

Họ và tên thí sinh:/ Số báo danh:

PHẦN I: (3,0 ĐIỂM)-TRẮC NGHIỆM BỐN PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN. (Học sinh trả lời câu hỏi từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án, mỗi phương án đúng 0.25 điểm).

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -3; 5)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(2; 0; 5)$. B. $(0; -3; 5)$. C. $(2; -3; 0)$. D. $(0; 0; 5)$.

Câu 2. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$ là

- A. $y = 2x + 3$. B. $y = x - 1$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = -2x + 3$.

Câu 3. Nếu một khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$ và có thể tích bằng $3a^3$ thì chiều cao của khối lăng trụ đó bằng

- A. a . B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. C. $3a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 4. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ là

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC'}$ bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 5. C. 4. D. 2.

Câu 7. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Số đo của góc nhị diện $[B, OA, C]$ bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

Gọi $M(x_1; y_1)$ và $N(x_2; y_2)$ lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Giá trị của biểu thức $T = 2x_1 + x_2 - y_1 \cdot y_2$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 0. D. -4.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	4	-1	$+\infty$	

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc tọa độ O , các véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với các véc-tơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 4, AD = 3, AA' = 6$. Khi đó, véc-tơ $\overrightarrow{AC'}$ có tọa độ là

- A. $(4; 3; 6)$. B. $(3; 6; 4)$. C. $(3; 4; 6)$. D. $(6; 3; 4)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 15x - 2$ có đồ thị là (C) . Hệ số góc nhỏ nhất của tiếp tuyến tại một điểm M thuộc đồ thị (C) là

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 0.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 2)$, $B(5; 2; 1)$ và $C(2; 0; 3)$. Tìm điểm M trên trục Ox sao cho AM vuông góc với BC .

- A. $M(-5; 0; 0)$. B. $M(1; 0; 0)$. C. $M(2; 0; 0)$. D. $M(-1; 0; 0)$.

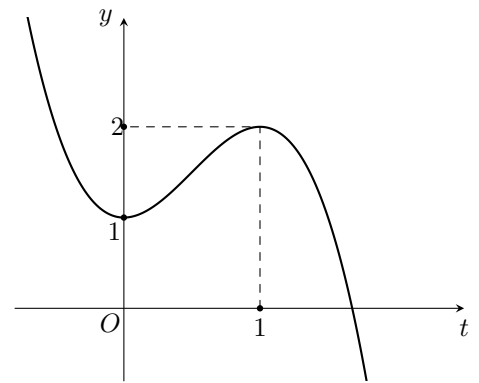
Câu 12. Một hệ thống cảnh báo cháy tự động của một tòa nhà được lắp đặt hai cảm biến A và B hoạt động độc lập với nhau. Khi xảy ra sự cố cháy, xác suất để cảm biến A và cảm biến B phát tín hiệu cảnh báo tương ứng là 0,9 và 0,85. Tính xác suất để khi xảy ra sự cố cháy, tòa nhà nhận được tín hiệu cảnh báo từ ít nhất một trong hai cảm biến.

- A. 0,765. B. 0,975. C. 0,985. D. 0,925.

PHẦN II: (4,0 ĐIỂM)-TRẮC NGHIỆM ĐÚNG, SAI. (Học sinh trả lời câu hỏi từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a) b) c) d) ở mỗi câu, học sinh chỉ chọn **Đúng** hoặc **Sai**).

Câu 1. Một công ty khởi nghiệp mô hình hóa tốc độ tăng trưởng doanh thu hàng năm $y = f(t)$ (đơn vị: tỷ đồng/năm) theo thời gian t (đơn vị: năm, với $t \geq 0$) bằng một hàm số đa thức bậc ba $y = at^3 + bt^2 + ct + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên.

- a) Công thức xác định tốc độ tăng trưởng doanh thu của công ty là $f(t) = -2t^3 + 3t^2 + 1$.
b) Doanh thu của công ty đạt tốc độ tăng trưởng cực đại tại thời điểm $t = 2$ năm.
c) Trong năm đầu tiên ($0 \leq t \leq 1$), tốc độ tăng trưởng doanh thu của công ty luôn có xu hướng tăng.
d) Tại thời điểm $t = 1,5$ năm, tốc độ tăng trưởng doanh thu của công ty đạt giá trị bằng 2 tỷ đồng/năm.

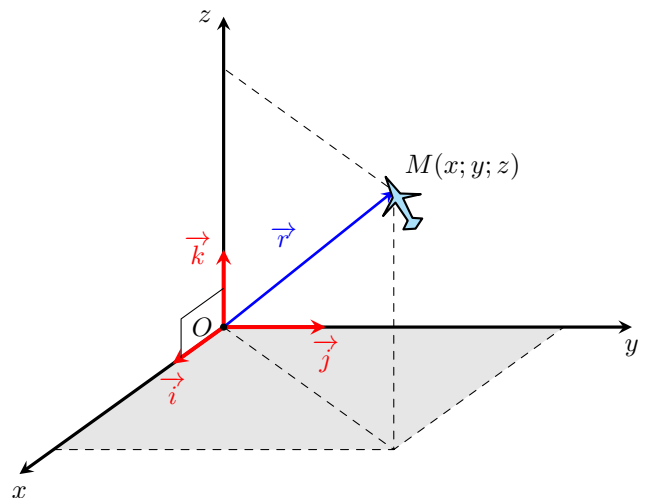


Câu 2. Trong một ca trực tại Trạm kiểm soát không lưu sân bay Tân Sơn Nhất, các kỹ sư ra-đa thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục tính bằng ki-lô-mét) với gốc $O(0; 0; 0)$ là vị trí đặt tháp điều hành không lưu.

Lúc 8 giờ sáng, hệ thống theo dõi một máy bay thương mại đang ở vị trí $M_0(50; 120; 4)$ (nghĩa là cách tháp điều hành 50 km về hướng Đông, 120 km về hướng Bắc và ở độ cao 4 km).

Máy bay đang bay ổn định với véc-tơ vận tốc không đổi là $\vec{v} = (300; 400; 3)$ (đơn vị: km/h).

- a) Tại thời điểm 8 giờ sáng, khoảng cách từ máy bay đến tháp điều hành không lưu xấp xỉ 130 km (sai số không quá 1 km).
b) Tại thời điểm 9 giờ sáng, độ cao của máy bay so với mặt đất là 8 km.
c) Tại thời điểm 10 giờ sáng, khoảng cách từ máy bay đến tháp truyền hình $F(1250; 1020; 0)$ xấp xỉ 700 km (sai số không quá 10 km).
d) Khi đạt độ cao 10 km, máy bay nhận lệnh hạ cánh và đổi sang vận tốc mới là $\vec{v}_2 = (400; 300; -5)$ km/h để hướng về đường băng B . Tọa độ của máy bay ngay khi chạm đất tại đường băng B là $(1450; 1520; 0)$.



