

SBAI 3.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT.

1. **Định nghĩa:** Cho hàm số xác định trên D

➤ Số M gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $y = f(x)$ trên D

$$\text{nếu } \begin{cases} f(x) \leq M \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } M = \max_{x \in D} f(x).$$

➤ Số m gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y = f(x)$ trên D

$$\text{nếu } \begin{cases} f(x) \geq m \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } m = \min_{x \in D} f(x).$$

Ví dụ 1. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

1). $y = x^2 + 2x + 3.$

2). $y = -4x^2 + 4x - 5.$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. **Phương pháp chung tìm GTLN, GTNN của hàm số.**

Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên D ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định và tính đạo hàm y' .

Bước 2. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc không tồn tại $y' = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ \dots \\ x = x_n \end{cases}$$

Bước 3. Lập bảng biến thiên và xét dấu.

Từ bảng biến thiên ta suy ra GTLN, GTNN.

Ví dụ 2. Tìm Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ trên khoảng $(0;3)$ là :

A. 4.

B. 2.

C. 0.

D. -2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Chú ý:

① Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn tăng hoặc luôn giảm trên $[a; b]$ thì

✦ $\max_{[a;b]} f(x) = \max\{f(a), f(b)\};$

✦ $\min_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a), f(b)\}.$

Ví dụ 3. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 7.

Giá trị của tham số m bằng

A. $m = \pm 3.$

B. $m = \pm 1.$

C. $m = \pm\sqrt{7}.$

D. $m = \pm\sqrt{2}.$

Lời giải

Ví dụ 4. Gọi m là giá trị để hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0; 3]$ bằng -2 .

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $3 < m < 5.$

B. $m^2 \neq 16.$

C. $|m| < 5.$

D. $|m| = 5.$

Lời giải

② Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì luôn có GTLN, GTNN trên đoạn đó và để tìm GTLN, GTNN ta làm như sau.

☞ **Bước 1:** Tính y' và tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ mà tại đó y' triệt tiêu hoặc hàm số không có đạo hàm.

☞ **Bước 2:** Tính các giá trị $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b).$

Khi đó $\max_{x \in [a;b]} f(x) = \max\{f(x_1), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}$

$\min_{x \in [a;b]} f(x) = \min\{f(x_1), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$

Ví dụ 5. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $\max_{[0;2]} y = 1.$

B. $\max_{[0;2]} y = 0.$

C. $\max_{[0;2]} y = -2.$

D. $\max_{[0;2]} y = -\frac{50}{27}.$

Lời giải

③ Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T thì để tìm GTLN, GTNN của nó trên D ta chỉ cần tìm GTLN, GTNN trên một đoạn nằm trong D có độ dài bằng T .

Ví dụ 6. (Sở GD & ĐT Bắc Ninh 2020) Gọi M, m lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

A. $M = 2, m = \frac{1}{2^{1008}}$.

B. $M = 1, m = \frac{1}{2^{1009}}$.

C. $M = 1, m = 0$.

D. $M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}$.

Lời giải

④ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D . Khi đặt ẩn phụ $t = u(x)$, ta tìm được $t \in E$ với $\forall x \in D$, ta có $y = g(t)$ thì Max, Min của hàm f trên D chính là Max, Min của hàm g trên E .

Ví dụ 7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$.

A. $\min y = 3$.

B. $\min y = \frac{11}{4}$.

C. $\min y = -3$.

D. $\min y = \frac{11}{2}$.

Lời giải

⑤ Khi bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất mà không nói trên tập nào thì ta hiểu là tìm GTLN, GTNN trên tập xác định của hàm số.

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$.

- A. $M = 1$. B. $M = 3$. C. $M = 5$. D. $M = 2$.

Lời giải

Ví dụ 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \sqrt{10 - x^2}$ bằng.

- A. $\sqrt{10}$. B. $-3\sqrt{10}$. C. -10 . D. $3\sqrt{10}$.

Lời giải

⑥ Ngoài phương pháp khảo sát để tìm Max, Min ta còn dùng phương pháp miền giá trị hay Bất đẳng thức để tìm Max, Min.

Ví dụ 10. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2 \sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2 \cos x + 3}$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- A. $\frac{11}{4}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

[illegible]

Bài tập 3. Tìm GTLN và GTNN của hàm số sau $y = \frac{\sqrt{x+1} + 2\sqrt{3-x} + 2}{2\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} + 1}$ trên $[-1; 3]$.

Lời giải.

Bài tập 4. Cho hai số thực x, y thoả mãn: $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^3 + 2y^2 + 3x^2 + 4xy - 5x$.

Lời giải.

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2; 4]$ là:

A. $\min_{[2; 4]} y = 3$.

B. $\min_{[2; 4]} y = 7$.

C. $\min_{[2; 4]} y = 5$.

D. $\min_{[2; 4]} y = 0$.

Lời giải

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ trên đoạn $[-1;1]$.

A. $M = 0$.

B. $M = 2$.

C. $M = 4$.

D. $M = -2$.

Lời giải

Câu 3. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 50.

B. 5.

C. 1.

D. 122.

Lời giải

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2;3]$.

