

Họ tên học sinh:.....; Số báo danh:.....

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

- Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên dưới. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực đại?

x	$-\infty$	0	1	2	4	$+\infty$
y'	-	0	+	-	0	+

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

- Câu 2.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(1-2x) \geq \log_2 3$ là

- A. $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-\infty; -1]$. D. $\left[-1; \frac{1}{2}\right)$.

- Câu 3.** Mỗi ngày bác Tùng đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

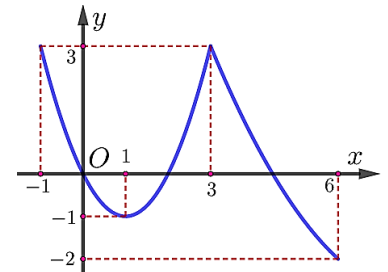
Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 3,39. B. 11,62. C. 0,36. D. 0,1314.

- Câu 4.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; +\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1; 4]$.

- A. 0.
B. 1.
C. 4.
D. 3.



- Câu 5.** Thể tích V của khối lăng trụ có diện tích đáy S , chiều cao h là

- A. $V = \frac{1}{3}S \cdot h$. B. $V = S \cdot h$. C. $V = S^2 \cdot h$. D. $V = \frac{1}{3}S^2 \cdot h$.

- Câu 6.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k\overrightarrow{BB'}$

- A. $k = 4$. B. $k = 1$. C. $k = 0$. D. $k = 2$.

- Câu 7.** Cho $\int_1^2 e^{3x-1} dx = m(e^p - e^q)$ với $m, p, q \in \mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m + p + q$ bằng

- A. $\frac{22}{3}$. B. 6. C. 8. D. 10.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \log_2(1 + 2^x)$. Tính giá trị $S = f'(0) + f'(1)$.

A. $S = \frac{6}{5}$.

B. $S = \frac{7}{8}$.

C. $S = \frac{7}{6}$.

D. $S = \frac{7}{5}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 16x - 12y - 15z - 4 = 0$ và điểm $A(2; -1; -1)$. Gọi H là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (P) . Tính độ dài đoạn thẳng AH .

A. 5.

B. $\frac{11}{5}$.

C. $\frac{11}{25}$.

D. $\frac{22}{5}$.

Câu 10. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang là $y = 3$. Hiệu $a - 2b$ có giá trị là

A. 4.

B. 0.

C. 1.

D. 5.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z + 8 = 0$. Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 1 = 0$ và $(\beta): x - 2z - 3 = 0$. Góc φ là góc giữa d và (P) , tính φ .

A. $\varphi = 45^\circ$.

B. $\varphi = 30^\circ$.

C. $\varphi = 90^\circ$.

D. $\varphi = 60^\circ$.

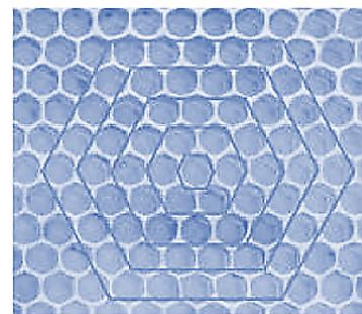
Câu 12. Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới được tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô lục giác đầu tiên, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác bao quanh; tiếp theo các ong thợ sẽ tạo ra vòng 2 có 12 ô lục giác bao quanh vòng 1; vòng 3 gồm 18 ô lục giác bao quanh vòng 2; cứ tiếp tục theo quy luật đó tổ ong được hình thành. Số ô trên các vòng theo thứ tự tạo thành cấp số cộng có công sai d bằng

A. 5.

B. 6.

C. 2.

D. 4.



PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hai hàm số $f(x) = 2\sin x - 1$, $g(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.	☐	☐
b) Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; \pi]$.	☐	☐
c) Phương trình $f(x).g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$	☐	☐
d) Phương trình $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.	☐	☐

- Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là km , một con tàu vũ trụ bay theo đường thẳng d_1 đi qua điểm $A(1; -3; 4)$ với vectơ vận tốc $\vec{v}_1 = (2; -1; 3) \text{ km/s}$. Một tiểu hành tinh bay theo đường thẳng d_2 đi qua điểm $B(3; -4; 5)$ với vectơ vận tốc $\vec{v}_2 = (1; 2; -1) \text{ km/s}$.
Chọn mốc thời gian $t = 0$ (giây) khi tàu vũ trụ ở vị trí A và tiểu hành tinh ở vị trí B .



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Hai quỹ đạo chuyển động d_1 và d_2 là hai đường thẳng chéo nhau.	☐	☐
b) Góc giữa hai quỹ đạo chuyển động của tàu vũ trụ và tiểu hành tinh bằng 60° .	☐	☐
c) Đúng 10 giây sau thì khoảng cách giữa chúng bằng $48,31 \text{ km}$ (làm tròn đến hàng phần trăm).	☐	☐
d) Khoảng cách ngắn nhất giữa tàu vũ trụ và tiểu hành tinh trong quá trình chuyển động là $\frac{\sqrt{42}}{4} \text{ km}$.	☐	☐

- Câu 3.** Tại một thị trấn thuộc hòn đảo Greenland xinh đẹp, thống kê cho biết:
- Có 70% hộ gia đình có người trưởng thành đang đi làm.
 - Trong các hộ có người trưởng thành đi làm, có 40% hộ có thu nhập lớn hơn 200 000 DKK/năm.
 - Trong các hộ không có người trưởng thành đang đi làm (thu nhập hộ nếu có đến từ lương hưu, trợ cấp, thu nhập tài sản...), có 10% hộ có thu nhập lớn hơn 200 000 DKK/năm.
- Chọn ngẫu nhiên 1 hộ gia đình thuộc thị trấn nói trên.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Biết hộ được chọn không có người trưởng thành đi làm, xác suất hộ đó có thu nhập lớn hơn 200 000 DKK/năm là 15%.	☐	☐
b) Tỷ lệ hộ vừa có người trưởng thành đi làm vừa có thu nhập hộ lớn hơn 200 000 DKK/năm là 30%.	☐	☐
c) Tỷ lệ hộ có thu nhập lớn hơn 200 000 DKK/năm là 29%.	☐	☐

d) Biết hộ có thu nhập lớn hơn 200 000 ĐKK/năm, xác suất hộ đó có người trưởng thành đi làm bằng $\frac{28}{31}$.



Câu 4. Tháp giải nhiệt tại nhà máy Nhiệt điện Phả Lại (Tỉnh Hải Dương, Việt Nam) có mặt cắt qua trục theo phương thẳng đứng là một hình hypebol (H). Tháp có chiều cao là 120 mét, bán kính đáy dưới bằng 40 mét.

