

## LUYỆN THI TRẮC NGHIỆM TOÁN

Năm học: 2016-2017

### CHINH PHỤC GIẢI TÍCH 12

# TRẮC NGHIỆM NGUYÊN HÀM

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ  
(KHÔNG SAO CHÉP DƯỚI MỌI HÌNH THỨC)

*Giáo viên: Nguyễn Đại Dương*

*Chuyên Luyện Thi THPT QG 10 – 11 – 12*

*Chuyên Luyện Thi Trắc Nghiệm*

*Địa chỉ: 76/5 Phan Thanh – 135 Nguyễn Chí Thanh*

*Hotline: 0932589246*



## NGUYÊN HÀM VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

### Khái niệm nguyên hàm và tính chất

#### 1. Khái niệm nguyên hàm

- Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $K$ . Hàm số  $F(x)$  được gọi là **nguyên hàm** của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  nếu:  $F'(x) = f(x), \forall x \in K$ .
- Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$  thì **họ nguyên hàm** của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  là:

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C, \text{ const} = C \in \mathbb{R}.$$

#### 2. Tính chất: Nếu $f(x), g(x)$ là 2 hàm số liên tục trên $K$ và $k \neq 0$ thì ta luôn có:

- $\int f' \cdot x \, dx = f(x) + C$ .
- $\int k \cdot f \cdot x \, dx = k \int f \cdot x \, dx$
- $\int [f \cdot x \pm g \cdot x] \, dx = \int f \cdot x \, dx \pm \int g \cdot x \, dx$

#### Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với $C$ là hằng số tùy ý)

|                                                              |                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int x^\alpha \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ | $\longrightarrow \int (ax+b)^n \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$               |
| $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x  + C$                     | $\longrightarrow \int \frac{1}{ax+b} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b  + C$                        |
| $\int \frac{1}{x^2} \cdot dx = -\frac{1}{x} + C$             | $\longrightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2} \cdot dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$              |
| $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$                         | $\longrightarrow \int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$                                   |
| $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$                          | $\longrightarrow \int \cos(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$                           |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -\cot x + C$             | $\longrightarrow \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} \, dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$                       |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \tan x + C$              | $\longrightarrow \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} \, dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$                        |
| $\int e^x \cdot dx = e^x + C$                                | $\longrightarrow \int e^{ax+b} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$                               |
| $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$                  | $\longrightarrow \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$ |

- ♦ **Nhận xét**. Khi thay  $x$  bằng  $(ax+b)$  thì lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm  $\frac{1}{a}$ .

#### Một số lưu ý

1. Cần nắm vững bảng nguyên hàm.
2. Nguyên hàm của một tích (thương) của nhiều hàm số **không bao giờ** bằng tích (thương) của các nguyên hàm của những hàm thành phần.
3. Muốn tìm nguyên hàm của một hàm số, ta phải **biến đổi** hàm số này **thành một tổng hoặc hiệu** của những hàm số tìm được nguyên hàm (dựa vào bảng nguyên hàm).

**Câu 1.** Hàm số  $F(x)$  được gọi là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[a, b]$  nếu:

- A. Với mọi  $x \in (a, b)$  ta có  $f'(x) = F(x)$ .
- B. Với mọi  $x \in (a, b)$  ta có  $F'(x) = f(x)$ .
- C. Với mọi  $x \in [a, b]$  ta có  $f'(x) = F(x)$ .

D. Với mọi  $x \in [a, b]$  ta có  $F'(x) = f(x)$ .

**Câu 2.** Khẳng định nào sau đây về nguyên hàm là khẳng định sai ?

A.  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ .

B.  $\int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$ .

C.  $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$ .

D.  $\int f'(x) dx = f(x) + C$  với  $C$  là hằng số.

**Câu 3.** Giả sử  $F_1(x)$  và  $F_2(x)$  là hai nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A.  $F_1(x) = F_2(x)$

B. Tồn tại số thực  $k$  sao cho  $F_1(x) = k \cdot F_2(x)$

C. Tồn tại số thực  $k$  sao cho  $F_1(x) = F_2(x) - k$

D. Tồn tại số thực  $k$  sao cho  $F_1(x) = k - F_2(x)$

**Câu 4.** Xét các khẳng định sau:

(1) – Mọi hàm số liên tục trên đoạn  $[a, b]$  đều có nguyên hàm trên đoạn đó.

(2) – Hai nguyên hàm của cùng một hàm số thì chúng bằng nhau.

Trong hai khẳng định trên:

A. Chỉ có (1) đúng.

B. Chỉ có (2) đúng.

C. Cả (1) và (2) đều đúng

D. Cả (1) và (2) đều sai.

**Câu 5.** Xét các khẳng định sau:

(1) – Nếu hàm số  $f$  có đạo hàm trên  $K$  thì  $f$  có nguyên hàm trên  $K$ .

(2) – Nếu hàm số  $f$  xác định và có đạo hàm là hàm  $F$  trên tập  $K$  thì hàm  $F$  là nguyên hàm của hàm số  $f$ .

Trong hai khẳng định trên

A. Chỉ (1) đúng.

B. Chỉ (2) đúng.

C. Cả (1) và (2) đều đúng.

D. Cả (1) và (2) đều sai.

**Câu 6.** Khẳng định nào sau đây là sai?

A.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

B.  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

C.  $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$

D.  $\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$

**Câu 7.** Hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x^2}$

A.  $F(x) = \frac{x^4}{3} - x^3 + \ln x^2$

B.  $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \ln x^2$

C.  $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{1+x}{x}$

D.  $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{1-x}{x}$

**Câu 8.** Hàm số  $f(x) = (x-1)(x+1)^2 + e^x$  là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A.  $g(x) = 2(x^2 - 1) + e^x$ .

B.  $g(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + e^x$

C.  $g(x) = 3x^2 + 2x + e^x - 1$

D.  $g(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + e^x + 1$

**Câu 9.** Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x-2)^4$

A.  $F(x) = \frac{(x-2)^5}{5} + x$

B.  $F(x) = \frac{(x-2)^5}{5}$

C.  $F(x) = \frac{(x-2)^5}{5} + 2017$

D.  $F(x) = \frac{(x-2)^5}{5} - 2016$

**Câu 10.** Hàm số  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$  có nguyên hàm trên:

A.  $(0, \pi)$

B.  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

C.  $(\pi, 2\pi)$

D.  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

**Câu 11.** Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\cot^2 x}$

A.  $F(x) = 2\ln|\cot x| + C$

B.  $F(x) = \tan x - x + C$

C.  $F(x) = \tan x + x + C$

D.  $F(x) = \cot x - x + C$

**Câu 12.** Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

A.  $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + C$

B.  $F(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + C$

C.  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$

D.  $F(x) = \ln(x^2 + 1) + C$

**Câu 13.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x) = \frac{1}{1-x}$  và  $f(0) = 1$  thì  $f(5)$  bằng bao nhiêu?