A. $m = \frac{51}{4}$.

B. $m = \frac{49}{4}$.

C. $m = 13$.

D. $m = \frac{51}{2}$.

Lời giải

Câu 5. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ trên $[0;3]$ là

A. 2.

B. -61.

C. 3.

D. 61.

Lời giải

Câu 6. Xét hàm số $y = \frac{x-1}{2x+1}$ trên $[0;1]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max_{[0;1]} y = 0.$

B. $\min_{[0;1]} y = -\frac{1}{2}.$

C. $\min_{[0;1]} y = \frac{1}{2}.$

D. $\max_{[0;1]} y = 1.$

Lời giải

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 1}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ là:

A. $-3.$

B. $-\frac{5}{3}.$

C. $-\frac{5}{2}.$

D. $1.$

Lời giải

Câu 8. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{8}{1+2x} + x$ trên đoạn $[1;2]$ lần lượt là

A. $\frac{11}{3}; \frac{7}{2}.$

B. $\frac{11}{3}; \frac{18}{5}.$

C. $\frac{13}{3}; \frac{7}{2}.$

D. $\frac{18}{5}; \frac{3}{2}.$

Lời giải

Câu 9. Xét hàm số $y = x + 1 - \frac{3}{x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có cực trị trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$ và đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$.

D. Hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.

Lời giải

Câu 10. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + e^{2x}$ trên đoạn $[0;1]$.

A. $\max_{x \in [0;1]} y = e^2$.

B. $\max_{x \in [0;1]} y = 2e$.

C. $\max_{x \in [0;1]} y = 1$.

D. 1.

Lời giải

Câu 11. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{3}{x-2}$ trên đoạn $[3;6]$ bằng

A. $\frac{27}{4}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. 6.

D. $2\sqrt{3} + 2$.

Lời giải

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 - 1$. Với các số thực dương a, b thỏa mãn $a < b$, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ bằng

A. $f(a)$.

B. $f(b)$.

C. $f(\sqrt{ab})$.

D. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Lời giải

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;4]$ là?

A. $M = 28, m = -4$.

B. $M = 77, m = 1$.

C. $M = 77, m = -4$.

D. $M = 28, m = 1$

Lời giải

Câu 14. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính giá trị $M - m$.

A. $M - m = -\frac{9}{4}$.

B. $M - m = 3$.

C. $M - m = \frac{9}{4}$.

D. $M - m = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$ có giá trị là một số thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(2;14)$.

B. $(3;8)$.

C. $(12;20)$.

D. $(-7;8)$.

Lời giải

Câu 16. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ trên đoạn $[2;4]$ lần lượt là M , m . Tính $S = M + m$.

A. $S = 6$.

B. $S = 4$.

C. $S = 7$.

D. $S = 3$.

Lời giải

Câu 17. Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng.

A. $\frac{52}{3}$. B. 20. C. 6. D. $\frac{65}{3}$.

Lời giải

Câu 18. Gọi M, n theo thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[-2; 0]$. Tính $P = M + m$.

A. $P = 1$. B. $P = -5$. C. $P = -\frac{13}{3}$. D. $P = -3$.

Lời giải

Mức độ 12. Thông hiểu

Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{5 - x^2}$ trên đoạn $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

A. 5. B. $\sqrt{10}$. C. 6. D. Một đáp án khác.

Lời giải

Câu 20. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 1 + \sqrt{4x - x^2}$

A. 5. B. 3. C. 0. D. 1.

Lời giải

Câu 21. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} - \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{5-x}$ bằng

A. $\frac{9}{10}$.

B. $\frac{4}{5}$.

C. $2\sqrt{2} - 2$.

D. $7\sqrt{2} - 9$.

Lời giải

Câu 22. Hàm số $y = (4 - x^2)^2 + 1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ là:

A. 10.

B. 12.

C. 14.

D. 17.

Lời giải

Câu 23. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$.

A. $M = 1$.

B. $M = 3$.

C. $M = 5$.

D. $M = 2$.

Lời giải

Câu 24. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \sqrt{10 - x^2}$ bằng.

A. $\sqrt{10}$.

B. $-3\sqrt{10}$.

C. -10 .

D. $3\sqrt{10}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 25. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$.

A. $T = (3; 5)$.

B. $T = [3; 5]$.

C. $T = [\sqrt{2}; 2]$.

D. $T = [0; \sqrt{2}]$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 26. Tổng giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0; 3]$ có dạng $a - b\sqrt{c}$ với a là số nguyên và b, c là các số nguyên dương.

Tính $S = a + b + c$.

A. 4.

B. -2.

C. -22.

D. 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 27. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{2-x^2} - x$ bằng

A. $2 - \sqrt{2}$.

B. 2.

C. $2 + \sqrt{2}$.

D. 1.

Lời giải

Câu 28. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x - 5$.

A. -20.

B. -8.

C. -9.

D. 0.

Lời giải

Câu 29. Hàm số $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ có giá trị lớn nhất là M , giá trị nhỏ nhất là m . Khi đó $M.m$ bằng

A. $-3\sqrt{3}$.

B. $3\sqrt{3}$.

C. $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Câu 30. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$.

A. $\min y = 3$.

B. $\min y = \frac{11}{4}$.

C. $\min y = -3$.

D. $\min y = \frac{11}{2}$.

Lời giải

Câu 31. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos x + 1$. Khi đó giá trị của tích $M.m$ là

A. $\frac{25}{4}$.

B. 0.

C. $\frac{25}{8}$.

D. 2.

Lời giải

Câu 32. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2} \cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Tính $M - m$.