Một nhóm kỹ sư đã thiết lập hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ sao cho mặt cắt dạng hypebol của tháp nhận Ox , Oy làm các trục đối xứng; lấy đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết rằng đoạn giao nhau giữa trục Ox với tháp bằng 30 mét và gốc O ở vị trí có độ cao 80 mét so với mặt đất.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:

Đúng

Sai

a) Diện tích đáy dưới của tháp bằng 5027 m^2 (làm tròn đến hàng đơn vị).



b) Các điểm $(-20; 0)$, $(20; 0)$ thuộc hypebol (H).



c) Phương trình (H) là $\frac{x^2}{15^2} - \frac{y^2}{11520} = 1$.



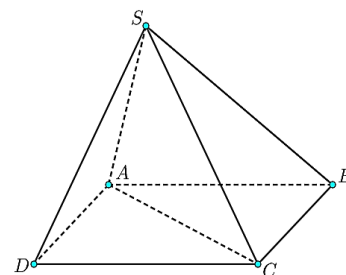
d) Thể tích của tháp giải nhiệt này bằng 214414 m^3 (làm tròn đến hàng đơn vị).



PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $3a^3$ và mặt đáy $ABCD$ là hình bình hành. Biết diện tích tam giác SAB bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, khoảng cách giữa SB và CD bằng $m \times a$ với $m \in \mathbb{R}$. Tính giá trị m và làm tròn đến hàng phần chục.

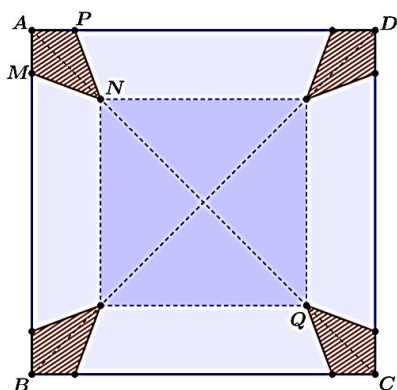
Trả lời:



Câu 2. Một nhà mạng cần phủ sóng 5G dọc theo một tuyến đường thẳng dài 100 (km) nối hai thành phố A và B (tại A và B đã có trạm phát chính). Họ cần xây thêm các trạm thu phát sóng phụ ở giữa với khoảng cách đều nhau. Chi phí xây dựng mỗi trạm phụ là 320 triệu đồng. Chi phí kéo cáp quang nối giữa hai trạm liên kế với khoảng cách x (km) là $x(5 + 2x)$ (triệu đồng). Hỏi nhà mạng cần xây thêm bao nhiêu trạm phụ để tổng chi phí thi công là thấp nhất ?

Trả lời:

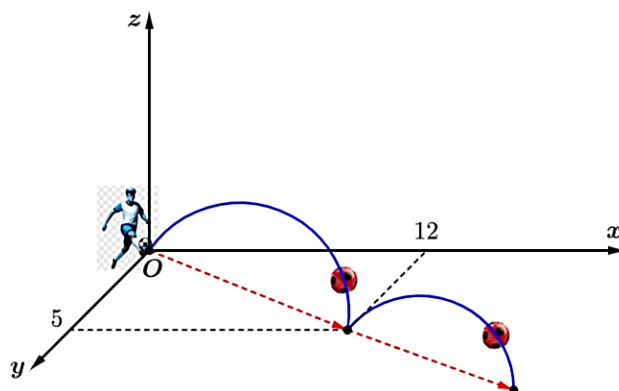
Câu 3. Từ một tấm nhôm hình vuông có cạnh bằng 8 dm, người ta cắt bỏ bốn tứ giác bằng nhau (cùng bằng tứ giác $AMNP$) ở bốn góc tấm nhôm đó, biết $AM = AP = 1$ dm và điểm N thuộc đường chéo AC . Với phần còn lại của tấm nhôm sau khi đã bỏ đi 4 tứ giác nói trên, người ta đã gấp các đoạn MN trùng với PN rồi dán kỹ bằng keo, làm tương tự cho 3 cặp đoạn còn lại, người ta thu được chậu nước hình chóp cụt tứ giác đều. Sức chứa lớn nhất của chậu nước hình chóp cụt tứ giác đều này là bao nhiêu lít (làm tròn đến hàng đơn vị, bỏ qua độ dày tấm nhôm)?



Trả lời:

Câu 4. Một quả bóng được phát lên từ vị trí gốc tọa độ O trong hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị mét). Quả bóng bay theo quỹ đạo parabol nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt sân bóng (Oxy) và rơi xuống vị trí cách Ox 5 m, cách Oy 12 m.

Trong các lần nảy tiếp theo, đường đi của quả bóng luôn là parabol với: Độ cao cực đại bằng 75% độ cao cực đại của lần nảy ngay trước đó; bề rộng (khoảng cách hai lần chạm đất liên tiếp) bằng 60% bề rộng của lần nảy ngay trước đó.

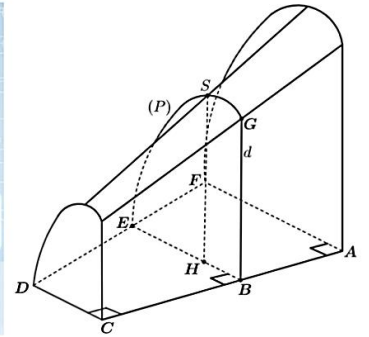


Biết độ cao cực đại của lần nảy đầu tiên là 4 m. Sau lần nảy thứ n ($n \in \mathbb{N}$) thì tổng độ dài hình chiếu vuông góc đường đi quả bóng lên mặt sân bằng 31,590208 m. Trong lần nảy thứ n đó, bóng đạt chiều cao cực đại tại $M(a; b; c)$. Tính $a + b + c$ và làm tròn kết quả đến hàng phần chục.

