



Giáo viên: **LÊ BÁ BẢO**_ Trường THPT Đặng Huy Trứ, Huế

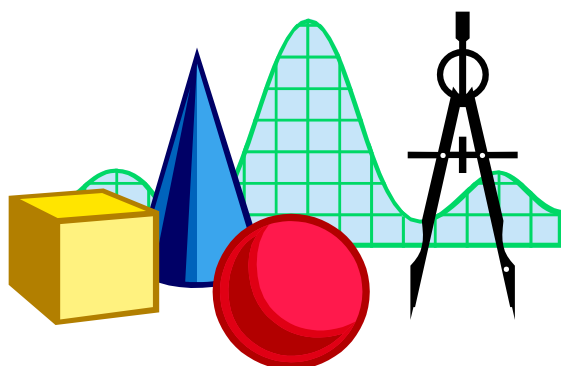
SĐT: **0935.785.115**

Đăng kí học theo địa chỉ: **116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế**
Hoặc Trung tâm Km 10 Hương Trà

Hoài niệm Tự luận:

KHẢO SÁT HÀM SỐ

MỘT SỐ BÀI TOÁN MAX MIN



Lê Bá Bảo!

Huế, tháng 8/2020

Chủ đề: PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ CHO BÀI TOÁN GTLN-GTNN VÀ BẤT ĐẲNG THỨC HAI BIẾN SỐ

Kỹ thuật 1: *Thế biến đưa về khảo sát hàm một biến*

Bước 1: Rút 1 biến biểu diễn theo biến kia. Xác định miền giá trị của biến được rút.

Bước 2: Thay biến được rút vào biểu thức giả thiết. Khảo sát và đưa ra kết luận.

Bài tập 1: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $y \leq 0, x^2 + x - y - 12 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + x + 2y + 17$.

Bài giải:

Từ giả thiết ta có: $y = x^2 + x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4; 3]$.

Khi đó: $P = x(x^2 + x - 12) + x + (x^2 + x - 12) + 17 = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7, x \in [-4; 3]$, ta có: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Ta có: $f(-4) = 13, f(3) = 20, f(1) = -12, f(-3) = 20$.

Suy ra: $\max_{[-4;3]} f(x) = f(-3) = f(3) = 20, \min_{[-4;3]} f(x) = f(1) = -12$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -12 đạt được tại $(x; y) = (1; -10)$.

Bài tập 2: (HSG Quốc gia 1998) Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $2x - y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$.

Bài giải:

Từ giả thiết ta có: $y = 2x - 2$. Thay vào biểu thức P ta có:

Khi đó: $P = \sqrt{5x^2 - 4x + 1} + \sqrt{5x^2 - 20x + 25}$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{5x^2 - 4x + 1} + \sqrt{5x^2 - 20x + 25}$, ta có:

$$f'(x) = \frac{5x-2}{\sqrt{5x^2-4x+1}} + \frac{5x-10}{\sqrt{5x^2-20x+25}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (5x-2)\sqrt{5x^2-20x+25} = (10-5x)\sqrt{5x^2-4x+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5x-2)(10-5x) \geq 0 \\ (5x-2)^2(5x^2-20x+25) = (10-5x)^2(5x^2-4x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{2}{5}; 2\right] \\ 24x^2 - 16x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Từ đó suy ra: $P = f(x) \geq f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\sqrt{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2\sqrt{5}$ đạt được tại $(x; y) = \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Bài tập 3: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3\sqrt{1+2a^2} + 2\sqrt{40+9b^2}$.

Bài giải:

Từ giả thiết ta có: $a = 1 - b > 0 \Rightarrow b \in (0; 1)$.

Khi đó: $P = 3\sqrt{1+2(1-b)^2} + 2\sqrt{40+9b^2}$

Xét hàm số $f(b) = 3\sqrt{1+2(1-b)^2} + 2\sqrt{40+9b^2}$, $b \in (0;1)$, ta có:

$$f'(b) = \frac{6(b-1)}{\sqrt{2b^2-4b+3}} + \frac{18b}{\sqrt{9b^2+40}} = 0 \Leftrightarrow (1-b)\sqrt{9b^2+40} = 3b\sqrt{2b^2-4b+3}.$$

$$\Leftrightarrow (1-b)^2(9b^2+40) = 9b^2(2b^2-4b+3) \Leftrightarrow (b+2)(3b-2)(3b^2-10b+10) = 0 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

Từ đó suy ra: $P = f(b) \geq f\left(\frac{2}{3}\right) = 5\sqrt{11}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $5\sqrt{11}$ đạt được tại $(a;b) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Bài tập 4: Cho a, b là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + 3b = 4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{1+a} + \frac{3b}{1+b}$.

Bài giải:

Ta có: $a + 3b = 4 \Leftrightarrow a = 4 - 3b$. Do a, b không âm nên $0 \leq b \leq \frac{4}{3}$.

Khi đó: $P = \frac{4-3b}{5-3b} + \frac{3b}{1+b} = 4 - \frac{1}{5-3b} - \frac{3}{1+b}$.

Xét hàm số $f(b) = 4 - \frac{1}{5-3b} - \frac{3}{1+b}$, $b \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$.

Ta có: $f'(b) = \frac{3}{(5-3b)^2} - \frac{3}{1+b}$; $f'(b) = 0 \Leftrightarrow (5-3b)^2 = (1+b)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=3 \end{cases}$.

Lập BBT ta suy ra GTLN của P là $\frac{4}{5}$, đạt được khi $b=0, a=4$; GTNN của P là 2, đạt được khi $a=1, b=1$.

Bài tập 5: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 - xy + 3 = 0$ và $2x + 3y \leq 14$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x(x^2 - 1)$.

Bài giải:

Từ giả thiết suy ra: $\begin{cases} y = \frac{x^2+3}{x} \\ 2x+3 \cdot \frac{x^2+3}{x} \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2+3}{x} \\ x \in \left[1; \frac{9}{5}\right] \end{cases}$

Khi đó: $P = 3x^2 \left(\frac{x^2+3}{x}\right) - x \left(\frac{x^2+3}{x}\right)^2 - 2x(x^2-1) = 5x - \frac{9}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 5x - \frac{9}{x}$, $x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]$.

Ta có: $f'(x) = 5 + \frac{9}{x^2} > 0 \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]$. Do đó hàm số đồng biến trên $\left[1; \frac{9}{5}\right]$

Suy ra: $\max_{x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]} f(x) = f\left(\frac{9}{5}\right) = 4$, $\min_{x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]} f(x) = f(1) = -4$.

Vậy GTNN của P là -4 đạt được khi $x = 1$, $y = 4$; GTLN của P là 4 đạt được khi $x = \frac{9}{5}$, $y = \frac{52}{15}$.

Bài tập 6: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\sqrt{2x+3} + \sqrt{y+3} = 4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x+2} + \sqrt{y+9}$.

Bài giải:

Đặt $\sqrt{2x+3} = a$, $\sqrt{y+3} = b$. Ta có: $a + b = 4$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Suy ra: $b = 4 - a \Rightarrow a \in [0; 4]$

Khi đó: $P = \sqrt{\frac{a^2-3}{2} + 2} + \sqrt{b^2-3+9} = \sqrt{\frac{a^2+1}{2}} + \sqrt{b^2+6} = \sqrt{\frac{a^2+1}{2}} + \sqrt{(4-a)^2+6}$

Xét hàm số $f(a) = \sqrt{\frac{a^2+1}{2}} + \sqrt{(4-a)^2+6}$, $a \in [0; 4]$.

Ta có: $f'(a) = \frac{a}{\sqrt{2(a^2+1)}} - \frac{4-a}{\sqrt{(4-a)^2+6}}$, $a \in [0; 4]$.

Ta có: $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{2(a^2+1)}} = \frac{4-a}{\sqrt{(4-a)^2+6}}$, $a \in [0; 4]$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in [0; 4] \\ a^2(4-a)^2 + 6a^2 = 2(a^2+1)(4-a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [0; 4] \\ a^4 - 8a^3 + 12a^2 - 16(a-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in [0; 4] \\ (a-2)(a^3 - 6a^2 - 16) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$$

Ta có: $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{22}$, $f(2) = \frac{3\sqrt{10}}{2}$, $f(4) = \frac{\sqrt{34}}{2} + \sqrt{6}$.

Vậy GTNN của P là $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ đạt được khi $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$; GTLN của P là $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{22}$ đạt được khi $x = -\frac{3}{2}$, $y = 13$.