Câu 3. Một công ty công nghệ phân tích hiệu quả của chiến dịch tiếp thị ứng dụng mới. Tổng thời gian người dùng tương tác tích lũy trên hệ thống theo thời gian t ($t \geq 0$, tính bằng tuần) được mô hình hóa bởi hàm số $x(t) = 2t - 2\ln(t+1)$ (đơn vị: triệu giờ). Hàm số $v(t) = x'(t)$ biểu thị tốc độ tương tác của người dùng tại thời điểm t (đơn vị: triệu giờ/tuần).

- $v(t) = 2 - \frac{3}{t+1}$.
- Tốc độ tương tác tại thời điểm ban đầu ($t = 0$) là 2 triệu giờ/tuần.
- Tốc độ tương tác tại thời điểm $t = 1$ tuần bằng 1 triệu giờ/tuần.
- Gia tốc tương tác của người dùng tại thời điểm $t = 1$ tuần bằng 0,5 triệu giờ/tuần².

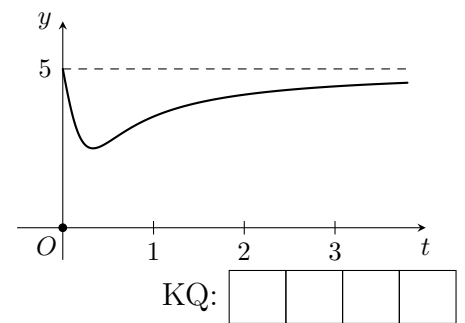
Câu 4. Xét phép thử chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Xét biến cố A : “Số được chọn là số chia hết cho 8” và biến cố B : “Số được chọn là số có hai chữ số giống nhau”.

- Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 89$.
- Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{11}{90}$.
- Xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{1}{10}$.
- Xác suất của biến cố hợp $A \cup B$ là $P(A \cup B) = \frac{2}{9}$.

PHẦN III: (3,0 ĐIỂM)-TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN. (Học sinh trả lời câu hỏi từ câu 1 đến câu 6, mỗi câu trả lời đúng 0.5 điểm).

Câu 1. Trong một dự án giám sát sinh thái hồ, các chuyên gia môi trường mô hình hóa nồng độ oxygen hòa tan DO (đơn vị: mg/L) trong nước hồ sau t giờ ($t \geq 0$) kể từ khi xảy ra sự cố xả thải hữu cơ bằng hàm số $y = f(t)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng nồng độ oxygen hòa tan được xấp xỉ bởi công thức $f(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$.

Đạo hàm $f'(t)$ biểu thị tốc độ thay đổi nồng độ oxygen trong nước hồ (đơn vị: mg/(L.giờ)). Tốc độ phục hồi (hoặc gia tăng) nồng độ oxygen hòa tan trong hồ đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = \frac{\sqrt{a}}{b}$ giờ (a và b là các số nguyên tố). Tính giá trị của biểu thức $P = a - b$.



Câu 2. Một doanh nghiệp công nghệ khởi nghiệp (Startup) chuẩn bị mở rộng quy mô và cần thuê một mặt bằng làm trung tâm kho vận phân phối hàng hóa trong thời hạn 15 năm. Sau khi khảo sát, doanh nghiệp nhận được hai phương án hợp đồng từ hai đơn vị cho thuê bất động sản như sau:

- Phương án 1 (Thanh toán theo quý):** Tiền thuê quý đầu tiên là 10 triệu đồng; từ quý thứ hai trở đi, tiền thuê mỗi quý tăng thêm 500 000 đồng so với quý trước đó.
- Phương án 2 (Thanh toán theo năm):** Tiền thuê năm đầu tiên là 70 triệu đồng; từ năm thứ hai trở đi, tiền thuê mỗi năm tăng thêm 3 triệu đồng so với năm trước đó.

Để tối ưu hóa ngân sách, doanh nghiệp nên chọn phương án nào để tổng chi phí thuê mặt bằng trong 15 năm là thấp nhất? Số tiền chi phí thấp nhất đó bằng bao nhiêu triệu đồng?

KQ:

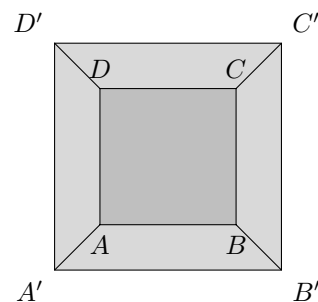
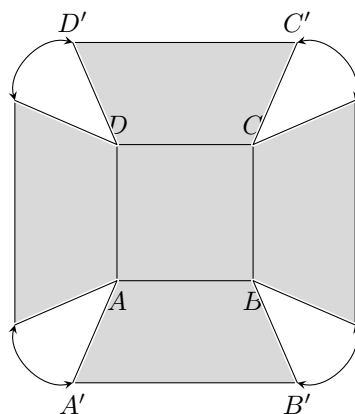
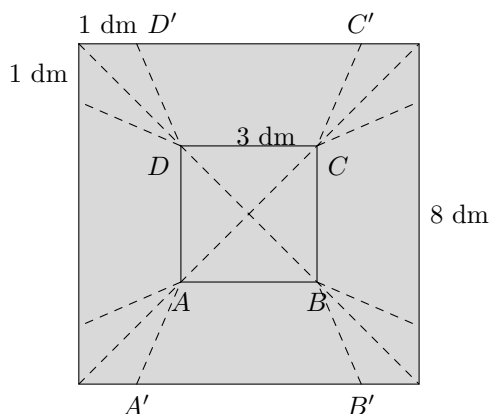
--	--	--	--

Câu 3. Gọi n , d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1) \cdot \sqrt{x}}$. Tính giá trị của biểu thức $T = 26n - 27d$.

KQ:

--	--	--	--

Câu 4. Để chuẩn bị cho hội chợ “Ý tưởng xanh”, bạn Nam dự định làm một chiếc khay trồng rau mầm thủy canh dạng hình chóp cụt đều không có nắp. Từ một tấm vật liệu tái chế hình vuông có cạnh 8 dm, Nam cắt bỏ bốn phần giống nhau ở bốn góc, sau đó gấp tạo hình rồi hàn các mép lại để được chiếc khay như hình vẽ bên dưới. Biết đáy khay là hình vuông có cạnh bằng 3 dm. Hỏi chiều cao của chiếc khay trồng rau này bằng bao nhiêu đề-xi-mét?

