

Bài 1. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 - 2y - z = y^2 - 2z - x = z^2 - 2x - y$.

Chứng minh rằng $x = y = z$.

Bài 2. Cho n là một số nguyên dương. Tìm ước chung lớn nhất của hai số $5^{n+2} + 7^n$ và $5^n + 7^{n+2}$.

Bài 3. Có 4 bạn nam và 4 bạn nữ tham gia các dự án ngoại khóa. Biết rằng:

+ Mỗi người tham gia tối đa 2 dự án.

+ Bất kỳ cặp 1 nam và 1 nữ nào cũng làm chung với nhau ít nhất 1 dự án.

Chứng minh rằng có ít nhất 1 dự án có từ 2 bạn nam và 2 bạn nữ trở lên cùng tham gia.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi P là giao điểm của hai đường chéo AC và BD , Q là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC . Tiếp tuyến tại A và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác QAC giao nhau tại K , tiếp tuyến tại B và D của đường tròn ngoại tiếp tam giác QBD giao nhau tại L . Chứng minh rằng đường thẳng KL vuông góc với đường thẳng OP .

Bài 5. Cho p, q là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thỏa mãn $p < q$. Xét thuật toán phân tích phân số $\frac{p}{q}$ thành tổng các phân số có tử số bằng 1 như sau: Khởi tạo $p_1 = p, q_1 = q$.

Tại mỗi bước $i \geq 1$, ta xác định số nguyên $d_i = \left\lfloor \frac{q_i}{p_i} \right\rfloor$ (trong đó $[x]$ ký hiệu số nguyên nhỏ

nhất không nhỏ hơn x), đồng thời đặt $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ là dạng tối giản của hiệu:

$$\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} = \frac{p_i}{q_i} - \frac{1}{d_i}$$

Thuật toán dừng lại tại bước k nếu $p_k = 1$. Khi đó, dãy (d_i) sinh ra được gọi là dãy mẫu số tương ứng của $\frac{p}{q}$.

Hãy tìm tất cả các phân số $\frac{p}{q}$ sao cho thuật toán dừng lại sau đúng 4 bước, đồng thời dãy

mẫu số thu được thỏa mãn: $d_4 = d_1 d_2 d_3 + 1$.

..... **Hết**

HSG TOÁN 10 CHUYÊN KHTN 2026

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - HSG 10 KHTN - P1)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$x^2 - 2y - z = y^2 - 2z - x = z^2 - 2x - y.$$

Chứng minh rằng $x = y = z$.

Lời giải.

$$x^2 - 2y - z - y^2 + 2z + x = 0 \text{ nên } 0 = x^2 - y^2 + x - 2y + z = (x - y)(x + y) + (x - y) - y + z.$$

Suy ra $y - z = (x - y)(x + y + 1)$, tương tự $z - x = (y - z)(y + z + 1)$ và $x - y = (z - x)(z + x + 1)$.

Nhân vào có được $(x - y)(y - z)(z - x) = (x - y)(y - z)(z - x)(x + y + 1)(y + z + 1)(z + x + 1)$.

Để ý $(x + y + 1)(y + z + 1)(z + x + 1) > 1$ nên $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = y$, suy ra $(z - x)(z + x + 1) = 0$ nên $z = x$.

Từ đó suy ra được $x = y = z$.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - HSG 10 KHTN - P2)

Cho n là một số nguyên dương. Tìm ước chung lớn nhất của hai số $5^{n+2} + 7^n$ và $5^n + 7^{n+2}$.

Lời giải.

Đặt $A = 5^{n+2} + 7^n$ và $B = 5^n + 7^{n+2}$. Khi đó để ý $\gcd(A, 5) = 1$ nên ta có được

$$\gcd(A, B) = \gcd(49A - B, A) = \gcd(1224 \cdot 5^n, A) = \gcd(1224, A) = \gcd(2^3 \cdot 3^2 \cdot 17, A)$$

① Xét số dư của A khi chia cho 8: Ta có $5^{n+2} + 7^n \equiv 25 \cdot 5^n + (-1)^n \equiv 5^n + (-1)^n \pmod{8}$.

◇ Xét n chẵn thì $5^{n+2} + 7^n \equiv 2 \pmod{8}$ nên A chia hết cho 2 không chia hết cho 4.

◇ Xét n lẻ thì $5^{n+2} + 7^n \equiv 4 \pmod{8}$ nên A chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 8.

Vậy $v_2(A) = 1$ nếu n chẵn và $v_2(A) = 2$ nếu n lẻ.

② Xét số dư của A khi chia cho 9: Ta có $5^{n+2} + 7^n \equiv 25 \cdot 5^n + 7^n \pmod{9}$.

