

LÊ BÁ BẢO

TRƯỜNG THPT ĐẶNG HUY TRỨ - ADMIN CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

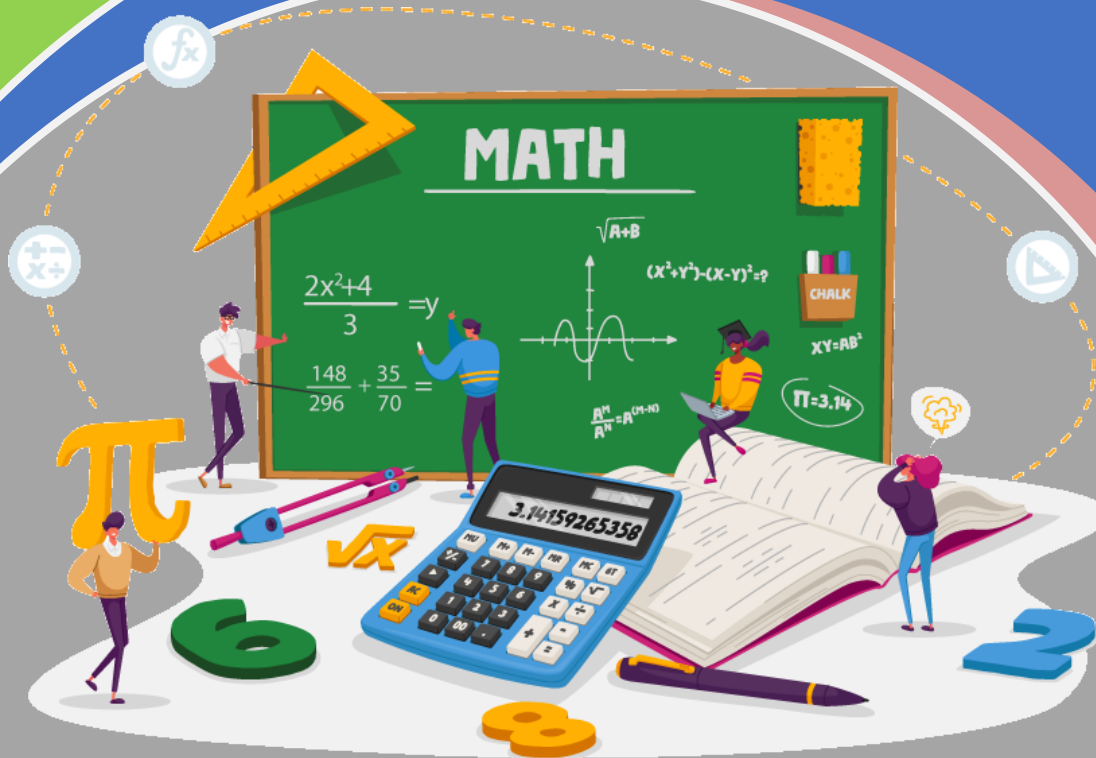
# TOÁN 12

***Chuyên đề HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ OXYZ***

## BIỂU THỨC TOA ĐỘ

✍ LUYỆN THI THPT QUỐC GIA

✍ CẬP NHẬT TỪ ĐỀ THI MỚI NHẤT



## Chủ đề 3: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (x; y; z)$  và  $\vec{b} = (x'; y'; z')$ .

Ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z');$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z');$$

$$k \cdot \vec{a} = (kx; ky; kz); k \in \mathbb{R}.$$

**Nhận xét.** Vectơ  $\vec{a} = (x; y; z)$  cùng phương với vectơ  $\vec{b} = (x'; y'; z') \neq \vec{0}$  khi và chỉ khi tồn tại số

$$\text{thực } k \text{ sao cho } \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz' \end{cases}$$

#### 2. Tọa độ trung điểm, tọa độ trọng tâm

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm không thẳng hàng  $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$  và  $C(x_C; y_C; z_C)$ . Khi đó:

$$\text{- Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng } AB \text{ là } \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right);$$

$$\text{- Tọa độ trọng tâm của tam giác } ABC \text{ là } \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$$

#### 3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong không gian  $Oxyz$ , tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{a} = (x; y; z)$  và  $\vec{b} = (x'; y'; z')$  được xác định bởi công thức:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'$ .

**Nhận xét.**

- Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau nếu và chỉ nếu  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$ .

- Nếu  $\vec{a} = (x; y; z)$  thì  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

- Nếu  $\vec{a} = (x; y; z)$  và  $\vec{b} = (x'; y'; z')$  là hai vectơ khác  $\vec{0}$  thì

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

### II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 2 vectơ  $\vec{a} = (2; 3; -5), \vec{b} = (0; -3; 4), \vec{c} = (1; -2; 3)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{n} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ .

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (1; 1; 0)$  và  $\vec{v} = (2; 0; -1)$ . Tính  $|\vec{u} + 2\vec{v}|$ .

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , tìm  $x; y$  để ba điểm  $A(-1; 2; -3), B(1; 0; 2), C(x; y; -13)$  thẳng hàng.

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a} = (1; 2; -2)$  và  $\vec{b} = (-1; -1; 0)$ .

**Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u} = (2; 0; -1)$ . Tìm vectơ  $\vec{v}$  biết  $\vec{v}$  cùng phương với  $\vec{u}$  và  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$ .

- Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(0;2;-1)$  và  $B(2;0;3)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  sao cho  $G(1;2;2)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .
- Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;1)$ ,  $B(2;-1;2)$ . Tìm điểm  $M$  trên trục  $Ox$  và cách đều hai điểm  $A$ ,  $B$ .
- Câu 8:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(2;3;-1)$ ,  $N(-1;1;1)$ ,  $P(1;m-1;3)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ .
- Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;-2;1)$ ,  $B(3;-4;1)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại  $M$ . Tính tỉ số  $\frac{MB}{MA}$ .
- Câu 10:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;-1;1)$ ,  $B(3;2;-2)$ ,  $C(-3;1;5)$ . Tìm tọa độ điểm  $M(x;y;z)$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{CM}$ .
- Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $B(0;3;1)$ ,  $C(-3;6;4)$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên đoạn  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Tìm tọa độ điểm  $M$ .
- Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-2;3;1)$ ,  $B(2;1;0)$ ,  $C(-3;-1;1)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  là điểm sao cho  $ABCD$  là hình thang có cạnh đáy  $AD$  và diện tích hình thang  $ABCD$  bằng 4 lần diện tích tam giác  $ABC$ .
- Câu 13:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $OAB$  có  $A(2;2;-1)$  và  $B(0;-4;3)$ . Tính độ dài đường phân giác trong góc  $AOB$ .
- Câu 14:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(2;2;1)$ ,  $N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$ . Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $OMN$ .
- Câu 15:** Trong không gian  $Oxyz$ , một hình chữ nhật có hai đỉnh không liên tiếp có tọa độ là  $(3;-2;2\sqrt{3})$ ,  $(-3;2;-2\sqrt{3})$ ; hai đỉnh còn lại nằm trên mặt phẳng  $Oxy$  có hoành độ và tung độ đều là số nguyên. Có bao nhiêu hình chữ nhật như thế?
- Câu 16:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;-2)$ ,  $B(2;-1;2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên mặt phẳng  $Oxyz$  cho  $MA + MB$  đạt giá trị nhỏ nhất.
- Câu 17:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(1;-2;3)$ ;  $B(2;2;4)$ ;  $C(3;-3;2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho:  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$  ngắn nhất.
- Câu 18:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-3;3;-1)$ ,  $B(2;-2;4)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oyz)$  sao cho biểu thức  $T = 3MA^2 + 2MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.
- Câu 19:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-1;2;2)$ ,  $B(3;2;6)$ . Xét hai điểm  $M$ ,  $N$  thay đổi thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $MN = 16$ . Tính giá trị nhỏ nhất của  $AM + BN$ .
- Câu 20:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;-3;-4)$  và điểm  $B(-2;1;2)$ . Xét hai điểm  $M$  và  $N$  thay đổi thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $MN = 2$ . Tính giá trị lớn nhất của  $|AM - BN|$ .

### III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 21:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2;1;-1)$ ,  $B(1;2;3)$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng

- A. 18.                      B.  $3\sqrt{2}$ .                      C.  $\sqrt{3}$ .                      D.  $\sqrt{22}$ .
- Câu 22:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ . Tính độ dài của vectơ  $\vec{a}$ .  
A. 1.                      B. 4.                      C. 5.                      D. 3.
- Câu 23:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; -1; 3)$ . Tọa độ của vectơ  $2\vec{a}$  là  
A.  $(4; -2; 3)$ .                      B.  $(4; -1; 3)$ .                      C.  $(4; -2; 6)$ .                      D.  $(4; -2; 5)$ .
- Câu 24:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 2 véc tơ  $\vec{a} = (-2; 2; -4)$  và  $\vec{b} = (-3; 3; -6)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?  
A.  $2\vec{b} = 3\vec{a}$ .                      B.  $2\vec{a} = 3\vec{b}$ .                      C.  $-2\vec{a} = 3\vec{b}$ .                      D.  $-2\vec{b} = 3\vec{a}$ .
- Câu 25:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-4; 5; -3)$ ,  $\vec{b} = (2; -2; 1)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ .  
A.  $\vec{x} = (0; -1; 1)$ .                      B.  $\vec{x} = (0; 1; -1)$ .                      C.  $\vec{x} = (-8; 9; -5)$ .                      D.  $\vec{x} = (2; 3; -2)$ .
- Câu 26:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (-1; 1; 3)$  và  $\vec{v} = (-2; 1; -3)$ . Tính  $|2\vec{u} - 3\vec{v}|$ .  
A.  $\sqrt{242}$ .                      B.  $\sqrt{216}$ .                      C.  $\sqrt{152}$ .                      D.  $\sqrt{322}$ .
- Câu 27:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Tính độ dài của  $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$   
A.  $\sqrt{74}$ .                      B.  $3\sqrt{6}$ .                      C.  $5\sqrt{2}$ .                      D.  $\sqrt{42}$ .
- Câu 28:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; -3)$  và  $B(-3; 4; 5)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$ .  
A.  $I(-1; 3; 1)$ .                      B.  $I(-1; -3; 1)$ .                      C.  $I(-2; 1; 4)$ .                      D.  $I(2; -1; -4)$ .
- Câu 29:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm  $I$ . Biết  $A(2; 1; -1)$ ,  $I(1; 2; 0)$ . Khi đó, điểm  $B$  có tọa độ là  
A.  $(1; -1; -1)$ .                      B.  $(3; 0; -2)$ .                      C.  $(0; 3; 1)$ .                      D.  $(-1; 1; 1)$ .
- Câu 30:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 3; 4)$ ,  $B(2; -1; 0)$ ,  $C(3; 1; 2)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là  
A.  $G\left(3; \frac{2}{3}; 3\right)$ .                      B.  $G(2; -1; 2)$ .                      C.  $G(2; 1; 2)$ .                      D.  $G(6; 3; 6)$ .
- Câu 31:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(-1; 2; 3)$  và  $N(-2; 1; -3)$ . Tọa độ trọng tâm của tam giác  $OMN$  là  
A.  $(-1; 1; 0)$ .                      B.  $\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$ .                      C.  $(-1; -1; -6)$ .                      D.  $(-1; 1; 3)$ .
- Câu 32:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G(2; 1; 0)$  và  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(2; 3; 5)$ . Tọa độ điểm  $C$  là  
A.  $(4; 2; -1)$ .                      B.  $(-6; -2; 0)$ .                      C.  $(3; -1; -5)$ .                      D.  $(-12; 0; 8)$ .
- Câu 33:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(0; 1; -2)$ ,  $E(3; 2; 2)$ . Gọi  $C(m; n; p)$  là điểm thỏa mãn  $E$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Tổng  $m + n + p$  bằng  
A. 13.                      B. 15.                      C.  $\frac{10}{3}$ .                      D. 20.

- Câu 34:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;-1;-2)$  và trọng tâm  $G(2;1;-3)$ . Tọa độ của vector  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$  là  
**A.**  $(3;6;3)$ . **B.**  $(3;6;-3)$ . **C.**  $(3;-3;6)$ . **D.**  $(3;2;1)$ .
- Câu 35:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  biết  $A(1;-3;3), B(2;-4;5), C(a;-2;b)$  và  $G(2;c;3)$  là trọng tâm. Tổng  $a+b+c$  bằng  
**A.**  $-5$ . **B.**  $3$ . **C.**  $1$ . **D.**  $-1$ .
- Câu 36:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\triangle ABC$  có  $A(2;1;-2), B(-1;1;2), C(7;-1;2)$ . Độ dài trung tuyến  $AM$  bằng  
**A.**  $5\sqrt{3}$ . **B.**  $2\sqrt{3}$ . **C.**  $3\sqrt{2}$ . **D.**  $4\sqrt{2}$ .
- Câu 37:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  có  $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3), D(1;2;3)$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tứ diện  $ABCD$ .  
**A.**  $G\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ . **B.**  $G\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$ . **C.**  $G\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 2\right)$ . **D.**  $G(2;4;6)$ .
- Câu 38:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(1;0;2), B(-2;1;3), C(3;2;4), D(6;9;-5)$ . Tìm tọa độ trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ .  
**A.**  $(2;3;-1)$ . **B.**  $(2;-3;1)$ . **C.**  $(2;3;1)$ . **D.**  $(-2;3;1)$ .
- Câu 39:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;1;1), B(-1;1;0), C(4;1;2)$ . Chu vi của tam giác  $ABC$  bằng  
**A.**  $\sqrt{29} + 2\sqrt{5}$ . **B.**  $\sqrt{29} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ .  
**C.**  $\sqrt{13} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ . **D.**  $2 + 2\sqrt{5}$ .
- Câu 40:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;1;1), B(-1;1;0), C(4;1;2)$ . Chu vi của tam giác  $GBC$  với  $G$  là trọng tâm tam giác, bằng  
**A.**  $\frac{\sqrt{29} + \sqrt{58}}{3} + \sqrt{73}$ . **B.**  $\frac{\sqrt{73} + \sqrt{58}}{3} + \sqrt{29}$ .  
**C.**  $\frac{\sqrt{73} + \sqrt{29}}{3} + \sqrt{58}$ . **D.**  $\frac{\sqrt{29} + \sqrt{55}}{3} + \sqrt{58}$ .
- Câu 41:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(7;1;1), B(-1;3;0), C(2;3;2)$ . Biết điểm  $D$  là điểm sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành. Chu vi tam giác  $DBC$  bằng  
**A.**  $\sqrt{69} + \sqrt{134} + \sqrt{13}$ . **B.**  $\sqrt{69} + \sqrt{13} + \sqrt{13}$ .  
**C.**  $\sqrt{69} + \sqrt{134} + \sqrt{134}$ . **D.**  $\sqrt{139} + \sqrt{134} + \sqrt{13}$ .
- Câu 42:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vector  $\vec{a} = (-1;1;0), \vec{b} = (1;1;0), \vec{c} = (1;1;1)$ . Vector  $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$  có tọa độ là  
**A.**  $\vec{u} = (-1;1;1)$ . **B.**  $\vec{u} = (-1;-1;1)$ . **C.**  $\vec{u} = (-1;-1;-1)$ . **D.**  $\vec{u} = (-1;1;-1)$ .
- Câu 43:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vector  $\vec{a} = (5;7;2), \vec{b} = (3;0;1), \vec{c} = (-6;1;-1)$ . Tìm tọa độ của vector  $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ .  
**A.**  $\vec{m} = (3;-22;3)$ . **B.**  $\vec{m} = (3;22;-3)$ . **C.**  $\vec{m} = (-3;22;-3)$ . **D.**  $\vec{m} = (3;22;3)$ .

- Câu 44:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; -3; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; -1)$ ,  $\vec{c} = (3; -1; 5)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ .
- A.  $(10; -2; 13)$ .      B.  $(-2; 2; -7)$ .      C.  $(-2; -2; 7)$ .      D.  $(-2; 2; 7)$ .
- Câu 45:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-1; 3; -3)$  và  $\vec{b} = (2; 1; -2)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{b} - \vec{a}$  là
- A.  $(3; 2; -1)$ .      B.  $(1; 4; -5)$ .      C.  $(1; -2; 3)$ .      D.  $(3; -2; 1)$ .
- Câu 46:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (1; 3; -2)$  và  $\vec{v} = (2; 1; -1)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{u} - \vec{v}$  là
- A.  $(3; 4; -3)$ .      B.  $(-1; 2; -3)$ .      C.  $(-1; 2; -1)$ .      D.  $(1; -2; 1)$ .
- Câu 47:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (1; -1; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; 0; -1)$  và  $\vec{c} = (-2; 5; 1)$ . Vectơ  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$  có tọa độ là
- A.  $(6; 0; -6)$ .      B.  $(0; 6; -6)$ .      C.  $(6; -6; 0)$ .      D.  $(-6; 6; 0)$ .
- Câu 48:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = (m; 2; m+1)$  với  $m$  là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ ?
- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.
- Câu 49:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (-1; 2; 3)$ ,  $\vec{b} = (2; -3; 4)$ ,  $\vec{c} = (3; 4; -5)$ ,  $\vec{d} = (-4; 5; -1)$ . Hãy phân tích vectơ  $\vec{d}$  theo 3 vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .
- A.  $\vec{d} = \frac{97}{96}\vec{a} - \frac{59}{48}\vec{b} - \frac{17}{96}\vec{c}$ .      B.  $\vec{d} = -\frac{97}{96}\vec{a} + \frac{59}{48}\vec{b} + \frac{17}{96}\vec{c}$ .  
 C.  $\vec{d} = -\frac{59}{48}\vec{a} + \frac{97}{96}\vec{b} - \frac{17}{96}\vec{c}$ .      D.  $\vec{d} = -\frac{97}{96}\vec{a} + \frac{17}{96}\vec{b} + \frac{59}{48}\vec{c}$ .
- Câu 50:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tọa độ điểm  $A(3; -2; 1)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của điểm  $A$  trên trục  $Ox$ . Độ dài đoạn thẳng  $AH$  bằng
- A. 3.      B.  $\sqrt{10}$ .      C. 1.      D.  $\sqrt{5}$ .
- Câu 51:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = 3\vec{j} + \vec{k}$  và  $\vec{b} = (1; m; 6)$ . Giá trị của tham số  $m$  để  $\vec{a}$  vuông góc với  $\vec{b}$  là
- A.  $m = 3$ .      B.  $m = -2$ .      C.  $m = -3$ .      D.  $m = 2$ .
- Câu 52:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; -2; 1)$ ;  $B(-3; 1; 0)$  và  $C(2; m; -5)$ . Tìm  $m$  biết tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .
- A.  $m = \frac{8}{3}$ .      B.  $m = \frac{4}{3}$ .      C.  $m = -\frac{4}{3}$ .      D.  $m = -\frac{8}{3}$ .
- Câu 53:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$  và  $P(1; m+1; 2)$ . Biết tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.  $m = -2$ .      B.  $m = 2$ .      C.  $m = 4$ .      D.  $m = -4$ .
- Câu 54:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có tọa độ các đỉnh  $A(2; -1; 4)$ ,  $B(0; -1; 0)$ ,  $C(3; -2; m+2)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .
- A.  $\frac{5}{2}$ .      B.  $\frac{3}{2}$ .      C. 6.      D. 2.

