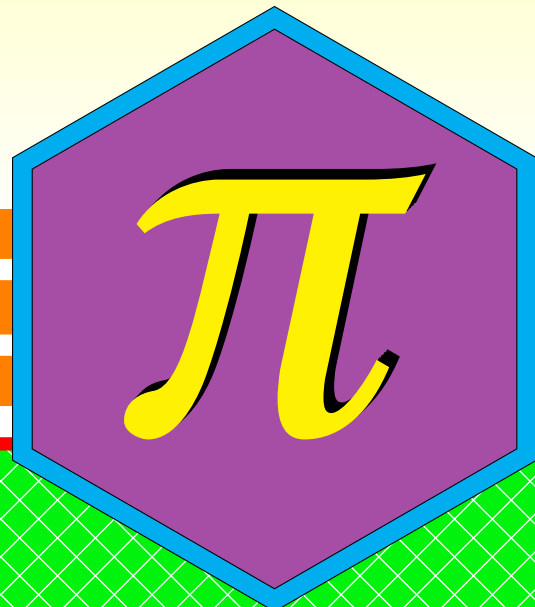




GV: Ngô Đức Tài

TÓM TẮT LÝ THUYẾT MÔN TOÁN

LỚP 10



NĂM HỌC 2026 - 2027

MỤC LỤC

3

CHƯƠNG 1

Mệnh đề và tập hợp

- 1 Mệnh đề 3
- 2 Tập hợp và các phép toán trên tập hợp 5

10

CHƯƠNG 2

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- 1 Bất phương trình bậc nhất hai ẩn 10
- 2 Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn 11

13

CHƯƠNG 3

Hình học phẳng

- 1 Hệ thức lượng trong tam giác 13
- 2 Diện tích của các hình tứ giác đặc biệt 15

17

CHƯƠNG 4

Vectơ

- 1 Các khái niệm mở đầu 17
- 2 Các phép toán vectơ 18
- 3 Vectơ trong mặt phẳng tọa độ 21

23

CHƯƠNG 5

Thống kê

- 1 Các đặc trưng của mẫu số liệu không ghép nhóm 23
- 2 Các đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm 23

26

CHƯƠNG 6

Hàm số, đồ thị và ứng dụng

- 1 Hàm số 26
- 2 Hàm số bậc hai 27
- 3 Dấu của tam thức bậc hai 29
- 4 Hai dạng phương trình quy về phương trình bậc hai 30

31

CHƯƠNG 7

Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

- 1 Phương trình đường thẳng 31
- 2 Phương trình đường tròn 37
- 3 Ba đường conic 41

44

CHƯƠNG 8

Tổ hợp - Xác suất

- 1 Đại số tổ hợp 44
- 2 Biến cố và định nghĩa cổ điển của xác suất 46

CHƯƠNG

1

MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

Bài 1. Mệnh đề

1. Mệnh đề, mệnh đề chứa biến

 Định nghĩa 1.1.

Mệnh đề là một câu khẳng định hoặc đúng hoặc sai, **không thể** vừa đúng, vừa sai.



☆ **Mệnh đề toán học** là những mệnh đề có liên quan đến toán học.

☆ Những câu cảm thán (câu có dấu chấm than ở cuối), câu hỏi (câu có dấu chấm hỏi ở cuối) **không phải là mệnh đề**.

 Định nghĩa 1.2.

Mệnh đề **chứa biến** là một câu khẳng định có chứa biến và không biết tính đúng, sai. Tính đúng, sai của mệnh đề chứa biến phụ thuộc vào các giá trị của biến.



Không phải mệnh đề nào chứa biến x cũng gọi là mệnh đề chứa biến.

2. Mệnh đề phủ định

 Định nghĩa 1.3.

Cho mệnh đề P . Mệnh đề “Không phải P ” là **mệnh đề phủ định** của mệnh đề P , kí hiệu là $\bar{P}$. Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai, còn nếu P sai thì $\bar{P}$ đúng.



Để phủ định một mệnh đề, ta chỉ cần thêm (hoặc bớt) từ “không” (hoặc “không phải”) vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

Một số cách phủ định mệnh đề cần nhớ

- ☆ Phủ định của quan hệ “=” là quan hệ “ $\neq$ ” và ngược lại.
- ☆ Phủ định của quan hệ “ $>$ ” là quan hệ “ $\leq$ ” và ngược lại.
- ☆ Phủ định của quan hệ “ $<$ ” là quan hệ “ $\geq$ ” và ngược lại.
- ☆ Phủ định của liên kết “và” là liên kết “hoặc” và ngược lại.
- ☆ Phủ định của “hữu hạn” là “vô hạn”.

3. Mệnh đề kéo theo

Định nghĩa 1.4.

Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề “Nếu P thì Q ” gọi là **mệnh đề kéo theo**, kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ **chỉ sai** khi P đúng, Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

☆ Tùy theo nội dung cụ thể, đôi khi người ta còn phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là “ P kéo theo Q ” hay “ P suy ra Q ” hay “Vì P nên Q ” ...

☆ Các định lí toán học là những mệnh đề đúng và thường phát biểu ở dạng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Khi đó, ta có

- ◇ P là **giả thiết** và Q là **kết luận**.
- ◇ P là **điều kiện đủ** để có Q .
- ◇ Q là **điều kiện cần** để có P .

4. Mệnh đề đảo. Hai mệnh đề tương đương

Định nghĩa 1.5.

☆ Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

☆ Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ **đều đúng** thì ta nói P và Q là **hai mệnh đề tương đương**, kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.

! Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ **đúng** khi P và Q **cùng đúng** hoặc **cùng sai**.

Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ có thể được phát biểu ở những dạng sau

☆ P tương đương với Q .



☆ P là điều kiện cần và đủ để có Q .

☆ P khi và chỉ khi Q .

☆ P nếu và chỉ nếu Q .

5. Kí hiệu $\forall$ và $\exists$

- ☆ Kí hiệu $\forall$ được gọi là **mọi** (hay với mọi).
- ☆ Mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” đúng **nếu với mọi** $x_0 \in X$, $P(x_0)$ là mệnh đề đúng.
- ☆ Kí hiệu $\exists$ được gọi là **tồn tại** (hay có một). Trong một số sách, kí hiệu $\exists!$ được gọi là **tồn tại duy nhất**.
- ☆ Mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” đúng **nếu có** $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ là mệnh đề đúng.
- ☆ Kí hiệu $\exists$ chỉ cho ta biết có giá trị để mệnh đề $P(x)$ đúng chứ **không** cho ta biết có bao nhiêu giá trị để mệnh đề $P(x)$ đúng.
- ☆ **Phủ định** các mệnh đề có kí hiệu $\forall$ và $\exists$.
 - ◇ Mệnh đề phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.
 - ◇ Mệnh đề phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

BÀI 2. Tập hợp và các phép toán trên tập hợp

1. Các khái niệm cơ bản về tập hợp

1.1. Tập hợp

Định nghĩa 1.6.

Tập hợp là một khái niệm cơ bản (không định nghĩa) của toán học, được kí hiệu bằng các chữ cái in hoa $A, B, \dots$

☆ Nếu a là phần tử của tập X , ta viết $a \in X$.

☆ Nếu a **không** là phần tử của tập X , ta viết $a \notin X$.