Trả lời:

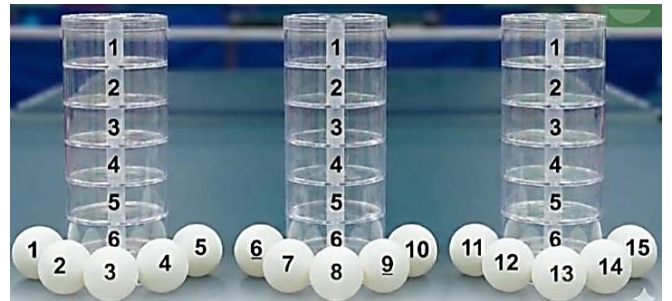
Câu 5. Một đường hầm hiện đại được thiết kế với mặt đáy là hình thang $ACDF$ vuông tại A và C ($AF \parallel CD$). Xét một thiết diện bất kì của đường hầm vuông góc với AC là một hình phẳng giới hạn bởi đường cong (P) , đoạn BE và đoạn BG như hình vẽ (G thuộc (P)). Giả sử (P) là một nhánh của parabol có đỉnh S và hình chiếu của S trên mặt nền là H , E là chân của parabol (E thuộc (P) và mặt đáy) thì $SH = 2EH$. Một mặt bên đường hầm có dạng mặt phẳng vuông góc với mặt đáy chứa đường thẳng AC , gọi B là hình chiếu vuông góc của G xuống mặt phẳng đáy thì $BE = BG$ và B thuộc đoạn AC . Biết $AC = 20$ mét, $AF = 2CD = 10$ m, tìm thể tích đường hầm trên và làm tròn đến hàng đơn vị của m^3 .

Trả lời:



Câu 6. Có 15 quả bóng được đánh số từ 1 tới 15 được bỏ vào 3 chiếc hộp mật nhãn (giống nhau), mỗi hộp có 6 ngăn được đánh số từ 1 tới 6 như hình vẽ, mỗi ngăn chứa tối đa 1 quả bóng. Biết rằng sau khi các quả bóng này được bỏ ngẫu nhiên vào các ngăn của mỗi hộp thì còn 3 ngăn trống (ngăn nào cũng có thể trống); gọi N là số cách thực hiện sao cho có đúng một hộp mà các quả bóng được bỏ vào có số tăng dần theo thứ tự trên xuống, đồng thời hộp đó chứa đủ 6 quả bóng, tính giá trị $\frac{N}{20175064}$.

Trả lời:



HẾT

ĐÁP ÁN MÃ ĐỀ 172

PHẦN I				PHẦN II				PHẦN III			
1D	2C	3D	4D	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 1	10,4	Câu 4	41,6
5B	6B	7A	8C	Sai	Đúng	Sai	Đúng	Câu 2	7	Câu 5	1167
				Sai	Sai	Sai	Sai				
9B	10C	11D	12B	Đúng	Sai	Sai	Sai	Câu 3	44	Câu 6	9900
				Sai	Sai	Đúng	Đúng				

ĐÁP ÁN MÃ ĐỀ 826

PHẦN I				PHẦN II				PHẦN III			
1B	2C	3B	4D	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 1	7	Câu 4	44
5D	6D	7C	8B	Sai	Đúng	Sai	Đúng	Câu 2	10,4	Câu 5	9900
				Sai	Sai	Sai	Sai				
9A	10B	11C	12D	Sai	Sai	Đúng	Sai	Câu 3	1167	Câu 6	41,6
				Đúng	Sai	Sai	Đúng				

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên dưới. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực đại?

x	$-\infty$	0	1	2	4	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm ta thấy y' đổi dấu từ dương sang âm 1 lần khi qua $x = 1$
Do đó hàm số đã cho có 1 điểm cực đại.

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(1-2x) \geq \log_2 3$ là

A. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-\infty; -1]$.

D. $\left[-1; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

$\log_2(1-2x) \geq \log_2 3 \Leftrightarrow 1-2x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -1$

Kết hợp điều kiện, ta được $x \leq -1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1]$.

Câu 3. Mỗi ngày bác Tùng đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	$[2,7; 3,0)$	$[3,0; 3,3)$	$[3,3; 3,6)$	$[3,6; 3,9)$	$[3,9; 4,2)$
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là:

A. 3,39.

B. 11,62.

C. 0,36.

D. 0,1314.

Lời giải

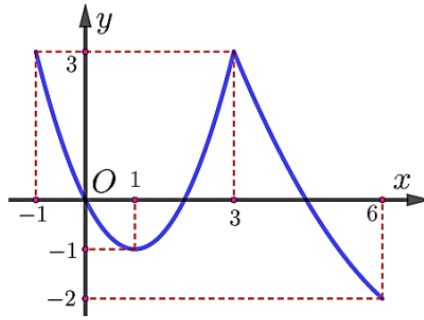
Ta có số trung bình là:

$$\bar{x} = \frac{3.2,85 + 6.3,15 + 5.3,45 + 4.3,75 + 2.4,05}{20} = 3,39.$$

Phương sai của mẫu số liệu là:

$$s_x^2 = \frac{3(2,85 - 3,39)^2 + 6(3,15 - 3,39)^2 + 5(3,45 - 3,39)^2 + 4(3,75 - 3,39)^2 + 2(4,05 - 3,39)^2}{20} = 0,1314.$$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $-1; +\infty$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1; 4]$.



A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Câu 5. Thể tích V của khối lăng trụ có diện tích đáy S , chiều cao h là

A. $V = \frac{1}{3} S.h$.

B. $V = S.h$.

C. $V = S^2.h$.

D. $V = \frac{1}{3} S^2.h$.

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức véc tơ:

$$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k\overrightarrow{BB'}$$

A. $k = 4$

B. $k = 1$

C. $k = 0$

D. $k = 2$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow k = 1$

Câu 7. Cho $\int_1^2 e^{3x-1} dx = m(e^p - e^q)$ với $m, n, p \in \mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị của $m + p + q$.

A. $\frac{22}{3}$.

B. 6.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 e^{3x-1} dx = \frac{1}{3} e^{3x-1} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (e^5 - e^2)$. Do đó,
$$\begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ p = 5 \\ q = 2 \end{cases}$$

Vậy $m + p + q = \frac{1}{3} + 5 + 2 = \frac{22}{3}$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \log_2(1 + 2^x)$. Tính giá trị $S = f'(0) + f'(1)$

A. $S = \frac{6}{5}$.

B. $S = \frac{7}{8}$.

C. $S = \frac{7}{6}$.

D. $S = \frac{7}{5}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{(1+2^x)\ln 2} \cdot (1+2^x)' = \frac{2^x}{1+2^x}$.

$f'(0) = \frac{1}{2}$; $f'(1) = \frac{2}{3}$. Vậy $S = f'(0) + f'(1) = \frac{7}{6}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 16x - 12y - 15z - 4 = 0$ và điểm $A(2; -1; -1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P) . Tính độ dài đoạn thẳng AH .