Kỹ thuật 2:

Xử lý biểu thức đối xứng hai biến

Bước 1: Từ điều kiện đặt $t = x + y$ (hoặc $t = xy$) rút xy theo t (hoặc $x + y$ theo t). Tìm miền giá trị của t , giả sử $t \in D$.

Bước 2: Thay biến được rút vào biểu thức giả thiết được hàm số theo t , với $t \in D$.

Bài tập 1: Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn thay đổi thỏa mãn điều kiện $4(x^2 + y^2 + xy) \leq 1 + 2(x + y)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + \sqrt{x + y} - x^2 - y^2$.

Bài giải:

$$\text{Ta có: } xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}, \quad x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } P \leq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 + \sqrt{x + y} - \frac{1}{2}(x + y)^2 = -\frac{1}{4}(x + y)^2 + \sqrt{x + y}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x + y}, \quad t \geq 0 \Rightarrow P \leq -\frac{1}{4}t^4 + t.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ điều kiện bài toán ta có: } 4(x^2 + y^2 + xy) \leq 1 + 2(x + y) &\Leftrightarrow 4(x + y)^2 - 2(x + y) - 1 \leq 4xy \leq (x + y)^2 \\ &\Rightarrow 3t^2 - 2t - 1 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right] \Rightarrow t \in (0; 1]. \end{aligned}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = -\frac{1}{4}t^4 + t, \quad t \in (0; 1].$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = -t^3 + 1 \geq 0, \quad \forall t \in (0; 1] \Rightarrow f(t) \leq f(1) = \frac{3}{4} \Rightarrow P \leq \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } P \text{ bằng } \frac{3}{4} \text{ đạt được tại } \begin{cases} \sqrt{x + y} = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Bài tập 2: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $3xy + 3 = x^4 + y^4 + \frac{2}{xy}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2y^2 + \frac{16}{x^2 + y^2 + 2}$.

Bài giải:

Ta có:

$$3xy + 3 = x^4 + y^4 + \frac{2}{xy} \geq 2x^2y^2 + \frac{2}{xy} \Leftrightarrow 2x^3y^3 + 2 \leq 3x^2y^2 + 3xy \Leftrightarrow 2x^3y^3 - 3x^2y^2 - 3xy + 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (xy + 1)(2xy - 1)(xy - 2) \leq 0 \Leftrightarrow xy \in \left[\frac{1}{2}; 2\right], \text{ do } xy > 0.$$

$$\text{Khi đó: } P \leq x^2y^2 + \frac{16}{2xy + 2} = x^2y^2 + \frac{8}{xy + 1}. \text{ Đặt } t = xy, \quad t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right] \text{ khi đó: } P \leq f(t) = t^2 + \frac{8}{t + 1}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^2 + \frac{8}{t + 1}, \quad t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right], \text{ ta có: } f'(t) = 2t - \frac{8}{(t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Ta có: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{67}{12}, f(2) = \frac{20}{3}, f(1) = \frac{11}{3}$ suy ra $P \leq f(t) \leq f(2) = \frac{20}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{20}{3}$ đạt tại $x = y = \sqrt{2}$.

Bài tập 3: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + xy = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\frac{x+1}{y}\right)^3 + 4\left(\frac{y+1}{x}\right)^3 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

Bài giải:

Sử dụng BĐT $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$,

$$\begin{aligned} \text{ta có: } P &\geq 4\left(\frac{x+1}{y}\right)\left(\frac{y+1}{x}\right)\left(\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x}\right) + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{16(x^2 + y^2 + x + y)}{x^2 y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\geq \frac{16(2xy + 3 - xy)}{x^2 y^2} + \sqrt{2xy} = \frac{16(xy + 3)}{x^2 y^2} + \sqrt{2xy} \end{aligned}$$

Từ giả thiết ta có: $3 - xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{xy}^2 + 2\sqrt{xy} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{xy} \in (0; 1] \Rightarrow xy \in (0; 1]$

Đặt $t = xy, t \Rightarrow t \in (0; 1]$ khi đó: $P \geq f(t) = \frac{16(t+3)}{t^2} + \sqrt{2t}, t \in (0; 1]$.

Khảo sát GTNN của $f(t) = \frac{16(t+3)}{t^2} + \sqrt{2t}, t \in (0; 1]$, ta có: Giá trị lớn nhất của P bằng $64 + \sqrt{2}$ đạt tại $x = y = 1$.

Bài tập 4: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right)$.

Bài giải:

Ta có: $P = (xy)^2 + \frac{1}{(xy)^2} + 2$. Đặt $t = (xy)^2$, do $1 = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < (xy)^2 \leq \frac{1}{16}$.

Khảo sát hàm $f(t) = t + \frac{1}{t} + 2, t \in \left(0; \frac{1}{16}\right]$, có $f'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{16}\right]$ suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{16}\right]$.

Vậy $\min P = \min_{t \in \left(0; \frac{1}{16}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{289}{16}$ đạt tại $x = y = \frac{1}{2}$.

Bài tập 5: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy}$.

Bài giải:

Ta có: $P = \frac{1}{(x+y)(x^2-xy+y^2)} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x+y)^2-3xy} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{1-3xy} + \frac{1}{xy}$.

Đặt $t = xy$, do $1 = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < xy \leq \frac{1}{4}$.

Khảo sát hàm $f(t) = \frac{1}{1-3t} + \frac{1}{t}$, $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$, có $f'(t) = \frac{3}{(1-3t)^2} - \frac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \notin \left(0; \frac{1}{4}\right] \\ t = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \end{cases}$

Lập BBT ta dễ dàng suy ra:

$\min P = \min_{\left(0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = 4 + 2\sqrt{3}$ đạt tại $x = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right)$; $y = \frac{1}{2} \left(1 \mp \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right)$.

Bài tập 6: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{1+xy} + xy$.

Bài giải:

Đặt $t = xy$, do $0 < t = xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = 1 \Rightarrow t \in (0; 1]$. Khi đó: $P = \frac{1}{1+t} + t$, $t \in (0; 1]$.

Khảo sát hàm $f(t) = \frac{1}{1+t} + t$, $t \in (0; 1]$, ta có $f'(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2} > 0$, $\forall t \in (0; 1)$

Lập BBT ta dễ dàng suy ra:

GTLN của P là $\frac{3}{2}$, đạt được khi $x = y = 1$. Vì $f(t)$ không tồn tại GTNN trên $(0; 1]$ nên P không tồn tại GTNN.

Bài tập 7: (CĐ 2008) Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$.

Bài giải:

Ta có: $P = 2(x+y)(x^2-xy+y^2) - 3xy = 2(x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] - 3xy$.

Từ giả thiết suy ra: $(x+y)^2 = 2xy + 2$. Như vậy nếu ta đặt $t = xy$ thì $x+y$ chưa thể rút theo t ngay được vì $x+y$ có nhận giá trị âm và giá trị dương.

Do đó ta đặt $t = x + y$, khi đó: $P = 2t\left(t^2 - 3 \cdot \frac{t^2-2}{2}\right) - 3 \cdot \frac{t^2-2}{2} = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$.

Ta có: $t^2 = (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) = 4 \Rightarrow t \in [-2; 2]$.

Khảo sát hàm $f(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$, $t \in [-2; 2]$, ta có $f'(t) = -3t^2 - 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$

Lập BBT ta dễ dàng suy ra:

GTLN của P là $\frac{13}{2}$, đạt được khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

$v(x;y) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

GTNN của P là -7 , đạt được khi $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-1$.

Bài tập 8: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $y \leq 0$ và $x^2 + x = y + 12$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + x + 2y + 17$.

Bài giải:

Ta có: $y = x^2 + x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4; 3]$. Thay y vào biểu thức P ta được:

$$P = f(x) = x(x^2 + x - 12) + x + 2(x^2 + x - 12) + 17 = x^3 + 3x^2 - 9x - 7, x \in [-4; 3]$$

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$.

Ta có: $f(-4) = -13, f(3) = 20, f(-3) = 20, f(1) = -12$.

Vậy GTLN của P bằng 20 đạt được tại $x = -3, y = -6$ hoặc $x = 3, y = 0$.

GTNN của P bằng -12 đạt được tại $x = 1, y = -10$.

Bài tập 9: Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + xy + y^2 + x - 3}{3x - xy + 1}$.

Bài giải:

Ta có: $y = 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 2]$. Thay y vào biểu thức P ta được:

$$P = f(x) = \frac{x^2 + x(2-x) + (2-x)^2 + x - 3}{3x - x(2-x) + 1} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}, x \in [0; 2]$$

Ta có: $f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (0; 2) \\ x = 1 \end{cases}$. Ta có: $f(0) = 1, f(2) = \frac{3}{7}, f(1) = \frac{1}{3}$.