- Câu 55:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;0)$ ,  $B(2;-1;1)$ . Tìm điểm  $C$  có hoành độ dương trên trục  $Ox$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .  
**A.**  $C(3;0;0)$ . **B.**  $C(2;0;0)$ . **C.**  $C(1;0;0)$ . **D.**  $C(5;0;0)$ .
- Câu 56:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;-1)$ ,  $B(2;-1;3)$ . Tìm tọa độ điểm  $I$  thỏa mãn  $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$ .  
**A.**  $I\left(-\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$ . **B.**  $I\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; 0\right)$ . **C.**  $I\left(\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$ . **D.**  $I\left(0; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .
- Câu 57:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 2 điểm  $B(1;2;-3)$  và  $C(7;4;-2)$ . Nếu điểm  $E$  thỏa mãn đẳng thức  $\vec{CE} = 2\vec{EB}$  thì tọa độ điểm  $E$  là  
**A.**  $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ . **B.**  $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$ . **C.**  $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ . **D.**  $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$ .
- Câu 58:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{PQ} = (0;1;-2)$ ,  $\vec{PR} = (-2;-1;0)$  và điểm  $M(1;-2;2)$  trung điểm của đoạn  $QR$ . Tọa độ điểm  $Q$  là  
**A.**  $(-1;1;-2)$ . **B.**  $(-2;2;-3)$ . **C.**  $(0;1;3)$ . **D.**  $(2;-1;1)$ .
- Câu 59:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(2;0;0)$ ,  $B(0;2;0)$ ,  $C(0;0;2)$  và  $D(2;2;2)$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $MN$  là  
**A.**  $I(1;1;0)$ . **B.**  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ . **C.**  $I(1;1;1)$ . **D.**  $I(1;-1;2)$ .
- Câu 60:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2;-1;4)$ ;  $\vec{b} = (-3;0;2)$ . Khi đó,  $\cos(\vec{a}; \vec{b})$  bằng  
**A.**  $\frac{2}{\sqrt{273}}$ . **B.**  $\frac{1}{\sqrt{273}}$ . **C.**  $\frac{-1}{\sqrt{273}}$ . **D.**  $-\frac{2}{\sqrt{273}}$ .
- Câu 61:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{u} = (-1;3;2)$ ,  $\vec{v} = (-3;-1;2)$ . Khi đó,  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  bằng  
**A.** 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 10.
- Câu 62:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (1;-2;3)$  và  $\vec{v} = (2;-2;1)$ . Tích vô hướng  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  bằng  
**A.** 9. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.
- Câu 63:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (1;0;3)$  và  $\vec{b} = (-2;2;5)$ . Tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$  bằng  
**A.** 25 **B.** 23. **C.** 27. **D.** 29.
- Câu 64:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1;1;0)$ ,  $\vec{b} = (1;1;0)$ ,  $\vec{c} = (1;1;1)$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?  
**A.**  $\vec{b} \perp \vec{c}$ . **B.**  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ . **C.**  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . **D.**  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ .
- Câu 65:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3;2;1)$ ,  $B(-1;3;2)$ ,  $C(2;4;-3)$ . Tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .  
**A.** -6. **B.** 10. **C.** -2. **D.** 2.
- Câu 66:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2;1;-1)$ ;  $\vec{b} = (1;3;m)$ . Tìm  $m$  để  $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$ .  
**A.**  $m = -5$ . **B.**  $m = 5$ . **C.**  $m = 1$ . **D.**  $m = -2$ .

- Câu 67:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; 2; 0)$  và  $\vec{b} = (-1; 3; 0)$ . Tính góc giữa hai vectơ đó.  
**A.**  $45^\circ$ . **B.**  $135^\circ$ . **C.**  $30^\circ$ . **D.**  $60^\circ$ .
- Câu 68:** Trong không gian  $Oxyz$ , góc giữa hai vectơ  $\vec{a} = (1; 2; -2)$  và  $\vec{b} = (-1; -1; 0)$  bằng  
**A.**  $60^\circ$ . **B.**  $135^\circ$ . **C.**  $30^\circ$ . **D.**  $45^\circ$ .
- Câu 69:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (0; -1; 0)$  và  $\vec{v} = (\sqrt{3}; 1; 0)$ . Góc giữa  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng  
**A.**  $30^\circ$ . **B.**  $120^\circ$ . **C.**  $60^\circ$ . **D.**  $90^\circ$ .
- Câu 70:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (-1; 3; 2)$  và  $\vec{v} = (-2; 0; -1)$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?  
**A.**  $\vec{u} \perp \vec{v}$ . **B.**  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{4}{\sqrt{70}}$ . **C.**  $\vec{u}, \vec{v}$  cùng phương. **D.**  $(\vec{u}, \vec{v}) = 30^\circ$ .
- Câu 71:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; 1; -2)$ ,  $\vec{b} = (0; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$ . Tất cả giá trị của  $m$  để hai véc tơ  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b}$  và  $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc với nhau là  
**A.**  $\frac{11\sqrt{2} \pm \sqrt{26}}{18}$ . **B.**  $\frac{\pm\sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$ . **C.**  $\frac{\pm 26 + \sqrt{2}}{6}$ . **D.**  $\frac{26 \pm \sqrt{2}}{6}$ .
- Câu 72:** Trong không gian  $Oxyz$ , góc giữa hai vectơ  $\vec{j}$  và  $\vec{u} = (0; -\sqrt{3}; 1)$  là  
**A.**  $30^\circ$ . **B.**  $120^\circ$ . **C.**  $150^\circ$ . **D.**  $60^\circ$ .
- Câu 73:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{u} = (x; 0; 1)$ ,  $\vec{v} = (\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0)$ . Tìm  $x$  để góc giữa  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng  $60^\circ$ .  
**A.**  $x = 1$ . **B.**  $x = 0$ . **C.**  $x = \pm 1$ . **D.**  $x = -1$ .
- Câu 74:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 1; 0), B(1; 2; -1), C(0; 1; 1)$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .  
**A.**  $60^\circ$ . **B.**  $120^\circ$ . **C.**  $30^\circ$ . **D.**  $150^\circ$ .
- Câu 75:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 0; 0)$  và  $B(-\sqrt{3}; 1; 0)$ . Số đo góc  $AOB$  của tam giác  $OAB$  bằng  
**A.**  $30^\circ$ . **B.**  $120^\circ$ . **C.**  $150^\circ$ . **D.**  $60^\circ$ .
- Câu 76:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = (-m; 2; m)$  và  $\vec{b} = (m; 1; 0)$  với  $m \in \mathbb{R}$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của  $m$  để góc giữa hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có số đo bằng  $90^\circ$ . Tích các phần tử của  $S$  bằng  
**A.**  $-2$ . **B.**  $-\sqrt{2}$ . **C.**  $2$ . **D.**  $\sqrt{2}$ .
- Câu 77:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho véc tơ  $\vec{u} = (1; 1; -2)$ ,  $\vec{v} = (1; 0; m)$ . Tìm tất cả giá trị của  $m$  để góc giữa  $\vec{u}, \vec{v}$  bằng  $45^\circ$ .  
**A.**  $m = 2 - \sqrt{6}$ . **B.**  $m = 2 \pm \sqrt{6}$ . **C.**  $m = 2 + \sqrt{6}$ . **D.**  $m = 2$ .
- Câu 78:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(0; -2; -1)$  và  $B(1; -1; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  sao cho  $\vec{MA} = 2\vec{MB}$ .  
**A.**  $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; 1\right)$ . **B.**  $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ . **C.**  $M(2; 0; 5)$ . **D.**  $M(-1; -3; -4)$ .

- Câu 79:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(4; 2; 1)$ ,  $B(-2; -1; 4)$ . Điểm  $M(a; b; c)$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ . Khi đó,  $2a + b + c$  bằng
- A. 2.                      B. 3.                      C.  $\frac{5}{2}$ .                      D. 6.
- Câu 80:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 0; -1)$ ,  $B(-1; -1; 2)$ . Điểm  $M$  nằm trên trục  $Ox$  và cách đều hai điểm  $A, B$  có tọa độ là
- A.  $(0; -2; 0)$ .                      B.  $(1; 0; 0)$ .                      C.  $(0; 1; 1)$ .                      D.  $(-1; 0; 0)$ .
- Câu 81:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 3; 4)$  và  $B(1; 0; 1)$ . Điểm  $M$  nằm trên trục  $Oz$  và cách đều hai điểm  $A, B$  có tọa độ là
- A.  $(0; 0; 4)$ .                      B.  $(2; 0; 0)$ .                      C.  $(0; 0; 2)$ .                      D.  $(0; 4; 0)$ .
- Câu 82:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $B(0; 3; 1)$ ,  $C(-3; 6; 4)$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên đoạn  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Tính tọa độ điểm  $M$ .
- A.  $(-1; 4; -2)$ .                      B.  $(-1; 4; 2)$ .                      C.  $(1; -4; -2)$ .                      D.  $(-1; -4; 2)$ .
- Câu 83:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(-2; -4; 9)$ . Điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$ . Độ dài đoạn thẳng  $OM$  là
- A. 5.                      B. 3.                      C.  $\sqrt{54}$ .                      D.  $\sqrt{17}$ .
- Câu 84:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(2; 3; 2)$ ,  $C(3; -1; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho bốn điểm  $A, B, C, D$  lập thành một hình chữ nhật.
- A.  $D(4; 3; 4)$ .                      B.  $D(4; -1; 4)$ .                      C.  $D(2; -3; 2)$ .                      D.  $D(4; 1; 4)$ .
- Câu 85:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình chữ nhật  $ABCD$  trong đó  $A(-1; 1; 2)$ ,  $B(2; 0; 3)$ ,  $C \in Ox$ ,  $D(a; b; c)$ . Tính giá trị biểu thức  $P = a + b + c$ .
- A. -1.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 0.
- Câu 86:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2; -1; 5)$ ,  $B(5; -5; 7)$ ;  $M(x; y; 1)$ . Khi  $A, B, M$  thẳng hàng thì giá trị của  $x; y$  là
- A.  $x = 4; y = -7$ .                      B.  $x = -4; y = 7$ .                      C.  $x = 4; y = 7$ .                      D.  $x = -4; y = -7$ .
- Câu 87:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(0; 1; -1)$ ,  $B(1; 2; 0)$ ;  $C(m; n; 0)$ . Tìm  $m, n$  sao cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.
- A.  $m = 1; n = 1$ .                      B.  $m = 1; n = 2$ .                      C.  $m = 2; n = 1$ .                      D.  $m = 2; n = 2$ .
- Câu 88:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-1; 2; -3)$ ,  $B(1; 0; 2)$ ,  $C(x; y; -2)$  thẳng hàng. Tính tổng  $x + y$ .
- A.  $x + y = 17$ .                      B.  $x + y = \frac{11}{5}$ .                      C.  $x + y = 1$ .                      D.  $x + y = -\frac{11}{5}$ .
- Câu 89:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 2; -1)$ ,  $B(0; -1; -2)$ . Tọa độ điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng là
- A.  $M(4; -5; 0)$ .                      B.  $M(-4; 5; 0)$ .                      C.  $M(4; 5; 0)$ .                      D.  $M(-4; -5; 0)$ .

- Câu 90:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 2; -1)$ ,  $B(0; -1; -2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxy)$  tại điểm  $M$ . Tìm tọa độ điểm  $M$ .
- A.  $M(4; -5; 0)$ .      B.  $M(-4; 5; 0)$ .      C.  $M(4; 5; 0)$ .      D.  $M(-4; -5; 0)$ .
- Câu 91:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 3; 1)$  và  $B(5; 6; 2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$ . Tính tỉ số  $\frac{AM}{BM}$ .
- A.  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$ .      B.  $\frac{AM}{BM} = 2$ .      C.  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ .      D.  $\frac{AM}{BM} = 3$ .
- Câu 92:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-4; 1; 5)$ ;  $B(1; 5; -3)$ . Gọi  $C$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(Oyz)$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
- A.  $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{BC}$ .      C.  $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{BC}$ .      D.  $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{BC}$ .
- Câu 93:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-4; 7; 5)$ . Tọa độ chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$  là
- A.  $(-2; 11; 1)$ .      B.  $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$ .      C.  $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .      D.  $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$ .
- Câu 94:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$ , có  $A(1; 3; -1)$ ;  $B(-1; 1; -1)$ ,  $C(3; -3; -1)$ . Tọa độ chân đường phân giác trong của góc  $B$  là
- A.  $\left(\frac{5}{3}; 1; -1\right)$ .      B.  $\left(1; \frac{5}{3}; -1\right)$ .      C.  $(2; -1; -1)$ .      D.  $(3; -1; -1)$ .
- Câu 95:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$ , có  $A(0; -4; 0)$ ;  $B(-5; 6; 0)$ ,  $C(3; 2; 0)$ . Tọa độ chân đường phân giác ngoài của góc  $A$  là
- A.  $(15; -4; 0)$ .      B.  $(12; 1; 0)$ .      C.  $(-3; 12; 0)$ .      D.  $(3; 1; 1)$ .
- Câu 96:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $OAB$ , có  $O$  là gốc tọa độ,  $A(0; 2; 1)$ ;  $B(0; 4; -2)$ . Tọa độ chân đường phân giác ngoài của góc  $O$  là
- A.  $(0; 0; 4)$ .      B.  $(2; 1; 0)$ .      C.  $(0; 1; 2)$ .      D.  $(3; 0; 1)$ .
- Câu 97:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(0; 1; 1)$ ,  $C(1; 0; -2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  nằm trên mặt phẳng  $Oxz$  sao cho  $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.
- A.  $M\left(\frac{2}{3}; 0; -\frac{1}{6}\right)$ .      B.  $M\left(\frac{1}{3}; 0; -\frac{2}{3}\right)$ .      C.  $M\left(-\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{6}\right)$ .      D.  $M\left(0; \frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right)$ .
- Câu 98:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(6; -3; 4)$ ,  $B(a; b; c)$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $AB$  với các mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$ ,  $(Oxz)$  và  $(Oyz)$ . Biết rằng  $M, N, P$  nằm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = MN = NP = PB$ . Giá trị của tổng  $a + b + c$  là
- A. 17.      B. -17.      C. -11.      D. 11.
- Câu 99:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; 3; 4)$  và  $C(3; 5; -2)$ . Gọi  $I(a; b; c)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Giá trị của  $T = a^2 + b^2 + c^2$  bằng

A.  $T = \frac{93}{4}$ .      B.  $T = \frac{15}{2}$ .      C.  $T = 15$ .      D.  $T = \frac{93}{2}$ .

**Câu 100:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với tọa độ các đỉnh  $A(1;1;1), B(4;1;1), C(1;1;5)$ . Tìm tọa độ điểm  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

A.  $I(-2;1;3)$ .      B.  $I(2;-1;3)$ .      C.  $I(2;1;2)$ .      D.  $I(2;2;1)$ .

**Câu 101:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2;2;1), B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$ . Biết  $I(a;b;c)$  là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác  $OAB$ . Tính  $S = a + b + c$ .

A.  $S = 0$ .      B.  $S = -1$ .      C.  $S = 2$ .      D.  $S = 1$ .

**Câu 102:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;-2;2), B(-5;6;4)$  và  $C(0;1;-2)$ . Độ dài đường phân giác trong của góc  $A$  của  $\triangle ABC$  bằng

A.  $\frac{3}{2\sqrt{74}}$ .      B.  $\frac{2}{3\sqrt{74}}$ .      C.  $\frac{2\sqrt{74}}{3}$ .      D.  $\frac{3\sqrt{74}}{2}$ .

**Câu 103:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-4;7;5)$ . Tọa độ chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$  là

A.  $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$ .      B.  $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$ .      C.  $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$ .      D.  $(-2;11;1)$ .

**Câu 104:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-2;3;1), B(2;1;0), C(-3;-1;1)$ . Tìm tất cả các điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình thang có đáy  $AD$  và  $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$

A.  $D(8;7;-1)$ .      B.  $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$ .      C.  $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$ .      D.  $D(-12;-1;3)$ .

**Câu 105:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-1;4;2), B(3;2;1), C(-2;0;2)$ . Tìm tất cả các điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình thang có đáy  $AD$  và diện tích hình thang  $ABCD$  gấp ba lần diện tích tam giác  $ABC$ .

A.  $D(9;8;0)$ .      B.  $D(-11;0;4)$  và  $D(9;8;0)$ .  
C.  $D(-11;0;4)$ .      D.  $D(11;0;-4)$  và  $D(-9;-8;0)$ .

**Câu 106:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(0;0;3), B(0;0;-1), C(1;0;-1)$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

A.  $I(1;0;2)$ .      B.  $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ .      C.  $I(0;0;1)$ .      D.  $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ .

**Câu 107:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $E(1;-2;4), F(1;-2;-3)$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho tổng  $ME + MF$  có giá trị nhỏ nhất. Tìm tọa độ của điểm  $M$ .

A.  $M(-1;2;0)$ .      B.  $M(-1;-2;0)$ .      C.  $M(1;-2;0)$ .      D.  $M(1;2;0)$ .

**Câu 108:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-3;2;-1), B(-1;0;-1)$ . Điểm  $M(a;b;0)$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$  nhỏ nhất. Tính  $a + 2b$ .

A. 0.      B. 1.      C. -1.      D. 3.

**Câu 109:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;1); B(2;-1;3)$  và điểm  $M(a;b;0)$  sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất. Giá trị của  $a + b$  là:

- A. -2.                      B. 2.                      C. 1.                      D. 3.

#### IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 2 vectơ  $\vec{a} = (2;3;-5), \vec{b} = (0;-3;4), \vec{c} = (1;-2;3)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{n} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \vec{a} = (2;3;-5) \Rightarrow 3\vec{a} = (6;9;-15).$$

$$\vec{b} = (0;-3;4) \Rightarrow 2\vec{b} = (0;-6;8); \vec{c} = (1;-2;3)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (5;5;-10).$$

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (1;1;0)$  và  $\vec{v} = (2;0;-1)$ . Tính  $|\vec{u} + 2\vec{v}|$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } |\vec{u}| = \sqrt{2}; |\vec{v}| = \sqrt{5}; \vec{u}\vec{v} = 1.2 + 1.0 + 0.(-1) = 2.$$

$$\text{Suy ra } |\vec{u} + 2\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 4\vec{u}\vec{v} + 4|\vec{v}|^2 = 2 + 4.2 + 4.5 = 30.$$

$$\text{Vậy } |\vec{u} + 2\vec{v}| = \sqrt{30}.$$

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , tìm  $x; y$  để ba điểm  $A(-1;2;-3), B(1;0;2), C(x;y;-13)$  thẳng hàng.