☆ Có thể mô tả một tập hợp bằng một trong hai cách sau

- ◊ **Cách 1:** Liệt kê các phần tử của tập hợp.
 - ⊙ Các phần tử có thể viết theo thứ tự tùy ý.
 - ⊙ Mỗi phần tử chỉ được liệt kê một lần.
 - ⊙ Nếu quy tắc xác định các phần tử đủ rõ thì ta dùng “...” mà không nhất thiết phải viết ra tất cả các phần tử của tập hợp.
- ◊ **Cách 2:** Chỉ ra tính chất đặc trưng của tập hợp.
- ☆ Những tập hợp mà ta có thể đếm được số lượng cụ thể các phần tử của chúng thì ta gọi đó là **tập hợp hữu hạn**. Khi đó số phần tử của tập hữu hạn X được kí hiệu là $n(X)$.

Định nghĩa 1.7.

Tập hợp **không chứa phần tử nào** được gọi là **tập rỗng**, kí hiệu là $\emptyset$. Khi đó, số phần tử của tập rỗng là $n(\emptyset) = 0$.

1.2 • Tập hợp con và hai tập hợp bằng nhau

Định nghĩa 1.8.

Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một **tập con** của B , kí hiệu là $A \subset B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Tính chất 1.9.

- ☆ $\emptyset \subset A$ và $A \subset A$, với mọi tập A .
- ☆ Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$.
- ☆ Cho tập A có n phần tử.
 - ◊ Số tập con của tập A (bao gồm tập A và $\emptyset$) là 2^n .
 - ◊ Số tập con có k phần tử của tập A là C_n^k .

Định nghĩa 1.10.

Hai tập hợp A và B được gọi là **hai tập hợp bằng nhau** nếu mỗi phần tử của A cũng là phần tử của B và ngược lại, kí hiệu $A = B$.

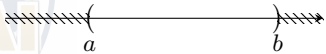
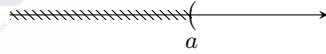
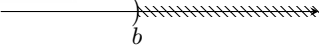
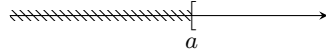
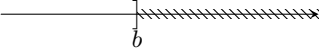
$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A.$$

2. Các tập hợp số

2.1. Mỗi quan hệ giữa các tập hợp số

- ☆ Tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ và $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$.
- ☆ Tập hợp số nguyên $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.
 - ◇ Tập hợp số nguyên dương $\mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$.
 - ◇ Tập hợp số nguyên âm $\mathbb{Z}^- = \{\dots; -4; -3; -2; -1\}$.
- ☆ Tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$.
- ☆ Tập hợp số thực $\mathbb{R}$ bao gồm các số thập phần hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn.
- ☆ Mỗi quan hệ giữa các tập hợp số: $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2.2. Các tập con thường dùng của $\mathbb{R}$

Khoảng	
$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	
Đoạn	
$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Nửa khoảng	
$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	

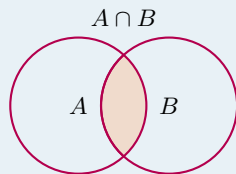
3. Các phép toán trên tập hợp

3.1. Giao của hai tập hợp

Định nghĩa 1.11.

Tập hợp gồm các phần tử thuộc cả hai tập hợp A và B gọi là **giao của hai tập hợp** A và B , kí hiệu là $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$



Cách xác định giao của hai tập A và B

☆ **Bước 1:** Biểu diễn A trên trục số, gạch các phần không thuộc A .

☆ **Bước 2:** Biểu diễn B trên trục số, gạch các phần không thuộc B .

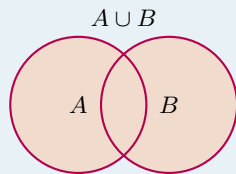
☆ **Bước 3:** Phần không bị gạch trên trục số chính là $A \cap B$.

3.2. Hợp của hai tập hợp

Định nghĩa 1.12.

Tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B gọi là **hợp của hai tập hợp** A và B , kí hiệu là $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$



Cách xác định hợp của hai tập A và B

☆ **Bước 1:** Biểu diễn hai tập A và B trên trục số.

☆ **Bước 2:** Gạch bỏ những phần không thuộc cả A và B .

☆ **Bước 3:** Phần không bị gạch trên trục số chính là $A \cup B$.

Tính chất 1.13.

Cho A và B là hai tập hữu hạn. Khi đó, ta có

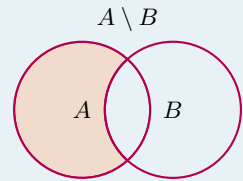
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

3.3 • Hiệu của hai tập hợp

Định nghĩa 1.14.

- ☆ **Hiệu của hai tập hợp** A và B là tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B , kí hiệu là $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$



- ☆ Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B$ gọi là **phần bù** của B trong A , kí hiệu $C_A B$.

Cách xác định hiệu của tập A với B

- ! ☆ **Bước 1:** Biểu diễn A trên trục số, gạch các phần không thuộc A .
 ☆ **Bước 2:** Biểu diễn B trên trục số, gạch các phần thuộc B .
 ☆ **Bước 3:** Phần không bị gạch trên trục số chính là $A \setminus B$.



CHƯƠNG 2

HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

BÀI 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 2.1.

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng là $ax + by \leq c$ ($ax + by \geq c$, $ax + by < c$, $ax + by > c$), trong đó a, b, c là những số thực, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

- ☆ Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một **ng nghiệm** của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by \leq c$ nếu bất đẳng thức $ax_0 + by_0 \leq c$ đúng.
- ☆ Bất phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có **vô số nghiệm**.

2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 2.2.

- ☆ Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ gọi là **miền nghiệm** của bất phương trình.
- ☆ Đường thẳng $d: ax + by = c$ chia mặt phẳng Oxy thành hai nửa mặt phẳng bờ d
 - ◇ Một nửa mặt phẳng (không kể bờ d) là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by > c$.
 - ◇ Một nửa mặt phẳng (không kể bờ d) là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.

Cách biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$

- ☆ **Bước 1:** Vẽ đường thẳng $d: ax + by = c$ trên mặt phẳng Oxy .
- ☆ **Bước 2:** Lấy điểm $M_0(x_0; y_0)$ (thường là gốc tọa độ O) không thuộc d .
- ☆ **Bước 3:** Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c .

- ☆ **Bước 4:** Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ d chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình. Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ d không chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình.



Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ và biểu diễn đường thẳng bằng nét đứt.

BÀI 2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 2.3.

- ☆ Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- ☆ Cặp số $(x_0; y_0)$ là **ng nghiệm** của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

Định nghĩa 2.4.

- ☆ Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là **miền nghiệm** của hệ bất phương trình đó.
- ☆ Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Cách biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- ☆ **Bước 1:** Trên cùng mặt phẳng Oxy , xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.
- ☆ **Bước 2:** Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Nếu bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của biểu thức $F(x; y) = ax + by$, với $(x; y)$ là các nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta làm như sau

- ☆ **Bước 1:** Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Giả sử đó là miền đa giác $A_1A_2 \dots A_n$.
- ☆ **Bước 2:** Tính giá trị của biểu thức $F(x; y)$ tại các đỉnh của đa giác trên.
- ☆ **Bước 3:** So sánh các giá trị thu được, ta được giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) cần tìm.



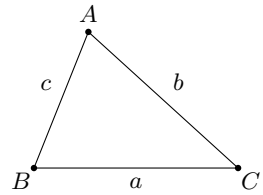
CHƯƠNG 3

HÌNH HỌC PHẪNG

BÀI 1. Hệ thức lượng trong tam giác

1. Hệ thức lượng trong tam giác

Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c , bán kính đường tròn ngoại tiếp R , bán kính đường tròn nội tiếp r , nửa chu vi $p = \frac{a+b+c}{2}$.