A.  $\ln 4 + 1$

B.  $-2\ln 2 + 1$

C.  $2\ln 2$

D.  $-2\ln 2$

**Câu 14.** Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

A.  $F(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2} + C$

B.  $F(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}^3}{3} + C$

C.  $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} + C$

D.  $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + C$

**Câu 15.** Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = xe^{x^2}$

A.  $F(x) = e^{x^2} + C$

B.  $F(x) = xe^{x^2} + C$

C.  $F(x) = \frac{e^{x^2}}{2} + C$

D.  $F(x) = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} + C$

**Câu 16.** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì hàm số  $F(x) = (x+m)e^x$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = xe^x - e^{x-1}$

A.  $m = 1.$

B.  $m = -\frac{1}{e}.$

C.  $m = -1 - \frac{1}{e}.$

D.  $m = 1 - \frac{1}{e}.$

**Dạng 1: Tìm nguyên hàm bằng công thức cơ bản.**

1. Tích của đa thức hoặc lũy thừa  $\xrightarrow{PP}$  khai triển.
2. Tích các hàm mũ  $\xrightarrow{PP}$  khai triển theo công thức mũ.
3. Chứa căn  $\xrightarrow{PP}$  chuyển về lũy thừa.
4. Tích lượng giác  $\xrightarrow{PP}$  sử dụng công thức lượng giác đưa về bậc nhất theo sin, cos hoặc các công thức nguyên hàm cơ bản.

- $\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$
- $\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$
- $\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

**Bài tập vận dụng**

**Câu 1.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + \frac{x}{2}$ .

A.  $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{4} + C.$

B.  $F(x) = 6x + \frac{1}{4} + C.$

C.  $F(x) = 2x^3 + \frac{x^2}{2} + C.$

D.  $F(x) = x^3 + \frac{1}{2} + C.$

**Câu 2.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x^3 - 5x + 7.$

A.  $F(x) = 6x^2 - 5 + C.$

B.  $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C.$

C.  $F(x) = 2x^4 - 5x^2 + 7x + C.$

D.  $F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C.$

**Câu 3.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 6x^5 - 12x^3 + x^2 - 8.$

A.  $F(x) = 30x^4 - 36x^2 + 2x + C.$

B.  $F(x) = 6x^6 - 12x^4 + x^3 - 8x + C.$

C.  $F(x) = x^6 - 3x^4 + \frac{x^3}{3} - 8x + C.$

D.  $F(x) = x^6 - 3x^4 + \frac{x^3}{3} + C.$

**Câu 4.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x^2 - 3x) \cdot (x + 1).$

A.  $F(x) = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) \left( \frac{x^2}{2} + x \right) + C.$

B.  $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C.$

C.  $F(x) = 3x^2 - 4x - 3 + C.$

D.  $F(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + C.$

**Câu 5.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (3 - x)^3.$

A.  $F(x) = -\frac{(3 - x)^4}{4} + C.$

B.  $F(x) = -3(3 - x)^2 + C.$

$$C. F(x) = \frac{(3-x)^4}{4} + C.$$

$$D. F(x) = 3(3-x)^2 + C.$$

**Câu 6.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ .

$$A. F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C.$$

$$B. F(x) = -\frac{2}{x^3} - 2x + C.$$

$$C. F(x) = \ln|x^2| - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C.$$

$$D. F(x) = -\frac{1}{x} - x^3 - \frac{x}{3} + C.$$

**Câu 7.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 10^{2x}$ .

$$A. F(x) = \frac{10^{2x}}{\ln 10} + C.$$

$$B. F(x) = 10^{2x} \ln 10 + C.$$

$$C. F(x) = \frac{10^{2x}}{2 \ln 10} + C.$$

$$D. F(x) = 2 \cdot 10^{2x} \ln 10 + C.$$

**Câu 8.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^3 - 4x + \frac{3}{x}$ .

$$A. F(x) = 3x^2 - 4 - \frac{3}{x^2} + C.$$

$$B. F(x) = x^4 - 4x^2 + 3 \ln|x| + C.$$

$$C. F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{3}{x^2} + C.$$

$$D. F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3 \ln|x| + C.$$

**Câu 9.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(t) = \frac{2t^4 + 2}{t^2}$ .

$$A. F(t) = 4t - \frac{4}{t^3} + C.$$

$$B. F(t) = \frac{2}{3} \cdot t^3 - \frac{2}{t} + C.$$

$$C. F(t) = \frac{2}{3} t^3 + \ln|t^2| + C.$$

$$D. F(t) = 2t^3 - \frac{2}{t} + C.$$

**Câu 10.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ .

$$A. F(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + C.$$

$$B. F(x) = \ln|x| - \ln|x^2| + C.$$

$$C. F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + C.$$

$$D. F(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + C.$$

**Câu 11.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ .

$$A. F(x) = x + \sin x + C.$$

$$B. F(x) = x - \sin x + C.$$

$$C. F(x) = \cos^2 \frac{x}{2} + C.$$

$$D. F(x) = -\cos^2 \frac{x}{2} + C.$$

**Câu 12.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos^2 x$ .

A.  $F(x) = -\sin 2x + C$ .

B.  $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$ .

C.  $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$ .

D.  $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ .

**Câu 13.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \tan^2 x$ .

A.  $F(x) = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} + C$ .

B.  $F(x) = \tan x + x + C$ .

C.  $F(x) = \tan x - x + C$ .

D.  $F(x) = \frac{\tan x}{\cos^2 x} + C$ .

**Câu 14.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ .

A.  $F(x) = \tan x + \cot x + C$ .

B.  $F(x) = -\tan x \cot x + C$ .

C.  $F(x) = 4 \cot 2x + C$ .

D.  $F(x) = -2 \cot 2x + C$ .

**Câu 15.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2 \sin 3x \cos 2x$ .

A.  $F(x) = 5 \cos 5x + \cos x + C$ .

B.  $F(x) = -5 \cos 5x - \cos x + C$ .

C.  $F(x) = -\frac{1}{5} \cos 5x - \cos x + C$ .

D.  $F(x) = \frac{1}{5} \cos 5x + \cos x + C$ .

**Câu 16.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x \cdot (e^x - 1)$ .

A.  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + C$ .

B.  $F(x) = 2e^{2x} - e^x + C$ .

C.  $F(x) = e^{2x} - e^x + C$ .

D.  $F(x) = e^{2x} - \frac{1}{2}e^x + C$ .

**Câu 17.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x \cdot \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$ .