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (2;-2;5), \overrightarrow{AC} = (x+1;y-2;-10).$$

Ba điểm  $A(-1;2;-3), B(1;0;2), C(x;y;-13)$  thẳng hàng khi  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{-10}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 6 \end{cases}.$$

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a} = (1;2;-2)$  và  $\vec{b} = (-1;-1;0)$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ.$$

**Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u}(2;0;-1)$ . Tìm vectơ  $\vec{v}$  biết  $\vec{v}$  cùng phương với  $\vec{u}$  và  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$ .

**Lời giải:**

Vì  $\vec{v}$  cùng phương với  $\vec{u}$  nên  $\vec{v} = k\vec{u} = (2k;0;-k)$ , với  $k > 0$ .

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = 4k + k = 5k = 20 \Leftrightarrow k = 4. \text{ Vậy } \vec{v} = (8;0;-4).$$

**Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(0;2;-1)$  và  $B(2;0;3)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  sao cho  $G(1;2;2)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

**Lời giải:**

Gọi điểm  $C(a;b;c)$ .

$$\text{Vì } G(1;2;2) \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} \frac{0+2+a}{3}=1 \\ \frac{2+0+b}{3}=2 \\ \frac{-1+3+c}{3}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow C(1;4;4).$$

**Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;1)$ ,  $B(2;-1;2)$ . Tìm điểm  $M$  trên trục  $Ox$  và cách đều hai điểm  $A, B$ .

**Lời giải:**

Điểm  $M$  trên trục  $Ox \Rightarrow M(m;0;0)$ .

$$\overrightarrow{AM} = (m-1; -2; -1) \Rightarrow AM = \sqrt{(m-1)^2 + 4 + 1} = \sqrt{m^2 - 2m + 6}$$

$$\overrightarrow{BM} = (m-2; 1; -2) \Rightarrow BM = \sqrt{(m-2)^2 + 1 + 4} = \sqrt{m^2 - 4m + 9}.$$

$$M \text{ cách đều hai điểm } A, B \Leftrightarrow AM = BM \Rightarrow m^2 - 2m + 6 = m^2 - 4m + 9 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right).$$

**Câu 8:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(2;3;-1)$ ,  $N(-1;1;1)$ ,  $P(1;m-1;3)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{NM} = (3; 2; -2), \overrightarrow{NP} = (2; m-2; 2)$$

$$\text{Tam giác } MNP \text{ vuông tại } N \text{ khi } \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 + 2(m-2) - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

**Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;-2;1)$ ,  $B(3;-4;1)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại  $M$ . Tính tỉ số  $\frac{MB}{MA}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Đường thẳng } AB \text{ cắt mặt phẳng } (Oxz) \text{ tại } M \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{d(B, (Oxz))}{d(A, (Oxz))} = \frac{|y_B|}{|y_A|} = \frac{|-4|}{|-2|} = 2.$$

**Câu 10:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;-1;1)$ ,  $B(3;2;-2)$ ,  $C(-3;1;5)$ . Tìm tọa độ điểm  $M(x;y;z)$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{CM}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{CM} \Rightarrow \begin{cases} 1-x-2 \cdot 2 = 4(x+3) \\ -1-y-2 \cdot 3 = 4(y-1) \\ 1-z-2 \cdot (-3) = 4(z-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{3}{5} \\ z = \frac{27}{5} \end{cases} \longrightarrow M\left(-3; -\frac{3}{5}; \frac{27}{5}\right).$$

**Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $B(0;3;1)$ ,  $C(-3;6;4)$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên đoạn  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Tìm tọa độ điểm  $M$ .

**Lời giải:**

Giả sử  $M(x; y; z)$ . Vì  $M$  là điểm nằm trên đoạn  $BC$  thỏa  $MC = 2MB$  nên  $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ .

$$\text{Hay } \begin{cases} x_C - x_M = -2(x_B - x_M) \\ y_C - y_M = -2(y_B - y_M) \\ z_C - z_M = -2(z_B - z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{2x_B + x_C}{3} \\ y_M = \frac{2y_B + y_C}{3} \\ z_M = \frac{2z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = 4 \\ z_M = 2 \end{cases}.$$

Vậy  $M(-1;4;2)$ .

**Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-2;3;1)$ ,  $B(2;1;0)$ ,  $C(-3;-1;1)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  là điểm sao cho  $ABCD$  là hình thang có cạnh đáy  $AD$  và diện tích hình thang  $ABCD$  bằng 4 lần diện tích tam giác  $ABC$ .

**Lời giải:**

Gọi  $D(a;b;c)$ .

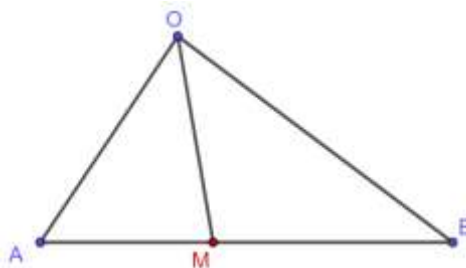
$$\text{Ta có } S_{ABCD} = 4S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(BC, AD)(BC + AD) = 4 \cdot \frac{1}{2}d(BC, AD)BC$$

$$\Leftrightarrow BC + AD = 4BC \Leftrightarrow AD = 3BC. \text{ Do } ABCD \text{ là hình thang có đáy } AD \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2=-15 \\ b-3=-6 \\ c-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-17 \\ b=-3 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow D(-17;-3;4).$$

**Câu 13:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $OAB$  có  $A(2;2;-1)$  và  $B(0;-4;3)$ . Tính độ dài đường phân giác trong góc  $AOB$ .

**Lời giải:**



Gọi  $M$  là chân đường phân giác trong góc  $AOB$ .

Ta có:  $OA = 3, OB = 5$ , theo tính chất đường phân giác trong:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{MA}{MA+MB} = \frac{OA}{OA+OB} = \frac{3}{8} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Nên: } \begin{cases} 2 - x_M = -\frac{3}{8}(0 - 2) \\ 2 - y_M = -\frac{3}{8}(-4 - 2) \\ -1 - z_M = -\frac{3}{8}(3 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{5}{4} \\ y_M = -\frac{1}{4} \\ z_M = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{30}}{4}.$$

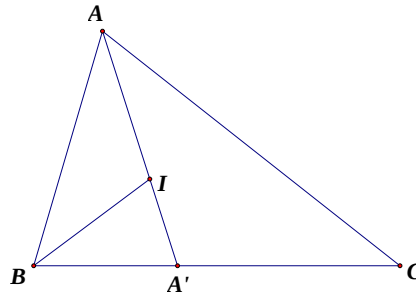
**Câu 14:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(2; 2; 1)$ ,  $N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$ . Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $OMN$ .

**Lời giải:**

Ta có bài toán bài toán sau

Trong tam giác  $ABC$ ,  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  ta có:  $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ .  
với  $BC = a$ ;  $AC = b$ ;  $AB = c$ .

Thật vậy:



Gọi  $A'$  là chân đường phân giác trong kẻ từ  $A$ .

$$\Rightarrow \vec{BA'} = \frac{c}{b} \vec{A'C} \Leftrightarrow b\vec{BA'} + c\vec{CA'} = \vec{0} \quad 1$$

$$\vec{IA} = \frac{c}{A'B} \vec{A'I} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} \vec{A'I} = \frac{b+c}{a} \vec{A'I} \Leftrightarrow a\vec{IA} + b + c \vec{IA'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} + b\vec{BA'} + c\vec{CA'} = \vec{0} \Leftrightarrow a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0} \quad \text{do } 1.$$

Áp dụng công thức trong tam giác  $OMN$ , ta được:  $OM.\vec{IN} + ON.\vec{IM} + MN.\vec{IO} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{OM.x_N + ON.x_M + MN.x_O}{OM + ON + MN} = 0 \\ y_I = \frac{OM.y_N + ON.y_M + MN.y_O}{OM + ON + MN} = 1. \\ z_I = \frac{OM.z_N + ON.z_M + MN.z_O}{OM + ON + MN} = 1 \end{cases}$$

Vậy điểm  $I(0; 1; 1)$  là điểm cần tìm.

**Câu 15:** Trong không gian  $Oxyz$ , một hình chữ nhật có hai đỉnh không liên tiếp có tọa độ là  $(3; -2; 2\sqrt{3})$ ,  $(-3; 2; -2\sqrt{3})$ ; hai đỉnh còn lại nằm trên mặt phẳng  $Oxy$  có hoành độ và tung độ đều là số nguyên. Có bao nhiêu hình chữ nhật như thế?

**Lời giải:**

Giả sử:  $B(3; -2; 2\sqrt{3})$  và  $D(-3; 2; -2\sqrt{3})$ .

Ta có: gốc tọa độ  $O(0; 0; 0)$  là trung điểm của  $BD$ .

Tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow O$  là trung điểm của  $AC$  (thỏa điều kiện đồng phẳng).

Gọi  $A(a; b; 0) \rightarrow C(-a; -b; 0)$ .

Ta có:  $BD = 10 \Rightarrow AC = 10 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$  và  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$ .

Vì  $a; b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 4 \\ b = \pm 3 \end{cases} \rightarrow$  có 2 hình chữ nhật.

$a; b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = \pm 4 \end{cases} \rightarrow$  có 2 hình chữ nhật.

**Câu 16:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; -2)$ ,  $B(2; -1; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên mặt phẳng  $Oxyz$  cho  $MA + MB$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4)$ ,  $\overrightarrow{AM} = (x-1; y-2; z+2)$ .

Ta có:  $MA + MB \geq AB$ , dấu bằng xảy ra khi  $M$  nằm giữa  $A$  và  $B \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=k \\ y-2=-3k \\ z+2=4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=k+1 \\ y=-3k+2 \\ z=4k-2 \end{cases} \Rightarrow z=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=0 \end{cases}$$

Vậy  $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ .

**Câu 17:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(1; -2; 3); B(2; 2; 4); C(3; -3; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho:  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$  ngắn nhất.

**Lời giải:**

Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  suy ra  $G(2; -1; 3)$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $G$  lên mp( $Oxy$ ) suy ra  $H(2; -1; 0), GH = 3$

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MG}| = 3MG \geq 3HG = 9$$

Vậy  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$  ngắn nhất bằng 9 khi  $M$  trùng  $H$ , khi đó  $M(2; -1; 0)$ .

**Câu 18:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-3; 3; -1)$ ,  $B(2; -2; 4)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oyz)$  sao cho biểu thức  $T = 3MA^2 + 2MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải:**

$$\text{Xét } T = 3\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 5MI^2 + 5IA^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB})$$

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn } 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(-1;1;1) \Rightarrow \begin{cases} IA^2 = 12 \\ IB^2 = 27 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } T = 5MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 = 5MI^2 + 90. \text{ Do đó } T_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min}.$$

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu vuông góc của } I \text{ lên mặt phẳng } (Oyz) \Rightarrow H(0;1;1)$$

$$\text{Dễ thấy } IM \geq IH \Rightarrow T_{\min} \geq 5IH^2 + 90 = 95$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow M \equiv H(0;1;1).$$

**Câu 19:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-1;2;2)$ ,  $B(3;2;6)$ . Xét hai điểm  $M, N$  thay đổi thuộc mặt phẳng  $Oxy$  sao cho  $MN = 16$ . Tính giá trị nhỏ nhất của  $AM + BN$ .

**Lời giải:**

Gọi  $A'(-1;2;0)$ ,  $B'(3;2;0)$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B$  trên  $Oxy$ , khi đó:

$$AM + BN = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} + \sqrt{BB'^2 + B'N^2} \geq \sqrt{AA'^2 + BB'^2 + A'M + B'N^2}.$$

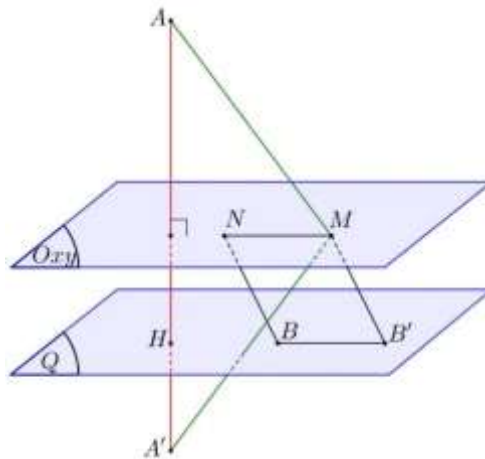
$$\text{Ta có } MA' + A'B' + B'N \geq MN \Leftrightarrow A'M + NB' \geq MN - A'B' \Leftrightarrow A'M + NB' \geq 12.$$

$$\text{Nên } AM + BN \geq \sqrt{AA'^2 + BB'^2 + A'M + B'N^2} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow M, A', B', N \text{ theo thứ tự thẳng hàng và } \frac{AA'}{BB'} = \frac{A'M}{B'N} = 3.$$

**Câu 20:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;-3;-4)$  và điểm  $B(-2;1;2)$ . Xét hai điểm  $M$  và  $N$  thay đổi thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $MN = 2$ . Tính giá trị lớn nhất của  $|AM - BN|$ .

**Lời giải:**



Gọi  $A'$  đối xứng với  $A$  qua mặt phẳng  $(Oxy)$ . Suy ra  $A'(1;-3;4)$ .

Dựng  $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{NM}$ . Khi đó  $B'$  thuộc mặt phẳng  $(Q)$  qua  $B$  và song song  $(Oxy)$ .

Phương trình  $(Q): z = 2$ . Và  $BB' = 2$ .

Suy ra  $B'$  thuộc đường tròn tâm  $B$ , bán kính  $R = 2$  trong  $(Q)$ .

Ta có:  $|AM - BN| = |A'M - MB'| \leq A'B'$ . Trong đó  $A', B'$  cùng phía so với  $(Oxy)$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A'$  trên  $(Q)$ . Suy ra  $H(1;-3;2)$ .

Suy ra  $A'H = 2; HB' \leq HB + BB' = 5 + 2 = 7$ .

Khi đó  $A'B' = \sqrt{A'H^2 + HB'^2} \leq \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$ .

Dấu bằng xảy ra khi  $B$  nằm giữa  $B'$  và  $H$  và  $M = A'B' \cap (Oxy)$  và  $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{NM}$ .

**Câu 21:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2;1;-1)$ ,  $B(1;2;3)$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng

- A. 18.                      B.  $3\sqrt{2}$ .                      C.  $\sqrt{3}$ .                      D.  $\sqrt{22}$ .

**Lời giải:**

Ta có  $AB = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + (3+1)^2} = 3\sqrt{2}$ .

**Câu 22:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ . Tính độ dài của vectơ  $\vec{a}$ .

- A. 1.                      B. 4.                      C. 5.                      D. 3.

**Lời giải:**

Ta có  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = (2;1;-2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$ .

**Câu 23:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2;-1;3)$ . Tọa độ của vectơ  $2\vec{a}$  là

- A.  $(4;-2;3)$ .                      B.  $(4;-1;3)$ .                      C.  $(4;-2;6)$ .                      D.  $(4;-2;5)$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\vec{a} = (2;-1;3)$  suy ra  $2\vec{a} = (4;-2;6)$ .

**Câu 24:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 2 véc tơ  $\vec{a} = (-2;2;-4)$  và  $\vec{b} = (-3;3;-6)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $2\vec{b} = 3\vec{a}$ .                      B.  $2\vec{a} = 3\vec{b}$ .                      C.  $-2\vec{a} = 3\vec{b}$ .                      D.  $-2\vec{b} = 3\vec{a}$ .

**Lời giải:**

Để thấy  $2\vec{b} = (-6;6;-12)$ ,  $3\vec{a} = (-6;6;-12) \Rightarrow 2\vec{b} = 3\vec{a}$ .

**Câu 25:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-4;5;-3)$ ,  $\vec{b} = (2;-2;1)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ .

- A.  $\vec{x} = (0;-1;1)$ .                      B.  $\vec{x} = (0;1;-1)$ .                      C.  $\vec{x} = (-8;9;-5)$ .                      D.  $\vec{x} = (2;3;-2)$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b} = (-4 + 2.2; 5 + 2.(-2); -3 + 2.1) = (0;1;-1)$ .

**Câu 26:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (-1;1;3)$  và  $\vec{v} = (-2;1;-3)$ . Tính  $|2\vec{u} - 3\vec{v}|$ .

- A.  $\sqrt{242}$ .                      B.  $\sqrt{216}$ .                      C.  $\sqrt{152}$ .                      D.  $\sqrt{322}$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $2\vec{u} - 3\vec{v} = (4;-1;15)$ . Suy ra  $|2\vec{u} - 3\vec{v}| = \sqrt{242}$ .

**Câu 27:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Tính độ dài của  $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$ .

- A.  $\sqrt{74}$ .                      B.  $3\sqrt{6}$ .                      C.  $5\sqrt{2}$ .                      D.  $\sqrt{42}$ .

**Lời giải:**

$\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2(2\vec{j} - 3\vec{k}) - (4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 4\vec{j} - 6\vec{k} - 4\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{v} = (-4;3;-7) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-7)^2} = \sqrt{74}$ .

**Câu 28:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;-3)$  và  $B(-3;4;5)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$ .

- A.**  $I(-1;3;1)$ .      **B.**  $I(-1;-3;1)$ .      **C.**  $I(-2;1;4)$ .      **D.**  $I(2;-1;-4)$ .

**Lời giải:**

$$\text{Tọa độ trung điểm } I \text{ của đoạn thẳng } AB \text{ là } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = -1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 3 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 1 \end{cases} \longrightarrow I(-1;3;1).$$

**Câu 29:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm  $I$ . Biết  $A(2;1;-1)$ ,  $I(1;2;0)$ . Khi đó, điểm  $B$  có tọa độ là

- A.**  $(1;-1;-1)$ .      **B.**  $(3;0;-2)$ .      **C.**  $(0;3;1)$ .      **D.**  $(-1;1;1)$ .

**Câu 30:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;3;4)$ ,  $B(2;-1;0)$ ,  $C(3;1;2)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

- A.**  $G(3;\frac{2}{3};3)$ .      **B.**  $G(2;-1;2)$ .      **C.**  $G(2;1;2)$ .      **D.**  $G(6;3;6)$ .

**Lời giải:**

Theo công thức trọng tâm của tam giác, ta có:  $G(2;1;2)$ .