☆ Định lý cosin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

☆ Hệ quả:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

☆ Định lý sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

☆ Công thức tính diện tích tam giác

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

$$= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$= \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2. Một số công thức của các tam giác đặc biệt

2.1 Tam giác vuông

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có M là trung điểm của BC và đường cao AH .

☆ $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

☆ $AM = BM = CM = \frac{BC}{2}$.

☆ Đường cao: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

☆ $AC^2 = CH \cdot CB$; $AB^2 = BH \cdot BC$.

☆ Diện tích: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$.

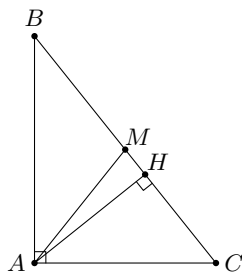
☆ Tỷ số lượng giác

◇ $\sin B = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{AC}{BC}$.

◇ $\cos B = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{AB}{BC}$.

◇ $\tan B = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} = \frac{AC}{AB}$.

◇ $\cot B = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}} = \frac{AB}{AC}$.



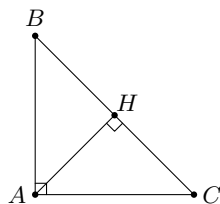
2.2 Tam giác vuông cân

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , có đường cao AH .

☆ $BC = AB\sqrt{2} = AC\sqrt{2}$; $AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}}$.

☆ Đường cao: $AH = \frac{BC}{2}$.

☆ Diện tích: $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2}{2} = \frac{AC^2}{2}$.



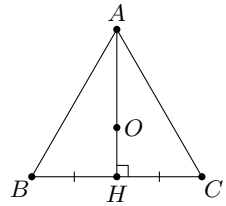
2.3 Tam giác đều

Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a , đường cao AH và tâm O .

☆ Đường cao: $AH = \frac{(\text{cạnh}) \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

☆ $AO = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OH = \frac{1}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

☆ Diện tích: $S_{\triangle ABC} = \frac{(\text{cạnh})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



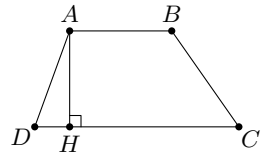
BÀI 2. Diện tích của các hình tứ giác đặc biệt

1 Hình thang

Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB và CD

☆ AH là chiều cao của hình thang $ABCD$.

☆ Diện tích $S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot AH$.



☆ Nếu hình thang $ABCD$ vuông tại A và D thì chiều cao chính là AD .

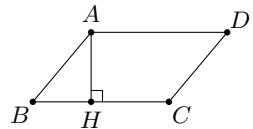
☆ Nếu hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB và đáy lớn CD thì chiều cao AH của hình thang là $AH = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{CD - AB}{2}\right)^2}$.

2 Hình bình hành

Cho hình bình hành $ABCD$

☆ AH là đường cao của hình bình hành.

☆ Diện tích $S_{ABCD} = AH \cdot BC$
 $= AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD}$.

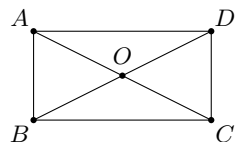


3 Hình chữ nhật

Cho hình chữ nhật $ABCD$

☆ Đường chéo $AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2}$.

☆ Diện tích $S_{ABCD} = AB \cdot BC = AB \cdot AD$.



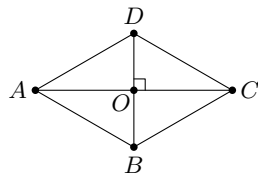
4. Hình thoi

Cho hình thoi $ABCD$

☆ $AB = BC = CD = AD$.

☆ $AC \perp BD$, O là trung điểm của AC và BD .

☆ Diện tích $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$
 $= AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD}$.

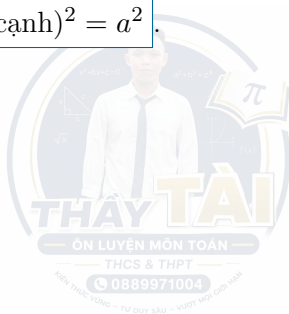
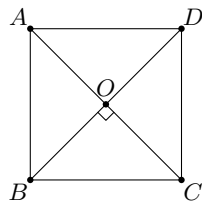


5. Hình vuông

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a .

☆ Đường chéo $AC = BD = (\text{cạnh}) \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

☆ Diện tích $S_{ABCD} = (\text{cạnh})^2 = a^2$.



CHƯƠNG

4

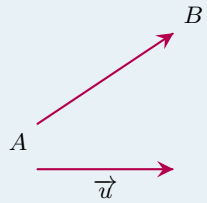
VECTƠ

BÀI 1. Các khái niệm mở đầu

1. Khái niệm vectơ

Định nghĩa 4.1.

- ☆ **Vectơ** là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối.
- ☆ Vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$. Nếu không quan tâm đến điểm đầu và điểm cuối, vectơ được kí hiệu là $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...
- ☆ **Độ dài của vectơ** là khoảng cách từ điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó, kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$.
- ☆ Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau được gọi là **vectơ-không**, kí hiệu $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$ Vectơ-không có độ dài bằng 0.

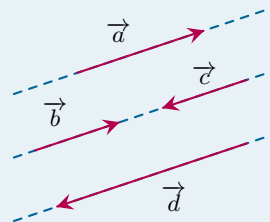


Một đoạn thẳng AB bất kì có thể tạo ra được 2 vectơ. Từ n điểm phân biệt không thẳng hàng, có thể tạo ra A_n^2 vectơ khác vectơ $\vec{0}$.

2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau

Định nghĩa 4.2.

- ☆ Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là **giá** của vectơ đó.
- ☆ Hai vectơ được gọi là **cùng phương** nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- ☆ Đối với hai vectơ cùng phương thì chúng **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.



- ! ☆ Vectơ $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ.
- ! ☆ Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Định nghĩa 4.3.

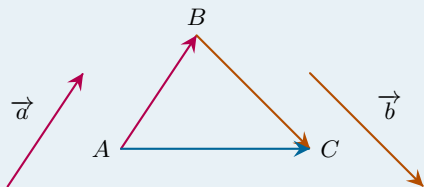
Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là **bằng nhau**, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$ nếu $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Bài 2. Các phép toán vectơ

1. Tổng và hiệu của hai vectơ

Định nghĩa 4.4.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ điểm A bất kì, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



☆ Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

☆ Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành $ABCD$, khi đó

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

Tính chất 4.5.

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý, ta có

- ☆ Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- ☆ Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- ☆ Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Định nghĩa 4.6.

Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của $\vec{a}$. Kí hiệu là $-\vec{a}$. Vectơ $\vec{0}$ có vectơ đối là chính nó.

- ! ☆ Hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi tổng của chúng bằng $\vec{0}$.
 ☆ Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$ hay $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Định nghĩa 4.7.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. **Hiệu của hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

☆ **Quy tắc hiệu:** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

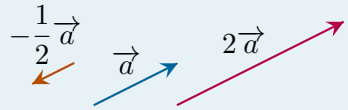
☆ Nếu I là **trung điểm** của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

☆ Nếu G là **trọng tâm** của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

2. Tích của một vectơ với một số

Định nghĩa 4.8.

Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Khi đó, tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, sao cho



☆ Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$.

☆ Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

☆ $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

! ☆ $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

☆ $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Tính chất 4.9.

Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và hai số thực k , h , ta luôn có

☆ $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$.

☆ $(k \pm h)\vec{a} = k\vec{a} \pm h\vec{a}$.

