

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM
TÌM SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH HÀM HỢP

ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x^2 - 2x)| = 2$ là

A. 4 . **B. 2** C. 3 D. 8

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'	$+$	0	$-$	0	$-$				
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$ của phương trình $f(f(\cos 2x)) = 0$ là

A. 4 . **B. 2** C. 3 D. 8

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau:

x	1	2	3		
y'		+	0	−	
y	−6	$\nearrow$	−1	$\searrow$	−3

Tổng tất cả các số nguyên m để phương trình $f(x-1) = \frac{m}{x^2 - 6x + 12}$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $[2; 4]$ bằng

A. -75 . **B. -72 .** C. -294 . D. -297 .

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			2		0		2		
	$-\infty$								$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $3f(\sin 2x) - 2 = 0$ là:

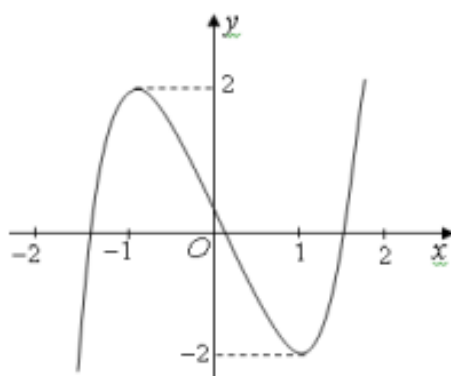
A. 7.

B. 8.

C. 5.

D. 6.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?



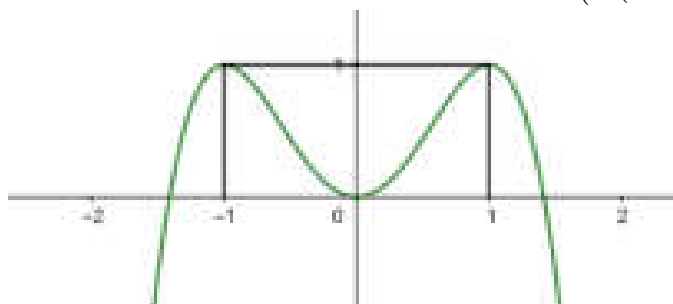
A. 3.

B. 7.

C. 9.

D. 5.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty$. Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f(f(\cos 2x)) = 0$?



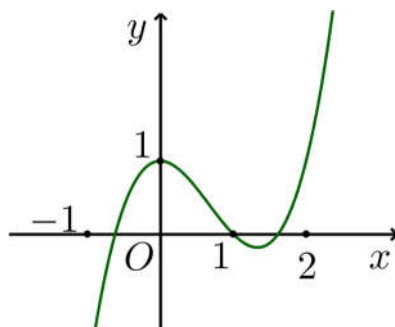
A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Khi đó phương trình $4f(3x^4) - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm dương?

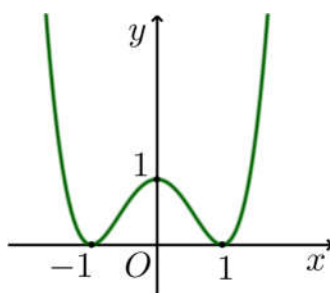
A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 1.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Phương trình $-2f(\cos x) + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong đoạn $[-\pi; 2\pi]$ đồng thời $\tan x > 0$?

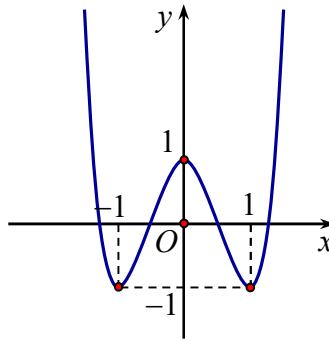
A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $2f(\sin x) - 1 = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ là

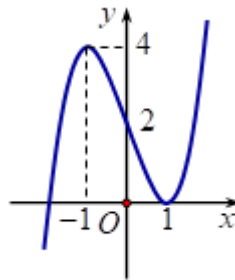
A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 5\pi]$ của phương trình $f(\cos x) = 1$

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $3|f(2x-1)| - 10 = 0$ là.

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		1		2		1		$+\infty$

Tập hợp các giá trị m để phương trình $f(\cos 2x) - 2m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng

$\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right)$ là:

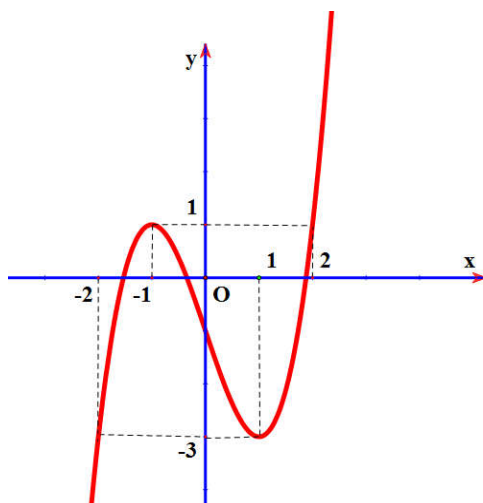
A. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$

C. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

D. $\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{4}\right)$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(3 - 2f(x)) = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 4.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	0	2	$-\infty$		

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\cos x) - 1 = 0$ là:

A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			2		-1		$+\infty$
	$-\infty$						

Số nghiệm của phương trình $f(3x^4 - 6x^2 + 1) = 1$ là

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$			
$f'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$									

$-\infty$

2

3

1

3

$-\infty$

$-\infty$

2

3

1

3

$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{3}\right]$ của phương trình $2.f(\cos x) - 5 = 0$ là

- A. 8. B. 7. C. 5. D. 6.

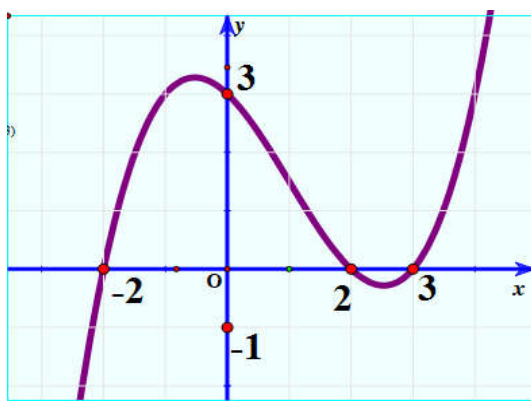
Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $f(\sin x) + 1 = 0$ là

- A. 3. B. 6. C. 4. D. 5.

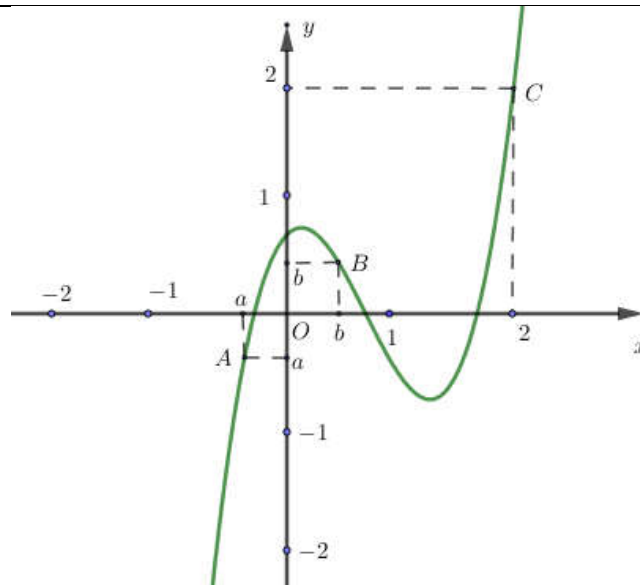
Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2}) = m$ có hai nghiệm phân biệt

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right)$ của phương trình $f(\cos x + 1) = \cos x + 1$ là

- A. 6. B. 10. C. 4. D. 8.

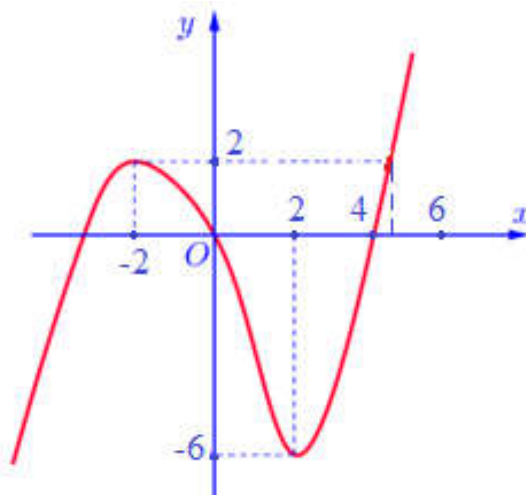
Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	0	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 5\pi]$ của phương trình $|f(\sin x)| = 1$ là

- A. 6. B. 4. C. 10. D. 8.

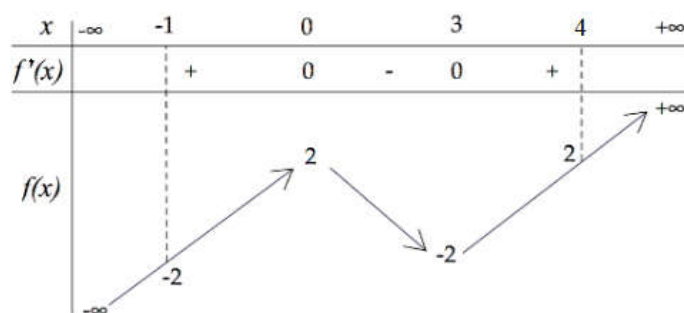
Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Số nghiệm thực của phương trình $f(4 + f(2^x)) = 2$ là

- A. 1. **B. 2.** C. 3. D. 4.

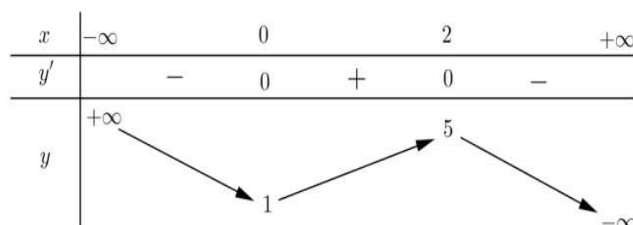
Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm nhiều nhất thuộc đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2 \cos x + 1) = 0$ là:

- A. 7. B. 5. **C. 4.** D. 6.

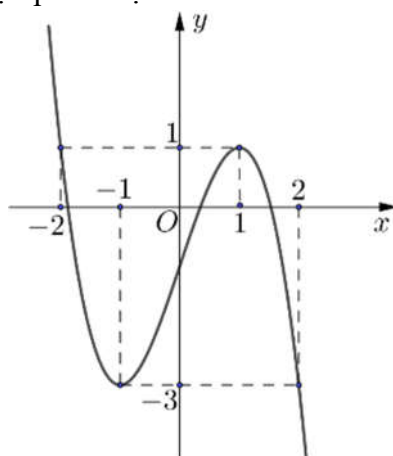
Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $f(2 \tan 2x) = -m + 1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{8}\right)$ là:

- A. 1.** B. 3. C. Vô số. D. 0.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(1 - f(x)) = 0$ có tối đa bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



- A. 7.** B. 9. C. 6. D. 5.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$			4		2	
	$-\infty$		-4		$-\infty$	

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ của phương trình $f(2\cos^2 x - 3) = 3$ là:

A. 8 .

B. 2 .

C. 6 .

D. 4 .

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						
			1		-2	
	$-\infty$					$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x^2 - x)| = 2$ là:

A. 1 .

B. 3 .

C. 2 .

D. 4 .

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		3		3	
	$-\infty$		0		$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$ của phương trình $f(\cos x) = 2$ là

A. 3 .

B. 4 .

C. 6 .

D. 8 .

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		0		-4	
	$-\infty$				$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $3f(2|\sin x|) + 2 = 0$ là :

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	-2	0	1	4		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
$f(x)$	4			1		-2

Số nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3]$ của phương trình $f(x^2 - 3x) + 1 = 0$ là

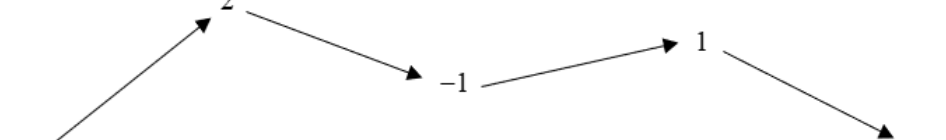
A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$							

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{5\pi}{6}; 3\pi\right]$ của phương trình $4f(\cos 2x) - 1 = 0$ là

A. 5.

B. 9.

C. 4.

D. 10.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-2; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	-2	0	2	4	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	-3	2	1	6	

Số nghiệm của phương trình $3f(-2x + 1) = 8x^3 - 6x$ trên đoạn $\left[\frac{-3}{2}; \frac{3}{2}\right]$ là

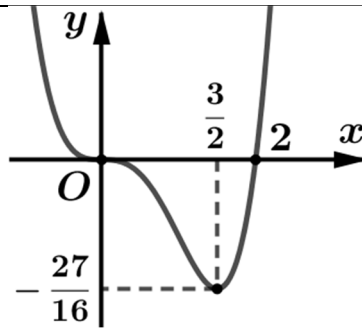
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(2|\sin x|) + 1 = 0$ là

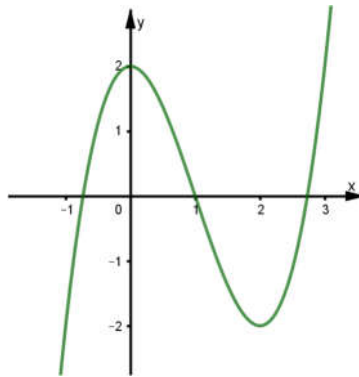
A. 6.

B. 2.

C. 8.

D. 12.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Gọi m là số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

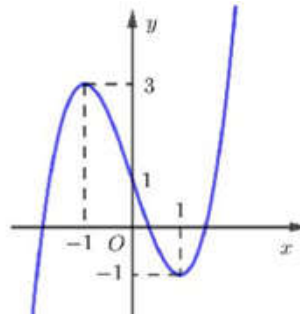
A. $m = 6$.

B. $m = 7$.

C. $m = 5$.

D. $m = 9$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(\sin x) = 2\sin x + 2m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng:



A. -2

B. 0.

C. -1.

D. -5.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(2\sin x) - 1 = 0$ là

A. 8.

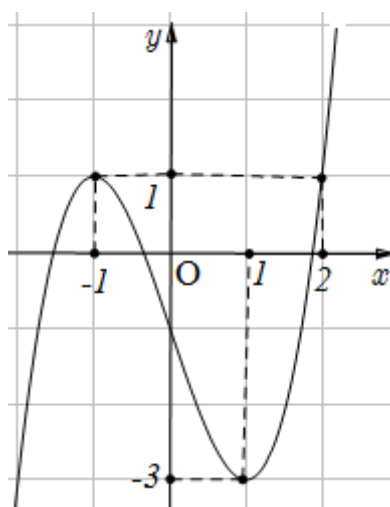
B. 5.

