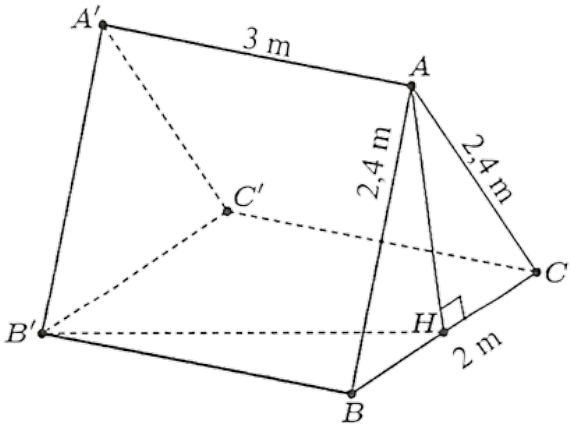
mà $KJ \subset (IJK)$ nên $KJ \perp BD$.

» Câu 36. Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Cho biết $AB = AC = 2,4\,m; BC = 2\,m; AA' = 3\,m$. Diện tích hình chiếu của tam giác ABA' trên mặt phẳng $(BCC'B')$ bao nhiêu m^2?



Lời giải

✓ Trả lời: 1,5



Gọi H là trung điểm BC thì $AH \perp BC$ (do tam giác ABC cân tại A).

Mặt khác $AH \perp BB'$ (do $ABC \cdot A'B'C'$ là lăng trụ đứng có $BB' \perp (ABC)$).

Suy ra $AH \perp (BB'C'C)$.

Từ đó ta có HB' là hình chiếu của AB' trên $(BCC'B')$

và BH là hình chiếu của AB trên $(BCC'B')$.

Vậy tam giác $BB'H$ là hình chiếu của tam giác ABB' trên $(BCC'B')$.

Dễ thấy các mặt bên của lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ là các hình chữ nhật,

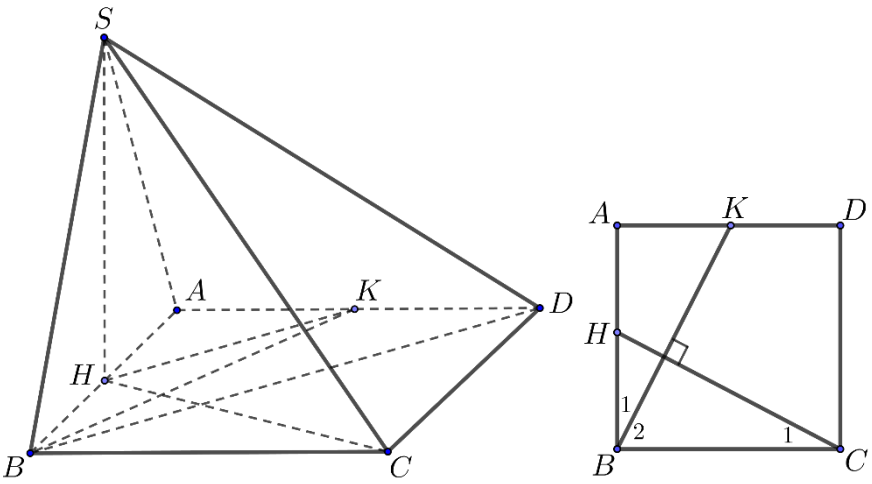
Suy ra $\widehat{B'BH} = 90^\circ$.

Diện tích tam giác $BB'H$ là: $S_{BB'H}=\frac{1}{2}BB'\cdot BH=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1=1,5\,m^2$.

» Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi H,K lần lượt là trung điểm của AB,AD. Biết $SH\perp(ABCD)$. Góc giữa hai đường thẳng BK,SC bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

✓ Trả lời: 90



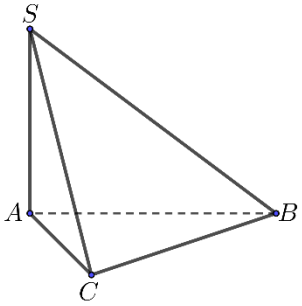
Xét $\Delta BCH,\Delta ABK$ có $\widehat{CBH}=\widehat{BAK}=90^0$; $BC=AB$; $BH=AK$.

Suy ra $\Delta BCH=\Delta ABK\Rightarrow \widehat{B_1}=\widehat{C_1}$.

Lại có $\widehat{B_1}+\widehat{B_2}=90^0\Rightarrow \widehat{C_1}+\widehat{B_2}=90^0\Rightarrow BK\perp CH$

Ta có : $\left.\begin{matrix}BK\perp CH\\BK\perp SH\end{matrix}\right\}\Rightarrow BK\perp(SCH)\Rightarrow BK\perp SC$

» Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB=a\sqrt{3}$ và $BC=a$ (minh họa hình vẽ bên). Tính góc giữa hình chiếu của đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) và AB



Lời giải

✓ Trả lời: 54,56

Ta có: $BC\perp AB,BC\perp SA$ nên $BC\perp(SAB)$

Vậy hình chiếu của SC và mặt phẳng (SAB) là SB

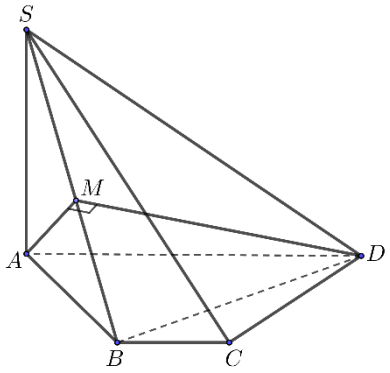
Khi đó $\left(\widehat{SB;AB}\right)=\widehat{SBA}$.

Xét ΔSAB: $\tan\widehat{SBA}=\frac{SA}{AB}=\frac{2a}{a\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{SBA}\approx 54,56$

» Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh a. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B và ở trên SB sao cho AM vuông góc với MD. Khi đó, tỉ số $\dfrac{SM}{SB}$ bằng

Lời giải

✓ *Trả lời: 0,75*



Áp dụng tính chất nửa lục giác đều, ta có $BD\perp AB$.

Mà hình chiếu vuông góc của đường thẳng AM lên $(ABCD)$ là AB.

Vậy $BD\perp AM$.

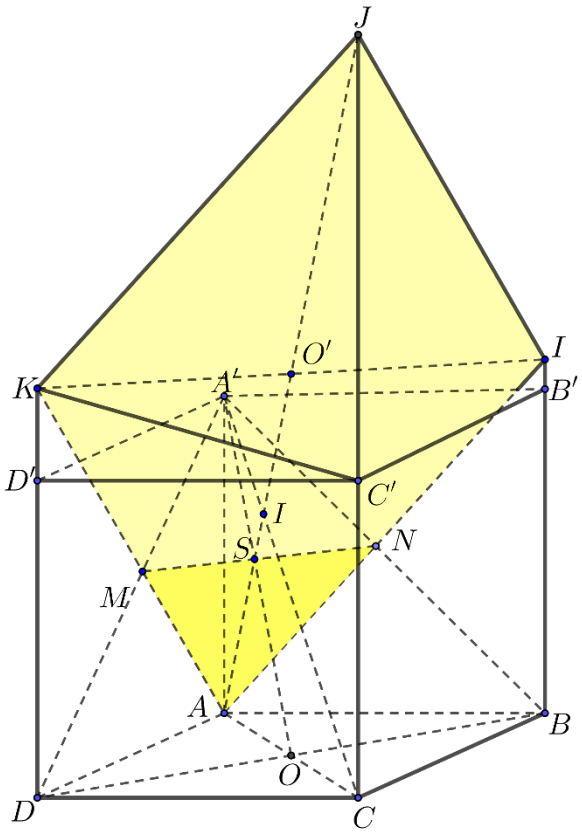
Kết hợp $AM\perp MD$, ta được $AM\perp(SBD)$. Suy ra $AM\perp SB$.

Khi đó $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SM.SB}{SB^2}=\dfrac{SA^2}{SB^2}=\dfrac{3a^2}{4a^2}=\dfrac{3}{4}$.

» Câu 40. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $AA'=3a$. Mặt phẳng qua A vuông góc với $A'C$ cắt các cạnh BB',CC',DD' lần lượt tại I,J,K. Tính diện tích thiết diện $AIJK$ (làm tròn đến số thập phân thứ 3)

Lời giải

✓ *Trả lời: 1,105*



Dựng $AM \perp A'D$

Ta có: hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $(A'D'DA)$ là $A'D \Rightarrow AM \perp A'C$,

Tương tự, dựng $AN \perp A'B$ ta có $\Rightarrow AN \perp A'C$.

Vậy mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là (AMN).

Kéo dài $AM \cap DD' = \{K\}, AN \cap BB' = \{I\}$,

và $AS \cap CC' = \{J\}$ với $\{S\} = MN \cap A'O$.

Thiết diện $AIJK$ là thiết diện cần tìm.

Dễ thấy $ABCD$ là hình chiếu vuông góc của $AIJK$ lên $(ABCD)$.

Ta có $S_{ABCD} = S_{AIJK}.\cos\left((ABCD),(AIJK)\right)$.

Dễ thấy $\left[(AIJK);(ABCD)\right] = \left(\widehat{A'A;A'C}\right) = \widehat{AA'C}$.

Xét $\Delta A'AC$ có $\cos\widehat{AA'C} = \dfrac{A'A}{A'C} = \dfrac{3a}{a\sqrt{11}} = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

Vậy $S_{AIJK} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos\left((ABCD),(AIJK)\right)} \Rightarrow S_{AIJK} = \dfrac{a^2\sqrt{11}}{3}$.

Chương 08
Bài 3. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

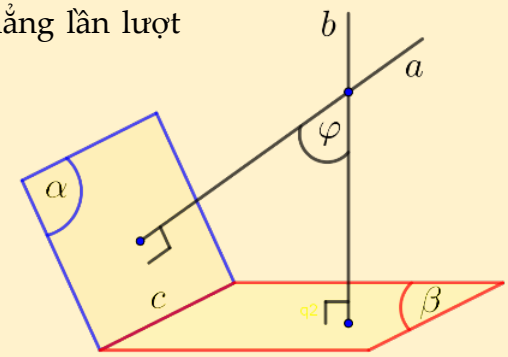
A Lý thuyết

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa:

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left.\begin{array}{l} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$



Chú ý:

+ Nếu $\left[\begin{array}{l} (\alpha)//(\beta) \\ (\alpha)\equiv(\beta) \end{array}\right. \Rightarrow ((\alpha),(\beta))=0°.$

+ $0°\le\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)\le 90°$.

2. Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa:

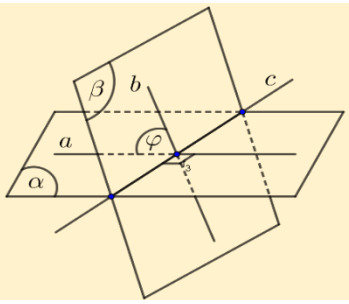
Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

$$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=90°$$

Định nghĩa:

Cho 2 mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến c

$$\begin{cases} a\subset(\alpha),a\perp c \\ b\subset(\beta),b\perp c \end{cases}\Rightarrow((\alpha),(\beta))=(a,b)$$



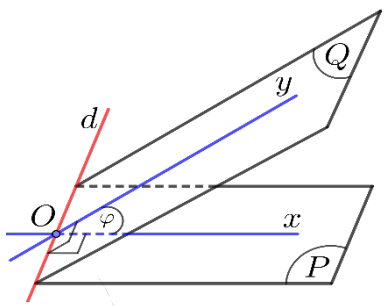
Cách xác định góc dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau:

⌘ **Bước 1.** Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

⌘ **Bước 2.** Chọn điểm O trên d, từ đó:

- Trong (P) dựng $Ox\perp d$.
- Trong (Q) dựng $Oy\perp d$.

Khi đó: $\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\left(\widehat{Ox,Oy}\right)$.



Lưu ý

Việc xác định điểm O có thể được thực hiện theo cách sau:

(1) Chọn điểm M trên (Q) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu H của nó trên (P).

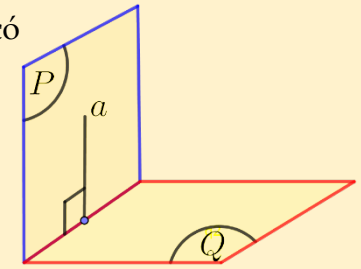
(2) Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{MOH}$.

▶ **Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc:**

Định lý 1:

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau $\Leftrightarrow$ trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$

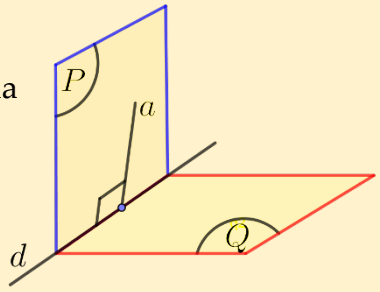


3. Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc

Định lý 2:

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong (Q) mà *vuông góc với giao tuyến* của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (P).

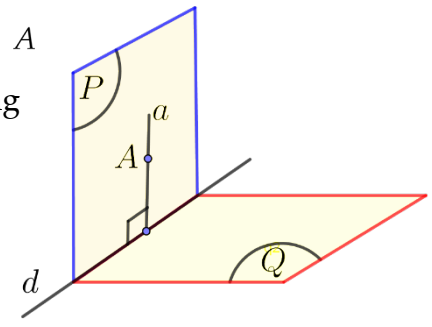
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \Rightarrow a \perp (P) \\ (Q) \supset a \perp d \end{cases}$$



Nhận xét

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và thì A là một điểm trong (P) thì đường thẳng đi qua A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong mặt phẳng (P).

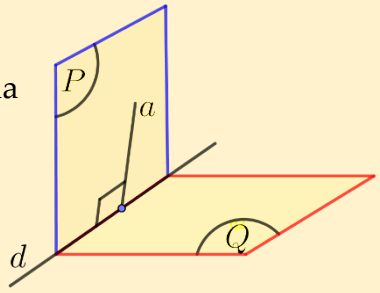
Kí hiệu: $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P).$



Định lý 2:

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong (Q) mà *vuông góc với giao tuyến* của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (P).

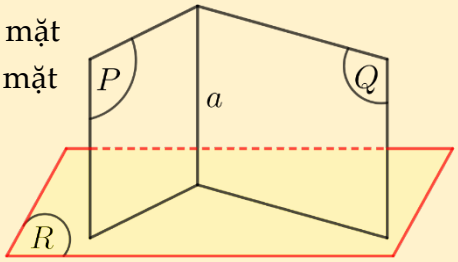
$$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=d\Rightarrow a\perp(P)\\(Q)\supset a\perp d\end{cases}$$



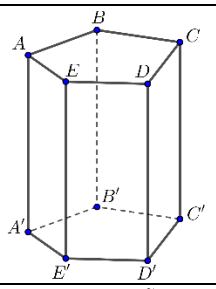
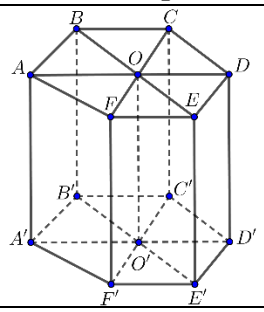
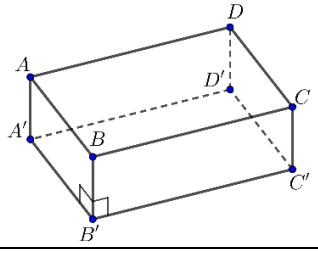
Định lý 3:

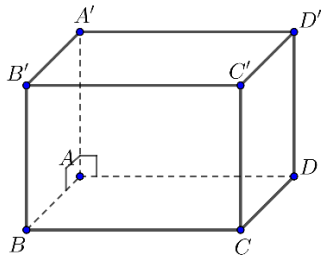
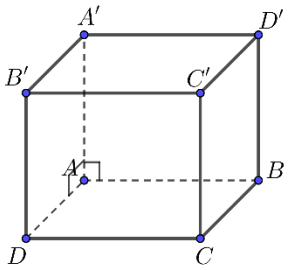
Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng sẽ vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

$$\begin{cases}(P)\cap(Q)=a\\(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$



4. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

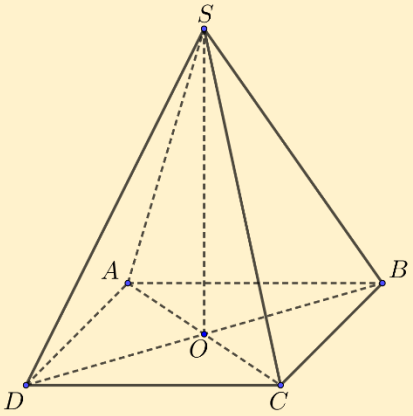
Tên	Hình vẽ	Tính chất
Hình lăng trụ đứng		Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy. • Các mặt bên là các hình chữ nhật. • Các mặt bên vuông góc với hai đáy.
Hình lăng trụ đều		Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
Hình hộp đứng		Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

Hình hộp chữ nhật		Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật. Đường chéo $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ với a,b,c là 3 kích thước.
Hình lập phương		Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

5. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

Định nghĩa hình chóp đều:

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

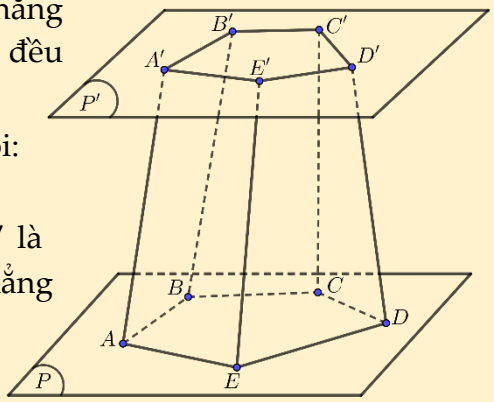


Tính chất:

- Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

Định nghĩa hình chóp cụt đều:

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.



▶ Trong hình chóp cụt đều $ABCDE.A'B'C'D'E'$, ta gọi:

+ Các điểm A', B', C', D', E' là các đỉnh.
+ Đa giác $ABCDE$ là đáy lớn, đa giác A', B', C', D', E' là đáy nhỏ. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.

▶ Nhận xét:

- Cạnh của hai đa giác là cạnh đáy. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một
- Các hình thang cân $AA'EE', AA'B'B, BB'C'C, C'CDD', DD'E'E$ là các mặt bên.
- Cạnh bên của mặt bên gọi là cạnh bên của hình chóp cụt đều. Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.
- Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là đường cao. Độ dài đường cao là chiều cao.

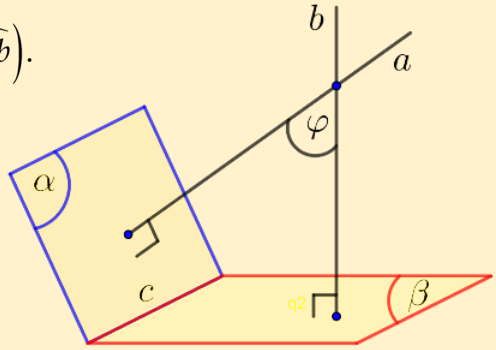
B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng bằng cách dùng định nghĩa

Phương pháp

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left.\begin{array}{l} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$



Chú ý:

+ Nếu $\left[\begin{array}{l} (\alpha)//(\beta) \\ (\alpha)\equiv(\beta) \end{array}\right. \Rightarrow \left((\alpha),(\beta)\right)=0°.$

+ $0°\le\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)\le 90°$.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

Lời giải

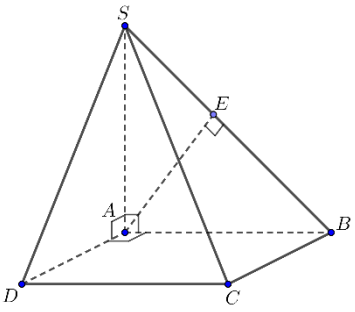
Ta có $\begin{cases} AB\perp AD \\ AB\perp SA \end{cases} \Rightarrow AB\perp(SAD).$

Gọi E là hình chiếu của A lên SB, dễ thấy $AE\perp(SBC)$.

Vậy $\left[\widehat{(SAD);(SBC)}\right]=\left(\widehat{AB;AE}\right)=\widehat{BAE}$

Ta có ΔSAB vuông cân tại A nên $\widehat{SBA}=45^o. \Rightarrow \widehat{BAE}=45^o$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng 45°.



Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SDC) bằng?

Lời giải

Gọi H,K là trung điểm của $AB;CD$.

Do $(SAB)\perp(ABCD)$ nên SH là đường cao của hình chóp.

Ta có $HK \perp AB, HK \perp SH \Rightarrow HK \perp (SAB)$ (1)

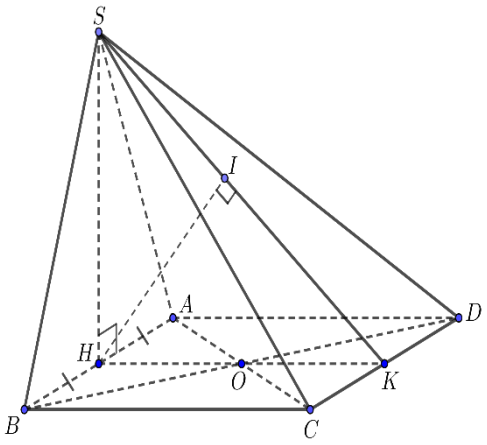
Dựng $HI \perp SK \Rightarrow HI \perp (SCD)$ (2).

Từ (1) và (2) $\rightarrow \left[\widehat{(SAB);(SDC)}\right] = \left(\widehat{HK, HI}\right) = \widehat{IHK}$.

Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; HK = a.$

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.a}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $\cos\widehat{IHK} = \dfrac{HI}{HK} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.



Dạng 2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa trên giao tuyến

Phương pháp

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm

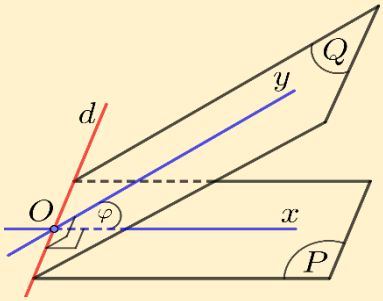
Cách xác định góc dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau:

Bước 1. Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

Bước 2. Chọn điểm O trên d, từ đó:

- Trong (P) dựng $Ox \perp d$.
- Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

Khi đó: $\widehat{((P),(Q))} = \widehat{(Ox,Oy)}$.



Ví dụ 2.1.

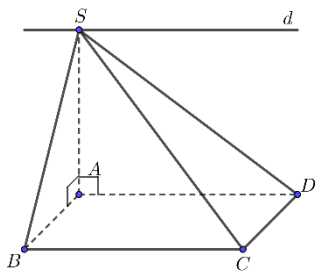
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng

Lời giải

Mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SAD) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng $d // BC // AD$.

Vì $SA \perp d, SB \perp d$ nên $\widehat{((SBC),(SAD))} = \widehat{(SA,SB)} = \widehat{ASB}$.

Vậy ΔSAB vuông cân tại A nên $\widehat{ASB} = 45^o$.



Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?

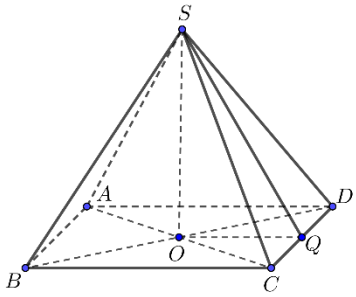
Lời giải

Gọi Q là trung điểm $BC \to OQ \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{(SQ,OQ)} = \widehat{SQO}$.

ΔSOQ có $\tan\widehat{SQO} = \dfrac{SO}{OQ} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SQO} = 60^o$.

Vậy (SBC) hợp với $(ABCD)$ một góc 60°.



Ví dụ 2.3.

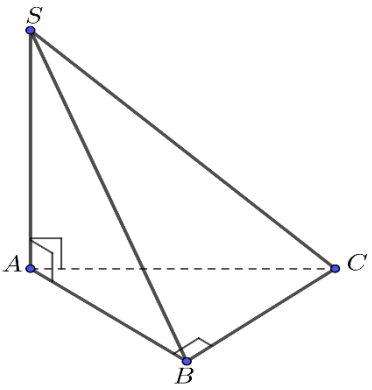
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$, $SA = \sqrt{3}cm, AB = 1cm$. Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy góc bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$ mà $AB \perp BC$.

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB \perp BC$.

$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AB \perp BC \\ SB \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SBA}.$$



$\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^o$.

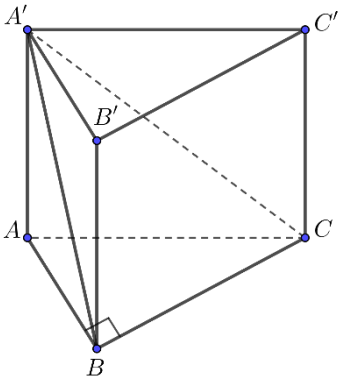
Vậy góc giữa (SBC) và mặt đáy (ABC) bằng 60^0.

Ví dụ 2.4.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc hợp bởi $(A'BC);(ABC)$. Khi đó, tính $\tan\varphi$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp A'B$.



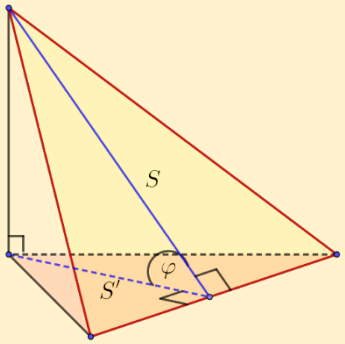
Do $\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ A'B \subset (A'BC); A'B \perp BC \\ AB \subset (ABC); AB \perp BC \end{cases}$ nên $\widehat{A'BA} = \varphi$ là góc hợp bởi $(A'BC);(ABC)$.

Xét $\Delta A'BC$ vuông tại A ta có $\tan\varphi = \dfrac{A'A}{BA} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

Dạng 3. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa vào định lý hình chiếu

Phương pháp

Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (α) và S' là diện tích hình chiếu của H' của H trên mặt phẳng (β) thì $S' = S.\cos\varphi$ trong đó $\varphi = \left[\widehat{(\alpha);(\beta)}\right]$.



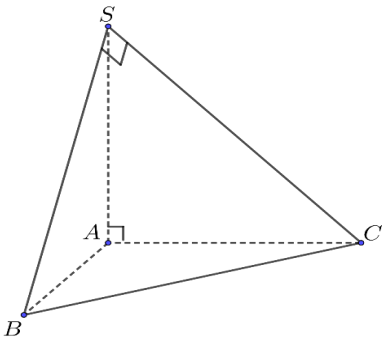
Ví dụ 3.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác SBC vuông cân tại S, có $SB = a$. Mặt phẳng (SBC) hợp với đáy một góc $30°$. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải

- Do ΔSBC vuông cân tại S nên $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SB.SC = \frac{a^2}{2}$
- $SA \perp (ABC)$ nên ΔABC là hcvg của ΔSBC lên (ABC)
- Gọi φ là góc giữa (SBC) và (ABC) ta có : $\varphi = 30°$
- Áp dụng tính chất diện tích hình chiếu của đa giác, ta có:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta SBC}.\cos\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\cos 30° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \to S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Ví dụ 3.2.

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

Lời giải

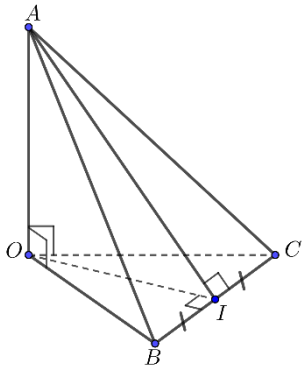
Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$ mà $OA \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases}(OBC)\cap(ABC) = BC \\ BC \perp AI; BC \perp OI\end{cases} \Rightarrow \left((OBC),(ABC)\right) = (OI, AI) = \widehat{OIA}$.

Ta có: $OI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét ΔOAI vuông tại A có $\tan\widehat{OIA} = \frac{OA}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OIA} = 30^0$.

Vậy $\left((ABC),(OBC)\right) = 30^0$.



Dạng 4. Tổng hợp các phương pháp xác định góc giữa hai mặt phẳng

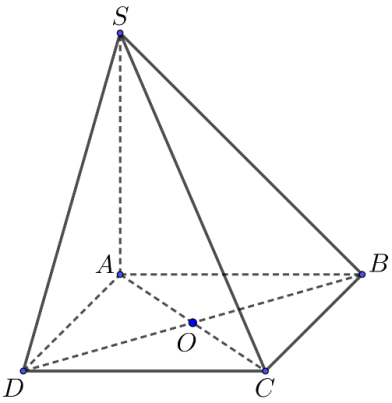
Ví dụ 4.1.

Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AB=2a$, $AD=a$, $SA=3a$ và SA vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng:

(1) (SBC) và $(ABCD)$ (2) (SBD) và $(ABCD)$ (3) (SBC) và (SAC)

Lời giải

(1) (SBC) và $(ABCD)$

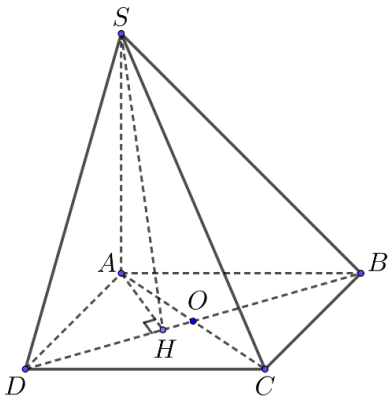


- $(SBC)\cap(ABCD)=BC$
- Do $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA\perp(ABCD)$
- Nên: $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$
- Ta có $\begin{cases}SB\subset(SBC),\ SB\perp BC\\ AB\subset(ABCD),\ AB\perp BC\end{cases}$

$\Rightarrow\widehat{((SBC),(ABCD))}=\widehat{(AB,SB)}=\widehat{SBA}$

- Xét ΔSAB A: $\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\widehat{SBA}=33.69^\circ\Rightarrow\widehat{((SBC),(ABCD))}=33,69^\circ$.

(2) (SBD) và $(ABCD)$



- Gọi H là hình chiếu của A trên BD,

Suy ra: $\begin{cases}BD\perp AH\\ BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAH)\Rightarrow BD\perp SH$

- $(SBD)\cap(ABCD)=BD$
- Ta có $\begin{cases}SH\subset(SAH),\ SH\perp BD\\ AH\subset(ABCD),\ AH\perp BD\end{cases}$

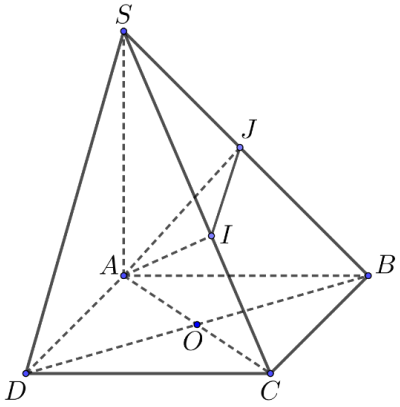
$\Rightarrow\widehat{((SBD),(ABCD))}=\widehat{(AH,SH)}=\widehat{AHS}$

- Xét ΔABD vuông tại A: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{AB^2}\Rightarrow AH=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$
- Xét ΔSAH A: $\tan\widehat{AHS}=\dfrac{SA}{AH}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\widehat{AHS}=73,4^\circ\Rightarrow\widehat{((SBD),(ABCD))}=73,4^\circ$

(3) (SBC) và (SAC)

- Gọi I,J lần lượt là hình chiếu của A trên AC và AB.

Ta có: $BC \perp (SAB)$ (cmt) mà $AJ \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AJ$



- $\begin{cases} AJ \perp SB \\ AJ \perp BC \end{cases} \Rightarrow AJ \perp (SBC)$ mà $IJ \subset (SBC) \Rightarrow \begin{cases} AJ \perp IJ \\ AJ \perp SC \end{cases}$
- $\begin{cases} SC \perp AI \\ SC \perp AJ \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AIJ) \Rightarrow SC \perp AI; SC \perp IJ$
- Ta có $\begin{cases} IJ \subset (SBC),\ IJ \perp SC \\ AI \subset (SAC),\ AI \perp SC \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((SBC),(SAC))} = \widehat{(AI,IJ)} = \widehat{AIJ}$

- Xét ΔSAC vuông tại A: $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{1}{5a^2} = \dfrac{14}{45a^2} \Rightarrow AI = \sqrt{\dfrac{45}{14}}a$
- Xét ΔSAB vuông tại A: $\dfrac{1}{AJ^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{13}{36a^2} \Rightarrow AJ = \sqrt{\dfrac{36}{13}}a$
- Xét ΔAIJ vuông tại J: $\sin \widehat{AIJ} = \dfrac{AJ}{AI} = \sqrt{\dfrac{56}{65}} \Rightarrow \widehat{AIJ} = 68{,}15°$

$\Rightarrow \widehat{((SBC),(SAC))} = \widehat{AIJ} = 68{,}15°$

Ví dụ 4.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA \perp (ABCD)$.

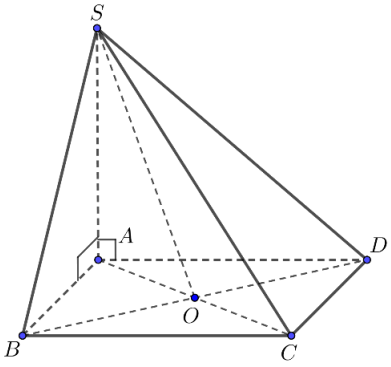
Tính cosin góc giữa mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Lời giải

Gọi O là tâm của hình vuông.

Ta có: $\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SO \perp BD; AO \perp BD \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((SBD),(ABCD))} = \widehat{(SO,AO)} = \widehat{SOA}$.



Xét ΔSAO vuông tại A: $\cos \widehat{SOA} = \dfrac{AO}{SO} = \dfrac{\frac{1}{2}AC}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 4.3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA = a$ và $SA \perp (ABC)$, $AB = BC = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(SAC);(SBC)$.

Lời giải

Ta có $(SAC)\cap(SBC)=SC$.

Gọi F là trung điểm AC thì $BF\perp(SAC)$.

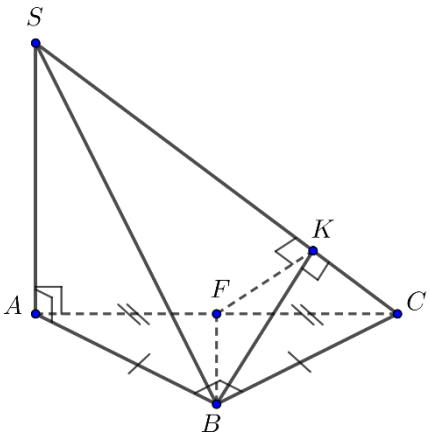
Dựng $BK\perp SC$ tại $K\Rightarrow SC\perp(BKF)$

$\Rightarrow\widehat{((SAC),(SBC))}=\widehat{(KB,KF)}=\widehat{BKF}$

Dễ thấy $\Delta CFK\backsim\Delta CSA\Rightarrow\dfrac{FK}{FC}=\dfrac{SA}{SC}\Rightarrow FK=\dfrac{FC.SA}{SC}=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

ΔBFK vuông tại F có $\tan\widehat{BKF}=\dfrac{FB}{FK}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{BKF}=60^o$.

Vậy góc giữa $(SAC);(SBC)$ bằng $60°$.



Ví dụ 4.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(SBD);(ABCD)$. Biết $\tan\alpha=\sqrt{2}$, tính góc giữa $(SAC);(SBC)$.

Lời giải

Gọi O là tâm đáy và K là hình chiếu của O trên SC.

Do $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}$ nên $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SO$.

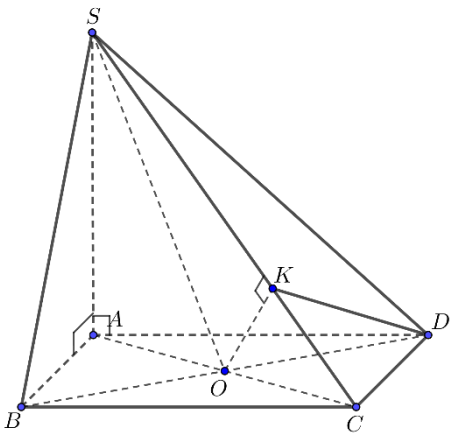
$\Rightarrow\left[\widehat{(SBD);(ABCD)}\right]=\widehat{SOA}=\alpha$.

Ta có $\tan\alpha=\dfrac{SA}{OA}=\sqrt{2}\Rightarrow SA=OA.\sqrt{2}=a$.

Do $\begin{cases}SC\perp BD\\SC\perp OK\end{cases}$ nên $SC\perp BK\Rightarrow\left[\widehat{(SAC);(SBC)}\right]=\widehat{BKO}$.

Ta có $\tan\widehat{BKO}=\dfrac{BO}{OK}=\dfrac{BO}{\dfrac{1}{2}d(A,SC)}=\dfrac{2BO}{\dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}}=\sqrt{3}$.

Suy ra $\widehat{BKO}=60^o$.



Ví dụ 4.5.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$.

Tính góc giữa các mặt phẳng:

(1) (SBC) và $(ABCD)$

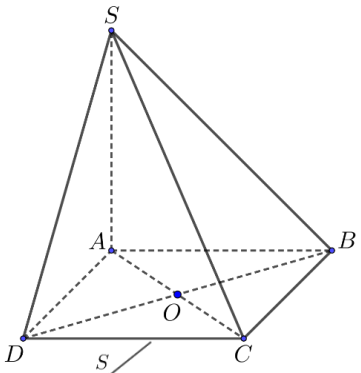
(2) (SBC) và (SAD)

(3) (SAB) và (SBD)

(4) (SBC) và (SAC)

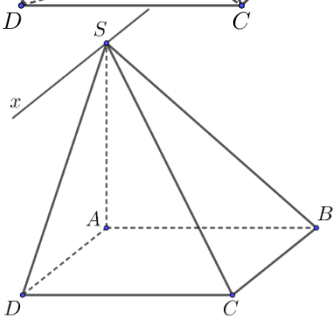
Lời giải

(1) *Góc giữa* (SBC) *và* $(ABCD)$.



- Ta có $(SBC)\cap(ABCD)=BC$.
- Ta có $\begin{cases}SA\perp BC\\AB\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$.
- $\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC\\SB\perp BC;AB\perp BC\end{cases}\Rightarrow\widehat{((SBC);(ABCD))}=\widehat{SBA}$
- Tam giác SAB vuông cân tại A suy ra $\widehat{SBA}=45°$.

(2) *Góc giữa* (SBC) *và* (SAD).

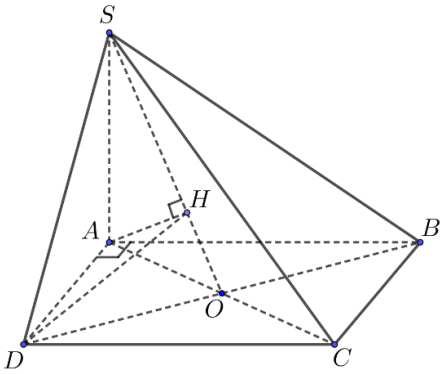


- Kẻ $Sx//AD//BC$ mà $SA\perp(ABCD)$ nên $SA\perp Sx;SB\perp Sx$
- Xét (SAD) và (SBC) có S là điểm chung và $AD//BC$

$\Rightarrow(SAD)\cap(SBC)=Sx//AD//BC$ và $SA\perp Sx;SB\perp Sx$

- Góc giữa (SBC) và (SAD): $\widehat{ASB}=45°$ *(do* ΔSAB *vuông cân tại* A*)*.

(3) *Góc giữa* (SAB) *và* (SBD).

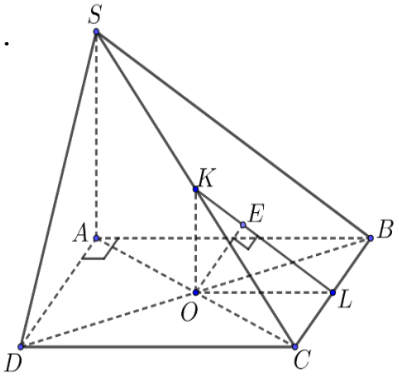


- Kẻ $AC\cap BD=O$
- Ta có: $\begin{cases}AC\perp BD\\SA\perp BD\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow(SBD)\perp(SAC)$.
- Dựng $AH\perp SO\Rightarrow AH\perp(SBD)$.
- Ta có $AI\perp(SBD)$, $AD\perp(SAB)$

$\Rightarrow\widehat{((SBD),(SAB))}=\widehat{(AH,AD)}=\widehat{DAH}$

- ΔSAO vuông tại A: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AO^2}=\dfrac{3}{a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a}{\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Vì $AH\perp(SBD)\Rightarrow AH\perp HD$ nên $\cos\widehat{DAH}=\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{DAH}=arc\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

(4) *Góc giữa* (SBC) *và* (SAC).



- Vẽ $OK//SA$; $OL//AB\Leftrightarrow OK\perp BC,OL\perp BC\Rightarrow BC\perp(OLK)$.
- Vẽ $OE\perp KL\Rightarrow BC\perp OE\Rightarrow OE\perp(SBC)$

Mà $OB\perp(SAC)\Rightarrow\widehat{(SAC);(SBC)}=\widehat{BOE}$.

- Mà $OK=\dfrac{1}{2}SA=\dfrac{a}{2};OL=\dfrac{a}{2}$.
- ΔKOL vuông tại O có $\dfrac{1}{OE^2}=\dfrac{1}{OL^2}+\dfrac{1}{OK^2}\Rightarrow OE=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$.
- $OB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$
- Vì $OE\perp(SBC)\Rightarrow BE\perp EO\Rightarrow\cos\widehat{BOE}=\dfrac{OE}{OB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BOE}=45°$.

Dạng 5. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta dùng một trong các cách sau:

▶ **Cách 1.** Xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0.

$$\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=90^0 \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta).$$

▶ **Cách 2.** Chứng minh trong mặt này có một đường thẳng vuông góc với mặt kia.

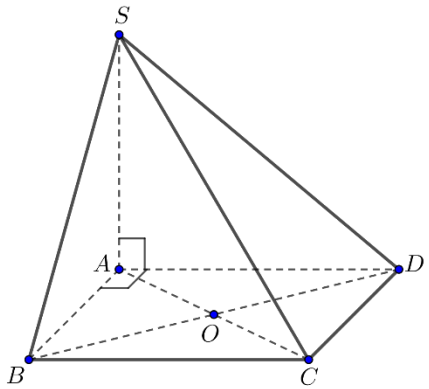
$$\begin{cases} a\subset(\alpha) \\ a\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta).$$

Ví dụ 5.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA=a$, các cạnh còn lại bằng b.
Chứng minh $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

Lời giải

Gọi $\{O\}=AC\cap BD$.
Vì $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng b
Nên $ABCD$ là một hình thoi.
Suy ra $AC\perp BD$ nên O là trung điểm của BD.
Mặt khác $SB=SD$ nên ΔSBD cân tại S.
Do đó $SO\perp BD$.
Vậy $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SO \end{cases} \Rightarrow BD\perp(SAC)$
Suy ra $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.