A. 5.

B. $\frac{11}{5}$.

C. $\frac{11}{25}$.

D. $\frac{22}{5}$.

Lời giải

Ta có $AH = d(A, (P)) = \frac{|16 \cdot 2 - 12 \cdot (-1) - 15 \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2}} = \frac{11}{5}$.

- Câu 10.** Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận ngang là $y=3$. Hiệu $a-2b$ có giá trị là
- A. 4. B. 0. **C. 1.** D. 5.

Lời giải

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = \frac{2}{b}$. Suy ra $\frac{2}{b} = 2 \Rightarrow b = 1$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{b}$. Suy ra $\frac{a}{b} = 3 \Rightarrow a = 3b = 3$.

Vậy $a-2b=1$

- Câu 11.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+4y+5z+8=0$. Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+1=0$ và $(\beta): x-2z-3=0$. Góc φ là góc giữa d và (P) , tính φ .
- A. $\varphi = 45^\circ$. B. $\varphi = 30^\circ$. C. $\varphi = 90^\circ$. **D. $\varphi = 60^\circ$.**

Lời giải

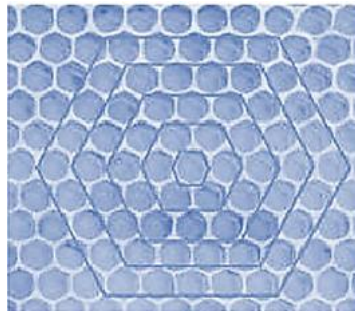
Ta có: $\vec{n}_p = (3; 4; 5)$, $\vec{n}_\alpha = (1; -2; 0)$ và $\vec{n}_\beta = (1; 0; -2)$.

Vì d là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nên $\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (4; 2; 2)$.

Do Góc φ là góc giữa d và (P) nên $\sin \varphi = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_p|}{|\vec{n}_p| \cdot |\vec{u}_d|} = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \varphi = 60^\circ$, chọn D.

- Câu 12.** Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới được tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô lục giác đầu tiên, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác bao quanh; tiếp theo các ong thợ sẽ tạo ra vòng 2 có 12 ô lục giác bao quanh vòng 1; vòng 3 gồm 18 ô lục giác bao quanh vòng 2; cứ tiếp tục theo quy luật đó tổ ong được hình thành. Số ô trên các vòng theo thứ tự tạo thành cấp số cộng có công sai d bằng



- A. 5. **B. 6.** C. 2. D. 4.

Lời giải

Số ô trên các vòng của tổ ong theo thứ tự tạo thành cấp số cộng có: $u_1 = 6, u_2 = 12$.

Vậy công sai $d = 12 - 6 = 6$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý (a), (b), (c), (d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai

- Câu 1.** Cho hai hàm số $f(x) = 2\sin x - 1$, $g(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; \pi]$.

$$\text{c) Phương trình } f(x).g(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{d) Phương trình } f(x)=g(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải

a) Sai

Ta giải phương trình $f(x)=0$:

$$2\sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$\Rightarrow$ Mệnh đề SAI.

b) Sai

Ta giải phương trình $g(x)=0$:

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Do cần tìm nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$, ta có:

$$0 \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{3}{4} + k \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{1}{4}$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên ta chỉ nhận giá trị $k=0$.

$$\text{Với } k=0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}.$$

Vậy phương trình $g(x)=0$ chỉ có một nghiệm duy nhất trên $[0; \pi]$. Mệnh đề khẳng định có hai nghiệm.

$\Rightarrow$ Mệnh đề SAI.

c) Đúng

Phương trình tích $f(x).g(x)=0$:

$$f(x).g(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$$

Dựa vào kết quả đã giải ở câu a và câu b, ta gộp các họ nghiệm lại:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Mệnh đề ĐÚNG.

d) Sai

Ta giải phương trình $f(x)=g(x)$:

$$2\sin x - 1 = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Khai triển vế phải bằng công thức cộng: $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$. Ta được:

$$2 \sin x - 1 = \cos x + \sin x \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \Rightarrow \text{Mệnh đề SAI.}$$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là km , một con tàu vũ trụ bay theo đường thẳng d_1 đi qua điểm $A(1; -3; 4)$ với vectơ vận tốc $\vec{v}_1 = (2; -1; 3) \text{ km/s}$. Một tiểu hành tinh bay theo đường thẳng d_2 đi qua điểm $B(3; -4; 5)$ với vectơ vận tốc $\vec{v}_2 = (1; 2; -1) \text{ km/s}$. Chọn mốc thời gian $t = 0$ (giờ) khi tàu vũ trụ ở vị trí A và tiểu hành tinh ở vị trí B .



- Hai quỹ đạo chuyển động d_1 và d_2 là hai đường thẳng chéo nhau.
- Góc giữa hai quỹ đạo chuyển động của tàu vũ trụ và tiểu hành tinh bằng 60° .
- Đúng 10 giây sau thì khoảng cách giữa chúng bằng $48,31 \text{ km}$ (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Khoảng cách ngắn nhất giữa tàu vũ trụ và tiểu hành tinh trong quá trình chuyển động là $\frac{\sqrt{42}}{4} \text{ km}$.

Lời giải

a) Đúng.

Ta có: $[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = (-5; 5; 5)$, $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 1)$. Suy ra $[\vec{v}_1, \vec{v}_2] \cdot \overrightarrow{AB} = -10 \neq 0$.

Do đó 2 đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Sai.

$$\text{Ta có: } \cos(d_1, d_2) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{21}}{14} \Rightarrow (d_1, d_2) \approx 71^\circ.$$

c) Sai.

$$\text{Sau } t \text{ giây, quỹ đạo chuyển động của tàu vũ trụ } d_1 \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \text{ gọi } M(1 + 2t; -3 - t; 4 + 3t) \in d_1.$$

$$\text{Quỹ đạo chuyển động của tiểu hành tinh } d_2 \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = 5 - t \end{cases} \text{ gọi } N(3 + t; -4 + 2t; 5 - t) \in d_2.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN} = (2 - t; 3t - 1; 1 - 4t) \Rightarrow MN = \sqrt{(2 - t)^2 + (3t - 1)^2 + (1 - 4t)^2}$$

Với $t = 10$ giây thì $MN \approx 49,25 \text{ km}$.

d) Sai.

$$\text{Khảo sát hàm số } f(t) = \sqrt{(2 - t)^2 + (3t - 1)^2 + (1 - 4t)^2} = \sqrt{26t^2 - 18t + 6}, t > 0.$$

$$f(t) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{5\sqrt{78}}{26} \approx 1,7 \text{ km, khi } t = \frac{9}{26} \approx 0,35 \text{ giây.}$$

Câu 3. Tại một thị trấn thuộc hòn đảo Greenland xinh đẹp, thống kê cho biết:

Có 70% hộ gia đình có người trưởng thành đang đi làm.