**Câu 31:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(-1;2;3)$  và  $N(-2;1;-3)$ . Tọa độ trọng tâm của tam giác  $OMN$  là

- A.**  $(-1;1;0)$ .      **B.**  $(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};0)$ .      **C.**  $(-1;-1;-6)$ .      **D.**  $(-1;1;3)$ .

**Lời giải:**

$$\text{Gọi } G \text{ là trọng tâm } \triangle OMN \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_O + x_M + x_N}{3} \\ y_G = \frac{y_O + y_M + y_N}{3} \\ z_G = \frac{z_O + z_M + z_N}{3} \end{cases} \Rightarrow G(-1;1;0).$$

**Câu 32:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G(2;1;0)$  và  $A(1;1;0)$ ,  $B(2;3;5)$ . Tọa độ điểm  $C$  là

- A.**  $(4;2;-1)$ .      **B.**  $(-6;-2;0)$ .      **C.**  $(3;-1;-5)$ .      **D.**  $(-12;0;8)$ .

**Lời giải:**

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \text{ nên } \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \\ z_C = 3z_G - z_A - z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3.2 - 1 - 2 = 3 \\ y_C = 3.1 - 1 - 3 = -1 \\ z_C = 3.0 - 0 - 5 = -5 \end{cases}$$

Do đó:  $C(3;-1;-5)$ .

**Câu 33:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1;-2;3)$ ,  $B(0;1;-2)$ ,  $E(3;2;2)$ . Gọi  $C(m;n;p)$  là điểm thỏa mãn  $E$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Tổng  $m+n+p$  bằng

- A. 13.                      B. 15.                      C.  $\frac{10}{3}$ .                      **D. 20.**

**Lời giải:**

$$\text{Vì } E \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} x_E = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_E = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_E = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

$$\text{Thay số được } \begin{cases} 3 = \frac{1+0+m}{3} \\ 2 = \frac{-2+1+n}{3} \\ 2 = \frac{3-2+p}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=8 \\ n=7 \\ p=5 \end{cases} \Rightarrow m+n+p=20$$

**Câu 34:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;-1;-2)$  và trọng tâm  $G(2;1;-3)$ . Tọa độ của vector  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$  là

- A.  $(3;6;3)$ .                      **B.  $(3;6;-3)$ .**                      C.  $(3;-3;6)$ .                      D.  $(3;2;1)$ .

**Lời giải:**

Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ .

$$\text{Ta có: } \vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC} = 2.\vec{AM} = 2.\frac{3}{2}.\vec{AG} = 3\vec{AG} = (3;6;-3).$$

**Câu 35:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  biết  $A(1;-3;3)$ ,  $B(2;-4;5)$ ,  $C(a;-2;b)$  và  $G(2;c;3)$  là trọng tâm. Tổng  $a+b+c$  bằng

- A. -5.                      B. 3.                      **C. 1.**                      D. -1.

**Lời giải:**

Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên ta có:

$$\begin{cases} 3x_G = x_A + x_B + x_C \\ 3y_G = y_A + y_B + y_C \\ 3z_G = z_A + z_B + z_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 1 + 2 + a \\ 3c = -3 - 4 - 2 \\ 9 = 3 + 5 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = -3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a+b+c=1.$$

**Câu 36:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\Delta ABC$  có  $A(2;1;-2)$ ,  $B(-1;1;2)$ ,  $C(7;-1;2)$ . Độ dài trung tuyến  $AM$  là

- A.  $5\sqrt{3}$ .                      B.  $2\sqrt{3}$ .                      **C.  $3\sqrt{2}$ .**                      D.  $4\sqrt{2}$ .

**Lời giải:**

Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  suy ra  $M(3;0;2)$ .

$$\text{Vậy } AM = \sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2 + (2+2)^2} = 3\sqrt{2}.$$

**Câu 37:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  có  $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3), D(1;2;3)$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tứ diện  $ABCD$ .

- A.  $G\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ . B.  $G\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$ . C.  $G\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 2\right)$ . D.  $G(2;4;6)$ .

**Lời giải:**

Trọng tâm  $G$  của tứ diện  $ABCD$  là trung điểm của trung đoạn của tứ diện  $ABCD$ .

Ta có tọa độ trung điểm của  $AB$  là  $I\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ , tọa độ trung điểm của  $CD$  là  $J\left(\frac{1}{2}; 1; 3\right)$ .

Vậy trọng tâm  $G$  của tứ diện  $ABCD$  có tọa độ là  $\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$ .

**Câu 38:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(1;0;2), B(-2;1;3), C(3;2;4), D(6;9;-5)$ . Tìm tọa độ trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ .

- A.  $(2;3;-1)$ . B.  $(2;-3;1)$ . C.  $(2;3;1)$ . D.  $(-2;3;1)$ .

**Lời giải:**

Gọi  $G(x; y; z)$  là tọa độ trọng tâm của tứ diện  $ABCD$  ta có:

$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-2+3+6}{4} \\ y = \frac{0+1+2+9}{4} \\ z = \frac{2+3+4-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

**Câu 39:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;1;1), B(-1;1;0), C(4;1;2)$ . Chu vi của tam giác  $ABC$  bằng

- A.  $\sqrt{29} + 2\sqrt{5}$ . B.  $\sqrt{29} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ . C.  $\sqrt{13} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ . D.  $2 + 2\sqrt{5}$ .

**Lời giải:**

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-2; 0; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AC} = (3; 0; 1) \Rightarrow AC = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{BC} = (5; 0; 2) \Rightarrow BC = \sqrt{5^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

Vậy chu vi tam giác  $ABC$  bằng  $\sqrt{29} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$

**Câu 40:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;1;1), B(-1;1;0), C(4;1;2)$ . Chu vi của tam giác  $GBC$  với  $G$  là trọng tâm tam giác, bằng

- A.  $\frac{\sqrt{29} + \sqrt{58}}{3} + \sqrt{73}$ . B.  $\frac{\sqrt{73} + \sqrt{58}}{3} + \sqrt{29}$ . C.  $\frac{\sqrt{73} + \sqrt{29}}{3} + \sqrt{58}$ . D.  $\frac{\sqrt{29} + \sqrt{55}}{3} + \sqrt{58}$ .

**Lời giải:**

Vì  $G$  là trọng tâm của  $ABC$  nên: 
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{4}{3} \\ y_G = 1 \\ z_G = 1 \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}; 1; 1\right).$$

$$\overrightarrow{GB} = \left(-\frac{7}{3}; 0; -1\right) \Rightarrow GB = \sqrt{\left(-\frac{7}{3}\right)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{58}}{3}$$

$$\overrightarrow{GC} = \left(\frac{8}{3}; 0; 1\right) \Rightarrow AC = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{73}}{3}$$

$$\overrightarrow{BC} = (5; 0; 2) \Rightarrow AB = \sqrt{5^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

Vậy chu vi tam giác  $ABC$  bằng  $\frac{\sqrt{73} + \sqrt{58}}{3} + \sqrt{29}$

**Câu 41:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(7; 1; 1)$ ,  $B(-1; 3; 0)$ ,  $C(2; 3; 2)$ . Biết điểm  $D$  là điểm sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành. Chu vi tam giác  $DBC$  bằng

**A.**  $\sqrt{69} + \sqrt{134} + \sqrt{13}$ .

**B.**  $\sqrt{69} + \sqrt{13} + \sqrt{13}$ .

**C.**  $\sqrt{69} + \sqrt{134} + \sqrt{134}$ .

**D.**  $\sqrt{139} + \sqrt{134} + \sqrt{13}$ .

**Lời giải:**

Gọi  $D(x; y; z)$ . Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-8; 2; -1)$ ;  $\overrightarrow{DC} = (2 - x; 3 - y; z - 2)$ .

Để tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} 2 - x = -8 \\ 3 - y = 2 \\ 2 - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow D(10; 1; 3)$

Ta có:  $\overrightarrow{DC} = (-8; 2; -1) \Rightarrow DC = \sqrt{69}$ ;  $\overrightarrow{BC} = (3; 0; 2) \Rightarrow BC = \sqrt{13}$

$\overrightarrow{DB} = (-11; 2; -3) \Rightarrow DB = \sqrt{134}$

Vậy tam giác  $DBC$  có chu vi là  $\sqrt{69} + \sqrt{134} + \sqrt{13}$ .

**Câu 42:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vector  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ . Vector  $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$  có tọa độ là

**A.**  $\vec{u} = (-1; 1; 1)$ .

**B.**  $\vec{u} = (-1; -1; 1)$ .

**C.**  $\vec{u} = (-1; -1; -1)$ .

**D.**  $\vec{u} = (-1; 1; -1)$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\vec{u} = (-1; 1; 1)$ .

**Câu 43:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vector  $\vec{a} = (5; 7; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; 0; 1)$ ,  $\vec{c} = (-6; 1; -1)$ . Tìm tọa độ của vector  $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ .

**A.**  $\vec{m} = (3; -22; 3)$ .

**B.**  $\vec{m} = (3; 22; -3)$ .

**C.**  $\vec{m} = (-3; 22; -3)$ .

**D.**  $\vec{m} = (3; 22; 3)$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = (3.5 - 2.3 - 6; 3.7 - 2.0 + 1; 3.2 - 2.1 - 1) = (3; 22; 3)$ .

**Câu 44:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; -3; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; -1)$ ,  $\vec{c} = (3; -1; 5)$ . Tìm tọa độ của vector  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ .

- A.  $(10; -2; 13)$ . B.  $(-2; 2; -7)$ . C.  $(-2; -2; 7)$ . D.  $(-2; 2; 7)$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $2\vec{a} = (4; -6; 6)$ ,  $3\vec{b} = (0; 6; -3)$ ,  $-2\vec{c} = (-6; 2; -10)$

Suy ra  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7)$ .

**Câu 45:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{a} = (-1; 3; -3)$  và  $\vec{b} = (2; 1; -2)$ . Tọa độ của vector  $\vec{b} - \vec{a}$  là

- A.  $(3; 2; -1)$ . B.  $(1; 4; -5)$ . C.  $(1; -2; 3)$ . D.  $(3; -2; 1)$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\vec{b} - \vec{a} = (2+1; 1-3; -2+3) = (3; -2; 1)$ .

**Câu 46:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{u} = (1; 3; -2)$  và  $\vec{v} = (2; 1; -1)$ . Tọa độ của vector  $\vec{u} - \vec{v}$  là

- A.  $(3; 4; -3)$ . B.  $(-1; 2; -3)$ . C.  $(-1; 2; -1)$ . D.  $(1; -2; 1)$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\vec{u} - \vec{v} = (-1; 2; -1)$ .

**Câu 47:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vector  $\vec{a} = (1; -1; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; 0; -1)$  và  $\vec{c} = (-2; 5; 1)$ . Vector  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$  có tọa độ là

- A.  $(6; 0; -6)$ . B.  $(0; 6; -6)$ . C.  $(6; -6; 0)$ . D.  $(-6; 6; 0)$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{d}} = 1 + 3 - (-2) = 6 \\ y_{\vec{d}} = -1 + 0 - 5 = -6 \\ z_{\vec{d}} = 2 + (-1) - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = (6; -6; 0).$$

**Câu 48:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vector  $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = (m; 2; m+1)$  với  $m$  là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Lời giải:**

Ta có  $\vec{u} = (2; -2; 1)$ . Khi đó:  $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$ .

$$|\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (m+1)^2} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}.$$

$$\text{Do đó } |\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow 9 = 2m^2 + 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của  $m$  thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 49:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (-1; 2; 3)$ ,  $\vec{b} = (2; -3; 4)$ ,  $\vec{c} = (3; 4; -5)$ ,  $\vec{d} = (-4; 5; -1)$ . Hãy phân tích vector  $\vec{d}$  theo 3 vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

**A.**  $\vec{d} = \frac{97}{96}\vec{a} - \frac{59}{48}\vec{b} - \frac{17}{96}\vec{c}$ .

**B.**  $\vec{d} = -\frac{97}{96}\vec{a} + \frac{59}{48}\vec{b} + \frac{17}{96}\vec{c}$ .

**C.**  $\vec{d} = -\frac{59}{48}\vec{a} + \frac{97}{96}\vec{b} - \frac{17}{96}\vec{c}$ .

**D.**  $\vec{d} = -\frac{97}{96}\vec{a} + \frac{17}{96}\vec{b} + \frac{59}{48}\vec{c}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Giả sử } \vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2n + 3p = -4 \\ 2m - 3n + 4p = 5 \\ 3m + 4n - 5p = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{97}{96}, n = -\frac{59}{48}, p = -\frac{17}{96}$$

**Câu 50:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tọa độ điểm  $A(3; -2; 1)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của điểm  $A$  trên trục  $Ox$ . Độ dài đoạn thẳng  $AH$  bằng

**A.** 3.

**B.**  $\sqrt{10}$ .

**C.** 1.

**D.**  $\sqrt{5}$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $H$  là hình chiếu của điểm  $A$  trên trục  $Ox$  suy ra tọa độ điểm  $H(3; 0; 0)$

Vậy  $AH = \sqrt{(3-3)^2 + (0+2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$ .

**Câu 51:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = 3\vec{j} + \vec{k}$  và  $\vec{b}(1; m; 6)$ . Giá trị thực của tham số  $m$  để  $\vec{a}$  vuông góc với  $\vec{b}$  bằng

**A.** 3.

**B.** -2.

**C.** -3.

**D.** 2.

**Lời giải:**

Ta có:  $\vec{a} = (0; 3; 1)$  và  $\vec{b}(1; m; 6)$ .

$\vec{a}$  vuông góc với  $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 3m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ .

**Câu 52:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; -2; 1)$ ;  $B(-3; 1; 0)$  và  $C(2; m; -5)$ . Tìm  $m$  biết tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

**A.**  $m = \frac{8}{3}$ .

**B.**  $m = \frac{4}{3}$ .

**C.**  $m = -\frac{4}{3}$ .

**D.**  $m = -\frac{8}{3}$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\overrightarrow{AB}(-4; 3; -1)$ ;  $\overrightarrow{AC}(1; m+2; -6)$ .

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -4.1 + 3(m+2) - 6.(-1) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8}{3}$ .

**Câu 53:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$  và  $P(1; m+1; 2)$ . Biết tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.**  $m = -2$ .

**B.**  $m = 2$ .

**C.**  $m = 4$ .

**D.**  $m = -4$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{MN} = (-3; -2; 2)$  và  $\overrightarrow{PN} = (-2; -m; -1)$ .

Do tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$  nên  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow 6 + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ .

**Câu 54:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có tọa độ các đỉnh  $A(2; -1; 4)$ ,  $B(0; -1; 0)$ ,  $C(3; -2; m+2)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

**A.**  $\frac{5}{2}$ .

**B.**  $\frac{3}{2}$ .

**C.** 6.

**D.** 2.

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-2; 0; -4)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (1; -1; m-2)$ .

$\Delta ABC$  vuông tại  $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -2 - 4(m-2) = 0 \Leftrightarrow -2 - 4m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ .

**Câu 55:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(2; -1; 1)$ . Tìm điểm  $C$  có hoành độ dương trên trục  $Ox$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .

**A.**  $C(3; 0; 0)$ . **B.**  $C(2; 0; 0)$ . **C.**  $C(1; 0; 0)$ . **D.**  $C(5; 0; 0)$ .

**Lời giải:**

Do  $C$  có hoành độ dương trên trục  $Ox$  nên  $C(x; 0; 0)$ ,  $x > 0$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AC} = (x-1; -2; 0)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (x-2; 1; -1)$ .

Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  nên  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(l) \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy  $C(3; 0; 0)$ .

**Câu 56:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $I$  thỏa mãn  $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

**A.**  $I\left(-\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$ . **B.**  $I\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; 0\right)$ . **C.**  $I\left(\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$ . **D.**  $I\left(0; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .

**Lời giải:**

Gọi  $I(x; y; z)$ . Khi đó:  $\overrightarrow{IA} = (1-x; 2-y; -1-z)$ ,  $\overrightarrow{IB} = (2-x; -1-y; 3-z)$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{IB} = (4-2x; -2-2y; 6-2z)$ . Nên  $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = (5-3x; -3y; 5-3z)$ .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-3x=0 \\ -3y=0 \\ 5-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=0 \\ z=\frac{5}{3} \end{cases} \text{ . Vậy } I\left(\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}\right).$$

**Câu 57:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 2 điểm  $B(1; 2; -3)$  và  $C(7; 4; -2)$ . Nếu điểm  $E$  thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$  thì tọa độ điểm  $E$  là

**A.**  $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ . **B.**  $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$ . **C.**  $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ . **D.**  $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$

**Lời giải:**

Gọi tọa độ điểm  $E(x; y; z)$ , ta có  $\overrightarrow{CE} = (x-7; y-4; z+2)$ .

$\overrightarrow{EB} = (1-x; 2-y; -3-z) \Rightarrow 2\overrightarrow{EB} = (2-2x; 4-2y; -6-2z)$ .

Từ đẳng thức  $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ , suy ra: 
$$\begin{cases} x-7=2-2x \\ y-4=4-2y \\ z+2=-6-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{8}{3} \\ z=-\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow E\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right).$$

**Câu 58:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\overrightarrow{PQ} = (0; 1; -2)$ ,  $\overrightarrow{PR} = (-2; -1; 0)$  và điểm  $M(1; -2; 2)$  trung điểm của đoạn  $QR$ . Tọa độ điểm  $Q$  là

- A.  $(-1; 1; -2)$ .      B.  $(-2; 2; -3)$ .      C.  $(0; 1; 3)$ .      **D.  $(2; -1; 1)$ .**

**Lời giải:**

Ta có  $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} = (2; 2; -2)$ . Suy ra 
$$\begin{cases} x_Q - x_R = 2 \\ y_Q - y_R = 2 \\ z_Q - z_R = -2 \end{cases} \quad (1).$$

Vì điểm  $M(1; -2; 2)$  trung điểm của đoạn  $QR$  nên 
$$\begin{cases} x_Q + x_R = 2 \\ y_Q + y_R = -4 \\ z_Q + z_R = 4 \end{cases} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra  $Q(2; -1; 1)$ .