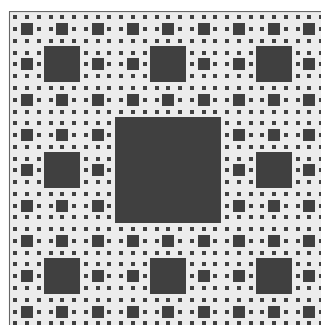
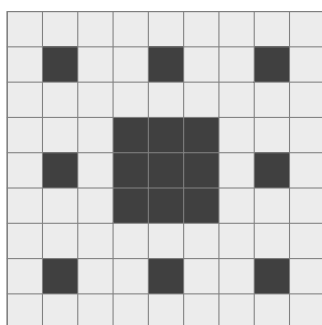
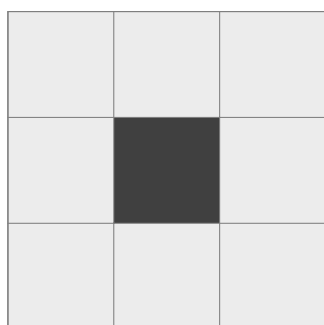


KQ:

--	--	--	--

Câu 5. Trong một dự án nghiên cứu công nghệ vật liệu mới, các kỹ sư thiết kế một tấm pin năng lượng mặt trời dạng hình vuông có cạnh 1 m. Để tối ưu hóa khả năng hấp thụ ánh sáng và tản nhiệt, mặt tấm pin được phủ các lớp vi mạch cảm biến dạng phân mảnh (fractal).

Ban đầu, tấm pin hình vuông được chia thành 9 ô vuông nhỏ bằng nhau, ô vuông ở chính giữa được phủ một lớp vật liệu cảm biến sẫm màu (màu đen). Ở giai đoạn tiếp theo, mỗi ô vuông màu sáng còn lại tiếp tục được chia thành 9 ô vuông nhỏ hơn và ô chính giữa của nó lại được phủ vật liệu cảm biến sẫm màu. Quá trình chia nhỏ và phủ vi mạch sẫm màu này được thực hiện liên tiếp đúng 5 lần.



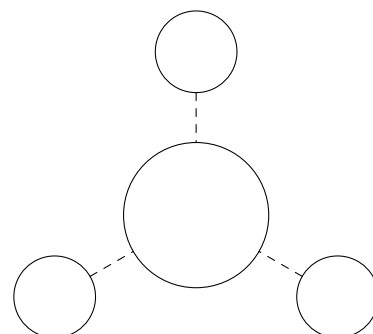
Tính tổng diện tích mặt tấm pin đã được phủ vật liệu cảm biến sẫm màu sau 5 lần thực hiện theo đơn vị mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

Câu 6. Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 12\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt từ tập X . Trong 4 số được chọn, ta đặt 1 số vào vòng tròn lớn ở chính giữa, 3 số còn lại được đặt vào ba vòng tròn nhỏ xung quanh (biết rằng ba vòng tròn nhỏ này không phân biệt vị trí). Gọi P là xác suất để các số được đặt thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- Ba số ở ba vòng tròn nhỏ có thể sắp xếp thành một cấp số cộng tăng.
- Số ở vòng tròn lớn chính giữa bằng tổng của cả ba số ở ba vòng tròn nhỏ.



KQ:

--	--	--	--

Tính giá trị của biểu thức $33\,990P$.

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO
Được thực hiện bởi AI

PHẦN I: Trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn.

Câu	Đáp án		Câu	Đáp án
1	C		7	A
2	C		8	B
3	D		9	A
4	D		10	B
5	B		11	D
6	A		12	C

PHẦN II: Trắc nghiệm Đúng / Sai

Câu	Ý a)	Ý b)	Ý c)	Ý d)
Câu 1	Đúng	Sai	Đúng	Sai
Câu 2	Đúng	Sai	Sai	Đúng
Câu 3	Sai	Sai	Đúng	Đúng
Câu 4	Sai	Đúng	Đúng	Sai

PHẦN III: Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu	Kết quả
Câu 1	0
Câu 2	1365
Câu 3	-54
Câu 4	2
Câu 5	0,45
Câu 6	103

ĐỀ ĐÁNH GIÁ ĐỊNH KỲ KHỐI 12 — MÃ ĐỀ 308
LỜI GIẢI CHI TIẾT
PHẦN I. (3,0 ĐIỂM) — TRẮC NGHIỆM BỐN PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Học sinh trả lời câu hỏi từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án, mỗi phương án đúng 0,25 điểm.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -3; 5)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A.** $(2; 0; 5)$. **B.** $(0; -3; 5)$. **C.** $(2; -3; 0)$. **D.** $(0; 0; 5)$.

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm có cùng hoành độ, cùng tung độ với M và có cao độ bằng 0, tức là điểm $(x_0; y_0; 0)$.

Với $M(2; -3; 5)$, hình chiếu cần tìm là $(2; -3; 0)$.

Chọn đáp án C.

Câu 2. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$ là

- A.** $y = 2x + 3$. **B.** $y = x - 1$. **C.** $y = 2x - 3$. **D.** $y = -2x + 3$.

Lời giải

• **Xác định các điểm cực trị.** Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Viết lại $y = x - 1 + \frac{4}{x - 2}$, suy ra

$$y' = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 2)^2 - 4}{(x - 2)^2}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 4.$$

Đạo hàm đổi dấu khi x đi qua 0 và khi x đi qua 4 nên đồ thị có đúng hai điểm cực trị.

• **Lập phương trình đường thẳng.** Đặt $u(x) = x^2 - 3x + 6$ và $v(x) = x - 2$. Khi đó $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Tại điểm cực trị x_0 ta có $y'(x_0) = 0$, tức $u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0) = 0$, do đó

$$y(x_0) = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = \frac{2x_0 - 3}{1} = 2x_0 - 3.$$

Vậy cả hai điểm cực trị đều thuộc đường thẳng $y = 2x - 3$.

Kiểm chứng trực tiếp: hai điểm cực trị là $(0; -3)$ và $(4; 5)$, cả hai đều thỏa mãn $y = 2x - 3$.

Chọn đáp án C.

Câu 3. Nếu một khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$ và có thể tích bằng $3a^3$ thì chiều cao của khối lăng trụ đó bằng

- A. a . B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. C. $3a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Thể tích khối lăng trụ được tính bởi $V = S \cdot h$, trong đó S là diện tích đáy và h là chiều cao. Do đó

$$h = \frac{V}{S} = \frac{3a^3}{a^2\sqrt{3}} = \frac{3a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án D.

Câu 4. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ là

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- **Tiệm cận ngang.** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang.
- **Tiệm cận đứng.** $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng.

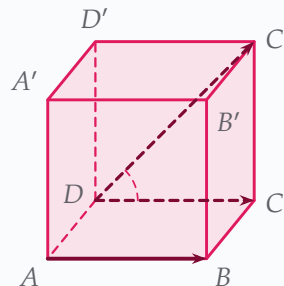
Đồ thị có tất cả 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án D.