A.  $F(x) = 2e^x + \ln |\cos^2 x| + C$ .

B.  $F(x) = 2e^x + \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} + C$ .

C.  $F(x) = 2e^x - \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} + C$ .

D.  $F(x) = 2e^x + \tan x + C$ .

**Câu 18.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $I = \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) \cdot dx$ .

A.  $I = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + C.$

B.  $I = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C.$

C.  $I = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + C.$

D.  $I = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}} + C.$

**Câu 19.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $I = \int \left( 2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \cdot dx$ .

A.  $I = \frac{2}{3}x^3 + 3\sqrt[3]{x} + C.$

B.  $I = \frac{2}{3}x^3 - 3x^{\frac{1}{3}} + C.$

C.  $I = 2x - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^5}} + C.$

D.  $I = \frac{2}{3}x^3 - 3\sqrt[3]{x} + C.$

**Câu 20.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $I = \int \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^2} \cdot dx$ .

A.  $I = 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} + C.$

B.  $I = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$

C.  $I = 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$

D.  $I = 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + C.$

**Câu 21.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $I = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{5}{\sqrt[5]{x}} \cdot dx$ .

A.  $F(x) = x^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{25}{4}x^{\frac{5}{4}} + C.$

B.  $F(x) = \sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{25}{4}\sqrt[5]{x^4} + C.$

C.  $F(x) = -x^{\frac{1}{2}} - \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{25}{4}x^{\frac{4}{5}} + C.$

D.  $F(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[5]{x^4} + C.$

**Câu 22.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $I = \int 4\sin^2 x \cdot dx$ .

A.  $I = 4\sin 2x + C.$

B.  $I = 2x - 2\sin 2x + C.$

C.  $I = 2x + \sin 2x + C.$

D.  $I = 2x - \sin 2x + C.$

**Câu 23.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $I = \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \cdot dx$ .