**Câu 59:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; 2)$  và  $D(2; 2; 2)$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $MN$  là

- A.  $I(1; 1; 0)$ .      B.  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ .      **C.  $I(1; 1; 1)$ .**      D.  $I(1; -1; 2)$

**Lời giải:**

Vì  $I(x; y; z)$  là trung điểm  $MN$  nên ta có:  $2\overrightarrow{IM} + 2\overrightarrow{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

Suy ra 
$$\begin{cases} x = \frac{2+0+0+2}{4} \\ y = \frac{0+2+0+2}{4} \\ z = \frac{0+0+2+2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}. \text{ Vậy } I(1; 1; 1).$$

**Câu 60:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a}(2; -1; 4)$ ;  $\vec{b}(-3; 0; 2)$ . Khi đó,  $\cos(\vec{a}; \vec{b})$  bằng

- A.  $\frac{2}{\sqrt{273}}$ .**      B.  $\frac{1}{\sqrt{273}}$ .      C.  $\frac{-1}{\sqrt{273}}$ .      D.  $-\frac{2}{\sqrt{273}}$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot (-3) - 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{273}}.$

**Câu 61:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{u} = (-1; 3; 2)$ ,  $\vec{v} = (-3; -1; 2)$ . Khi đó,  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  bằng

- A. 3.      B. 2.      **C. 4.**      D. 10.

**Lời giải:**

Ta có:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1)(-3) + 3(-1) + 2 \cdot 2 = 4$ .

- Câu 62:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (1; -2; 3)$  và  $\vec{v} = (2; -2; 1)$ . Tích vô hướng  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  bằng  
**A.** 9. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

**Lời giải:**

Ta có:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 9$ .

- Câu 63:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (1; 0; 3)$  và  $\vec{b} = (-2; 2; 5)$ . Tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$  bằng  
**A.** 25 **B.** 23. **C.** 27. **D.** 29.

**Lời giải:**

Ta có:  $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 2; 8) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 1(-1) + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 23$

- Câu 64:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?  
**A.**  $\vec{b} \perp \vec{c}$ . **B.**  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ . **C.**  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . **D.**  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2 \neq 0$ .

- Câu 65:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; 2; 1)$ ,  $B(-1; 3; 2)$ ,  $C(2; 4; -3)$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .  
**A.** -6. **B.** 10. **C.** -2. **D.** 2.

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-4; 1; 1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1; 2; -4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 2 - 4 = 2$ .

- Câu 66:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (2; 1; -1)$ ;  $\vec{b} = (1; 3; m)$ . Tìm  $m$  để  $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$ .  
**A.**  $m = -5$ . **B.**  $m = 5$ . **C.**  $m = 1$ . **D.**  $m = -2$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 5$ .

- Câu 67:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (1; 2; 0)$  và  $\vec{b} = (-1; 3; 0)$ . Tính góc giữa hai véc-tơ đó.  
**A.**  $45^\circ$ . **B.**  $135^\circ$ . **C.**  $30^\circ$ . **D.**  $60^\circ$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$ .

- Câu 68:** Trong không gian  $Oxyz$ , góc giữa hai vectơ  $\vec{a} = (1; 2; -2)$  và  $\vec{b} = (-1; -1; 0)$  bằng  
**A.**  $60^\circ$ . **B.**  $135^\circ$ . **C.**  $30^\circ$ . **D.**  $45^\circ$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$ .

- Câu 69:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (0; -1; 0)$  và  $\vec{v} = (\sqrt{3}; 1; 0)$ . Góc giữa  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng

A.  $30^\circ$ .

**B.  $120^\circ$ .**

C.  $60^\circ$ .

D.  $90^\circ$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-1}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 120^\circ.$$

**Câu 70:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{u} = (-1; 3; 2)$  và  $\vec{v} = (-2; 0; -1)$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

**A.  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .**

B.  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{4}{\sqrt{70}}$ .

C.  $\vec{u}, \vec{v}$  cùng phương.

D.  $(\vec{u}, \vec{v}) = 30^\circ$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 0. \text{ Suy ra } \vec{u} \perp \vec{v}.$$

**Câu 71:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai véc tơ  $\vec{a} = (2; 1; -2)$ ,  $\vec{b} = (0; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$ . Tất cả giá trị của  $m$  để hai véc tơ  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b}$  và  $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc với nhau là

A.  $\frac{11\sqrt{2} \pm \sqrt{26}}{18}$ .

**B.  $\frac{\pm\sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$ .**

C.  $\frac{\pm 26 + \sqrt{2}}{6}$ .

D.  $\frac{26 \pm \sqrt{2}}{6}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b} \Rightarrow \vec{u} = (4; 2 - 3\sqrt{2}m; -4 + 3\sqrt{2}m).$$

$$\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{v} = (2m; m + \sqrt{2}; -2m - \sqrt{2}).$$

$$\text{Ta có: } \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 8m + (2 - 3\sqrt{2}m)(m + \sqrt{2}) + (-4 + 3\sqrt{2}m)(-2m - \sqrt{2}) = 0.$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{\pm\sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}.$$

**Câu 72:** Trong không gian  $Oxyz$ , góc giữa hai vectơ  $\vec{j}$  và  $\vec{u} = (0; -\sqrt{3}; 1)$  là

A.  $30^\circ$ .

B.  $120^\circ$ .

**C.  $150^\circ$ .**

D.  $60^\circ$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \vec{j} = (0; 1; 0).$$

$$\text{Do đó } \cos(\vec{j}, \vec{u}) = \frac{\vec{j} \cdot \vec{u}}{|\vec{j}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{j}, \vec{u}) = 150^\circ.$$

**Câu 73:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{u} = (x; 0; 1)$ ,  $\vec{v} = (\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0)$ . Tìm  $x$  để góc giữa  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng  $60^\circ$ .

**A.  $x = 1$ .**

B.  $x = 0$ .

C.  $x = \pm 1$ .

D.  $x = -1$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } (\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow x = 1.$$

**Câu 74:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(1; 2; -1)$ ,  $C(0; 1; 1)$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .

A.  $60^\circ$ .

**B.  $120^\circ$ .**

C.  $30^\circ$ .

D.  $150^\circ$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (0; 1; -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1)$ .

$$\text{Nên } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{0 + 0 - 1}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+1}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 120^\circ.$$

**Câu 75:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 0; 0)$  và  $B(-\sqrt{3}; 1; 0)$ . Số đo góc  $AOB$  của tam giác  $OAB$  bằng

- A.  $30^\circ$ .      B.  $120^\circ$ .      C.  $150^\circ$ .      D.  $60^\circ$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{OA} = (1; 0; 0)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (-\sqrt{3}; 1; 0)$ .

$$\text{Lúc đó: } \cos AOB = \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AOB = 150^\circ.$$

**Câu 76:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vector  $\vec{a} = (-m; 2; m)$  và  $\vec{b} = (m; 1; 0)$  với  $m \in \mathbb{R}$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của  $m$  để góc giữa hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  có số đo bằng  $90^\circ$ . Tích các phần tử của  $S$  bằng

- A.  $-2$ .      B.  $-\sqrt{2}$ .      C.  $2$ .      D.  $\sqrt{2}$ .

**Lời giải:**

Vì góc giữa hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  có số đo bằng  $90^\circ$  nên ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\Leftrightarrow -m \cdot m + 2 \cdot 1 + m \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{2}.$$

Từ đó ta có  $S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ . Vậy tích các phần tử của  $S$  bằng  $-2$ .

**Câu 77:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vector  $\vec{u}(1; 1; -2)$ ,  $\vec{v}(1; 0; m)$ . Tìm tất cả giá trị của  $m$  để góc giữa  $\vec{u}, \vec{v}$  bằng  $45^\circ$ .

- A.  $m = 2 - \sqrt{6}$ .      B.  $m = 2 \pm \sqrt{6}$ .      C.  $m = 2 + \sqrt{6}$ .      D.  $m = 2$ .

**Lời giải:**

Ta có:

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{1 - 2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + m^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 - 2m}{\sqrt{6(1 + m^2)}} \Leftrightarrow \sqrt{12(1 + m^2)} = 2 - 4m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 4m \geq 0 \\ 12(1 + m^2) = (2 - 4m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2 - 4m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}.$$

**Câu 78:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(0; -2; -1)$  và  $B(1; -1; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB}$ .

- A.  $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; 1\right)$ .      B.  $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .      C.  $M(2; 0; 5)$ .      D.  $M(-1; -3; -4)$ .

**Lời giải:**

Giả sử  $M(x_M; y_M; z_M)$ .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (0 - x_M) - 2(1 - x_M) = 0 \\ (-2 - y_M) - 2(-1 - y_M) = 0 \\ (-1 - z_M) - 2(2 - z_M) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = 0 \\ z_M = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2; 0; 5).$$

**Câu 79:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(4; 2; 1)$ ,  $B(-2; -1; 4)$ . Điểm  $M(a; b; c)$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ . Khi đó,  $2a + b + c$  bằng

- A.** 2.                      **B.** 3.                      **C.**  $\frac{5}{2}$ .                      **D.** 6.

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{AM} = (a - 4; b - 2; c - 1)$ .  $\overrightarrow{BM} = (a + 2; b + 1; c - 4)$ .

$$\text{Lúc đó: } \overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 4 + 3(a + 2) = 0 \\ b - 2 + 3(b + 1) = 0 \\ c - 1 + 3(c - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \\ c = \frac{13}{4} \end{cases}.$$

Vậy  $2a + b + c = 2$ .

**Câu 80:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 0; -1)$ ,  $B(-1; -1; 2)$ . Điểm  $M$  nằm trên trục  $Ox$  và cách đều hai điểm  $A, B$  có tọa độ là

- A.**  $(0; -2; 0)$ .                      **B.**  $(1; 0; 0)$ .                      **C.**  $(0; 1; 1)$ .                      **D.**  $(-1; 0; 0)$ .

**Lời giải:**

Gọi điểm  $M(x; 0; 0)$  thuộc  $Ox$ , khi đó theo giả thiết ta có  $MA = MB$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + 0^2 + (0 + 1)^2 = (x + 1)^2 + (0 + 1)^2 + (0 - 2)^2. \text{ Suy ra } M(-1; 0; 0).$$

**Câu 81:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 3; 4)$  và  $B(1; 0; 1)$ . Điểm  $M$  nằm trên trục  $Oz$  và cách đều hai điểm  $A, B$  có tọa độ là

- A.**  $(0; 0; 4)$ .                      **B.**  $(2; 0; 0)$ .                      **C.**  $(0; 0; 2)$ .                      **D.**  $(0; 4; 0)$ .

**Lời giải:**

Do điểm  $M$  nằm trên trục  $Oz$  nên  $M(0; 0; z)$ .

Mặt khác điểm  $M$  cách đều hai điểm  $A, B$

$$\Rightarrow MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - 3)^2 + (z - 4)^2} = \sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - 0)^2 + (z - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 10 + (z - 4)^2 = 1 + (z - 1)^2 \Leftrightarrow z = 4.$$

Vậy  $M(0; 0; 4)$ .

**Câu 82:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $B(0; 3; 1)$ ,  $C(-3; 6; 4)$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên đoạn  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Tính tọa độ điểm  $M$ .

- A.**  $(-1; 4; -2)$ .                      **B.**  $(-1; 4; 2)$ .                      **C.**  $(1; -4; -2)$ .                      **D.**  $(-1; -4; 2)$ .

**Lời giải:**

Giả sử  $M(x; y; z)$ . Vì  $M$  là điểm nằm trên đoạn  $BC$  thỏa  $MC = 2MB$  nên  $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ .

$$\text{Hay } \begin{cases} x_C - x_M = -2 & x_B - x_M \\ y_C - y_M = -2 & y_B - y_M \\ z_C - z_M = -2 & z_B - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{2x_B + x_C}{3} \\ y_M = \frac{2y_B + y_C}{3} \\ z_M = \frac{2z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = 4 \\ z_M = 2 \end{cases}.$$

Vậy  $M(-1; 4; 2)$ .

**Câu 83:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(-2; -4; 9)$ . Điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$ . Độ dài đoạn thẳng  $OM$  là

- A. 5.      B. 3.      C.  $\sqrt{54}$ .      D.  $\sqrt{17}$ .

**Lời giải:**



Đặt  $M(x; y; z)$ , khi đó:  $\overrightarrow{MA} = (1-x; 2-y; 3-z)$  và  $\overrightarrow{MB} = (-2-x; -4-y; 9-z)$

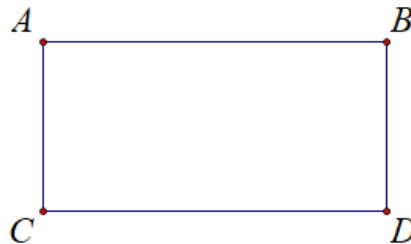
$$\text{Ta có: } MA = 2MB \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = -2(-2-x) \\ 2-y = -2(-4-y) \\ 3-z = -2(9-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 7 \end{cases} \Rightarrow M(-1; -2; 7).$$

Khi đó:  $\overrightarrow{OM} = (-1; -2; 7)$ . Vậy  $OM = \sqrt{54}$ .

**Câu 84:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(2; 3; 2)$ ,  $C(3; -1; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho bốn điểm  $A, B, C, D$  lập thành một hình chữ nhật.

- A.  $D(4; 3; 4)$ .      B.  $D(4; -1; 4)$ .      C.  $D(2; -3; 2)$ .      D.  $D(4; 1; 4)$ .

**Lời giải:**



Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 1)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (2; -2; 2)$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1.2 + 2.(-2) + 1.2 = 0$  nên  $AB \perp AC$

Điều này cho thấy  $A, B, C$  không thẳng hàng và hình chữ nhật tạo ra phải là  $ABDC$ .

Gọi  $D(x; y; z)$ , ta có  $\overrightarrow{CD} = (x-3; y+1; z-3)$ .

$$ABDC \text{ là hình chữ nhật khi và chỉ khi } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=1 \\ y+1=2 \\ z-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow D(4; 1; 4).$$

Vậy  $D(4; 1; 4)$ .

**Câu 85:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình chữ nhật  $ABCD$  trong đó  $A(-1; 1; 2)$ ,  $B(2; 0; 3)$ ,  $C \in Ox$ ,  $D(a; b; c)$ . Tính giá trị biểu thức  $P = a + b + c$ .

A. -1.

B. 1.

C. 2.

**D. 0.**

**Lời giải:**

Gọi  $C(a;0;0)$

Ta có  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (3; -1; 1)$

Ta có  $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 3(a-2) + 1 \cdot (-3) = 0 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow C(3;0;0)$

Mặt khác  $\overrightarrow{DC} = (3; -1; 1) \Rightarrow D(0;1;-1) \Rightarrow P = 0$ .

**Câu 86:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2; -1; 5)$ ,  $B(5; -5; 7)$ ;  $M(x; y; 1)$ . Khi  $A, B, M$  thẳng hàng thì giá trị của  $x; y$  là

A.  $x = 4; y = -7$ .

**B.  $x = -4; y = 7$ .**

C.  $x = 4; y = 7$ .

D.  $x = -4; y = -7$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2)$ ;  $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+1; -4)$

Để ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng thì  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}$ .

**Câu 87:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(0; 1; -1)$ ,  $B(1; 2; 0)$ ;  $C(m; n; 0)$ . Tìm  $m, n$  sao cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

A.  $m = 1; n = 1$ .

**B.  $m = 1; n = 2$ .**

C.  $m = 2; n = 1$ .

D.  $m = 2; n = 2$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (m; n-1; 1)$ .

Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} m = k \\ n-1 = k \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}$ .

**Câu 88:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-1; 2; -3)$ ,  $B(1; 0; 2)$ ,  $C(x; y; -2)$  thẳng hàng. Tính tổng  $x + y$ .

A.  $x + y = 17$ .

B.  $x + y = \frac{11}{5}$ .

**C.  $x + y = 1$ .**

D.  $x + y = -\frac{11}{5}$ .

**Lời giải:**

$\overrightarrow{AB} = (2; -2; 5)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (x+1; y-2; 1)$

$A, B, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  cùng phương  $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow x + y = 1$ .

**Câu 89:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 2; -1)$ ,  $B(0; -1; -2)$ . Tọa độ điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng là

A.  $M(4; -5; 0)$ .

**B.  $M(-4; 5; 0)$ .**

C.  $M(4; 5; 0)$ .

D.  $M(-4; -5; 0)$ .

**Lời giải:**

Gọi  $M(a; b; 0) \in (Oxy)$ .

$\overrightarrow{AM} = (a+2; b-2; 1)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -1)$ .

Điều kiện cần và đủ để ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng hay  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$  cùng phương là  $\frac{a+2}{2} = \frac{b-2}{-3} = \frac{1}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases}$ . Vậy  $M(-4; 5; 0)$ .

**Câu 90:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 2; -1)$ ,  $B(0; -1; -2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxy)$  tại điểm  $M$ . Tìm tọa độ điểm  $M$ .

- A.  $M(4; -5; 0)$ . B.  $M(-4; 5; 0)$ . C.  $M(4; 5; 0)$ . D.  $M(-4; -5; 0)$ .

**Lời giải:**

Gọi  $M(a; b; 0) \in (Oxy)$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AM} = (a+2; b-2; 1)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -1)$ .

Điều kiện cần và đủ để  $M \in AB$  là  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$  cùng phương

Suy ra  $\frac{a+2}{2} = \frac{b-2}{-3} = \frac{1}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases}$ . Vậy  $M(-4; 5; 0)$ .

**Câu 91:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 3; 1)$  và  $B(5; 6; 2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$ . Tính tỉ số  $\frac{AM}{BM}$ .

- A.  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$ . B.  $\frac{AM}{BM} = 2$ . C.  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ . D.  $\frac{AM}{BM} = 3$ .

**Lời giải:**

$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$ ;  $\overrightarrow{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}$ ;  $\overrightarrow{AM} = (x+2; -3; z-1)$  và

$A, B, M$  thẳng hàng  $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0)$ .

$\overrightarrow{BM} = (-14; -6; -2)$ ;  $\overrightarrow{AM} = (-7; -3; -1) \Rightarrow BM = 2AB$ .

**Câu 92:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-4; 1; 5)$ ;  $B(1; 5; -3)$ . Gọi  $C$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(Oyz)$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.  $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ . B.  $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{BC}$ . C.  $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{BC}$ . D.  $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải:**

Gọi  $C(0; a; b)$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(Oyz)$ . Khi đó  $A; B; C$  thẳng hàng hay  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương.

Lại có  $\overrightarrow{AB} = (5; 4; -8)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (4; a-1; b-5)$  nên  $\frac{4}{5} = \frac{a-1}{4} = \frac{b-5}{-8} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{21}{5} \\ b = -\frac{7}{5} \end{cases}$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (5; 4; -8) \\ \overrightarrow{AC} = \left(4; \frac{16}{5}; -\frac{32}{5}\right) \text{ nên } \overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BC} = \left(-1; -\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right) \end{cases}$$

**Câu 93:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-4; 7; 5)$ . Tọa độ chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$  là

- A.  $(-2; 11; 1)$ .      B.  $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$ .      C.  $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .      D.  $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$ .

**Lời giải:**

Ta có  $BA = \sqrt{26}$ ;  $BC = 2\sqrt{26}$ .