A. $\frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2}$.

B. $\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$.

C. $1 - \frac{\pi}{4}$.

D. $\frac{\pi}{4} - 1 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Câu 33. Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề **đúng**.

A. $M = m + \frac{3}{2}$.

B. $M = \frac{3}{2}m$.

C. $M = m + 1$.

D. $M = m + \frac{2}{3}$.

Lời giải

Câu 34. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x + 2|$ trên đoạn $[-3; 3]$.

A. 0.

B. -1.

C. 1.

D. -5.

Lời giải

Câu 35. Hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1; 3]$ cho trong hình bên. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tìm mệnh đề đúng?

x	-1	0	2	3	
y'	+	0	-	0	+
y	0	5	1	4	

A. $M = f(-1)$.

B. $M = f(3)$.

C. $M = f(2)$.

D. $M = f(0)$.

Lời giải

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$-$	$ $	$+$	0	$-$
y	5	-2	4	-1	

Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất bằng -2.

B. Hàm số có hai điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng -2.

Lời giải

.....

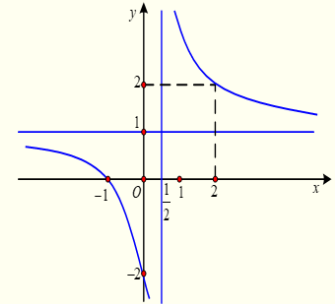
.....

.....

.....

.....

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau



- A. $\max_{[1;2]} f(x) = 2$. B. $\max_{[-2;1]} f(x) = 0$.
C. $\max_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$. D. $\max_{[3;4]} f(x) = f(4)$.

Lời giải

.....

.....

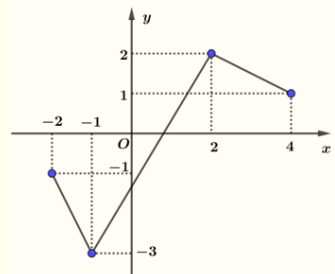
.....

.....

.....

.....

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tìm $\max_{[-2; 4]} |f(x)|$.



- A. $|f(0)|$. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 39. Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$ ($a \neq 0$) có $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

- A. $8a + d$. B. $d - 16a$. C. $d - 11a$. D. $2a + d$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 40. Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$ là:

A. $\min P = \frac{7}{3}$

B. $\min P = 5$

C. $\min P = \frac{17}{3}$

D. $\min P = \frac{115}{3}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 41. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m$ là $3\sqrt{2}$. Giá trị của m là

A. $m = \sqrt{2}$.

B. $m = 2\sqrt{2}$.

C. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $m = -\sqrt{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 42. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1$ là đoạn $[a; b]$. Tính tổng $T = a + b$.

A. $T = 1$.

B. $T = 2$.

C. $T = 0$.

D. $T = -1$.

Lời giải

Câu 43. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2\cos^3 x - \cos 2x$ trên đoạn

$$D = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right].$$

A. $\max_{x \in D} f(x) = 1; \min_{x \in D} f(x) = \frac{19}{27}.$

B. $\max_{x \in D} f(x) = \frac{3}{4}; \min_{x \in D} f(x) = -3.$

C. $\max_{x \in D} f(x) = 1; \min_{x \in D} f(x) = -3.$

D. $\max_{x \in D} f(x) = \frac{3}{4}; \min_{x \in D} f(x) = \frac{19}{27}.$

Lời giải

Câu 44. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^3 x + 9\cos x + 6\sin^2 x - 1$ là

A. -2.

B. -1.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Câu 45. Giá trị nhỏ nhất của hàm số của hàm số $y = 1 + 2\sin x \cos x - \cos^2 2x$ là:

A. $-\frac{5}{4}.$

B. $-\frac{1}{4}.$

C. -1.

D. 0.

Lời giải

Câu 46. Biết hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$. Trong các hàm số sau, hàm số nào cũng có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tương ứng là M và m ?

A. $y = f\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)$.

B. $y = f\left(\sqrt{2(\sin x + \cos x)}\right)$.

C. $y = f\left(\sqrt{2(\sin^3 x + \cos^3 x)}\right)$.

D. $y = f\left(x + \sqrt{2-x^2}\right)$.

Lời giải

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

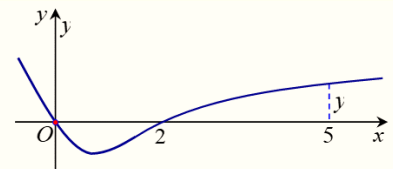
Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là:

A. $f(0), f(5)$.

B. $f(2), f(0)$.

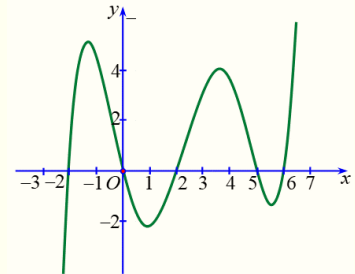
C. $f(1), f(3)$.