C. 2.

D. 6.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$. Số nghiệm của phương trình $[f(x)]^3 - 3f(x) + 1 = 0$ là:
A. 1. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc 3 có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$ của phương trình $2f\left(\frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}\right) - 1 = 0$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

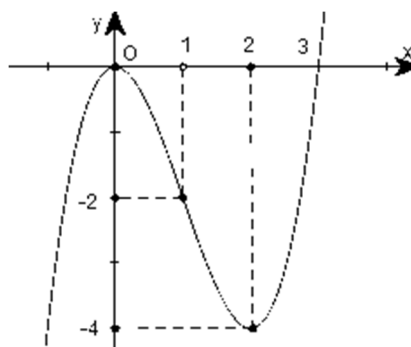
Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		1		-2	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin^4 x + \cos^4 x) = m$ có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $2f(\cos 2x) + 1 = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right]$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

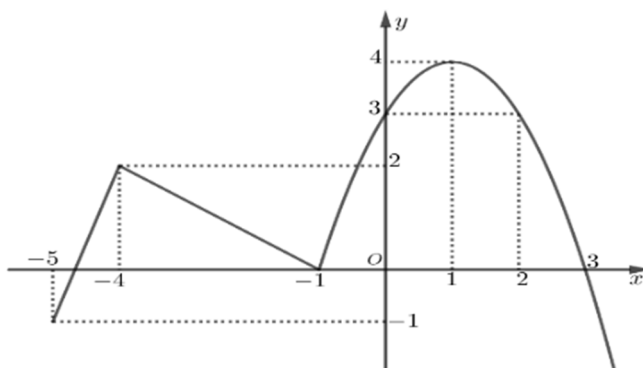
Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $3f(f(x)) = m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt $x \in [-5; 0]$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	3	$\frac{14}{3}$	$\frac{1}{3}$	-6	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-2019; 1]$ của phương trình $f(\ln x) = 4$

A. 2020

B. 4.

C. 2019.

D. 3.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$	$-$
y	$-\infty$	1	2	-3	2	1	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ của phương trình $f(\sin x + \cos x) = -1$

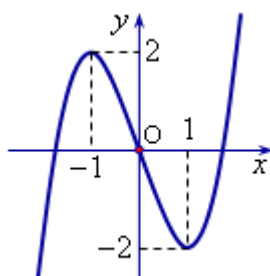
A. 1

B. 3

C. 2

D. 0.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) - 2\sin x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$?

A. 9.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$\nearrow$			$\searrow$	
				-2					
							-2		
									$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2|f(\sin x)| - 3 = 0$ là

A. 6.

B. 3.

C. 4.

D. 8.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$			$\nearrow$			$\searrow$	
				-3					
							2		
									$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(e^x - 4) - 1 = 0$ trong đoạn $[\ln 2; \ln 6]$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$			$\nearrow$		
				-4			4
							$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 0$ trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ là

A. 1.

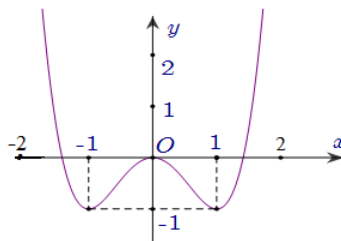
B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số nghiệm thực của bất phương trình

$$1 + f(x^3 - 3x^2 + 1) \geq \sqrt{2f^2(x^3 - 3x^2 + 1) + 2} \text{ là}$$



A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc 3 và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Phương trình $f^2(\sin x + \cos x) + 1 + \sin 2x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) f(\sin x + \cos x)$ có mấy nghiệm thực thuộc đoạn $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Câu 49. Cho $y = f(x)$ là hàm số bậc ba và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			1		-1		$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-5; 5)$ để hàm số $g(x) = f(f(x) + m)$ có 4 điểm cực trị?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			$+\infty$	
		-1			-1			

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình $f^2(\cos x) - f(\cos x) = 2$ là

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 9.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$		

Số nghiệm $x \in [0; +\infty)$ của phương trình $f(e^x + 2020x) - 2 = 0$ là

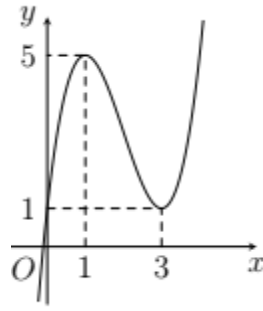
A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 2020.

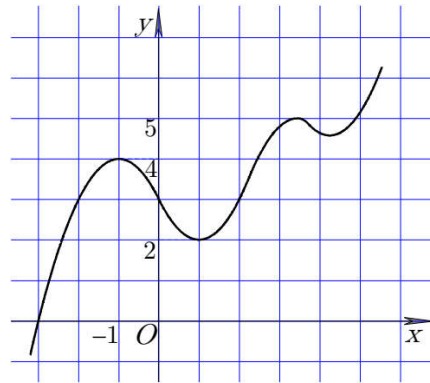
Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $2f(\cos x) - 5 = 0$ là

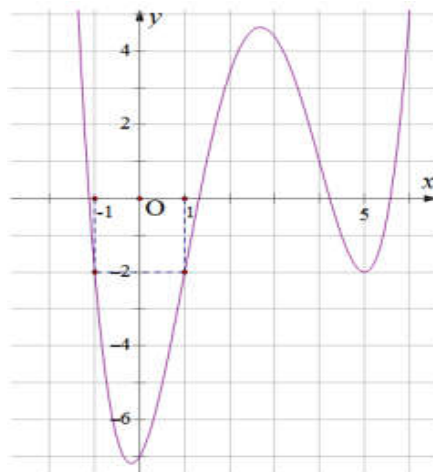
- A. 5. B. 1. **C. 3.** D. 4.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.



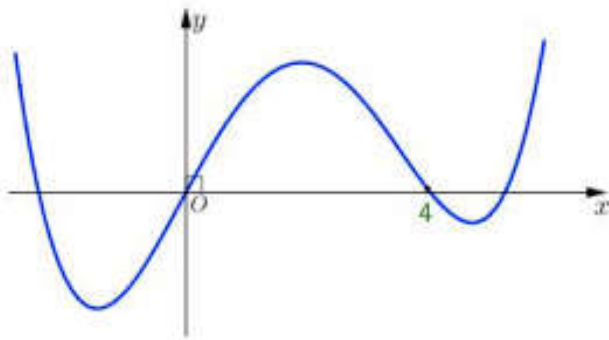
- A. 1. B. 4. **C. 2.** D. 3.

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$?



- A. 4. B. 7. **C. 5.** D. 6.

Câu 55. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + 4)$ là

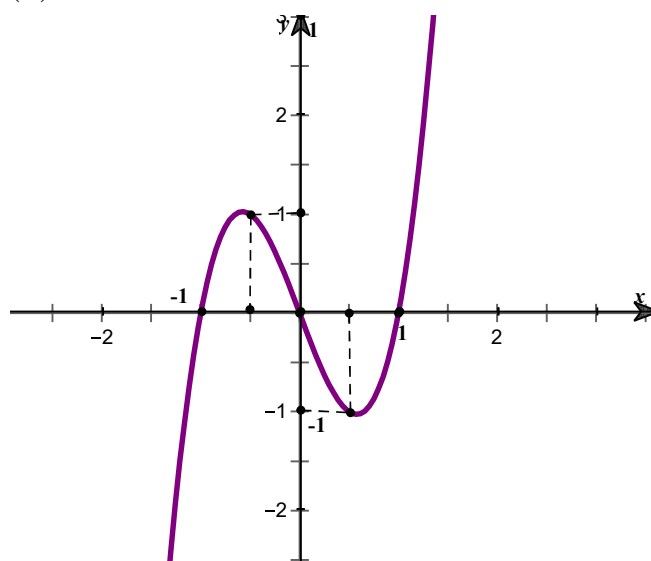
A. 5 .

B. 3 .

C. 7 .

D. 11 .

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên



Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$ của phương trình : $2|f(\cos x)| - 1 = 0$

A. 12 .

B. 6 .

C. 10 .

D. 8 .

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thuộc đoạn

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\cot x + 1) = 1$ là

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	1	-2	$+\infty$

A. 7.

B. 6.

C. 8.

D. 5.

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	3	1	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(\sin x + 1) = 2$ trên $[-\pi; 2\pi]$ là

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x^2 - 2x)| = 2$ là

A. 4 .

B. 2

C. 3

D. 8

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình } |f(x^2 - 2x)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^2 - 2x) = 2 \\ f(x^2 - 2x) = -2 \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1	a	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$y = 2$

$$\text{phương trình } f(x^2 - 2x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = a \ (a > 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - a = 0$$

có $\Delta = 1 + a > 0 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm.

Tương tự, dựa vào bảng biến thiên

x	$-\infty$	b	-1		1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			1		-1	$+\infty$

$y = -2$

$$\text{Phương trình } f(x^2 - 2x) = -2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = b \ (b < -1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - b = 0$$

có $\Delta = 1 + b < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình $|f(x^2 - 2x)| = 2$ có 2 nghiệm.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y									
	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$ của phương trình $f(f(\cos 2x)) = 0$ là

A. 4 .

B. 2

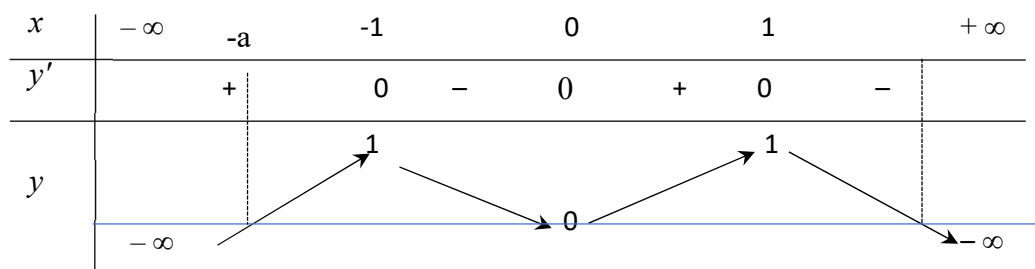
C. 3

D. 8

Lời giải

Chọn B

a



Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và

$$f(f(\cos 2x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos 2x) = a \\ f(\cos 2x) = -a \\ f(\cos 2x) = 0 \end{cases} \text{ với } a > 1$$

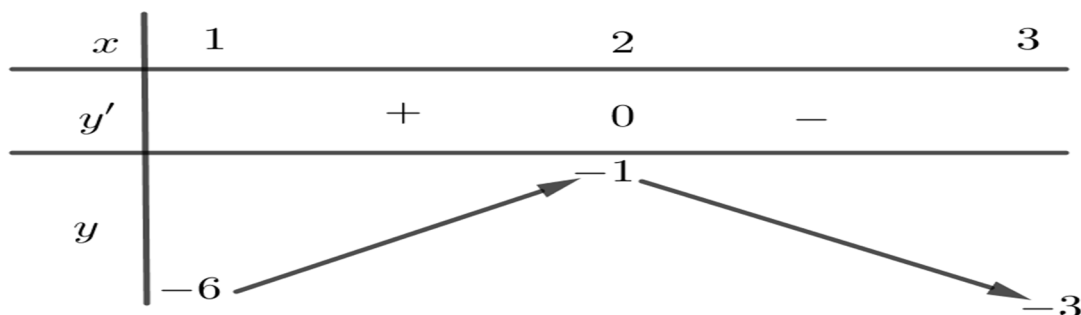
Với $f(\cos 2x) = a$ thì phương trình vô nghiệm.

Với $f(\cos 2x) = -a \Leftrightarrow \cos 2x = \pm b$ với $b > 1$ nên phương trình vô nghiệm.

$$\text{Với } f(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Vậy phương trình $f(f(\cos 2x)) = 0$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau:



Tổng tất cả các số nguyên m để phương trình $f(x-1) = \frac{m}{x^2 - 6x + 12}$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $[2; 4]$ bằng

A. -75.

B. -72.

C. -294.

D. -297.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình tương đương với: $m = g(x) = (x^2 - 6x + 12)f(x-1)$.

Ta có $g'(x) = (2x - 6)f(x-1) + (x^2 - 6x + 12)f'(x-1)$

$$+) \text{ Nếu } 2 \leq x < 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6 < 0; f(x-1) < 0 \\ x^2 - 6x + 12 > 0; f'(x-1) > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0$$

$$+) \text{ Nếu } x = 3 \Rightarrow g'(3) = 0, f(2) + 3 \cdot f'(2) = 0$$

$$+) \text{ Nếu } 3 < x \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6 > 0; f(x-1) < 0 \\ x^2 - 6x + 12 > 0; f'(x-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0.$$

Vậy trên đoạn $[2; 4]$ ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng biến thiên:

x	2	3	4
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-24	-3	-12

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt trên đoạn

$$[2; 4] \Leftrightarrow -12 \leq m < -3 \Rightarrow m \in \{-12, \dots, -4\}.$$

Tổng các số nguyên cần tìm bằng $-12 + (-11) + \dots + (-5) + (-4) = -72$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2		0		2	
	$-\infty$							$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $3f(\sin 2x) - 2 = 0$ là:

A. 7.

B. 8.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $\sin 2x = t$, $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Phương trình trở thành: $f(t) = \frac{2}{3}$.