Trong các hộ có người trưởng thành đi làm, có 40% hộ có thu nhập lớn hơn 200000 DKK/năm.

Trong các hộ không có người trưởng thành đang đi làm (thu nhập hộ nếu có đến từ lương hưu, trợ cấp, thu nhập tài sản...), có 10% hộ có thu nhập lớn hơn 200000 DKK/năm. Chọn ngẫu nhiên 1 hộ gia đình của thị trấn nói trên

- a) Biết hộ được chọn không có người trưởng thành đi làm, xác suất hộ đó có thu nhập lớn hơn 200000 DKK/năm là 15%.
- b) Tỷ lệ hộ vừa có người trưởng thành đi làm vừa có thu nhập lớn hơn 200000 DKK/năm là 30%.
- c) Tỷ lệ hộ có thu nhập lớn hơn 200000 DKK/năm là 29%.
- d) Biết hộ có thu nhập lớn hơn 200000 DKK/năm, xác suất hộ đó có người trưởng thành đi làm bằng $\frac{28}{31}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố: “hộ gia đình có người trưởng thành đang đi làm”, B là biến cố: “hộ gia đình có thu nhập lớn hơn 200000 DKK/năm”

Theo đề bài, ta có: $P(A) = 70\%$, $P(B|A) = 40\%$, $P(B|\bar{A}) = 10\%$.

a) Sai

Xác suất hộ được chọn có thu nhập lớn hơn 200000 DKK/năm, biết hộ đó không có người trưởng thành đi làm là $P(B|\bar{A}) = 10\%$.

b) Sai

Xác suất hộ được chọn vừa có người trưởng thành đi làm vừa có thu nhập lớn hơn 200000 DKK/năm là $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28 = 28\%$.

c) Sai

Xác suất hộ được chọn có thu nhập lớn hơn 200000 DKK/năm là

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = 0,7 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,1 = 0,31 = 31\%.$$

d) Đúng

Xác suất hộ được chọn có người trưởng thành đi làm biết hộ đó có thu nhập lớn hơn 200000

DKK/năm là: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,28}{0,31} = \frac{28}{31}$.

Câu 4. Tháp giải nhiệt tại nhà máy Nhiệt điện Phả Lại (Tỉnh Hải Dương, Việt Nam) có mặt cắt qua trục theo phương thẳng đứng là một hình hypebol (H). Tháp có chiều cao là 120 mét, bán kính đáy dưới bằng 40 mét.

Một nhóm kỹ sư đã thiết lập hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ sao cho mặt cắt dạng hypebol của tháp nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng; lấy đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết rằng đoạn giao nhau giữa trục Ox với tháp bằng 30 mét và gốc O ở vị trí có độ cao 80 mét so với mặt đất.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Diện tích đáy dưới của tháp bằng $5027m^2$ (làm tròn đến hàng đơn vị)
b) Các điểm $(-20;0), (20;0)$ thuộc hypebol (H)
c) Phương trình (H) là $\frac{x^2}{15^2} - \frac{y^2}{11520} = 1$
d) Thể tích của tháp giải nhiệt này bằng $214414m^3$ (làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Gọi phương trình (H) là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) Đúng

Bán kính đáy là $R = 40$ nên diện tích đáy dưới của tháp là $\pi R^2 = 1600\pi \approx 5027m^2$

b) Sai

Đoạn giao nhau giữa trục Ox với tháp bằng 30 mét nên độ dài trục thực $2a = 30 \Rightarrow a = 15$

Hai đỉnh trên trục hoành là $A_1(-15;0); A_2(15;0)$ nên 2 điểm $(-20;0), (20;0)$ không thuộc (H)

c) Sai

Với $a = 15$ thì phương trình (H) là $\frac{x^2}{15^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ta có điểm $(40;-80)$ thuộc (H) nên

$$\frac{40^2}{15^2} - \frac{(-80)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{11520}{11}. \text{ Vậy phương trình (H) là } \frac{x^2}{225} - \frac{11y^2}{11520} = 1$$

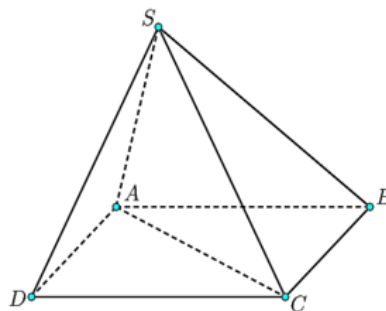
d) Đúng

Tháp là khối tròn xoay quay quanh trục Oy nên thể tích

$$V = \pi \int_{-80}^{40} x^2 dy = \pi \int_{-80}^{40} 225 \left(1 + \frac{11y^2}{11520} \right) dy = 68250\pi \approx 214414m^3$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn: Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $3a^3$ và mặt đáy $ABCD$ là hình bình hành. Biết diện tích tam giác SAB bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, khoảng cách giữa SB và CD bằng $m.a$ với $m \in \mathbb{R}$. Tính giá trị m và làm tròn đến hàng phần trăm.



Lời giải

Đáp số: 10,4

$$\text{Ta có } V_{S.ABCD} = 2V_{C.SAB} \Rightarrow V_{C.SAB} = \frac{3a^3}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}d(C, (SAB)) \cdot S_{\Delta SAB} = \frac{3a^3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}d(C, (SAB)) \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{2} \Rightarrow d(C, (SAB)) = 6a\sqrt{3}$$

$$\text{Vì } CD // (SAB) \Rightarrow d(CD, SB) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB)) = 6a\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow m = 6\sqrt{3} \approx 10,4$$

- Câu 2.** Một nhà mạng cần phủ sóng 5G dọc theo một tuyến đường thẳng dài $100(km)$ nối hai thành phố A và B (tại A và B đã có trạm phát chính). Họ cần xây thêm các trạm thu phát sóng phụ ở giữa với khoảng cách đều nhau. Chi phí xây dựng mỗi trạm phụ là 320 (triệu đồng). Chi phí kéo cáp

quang nối giữa hai trạm liền kề với khoảng cách $x(km)$ là $x(5+2x)$ (triệu đồng). Hỏi nhà mạng cần xây thêm bao nhiêu trạm phụ để tổng chi phí thi công là thấp nhất ?