A.  $I = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{2} + C.$

B.  $I = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C.$

C.  $I = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{2} + C.$

D.  $I = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + C.$

**Câu 24.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $I = \int (3 \cos x - 3^{x-1}) \cdot dx$ .

A.  $I = -3 \sin x - \frac{3^{x-1}}{\ln 3} + C.$

B.  $I = -3 \sin x - 3^{x-1} \ln 3 + C.$

C.  $I = 3 \sin x - 3^{x-1} \ln 3 + C.$

D.  $I = 3 \sin x - \frac{3^{x-1}}{\ln 3} + C.$

**Câu 25.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $I = \int (\tan x - 2 \cot x)^2 \cdot dx$ .

A.  $I = \tan x - 4 \cot x - 9x + C.$

B.  $I = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \frac{4 \cot x}{\sin^2 x} + C.$

C.  $I = \tan x - 4 \cot x - 6x + C.$

D.  $I = \tan x + 4 \cot x + C.$

**Câu 26.** Tìm họ các nguyên hàm của hàm số  $I = \int \sqrt[3]{u} \cdot (u - 4) \cdot du$ .

A.  $I = \frac{3}{7} u^{\frac{7}{3}} - 3 u^{\frac{4}{3}} + C.$

B.  $I = \frac{3}{7} \sqrt[3]{u^7} - 3 \sqrt[3]{u^4} + C.$

C.  $I = \frac{4}{3} \sqrt[3]{u} + \frac{4}{3 \sqrt[3]{u}} + C.$

D.  $I = \frac{4}{3} u^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3} u^{-\frac{1}{3}} + C.$

**Câu 27.** Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 15x^2 + 8x - 7$

A.  $F(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 120$

B.  $F(x) = 15x^3 + 8x^2 - 7x$

C.  $F(x) = 15x^3 + 8x^2 - 7$

D.  $F(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7$

**Câu 28.** Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

A.  $F(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 + 3})$

B.  $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 3})$

C.  $F(x) = \sqrt{x^2 + 3} + 2017$

D.  $F(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} - 2017$

**Câu 29.** Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (4x - 1) \cdot e^x$

A.  $F(x) = (4x - 1) \cdot e^x + 1$

B.  $F(x) = (4x + 3) \cdot e^x - 1$

C.  $F(x) = (4x - 5) \cdot e^x$

D.  $F(x) = (2x^2 - x) \cdot e^x + 3$

**Câu 30.** Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 4 \tan^5 x + 4 \tan^3 x + 3$

A.  $F(x) = \frac{20 \tan^4 x}{\cos^2 x} + \frac{12 \tan^2 x}{\cos^2 x}$

B.  $F(x) = \tan^4 x + 3$

C.  $F(x) = -\frac{20 \tan^4 x}{\cos^2 x} - \frac{12 \tan^2 x}{\cos^2 x} + 3$

D.  $F(x) = \tan^4 x + 3x - 5$

**Câu 31.** Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 4) \cdot (x^2 + 3)}$

A.  $F(x) = \ln x^2 + 4 + \ln x^2 + 3 + 2$

B.  $F(x) = \ln \left( \frac{x^2 + 4}{x^2 + 3} \right) + x$

C.  $F(x) = \ln \left( \frac{x^2 + 4}{x^2 + 3} \right)$

D.  $F(x) = \ln x^2 + 4 + \ln x^2 + 3$

**Câu 32.** Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2\sqrt{2}(x^2 - 1)}{x^4 + 1}$

A.  $F(x) = \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}$

B.  $F(x) = \ln x^4 + 1$

C.  $F(x) = 2016 - \ln x^4 + 1$

D.  $F(x) = \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$

**Câu 33.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = x^3 - 4x + 5$  biết  $F(1) = 3$ .

A.  $F(x) = x^4 - 4x^2 + 5x - 5$

B.  $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x - \frac{1}{4}$

C.  $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x - \frac{5}{4}$

D.  $F(x) = x^4 - 4x^2 + 5x + 1$

**Câu 34.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = 3 - 5\cos x$  biết  $F(\pi) = 2$ .

A.  $F(x) = 3x + 5\sin x + 2$ .

B.  $F(x) = 3x + 5\sin x + 2 - 3\pi$ .

C.  $F(x) = 3x - 5\sin x + 2$ .

D.  $F(x) = 3x - 5\sin x + 2 - 3\pi$ .

**Câu 35.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{3 - 5x^2}{x}$  biết  $F(e) = 1$ .

A.  $F(x) = 3\ln|x| - 5x^2 + 5e^2 + 1$ .

B.  $F(x) = 3\ln|x| - 5x^2 + 5e^2 - 2$ .

C.  $F(x) = 3\ln|x| - \frac{5x^2}{2} + \frac{5e^2}{2} - 2$ .

D.  $F(x) = 3\ln|x| - \frac{5x^2}{2} + \frac{5e^2}{2} + 1$ .

**Câu 36.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$  biết  $F(1) = \frac{3}{2}$ .

A.  $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + 1$ .

B.  $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - 2$ .

C.  $F(x) = x^2 + \ln|x| - \frac{5}{2}$ .

D.  $F(x) = x^2 + \ln|x| + \frac{1}{2}$ .

**Câu 37.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$  biết  $F(1) = -2$ .

A.  $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 2\sqrt{x} - 4$ .

B.  $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \sqrt{x} - \frac{17}{5}$ .

C.  $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \sqrt{x} - 4$ .

D.  $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 2\sqrt{x} - \frac{22}{5}$ .

**Câu 38.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin 2x \cdot \cos x$  biết  $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

A.  $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{4}$ .

B.  $F(x) = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{12}$ .

C.  $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}$ .

D.  $F(x) = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{12}$ .

**Câu 39.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 + 5}{x^2}$  biết  $F(1) = 2$ .

A.  $F(x) = x^3 - x^2 - \frac{5}{x} + 7$ .

B.  $F(x) = x^3 - x^2 + 5\ln|x^2| + 2$ .

C.  $F(x) = x^3 - x^2 - \frac{5}{x} + 3$ .

D.  $F(x) = x^3 - x^2 + 5\ln|x^2| - 2$ .

**Câu 40.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 7}{(x+1)^2}$  biết  $F(0) = 8$ .

A.  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{8}{x+1}$ .

B.  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{8}{x+1} + 16$ .

C.  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{x+1} - 16$ .

D.  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{x+1}$ .

**Câu 41.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$  biết  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

A.  $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + \frac{1}{2}$ .

B.  $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{2}$ .

C.  $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{2}$ .

D.  $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{1}{2}$ .

**Câu 42.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = x + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$  biết  $F(1) = \frac{7}{2}$ .

A.  $F(x) = \frac{1}{x} + 3x + \frac{x^2}{2} + 3\ln|x| - 6$ .

B.  $F(x) = \frac{1}{x} + 3x + \frac{x^2}{2} + 3\ln|x| + 1$ .

C.  $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right) + \frac{7}{4}$ .

D.  $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right) - \frac{21}{4}$ .

**Câu 43.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}$  biết  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

A.  $F(x) = 2x + \tan x + 1$ .

B.  $F(x) = 2x + \tan x - 1$ .

C.  $F(x) = 2x - \tan x - 1$ .

D.  $F(x) = 2x - \tan x + 1$ .

**Câu 44.** Tìm giá trị của  $m$  để hàm số  $F(x) = mx^3 + (3m + 2)x^2 - 4x + 3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$

A.  $m = 1$ .

B.  $m = 3$ .

C.  $m = \frac{1}{3}$ .

D. Không có  $m$ .

**Câu 45.** Tìm giá trị của  $m$  để hàm số  $F(x) = \ln|x^2 - mx + 5|$  là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5}$

A.  $m = 3$ .

B.  $m = -5$ .

C. Không có  $m$ .

D.  $m = -3$ .

**Câu 46.** Tìm giá trị của  $a, b, c$  để hàm số  $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x - 3) \cdot e^x$

A.  $a = 0, b = 1, c = -3$ .

B.  $a = 0, b = 1, c = -4$ .

C.  $a = \frac{1}{2}, b = 3, c = 0$ .

D. Không có  $a, b, c$ .

**Câu 47.** Tìm giá trị của  $m$  để hàm số  $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-2x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = -(2x^2 - 8x + 7) \cdot e^{-2x}$

A.  $a = 2, b = -3, c = 1$ .

B.  $a = 1, b = -4, c = \frac{7}{2}$ .

C.  $a = 1, b = -3, c = 2$ .

D. Không có  $a, b, c$ .

**Câu 48.** Tìm giá trị của m để hàm số  $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot e^{-x}$

A.  $a = -1, b = 1, c = -1$ .

B.  $a = -1, b = -1, c = 1$ .

C.  $a = 1, b = -1, c = 1$ .

D. Không có a, b, c.

**Câu 49.** Tìm giá trị của m để hàm số  $F(x) = (a + 1)\sin x + \frac{b}{2}\sin 2x + \frac{c}{3}\sin 3x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos x$

A.  $a = b = c = 1$ .

B.  $a = 1, b = c = 0$ .

C. Không có a, b, c.

D.  $a = b = c = 0$ .

**Câu 50.** Tìm giá trị của m để hàm số  $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot \sqrt{2x - 3}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}}$

A.  $a = 5, b = 0, c = 7$ .

B.  $a = \frac{20}{9}, b = -\frac{123}{25}, c = -\frac{194}{25}$ .

C.  $a = 4, b = -2, c = 1$ .

D. Không có a, b, c.

**Câu 51.** Tìm giá trị của m để hàm số  $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot \sqrt{3 - x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x\sqrt{3 - x}, (x \leq 3)$

A.  $a = -\frac{2}{5}, b = \frac{2}{5}, c = -\frac{12}{5}$

B.  $a = \frac{2}{5}, b = -\frac{2}{5}, c = -\frac{12}{5}$

C.  $a = -\frac{2}{5}, b = -\frac{2}{5}, c = \frac{12}{5}$

D. Không có a, b, c.

**Dạng toán 2: Tìm nguyên hàm của hàm số hữu tỉ.**

**Bài toán tổng quát:** Tính nguyên hàm  $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx$ , với  $P(x)$  và  $Q(x)$  là các đa thức không căn.