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC'}$ bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Do đó

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC'}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DC'}) = \widehat{CDC'}.$$

Xét tam giác DCC' : vì $CC' \perp (ABCD)$ và $DC \subset (ABCD)$ nên $CC' \perp DC$, tam giác DCC' vuông tại C . Mặt khác $CC' = DC$ (cạnh hình lập phương) nên tam giác đó vuông cân tại C , suy ra $\widehat{CDC'} = 45^\circ$.

Chọn đáp án B.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

• **Tính chất của hàm số g .** Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$ nên g là hàm số chẵn; đồ thị của g nhận trục tung làm trục đối xứng. Ngoài ra g liên tục trên $\mathbb{R}$ vì f liên tục trên $\mathbb{R}$.

• **Xét trên khoảng $(0; +\infty)$.** Khi $x > 0$ thì $|x| = x$, do đó $g(x) = f(x)$ và $g'(x) = f'(x)$. Theo bảng xét dấu, trên $(0; +\infty)$ đạo hàm mang dấu âm trên $(0; 1)$ và mang dấu dương trên $(1; 3)$ cũng như trên $(3; +\infty)$. Như vậy g' chỉ đổi dấu một lần, tại $x = 1$; tại $x = 3$ đạo hàm triệt tiêu nhưng không đổi dấu. Vậy trên $(0; +\infty)$ hàm số g có đúng một điểm cực trị là $x = 1$ (điểm cực tiểu).

• **Xét trên khoảng $(-\infty; 0)$ và tại $x = 0$.** Do tính chẵn, g đồng biến trên $(-1; 0)$ và nghịch biến trên $(-\infty; -1)$, nên $x = -1$ là một điểm cực tiểu. Hàm số g liên tục tại $x = 0$, đồng biến trên $(-1; 0)$ và nghịch biến trên $(0; 1)$ nên $x = 0$ là một điểm cực đại.

Hàm số g có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án A.

Câu 7. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Số đo của góc nhị diện $[B, OA, C]$ bằng

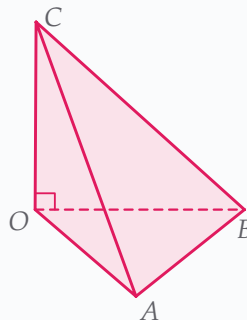
A. 90° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải



Góc nhị diện $[B, OA, C]$ có cạnh là đường thẳng OA , hai nửa mặt phẳng bờ OA lần lượt chứa B và chứa C .

Tại điểm O thuộc cạnh OA , tia OB nằm trong nửa mặt phẳng thứ nhất và $OB \perp OA$; tia OC nằm trong nửa mặt phẳng thứ hai và $OC \perp OA$. Do đó $\widehat{BOC}$ chính là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[B, OA, C]$.

Theo giả thiết $OB \perp OC$ nên $\widehat{BOC} = 90^\circ$.

Chọn đáp án A.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			4			$+\infty$
	$-\infty$			-1		

Gọi $M(x_1; y_1)$ và $N(x_2; y_2)$ lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Giá trị của biểu thức $T = 2x_1 + x_2 - y_1 \cdot y_2$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. 0.

D. -4.

Lời giải

Từ bảng biến thiên: đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua -1 nên $x = -1$ là điểm cực đại và $f(-1) = 4$; đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua 2 nên $x = 2$ là điểm cực tiểu và $f(2) = -1$.

Do đó $M(-1; 4)$ và $N(2; -1)$, tức là $x_1 = -1, y_1 = 4, x_2 = 2, y_2 = -1$. Suy ra

$$T = 2 \cdot (-1) + 2 - 4 \cdot (-1) = -2 + 2 + 4 = 4.$$

Chọn đáp án B.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc tọa độ O , các véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với các véc-tơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 4, AD = 3, AA' = 6$. Khi đó, véc-tơ $\overrightarrow{AC'}$ có tọa độ là

A. (4; 3; 6).

B. (3; 6; 4).

C. (3; 4; 6).

D. (6; 3; 4).

Lời giải

Theo giả thiết, $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} = (4; 0; 0), \overrightarrow{AD} = 3\vec{j} = (0; 3; 0)$ và $\overrightarrow{AA'} = 6\vec{k} = (0; 0; 6)$.

Áp dụng quy tắc hình hộp cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = (4; 0; 0) + (0; 3; 0) + (0; 0; 6) = (4; 3; 6).$$

Chọn đáp án A.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 15x - 2$ có đồ thị là (C) . Hệ số góc nhỏ nhất của tiếp tuyến tại một điểm M thuộc đồ thị (C) là

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 0.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$. Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M là

$$k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 12x_0 + 15 = 3(x_0 - 2)^2 + 3.$$

Vì $(x_0 - 2)^2 \geq 0$ với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$ nên $k \geq 3$; dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_0 = 2$.

Vậy hệ số góc nhỏ nhất bằng 3, đạt được tại điểm $M(2; 12)$.

Chọn đáp án B.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 2)$, $B(5; 2; 1)$ và $C(2; 0; 3)$. Tìm điểm M trên trục Ox sao cho AM vuông góc với BC .

- A. $M(-5; 0; 0)$. B. $M(1; 0; 0)$. C. $M(2; 0; 0)$. D. $M(-1; 0; 0)$.

Lời giải

Vì M thuộc trục Ox nên $M(m; 0; 0)$ với $m \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\overrightarrow{AM} = (m - 1; 1; -2), \quad \overrightarrow{BC} = (-3; -2; 2).$$

Điều kiện $AM \perp BC$ tương đương $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, tức là

$$-3(m - 1) + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow -3m + 3 - 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy $M(-1; 0; 0)$.

Chọn đáp án D.

Câu 12. Một hệ thống cảnh báo cháy tự động của một tòa nhà được lắp đặt hai cảm biến A và B hoạt động độc lập với nhau. Khi xảy ra sự cố cháy, xác suất để cảm biến A và cảm biến B phát tín hiệu cảnh báo tương ứng là 0,9 và 0,85. Tính xác suất để khi xảy ra sự cố cháy, tòa nhà nhận được tín hiệu cảnh báo từ ít nhất một trong hai cảm biến.

- A. 0,765. B. 0,975. C. 0,985. D. 0,925.

Lời giải

Gọi A là biến cố “cảm biến A phát tín hiệu” và B là biến cố “cảm biến B phát tín hiệu”. Theo giả thiết $P(A) = 0,9$, $P(B) = 0,85$ và A, B độc lập.