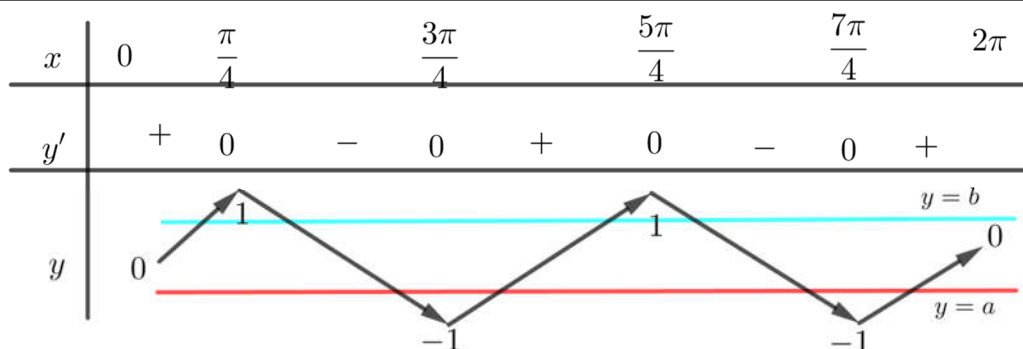
Từ bảng biến thiên ta có:

x	$-\infty$	-1	a	0	b	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$		2		0		2		$-\infty$

$y = \frac{2}{3}$

$$f(t) = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} t = a \\ t = b \end{cases} \quad \text{Với } -1 < a < 0 \text{ và } 0 < b < 1$$

Xét BBT của hàm số $y = \sin 2x$ trên $[0; 2\pi]$:



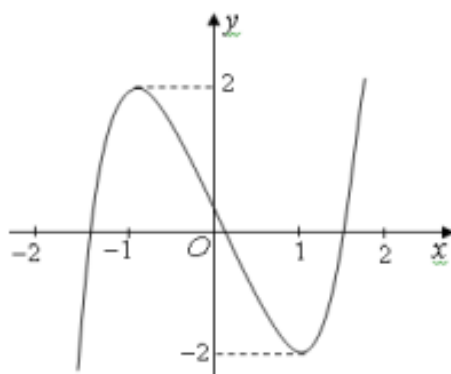
Dựa vào BBT của hàm số ta có

+) Phương trình $\sin 2x = a$ có 4 nghiệm.

+) Phương trình $\sin 2x = b$ có 4 nghiệm

Vậy phương trình $3f(\sin 2x) - 2 = 0$ có 8 nghiệm.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?



B. 3.

B. 7.

C. 9.

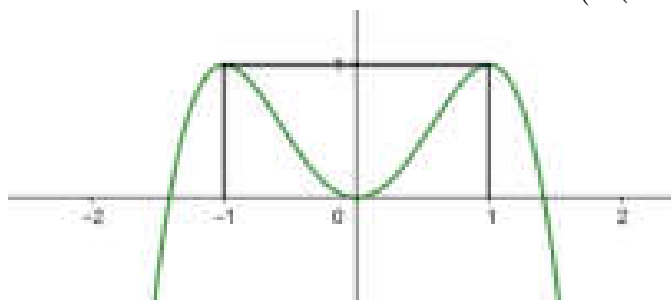
D. 5.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = f(x)$, phương trình $f(f(x)) = 0$ trở thành $f(t) = 0$ (*) (số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị $f(x)$ với trục Ox). Nhìn vào đồ thị ta thấy phương trình (*) có 3 nghiệm t thuộc khoảng $(-2; 2)$, với mỗi giá trị t như vậy phương trình $f(x) = t$ có 3 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình $f(f(x)) = 0$ có 9 nghiệm. Vậy chọn C

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty$. Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f(f(\cos 2x)) = 0$?



Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta có $f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và suy ra được $f(\cos 2x) = \pm a$ ($a > 1$) hoặc $f(\cos 2x) = 0$

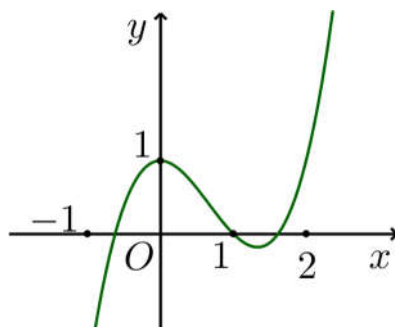
TH1: Nếu $f(\cos 2x) = a > 1$ thì phương trình này vô nghiệm.

TH2: Nếu $f(\cos 2x) = -a < -1$ thì $|\cos 2x| > 1$, phương trình này vô nghiệm.

TH3: Nếu $f(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \pm a \text{ (VN)} \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$

$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ nên có 4 điểm trên đường tròn lượng giác. Vậy có 4 điểm.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Khi đó phương trình $4f(3x^4) - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm dương?

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Bảng biến thiên của hàm số $y = 3x^4$:

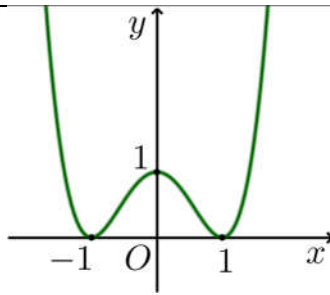
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Ta có: $4f(3x^4) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(3x^4) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 = x_1, & x_1 \in (-1; 0) \\ 3x^4 = x_2, & x_2 \in (0; 1) \\ 3x^4 = x_3, & x_3 \in (1; 2) \end{cases}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $3x^4 = x_1$ vô nghiệm; $3x^4 = x_2$ có một nghiệm âm một nghiệm dương; $3x^4 = x_3$ có một nghiệm âm một nghiệm dương.

Vậy phương trình $4f(3x^4) - 3 = 0$ có 2 nghiệm dương.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Phương trình $-2f(\cos x) + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong đoạn $[-\pi; 2\pi]$ đồng thời $\tan x > 0$?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

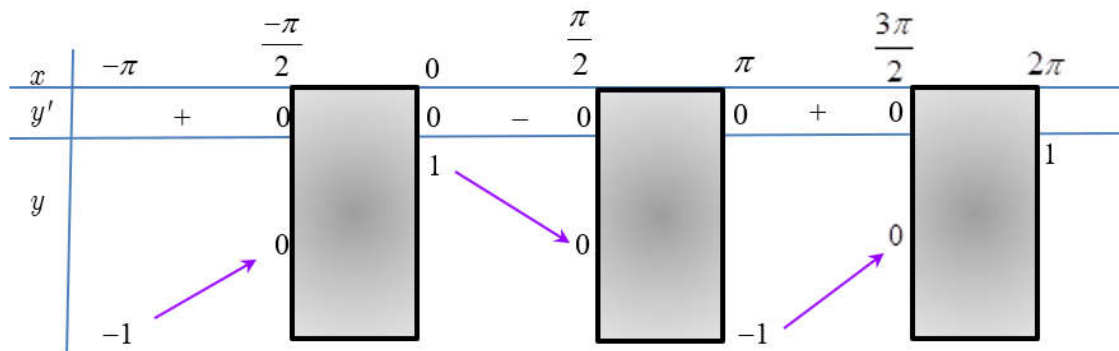
Lời giải

Chọn A

$$-2f(\cos x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = x_1, & x_1 \in (-\infty; -1) \text{ (VN)} \\ \cos x = x_2, & x_2 \in (-1; 0) \\ \cos x = x_3, & x_3 \in (0; 1) \\ \cos x = x_4, & x_4 \in (1; +\infty) \text{ (VN)} \end{cases}.$$

Vì $\tan x > 0$ và $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên khi đó $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) (*)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = \cos x$ trên $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$



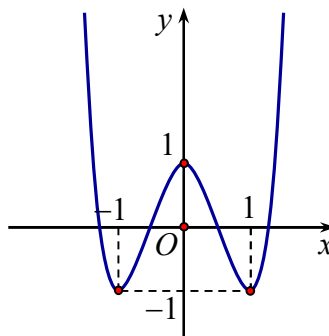
Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Phương trình $\cos x = x_2$ với $x_2 \in (-1; 0)$ có 2 nghiệm thỏa (*).

Phương trình $\cos x = x_3$ với $x_3 \in (0; 1)$ có 1 nghiệm thỏa (*).

Vậy có 3 nghiệm x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $2f(\sin x) - 1 = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

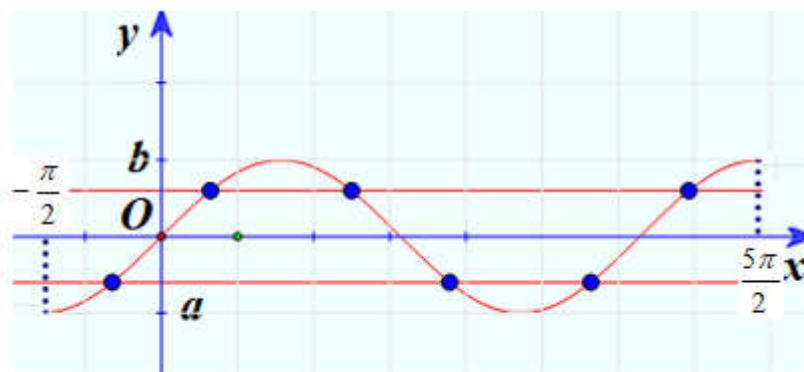
Chọn D

Đặt $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$ ta được: $f(t) = \frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} t = a, (-1 < a < 0) \\ t = b, (0 < b < 1) \end{cases}$

Xét hàm số $g(x) = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

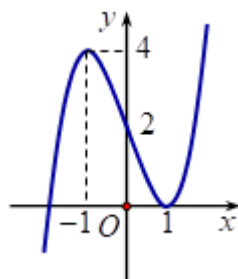
Đồ thị của hàm số $g(x) = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ là



Dựa vào đồ thị ta có $\sin x = a$ có 3 nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$, $\sin x = b$ có 3 nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Vậy phương trình $2f(\sin x) - 1 = 0$ có 6 nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 5\pi]$ của phương trình $f(\cos x) = 1$

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

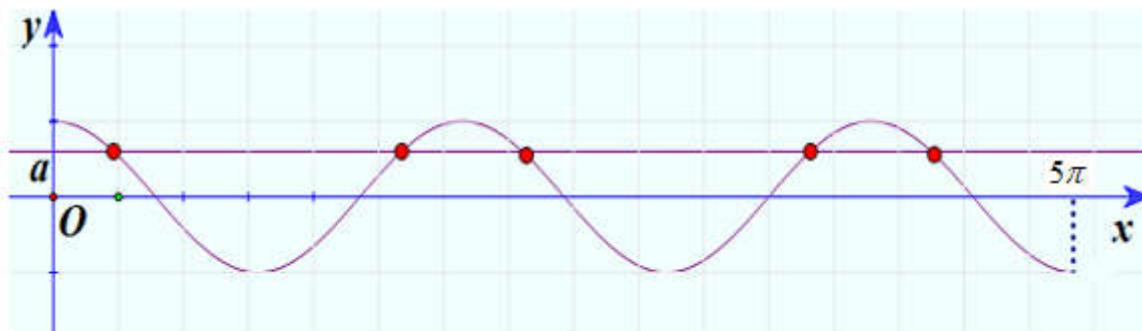
Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$ ta được $f(t) = 1 \Leftrightarrow t = a$ với $a \in (0; 1)$

Xét hàm số $g(x) = \cos x$ trên đoạn $[0; 5\pi]$

Đồ thị của hàm số $g(x) = \cos x$ trên đoạn $[0; 5\pi]$ là



Dựa vào đồ thị ta có $\cos x = a$ có 5 nghiệm trên $[0; 5\pi]$

Vậy phương trình $f(\cos x) = 1$ có 5 nghiệm trên $[0; 5\pi]$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$			$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$+\infty$		3		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3|f(2x-1)| - 10 = 0$ là.

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2x - 1$, ta có phương trình trở thành $|f(t)| = \frac{10}{3}$. Với mỗi nghiệm t thì có một nghiệm

$x = \frac{t+1}{2}$ nên số nghiệm t của phương trình $|f(t)| = \frac{10}{3}$ bằng số nghiệm của

$3|f(2x-1)| - 10 = 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ là

x	$-\infty$		x_0		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$			$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0		$+\infty$		3		$+\infty$

Suy ra phương trình $|f(t)| = \frac{10}{3}$ có 4 nghiệm phân biệt nên phương trình $3|f(2x-1)| - 10 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		1		2		1		$+\infty$

Tập hợp các giá trị m để phương trình $f(\cos 2x) - 2m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$

C. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

D. $\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{4}\right)$

Lời giải

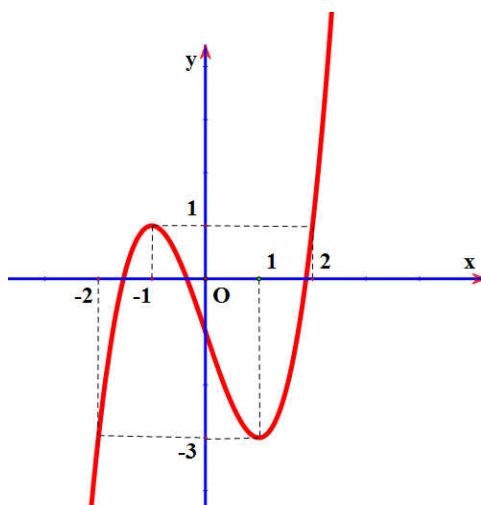
Chọn A

Đặt $\cos 2x = t, x \in \left(\frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Yêu cầu đề bài tương đương với phương trình $f(t) = 2m + 1$ có nghiệm $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Từ bảng biến thiên suy ra yêu cầu $\Leftrightarrow 1 \leq 2m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(3 - 2f(x)) = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có: $f(3 - 2f(x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2f(x) = -1 \\ 3 - 2f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Mà $f(x) = 2$ có 1 nghiệm duy nhất lớn hơn 2.

Và $f(x) = \frac{1}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1 \in (-2; -1), x_2 \in (-1; 0), x_3 \in (1; 2)$

Vậy phương trình có 4 nghiệm thực phân biệt.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0
y			2		2
	$-\infty$		0		$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\cos x) - 1 = 0$ là:

A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\cos x = t$, $x \in [-\pi; 2\pi] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Phương trình trở thành: $f(t) = \frac{1}{2}$.

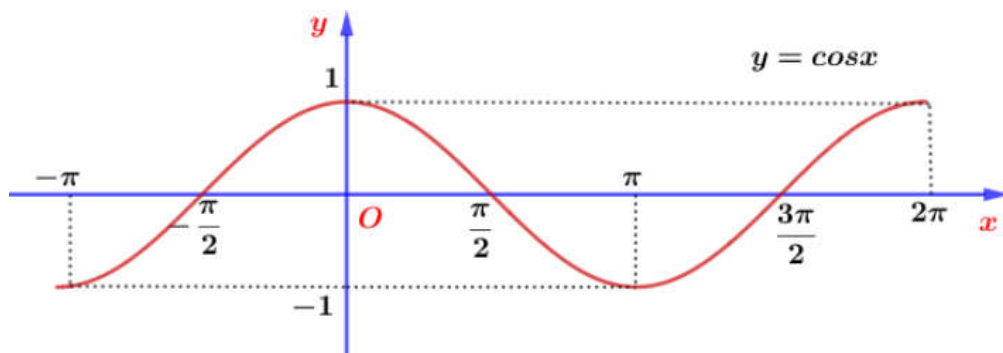
Từ bảng biến thiên ta có:

x	$-\infty$	-1	a	0	b	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2		0		2	

The graph shows a piecewise linear function $y(x)$ with a horizontal asymptote at $y=1$. The function has a V-shape with a minimum at $(0,0)$ and branches that approach $y=1$ as x goes to positive or negative infinity. The left branch passes through $(-1, 2)$ and the right branch passes through $(1, 2)$. Vertical dashed red lines are at $x=a$ and $x=b$. The x-axis is labeled with $-\infty$, -1 , a , 0 , b , 1 , $+\infty$. The y-axis is labeled with $-\infty$, 0 , 2 , and $y=1$.

$$f(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = a \\ t = b \end{cases} \quad \text{Với } -1 < a < 0 \text{ và } 0 < b < 1$$

Dựa vào đồ thị $y = \cos x$ ta có :



+) $\cos x = a$ có 3 nghiệm.