D. $f(2), f(5)$.



Lời giải

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M = \max_{[-2;6]} f(x)$, $m = \min_{[-2;6]} f(x)$, $T = M + m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $T = f(0) + f(-2)$. B. $T = f(5) + f(-2)$.
C. $T = f(5) + f(6)$. D. $T = f(0) + f(2)$.

Lời giải

DẠNG 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng nửa khoảng.

1. Phương pháp.

Tìm $\max_{x \in [a,b]} f(x)$, $\min_{x \in [a,b]} f(x)$ trên khoảng, nửa khoảng..., ta có thể tiến hành như sau:

Bước 1. Tính $f'(x)$ và tìm các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc $(a;b)$ của phương trình $f'(x) = 0$.

Bước 2. Tính giới hạn và lập bảng biến thiên.

Bước 3. Kết luận

Lưu ý:

Đối với bài toán tìm $\max_{x \in [a,b]} f(x)$, $\min_{x \in [a,b]} f(x)$ trên khoảng, nửa khoảng ta phải lập bảng biến thiên.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Lời giải

Bài tập 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{2}{x} - (1 + \sqrt{2})^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$?

Lời giải

Bài tập 7. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau $y = \frac{x + \sqrt{1 + 9x^2}}{8x^2 + 1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Lời giải.

Bài tập 8. Cho các số thực dương x, y . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{4xy^2}{(x + \sqrt{x^2 + 4y^2})^3}$.

Lời giải.

Bài tập 9. Tìm tất cả các giá trị của a và b thỏa mãn điều kiện: $a \geq -\frac{1}{2}$ và $\frac{a}{b} > 1$ sao cho biểu thức $P = \frac{2a^3 + 1}{b(a-b)}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải.

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Mức độ 2. Thông hiểu

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1; 3]$ như hình bên. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tìm mệnh đề đúng?

x	-1	0	2	3	
y'	+	0	-	0	+
y	0	5	1	4	

A. $M = f(0)$.

B. $M = f(3)$.

C. $M = f(2)$.

D. $M = f(-1)$.

Lời giải

Câu 50. (THPT Ngô Quyền Ba Vì 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	-
y	$+\infty$	4	5	$-\infty$

A. $y_{CD} = 5$.

B. $\min_{\mathbb{R}} y = 4$.

C. $y_{CT} = 0$.

D. $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.

Lời giải

Câu 51. (THPT Chuyên Nguyễn Huệ 2018) Cho hàm $y = f(x)$ xác định, liên tục $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	+	-	0	+
y	$-\infty$	0	-2	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -2.

C. Hàm số có đúng một cực trị.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.

Lời giải

Câu 52. (Sở GD & ĐT Bạc Liêu Kỳ I 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	1	3	-1	1

Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là bao nhiêu.

A. $\max_{\mathbb{R}} y = -\frac{1}{2}$.

B. $\max_{\mathbb{R}} y = -1$.

C. $\max_{\mathbb{R}} y = 1$.

D. $\max_{\mathbb{R}} y = 3$.

Lời giải

Câu 53. (Sở GD & ĐT Thái Bình 2020)

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên khoảng $(0; 2)$ là

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. -1.

Lời giải

Câu 54. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là:

A. $\min y = 3.$
(1; +∞)

B. $\min y = -1.$
(1; +∞)

C. $\min y = 5.$
(1; +∞)

D. $\min y = -\frac{7}{3}.$
(1; +∞)

Lời giải

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 55. Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó?

- A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
- B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
- D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên là:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
		+	0	-	+
			$\frac{9}{20}$	$-\frac{3}{5}$	
	$-\infty$				$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số có ba cực trị.
- B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{20}$ và giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{3}{5}$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

Câu 57.(Chuyên ĐH Vinh 2019) Cho hàm số: $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-3; 2)$,
 $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = -5$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ và có bảng biến thiên như sau

x	-3	-1	1	2		
y'		+	0	-	0	+
y			0			3
		-5		-2		

Mệnh đề nào dưới đây **sai** ?

- A. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-3; 2)$.
- B. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -2 .
- C. Giá trị cực đại của hàm số bằng 0 .
- D. Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(-3; 2)$ bằng 0 .

Lời giải

Câu 58. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ bằng

- A. 2.
- B. $\sqrt{2}$.
- C. 0.
- D. 1.

Lời giải

Câu 59. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 4\sqrt{x^2 - 4x + 6} + 4x - x^2 + 1$.
 Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x) = M$.

- A. 2.
- B. 4.
- C. -2.
- D. -4.

Lời giải

Câu 60. Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó.

- A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
- B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
- D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Câu 61. (THI HK I THPT KIM LIÊN HÀ NỘI 2017) Cho hàm số $y = \sqrt{x^3 - 3x}$ với $x \in [2; +\infty)$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.
- B. Hàm số có cả giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.
- C. Hàm số không có cả giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.
- D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Câu 62. (THPT Đồng Đậu 2019) Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất là M và giá trị nhỏ nhất là m . Tính giá trị biểu thức $P = M^2 + m^2$

- A. $P = \frac{1}{4}$.
- B. $P = \frac{1}{2}$.
- C. 2.
- D. 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 63.(THPT Chuyên Phan Bội Châu 2019)

Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ với x thuộc $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -\sqrt{5}$.