Gọi  $D$  là chân đường phân giác trong góc  $B$  ta có  $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2DA$ .

$$\text{Vì } D \text{ là chân đường phân giác trong nên } 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_D = \frac{2x_A + x_C}{3} = -\frac{2}{3} \\ y_D = \frac{2y_A + y_C}{3} = \frac{11}{3} \\ z_D = \frac{2z_A + z_C}{3} = 1 \end{cases}$$

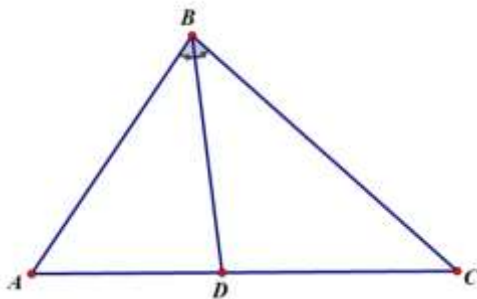
Vậy  $D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$ .

**Câu 94:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$ , có  $A(1; 3; -1)$ ;  $B(-1; 1; -1)$ ,  $C(3; -3; -1)$ . Tọa độ chân đường phân giác trong của góc  $B$  là

- A.  $\left(\frac{5}{3}; 1; -1\right)$ .      B.  $\left(1; \frac{5}{3}; -1\right)$ .      C.  $(2; -1; -1)$ .      D.  $(3; -1; -1)$ .

**Lời giải:**

Gọi  $D(x; y; z)$  là chân đường phân giác trong của góc  $B$ .



Ta có  $\overrightarrow{BA} = (2; 2; 0) \Rightarrow BA = 2\sqrt{2}$ ;  $\overrightarrow{BC} = (4; -4; 0) \Rightarrow BC = 4\sqrt{2}$ . Do đó  $\frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$ .

Theo tính chất đường phân giác trong của tam giác ta có:  $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Từ đó suy ra } \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(3-x) \\ 3-y = -\frac{1}{2}(-3-y) \\ -1-z = -\frac{1}{2}(-1-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}.$$

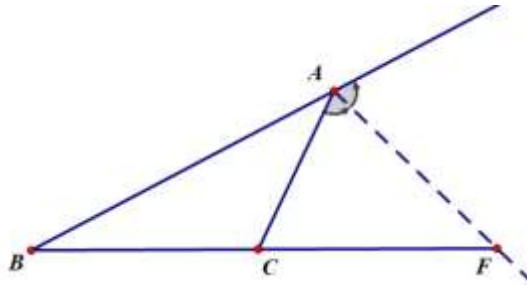
Vậy tọa độ chân đường phân giác trong của góc  $B$  là  $\left(\frac{5}{3}; 1; -1\right)$ .

**Câu 95:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$ , có  $A(0; -4; 0)$ ;  $B(-5; 6; 0)$ ,  $C(3; 2; 0)$ . Tọa độ chân đường phân giác ngoài của góc  $A$  là

**A.**  $(15; -4; 0)$ .      **B.**  $(12; 1; 0)$ .      **C.**  $(-3; 12; 0)$ .      **D.**  $(3; 1; 1)$ .

**Lời giải:**

Gọi  $F(x; y; z)$  là chân đường phân giác ngoài của góc  $A$ .



Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-5; 10; 0) \Rightarrow AB = 5\sqrt{5}$ ;  $\overrightarrow{AC} = (3; 6; 0) \Rightarrow AC = 3\sqrt{5}$ . Do đó  $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$ .

Theo tính chất đường phân giác ngoài của tam giác ta có:  $\frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$ .

$$\text{Từ đó suy ra } \overrightarrow{FB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{FC} \Leftrightarrow \begin{cases} -5-x = \frac{5}{3}(3-x) \\ 6-y = \frac{5}{3}(2-y) \\ -z = \frac{5}{3}(-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = -4 \\ z = 0 \end{cases}.$$

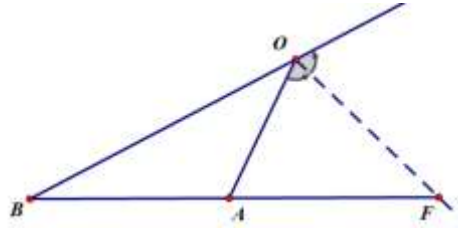
Vậy tọa độ chân đường phân giác ngoài của góc  $A$  là  $(15; -4; 0)$ .

**Câu 96:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $OAB$ , có  $O$  là gốc tọa độ,  $A(0; 2; 1)$ ;  $B(0; 4; -2)$ . Tọa độ chân đường phân giác ngoài của góc  $O$  là

**A.**  $(0; 0; 4)$ .      **B.**  $(2; 1; 0)$ .      **C.**  $(0; 1; 2)$ .      **D.**  $(3; 0; 1)$ .

**Lời giải:**

Gọi  $F(x; y; z)$  là chân đường phân giác ngoài của góc  $A$ .



Ta có  $\vec{OA} = (0; 2; 1) \Rightarrow OA = \sqrt{5}$ ;  $\vec{OB} = (0; 4; -2) \Rightarrow OB = 2\sqrt{5}$ .

Theo tính chất đường phân giác ngoài của tam giác ta có:  $\frac{FB}{FA} = \frac{OA}{OB} = 2$ .

$$\text{Từ đó suy ra } \vec{FB} = 2\vec{FA} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 2(-x) \\ 4 - y = 2(2 - y) \\ -2 - z = 2(1 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$$

Vậy tọa độ chân đường phân giác ngoài của góc O là  $(0; 0; 4)$ .

**Câu 97:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(0; 1; 1)$ ,  $C(1; 0; -2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  nằm trên mặt phẳng  $Oxz$  sao cho  $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.**  $M\left(\frac{2}{3}; 0; -\frac{1}{6}\right)$ .      **B.**  $M\left(\frac{1}{3}; 0; -\frac{2}{3}\right)$ .      **C.**  $M\left(-\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{6}\right)$ .      **D.**  $M\left(0; \frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right)$ .

**Lời giải:**

Gọi  $I(a; b; c)$  là điểm thỏa mãn  $\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - a + 2(0 - a) + 3(1 - a) = 0 \\ 2 - b + 2(1 - b) + 3(0 - b) = 0 \\ 3 - c + 2(1 - c) + 3(-2 - c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 &= \vec{MI} + \vec{IA}^2 + 2(\vec{MI} + \vec{IB})^2 + 3(\vec{MI} + \vec{IC})^2 \\ &= MI^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + IA^2 + 2MI^2 + 4\vec{MI} \cdot \vec{IB} + 2IB^2 + 3MI^2 + 6\vec{MI} \cdot \vec{IC} + 3IC^2 \\ &= 6MI^2 + 2\vec{MI} \cdot (\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC}) + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 = 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 \end{aligned}$$

Để  $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất thì  $MI$  ngắn nhất.

Mà  $M \in Oxz$  nên  $M$  là hình chiếu vuông góc  $I$  của lên  $Oxz$ . Vậy  $M\left(\frac{2}{3}; 0; -\frac{1}{6}\right)$ .

**Câu 98:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(6; -3; 4)$ ,  $B(a; b; c)$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $AB$  với các mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$ ,  $(Oxz)$  và  $(Oyz)$ . Biết rằng  $M, N, P$  nằm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = MN = NP = PB$ . Giá trị của tổng  $a + b + c$  là

**A.** 17.      **B.** -17.      **C.** -11.      **D.** 11.

**Lời giải:**

Ta có:  $\vec{AB} = (a - 6; b + 3; c - 4)$ .

Vì  $M, N, P$  lần lượt là giao điểm của  $AB$  với các mặt phẳng  $(Oxy), (Oxz)$  và  $(Oyz)$  nên  $M(x_M; y_M; 0), N(x_N; 0; z_N), P(0; y_P; z_P)$ .

Vì  $M, N, P$  nằm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = MN = NP = PB$  nên ta có:

$$\square 4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_M - 6) = a - 6 \\ 4(y_M + 3) = b + 3 \Rightarrow c = -12 \\ 4(0 - 4) = c - 4 \end{cases}$$

$$\square 2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_N - 6) = a - 6 \\ 2(0 + 3) = b + 3 \Rightarrow b = 3 \\ 2(z_N - 4) = c - 4 \end{cases}$$

$$\square \frac{4}{3}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}(0 - 6) = a - 6 \\ \frac{4}{3}(y_P + 3) = b + 3 \Rightarrow a = -2 \\ \frac{4}{3}(z_P - 4) = c - 4 \end{cases}$$

Vậy  $a + b + c = -11$ .

**Câu 99:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1), B(2; 3; 4)$  và  $C(3; 5; -2)$ . Gọi  $I(a; b; c)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Giá trị của  $T = a^2 + b^2 + c^2$  bằng

**A.**  $T = \frac{93}{4}$ .

**B.**  $T = \frac{15}{2}$ .

**C.**  $T = 15$ .

**D.**  $T = \frac{93}{2}$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 5), \overrightarrow{AC} = (2; 3; -1)$ . Vì  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = 0$  nên  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ , do đó

$\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Suy ra  $I$  là trung điểm  $BC$ . Tọa độ  $I\left(\frac{5}{2}; 4; 1\right)$ .

Vậy  $T = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{93}{4}$ .

**Câu 100:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với tọa độ các đỉnh  $A(1; 1; 1), B(4; 1; 1), C(1; 1; 5)$ . Tìm tọa độ điểm  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**A.**  $I(-2; 1; 3)$ .

**B.**  $I(2; -1; 3)$ .

**C.**  $I(2; 1; 2)$ .

**D.**  $I(2; 2; 1)$ .

**Lời giải:**

Ta có  $BC = 5; CA = 4; AB = 3$  suy ra  $\begin{cases} x_I = \frac{BC \cdot x_A + CA \cdot x_B + AB \cdot x_C}{BC + CA + AB} \\ y_I = \frac{BC \cdot y_A + CA \cdot y_B + AB \cdot y_C}{BC + CA + AB} \\ z_I = \frac{BC \cdot z_A + CA \cdot z_B + AB \cdot z_C}{BC + CA + AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = 2 \\ y_I = 1 \\ z_I = 2 \end{cases}$

Vậy  $I(2; 1; 2)$ .

**Câu 101:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2;2;1)$ ,  $B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$ . Biết  $I(a;b;c)$  là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác  $OAB$ . Tính  $S = a + b + c$ .

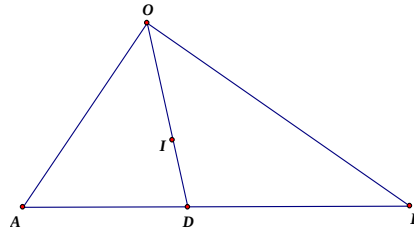
A.  $S = 0$ .

B.  $S = -1$ .

**C.  $S = 2$ .**

D.  $S = 1$ .

**Lời giải:**



Ta có:  $\overrightarrow{OA} = (2;2;1)$ ,  $\overrightarrow{OB} = \left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{16}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ .

Lại có:  $OA = 3$ ,  $OB = 4 \Rightarrow AB = 5$ .

Gọi  $D$  là chân đường phân giác trong góc  $AOB \Rightarrow D$  thuộc đoạn  $AB$ .

Theo tính chất của phân giác trong ta có:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DB} \Rightarrow D = \left(0; \frac{12}{7}; \frac{12}{7}\right).$$

Tam giác  $OAB$  có diện tích  $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 6$ , nửa chu vi  $p = \frac{OA + OB + AB}{2} = 6$

$\Rightarrow r = \frac{S}{p} = 1$  là bán kính đường tròn nội tiếp; chiều cao  $OH = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{12}{5}$ .

Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $OAB \Rightarrow I$  thuộc đoạn  $OD$ .

$$\text{Ta có: } \frac{DI}{DO} = \frac{r}{OH} = \frac{5}{12} \Rightarrow \overrightarrow{DI} = \frac{5}{12}\overrightarrow{DO} \Rightarrow I = (0;1;1) \text{ hay } \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy  $S = a + b + c = 2$ .

**Câu 102:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;-2;2)$ ,  $B(-5;6;4)$  và  $C(0;1;-2)$ . Độ dài đường phân giác trong của góc  $A$  của  $\triangle ABC$  bằng

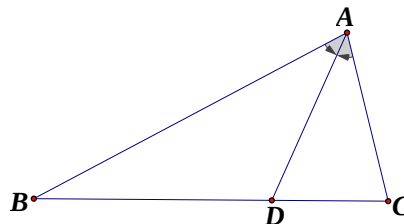
A.  $\frac{3}{2\sqrt{74}}$ .

B.  $\frac{2}{3\sqrt{74}}$ .

**C.  $\frac{2\sqrt{74}}{3}$ .**

D.  $\frac{3\sqrt{74}}{2}$ .

**Lời giải:**



Gọi  $D$  là chân đường phân giác trong của góc  $BAC$ , ta có  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ . Ta có  $AB = 2\sqrt{26}$  ;

$AC = \sqrt{26}$ . Suy ra  $\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{DC}$ . Gọi  $D(x; y; z)$ .

$$\text{Từ } \overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} -5 - x = -2(-x) \\ 6 - y = -2(1 - y) \\ 4 - z = -2(-2 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = \frac{8}{3} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{5}{3}; \frac{8}{3}; 0\right).$$

Vậy  $AD = \frac{2\sqrt{74}}{3}$ .

**Câu 103:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-4; 7; 5)$ . Tọa độ chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$  là

A.  $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$ . B.  $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$ . C.  $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$ . D.  $(-2; 11; 1)$ .

**Lời giải:**

Gọi  $D(x; y; z)$  là chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$ .

Ta có  $AB = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$ ;  $BC = \sqrt{36+64+4} = \sqrt{104}$ .

Ta có  $\frac{AD}{CD} = \frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow CD = 2AD \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-1) = -5 \\ 3(y-2) = 5 \\ 3(z+1) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases}. \text{ Suy ra } D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right).$$

**Câu 104:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-2; 3; 1)$ ,  $B(2; 1; 0)$ ,  $C(-3; -1; 1)$ . Tìm tất cả các điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình thang có đáy  $AD$  và  $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$

A.  $D(8; 7; -1)$ . B.  $\begin{bmatrix} D(-8; -7; 1) \\ D(12; 1; -3) \end{bmatrix}$ . C.  $\begin{bmatrix} D(8; 7; -1) \\ D(-12; -1; 3) \end{bmatrix}$ . D.  $D(-12; -1; 3)$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC).d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC). \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$ .

$\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC).S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC$ .

Mà  $ABCD$  là hình thang có đáy  $AD$  nên  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$  (1).

$\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1)$ .

Từ (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}$ .

Vậy  $D(-12; -1; 3)$ .

**Câu 105:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-1; 4; 2), B(3; 2; 1), C(-2; 0; 2)$ . Tìm tất cả các điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình thang có đáy  $AD$  và diện tích hình thang  $ABCD$  gấp ba lần diện tích tam giác  $ABC$ .

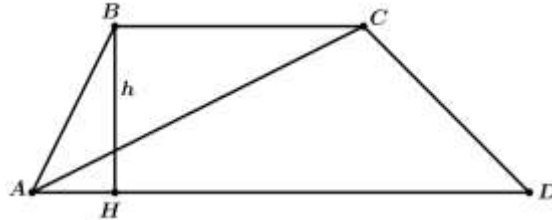
A.  $D(9; 8; 0)$ .

B.  $D(-11; 0; 4)$  và  $D(9; 8; 0)$ .

C.  $D(-11; 0; 4)$ .

D.  $D(11; 0; -4)$  và  $D(-9; -8; 0)$ .

**Lời giải:**



Giả sử  $D(x_D; y_D; z_D)$ . Khi đó:  $\overrightarrow{AD} = (x_D + 1; y_D - 4; z_D - 2)$ ;  $\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1)$ .

$$\text{Do } AD \parallel BC \text{ nên } \overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{BC} \ (t \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -1 - 5t \\ y_D = 4 - 2t \\ z_D = 2 + t \end{cases}$$

Vì diện tích hình thang  $ABCD$  gấp ba lần diện tích tam giác  $ABC$

nên  $\frac{1}{2}h \cdot (BC + AD) = 3 \cdot \frac{1}{2}h \cdot BC$ , với  $h$  là chiều cao của hình thang và cũng chính là chiều cao tam giác  $ABC$  ứng với cạnh  $BC$ .

$$\text{Suy ra, } AD = 2BC \Leftrightarrow (x_D + 1)^2 + (y_D - 4)^2 + (z_D - 2)^2 = 4[(-5)^2 + (-2)^2 + 1^2]$$

$$\Rightarrow (-5t)^2 + (-2t)^2 + t^2 = 4 \cdot 30 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow D(-11; 0; 4) \\ t = -2 \Rightarrow D(9; 8; 0) \end{cases}$$

**Câu 106:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(0; 0; 3), B(0; 0; -1), C(1; 0; -1)$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

A.  $I(1; 0; 2)$ .

B.  $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ .

C.  $I(0; 0; 1)$ .

D.  $I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (0; 0; -4)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (1; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AB$  và  $BC$  vuông góc.

Suy ra  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$ . Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  là trung điểm  $I$  của  $AC$ .

$$I(x; y; z): \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = 0 \\ z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right).$$

**Câu 107:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $E(1; -2; 4)$ ,  $F(1; -2; -3)$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho tổng  $ME + MF$  có giá trị nhỏ nhất. Tìm tọa độ của điểm  $M$ .

- A.  $M(-1; 2; 0)$ .      B.  $M(-1; -2; 0)$ .      **C.  $M(1; -2; 0)$ .**      D.  $M(1; 2; 0)$ .

**Lời giải:**

Hai điểm  $E(1; -2; 4)$ ,  $F(1; -2; -3)$  nằm về hai phía mặt phẳng  $(Oxy)$ .

Vì  $\overrightarrow{EF} = (0; 0; -7) \Rightarrow EF$  vuông góc với  $(Oxy)$ .

Vậy điểm  $M$  thuộc  $(Oxy)$  sao cho tổng  $ME + MF$  có giá trị nhỏ nhất là giao điểm của  $EF$  với  $(Oxy)$ , hay chính là hình chiếu vuông góc của  $E$  trên  $(Oxy)$ .

**Câu 108:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-3; 2; -1)$ ,  $B(-1; 0; -1)$ . Điểm  $M(a; b; 0)$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$  nhỏ nhất. Tính  $a + 2b$ .

- A. 0.**      B. 1.      C. -1.      D. 3.

**Lời giải:**

Ta có  $\overrightarrow{MA}(-3-a; 2-b; -1)$ ,  $\overrightarrow{MB}(-1-a; -b; -1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (-3-a)(-1-a) - b(2-b) + 1 = a^2 + 4a + b^2 - 2b + 4$$

$$= (a+2)^2 + (b-1)^2 - 1 \geq -1 \quad \forall a, b.$$

Do đó,  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$  nhỏ nhất bằng  $-1$ , khi và chỉ khi  $a = -2, b = 1$ . Khi đó,  $a + 2b = 0$ .