Vậy GTNN của P bằng $\frac{1}{3}$ đạt được tại $x = y = 1$.

Bài tập 10: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y \neq -1, x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{x + y + 1}$.

Bài giải:

Ta có: $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \Leftrightarrow xy = (x + y)^2 - (x + y) - 1$.

Đặt $t = x + y$, ta có: $(x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x + y)^2 - (x + y) - 1 = xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 4 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right]$.

Khi đó P trở thành: $P = f(t) = \frac{t^2 - t - 1}{t + 1}, t \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right]$.

Ta có: $f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-2 \notin \left(-\frac{2}{3}; 2\right) \end{cases}$. Ta có: $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}, f(2) = \frac{1}{3}, f(0) = -1$.

Vậy GTLN của P bằng $\frac{1}{3}$ đạt được tại $x = y = -\frac{1}{3}$ hoặc $x = y = 1$, GTNN của P bằng -1 đạt được tại $x = -1, y = 1$ hoặc $x = 1, y = -1$.

Bài tập 11: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x, y \neq 0, xy(x+y) = x^2 + y^2 - x - y + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Bài giải:

Ta có: $xy(x+y) = (x+y)^2 - 2xy - (x+y) + 2$.

Đặt $t = x + y$, ta có: $(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \frac{t^3 - 2t^2 + 4t - 8}{t+2} \geq 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Khi đó P trở thành: $P = f(t) = \frac{t^2 + 2t}{t^2 - t + 2}, t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = \frac{-3t^2 + 4t + 4}{(t^2 - t + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-\frac{2}{3} \end{cases}$. Lập BBT ta dễ dàng suy ra kết quả.

Vậy GTLN của P bằng 2 đạt được tại $x = y = 1$.

Bài tập 12: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $1 - y^2 = x(x - y)$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^6 + y^6 - 1}{x^3y + xy^3}$.

Bài giải:

Ta có: $1 = x^2 + y^2 - xy \geq 2xy - xy = xy \Leftrightarrow xy \leq 1$.

Mặt khác: $1 = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy \Leftrightarrow (x+y)^2 = 1 + 3xy \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -\frac{1}{3}$.

Ta có: $P = \frac{x^6 + y^6 - 1}{x^3y + xy^3} = \frac{(x^2 + y^2) \left[(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 \right]}{xy(x^2 + y^2)} - \frac{1}{xy(x^2 + y^2)} = \frac{(1 + xy)^2 - 3x^2y^2}{xy} - \frac{1}{xy(1 - xy)}$.

Đặt $t = xy, t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Khi đó P trở thành: $P = f(t) = \frac{-2t^2 + 3}{t+1}, t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Ta có: $f'(t) = \frac{-2t^2 - 4t - 3}{(t+1)^2} < 0$. Ta có: $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{25}{6}, f(1) = \frac{1}{2}$.

Vậy GTLN của P bằng $\frac{25}{6}$ đạt được tại $x = -y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, GTNN của P bằng $\frac{1}{2}$ đạt được tại $x = y = \pm 1$.

Bài tập 13: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $2(x^2 + y^2) = xy + 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^4 + y^4}{2xy + 1}$.

Bài giải:

Ta có: $xy + 1 = 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow xy + 1 = 2[(x + y)^2 - 2xy] \geq -4xy \Leftrightarrow xy \geq -\frac{1}{5}$.

Mặt khác: $xy + 1 = 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow xy + 1 = 2[(x - y)^2 + 2xy] \geq 4xy \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{3}$.

Ta có: $P = \frac{x^4 + y^4}{2xy + 1} = \frac{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2}{2xy + 1} = \frac{\left(\frac{xy + 1}{2}\right)^2 - 2x^2y^2}{2xy + 1}$.

Đặt $t = xy$, $t \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]$. Khi đó P trở thành: $P = f(t) = \frac{-7t^2 + 2t + 1}{4(2t + 1)}$, $t \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]$.

Ta có: $f'(t) = \frac{7(-t^2 - t)}{2(2t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \notin \left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right) \end{cases}$. Ta có: $f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15}$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{15}$, $f(0) = \frac{1}{4}$.

Vậy GTLN của P bằng $\frac{1}{4}$, GTNN của P bằng $\frac{2}{15}$.

Bài tập 14: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x \geq 1, y \geq 1$ và $3(x + y) = 4xy$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$.

Bài giải:

Đặt $x + y = a \Rightarrow xy = \frac{3a}{4}$, $a > 0$. Suy ra x, y là nghiệm của phương trình: $t^2 - at + \frac{3a}{4} = 0$ (1)

Vì (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 3a \geq 0 \Rightarrow a \geq 3$.

Vì $x, y \geq 1$ nên $(x - 1)(y - 1) \geq 0 \Leftrightarrow xy - (x + y) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3a}{4} - a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 4$. Vậy $a \in [3; 4]$.

Mặt khác từ giả thiết suy ra: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3}$.

Lúc đó: $P = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{6}{xy} = a^3 - \frac{9}{4}a^2 - \frac{8}{a} + \frac{16}{3}$, $a \in [3; 4]$.

Xét hàm số $f(a) = a^3 - \frac{9}{4}a^2 - \frac{8}{a} + \frac{16}{3}$, $a \in [3; 4]$.

Ta có: $f'(a) = 3a^2 - \frac{9}{2}a + \frac{8}{a^2} = 3a\left(a - \frac{3}{2}\right) + \frac{8}{a^2} > 0, \forall a \in [3; 4]$. Ta có: $f(3) = \frac{113}{12}$, $f(4) = \frac{94}{3}$.

Vậy GTLN của P bằng $\frac{94}{3}$ đạt được tại $\begin{cases} x = 1, y = 3 \\ x = 3, y = 1 \end{cases}$, GTNN của P bằng $\frac{113}{12}$ đạt được tại $x = y = \frac{3}{2}$.

Bài tập 15: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x \in (0; 1], y \in (0; 1], x + y = 4xy$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^2 + y^2 - 7xy$.

Bài giải:

Đặt $a = xy \Rightarrow x + y = 4a$. Suy ra x, y là nghiệm của phương trình: $g(t) = t^2 - 4at + a = 0$ (1)

$$\text{Vì (1) có các nghiệm thỏa mãn } 0 < t_1 \leq t_2 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ 1.g(0) < 0 \\ 1.g(1) \geq 0 \\ 0 < \frac{S}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3} \right].$$

Khi đó: $M = (x + y)^2 - 9xy = 16a^2 - 9a, a \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3} \right]$. Xét hàm $f(t) = 16a^2 - 9a, a \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3} \right]$.

Ta có: $f'(a) = 32a - 9 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{9}{32} \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3} \right)$. Ta có: $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4}, f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{11}{9}, f\left(\frac{9}{32}\right) = -\frac{81}{64}$.

Vậy GTLN của M bằng $-\frac{11}{9}$ đạt được khi $xy = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1, y = \frac{1}{3}$ hoặc $x = \frac{1}{3}, y = 1$, GTNN của M bằng $-\frac{81}{64}$ đạt được khi $xy = \frac{9}{32} \Rightarrow x = 2y = \frac{3}{4}$ hoặc $y = 2x = \frac{3}{4}$.

Bài tập 16: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + xy = 3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^4 + y^4 + 4xy - x^3y^3$.

Bài giải:

Đặt $t = xy$. Từ giả thiết suy ra: $3 = (x + y)^2 - xy \geq -xy \Leftrightarrow xy \geq -3$ và $3 = x^2 + y^2 + 3xy \geq 3xy \Leftrightarrow xy \leq 1$.

Vậy $t \in [-3; 1]$.

Ta có: $A = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + 4xy - x^3y^3 = (3 - xy)^2 - 2x^2y^2 + 4xy - x^3y^3$.

Khi đó P trở thành: $P = f(t) = -t^3 - t^2 - 2t + 9, t \in [-3; 1]$.

Ta có: $f'(t) = -3t^2 - 2t - 2 < 0, \forall t \in (-3; 1)$. Ta có: $f(-3) = 33, f(1) = 5$.

Vậy GTLN của P bằng 33 đạt được khi $x = -y = \pm\sqrt{3}$, GTNN của P bằng $\frac{2}{15}$ đạt được khi $x = y = \pm 1$.

Bài tập 17: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $(x^2 + y^2 + 1)^2 + 3x^2y^2 + 1 = 4x^2 + 5y^2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1}$

Bài giải:

Ta có: $(x^2 + y^2 + 1)^2 + 3x^2y^2 + 1 = 4x^2 + 5y^2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 2 = -x^2 - 3x^2y^2$ (1)

Đặt $t = x^2 + y^2$ vì $-x^2 - 3x^2y^2 \leq 0$ nên từ (1) ta có: $t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow t \in [1; 2]$.