**Phương pháp giải:**

- Nếu bậc của tử số  $P(x) \geq$  bậc của mẫu số  $Q(x) \xrightarrow{PP}$  Chia đa thức.
- Nếu bậc của tử số  $P(x) <$  bậc của mẫu số  $Q(x) \xrightarrow{PP}$  Xem xét mẫu số và khi đó:
- + Nếu mẫu số phân tích được thành tích số, ta sẽ sử dụng đồng nhất thức để đưa về dạng tổng của các phân số.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

- $\frac{1}{(ax+m) \cdot (bx+n)} = \frac{1}{an-bm} \cdot \left( \frac{a}{ax+m} - \frac{b}{bx+n} \right).$
- $\frac{mx+n}{(x-a) \cdot (x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B) \cdot x - (Ab+Ba)}{(x-a) \cdot (x-b)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=m \\ Ab+Ba=-n \end{cases}.$
- $\frac{1}{(x-m) \cdot (ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c},$  với  $\Delta = b^2 - 4ac < 0.$
- $\frac{1}{(x-a)^2 \cdot (x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}.$

+ Nếu mẫu số không phân tích được thành tích số (biến đổi và đưa về dạng lượng giác).

**Câu 52.**  $I = \int \frac{3x+1}{(x+1)^3} \cdot dx.$

**ĐS:**  $I = -\frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + C.$

**Câu 53.**  $I = \int \frac{x^2+x+1}{x+2} \cdot dx.$

**ĐS:**  $I = \frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x+2| + C.$

**Câu 54.**  $I = \int \frac{4x^2+6x+1}{2x+1} \cdot dx.$

**ĐS:**  $I = x^2 + 2x - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C.$

**Câu 55.**  $I = \int \frac{4x^3+4x^2-1}{2x+1} \cdot dx.$

**ĐS:**  $I = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C.$

**Câu 56.**  $I = \int \frac{dx}{x^2-6x+9}.$

**ĐS:**  $I = -\frac{1}{x-3} + C.$

**Câu 57.**  $I = \int \frac{3x+2}{4x^2-4x+1} \cdot dx.$

**ĐS:**  $I = \frac{3}{4}\ln|2x-1| - \frac{7}{4(2x-1)} + C.$

Câu 58.  $I = \int \frac{x^2 + x}{(x+2)^2} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = x - 3\ln|x+2| - \frac{2}{x+2} + C.$

Câu 59.  $I = \int \frac{dx}{x(x+1)} \cdot$

ĐS:  $I = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C.$

Câu 60.  $I = \int \frac{dx}{x^2 - 4} \cdot$

ĐS:  $I = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$

Câu 61.  $I = \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} \cdot$

ĐS:  $I = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C.$

Câu 62.  $I = \int \frac{dx}{2x^2 + x - 3} \cdot$

ĐS:  $I = \frac{1}{5} \ln\left|\frac{x-1}{2x+3}\right| + C.$

Câu 63.  $I = \int \frac{dx}{2x^2 - 7x + 5} \cdot$

ĐS:  $I = \frac{1}{3} \ln\left|\frac{2x-5}{x-1}\right| + C.$

Câu 64.  $I = \int \frac{4x-5}{x^2-x-2} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = \ln|x-2| + 3\ln|x+1| + C.$

Câu 65.  $I = \int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = 3\ln|x+2| + \ln|x+3| + C.$

Câu 66.  $I = \int \frac{x+1}{x^2-x-6} \cdot dx.$

ĐS:  $I = \frac{1}{5} \ln|x+2| + 4 \ln|x-3| + C.$

Câu 67.  $I = \int \frac{5x-3}{x^2-3x-2} \cdot dx.$

ĐS:  $I = -2 \ln|x-1| + 7 \ln|x-2| + C.$

Câu 68.  $I = \int \frac{1-2x}{x^2-2x} \cdot dx.$

ĐS:  $I = -\frac{1}{2} \ln|x| - \frac{3}{2} \ln|x-2| + C.$

Câu 69.  $I = \int \frac{x^2 dx}{x^2-7x+12}.$

ĐS:  $I = x + 16 \ln|x-4| - 9 \ln|x-3| + C.$

Câu 70.  $I = \int \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot dx.$

ĐS:  $I = x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$

Câu 71.  $I = \int \frac{3x^2-x^4}{x^2-2} \cdot dx.$

ĐS:  $I = -\frac{x^3}{3} - x - \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$

Câu 72.  $I = \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2}.$

ĐS:  $I = \frac{1}{4} \left( \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) + C.$

**Câu 73.**  $I = \int \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + x^2 - 2x} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = \frac{3}{2} \ln|x| - 2 \ln|x-1| + \frac{5}{2} \ln|x-2| + C.$

**Câu 74.**  $I = \int \frac{2x^2 - 8x + 10}{x^3 + x^2 - 4x - 4} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{20}{3} \ln|x+1| + \frac{17}{2} \ln|x+2| + C.$

**Câu 75.**  $I = \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + C.$

**Câu 76.**  $I = \int \frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = 2 \ln|x-1| + \ln|x+2| - \frac{3}{x-1} + C.$

**Dạng toán 3: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số.**

**Định lý:** Cho  $\int f(u)du = F(u) + C$  và  $u = u(x)$  là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x) \cdot dx = F[u(x)] + C.$$