Biến cố “có ít nhất một cảm biến phát tín hiệu” là $A \cup B$, biến cố đối của nó là $\overline{A} \cap \overline{B}$. Vì A và B độc lập nên $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập, do đó

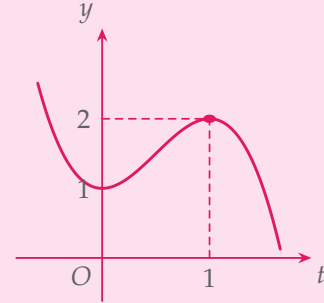
$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - 0,1 \cdot 0,15 = 1 - 0,015 = 0,985.$$

Chọn đáp án C.

PHẦN II. (4,0 ĐIỂM) — TRẮC NGHIỆM ĐÚNG, SAI

Học sinh trả lời câu hỏi từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a) b) c) d) ở mỗi câu, học sinh chỉ chọn Đúng hoặc Sai.

Câu 1. Một công ty khởi nghiệp mô hình hóa tốc độ tăng trưởng doanh thu hàng năm $y = f(t)$ (đơn vị: tỷ đồng/năm) theo thời gian t (đơn vị: năm, với $t \geq 0$) bằng một hàm số đa thức bậc ba $y = at^3 + bt^2 + ct + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên.



- a) Công thức xác định tốc độ tăng trưởng doanh thu của công ty là $f(t) = -2t^3 + 3t^2 + 1$. ☐
- b) Doanh thu của công ty đạt tốc độ tăng trưởng cực đại tại thời điểm $t = 2$ năm. ☐
- c) Trong năm đầu tiên ($0 \leq t \leq 1$), tốc độ tăng trưởng doanh thu của công ty luôn có xu hướng tăng. ☐
- d) Tại thời điểm $t = 1,5$ năm, tốc độ tăng trưởng doanh thu của công ty đạt giá trị bằng 2 tỷ đồng/năm. ☐

Lời giải

• **Xác định hàm số.** Ta có $f'(t) = 3at^2 + 2bt + c$. Từ đồ thị, điểm $(0; 1)$ là điểm cực tiểu và điểm $(1; 2)$ là điểm cực đại, do đó

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad f'(1) = 0.$$

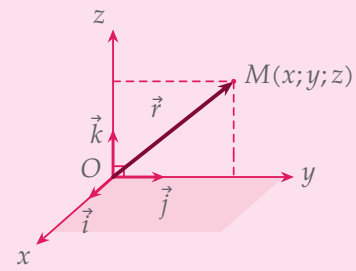
Lần lượt suy ra $d = 1; c = 0; a + b + 1 = 2; 3a + 2b = 0$. Giải hệ hai phương trình cuối cùng được $a = -2, b = 3$. Vậy $f(t) = -2t^3 + 3t^2 + 1$ và $f'(t) = -6t^2 + 6t = 6t(1 - t)$.

- **a) Đúng.** Theo kết quả trên, $f(t) = -2t^3 + 3t^2 + 1$.
- **b) Sai.** Trên $[0; +\infty)$, $f'(t) = 6t(1 - t)$ đổi dấu từ dương sang âm khi t đi qua 1 nên $t = 1$ là điểm cực đại; tại $t = 2$ hàm số không đạt cực đại.
- **c) Đúng.** Với $0 < t < 1$ thì $6t > 0$ và $1 - t > 0$ nên $f'(t) > 0$; do đó f đồng biến trên đoạn $[0; 1]$, tức tốc độ tăng trưởng doanh thu tăng trong năm đầu tiên.
- **d) Sai.** $f(1,5) = -2 \cdot (1,5)^3 + 3 \cdot (1,5)^2 + 1 = -6,75 + 6,75 + 1 = 1$ (tỷ đồng/năm).

Đáp số. a) Đ b) S c) Đ d) S

Câu 2. Trong một ca trực tại Trạm kiểm soát không lưu sân bay Tân Sơn Nhất, các kỹ sư ra-đa thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục tính bằng ki-lô-mét) với gốc $O(0;0;0)$ là vị trí đặt tháp điều hành không lưu.

Lúc 8 giờ sáng, hệ thống theo dõi một máy bay thương mại đang ở vị trí $M_0(50;120;4)$ (nghĩa là cách tháp điều hành 50 km về hướng Đông, 120 km về hướng Bắc và ở độ cao 4 km). Máy bay đang bay ổn định với véc-tơ vận tốc không đổi là $\vec{v} = (300;400;3)$ (đơn vị: km/h).



- Tại thời điểm 8 giờ sáng, khoảng cách từ máy bay đến tháp điều hành không lưu xấp xỉ 130 km (sai số không quá 1 km). ☐
- Tại thời điểm 9 giờ sáng, độ cao của máy bay so với mặt đất là 8 km. ☐
- Tại thời điểm 10 giờ sáng, khoảng cách từ máy bay đến tháp truyền hình $F(1\,250;1\,020;0)$ xấp xỉ 700 km (sai số không quá 10 km). ☐
- Khi đạt độ cao 10 km, máy bay nhận lệnh hạ cánh và đổi sang vận tốc mới là $\vec{v}_2 = (400;300;-5)$ km/h để hướng về đường băng B. Tọa độ của máy bay ngay khi chạm đất tại đường băng B là $(1\,450;1\,520;0)$. ☐

Lời giải

- **Phương trình chuyển động.** Sau t giờ kể từ 8 giờ sáng, máy bay ở vị trí

$$M(t) = (50 + 300t; 120 + 400t; 4 + 3t).$$

- **a) Đúng.** $OM_0 = \sqrt{50^2 + 120^2 + 4^2} = \sqrt{16\,916} \approx 130,06$ (km), sai khác so với 130 km không quá 1 km.
- **b) Sai.** Lúc 9 giờ sáng ứng với $t = 1$, cao độ của máy bay là $4 + 3 \cdot 1 = 7$ (km).
- **c) Sai.** Lúc 10 giờ sáng ứng với $t = 2$, máy bay ở vị trí $M(650;920;10)$. Khi đó

$$MF = \sqrt{(1\,250 - 650)^2 + (1\,020 - 920)^2 + (0 - 10)^2} = \sqrt{370\,100} \approx 608,4 \text{ (km)},$$

sai khác so với 700 km lớn hơn 10 km.

- **d) Đúng.** Máy bay đạt độ cao 10 km khi $4 + 3t = 10$, tức $t = 2$; lúc đó máy bay ở vị trí $M_1(650;920;10)$. Kể từ thời điểm này, sau s giờ bay với véc-tơ vận tốc $\vec{v}_2$, máy bay ở vị trí $(650 + 400s; 920 + 300s; 10 - 5s)$. Máy bay chạm đất khi $10 - 5s = 0$, tức $s = 2$, ứng với tọa độ

$$(650 + 800; 920 + 600; 0) = (1\,450;1\,520;0).$$

Đáp số. a) Đ b) S c) S d) Đ

Câu 3. Một công ty công nghệ phân tích hiệu quả của chiến dịch tiếp thị ứng dụng mới. Tổng thời gian người dùng tương tác tích lũy trên hệ thống theo thời gian t ($t \geq 0$, tính bằng tuần) được mô hình hóa bởi hàm số $x(t) = 2t - 2\ln(t+1)$ (đơn vị: triệu giờ). Hàm số $v(t) = x'(t)$ biểu thị tốc độ tương tác của người dùng tại thời điểm t (đơn vị: triệu giờ/tuần).