Ví dụ 5.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với đáy . Chứng minh $(SAB)\perp(SAD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

(1) Chứng minh: $(SAB)\perp(SAD)$ (2) Chứng minh: $(SAC)\perp(SBD)$

Lời giải

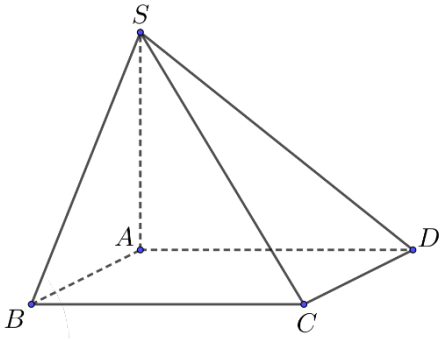
(1) *Chứng minh:* $(SAB)\perp(SAD)$.

- Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AB$ (1).
- Ta có $AB\perp AD$ ($ABCD$ là hình vuông) (2).

$\xrightarrow{(1)\&(2)} AB\perp(SAD), AB\subset(SAB)\Rightarrow(SAB)\perp(SAD)$.

(2) *Chứng minh:* $(SAC)\perp(SBD)$.

- Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BD$ (1).
- Ta có $BD\perp AC$ ($ABCD$ là hình vuông) (2).



$\xrightarrow{(1)\&(2)} BD \perp (SAC), BD \subset (SBD) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC).$

Ví dụ 5.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AHK)$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} SA \perp CD (do\ SA \perp (ABCD)) \\ CD \perp AD \end{cases}$

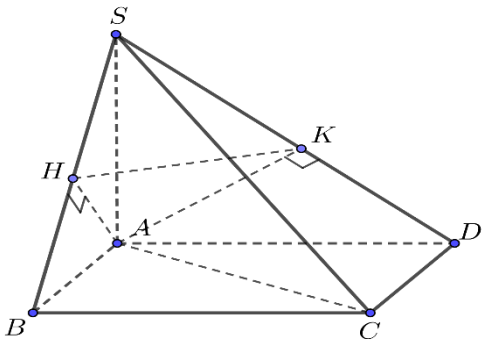
Suy ra $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK.$

Mà $AK \perp SD$ nên $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.

Tương tự ta chứng minh được $AH \perp SC.$

Do đó $SC \perp (AHK).$

Mà $SC \subset (SAC)$ nên $(SAC) \perp (AHK).$



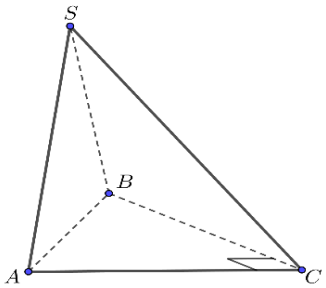
Ví dụ 5.4.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAC)$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} (SAC) \cap (ABC) = AC \\ (SAC) \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC), BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$

Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp SAC.$

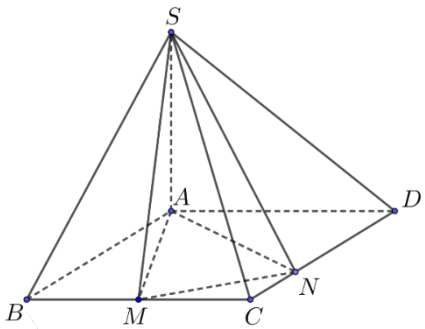


Ví dụ 5.5.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N là các điểm thuộc BC và CD sao cho $BM = \frac{a}{2}, DN = \frac{3a}{4}$. Chứng minh: $(SAM) \perp (SMN)$.

Lời giải

- Ta có: $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp MN$.
- ΔABM nên $AM^2 = AB^2 + BM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$.
- ΔCMN nên $MN^2 = CM^2 + CN^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16} = \frac{5a^2}{16}$.
- ΔADN nên $AN^2 = AD^2 + DN^2 = a^2 + \frac{9a^2}{16} = \frac{25a^2}{16}$.





♦ Vì $AM^2+MN^2=\frac{5a^2}{4}+\frac{5a^2}{16}=\frac{25a^2}{16}=AN^2$

$\Rightarrow \Delta AMN$ vuông tại M.

$\Rightarrow AM\perp MN$

$\Rightarrow MN\perp(SAM)\Rightarrow(SAM)\perp(SMN)$.

Dạng 6. Thiết diện

Phương pháp

Mặt phẳng (P) đi qua một điểm và vuông góc đường thẳng a cắt hình chóp theo thiết diện.

- Xác định mặt phẳng (P) có tính chất gì?
  Tìm đường thẳng song song với (P).
- Tìm các đoạn giao tuyến của (P) và các mặt của hình chóp:
- Sử dụng tính chất về giao tuyến song song: $\begin{cases} a \subset (Q) \\ a // (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = m // a.$

Ví dụ 6.1.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a, SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SI cắt hình chóp đã cho theo một thiết diện. Tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải

Kẻ $AH \perp SI \to AH \subset (P)$.

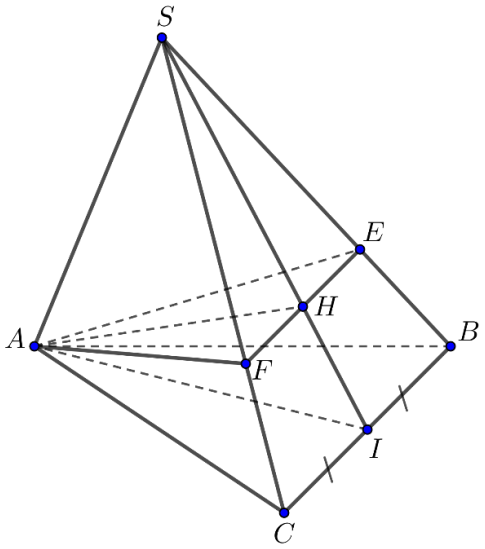
Ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH.$

Mà $(P) \perp SI$ nên $(P) // BC$.

Lại có $(P) \cap (SBC) = d // BC \Rightarrow H \in d$.

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của d và SB, SC.

$\Rightarrow$ Thiết diện cần tìm là ΔAEF.



Ta có $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2},$

$SI = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

$S_{\Delta SAI} = \dfrac{\sqrt{5}a^2}{8} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}.$

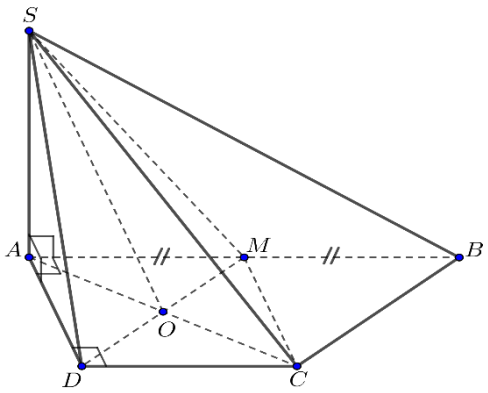
Ta có $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{SH}{SI} \Rightarrow EF = \dfrac{a}{2} \Rightarrow S_{AEF} = \dfrac{1}{2} AH.FE = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{10}}{4}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}.$

Ví dụ 6.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, D; $AB = 2a$; $SA = AD = DC = a$; $SA \perp (ABCD)$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) qua SD và $(\alpha) \perp (SAC)$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm AB.
Tứ giác $ADCM$ là hình vuông $\Rightarrow DM \perp AC$.
Mà $DM \perp SA$
$\Rightarrow DM \perp (SAC) \Rightarrow (SDM) \perp (SAC) \Rightarrow (\alpha) = (SDM)$.
Suy ra thiết diện là ΔSDM.



Ta có $SO = \sqrt{SA^2 + OA^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}, DM = a\sqrt{2}$.

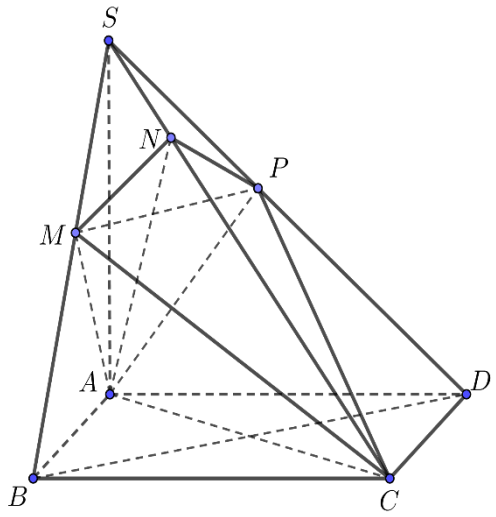
Diện tích thiết diện là $S_{\Delta SDM} = \dfrac{SO.DM}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 6.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC. Tính diện tích của thiết diện cắt bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Gọi M, N, P là giao điểm của (P) với các đường thẳng SB, SC, SD.
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$. Mà $BC \perp AB$.
$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.
Mặt khác $SC \perp (P) \Rightarrow SC \perp AM$ nên
$AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SB$.
Tương tự $AN \perp SC, AP \perp SD, MP // BD \Rightarrow MP \perp AN$.



Ta có $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{MP}{BD} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow MP = \dfrac{4a\sqrt{2}}{5}$.

ΔSAN vuông tại A nên $AN = \dfrac{AS.AC}{\sqrt{AS^2 + AC^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $S_{AMNP} = \dfrac{AN.MP}{2} = \dfrac{4a^2\sqrt{6}}{15}$.

Ví dụ 6.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SB. Khi đó, mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

Lời giải



• Gọi $AH \perp SB$ tại H.
$\Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = AH$.

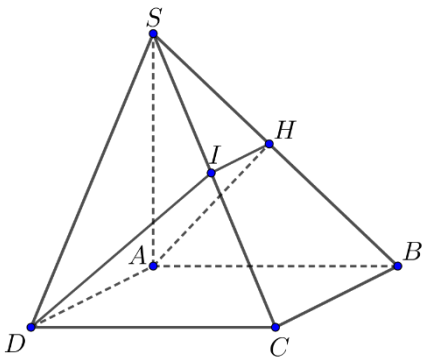
• Có $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = AD$.

• Có $BC // AD \Rightarrow BC \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

• Vẽ $HI // BC (I \in SC) \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = HI$.

Vậy $(\alpha) \cap S.ABCD = AHID$ là hình thang vuông tại A, H.



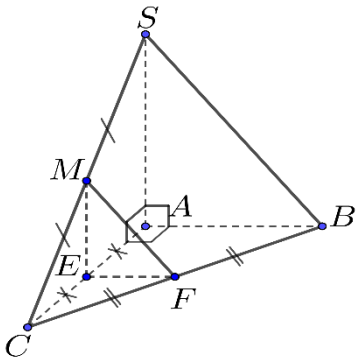


Ví dụ 6.5.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AC.

Lời giải

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC.
Do đó $ME // SA$, $EF // AB$.
Mà $SA \perp (ABC)$ (gt) nên $ME \perp (ABC)$, suy ra $ME \perp EF$.
Dễ thấy $(MEF) \equiv (P)$, thiết diện là ΔMEF vuông tại E.
Diện tích thiết diện là $S = \frac{1}{2} ME.EF = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} SA.\frac{1}{2} AB = \frac{a^2}{8}$.



Chương 08
Bài 3. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

C Luyện tập

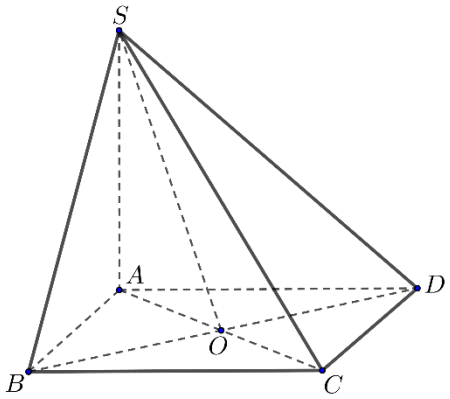
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ là

A. $\widehat{SOA}$. **B.** $\widehat{SBA}$. **C.** $\widehat{SDA}$. **D.** $\widehat{SOC}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

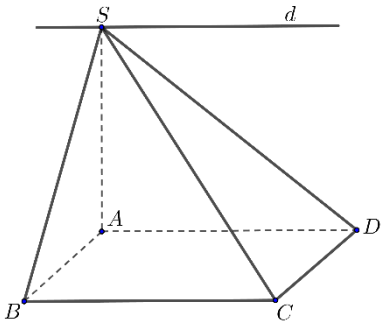
$\Rightarrow \begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \\ DB = (SBD) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ là góc giữa AC và SO là $\widehat{SOA}$ (do ΔSAC vuông tại A).

» Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng góc nào sau đây?

A. $\widehat{ASD}$. **B.** $\widehat{BSC}$. **C.** $\widehat{ASC}$. **D.** $\widehat{BSD}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $d=(SAB)\cap(SCD)$. Vì $AB//CD$ nên $AB//\Delta//CD$.

Vì $SA\perp AB$ nên $SA\perp d$.

Vì $CD\perp(SAD)$ nên $CD\perp SD$ hay $SD\perp d$.

Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là $\widehat{ASD}$.

» Câu 3. Cho các đường thẳng a,b và các mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A. $\begin{cases}a\perp(\alpha)\\a\subset(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$.

B. $\begin{cases}a\perp b\\a\perp(\alpha)\end{cases}\Rightarrow b\ //\ (\alpha)$.

C. $\begin{cases}a\perp b\\a\subset(\alpha)\\b\subset(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$.

D. $\begin{cases}(\alpha)\perp(\beta)\\a\subset(\alpha)\\b\subset(\beta)\end{cases}\Rightarrow a\perp b$.

Lời giải

Chọn A

Theo lý thuyết $\begin{cases}a\perp(\alpha)\\a\subset(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$.

» Câu 4. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α). Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và vuông góc với (α)?

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

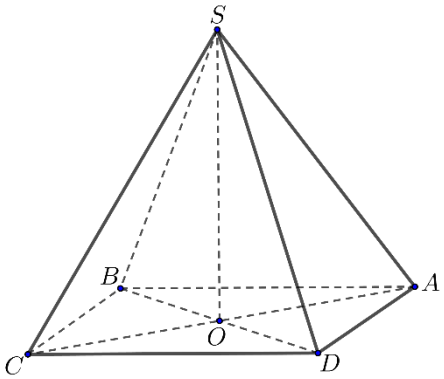
Theo lý thuyết có duy nhất một mặt phẳng thỏa.

» Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và $SA=SC,\ SB=SD$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. $SO\perp(ABCD)$. **B.** $SC\perp(SBD)$. **C.** $(SBD)\perp(ABCD)$. **D.** $(SAC)\perp(ABCD)$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết suy ra $SO \perp AC; SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Mà $SO \subset (SBD), SO \subset (SAC)$

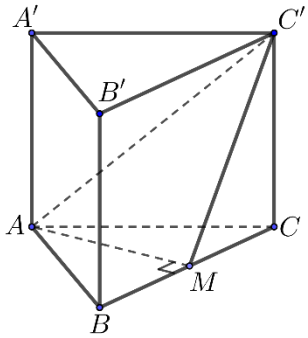
$\Rightarrow (SBD) \perp (ABCD); (SAC) \perp (ABCD)$. Vậy $SC \perp (SBD)$ là mệnh đề **sai.**

» Câu 6. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $(ABB') \perp (ACC')$. **B.** $(AC'M) \perp (ABC)$. **C.** $(AMC') \perp (BCC')$. **D.** $(ABC) \perp (ABA')$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử $(AC'M) \perp (ABC)$.

Mà $\begin{cases} (AC'M) \cap (ABC) = AM \\ BC \perp AM \end{cases}$ suy ra $BC \perp MC'$.

Điều này không thể xảy ra vì MCC' đã vuông tại C.

Do đó $(AC'M) \perp (ABC)$ sai.

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và $SA = SC, SB = SD$.

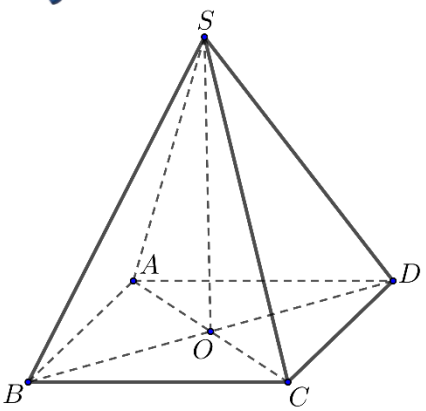
Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. $SC \perp (SBD)$. **B.** $SO \perp (ABCD)$.

C. $(SBD) \perp (ABCD)$. **D.** $(SAC) \perp (ABCD)$.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thiết suy ra $SO \perp AC; SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

mà $SO \subset (SBD)$, $SO \subset (SAC)$

$\Rightarrow (SBD) \perp (ABCD); (SAC) \perp (ABCD)$.

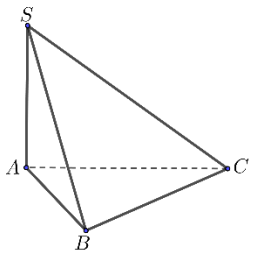
Vậy $SC \perp (SBD)$ là mệnh đề **sai.**

» Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AB \perp BC$. **C.** $AB \perp SC$. **D.** $SB \perp BC$.

Lời giải

Chọn C



$SA \perp BC$ đúng vì $SA \perp (ABC)$.

$AB \perp BC$ đúng vì ΔABC vuông tại B.

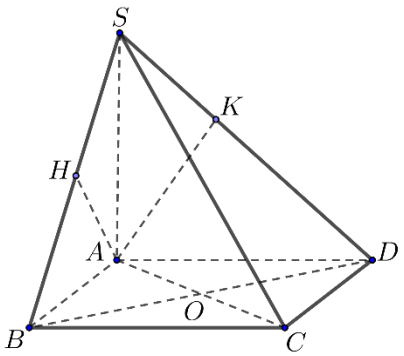
$SB \perp BC$ đúng vì $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

» Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với mặt đáy. AH, AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB, SAD. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $BC \perp AH$. **B.** $SA \perp AC$. **C.** $HK \perp SC$. **D.** $AK \perp BD$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}$ nên $SA\perp(ABCD)$

Suy ra $SA\perp AC$ (B đúng); $SA\perp BC$; $SA\perp BD$.

Mặt khác $BC\perp AB$ nên $BC\perp(SAB)$ suy ra $BC\perp AH$ (A đúng).

và $BD\perp AC$ nên $BD\perp(SAC)$ suy ra $BD\perp SC$;

Đồng thời $HK\,//\,BD$ nên $HK\perp SC$ (C đúng).

Vậy mệnh đề sai là $AK\perp BD$ (vì không đủ điều kiện chứng minh).

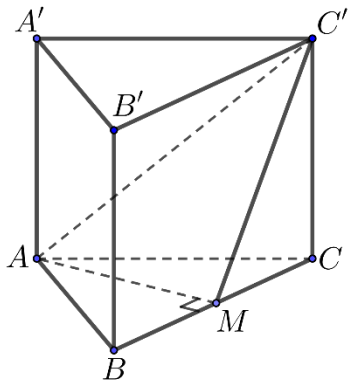
» Câu 10. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $(ABB')\perp(ACC')$. **B.** $(AC'M)\perp(ABC)$.

C. $(AMC')\perp(BCC')$. **D.** $(ABC)\perp(ABA')$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC\perp AM$ và $BC\perp AA'$ nên $BC\perp(AA'M)\Rightarrow(ABC)\perp(AA'B'B)$.

Nếu $(AC'M)\perp(ABC)$ thì suy ra $(AC'M)\equiv(AA'B'B)$: Vô lý.

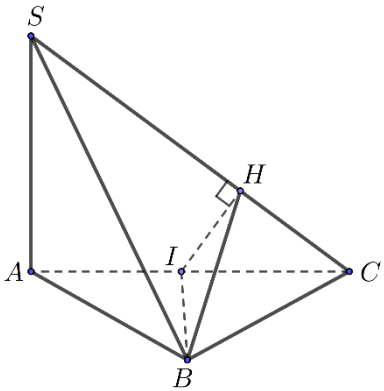
Do đó B **sai**.

» Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(BIH)\perp(SBC)$. **B.** $(SAC)\perp(SAB)$. **C.** $(SBC)\perp(ABC)$. **D.** $(SAC)\perp(SBC)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases}BI\perp AC(\text{gt})\\BI\perp SA\left(SA\perp(ABC)\right)\end{cases}\Rightarrow BI\perp(SAC)\supset SC\Rightarrow SC\perp BI\ (1)$.

Theo giả thiết: $SC \perp IH$ (2).

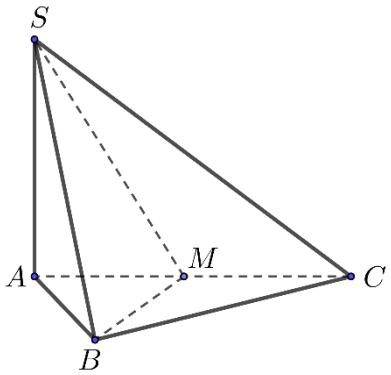
Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (BIH)$. Mà $SC \subset (SBC)$ nên $(BIH) \perp (SBC)$.

» Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA \perp (ABC)$, gọi M là trung điểm của AC. Mệnh đề nào **sai** ?

A. $(SAB) \perp (SAC)$. **B.** $BM \perp AC$. **C.** $(SBM) \perp (SAC)$. **D.** $(SAB) \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn A



+ Có tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B, M là trung điểm của $AC \Rightarrow BM \perp AC$

+ Có $\left.\begin{matrix} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$.

+ Có $\left.\begin{matrix} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$

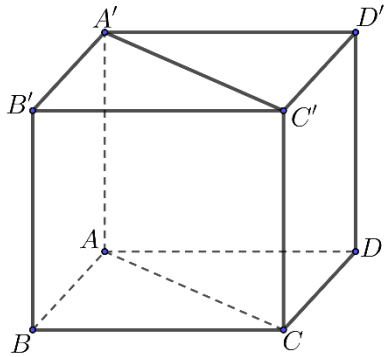
Vậy A sai.

» Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'BC'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ACC'A')$

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Do $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow (ACC'A') \perp (ABCD)$

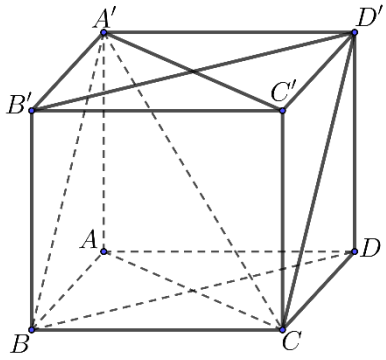
» Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $(ACC'A') \perp (BDD'B')$. **B.** $(ABCD) \perp (BCD'A')$.

C. $(A'BC) \perp (ABCD)$. **D.** $A'B \perp (ABCD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BDD'B') \Rightarrow (ACC'A') \perp (BDD'B')$.

» Câu 15. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Gọi d và Δ là hai đường lần lượt vuông góc với mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $((SBC),(ABC)) = (\Delta, d)$.
B. $((SBC),(ABC)) = 60°$.
C. $((SBC),(ABC)) = (\Delta,(ABC))$.
D. $((SBC),(ABC)) = (\Delta,(SBC))$.

Lời giải

Chọn A

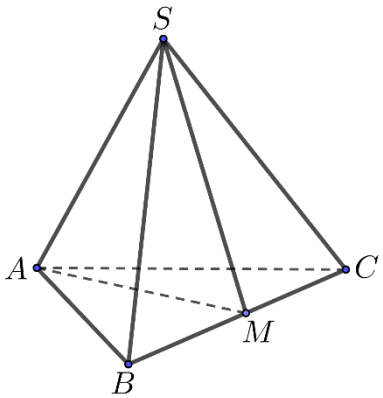
Từ định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng nên $((SBC),(ABC)) = (\Delta, d)$.

» Câu 16. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có M là trung điểm của BC. Xác định góc giữa hai mặt phẳng (SBC) với mặt phẳng (ABC).

A. $((SBC),(ABC)) = \widehat{SBA}$.
B. $((SBC),(ABC)) = \widehat{MSA}$.
C. $((SBC),(ABC)) = \widehat{SMA}$.
D. $((SBC),(ABC)) = \widehat{MAS}$.

Lời giải

Chọn C



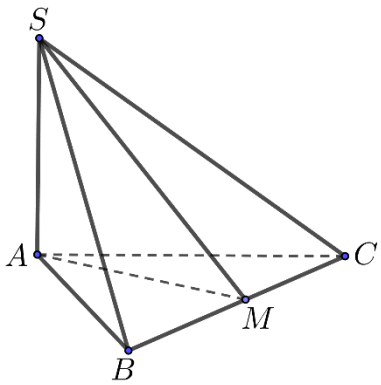
Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AM \\ BC \perp SM \end{cases} \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = \widehat{SMA}$.

» Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 30°.
B. 60°.
C. 90°.
D. 45°.

Lời giải

Chọn A



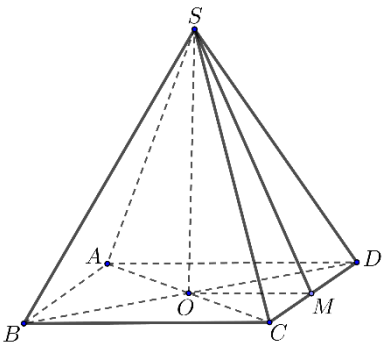
Gọi I là trung điểm của BC.
Ta có ΔABC đều nên $AM \perp BC$
Và $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM)$.
Do đó góc giữa (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SMA}$.
Ta có ΔABM vuông tại M nên $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = a\sqrt{3}$.
ΔSAM tại A nên có $\tan\widehat{SMA} = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SMA} = 30°$.

» Câu 18. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ với $ABCD$ có tâm O. Gọi M là trung điểm của CD. Xác định góc giữa (SCD) với $(ABCD)$.

A. $((SCD),(ABCD)) = \widehat{SMO}$.
B. $((SCD),(ABCD)) = \widehat{MSO}$.
C. $((SCD),(ABCD)) = \widehat{SOC}$.
D. $((SCD),(ABCD)) = \widehat{SOM}$.

Lời giải

Chọn A



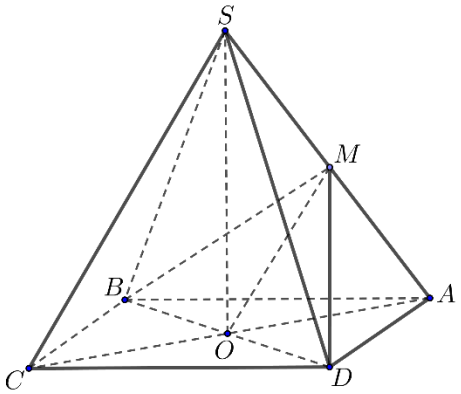
Ta có $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ CD \perp SM \\ CD \perp OM \end{cases} \Rightarrow ((SCD),(ABCD)) = (SM,OM) = \widehat{SMO}$.

» Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. 30°.
B. 45°.
C. 60°.
D. 90°.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của SA.

ΔSAB cân tại B suy ra $BM \perp SA \quad (1)$.

ΔSAD cân tại D suy ra $DM \perp SA \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra $SA \perp (BMD) \Rightarrow ((SAB);(SAD)) = (MB,MD)$.

ΔSBO vuông tại O, có $BO = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vì ΔSOA vuông tại O nên $OM = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Từ $OM = \dfrac{1}{2}BD$ ta được ΔBMD vuông tại M.

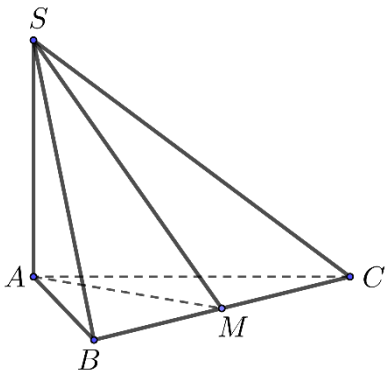
Vậy $((SAB);(SAD)) = \widehat{BMD} = 90°$.

» Câu 20. Cho hình chop $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh $2a$, SB tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Khi đó mp(SBC) tạo với đáy một góc x. Tính $\tan x$.

A. $\tan x = 2$. **B.** $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\tan x = \dfrac{3}{2}$. **D.** $\tan x = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của AB lên (ABC).

Do đó $\widehat{SBA} = (SB;(ABC)) = 30°$, $SA = AB\tan 30° = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có

ΔABC đều cạnh $2a \Rightarrow AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2}$

Và $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{SMA} = ((SBC);(ABC)) = x.$

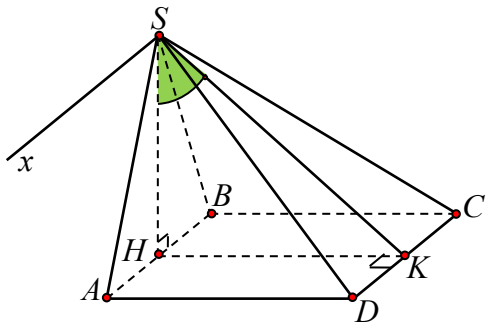
Vậy $\tan x = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} . \dfrac{2}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}.$

» Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: H là trung điểm AB thì $SH \perp AB$ (vì tam giác SAB đều)

Mà $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Mặt khác $\begin{cases} AB \parallel CD \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \,//\, AB \,//\, CD$

Mà $Sx \perp (SHK) \Rightarrow \begin{cases} Sx \perp SH \\ Sx \perp SK \end{cases}$, với K là trung điểm CD.

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right) = \widehat{HSK}.$

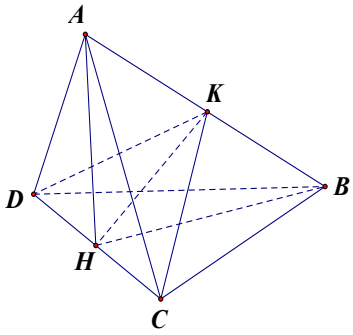
Khi đó $\tan \widehat{HSK} = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$

» Câu 22. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tìm giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

A. $x = \dfrac{a}{3}$. **B.** $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $x = \dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H,K lần lượt là trung điểm của CD và AB.

Do tam giác ACD cân tại A nên $AH\perp CD$ mà $(ACD)\perp(BCD)$

$\Rightarrow AH\perp(BCD)\Rightarrow AH\perp HB\Rightarrow AB=\sqrt{HA^2+HB^2}=\sqrt{2\left(a^2-x^2\right)}$ và

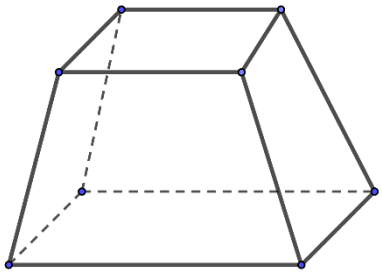
$HK=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{2\left(a^2-x^2\right)}}{2}$.

Do các tam giác ABC,ABD cân tại C và D nên $CK\perp AB,DK\perp AB\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc $\widehat{(KC,KD)}$. Khi đó:

$(ABC)\perp(ABD)\Leftrightarrow\widehat{CKD}=90^\circ\Leftrightarrow KH=\dfrac{CD}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2\left(a^2-x^2\right)}}{2}=x\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $x=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

» Câu 23. Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 2 m, đáy nhỏ có cạnh bằng 1 m và cạnh bên bằng 2 m như hình vẽ. Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.



A. $5+3\sqrt{5}$. **B.** $4+3\sqrt{5}$. **C.** $2+3\sqrt{5}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đáy lớn là một hình vuông cạnh bằng 2 (m) nên có diện tích là $S_l=2^2=4\ \left(m^2\right)$.

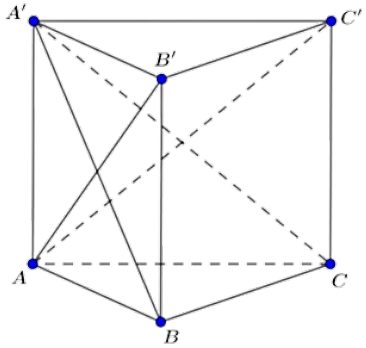
Đáy nhỏ là một hình vuông cạnh bằng 1 (m) nên có diện tích là $S_n=1^2=1\ \left(m^2\right)$.

Mỗi mặt bên là một hình thang cân có cạnh đáy nhỏ bằng 1, đáy lớn bằng 2 và đường cao $h=\sqrt{2^2-\dfrac{1}{2^2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Suy ra diện tích mỗi mặt bên là $S_b=\dfrac{1}{2}(1+2)\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{2}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.

$S_{tp}=4\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{2}\cdot\dfrac{(2+1)}{2}+4+1=5+3\sqrt{5}\approx 16,62\ \left(\text{m}^2\right)$.

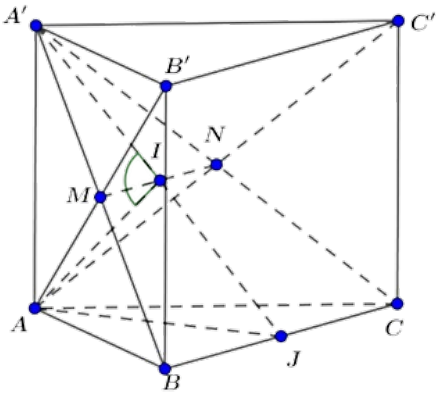
» Câu 24. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ và $\left(A'BC\right)$, tính $\cos\alpha$



A. $\dfrac{1}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\dfrac{4}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử cạnh của hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài bằng a.

Gọi $M=A'B\cap AB'$ và $N=A'C\cap AC'$.

Khi đó $\left(AB'C'\right)\cap\left(A'BC\right)=MN$.

Kẻ $A'I\perp MN\ \left(I\in MN\right)$ mà $AA'\perp BC$, $BC//MN\Rightarrow AA'\perp MN$. Vậy $AI\perp MN$.

Khi đó $\left(\left(AB'C'\right),\left(A'BC\right)\right)=\left(AI,A'I\right)=\alpha$.

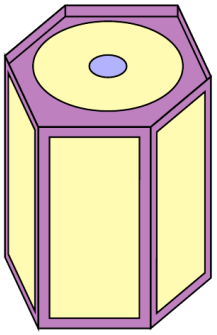
Gọi J là trung điểm BC.

$AJ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'J=\sqrt{AA'^2+AJ^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}a\Rightarrow A'I=\dfrac{1}{2}A'J=\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

Xét tam giác $\Delta A'IA$ có:

$\cos\widehat{A'IA}=\dfrac{AI^2+A'I^2-AA'^2}{2.AI.A'I}=\dfrac{-1}{7}\Rightarrow\cos\alpha=\cos\left(AI,A'I\right)=\cos\left(180^\circ-\widehat{A'IA}\right)=\dfrac{1}{7}$.

» Câu 25. Một hộp đèn treo trần có hình dạng lăng trụ đứng lục giác đều như hình vẽ, cạnh đáy bằng 10 cm và cạnh bên bằng 50 cm. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.



A. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{20}{3}$. **D.** $\frac{20\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Mỗi mặt bên của hộp đèn hình lăng trụ là một hình chữ nhật có diện tích là

$$S_b = 50 \times 10 = 500.$$

Suy ra diện tích xung quanh của hộp đèn là $S_{xq} = 6S_b = 3000$.

Mỗi đáy của hộp đèn là một hình lục giác đều được tạo thành từ 6 tam giác đều có cạnh bằng 10.

Suy ra diện tích một mắt đáy là $S_d = 6 \cdot \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}$.

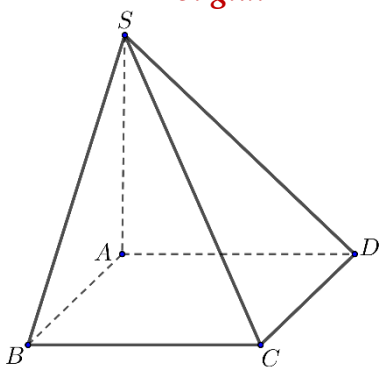
Vậy $\frac{S_{xq}}{S_d} = \frac{3000}{150\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$AB \perp (SAD)$		
(b)	$BC \perp (SAB)$		
(c)	$AC \perp (SBD)$		
(d)	$BC \perp (SCD)$		

Lời giải



(a) $AB \perp (SAD)$.

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$, $AD \perp AB$ nên $AB \perp (SAD)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $BC \perp (SAB)$.

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$, $AB \perp BC$ nên $BC \perp (SAB)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $AC \perp (SBD)$.

Giả sử $AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SB$. Mà $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow SB \perp (ABCD)$ (Vô lí)

» **Chọn** SAI.

(d) $BC \perp (SCD)$.

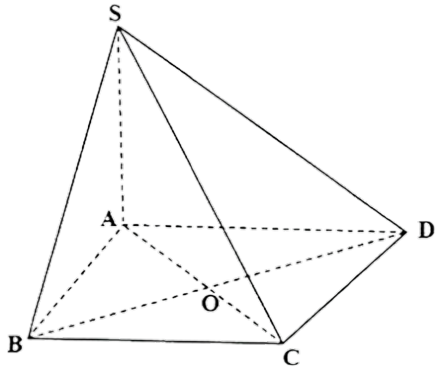
Giả sử $BC \perp (SCD) \Rightarrow BC \perp SC$, mà $BC \perp SB$ (Vô lí)

» **Chọn** SAI.

» **Câu 27.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$((SAC),(SBD)) = 90°$		
(b)	$((SAC),(SBD)) = 45°$		
(c)	$(SAB) \perp (SBC)$		
(d)	$(SCD) \perp (SAD)$		

Lời giải



(a) $((SAC),(SBD)) = 90°$

$$\begin{cases} BD \perp (SAC) \\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \perp (SBD) \Rightarrow ((SAC);(SBD)) = 90°$$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $((SAC),(SBD)) = 45°$.

» **Chọn** SAI.

(c) $(SAB) \perp (SBC)$.

$$\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $(SCD) \perp (SAD)$.

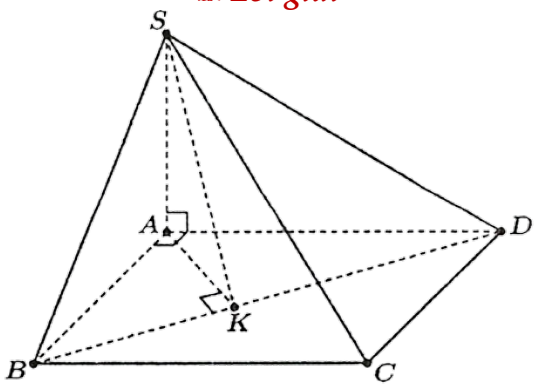
$\begin{cases} CD \perp (SAD) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \perp (SCD)$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 28.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$((SAB),(ABCD)) = 90^\circ$		
(b)	$((SBC),(ABCD)) = \widehat{SAB}$		
(c)	$((SBC),(ABCD)) = 60^\circ$		
(d)	$((SBD),(ABCD)) \approx 69,43^\circ$		

Lời giải



(a) $((SAB),(ABCD)) = 90^\circ$

Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp (ABCD)$ hay $((SAB),(ABCD)) = 90^\circ$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $((SBC),(ABCD)) = \widehat{SAB}$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \ (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Khi đó: $\begin{cases} BC = (SBC) \cap (ABCD) \\ AB \perp BC, SB \perp BC \\ AB \subset (ABCD), SB \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow ((SBC),(ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$ (góc $\widehat{SBA}$ nhọn vì $\widehat{SAB} = 90^\circ$)

» **Chọn** SAI.

(c) $((SBC),(ABCD)) = 60^\circ$

Tam giác SAB vuông tại A có: $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Vậy $((SBC),(ABCD)) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $\left((SBD),(ABCD)\right)\approx 69,43^\circ$

Kẻ đường cao AK của tam giác ABD.

Ta có: $\begin{cases} BD\perp AK \\ BD\perp SA \end{cases}\Rightarrow BD\perp (SAK)\Rightarrow BD\perp SK$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBD)\cap (ABCD)=BD \\ AK\perp BD, SK\perp BD \\ AK\subset (ABCD), SK\subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow \left((SBD),(ABCD)\right)=(SK,AK)=\widehat{SKA}$ (góc $\widehat{SKA}$ nhọn vì $\widehat{SAK}=90^\circ$)

Tam giác ABD vuông tại A có đường cao AK nên

$\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{3a^2}=\dfrac{4}{3a^2}\Rightarrow AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SAK vuông tại A có: $\tan\widehat{SKA}=\dfrac{SA}{AK}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=2\Rightarrow \widehat{SKA}\approx 63,43^\circ$.

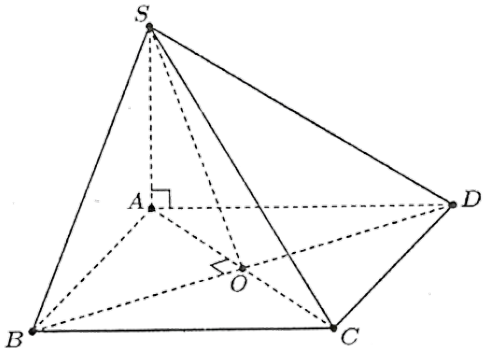
Vậy $\left((SBD),(ABCD)\right)=\widehat{SKA}\simeq 63,43^\circ$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\left((SCD),(ABCD)\right)=45^\circ$.		
(b)	$\left((SBD),(ABCD)\right)=\widehat{SOA}$		
(c)	$\left((SBD),(ABCD)\right)\approx 58,74^\circ$.		
(d)	$(SBD)\perp (SAC)$		

Lời giải



(a) $\left((SCD),(ABCD)\right)=45^\circ$.

Ta có: $\begin{cases} CD\perp AD \\ CD\perp SA \ \left(SA\perp (ABCD)\right) \end{cases}\Rightarrow CD\perp (SAD)\Rightarrow CD\perp SD$.

Khi đó $\begin{cases}(SCD)\cap(ABCD)=CD\\AD\perp CD, SD\perp CD\\AD\subset(ABCD), SD\subset(SCD)\end{cases}\Rightarrow((SCD),(ABCD))=(SD,AD)=\widehat{SDA}.$

Tam giác SAD vuông tại A có: $\tan\widehat{SDA}=\dfrac{SA}{AD}=\dfrac{a}{a}=1\Rightarrow\widehat{SDA}=45^\circ$.