Khi đó P trở thành: $P = f(t) = \frac{t^2 - t + 2}{t + 1}, t \in [1; 2]$.

Ta có: $f'(t) = \frac{(t-1)(t+3)}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in (1; 2)$. Do đó hàm số đồng biến trên $[1; 2]$.

Ta có: $f(1)=1, f(2)=\frac{4}{3}$. Vậy GTLN của P bằng $\frac{4}{3}$ đạt được khi $x=0; y=\pm\sqrt{2}$, GTNN của P bằng 1 đạt được khi $x=0; y=\pm 1$.

Bài tập 18: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(xy+1)(9\sqrt{xy}-2xy)=7(x^2+y^2)-2xy+2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + \sqrt{xy} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

Bài giải:

Đặt $t = \sqrt{xy}$. Ta có: $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 7(x^2 + y^2) - 2xy + 2 \geq 12xy + 2$.

Kết hợp giả thiết suy ra: $(t^2+1)(9t-2t^2) \geq 12t^2+2 \Leftrightarrow -2t^4+9t^3-14t^2+9t-2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(2-t)(2t-1) \geq 0 \Leftrightarrow t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

Khi đó P trở thành: $P = f(t) = t^2 + t + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}, t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Ta có: $f'(t) = \frac{(t^2-1)(2t^2+t+2)}{t^3} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Ta có: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{24}{7}, f(2) = \frac{24}{7}, f(1) = 4$.

Vậy GTLN của P bằng $\frac{24}{7}$ đạt được khi $x = y = 2$ hoặc $x = y = \frac{1}{2}$, GTNN của P bằng 4 đạt được khi $x = y = 1$.

Bài tập 19: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + \frac{64}{4-x-y}$

Bài giải:

Đặt $a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{y+1}$. Khi đó $a \geq 0, b \geq 0$ và $a + b = 4$.

Đặt $t = ab$, ta có $t \in [0; 4]$ và $a^2 + b^2 = 16 - 2t$.

Khi đó P trở thành:

$$P = (a^2-1)(b^2-1) + \frac{64}{6-(a^2+b^2)} = a^2b^2 - (a^2+b^2) + 1 + \frac{64}{6-(a^2+b^2)} = t^2 + 2t + \frac{32}{t-5} - 15, t \in [0; 4].$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t + \frac{32}{t-5} - 15, t \in [0; 4]$.

Ta có: $f'(t) = 2t + 2 - \frac{32}{(t-5)^2} = \frac{2(t-3)(t^2-6t-3)}{(t-5)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3 \in (0; 4)$.

Ta có: $f(0) = -\frac{107}{5}, f(4) = -23, f(3) = -16$.

Vậy GTLN của P bằng -16 đạt được khi $x=0; y=8$ hoặc $x=8, y=0$;

GTNN của P bằng -23 đạt được khi $x=y=3$.

Bài tập 20: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} + 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \frac{x}{2}(x-y) + \frac{y}{2}(y-x) + \frac{2(1+xy\sqrt{x+y})}{\sqrt{x+y}}$.

Bài giải:

Từ giả thiết suy ra $x \geq 2, y \geq -1$.

Ta có: $(2\sqrt{x-2} + 1\sqrt{y+1})^2 \leq (2^2 + 1^2)(x-2 + y+1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} \leq \sqrt{5(x+y-1)}$.

Nên từ $x + y = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} + 1 \Rightarrow x + y \leq \sqrt{5(x+y-1)} + 1$.

Đặt $t = x + y$, ta có: $t - 1 \leq \sqrt{5(t-1)} \Leftrightarrow t \in [1; 6]$.

Khi đó: $F = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{2}{\sqrt{x+y}} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{t}} = f(t), t \in [1; 6]$.

Ta có: $f'(t) = t - \frac{1}{t\sqrt{t}} \geq 0, \forall t \in (1; 6)$. Ta có: $f(1) = \frac{5}{2}, f(6) = 18 + \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Vậy GTLN của F bằng $18 + \frac{2}{\sqrt{6}}$ đạt được khi $x = 6, y = 0$, GTNN của F bằng $\frac{5}{2}$ đạt được khi $x = 2, y = -1$.

Bài tập 21: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$ Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$.

Bài giải:

Điều kiện $x \geq 1, y \geq -1$, suy ra $x + y \geq 0$. Sử dụng BĐT: $(au + bv)^2 \leq (a^2 + b^2)(u^2 + v^2)$ ta có:

$$(x+y)^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2})^2 = (1\sqrt{x-1} + \sqrt{2}\sqrt{y+1})^2 \leq 3(x+y)$$

Suy ra $x + y \leq 3$. Đặt $t = x + y \Rightarrow t \in [0; 3]$.

Khi đó: $P = (x+y)^2 + 2(x+y) + 8\sqrt{4-(x+y)} + 2 = t^2 + 2t + 8\sqrt{4-t} + 2, t \in [0; 3]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t + 8\sqrt{4-t} + 2, t \in [0; 3]$.

Ta có: $f'(t) = 2t + 2 - \frac{4}{\sqrt{4-t}}, f''(t) = 2 - \frac{4}{(\sqrt{4-t})^3} > 0, \forall t \in (0; 3)$.

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $[0; 3]$. Do đó: $f'(t) \geq f'(0) = 0, \forall t \in (0; 3)$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0; 3]$. Ta có: $f(0) = 18, f(3) = 25$.

Vậy GTLN của P bằng 25 đạt được khi $x = 2, y = 1$, GTNN của P bằng 18 đạt được khi $x = 1, y = -1$.

Bài tập 22: Cho x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}.$$

Bài giải:

Áp dụng BĐT: $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Lúc đó: $P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = f(x), x \in (0;1)$

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in (0;1)$.

Lập BBT ta có kết quả $\max_{(0;1)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$. Suy ra GTNN của P bằng $\sqrt{2}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Bài tập 23: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 2(x^3 + y^3) - 3xy$.

Bài giải:

Ta có: $x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy = 2 \Leftrightarrow xy = \frac{(x+y)^2 - 2}{2}$.

Mặt khác: $2 = x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow x+y \in [-2;2]$. Đặt $t = x+y, t \in [-2;2]$

Ta có: $M = 2(x^3 + y^3) - 3xy = 2(x+y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy = 2(x+y)(2 - xy) - 3xy$
 $= -(x+y)^3 - \frac{3}{2}(x+y)^2 + 6(x+y) + 3 = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3 = f(t), t \in [-2;2]$

Ta có: $f'(t) = -3t^2 - 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}$. Ta có: $f(-2) = -7, f(1) = \frac{13}{2}, f(2) = 1$.

Vậy GTLN của M bằng $\frac{13}{2}$ đạt được khi $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ hoặc $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, GTNN của M bằng -7 đạt được khi $x = y = -1$.

Bài tập 24: (Thi thử Chuyên Quốc Học Huế 2011) Cho a, b là các số thực thay đổi ($a > 0$). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (a-b)^2 + (\ln a - b)^2$

Bài giải:

Xét hàm số $f(b) = (b-a)^2 + (b - \ln a)^2, b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(b) = 2(b-a) + 2(b - \ln a) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{a + \ln a}{2}$.

Lập BBT của $f(b)$ trên $\mathbb{R}$ ta có: $f(b) \geq f\left(\frac{a + \ln a}{2}\right) = \frac{(a - \ln a)^2}{2}$.

Xét hàm số $g(a) = a - \ln a, a > 0 \Rightarrow g'(a) = 1 - \frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Tiếp tục lập BBT của $g(a)$ trên $(0; +\infty)$ ta có: $g(a) \geq g(1) = 1$.

Từ đó suy ra: $f(b) \geq \frac{[g(a)]^2}{2} \geq \frac{1}{2}$. Vậy GTNN của T bằng $\frac{1}{2}$ đạt được tại $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

Bài tập 25: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^3 + y^3 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$.

Bài giải:

Ta có: $x^3 + y^3 \leq 2 \Leftrightarrow y^3 \leq 2 - x^3 \Leftrightarrow y \leq \sqrt[3]{2 - x^3}$. Vì x, y dương nên $x^3 + y^3 \leq 2 \Rightarrow x \in (0; \sqrt[3]{2})$.

Do đó: $A = f(x) = x^2 + \sqrt[3]{(2 - x^3)^2}$, $x \in (0; \sqrt[3]{2})$.