- a) $v(t) = 2 - \frac{3}{t+1}$. ☐
- b) Tốc độ tương tác tại thời điểm ban đầu ($t = 0$) là 2 triệu giờ/tuần. ☐
- c) Tốc độ tương tác tại thời điểm $t = 1$ tuần bằng 1 triệu giờ/tuần. ☐
- d) Gia tốc tương tác của người dùng tại thời điểm $t = 1$ tuần bằng 0,5 triệu giờ/tuần². ☐

Lời giải

- **Tính tốc độ và gia tốc.** Với $t \geq 0$,

$$v(t) = x'(t) = 2 - \frac{2}{t+1}, \quad a(t) = v'(t) = \frac{2}{(t+1)^2}.$$

- **a) Sai.** Theo kết quả trên, $v(t) = 2 - \frac{2}{t+1}$ chứ không phải $2 - \frac{3}{t+1}$.
- **b) Sai.** $v(0) = 2 - \frac{2}{0+1} = 0$ (triệu giờ/tuần).
- **c) Đúng.** $v(1) = 2 - \frac{2}{1+1} = 1$ (triệu giờ/tuần).
- **d) Đúng.** $a(1) = \frac{2}{(1+1)^2} = 0,5$ (triệu giờ/tuần²).

Đáp số. a) S b) S c) Đ d) Đ

Câu 4. Xét phép thử chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Xét biến cố A: “Số được chọn là số chia hết cho 8” và biến cố B: “Số được chọn là số có hai chữ số giống nhau”.

- a) Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 89$. ☐
- b) Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{11}{90}$. ☐
- c) Xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{1}{10}$. ☐
- d) Xác suất của biến cố hợp $A \cup B$ là $P(A \cup B) = \frac{2}{9}$. ☐

Lời giải

- **Không gian mẫu.** Các số tự nhiên có hai chữ số là 10; 11; ...; 99, gồm $99 - 10 + 1 = 90$ số. Vậy $n(\Omega) = 90$.
- **a) Sai.** Theo trên, $n(\Omega) = 90$.
- **b) Đúng.** Các số có hai chữ số chia hết cho 8 là 16; 24; ...; 96, lập thành một cấp số cộng với công sai 8, gồm $\frac{96-16}{8} + 1 = 11$ số. Do đó $P(A) = \frac{11}{90}$.

- **c) Đúng.** Các số có hai chữ số giống nhau là 11; 22; ...; 99, gồm 9 số. Do đó $P(B) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$.
- **d) Sai.** Biến cố $A \cap B$ gồm các số có hai chữ số giống nhau và chia hết cho 8; kiểm tra trực tiếp chín số 11; 22; ...; 99 chỉ có 88 = 8 · 11 thỏa mãn, nên $n(A \cap B) = 1$. Theo công thức cộng xác suất,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{90} + \frac{9}{90} - \frac{1}{90} = \frac{19}{90} \neq \frac{2}{9}.$$

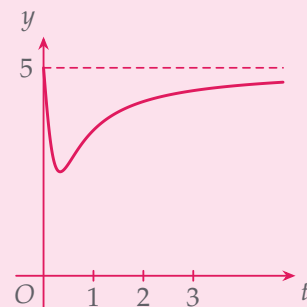
Đáp số. a) S b) Đ c) Đ d) S

PHẦN III. (3,0 ĐIỂM) — TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Học sinh trả lời câu hỏi từ câu 1 đến câu 6, mỗi câu trả lời đúng 0,5 điểm.

Câu 1. Trong một dự án giám sát sinh thái hồ, các chuyên gia môi trường mô hình hóa nồng độ oxygen hòa tan DO (đơn vị: mg/L) trong nước hồ sau t giờ ($t \geq 0$) kể từ khi xảy ra sự cố xả thải hữu cơ bằng hàm số $y = f(t)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng nồng độ oxygen hòa tan được xấp xỉ bởi công thức $f(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$.

Đạo hàm $f'(t)$ biểu thị tốc độ thay đổi nồng độ oxygen trong nước hồ (đơn vị: mg/(L·giờ)). Tốc độ phục hồi (hoặc gia tăng) nồng độ oxygen hòa tan trong hồ đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = \frac{\sqrt{a}}{b}$ giờ (a và b là các số nguyên tố). Tính giá trị của biểu thức $P = a - b$.



KQ:

Lời giải

- **Tốc độ thay đổi nồng độ oxygen.** Với $t \geq 0$,

$$f'(t) = -15 \cdot \frac{(9t^2 + 1) - t \cdot 18t}{(9t^2 + 1)^2} = \frac{15(9t^2 - 1)}{(9t^2 + 1)^2}.$$

- **Tìm thời điểm tốc độ đó lớn nhất.** Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất của hàm số f' trên $[0; +\infty)$. Ta có

$$f''(t) = 15 \cdot \frac{18t(9t^2 + 1) - (9t^2 - 1) \cdot 36t}{(9t^2 + 1)^3} = \frac{270t(3 - 9t^2)}{(9t^2 + 1)^3}.$$

Với $t > 0$, dấu của $f''(t)$ cùng dấu với $3 - 9t^2$, nên $f''(t) > 0$ khi $0 < t < \frac{\sqrt{3}}{3}$ và $f''(t) < 0$ khi $t > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Do đó f' đồng biến trên $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ và nghịch biến trên $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$, nên f' đạt giá trị lớn nhất tại $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, với giá trị lớn nhất bằng $\frac{15}{8}$ mg/(L·giờ).

- **Kết luận.** So sánh với $t = \frac{\sqrt{a}}{b}$ ta được $a = 3, b = 3$ (đều là số nguyên tố), suy ra $P = a - b = 0$.

Đáp số. $P = 0$.

Câu 2. Một doanh nghiệp công nghệ khởi nghiệp (Startup) chuẩn bị mở rộng quy mô và cần thuê một mặt bằng làm trung tâm kho vận phân phối hàng hóa trong thời hạn 15 năm. Sau khi khảo sát, doanh nghiệp nhận được hai phương án hợp đồng từ hai đơn vị cho thuê bất động sản như sau:

- **Phương án 1 (Thanh toán theo quý):** Tiền thuê quý đầu tiên là 10 triệu đồng; từ quý thứ hai trở đi, tiền thuê mỗi quý tăng thêm 500 000 đồng so với quý trước đó.
- **Phương án 2 (Thanh toán theo năm):** Tiền thuê năm đầu tiên là 70 triệu đồng; từ năm thứ hai trở đi, tiền thuê mỗi năm tăng thêm 3 triệu đồng so với năm trước đó.