◇ Nếu $n \equiv 0 \pmod{6}$ thì $A \equiv -1 \pmod{9}$.

◇ Nếu $n \equiv 1 \pmod{6}$ thì $A \equiv 6 \pmod{9}$.

◇ Nếu $n \equiv 2 \pmod{6}$ thì $A \equiv -1 \pmod{9}$.

◇ Nếu $n \equiv 3 \pmod{6}$ thì $A \equiv 3 \pmod{9}$.

◇ Nếu $n \equiv 4 \pmod{6}$ thì $A \equiv -1 \pmod{9}$.

◇ Nếu $n \equiv 5 \pmod{6}$ thì $A \equiv 0 \pmod{9}$.

Vậy $v_3(A) = 0$ nếu n chẵn, $v_3(A) = 1$ nếu n lẻ và $n \not\equiv 5 \pmod{6}$ và $v_3(A) = 2$ nếu $n \equiv 5 \pmod{6}$.

③ Tìm điều kiện của n để A chia hết cho 17.

Ta có $5^{n+2} + 7^n$ chia hết cho 17 tương đương $7^{n+2} \cdot 5^{n+2} + 7^{2n+2}$ chia hết cho 17 hay $7^{2n+2} + 1$ chia hết cho 17, tương đương $49^n \cdot 49 + 1$ chia hết cho 17 hay $(-2)^n \cdot (-2) + 1$ chia hết cho 17.

Điều này tương đương với $(-2)^n \equiv 9 \pmod{17}$.

Để ý $\text{ord}_{17}(-2) = 8$ và $(-2)^3 \equiv 1 \pmod{17}$ nên $n \equiv 3 \pmod{8}$.

Vậy $17 \mid A \iff n \equiv 3 \pmod{8}$.

Do đó ta suy ra được:

- ◇ $n \equiv 0 \pmod{2}$ thì $\text{gcd}(A, B) = 2$.
- ◇ $n \equiv 1, 7, 9, 13, 15, 21 \pmod{24}$ thì $\text{gcd}(A, B) = 12$.
- ◇ $n \equiv 3, 19 \pmod{24}$ thì $\text{gcd}(A, B) = 204$.
- ◇ $n \equiv 5, 17, 23 \pmod{24}$ thì $\text{gcd}(A, B) = 36$.
- ◇ $n \equiv 11 \pmod{24}$ thì $\text{gcd}(A, B) = 612$.

Bài toán 0.3. (Lim Olympic - HSG 10 KHTN - P3)

Có 4 bạn nam và 4 bạn nữ tham gia các dự án ngoại khóa. Biết rằng:

- ◇ Mỗi người tham gia tối đa 2 dự án.
- ◇ Bất kỳ cặp 1 nam và 1 nữ nào cũng làm chung với nhau ít nhất 1 dự án.

Chứng minh rằng có ít nhất 1 dự án có từ 2 bạn nam và 2 bạn nữ trở lên cùng tham gia.

Lời giải.

Gọi bốn bạn nam là B_1, B_2, B_3, B_4 và bốn bạn nữ là G_1, G_2, G_3, G_4 .

Với mỗi cặp (G_i, B_j) , do G_i và B_j cùng tham gia ít nhất một dự án, ta chọn một dự án mà cả hai cùng tham gia và ghi tên dự án đó vào ô (i, j) của một bảng 4×4 .

Vì mỗi người tham gia tối đa 2 dự án nên trong mỗi hàng và mỗi cột của bảng có không quá 2 tên dự án khác nhau. Giả sử ngược lại rằng không có dự án nào có đồng thời ít nhất 2 bạn nam và ít nhất 2 bạn nữ. Khi đó, với mỗi dự án D , ta tô màu cho D theo quy tắc:

- ◇ Tô **xanh** nếu D có nhiều nhất 1 bạn nam.
- ◇ Nếu D không được tô xanh, thì D có ít nhất 2 bạn nam, nên theo giả sử phản chứng, D có nhiều nhất 1 bạn nữ; khi đó tô D màu **hồng**.

Như vậy mỗi dự án được gán đúng một màu, và mỗi ô của bảng mang màu của dự án được ghi trong ô đó. Bảng có 16 ô, nên theo nguyên lý Dirichlet, một trong hai màu xuất hiện ít nhất 8 lần.

1 Trường hợp 1: Có ít nhất 8 ô màu xanh.

Trong một hàng cố định, không thể có 3 ô màu xanh. Thật vậy, ba ô ấy nằm ở ba cột khác nhau, tức là liên quan đến ba bạn nam khác nhau. Vì một dự án màu xanh có nhiều nhất 1 bạn nam, nên ba ô xanh đó phải mang ba tên dự án khác nhau. Khi ấy bạn nữ tương ứng với hàng đó tham gia ít nhất 3 dự án, trái với giả thiết.