Ta có: $f'(x) = 2x - \frac{2x^2}{\sqrt[3]{2 - x^3}} = \frac{2x(\sqrt[3]{2 - x^3} - x)}{\sqrt[3]{2 - x^3}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt[3]{2 - x^3} = x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \in (0; \sqrt[3]{2})$.

Lập BBT của $f(x)$ trên $(0; \sqrt[3]{2})$ ta có: $A \leq f(x) \leq 2$. Vậy GTLN của A bằng 2 đạt được khi $x = y = 1$.

Bài tập 26: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$.

Bài giải:

Cách 1: (Rút thế trực tiếp)

Ta có: $x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x > 0 \Rightarrow x \in (0; 1)$. Do đó: $A = f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + (1 - x)^2 + \frac{1}{(1 - x)^2}$, $x \in (0; 1)$.

Ta có: $f'(x) = 2x - 2(1 - x) - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{(1 - x)^3} = (2x - 1) + \frac{x^3 - (1 - x)^3}{x^3(1 - x)^3} = (2x - 1) + \frac{(2x - 1)(x^2 - x + 1)}{x^3(1 - x)^3} = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 1) \left[1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3(1 - x)^3} \right] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in (0; 1)$.

Lập BBT của $f(x)$ trên $(0; 1)$ ta có: $A = f(x) \geq \frac{17}{2}$.

Vậy GTLN của A bằng $\frac{17}{2}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Cách 2: (Đổi biến và vận dụng đạo hàm)

Ta có: $A = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2} \right) \geq 2xy \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2} \right) = 2xy + \frac{2}{xy}$.

Đặt $t = xy > 0$, và $1 = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow t \in \left(0; \frac{1}{4} \right]$.

Xét $f(t) = 2t + \frac{2}{t}$, $t \in \left(0; \frac{1}{4} \right] \Rightarrow f'(t) = 2 - \frac{2}{t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{4} \right]$.

Lập BBT của $f(t)$ trên $\left(0; \frac{1}{4} \right]$ ta có: $A \geq f(t) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{2}$.

Vậy GTLN của A bằng $\frac{17}{2}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Bài tập 27: (Dự bị B 2002) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$.

Bài giải:

Ta có: $x + y = \frac{5}{4} \Leftrightarrow y = \frac{5}{4} - x > 0 \Rightarrow x \in \left(0; \frac{5}{4}\right)$. Do đó: $S = f(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{5-4x}$, $x \in \left(0; \frac{5}{4}\right)$.

Ta có: $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{(5-4x)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = (5-4x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{5}{3} \notin \left(0; \frac{5}{4}\right) \end{cases}$.

Lập BBT của $f(x)$ trên $\left(0; \frac{5}{4}\right)$ ta có: $S = f(x) \geq f(1) = 5$. Vậy GTNN của S bằng 5 đạt được khi $x=4$, $y=1$.

Bài tập 28: Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$.

Bài giải:

Cách 1: (Rút thế trực tiếp)

Ta có: $x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x \geq 0 \Rightarrow x \in [0; 1]$. Do đó: $A = f(x) = \frac{x}{2-x} + \frac{1-x}{x+1}$, $x \in [0; 1]$.

Ta có: $f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} - \frac{2}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = (2-x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in (0; 1)$.

Ta có: $f(0) = f(1) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$.

Vậy GTLN của A bằng 1 đạt được khi $x=0$, $y=1$ hoặc $x=1$, $y=0$, GTNN của A bằng $\frac{2}{3}$ đạt được khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Cách 2: (Đổi biến và vận dụng đạo hàm)

Ta có: $A = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} = \frac{x^2 + x + y^2 + y}{x + y + xy + 1} = \frac{(x+y)^2 - 2xy + 1}{2 + xy} = \frac{2 - 2xy}{2 + xy}$.

Đặt $t = xy \geq 0$, và $1 = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$.

Xét $f(t) = \frac{2-2t}{2+t}$, $t \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f'(t) = -\frac{6}{(2+t)^2} < 0$, $\forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$

suy ra: $\max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f(0) = 1$, $\min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}$

Vậy GTLN của A bằng 1 đạt được khi $x=0$, $y=1$ hoặc $x=1$, $y=0$, GTNN của A bằng $\frac{2}{3}$ đạt được khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Kỹ thuật 3:

Đổi biến đẳng cấp

Bài tập 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2xy + y^2}{3x^2 + 2xy + y^2}$, với $x^2 + y^2 \neq 0$.

Bài giải:

+ Nếu $y = 0$ thì $x \neq 0$ và $A = 0$.

+ Nếu $y \neq 0$, ta chia cả tử và mẫu cho y^2 . Đặt $t = \frac{x}{y}$. Khi đó $t \in \mathbb{R}$ và $A = \frac{2t+1}{3t^2+2t+1}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t+1}{3t^2+2t+1}$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{-6t(t+1)}{(3t^2+2t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-1 \end{cases} \text{ và } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0.$$

Lập BBT ta dễ dàng suy ra: GTLN của A bằng 1, đạt được khi $x = 0, y \in \mathbb{R}^*$; GTNN của A bằng $-\frac{1}{2}$, đạt khi $x = -y \neq 0$.

Bài tập 2: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $4x^2 + 2xy + y^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + 2xy - y^2$.

Bài giải:

$$\text{Ta có: } \frac{P}{3} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{4x^2 + 2xy + y^2}.$$

+ Nếu $y = 0$ thì $x \neq 0$ và $P = \frac{3}{4}$.

+ Nếu $y \neq 0$, ta chia cả tử và mẫu cho y^2 . Đặt $t = \frac{x}{y}$. Khi đó $t \in \mathbb{R}$ và $\frac{P}{3} = \frac{t^2 + 2t - 1}{4t^2 + 2t + 1}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{4t^2 + 2t + 1}$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{-6t^2 + 10t + 4}{(4t^2 + 2t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-\frac{1}{3} \end{cases} \text{ và } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \frac{1}{4}.$$

Lập BBT ta dễ dàng suy ra: GTLN của P bằng 1, đạt được khi $x = 2y \in \mathbb{R}^*$; GTNN của P bằng -6 , đạt khi $3x = -y \neq 0$.

Bài tập 3: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + xy + y^2 \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 - xy - 3y^2$.

Bài giải: Đặt $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$

+ Nếu $y = 0$ thì từ giả thiết ta có: $0 \leq x^2 \leq 3$. Suy ra $P = x^2 \in [0; 3]$.

+ Nếu $y \neq 0$, ta có $0 < f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \leq 3$. Khi đó: $P = f(x, y) \cdot \frac{x^2 - xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2}$.

Đặt $x = ty$, ta có $P = f(x, y) \cdot \frac{t^2 - t - 3}{t^2 + t + 1}$

Xét hàm số $g(t) = \frac{t^2 - t - 3}{t^2 + t + 1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(t) = \frac{2(t^2 + 4t + 1)}{(t^2 + t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 + \sqrt{3} \\ t = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = 1$.

Lập BBT ta dễ dàng suy ra: $\frac{-3 - 4\sqrt{3}}{3} \leq g(t) \leq \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{3}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vì $0 < f(x, y) \leq 3 \Rightarrow -3 - 4\sqrt{3} \leq P = f(x, y) \cdot g(t) \leq -3 + 4\sqrt{3}$

Suy ra: GTLN của P bằng $-3 + 4\sqrt{3}$, đạt được khi $\begin{cases} x = (-2 + \sqrt{3})y \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$; GTNN của P bằng $-3 - 4\sqrt{3}$,

đạt khi $\begin{cases} x = (-2 - \sqrt{3})y \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$.

Bài tập 4: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{xy^2}{\left(x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\right)^3}$, với $x > 0, y > 0$.

Bài giải:

Do $y \neq 0$, ta chia cả tử và mẫu cho y^3 . Đặt $t = \frac{x}{y}$. Khi đó $t > 0$ và $P = \frac{t}{\left(t + \sqrt{t^2 + 4}\right)^3}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{\left(t + \sqrt{t^2 + 4}\right)^3}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 4} - 3t}{\sqrt{t^2 + 4} \left(t + \sqrt{t^2 + 4}\right)^3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 4} = 3t \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \in (0; +\infty)$

Lập BBT ta dễ dàng suy ra: GTLN của P bằng $\frac{1}{32}$, đạt được khi $y = \sqrt{2}x > 0$.

Kỹ thuật 4: **Đánh giá kết hợp đối biến**

Trong nhiều bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức F mà các biến bị ràng buộc nhau bởi điều kiện dưới dạng BĐT, hoặc bản thân biểu thức F không có tính đối xứng, đẳng cấp; hoặc biểu thức F và điều kiện của bài toán chứa nhiều đại lượng phức tạp... thì chúng ta cần xử lý biểu thức F thông qua một số đánh giá.