+) $\cos x = b$ có 3 nghiệm

Vậy phương trình $2f(\cos x) - 1 = 0$ có 6 nghiệm.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			2		-1		$+\infty$
	$-\infty$						

Số nghiệm của phương trình $f(3x^4 - 6x^2 + 1) = 1$ là

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; -2) \\ x = b \in (-2; 1) \\ x = c \in (1; +\infty) \end{cases}$.

$$\text{Do đó } f(3x^4 - 6x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 - 6x^2 + 1 = a & (1) \\ 3x^4 - 6x^2 + 1 = b & (2) \\ 3x^4 - 6x^2 + 1 = c & (3) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 3x^4 - 6x^2 + 1$

$$\text{Có } g'(x) = 12x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			1			$+\infty$	
		$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, có:

- Phương trình (1) vô nghiệm.
 - Phương trình (2) có đúng 4 nghiệm phân biệt.
 - Phương trình (3) có đúng 2 nghiệm phân biệt.
- Vậy phương trình đã cho có tất cả 6 nghiệm.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$			
$f'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$									

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{3}\right]$ của phương trình $2.f(\cos x) - 5 = 0$ là

A. 8.

B. 7.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

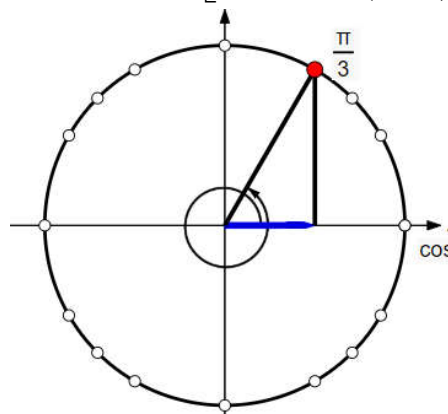
Chọn B

Xét phương trình $2.f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = a \in (-1; 0) \\ x = b \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \\ x = c \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \\ x = d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

Do đó $2.f(\cos x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

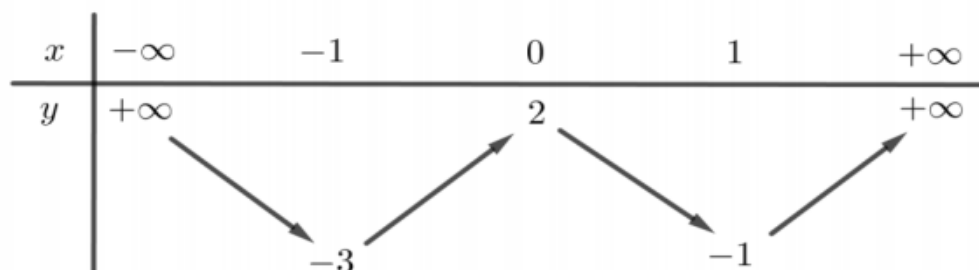
$$\begin{cases} \cos x = a \in (-1; 0) & (1) \\ \cos x = b \in \left(0; \frac{1}{2}\right) & (2) \\ \cos x = c \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) & (3) \\ \cos x = d \in (1; +\infty) & (4) \end{cases}.$$


Dựa vào đường tròn lượng giác, trên đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{3}\right]$ ta có:

- Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt.
- Phương trình (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt.
- Phương trình (3) có đúng 3 nghiệm phân biệt.
- Phương trình (4) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 7 nghiệm.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên bảng biến thiên như sau



Số nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $f(\sin x) + 1 = 0$ là

- A. 3. B. 6. **C. 4.** D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(\sin x) + 1 = 0 &\Leftrightarrow f(\sin x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = a \in (-1; 0) \\ \sin x = b < -1 \end{cases} \\ g(x) = \sin x &\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có bảng biến thiên hàm $g(x)$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ như sau:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π			
$g'(x)$	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$			1		-1		0
			-1		-1		0

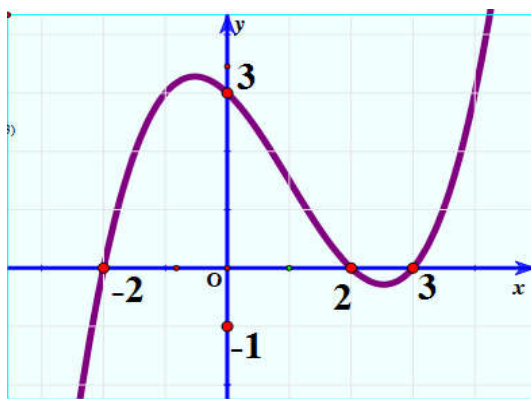
Từ bảng biến thiên trên, ta thấy các phương trình $\sin x = b$ vô nghiệm.

Phương trình $\sin x = a$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

Phương trình $\sin x = 1$ có 1 nghiệm $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ và các nghiệm trên phân biệt.

Vậy phương trình $f(\sin x) + 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2}) = m$ có hai nghiệm phân biệt

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{4 - x^2}$, phương trình thành $f(t) = m$

Lập BBT của hàm số $u(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2; 2]$

BBT của hàm số $u(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2; 2]$

	-2	0	2
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$	0	2	0

Ta được $t \in [0; 2]$

Ta thấy rằng $t \in [0; 2)$ nghiệm mỗi t tạo ra 2 nghiệm x

$t = 2$ thì nghiệm $x = 0$

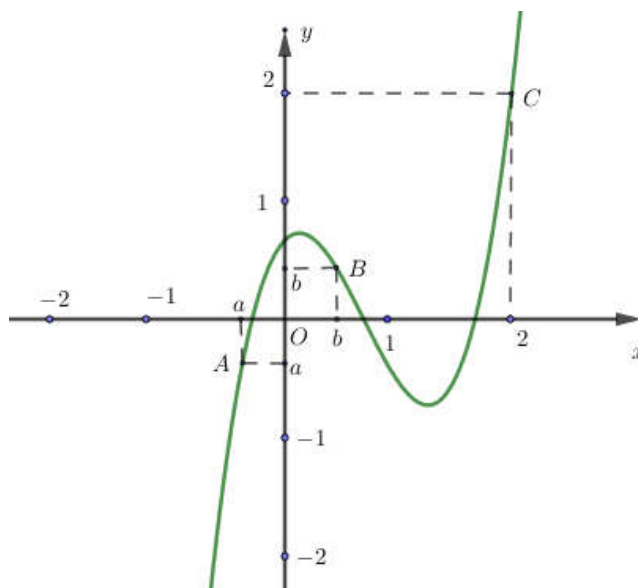
Từ hình vẽ ta thấy :

$+m = 0$: được nghiệm $t = 2$ tạo ra 1 nghiệm x

$+m = 1, 2, 3$ thỏa

Vậy có ba giá trị m nguyên của tham số thỏa mãn

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right)$ của phương trình $f(\cos x + 1) = \cos x + 1$ là

A. 6.

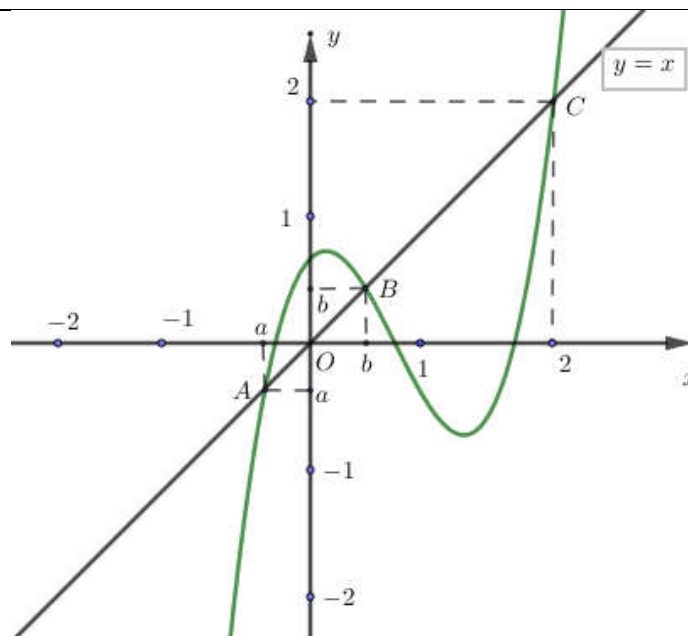
B. 10.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn B



Từ đồ thị ta có $f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; 0) \\ x = b \in (0; 1) \\ x = 2 \end{cases}$

$$\text{Do đó } f(\cos x + 1) = \cos x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 1 = a \in (-\infty; 0) \\ \cos x + 1 = b \in (0; 1) \\ \cos x + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a - 1 = t_1 \in (-\infty; -1) \text{ (VN)} \\ \cos x = b - 1 = t_2 \in (-1; 0) \quad (1) \\ \cos x = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 4 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right)$.

Phương trình (2) có 6 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 10 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right)$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	0	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 5\pi]$ của phương trình $|f(\sin x)| = 1$ là

A. 6.

B. 4.

C. 10.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta được

$$f(\sin x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = t_1 \in (-\infty; -1) (VN) \\ \sin x = t_2 \in (-1; 0) \\ \sin x = t_3 \in (1; +\infty) (VN) \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = t_2 \in (-1; 0) \quad (1).$$

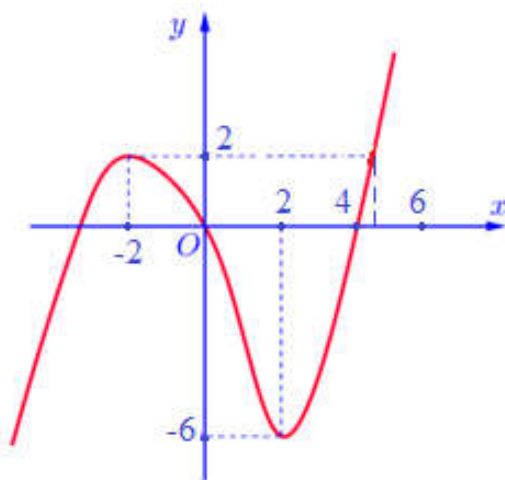
Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 4 nghiệm nằm trong đoạn $[0; 5\pi]$.

$$f(\sin x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = t_4 \in (-\infty; -1) (VN) \\ \sin x = t_5 \in (0; 1) \\ \sin x = t_6 \in (1; +\infty) (VN) \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = t_5 \in (0; 1) \quad (2).$$

Dựa vào đường tròn lượng giác, ta được phương trình (2) có 6 nghiệm nằm trong đoạn $[0; 5\pi]$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 10 nghiệm.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Số nghiệm thực của phương trình $f(4 + f(2^x)) = 2$ là

A. 1.

B. 2.

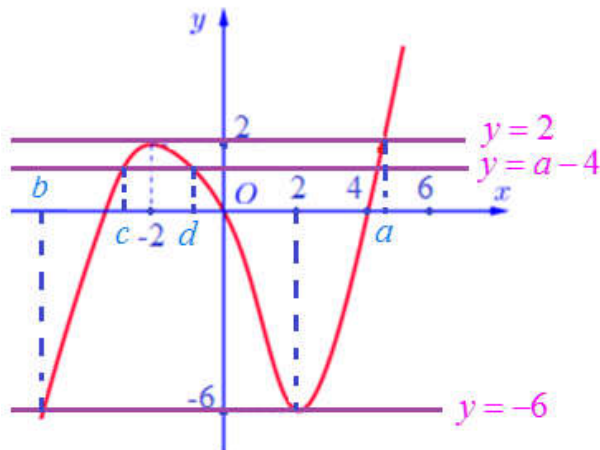
C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có:



Theo đồ thị :

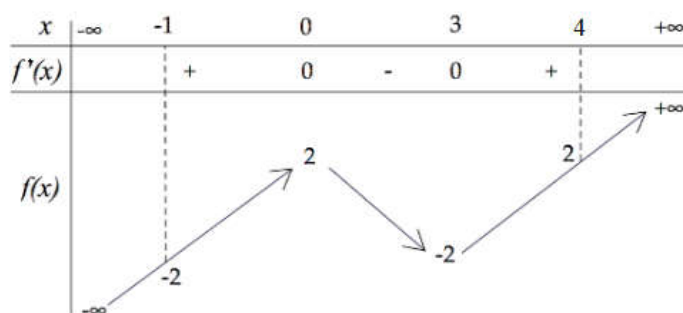
$$f(4 + f(2^x)) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + f(2^x) = -2 \\ 4 + f(2^x) = a, (4 < a < 6) \end{cases}$$

$$\text{TH1)} \quad 4 + f(2^x) = -2 \Leftrightarrow f(2^x) = -6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \\ 2^x = b < -2 \text{ (KTM)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{TH2)} \quad 4 + f(2^x) = a \Leftrightarrow f(2^x) = a - 4, (0 < a - 4 < 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = c < -2 \text{ (KTM)} \\ 2^x = d < 0 \text{ (KTM)} \\ 2^x = t > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \log_2 t.$$

Vì $t > 4$ nên $\log_2 t > \log_2 4 = 2 > 1$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm nhiều nhất thuộc đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2 \cos x + 1) = 0$ là:

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

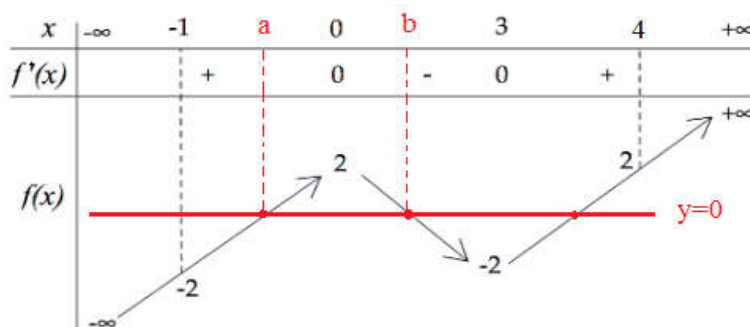
Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2 \cos x + 1$, $x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 3]$.