Lời giải

Đáp số: 7

Gọi n là số lượng trạm thu phí trên đoạn đường AB (trạm) ($n \in \mathbb{N}^*$)

Khoảng cách giữa mỗi trạm thu sóng là $x = \frac{100}{n+1} (km)$.

Chi phí để xây n trạm thu phát phụ là $320n$.

Chi phí để kéo dây cáp trên 1 đoạn giữa 2 trạm phụ là $x(5+2x)$

Với số lượng $(n+1)$ đoạn thì tổng chi phí bao gồm chi phí xây dựng các trạm là

$$C(n) = 320n + (n+1) \cdot x(5+2x) \text{ (triệu đồng)}$$

$$C(n) = 320n + (n+1) \cdot \frac{100}{n+1} \left(5 + 2 \cdot \frac{100}{n+1} \right)$$

$$C(n) = 320n + 100 \cdot \left(5 + \frac{200}{n+1} \right) = 320n + 500 + \frac{20000}{n+1} \text{ (triệu đồng)}$$

$$\text{Ta có: } C'(n) = 320 - \frac{20000}{(n+1)^2}$$

$$\text{Với } C'(n) = 0 \Leftrightarrow (n+1)^2 = \frac{20000}{320}$$

$$\text{Suy ra } n = \frac{5\sqrt{10}}{2} \approx 6,905.$$

Bảng biến thiên

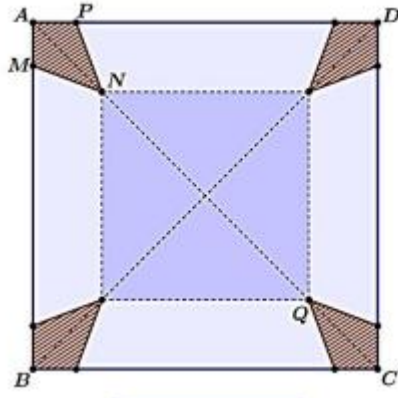
n	0	$\frac{5\sqrt{10}}{2}$	$+\infty$
$C'(n)$	+	0	-
$C(n)$		$C\left(\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)$	

Với $n = \frac{5\sqrt{10}}{2} \approx 6,905$ và $n \in \mathbb{N}^*$, ta xét: $C(6) \approx 5277,14$ (triệu đồng).

Và $C(7) = 5240$ (triệu đồng).

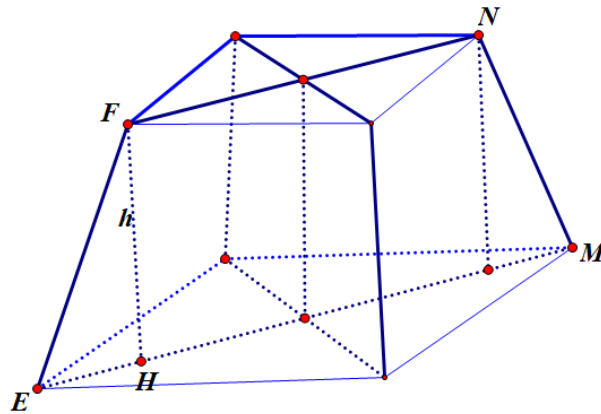
Nên $n = 7$ thì chi phí xây dựng là nhỏ nhất.

Câu 3. Từ một tấm nhôm có cạnh bằng 8 dm, người ta cắt bỏ bốn tứ giác bằng nhau (cùng bằng tứ giác $AMNP$) ở bốn góc của tấm nhôm đó, biết $AM = AP = 1dm$ và điểm N thuộc đường chéo AC . Với phần còn lại của tấm nhôm sau khi đã cắt bỏ đi 4 tứ giác nói trên, người ta đã gập các đoạn MN trùng với PN rồi dán kĩ bằng keo, làm tương tự cho 3 cặp đoạn còn lại người ta thu được chậu nước hình chóp cụt tứ giác đều. Sức chứa lớn nhất của chậu nước hình chóp tứ giác đều này là bao nhiêu lít (làm tròn đến hàng đơn vị, bỏ qua độ dày tấm nhôm) ?



Lời giải

Đáp số: 44



Gọi cạnh đáy chậu là x ($0 < x < 6$). Tấm nhôm ban đầu có cạnh bằng 8, các góc bị cắt một đoạn $AM = 1$ nên mép ngoài còn lại của mỗi cạnh còn 6.

Trong $\triangle AMN$ có:

$$AM = 1; AN = \frac{1}{2}(AC - NQ) = \frac{1}{2}(8\sqrt{2} - x\sqrt{2})$$

$$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}(8-x)^2 - (8\sqrt{2} - x\sqrt{2}) \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(8-x)^2 - (8-x) + 1}$$

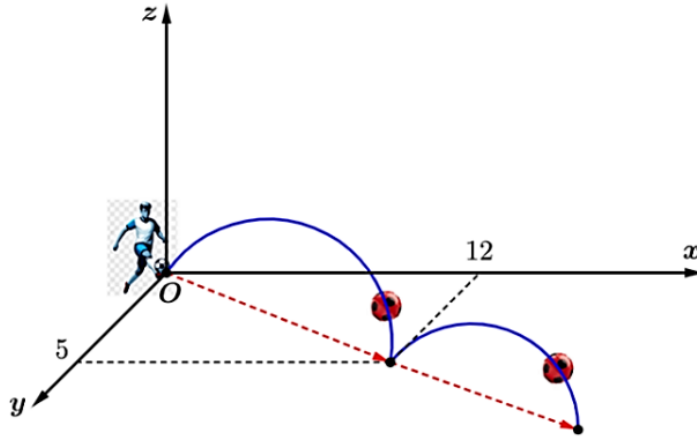
$$EH = \frac{1}{2}(EM - FN) = \frac{1}{2}(8\sqrt{2} - x\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow FH = \sqrt{EF^2 - HE^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(8-x)^2 - \frac{1}{2}(8-x)^2 - x + 7} = \sqrt{-x + 7} = h$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{7-x} \Rightarrow V(x) = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'}) = \frac{1}{3}\sqrt{7-x}(x^2 + 6x + 6^2)$$

Đạo hàm, lập BBT (hoặc có thể sử dụng Casio) ta có: $V_{\max} = V\left(\frac{5 + \sqrt{265}}{5}\right) \approx 43,97 \approx 44$.