☆ $h \cdot (k \cdot \vec{a}) = (h \cdot k)\vec{a}$.

☆ $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}; (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

☆ Nếu I là **trung điểm** của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

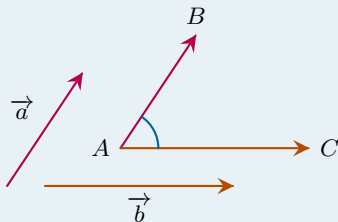
☆ Nếu G là **trọng tâm** của tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

3. Tích vô hướng của hai vectơ

Định nghĩa 4.10.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ điểm A bất kì, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{BAC}$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.



☆ $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$.

☆ $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

☆ $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$ khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.

☆ $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.

☆
$$\begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = \widehat{BAC} \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = 180^\circ - \widehat{BAC} \end{cases}$$

Định nghĩa 4.11.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

! ★ Nếu $\begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Hay $\vec{0}$ vuông góc với mọi vectơ.

★ Với $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$, nếu $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

★ $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

Tính chất 4.12.

Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ tùy ý và số $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ta có

★ Tính chất giao hoán: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

★ Tính chất phân phối: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

★ $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.

★ $\vec{a}^2 \geq 0, \forall \vec{a}$. Dấu “=” xảy ra khi $\vec{a} = \vec{0}$.

BÀI 3. Vectơ trong mặt phẳng tọa độ

1. Tọa độ của vectơ

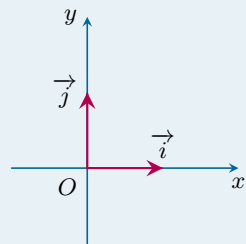
Định nghĩa 4.13.

Trên mặt phẳng, xét hai trục Ox , Oy có chung gốc O và vuông góc với nhau. Vectơ đơn vị (vectơ có độ dài bằng 1) của trục Ox là $\vec{i}$, vectơ đơn vị của trục Oy là $\vec{j}$. Mặt phẳng chứa hệ trục tọa độ Oxy như vậy gọi là **mặt phẳng tọa độ Oxy** . Khi đó

★ Điểm O gọi là **gốc tọa độ**.

★ Trục Ox gọi là **trục hoành**.

★ Trục Oy gọi là **trục tung**.



Định nghĩa 4.14.

Trong mặt phẳng Oxy , $\vec{u} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} \Leftrightarrow \vec{u} = (x_0; y_0)$.

2. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$.

$\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y')$	$k \cdot \vec{u} = (k \cdot x; k \cdot y)$
$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$	$\vec{u}$ cùng phương $\vec{v} \Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y'$	$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
$ \vec{u} = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} }$

3. Tọa độ của điểm

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$.

☆ **Tọa độ của vectơ** $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

☆ **Độ dài đoạn thẳng** $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

☆ Điểm M là **trung điểm** của $AB \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

☆ Điểm G là **trọng tâm** của $\triangle ABC \Leftrightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

CHƯƠNG



THỐNG KÊ

BÀI 1. Các đặc trưng của mẫu số liệu không ghép nhóm

BÀI 2. Các đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm

1. Mẫu số liệu ghép nhóm

Định nghĩa 5.1.

Mẫu số liệu ghép nhóm là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm. Mỗi nhóm số liệu là tập hợp gồm các giá trị của số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định. Nhóm số liệu thường được cho dưới dạng $[a; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

☆ Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm sang mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau

- ◇ **Bước 1:** Chia miền giá trị của mẫu số liệu thành các nhóm.
- ◇ **Bước 2:** Đếm số giá trị của mẫu số liệu thuộc mỗi nhóm (tần số) và lập bảng thống kê cho mẫu số liệu ghép nhóm.

☆ Độ dài của nhóm $[a; b)$ là $b - a$.



☆ Không nên chia thành quá nhiều nhóm hoặc quá ít nhóm.

☆ Các nhóm không giao nhau, các nhóm nên có độ dài như nhau và tổng độ dài các nhóm lớn hơn khoảng biến thiên.

2. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	$\dots$	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	m_2	$\dots$	m_k
Giá trị đại diện	x_1	x_2	$\dots$	x_k



Giá trị đại diện của nhóm $[a_i; a_{i+1})$ là $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$.

2.1 • Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

☆ **Số trung bình** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là $\bar{x}$, được tính theo công thức

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k}{n},$$

trong đó $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$.



Đối với số liệu rời rạc, người ta thường cho các nhóm dưới dạng $k_1 - k_2$, trong đó $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Nhóm $k_1 - k_2$ được hiểu là nhóm gồm các giá trị $k_1, k_1 + 1, \dots, k_2$. Khi đó, ta cần hiểu chỉnh lại mẫu số liệu ghép nhóm bằng cách chuyển nhóm $k_1 - k_2$ thành nhóm $[k_1 - 0,5; k_2 + 0,5)$.

☆ **Ý nghĩa:** Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng số trung bình của mẫu số liệu gốc, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

2.2 • Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

☆ Để tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau

- ♦ **Bước 1:** Xác định nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm. Giả sử đó là nhóm thứ p : $[a_p; a_{p+1})$.
- ♦ **Bước 2:** Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = a_p + \frac{\frac{n}{2} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

nếu $p = 1$, ta quy ước $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$.

- ☆ **Ý nghĩa:** Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng trung vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu. Nếu mẫu số liệu **có giá trị bất thường** thì ta dùng trung vị thay cho số trung bình để đại diện cho mẫu số liệu.

2.3. Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- ☆ Để tính **tứ phân vị thứ nhất Q_1** của mẫu số liệu ghép nhóm, đầu tiên ta xác định nhóm chứa Q_1 , giả sử đó là nhóm thứ p : $[a_p; a_{p+1})$. Khi đó

$$Q_1 = a_p + \frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p).$$

- ☆ Để tính **tứ phân vị thứ ba Q_3** của mẫu số liệu ghép nhóm, đầu tiên ta xác định nhóm chứa Q_3 , giả sử đó là nhóm thứ p : $[a_p; a_{p+1})$. Khi đó

$$Q_3 = a_p + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p).$$

- ☆ **Tứ phân vị thứ hai Q_2** chính là trung vị M_e .

- ☆ **Ý nghĩa:** Các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng các tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, chúng chia mẫu số liệu thành 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

2.4. Một của mẫu số liệu ghép nhóm

- ☆ Để tìm **một** của mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau

- ◇ **Bước 1:** Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm chứa một) của mẫu số liệu ghép nhóm, giả sử đó là nhóm j : $[a_j; a_{j+1})$.
- ◇ **Bước 2:** Một của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = a_j + \frac{m_j - m_{j-1}}{(m_j - m_{j-1}) + (m_j - m_{j+1})} \cdot (a_{j+1} - a_j).$$

- ☆ **Ý nghĩa:** Một của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng một của mẫu số liệu gốc, nó được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

CHƯƠNG 6

HÀM SỐ, ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1. Hàm số

1. Khái niệm hàm số

Định nghĩa 6.1.

Hàm số y xác định trên tập $\mathcal{D}$ là một quy tắc đặt tương ứng với mỗi $x \in \mathcal{D}$ có một và chỉ một giá trị tương ứng của $y \in \mathbb{R}$.

☆ x gọi là **biến số** và y là **hàm số** của x .

☆ Tập hợp $\mathcal{D}$ gọi là **tập xác định** của hàm số.

☆ Tập $T = \{y \mid y = f(x), x \in \mathcal{D}\}$ gọi là **tập giá trị** của hàm số.