B. $\max_D f(x) = 0$; không tồn tại $\min_D f(x)$.

C. $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -1$.

D. $\min_D f(x) = 0$; không tồn tại $\max_D f(x)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Mức độ 4. Vận dụng cao

Câu 64. Giá trị nhỏ nhất hàm số $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là

A. 1.

B. $\frac{23}{27}$.

C. $\frac{1}{27}$.

D. 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 65. (THPT Quang Trung 2020) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập hợp $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$

A. $\max_D f(x) = 0$ không tồn tại $\min_D f(x)$.
 B. $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -\sqrt{5}$.
 C. $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -1$.
 D. $\min_D f(x) = 0$ không tồn tại $\max_D f(x)$.

Lời giải

Câu 66. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để hàm số $y = |x-1| + |x+3|$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

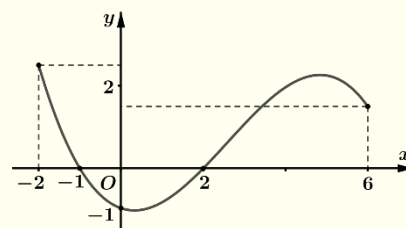
Lời giải

Câu 67. Cho các số thực không âm x, y thay đổi. M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}$. Giá trị của $8M + 4m$ bằng:

A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Lời giải

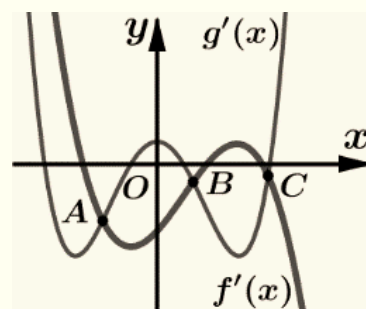
Câu 68. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. $\max_{[-2;6]} f(x) = f(-1)$. C. $\max_{[-2;6]} f(x) = f(6)$.
 B. $\max_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$. D. $\max_{[-2;6]} f(x) = \max \{f(-1), f(6)\}$.

Lời giải

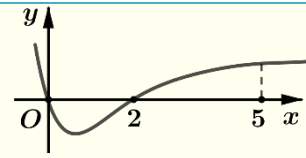
Câu 69. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong nét đậm và $y = g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A, B, C của đồ thị $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ là a, b, c . Giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; c]$ bằng



- A. $h(0)$. B. $h(a)$. C. $h(b)$. D. $h(c)$.

Lời giải

Câu 70. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là



A. $f(0); f(5)$.

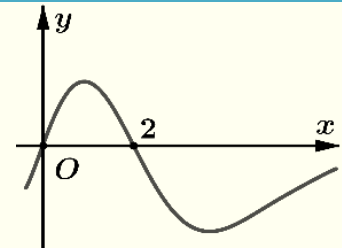
B. $f(2); f(0)$.

C. $f(1); f(5)$.

D. $f(2); f(5)$.

Lời giải

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Hỏi trong các giá trị $f(0), f(1), f(3), f(4)$ giá trị nào là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$?



A. $f(0)$.

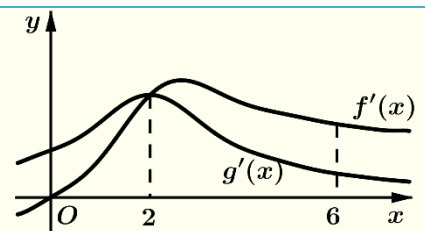
B. $f(1)$.

C. $f(3)$.

D. $f(4)$.

Lời giải

Câu 72. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x), g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là



A. $h(6), h(2)$.

B. $h(2), h(6)$.

C. $h(0), h(2)$.

D. $h(2), h(0)$.

Lời giải

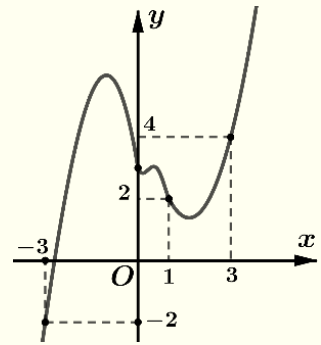
Câu 73. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Xét hàm số $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

B. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.

C. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[-3;3]$



Lời giải

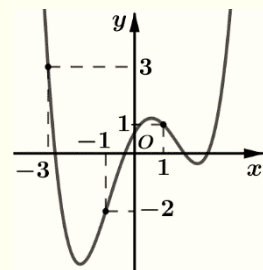
Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.

B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

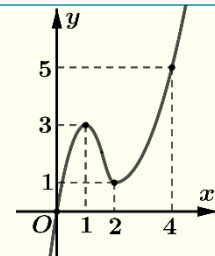


Lời giải

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là GTLN – GTNN của hàm số $g(x) = f[2(\sin^4 x + \cos^4 x)]$. Tổng $M + m$ bằng

- A. 3.
C. 5.

- B. 4.
D. 6.

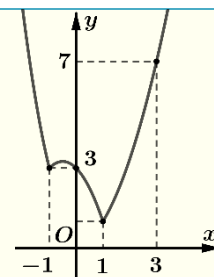


Lời giải

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là hình bên. Gọi M, m theo thứ tự là GTLN – GTNN của hàm số $y = |f(x) - 2|^3 - 3(f(x) - 2)^2 + 5$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tích $M.m$ bằng

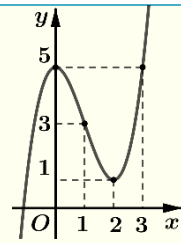
- A. 2.
C. 54.