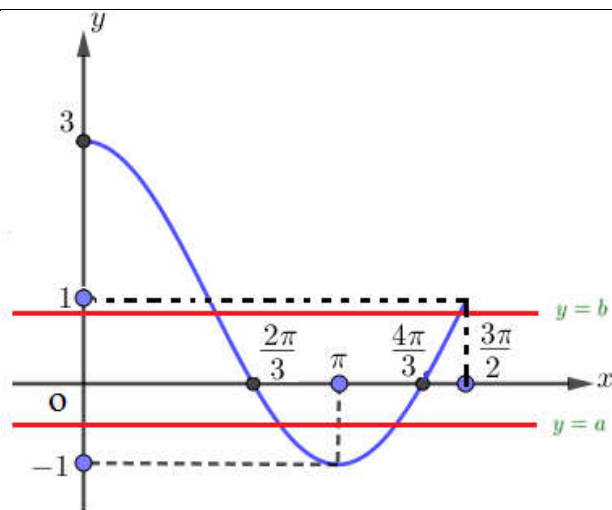
Xét phương trình: $f(t) = 0$, với $t \in [-1; 3]$.

Từ bảng biến thiên ta có:



Trên đoạn $[-1; 3]$, phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm $\begin{cases} t = a \\ t = b \end{cases}$, với $-1 < a < 0$ và $0 < b < 3$

Vẽ đồ thị $y = 2 \cos x + 1$ trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$, ta có :



Với $2\cos x + 1 = a \Rightarrow$ Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = 2\cos x + 1$ tại 2 điểm

$$x \in \left[0; \frac{3\pi}{2} \right].$$

Với $2\cos x + 1 = b \Rightarrow$ Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = 2\cos x + 1$ tại tối đa 2 điểm

$$x \in \left[0; \frac{3\pi}{2} \right].$$

Vậy phương trình $f(2\cos x + 1) = 0$ có nhiều nhất 4 nghiệm.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $f(2\tan 2x) = -2m + 1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{8} \right)$ là:

A. 1.

B. 3.

C. Vô số.

D. 0.

Lời giải

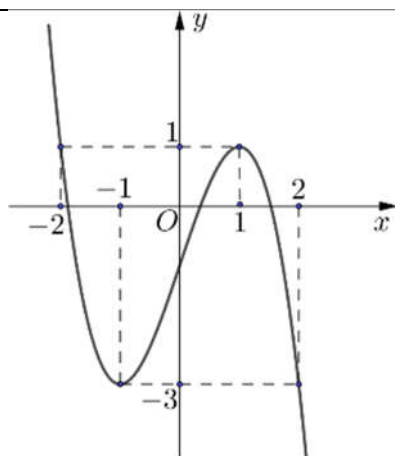
Chọn A

Đặt $t = 2\tan 2x$, $t \in (0; 2)$. Khi đó $f(t) = -2m + 1$, $t \in (0; 2)$ (*).

Số nghiệm của phương trình (*) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -2m + 1$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow 1 < -2m + 1 < 5 \Leftrightarrow -2 < m < 0$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(1 - f(x)) = 0$ có tối đa bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A.7.

B.9.

C.6.

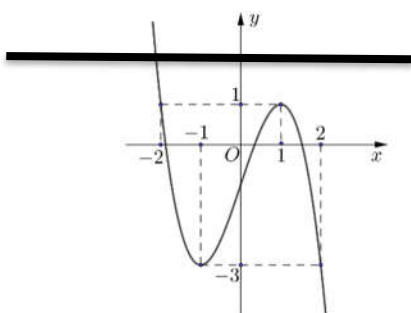
D.5.

Lời giải

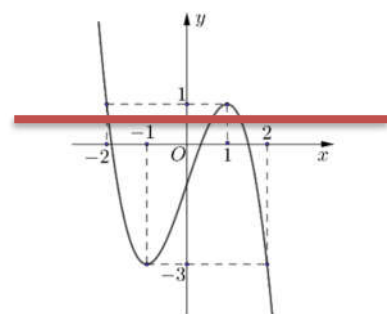
Chọn A

$$\text{Từ đồ thị hàm số ta có } f(1-f(x))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-f(x)=m & (-2 < m < -1) \\ 1-f(x)=n & (0 < n < 1) \\ 1-f(x)=p & (1 < p < 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=1-m \\ f(x)=1-n \\ f(x)=1-p \end{cases}.$$

+) Do $-2 < m < -1 \Rightarrow 2 < 1-m < 3$. Từ đồ thị hàm số ta suy ra phương trình $f(x)=1-m$ có đúng một nghiệm $x_1 < -2$.

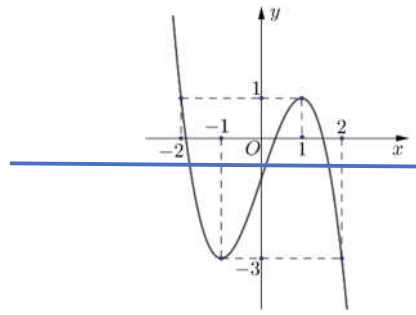


+) Do $0 < n < 1 \Rightarrow 0 < 1-n < 1$. Từ đồ thị hàm số ta suy ra phương trình $f(x)=1-n$ có đúng ba nghiệm $-2 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4 < 2$.



+) Do $1 < p < 2 \Rightarrow -1 < 1-p < 0$. Từ đồ thị hàm số ta suy ra phương trình $f(x)=1-p$ có đúng ba nghiệm $-2 < x_5 < -1 < x_6 < 1 < x_7 < 2$ khác x_2, x_3, x_4 .

Vậy phương trình đã cho có tối đa 7 nghiệm phân biệt.



Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$			
$f(x)$									
	$-\infty$		4		-4		2		$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ của phương trình $f(2\cos^2 x - 3) = 3$ là:

A. 8 .

B. 2 .

C. 6 .

D. 4 .

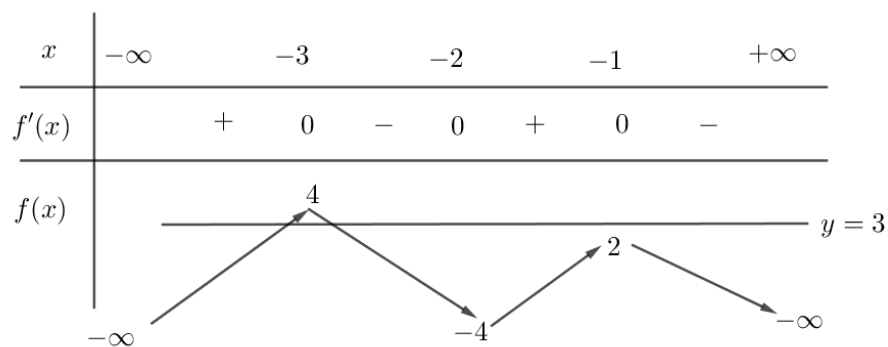
Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2\cos^2 x - 3$, vì $x \in [-\pi; \pi]$ nên $t \in [-3; -1]$

Ta có phương trình $f(t) = 3, t \in [-3; -1]$

Dựa vào BBT ta có:



Vậy $f(t) = 3 \Rightarrow t = a, a \in (-3, -2)$

Ta có: $2\cos^2 x - 3 = a, a \in (-3, -2)$

Suy ra $\cos^2 x = b, b \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Suy ra $\begin{cases} \cos x = \sqrt{b} \\ \cos x = -\sqrt{b} \end{cases}$ với $\sqrt{b} \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Với mọi $x \in [-\pi; \pi]$ thì phương trình $\cos x = \sqrt{b}$ có 2 nghiệm và phương trình $\cos x = -\sqrt{b}$ có 2 nghiệm (dựa vào đường tròn lượng giác hoặc đồ thị hàm số $y = \cos x$ để kiểm tra nghiệm).

Vậy có 4 nghiệm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		1		-2	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x^2 - x)| = 2$ là:

A. 1 .

B. 3 .

C. 2 .

D. 4 .

Lời giải

Chọn D

$$|f(x^2 - x)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^2 - x) = 2 \\ f(x^2 - x) = -2 \end{cases}$$

Dựa vào BBT ta có:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

$y = 2$

$y = -2$

1

-2

$+\infty$

$-\infty$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f(x^2 - x) = 2 \\ f(x^2 - x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = a, a \in (1; +\infty) \\ x^2 - x = b, b \in (-\infty; -1) \\ x^2 - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = a, a \in (1; +\infty) \\ x^2 - x = b, b \in (-\infty; -1) \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Xét phương trình: $x^2 - x - a = 0$ có $\Delta = 1 + 4a > 0$ vì $a > 1$

Nên phương trình $x^2 - x - a = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Xét phương trình: $x^2 - x - b = 0$ có $\Delta = 1 + 4b < 0$ vì $b < -1$

Nên phương trình $x^2 - x - b = 0$ vô nghiệm.

Vậy có 4 nghiệm đã cho thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\nwarrow$ $\nearrow$
 -2 -1 -2

Số nghiệm $x \in [0; +\infty)$ của phương trình $f(e^x + 2020x) - 2 = 0$ là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 2020.

Lời giải

Tác giả: Trần Tường; Fb: Trần Tường

Chọn A

Ta có $f(e^x + 2020x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(e^x + 2020x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + 2020x = a \in (-\infty; -1) \\ e^x + 2020x = b \in (1; +\infty) \end{cases}$

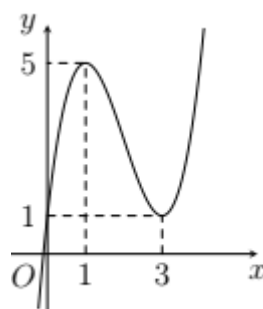
Vì $x \in [0; +\infty)$ nên $e^x + 2020x \in [1; +\infty)$ nên $e^x + 2020x = a \in (-\infty; -1)$ vô nghiệm.

Xét phương trình $e^x + 2020x = b \in (1; +\infty)$ trên $[0; +\infty)$

Ta có hàm số $g(x) = e^x + 2020x$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ và $g(x) \geq 1; \forall x \in [0; +\infty)$ nên phương trình $e^x + 2020x = b \in (1; +\infty)$ luôn có 1 nghiệm duy nhất trên $[0; +\infty)$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm thuộc $[0; +\infty)$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $2f(\cos x) - 5 = 0$ là

A. 5.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

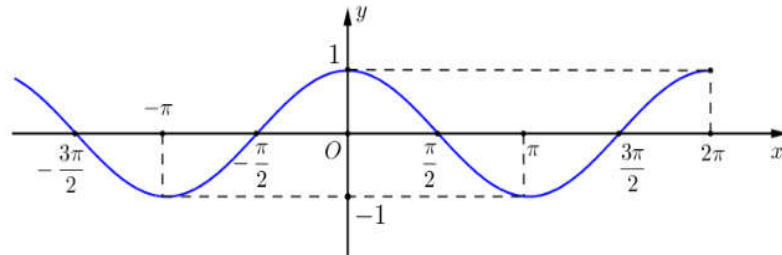
Tác giả: Trần Tường ; Fb: Trần Tường

Chọn C

Ta có $2f(\cos x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a \in (0; 1) \\ \cos x = b \in (1; 3) \\ \cos x = c \in (3; +\infty) \end{cases}$.

Vì $\cos x \in [-1; 1] \quad \forall x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ nên $\cos x = b \in (1; 3)$ và $\cos x = c \in (3; +\infty)$ vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$



Phương trình $\cos x = a \in (0; 1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	-2	0	1	4		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
$f(x)$	4			1		-2

Số nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3]$ của phương trình $f(x^2 - 3x) + 1 = 0$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 - 3x$, ta có $f(x^2 - 3x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = a, a \in (-2; 0) \\ t = b, b \in (0; 1) \\ t = c, c \in (1; 4) \end{cases}$$

Khảo sát hàm số $t = x^2 - 3x$ trên $[-1; 3]$.

Ta có $t' = 2x - 3$

$$\text{Cho } t' = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \in [-1; 3].$$

Ta có BBT của hàm $t = x^2 - 3x$ như sau:

x	-1	$\frac{3}{2}$	3
t'	$-$	0	$+$
t	4	$-\frac{9}{4}$	0

Từ BBT trên ta thấy:

Với $t = a, a \in (-2; 0) \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Với $t = b, b \in (0; 1) \Rightarrow$ phương trình có 1 nghiệm.

Với $t = c, c \in (1; 4) \Rightarrow$ phương trình có 1 nghiệm.

Vậy phương trình ban đầu có 4 nghiệm.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	-1	1	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{5\pi}{6}; 3\pi\right]$ của phương trình $4f(\cos 2x) - 1 = 0$ là

A. 5.

B. 9.

C. 4.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \cos 2x$, ta có $4f(t) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{4}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = a, a \in (-\infty; -1) \\ t = b, b \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \\ t = c, c \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \\ t = d, d \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Khảo sát hàm số $t = \cos 2x$ trên $\left[\frac{5\pi}{6}; 3\pi\right]$.

Ta có $t' = -2\sin 2x$

Cho $t' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in \left[\frac{5\pi}{6}; 3\pi\right] \Rightarrow x \in \left\{\pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi; \frac{5\pi}{2}; 3\pi\right\}$.

Ta có BBT của hàm $t = \cos 2x$ như sau:

x	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
t'	+	0	-	0	-	0
t	$\frac{1}{2}$	1	-1	1	-1	1

Từ BBT trên ta thấy:

Với $t = a, a \in (-\infty; -1) \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Với $t = b, b \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ phương trình có 4 nghiệm.

Với $t = c, c \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \Rightarrow$ phương trình có 5 nghiệm.

Với $t = d, d \in (1; +\infty) \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình ban đầu có 9 nghiệm.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-2; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	-2	0	2	4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-3	2	1	6	

Số nghiệm của phương trình $3f(-2x+1) = 8x^3 - 6x$ trên đoạn $\left[\frac{-3}{2}; \frac{3}{2}\right]$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = -2x + 1$. Với $x \in \left[\frac{-3}{2}; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow t \in [-2; 4]$.

Mỗi nghiệm của t cho duy nhất một nghiệm của x .

Biến đổi $8x^3 - 6x = (2x)^3 - 3(2x) = (1-t)^3 - 3(1-t) = -t^3 + 3t^2 - 2$.

Phương trình trở thành $3f(t) - (-t^3 + 3t^2 - 2) = 0$.