**Câu 109:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 1); B(2; -1; 3)$  và điểm  $M(a; b; 0)$  sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất. Giá trị của  $a + b$  là:

- A. -2.      **B. 2.**      C. 1.      D. 3.

**Lời giải:**

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$ .

$$\text{Ta có } MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2$$

Do  $IA^2 + IB^2$  không đổi nên  $MA^2 + MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $MI$  đạt giá trị nhỏ nhất

Mà  $M(a; b; 0) \in (Oxy)$  nên  $MI$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  trên

$(Oxy)$ . Suy ra  $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ .

Vậy  $a + b = 2$ .

## NGÂN HÀNG CÂU HỎI: HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ OXYZ – BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ

Trong quá trình **sưu tầm** và **biên soạn**, nếu tài liệu có sai sót gì thì rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô cùng các em học sinh! Xin chân thành **cảm ơn**!

## NỘI DUNG ĐỀ BÀI

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn.** Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai véc tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ;  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?  
**A.**  $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ . **B.**  $|\vec{a}| = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ .  
**C.**  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$ . **D.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3$ .
- Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , biết biểu diễn của vectơ  $\vec{a}$  qua các vectơ đơn vị là  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{a}$  là  
**A.**  $(2; -5; 1)$ . **B.**  $(2; -1; 5)$ . **C.**  $(2; 1; -5)$ . **D.**  $(1; 2; -5)$ .
- Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 3; 4)$ ,  $B(1; 0; -2)$  và  $C(4; 0; -5)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là  
**A.**  $(6; 3; -3)$ . **B.**  $(2; 1; -1)$ . **C.**  $\left(3; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ . **D.**  $(2; -1; -1)$ .
- Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = (3; -1; 2)$ . Độ dài của vectơ  $\vec{a}$  bằng  
**A.**  $\sqrt{6}$ . **B.**  $\sqrt{14}$ . **C.** 2. **D.** 4.
- Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; -1)$ . Tọa độ hình chiếu vuông góc của  $A$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  là  
**A.**  $(0; 2; -1)$ . **B.**  $(1; 0; 0)$ . **C.**  $(1; 2; 0)$ . **D.**  $(1; 0; -1)$ .
- Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(3; -2; 3)$  và  $B(-1; 2; 5)$ . Trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là  
**A.**  $I(-2; 2; 1)$ . **B.**  $I(2; 0; 8)$ . **C.**  $I(2; -2; -1)$ . **D.**  $I(1; 0; 4)$ .
- Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (2; -3; 1)$ ,  $\vec{b} = (-4; 1; -1)$  và  $\vec{c} = (-2; -7; 1)$ . Biết rằng  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , với  $x, y$  là các số thực. Khi đó,  $x + y$  bằng  
**A.** 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.
- Câu 8:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (1; -1; 2)$ ,  $\vec{b} = (-3; 2; -2)$ ,  $\vec{c} = (-2; 5; 1)$  và  $\vec{d} = (-2; -3; -1)$ . Biết rằng  $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ , với  $x, y, z$  là các số thực. Khi đó,  $x + y + z$  bằng  
**A.** -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.
- Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; 1; -1)$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$  có tọa độ là  
**A.**  $(0; 1; 0)$ . **B.**  $(2; 1; 0)$ . **C.**  $(0; 1; -1)$ . **D.**  $(2; 0; -1)$ .
- Câu 10:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; -3; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; -1)$ ,  $\vec{c} = (3; -1; 5)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ .

- A.  $(10; -2; 13)$ . B.  $(-2; 2; -7)$ . C.  $(-2; -2; 7)$ . D.  $(-2; 2; 7)$ .

**Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (1; -4; 0)$  và  $\vec{v} = (-1; -2; 1)$ . Vectơ  $\vec{u} + 3\vec{v}$  có tọa độ là  
A.  $(-2; -10; 3)$ . B.  $(-2; -6; 3)$ . C.  $(-4; -8; 4)$ . D.  $(-2; -10; -3)$ .

**Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; -2; 3)$ ,  $\vec{b} = (-2; 1; 2)$ . Khi đó, tích vô hướng  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$  bằng  
A. 12. B. 2. C. 10. D. 11.

**Câu 13:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(0; 2; -1)$ ,  $C(-2; 0; 1)$ . Xác định tọa độ của  $\vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$ .  
A.  $\vec{u} = (7; 2; -2)$ . B.  $\vec{u} = (5; 6; -16)$ . C.  $\vec{u} = (3; 6; -8)$ . D.  $\vec{u} = (4; 14; -14)$ .

**Câu 14:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 1; 1)$  và  $\vec{AB} + \vec{AC} = (4; 0; -6)$ . Tọa độ trung điểm  $M$  của  $BC$  là  
A.  $(5; 1; -5)$ . B.  $(3; -1; -7)$ . C.  $(1; -1; -4)$ . D.  $(3; 1; -2)$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

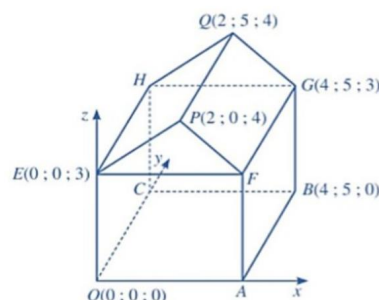
**Câu 15:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{OM} = 2\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$ ,  $\vec{ON} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$  và  $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j}$ .

| Khẳng định |                                                                   | Đúng | Sai |
|------------|-------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là $(4; 1; 1)$ .                       |      |     |
| b)         | Tọa độ của điểm $M$ là $(2; -1; 8)$ .                             |      |     |
| c)         | Tọa độ của vectơ $\vec{MN}$ là $(-1; 3; -11)$ .                   |      |     |
| d)         | Nếu $\vec{MK} = \vec{a}$ thì tọa độ của điểm $K$ là $(6; 0; 8)$ . |      |     |

**Câu 16:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -1; 2)$ ,  $B(2; 0; 3)$ .

| Khẳng định |                                                                       | Đúng | Sai |
|------------|-----------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | $\vec{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ .                          |      |     |
| b)         | $\vec{BA} = (-1; -1; 2)$ .                                            |      |     |
| c)         | $\vec{OA} = (1; -1; 2)$ .                                             |      |     |
| d)         | Tọa độ điểm $C$ để tứ giác $OABC$ là hình bình hành là $C(1; 1; 2)$ . |      |     |

**Câu 17:** Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



| Khẳng định |                                   | Đúng | Sai |
|------------|-----------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ điểm $A$ là $(4;0;0)$ .    |      |     |
| b)         | $\overrightarrow{OQ} = (2;5;4)$ . |      |     |
| c)         | $\overrightarrow{AH} = (4;5;3)$ . |      |     |
| d)         | $C(0;5;0)$ .                      |      |     |

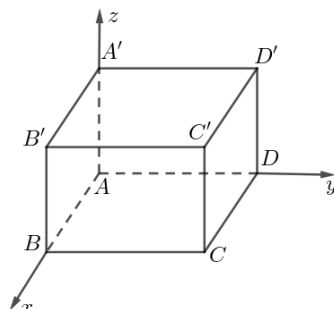
**Câu 18:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1)$  và  $C'(4;5;-5)$ .

| Khẳng định |                                                                                                                   | Đúng | Sai |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ vector $\overrightarrow{AD}$ là $(0;-1;0)$ .                                                               |      |     |
| b)         | Tọa độ điểm $C$ là $(2;-2;2)$ .                                                                                   |      |     |
| c)         | Tọa độ trung điểm của $B'C$ là $\left(3;3;-\frac{3}{2}\right)$ .                                                  |      |     |
| d)         | Tọa độ của một vector vuông góc với cả hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$ là $(2;0;2)$ . |      |     |

**Câu 19:** Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm và luôn giữ nguyên hướng bay. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông  $40(km)$  và về phía Nam  $40(km)$ , đồng thời cách mặt đất  $2(km)$ . Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc  $80(km)$  và về phía Tây  $50(km)$ , đồng thời cách mặt đất  $4(km)$ . Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.

| Khẳng định |                                                                                                              | Đúng | Sai |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Máy bay thứ nhất cách vị trí xuất phát là $6\sqrt{89}(km)$ .                                                 |      |     |
| b)         | Khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai là $10\sqrt{223}(km)$ .                     |      |     |
| c)         | Chiều cao của máy bay thứ ba so với mặt đất là $3(km)$ .                                                     |      |     |
| d)         | Hai máy bay một và hai bay theo hai hướng hợp với nhau một góc có cosin bằng $\frac{2596}{3\sqrt{793524}}$ . |      |     |

**Câu 20:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = 2, AD = 4, AA' = 3$  và hệ trục tọa độ  $Oxyz$  được gán như hình vẽ, ( $O \equiv A$ ).



| Khẳng định |                                                                                                         | Đúng | Sai |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ trọng tâm của tam giác $B'C'D$ là $G\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$ .                  |      |     |
| b)         | $\overrightarrow{D'B} = (2; -4; -3)$                                                                    |      |     |
| c)         | $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D}) = -\frac{6}{\sqrt{145}}$ .                             |      |     |
| d)         | Gọi $M$ là trung điểm của đoạn thẳng $AA'$ , điểm $N(6; 12; 6)$ . Khi đó ba điểm $M, N, C'$ thẳng hàng. |      |     |

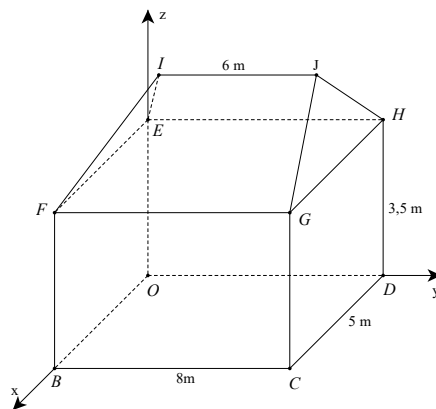
**Câu 21:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1; 2; 3)$ ;  $B(4; 5; 6)$ ;  $C(-3; 2; -1)$  và  $D'(0; -3; 5)$ .  $M$  là trung điểm  $CC'$ .

| Khẳng định |                                                                                                       | Đúng | Sai |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ . |      |     |
| b)         | $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}$ .           |      |     |
| c)         | Tọa độ tâm của hình hộp là $\left(2; 1; \frac{11}{2}\right)$ .                                        |      |     |
| d)         | Tọa độ điểm $C'(9; 4; 10)$ .                                                                          |      |     |

**Câu 22:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(2; 3; 0)$ ,  $B(1; 2; 3)$ ,  $C(-1; 2; 0)$  và  $D(2; 4; 0)$ .

| Khẳng định |                                                                                                                                      | Đúng | Sai |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Trọng tâm của tam giác $ABC$ là điểm $G\left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; 1\right)$ .                                                   |      |     |
| b)         | Góc giữa 2 véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ xấp xỉ bằng $113^\circ$ .                                           |      |     |
| c)         | Gọi $H(x_0; y_0; z_0)$ là trực tâm của tam giác $ACD$ thì $3x_0 - y_0 + 2024z_0 = 6$ .                                               |      |     |
| d)         | Gọi $M$ là điểm sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $M\left(\frac{9}{4}; \frac{11}{4}; \frac{5}{4}\right)$ . |      |     |

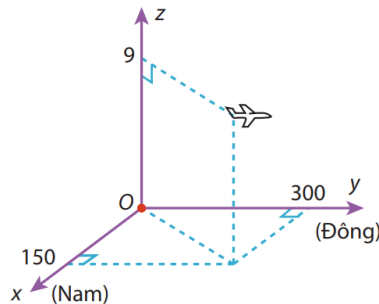
**Câu 23:** Một ngôi nhà có hình dáng và kích thước như hình vẽ dưới đây:



Biết rằng các bức tường và nền nhà đều là các hình chữ nhật; hai bên mái nhà là các hình thang cân  $IJGF$  và  $IJHE$  có diện tích bằng nhau; độ dốc của mái nhà (số đo góc nhị diện  $[J, FG, H]$ ) là  $45^\circ$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là 1m).

| Khẳng định |                                                           | Đúng | Sai |
|------------|-----------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{JI}$ là $(0; 6; 0)$ .   |      |     |
| b)         | Tọa độ điểm $J$ là $\left(\frac{5}{2}; 7; 6\right)$ .     |      |     |
| c)         | Tọa độ của điểm $E$ là $\left(0; 0; \frac{7}{2}\right)$ . |      |     |
| d)         | Tọa độ điểm $G$ là $\left(5; 8; \frac{7}{2}\right)$ .     |      |     |

**Câu 24:** Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9 giờ 30 phút. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị  $km$ . Mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất, O trùng với vị trí trung tâm điều khiển.



| Khẳng định |                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Đúng | Sai |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay đang ở độ cao $9km$ so với mặt đất.                                                                                                                                                                                                             |      |     |
| b)         | Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, tọa độ của máy bay là $(300; 150; 9)$ .                                                                                                                                                                                                                 |      |     |
| c)         | Phi công để máy bay ở chế độ tự động bay thẳng theo hướng đông với vận tốc là $750km/h$ , độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc $10m/s$ . Giả sử vận tốc và hướng gió không thay đổi thì tại thời điểm 10 giờ 30 phút máy bay ở tọa độ $(150; 1086; 9)$ . |      |     |
| d)         | Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay cách trung tâm điều khiển một khoảng (làm tròn đến hàng phần mười) là $335,6km$ .                                                                                                                                                               |      |     |

**Câu 25:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(2; 3; -1), N(-1; 1; 1)$ .

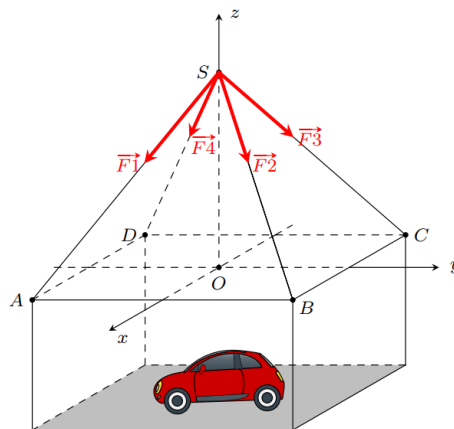
| Khẳng định |                                                                    | Đúng | Sai |
|------------|--------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Hình chiếu của điểm $M$ trên trục $Oy$ có tọa độ là $(-2; 3; 1)$ . |      |     |
| b)         | Gọi $E$ là điểm đối xứng của điểm $M$ qua $N$ . Tọa độ của         |      |     |

|    |                                                                                                                                                          |  |  |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
|    | điểm $E$ là $(-4; -1; 3)$ .                                                                                                                              |  |  |
| c) | Cho $P(1; m-1; 3)$ . Tam giác $MNP$ vuông tại $N$ khi và chỉ khi $m = 1$ .                                                                               |  |  |
| d) | Điểm $I(a; b; c)$ nằm trên mặt phẳng $(Oxy)$ thỏa mãn $T =  3\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN} $ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $2a + b + c = 9$ . |  |  |

**Câu 26:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(4; 0; 2)$ ,  $B(1; -4; -2)$  và  $C(2; 1; 1)$ .

| Khẳng định |                                                                                                                                  | Đúng | Sai |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Diện tích của tam giác $ABC$ bằng $\frac{\sqrt{210}}{2}$ .                                                                       |      |     |
| b)         | $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6$ .                                                                           |      |     |
| c)         | Tọa độ trọng tâm tam giác $ABC$ là $G\left(\frac{7}{3}; 1; \frac{1}{3}\right)$ .                                                 |      |     |
| d)         | Gọi điểm $E(a; b; c)$ là giao điểm của đường thẳng $BC$ với mặt phẳng tọa độ $(Oxz)$ , khi đó $\frac{2a}{c} + b = \frac{9}{2}$ . |      |     |

**Câu 27:** Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$ , với cạnh  $AB = 8m$ ,  $BC = 6m$ . Mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $S$  của một chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $SA, SB, SC, SD$  có độ dài bằng nhau và móc  $S$  cách mặt phẳng  $(ABCD)$   $5m$ . Biết rằng các lực căng  $F_1; F_2; F_3; F_4$  đều có cường độ bằng  $6500N$  và trọng lượng của khung sắt bằng  $2500N$ . Chọn hệ trục tọa độ như trong hình bên (đơn vị độ dài trên mỗi trục là  $1m$ ).



| Khẳng định |                                                                             | Đúng | Sai |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | $\overrightarrow{OB} = (3; 4; 0)$ .                                         |      |     |
| b)         | $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$ .        |      |     |
| c)         | Tọa độ của các đỉnh $A, C, D$ là $A(3; -4; 0), C(-3; 4; 0), D(-4; -3; 0)$ . |      |     |
| d)         | Trọng lượng của chiếc ô tô xấp xỉ là $15885N$ .                             |      |     |

**Câu 28:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 5)$  và điểm  $B(5; -5; 7)$ .

| Khẳng định |                                                                                                     | Đúng | Sai |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ của điểm $A$ là $(2; -1; 5)$ .                                                               |      |     |
| b)         | Gọi $C(a; b; c)$ thỏa mãn $\Delta ABC$ nhận $G(1; 1; 1)$ làm trọng tâm. Khi đó $a + b + c = -4$ .   |      |     |
| c)         | Nếu $A, B, M(x; y; 1)$ thẳng hàng thì tổng $x + y = 3$ .                                            |      |     |
| d)         | Cho $N \in (Oxy)$ để $\Delta ABN$ vuông cân tại $A$ . Tổng hoành độ và tung độ của điểm $N$ bằng 3. |      |     |

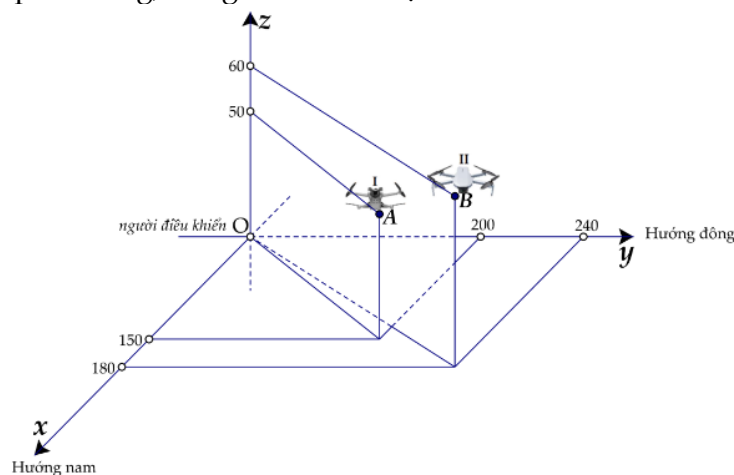
**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.**

**Câu 29:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(2; -1; 3); B(-3; 2; 0); C(-1; 0; 2)$  và  $D(a; b; c)$ . Tính  $P = a^2 - b^2 + c^2$ .