Vậy $((SCD),(ABCD))=\widehat{SDA}=45^\circ$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $((SBD),(ABCD))=\widehat{SOA}$

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SO.$

Khi đó $\begin{cases}(SBD)\cap(ABCD)=BD\\OA\perp BD, SO\perp BD\\OA\subset(ABCD), SO\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow((SBD),(ABCD))=(SO,OA)=\widehat{SOA}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $((SBD),(ABCD))\approx 58,74^\circ$.

Hình vuông $ABCD$ có đường chéo $AC=a\sqrt{2}\Rightarrow OA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAO vuông tại A có: $\tan\widehat{SOA}=\dfrac{SA}{OA}=\dfrac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow\widehat{SOA}\approx 54,74^\circ$.

Vậy $((SBD),(ABCD))=\widehat{SOA}\approx 54,74^\circ$.

» **Chọn** SAI.

(d) $(SBD)\perp(SAC)$

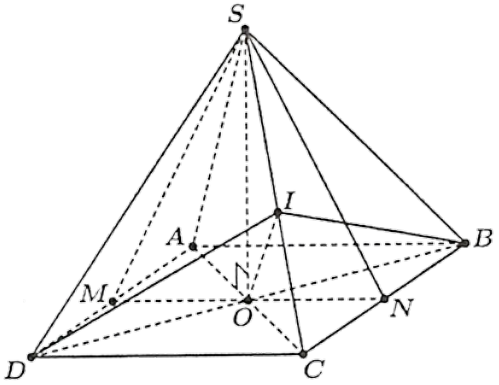
Theo câu **(b)** thì $BD\perp(SAC)$, mà $BD\subset(SBD)$ nên $(SBD)\perp(SAC)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 30.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O với $SO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm cạnh AD và BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$(SMN)\perp(ABCD)$		
(b)	$(SAD)\perp(SMN)$		
(c)	$((SBC),(ABCD))=30^\circ$		
(d)	$((SBC),(SCD))\approx 80,52^\circ$.		

Lời giải



(a) $(SMN)\perp(ABCD)$

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có O là tâm của đáy nên $SO\perp(ABCD)$.

Mặt khác MN là đường trung bình của hình vuông $ABCD$ nên MN qua O.

Vậy $SO\subset(SMN)\Rightarrow(SMN)\perp(ABCD)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $(SAD)\perp(SMN)$

Ta có: $\begin{cases}AD\perp MN\\AD\perp SO\end{cases}\Rightarrow AD\perp(SMN)$,

mà $AD\subset(SAD)\Rightarrow(SAD)\perp(SMN)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $\big((SBC),(ABCD)\big)=30^\circ$

Ta có: $\begin{cases}BC//AD\\AD\perp(SMN)\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SMN)\Rightarrow BC\perp MN$.

Khi đó: $\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC\\ON\perp BC,SN\perp BC\\ON\subset(ABCD),SN\subset(SBC)\end{cases}$

$\Rightarrow\big((SBC),(ABCD)\big)=(SN,ON)=\widehat{SNO}$.

Vì ON là đường trung bình tam giác ABC nên $ON=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Tam giác SON vuông tại O có: $\tan\widehat{SNO}=\dfrac{SO}{ON}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SNO}=60^\circ$.

Vậy $\big((SBC),(ABCD)\big)=\widehat{SNO}=60^\circ$.

» **Chọn** SAI.

(d) $\big((SBC),(SCD)\big)\approx 80,52^\circ$

Kẻ đường cao DI của tam giác SCD.

Ta có: $\begin{cases}SC\perp DI\\SC\perp BD\ \ (BD\perp(SAC))\end{cases}\Rightarrow SC\perp(IBD)\Rightarrow SC\perp BI$.

Mặt khác $SC=(SBC)\cap(SCD)$ nên $((SBC),(SCD))=(ID,IB)$.

Ta có $IO\perp BD$ và O là trung điểm BD

nên ΔIBD cân tại I và $\widehat{OIB}=\widehat{OID}=\frac{1}{2}\widehat{BID}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $OC=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}=OD$.

Tam giác SOC có đường cao

$OI=\frac{SO\cdot OC}{\sqrt{SO^2+OC^2}}=\frac{a\sqrt{30}}{10}$

Tam giác IOD vuông tại O có:

$\tan\widehat{OID}=\frac{OD}{OI}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{30}}{10}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$; $\tan\widehat{BID}=\frac{2\tan\widehat{OID}}{1-\tan^2\widehat{OID}}=-\sqrt{15}<0$ nên $\widehat{BID}$ là góc tù.

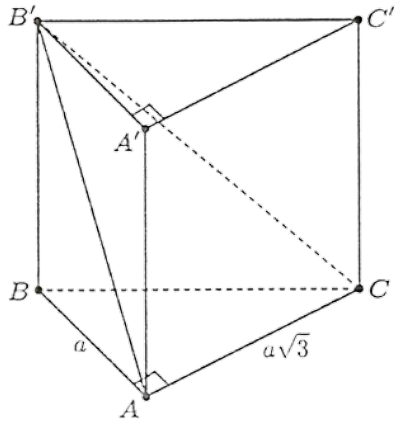
Vậy $((SBC),(SCD))=(ID,IB)=180^\circ-\widehat{BID}\approx 75,52^\circ$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 31.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, biết $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$ và $((ACB'),(ABC))=60^\circ$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A'A\perp(ABC)$		
(b)	$((ACB'),(ABB'A'))=60^\circ$		
(c)	$((ACC'A'),(BCC'B'))=30^\circ$		
(d)	Tổng diện tích ba mặt bên của hình lăng trụ đã cho bằng $(3\sqrt{3}+3)a^2$		

Lời giải



(a) $A'A\perp(ABC)$

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $A'A\perp(ABC)\Rightarrow A'A\perp AC$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $((ACB'),(ABB'A'))=60^\circ$.

Mặt khác $AB\perp AC$.

Vì vậy $AC \perp (ABB'A')$, mà $AC \subset (ACB')$

nên $(ACB') \perp (ABB'A') \Rightarrow ((ACB'),(ABB'A')) = 90°$.

» **Chọn** SAI.

(c) $((ACC'A'),(BCC'B')) = 30^\circ$

Ta có: $\begin{cases} CC' = (ACC'A') \cap (BCC'B') \\ AC \perp CC';\ BC \perp CC' \\ AC \subset (ACC'A'), BC \subset (BCC'B') \end{cases}$

$\Rightarrow ((ACC'A'),(BCC'B')) = (AC, BC) = \widehat{ACB}$

Tam giác ABC vuông tại A có: $\tan \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ACB} = 30^\circ$.

Vậy $((ACC'A'),(BCC'B')) = \widehat{ACB} = 30^\circ$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Tổng diện tích ba mặt bên của hình lăng trụ đã cho bằng $\left(3\sqrt{3}+3\right)a^2$

$\begin{cases} AC = (ACB') \cap (ABC) \\ AB \perp AC;\ AB' \perp AC \\ AB \subset (ABC), AB' \subset (ACB') \end{cases} \Rightarrow ((ACB'),(ABC)) = (AB', AB) = \widehat{BAB'} = 60^\circ.$

Tam giác ABB' vuông tại B có: $BB' = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Tam giác ABC vuông tại A có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$.

Tổng diện tích các mặt bên của hình lăng trụ:

$a \cdot a\sqrt{3} + 2a \cdot a\sqrt{3} + a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = \left(3\sqrt{3}+3\right)a^2$

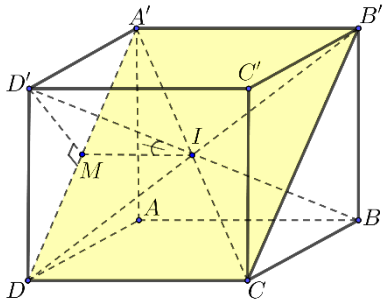
» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 32.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(A'B'CD)$ bằng $90°$.		
(b)	Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$ bằng $90°$.		
(c)	Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(CB'D')$ bằng $90°$.		
(d)	Góc giữa đường thẳng EF và mặt phẳng $(BB'D'D)$ bằng $90°$.		

Lời giải

(a) Góc giữa đường thẳng BD' *và mặt phẳng* $(A'B'CD)$ *bằng* $90°$.



Gọi M, I lần lượt là trung điểm $A'D$ và tâm của hình chữ nhật $A'B'CD$.

Ta có $I = BD' \cap (A'B'CD)$.

$\begin{cases} D'M \perp A'D \\ D'M \perp CD \end{cases} \Rightarrow D'M \perp (A'B'CD)$.

Hay ta có góc giữa đường thẳng BD' với $(A'B'CD)$ chính là góc giữa $D'I$ với $(A'B'CD)$.

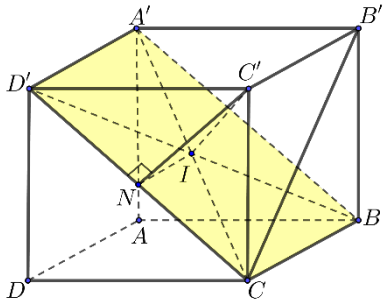
Vậy $\alpha = \widehat{D'IM}$ là góc giữa BD' với $(A'B'CD)$.

Xét $\Delta D'MI$ vuông tại M: $\tan\alpha = \dfrac{D'M}{MI} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a}{2}} = \sqrt{2}$.

Góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(A'BCD')$ không bằng $90°$.

» **Chọn** SAI.

(b) Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$ bằng $90°$.



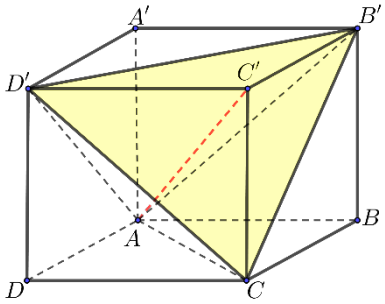
Gọi N là trung điểm $D'C$, ta có: $\begin{cases} C'N \perp CD' \\ C'N \perp BC \end{cases} \Rightarrow C'N \perp (A'BCD')$

Khi đó $\left(\widehat{AC', (A'BCD')}\right) = \widehat{C'IN}$. Mặt khác $\tan\widehat{C'IN} = \dfrac{C'N}{IN} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a}{2}} = \sqrt{2}$.

Góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(A'BCD')$ không bằng $90°$.

» **Chọn** SAI.

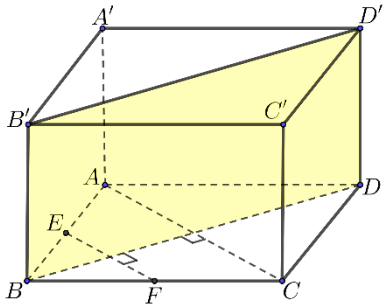
(c) Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(CB'D')$ bằng $90°$.



Vì $C'B' = C'C = C'D'$ nên C' nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp $\Delta CB'D'$.
Tương tự, ta có $AB' = AC = AD'$
Nên A nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp $\Delta CB'D' \Rightarrow AC' \perp (CB'D')$.
Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(CB'D')$ bằng $90°$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Góc giữa đường thẳng EF và mặt phẳng $(BB'D'D)$ bằng $90°$.*



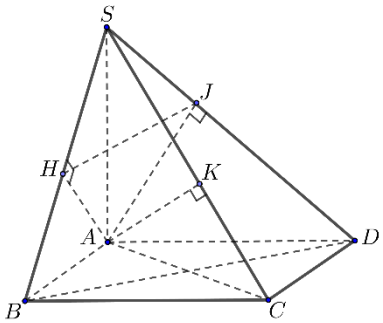
Ta có $EF//AC$ (EF là đường trung bình ΔABC)
Lại có $AC \perp BD$, $AC // EF$. Suy ra $EF \perp (BB'D'D)$.
Vậy góc giữa đường thẳng EF và mặt phẳng $(BB'D'D)$ bằng $90°$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm J, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K, J lần lượt là hình chiếu của A lên SA, SC, SD. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$AH \perp (SBC)$		
(b)	$AJ \perp (SCD)$		
(c)	$SC \perp (AHJ)$		
(d)	$AK \perp (SBD)$		

Lời giải



(a) $AH \perp (SBC)$.

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$, $AB \perp BC$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mặt khác $AH \perp SB$, suy ra $AH \perp (SBC)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $AJ \perp (SCD)$.

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$, $AD \perp CD$ nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AJ$.

Mặt khác $AJ \perp SD$, suy ra $AJ \perp (SCD)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $SC \perp (AHJ)$.

Vì $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$; $AJ \perp (SCD) \Rightarrow AJ \perp SC$. Suy ra $SC \perp (AHJ)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $AK \perp (SBD)$.

Giả sử $AK \perp (SBD) \Rightarrow AK \perp BD$, mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

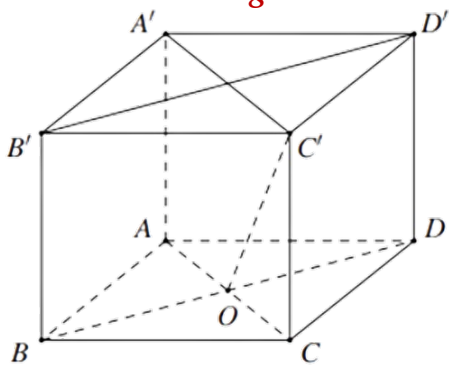
Nên $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AC$ (Vô lí)

» **Chọn** SAI.

» **Câu 34.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Độ dài đường chéo của hình lập phương là $3a$.		
(b)	Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'C')$ vuông góc nhau.		
(c)	Hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $A'C$.		
(d)	Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$ là $\widehat{COC'}$.		

Lời giải



(a) Độ dài đường chéo của hình lập phương là $3a$.

Độ dài đường chéo: $AC' = \sqrt{AC^2 + AA'^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

» **Chọn** SAI.

(b) Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'C')$ vuông góc nhau.

Ta có: $AC \perp BD$ (do $ABCD$ là hình vuông)

$AC \perp BB'$ (tính chất của hình lập phương)

Nên $AC \perp (BDD'B')$ suy ra $(ACC'A') \perp (BDD'C')$

» **Chọn Đúng.**

(c) Hình chiếu của AC' *trên mặt phẳng* $(ABCD)$ *là* $A'C$.

Vì $CC' \perp (ABCD)$ nên C là hình chiếu của C' trên $(ABCD)$. Vậy AC là hình chiếu của AC' trên $(ABCD)$.

» **Chọn** SAI.

(d) Gọi O *là tâm của hình vuông* $ABCD$. *Một góc phẳng của góc nhị diện* $[C, BD, C']$ *là* $\widehat{COC'}$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp CC' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp C'O$

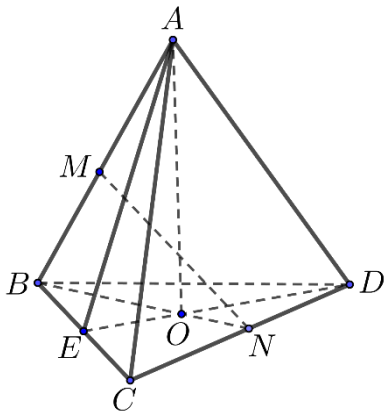
Vì $\begin{cases} BD \perp CO \\ BD \perp C'O \end{cases}$ nên $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 35.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$CD \perp (ABO)$ với O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác BCD.		
(b)	Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng $60°$.		
(c)	Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng $\frac{2}{3}$.		
(d)	Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD là MN.		

Lời giải



(a) $CD \perp (ABO)$ *với* O *là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác* BCD.

Do $ABCD$ là tứ diện đều và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔBCD nên $AO \perp (BCD)$.

$AO \perp (BCD) \Rightarrow AO \perp CD$

Lại có $BO \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABO)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Góc giữa đường thẳng AB *và mặt phẳng* (BCD) *bằng* $60°$.

Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng:

$$\cos\widehat{ABH}=\frac{BH}{AB}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{ABH}\approx 54,7$$

» **Chọn** SAI.

(c) *Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng $\frac{2}{3}$.*

Gọi E là trung điểm của BC.

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) là $\widehat{SEO}$.

Ta có: $\cos\widehat{AEO}=\frac{OE}{AE}=\frac{\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$.

» **Chọn** SAI.

(d) *Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD là MN.*

Vì tứ diện $ABCD$ đều nên các ΔABC và ΔABD là tam giác đều.

Suy ra $CM\perp AB, DM\perp \dot{A}B$ nên $AB\perp(CDM)$. Do đó, $AB\perp MN$.

Tương tự ta có $CD\perp MN$.

Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AB,CD.

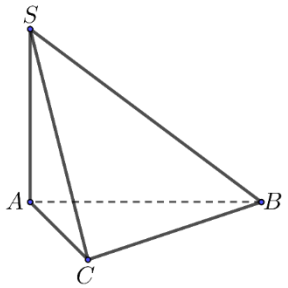
» **Chọn** ĐÚNG

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 36.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

✓ *Trả lời: 60*



Ta có: $(SAB)\cap(SAC)=SA$

Trong (SAB) có $AB\perp SA$

Trong (SAC) có $AC\perp SA$

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là $\widehat{BAC}$.

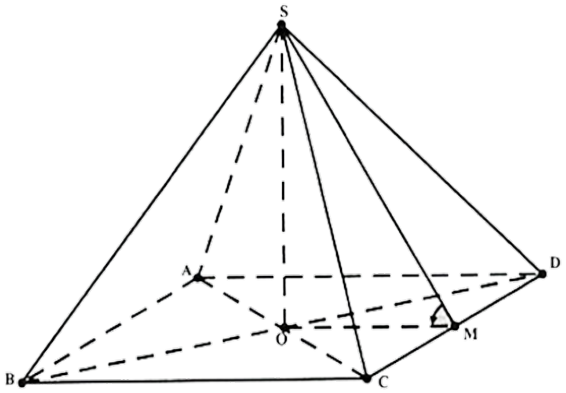
Do tam giác ABC đều nên $\widehat{BAC}=60°$.

Vậy số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là $60°$.

» Câu 37. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng đáy $2a$, đường cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính $\tan\varphi$ của góc giữa mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ *Trả lời: 1,4*



Gọi $O=AC\cap BD, M$ là trung điểm CD.

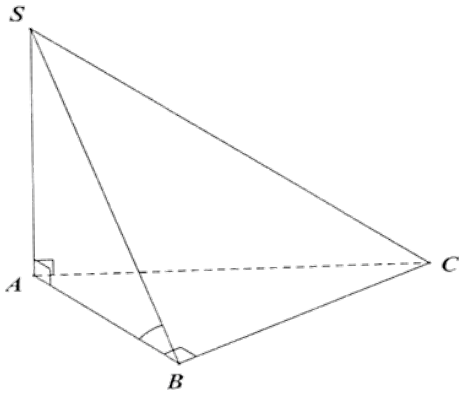
Ta có: $\begin{cases}(SCD)\cap(ABCD)=CD\\ OM\perp CD\\ SM\perp CD\end{cases}\Rightarrow\varphi=(OM,SM)=\widehat{SMO}$

Trong tam giác vuông SMO ta có: $\tan\widehat{SMO}=\dfrac{SO}{OM}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}\Rightarrow\tan\varphi=\sqrt{2}$.

» Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B, SA\perp(ABC)$, $AB=BC=a, SA=a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

✓ *Trả lời: 60*



Ta có: $\begin{cases}SA\perp BC(\text{ do } SA\perp(ABC))\\ AB\perp BC(gt)\end{cases}$

$\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$

Xét 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) ta có:

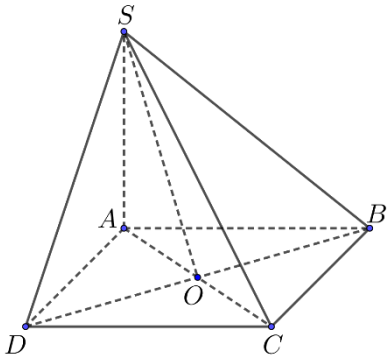
$\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\ SB\perp BC, SB\subset(SBC)\\ AB\perp BC, AB\subset(ABC)\\ SB\cap AB=\{B\}\end{cases}\Rightarrow((SBC),(ABC))=(SB,AB)=\widehat{SBA}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A, có $\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SBA}=60^{\circ}$.

» Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{6}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

✓ *Trả lời: 60*



Gọi O là tâm của $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$

Mà $\begin{cases}(SBD)\cap(ABCD)=BD\\AO\perp BD,AO\subset(ABCD)\\SO\perp BD,SO\subset(SBD)\end{cases}$

Suy ra $\left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SO,AO}\right)=\widehat{SOA}$

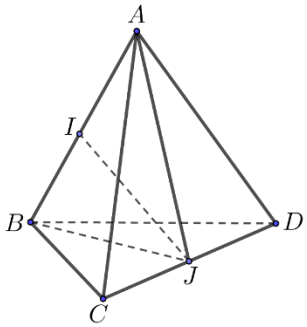
Tam giác SOA vuông tại A: $\tan\widehat{SOA}=\dfrac{SA}{AO}=\dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SOA}=60^{\circ}$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60°.

» Câu 40. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC=AD=BC=BD=\sqrt{2}$, $CD=2x\sqrt{2}$. Giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau là $x=\dfrac{a}{b}$ (với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của a^2+2b là

Lời giải

✓ *Trả lời: 9*



Gọi I,J lần lượt là trung điểm AB, CD.

Vì J là trung điểm CD và $AC=AD$ nên $AJ\perp CD$.

Mà $(ACD)\perp(BCD)\Rightarrow AJ\perp(BCD)$.

Ta thấy ΔAJD vuông tại J nên $AJ=\sqrt{2-2x^2}$.

Mặt khác $AC=AD=BC=BD=\sqrt{2}$ nên ΔAJB vuông cân tại J.

Suy ra: $AB=AJ\sqrt{2}=\sqrt{4\left(1-x^2\right)}$.

Do $IA=IB$, ΔAJB vuông tại J nên $IJ=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{4\left(1-x^2\right)}=\sqrt{1-x^2}$.

Ta có CI và DI vuông góc với AB nên để $(ABC)\perp(ABD)$ suy ra $\widehat{CID}=90^\circ$.

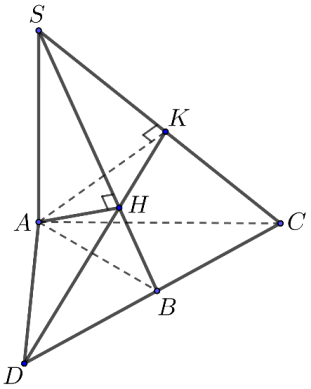
Ta có $IJ=\frac{1}{2}CD\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=x\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Nên $a^2+2b=9$

» Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $SA\perp(ABC)$, gọi AH và AK lần lượt là đường cao trong tam giác SAB và SAC và D là giao điểm của HK và BC. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với bao nhiêu mặt bên và mặt đáy của hình chóp?

Lời giải

✓ *Trả lời: 2*



Ta có: $SA\perp(ABC)$ nên $(SAD)\perp(ABC)$ (1)

Ta có: $BC\perp(SAB)$ nên $BC\perp AH$.

Lại có $AH\perp SB$ nên $AH\perp(SBC)$ suy ra $AH\perp SC$.

Mà $AK\perp SC$ nên $SC\perp(AHK)$ suy ra $SC\perp AD$

Do đó $AD\perp SC$ mà $AD\perp SA$ nên $AD\perp(SAC)$.

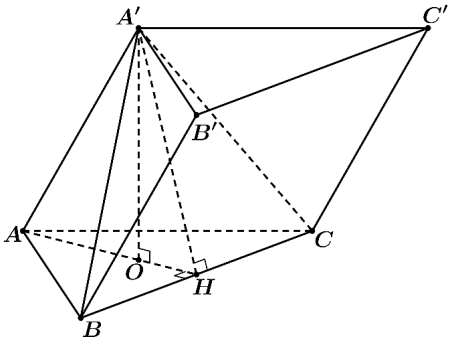
Kết luận: $(SAD)\perp(SAC)$. (2)

Từ (1) và (2) ta được mặt phẳng (SAD) vuông góc với 2 mặt của hình chóp.

» Câu 42. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $A'A=A'B=A'C=a$. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, H là trung điểm BC. Mặt phẳng $(A'AO)$ vuông góc với bao nhiêu mặt bên và mặt đáy của hình lăng trụ?

Lời giải

✓ *Trả lời: 3*



Ta có: $A'A = A'B = A'C$ và $OA = OB = OC$ nên $A'O$ vuông góc với (ABC).

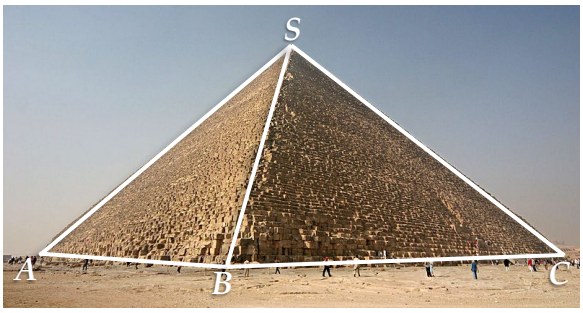
Suy ra $(A'AO) \perp (ABC)$ và $(A'AO) \perp (A'B'C')$.

Mặt khác đáy là tam giác đều cạnh H là trung điểm BC nên $BC \perp AH$ và $BC \perp AO$.

Suy ra $BC \perp (A'AO)$ do đó $(BCC'B') \perp (A'AO)$.

Vậy mặt phẳng $(A'AO)$ vuông góc với 3 mặt của của hình lăng trụ.

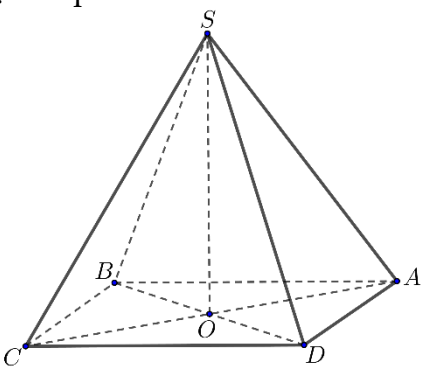
» Câu 43. Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài $262(m)$ cạnh bên dài $230(m)$. Tính góc được tạo bởi các cạnh bên và mặt đáy (làm trọn đến hàng đơn vị của độ).



Lời giải

✓ *Trả lời: 36*

Phác họa mô hình của Kim Tự Tháp :



Chiều cao của kim tự tháp: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{230^2 - \left(\dfrac{262\sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx 136(m)$.

Góc tạo bởi các cạnh bên và đáy là $\widehat{SAO}$ với

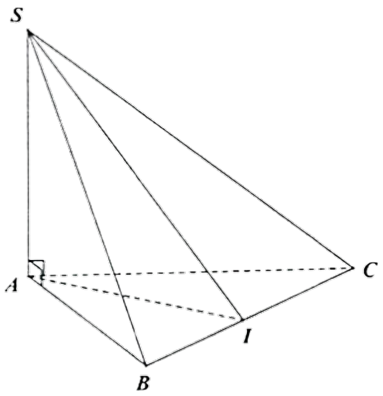
$$\cos\widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{\dfrac{262\sqrt{2}}{2}}{230} = \frac{131\sqrt{2}}{230}$$

Nên $\widehat{SAO} \approx 36°$.

» Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = 1$ và đáy ABC là tam giác đều với độ dài cạnh bằng 2. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC).

Lời giải

✓ *Trả lời: 30*



Gọi I là trung điểm của BC.

Khi đó, ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp SA \\ BC \perp AI \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SIA) \Rightarrow BC \perp SI$

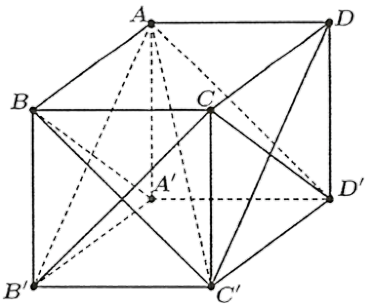
Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \perp BC \\ AI \perp BC \\ SI \subset (SBC); AI \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = (SI, AI) = \widehat{SIA}$

$\tan \widehat{SIA} = \dfrac{SA}{IA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $\widehat{SIA} = 30^\circ$ nên $\widehat{((SBC),(ABC))} = 30^\circ$.

» Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(AC'D')$.

Lời giải

✓ *Trả lời: 60*



Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AB'$. (1)

Mặt khác $A'B \perp AB'$ (hai đường chéo trong hình vuông). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB' \perp (BCD'A')$.

Mà $AB' \subset (ADC'B')$ nên $(ADC'B') \perp (BCD'A')$.

Nhận xét: $(AB'C') \equiv (ADC'B'); (AC'D') \equiv (ABC'D')$.

Ta có: $\begin{cases} CD' \perp C'D \\ CD' \perp AD \left(AD \perp (CDD'C')\right) \end{cases} \Rightarrow CD' \perp (ADC'B')$. (3)

Tương tự: $\begin{cases} B'C \perp BC' \\ B'C \perp AB \ \ (AB \perp (BCC'B')) \end{cases} \Rightarrow B'C \perp (ABC'D').(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $((AB'C'),(AC'D')) = (CD', CB')$.

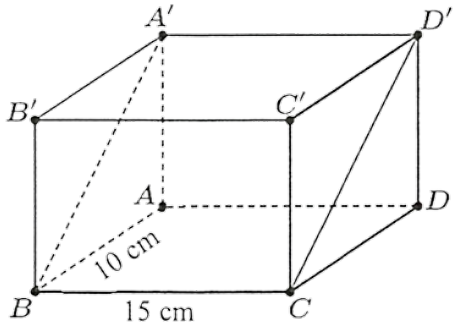
Giả sử cạnh hình lập phương bằng a.

Ta có $CB' = CD' = B'D' = a\sqrt{2}$ (đường chéo trong hình vuông).

Suy ra tam giác $CB'D'$ đều.

Do vậy $((AB'C'),(AC'D')) = (CD', CB') = \widehat{B'CD'} = 60^\circ$.

» Câu 46. Một khối gỗ có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Biết rằng $AB = 10\,cm, BC = 15\,cm$ và góc hai mặt phẳng $(BCD'A'),(ABCD)$ bằng 30°. Tổng diện tích tất cả các mặt của khối gỗ đó đạt bao nhiêu cm^2? *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*



Lời giải

✓ *Trả lời: 589*

$\begin{cases} BC = (BCD'A') \cap (ABCD) \\ BC \perp AB \\ BC \perp A'B \ (BC \perp (ABB'A')) \end{cases} \Rightarrow ((BCD'A'),(ABCD)) = (AB, A'B) = \widehat{ABA'} = 30^\circ.$

Tam giác $A'AB$ vuông tại A có: $\tan \widehat{ABA'} = \dfrac{AA'}{AB} \Rightarrow AA' = \dfrac{10\sqrt{3}}{3} cm$.

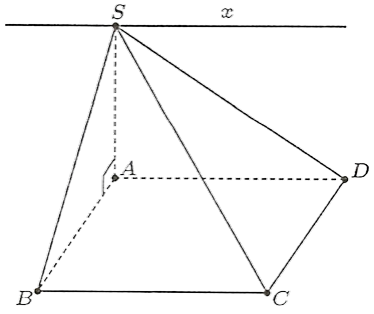
Tổng diện tích của sáu mặt khối gỗ là:

$2\left(10 \cdot 15 + 10 \cdot \dfrac{10\sqrt{3}}{3} + 15 \cdot \dfrac{10\sqrt{3}}{3}\right) \approx 589\,cm^2.$

» Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

✓ *Trả lời: 45*



Ta có: $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD // BC \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx // AD // BC$

Ta có: $\begin{cases} SA \perp AD \\ Sx // AD \end{cases} \Rightarrow SA \perp Sx$;

$\begin{cases} Sx \perp SA \\ Sx \perp AB \ (Sx // AD, AD \perp AB) \end{cases} \Rightarrow Sx \perp (SAB) \Rightarrow Sx \perp SB.$

Khi đó: $\begin{cases} (SBC) \cap (SAD) = Sx \\ SB \perp Sx, SA \perp Sx \\ SB \subset (SBC), SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow ((SBC), (SAD)) = (SB, SA) = \widehat{ASB}.$

Tam giác SAB vuông cân tại A nên $\widehat{ASB} = 45^\circ$.

Vậy $((SBC), (SAD)) = \widehat{ASB} = 45^\circ$.

Chương 08
Bài 4. KHOẢNG CÁCH & THỂ TÍCH

A Lý thuyết

1. Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, đến 1 mặt phẳng

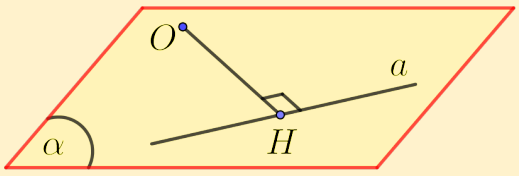
1.1. *Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng*

Định nghĩa:

Cho điểm O và đường thẳng a.
Trong mặt phẳng (O,a),

• Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a.
• Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a.

Kí hiệu : $d(O,a)=OH$.



Nhận xét

- $\forall N \in a : ON \geq d(O,a) = OH$
- $d(O,a)=0 \Leftrightarrow O \in a$

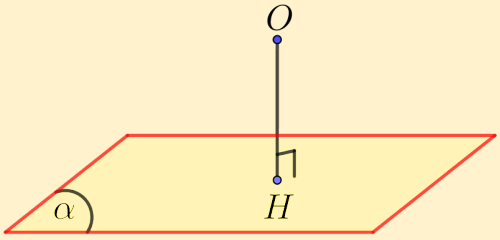
1.2. *Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng*

Định nghĩa:

Cho điểm O và mặt phẳng (α).

• Gọi H là hcvg của O trên mặt phẳng (α).
• Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α).

Kí hiệu : $d(O,(\alpha))=OH$



Nhận xét

- $\forall N \in (P) : ON \geq d(O,(P)) = OH$
- $d(O,(P))=0 \Leftrightarrow O \in (P)$

2. Khoảng cách giữa đường và mặt song song, hai mặt song song

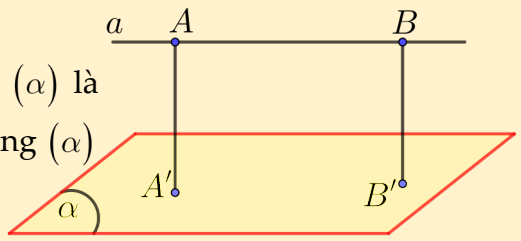
2.1. *Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song*

Định nghĩa:

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α).

• Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α)

Kí hiệu : $d\big(a,(\alpha)\big)=d\big(A,(\alpha)\big)$

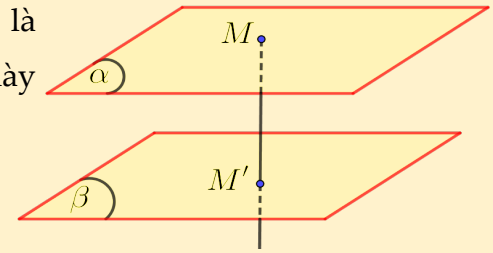


2.2. *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song*

Định nghĩa:

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha),(\beta)$ là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia

Kí hiệu : $d\big((\alpha),(\beta)\big)=d\big(M,(\beta)\big)$ với điểm $M\in(\alpha)$



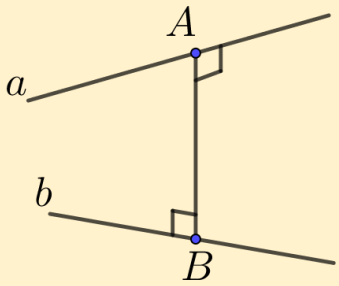
3. Đường vuông góc chung và khoảng cách hai đường chéo nhau

3.1. *Định nghĩa*

Định nghĩa:

- Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b và cùng vuông góc với mỗi đường ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b
- Nếu đường vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b tại A,B thì độ dài đoạn thẳng AB gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b

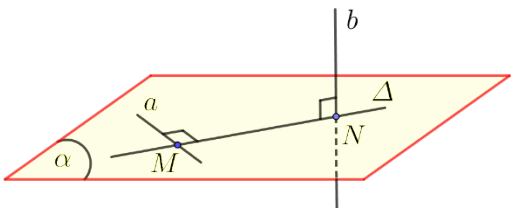
Kí hiệu: $d(a,b)=AB$



3.2. *Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau*

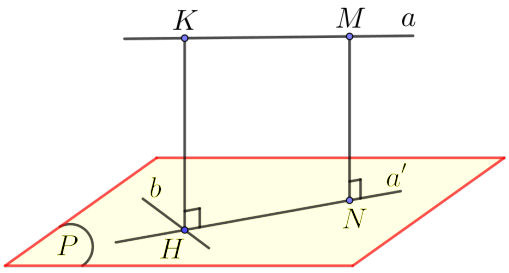
▶ **Cách 1:** Khi a vuông b

- Dựng một mặt phẳng $(\alpha)\supset a,(\alpha)\perp b$ tại N
- Trong (α) dựng $NM\perp a$ tại M
- Đoạn MN là đoạn vuông góc chung của a và b



▶ **Cách 2:** Khi a chéo b

- Dựng một mặt phẳng $(P) \supset b, (P)//a$.
- Dựng a' là hình chiếu của a lên mặt phẳng (P), bằng cách lấy $M \in a$ dựng đoạn $MN \perp (P)$, lúc đó a' là đường thẳng đi qua N và song song với a
- Gọi $H = a' \cap b$, dựng $HK//MN \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của a và b



Nhận xét

(1) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *bằng* khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó với mặt phẳng song song với nó và chứa thằng còn lại.

(2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *bằng* khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

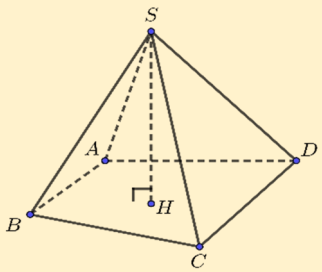
4. Thể tích khối chóp

Định nghĩa:

Công thức tính thể tích khối chóp:

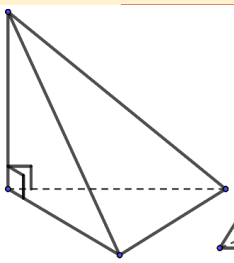
$$V = \frac{1}{3} S.h$$

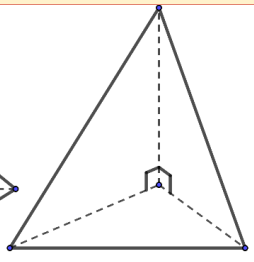
Trong đó:
S là diện tích đáy
h là chiều cao khối chóp
(khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).

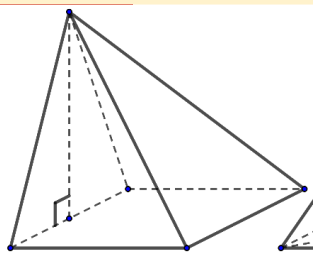


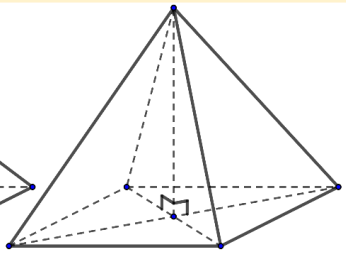
Cách xác định đường cao khối chóp:

Loại	*Đường cao*
Cạnh bên vuông đáy *Hình 1.1*	Đường cao chính là cạnh bên.
Hai mặt bên vuông đáy *Hình 1.2*	Đường cao là giao tuyến của hai mặt bên vuông góc đáy.
Mặt bên vuông đáy *Hình 1.3*	Đường cao của mặt bên vuông góc đáy.
Chóp đều *Hình 1.4*	Đường cao hạ từ đỉnh đến tâm đa giác đáy.


Hình 1.1


Hình 1.2


Hình 1.3


Hình 1.4

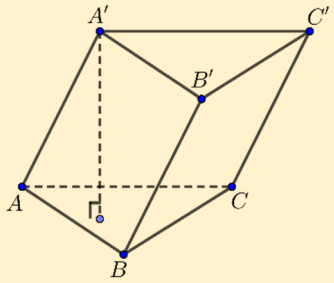
5. Thể tích khối lăng trụ

Định nghĩa:

Công thức tính thể tích khối chóp:

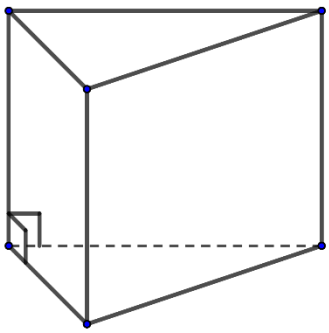
$$V = S.h$$

Trong đó:
S là diện tích đáy
h là chiều cao khối chóp
(khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).

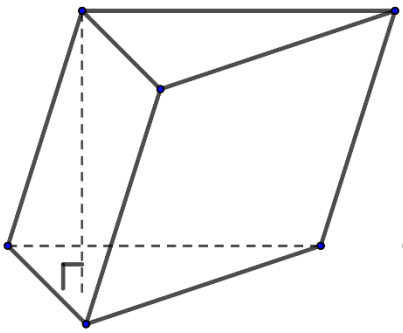


Cách xác định đường cao lăng trụ:

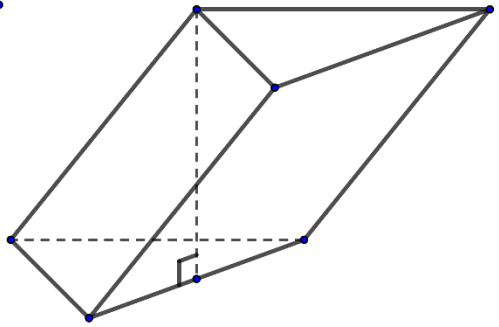
Loại	*Đường cao*
Cạnh bên vuông đáy *Hình 2.1*	Đường cao chính là cạnh bên.
Lăng trụ đứng *Hình 2.1*	Đường cao chính là cạnh bên.
Lăng trụ xiên *Hình 2.2*	Đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đáy.
Lăng trụ có hình chiếu *Hình 2.3*	Đường cao là hình chiếu vuông góc của 1 đỉnh xuống đáy.