Bài tập 1: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = 6xy$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3x+1}{9y^2+1} + \frac{3y+1}{9x^2+1} + (3x+y)(3y+x)$.

Bài giải:

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{3x+1}{9y^2+1} + \frac{(3x+1)(9y^2+1)}{4} \geq 3x+1 \text{ và } \frac{3y+1}{9x^2+1} + \frac{(3y+1)(9x^2+1)}{4} \geq 3y+1;$$

Cộng hai BĐT trên ta được:

$$\frac{3x+1}{9y^2+1} + \frac{3y+1}{9x^2+1} + \frac{(3x+1)(9y^2+1)}{4} + \frac{(3y+1)(9x^2+1)}{4} \geq 3(x+y) + 2.$$

$$\text{Suy ra: } P \geq \frac{(3x+1)(9y^2+1)}{4} - \frac{(3y+1)(9x^2+1)}{4} + 3(x+y) + 2 + (3x+y)(3y+x)$$

$$= -\frac{27}{4}xy(x+y) + \frac{9}{4}(x+y) + 10xy + \frac{3}{4}(x^2+y^2) + \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{27}{4}xy \cdot 6xy + \frac{9}{4} \cdot 6xy + 10xy + \frac{3}{4}[(x+y)^2 - 2xy] + \frac{3}{2} = -\frac{27}{2}(xy)^2 + 22xy + \frac{3}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = xy. \text{ Từ } x+y = 6xy \Rightarrow 6 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \Rightarrow t = xy \geq \frac{1}{9}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = -\frac{27}{2}t^2 + 22t + \frac{3}{2}, t \geq \frac{1}{9}. \text{ Ta có: } f'(t) = -27t + 22 > 0, \forall t \geq \frac{1}{9}.$$

$$\text{Suy ra } \min_{\left[\frac{1}{9}; +\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{34}{9}. \text{ Suy ra: } P \geq \frac{34}{9}, \text{ dấu "=" xảy ra khi } x = y = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy GTNN của } P \text{ là } \frac{34}{9}, \text{ dấu "=" xảy ra khi } x = y = \frac{1}{3}.$$

Bài tập 2: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2} = 2$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+y)^3 - 12(x-1)(y-1) + \sqrt{xy}$

Bài giải:

$$\text{Áp dụng BĐT: } ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}, \forall a, b, \text{ ta có: } x\sqrt{2-y^2} \leq \frac{x^2+2-y^2}{2} \text{ và } y\sqrt{2-x^2} \leq \frac{y^2+2-x^2}{2}.$$

$$\text{Cộng hai BĐT trên ta suy ra: } 2 = x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2} \leq 2.$$

$$\text{Do đó, dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2-y^2} \\ y = \sqrt{2-x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } t = x+y. \text{ Khi đó: } t \leq \sqrt{2(x^2+y^2)} = 2.$$

$$\text{Ta có: } P = (x+y)^3 + 12(x+y) - 12xy - 12 + \sqrt{xy}$$

$$\leq (x+y)^3 + 12(x+y) - 12 \frac{(x+y)^2 - (x^2+y^2)}{2} - 12 + \frac{x+y}{2} \leq t^3 + 12t - 6t^2 + 1 = t^3 - 6t^2 + 12t + 1$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^3 - 6t^2 + 12t + 1, t \in [0; 2]. \text{ Ta có: } f'(t) = 3t^2 - 12t + 12 > 0, \forall t \in (0; 2).$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; 2]$. Do đó: $\max_{[0; 2]} f(t) = f(2) = 9$.

Vậy GTLN của P bằng 9, dấu "=" xảy ra khi $x = y = 1$.

Nhận xét: Với cách giải trên, chúng ta không tìm được GTNN của biểu thức P . Để tìm cả GTLN và GTNN của P , ta tiến hành như sau:

Tương tự như trên ta có: $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$. Đặt $t = x + y$. Khi đó: $t \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = 2$.

Mặt khác: $t^2 = (x + y)^2 \geq x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow t \geq \sqrt{2} \Rightarrow t \in [\sqrt{2}; 2]$.

Ta có: $xy = \frac{(x + y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = \frac{t^2}{2} - 1$.

Suy ra: $P = (x + y)^3 + 12(x + y) - 12xy - 12 + \sqrt{xy}$
 $= (x + y)^3 + 12(x + y) - 12\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) - 12 + \sqrt{\frac{t^2}{2} - 1} = t^3 - 6t^2 + 12t + \sqrt{\frac{t^2}{2} - 1}, t \in [\sqrt{2}; 2]$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 6t^2 + 12t + \sqrt{\frac{t^2}{2} - 1}, t \in [\sqrt{2}; 2]$.

Ta có: $f'(t) = 3t^2 - 12t + 12 + \frac{t}{\sqrt{\frac{t^2}{2} - 1}} > 0, \forall t \in (\sqrt{2}; 2)$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[\sqrt{2}; 2]$.

Do đó: $\max_{[0; 2]} f(t) = f(2) = 9$ và $\min_{[0; 2]} f(t) = f(\sqrt{2}) = 14\sqrt{2} - 12$.

Bài tập 3: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $3xy + 3 = x^4 + y^4 + \frac{2}{xy}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2y^2 + \frac{16}{x^2 + y^2 + 2}$.

Bài giải:

Đặt $t = xy > 0$. Từ giả thiết ta có: $3xy + 3 = x^4 + y^4 + \frac{2}{xy} \geq 2x^2y^2 + \frac{2}{xy}$

hay $3t + 3 \geq 2t^2 + \frac{2}{t} \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, do $t > 0$.

Ta lại có: $P \leq x^2y^2 + \frac{16}{2xy + 2} = t^2 + \frac{8}{t + 1}, t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. (1)

Xét hàm số: $f(t) = t^2 + \frac{8}{t + 1}, t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Ta có: $f'(t) = 2t - \frac{8}{(t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Ta có: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{67}{12}; f(2) = \frac{20}{3}; f(1) = 5$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $P \leq \frac{20}{3}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ x = y > 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = \sqrt{2}$.

Vậy GTLN của P bằng $\frac{20}{3}$, đạt được khi $x = y = \sqrt{2}$.

Bài tập 4: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^4 + y^4 + \frac{1}{xy} = xy + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+y^2} - \frac{3}{1+2xy}$.

Bài giải:

Đặt $t = xy > 0$. Từ giả thiết ta có: $xy + 2 = x^4 + y^4 + \frac{1}{xy} \geq 2x^2y^2 + \frac{1}{xy}$

hay $t + 2 \geq 2t^2 + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - 2t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, do $t > 0$.

Với $x > 0, y > 0$ và $xy \leq 1$, ta có: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$ (1)

Thật vậy: (1) $\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \leq 0$, đúng do $x > 0, y > 0$ và $xy \leq 1$.

Khi đó: $P \leq \frac{4}{1+xy} - \frac{3}{1+2xy} = \frac{4}{1+t} - \frac{3}{1+2t}$, $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. (2)

Xét hàm số: $f(t) = \frac{4}{1+t} - \frac{3}{1+2t}$, $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có: $f'(t) = -\frac{4}{(1+t)^2} + \frac{6}{(1+2t)^2} = -2 \cdot \frac{5t^2 + 2t - 1}{(1+t)^2(1+2t)^2} < 0$, $\forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Do đó: $\max_{t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$. (3)

Từ (1) và (2) suy ra: $P \leq \frac{7}{6}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x = y > 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy GTLN của P bằng $\frac{7}{6}$, đạt được khi $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 5: Cho a, b là các số thực thuộc $(0;1)$, thỏa mãn điều kiện:

$$(a^3 + b^3)(a + b) - ab(a-1)(b-1) = 0.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + 5ab - (a+b)^2$.

Bài giải:

Ta có: $(a^3 + b^3)(a + b) - ab(a - 1)(b - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{(a^3 + b^3)(a + b)}{ab} = (1 - a)(1 - b)$ (1)

Vì $\frac{(a^3 + b^3)(a + b)}{ab} = \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right)(a + b) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ab} = 4ab$

và $0 < (1 - a)(1 - b) = 1 - (a + b) + ab \leq 1 - 2\sqrt{ab} + ab$ nên từ (1) suy ra: $4ab \leq 1 - 2\sqrt{ab} + ab$ (2)

Đặt $t = ab$, khi đó (2) trở thành: $4t \leq 1 - 2\sqrt{t} + t \Leftrightarrow 3t + 2\sqrt{t} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left[0; \frac{1}{9}\right]$.