**1. Đổi biến số dạng 1:** đặt  $t = \varphi(x)$ .

- $I = \int f(ax + b)^n \cdot x dx \xrightarrow{PP} t = ax + b \Rightarrow dt = a \cdot dx$
- $I = \int \left( \frac{x^n}{ax^{n+1} + 1} \right)^m \cdot dx \xrightarrow{PP} t = x^{n+1} + 1 \Rightarrow dt = (n+1)x^n \cdot dx$ , với  $m, n \in \mathbb{Z}$ .
- $I = \int f(ax^2 + b)^n \cdot x dx \xrightarrow{PP} t = ax^2 + b \Rightarrow dt = 2ax \cdot dx$
- $I = \int \sqrt[n]{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } t = \sqrt[n]{f(x)}, \text{ trừ một số trường hợp đổi biến dạng 2.}$
- $\begin{cases} I = \int f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ I = \int f(a + b \ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \end{cases} \xrightarrow{PP} \text{Đặt } \begin{cases} t = \ln x \\ t = a + b \ln x \end{cases}$
- $I = \int f(e^x) \cdot e^x \cdot dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } t = e^x.$
- $I = \int f(\cos x) \cdot \sin x dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx.$
- $I = \int f(\sin x) \cdot \cos x dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx.$
- $I = \int f(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx.$
- $I = \int f(\cot x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -(1 + \cot^2 x) dx.$
- $I = \int f(\sin^2 x; \cos^2 x) \cdot \sin 2x dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } \begin{cases} t = \sin^2 x \Rightarrow dt = \sin 2x dx \\ t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -\sin 2x dx \end{cases}$
- $I = \int f(\sin x \pm \cos x) \cdot (\sin x \mp \cos x) \cdot dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } t = \sin x \pm \cos x.$

**2. Đổi biến số dạng 2:** đặt  $x = \varphi(t)$ .

- $I = \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) \cdot x^{2n} dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } x = a \cdot \sin t \Rightarrow dx = a \cdot \cos t \cdot dt.$
- $I = \int f(\sqrt{x^2 + a^2}) \cdot x^{2n} dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } x = a \cdot \tan t \Rightarrow dx = \frac{adt}{\cos^2 t}.$
- $I = \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) \cdot x^{2n} dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } x = \frac{a}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} \cdot dt.$
- $I = \int \frac{dx}{(x-a)^n \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}} \xrightarrow{PP} \text{Đặt } x-a = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}.$
- $I = \int R[\sqrt[n_1]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b}] \cdot dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } t^n = ax+b \text{ với } n = B.C.N.N \ n_1; n_2; \dots; n_k$
- $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} \xrightarrow{PP} \text{Đặt } \begin{cases} t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} \text{ khi } \begin{cases} x+a > 0 \\ x+b > 0 \end{cases} \\ t = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b} \text{ khi } \begin{cases} x+a < 0 \\ x+b < 0 \end{cases} \end{cases}$

**Câu 77.**  $I = \int x^3 \cdot (2 - 3x^2)^8 \cdot dx.$

**ĐS:**  $I = \frac{(2 - 3x^2)^{10}}{180} - \frac{(2 - 3x^2)^9}{81} + C.$

**Câu 78.**  $I = \int \frac{xdx}{x^2 + 2}.$

ĐS:  $I = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2| + C.$

**Câu 79.**  $I = \int \left( \frac{x}{1+x^2} \right)^3 dx.$

ĐS:  $I = -\frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4(1+x^2)^2} + C.$

**Câu 80.**  $I = \int \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot dx.$

ĐS:  $I = -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x^3} - \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{x} + C.$

**Câu 81.**  $I = \int \frac{x^5}{x^2 + 1} \cdot dx.$

ĐS:  $I = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$

**Câu 82.**  $I = \int \frac{x^4}{x^{10} - 4} dx.$

ĐS:  $I = \frac{1}{20} \ln \left| \frac{x^5 - 2}{x^5 + 2} \right| + C.$

**Câu 83.**  $I = \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 4}}.$

ĐS:  $I = \sqrt{x^2 + 2x - 4} + C.$

**Câu 84.**  $I = \int x \cdot \sqrt{2 - x^2} \cdot dx.$

ĐS:  $I = -\frac{\sqrt{(2-x^2)^3}}{3} + C.$

**Câu 85.**  $I = \int \frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2 + 4}}.$

ĐS:  $I = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x^2 + 4)^2} + C.$

**Câu 86.**  $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x}}.$

ĐS:  $I = -\frac{2(3x^2 + 4x + 8)\sqrt{1-x}}{15} + C.$

**Câu 87.**  $I = \int 5x \cdot \sqrt[3]{1-x^2} \cdot dx.$

ĐS:  $I = -\frac{15}{8} (1-x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$

**Câu 88.**  $I = \int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1-2x^2)^2} \cdot dx.$

**ĐS:**  $I = \frac{3(20x^4 - 4x^2 - 3) \cdot \sqrt{(1-2x^2)^2}}{320} + C.$

**Câu 89.**  $I = \int \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx.$

**ĐS:**  $I = 2x + 1 - 4\sqrt{2x+1} + 5\ln|\sqrt{2x+1}+2| + C.$

**Câu 90.**  $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

**ĐS:**  $I = \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{3} - 4\sqrt{4-x^2} + C.$

**Câu 91.**  $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}.$

**ĐS:**  $I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2} \right| + C.$

**Câu 92.**  $I = \int \frac{2x^3 - 3x^2 + x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx.$

**ĐS:**  $I = \frac{2\sqrt{(x^2-x+1)^3}}{3} - 2\sqrt{x^2-x+1} + C.$

**Câu 93.**  $I = \int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} dx.$

**ĐS:**  $I = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$

**Câu 94.**  $I = \int \frac{3\ln x + 1}{x \ln x} dx.$

**ĐS:**  $I = 3\ln x + \ln|\ln x| + C.$

**Câu 95.**  $I = \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx.$

**ĐS:**  $I = \frac{2\sqrt{(1+\ln x)^3}}{3} - 2\sqrt{1+\ln x} + C.$

**Câu 96.**  $I = \int \frac{\ln x \cdot \sqrt[3]{2+\ln^2 x} dx}{x}.$

**ĐS:**  $I = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(2+\ln^2 x)^4} + C.$

**Câu 97.**  $I = \int \frac{\log_2^3 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}} \cdot dx \cdot$

**ĐS:**  $I = \frac{1}{9\ln^3 2} \left( \frac{\sqrt{(1+3\ln^2 x)^3}}{3} - \sqrt{1+3\ln^2 x} \right) + C.$

**Câu 98.**  $I = \int \frac{dx}{e^x - 1} \cdot$

**ĐS:**  $I = \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| + C.$

**Câu 99.**  $I = \int \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} \cdot$

**ĐS:**  $I = \ln \left| \frac{e^x - 2}{e^x - 1} \right| + C.$

**Câu 100.**  $I = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \cdot dx \cdot$

**ĐS:**  $I = \frac{1}{2} \ln |e^{2x} + 1| + C.$

**Câu 101.**  $I = \int \frac{dx}{e^x - 4e^{-x}} \cdot$

**ĐS:**  $I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{e^x - 2}{e^x + 2} \right| + C.$

**Câu 102.**  $I = \int \frac{(1+e^x)^3}{e^x} \cdot dx \cdot$

**ĐS:**  $I = \frac{(1+e^x)^2}{2} + 2(1+e^x) + 3x - \frac{1}{e^x} + C.$

**Câu 103.**  $I = \int \frac{e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} \cdot dx \cdot$

**ĐS:**  $I = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 3e^x + 2) + \frac{3}{2} \ln \frac{e^x + 1}{e^x + 2} + C.$