Hình 2.1

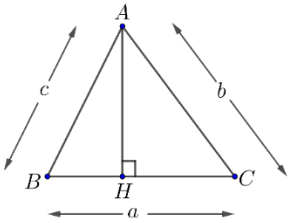
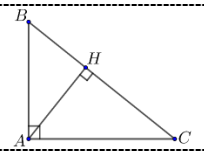
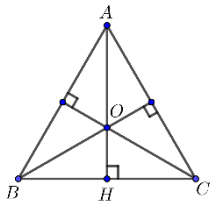
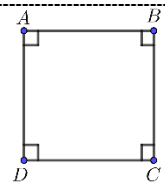
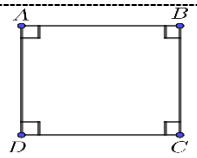
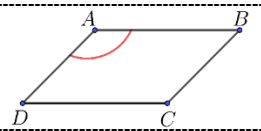
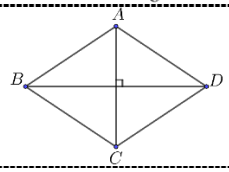
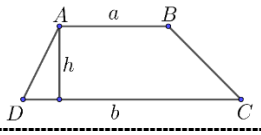


Hình 2.2



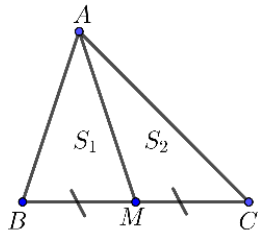
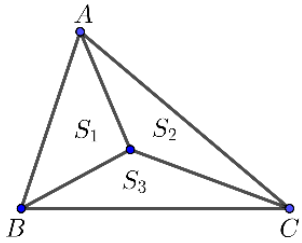
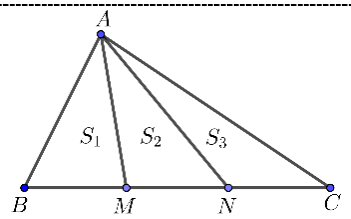
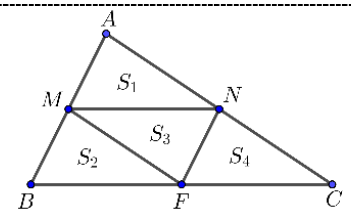
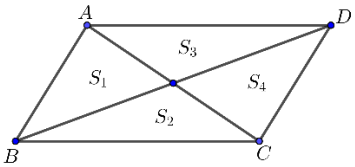
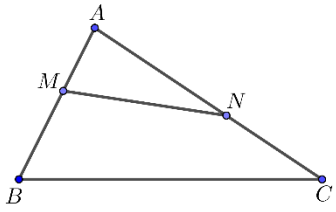
Hình 2.3

6. Công thức tính diện tích đáy.

Tam giác 	$S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$
	$S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$
	$S=\frac{1}{2}ba.\sin A=\frac{1}{2}ca.\sin B=\frac{1}{2}ba.\sin C$
	$S=\frac{abc}{4R}=2R^2.\sin A.\sin B.\sin C$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
	$S=p.r$ với p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC
	$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p=\frac{a+b+c}{2}$ hoặc $S=\frac{1}{4}\sqrt{\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]}$
	*Tam giác vuông* ΔABC vuông tại A: $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}BC.AH$.
	*Tam giác đều* ΔABC đều, cạnh AB: $S=(AB)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}$; Chiều cao tam giác đều $h=AB.\frac{\sqrt{3}}{2}$.
	*Hình vuông cạnh* AB Diện tích hình vuông $ABCD: S=(AB)^2$
	*Hình chữ nhật* Diện tích hình chữ nhật $ABCD: S=AB.CD$
	*Hình bình hành* Diện tích hình bình hành $ABCD: S=AB.AD.\sin\widehat{BAD}$
	*Hình thoi* Diện tích hình thoi $ABCD: S=AB.AD.\sin\widehat{BAD}=\frac{1}{2}AC.BD$
	*Hình thang* Diện tích hình thang $ABCD: S=\frac{1}{2}(AB+CD).h$
	Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S=\frac{1}{2}AC.BD$

7. Tỷ số diện tích.

Ta có các tỷ số thường gặp sau:

	AM trung tuyến, đặt $S_{ABC}=S\longrightarrow S_1=S_2=\dfrac{S}{2}.$
	G là trọng tâm, đặt $S_{ABC}=S\longrightarrow S_1=S_2=S_3=\dfrac{S}{3}.$
	$BM=MN=NC$ đặt $S_{ABC}=S\longrightarrow S_1=S_2=S_3=\dfrac{S}{3}.$
	$M;N;F$ lần lượt là trung điểm $AB;AC;BC$ đặt $S_{ABC}=S\longrightarrow S_1=S_2=S_3=S_4=\dfrac{S}{4}.$
	$S_{ABCD}=S\longrightarrow S_1=S_2=S_3=S_4=\dfrac{S}{4}$
	$\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\dfrac{AM}{AB}.\dfrac{AN}{AC}$

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Khoảng cách từ chân đường cao đến một mặt bên

Phương pháp

- **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.
- **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
- **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.

Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất:

"Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trên mặt này vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia."

Nhận xét:

Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Hầu như tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy (ABC).

Hãy xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt bên (SBC).

Lời giải

Ta có $BC = (SBC) \cap (ABC)$.

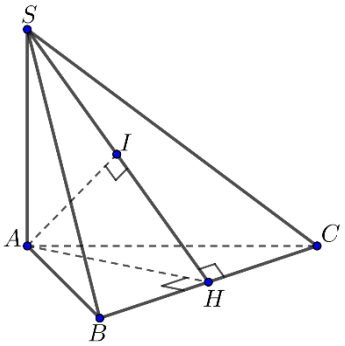
Dựng $AH \perp BC$ tại H.

Dựng $AI \perp SH$ tại I.

Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$.

$(SBC) \perp (SAH) = AH$ có $AI \perp SH$

Nên $AI \perp (SBC)$. Vậy $d(A;(SBC)) = AI$.

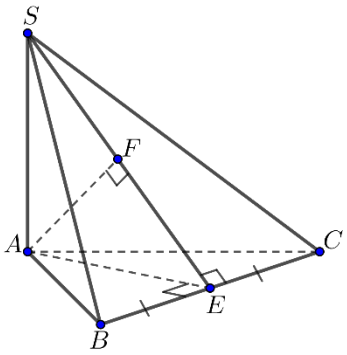


Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a, biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Gọi E là trung điểm BC thì $BC \perp AE$ (vì ABC đều).
Dựng $AF \perp SE$ tại F.



Có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AE \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAE) = SE \Rightarrow AF \perp SE$

Suy ra $AF \perp (SBC)$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AF$.

Trong ΔSAE: $\dfrac{1}{AF^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{2}{3a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{2}{a^2} \Rightarrow AF = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

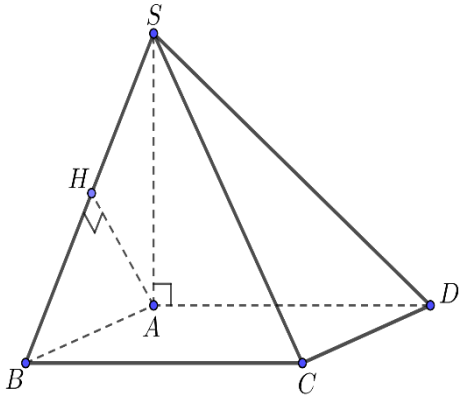
Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AF = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 1.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB) = SB$



Kẻ $AH \perp SB$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SBC)$

Vậy: $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$.

Trong ΔSAB:

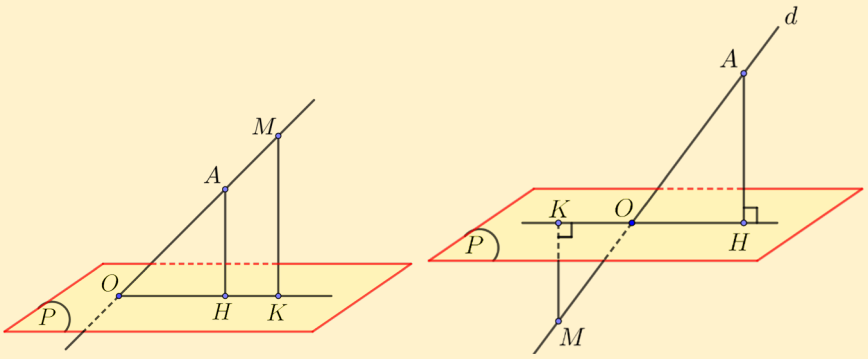
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Kết luận: $\mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dạng 2. Khoảng cách từ điểm bất kỳ đến một mặt phẳng

Phương pháp

Từ các điểm yêu cầu, ta quy về chân đường cao:
Giả sử $AM \cap (P) = \{O\}$ như hình vẽ.



Khi đó: $\dfrac{d(M,(P))}{d(A,(P))} = \dfrac{OM}{OA} \Rightarrow d(M,(P)) = \dfrac{OM}{OA} \cdot d(A,(P))$ với $\dfrac{OM}{OA}$ là hằng số.

Để tính được $d(M,(P))$ ta chỉ cần tính $d(A,(P))$ bằng các bước sau:

- **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.
- **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
- **Bước 3:** Dựng $H \in \Delta$ (với $AI \perp SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
  Với S là đỉnh, S là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60°$. Gọi M là trung điểm BC. Biết $SA = SB = SC = a\sqrt{5}$.

(1) Tính chiều cao của hình chóp.

(2) Tính khoảng cách từ M đến (SAB).

Lời giải

(1) *Tính chiều cao của hình chóp.*

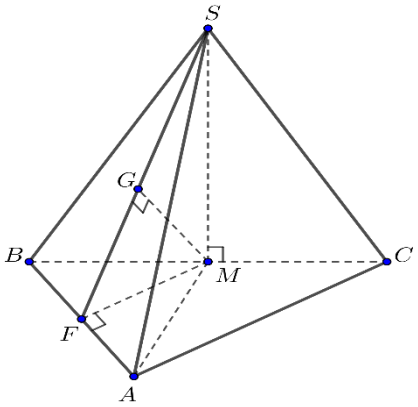
Vì ΔABC vuông tại A, M là trung điểm của BC
Nên ta có $MA = MB = MC$. (1)

Theo đề $SA = SB = SC$. (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow M$ là HCVG của S lên (ABC).

Vậy $d(S,(ABC)) = SM$.

Trong ΔSBM có $SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2 - a^2} = 2a$.



(2) *Tính khoảng cách từ M đến (SAB).*

M là hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC).

Kẻ $MF \perp AB$ tại F. Kẻ $MG \perp SF$ tại $G \Rightarrow MG \perp (SAB)$.

MAB là tam giác cân có góc $60°$ nên MAB đều $\Rightarrow MF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSMF: $\dfrac{1}{MG^2} = \dfrac{1}{SM^2} + \dfrac{1}{MF^2} = \dfrac{1}{(2a)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow MG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Ví dụ 2.2.

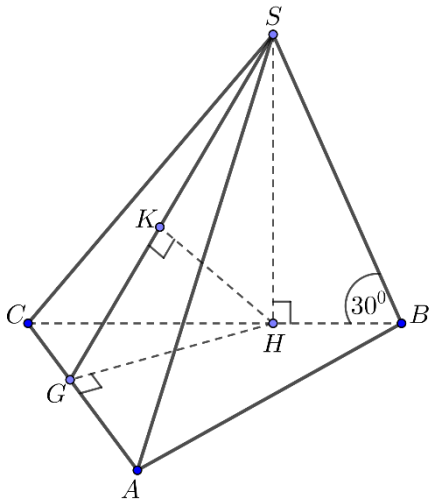
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên BC.

Do $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Trong ΔSBH: $\begin{cases} SH = SB \cdot \sin 30^\circ = a\sqrt{3} \\ BH = SB \cdot \cos 30^\circ = 3a \end{cases}$.



Dựng $HG \perp AC$ tại G. Dựng $HK \perp SG$ tại K.

Ta có $\begin{cases} AC \perp HG \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp \text{mp}(SHG)$.

$\Rightarrow (SAC) \perp (SHG)$ vì $AC \subset (SAC)$

Và $(SAC) \cap (SGH) = SG \Rightarrow HK \perp (SAC)$.

Vậy $\text{d}(H,(SAC)) = HK$.

Ta có $\Delta CGH \sim \Delta CBA \Rightarrow \dfrac{GH}{BA} = \dfrac{CH}{CA} \Rightarrow GH = \dfrac{a}{5a}.3a = \dfrac{3a}{5}$.

Trong ΔSGH: $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HG^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{25}{9a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{28}{9a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$.

$HB \cap (SAC) = \{C\} \Rightarrow \dfrac{\text{d}(B,(SAC))}{\text{d}(H,(SAC))} = \dfrac{BC}{HC} = 4$

Vậy $\text{d}(B,(SAC)) = 4\,\text{d}(H,(SAC)) = \dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$.

Dạng 3. Khoảng cách hai đường chéo nhau

Phương pháp

Phương pháp chung: Ta phải chuyển khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

⌘ *Trường hợp 1:*

♻ Nếu đường thẳng $\begin{cases} a \subset (P) \\ b // (P) \end{cases} \Rightarrow d(a,b) = d(b,(P))$.

Khi đó chọn $M \in b$ sao cho có thể tính $d(M,(P))$ là $d(a,b)$.

♻ Nếu không tìm được $\begin{cases} (P) \supset a \\ (P) // b \end{cases}$ thì ta phải dựng $\begin{cases} (Q) \supset a \\ (Q) // b \end{cases}$

⌘ *Trường hợp 2:* a và b lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song nhau.

♻ Nếu đường thẳng $\begin{cases} a \in (P) \\ b \in (Q) \\ (P) // (Q) \end{cases} \Rightarrow d(a,b) = d((P),(Q))$

⌘ *Trường hợp 3:* a là cạnh bên còn b là một cạnh đáy của hình chóp

♻ Ta làm như sau:

(+) Gọi $I = a \cap (P)$ (mặt đáy).

(+) Từ I dựng đường thẳng Δ song song với b.

(+) Khi đó b song song với (P) chứa a và Δ.

(+) Chọn M trên b sao cho có thể tính $d(M,(P))$ là $d(a,b)$.

Để tính được $\frac{d(M,(P))}{d(A,(P))} = \frac{OM}{OA} \Rightarrow d(M,(P)) = \frac{OM}{OA} d(A,(P))$ ta chỉ cần tính $\frac{OM}{OA}$ bằng các bước sau:

▶ **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.

▶ **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).

▶ **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.

Với S là đỉnh, S là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ 3.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD theo a.

Lời giải

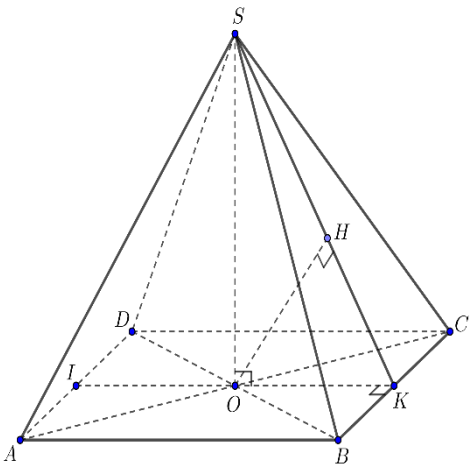
Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $AD//BC \Rightarrow AD//(SBC)$

Nên $d(AD,SB)=d(AD,(SBC))=d(I,(SBC))$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SK

Nên $\begin{cases}OH\perp SK\\OH\perp BC\end{cases}\Rightarrow OH\perp(SBC)\Rightarrow d(O,(SBC))=OH$.



Trong ΔSAO: $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{2a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Trong ΔSOK:

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OK^2}=\frac{4}{6a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{14a^2}{3}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{42}}{14}$.

$OI\cap(SBC)=\{K\}\Rightarrow\frac{d(I,(SBC))}{d(O,(SBC))}=\frac{IK}{OK}=2$.

Vậy $d(AD,SB)=d(I,(SBC))=2d(O,(SBC))=2OH=\frac{a\sqrt{42}}{7}$.

Ví dụ 3.2.

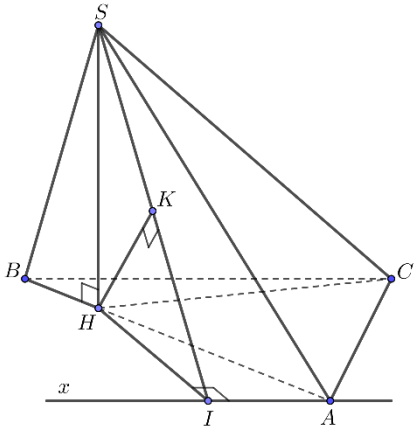
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA=2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa SA và BC theo a.

Lời giải

Áp dụng định lí Cô-sin trong ΔAHC ta có:

$CH^2=CA^2+AH^2-2.CA.AH.\cos\widehat{CAH}$.

$=a^2+\frac{4a^2}{9}+2.a.\frac{2a}{3}.\cos 60^0=\frac{7a^2}{9}\Rightarrow CH=\frac{a\sqrt{7}}{3}$.



Ta có HC là hình chiếu vuông góc của SC trên (ABC)

Nên $(\widehat{SC;(ABC)})=\widehat{SCH}=60^0$.

Trong ΔSCH: $SH=CH.\tan 60^0=\frac{a\sqrt{7}}{3}.\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Từ A kẻ $Ax//BC\Rightarrow BC//(SAx)$

Khi đó $d(BC,SA)=d(BC,(SAx))=d(B,(SAx))$.

Dựng $HI\perp Ax$ tại I.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SI.

Vì $\begin{cases}Ax\perp HI\\Ax\perp SH\end{cases}\Rightarrow Ax\perp(SHI)\Rightarrow(SAx)\perp(SHI)=SI$.

Mà $HK\perp SI\Rightarrow HK\perp(SAx)$. Vậy $d(H,(SAx))=HK$.

Trong ΔAIH: $HI = HA.\cos 60^0 = \frac{2a}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔSIH: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{9}{21a^2} + \frac{9}{3a^2} = \frac{24a^2}{7} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{24}}$.

$BH \cap (SAx) = A \Rightarrow \frac{d(B,(SAx))}{d(H,(SAx))} = \frac{BA}{HA} = \frac{3}{2}$.

Vậy $d(BC,SA) = d(B,(SAx)) = \frac{3}{2}d(H,(SAx)) = \frac{3}{2}HK = \frac{a\sqrt{42}}{8}$.

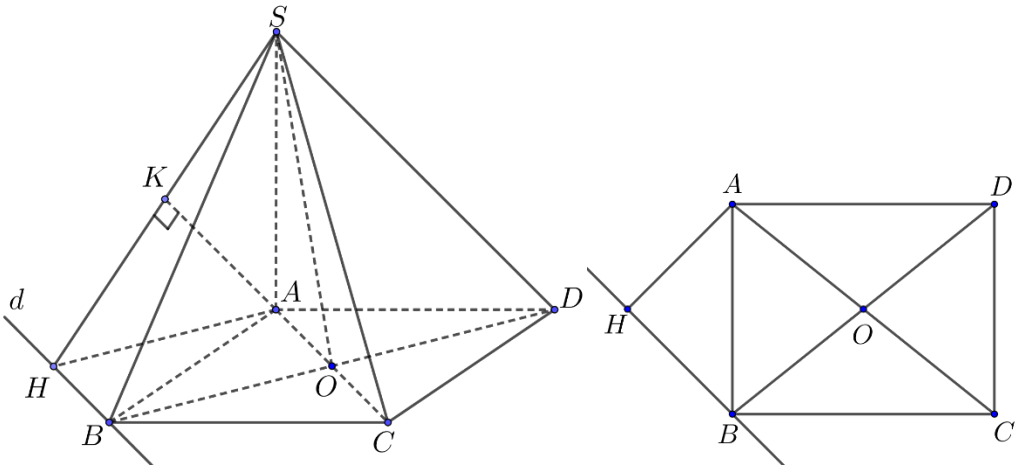
Ví dụ 3.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính

(1) $d(AC,SB)$.

(2) Sin của góc giữa SB và mặt phẳng (SAC).

Lời giải



(1) $d(AC,SB)$.

- Hình chiếu của SB lên $(ABCD)$ là AB

$\Rightarrow (SB,(ABCD)) = (SB,AB) = \widehat{SBA} = 60^0 \Rightarrow SA = AB.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$

- Trong $(ABCD)$, qua B kẻ d song song với AC
- Kẻ $AH \perp d$
- Ta có $d \perp SA$ vì $SA \perp (ABCD)$ và $d \subset (ABCD)$

Nên $d \perp (SAH)$

- Kẻ $AK \perp SH$.
- Ta có: $AK \perp d$ vì $d \perp (SAH)$ và $AK \subset (SAH)$

Nên $AK \perp (SBH)$

- Ta lại có d //AC nên $AC // (SBH)$

$\rightarrow d(AC,SB) = d(AC,(SBH)) = d(A,(SBH)) = AK$



♦ Mà $AH=\dfrac{1}{2}BD=a\sqrt{2}$

$$\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AH^2}\Rightarrow AK=\frac{2a\sqrt{21}}{7}=d\left(AC,SB\right)$$

(2) *Sin của góc giữa* SB *và mặt phẳng* $\left(SAC\right)$.

♦ Ta có $\begin{cases}BO\perp AC\\BO\perp SA\end{cases}\Rightarrow BO\perp\left(SAC\right)$

♦ Hình chiếu của SB lên $\left(SAC\right)$ là $SO\Rightarrow\left(SB,\left(SAC\right)\right)=\left(SB,SO\right)=\widehat{BSO}$

♦ Ta có: $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=4a$

$$\Rightarrow\sin\left(SB,\left(SAC\right)\right)=\sin\widehat{BSO}=\frac{OB}{SB}=\frac{a\sqrt{2}}{4a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

B Các dạng bài tập

Dạng 4. Chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Phương pháp

☑ Đây là dạng dễ xác định được đường cao (h).

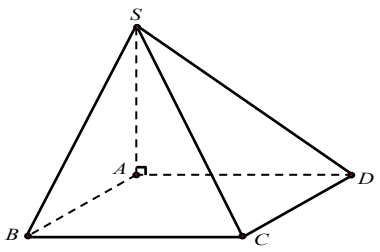
☑ Áp dụng công thức: $V=\dfrac{1}{3}S.h$

Ví dụ 4.1.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

Lời giải

Thể tích khối chóp $V=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$



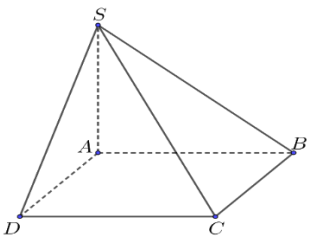
Ví dụ 4.2.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a, BC=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

Lời giải

Diện tích đáy: $S_{ABCD}=AD.BC=2a^2$.

Thể tích: $V=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.



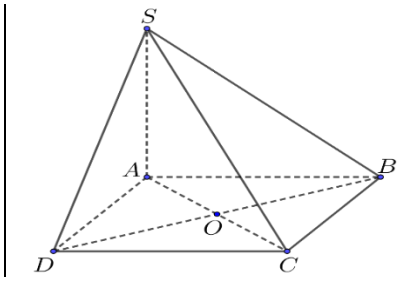
Ví dụ 4.3.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông canh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=2a$. Thể tích của khối chóp $S.BCD$ là:

Lời giải

Ta có: $S_{BCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{a^2}{2}$.

Suy ra $V=\frac{1}{3}.S_{BCD}.SA=\frac{a^3}{3}$.

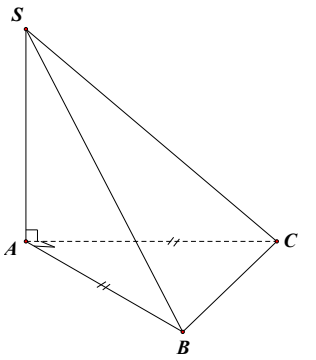


Ví dụ 4.4.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, ΔABC vuông cân tại A, $SA=BC=a$.

Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$

Lời giải



Ta có $AB=\frac{BC}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ nên $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB^2=\frac{a^2}{4}$.

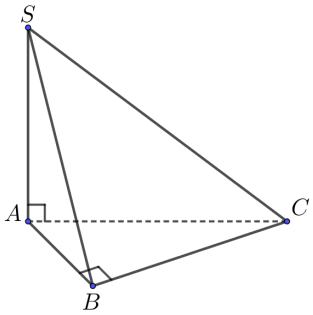
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là . $V=\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=\frac{1}{3}.a.\frac{a^2}{4}=\frac{a^3}{12}$..

Ví dụ 4.5.

Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$.

Tính thể tích khối chóp $S.ABC$, biết rằng $SB=a\sqrt{5}$

Lời giải



Ta có: $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=2a; BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=a\sqrt{2}$

$S_{ABC}=\frac{AB.BC}{2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Ví dụ 4.6.

Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $AB = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{BAC} = 120°$.

Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

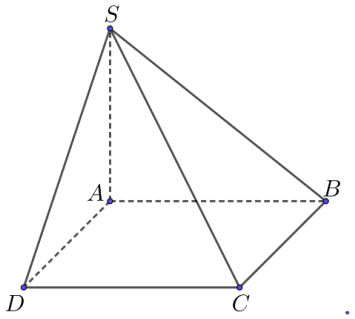
Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (đvtt).

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Ví dụ 4.7.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $AB = 3a$, $AD = 2a$, $SB = 5a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Lời giải



Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}$.

Xét tam giác vuông SAB có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 4a$.

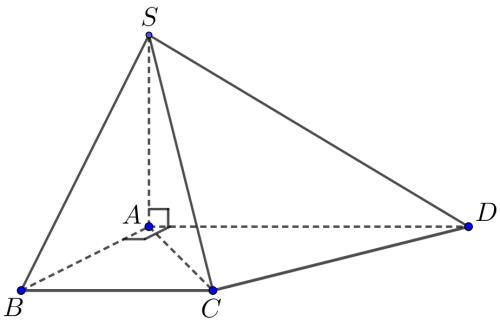
Và $S_{ABCD} = AB.AD = 6a^2$.

Nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.4a.6a^2 = 8a^3$.

Ví dụ 4.8.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = a$, $AD = 3a$, $BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a.

Lời giải



Ta có $V_{S.BCD}=\frac{1}{3}SA.S_{BCD}$.

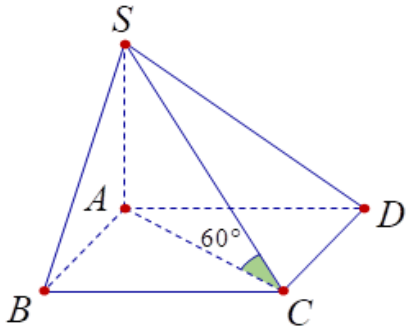
Lại có $S_{BCD}=S_{ABCD}-S_{ABD}=\frac{1}{2}AB.(AD+BC)-\frac{1}{2}AB.AD=\frac{1}{2}AB.BC=\frac{1}{2}a^2$.

Mà $SA=a\sqrt{3}\Rightarrow V_{S.BCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Ví dụ 4.9.

Cho hình chóp $SABCD$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $60°$. Tính thể tích khối chóp $SABCD$.

Lời giải



Vì $SA\perp(ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{SCA}=60°$.

$ABCD$ là hình vuông nên $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a\sqrt{2}$.

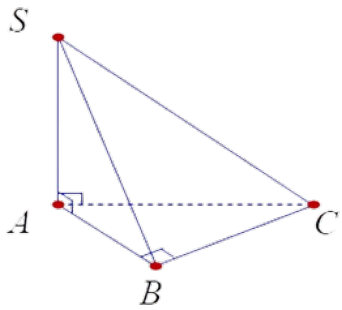
$SA=AC.\tan 60°=2a\sqrt{6}$

Thể tích khối chóp $SABCD$ là: $V=\frac{1}{3}.4a^2.2a\sqrt{6}=\frac{8}{3}a^3\sqrt{6}$.

Ví dụ 4.10.

Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AC=a$ biết SA vuông góc với đáy ABC và SC hợp với (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích khối chóp

Lời giải



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ SB là hình chiếu của SC trên (SAB)

$\Rightarrow$ $\widehat{BSC} = 30°$

ABC là tam giác vuông cân nên $AB = BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vì $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

Xét ΔSBC vuông tại B, $SB = \dfrac{BC}{\tan 30°} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

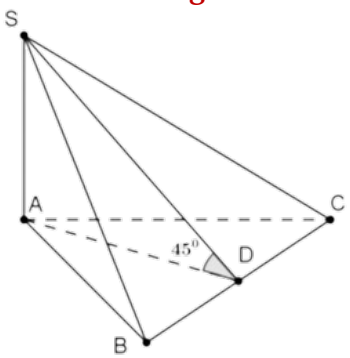
Xét ΔSAB vuông tại A, $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3}{12}$.

Ví dụ 4.11.

Cho khối chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi D là trung điểm cạnh BC. Khi đó $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases}$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SDA}$ hay $\widehat{SDA} = 45^0$.

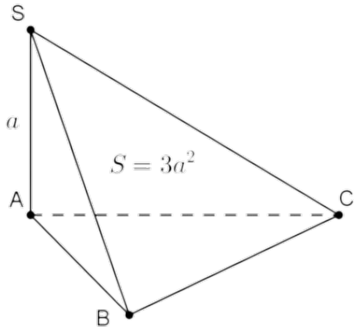
Tam giác SAD là tam giác vuông cân SAD nên $SA = AD = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (tam giác ABC vuông cân tại A).

Mặt khác $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2}{2}$ nên $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ví dụ 4.12.

Cho khối chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $SA=a$ và diện tích tam giác SBC bằng $3a^2$.

Lời giải



Do $SA\perp(ABC)$ nên ΔABC là hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên mặt phẳng (ABC).

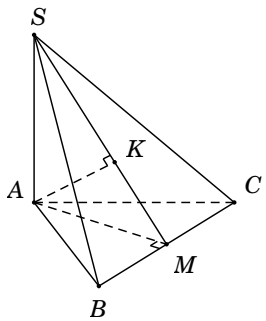
Suy ra $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta SBC}.\cos 60^0=3a^2.\cos 60^0=\dfrac{3a^2}{2}$.

Do đó $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.a.\dfrac{3a^2}{2}=\dfrac{a^3}{2}$.

Ví dụ 4.13.

Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và SA hợp với (SBC) một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $SABC$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, dựng $AK\perp SM$

Ta có $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$ mà $BC\perp AM$

$\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow BC\perp AK$

$\Rightarrow AK\perp(SBC)\Rightarrow SK$ là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (SBC)

$\Rightarrow \widehat{ASM}=45°$

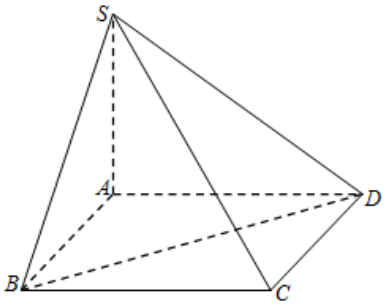
$\Rightarrow \Delta SAM$ là tam giác vuông cân tại $A\Rightarrow SA=AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối chóp là $V=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{8}$.

Ví dụ 4.14.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên $SA=a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác SBD là tam giác đều. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Đặt $AB=x$, ΔABD vuông cân tại $A\Rightarrow BD=x\sqrt{2}$.

Do ΔSBD là tam giác đều $\Rightarrow SB=SD=BD=x\sqrt{2}$.

Lại có ΔSAB vuông tại A

$\Rightarrow SA^2+AB^2=SB^2\Leftrightarrow\left(a\sqrt{2}\right)^2+x^2=\left(x\sqrt{2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2=2a^2\Rightarrow x=a\sqrt{2}$

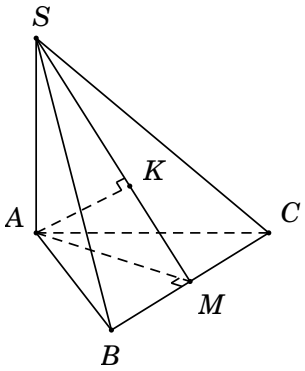
$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\left(a\sqrt{2}\right)^2=\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Ví dụ 4.15.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Tính thể tích $V_{S.ABC}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, suy ra $AM\perp BC$ và $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SM, suy ra $AK \perp SM$. (1)

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AK.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AK \perp (SBC)$ nên $d[A,(SBC)] = AK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Trong ΔSAM, có $SA = \dfrac{AK.AM}{\sqrt{AM^2 - AK^2}} = a\sqrt{3}$. Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3}{4}$.

Dạng 5. Chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Phương pháp

☑ Khối chóp có mặt bên vuông góc mặt phẳng đáy.

✈ Áp dụng công thức: $V=\frac{1}{3}S.h$.

✈ Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh của chóp ta kẻ vuông góc vào giao tuyến của mặt bên và mặt đáy.

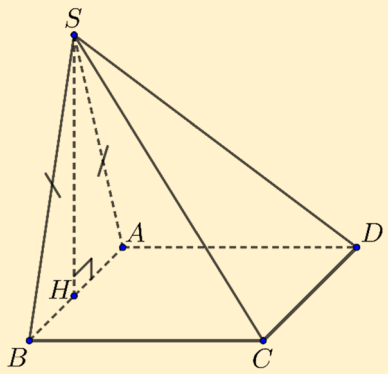
☑ Một số trường hợp thường gặp:

① Mặt bên (SAB) vuông với đáy $(ABCD)$ và SAB là tam giác đều cạnh x

$\to SH\perp(ABCD)\to h=SH=\frac{x\sqrt{3}}{2}$ với H là trung điểm AB.

② Mặt bên (SAB) vuông với đáy $(ABCD)$ và SAB là tam giác cân S tại

$\to SH\perp(ABCD)\to h=SH$ với H là trung điểm AB.



Ví dụ 5.1.

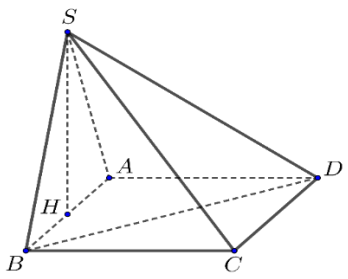
Hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình chữ nhật có $AB=2a\sqrt{3};\ AD=2a$. Mặt bên (SAB) là Δ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối $S.ABD$ là?

Lời giải

Gọi H là trung điểm của $AB\ \Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

ΔSAB là Δ đều cạnh $2a\sqrt{3}$ nên $SH=\frac{2a\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=3a$.

Vậy $V=\frac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{ABD}=\frac{1}{3}\cdot 3a\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\sqrt{3}\cdot 2a=2\sqrt{3}a^3$.



Ví dụ 5.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a; hình chiếu của S trên $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AB cạnh bên $SD=\frac{3}{2}a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ tính theo a bằng?

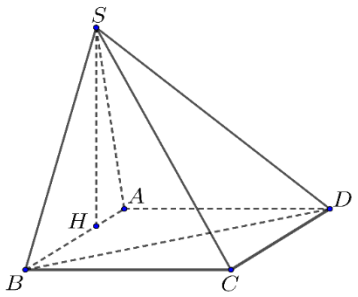
Lời giải

Gọi H là trung điểm của AB nên $SH\perp(ABCD)$.

Lại có $DH=\sqrt{AD^2+AH^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét ΔSDH: $SH=\sqrt{SH^2-DH^2}=a$

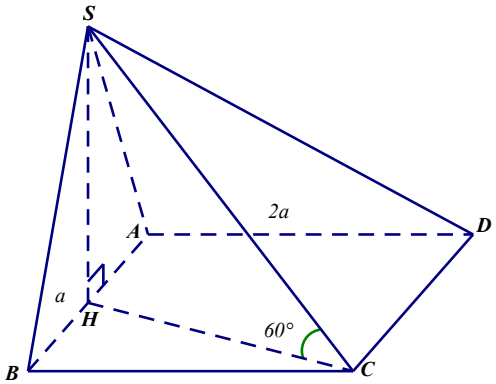
$\Rightarrow V=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}a^3$



Ví dụ 5.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



ΔSAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy

Nên hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm H của AB.

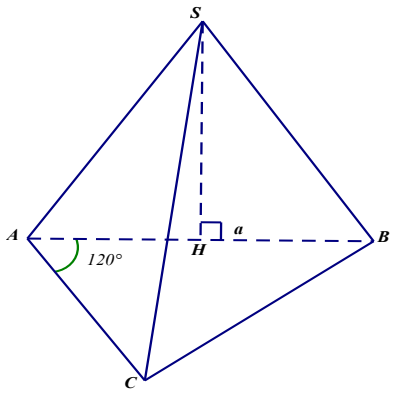
$CH=\sqrt{BC^2+BH^2}=\frac{\sqrt{17}a}{2}$. Do $\widehat{(SC,(ABCD))}=\widehat{SCH}=60°$ nên $SH=CH.\tan 60°=\frac{\sqrt{51}a}{2}$.

$S_{ABCD}=AB.CD=2a^2\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{51}a^3}{3}$.

Ví dụ 5.4.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân đỉnh A, $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



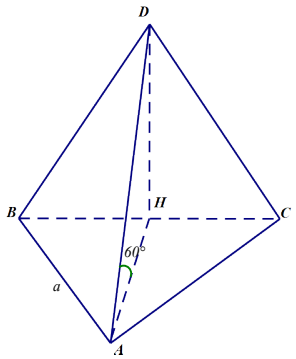
Gọi H là trung điểm của AB, ΔSAB đều cạnh a và vuông góc với đáy nên đường cao của hình chóp là $SH=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}a^2\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABC}=\dfrac{a^3}{8}$.

Ví dụ 5.5.

Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác BCD cân tại D và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết AD hợp với (ABC) một góc $60°$. Tính thể tích của khối tứ diện đã cho.

Lời giải



Do ΔBCD cân tại D và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC)

Nên hình chiếu vuông góc của D trên (ABC) là trung điểm H của BC

$\Rightarrow DH\perp(ABC)$

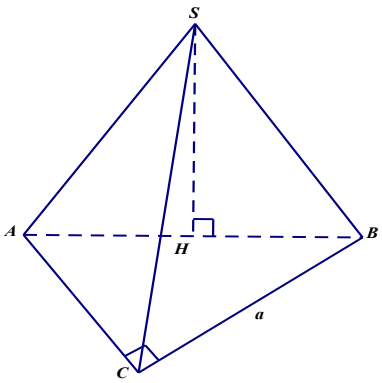
$\widehat{(AD,(ABC))}=\widehat{DAH}=60°\Rightarrow DH=AH.\tan 60°=\dfrac{3a}{2}$.

$S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}DH.S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Ví dụ 5.6.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại C, tam giác SAB đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp.

Lời giải



ΔSAB đều cạnh $a \Rightarrow$ đường cao $SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$; $(SAB) \perp (ABC)$

Nên SH cũng là đường cao của hình chóp $S.ABC$.

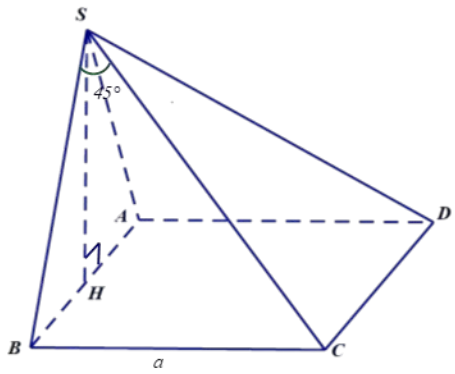
ΔABC vuông cân tại C nên $AC = BC = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC.BC = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} SH.S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Ví dụ 5.7.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. SC tạo với (SAB) một góc $45°$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

Lời giải



Do ΔSAB cân tại S và $(SAB) \perp (ABCD)$

Nên hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm H của AB

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$BC \perp AB, BC \perp SH \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{BSC} = 45° \Rightarrow SB = BC = a$

$\Rightarrow \Delta SAB$ đều cạnh $a \Rightarrow SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

$S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Dạng 6. Chóp đều

Phương pháp

☑ Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau.

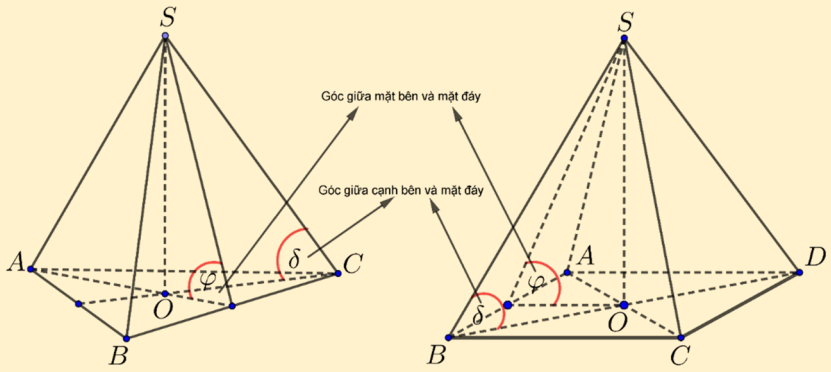
✈ Áp dụng công thức: $V=\frac{1}{3}S.h$.

✈ Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh chóp hạ vuông góc xuống tâm mặt đáy.

☑ Một số kiểu thường gặp:

① Chóp đều $S.ABCD$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là φ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là δ.

② Chóp đều $S.ABC$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là φ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là δ.



Một số công thức tính nhanh:

Chóp đều cạnh x, đáy là tam giác	$V=(x)^3.\frac{\sqrt{2}}{12}$
Chóp đều cạnh x, đáy là tứ giác	$V=(x)^3.\frac{\sqrt{2}}{6}$
Chóp đều, cạnh bên bằng x, đáy là tam giác cạnh y.	$V=\frac{(y)^2\sqrt{3(x)^2-(y)^2}}{12}$
Chóp đều, cạnh bên bằng x, đáy là tứ giác cạnh y.	$V=\frac{(y)^2\sqrt{4(x)^2-2(y)^2}}{6}$
Chóp đều, các mặt bên cùng tạo với đáy góc φ, đáy là tam giác cạnh x.	$V=\frac{(x)^3\tan\varphi}{24}$
Chóp đều, các mặt bên cùng tạo với đáy góc φ, đáy là tứ giác cạnh x.	$V=\frac{(x)^3\tan\varphi}{6}$

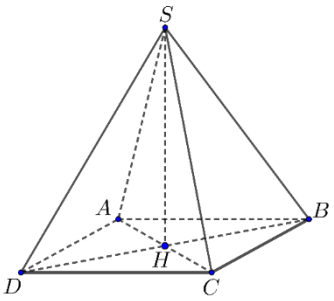
Ví dụ 6.1.

Tính chiều cao của hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b

Lời giải

Gọi H là tâm hình vuông $ABCD$,
Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}$.



Ví dụ 6.2.

Tính thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b.