Câu 4. Một quả bóng được phát lên từ vị trí gốc tọa độ O trong hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị mét). Quả bóng bay theo quỹ đạo parabol nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt sân bóng (Oxy) và rơi xuống vị trí cách Ox 5 m, cách Oy 12 m. Trong các lần nảy tiếp theo, đường đi của bóng luôn là parabol với: Độ cao cực đại bằng 75% độ cao cực đại của lần nảy ngay trước đó; bề rộng (khoảng cách giữa hai lần chạm đất liên tiếp) bằng 60% bề rộng của lần nảy ngay trước đó. Biết độ cao cực đại của lần nảy đầu tiên là 4 m. Sau lần nảy thứ n ($n \in \mathbb{N}$) thì tổng độ dài của hình chiếu vuông góc đường đi quả bóng lên mặt sân bằng 31,590208 m. Trong lần nảy thứ n đó, bóng đạt chiều cao cực đại tại $M(a; b; c)$. Tính $a + b + c$ và làm tròn kết quả đến hàng phần chục.



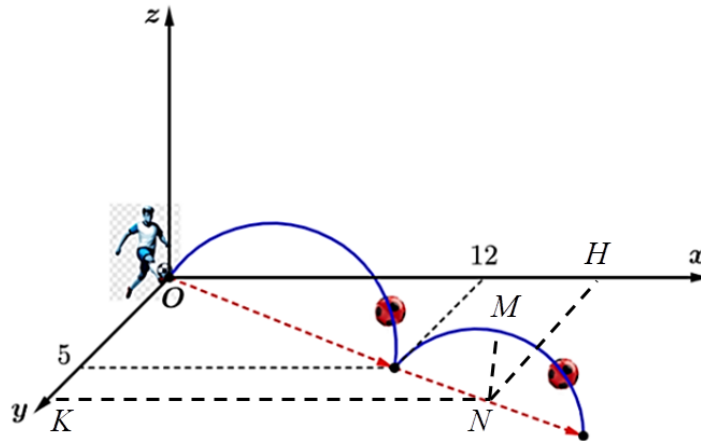
Lời giải

Đáp số: 41,6

Ta gọi (u_n) là cấp số nhân với u_i là độ rộng của bước nhảy thứ i , công bội $q = 60\%$.

Từ hình ta có bước nhảy đầu có độ dài: $u_1 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

Ta có: $S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow 31,590208 = 13 \cdot \frac{1-(60\%)^n}{1-60\%} \Rightarrow n = 7$. Suy ra: $u_7 = 13 \cdot (60\%)^6 = \frac{9477}{15625}$.



Suy ra: $ON = 31,590208 - \frac{9477}{15625} : 2 = 31,286944$.

$\Rightarrow NH = \frac{31,286944 \cdot 5}{13} = 12,03344$ và $NK = \frac{31,286944 \cdot 12}{13} = 28,880256$.

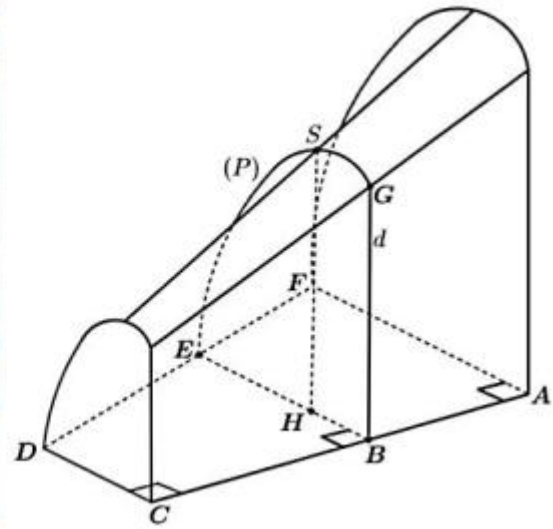
Ta gọi: (v_n) là cấp số nhân với v_i là độ cao của bước nhảy thứ i , $v_1 = 4$, công bội $q' = 75\%$.

Đúng: $v_7 = v_1 \cdot q'^6 = \frac{729}{1024}$.

Vậy $M \left(28,880256; 12,03344; \frac{729}{1024} \right)$ hay $a = 28,880256; b = 12,03344; c = \frac{729}{1024}$.

Suy ra: $a + b + c = 41,6256 \approx 41,6$.

Câu 5. Một đường hàm hiện đại được thiết kế với mặt đáy là hình thang $ACDF$ vuông tại A và $C(AF \parallel CD)$. Xét một thiết diện bất kì của đường hàm vuông góc với AC là một hình phẳng giới hạn bởi đường cong (P) , đoạn BE và đoạn BG như hình vẽ ($G \in (P)$). Giả sử (P) là một nhánh của parabol có đỉnh S và hình chiếu của S trên mặt nền là H , E là chân của parabol (E thuộc (P) và mặt đáy) thì $SH = 2EH$. Một mặt bên đường hàm có dạng mặt phẳng vuông góc với mặt đáy chứa đường thẳng AC , gọi B là hình chiếu vuông góc của G xuống mặt phẳng đáy thì $BE = BG$ và B thuộc đoạn AC . Biết $AC = 20m, AF = 2CD = 10m$. Tìm thể tích đường hàm trên và làm tròn đến hàng đơn vị của m^3 .



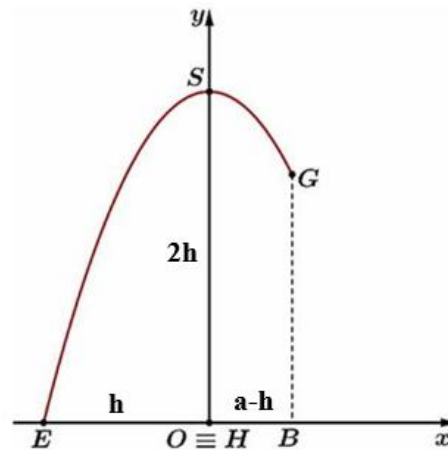
Lời giải

Đáp số: 1167

Trước hết ta tính diện tích thiết diện $BESG$ theo BE .

Gắn hệ tọa độ Oxy sao cho O trùng với H , Ox trùng tia HB , Oy trùng tia HS .

Đặt $BE = a; HE = h \Rightarrow BG = a; HB = a - h; SH = 2h$



(P) có dạng: $y = mx^2 + 2h$. (P) đi qua $E(-h; 0)$ nên ta có $mh^2 + 2h = 0 \Rightarrow m = \frac{-2}{h}$.

Vậy $(P): y = \frac{-2}{h}x^2 + 2h$.

Vì (P) đi qua $G(a-h; a) \Rightarrow \frac{-2}{h}(a-h)^2 + 2h = a \Rightarrow h = \frac{2a}{3} \Rightarrow (P): y = \frac{-3}{a}x^2 + \frac{4a}{3}$.