**Câu 104.**  $I = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot dx \cdot$

**ĐS:**  $I = \frac{2\sqrt{(e^x - 1)^3}}{3} + e^x - 1 + C.$

**Câu 105.**  $I = \int \frac{dx}{e^x - \sqrt{e^x}}.$

ĐS:  $I = 2 \left( e^{-\frac{x}{2}} + \ln \left| e^{-\frac{x}{2}} + 1 \right| \right) + C.$

**Câu 106.**  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x} + 1}.$

ĐS:  $I = 2 \ln \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x} + 1} + C.$

**Câu 107.**  $I = \int \frac{\cos x dx}{1 + \sin x}.$

ĐS:  $I = \ln |1 + \sin x| + C.$

**Câu 108.**  $I = \int \frac{(2 \sin x - 3) \cos x}{2 \sin x + 1} \cdot dx.$

ĐS:  $I = \frac{1}{2} (2 \sin x + 1) - 4 \ln |2 \sin x + 1| + C.$

**Câu 109.**  $I = \int \frac{3 \cos x dx}{(1 - \sin x)^2}.$

ĐS:  $I = \frac{3}{1 - \sin x} + C.$

**Câu 110.**  $I = \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx.$

ĐS:  $I = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

**Câu 111.**  $I = \int \cos^2 x \sin^3 x dx$

ĐS:  $I = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$

**Câu 112.**  $I = \int \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} \cdot dx.$

ĐS:  $I = \frac{1}{2} \ln |1 + \sin 2x| + C.$

**Câu 113.**  $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \cdot dx.$

ĐS:  $I = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$

**Câu 114.**  $I = \int \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} \cdot dx.$

ĐS:  $I = -2(1 + \cos x)^2 + C.$

.....  
.....  
.....  
**Câu 115.**  $I = \int \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} \cdot dx \cdot$  ĐS:  $I = 2 \ln(2 + \sin x) + \frac{4}{2 + \sin x} + C.$

.....  
.....  
.....  
**Câu 116.**  $I = \int e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx.$  ĐS:  $I = e^{\sin x} + C.$

.....  
.....  
.....  
**Câu 117.**  $I = \int (\cos^3 x - 1) \cdot \cos^2 x \cdot dx.$  ĐS:  $I = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \sin x + \frac{2}{x} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

.....  
.....  
.....  
**Câu 118.**  $I = \int \frac{\cos x dx}{11 - 7 \sin x - \cos^2 x} \cdot$  ĐS:  $I = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{5 - \sin x}{2 - \sin x} \right| + C.$

.....  
.....  
.....  
**Câu 119.**  $I = \int \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} \cdot dx \cdot$  ĐS:  $I = \frac{\cos x}{2} - \cos^2 x - \ln |\cos x + 1| + C.$

.....  
.....  
.....  
**Câu 120.**  $I = \int \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x} \cdot dx \cdot$  ĐS:  $I = 6 \ln(3 + \cos 2x) - 2 \cos 2x - 6 + C.$

.....  
.....  
.....  
**Câu 121.**  $I = \int \frac{\sin x + \sin 3x}{\cos 2x} \cdot dx \cdot$  ĐS:  $I = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x + 1}{\sqrt{2} \cos x - 1} \right| - 2 \cos x + C.$

.....  
.....  
.....  
**Câu 122.**  $I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \cdot dx \cdot$  ĐS:  $I = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$

**Câu 123.**  $I = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} \cdot dx.$

ĐS:  $I = \frac{\tan^2 x}{2} + C.$

.....

**Câu 124.**  $I = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} \cdot dx.$

ĐS:  $I = \frac{\tan^5 x}{5} + C.$

.....

**Câu 125.**  $I = \int \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} \cdot dx.$

ĐS:  $I = -\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \right| + C.$

.....

**Câu 126.**  $I = \int \frac{dx}{5 \cos^2 x - 8 \sin x \cos x + 3 \sin^2 x}.$

ĐS:  $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3 \tan x - 5}{\tan x - 1} \right| + C.$

.....

**Câu 127.**  $I = \int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x}.$

ĐS:  $I = \frac{\tan^3 x}{3} + 2 \tan x - \frac{1}{\tan x} + C.$

.....

**Câu 128.**  $I = \int \frac{dx}{\cos x \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)}.$

ĐS:  $I = -\sqrt{2} \ln |1 - \tan x| + C.$

.....

**Câu 129.**  $I = \int \frac{dx}{\sin x \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right)}.$

ĐS:  $I = -2 \ln |\cot x| + C.$

.....

**Câu 130.**  $I = \int \frac{\tan \left( x - \frac{\pi}{4} \right)}{\cos 2x} dx.$

ĐS:  $I = \frac{1}{1 + \tan x} + C.$

.....

Câu 131.  $I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = -\frac{1}{3} \cot^3 x + C.$

Câu 132.  $I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = \frac{15 \cot^7 x + 42 \cot^5 x + 35 \cot^3 x}{105} + C.$

Câu 133.  $I = \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} \cdot$

ĐS:  $I = -\ln|\cot x| - \frac{1}{2} \cot^2 x + C.$

Câu 134.  $I = \int \frac{\sin x \cdot dx}{(\sin x + \cos x)^3} \cdot$

ĐS:  $I = \frac{1}{2(1 + \cot x)^2} + C.$

Câu 135.  $I = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = -\ln|\sin x + \cos x| + C.$

Câu 136.  $I = \int \frac{\cos 2x \cdot dx}{\sin x + \cos x + 2} \cdot$

ĐS:  $I = \sin x + \cos x + 2 - 2 \ln|\sin x + \cos x + 2|$

Câu 137.  $I = \int \sin 2x \cdot (1 + \sin^2 x)^3 \cdot dx.$

ĐS:  $I = \frac{(1 + \sin^2 x)^4}{4} + C.$

**Câu 138.**  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

ĐS:  $I = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$

.....