Lời giải

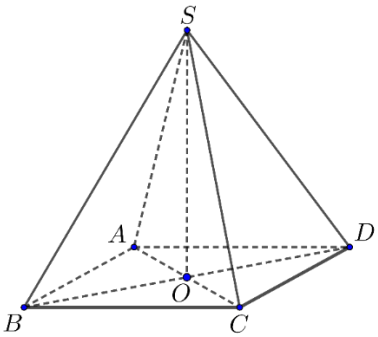
$S.ABCD$ là chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.

BD là đường chéo hình vuông cạnh a

Nên $BD = \sqrt{2} \Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}$.

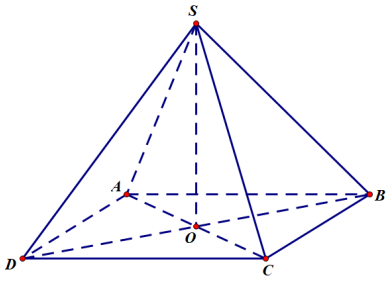
$V = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}.a^2 = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$.



Ví dụ 6.3.

Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đó theo a.

Lời giải



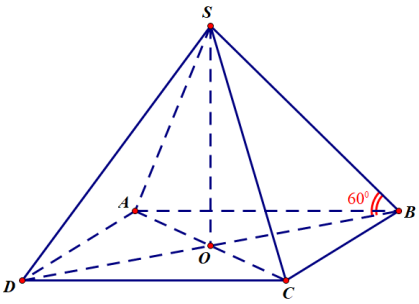
Gọi $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều, O là tâm của hình vuông $ABCD$ ta suy ra SO là đường cao của hình chóp. Do đó $SO = \sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{10}}{2} = \frac{a^3\sqrt{10}}{6}$.

Ví dụ 6.4.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc 60°. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$ thì $SO \perp (ABCD)$.

Ta có góc giữa cạnh bên và mặt đáy là góc $\widehat{SBO} = 60^\circ$.

Mà $ABCD$ là hình vuông nên $BD = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

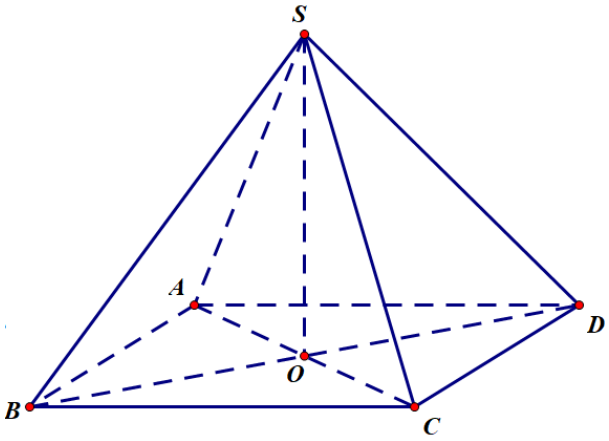
Tam giác SBD đều nên $SO = BD.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 6.5.

Khối chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và có thể tích bằng $\dfrac{2}{3}$. Tính độ dài cạnh của khối chóp.

Lời giải



Gọi O là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Từ giả thiết ta có $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC = \Delta SOD \Rightarrow OA = OB = OC = OD$.

Do đó $ABCD$ là tứ giác nội tiếp, mặt khác $ABCD$ là tứ giác có 4 cạnh bằng nhau,

Vì vậy $ABCD$ là hình vuông.

Từ đây suy ra $S.ABCD$ là hình chóp đều.

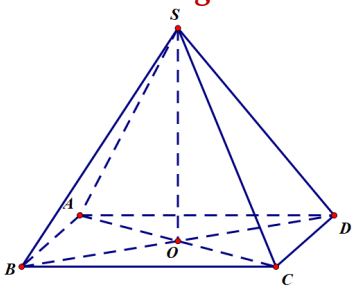
Đặt độ dài cạnh hình chóp là x. Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{x^2 - \dfrac{x^2}{2}} = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

Thế tích $V = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\dfrac{x}{\sqrt{2}}.x^2 = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Ví dụ 6.6.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và cạnh bằng a, $SO \perp (ABCD)$, $SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$ suy ra $OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

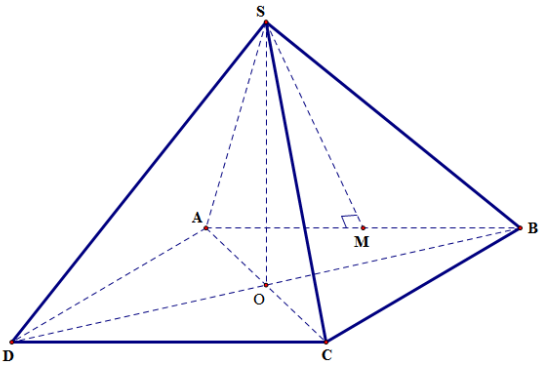
Trong tam giác vuông SAO tại O ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{9a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{34}}{2}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}a^2.\dfrac{a\sqrt{34}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{34}}{6}$.

Ví dụ 6.7.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có diện tích $16\,\text{cm}^2$, diện tích một mặt bên là $8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Ta có $S_{ABCD} = AB^2 = 16\,\text{cm}^2 \Rightarrow AB = 4\,\text{cm} \Rightarrow AO = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó $SM \perp AB$.

$S_{SAB} = \dfrac{1}{2}SM.AB = 8\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \Rightarrow SM = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$.

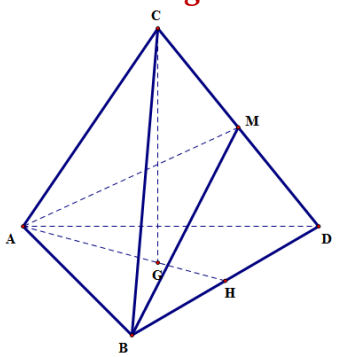
$SA = \sqrt{SM^2 + AM^2} = 2\sqrt{13}\,\text{cm}$. $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 2\sqrt{11}\,\text{cm}$.

$V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}.16.2\sqrt{11} = \dfrac{32\sqrt{11}}{3}\,\text{cm}^3$.

Ví dụ 6.8.

Cho khối tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a, M là trung điểm DC. Thể tích V của khối chóp $M.ABC$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi H là trung điểm BD, $ABCD$ là trọng tâm ΔABD.

Ta có $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AG=\dfrac{2}{3}AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔACG có $CG=\sqrt{AC^2-AG^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

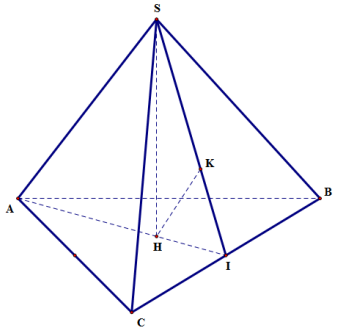
Do đó $V_{CABD}=\dfrac{1}{3}CG.S_{ABD}=\dfrac{1}{3}CG.\dfrac{1}{2}AB.AD.\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$. (có thể áp dụng công thức tính nhanh thể tích khối tứ diện đều).

Mà $\dfrac{V_{CABM}}{V_{CABD}}=\dfrac{CM}{CD}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{CABM}=\dfrac{1}{2}V_{CABD}=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{24}$.

Ví dụ 6.9.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{3a}{4}$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

Lời giải



Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC ta có: $SH\perp(ABC)$.

Khi đó $d\left(\text{A};(SBC)\right)=3d\left(H;(SBC)\right)=\dfrac{3a}{4}$

Suy ra $\text{d}\left(H;(SBC)\right)=\dfrac{a}{4}$. Gọi I là trung điểm của BC dễ thấy $AI\perp BC$.

Dựng $HK \perp SI$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBC)$.

Do vậy $d(\mathrm{H};(SBC)) = HK = \frac{a}{4}$; $HI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

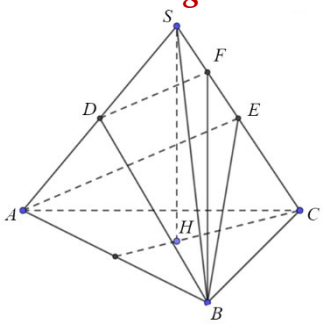
Mặt khác $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow SH = \frac{a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Ví dụ 6.10.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 1$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của SA, SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $BD \perp AE$.

Lời giải



Lấy F là trung điểm của SE thì $DF // AE$, mà $BD \perp AE$ nên $BD \perp DF$.

$\Rightarrow BD^2 + DF^2 = BF^2$ (1).

Đặt $AB = x$. Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có:

$$BD^2 = \frac{AB^2 + SB^2}{2} - \frac{SA^2}{4} = \frac{x^2 + 1^2}{2} - \frac{1^2}{4} = \frac{2x^2 + 1}{4}$$

Tương tự: $AE^2 = BE^2 = \frac{2x^2 + 1}{4}$; $DF^2 = \frac{AE^2}{4} = \frac{2x^2 + 1}{16}$

$$BF^2 = \frac{BS^2 + BE^2}{2} - \frac{SE^2}{4} = \frac{1 + \frac{2x^2 + 1}{4}}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4} = \frac{7}{16} + \frac{2x^2 + 1}{8}.$$

Đặt $t = \frac{2x^2 + 1}{4}$, thay vào (1) ta có: $t + \frac{t}{4} = \frac{7}{16} + \frac{t}{2} \Leftrightarrow t = \frac{7}{12}$

$\Rightarrow \frac{2x^2 + 1}{4} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó đường cao $SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}.SH = \frac{1}{3}\frac{x^2\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{1}{3}\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2.\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{21}}{54}$.

Dạng 7. Lăng trụ đứng

Phương pháp

☑ Áp dụng công thức chính: $V = S.h$.

❍ Tính được diện tích đáy ta xem lại "**Công thức tính diện tích đáy**"

❍ Lăng trụ đứng sẽ có các đường cao song song nhau, tùy vào trường hợp đề ra ta sẽ sử dụng đường cao hợp lý.

	Định nghĩa	*Tính chất*
Hình lăng trụ đứng	Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.	Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.
Hình lăng trụ đều	Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.	Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Ví dụ 7.1.

Khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a, đường cao bằng $a\sqrt{3}$ có thể tích bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $V = S.h = a^2.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

Ví dụ 7.2.

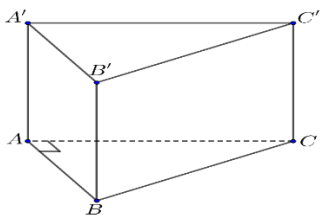
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$. Đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Theo giả thiết $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A.

Suy ra thể tích của khối lăng trụ là

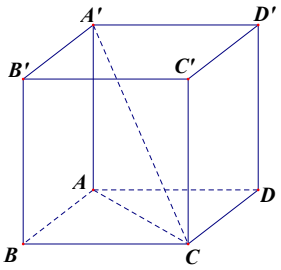
$$V = AA'.S_{ABC} = AA'.\frac{1}{2}.AB.AC = \frac{a^3}{2}.$$



Ví dụ 7.3.

Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đoạn $A'C = a$. Thể tích khối đó thu được?

Lời giải



Ta có: $A'C^2 = AA'^2 + AC^2 = AA'^2 + AB^2 + BC^2 = 3AB^2$.

Suy ra: $AB = \dfrac{A'C}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Do đó: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Ví dụ 7.4.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 4a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{1}{2}AB^2.AA' = 8a^3\sqrt{3}$.

Ví dụ 7.5.

Cho lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng $3a$.
Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải

Diện tích đáy của hình lăng trụ là: $B = (3a)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4}$.

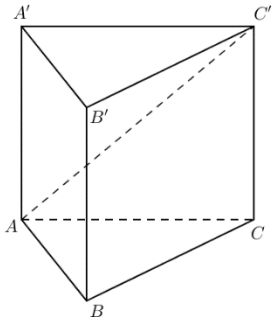
Chiều cao của hình lăng trụ là: $h = 3a$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V = B.h = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4}.3a = \dfrac{27a^3\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 7.6.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $C'A = a\sqrt{2}$ và $\widehat{AC'C} = 45°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải



Trong $\Delta ACC'$ có $AC = AC'.\sin\widehat{AC'C} = a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a$; $CC' = AC'.\cos\widehat{AC'C} = a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a$.

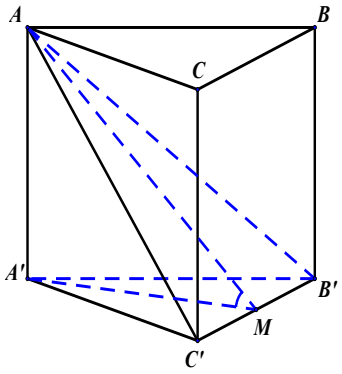
Trong ΔBAC có $AC^2 = BA^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC^2 = 2BA^2 \Rightarrow BA = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{\Delta ABC} = CC'.\dfrac{1}{2}.BA^2 = a.\dfrac{1}{2}.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3}{4}$.

Ví dụ 7.7.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy bằng 45°. Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Xét $(AB'C')$ và $(A'B'C')$: Gọi M là trung điểm của $B'C'$, vì tam giác $A'B'C'$ đều nên $A'M \perp B'C'$, mặt khác lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp B'C'$. Do đó $(AA'M) \perp B'C'$. Vậy $\widehat{((AB'C'),(A'B'C'))} = \widehat{AMA'} = 45^o$.

Tam giác $AA'M$ vuông tại A' và có $\widehat{AMA'} = 45^o$ nên vuông cân tại A'

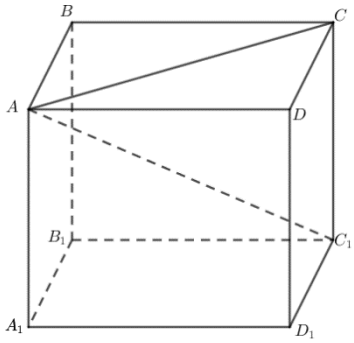
Do đó $AA' = A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; $S_{A'B'C'} = \dfrac{2^2.\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{A'B'C'} = \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$.

Ví dụ 7.8.

Cho khối hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 120^o$, đường thẳng AC_1 tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60°. Tính thể tích khối hộp đã cho.

Lời giải



Ta có $CC_1 \perp (ABCD) \Rightarrow \left(\widehat{AC_1,(ABCD)}\right) = \widehat{C_1AC} = 60^o$;

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos\widehat{ABC} = a\sqrt{3}$.

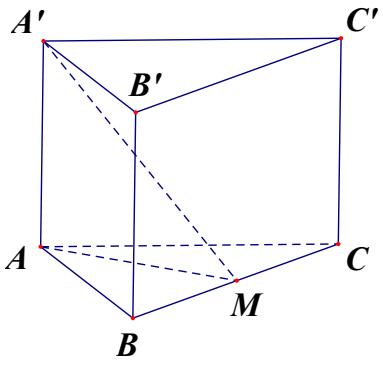
Xét tam giác vuông ACC_1, có: $CC_1 = AC.\tan\widehat{C_1AC} = 3a$.

Vậy $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD}.CC_1 = BA.BC.\sin 120^o.CC_1 = \dfrac{3a^3.\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 7.9.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC, $A'M = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



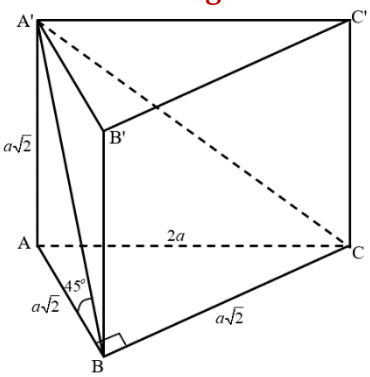
$AA' = \sqrt{A'M^2 - AM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9a^3}{8}$.

Ví dụ 7.10.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$, biết rằng $(A'BC)$ hợp với đáy (ABC) một góc 45°. Thể tích lăng trụ là bao nhiêu?

Lời giải



Do tam giác ABC vuông cân tại B, độ dài cạnh huyền $AC = 2a$

Nên ta có : $BA = BC = a\sqrt{2}$

Góc tạo bởi mặt phẳng $(A'BC)$ và đáy (ABC) là góc $\widehat{A'BA} = 45^o$ do đó: $AA' = AB = a\sqrt{2}$

Vậy thể tích lăng trụ là: $V = B.h = \dfrac{a\sqrt{2}.a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$.



Chương 08
Bài 4. KHOẢNG CÁCH & THỂ TÍCH

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **SAI** ?

A. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a,b là khoảng cách từ một điểm M thuộc mặt phẳng (α) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kì trên b.

B. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

C. Nếu hai đường thẳng a,b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

D. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc a tới mặt phẳng (α).

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (α) chứa a và song song với b

B là điểm bất kì thuộc b. Kẻ $BH \perp (\alpha)$ tại H. Khi đó:

$$d(a,b) = d(b,(\alpha)) = d(B,(\alpha)) = BH$$

Trong khi theo phương án A, MN cơ bản là chưa vuông góc với b. Nên MN chưa là khoảng cách cần tìm.

» Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

A. Độ dài đoạn AC.

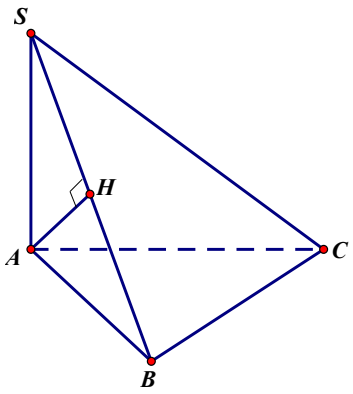
B. Độ dài đoạn AB.

C. Độ dài đoạn AH, trong đó H là hình chiếu vuông góc của A trên SB.

D. Độ dài đoạn AM, trong đó M là trung điểm của SC .

Lời giải

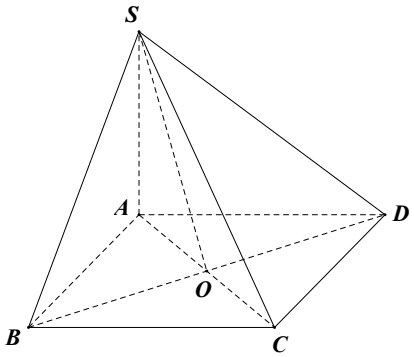
Chọn C



Ta có $(SAB)\perp(SBC)$. Hạ $AH\perp SB$, khi đó ta có $\begin{cases} AH\perp BC \\ AH\perp SB \\ SB\cap BC=B \\ SB,BC\subset(SBC) \end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC)$.

Vậy $d\left(A,(SBC)\right)=AH$ (H là hình chiếu vuông góc của A trên SB)

» Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy $ABCD$. Xác định khoảng cách từ điểm S đến AB?



A. SO. **B.** SA. **C.** SB. **D.** SD.

Lời giải

Chọn B

Vì $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AB\Rightarrow d(S,AB)=SA$.

» Câu 4. Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 2. **B.** 15. **C.** 10. **D.** 30.

Lời giải

Chọn C

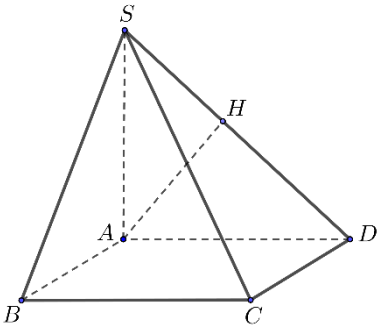
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}.10.3=10$.

» Câu 5. Cho hình chóp $SABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD=2a$, $SA=a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu của A lên SD ta chứng minh được $AH \perp (SCD)$

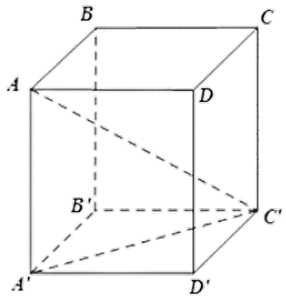
$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

» Câu 6. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

A. $V = a^3$ **B.** $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$ **C.** $V = 3\sqrt{3}a^3$ **D.** $V = \frac{1}{3}a^3$

Lời giải

Chọn A



Giả sử khối lập phương có cạnh bằng $x; (x > 0)$

Xét tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' ta có:

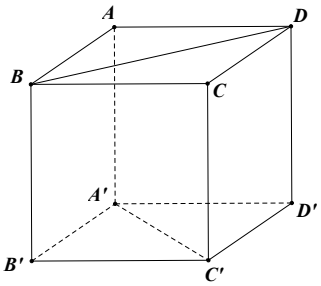
$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow A'C' = x\sqrt{2}$

Xét tam giác $A'AC'$ vuông tại A' ta có

$AC'^2 = A'A^2 + A'C'^2 \Leftrightarrow 3a^2 = x^2 + 2x^2 \Leftrightarrow x = a$

Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = a^3$.

» Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. a **B.** $\sqrt{2}a$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ **D.** $\sqrt{3}a$

Lời giải

Chọn A

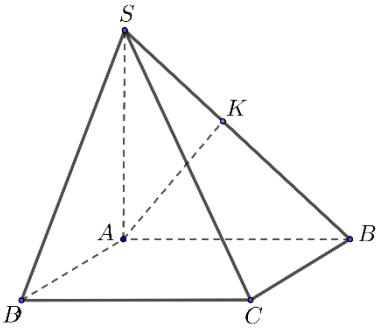
Ta có: $\begin{cases}(ABCD)//(A'B'C'D')\\ BD\subset(ABCD)\\ A'C'\subset(A'B'C'D')\end{cases}\Rightarrow d(BD;A'C')=d[(ABCD);(A'B'C'D')]=AA'=a.$

» Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AB=\dfrac{a}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $d\left[AD,SC\right]=d\left[AD,(SBC)\right]=d\left[A,(SBC)\right]$.

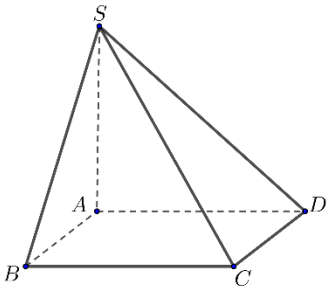
Kẻ $AK\perp SB$. Khi đó $d\left[A,(SBC)\right]=AK=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

» Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC bằng

A. a. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



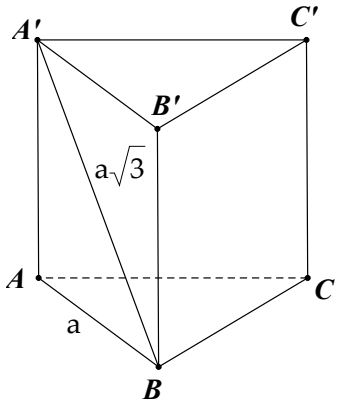
Ta có: $\begin{cases}SA\perp AB\\ BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow d(SA;BC)=AB=a.$

» Câu 10. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$ và $A'B=a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a^3}{6}$ **C.** $\dfrac{a^3}{2}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{2}$.

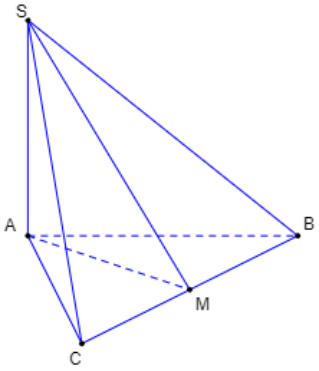
Thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

» Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Biết $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BC bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC.

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \\ SA \cap AM = A \\ SA, AM \subset (SAM) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$ mà $SM \subset (SAM)$ nên $BC \perp SM$.

Do đó $d(S, BC) = SM$.

Xét ΔSAM vuông tại A có $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

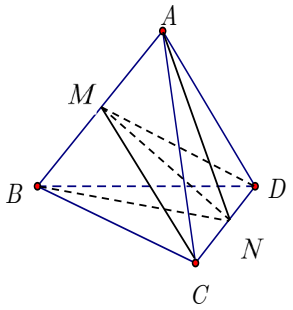
Vậy $d(S, BC) = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

» Câu 12. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Khi đó: $\begin{cases} MN \perp CD \quad (do\ MC = MD) \\ MN \perp AB \quad (do\ NA = NB) \end{cases}$.

Suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

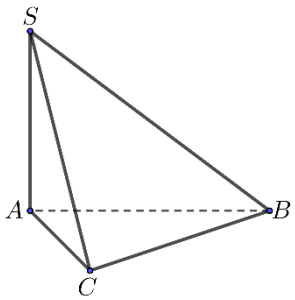
Hay $d(AB;CD) = MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

» Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, biết $AB = 4a, SB = 6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỷ số $\frac{a^3}{3V}$ là

A. $\frac{\sqrt{5}}{80}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{40}$ **C.** $\frac{\sqrt{5}}{20}$ **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{80}$

Lời giải

Chọn B



Ta có:

+ ΔABC vuông cân tại $C, AB = 4a$ suy ra $AC = BC = 2a\sqrt{2}$.

Do đó: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BC = 4a^2$.

+ $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{(6a)^2 - (4a)^2} = 2a\sqrt{5}$.

+ Khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}4a^2.2a\sqrt{5} = \frac{8a^3\sqrt{5}}{3}$

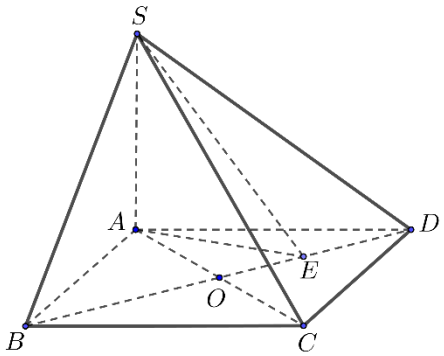
Vậy tỷ số: $\frac{a^3}{3V}=\frac{a^3}{\frac{3.8a^3\sqrt{5}}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{40}$.

» Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$ và $AD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{15}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $V=\frac{4a^3\sqrt{15}}{15}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn C



Kẻ $AE\perp BD$

$\left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right)=\widehat{SEA}=60^0$

Xét ΔABD vuông tại A

$AE=\frac{AD.AB}{\sqrt{AD^2+AB^2}}=\frac{2a^2}{a\sqrt{5}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Xét ΔSAE vuông tại A

$SA=AE.\tan 60^0=\frac{2a\sqrt{5}}{5}.\sqrt{3}=\frac{2a\sqrt{15}}{5}$

Khi đó thể tích $S.ABCD$

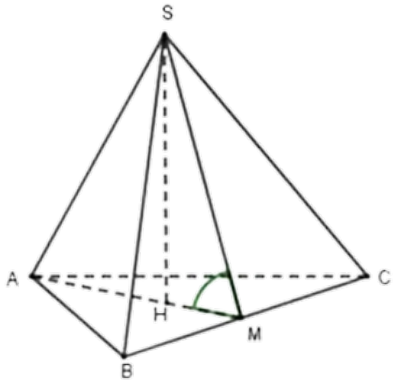
$V=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{15}}{5}.2a^2=\frac{4a^3\sqrt{15}}{15}$

» Câu 15. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính độ dài đường cao SH.

A. $SH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $SH=\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $SH=\frac{a}{2}$. **D.** $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng (ABC).

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều có $SA=SB=SC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Ta chọn mặt bên là mặt phẳng (SBC).

Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.

Lại có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SBC) \supset SM \perp BC \\ (ABC) \supset AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right) = \left(\widehat{SM;AM}\right) = \widehat{SMA} = 60°$.

Xét tam giác ABC đều cạnh a có $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

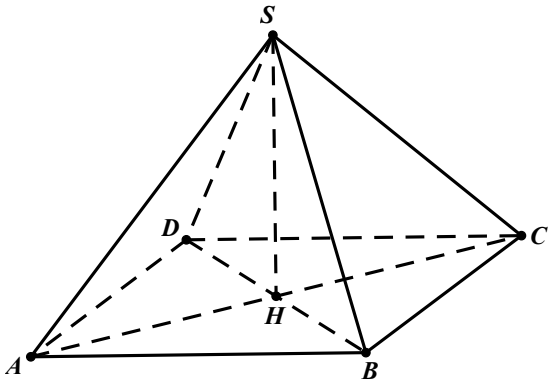
Xét tam giác AHM vuông tại H, ta có: $SH = \tan 60°.AM = \tan 60°.\dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a}{2}$.

» Câu 16. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Biết $\widehat{ASC} = 90°$, tính thể tích V của khối chóp đó.

A. $V = \dfrac{a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $S_{ABCD} = a^2$.

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$. Tam giác ASC là tam giác vuông, H là trung điểm của AC nên $SH=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

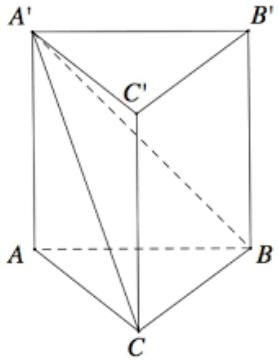
Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

» Câu 17. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa $A'C$ và hình chiếu của nó là $45°$, biết $A'C=a\sqrt{2}$. Tính độ dài CC'.

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** a^2 **D.** a

Lời giải

Chọn D



Ta có: $CC'=AA'$ (cạnh bên của lăng trụ)

Trong $\Delta A'AC$ có $AA'=A'C.\sin\left(\widehat{A'CA}\right)=a\sqrt{2}.\sin\left(45°\right)=a$

» Câu 18. Cho một chậu nước hình chóp cụt đều (hình vẽ) có chiều cao bằng $3dm$, đáy là lục giác đều, độ dài cạnh đáy lớn bằng $2dm$ và độ dài cạnh đáy nhỏ bằng $1dm$. Tính thể tích của chậu nước

A. $\dfrac{21\sqrt{3}}{2}dm^3$. **B.** $\dfrac{21\sqrt{2}}{4}dm^3$. **C.** $\dfrac{21}{2}dm^3$. **D.** $\dfrac{21\sqrt{6}}{4}dm^3$.

Lời giải

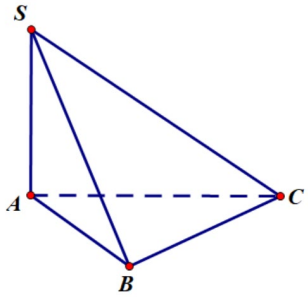
Chọn A

Diện tích đáy của chậu bằng $S_1=6\left(\dfrac{2^2\sqrt{3}}{4}\right)=6\sqrt{3},S_2=6\left(\dfrac{1^2\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Chiều cao của chậu bằng $h=3$.

Thể tích của chậu bằng $V_0=\dfrac{h}{3}\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)=\dfrac{3}{3}\left(6\sqrt{3}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\sqrt{6\sqrt{3}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}\right)=\dfrac{21\sqrt{3}}{2}dm^3$.

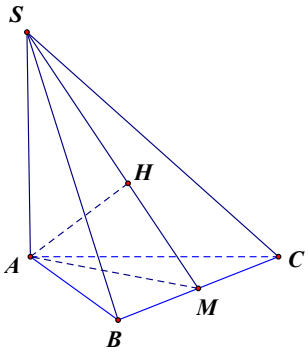
» Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45^0 (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng



A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{3a^3}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm BC thì $AM \perp BC$ và $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$.

Kẻ $AH \perp SM$ tại H thì $AH \perp (SBC)$.

Suy ra góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng $\widehat{ASH} = \widehat{ASM} = 45°$.

Do đó, ΔSAM vuông cân ở A và $SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

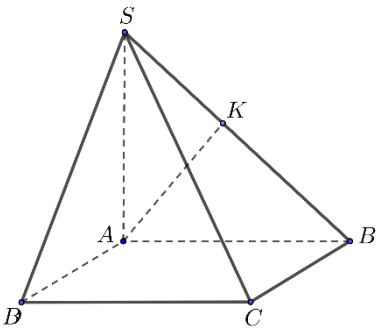
Suy ra $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$.

» Câu 20. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** a^3 **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$ **D.** $\frac{a^3}{2}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp AK$. Kẻ $AK \perp SB \Rightarrow AK \perp (SBC)$.

Suy ra $d\left(A;(SBC)\right)=AK=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}\Rightarrow SA=a$.

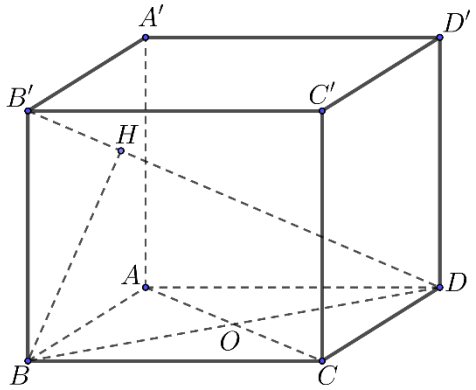
Vậy $V_{SABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{a^3}{3}$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'CD'$ có cạnh a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $B'D$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng DB' là BH.		
(b)	Độ dài đoạn $BH=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.		
(c)	$d\left(B,AC\right)=\dfrac{1}{2}AC$		
(d)	$d\left(B,AA'\right)=BA'$		

Lời giải



(a) Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng DB' là BH.

Ta có $BH\perp B'D\Rightarrow d\left(B,B'D\right)=BH$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Độ dài đoạn $BH=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Ta có $\Delta BB'D'$ là tam giác vuông tại B và $BB'=a;BD=a\sqrt{2}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $BH=\dfrac{BB'.BD}{\sqrt{BB'^2+BD^2}}=\dfrac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

» **Chọn** SAI.

(c) $d\left(B,AC\right)=\dfrac{1}{2}AC$.

Ta có : $BD\perp AC$ tại $O\Rightarrow d\left(B,AC\right)=BO=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{2}AC$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $d\left(B,AA'\right)=BA'$.

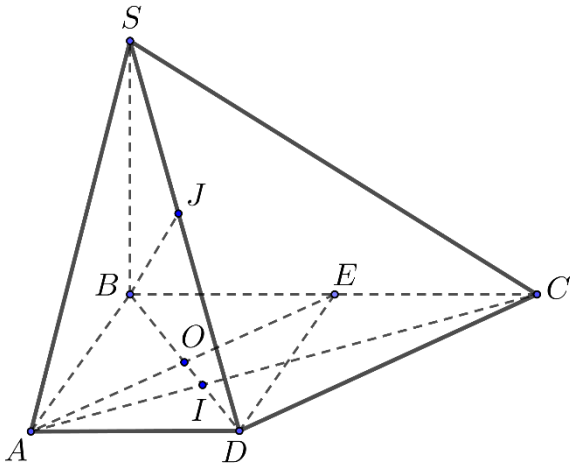
Ta có : $BA\perp AA'$ tại A $\Rightarrow d\left(B,AA'\right)=BA$.

» **Chọn** SAI.

» Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Biết $BC=2AB=2AD=2a, SB=a\sqrt{3}$. Cạnh bên SB vuông góc với mặt đáy, E là trung điểm BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$d\left(D,\left(SAB\right)\right)=a$		
(b)	$d\left(E,\left(SBD\right)\right)=EA$		
(c)	$d\left(B,\left(SCD\right)\right)=BJ=\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$, với J là hình chiếu vuông góc của điểm B lên SD		
(d)	$d\left(I,\left(SCD\right)\right)=a\sqrt{30}$, với I là giao điểm AC và BD		

Lời giải



(a) $d\left(D,\left(SAB\right)\right)=a$.

Ta có: $\begin{cases} DA\perp AB, DA\perp SB \\ AB,SB\subset\left(SAB\right) \\ AB\cap SB=B \end{cases} \Rightarrow DA\perp\left(SAB\right)\Rightarrow d\left(D,\left(SAB\right)\right)=DA=a.$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $d\left(E,\left(SBD\right)\right)=EA$.

Gọi $O=BD\cap AE$.

Xét tứ giác $ABED$ có: $\begin{cases} BE//AD, BE=AD=\dfrac{BC}{2} \\ \widehat{DAB}=90^\circ, AB=AD \end{cases} \Rightarrow ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow BD\perp AE\left(1\right)$

Ta có: $\begin{cases} EO\perp BD, EO\perp SB \\ BD,SB\subset\left(SAB\right) \\ BD\cap SB=B \end{cases} \Rightarrow EO\perp\left(SBD\right)\Rightarrow d\left(E,\left(SBD\right)\right)=EO.$

» **Chọn** SAI.

(c) $d\left(B,\left(SCD\right)\right)=BJ=\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$, *với* J *là hình chiếu vuông góc của điểm* B *lên* SD.

Xét tứ giác $ADCE$ có: $\begin{cases} AD // EC \\ AD = EC = \dfrac{BC}{2} \end{cases} \Rightarrow ADCE$ là hình bình hành $\Rightarrow DC // AE (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow DC \perp BD$

Ta có: $\begin{cases} DC \perp BD, DC \perp SB \\ BD, SB \subset (SBD) \\ BD \cap SB = B \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SBD) \Rightarrow DC \perp BJ$

Ta lại có: $\begin{cases} BJ \perp BD, BJ \perp CD \\ BD, CD \subset (SCD) \\ BD \cap CD = D \end{cases} \Rightarrow BJ \perp (SCD) \Rightarrow d(B,(SCD)) = BJ.$

Xét ΔSBD vuông tại B, có BJ là đường cao:

$$\frac{1}{BJ^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BD^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{5}{6a^2} \Leftrightarrow BJ^2 = \frac{6a^2}{5} \Leftrightarrow BJ = \frac{a\sqrt{30}}{5}$$

Vậy $d(B,(SCD)) = BJ = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $d(I,(SCD)) = a\sqrt{30}$, *với* I *là giao điểm* AC *và* BD.

Xét ΔADE, có I là trọng tâm $\dfrac{DI}{DB} = \dfrac{\frac{2}{3}DO}{2DO} = \dfrac{1}{3}$

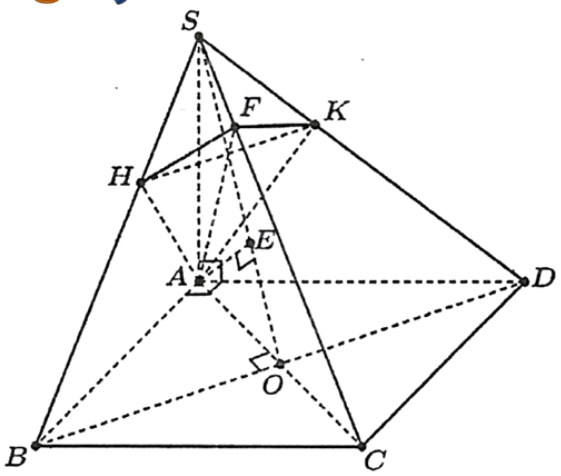
Xét $\dfrac{d(I,(SCD))}{d(B,(SCD))} = \dfrac{DI}{DB} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow d(I,(SCD)) = \dfrac{1}{3} d(B,(SCD)) = \dfrac{1}{3} BJ = \dfrac{1}{3} . \dfrac{a\sqrt{30}}{5} = \dfrac{a\sqrt{30}}{15}$

» **Chọn** SAI.

» **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh a. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Vẽ đường cao AH của tam giác SAB. Vẽ đường cao AK của tam giác SAD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BC \perp AH$		
(b)	Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$		
(c)	Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng: $\dfrac{a\sqrt{2}}{7}$		
(d)	Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AHK) bằng: $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$		

Lời giải



(a) $BC \perp AH$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \ \ (SA \perp (ABCD)) \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$,

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Khoảng cách từ* A *đến mặt phẳng* (SBC) *bằng:* $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Mà $SB \perp AH$ nên $AH \perp (SBC)$ hay $d(A,(SBC)) = AH$.

Tam giác SAB vuông tại A có đường cao AH nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot SA}{\sqrt{AB^2 + SA^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $d(A,(SBC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Khoảng cách từ* A *đến mặt phẳng* (SBD) *bằng:* $\dfrac{a\sqrt{2}}{7}$

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $AO \perp BD$,
ta lại có $SA \perp BD$ nên $BD \perp (SAC)$. (*)

Kẻ đường cao AE của ΔSAO thì $AE \perp BD$ do (*).

Vậy $AE \perp (SBD)$ hay $d(A,(SBD)) = AE$.

Ta có: $AC = a\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông), suy ra $OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAO vuông tại A có: $AE = \dfrac{SA \cdot AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \dfrac{2a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d(A,(SBD)) = AE = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

» **Chọn** SAI.

(d) *Khoảng cách từ* C *đến mặt phẳng* (AHK) *bằng:* $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

Ta chứng minh được $AK \perp (SCD)$. Khi đó: $\begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp AK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$.

Gọi $F = SC \cap (AHK)$ thì $SC \perp AF$.

Khi đó: $d(C,(AHK)) = CF$.

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{3a^2 + 2a^2} = a\sqrt{5}$.

Tam giác SAC vuông tại A có đường cao AF nên:

$$CF.CS = AC^2 \Rightarrow CF = \frac{AC^2}{CS} = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

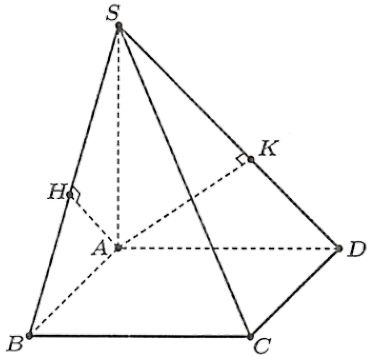
Vậy $d(C,(AHK)) = CF = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

» **Chọn** SAI.

» Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$AD//(SBC)$		
(b)	Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$		
(c)	Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD, AB bằng: $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$		
(d)	Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng: $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$		

Lời giải



(a) $AD//(SBC)$

Ta có: $AD//BC \Rightarrow AD//(SBC)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Khoảng cách từ D *đến mặt phẳng* (SBC) *bằng:* $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow d(D,(SBC)) = d(A,(SBC))$.

Trong mặt phẳng (SAB), kẻ $AH \perp SB$ tại H. (1)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$ hay $d(A,(SBC)) = AH$.

Tam giác SAB vuông tại A có đường cao AH nên:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{4a^2 + 2a^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(D,(SBC)) = d(A,(SBC)) = AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

» **Chọn** SAI.

(c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD, AB bằng: $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Trong mặt phẳng (SAD), kẻ $AK \perp SD$ tại K. (3)

Ta có: $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AK$.(4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AK$ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AB, SD.

Tam giác ACD vuông tại D nên $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$.

Tam giác SAD vuông tại A có đường cao AK nên

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $d(AB,SD) = AK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng: $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Diện tích đáy hình chóp là: $S_{ABCD} = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp cần tìm là:

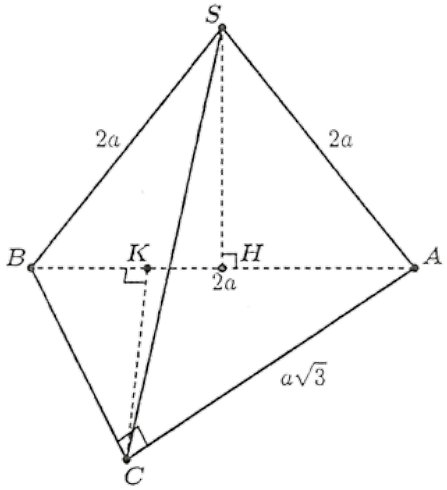
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot a^2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3} \text{ (đơn vị thể tích).}$$

» **Chọn** SAI.