Khi cho hàm số bằng công thức $y = f(x)$ mà **không chỉ** rõ tập xác định thì ta quy ước tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Một số điều kiện thường gặp

! ☆ Điều kiện xác định của biểu thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là $Q(x) \neq 0$.

☆ Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{P(x)}$ là $P(x) \geq 0$.

☆ Điều kiện xác định của biểu thức $\frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ là $Q(x) > 0$.

2. Đồ thị hàm số

Định nghĩa 6.2.

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathcal{D}$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi $x \in \mathcal{D}$. Trong đó x được gọi là hoành độ điểm M , y được gọi là tung độ điểm M .

! Nếu $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì $y_0 = f(x_0)$, với $x_0 \in \mathcal{D}$.

3. Sự biến thiên của hàm số

Định nghĩa 6.3.

- ☆ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** (tăng) trên khoảng $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
- ☆ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên khoảng $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

! Đồ thị của hàm số đồng biến là đường “đi lên” từ trái qua phải. Đồ thị của hàm số nghịch biến là đường “đi xuống” từ trái qua phải.

BÀI 2. Hàm số bậc hai

1. Khái niệm hàm số bậc hai

Định nghĩa 6.4.

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x là biến số, a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

2. Sự biến thiên và đồ thị hàm số

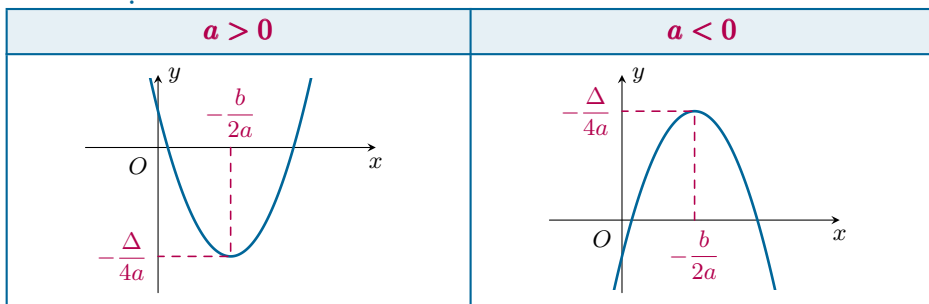
☆ Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

☆ Định $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ và trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

☆ Bảng biến thiên

$a > 0$				$a < 0$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$	y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

☆ Đồ thị hàm số



☆ Nếu $a > 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và $\min y = -\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

☆ Nếu $a < 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và $\max y = -\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Cách tìm đỉnh của parabol bằng máy tính Casio

570VN	580
☆ Bước 1: Ấn $\square$ 5 3. ☆ Bước 2: Nhập các hệ số của phương trình parabol. ☆ Bước 3: Ấn $\square = \square$ đọc kết quả.	☆ Bước 1: Ấn w 9 2 2. ☆ Bước 2: Nhập các hệ số của phương trình parabol. ☆ Bước 3: Ấn $\square = \square$ đọc kết quả.
Nếu máy tính hiện như sau <pre> X-Value Minimum= Math -1 Y-Value Minimum= 2 </pre> thì parabol có đỉnh là $I(-1; 2)$.	Nếu máy tính hiện như sau <pre> GTNN y=ax²+bx+c x= -1 GTNN y=ax²+bx+c y= 2 </pre> thì parabol có đỉnh là $I(-1; 2)$.

BÀI 3. Dấu của tam thức bậc hai

1. Dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

☆ Nếu phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm thì bảng xét dấu của $f(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu a	

☆ Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x_0 = -\frac{b}{2a}$ thì bảng xét dấu của $f(x)$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu a	0	cùng dấu a

☆ Nếu phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thì bảng xét dấu của $f(x)$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu a	0	trái dấu a	0 cùng dấu a

2. Cách giải bất phương trình bậc hai bằng máy tính Casio

570VN	580
☆ Bước 1: Ấn $\frac{\square}{\square}$ R 1 1.	☆ Bước 1: Ấn $\frac{\square}{\square}$ w z 2.
☆ Bước 2: Chọn loại bất phương trình bậc hai cần giải.	☆ Bước 2: Chọn loại bất phương trình bậc hai cần giải.
☆ Bước 3: Nhập hệ số a, b, c của bất phương trình bậc hai.	☆ Bước 3: Nhập hệ số a, b, c của bất phương trình bậc hai.

3. Một số điều kiện về dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Với $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\star f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases} \quad \star f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

$$\star f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases} \quad \star f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$$

BÀI 4. Hai dạng phương trình quy về phương trình bậc hai

1. Phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

☆ Cách giải: $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ (hoặc } g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

! Khi tìm điều kiện $f(x) \geq 0$ hoặc $g(x) \geq 0$, ta thường chọn bất phương trình nào đơn giản hơn để giải.

2. Phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$

☆ Cách giải: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$

! Không phải tìm điều kiện $f(x) \geq 0$.

0889971004

CHƯƠNG



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

BÀI 1. Phương trình đường thẳng

1. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Định nghĩa 7.1.

- ☆ Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với đường thẳng d được gọi là **vectơ pháp tuyến** của đường thẳng d .
- ☆ Đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b)$.

- ! ☆ Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng d thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là vectơ pháp tuyến của d .
- ☆ Một đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.

Định nghĩa 7.2.

Phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ là $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường thẳng $d: ax + by + c = 0$.

- ! ☆ Nếu $c = 0$ thì đường thẳng $d: ax + by = 0$ đi qua gốc tọa độ.
- ☆ Nếu $a = 0$ thì đường thẳng $d: by + c = 0$ song song hoặc trùng với trục Ox .
- ! ☆ Nếu $b = 0$ thì đường thẳng $d: ax + c = 0$ song song hoặc trùng với trục Oy .
- ☆ Nếu $b \neq 0$ thì phương trình d có thể đưa về dạng $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Định nghĩa 7.3.

Đường thẳng d cắt các trục tọa độ tại hai điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ có phương trình đoạn chắn là $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Định nghĩa 7.4.

☆ Vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là **vectơ chỉ phương** của đường thẳng d .

☆ Đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b)$.

☆ Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là vectơ chỉ phương của d .

☆ Một đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một vectơ chỉ phương của nó.

☆ Một đường thẳng có vô số phương trình tham số.

! ☆ Nếu d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b)$ thì có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (b; -a)$ và ngược lại.

☆ Nếu $d \perp \Delta$ thì $\begin{cases} \vec{n}_d = \vec{u}_\Delta \\ \vec{u}_d = \vec{n}_\Delta \end{cases}$.

☆ Nếu $d // \Delta$ thì $\begin{cases} \vec{n}_d = \vec{n}_\Delta \\ \vec{u}_d = \vec{u}_\Delta \end{cases}$.

Định nghĩa 7.5.

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b)$ là $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}}$.

3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ và $d': a'x + b'y + c' = 0$. Khi đó, tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} (*).$$

☆ Nếu hệ (*) có một nghiệm $(x_0; y_0)$ thì d cắt d' tại điểm $M(x_0; y_0)$.

☆ Nếu hệ (*) vô nghiệm thì d song song với d' .

☆ Nếu hệ (*) có vô số nghiệm thì d trùng với d' .

Công thức xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng

Mối quan hệ	Điều kiện	Mối quan hệ	Điều kiện
$d \equiv d'$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	$d // d'$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
d cắt d'	$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	$d \perp d'$	$aa' + bb' = 0$

4. Góc giữa hai đường thẳng

Cho đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ và đường thẳng d' có vectơ pháp tuyến $\vec{n}'$. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng d và d' được tính theo công thức

$$\cos(d, d') = \left| \cos(\vec{n}, \vec{n}') \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$$



Công thức trên vẫn đúng nếu sử dụng vectơ chỉ phương của hai đường thẳng.

5. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ tới đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ là

$$d(M, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

6. Một số dạng liên quan đến đường thẳng thường gặp

- ① Viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A và B

☆ Cách xác định vectơ: $\vec{u}_d = \overrightarrow{AB}$.

- ② Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và song song với đường thẳng Δ

☆ Cách xác định vectơ: $\begin{cases} \vec{n}_d = \vec{n}_\Delta \\ \vec{u}_d = \vec{u}_\Delta. \end{cases}$

- ③ Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và vuông góc với đường thẳng Δ

☆ Cách xác định vectơ: $\begin{cases} \vec{n}_d = \vec{u}_\Delta \\ \vec{u}_d = \vec{n}_\Delta. \end{cases}$

- ④ Chuyển phương trình tổng quát của đường thẳng sang phương trình tham số

Cho đường thẳng $d: ax + by + c = 0$.

☆ **Bước 1:** Chọn $x = x_0$ (x_0 là một số bất kì), thay vào phương trình của d để tìm $y = y_0$. Khi đó $M(x_0; y_0) \in d$.

☆ **Bước 2:** Tìm vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n} = (a; b)$. Khi đó vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (b; -a)$.

☆ **Bước 3:** Viết phương trình tham số của d .

- ⑤ Chuyển phương trình tham số của đường thẳng sang phương trình tổng quát

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t. \end{cases}$

☆ **Bước 1:** Tìm điểm $M(x_0; y_0) \in d$.

☆ **Bước 2:** Tìm vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (u_1; u_2)$. Khi đó vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n} = (u_2; -u_1)$.

☆ **Bước 3:** Viết phương trình tổng quát của d .



Có thể chọn t bất kì để tìm tọa độ điểm M .

⑥ **Viết phương trình đường đặc biệt của tam giác ABC**

- ☆ Viết phương trình đường trung tuyến AM , ta tìm trung điểm M của BC , từ đó bài toán trở thành viết phương trình đường thẳng đi qua A và M .
- ☆ Viết phương trình đường cao AH , ta tìm vectơ $\overrightarrow{BC}$ chính là vectơ pháp tuyến của đường cao AH . Để tìm trực tâm của tam giác ABC , ta tìm giao điểm hai đường cao của tam giác ABC .
- ☆ Viết phương trình đường trung trực của BC , ta tìm trung điểm M của BC và tìm vectơ $\overrightarrow{BC}$ chính là vectơ pháp tuyến của đường trung trực BC . Để tìm tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC , ta tìm giao điểm hai đường trung trực của tam giác ABC .

⑦ **Tìm hình chiếu của điểm M trên đường thẳng d**

- ☆ **Bước 1:** Viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với đường thẳng d .
- ☆ **Bước 2:** Hình chiếu của điểm M chính là giao điểm của hai đường thẳng d và Δ .

! Nên viết phương trình tổng quát để dễ tìm tọa độ giao điểm.

⑧ **Tìm điểm đối xứng M' của điểm M qua đường thẳng d**

- ☆ **Bước 1:** Tìm hình chiếu H của M trên đường thẳng d .
- ☆ **Bước 2:** Điểm H là trung điểm của đoạn thẳng MM' , khi đó tọa độ điểm M' là $M' = 2H - M$.

⑨ **Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với d qua đường thẳng Δ**

- ☆ **Bước 1:** Tìm điểm M thuộc đường thẳng d .
- ☆ **Bước 2:** Tìm điểm đối xứng của M' của M qua d .
- ☆ **Bước 3:** Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng d và Δ .
- ☆ **Bước 4:** Nếu d cắt Δ tại A thì đường thẳng d' là đường thẳng đi qua A và M' .
Nếu d song song với Δ thì đường thẳng d' là đường thẳng đi qua M' và song song với Δ .

10) Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với d qua I

☆ **Bước 1:** Tìm hai điểm A và B thuộc đường thẳng d .

☆ **Bước 2:** Tìm A' và B' là hai điểm đối xứng của A và B qua I .

☆ **Bước 3:** Viết phương trình đường thẳng d' đi qua điểm A' và B' .

11) Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và cách B một khoảng bằng k

☆ **Bước 1:** Gọi vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n} = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).

☆ **Bước 2:** Phương trình tổng quát của d đi qua điểm $A(x_0; y_0)$ có dạng $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

☆ **Bước 3:** Tính khoảng cách từ điểm B tới đường thẳng d rồi cho bằng k . Từ đó tìm mối quan hệ giữa a và b .

☆ **Bước 4:** Chọn a là một số thực bất kì, từ đó tìm được b . Thay a và b vào phương trình tổng quát của d .

12) Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng Δ và cách điểm A một khoảng bằng k

☆ **Bước 1:** Xác định vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n} = (a; b)$, khi đó $\vec{n}$ cũng là vectơ pháp tuyến của d .

☆ **Bước 2:** Phương trình tổng quát của d có dạng là $ax + by + c = 0$.

☆ **Bước 3:** Tính khoảng cách từ A tới d rồi cho bằng k . Từ đó tìm được c .

☆ **Bước 4:** Thay c vào phương trình của d , ta được phương trình tổng quát của d .

13) Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cách đều hai điểm P và Q

☆ **Cách làm:** Đường thẳng d đi qua M và song song với PQ .

14) Viết phương trình đường phân giác của hai đường thẳng

☆ **Cách làm:** Cho hai đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ và $d': a'x + b'y + c' = 0$. Khi đó, phương trình đường phân giác của hai đường thẳng được tính bằng công thức

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

15) Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và tạo với đường thẳng Δ một góc α

☆ **Bước 1:** Gọi vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n} = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).

☆ **Bước 2:** Tìm vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ .

☆ **Bước 3:** Áp dụng công thức tính góc của hai đường thẳng để tính $\cos(d, \Delta)$, rồi cho bằng $\cos \alpha$. Từ đó tìm ra mối quan hệ giữa a và b .

☆ **Bước 4:** Chọn a là một số thực bất kì, từ đó tìm được b . Khi đó tìm được vectơ pháp tuyến của d . Từ đó viết phương trình đường thẳng d .

BÀI 2. Phương trình đường tròn

1. Phương trình đường tròn

Định nghĩa 7.6.

Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính R là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Định lý 7.7.

Phương trình $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2 + b^2 - c > 0$. Khi đó (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Định nghĩa 7.8.

Cho đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) . Khi đó phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ là

$$(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0.$$

3. Vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I , bán kính R và đường thẳng d . Khi đó, ta có

Mỗi quan hệ	Điều kiện
d không cắt đường tròn (C)	$d(I, d) > R$
d tiếp xúc với đường tròn (C)	$d(I, d) = R$
d cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B	$d(I, d) < R$

! Nếu d cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B thì

$$AB = 2\sqrt{R^2 - (d(I, d))^2}$$

4. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho đường tròn (C_1) có tâm I_1 , bán kính R_1 và đường tròn (C_2) có tâm I_2 , bán kính R_2 .