- B. 3.
D. 55.



Lời giải

Câu 78. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Ký hiệu $g(x) = f(2\sqrt{2x} + \sqrt{1-x}) + m$. Tìm điều kiện của tham số m sao cho $\max_{[0;1]} g(x) > 2 \min_{[0;1]} g(x)$.



A. $m > 4$.

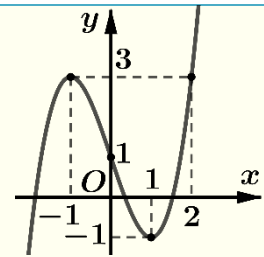
B. $m < 3$.

C. $0 < m < 5$.

D. $m < 2$.

Lời giải

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$.



Tìm m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

A. $m = -13$.

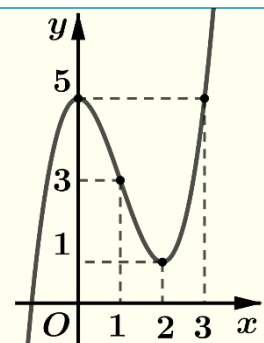
B. $m = -12$.

C. $m = -1$.

D. $m = 3$.

Lời giải

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Ký hiệu $g(x) = f(x^3 - x^2 + x + 2) + 3m$, với m là tham số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = m^2 + 3 \max_{[0;1]} g(x) + 4 \min_{[0;1]} g(x) + m$



A. -150.

B. -102.

C. -50.

D. 4.

Lời giải

DẠNG 3. Xác định tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thỏa điều kiện cho trước.

1. Phương pháp.

Bước 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Bước 2. Áp đặt các giá trị này thỏa điều kiện đã cho.

Bước 3. Ta có thể khai thác tính chất sau để giải bài toán gọn hơn.

➤ Điều kiện cần để $M = \max_{x \in D} f(x)$ là $f(x_0) \leq M$.

➤ Điều kiện cần để $m = \min_{x \in D} f(x)$ là $f(x_0) \geq m$ trong đó x_0 là một giá trị thuộc D .

➤ Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn tăng hoặc luôn giảm trên $[a; b]$ thì

$$\max_{[a; b]} f(x) = \max\{f(a), f(b)\};$$

$$\min_{[a; b]} f(x) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 10. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + a$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0.

Lời giải

Bài tập 11. Cho hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 .

Lời giải

Bài tập 12. Tìm m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số: $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{m}{2}x + 1, \forall x \in [-1;1]$ bằng 2

Lời giải.

Bài tập 13. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$ trên $[-2;0]$ bằng 2.

Lời giải.

Bài tập 14. Tìm tất cả giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x+m-1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1.

Lời giải

Bài tập 15. Tìm các giá trị của các tham số a, b sao cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

Lời giải.

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Mức độ: Vận dụng

Câu 78. Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$ với m là tham số thực. Tổng tất cả các giá trị của nguyên của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 7.

A. 0.

B. 6.

C. 4.

D. 18.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 79. Gọi m là giá trị để hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0; 3]$ bằng -2 .

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $3 < m < 5$.

B. $m^2 \neq 16$.

C. $|m| < 5$.

D. $|m| = 5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 80. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực.

Tìm giá trị lớn nhất của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng -2 .

A. $m = 4$.

B. $m = 5$.

C. $m = -4$.

D. $m = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 81. Tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \frac{mx+1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[1; 2]$ bằng -2

A. $m = -3$.

B. $m = 2$.

C. $m = 4$.

D. $m = 3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 82. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$. Tham số m thuộc khoảng nào thì thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$.

A. $(3;7)$. B. $(2;4]$. C. $(5;8]$. D. $(9;11]$.

Lời giải

Câu 83. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$, với tham số m bằng bao nhiêu thì $\min_{[2;4]} y = 3$

A. $m = 1$ B. $m = 3$ C. $m = 5$. D. $m = -1$.

Lời giải

Câu 84. Số các giá trị tham số m để hàm số $y = \frac{x-m^2-1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng -6 :

A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Lời giải.

Câu 85. Cho hàm số $y = \frac{2\sqrt{x} + m}{\sqrt{x+1}}$.

Giá trị nguyên lớn hơn 1 của tham số m sao cho $\max_{[0;4]} y \leq 3$ thỏa mãn

A. $4 < m \leq 6$.

B. Không có m .

C. $1 < m < 5$.

D. $m > 8$.

Lời giải

Câu 86. Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + m}{\sqrt{x+1}}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của $m > 1$ để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 4]$ nhỏ hơn 3.

A. $m \in (1; 3)$.

B. $m \in (1; 3\sqrt{5} - 4)$.

C. $m \in (1; \sqrt{5})$.

D. $m \in (1; 3]$.

Lời giải

Câu 87. Cho hàm số $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1 .

A. 6.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Câu 88. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{\sqrt{x^2+1}}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=1$.

- A. $m=2$. B. $m=1$. C. Không có giá trị m . D. $m=-3$.