» **Câu 25.** Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy và tam giác SAB đều cạnh $2a$. Biết tam giác ABC vuông tại C và cạnh $AC = a\sqrt{3}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SH \perp (ABC)$		
(b)	$d(S,(ABC)) = a\sqrt{3}$		
(c)	$d(C,(SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$		
(d)	Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{6}$		

Lời giải



(a) $SH \perp (ABC)$

Gọi H là trung điểm AB, mà tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.
Ngoài ra $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $d(S,(ABC)) = a\sqrt{3}$

Do tam giác SAB đều cạnh $2a$

Nên ta có: $d(S,(ABC)) = SH = \dfrac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $d(C,(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Kẻ đường cao CK của tam giác ABC.

Ta có: $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SH \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow d(C,(SAB)) = CK$.

Xét tam giác ABC vuông tại C có:

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a; CK = \dfrac{CA \cdot CB}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(C,(SAB)) = CK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

» **Chọn** SAI.

(d) Thể tích của khối chóp S.ABC bằng $\dfrac{a^3}{6}$

Diện tích đáy hình chóp là: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = \dfrac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp là: $V_{S \cdot ABC} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{2}$.

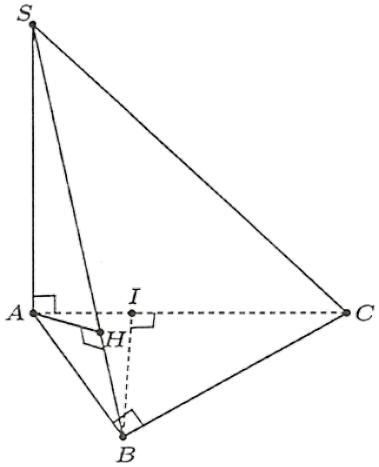
» **Chọn** SAI.

» **Câu 26.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B có $AB = 1, \widehat{ACB} = 30^\circ$. Biết SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Khi đó:

Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	$d\left(A,SB\right)=AH$		
(b)	$d\left(B,\left(SAC\right)\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		
(c)	$BC=\sqrt{3}$		
(d)	Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng: $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$		

Lời giải



(a) $d\left(A,SB\right)=AH$

Vì $AH\perp SB$ nên $d\left(A,SB\right)=AH$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $d\left(B,\left(SAC\right)\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Tam giác SAB vuông tại A, đường cao AH nên $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow AH=\dfrac{SA\cdot AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{2\cdot 1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Trong mặt phẳng $\left(ABC\right)$, kẻ $BI\perp AC$ tại I.

Mặt khác $BI\perp SA$ (do $SA\perp\left(ABC\right), BI\subset\left(ABC\right)$).

Vì vậy $BI\perp\left(SAC\right)$ hay $d\left(B,\left(SAC\right)\right)=BI$.

Tam giác ABI vuông tại I có: $\sin\widehat{BAC}=\dfrac{BI}{AB}\Rightarrow BI=AB\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left(B,\left(SAC\right)\right)=BI=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

» **Chọn** SAI.

(c) $BC=\sqrt{3}$

Tam giác ABC vuông tại B có: $\tan\widehat{ACB}=\dfrac{AB}{BC}\Rightarrow BC=\dfrac{AB}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng: $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Diện tích đáy hình chóp là: $S = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chiều cao hình chóp $h = SA = 2$.

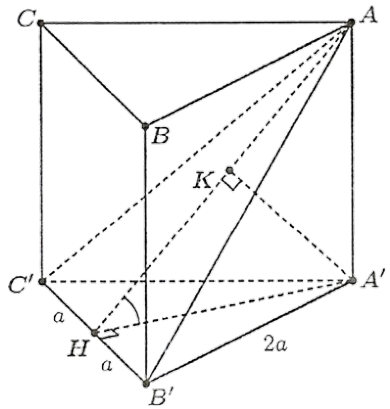
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (đơn vị thể tích).

» **Chọn** SAI.

» Câu 27. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC\cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H. Khi đó: $B'C' \perp (AA'H)$		
(b)	$d\big((ABC),(A'B'C')\big) = a$		
(c)	Diện tích đáy của lăng trụ là: $a^2\sqrt{5}$		
(d)	Thể tích khối lăng trụ là: $a^3\sqrt{3}$		

Lời giải



(a) Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H. Khi đó: $B'C' \perp (AA'H)$

Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H.

Trong mặt phẳng $(AA'H)$, kẻ $A'K \perp AH$ tại K. (1)

Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'H \\ B'C' \perp AA' \ \ (AA' \perp (A'B'C')) \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'H)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $d\big((ABC),(A'B'C')\big) = a$

$\Rightarrow A'K \perp B'C'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A'K \perp (AB'C')$ hay $d\big(A',(AB'C')\big) = A'K = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác $A'B'C'$ đều có đường cao $A'H = \frac{2a\cdot\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác $AA'H$ vuông tại A' có đường cao $A'K$ nên

$$\frac{1}{A'K^2}=\frac{1}{A'H^2}+\frac{1}{A'A^2}\Rightarrow\frac{1}{\frac{3a^2}{4}}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{A'A^2}\Rightarrow A'A=a.$$

Hai mặt đáy lăng trụ song song với nhau và có khoảng cách là:

$d\left(\left(ABC\right),\left(A'B'C'\right)\right)=AA'=a.$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Diện tích đáy của lăng trụ là: $a^2\sqrt{5}$

Diện tích đáy của lăng trụ (đáy là tam giác đều) là: $S_{\Delta A'B'C'}=\dfrac{\left(2a\right)^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$

» **Chọn** SAI.

(d) Thể tích khối lăng trụ là: $a^3\sqrt{3}$

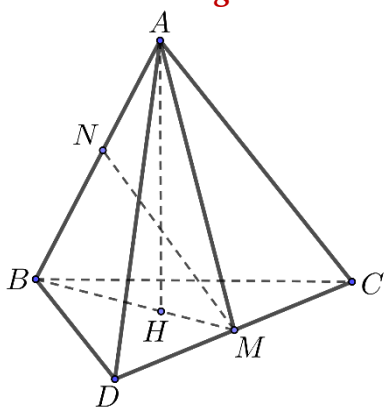
Thể tích khối lăng trụ là: $V=AA'\cdot S_{\Delta A'B'C'}=a\cdot a^2\sqrt{3}=a^3\sqrt{3}$ (đơn vị thể tích).

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 28. Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB=x$, các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Diện tích tam giác BCD bằng $S_{BCD}=3\sqrt{3}$		
(b)	$V_{ABCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\sqrt{36-x^2}$		
(c)	Khi $x=3$ thì $V=\dfrac{9}{4}$		
(d)	Khi $x=3\sqrt{2}$ thì thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.		

Lời giải



(a) Diện tích tam giác BCD bằng $S_{BCD}=3\sqrt{3}$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm CD và AB;

H là hình chiếu vuông góc của A lên BM.

Ta có: $\left.\begin{matrix}CD\perp BM\\CD\perp AM\end{matrix}\right\}\Rightarrow CD\perp\left(ABM\right)\Rightarrow\left(ABM\right)\perp\left(ABC\right).$

Mà $AH\perp BM$; $BM=\left(ABM\right)\cap\left(ABC\right)$ A.

Do ACD và BCD là hai tam giác đều cạnh $2\sqrt{3} \Rightarrow AM = BM = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3$.

Tam giác AMN vuông tại N, có: $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$.

Lại có: $S_{BCD} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 3\sqrt{3}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $V_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{3} x\sqrt{36 - x^2}$

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{36 - x^2}}{6} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} x\sqrt{36 - x^2}$.

» **Chọn** SAI.

(c) Khi $x = 3$ *thì* $V = \frac{9}{4}$

Khi $x = 3$ *thì* $V_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{6}.3\sqrt{36 - 3^2} = \frac{9}{2}$.

» **Chọn** SAI.

(d) Khi $x = 3\sqrt{2}$ *thì thể tích khối tứ diện* $ABCD$ *đạt giá trị lớn nhất.*

Ta có: $V_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{6} x\sqrt{36 - x^2} \le \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{x^2 + 36 - x^2}{2} = 3\sqrt{3}$.

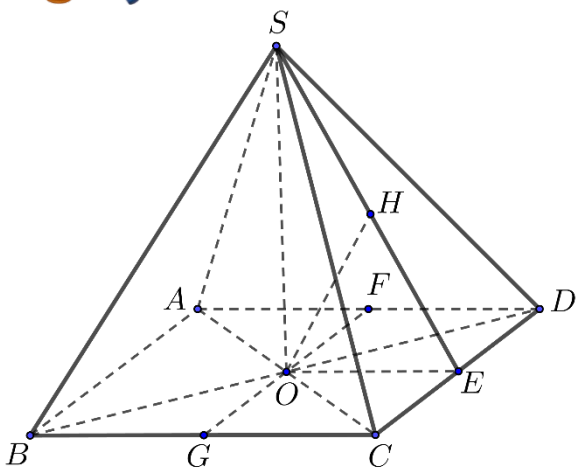
Suy ra V_{ABCD} lớn nhất bằng $3\sqrt{3}$ khi $x^2 = 36 - x^2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 29.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi O là giao điểm AC và BD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$d(SO, CD) = OE$ với E là trung điểm CD.		
(b)	$d(AD, SB) = \frac{1}{2} d(A, (SBC))$		
(c)	Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SE. $d(AB, SC) = 2d(O, (SCD)) = 2OH$.		
(d)	Gọi $G; F$ lần lượt là trung điểm $BC; AD$. $d(GF, SE) = \frac{1}{2} OH$.		

Lời giải



(a) $d\left(SO,CD\right)=OE$ *với* E *là trung điểm* CD.

ΔSBD cân tại S với O là trung điểm $BD \Rightarrow SO\perp BD$;

ΔSAC cân tại S có O là trung điểm $AC \Rightarrow SO\perp AC$

Ta có : $\begin{cases} SO\perp AC, SO\perp BD \\ AC,BD\subset\left(ABCD\right)\Rightarrow SO\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SO\perp OE \text{ tại } O \\ AC\cap BD=O \end{cases}$

Mà $OE\perp CD$ tại E

$\Rightarrow OE$ là đoạn vuông góc chung của $SO,CD\Rightarrow d\left(SO,CD\right)=OE$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $d\left(AD,SB\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A,\left(SBC\right)\right)$.

Ta có: $\begin{cases} AD//BC \\ BC\subset\left(SBC\right) \end{cases}\Rightarrow AD//\left(SBC\right)$

Mà $SB\subset\left(SBC\right)\Rightarrow d\left(AD,SB\right)=d\left(AD,\left(SBC\right)\right)=d\left(A,\left(SBC\right)\right)$

» **Chọn** SAI.

(c) *Gọi* H *là hình chiếu vuông góc của* O *lên* SE. $d\left(AB,SC\right)=2d\left(O,\left(SCD\right)\right)=2OH$.

Ta có: $\begin{cases} AB//CD \\ CD\subset\left(SCD\right) \end{cases}\Rightarrow AB//\left(SCD\right)\Rightarrow d\left(AB,SC\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(A,\left(SCD\right)\right)$

Xét $\dfrac{d\left(A,\left(SCD\right)\right)}{d\left(O,\left(SCD\right)\right)}=\dfrac{AC}{OC}=2\Rightarrow d\left(A,\left(SCD\right)\right)=2d\left(O,\left(SCD\right)\right)(*)$

Ta có: $\begin{cases} CD\perp OE, CD\perp SO \\ OE,SO\subset\left(SOE\right) \\ OE\cap SO=O \end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(SOE\right)\Rightarrow CD\perp OH$

Ta lại có: $\begin{cases} OH\perp SE, OH\perp CD\left(cmt\right) \\ SE,CD\subset\left(SCD\right) \\ SE\cap CD=E \end{cases}\Rightarrow OH\perp\left(SCD\right)\Rightarrow d\left(O,\left(SCD\right)\right)=OH$

$(*)\Rightarrow d\left(A,\left(SCD\right)\right)=2d\left(O,\left(SCD\right)\right)=2OH$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Gọi* $G;F$ *lần lượt là trung điểm* $BC;AD$. $d\left(GF,SE\right)=\dfrac{1}{2}OH$.

Ta có $\begin{cases}GF//CD\\CD\perp OH\left(cmt\right)\end{cases}\Rightarrow GF\perp OH$ tại O

Mà $OH\perp SE$ tại H

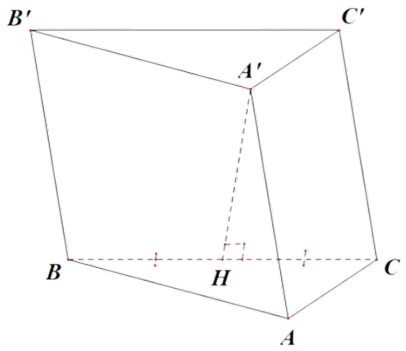
Vậy OH là đoạn vuông góc chung $SE,GF\Rightarrow d\left(GF,SE\right)=OH$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 30.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên $\left(ABC\right)$ là H là trung điểm BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A'H$ là đường cao hình lăng trụ.		
(b)	Tam giác $A'HA$ vuông tại A'.		
(c)	$A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}$		
(d)	Đường cao của khối lăng trụ trên là $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.		

Lời giải



(a) *$A'H$ là đường cao hình lăng trụ.*

Vì $A'H\perp\left(ABC\right)$ nên $A'H$ là khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

Do đó $A'H$ đường cao hình lăng trụ.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Tam giác $A'HA$ vuông tại A'.*

Ta có: $\begin{cases}A'H\perp(ABC)\\HA\subset(ABC)\end{cases}\Rightarrow A'H\perp HA$

Suy ra tam giác $A'HA$ vuông tại H.

» **Chọn** SAI.

(c) $A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}$.

Tam giác $A'HA$ vuông tại H nên theo Pitago ta có $A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Đường cao của khối lăng trụ trên là* $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

$$BH=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2};AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{(a)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

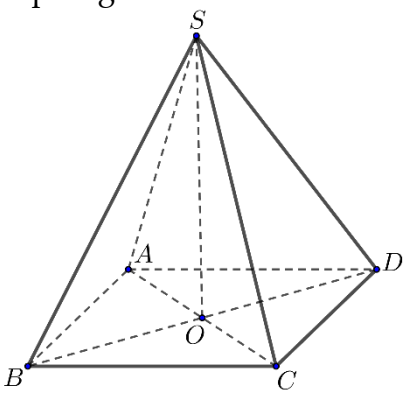
$$\Rightarrow A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 31. Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với cạnh bên là $32,32m$ và cạnh đáy là $34m$.



Giả sử người ta kí hiệu hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ tâm O như hình vẽ.



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Chiều cao của kim tự tháp là SA.		
(b)	Khoảng cách từ đỉnh tháp đến mặt phẳng đáy là SO.		
(c)	Chiều cao của kim tự tháp là $\sqrt{SB^2-OB^2}$.		
(d)	Chiều cao của kim tự tháp là gần bằng $24,2$ *(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*		

Lời giải

(a) Chiều cao của kim tự tháp là SA.

Chiều cao của kim tự tháp là khoảng cách từ đỉnh tháp đến mặt phẳng đáy là SO vì $SO\perp(ABCD)$.

» **Chọn** SAI.

(b) Khoảng cách từ đỉnh tháp đến mặt phẳng đáy là SO.

Khoảng cách từ đỉnh tháp đến mặt phẳng đáy là SO vì $SO\perp(ABCD)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Chiều cao của kim tự tháp là $\sqrt{SB^2-OB^2}$.

ΔSBO vuông tại O nên theo Pitago ta có $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Chiều cao của kim tự tháp là gần bằng $24,2$ *(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*

$$SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{(32,32)^2-\left(\frac{34\sqrt{2}}{2}\right)^2}\approx 21,6.$$

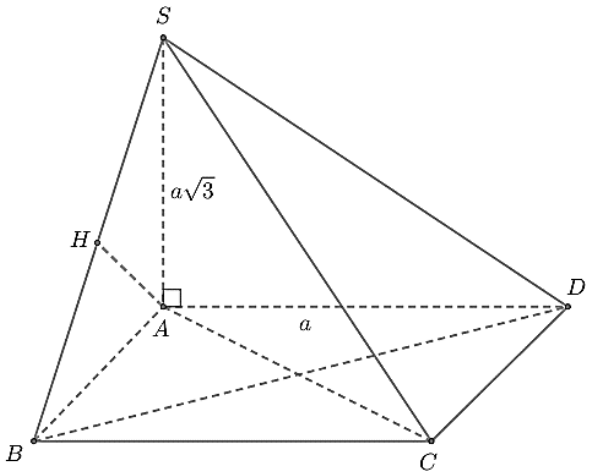
» **Chọn** SAI.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=\sqrt{3}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng bao nhiêu? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Lời giải

✓ *Trả lời: 0,87*



Ta có $BC\perp SA; BC\perp AB$ nên $BC\perp(SAB)\Rightarrow(SBC)\perp(SAB)$, vẽ $AH\perp SB$ tại H

$\Rightarrow AH\perp(SBC)$.

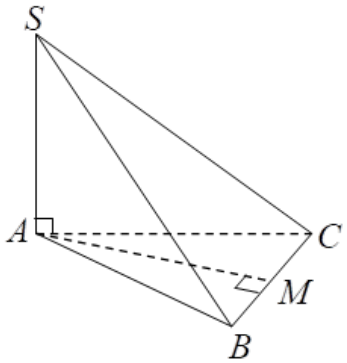
Ta có $AD\,//\,BC\Rightarrow d(D,(SBC))=d(A,(SBC))=AH=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}.a}{\sqrt{3a^2+a^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(D,(SBC))=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

» Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\dfrac{a}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng bao nhiêu? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Lời giải

✓ *Trả lời: 0,87*



Gọi M là trung điểm cạnh BC.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp SA \end{cases} \Rightarrow AM$ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC.

$BM = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}; AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

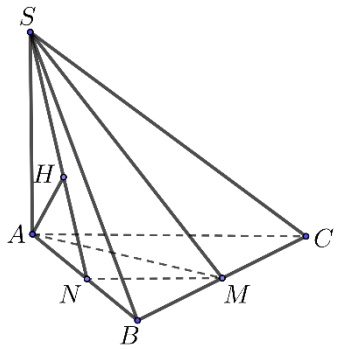
Do đó $AM = d\left(SA, BC\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left(SA, BC\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

» Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Tính SA ? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Lời giải

✓ *Trả lời: 1,41*



Gọi N là trung điểm của AB.

Ta có: $\begin{cases} MN // AC \\ MN \subset \left(SMN\right) \end{cases} \Rightarrow AC // \left(SMN\right)$.

Khi đó $d\left(AC; SM\right) = d\left(AC; \left(SMN\right)\right) = d\left(A; \left(SMN\right)\right)$.

Kẻ $AH \perp SN \left(H \in SN\right)$. Ta có: $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp \left(SAB\right) \Rightarrow MN \perp AH$.

Lại có: $\begin{cases} MN \perp AH \\ SN \perp AH \end{cases} \Rightarrow AH \perp \left(SMN\right) \Rightarrow d\left(A; \left(SMN\right)\right) = AH = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

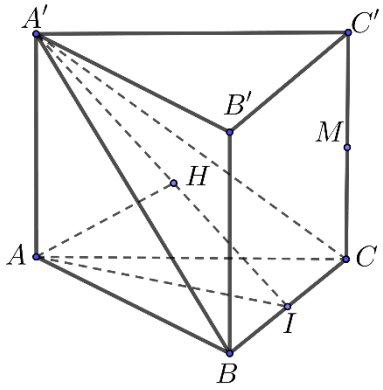
Xét tam giác vuông SAN vuông tại A:

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} - \frac{1}{\frac{1^2}{4}} = \frac{1}{2^2} \Rightarrow SA = \sqrt{2}$.

» Câu 35. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng $\frac{2\sqrt{57}}{19}$. Tính chiều cao của hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$?

Lời giải

✓ *Trả lời: 2*



Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A lên $A'I$.

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'I) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $AH \perp A'I$ nên $AH \perp (A'BC)$.

Do đó $d(A;(A'BC)) = AH = \dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.

Tam giác ABC đều cạnh a có AI là độ dài đường trung tuyến nên $AI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có : $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{AA'^2} \Rightarrow \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2\sqrt{57}}{19}\right)^2} - \dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{4^2}$

$\Rightarrow AA' = 2$.

» Câu 36. Một bể cá được làm bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $0,6m; 2m; 0,8m$. Tìm thể tích của bể cá đó.

Lời giải

✓ *Trả lời: 0,96*

Thể tích của bể cá hình hộp chữ nhật có ba kích thước $a = 0,6m; b = 2m;\ c = 0,8m$ là:

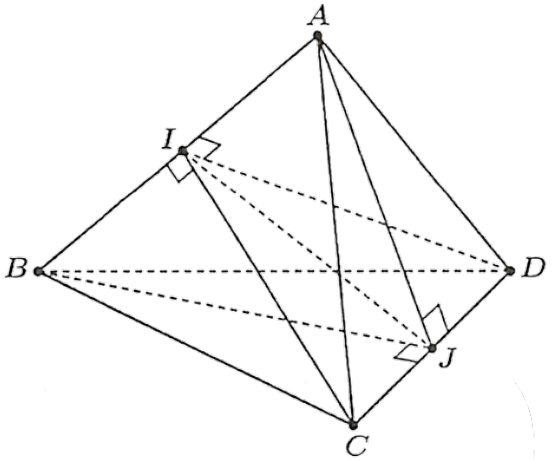
$V = abc = 0,6 \cdot 2 \cdot 0,8 = 0,96\left(m^3\right)$.

» Câu 37. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh 2. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AB, CD. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ *Trả lời: 1,4*

Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD.



Các tam giác ABC, ABD đều có I là trung điểm AB nên

$\begin{cases} AB \perp CI \\ AB \perp DI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ICD)$ mà $IJ \subset (ICD) \Rightarrow AB \perp IJ$. (1)

Tương tự, các tam giác ACD, BCD đều có J là trung điểm CD nên

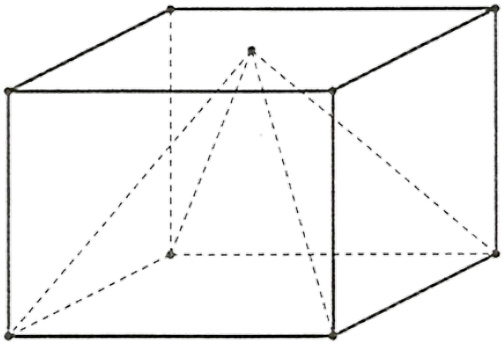
$\begin{cases} CD \perp AJ \\ CD \perp BJ \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABJ)$,

Mà $IJ \subset (ABJ) \Rightarrow CD \perp IJ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB, CD.

Ta có: $CI = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}; IJ = \sqrt{CI^2 - CJ^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \sqrt{2} \approx 1,4$.

» Câu 38. Một cái hộp hình lập phương, bên trong nó đựng một mô hình đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều mà đỉnh của hình chóp đó trùng với tâm của một mặt chiếc hộp, giả sử hình vuông đáy của hình chóp trùng với một mặt của chiếc hộp (mặt này cùng với mặt chứa đỉnh hình chóp là hai mặt đối nhau). Biết cạnh của chiếc hộp bằng $30\,cm$, thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp (mô hình đồ chơi được làm bởi chất liệu nhựa đặc bên trong) đạt bao nhiêu dm^3?



Lời giải

✓ *Trả lời: 18*

Thể tích cái hộp (khối lập phương) là: $V_1 = 30^3 = 27000\left(cm^3\right)$.

Xét đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều, chiều cao của hình chóp bằng với một cạnh của hình lập phương, hay $h = 30\,cm$, đáy của hình chóp có diện tích $S = 30^2 = 900\,cm^2$.
Thể tích khối đồ chơi (khối chóp tứ giác đều) là:

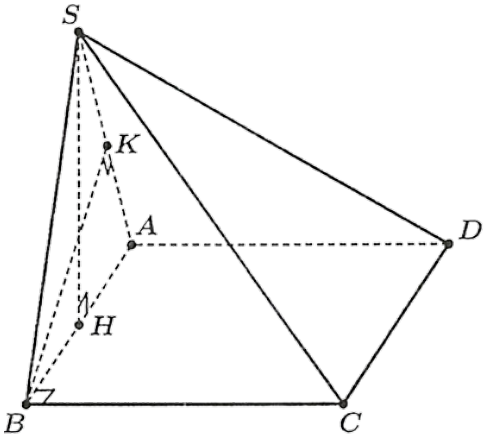
$V_2 = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3} \cdot 900 \cdot 30 = 9000\left(cm^3\right)$.

Thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp: $V = V_1 - V_2 = 27000 - 9000 = 18000\left(cm^3\right) = 18\left(dm^3\right)$.

» Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 1, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tìm thể tích khối chóp $S.ABCD$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ *Trả lời: 0,3*



Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp AB$ (do tam giác SAB đều).
Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Đường cao hình chóp là $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; diện tích đáy hình chóp $S_{ABCD} = 1$.

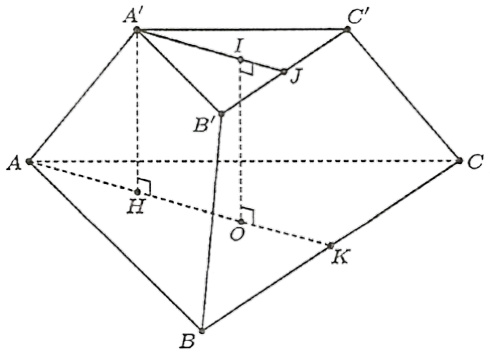
Thể tích khối chóp là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0,3 \text{ (đơn vị thể tích).}$$

» Câu 40. Một hình chóp cụt đều $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh đáy lớn bằng 4, cạnh đáy nhỏ bằng 2 và chiều cao của nó bằng $\dfrac{3}{2}$. Tìm thể tích của khối chóp cụt đều đó. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ *Trả lời: 6,1*



Gọi O, I theo thứ tự là tâm của đáy lớn ABC và đáy bé $A'B'C'$;
K, J theo thứ tự là trung điểm của BC và $B'C'$.

Ta có $h = IO = \dfrac{3a}{2}$ là chiều cao của hình chóp cụt đều $ABC \cdot A'B'C'$.

Diện tích hai đáy hình chóp cụt đều là:

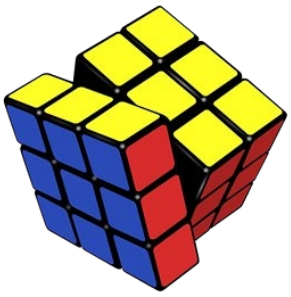
$$S_1 = S_{\Delta ABC} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3};\ S_2 = S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

Thể tích khối chóp cụt đều là:

$$V = \frac{1}{3} h \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \left(4\sqrt{3} + \sqrt{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{3} \right) = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6,1 \text{ (đơn vị thể tích)}$$

» Câu 41. Một khối rubik 3×3 (được chia làm 27 khối lập phương nhỏ) có dạng một hình lập phương với kích thước cạnh bằng $6cm$. Tìm thể tích của khối rubik đó, biết khoảng hở giữa các khối lập phương nhỏ không đáng kể.



Lời giải

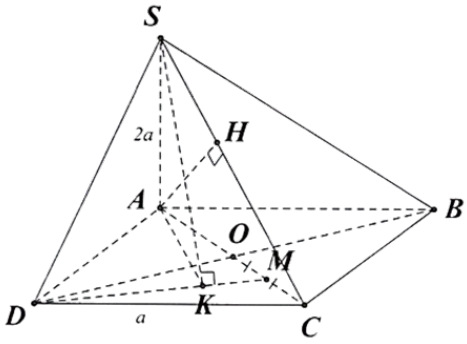
✓ *Trả lời: 116*

Thể tích khối rubik là: $V=6^3=116\left(cm^3\right)$.

» Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp\left(ABCD\right), SA=2, ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Gọi O là tâm của $ABCD$. Tính khoảng cách từ S đến DM với M là trung điểm OC. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ *Trả lời: 2,8*



Kẻ $SK\perp DM$ tại $K\Rightarrow d(S,DM)=SK$.

Ta có: $\begin{cases}DM\perp SA\\DM\perp SK\end{cases}\Rightarrow DM\perp(SAK)\Rightarrow DM\perp AK$

Ta có: $\Delta KMA\backsim\Delta OMD$

$$\Rightarrow\frac{KA}{OD}=\frac{AM}{DM}\Rightarrow KA=\frac{AM\cdot OD}{DM}=\frac{\frac{3}{4}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

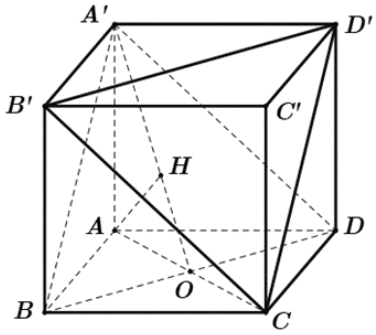
Ta có: $SK=\sqrt{SA^2+AK^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{190}}{5}$

Vậy $d(S,DM)=\frac{\sqrt{190}}{5}\approx 2,8$.

» Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $\left(A'BD\right),\left(CB'D'\right)$. (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Lời giải

✓ *Trả lời: 1,15*



Gọi $O = AC \cap BD$

Vì $\begin{cases} A'B // CD'; BD // B'D' \\ A'B \subset (A'BD); BD \subset (A'BD) \\ CD' \subset (CB'D'); B'D' \subset (CB'D') \end{cases} \Rightarrow (A'BD) // (CB'D')$

$\Rightarrow d((A'BD),(CB'D')) = d(C,(A'DB)) = d(A,(A'DB))$.

Trong $\Delta AOA'$ kẻ $AH \perp A'O$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'O) \Rightarrow BD \perp AH$.

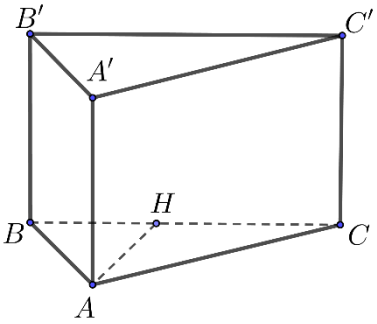
Lại có: $\begin{cases} BD \perp AH \\ A'O \perp AH \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BD)$.

$$d(A,(A'DB)) = AH = \frac{AA'.AO}{\sqrt{A'A^2 + AO^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

» Câu 44. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2$, $AB = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

✍ *Lời giải*

✓ *Trả lời: 0,87*



Ta có $AA' // (BCC'B')$ nên khoảng cách từ AA' đến $(BCC'B')$ cũng chính là khoảng cách từ A đến $(BCC'B')$. Hạ $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{BC^2 - AB^2} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$.

Chương 08
Bài 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG & MẶT – GÓC NHỊ DIỆN

A Lý thuyết

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

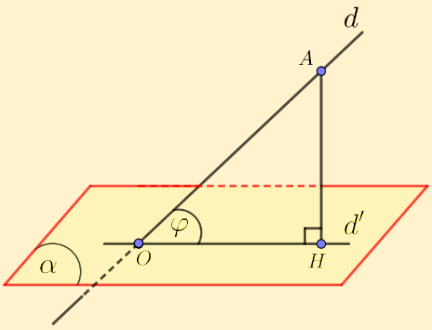
Xác định góc giữa đường và mặt:

- *Trường hợp 1.* $d \perp (P) \Rightarrow \widehat{(d,(P))} = 90^\circ$
- *Trường hợp 2.* d không vuông góc với (P).

Khi đó ta làm như sau:

» *Bước 1.* Tìm $d \cap (P) = \{O\}$.

» *Bước 2.* Trên d lấy điểm A khác O.
Tìm hình chiếu H của A lên (α).
Ta chọn điểm A trên d thỏa: $A \in \Delta$ vuông góc với (α).
(Khi đó hình chiếu của A là giao điểm của Δ và (α)).



» *Bước 3.* Suy ra $\left(\widehat{d,(P)}\right) = \left(\widehat{AI,HI}\right) = \widehat{AIH} = \varphi$.

Chú ý: $0 \le (d;(P)) \le 90^\circ$.

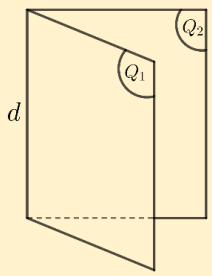
2. Góc nhị diện

Định nghĩa:

» Cho hai nửa mặt (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d.

» Hình tạo bởi (P_1), (Q_1) và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1), kí hiệu $[P_1,d,Q_1]$.

» Hai nửa mặt (P_1), (Q_1) gọi là hai mặt của nhị diện và d gọi là cạnh của nhị diện



Chú ý

(1) Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.

(2) Góc nhị diện $[P_1;d;Q_1]$ còn được ký hiệu là $[M;d;N]$ với $M;N$ tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng $(P_1);(Q_1)$.

3. Góc phẳng nhị diện

Định nghĩa:

» *Góc phẳng nhị diện* của góc nhị diện là góc:

✓ có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện,

✓ có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Chú ý

(1) Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ $0°$ đến $180°$.

(2) Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn $90°$.

(3) Đối với hai điểm M,N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $\left[M,a,N\right]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M,N.

(4) Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện lại cũng là góc nhị diện vuông.

Phương pháp xác định góc nhị diện:

Để xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng $\left(P\right)\&\left(Q\right)$, ta thực hiện theo các bước:

▶ **Bước 1:** Xác định giao tuyến $a=\left(P\right)\cap\left(Q\right)$.

▶ **Bước 2:** Tìm $Ox\subset\left(P\right):Ox\perp a$ và $Oy\subset\left(Q\right):Oy\perp a$.

▶ **Bước 3:** Kết luận $\left[P;a;Q\right]$

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp

- *Trường hợp 1.* $d \perp (P) \Rightarrow \widehat{(d,(P))} = 90^\circ$
- *Trường hợp 2.* d không vuông góc với (P). Khi đó ta làm như sau:

» *Bước 1.* Tìm $d \cap (P) = \{O\}$.

» *Bước 2.* Trên d lấy điểm A khác O.

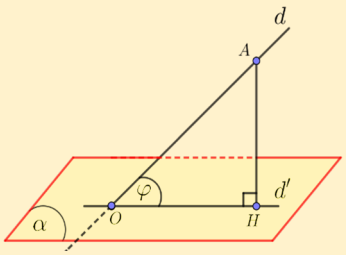
Tìm hình chiếu H của A lên (α).

Ta chọn điểm A trên d thỏa: $A \in \Delta$ vuông góc với (α).

(Khi đó hình chiếu của A là giao điểm của Δ và (α)).

» *Bước 3.* Suy ra $\left(\widehat{d,(P)}\right) = \left(\widehat{AI,HI}\right) = \widehat{AIH} = \varphi$.

Chú ý: $0 \le \left(d;(P)\right) \le 90^\circ$



Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm hình chiếu của:

(1) SC, SB, SO lên mặt phẳng $(ABCD)$.

(2) AC, SC, SD lên mặt phẳng (SAB).

(3) SB, DC lên mặt phẳng (SAC)

(4) SA, AC lên mặt phẳng (SCD).

Lời giải

(1) SC, SB, SO lên mặt phẳng $(ABCD)$.

• Có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow A$ là hình chiếu của S lên $(ABCD)$

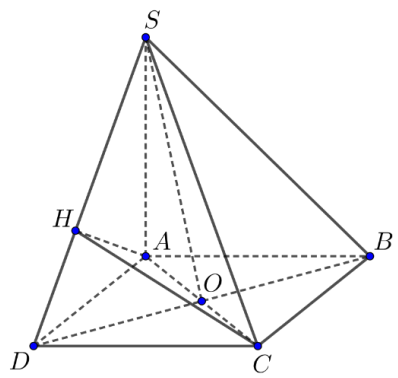
$\rightarrow AC, AB, AO$ là hình chiếu của SC, SB, SO lên $(ABCD)$.

(2) AC, SC, SD lên mặt phẳng (SAB).

• Có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CB$;

• Đáy $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \perp CB$

$\Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow B$ là hình chiếu của C lên (SAB).



$\to AB, SB$ lần lượt là hình chiếu của AC, SC lên (SAB).

- Có $\begin{cases} CB \perp (SAB) \\ AD // CB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow A$ là hình chiếu của D lên (SAB).
- Do đó SA là hình chiếu của SD lên (SAB).

(3) SB, DC lên mặt phẳng (SAC)

- Có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$; đáy $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$ mà $BD \cap (SAC) = O$.

$\Rightarrow O$ là hình chiếu của B và D lên lên (SAC).

- Do đó SO, OC lần lượt là hình chiếu của SB, DC lên (SAC).

(4) SA, AC lên mặt phẳng (SCD).

- Có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$; đáy $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AD \perp CD$

$\Rightarrow CD \perp (SAD)$.

- Trong (SAD), kẻ $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow H$ là hình chiếu của A lên (SCD).
- Do đó SH, HC lần lượt là hình chiếu của SA, AC lên (SCD).

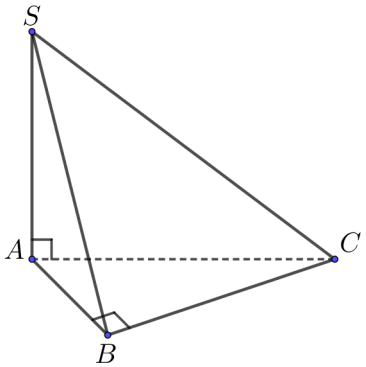
Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, ABC là tam giác vuông cân tại B. Cho độ dài các cạnh $SA = AB = a$. Xác định và tính:

(1) Góc giữa SB và (ABC). (2) Góc giữa SC và (SAB).

Lời giải

(1) *Góc giữa SB và (ABC).*



- AB là hình chiếu vuông góc của SB lên (ABC).

Suy ra góc giữa SB và (ABC) là $\widehat{SBA}$.

- Tam giác SAB vuông cân tại A suy ra $\widehat{SBA} = 45°$.

(2) *Góc giữa SC và (SAB).*

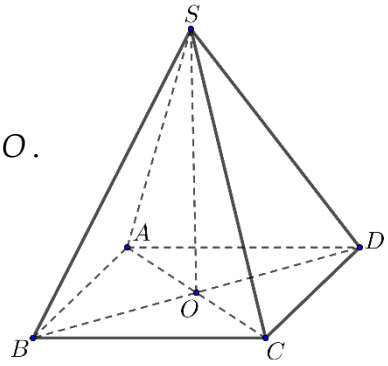
- Ta có $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$.
- SB là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).
- Góc giữa SC và (SAB) là $\widehat{CSB}$.
- Ta có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$
- Vì $CB \perp (SAB)$ nên $CB \perp SB$.
- ΔSBC vuông tại B có $\tan \widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{\sqrt{2}a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{CSB} \approx 35°15'$.

Ví dụ 1.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $SO \perp (ABCD)$. Xác định:

(1) Góc giữa SA và $(ABCD)$. (2) Góc giữa SA và (SBD).

Lời giải



(1) *Góc giữa SA và $(ABCD)$.*

Ta có: $SA \cap (ABCD) = \{A\}$

$SO \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là O.

Góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa SA và AO.

Suy ra: Góc giữa SA và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SAO}$.

(2) *Góc giữa SA và (SBD).*

Ta có: $AO \perp BD$ (tính chất hình thoi)

và $AO \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$) nên $AO \perp (SBD)$.

Từ đó O là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (SBD).

Mà $SA \cap (SBD) = \{S\}$ nên góc giữa SA và (SBD) là góc giữa SA và SO.

Suy ra: Góc giữa SA và (SBD) là góc $\widehat{ASO}$.

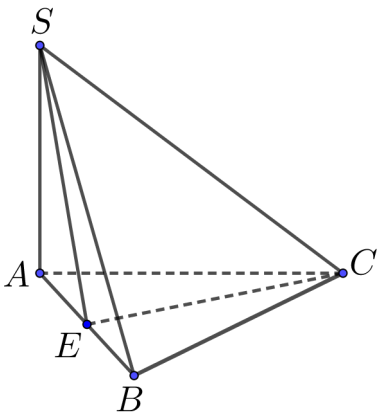
Ví dụ 1.4.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. ΔABC đều cạnh a. Tính

(1) Góc giữa đường thẳng SB và (ABC) (2) Góc giữa đường thẳng SC và (SAB)

Lời giải

(1) Góc giữa đường thẳng SB và (ABC)



- $SA \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SB,AB}\right) = \widehat{SBA}$
- $\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{2a}{a} = 2 \Rightarrow \widehat{SBA} = 63°26'$

(2) Góc giữa đường thẳng SC và (SAB)

- Gọi E là trung điểm AB.
- Ta có $EC \perp AB$ và $SA \perp EC$
- Do đó $EC \perp (SAB)$

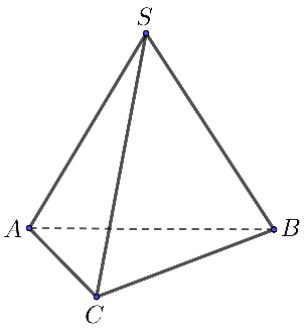
Suy ra $\left(\widehat{SC,(SAB)}\right) = \left(\widehat{SC,SE}\right) = \widehat{CSE}$

- $\tan \widehat{CSE} = \dfrac{EC}{SE} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{57}}{17} \Rightarrow \widehat{CSE} = 23°56'$

Ví dụ 1.5.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc giữa SC và (SAB)

Lời giải



Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\\BC\subset(ABC),BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$.

$\Rightarrow\widehat{(SC,(SAB))}=\widehat{(SC,SB)}$.

Vì $BC\perp(SAB)$ nên tam giác SCB vuông tại $B\Rightarrow\widehat{(SC,SB)}=\widehat{BSC}$.

Tam giác SBC vuông cân tại B và $SB=BC=a$ nên $\widehat{CSB}=45^\circ$.

Vậy góc giữa cạnh SC và mặt (SAB) bằng 45°.