Mỗi quan hệ	Điều kiện
$(C_1), (C_2)$ ngoài nhau	$I_1I_2 > R_1 + R_2$
$(C_1), (C_2)$ trong nhau	$I_1I_2 < R_1 - R_2 $
$(C_1), (C_2)$ tiếp xúc ngoài	$I_1I_2 = R_1 + R_2$
$(C_1), (C_2)$ tiếp xúc trong	$I_1I_2 = R_1 - R_2 $
$(C_1), (C_2)$ cắt nhau	$ R_1 - R_2 < I_1I_2 < R_1 + R_2$

5. Một số dạng toán liên quan đến đường tròn thường gặp

① Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I và đi qua A

☆ Cách tìm bán kính: Bán kính của đường tròn (C) là $R = IA$.

② Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng d

☆ Cách tìm bán kính: Bán kính của đường tròn (C) là $R = d(I, d)$.

③ Viết phương trình đường tròn (C) có đường kính AB

☆ Bước 1: Tìm trung điểm I của AB . Khi đó I là tâm của (C) .

☆ Bước 2: Tính độ dài IA là bán kính của đường tròn (C) .

☆ Bước 3: Viết phương trình của đường tròn (C) .

④ **Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A, B và có bán kính R**

☆ **Bước 1:** Gọi $I(a; b)$ là tâm của đường tròn (C) .

☆ **Bước 2:** Vì (C) đi qua hai điểm A, B và có bán kính R nên ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = R. \end{cases}$$

☆ **Bước 3:** Giải hệ phương trình, ta tìm được tọa độ của I .

☆ **Bước 4:** Viết phương trình của đường tròn (C) .

⑤ **Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng d**

☆ **Bước 1:** Viết phương trình đường trung trực Δ của AB .

☆ **Bước 2:** Tìm giao điểm I của d và Δ . Khi đó I là tâm của (C) .

☆ **Bước 3:** Tính độ dài IA là bán kính của đường tròn (C) .

☆ **Bước 4:** Viết phương trình của đường tròn (C) .

⑥ **Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng d**

☆ **Bước 1:** Viết phương trình tham số của đường trung trực Δ của AB .

☆ **Bước 2:** Xác định tâm I của (C) thỏa mãn
$$\begin{cases} I \in \Delta \\ d(I, d) = IA. \end{cases}$$

☆ **Bước 3:** Tính độ dài IA là bán kính của đường tròn (C) .

☆ **Bước 4:** Viết phương trình của đường tròn (C) .

⑦ **Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng d tại B**

☆ **Bước 1:** Viết phương trình đường trung trực Δ của AB .

☆ **Bước 2:** Viết phương trình Δ_1 đi qua B và vuông góc với d .

☆ **Bước 3:** Xác định tâm I của đường tròn (C) là giao điểm của Δ và Δ_1 .

☆ **Bước 4:** Tính độ dài IA là bán kính của đường tròn (C) .

☆ **Bước 5:** Viết phương trình của đường tròn (C) .

- 8) Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2

☆ **Bước 1:** Xác định tâm I của (C) thỏa mãn $\begin{cases} d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) \\ d(I, \Delta_1) = IA. \end{cases}$

☆ **Bước 2:** Tính độ dài IA là bán kính của đường tròn (C) .

☆ **Bước 3:** Viết phương trình của đường tròn (C) .

- 9) Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có tâm nằm trên đường thẳng d

☆ **Bước 1:** Xác định tâm I của (C) thỏa mãn $\begin{cases} d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) \\ I \in d. \end{cases}$

☆ **Bước 2:** Tính độ dài IA là bán kính của đường tròn (C) .

☆ **Bước 3:** Viết phương trình của đường tròn (C) .

- 10) Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C (đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

☆ **Bước 1:** Gọi phương trình (C) có dạng là

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

☆ **Bước 2:** Thay tọa độ điểm A, B, C vào phương trình (C) , ta lập được hệ phương trình.

☆ **Bước 3:** Giải hệ phương trình để tìm a, b, c , rồi thay vào phương trình của (C) .

- 11) Viết phương trình đường tròn (C) là đường tròn nội tiếp ΔABC

☆ **Bước 1:** Viết phương trình của hai đường phân giác trong của hai góc trong tam giác ABC .

☆ **Bước 2:** Xác định I của đường tròn (C) là giao điểm của hai đường phân giác trên.

☆ **Bước 3:** Tính bán kính $R = d(I, AB)$.

☆ **Bước 4:** Viết phương trình của đường tròn (C) .

- 12) Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$

☆ **Bước 1:** Viết phương trình của đường thẳng d có dạng

$$ax + by + c = 0.$$

☆ **Bước 2:** Tính khoảng cách từ tâm I tới đường thẳng d , rồi cho bằng bán kính R . Từ đó tìm ra c .

13) **Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) đi qua điểm A ở ngoài đường tròn (C)**

☆ **Bước 1:** Gọi vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n} = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).

☆ **Bước 2:** Phương trình tổng quát của d đi qua $A(x_0; y_0)$ có dạng $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

☆ **Bước 3:** Tính khoảng cách từ tâm I của (C) tới đường thẳng d rồi cho bằng bán kính R . Từ đó tìm mối quan hệ giữa a và b .

☆ **Bước 4:** Chọn a là một số thực bất kì, từ đó tìm được b . Thay a và b vào phương trình tổng quát của d .

BÀI 3. Ba đường conic

1. Elip

Định nghĩa 7.9.

Cho hai điểm cố định và phân biệt F_1, F_2 . Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$. Với số $a > c$, tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ được gọi là **đường elip**. Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai **tiêu điểm** và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là **tiêu cự** của elip.

Định nghĩa 7.10.

Cho elip có **phương trình chính tắc** là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$.

☆ $c^2 = a^2 - b^2$.

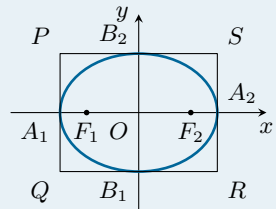
☆ **Tiêu điểm** của elip là $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$.

☆ **Tiêu cự** của elip là $2c$.

☆ Elip có hai **trục đối xứng** là Ox, Oy và **tâm đối xứng** là gốc tọa độ O .

☆ Elip có **đỉnh** là $A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$.

☆ **Độ dài trục lớn** của elip là $A_1A_2 = 2a$.



☆ **Độ dài trục bé** của elip là $B_1B_2 = 2b$.

☆ **Hình chữ nhật cơ sở** của elip có bốn đỉnh là $P(-a; b)$, $Q(-a; -b)$, $R(a; -b)$ và $S(a; b)$.

☆ Với điểm $M(x; y)$ thuộc elip, ta có **bán kính qua tiêu** của M là

$$\diamond MF_1 = a + \frac{c}{a}x.$$

$$\diamond MF_2 = a - \frac{c}{a}x.$$

☆ **Tâm sai** của elip là $e = \frac{c}{a}$.

☆ Các **đường chuẩn** của elip ứng với F_1 và F_2 là $\Delta: x = \mp \frac{a}{e}$.

2. Hyperbol

Định nghĩa 7.11.

Cho hai điểm cố định và phân biệt F_1, F_2 . Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$. Với số $a > 0$ và $a < c$, tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ được gọi là **đường hypebol**. Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai **tiêu điểm** và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là **tiêu cự** của hypebol.

Định nghĩa 7.12.

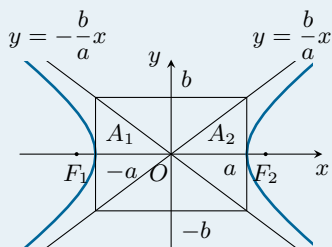
Cho hypebol có **phương trình chính tắc** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a, b > 0$.

☆ $c^2 = a^2 + b^2$.