Lời giải

Câu 89. Tìm tất cả các giá trị thực khác 0 của tham số m để hàm số $y = \frac{mx}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ trên đoạn $[-2;2]$?

- A. $m=-2$. B. $m<0$. C. $m>0$. D. $m=2$.

Lời giải

Câu 90. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$.

- A. $0<m<1$. B. $m>1$. C. $m>2$. D. $-1<m<1$.

Lời giải

Câu 91. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 2.

- A. $m = 2$. B. $m = \frac{31}{27}$. C. $m > \frac{3}{2}$. D. $m = 1$.

Lời giải

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị của $m > 0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[m+1; m+2]$ luôn bé hơn 3.

- A. $m \in (0; 2)$. B. $m \in (0; 1)$. C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \in (0; +\infty)$.

Lời giải

Câu 93. Gọi M, m lần lượt là GTLT-GTNN của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (a + 2)x + a + 3$ (với a là tham số thực) trên đoạn $[1 - 2a; 2a - 3]$. Tính $P = \frac{m + M}{2}$.

- A. $P = 1$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = 3$. D. $P = 6$.

Lời giải

Câu 94. Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{x^2 + 2}$ với $a \neq 0$ và a, b là các tham số thực. Biết $\max y = 6$, $\min y = -2$.

Giá trị của biểu thức $P = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ bằng

- A. -3 . B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 3 .

Lời giải

DẠNG 3. Xác định tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thỏa điều kiện cho trước.

1. Phương pháp.

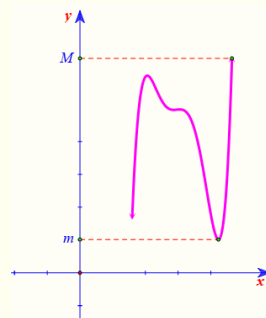
① Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x)|$ và $u = (f(x))^{2n}$.

Bước 1. Xét hàm số $y = f(x)$.

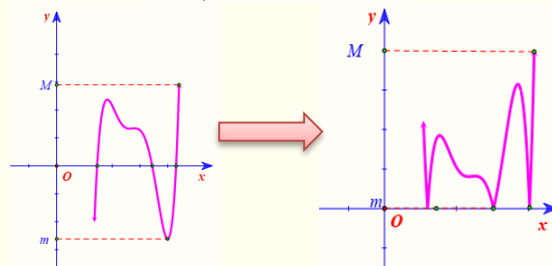
Gọi $m = \min_{[a;b]} f(x)$; $M = \max_{[a;b]} f(x)$.

Bước 2. Xét các khả năng

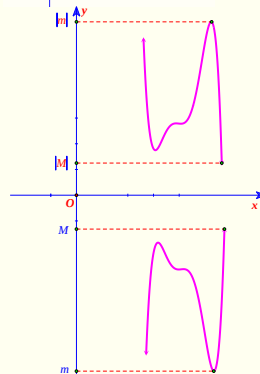
Nếu $m > 0 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| = m \\ \max_{[a;b]} |f(x)| = M \end{cases}$



Nếu $M \cdot m \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| = 0 \\ \max_{[a;b]} |f(x)| = \max\{|m|; |M|\} \end{cases}$



Nếu $M < 0 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| = |M| = -M \\ \max_{[a;b]} |f(x)| = |m| = -m \end{cases}$



② **Đặt biệt:** ta có thể công thức nhanh

Khi đó $\max_{[a;b]} |f(x)| = \max\{|M|, |m|\} = \frac{|M+m| + |M-m|}{2}$.

$\min_{[a;b]} |f(x)| = \begin{cases} 0, & \text{khi } m \cdot M \leq 0 \\ \frac{|M+m| - |M-m|}{2} & \text{khi } m \cdot M > 0 \end{cases}$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 16. Tìm các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5.

Lời giải

Bài tập 17. Có bao nhiêu giá trị m để hàm số $f(x) = |x^2 - 4x + m|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 4]$ bằng 6?

Lời giải

Bài tập 18. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Bài tập 19. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^4 - 38x^2 + 120x + 4m|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 26.

B. 13.

C. 14.

D. 27.

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Mức độ 4. Vận dụng cao

Câu 95. (Chuyên ĐH Vinh 2020) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 5?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Câu 96. (THPT Phụ Dực 2020) Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2; 4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

- A. 4. B. 36. C. 140. D. 0.

Lời giải

Câu 97. (THPT Buôn Ma Thuột 2019) Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 + 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 10. Số phần tử của S là:

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

Câu 98.(Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc 2019) Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5.

A. -1.

B. 2.

C. -2.

D. 1.

Lời giải

Câu 99. Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |-x^4 + 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 2018?

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

A. -2 .

B. 2.

C. -4.

D. 4.

[illegible]

A. Vô số.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features two vertical columns of horizontal dashed lines, designed for handwriting practice. The left column contains 10 rows of lines, and the right column also contains 10 rows. There are no margins or other markings on the page.