Ta có với $a > 0, b > 0$, ta có: $\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} \leq \frac{2}{1 + ab} \Leftrightarrow \frac{(a - b)^2(ab - 1)}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + ab)} \leq 0$, đúng do $a, b \in (0; 1)$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có: $\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} \leq \sqrt{2\left(\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2}\right)} \leq \sqrt{2 \cdot \frac{2}{1 + ab}} = \frac{2}{\sqrt{1 + ab}}$

và $5ab - (a + b)^2 = ab - (a - b)^2 \leq ab$ nên suy ra: $P \leq \frac{2}{\sqrt{1 + ab}} + ab = \frac{2}{\sqrt{1 + t}} + t, t \in \left[0; \frac{1}{9}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + t}} + t, t \in \left[0; \frac{1}{9}\right]$. Ta có: $f'(t) = -\frac{1}{(1 + t)\sqrt{1 + t}} + 1 > 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{9}\right]$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[0; \frac{1}{9}\right]$. Do đó: $\max_{\left[0; \frac{1}{9}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{1}{9}$.

Suy ra: $P \leq \frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{1}{9}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} ab = \frac{1}{9} \\ a = b > 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1}{3}$.

Vậy GTLN của P bằng $\frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{1}{9}$, đạt được khi $a = b = \frac{1}{3}$.

Bài tập 6: Cho a, b là các số thực dương phân biệt, thỏa mãn điều kiện: $ab \leq 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2}{a^4} + \frac{2}{b^4} + \frac{3}{(a - b)^2}$.

Bài giải:

Từ giả thiết $0 < ab \leq 4 \Rightarrow P \geq \frac{a^2 b^2}{16} \left(\frac{2}{a^4} + \frac{2}{b^4}\right) + \frac{ab}{4} \cdot \frac{3}{(a - b)^2} = \frac{1}{8} \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2}$.

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Rightarrow t \geq 2$ và $P \geq \frac{1}{8}(t^2 - 2) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{t - 2} = \frac{1}{8}t^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{t - 2} - \frac{1}{4}, t \in (2; +\infty)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{8}t^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{t - 2} - \frac{1}{4}, t \in (2; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{4}t - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(t-2)^2} = 0 \Leftrightarrow t(t-2)^2 = 3 \Leftrightarrow t = 3 \in (2; +\infty)$.

Vì $\lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ nên $\min_{(2; +\infty)} f(t) = f(3) = \frac{13}{8}$.

Suy ra: $P \geq \frac{13}{8}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a + b = 2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{5} - 1, b = \sqrt{5} + 1 \\ a = \sqrt{5} + 1, b = \sqrt{5} - 1 \end{cases}$.

Vậy GTNN của P bằng $\frac{13}{8}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1: Cho a, b không âm thỏa mãn điều kiện: $a + b = 1$. Chứng minh $ab^2 \leq \frac{4}{27}$.

Bài tập 2: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = 11$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = x + xy^2$.

Bài tập 3: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = x + y$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $M = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$.

Bài tập 4: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $x \geq 1, y \geq 1, x + y + xy = 8$. Tìm GTLN, GTNN của biểu

Bài tập 5: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $x \geq 1, y \geq 1, 3(x + y) = 4xy$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = x^3 + y^3 - 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$.

Bài tập 6: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $x + y - 1 = \sqrt{2x - 4} + \sqrt{y + 1}$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = (x + y)^2 - \sqrt{9 - x - y} + \frac{1}{\sqrt{x + y}}$.

Bài tập 7: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $6(a^2 + b^2) + 20ab = 5(a + b)(ab + 3)$.

Tìm GTNN của biểu thức $P = 9\left(\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4}\right) - 16\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) + 25\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$.

Bài tập 8: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $(a^2 + 2b^2)^2 + 3a^2b^2 = 2(a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2)$.

Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{a^3 + b^3}{b^3} + \frac{8b^3}{a^3} + \frac{\left[(a + b)^2 + 2a^2 + 5b^2\right]\left[(a - b)^2 + 2a^2 + 5b^2\right]}{ab(a^2 + 2b^2)}$.

Bài tập 9: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2 - xy + y^2 \leq 3$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = x^2 + xy - 2y^2$.

Bài tập 10: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $xy \geq 0, x + y > 0$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = \frac{x^2y - 4y^3}{x^3 + 8y^3}$.

Bài tập 11: Cho x, y là các số thực lớn hơn 1. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{x^3 + y^3 - x^2 - y^2}{(x-1)(y-1)} + 2(x^2 + y^2) - 16\sqrt{xy}.$$

Bài tập 12: Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện: $a^2 + 2b = 12$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{4}{a^4} + \frac{4}{b^4} + \frac{5}{8(a-b)^2}.$$

GỢI Ý:

Bài tập 1: Cho a, b không âm thỏa mãn điều kiện: $a + b = 1$. Chứng minh $ab^2 \leq \frac{4}{27}$.

Gợi ý:

Rút $a = 1 - b \Rightarrow b \in [0; 1]$. Khi đó BĐT trở thành: $(1-b)b^2 \leq \frac{4}{27} \Leftrightarrow b^3 - b^2 + \frac{4}{27} \geq 0$.

Khảo sát hàm $f(b) = b^3 - b^2 + \frac{4}{27}, b \in [0; 1]$, dễ thấy được kết quả cần chứng minh.

Bài tập 2: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = 11$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = x + xy^2$.

Gợi ý:

Ta có: $x^2 + y^2 = 11 \Leftrightarrow y^2 = 11 - x^2 \Rightarrow x \in [-\sqrt{11}; \sqrt{11}]$.

Lúc đó: $P = x + x(11 - x^2) = -x^3 + 12x, x \in [-\sqrt{11}; \sqrt{11}]$.

Khảo sát hàm $f(t) = -t^3 + 12t, t \in [-\sqrt{11}; \sqrt{11}]$.

Ta có yêu cầu bài toán: $\min P = -16$ khi $x = -2; y = \pm\sqrt{7}$ và $\max P = 16$ khi $x = 2; y = \pm\sqrt{7}$.

Bài tập 3: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = x + y$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

$$M = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2.$$

Gợi ý:

Đặt $t = x + y \Rightarrow t^2 = (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2t \Rightarrow t^2 - 2t \leq 0 \Leftrightarrow t \in [0; 2]$.

Ta có: $(x + y)^2 - 2xy = x + y \Rightarrow xy = \frac{t^2 - t}{2}$

Lúc đó: $M = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) + xy(x + y) = t\left(t - \frac{t^2 - t}{2}\right) + \frac{t^2 - t}{2} \cdot t = t^2$.

Khảo sát hàm $f(t) = t^2, t \in [0; 2]$.

Ta có yêu cầu bài toán: $\min M = 0$ khi $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = x + y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$ và $\max M = 4$ khi

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = x + y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Bài tập 4: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $x \geq 1, y \geq 1, x + y + xy = 8$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $M = x^2 + y^2 + x^2y^2$.

Gợi ý:

$$\text{Đặt } t = x + y \Rightarrow 8 = x + y + xy \leq x + y + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{t^2}{4} + t - 8 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 4 \text{ do } t > 0.$$

$$\text{Mặt khác vì } x \geq 1, y \geq 1 \Rightarrow (x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy - (x+y) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x+y \leq \frac{9}{2}. \text{ Suy ra } t \in \left[4; \frac{9}{2}\right]$$

$$\text{Lúc đó: } M = (x+y)^2 - 2xy + x^2y^2 = t^2 - 2(8-t) + (8-t)^2 = 2t^2 - 14t + 48.$$

$$\text{Khảo sát hàm } f(t) = 2t^2 - 14t + 48, t \in \left[4; \frac{9}{2}\right].$$

$$\text{Ta có yêu cầu bài toán: } \min M = 24 \text{ khi } \begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2 \text{ và } \max M = \frac{51}{2} \text{ khi}$$

$$\begin{cases} x+y=\frac{9}{2} \\ xy=\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; y=\frac{7}{2} \\ x=\frac{7}{2}; y=1 \end{cases}.$$

Bài tập 5: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $x \geq 1, y \geq 1, 3(x+y) = 4xy$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = x^3 + y^3 - 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$.