☆ Hypebol có hai **tiêu điểm** là $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$.

☆ **Tiêu cự** của hypebol là $2c$.

☆ Hypebol có hai **đỉnh** là $A_1(-a; 0)$ và $A_2(a; 0)$.



☆ Hypebol có hai **trục đối xứng** là Ox và Oy , và có **tâm đối xứng** là gốc tọa độ O .

☆ Trục Ox được gọi là **trục thực** và trục Oy được gọi là **trục ảo**.

☆ **Độ dài trục thực** của hypebol là $2a$.

☆ **Độ dài trục ảo** của hypebol là $2b$.

- ☆ **Hình chữ nhật cơ sở** có đỉnh là $(-a; b)$, $(-a; -b)$, $(a; -b)$, $(a; b)$.
- ☆ Hypebol có hai **đường tiệm cận** có phương trình là $y = \pm \frac{b}{a}x$.
- ☆ Với điểm $M(x; y)$ thuộc hypebol, ta có **bán kính qua tiêu** của M là

$$\diamond MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right|. \quad \diamond MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right|.$$
- ☆ **Tâm sai** của hypebol là $e = \frac{c}{a}$.
- ☆ Các **đường chuẩn** của hypebol ứng với F_1 và F_2 là $\Delta: x = \mp \frac{a}{e}$.

3. Parabol

Định nghĩa 7.13.

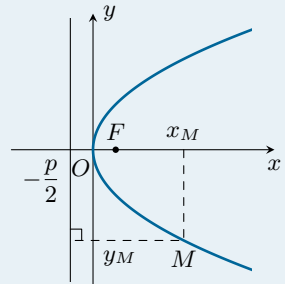
Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định không đi qua F . Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ được gọi là đường **parabol**. Điểm F được gọi là **tiêu điểm**, Δ được gọi là **đường chuẩn** và khoảng cách từ F đến Δ được gọi là **tham số tiêu** của parabol.

 Parabol trong hình học **không phải** là một hàm số.

Định nghĩa 7.14.

Cho parabol có **phương trình chính tắc** $y^2 = 2px$, với $p > 0$.

- ☆ Parabol có **tiêu điểm** $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.
- ☆ Parabol có **đường chuẩn** là $\Delta: x = -\frac{p}{2}$.
- ☆ Parabol có một **trục đối xứng** là Ox .
- ☆ Parabol có **đỉnh** là $O(0; 0)$.
- ☆ **Tham số tiêu** của p của parabol gấp đôi khoảng cách giữa đỉnh $O(0; 0)$ và **tiêu điểm** $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.
- ☆ Với $M(x; y)$ thuộc parabol, **bán kính qua tiêu** của M là $MF = x + \frac{p}{2}$.
- ☆ Parabol có **tâm sai** $e = 1$.



TỔ HỢP - XÁC SUẤT

BÀI 1. Đại số tổ hợp

1. Quy tắc đếm

☆ **Quy tắc cộng:** Một công việc X có thể thực hiện theo một trong k phương án khác nhau như sau

- ◇ Phương án 1 có n_1 cách thực hiện.
- ◇ Phương án 2 có n_2 cách thực hiện.
- ◇ ...
- ◇ Phương án k có n_k cách thực hiện.

⇒ Khi đó số cách thực hiện công việc X là $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ cách.

☆ **Quy tắc nhân:** Để thực công việc X thì phải hoàn thành k công đoạn liên tiếp như sau

- ◇ Công đoạn 1 có n_1 cách thực hiện.
- ◇ Công đoạn 2 có n_2 cách thực hiện.
- ◇ ...
- ◇ Công đoạn k có n_k cách thực hiện.

⇒ Khi đó số cách thực hiện công việc X là $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ cách.

! ☆ Quy tắc cộng được áp dụng khi công việc được chia thành các phương án phân biệt (thực hiện một trong các phương án để hoàn thành công việc).

☆ Quy tắc nhân được áp dụng khi công việc có nhiều công đoạn nối tiếp nhau (phải thực hiện tất cả các công đoạn để hoàn thành công việc).

2. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

2.1. Hoán vị

- ☆ **Hoán vị** chỉ được sử dụng khi bài toán yêu cầu **sắp xếp** n phần tử.
- ☆ Số cách sắp xếp n phần tử vào n chỗ là $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.
- ☆ Để ấn 5! trong máy tính Casio, ta làm như sau 5 u.

2.2. Tổ hợp

- ☆ **Tổ hợp** được sử dụng khi nào toán yêu cầu **chọn** k phần tử trong n phần tử, chú ý mỗi phần tử chỉ xuất hiện một lần.

- ☆ Số cách chọn k phần tử trong n phần tử là $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- ☆ **Tính chất:** $C_n^k = C_n^{n-k}$ và $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$.

- ☆ Để ấn C_7^4 trong máy tính Casio, ta làm như sau 7 q P 4.

2.3. Chỉnh hợp

- ☆ **Chỉnh hợp** được sử dụng khi bài toán yêu cầu **chọn** k phần tử trong n phần tử, rồi **sắp xếp** k phần tử đó.

- ☆ Số cách chọn k phần tử trong n phần tử rồi sắp xếp là $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

- ☆ Mỗi quan hệ giữa hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$.

- ☆ Để ấn A_7^4 trong máy tính Casio, ta làm như sau 7 q O 4.

! Chỉnh hợp và tổ hợp đều chọn k phần tử trong n phần tử, nhưng chỉnh hợp là chọn **có xếp thứ tự**, còn tổ hợp là chọn **không xếp thứ tự**.

3. Nhị thức Newton

- ☆ **Công thức nhị thức Newton**

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

♦ Nhị thức $(a + b)^n$ có $n + 1$ số hạng.

♦ Số hạng thứ $k + 1$ của nhị thức $(a + b)^n$ là $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

♦ $(a - b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$.

☆ Một số khai triển cần nhớ

$$♦ (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$♦ (a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

$$♦ (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

$$♦ (a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

BÀI 2. Biến cố và định nghĩa cổ điển của xác suất

1. Biến cố

1.1. Định nghĩa

☆ **Phép thử ngẫu nhiên** là một thí nghiệm hay một hành động mà kết quả của nó không thể biết được trước khi phép thử được thực hiện.

☆ **Không gian mẫu** của phép thử là tập hợp tất cả các kết quả có thể khi thực hiện phép thử, kí hiệu là Ω .

☆ **Biến cố** E là một tập con của không gian mẫu Ω .

☆ **Kết quả thuận lợi** cho một biến cố E liên quan đến phép thử T là kết quả của phép thử T làm cho biến cố đó xảy ra.

1.2. Biến cố đối

Cho hai biến cố A và B . Khi đó

☆ **Biến cố đối** của biến cố A là biến cố “ A không xảy ra”, kí hiệu là $\bar{A}$.

2. Định nghĩa cổ điển của xác suất

Định nghĩa 8.1.

Cho phép thử T có không gian mẫu là Ω . Giả sử các kết quả có thể của T là đồng khả năng. Nếu E là một biến cố liên quan đến phép thử T thì **xác suất** của E được cho bởi công thức

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)},$$

trong đó $n(\Omega)$ và $n(E)$ tương ứng là số phần tử của không gian mẫu Ω và biến cố E .

☆ **Tính chất**

◇ $P(\emptyset) = 0$ và $P(\Omega) = 1$.

◇ $0 \leq P(A) \leq 1$.

☆ Cho biến cố A . Xác suất của biến cố đối $\bar{A}$ của A là

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