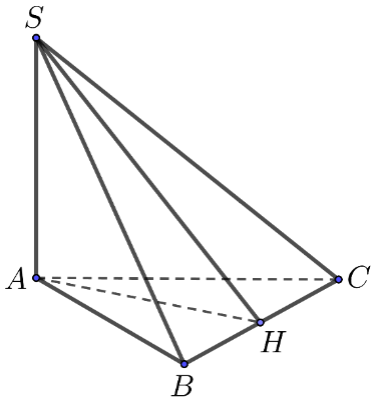
Ví dụ 1.6.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, có $AB=a;BC=a\sqrt{3}$. Biết $SA\perp(ABC)$, SB tạo với đáy một góc 60° và H là trung điểm của BC.

(1) Tính cosin góc giữa SC và mặt phẳng (ABC).

(2) Tính cosin góc giữa SH và mặt phẳng (ABC).

Lời giải



(1) *Tính cosin góc giữa SC và mặt phẳng (ABC).*

Do $SA\perp(ABC)\Rightarrow\widehat{(SB;(ABC))}=\widehat{SBA}=60^\circ$.

Do đó $SA=AB\tan\widehat{SBA}=a\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a;\widehat{(SC;(ABC))}=\widehat{SCA}$.

Khi đó: $\cos\widehat{SCA}=\dfrac{AC}{SC}=\dfrac{AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{3a^2+4a^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

(2) *Tính cosin góc giữa SH và mặt phẳng (ABC).*

Do $SA\perp(ABC)\Rightarrow\widehat{(SH;(ABC))}=\widehat{SHA}=\varphi$.

Ta có: $AH=\sqrt{AB^2+BH^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Khi đó $\cos\varphi=\dfrac{AH}{SH}=\dfrac{AH}{\sqrt{SA^2+AH^2}}=\dfrac{\sqrt{133}}{19}$

Ví dụ 1.7.

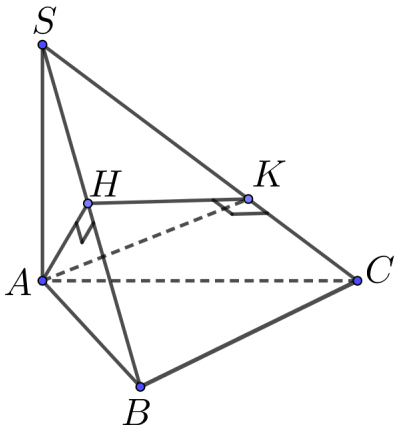
Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA \perp (ABC)$, $AB = a, SA = a\sqrt{3}$.

(1) Tính góc giữa đường thẳng SC và (ABC).

(2) Gọi H, K lần lượt là đường cao của $\Delta SAB, \Delta SAC$. Tính góc giữa đường thẳng AK và (SBC).

Lời giải

(1) *Tính góc giữa đường thẳng SC và (ABC).*



- $SA \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA}$
- $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = 50°46'$.

(2) *Tính góc giữa đường thẳng AK và (SBC).*

- Ta có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp AB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow \left(\widehat{AK,(SBC)}\right) = \left(\widehat{AK,HK}\right) = \widehat{AKH}$

- $\sin\widehat{AKH} = \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{\dfrac{SA.AB}{SB}}{\dfrac{SA.AC}{SC}} = \dfrac{AB.SC}{SB.AC} = \dfrac{\sqrt{10}}{4} \Rightarrow \widehat{AKH} = 52°14'$.

Dạng 2. Góc nhị diện

Phương pháp

Định nghĩa: Cho hai nửa mặt (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d.

Hình tạo bởi (P_1), (Q_1) và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1)

Kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.

Cách xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng $(P)\&(Q)$, ta thực hiện theo các bước:

» ***Bước 1.*** Xác định giao tuyến $a=(P)\cap(Q)$.

» ***Bước 2.*** Tìm $Ox\subset(P): Ox\perp a$ và $Oy\subset(Q): Oy\perp a$.

» ***Bước 3.*** Kết luận $[P;a;Q]$

Chú ý:

(1) Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ 0° đến 180°.

(2) Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90°.

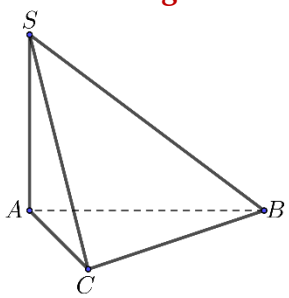
(3) Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M, N.

(4) Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện lại cũng là góc nhị diện vuông.

Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Xác định góc phẳng của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải



Ta có ABC là tam giác vuông tại B

Nên $AB\perp BC$ (1)

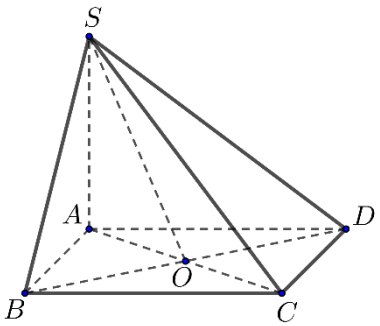
$$\begin{cases} BC\perp(SAB) \\ SB\subset(SAB) \end{cases}\Rightarrow SB\perp BC \quad (2)$$

Từ (1), (2) góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ là $\widehat{SBA}$.

Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy $ABCD$. Xác định góc phẳng của góc nhị diện $\left[S,BD,A\right]$.

Lời giải



Ta có $ABCD$ hình vuông tâm O nên $AC\perp BD$. (1)

$\triangle SAB=\triangle SAD$ nên $SB=SD$.

Suy ra $\triangle SBD$ cân tại S

Và O là trung điểm BD

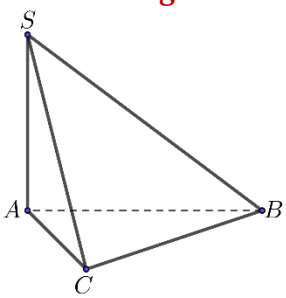
$\Rightarrow SO\perp BD$ (2)

Từ (1), (2) góc phẳng nhị diện $\left[S,BD,A\right]$ là $\widehat{SOA}$.

Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Tính góc phẳng nhị diện $\left[B,SA,C\right]$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases}AB\perp SA\\AC\perp SA\end{cases}$

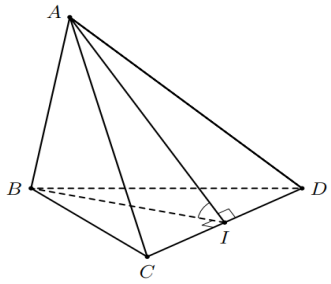
Suy ra góc phẳng nhị diện $\left[B,SA,C\right]$ là $\widehat{BAC}=60°$.

Ví dụ 2.4.

Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=AD$ và $BC=BD$. Gọi I là trung điểm của CD.

Xác định góc phẳng nhị diện $\left[A,CD,B\right]$.

Lời giải

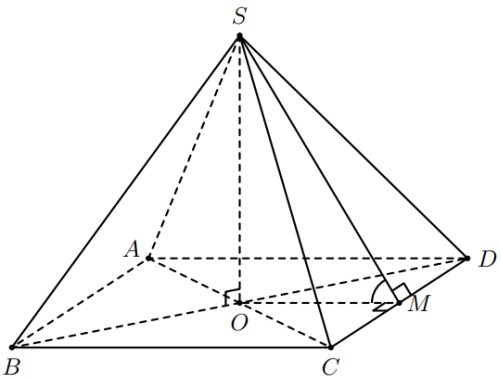


Ta có:
$AI \perp CD$ (do ΔACD cân tại A)
$BI \perp CD$ (do ΔBCD cân tại B)
Suy ra góc phẳng nhị diện $\left[A,CD,B\right]$ là $\widehat{AIB}$

Ví dụ 2.5.

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a.
Tính cosin số đo góc nhị diện $\left[S,CD,A\right]$.

Lời giải



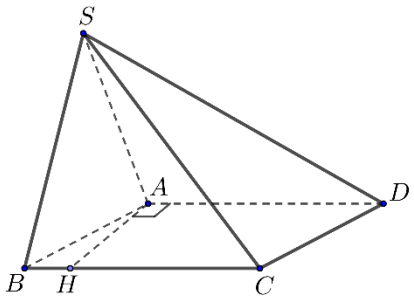
Gọi M là trung điểm của CD, O là giao điểm giữa AC và CD.
Ta có $SM \perp CD$ (do ΔSCD là tam giác đều)
Và $OM \perp CD; O \in (ACD)$ (do ΔOCD cân tại O)
Góc phẳng nhị diện $\left[S,CD,A\right]$ là $\widehat{SOM}$.

ΔSMO vuông tại O có $\cos\widehat{SOM} = \dfrac{OM}{SM} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 2.6.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$
Tính số đo của góc nhị diện $\left[S,DA,B\right]$.

Lời giải



Trong $(ABCD)$, lấy H thuộc BC sao cho $AH \perp AD$.

Mà $SA \perp AD$ (vì $SA \perp (ABCD)$ và $AD \subset (ABCD)$)

Nên góc SAH là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S, DA, B]$.

Mặt khác, $SA \perp (ABCD)$ và $AH \subset (ABCD)$

Nên $SA \perp AH$, suy ra góc SAH bằng $90°$.

Vậy góc nhị diện $[S, DA, B]$ có số đo bằng $90°$.

Ví dụ 2.7.

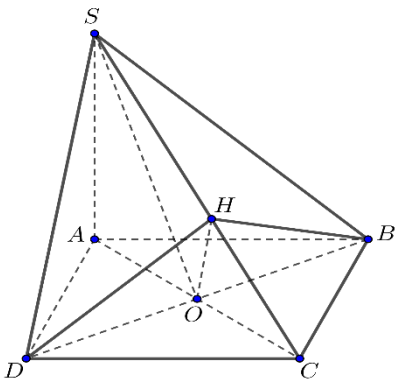
Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng a, $AC = a, SA = \frac{1}{2}a$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC.

(1) Tính số đo của các góc nhị diện $[B, SA, D]; [S, BD, A]; [S, BD, C]$.

(2) Chứng minh rằng $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SC, D]$.

Lời giải

(1) *Tính số đo của các góc nhị diện* $[B, SA, D]; [S, BD, A]; [S, BD, C]$.



Tính $[B, SA, D]$***:***

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB và AD vuông góc với SA.

Vậy $\widehat{BAD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SA, D]$.

Hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $AC = a$

Nên các tam giác ABC, ACD đều.

Do đó $\widehat{BAD} = 120°$.

Vậy số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$ bằng $120°$.

Tính $[S, BD, A]$ ***và*** $[S, BD, C]$***:***

Vì $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$.

Vậy AC và SO vuông góc với BD.

$\Rightarrow \widehat{AOS}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, BD, A]$

và $\widehat{COS}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, BD, C]$.

Tam giác SAO vuông tại A và có $SA = \frac{1}{2}a = AO$ nên $\widehat{AOS} = 45°$.

Suy ra $\widehat{COS}=180°-\widehat{AOS}=135°$.

Vậy các góc nhị diện $[S,BD,A]$,$[S,BD,C]$ tương ứng có số đo là $45°,135°$.

(2) *Chứng minh rằng* $\widehat{BHD}$ *là một góc phẳng của góc nhị diện* $[B,SC,D]$.

Theo chứng minh trên, $BD\perp(SAC)$ nên $BD\perp SC$.

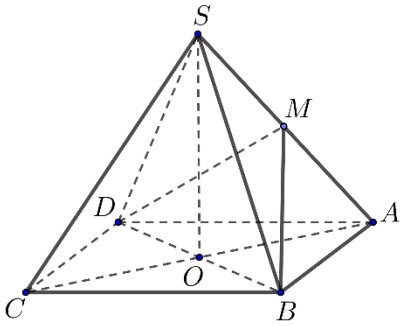
Mặt khác, $OH\perp SC$ nên $SC\perp(BOD)$.

Do đó, $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B,SC,D]$.

Ví dụ 2.8.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB=SB=a$, $SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính số đo của góc nhị diện $[B,SA,D]$.

Lời giải



Do $AB=SB$ nên tam giác SAB cân tại B,
Từ giả thiết dễ thấy $SD=SB$, $AD=AB$
Nên tam giác SAD cân tại D.
Gọi M là trung điểm của SA, khi đó $BM\perp SA$, $DM\perp SA$,
$\Rightarrow \widehat{BMD}$ là góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$.

Từ $SB=AB=SD=AD=a$ ta có $\Delta SBD=\Delta ABD\Rightarrow OA=SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

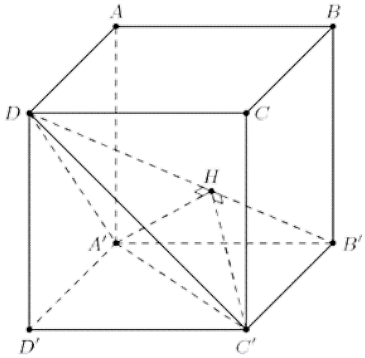
$\Rightarrow MO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.SO=\dfrac{a\sqrt{12}}{6}$; $OD=OB=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\widehat{MDO}=1\Rightarrow \widehat{MDO}=45°\Rightarrow \widehat{BMD}=90°$.

Ví dụ 2.9.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo góc nhị diện $[A',B'D,C']$.

Lời giải



Không mất tính tổng quát, giả sử cạnh hình lập phương bằng a.

Dễ thấy $A'B'=B'C'=a, A'D=C'D=a\sqrt{2}, B'D=a\sqrt{3}$.

Ta có $A'C'\perp\left(BDD'B'\right)$ nên $A'C'\perp B'D$.

Kẻ $A'H\perp B'D$ thì $B'D\perp\left(A'HC'\right)$, vậy $B'D\perp C'H$.

Do đó Góc phẳng nhị diện $\left[A',B'D,C'\right]$ bằng góc $\widehat{A'HC'}$

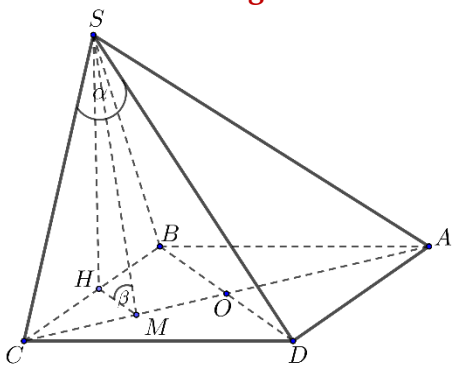
ta có $A'C'=a\sqrt{2}, A'H=C'H=\dfrac{A'D\cdot A'B'}{B'D}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $\cos\widehat{A'HC'}=\dfrac{A'H^2+C'H^2-A'C'^2}{2A'H\cdot C'H}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{A'HC'}=120°$.

Ví dụ 2.10

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SBC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, biết α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{26}}{13}$. Tính số đo của góc nhị diện $\left[S,AC,B\right]$.

Lời giải



Gọi cạnh hình vuông a

Ta có $\left(SBC\right)\perp\left(ABCD\right), CD\perp BC\Rightarrow CD\perp\left(SBC\right)$

$\Rightarrow$ hình chiếu của SD là SC

$\Rightarrow\widehat{CSD}=\alpha$ là góc là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $\left(SBC\right)$.

Gọi H là trung điểm của BC,

Vì ΔSBC cân ở $S\Rightarrow SH\perp BC, \left(SBC\right)\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SH\perp\left(ABCD\right)$.

Từ H kẻ $HM\perp AC\Rightarrow AC\perp\left(SHM\right)\Rightarrow SM\perp AC$

$\Rightarrow \widehat{SMH}$ là góc phẳng nhị diện $\left[S,AC,B\right] \Rightarrow HM=\frac{1}{2}BO=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vì $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{26}}{13} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{CD}{SC} \Rightarrow SC=\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

$SH^2=SC^2-CH^2=\frac{5a^2}{8}-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{8} \Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Xét ΔSHM vuông ở H có $\tan\widehat{SMH}=\frac{SH}{MH}=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{a\sqrt{2}}=\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMH}=60°$.

Chương 08
Bài 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG & MẶT – GÓC NHỊ DIỆN

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Nếu A là một điểm không thuộc mặt phẳng (P) và A' là hình chiếu của A trên (P) thì

A. Đường thẳng AA' nằm trên mặt phẳng (P).

B. Đường thẳng AA' vuông góc với mặt phẳng (P).

C. Đường thẳng AA' song song với mặt phẳng (P).

D. Đường thẳng AA' không cắt mặt phẳng (P).

Lời giải

Chọn B

» Câu 2. Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì hình chiếu của a trên (P) là

A. Đường thẳng a' song song với a.

B. Đường thẳng a' vuông góc với a.

C. Đường thẳng a' nằm trên mặt phẳng (P).

D. Là giao điểm H của đường thẳng a với mặt phẳng (P).

Lời giải

Chọn D

» Câu 3. Cho đường thẳng a cắt mặt phẳng (P) tại điểm A và đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P). Trên đường thẳng a lấy điểm M khác A. Gọi H là hình chiếu của M trên (P). Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

A. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên (P) là đường thẳng AH.

B. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên (P) là đường thẳng đi qua M.

C. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên (P) là đường thẳng đi qua H và song song với a.

D. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên (P) là đường thẳng đi qua H và vuông góc với a.

Lời giải

Chọn A

» Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chiếu vuông góc của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng song song.

B. Hình chiếu vuông góc của một hình bình hành là một hình bình hành.

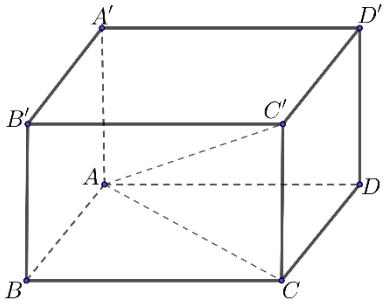
C. Phép chiếu vuông góc biến một tam giác thành một tam giác nếu mặt phẳng chứa tam giác không song song với phương chiếu.

D. Phép chiếu vuông góc không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

Lời giải

Chọn C

» Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (*tham khảo hình vẽ*). Hình chiếu vuông góc của điểm C' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm



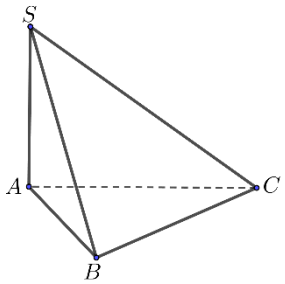
A. C. **B.** A. **C.** D. **D.** B.

Lời giải

Chọn A

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $C'C \perp (ABCD) \Rightarrow C'$ là hình chiếu vuông góc của C trên $(ABCD)$

» Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), (*tham khảo hình vẽ*). Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SB trên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng



A. BC **B.** AB. **C.** AC. **D.** SA.

Lời giải

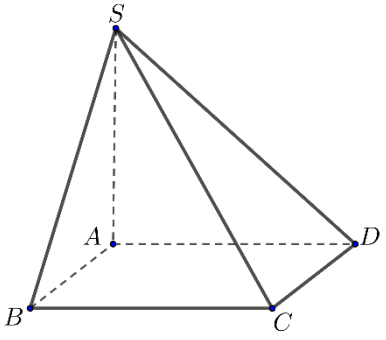
Chọn B

Ta có $SB \cap (ABC) = B$

Và $SA \perp (ABC) \Rightarrow A$ là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC)

Do đó AB là hình chiếu vuông góc của SB lên mp (ABC).

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy (*tham khảo hình vẽ*). Hình chiếu vuông góc của tam giác ΔSCD mặt phẳng $(ABCD)$ là



A. ΔABC **B.** ΔACD. **C.** ΔBCD. **D.** ΔABD.

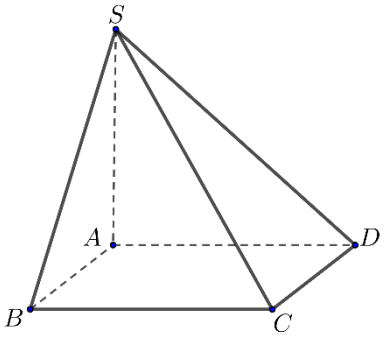
Lời giải

Chọn B

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên AC, AD lần lượt là hình chiếu vuông góc của SC, SD trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó ΔACD là hình chiếu của ΔSCD trên mặt phẳng $(ABCD)$.

» Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh, SA vuông góc với mặt phẳng đáy (*tham khảo hình vẽ*). Góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ là góc nào sau đây?



A. $\widehat{SAC}$ **B.** $\widehat{CSA}$ **C.** $\widehat{SCA}$ **D.** $\widehat{ABC}$

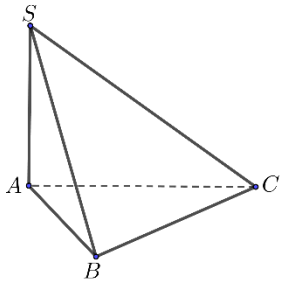
Lời giải

Chọn C

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD)$.

Do đó góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC, chính là góc $\widehat{SCA}$

» Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a\sqrt{2}$ (*tham khảo hình vẽ*). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left.\begin{array}{l} SB \cap (ABC) = B \\ SA \perp (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow (SB, (ABC)) = \widehat{SBA}$

Xét tam giác vuông SAB vuông tại A, có $SA = AB = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại A

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 45°$.

» Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Góc phẳng nhị diện $[S, AB, C]$ là $\widehat{SBC}$.

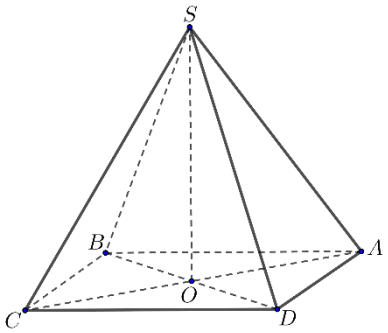
B. Góc phẳng nhị diện $[D,SA,C]$ là $\widehat{DAC}$.

C. Góc phẳng nhị diện $[S,AC,B]$ là $\widehat{SOB}$.

D. Góc phẳng nhị diện $[D,SA,B]$ là $\widehat{BSD}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AC$, $SO \perp BD$.

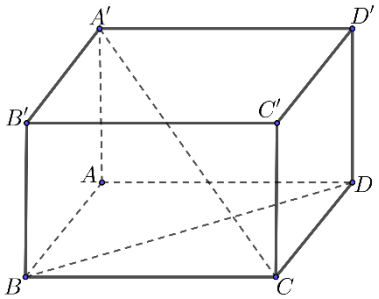
Ta có $SO \perp AC$ và $BO \perp AC$, suy ra $\widehat{SOB}$ là góc phẳng nhị diện $[S,AC,B]$.

» Câu 11. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết đáy $ABCD$ là hình vuông. Xác định góc giữa $A'C$ và $(ABCD)$.

A. $\widehat{A'CA}$. **B.** $\widehat{A'CA}$. **C.** $\widehat{A'AD}$. **D.** $\widehat{CA'A}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên các cạnh bên vuông góc với đáy.

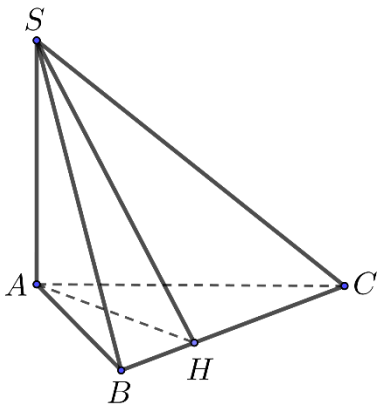
Suy ra góc giữ $A'C$ và $(ABCD)$ là $\widehat{A'CA}$.

» Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ như hình vẽ. Biết $SA \perp (ABC)$, H là điểm thuộc đoạn thẳng BC. Xác định góc nhị diện $[H,SA,B]$.

A. $\widehat{HAB}$. **B.** $\widehat{HBA}$. **C.** $\widehat{CHA}$. **D.** $\widehat{CAH}$.

Lời giải

Chọn A



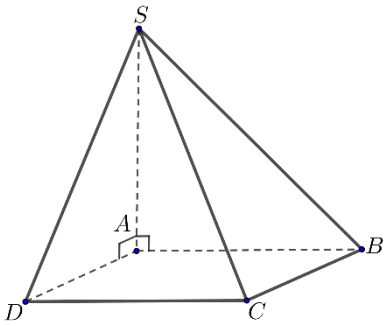
Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} AB \perp SA \\ AH \perp SA \end{cases} \Rightarrow (H,SA,B) = \widehat{HAB}$

» Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và . Góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SAC)

A. $\widehat{ACD}$. **B.** $\widehat{CBA}$. **C.** $\widehat{DAC}$. **D.** $\widehat{CAS}$.

Lời giải

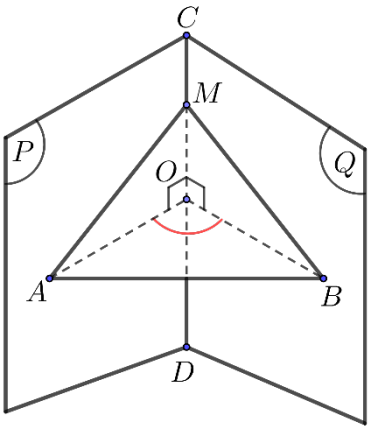
Chọn C



Vì $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ tại $O = AC \cap BD$.

Suy ra Góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SAC) là $\widehat{SAC}$.

» Câu 14. Cho hai mặt phẳng $(P),(Q)$ có giao tuyến là đường thẳng CD. Điểm $A \in (P); B \in (Q)$ và AO, BO cùng vuông góc với CD. M là một điểm bất kì thuộc CD $(M \neq O)$. Xác định góc nhị diện $[A,CD,B]$



A. $\widehat{AOB}$. **B.** $\widehat{AMO}$. **C.** $\widehat{AMB}$. **D.** $\widehat{OAB}$.

Lời giải

Chọn A

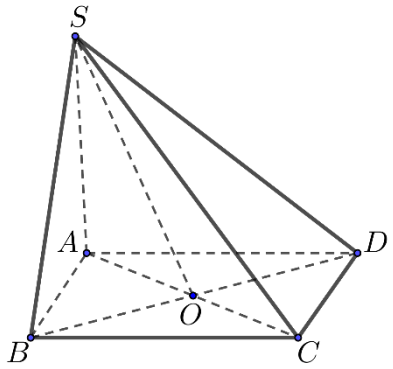
Theo định nghĩa, góc nhị diện $[A,CD,B]$ là góc $\widehat{AOB}$.

» Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $2a$, $SA=a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Số đo của góc nhị diện $[S,BD,A]$?

A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn C



Từ A ta kẻ đường vuông góc tới BD, thì chân đường vuông góc là tâm O của hình vuông, từ đây dễ thấy $SO\perp BD$, nên góc giữa hai mặt phẳng là góc $\widehat{SOA}$.

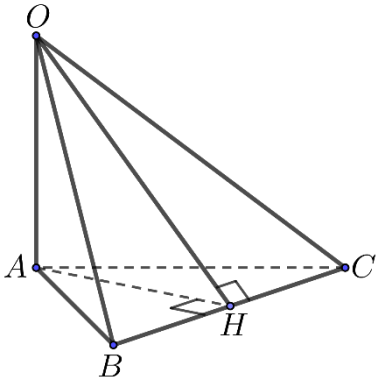
Xét ΔSOA có $\tan\widehat{SOA}=\dfrac{SA}{OA}=\dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}}=\sqrt{3}$. Vậy góc cần tìm bằng 60^0.

» Câu 16. Cho hình chóp $O.ABC$ có OA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $OA=\dfrac{3a}{2}$, tam giác ABC đều cạnh bằng a. Gọi H là trung điểm BC. Góc giữa đường thẳng OH và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C



ΔABC đều cạnh a nên AM là đường trung tuyến $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $SA\perp(ABC)\Rightarrow$ Hình chiếu của SM trên mặt phẳng (ABC) là AM.

Do đó góc giữa SM và (ABC) là góc giữa SM và AM hay là góc $\widehat{SMA}$.

Xét tam giác SAM vuông tại A có $\tan\widehat{SMA}=\dfrac{SA}{AM}=\dfrac{3a}{2}.\dfrac{2}{a\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SMA}=60°$.

Vậy góc cần tìm là $60°$.

» Câu 17. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

B. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b song song với hình chiếu a' của a trên (P).

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

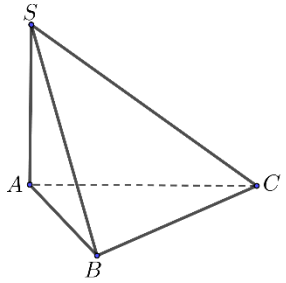
D. Cho đường thẳng a tùy ý và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

Lời giải

Chọn A

Theo Định lí ba đường vuông góc: Cho đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) và đường thẳng a nằm trong (α). Khi đó, điều kiện cần và đủ để a vuông góc với d là a vuông góc với hình chiếu d' của d trên (α).

» Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B (*tham khảo hình vẽ*). Đường thẳng SB vuông góc với đường thẳng nào sau đây?



A. SC. **B.** BC. **C.** AC. **D.** SA.

Lời giải

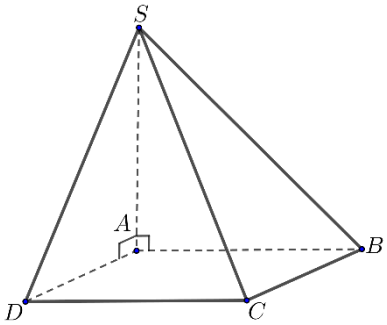
Chọn B

Do $SA \perp (ABC)$ nên A là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC)

Do đó hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC) là AB. Mặt khác ta có $AB \perp BC$.

Theo định lí 3 đường vuông góc $SB \perp BC$.

» Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $BD \perp SC$. **B.** $BD \perp SD$. **C.** $AD \perp SD$. **D.** $AD \perp SC$.

Lời giải

Chọn A

Ta có AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$,

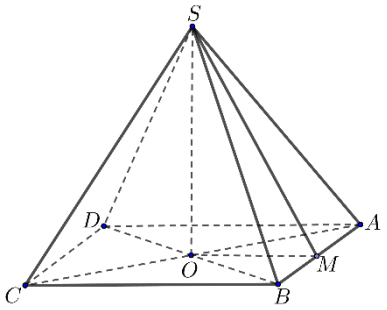
Ta lại có $AC \perp BD$, theo định lý ba đường vuông góc suy ra $BD \perp SC$.

» Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại O, $SO \perp (ABCD)$, tam giác SAC là tam giác đều. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Xác định góc nhị diện $[M,SO,D]$.

A. $\widehat{MOD}$. **B.** $\widehat{SOM}$. **C.** $\widehat{SOD}$. **D.** $\widehat{MOA}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $SO \perp (ABCD)$

Nên OM, OD cùng vuông góc với SO

Do đó $\widehat{MOD}$ là một góc phẳng của nhị diện $[M,SO,D]$.

» Câu 21. Một chiếc máy bay cất cánh từ một đường băng và giữ vận tốc không đổi với độ lớn $240\,\text{km/h}$ trong suốt 2 phút đầu kể từ khi cất cánh. Đường bay lên là một đường thẳng tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc $30°$. Hỏi sau thời gian 1 phút kể từ lúc cất cánh, máy bay đạt độ cao bao nhiêu km so với mặt đất?

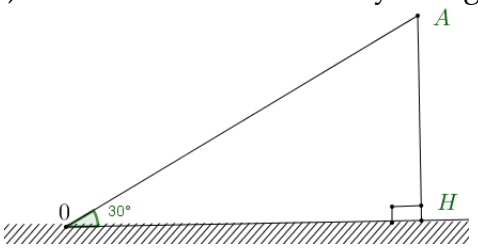
Chú ý: Độ cao của máy bay so với mặt đất là khoảng cách từ máy bay (coi là một điểm) đến hình chiếu của nó trên mặt đất.

A. $2\,\text{km}$. **B.** $2{,}5\,\text{km}$. **C.** $4\,\text{km}$. **D.** $4{,}5\,\text{km}$.

Lời giải

Chọn A

Xét máy bay (coi là điểm A) cất cánh ở điểm O và bay thẳng, ta có hình vẽ sau:



Gọi H là hình chiếu của máy bay A (coi là điểm A) trên mặt đất.

Đổi 1 phút $= \dfrac{1}{60}$ giờ.

Sau 1 phút kể từ khi cất cánh, máy bay A bay được quãng đường là

$OA = 240.\dfrac{1}{60} = 4(km)$.

Vì máy bay A cất cánh và bay thẳng với độ lớn vận tốc là $v = 240(km/h)$ trong 2 phút đầu với góc cất cánh là $30°$ nên ta có $\widehat{AOH} = 30°$.

Xét ΔAOH vuông tại H, ta có: $AH = OA.\sin 30° = 4.\sin 30° = 2(km)$.

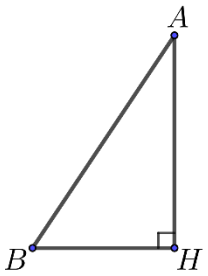
Vậy sau 1 phút kể từ khi cất cánh, máy bay ở độ cao so với mặt đất (phẳng, nằm ngang) là $AH = 2\,km$.

» Câu 22. Một con diều được thả dây căng, tạo với mặt đất một góc $60°$. Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài 10 m. Hỏi con diều cách mặt đất bao nhiêu centimét (lấy giá trị nguyên gần đúng)?

A. $866(\text{cm})$. **B.** $1154(\text{cm})$. **C.** $1000(\text{cm})$. **D.** $87(\text{cm})$.

Lời giải

Chọn A



Gọi:

- A là vị trí con diều,
- B là vị trí đầu dây của con diều trên mặt đất,
- H là hình chiếu của A trên mặt đất.

ΔABH vuông tại H, có $\widehat{ABH} = 60°, AB = 10\,\text{m} = 1000\,\text{cm}$.

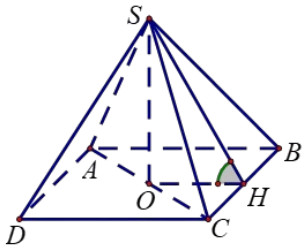
Ta có: $AH = AB.\sin 60° = 1000.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 866(\text{cm})$.

» Câu 23. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Tính góc nhị diện $[S, BC, O]$

A. $\alpha \approx 75°46'$. **B.** $\alpha \approx 71°21'$. **C.** $\alpha \approx 68°31'$. **D.** $\alpha \approx 65°21'$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O, H lần lượt là trung điểm của AC và BC.

Xét tam giác SHC vuông tại H ta có: $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{(5a)^2 - \left(\dfrac{3}{2}a\right)^2} = \dfrac{\sqrt{91}a}{2}$.

Vì $SA=SB=SC=SD=5a$ nên $SO\perp(ABCD)$.

Ta có: $(SBC)\cap(ABCD)=BC$, $SH\perp BC$, $OH\perp BC$, suy ra góc $[S,BC,O]$ bằng $\widehat{SHO}=\alpha$.

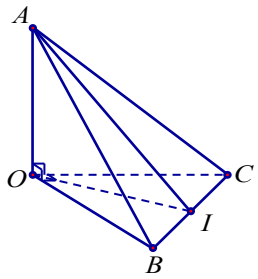
Xét tam giác SOH vuông tại O, ta có: $\cos\alpha=\dfrac{OH}{SH}=\dfrac{2a}{\frac{\sqrt{91}a}{2}}=\dfrac{4\sqrt{91}}{91}\Rightarrow\alpha\approx 65°21'$.

» Câu 24. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB=OC=a\sqrt{6}$, $OA=a$. Tính góc nhị diện $[A,BC,O]$

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của $BC\Rightarrow AI\perp BC$. Mà $OA\perp BC$ nên $AI\perp BC$.

Ta có: $\begin{cases}(OBC)\cap(ABC)=BC\\BC\perp AI\\BC\perp OI\end{cases}\Rightarrow[A,BC,O]=\widehat{OIA}$.

Ta có: $OI=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\sqrt{OB^2+OC^2}=a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAI vuông tại A có $\tan\widehat{OIA}=\dfrac{OA}{OI}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{OIA}=30°$.

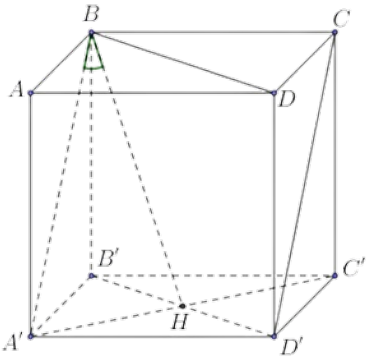
Vậy $[A,BC,O]=30°$.

» Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là tâm hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có $A'H \perp B'D'$, $A'H \perp BB' \Rightarrow A'H \perp (BB'D'D)$. BH là hình chiếu của $A'B$ trên

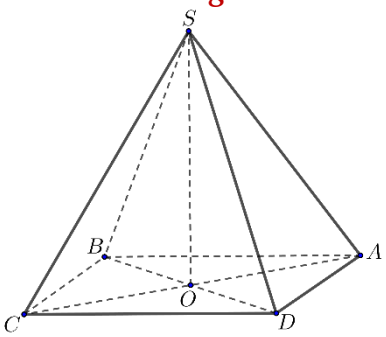
$(BB'D'D) \Rightarrow \left(\widehat{A'H,(BB'D'D)}\right) = \widehat{A'BH} = \alpha$. $\sin\alpha = \dfrac{A'H}{A'B} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 26. Cho hình chóp $SABCD$, $ABCD$ là hình vuông có tâm O và $SA = SB = SC = SD$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm O.		
(b)	Hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$ là SO.		
(c)	$BD \perp SA$		
(d)	Hình chiếu vuông góc của ΔSOB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là ΔOBC.		

Lời giải



(a) Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm O.

Vì $\Delta SBD; \Delta SAC$ cân tại S nên ta có $\begin{cases} SO \perp BD \\ SO \perp AC \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Suy ra hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm O.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$ là SO.

Ta có hình chiếu vuông góc của SA trên $(ABCD)$ là OA.

» Chọn SAI.

(c) $BD \perp SA$.

Ta có hình chiếu vuông góc của SA trên $(ABCD)$ là OA, mặt khác ta có $OA \perp BD$.

Theo định lý ba đường vuông góc ta suy ra $BD \perp SA$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Hình chiếu vuông góc của ΔSOB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là ΔOBC.

Hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là điểm O.

Hình chiếu vuông góc của điểm O, B trên $(ABCD)$ lần lượt là điểm O, B.

Vậy hình chiếu vuông góc của ΔSOB trên $(ABCD)$ là OB.

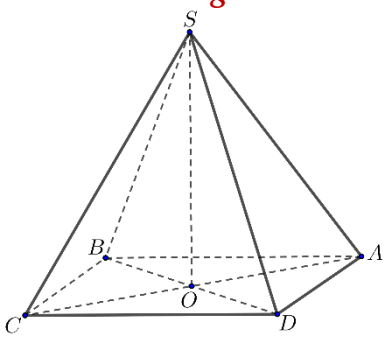
» Chọn SAI.

» Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	Hình chiếu vuông góc của điểm S lên $(ABCD)$ là điểm O.		
(b)	Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SO lên $(ABCD)$ là điểm O.		
(c)	Hình chiếu vuông góc của ΔSAB lên $(ABCD)$ là ΔOAB.		
(d)	Hình chiếu vuông góc của ΔBCD lên (SBD) là ΔSBD.		

Lời giải



(a) Hình chiếu vuông góc của điểm S lên $(ABCD)$ là điểm O.

Xét ΔSAC có $SA=SC$ nên $SO\perp AC$.

Xét ΔSBD có $SB=SD$ nên $SO\perp BD$.

Vì $\begin{cases}SO\perp AC\\SO\perp BD\Rightarrow SO\perp(ABCD)\\AC\cap BD\end{cases}$ nên hình chiếu của điểm S trên $(ABCD)$ là điểm O.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SO lên $(ABCD)$ là điểm O.

Do $SO\perp(ABCD)$ tại O, $O\in(ABCD)$ nên hình chiếu của đường thẳng SO trên $(ABCD)$ là điểm O.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Hình chiếu vuông góc của ΔSAB lên $(ABCD)$ là ΔOAB.

Do $SO\perp(ABCD)$ tại O; A,B thuộc $(ABCD)$

Nên hình chiếu của ΔSAB lên $(ABCD)$ là ΔOAB

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Hình chiếu vuông góc của ΔBCD lên (SBD) là ΔSBD.

$\begin{cases}CO\perp SO\\CO\perp BD\end{cases}\Rightarrow CO\perp(SBD)$ tại O.

Mà $O\in BD$; B,D thuộc $(ABCD)$

$\Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của ΔBCD lên (SBD) là đoạn thẳng BD.

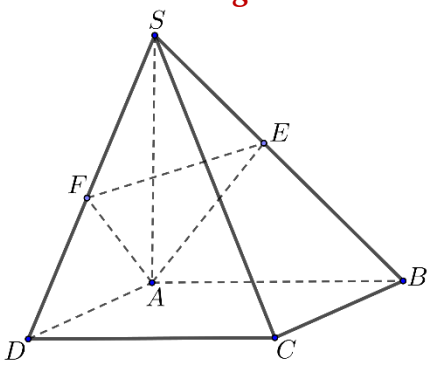
» **Chọn** SAI.

» **Câu 28.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa đường thẳng AE và mặt phẳng (SBC) bằng $90°$.		

(b)	Góc giữa đường thẳng AF và mặt phẳng (SCD) bằng $60°$.		
(c)	Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng $45°$.		
(d)	Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (AEF) bằng $30°$.		

Lời giải



(a) Góc giữa đường thẳng AE và mặt phẳng (SBC) bằng $90°$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ (1)

Lại có $AE \perp SB$ (2)

Từ (1) & (2) ta có $\begin{cases} AE \perp BC \\ AE \perp SB \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow \left[\widehat{AE;(SBC)}\right] = 90°$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Góc giữa đường thẳng AF và mặt phẳng (SCD) bằng $60°$.

Chứng minh tương tự câu **(a)** ta có $AF \perp (SCD) \Rightarrow \left[\widehat{AF;(SCD)}\right] = 90°$

» **Chọn** SAI.

(c) Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng $45°$.

Ta có $AE \perp (SBC)$ tại E. Nên $(SA;(SBC)) = (SA;SE)$.

Mà ΔASE vuông tại $E \Rightarrow \widehat{ASE} < 90° \Rightarrow (SA;(SBC)) = (SA;SE) = \widehat{ASE}$.

Xét ΔSAB vuông tại A: $SA = SB = a \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{ASB} = 45°$ hay $\widehat{ASE} = 45°$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (AEF) bằng $30°$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ (1).

Lại có $AE \perp SB$ (2) (theo giả thiết).