Vậy mỗi hàng có nhiều nhất 2 ô xanh. Nhưng tổng số ô xanh ít nhất là 8, nên cả bốn hàng đều có đúng 2 ô xanh.

Xét một hàng bất kỳ. Hai ô xanh trong hàng ấy phải mang hai tên dự án khác nhau. Hai ô còn lại là màu hồng; lấy một trong hai ô hồng đó. Dự án ghi trong ô hồng khác với cả hai dự án ở hai ô xanh, vì mỗi dự án đã được gán một màu duy nhất. Do đó bạn nữ của hàng này tham gia ít nhất 3 dự án, lại mâu thuẫn.

2 Trường hợp 2: Có ít nhất 8 ô màu hồng.

Lập luận hoàn toàn tương tự theo các cột. Trong một cột cố định, không thể có 3 ô màu hồng, vì một dự án màu hồng có nhiều nhất 1 bạn nữ; do đó ba ô hồng ở ba hàng khác nhau phải tương ứng với ba dự án khác nhau, khiến bạn nam của cột ấy tham gia ít nhất 3 dự án.

Vì thế mỗi cột có nhiều nhất 2 ô hồng. Tổng số ô hồng ít nhất là 8, nên mỗi cột có đúng 2 ô hồng. Trong một cột, hai ô hồng tương ứng với hai dự án khác nhau, còn một ô xanh bất kỳ trong cột tương ứng với một dự án khác hai dự án ấy. Suy ra bạn nam của cột đó tham gia ít nhất 3 dự án, mâu thuẫn.

Cả hai trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn. Vậy giả sử phản chứng là sai.

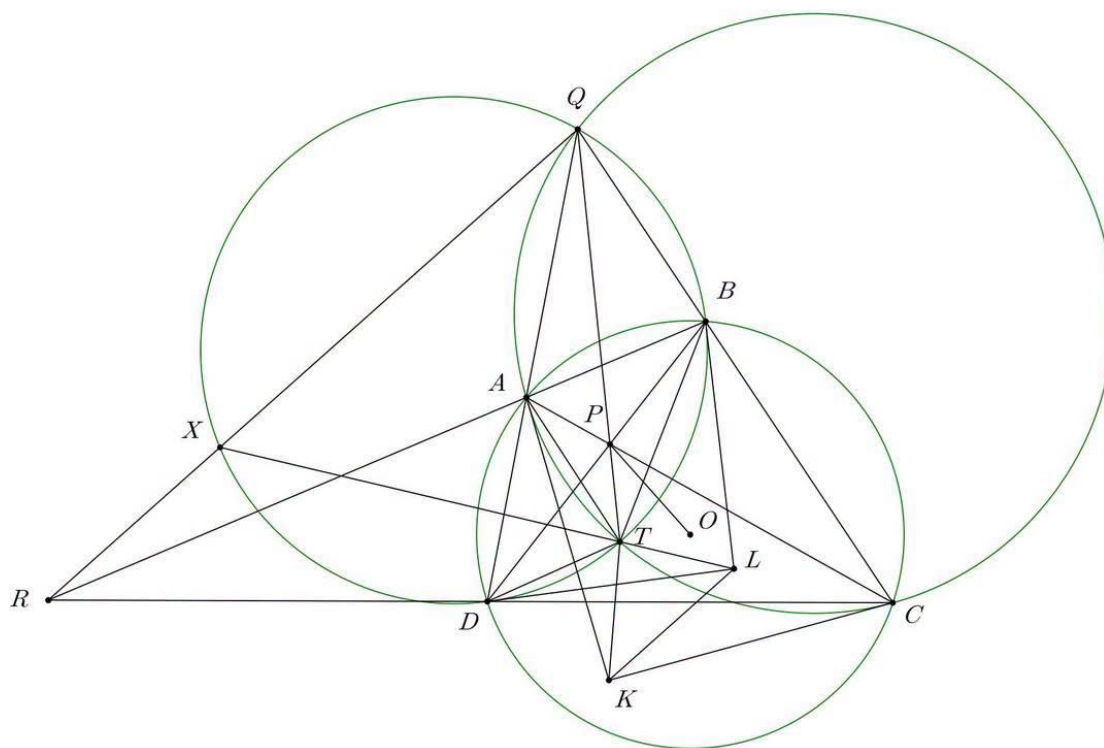
Do đó tồn tại ít nhất một dự án có từ 2 bạn nam và 2 bạn nữ trở lên cùng tham gia.