Gợi ý:

$$\text{Đặt } t = x + y \Rightarrow xy = \frac{3t}{4}, t > 0 \text{ và từ giả thiết ta có: } 3(x+y) = 4xy \leq (x+y)^2 \Rightarrow t \geq 3$$

$$\text{Mặt khác vì } x \geq 1, y \geq 1 \Rightarrow (x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy - (x+y) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3t}{4} - t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 4. \text{ Suy ra}$$

$$t \in [3; 4]. \text{ Mặt khác từ giả thiết: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Lúc đó: } P = (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 + \frac{6}{xy} = t^3 - \frac{9}{4}t^2 + \frac{8}{t} - \frac{16}{3}, t \in [3; 4].$$

$$\text{Khảo sát hàm } f(t) = t^3 - \frac{9}{4}t^2 + \frac{8}{t} - \frac{16}{3}, t \in [3; 4].$$

$$\text{Ta có yêu cầu bài toán: } \min M = \frac{65}{12} \text{ khi } x=y=\frac{3}{2} \text{ và } \max M = \frac{74}{3} \text{ khi } \begin{cases} x=1; y=3 \\ x=3; y=1 \end{cases}.$$

Bài tập 6: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $x + y - 1 = \sqrt{2x-4} + \sqrt{y+1}$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = (x+y)^2 - \sqrt{9-x-y} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}$.

Gợi ý:

Điều kiện $x \geq 2, y \geq -1, 0 < x + y \leq 9$.

Ta có: $(x + y - 1)^2 = (\sqrt{2x - 4} + \sqrt{y + 1})^2 = (\sqrt{2}\sqrt{x - 2} + \sqrt{y + 1})^2 \leq 3(x + y - 1)$.

Suy ra: $0 \leq x + y - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x + y \leq 4$. Đặt $t = x + y \in [1; 4]$

Lúc đó: $P = t^2 - \sqrt{9 - t} + \frac{1}{\sqrt{t}}, t \in [1; 4]$.

Khảo sát hàm $f(t) = t^2 - \sqrt{9 - t} + \frac{1}{\sqrt{t}}, t \in [1; 4]$.

Ta có yêu cầu bài toán: $\min M = 2 - 2\sqrt{2}$ khi $x = 2; y = -1$ và $\max M = \frac{33 - 2\sqrt{5}}{2}$ khi $x = 4; y = 0$.

Bài tập 7: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$6(a^2 + b^2) + 20ab = 5(a + b)(ab + 3).$$

Tìm GTNN của biểu thức $P = 9\left(\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4}\right) - 16\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) + 25\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$.

Gợi ý:

Ta có: $6(a^2 + b^2) + 20ab = 5(a + b)(ab + 3) \Leftrightarrow 6\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 20 = 5(a + b) + 15 \cdot \frac{a + b}{ab}$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có: $5(a + b) + 15 \cdot \frac{a + b}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{75(a + b)^2}{ab}} = 10\sqrt{3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)}$

Suy ra: $6\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 20 \geq 10\sqrt{3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)}$. Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, ta có: $6t + 20 \geq 10\sqrt{3(t + 2)} \Leftrightarrow t \geq \frac{10}{3}$

Lúc đó: $P = 9(t^2 - 2)^2 - 16t(t^2 - 3) + 25(t^2 - 2), t \geq \frac{10}{3}$.

Xét hàm số: $f(t) = 9(t^2 - 2)^2 - 16t(t^2 - 3) + 25(t^2 - 2), t \geq \frac{10}{3}$.

Ta có yêu cầu bài toán: $\min M = \frac{15156}{27}$ khi $a = 1; b = 3$ hoặc $a = 3; b = 1$.

Bài tập 8: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$(a^2 + 2b^2)^2 + 3a^2b^2 = 2(a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2).$$

Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{a^3 + b^3}{b^3} + \frac{8b^3}{a^3} + \frac{\left[(a + b)^2 + 2a^2 + 5b^2\right]\left[(a - b)^2 + 2a^2 + 5b^2\right]}{ab(a^2 + 2b^2)}$.

Gợi ý:

Ta có: $(a^2 + 2b^2)^2 + 3a^2b^2 = 2(a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2) \geq 4ab(a^2 + 2b^2)$

Suy ra: $\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right)^2 + 3 \geq 4\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 3$

Lúc đó: $P = \left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right)^3 - 6\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) + 9\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) - \frac{4}{\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}} + 1$
 $= \left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) - \frac{4}{\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}} + 1 = t^3 + 3t - \frac{4}{t} + 1, t \geq 3.$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 3t - \frac{4}{t} + 1, t \geq 3.$

Ta có yêu cầu bài toán: $\min M = \frac{97}{3}$ khi $a = b = 1.$

Bài tập 9: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2 - xy + y^2 \leq 3$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = x^2 + xy - 2y^2$.

Gợi ý:

Đặt $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$.

+ Nếu $y = 0$ thì từ giả thiết ta có: $0 \leq x^2 \leq 3$, suy ra: $P = x^2 \in [0; 3]$.

+ Nếu $y \neq 0$, ta có: $0 < f(x, y) = x^2 - xy + y^2 \leq 3$. Khi đó: $P = f(x, y) \cdot \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 - xy + y^2}$.

Đặt $x = ty$, ta có: $P = f(x, y) \cdot \frac{t^2 + t - 2}{t^2 - t + 1}, t \in \mathbb{R}.$

Xét hàm số $g(t) = \frac{t^2 + t - 2}{t^2 - t + 1}, t \in \mathbb{R}$. Khảo sát $g(t)$ trên $\mathbb{R}$, ta có kết quả sau:

$$\frac{-1 - 2\sqrt{7}}{3} \leq g(t) \leq \frac{-1 + 2\sqrt{7}}{3}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vì $0 < f(x, y) \leq 3 \Rightarrow -1 - 2\sqrt{7} \leq P = f(x, y) \cdot g(t) \leq -1 + 2\sqrt{7}.$

Suy ra, GTNN của P là $-1 - 2\sqrt{7}$, đạt khi $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$.

Bài tập 10: Cho x, y thỏa mãn điều kiện: $xy \geq 0, x + y > 0$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

$$P = \frac{x^2y - 4y^3}{x^3 + 8y^3}.$$

Gợi ý: Từ giả thiết của bài toán ta có: $y \geq 0, x \geq 0$.

+ Với $y = 0$, ta có $P = 0$.

+ Với $y > 0$, ta có: $P = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4}{\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 8}$. Đặt $t = \frac{x}{y} \geq 0$, xét hàm $f(t) = \frac{t^2 - 4}{t^3 + 8}, t \geq 0$.

Kết quả bài toán: $\min P = f(0) = -\frac{1}{2}$ và $\max P = f(4) = \frac{1}{6}$.

Bài tập 11: Cho x, y là các số thực lớn hơn 1. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{x^3 + y^3 - x^2 - y^2}{(x-1)(y-1)} + 2(x^2 + y^2) - 16\sqrt{xy}.$$

Gợi ý:

Đặt $t = x + y > 2 \Rightarrow xy \leq \frac{t^2}{4}, 2(x^2 + y^2) \geq t^2$.

Khi đó: $P = \frac{t^3 - t^2 - xy(3t-2)}{xy+1-t} + 2(x^2 + y^2) - 16\sqrt{xy} \geq \frac{t^3 - t^2 - \frac{t^2}{4}(3t-2)}{\frac{t^2}{4} + 1 - t} + t^2 - 8t$

$$= \frac{t^2}{t-2} + t^2 - 8, t > 2.$$

Khảo sát $f(t) = \frac{t^2}{t-2} + t^2 - 8, t > 2$, ta có kết quả: GTNN của P bằng -8 đạt được khi $x = y = 2$.

Bài tập 12: Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện: $a^2 + 2b = 12$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{4}{a^4} + \frac{4}{b^4} + \frac{5}{8(a-b)^2}.$$

Gợi ý:

Từ giả thiết và áp dụng BĐT Cauchy, ta có: $16 = (a^2 + 4) + 2b \geq 4a + 2b \geq 2\sqrt{4a \cdot 2b} \Rightarrow ab \in (0; 8]$

Lúc đó: $P = \frac{4}{a^4} + \frac{4}{b^4} + \frac{5}{8(a-b)^2} \geq \frac{a^2 b^2}{64} \frac{4}{a^4} + \frac{4}{b^4} + \frac{ab}{8} \cdot \frac{5}{8(a-b)^2} = \frac{1}{16} \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2}$

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ và $P \geq \frac{1}{16}(t^2 - 2) + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{t-2} = \frac{1}{16}t^2 + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{t-2} - \frac{1}{8}, t > 2$.

Khảo sát $f(t) = \frac{1}{16}t^2 + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{t-2} - \frac{1}{8}, t > 2$, ta có kết quả: GTNN của P bằng $\frac{27}{64}$ đạt được khi $a = 2; b = 4$.