Xét hàm số

$$g(t) = 3f(t) - (-t^3 + 3t^2 - 2) \Rightarrow g'(t) = 3f'(t) - (-3t^2 + 6t) = 3[f'(t) - (-t^2 + 2t)]$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -t^2 + 2t$$

Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$-t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu $g'(t)$

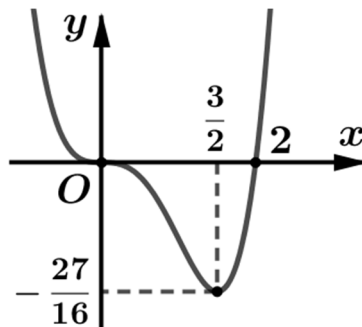
t	-2	0	2	4	
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$-t^2+2t$	-	0	+	0	-
$g'(t)$	+	0	-	0	+

Từ đó ta có bảng biến thiên sau:

t	-2	0	2	4	
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	-27	8	1	36	

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $g(t) = 0$ có 1 nghiệm nên phương trình ban đầu có 1 nghiệm.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



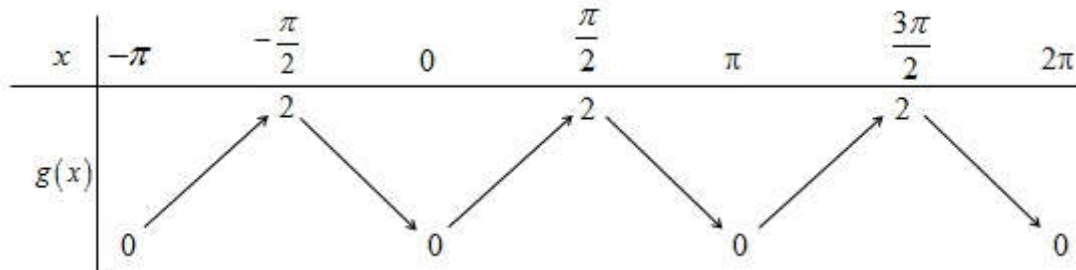
Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(2|\sin x|) + 1 = 0$ là

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2|\sin x|$. Xét hàm $t = g(x) = 2|\sin x|$ trên đoạn $[-\pi; 2\pi]$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = 2|\sin x|$ trên đoạn $[-\pi; 2\pi]$



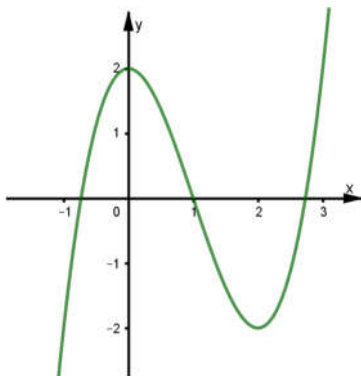
Dựa vào BBT ta có $t \in [0, 2] \forall x \in [-\pi; 2\pi]$

Nếu $t \in (0, 2)$ thì mỗi giá trị t cho 6 giá trị x thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$

Phương trình $2f(2|\sin x|) + 1 = 0$ trở thành $f(t) = -\frac{1}{2}$ với $t \in [0, 2]$

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $f(t) = -\frac{1}{2}$ có 2 nghiệm t phân biệt thuộc khoảng $(0, 2)$ nên phương trình ban đầu có 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



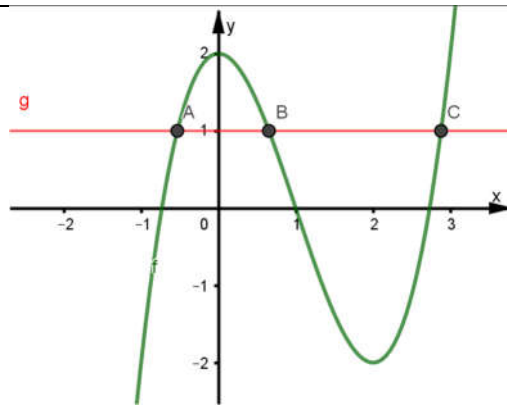
Gọi m là số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $m = 6$.B. $m = 7$.C. $m = 5$.D. $m = 9$.

Lời giải

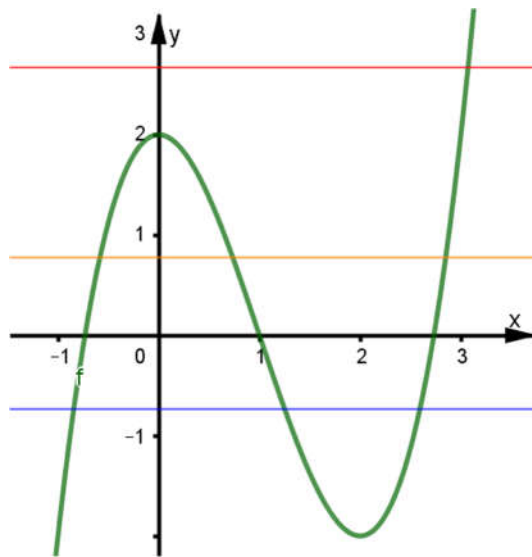
Chọn B

Đặt $f(x) = u$ khi đó nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 1$ chính là hoành độ giao điểm của đồ thị $f(u)$ với đường thẳng $y = 1$.



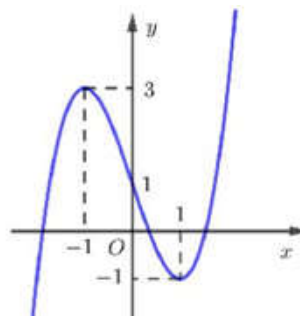
Dựa vào đồ thị ta có ba nghiệm
$$\begin{cases} f(x) = u_1 \\ f(x) = u_2 \\ f(x) = u_3 \end{cases} \text{ với } u_1 \in (-1; 0), u_2 \in (0; 1), u_3 \in \left(\frac{5}{2}; 3\right).$$

Tiếp tục xét số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với từng đường thẳng $y = u_1, y = u_2, y = u_3$.



Dựa vào đồ thị ta có được 7 giao điểm. Suy ra phương trình ban đầu $f(f(x)) = 1$ có 7 nghiệm.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(\sin x) = 2 \sin x + 2m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng:



A. -2

B. 0.

C. -1.

D. -5.

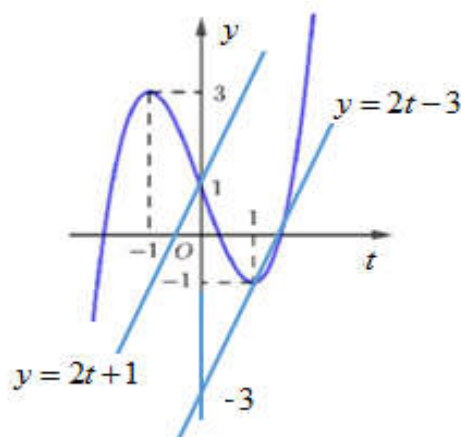
Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x$ với $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Xét phương trình $f(t) = 2t + 2m$.

Để phương trình có nghiệm thì đồ thị hàm $y = f(t)$ cắt đồ thị hàm số $y = 2t + 2m$ tại ít nhất một điểm có hoành độ t thuộc $(0;1]$.



Từ đồ thị ta suy ra đồ thị hàm số $y = 2t + 2m$ nằm ở phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị 2 hàm số $y = 2t + 1$ và $y = 2t - 3$.

Từ đó suy ra $-3 \leq 2m < 1 \Rightarrow m \in \{-1; 0\}$.

Vậy tổng các phần tử bằng -1 .

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(2\sin x) - 1 = 0$ là

A. 8.

B. 5.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2\sin x$. Vì $x \in [-2\pi; 2\pi] \Rightarrow t \in [-2; 2]$. Ta có pt: $2f(t) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2}$.

Từ BBT suy ra pt có nghiệm: $\begin{cases} t = a (0 < a < 2) \\ t = b (-2 < b < 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin x = a \\ 2\sin x = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{a}{2} (1) \\ \sin x = \frac{b}{2} (2) \end{cases}$

PT (1) có 4 nghiệm, pt (2) có 4 nghiệm. Vậy pt đã cho có 8 nghiệm thuộc đoạn $[-2\pi; 2\pi]$

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$. Số nghiệm của phương trình $[f(x)]^3 - 3f(x) + 1 = 0$ là:

A. 1.

B. 6.

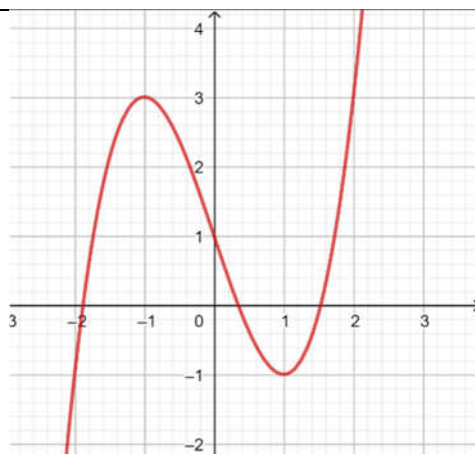
C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$ có dạng:



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm $x_1 \in (-2; -1)$, $x_2 \in (0; 1)$, $x_3 \in (1; 2)$

Nếu phương trình $[f(x)]^3 - 3f(x) + 1 = 0$ có nghiệm x_0 thì $f(x_0) \in \{x_1, x_2, x_3\}$.

Dựa vào đồ thị ta có:

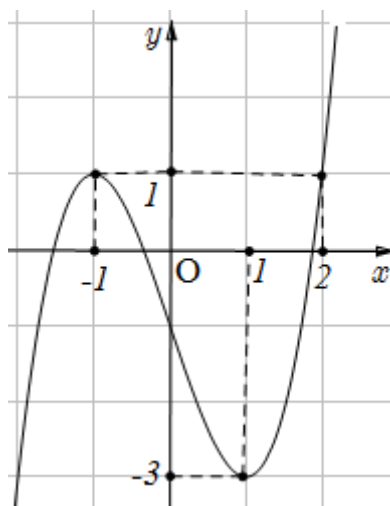
+ $f(x) = x_1$, $x_1 \in (-2; -1)$ có 1 nghiệm duy nhất.

+ $f(x) = x_2$, $x_2 \in (0; 1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ $f(x) = x_3$, $x_3 \in (1; 2)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $[f(x)]^3 - 3f(x) + 1 = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc 3 có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$ của phương trình $2f\left(\frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}\right) - 1 = 0$ là

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}$ vì $x \in [0; 3\pi]$ nên $t \in [-1; 2]$. Ta được phương trình $f(t) = \frac{1}{2}$ với

$t \in [-1; 2]$. Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $f(t) = \frac{1}{2}$ có 3 nghiệm

$$t = a \in (-\infty; -1); t = b \in (-1; 0); t = c \in (1; 2).$$

Bảng biến thiên của hàm số $t = \frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2}$ trên đoạn $[0; 3\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	3π
t'	+	0	-	0	-
t	$\frac{1}{2}$	2	-1	2	$\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên ta thấy

+) Với $t = a \in (-\infty; -1)$ thì phương trình $\frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2} = a$ vô nghiệm.

+) Với $t = b \in (-1; 0)$ thì phương trình $\frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2} = b$ có 2 nghiệm.

+) Với $t = c \in (1; 2)$ thì phương trình $\frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2} = c$ có 4 nghiệm.

Cả 6 nghiệm của phương trình trong các trường hợp trên là khác nhau. Vậy phương trình có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y						
	$-\infty$			1		$+\infty$
					-2	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin^4 x + \cos^4 x) = m$ có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

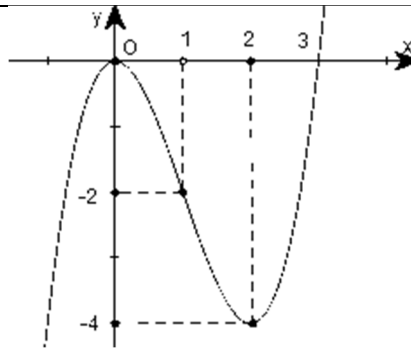
Chọn D

Đặt $t = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 + \cos 4x}{4}$ vì $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ nên $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Ta được phương trình

$f(t) = m$ với $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Quan sát bảng biến thiên ta thấy với $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ thì $f(t) \in [-2; 1]$

$\Rightarrow m \in [-2; 1] \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1\}$. Vậy số các giá trị nguyên của tham số m là 4.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $2f(\cos 2x) + 1 = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right]$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 2f(\cos 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\cos 2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = a \in (-1; 0) & (1) \\ \cos 2x = b \in (0; 1) & (2) \\ \cos 2x = c \in (2; 3) & (VN) \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = \cos 2x, x \in \left[0; \frac{5\pi}{4}\right]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$			
y'	0	-	0	+	0	-	
$y = \cos 2x$	1		-1		1		0

Từ bảng biến thiên suy ra: (1) có 2 nghiệm phân biệt, (2) có 3 nghiệm phân biệt không trùng với nghiệm của phương trình (1).