Nhận xét.

Bằng lập luận tương tự, ta có thể **tổng quát** bài toán như sau: Với các số nguyên $a, b > 1$, giả sử có $2(a-1)(b-1) + 2$ bạn nam và $2(a-1)(b-1) + 2$ bạn nữ tham gia, mỗi người tham gia không quá a dự án. Khi đó, tồn tại ít nhất một dự án có từ b bạn nam và b bạn nữ trở lên cùng tham gia. Trường hợp $a = 6, b = 3$ ta được **P3 IMO 2001**.

Bài toán 0.4. (Lim Olympic - HSG 10 KHTN - P4)

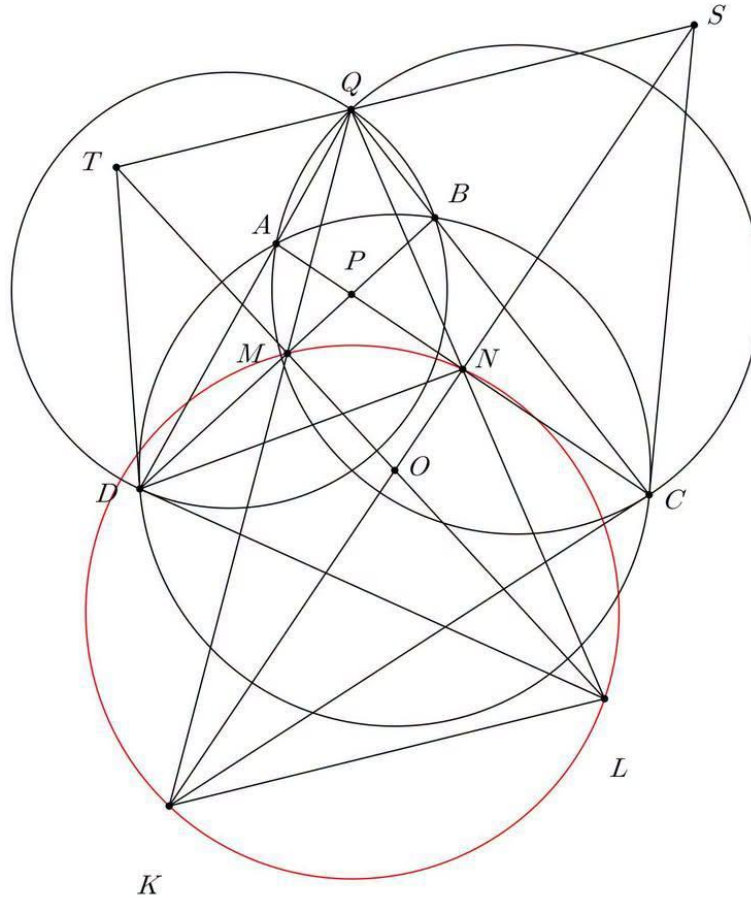
Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi P là giao điểm của hai đường chéo AC và BD , Q là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC . Tiếp tuyến tại A và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác QAC giao nhau tại K , tiếp tuyến tại B và D của đường tròn ngoại tiếp tam giác QBD giao nhau tại L . Chứng minh rằng đường thẳng KL vuông góc với đường thẳng OP .



Cách 1. Gọi AD cắt BC tại R , theo định lí *Brocard* ta có $OP \perp QR$ nên ta đi chứng minh $QR \parallel KL$. Gọi (QBD) cắt (QAC) tại T , do $PB \cdot PD = PA \cdot PC \Rightarrow Q, P, T$ thẳng hàng do cùng nằm trên trục đẳng phương của (QBD) và (QAC) .

Gọi TL cắt (QBD) tại $X \Rightarrow BTDX$ là tứ giác điều hòa $\Rightarrow Q(BDTX) = -1 \Rightarrow Q(CDPX) = -1 \Rightarrow Q, X, R$ thẳng hàng vì $Q(CDPR) = -1$ (hàng điểm tứ giác toàn phần).

Ta có T là tâm vị tự quay biến (QBD) thành (QAC) nên cũng biến L thành K mà phép vị tự quay này biến BD thành AC nên cũng tồn tại phép tự quay khác có tâm T biến AD thành KL hay ta có $\Delta TLK \sim \Delta TDA \Rightarrow \angle TLK = \angle TDA = \angle QXT \Rightarrow LK \parallel QX$ hay $LK \parallel QR$ (điều phải chứng minh).