Để tối ưu hóa ngân sách, doanh nghiệp nên chọn phương án nào để tổng chi phí thuê mặt bằng trong 15 năm là thấp nhất? Số tiền chi phí thấp nhất đó bằng bao nhiêu triệu đồng?

KQ:

Lời giải

- **Phương án 1.** Số tiền thuê các quý lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 10$ và công sai $d = 0,5$ (triệu đồng). Thời hạn 15 năm gồm $n = 15 \cdot 4 = 60$ quý, nên tổng chi phí

$$S_{60} = \frac{60}{2} [2 \cdot 10 + (60 - 1) \cdot 0,5] = 30 \cdot 49,5 = 1\,485 \text{ (triệu đồng)}.$$

- **Phương án 2.** Số tiền thuê các năm lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 70$ và công sai $d = 3$ (triệu đồng), gồm $n = 15$ số hạng, nên tổng chi phí

$$S_{15} = \frac{15}{2} [2 \cdot 70 + (15 - 1) \cdot 3] = \frac{15}{2} \cdot 182 = 1\,365 \text{ (triệu đồng)}.$$

- **So sánh.** Vì $1\,365 < 1\,485$ nên doanh nghiệp chọn phương án 2; tổng chi phí thấp nhất là 1 365 triệu đồng.

Đáp số. 1365.

Câu 3. Gọi n, d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1) \cdot \sqrt{x}}. \text{ Tính giá trị của biểu thức } T = 26n - 27d.$$

KQ:

Lời giải

- **Tập xác định.** Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - x \geq 0, x > 0$ và $x - 1 \neq 0$, tức là $0 < x < 1$. Vậy tập xác định là $D = (0; 1)$.

- **Tiệm cận ngang.** Do $D = (0; 1)$ bị chặn nên không xét được giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow +\infty$ hay $x \rightarrow -\infty$; đồ thị không có tiệm cận ngang, suy ra $n = 0$.

- **Tiệm cận đứng.** Với $0 < x < 1$ ta có $x - 1 = -(1 - x) < 0$, do đó

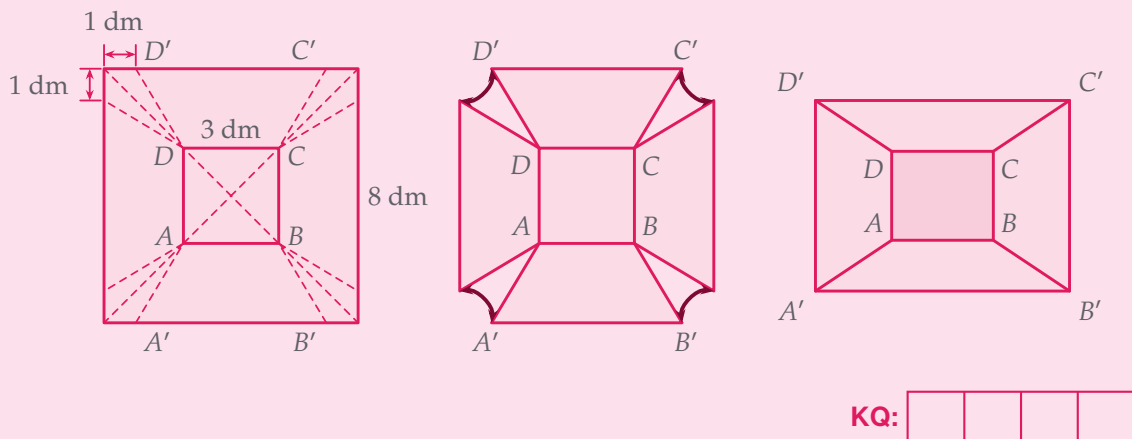
$$y = \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{-(1-x)\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x}}.$$

Khi $x \rightarrow 0^+$ thì $\sqrt{1-x} \rightarrow 1$ và $\sqrt{x} \rightarrow 0^+$ nên $y \rightarrow -\infty$; do đó $x = 0$ là một tiệm cận đứng. Khi $x \rightarrow 1^-$ thì $\sqrt{x} \rightarrow 1$ và $\sqrt{1-x} \rightarrow 0^+$ nên $y \rightarrow -\infty$; do đó $x = 1$ là một tiệm cận đứng. Vậy $d = 2$.

• **Kết luận.** $T = 26 \cdot 0 - 27 \cdot 2 = -54$.

Đáp số. $T = -54$.

Câu 4. Để chuẩn bị cho hội chợ “Ý tưởng xanh”, bạn Nam dự định làm một chiếc khay trồng rau mầm thủy canh dạng hình chóp cụt đều không có nắp. Từ một tấm vật liệu tái chế hình vuông có cạnh 8 dm, Nam cắt bỏ bốn phần giống nhau ở bốn góc, sau đó gấp tạo hình rồi hàn các mép lại để được chiếc khay như hình vẽ bên dưới. Biết đáy khay là hình vuông có cạnh bằng 3 dm. Hỏi chiều cao của chiếc khay trồng rau này bằng bao nhiêu đề-xi-mét?

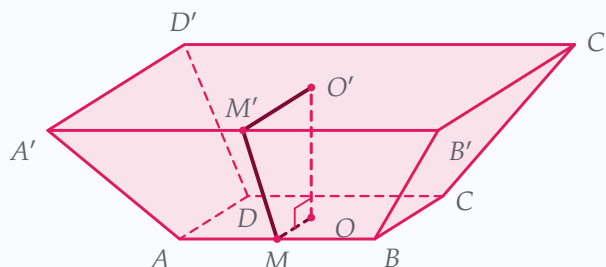


KQ:

Lời giải

• **Xác định hai đáy của hình chóp cụt.** Theo hình vẽ, ở mỗi góc của tấm vuông, phần bị cắt bỏ được giới hạn bởi hai điểm nằm trên hai cạnh kề và cách đỉnh góc đó 1 dm. Do đó mỗi mép ngoài của khay có độ dài $8 - 2 \cdot 1 = 6$ (dm). Vậy khay là hình chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy nhỏ $ABCD$ cạnh 3 dm và đáy lớn (miệng khay) $A'B'C'D'$ cạnh 6 dm.

• **Trung đoạn của mặt bên.** Mỗi mặt bên là một hình thang cân; trên tấm phẳng, khoảng cách giữa hai đáy DC và $D'C'$ của hình thang bằng $\frac{8-3}{2} = 2,5$ (dm). Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$, khi đó $MM' = 2,5$ dm.