Thiết diện $BESG$ giới hạn bởi parabol, trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{-2a}{3}; x = \frac{a}{3}$ nên có diện tích là:

$$S = \int_{-\frac{2a}{3}}^{\frac{a}{3}} \left(\frac{-3}{a}x^2 + \frac{4a}{3} \right) dx = \left(\frac{-1}{a}x^3 + \frac{4a}{3}x \right) \Big|_{-\frac{2a}{3}}^{\frac{a}{3}} = a^2.$$

Xét đường hầm giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với AC tại $A(x=0)$ và tại $C(x=20)$.

Đặt $AB = x$. Ta có:

$$S_{ACDF} = S_{ABEF} + S_{BCDE} \Rightarrow \frac{(5+10) \cdot 20}{2} = \frac{(10+a) \cdot x}{2} + \frac{(5+a) \cdot (20-x)}{2} \Rightarrow a = 10 - \frac{1}{4}x.$$

Vậy diện tích thiết diện tại mặt phẳng vuông góc với AC tại điểm x bất kì là $S(x) = (10 - \frac{1}{4}x)^2$

Thể tích của đường hầm trên là:

$$V = \int_0^{20} (10 - \frac{1}{4}x)^2 dx \approx 1167.$$

Câu 6: Có 15 quả bóng được đánh số từ 1 tới 15 được bỏ vào 3 chiếc hộp mắt nhãn (giống nhau), mỗi hộp có 6 ngăn được đánh số từ 1 tới 6 như hình vẽ, mỗi ngăn chứa tối đa 1 quả bóng. Biết rằng sau khi các quả bóng này được bỏ ngẫu nhiên vào các ngăn của mỗi hộp thì còn 3 ngăn trống (ngăn nào cũng có thể trống); gọi N là số cách thực hiện sao cho có đúng một hộp mà các quả bóng được bỏ vào có số tăng dần theo thứ tự trên xuống, đồng thời hộp đó chứa đủ 6 quả bóng, tính giá trị $\frac{N}{20175064}$.

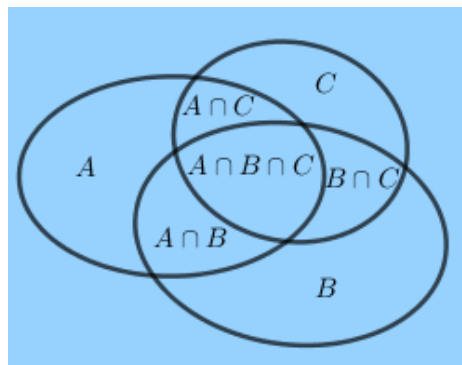
Lời giải

Trả lời: 9900

Quy tắc cộng mở rộng:

Cho ba tập hợp hữu hạn bất kỳ A, B và C . Khi đó ta có công thức:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



Bước 1: Phân tích bài toán và chuyển về bài toán có dán nhãn

Vì các quả bóng là phân biệt và được sử dụng hết (15 quả), nên không thể có 2 hộp nào chứa cùng một tập hợp các quả bóng. Do đó, "nội dung" của 3 hộp sau khi bỏ bóng sẽ luôn khác nhau đôi một.

Nhờ tính chất này, ta có thể giả sử 3 hộp này phân biệt (được dán nhãn A, B, C). Khi đó, mỗi cách xếp bóng vào 3 hộp không nhãn sẽ tương ứng với đúng $3! = 6$ cách xếp vào 3 hộp có nhãn.

Gọi $N_{nhân}$ là số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán đối với 3 hộp phân biệt A, B, C.

N số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán đối với 3 hộp giống nhau (mất nhãn).

$$\text{Khi đó ta sẽ có } N = \frac{N_{nhân}}{6}$$

Bước 2: Xử lý điều kiện đề bài trên các hộp có nhãn

Gọi N_A là biến cố "Hộp A chứa đủ 6 quả bóng và được xếp tăng dần". Tương tự cho N_B, N_C .

Theo quy tắc cộng mở rộng, ta có $N_{nhân} = \sum |N_i| - 2 \sum |N_i \cap N_j| + 3 |N_A \cap N_B \cap N_C|$.

Vì chỉ có 15 quả bóng, ta không thể lấp đầy cả 3 hộp (cần 18 quả), nên $|N_A \cap N_B \cap N_C| = 0$.

Do tính đối xứng của 3 hộp A, B, C, ta có

$$N_{nhân} = 3 |N_A| - 2 \times 3 |N_A \cap N_B| = 3 |N_A| - 6 |N_A \cap N_B|$$

$$\text{Từ đó suy ra số cách cho hộp không nhãn là: } N = \frac{N_{nhân}}{6} = \frac{1}{2} |N_A| - |N_A \cap N_B|$$

Lời giải chi tiết

Bước 1. Tính $|N_A|$: Số cách để hộp A đầy và tăng dần (không quan tâm các hộp khác).

+ Chọn 6 quả bóng từ 15 quả để cho vào hộp A: Có C_{15}^6 cách.

+ Sắp xếp 6 quả bóng đó vào hộp A theo thứ tự tăng dần: Chỉ có 1 cách.

+ Sắp xếp 9 quả bóng còn lại vào 12 ngăn của 2 hộp B và C: Mỗi quả bóng chọn 1 ngăn trống, có A_{12}^9 cách .

$$\text{Suy ra } |N_A| = C_{15}^6 \times 1 \times A_{12}^9 = 399.567.168.000$$

Bước 2. Tính $|N_A \cap N_B|$: Số cách để cả hộp A và B đều đầy và tăng dần.

1. Chọn 6 bóng cho hộp A và xếp tăng dần có $C_{15}^6 \times 1$ cách.
2. Chọn 6 bóng cho hộp B từ 9 bóng còn lại và xếp tăng dần có $C_9^6 \times 1$ cách.
3. Sắp xếp 3 bóng còn lại vào 6 ngăn của hộp C có A_6^3 cách.

$$\text{Suy ra } |N_A \cap N_B| = C_{15}^6 \times C_9^6 \times A_6^3 = 50.450.400$$

$$\text{Do đó } N = \frac{1}{2}|N_A| - |N_A \cap N_B| = \frac{1}{2} \times 399.567.168.000 - 50.450.400 = 199.733.133.600 .$$

$$\text{Vậy giá trị } \frac{N}{20175064} \text{ là: } \frac{N}{20175064} = \frac{199.733.133.600}{20175064} = 9900 .$$

--- Hết ---