Cách 2. Gọi tiếp tuyến tại B, D của (O) cắt nhau tại T và tiếp tuyến tại A, C của (O) cắt nhau tại S . Ta có: ST là đối cực của P ứng với (O) do đó: $OP \perp ST$. Ta cần chứng minh: $ST \parallel KL$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD và AC .

Ta có: $OA^2 = OM.OT = ON.OS$ suy ra: T, M, N, S cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: $\triangle QAC \simeq \triangle QBD$ (g.g) suy ra: $\triangle QMD \simeq \triangle QNC$ (c.g.c) suy ra: QM, QN đẳng giác ứng với góc DQC . Ta có: QK là đối trung của tam giác QAC suy ra: Q, M, K thẳng hàng.

Tương tự: Q, N, L thẳng hàng.

Ta có: $\angle LDQ = 180^\circ - \angle QBD = \angle BDC = \angle DAC = \angle QCK$.

Vậy ta có: $\triangle QDL \simeq \triangle QCK$ (g.g) suy ra:

$$\frac{QD}{QC} = \frac{QL}{QK} = \frac{QM}{QN} \text{ suy ra: } QL \cdot QN = QK \cdot QM \text{ dẫn đến: } M, N, K, L \text{ cùng thuộc một đường tròn.}$$

Vậy ta có: $\angle MNK = \angle LTS = \angle NKL$ suy ra: $ST \parallel KL$ suy ra: $OP \perp KL$.

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - HSG 10 KHTN - P5)

Cho p, q là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thỏa mãn $p < q$. Xét thuật toán phân tích phân số $\frac{p}{q}$ thành tổng các phân số có tử số bằng 1 như sau: Khởi tạo $p_1 = p, q_1 = q$. Tại mỗi bước

$i \geq 1$, ta xác định số nguyên $d_i = \left\lceil \frac{q_i}{p_i} \right\rceil$ (với $\lceil x \rceil$ ký hiệu số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x), đồng thời đặt $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ là dạng tối giản của hiệu:

$$\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} = \frac{p_i}{q_i} - \frac{1}{d_i}$$

Thuật toán dừng lại tại bước k nếu $p_k = 1$. Khi đó, dãy (d_i) sinh ra được gọi là dãy mẫu số tương ứng của $\frac{p}{q}$. Hãy tìm tất cả các phân số $\frac{p}{q}$ sao cho thuật toán dừng lại sau đúng 4 bước, đồng thời dãy mẫu số thu được thỏa mãn: $d_4 = d_1 d_2 d_3 + 1$.

 Lời giải.

Với $i = 1, 2, 3$, do $p_i > 1$ và $\gcd(p_i, q_i) = 1$, ta có $\frac{q_i}{p_i} \notin \mathbb{Z}$.

Vì $d_i = \left\lceil \frac{q_i}{p_i} \right\rceil$ nên $d_i - 1 < \frac{q_i}{p_i} < d_i$ hay $\frac{1}{d_i} < \frac{p_i}{q_i} < \frac{1}{d_i - 1}$, do đó

$$0 < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} = \frac{p_i}{q_i} - \frac{1}{d_i} < \frac{1}{d_i - 1} - \frac{1}{d_i} = \frac{1}{d_i(d_i - 1)}.$$

Mặt khác, theo định nghĩa của d_{i+1} , ta có $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} \geq \frac{1}{d_{i+1}}$ nên $\frac{1}{d_{i+1}} < \frac{1}{d_i(d_i - 1)}$, và vì thế

$$d_{i+1} > d_i(d_i - 1)$$

Đặt $a = d_1, b = d_2, c = d_3, d = d_4$. Khi đó $a, b, c, d \geq 2$ và $d = abc + 1$ và

$$b > a(a - 1), \quad c > b(b - 1), \quad d > c(c - 1).$$

Từ $d = abc + 1$ và $d > c(c - 1)$, ta được $abc + 1 > c(c - 1)$, do đó $ab + \frac{1}{c} > c - 1$, từ đó $c \leq ab + 1$.

Kết hợp với $c > b(b - 1)$, ta có $b(b - 1) + 1 \leq c \leq ab + 1$ nên $b(b - 1) \leq ab$ hay $b - 1 \leq a$ hay $b \leq a + 1$.

Mặt khác, $b > a(a - 1)$ nên $a(a - 1) < a + 1$ hay $a^2 - 2a - 1 < 0$ hay $a = 2$.

Kết hợp các điều kiện còn lại giải ra $b = 3, c = 7$, từ đó $d = 43$. Khi đó

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} = \frac{1805}{1806}.$$

Dễ dàng kiểm tra đây là phân số duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy tất cả phân số cần tìm là $\frac{p}{q} = \frac{1805}{1806}$.