• **Tính chiều cao.** Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Khi đó OO' vuông góc với hai mặt đáy và OO' chính là chiều cao h của khay. Ta có

$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ (dm)}, \quad O'M' = \frac{A'B'}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (dm)}.$$

Tứ giác $OMM'O'$ là hình thang vuông tại O và M (vì OM và $O'M'$ cùng vuông góc với AB , $A'B'$ và cùng song song với nhau). Hạ đường vuông góc, ta được tam giác vuông có cạnh huyền MM' và hai cạnh góc vuông là OO' và $O'M' - OM$. Do đó

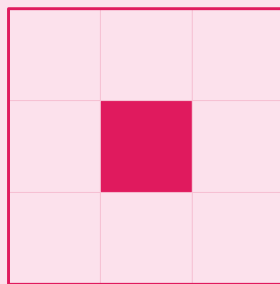
$$h = OO' = \sqrt{MM'^2 - (O'M' - OM)^2} = \sqrt{2,5^2 - 1,5^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ (dm)}.$$

Đáp số. Chiều cao của khay bằng 2 dm.

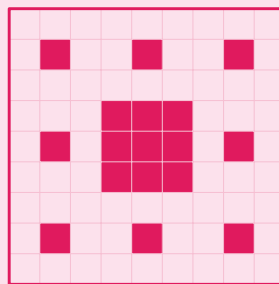
Câu 5. Trong một dự án nghiên cứu công nghệ vật liệu mới, các kỹ sư thiết kế một tấm pin năng lượng mặt trời dạng hình vuông có cạnh 1 m. Để tối ưu hóa khả năng hấp thụ ánh sáng và tản nhiệt, mặt tấm pin được phủ các lớp vi mạch cảm biến dạng phân mảnh (fractal).

Ban đầu, tấm pin hình vuông được chia thành 9 ô vuông nhỏ bằng nhau, ô vuông ở chính giữa được phủ một lớp vật liệu cảm biến sẫm màu (màu đen). Ở giai đoạn tiếp theo, mỗi ô vuông màu sáng còn lại tiếp tục được chia thành 9 ô vuông nhỏ hơn và ô chính giữa của nó lại được phủ vật liệu cảm biến sẫm màu. Quá trình chia nhỏ và phủ vi mạch sẫm màu này được thực hiện liên tiếp đúng 5 lần.

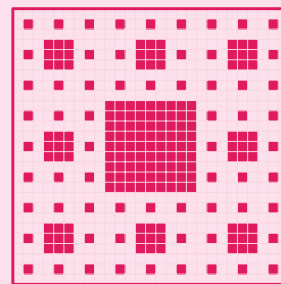
Tính tổng diện tích mặt tấm pin đã được phủ vật liệu cảm biến sẫm màu sau 5 lần thực hiện theo đơn vị mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Giai đoạn 1



Giai đoạn 2



Giai đoạn 3

KQ:

Lời giải

• **Diện tích phần sáng sau mỗi lần thực hiện.** Gọi S_k là diện tích phần còn sáng sau lần thực hiện thứ k ; quy ước $S_0 = 1 \text{ m}^2$. Ở mỗi lần thực hiện, mỗi ô sáng được chia thành 9 ô bằng nhau và bị phủ sẫm đúng 1 ô, nên phần sáng còn lại bằng $\frac{8}{9}$ phần sáng trước đó:

$$S_k = \frac{8}{9} S_{k-1} \quad (k = 1; 2; \dots; 5).$$

Dãy (S_k) là một cấp số nhân với $S_0 = 1$ và công bội $q = \frac{8}{9}$, do đó $S_5 = \left(\frac{8}{9}\right)^5 = \frac{32768}{59049}$.

• **Diện tích phần được phủ.** Tổng diện tích đã phủ vật liệu cảm biến sẫm màu là

$$S = S_0 - S_5 = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^5 = \frac{26281}{59049} \approx 0,445.$$

Làm tròn đến hàng phần trăm được $0,45 \text{ m}^2$.

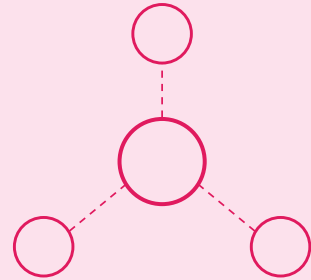
Đáp số. 0,45.

Câu 6. Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 12\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt từ tập X . Trong 4 số được chọn, ta đặt 1 số vào vòng tròn lớn ở chính giữa, 3 số còn lại được đặt vào ba vòng tròn nhỏ xung quanh (biết rằng ba vòng tròn nhỏ này không phân biệt vị trí).

Gọi P là xác suất để các số được đặt thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- Ba số ở ba vòng tròn nhỏ có thể sắp xếp thành một cấp số cộng tăng.
- Số ở vòng tròn lớn chính giữa bằng tổng của cả ba số ở ba vòng tròn nhỏ.

Tính giá trị của biểu thức $33\,990P$.



KQ:

Lời giải

• **Không gian mẫu.** Mỗi kết quả của phép thử được xác định bởi số đặt ở vòng tròn lớn và tập hợp ba số đặt ở ba vòng tròn nhỏ (ba vòng tròn nhỏ không phân biệt vị trí). Số ở vòng tròn lớn có 12 cách chọn, ba số còn lại có $C_{11}^3 = 165$ cách chọn. Do đó

$$n(\Omega) = 12 \cdot 165 = 1\,980.$$

• **Đếm kết quả thuận lợi.** Gọi ba số ở ba vòng tròn nhỏ, sắp xếp tăng dần, là $b-k, b, b+k$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Tổng của chúng bằng $3b$, nên số ở vòng tròn lớn là $3b$. Điều kiện cần là $1 \leq b-k, b+k \leq 12, 3b \leq 12$ và $3b$ khác cả ba số $b-k, b, b+k$.

Từ $3b \leq 12$ suy ra $b \leq 4$; từ $b-k \geq 1$ suy ra $k \leq b-1$, nên $b \geq 2$.

- $b = 2: k = 1$, được bộ $\{1; 2; 3\}$, số ở giữa là 6 (thỏa mãn).
- $b = 3: k \in \{1; 2\}$, được các bộ $\{2; 3; 4\}, \{1; 3; 5\}$, số ở giữa là 9 (thỏa mãn).
- $b = 4: k \in \{1; 2; 3\}$, được các bộ $\{3; 4; 5\}, \{2; 4; 6\}, \{1; 4; 7\}$, số ở giữa là 12 (thỏa mãn).

Trong mọi trường hợp, điều kiện $b+k \leq 12$ đều được thỏa mãn. Vậy số kết quả thuận lợi là $1+2+3 = 6$.

• **Kết luận.** $P = \frac{6}{1\,980} = \frac{1}{330}$, do đó $33\,990P = \frac{33\,990}{330} = 103$.

Đáp số. 103.