.....

.....

.....

**Câu 139.**  $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}}.$

ĐS:  $I = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C.$

.....

.....

.....

.....

**Câu 140.**  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$

ĐS:  $I = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

.....

.....

.....

.....

**Câu 141.**  $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

ĐS:  $I = \frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2} + C.$

.....

.....

.....

.....

**Câu 142.**  $I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx.$

ĐS:  $I = -\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} + C.$

.....

.....

.....

.....

**Câu 143.**  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}.$

ĐS:  $I = \ln|x + \sqrt{x^2-4}| + C.$

.....

.....

.....

.....

**Dạng toán 4: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần.**

**Định lý:** Nếu hai hàm số  $u = u(x)$  và  $v = v(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $K$  thì

$$I = \int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \cdot dx \text{ hay } I = \boxed{\int u dv = uv - \int v du}.$$

**Vận dụng giải toán:**

– **Nhận dạng:** Tích 2 hàm khác loại nhân nhau, chẳng hạn: mũ nhân lượng giác, đa thức nhân lượng giác, ...

– **Đặt:**  $\begin{cases} u = \dots\dots\dots \xrightarrow{\text{Vi phân}} du = \dots\dots\dots dx \\ dv = \dots\dots dx \xrightarrow{\text{Nguyên hàm}} v = \dots\dots\dots \end{cases}$  Suy ra:  $I = \int u dv = uv - \int v du$ .

– **Thứ tự ưu tiên chọn  $u$ :** **log – đa – lượng – mũ** và  $dv = \text{phần còn lại}$ . Nghĩa là nếu có  $\ln$  hay  $\log_a x$  thì chọn  $u = \ln$  hay  $u = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$  và  $dv =$  còn lại. Nếu không có  $\ln$ ;  $\log$  thì chọn  $u =$  đa thức và  $dv =$  còn lại. Nếu không có  $\log$ , đa thức, ta chọn  $u =$  lượng giác, ...

– **Lưu ý** rằng bậc của đa thức và bậc của  $\ln$  tương ứng với số lần lấy nguyên hàm.

– **Dạng mũ nhân lượng giác** là dạng nguyên hàm từng phần tuần hoàn.

**Câu 144.**  $I = \int x \cdot \sin x \cdot dx \cdot$

**ĐS:**  $I = \sin x - \cos x + C.$

**Câu 145.**  $I = \int (1 - 2x) \cdot e^x \cdot dx \cdot$

**ĐS:**  $I = (3 - 2x) \cdot e^x + C.$

**Câu 146.**  $I = \int e^x \cdot \cos x \cdot dx \cdot$

**ĐS:**  $I = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$

**Câu 147.**  $I = \int (2x - 1) \cdot \ln x \cdot dx \cdot$

**ĐS:**  $I = (x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$

**Câu 148.**  $I = \int x \cdot e^{3x} \cdot dx \cdot$

**ĐS:**  $I = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C.$

**Câu 149.**  $I = \int x^2 \cdot \ln 2x \cdot dx \cdot$

**ĐS:**  $I = \frac{x^3 \ln 2x}{3} - \frac{x^3}{9} + C.$

**Câu 150.**  $I = \int \ln x \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = x \ln x - x + C.$

.....

.....

.....

**Câu 151.**  $I = \int (x+1) \cdot \sin 2x \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = -\frac{x+1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

.....

.....

.....

**Câu 152.**  $I = \int e^x \cdot \sin x \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = \frac{e^x \cdot (\sin x - \cos x)}{2} + C.$

.....

.....

.....

**Câu 153.**  $I = \int x \cdot \sin^2 x \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C.$

.....

.....

.....

**Câu 154.**  $I = \int x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = x + \frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C.$

.....

.....

.....

**Câu 155.**  $I = \int \frac{\ln x}{x^3} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$

.....

.....

.....

**Câu 156.**  $I = \int x \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = -\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C.$

.....

.....

.....

**Câu 157.**  $I = \int \frac{x \cdot dx}{1 + \cos 2x} \cdot$

ĐS:  $I = \frac{1}{2} x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\cos x| + C.$

.....

.....

.....

**Câu 158.**  $I = \int x \cdot (2 \cos^2 x - 1) \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = \frac{x}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

.....

.....

.....

.....  
.....  
.....  
**Câu 159.**  $I = \int x \cdot \ln(x^2 + 1) \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) - x^2 - 1 + C.$   
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
**Câu 160.**  $I = \int \cos \sqrt{x} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} - 2 \cos \sqrt{x} + C.$   
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
**Câu 161.**  $I = \int \sin \sqrt{x} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C.$   
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
**Câu 162.**  $I = \int (8x^3 - 2x) \cdot e^{x^2} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = (4x^2 - 1) \cdot e^{x^2} - 4e^{x^2} + C.$   
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
**Câu 163.**  $I = \int x^3 \cdot e^{x^2} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$   
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
**Câu 164.**  $I = \int e^{\sin x} \cdot \sin 2x \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = 2 \sin x \cdot e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C.$   
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
**Câu 165.**  $I = \int \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot dx \cdot$

ĐS:  $I = 2xe^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 4e^{\sqrt{x}} + C.$   
.....  
.....  
.....

**Câu 166.**  $I = \int \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} \cdot dx.$

ĐS:  $I = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \ln|x+1| + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C.$

.....  
 .....  
 .....  
 .....

**Câu 167.**  $I = \int e^{2x} \cdot \ln(e^x + 1) \cdot dx.$

ĐS:  $I = (e^x + 1) \ln(e^x + 1) - e^x + C.$

.....  
 .....  
 .....  
 .....

**Câu 168.**  $I = \int \frac{\ln(4x^2 + 8x + 3)}{(x+1)^3} \cdot dx.$

ĐS:  $\frac{4x^2 + 8x + 3}{2(x+1)^2} \ln|4x^2 + 8x + 3| - 4 \ln|x+1| + C.$

.....  
 .....  
 .....  
 .....

**Câu 169.**  $I = \int \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \ln(x + \sqrt{x} - 1) \cdot dx.$

ĐS:  $I = (x + \sqrt{x} - 1) \ln|x + \sqrt{x} - 1| - x - \sqrt{x} + C.$

.....  
 .....  
 .....  
 .....