Từ (1) & (2) ta có $\begin{cases} AE \perp BC \\ AE \perp SB \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$ (3)

Tương tự ta chứng minh được $SC \perp AF$ (4)

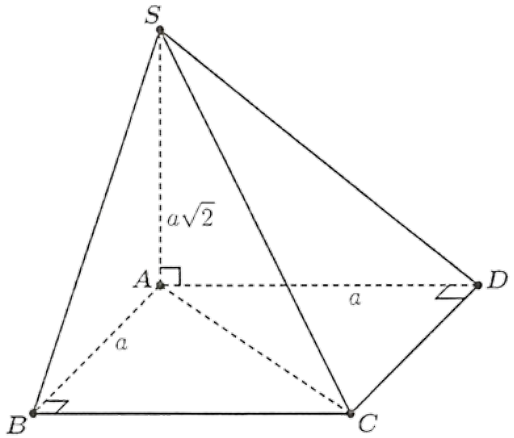
Từ (3) & (4) suy ra $SC \perp (AEF) \Rightarrow \left[\widehat{SC;(AEF)}\right] = 90°$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$		
(b)	$(SB,(ABCD))\approx 54,75^\circ$		
(c)	$(SC,(ABCD))=45^\circ$		
(d)	$(SC,(SAB))=60^\circ$.		

Lời giải



(a) *AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$.*

Ta có: $SA\perp(ABCD)\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $(SB,(ABCD))\approx 54,75^\circ$

Vì vậy $(SB,(ABCD))=(SB,AB)=\widehat{SBA}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}\Rightarrow\widehat{SBA}\approx 54,74^\circ$.

Vậy $(SB,(ABCD))=\widehat{SBA}\approx 54,75^\circ$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $(SC,(ABCD))=45^\circ$

Ta có AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$

Nên $(SC,(ABCD))=(SC,AC)=\widehat{SCA}=45^\circ$ (do ΔSAC vuông cân có $SA=AC=a\sqrt{2}$).

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $(SC,(SAB))=60^\circ$.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\ (SA\perp(SAB))\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$.

Suy ra SB là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SAB).

Do vậy $(SC,(SAB))=(SC,SB)=\widehat{CSB}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{3}$.

Tam giác SBC vuông tại B có: $\tan\widehat{CSB}=\dfrac{BC}{SB}=\dfrac{a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{CSB}=30^\circ$.

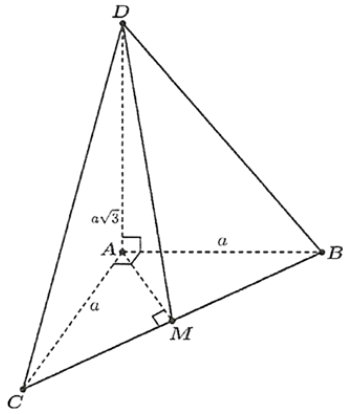
Vậy $\left(SC,\left(SAB\right)\right)=\widehat{CSB}=30^\circ$.

» **Chọn** SAI.

» Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$ có AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau. Biết rằng $AB=AC=a, AD=a\sqrt{3}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$AC\perp\left(ABD\right)$		
(b)	$\left(CD,\left(ABD\right)\right)=30^\circ$		
(c)	Góc phẳng nhị diện $\left[A,BC,D\right]\approx 87,79^\circ$		
(d)	Góc phẳng nhị diện $\left[C,AB,D\right]=90^\circ$		

Lời giải



(a) $AC\perp\left(ABD\right)$

Ta có: $\begin{cases}AC\perp AB\\AC\perp AD\end{cases}\Rightarrow AC\perp\left(ABD\right)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $\left(CD,\left(ABD\right)\right)=30^\circ$

Khi đó AD là hình chiếu của CD trên $\left(ABD\right)$.

Ta có: $\left(CD,\left(ABD\right)\right)=\left(CD,AD\right)=\widehat{CDA}$.

Tam giác ACD vuông tại A có: $\tan\widehat{CDA}=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{CDA}=30^\circ$.

Vậy $\left(CD,\left(ABD\right)\right)=\widehat{CDA}=30^\circ$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Góc phẳng nhị diện $\left[A,BC,D\right]\approx 87,79^\circ$

Gọi M là trung điểm BC thì $AM\perp BC$ (do $AB=AC$).

Vì $\begin{cases}AD\perp AB\\AD\perp AC\end{cases}\Rightarrow AD\perp\left(ABC\right)\Rightarrow AD\perp BC.$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADM) \Rightarrow BC \perp DM.$

Khi đó: $(AM, DM) = \widehat{AMD}$ là góc phẳng nhị diện $[A, BC, D]$.

Tam giác ABC vuông cân tại A nên đường cao $AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác ADM vuông tại A có: $\tan \widehat{AMD} = \dfrac{AD}{AM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6} \Rightarrow \widehat{AMD} \approx 67,79^\circ$

» **Chọn** SAI.

(d) Góc phẳng nhị diện $[C, AB, D] = 90^\circ$

Vì $AB \perp AC, AB \perp AD$

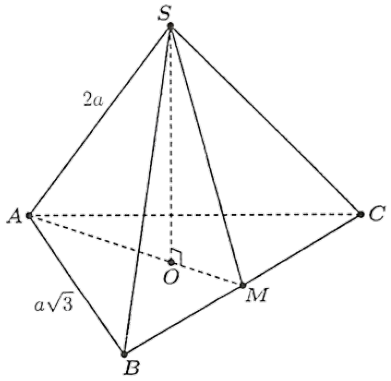
Nên $(AC, AD) = \widehat{CAD}$ là góc phẳng nhị diện $[C, AB, D]$ và $\widehat{CAD} = 90^\circ$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 31. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SO \perp (ABC)$		
(b)	$(SA, (ABC)) = (SA, OA)$		
(c)	$(SA, (ABC)) = 60^\circ$		
(d)	$(SM, (ABC)) \approx 70,9^\circ$.		

Lời giải



(a) $SO \perp (ABC)$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC(O thuộc AM).

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SO \perp (ABC)$.

» **Chọn** ĐÚNG

(b) $(SA, (ABC)) = (SA, OA)$

Ta có OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC).

Suy ra $(SA, (ABC)) = (SA, OA) = \widehat{SAO}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $\left(SA,\left(ABC\right)\right)=60^{\circ}$

Ta có: $OA=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=a$.

Xét tam giác SOA vuông tại O: $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{\left(2a\right)^2-a^2}=a\sqrt{3}$

Trong tam giác SOA vuông tại O có: $\cos\widehat{SAO}=\dfrac{a}{2a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{SAO}=60^{\circ}$.

Vậy $\left(SA,\left(ABC\right)\right)=\widehat{SAO}=60^{\circ}$.

» **Chọn** SAI.

(d) $\left(SM,\left(ABC\right)\right)\approx 70,9^{\circ}$.

Ta có: OM là hình chiếu của SM trên $\left(ABC\right)$

Nên $\left(SM,\left(ABC\right)\right)=\left(SM,OM\right)=\widehat{SMO}$.

Ta có:

$OM=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a}{2}$

$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{\left(2a\right)^2-a^2}=a\sqrt{3}$.

Tam giác SMO vuông tại O có:

$\tan\widehat{SMO}=\dfrac{SO}{OM}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\dfrac{a}{2}}=2\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SMO}\approx 73,9^{\circ}$.

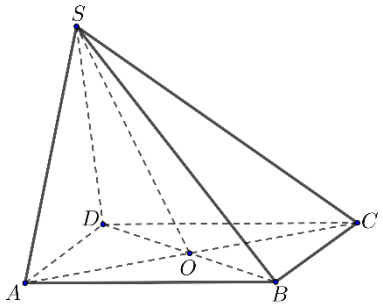
Vậy $\left(SM,\left(ABC\right)\right)=\widehat{SMO}\approx 73,9^{\circ}$.

» **Chọn** SAI.

» Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA\perp\left(ABCD\right)$ và $SA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số đo của góc nhị diện $\left[S,AB,D\right]$ bằng số đo góc SDA.		
(b)	Số đo của góc nhị diện $\left[S,AD,B\right]$ bằng $90°$.		
(c)	Số đo của góc nhị diện $\left[S,BD,C\right]$ bằng số đo của góc SCO.		
(d)	Số đo của góc nhị diện $\left[S,BD,C\right]$ bằng $135°$.		

Lời giải



(a) Số đo của góc nhị diện $[S,AB,D]$ *bằng số đo góc* SDA.

Ta có: $SA \perp AB, AD \perp AB$.

Do đó: góc phẳng nhị diện $[S,AB,D]$ bằng góc SAD.

» **Chọn** SAI.

(b) Số đo của góc nhị diện $[S,AD,B]$ *bằng* $90°$.

Ta có: $SA \perp AD$, $AB \perp AD$.

Do đó, số đo của góc nhị diện $[S,AD,B]$ bằng số đo góc $\widehat{SAB} = 90°$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Số đo của góc nhị diện $[S,BD,C]$ *bằng số đo của góc* SCO.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó $CO \perp BD, SO \perp BD$.

Do đó, góc phẳng nhị diện $[S,BD,C]$ bằng góc SOC.

» **Chọn** SAI.

(d) Số đo của góc nhị diện $[S,BD,C]$ *bằng* $135°$.

Xét ΔSAO, có $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = SA$ và góc SAO là góc vuông

Nên ΔSAO là tam giác vuông cân tại A, suy ra $\widehat{SOA} = 45°$; $\widehat{SOC} = 135°$.

Vậy số đo của góc nhị diện $[S,BD,C]$ bằng $135°$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 33.** Cho hình ảnh thiết kế phòng vệ sinh của một biệt thự.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi đó đường thẳng c vuông góc với đường thẳng a.		
(b)	Khi đó đường thẳng c vuông góc với đường thẳng b.		
(c)	Đường thẳng a không vuông góc với đường thẳng d.		
(d)	Khi đó đường thẳng c vuông góc với $\text{mp}(a;b)$.		

Lời giải

(a) Khi đó đường thẳng c *vuông góc với đường thẳng* a.

$c \perp a$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Khi đó đường thẳng c *vuông góc với đường thẳng* b.

$c \perp b$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Đường thẳng a *không vuông góc với đường thẳng* d.

$\begin{cases} a \perp b \\ b \,//\, d \end{cases} \Rightarrow a \perp d$

» **Chọn** SAI.

(d) Khi đó đường thẳng c vuông góc với $\text{mp}(a;b)$.

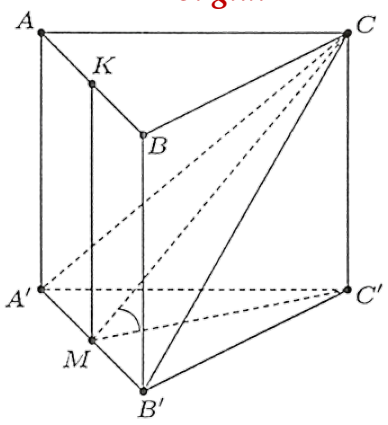
$\begin{cases} c \perp a \\ c \perp b \end{cases} \Rightarrow c \perp (a,b)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 34. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $3a$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Gọi M là trung điểm $A'B'$, ta có $C'M = a\sqrt{2}$		
(b)	Góc phẳng nhị diện $\left[C, A'B', C'\right]$ bằng 60°		
(c)	Gọi K là trung điểm AB, M là trung điểm $A'B'$, khi đó: $A'B' \perp MK$		
(d)	Góc phẳng nhị diện $\left[A, A'B', C\right]$ bằng 30°		

Lời giải



(a) Gọi M là trung điểm $A'B'$, ta có $C'M = a\sqrt{2}$

Ta có: $C'M = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

» **Chọn** SAI.

(b) Góc phẳng nhị diện $\left[C, A'B', C'\right]$ bằng 60°

Gọi M là trung điểm $A'B'$, suy ra $C'M \perp A'B'$ (do tam giác $A'B'C'$ đều).
Mặt khác $CC' \perp A'B'$ (do $ABC \cdot A'B'C'$ là lăng trụ đứng).
Suy ra $A'B' \perp (CMC')$ hay $A'B' \perp CM$.

Vậy $(CM, C'M) = \widehat{CMC'}$ là góc phẳng nhị diện $\left[C, A'B', C'\right]$.

Suy ra $\tan\widehat{CMC'} = \dfrac{CC'}{C'M} = \dfrac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CMC'} = 60^\circ$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Gọi K là trung điểm AB, M là trung điểm $A'B'$, khi đó: $A'B' \perp MK$

Gọi K là trung điểm AB thì MK là đường trung bình của hình chữ nhật $ABB'A'$
$\Rightarrow MK // AA' \Rightarrow A'B' \perp MK$;

» **Chọn** ĐÚNG.

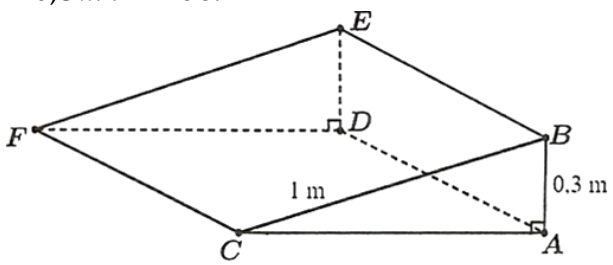
(d) Góc phẳng nhị diện $[A, A'B', C]$ *bằng* 30°

Ta lại có $A'B' \perp CM$ (câu a).

Vậy $(MK, CM) = \widehat{CMK}$ là góc phẳng nhị diện $[A, A'B', C]$ với $\widehat{CMK} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 35. Một tấm cầu dốc kê bậc thềm được làm bằng cao su như hình vẽ sau. Biết $BCFE$ là hình vuông có cạnh bằng $1m$ và $AB = 0,3m$. Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin\widehat{BCA} = 0,5$		
(b)	$\left(BC, (ACFD)\right) \approx 17,46^\circ$		
(c)	$BF = \sqrt{2}\,m$		
(d)	$\left(BF, (ACFD)\right) \approx 15,25^\circ$		

Lời giải

(a) $\sin\widehat{BCA} = 0,5$

Vì AC là hình chiếu của BC trên mặt phẳng $(ACFD)$

Nên $\left(BC, (ACFD)\right) = (BC, AC) = \widehat{BCA}$.

Tam giác ABC vuông tại A có: $\sin\widehat{BCA} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{0,3}{1} = 0,3$.

» **Chọn** SAI.

(b) $\left(BC, (ACFD)\right) \approx 17,46^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BCA} \approx 17,46^\circ$

Vậy $\left(BC, (ACFD)\right) = \widehat{BCA}. \approx 17,46^\circ$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $BF = \sqrt{2}\,m$

Vì AF là hình chiếu của BF trên mặt phẳng $(ACFD)$ nên

$\left(BF, (ACFD)\right) = (BF, AF) = \widehat{BFA}$.

Hình vuông $BCFE$ cạnh bằng $1m$ có đường chéo $BF = \sqrt{2}\,m$.

» **Chọn** ĐÚNG.

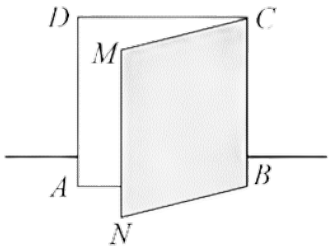
(d) $\left(BF, (ACFD)\right) \approx 15,25^\circ$

Tam giác ABF vuông tại A có: $\sin\widehat{BFA} = \dfrac{AB}{BF} = \dfrac{3\sqrt{2}}{20} \Rightarrow \widehat{BFA} \approx 12,25^\circ$.

Vậy $\left(BF, (ACFD)\right) = \widehat{BFA} \approx 12,25^\circ$.

» **Chọn** SAI.

» Câu 36. Hình dưới đây minh họa một cánh cửa và khung cửa. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$ ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Chiều rộng BN của cửa là $1,2\,\text{m}$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa đường thẳng MN và mặt sàn là $90°$		
(b)	Số đo của góc nhị diện $[A, BC, N]$ bằng số đo góc nhị diện $[A, BC, M]$		
(c)	Biết khoảng cách AN là $1,2\,\text{m}$, khi đó góc mở cửa là $60°$		
(d)	Khi số đo góc mở cửa là $30°$, thì khoảng cách DM xấp xỉ $0,38\,\text{m}$ (*làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2*).		

Lời giải

(a) Góc giữa đường thẳng MN và mặt sàn là $90°$

(BCN) cũng chính là (BCM) nên số đo $[A, BC, N]$ bằng số đo góc nhị diện $[A, BC, M]$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Số đo của góc nhị diện $[A, BC, N]$ bằng số đo góc nhị diện $[A, BC, M]$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Biết khoảng cách AN là $1,2\,\text{m}$, khi đó góc mở cửa là $60°$

Xét tam giác ABN có $AB = BN = AN \Rightarrow ABN$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{ABN} = 60°$.

» **Chọn** ĐÚNG.

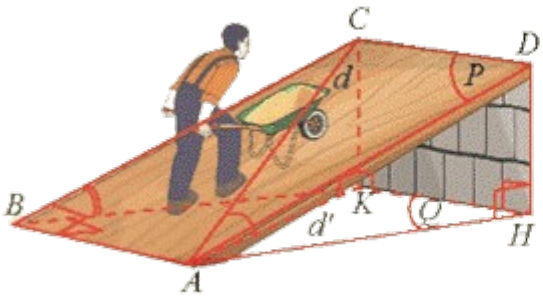
(d) Khi số đo góc mở cửa là $30°$, thì khoảng cách DM xấp xỉ $0,38\,\text{m}$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

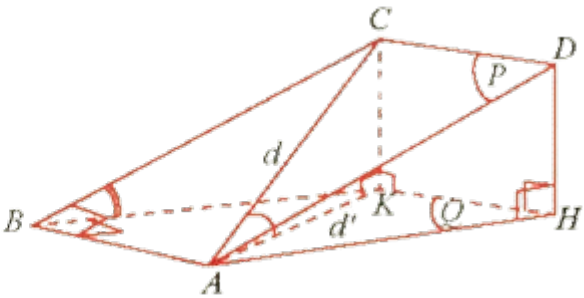
Áp dụng định lý Cosin trong tam giác DCM ta có:

$$DM = \sqrt{DC^2 + CM^2 - 2DC.CM.\cos\widehat{DCM}} = \sqrt{1,2^2 + 1,2^2 - 2.1,2.1,2.\cos 30°} \simeq 3,86$$

» **Chọn** SAI.

» Câu 37. Trong lao động, mặt phẳng nghiêng thường được sử dụng vì tính tiện dụng của nó. Hình vẽ sau minh họa một mặt phẳng nghiêng dung để vận chuyển đồ, có độ nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang là $30°$, vận chuyển lên mặt phẳng có độ cao $1\,\text{m}$. Quan sát hình vẽ và xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:





	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\widehat{CAK}$ được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (Q)		
(b)	$\widehat{CAK}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[C,AB,K]$		
(c)	Mặt phẳng nghiêng có độ dài khoảng $1,73\,\text{m}$		
(d)	Biết chiều rộng của mặt phẳng nghiêng đang sử dụng là $1\,\text{m}$, khi đó sin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (Q) là $\frac{\sqrt{5}}{5}$.		

Lời giải

(a) $\widehat{CAK}$ *được gọi là góc giữa đường thẳng* d *và mặt phẳng* (Q)

Do $CK \perp (Q)$ nên $\widehat{CAK}$ được gọi là góc giữa đường thẳng CA và mặt phẳng (Q)

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\widehat{CAK}$ *là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện* $[C,AB,K]$

Do CA, AK không vuông góc với AB nên $\widehat{CAK}$ không là góc phẳng nhị diện của $[C,AB,K]$

» **Chọn** SAI.

(c) Mặt phẳng nghiêng có độ dài khoảng $1,73\,\text{m}$

Ta có $\sin\widehat{CBK} = \frac{CK}{BC}, CK = 1(\text{m}), \widehat{CBK} = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2(\text{m})$.

» **Chọn** SAI.

(d) Biết chiều rộng của mặt phẳng nghiêng đang sử dụng là $1\,\text{m}$, *khi đó sin của góc giữa đường thẳng* BC *và mặt phẳng* (Q) *là* $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

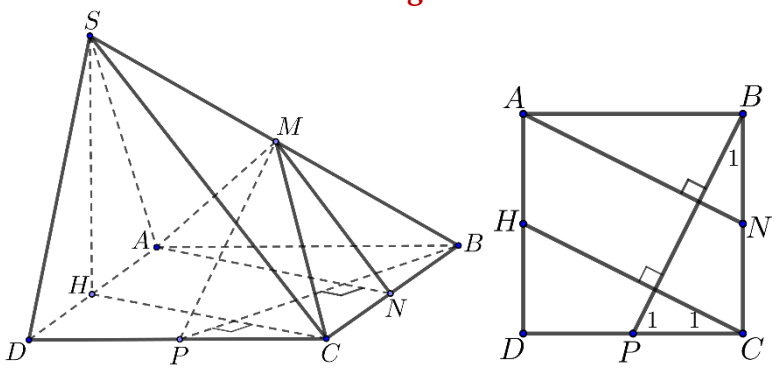
$AB = 1, BC = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{5} \Rightarrow \sin\widehat{CAK} = \frac{CK}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 38.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi đó $BP \perp SC$		
(b)	Khi đó $BP \perp NM$		
(c)	Khi đó $BP \perp SA$		
(d)	Khi đó $BP \perp MA$		

Lời giải



(a) Khi đó $BP \perp SC$.

Trong hình vuông $ABCD$, ta chứng minh được $\Delta BCP = \Delta CDH\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$

Mà $\widehat{B_1} + \widehat{P_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{P_1} = 90^0 \Rightarrow CH \perp PB$.

Ta có: $\begin{cases} SH \perp \left(ABCD\right) \\ SC \cap \left(ABCD\right) = C \end{cases} \Rightarrow HC$ là hình chiếu của SC trên $\left(ABCD\right)$.

Mà $CH \perp BP \Rightarrow BP \perp SC$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Khi đó $BP \perp NM$.

Dễ thấy $AHCN$ là hình bình hành, MN là đường trung bình của ΔSBC.

Ta có $\begin{cases} AN \;//\; HC,\; MN \;//\; SC \\ AM, MN \subset \left(AMN\right) \\ HC, SC \subset \left(SHC\right) \end{cases} \Rightarrow \left(AMN\right) // \left(SHC\right)$

$BP \perp \left(SHC\right) \Rightarrow PB \perp \left(AMN\right) \Rightarrow PB \perp MN$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Khi đó $BP \perp SA$.

Ta có: $\begin{cases} SA \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow SA \perp AB \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp \left(SAD\right)$.

Giả sử $BP \perp SA$. Khi đó $BP \perp \left(SAD\right)$.

Suy ra $BP \;//\; AB$ (vô lý) nên PB không vuông góc SA.

» **Chọn** SAI.

(d) Khi đó $BP \perp MA$.

Vì $PB \perp \left(AMN\right) \Rightarrow PB \perp MA$.

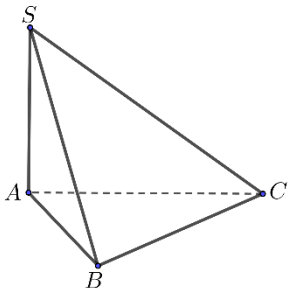
» **Chọn** ĐÚNG.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên hình có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với BC ?

Lời giải

✓ *Trả lời: 3*



Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ SC \cap (ABC) = C \end{cases} \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên (ABC).

Trong (ABC), có $BC \perp AC \Rightarrow BC \perp SC$ (định lý 3 đường vuông góc)

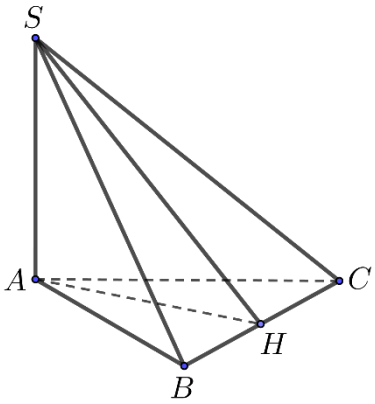
Mà $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp BC$

$\Rightarrow$ Trên hình vẽ có 3 đường thẳng vuông góc với BC.

» Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a Biết $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc nhị diện $[S; BC; A]$. Tính $a+b$ biết $\tan\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{b}} (a, b \in \mathbb{N})$.

Lời giải

✓ *Trả lời: 7*



Dựng $AH \perp BC$ Ta có: $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$

Ta có: $SH \perp BC; AH \perp BC \Rightarrow$ góc nhị diện $[S; BC; A]$ là $\widehat{SHA}$

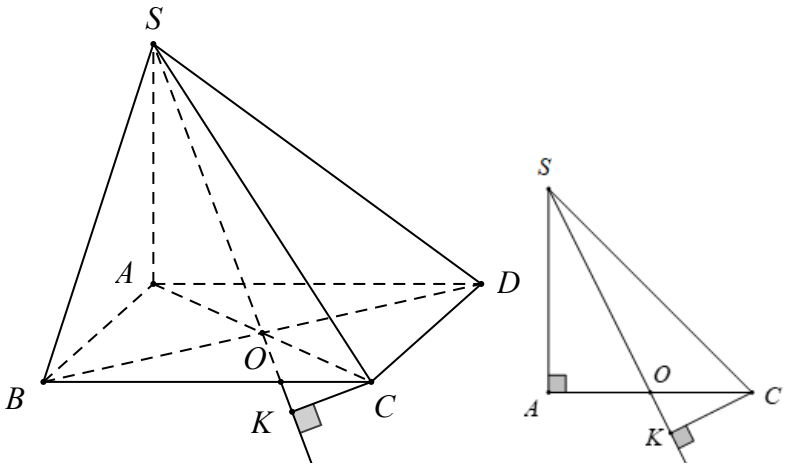
Xét ΔSHA vuông tại A: $\tan SHA = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{2a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Vậy $a+b=7$.

» Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi K hình chiếu vuông góc của điểm C trên mặt phẳng (SBD). Biết rằng $SA = AC = 2\sqrt{5}$. Tính độ dài CK.

Lời giải

✓ *Trả lời: 2*



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ $\Rightarrow AC \perp BD$ tại O (1)

Lại có $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp BD$ (2)

Trong (SAC), $SA \cap AC = \{A\}$ (3)

Từ (1), (2), (3), suy ra $BD \perp (SAC)$.

Kẻ $CK \perp SO$ tại K.

Có: $SO \subset (SAC) \Rightarrow K \in (SAC) \Rightarrow CK \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp CK$.

Dễ thấy $SO \subset (SBD)$.

Ta có: $\begin{cases} CK \perp SO \\ CK \perp BD \end{cases}$

Mà trong (SBD), BD và SO là hai đường thẳng cắt nhau.

Suy ra: $CK \perp (SBD)$ tại K.

$\Rightarrow K$ là hình chiếu của C trên (SBD).

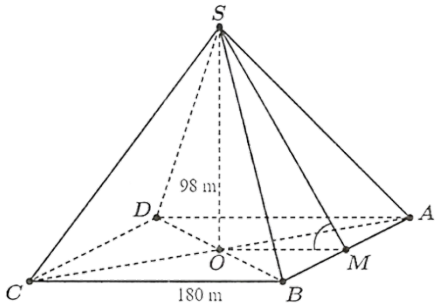
Ta có: $OA = OC = \dfrac{AC}{2} = \sqrt{5}$; $SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = 5$.

Dễ thấy $\Delta SAO \backsim \Delta CKO$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{SA}{SO} = \dfrac{CK}{CO} \Rightarrow CK = \dfrac{SA.CO}{SO} = \dfrac{2\sqrt{5}.\sqrt{5}}{5} = 2$

» Câu 42. Kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao $98\,m$ và cạnh đáy $180\,m$. Số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp đó bằng bao nhiêu độ? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ Trả lời: 47,4



Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao $98\,m$ và cạnh đáy $180\,m$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AB$. (1)

Gọi M là trung điểm AB thì OM là đường trung bình của tam giác ABC,

Suy ra $OM = \dfrac{BC}{2} = 90(m)$ và $OM \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{SMO}$ là góc phẳng nhị diện $\left[(SAB), AB, (ABCD)\right]$

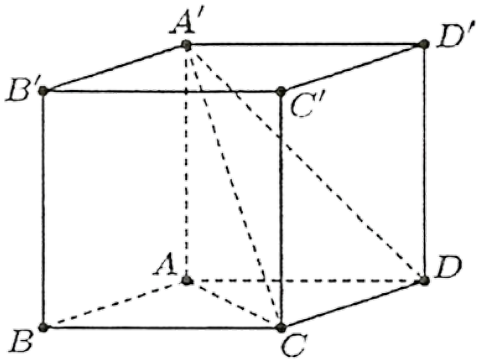
với $\tan\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} = \dfrac{98}{90} = \dfrac{49}{45} \Rightarrow \widehat{SMO} \approx 47,44^\circ$.

Vậy góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp xấp xỉ 47,4.

» Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa $A'C$ với mặt phẳng $(ABCD)$. *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

Lời giải

✓ *Trả lời: 35,3*



Ta có: $AA' \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của $A'C$ trên $(ABCD)$.

Suy ra $\left(A'C, (ABCD)\right) = (A'C, AC) = \widehat{A'CA}$.

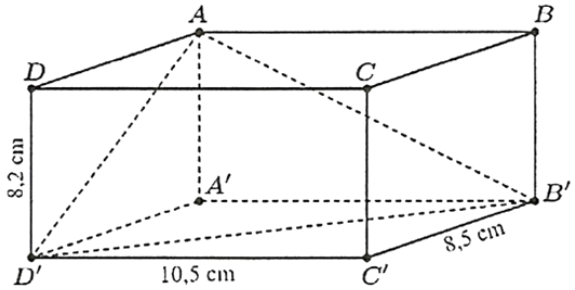
Giả sử cạnh hình lập phương là a thì $AA' = a, AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác $AA'C$ vuông tại A có:

$\tan\widehat{A'CA} = \dfrac{AA'}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{A'CA} \approx 35,26^\circ$.

Vậy $\left(A'C, (ABCD)\right) = \widehat{A'CA} \approx 35,3^\circ$

» Câu 44. Một hộp phấn không bụi có dạng hình hộp chữ nhật, chiều cao hộp phấn bằng $8,2\,cm$ và đáy của nó có hai kích thước là $8,5\,cm; 10,5\,cm$ (xem hình vẽ sau). Tìm góc phẳng nhị diện $\left[A, B'D', A'\right]$ *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*



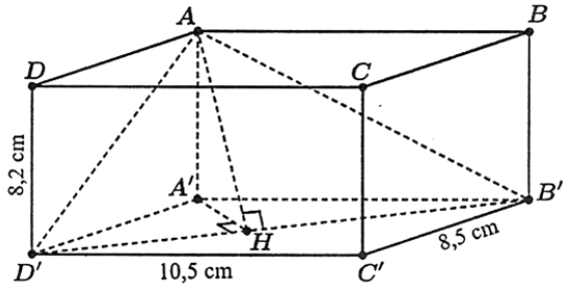
Lời giải

✓ *Trả lời: 51,1*

Trong $(A'B'C'D')$, kẻ $A'H \perp B'D'$ tại H.

Ta có: $\begin{cases} B'D' \perp A'H \\ B'D' \perp AA' \left(\text{do } AA' \perp (A'B'C'D')\right) \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (AA'H) \Rightarrow B'D' \perp AH$.

Do đó $\widehat{AHA'}$ là góc phẳng nhị diện $[A, B'D', A']$.



Tam giác $A'B'D'$ vuông tại A' có đường cao $A'H$ nên

$\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'D'^2} \Rightarrow A'H = \frac{A'B'.A'D'}{\sqrt{A'B'^2 + A'D'^2}} = \frac{357}{2\sqrt{730}}$.

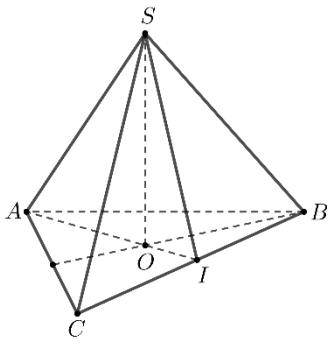
Tam giác AHA' vuông tại A' có:

$\tan \widehat{AHA'} = \frac{AA'}{A'H} = \frac{8,2}{\frac{357}{2\sqrt{730}}} \Rightarrow \widehat{AHA'} \approx 51,14^\circ$

» Câu 45. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy tâm O, cạnh a và cạnh bên là $2a$. Tính góc phẳng nhị diện $[S, BC, O]$? *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

Lời giải

✓ *Trả lời: 81,4*



Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ \text{Trong } (ABC), OI \perp BC \Rightarrow [S, BC, O] = \widehat{SIO} \\ \text{Trong } (SBC), SI \perp BC \end{cases}$

Ta có: $OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Và $OI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}a$

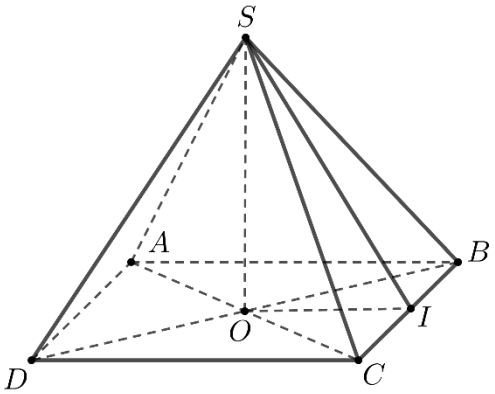
Xét ΔSOI vuông tại O: $\tan \widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{\sqrt{33}a}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 2\sqrt{11} \Rightarrow \widehat{SIO} \approx 81,4^0$

$\Rightarrow [S, BC, O] \approx 81,4^0$

» Câu 46. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm O cạnh a và cạnh bên là $a\sqrt{7}$. Tính góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng đáy? *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

Lời giải

✓ *Trả lời: 74,5*



Ta có: $SO \perp (ABCD)$ tại O và SB cắt $(ABCD)$ tại B

$\Rightarrow OB$ là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$

$\Rightarrow (SB,(ABCD)) = (SB,OB) = \widehat{SBO}$

Ta có: $OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

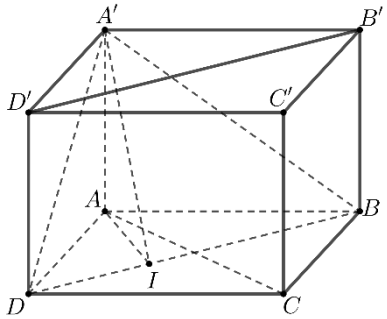
Xét ΔSOB vuông tại O: $\cos\widehat{SBO} = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\sqrt{7}a} = \dfrac{\sqrt{14}}{14} \Rightarrow \widehat{SBO} \approx 74,5^\circ$

Vậy $(SB,(ABCD)) \approx 74,5^\circ$.

» Câu 47. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AA' = 3a$. Tính góc phẳng nhị diện $[A', BD, A]$? *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

Lời giải

✓ *Trả lời: 73,4*



Kẻ $AI \perp BD$

Mà $BD \perp A'A \Rightarrow BD \perp (AA'I)$

Ta có: $\begin{cases} (A'BD) \cap (ABD) = BD \\ \text{Trong}(ABD), AI \perp BD \\ \text{Trong}(A'BD), A'I \perp BD \end{cases} \Rightarrow [A', BD, A] = \widehat{A'IA}$

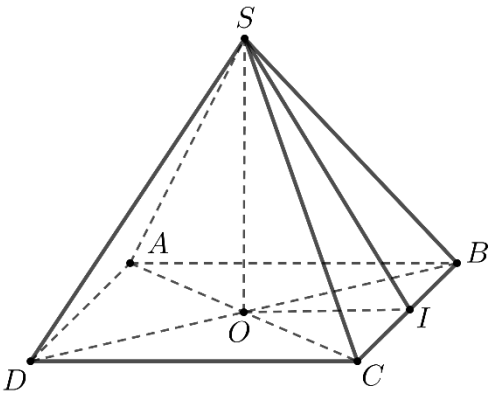
Ta có: $AI=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{(2a)^2}}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$

Xét $\Delta AA'I$ vuông tại A: $\tan\widehat{A'IA}=\dfrac{A'A}{AI}=\dfrac{3a}{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\widehat{A'IA}\approx 73,4^\circ$.

» Câu 48. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm O cạnh a và cạnh bên là $a\sqrt{7}$. Tính góc phẳng nhị diện $[S,BC,O]$? *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).*

Lời giải

✓ *Trả lời: 79*



Ta có: $\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC\\ \text{Trong}(ABCD),OI\perp BC\Rightarrow[S,BC,O]=\widehat{SIO}\\ \text{Trong}(SBC),SI\perp BC\end{cases}$

Ta có: $OI=\dfrac{a}{2},SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{7}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}a$

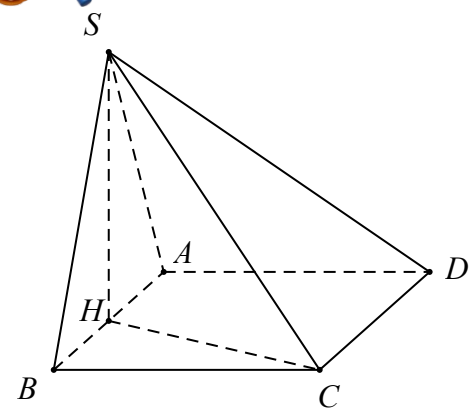
Xét ΔSOI vuông tại O: $\tan\widehat{SIO}=\dfrac{SO}{OI}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{26}a}{2}}{\dfrac{a}{2}}=\sqrt{26}\Rightarrow\widehat{SIO}\approx 79^\circ$

$\Rightarrow[S,BC,O]\approx 79^\circ$

» Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AB. Cạnh bên SB tạo với đáy một góc $60°$. Gọi φ là góc tạo bởi SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{x}}{y}$, trong đó y là số nguyên dương nhỏ hơn 10. Tính giá trị của $S=x+y$.

Lời giải

✓ *Trả lời: 20*



Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AB = a$.

Ta có: $SB \cap (ABCD) = \{B\}$; $SH \perp (ABCD)$ tại H.

$\Rightarrow BH$ là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

$\Rightarrow (SB;(ABCD)) = (SB;BH)$.

Vì $\begin{cases} SH \perp (ABCD) \\ AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow \Delta SHB$ vuông tại $H \Rightarrow \widehat{SBH} < 90°$.

$\Rightarrow (SB;(ABCD)) = (SB;BH) = \widehat{SBH} = 60°$ hay $\widehat{SBA} = 60°$.

Trong ΔSAB, SH vừa là đường cao, vừa là trung tuyến

$\Rightarrow \Delta SAB$ cân tại S. Mà $\widehat{SBA} = 60° \Rightarrow \Delta SAB$ là tam giác đều có cạnh bằng a.

$\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $SC \cap (ABCD) = \{C\}$; $SH \perp (ABCD)$ tại H.

$\Rightarrow CH$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$.

$\Rightarrow (SC;(ABCD)) = (SC;CH)$.

Vì $\begin{cases} SH \perp (ABCD) \\ HC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp HC \Rightarrow \Delta SHC$ vuông tại $H \Rightarrow \widehat{SCH} < 90°$.

$\Rightarrow (SC;(ABCD)) = (SC;CH) = \widehat{SCH} = \varphi$.

Ta có: ΔHBC vuông tại B.

$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

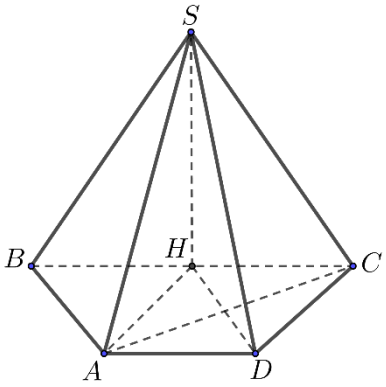
ΔSHC vuông tại H có: $\tan\widehat{SCH} = \dfrac{SH}{HC} = \dfrac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

$\Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow S = x + y = 20$.

» Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân $(AD // BC)$ và $BC = 2$, $AB = AD = CD = 1$. Mặt bên SBC là tam giác đều. Tính độ dài SD để SD vuông góc với AC.

Lời giải

✓ *Trả lời: 2*



Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow SH = \sqrt{3}$.

Ta có $HA = HB = HC = HD = 1 \Rightarrow$ tứ giác $AHCD$ là hình thoi $\Rightarrow HD \perp AC$.

Để $SD \perp AC$ thì $SH \perp AC$. Mà $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp HD$.

Khi đó $SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = 2$.

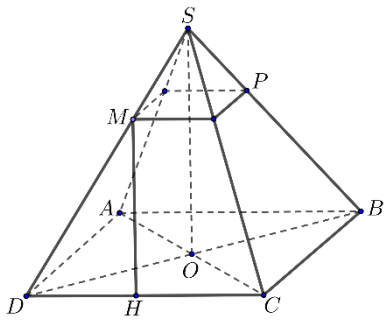
» Câu 51. Một khay đá viên gồm 6 ngăn nhỏ có dạng là các hình chóp cụt với miệng và đáy là hình vuông (xem hình, kích thước của miệng lớn hơn của đáy).



Ta đo được độ dài cạnh đáynhỏ, cạnh đáy lớn lần lượt bằng 1 cm, 3 cm và chiều cao mặt bên bằng $\sqrt{2}$ cm. Tính cosin góc giữa đường chéo của viên đá với cạnh đáy của viên đá (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)

Lời giải

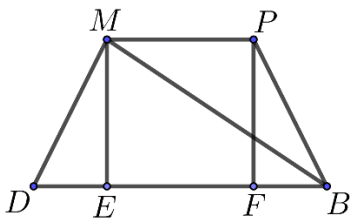
✓ *Trả lời: 0,67*



Mỗi ngăn đá là một hình chóp cụt có hai đáy là hình vuông, các cạnh bên bằng nhau. Các cạnhbên đồng quy tại S. Góc giữa các đường chéo với các cạnh đáy bằng nhau nên ta xem đó là góc giữa MB và BC.

Kẻ $MH \perp CD, H \in CD$.

Ta có: $MC = \sqrt{MH^2 + HC^2} = \sqrt{6}$ cm, $MD = \sqrt{3}$ cm, $BD = 3\sqrt{2}cm$.



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M, P trên BD

nên $ME \perp BD, MF \perp BD \Rightarrow DE = EF = FB = \sqrt{2}$ cm.

Khi đó $ME = \sqrt{MD^2 - DE^2} = 1$ cm $\Rightarrow MB = \sqrt{ME^2 + EB^2} = 3$ cm.

Trong ΔMBC có $\cos\widehat{MBC} = \dfrac{MB^2 + BC^2 - MC^2}{2.MB.BC} = \dfrac{2}{3}$.