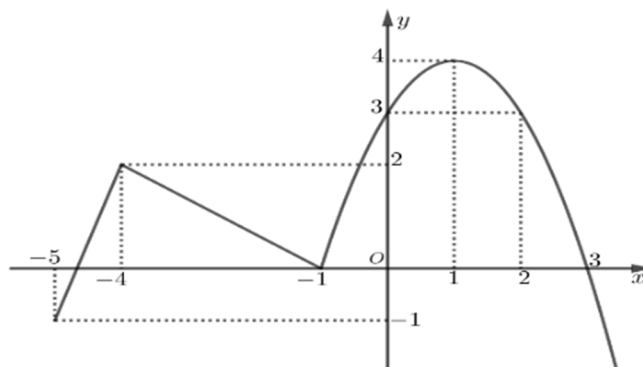
Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $3f(f(x)) = m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt $x \in [-5; 0]$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = f(x), x \in [-5; 0] \Rightarrow t \in [-1; 3] \Rightarrow f(t) \in [0; 4]$$

$$\text{Phương trình đã cho có dạng } f(t) = \frac{m}{3}, t \in [-1; 3]$$

TH1: $\frac{m}{3} \notin [0; 4]$ phương trình đã cho vô nghiệm

$$\text{TH2: } m = 0 : f(t) = \frac{m}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -1 & (1) \\ f(x) = 3 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) Có 1 nghiệm, (2) có 1 nghiệm trong miền $x \in [-5; 0]$. Do đó phương trình ban đầu có 2 nghiệm $x \in [-5; 0]$.

$$\text{TH3: } 0 < \frac{m}{3} < 3 \text{ hay } 0 < m < 9 \quad f(t) = \frac{m}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a \in (-1; 0) & (3) \\ f(x) = b \in (2; 3) & (4) \end{cases}$$

Phương trình (1) Có 1 nghiệm, (2) có 1 nghiệm trong miền $x \in [-5; 0]$. Do đó phương trình ban đầu có 2 nghiệm $x \in [-5; 0]$.

$$\text{TH4: } 3 < \frac{m}{3} < 4 \text{ hay } 9 < m < 12$$

$$f(t) = \frac{m}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = c \in (0; 2) \\ t = d \in (0; 2), c \neq d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = c \in (0; 2) & (5) \\ f(x) = d \in (0; 2) & (6) \end{cases}$$

Hệ (3), (4) có 6 nghiệm phân biệt trong miền $x \in [-5; 0]$. Do đó phương trình ban đầu có 6 nghiệm $x \in [-5; 0]$.

$$\text{TH5: } \frac{m}{3} = 3 \vee \frac{m}{3} = 4 \text{ phương trình ban đầu lần lượt có 4 nghiệm, 3 nghiệm trong miền } x \in [-5; 0].$$

Vậy để phương trình $3f(f(x)) = m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt $x \in [-5; 0]$. thì $9 < m < 12$ hay $m \in \{10; 11\}$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	3	$\frac{14}{3}$	$\frac{1}{3}$	-6	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-2019; 1]$ của phương trình $f(\ln x) = 4$

A. 2020

B. 4.

C. 2019.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \ln x$, ($x > 0$) mà $x \in [-2019; 1]$ nên $x \in (0; 1]$.

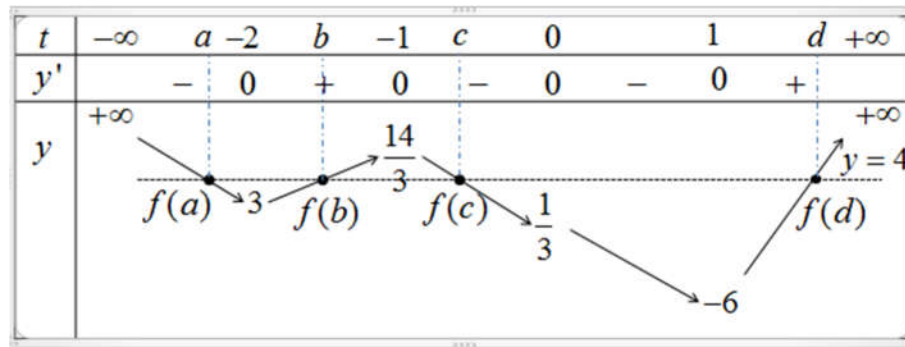
Do hàm $f(x) = \ln x$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên $t \in (-\infty; 0]$.

Khi đó phương trình $f(\ln x) = 4$ trở thành $f(t) = 4$ với $t \in (-\infty; 0]$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(t)$ với đường thẳng $y = -1$

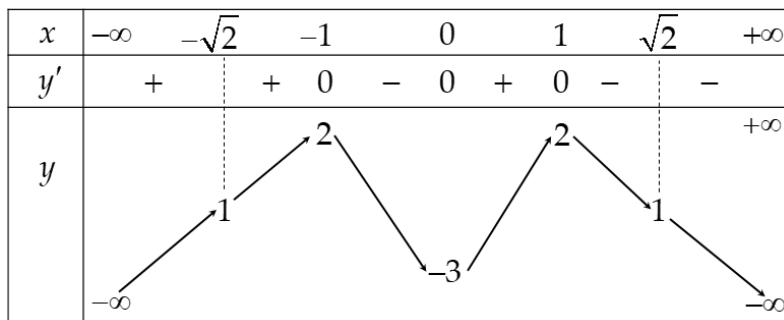
Ứng với mỗi giá trị $t \in (-\infty; 0]$ ta có một nghiệm $x \in (0; 1]$ nên số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đồ thị hàm số $y = 4$ trên $(-\infty; 0]$ là số nghiệm của phương trình.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, phương trình đã cho có 3 nghiệm

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ của phương trình $f(\sin x + \cos x) = -1$

A. 1

B. 3

C. 2

D. 0.

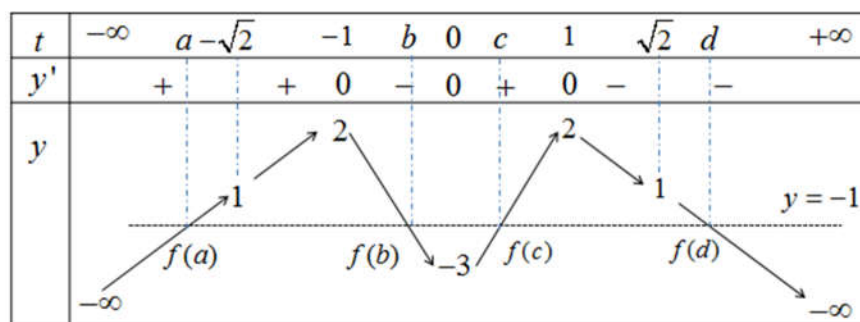
Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, với $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow t \in [1; \sqrt{2}]$

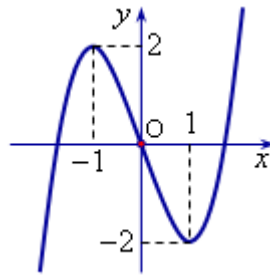
Đây là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(t)$ với đường thẳng $y = -1$.

Bảng biến thiên



+ Ứng với $t = a \in (-\infty; -\sqrt{2})$, $t = b \in (-1; 0)$, $t = c \in (0; 1)$, $t = d \in (\sqrt{2}; +\infty)$ loại vì không thỏa $t \in [1; \sqrt{2}]$

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) - 2\sin x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$?

A. 9.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

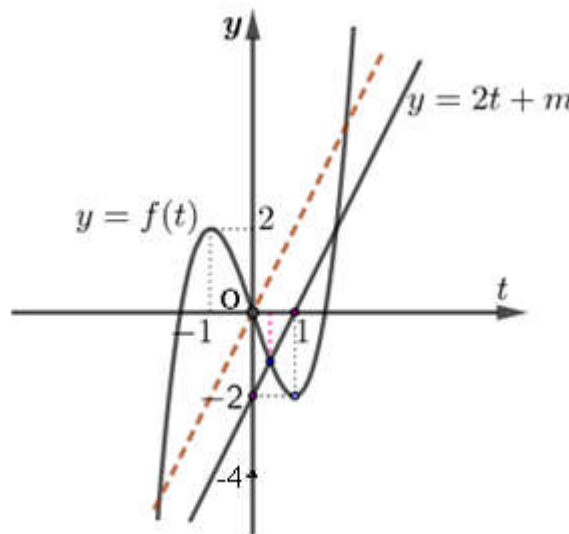
Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin x$, với $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$

Phương trình đã cho trở thành $f(t) = 2t + m, \forall t \in (0; 1]$ (1).

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có nghiệm trong nửa khoảng $(0; 1]$



Dựa vào đồ thị, để phương trình (1) có nghiệm trong nửa khoảng $(0; 1]$

$\Leftrightarrow -4 \leq m < 0$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; -2; -3; -4\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		-1		-2		$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2|f(\sin x)| - 3 = 0$ là

A. 6.

B. 3.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sin x$, lúc đó $t' = \cos x$

Cho $t' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Do $x \in [-\pi; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$

Bảng biến thiên

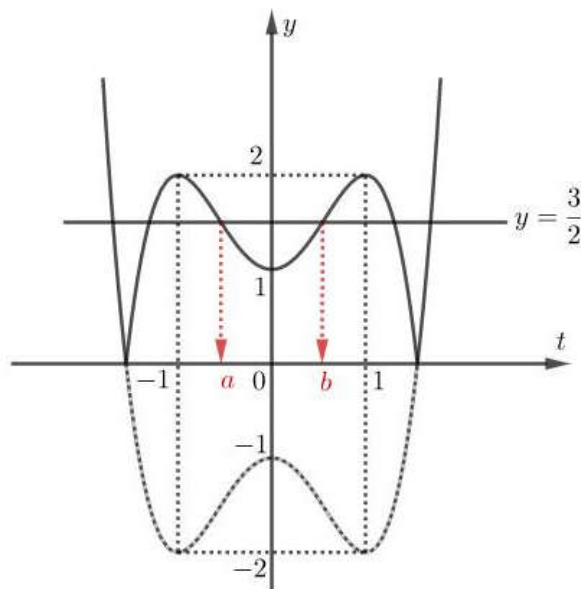
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π				
t'	-	0	+	0	-	0	+		
t	0		-1		1		-1		0

Từ bảng biến thiên ta thấy $x \in [-\pi; 2\pi] \Rightarrow t \in [-1; 1]$

Nhận xét: Với mỗi giá trị $t \in (-1; 0]$ ta có 4 nghiệm $x \in [-\pi; 2\pi]$; $t \in (0; 1) \cup \{-1\}$ ta có 2 nghiệm $x \in [-\pi; 2\pi]$ và $t = 1$ ta có 1 nghiệm $x \in [-\pi; 2\pi]$

Khi đó phương trình trở thành $2|f(t)| - 3 = 0 \Leftrightarrow |f(t)| = \frac{3}{2}, \forall t \in [-1; 1]$

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y = |f(t)|, \forall t \in [-1; 1]$



Dựa vào đồ thị, ta thấy $|f(t)| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \in (-1; 0) \\ t = b \in (0; 1) \end{cases}, \forall t \in [-1; 1]$

Với $t = a \in (-1; 0)$ ta có 4 nghiệm $x \in [-\pi; 2\pi]$

Với $t = b \in (0; 1)$ ta có 2 nghiệm $x \in [-\pi; 2\pi]$

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$							$+\infty$

The graph shows a function y plotted against x . The function has a W-shape, indicating two local minima and one local maximum. The local minima are at $y = -3$, and the local maximum is at $y = 2$. The x-axis has critical points at $x = -2, 0, 2$, and the function approaches $+\infty$ as $x \rightarrow -\infty$ and $x \rightarrow +\infty$.

Số nghiệm của phương trình $f(e^x - 4) - 1 = 0$ trong đoạn $[\ln 2; \ln 6]$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = e^x - 4$. Với $x \in [\ln 2; \ln 6] \Rightarrow t \in [-2; 2]$. Ta được PT $f(t) = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(t) = 1$ có 2 nghiệm là $t = t_1 \in (-2; 0)$ và $t = t_2 \in (0; 2)$.

Với $t = t_1$ ta được $e^x = 4 + t_1 \Leftrightarrow x = \ln(4 + t_1)$.

Với $t = t_2$ ta được $e^x = 4 + t_2 \Leftrightarrow x = \ln(4 + t_2)$.

Vì $t_1 \neq t_2$ nên $\ln(4 + t_1) \neq \ln(4 + t_2)$.

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$					

The graph shows a function y plotted against x . The function has a local minimum at $x = -2$ with $y = -4$ and a local maximum at $x = 2$ with $y = 4$. The function approaches $+\infty$ as $x \rightarrow -\infty$ and $-\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

Số nghiệm của phương trình $f(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 0$ trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ là

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x + \sqrt{3} \cos x$. Ta có $t = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow -2 \leq t \leq 2$. Ta được PT $f(t) = 0$.

Dựa vào BBT ta thấy đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là $(-2; -4)$ và $(2; 4)$ nên đồ thị có điểm uốn là gốc tọa độ O . Do đó đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $x = a < -2$, $x = 0$, $x = b > 2$. Mà $-2 \leq t \leq 2$ nên PT $f(t) = 0$ có 1 nghiệm là $t = 0$.

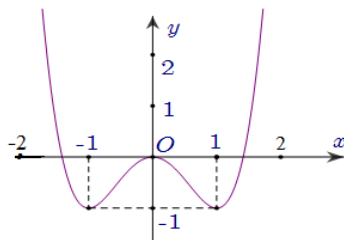
Với $t = 0$ ta được $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Theo yêu cầu bài: $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{11}{6}$.

Vì $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0; k = 1$. Ta được 2 nghiệm $x = \frac{2\pi}{3}$ và $x = \frac{5\pi}{3}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số nghiệm thực của bất phương trình

$$1 + f(x^3 - 3x^2 + 1) \geq \sqrt{2f^2(x^3 - 3x^2 + 1) + 2} \text{ là}$$



A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

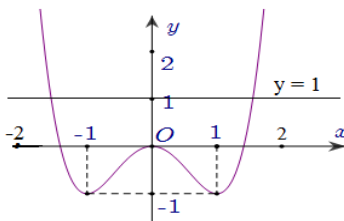
Chọn B

Đặt $a = f(x^3 - 3x^2 + 1)$ ta được bất phương trình

$$1 + a \geq \sqrt{2a^2 + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a \geq 0 \\ 1 + 2a + a^2 \geq 2a^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -1 \\ (a-1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Với $a = 1$ ta được $f(x^3 - 3x^2 + 1) = 1$. Đặt $t = x^3 - 3x^2 + 1$ ta được PT $f(t) = 1$ (*).

Vẽ đường thẳng $y = 1$ lên đồ thị đã cho ta được PT (*) có 1 nghiệm $t = t_1 \in (-2; -1)$ và 1 nghiệm $t = t_2 \in (1; 2)$.



Ta có BBT của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Với $t = t_1$ ta được PT $x^3 - 3x^2 + 1 = t_1$. Dựa vào BBT ta thấy PT này có 3 nghiệm phân biệt.

Với $t = t_2$ ta được PT $x^3 - 3x^2 + 1 = t_2$. Dựa vào BBT ta thấy PT này có 1 nghiệm.

Vậy BPT đã cho có 4 nghiệm thực.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc 3 và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			2		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

Phương trình $f^2(\sin x + \cos x) + 1 + \sin 2x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) f(\sin x + \cos x)$ có mấy nghiệm

thực thuộc đoạn $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Chọn B

Vì hàm số có 2 điểm cực trị là $x = \pm 1$ nên $f'(x) = 3ax^2 - 3a \Rightarrow f(x) = ax^3 - 3ax + d$. Theo

BBT thì đồ thị hàm số đi qua 2 điểm $(-1; 2)$ và $(1; -2)$ nên $\begin{cases} 2a + d = 2 \\ -2a + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ d = 0 \end{cases}$

Suy ra $f(x) = x^3 - 3x$.

Ta có $f^2(\sin x + \cos x) + 1 + \sin 2x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) f(\sin x + \cos x)$

$$\Leftrightarrow f^2(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2 = 2(\sin x + \cos x) f(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow [f(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)]^2 = 0 \Leftrightarrow f(\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ta được phương trình

$$f(t) = t \Leftrightarrow t^3 - 3t = t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \pm 2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t = 0$ ta được $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Ta có $-\frac{5\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow -1 \leq k \leq \frac{3}{2} \Rightarrow k = -1, k = 0, k = 1$. Vậy PT có 3 nghiệm.

Câu 49. Cho $y = f(x)$ là hàm số bậc ba và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			1		-1		$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-5; 5)$ để hàm số $g(x) = f(f(x) + m)$ có 4 điểm cực trị?

B. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

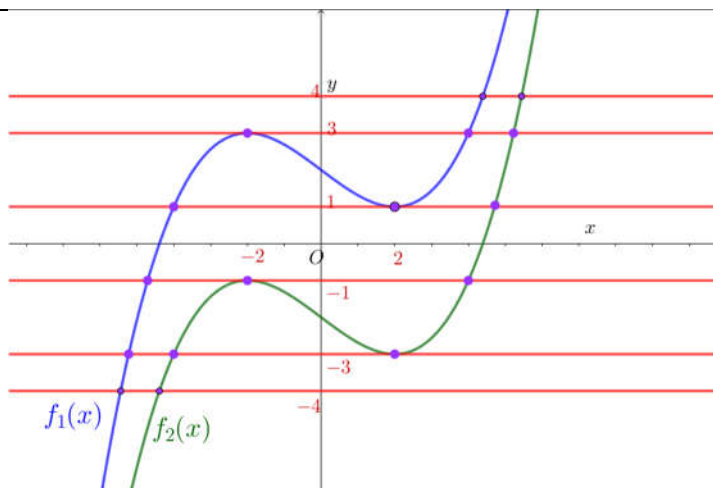
Chọn B

$$g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x) + m).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x) + m) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ f(x) + m = -2 \\ f(x) + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ f(x) + 2 = -m \\ f(x) - 2 = -m \end{cases}, \text{ trong đó } x = -2 \text{ và } x = 2 \text{ là hai nghiệm bội lẻ.}$$

Đặt $f_1(x) = f(x) + 2$ và $f_2(x) = f(x) - 2$, ta có đồ thị sau



Với $\begin{cases} m \in (-5; 5) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ và nhìn vào đồ thị, ta thấy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow m \in \{-4; -3; -1; 1; 3; 4\}$.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-1		3		-1		$+\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình $f^2(\cos x) - f(\cos x) = 2$ là

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \cos x$, $x \in (-\pi; \pi)$. Ta có bảng biến thiên (*)

x	$-\pi$	0	π
t	-1	1	-1

$\Rightarrow t \in (-1; 1]$.

Phương trình đã cho trở thành $f^2(t) - f(t) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = 2 & (1) \\ f(t) = -1 & (2) \end{cases}$.

Từ bảng biến thiên của đề bài, với $t \in (-1; 1]$ ta có nghiệm của phương trình (1) là $t = a \in (-1; 0)$ hay $t = b \in (0; 1)$ và nghiệm của phương trình (2) là $t = 1$.

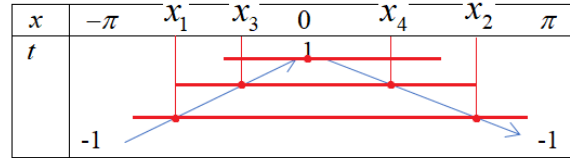
x	$-\infty$	-1	a	0	b	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-1		3		-1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên (*), ta có:

$$t = a \in (-1; 0) \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-\pi; 0) \\ x = x_2 \in (0; \pi) \end{cases}$$

$$t = b \in (0; 1) \Rightarrow \begin{cases} x = x_3 \in (-\pi; 0) \\ x = x_4 \in (0; \pi) \end{cases}$$

$$t = 1 \Rightarrow x = 0.$$



Vậy, phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Số nghiệm $x \in [0; +\infty)$ của phương trình $f(e^x + 2020x) - 2 = 0$ là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 2020.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(e^x + 2020x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(e^x + 2020x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + 2020x = a \in (-\infty; -1) \\ e^x + 2020x = b \in (1; +\infty) \end{cases}$$

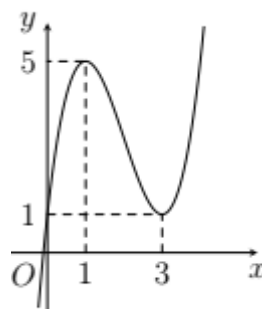
Vì $x \in [0; +\infty)$ nên $e^x + 2020x \in [1; +\infty)$ nên $e^x + 2020x = a \in (-\infty; -1)$ vô nghiệm.

Xét phương trình $e^x + 2020x = b \in (1; +\infty)$ trên $[0; +\infty)$

Ta có hàm số $g(x) = e^x + 2020x$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ và $g(x) \geq 1; \forall x \in [0; +\infty)$ nên phương trình $e^x + 2020x = b \in (1; +\infty)$ luôn có 1 nghiệm duy nhất trên $[0; +\infty)$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm thuộc $[0; +\infty)$.

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $2f(\cos x) - 5 = 0$ là

A. 5.

B. 1.

C. 3.

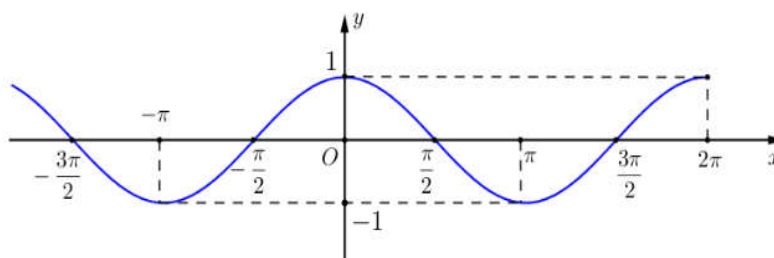
D. 4.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có } 2f(\cos x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a \in (0; 1) \\ \cos x = b \in (1; 3) \\ \cos x = c \in (3; +\infty) \end{cases}.$$

Vì $\cos x \in [-1; 1] \quad \forall x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ nên $\cos x = b \in (1; 3)$ và $\cos x = c \in (3; +\infty)$ vô nghiệm.

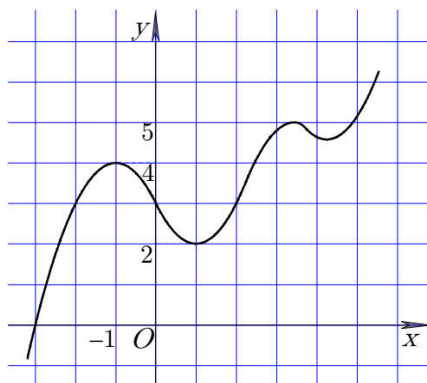
Xét đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$



Phương trình $\cos x = a \in (0; 1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.



A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Đặt } t = x^2 - 2x, \quad x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{2}$
t'	$-$	0	$+$
t	$\frac{21}{4}$	-1	$\frac{21}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$.

Ta có: $f(x^2 - 2x) = m$ (1) $\Leftrightarrow f(t) = m$ (2).

Ta thấy, với mỗi giá trị $t \in \left(-1; \frac{21}{4}\right)$ ta tìm được hai giá trị của $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

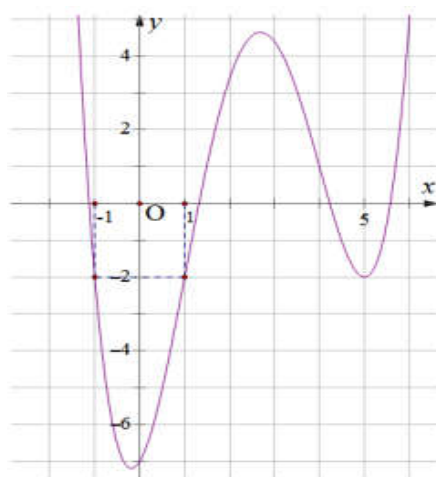
Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm thực phân biệt thuộc $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt thuộc $\left(-1; \frac{21}{4}\right)$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc $\left(-1; \frac{21}{4}\right)$.

Dựa vào đồ thị ta thấy có hai giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu là $m = 3$ và $m = 5$.

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$?



A. 4.

B. 7.

C. 5.

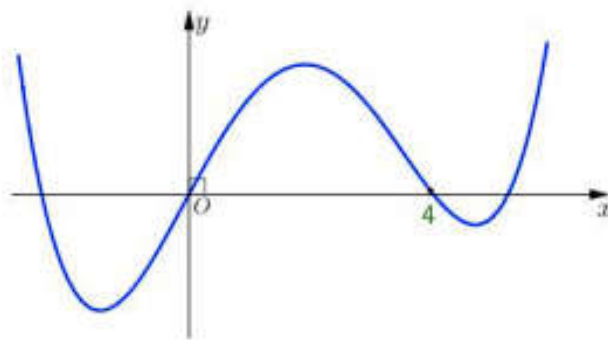
D. 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x$, $x \in [0; \pi]$ thì $t \in [0; 1]$. Để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm $x \in [0; \pi]$ thì phương trình $f(t) = m$ có đúng một nghiệm $t \in [0; 1]$. Dựa vào đồ thị ta có $m \in [-7; -2)$, do m nguyên nên $m \in \{-7; -6; -5; -4; -3\}$. Vậy có 5 giá trị.

Câu 55. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + 4)$ là

A. 5 .

B. 3 .

C. 7 .

D. 11 .

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$$g'(x) = (3x^2 - 6x)f'(x^3 - 3x^2 + 4) .$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f'(x^3 - 3x^2 + 4) = 0(*) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4 = a \in (-2; 0) \\ x^3 - 3x^2 + 4 = b \in (0; 4) \\ x^3 - 3x^2 + 4 = c \in (4; 6) \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ trên $\mathbb{R}$.

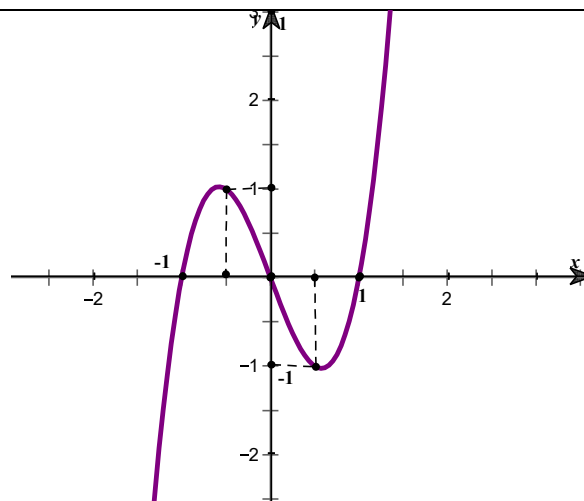
Ta có: $h'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Từ đó ta có BBT của hàm $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
h'	+	0	-	0	+
h	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Từ BBT của hàm $h(x)$ ta thấy phương trình $h(x) = a$ có 1 nghiệm duy nhất nhỏ hơn -1 ,
 $h(x) = b$ có 3 nghiệm lần lượt thuộc các khoảng $(-1; 0); (0; 2); (2; 3)$, $h(x) = c$ có duy nhất
 1 nghiệm lớn hơn 3.

Vậy $g(x) = 0$ có đúng 7 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số có 7 cực trị.

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên



Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$ của phương trình: $2|f(\cos x)| - 1 = 0$.

A. 12 .

B. 6 .

C. 10 .

D. 8 .

Lời giải

Chọn A

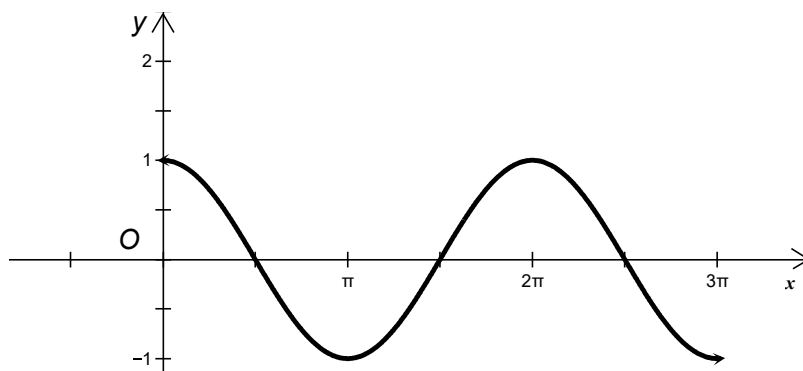
$$2|f(\cos x)| - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = \frac{1}{2} \\ f(\cos x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Căn cứ vào đồ thị ta thấy: } f(\cos x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a, -1 < a < -\frac{1}{2} (1) \\ \cos x = b, -\frac{1}{2} < b < 0 (2) \\ \cos x = c, c > 1 (3) \end{cases}$$

$$f(\cos x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = d, d < -1 (4) \\ \cos x = e, 0 < e < \frac{1}{2} (5) \\ \cos x = g, \frac{1}{2} < g < 1 (6) \end{cases}$$

Các phương trình (3), (4) đều vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0; 3\pi]$



Ta thấy các phương trình (1),(2),(5),(6) lần lượt có 3 nghiệm phân biệt và trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau. Vậy phương trình ban đầu có 12 nghiệm.

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\cot x + 1) = 1$ là

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. 7.

B. 6.

C. 8.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \cot x + 1$, phương trình tương đương với $f(t) = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

$$f(t) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \ (a < -1) \\ t = 1 \\ t = b \ (b > 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot x + 1 = a \\ \cot x + 1 = 1 \\ \cot x + 1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot x = a - 1 < 0 \\ \cot x = b - 1 > 0 \\ \cot x = 0 \end{cases}$$

Xét $t' = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$ nên ta có bảng biến thiên hàm $t(x)$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ như sau

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
t'		$-$	$-$	$-$
t	$0 \searrow$	$+\infty \nearrow$	$+\infty \searrow$	$0 \nearrow$

Từ đó, phương trình $\cot x = a - 1$ có đúng 2 nghiệm, phương trình $\cot x = b - 1$ có đúng 2 nghiệm và phương trình $\cot x = 0$ có đúng 3 nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ nên phương trình đã cho có 7 nghiệm.

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		0	3		1		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(\sin x + 1) = 2$ trên $[-\pi; 2\pi]$ là

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $f(x)$, ta thấy $f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \ (a < 0) \\ x = b \ (0 < b < 1) \\ x = c \ (1 < c < 2) \\ x = d \ (d > 2) \end{cases}.$

Đặt $t = \sin x + 1$. Phương trình đã cho tương đương với $f(t) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \ (1) \\ t = b \ (2) \\ t = c \ (3) \\ t = d \ (4) \end{cases}$

Ta có: $t'(x) = \cos x \Rightarrow t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có bảng biến thiên hàm số $t(x)$ trên $[-\pi; 2\pi]$ là:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π				
$t'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$t(x)$	1			2			0		1

Từ bảng biến thiên này, ta thấy các phương trình (1) và (4) vô nghiệm, phương trình (2) có 4 nghiệm và phương trình (3) có đúng 2 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

----- **HẾT** -----