Câu 102.(THPT Nguyễn Huệ 2019) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 4?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Câu 103.(THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[0;3]} |x^2 - 2x + m| \leq 5$?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Câu 104.(THPT Chuyên Ngoại Ngữ 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ không lớn hơn 3?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Câu 105.(THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x+1} \right|$ trên $[1; 2]$ bằng 2. Số phần tử của tập S là

A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải

Câu 106.(THPT Chuyên Quang Trung 2019) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng các phần tử của S bằng

A. 108. B. 120. C. 210. D. 136.

Lời giải

Câu 107. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là

A. 108. B. 136. C. 120. D. 210.

Lời giải

Câu 108. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. B. -195. C. 105. D. 300.

Lời giải

Câu 109. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x+1} \right|$ trên $[1; 2]$ bằng 2. Số phần tử của S là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Câu 110. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải.

Câu 111. (THPT Chuyên Quang Trung 2019) Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng 2. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 0. B. 20. C. 24. D. 40.

Lời giải.

Câu 112. Cho hàm số $f(x) = |2x^3 - 3x^2 + m|$ có bao nhiêu số nguyên m để $\min_{x \in [-1; 3]} f(x) \leq 3$.

A. 4. B. 8. C. 31. D. 39.

Lời giải

Câu 113. (THPT Chuyên Lê Hồng Phong 2019)
 Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-5; 5]$ để $\min_{x \in [-1; 3]} |x^3 - 3x^2 + m| \geq 2$.

A. 6. B. 4. C. 3. D. 5.

Lời giải

Câu 114. (Sở GD Vĩnh Long 2020) Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3; 2]$ sao cho $M \leq 2m$?

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Câu 115. (Đại Học Thực Hành Cao Nguyên 2019) Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x + a|$. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc $[-4; 4]$ sao cho $M \leq 2m$?

A. 4.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Câu 116. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$?

A. 3. B. 7. C. 6. D. 5.

Lời giải

Câu 117. (THPT Ngô Gia Tự 2019) Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng?

- A. $(0; 1)$. B. $[-1; 0]$. C. $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. D. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$.

Lời giải

Câu 118. (THPT Chuyên Phan Bội Châu 2019)

Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của tham số m bằng

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 5

Lời giải

Câu 119.(THPT Đội Cấn 2019) Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $a = 1$. B. $a = 2$. C. Một giá trị khác. D. $a = 3$.

Lời giải

Câu 120. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - x^2 + (m^2 + 1)x - 4m - 7|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = m_0$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. $m_0 \in [-3; -2]$. B. $m_0 \in (-2; -1)$. C. $m_0 \in [-1; 0]$. D. $m_0 \in (0; 3)$.

Lời giải

Câu 121.(THPT Chuyên Hạ Long 2019) Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m| + 4x$ bằng -1 ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Câu 122. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + 3| + 4mx$ lớn hơn 2 ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

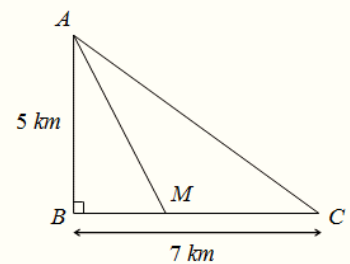
Lời giải

A. 3. **B.** 4. **C.** -4 . **D.** 2.

[illegible]

Bài tập 21. Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến địa điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h, rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Hỏi cần đặt vị trí của M cách B một khoảng bằng bao nhiêu km để người đó đến kho nhanh nhất?

- A. 5,5 km. B. $2\sqrt{5}$ km. C. $\sqrt{5}$ km. D. 4,5 km



Lời giải

The diagram shows a right-angled triangle ABC with the right angle at vertex C . The vertical side BC is labeled 6 km and the horizontal side AC is labeled 9 km . A point D is located on the side AC . A dashed line segment BD is drawn from vertex B to point D .

- ## Lời giải

D. 30,54cm

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 124. Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây hồ là 500.000 đồng/ m^2 . Hãy xác định kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là?

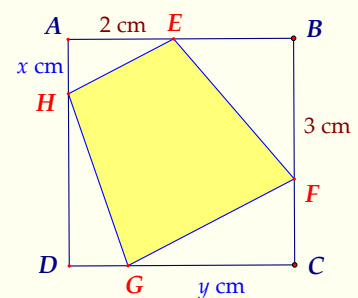
- A. 65 triệu đồng B. 75 triệu đồng C. 85 triệu đồng D. 45 triệu đồng

Lời giải

Câu 125. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ.

Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $4\sqrt{2}$. B. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. C. 7. D. 5.



Lời giải

Câu 126. Một người dự định làm một bể chứa nước hình trụ bằng inox có nắp đáy với thể tích 1 (m^3). Chi phí mỗi m^2 đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m^2 mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi người đó chọn bán kính bể là bao nhiêu để chi phí làm bể ít nhất?

A. $\sqrt[3]{2\pi}$.

B. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

C. $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

D. $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

Lời giải

Câu 127. Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200 m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 300 nghìn đồng/ m^2 (chi phí được tính theo diện tích xây dựng, bao gồm diện tích đáy và diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và thành bể). Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).

A. 75 triệu đồng.

B. 51 triệu đồng.

C. 36 triệu đồng.

D. 46 triệu đồng.

Lời giải

Câu 128. Ông A dự định sử dụng hết 5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01 \text{ m}^3$.

B. $0,96 \text{ m}^3$.

C. $1,33 \text{ m}^3$.

D. $1,51 \text{ m}^3$.

Lời giải