**Kết quả:**

**Câu 30:** Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí  $A$  cách vị trí điều khiển  $150m$  về phía nam và  $200m$  về phía đông, đồng thời cách mặt đất  $50m$ . Flycam II ở vị trí  $B$  cách vị trí điều khiển  $180m$  về phía nam và  $240m$  về phía đông, đồng thời cách mặt đất  $60m$ .



Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc  $O$  là vị trí người điều khiển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất, trục  $Ox$  có hướng trùng với hướng nam, trục  $Oy$  có hướng trùng với hướng đông, trục  $Oz$  vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

**Kết quả:**

**Câu 31:** Trong không gian  $Oxyz$ , (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là 1 m), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm  $A(10; 3; 0)$  và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí  $D$  cách  $A$  4050 m. Biết đường đi của cabin cùng phương với vectơ  $\vec{u}(2; -2; 1)$  và sau 3 phút kể từ khi xuất phát thì cabin đi đến vị trí  $B$  có hoành độ  $x_B = 550$ . Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường  $AD$  là bao nhiêu phút?

**Câu 32:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 2 điểm  $A(2;1;1)$ ,  $B(0;3;-1)$  và điểm  $C$  trên mặt phẳng  $Oxy$  sao cho 3 điểm đó thẳng hàng. Biết  $C(a;b;c)$ . Tính  $a - b + 2025c$ .

**Kết quả:**

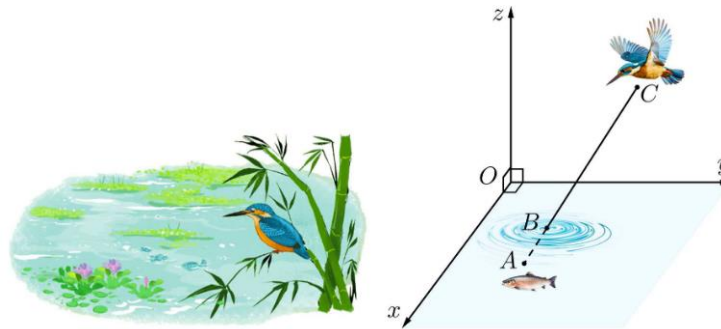
**Câu 33:** Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Anh di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $M(500;200;10)$  đến điểm  $N(800;300;10)$  trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 4 phút tiếp là  $Q(a;b;c)$ . Khi đó  $a + b + c$  bằng bao nhiêu?



**Kết quả:**

**Câu 34:** Với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho  $O$  nằm trên mặt nước, mặt phẳng  $(Oxy)$  là mặt nước, trục  $Oz$  hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí (có hoành độ, tung độ và cao độ là các số thực dương) cách mặt nước  $2m$ , cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $3m$  và  $1m$  phóng thẳng xuống vị trí con cá, biết con cá (có hoành độ và tung độ là các số thực dương) cách mặt nước  $50cm$ , cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $1m$  và  $1,5m$ . Tọa độ điểm  $B$  lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước là  $(a;b;c)$ . Tính  $T = 5a + 15b + 25c$ .



**Kết quả:**

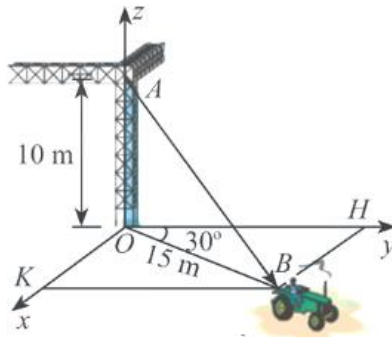
   

**Câu 35:** Trong không gian  $Oxyz$ , một thiết bị âm thanh được phát từ vị trí  $A(1;3;8)$ . Người ta dự định đặt một máy thu tín hiệu trên mặt phẳng  $(Oxz)$ . Biết máy thu đặt ở vị trí  $M(a;b;c)$  sẽ nhận được tín hiệu sớm nhất. Tính giá trị biểu thức  $T = a + 2b + 3c$ .

**Kết quả:**

**Câu 36:** Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp  $AB$  trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình với độ dài đơn vị trên các trục bằng  $1m$ .

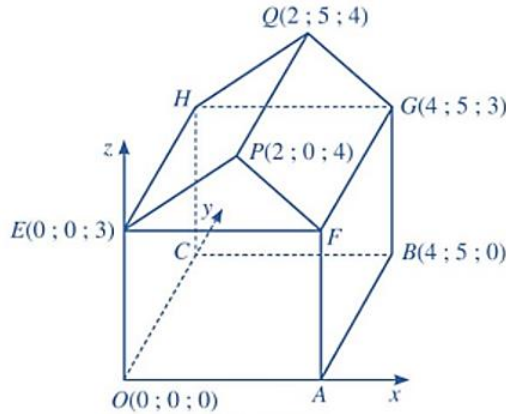


Biết  $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$ , tính  $2a + c$ .

**Kết quả:**

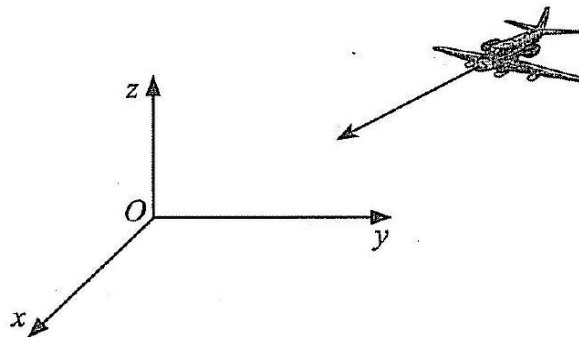
**Câu 37:** Hình sau đây minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Biết  $F(a; b; c)$ . Giá trị của tổng  $a + b + c$  bằng bao nhiêu?



**Kết quả:**

**Câu 38:** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), một chiếc máy bay đang di chuyển với hướng bay không đổi từ điểm  $(-50; 30; 10)$  đến vị trí hạ cánh là  $(2; 3; 0)$ . Hỏi đường bay của máy bay hợp với mặt đất một góc bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



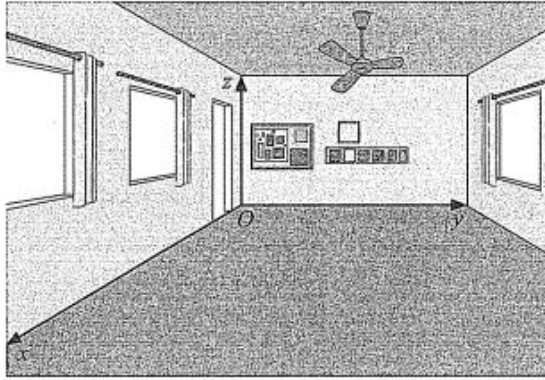
**Kết quả:**

**Câu 39:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  với  $A(-1;3;5)$ ,  $B(2;-3;7)$ ,  $D(-4;1;-2)$ . Hiệu giữa hoành độ với cao độ của điểm  $C$  bằng bao nhiêu?

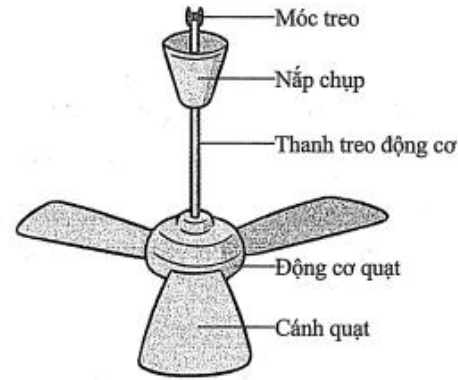
**Kết quả:**

**Câu 40:** Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 10 m ; chiều rộng 7,2 m và chiều cao 3,3 m. Một chiếc quạt trần được treo trên trần nhà tại vị trí chính giữa trần nhà của phòng học như hình sau:



a)



b)

Hình 17

Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc tọa độ  $O$  trùng với một góc phòng và mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sàn như Hình 17a (đơn vị đo lấy theo mét). Biết rằng thanh treo động cơ của quạt có độ dài 0,8 m. Giả sử tọa độ của động cơ chiếc quạt trần là  $I(a;b;c)$ . Khi đó  $a+b+c$  bằng bao nhiêu?

**Kết quả:**

**Câu 41:** Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm trong không gian. Sau một khoảng thời gian, chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 3 km về phía Đông và 2 km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất 0,5 km; chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía Bắc và 1 km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 0,3 km. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai khinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai khinh khí cầu là nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục)

**Kết quả:**

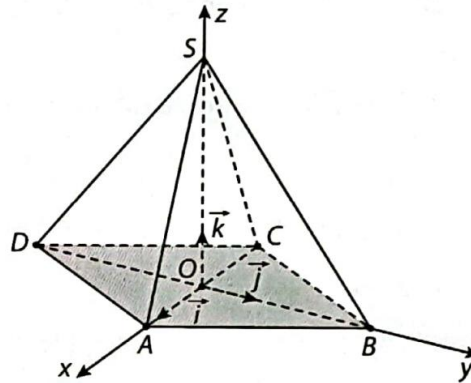
**Câu 42:** Trong không gian  $Oxyz$ , xét mặt phẳng  $(P)$  đi qua hai điểm  $A(2;0;0)$ ,  $M(1;1;1)$  và cắt các tia  $Oy$ ,  $Oz$  lần lượt tại hai điểm  $B, C$  ( $B, C$  khác gốc tọa độ  $O$ ). Diện tích tam giác  $ABC$  nhỏ nhất bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

**Kết quả:**

**Câu 43:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có chiều cao bằng 12 và độ dài cạnh đáy bằng 6. Gọi  $K$  là trung điểm  $AD$  và  $M$  là trung điểm  $SK$ . Điểm  $N$  thuộc cạnh  $SB$  sao cho  $SN = 2NB$ . Đặt hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với tâm của hình vuông  $ABCD$ , tia  $Ox$  chứa  $A$ , tia  $Oy$  chứa  $B$  và tia  $Oz$  chứa  $S$  (minh họa như hình vẽ bên dưới). Gọi tọa độ  $\overrightarrow{MN}$  là  $(x_0; y_0; z_0)$

được tính theo hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như trên. Tính giá trị  $x_0 + y_0 + z_0$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



**Kết quả:**

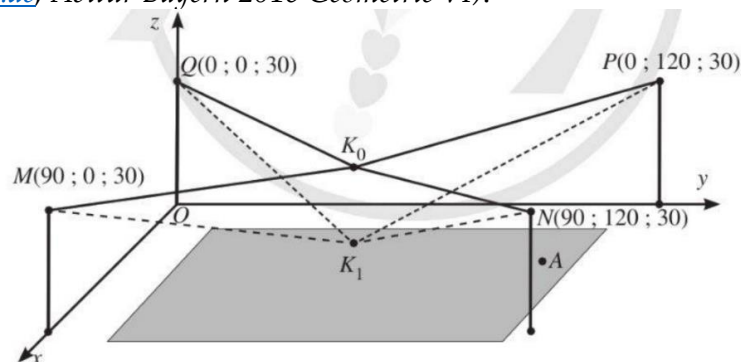
**Câu 44:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có tọa độ các đỉnh  $A(1;0;0)$ ,  $B(0;0;1)$ ,  $C\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$  và  $B'(0;0;2)$ . Gọi  $N$  là trung điểm cạnh  $AA'$  và  $M$  di động trên tia  $Oz$ . Tính diện tích nhỏ nhất của tam giác  $MNC'$ . (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

**Kết quả:**

**Câu 45:** Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn.

Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm  $M(90;0;30)$ ,  $N(90;120;30)$ ,  $P(0;120;30)$ ,  $Q(0;0;30)$  (Hình 15). Giả sử  $K_0$  là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và  $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$ . Để theo dõi quả bóng đến vị trí  $A$ , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm  $K_1$  có cao độ bằng 19 (nguồn: <https://abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI).

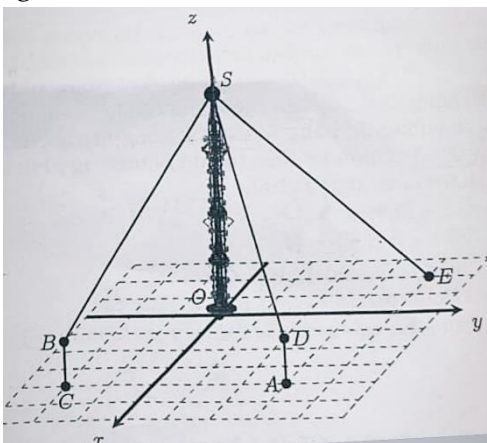


Hình 15

Giả sử tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{K_0K_1}(a; b; c)$ . Tính  $T = a + 2b + 3c$ .

**Kết quả:**

**Câu 46:** Một trụ Anten viễn thông được lắp đặt trên nóc của một toà nhà cao tầng, để trụ Anten được vững chắc và chống chọi được gió bão, các kỹ sư lắp đặt đã chằng trụ Anten này bằng ba sợi dây thép đặc biệt không bị trùng đồng thời được căng thẳng bằng các thiết bị chuyên dụng. Do đặc điểm của mặt sàn, để đảm bảo yếu tố kỹ thuật, các kỹ sư đã xây thêm hai trụ  $BC, AD$ , mỗi trụ cao 1 mét (tính từ mặt sàn), hai dây được móc vào hai đầu trụ, dây thứ ba được móc liền với mặt sàn tại vị trí điểm  $E$ , điểm móc dây trên thân Anten (điểm  $S$ ) cách mặt sàn 5 mét. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình bên (mỗi đơn vị trên trục là 1 mét), với gốc tọa độ trùng với chân trụ Anten, mặt sàn trùng với mặt phẳng  $(Oxy)$  (xem hình minh họa). Biết rằng  $\overrightarrow{DE} = (a; b; c)$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = 2a + b + c$ .



**Kết quả:**

**Câu 47:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-3;0;0)$ ,  $B(0;0;3)$ ,  $C(0;-3;0)$ . Biết điểm  $M(a;b;c)$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ , tính  $a + b + c$ .

**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Câu 48:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2;-3;2)$ ,  $B(3;5;4)$ . Biết điểm  $M$  trên trục  $Oz$  so cho  $MA^2 + MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính  $OM$ .

**Kết quả:**

**Câu 49:** Trong không gian  $Oxyz$  cho hai điểm  $A(2;2;1)$ ,  $B(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3})$ . Biết  $I(a;b;c)$  là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác  $OAB$ . Tính  $S = a + b + c$ .

**Kết quả:**

**Câu 50:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; -1; 2)$ ,  $B(-1; 1; 1)$ ,  $C(-3; -3; 4)$ ,  $D(1; \frac{1}{2}; 1)$ . Điểm  $M$  thay đổi trên  $mp(Oxy)$ . Khi biểu thức  $T = -3\left(\frac{MA}{MD}\right)^2 - 2\left(\frac{MB}{MD}\right)^2 + \left(\frac{MC}{MD}\right)^2$  đạt giá trị lớn nhất thì hoành độ của điểm  $M$  bằng bao nhiêu?

**Kết quả:**

**HẾT**

Huế, 10h20' Ngày 01 tháng 8 năm 2025

LỜI GIẢI CHI TIẾT

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn.** Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai véc tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ;  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.**  $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ .

**B.**  $|\vec{a}| = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ .

**C.**  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$ .

**D.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3$ .

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , biết biểu diễn của vectơ  $\vec{a}$  qua các vectơ đơn vị là  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{a}$  là

**A.**  $(2; -5; 1)$ .

**B.**  $(2; -1; 5)$ .

**C.**  $(2; 1; -5)$ .

**D.**  $(1; 2; -5)$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a}(2; 1; -5)$ .

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 3; 4)$ ,  $B(1; 0; -2)$  và  $C(4; 0; -5)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

**A.**  $(6; 3; -3)$ .

**B.**  $(2; 1; -1)$ .

**C.**  $\left(3; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ .

**D.**  $(2; -1; -1)$ .

**Lời giải:**

$G\left(\frac{1+1+4}{3}; \frac{3+0+0}{3}; \frac{4+(-2)+(-5)}{3}\right) \Rightarrow G(2; 1; -1)$ .

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = (3; -1; 2)$ . Độ dài của vectơ  $\vec{a}$  bằng

**A.**  $\sqrt{6}$ .

**B.**  $\sqrt{14}$ .

**C.** 2.

**D.** 4.

**Lời giải:**

Ta có  $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$ .

**Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; -1)$ . Tọa độ hình chiếu vuông góc của  $A$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  là

**A.**  $(0; 2; -1)$ .

**B.**  $(1; 0; 0)$ .

**C.**  $(1; 2; 0)$ .

**D.**  $(1; 0; -1)$ .

**Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(3; -2; 3)$  và  $B(-1; 2; 5)$ . Trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là

**A.**  $I(-2; 2; 1)$ .

**B.**  $I(2; 0; 8)$ .

**C.**  $I(2; -2; -1)$ .

**D.**  $I(1; 0; 4)$ .

**Lời giải:**

Cho hai điểm  $A(3; -2; 3)$  và  $B(-1; 2; 5)$ .

$$\text{Trung điểm } I \text{ có tọa độ: } \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{(-2) + 2}{2} = 0 \\ \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; 4).$$

**Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (2; -3; 1)$ ,  $\vec{b} = (-4; 1; -1)$  và  $\vec{c} = (-2; -7; 1)$ . Biết rằng  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , với  $x, y$  là các số thực. Khi đó,  $x + y$  bằng

**A.** 5.

**B.** 1.

**C.** 2.

**D.** 4.

**Lời giải:**

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} = (2x - 4y; -3x + y; x - y) \text{ nên } \begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ -3x + y = -7 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x + y = 5.$$

**Câu 8:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (1; -1; 2)$ ,  $\vec{b} = (-3; 2; -2)$ ,  $\vec{c} = (-2; 5; 1)$  và  $\vec{d} = (-2; -3; -1)$ . Biết rằng  $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ , với  $x, y, z$  là các số thực. Khi đó,  $x + y + z$  bằng

**A.** -3.

**B.** -1.

**C.** 1.

**D.** 3.

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = (x - 3y - 2z; -x + 2y + 5z; 2x - 2y + z)$$

$$\text{ nên } \begin{cases} x - 3y - 2z = -2 \\ -x + 2y + 5z = -3 \\ 2x - 2y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 3$$

**Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; 1; -1)$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$  có tọa độ là

**A.**  $(0; 1; 0)$ .

**B.**  $(2; 1; 0)$ .

**C.**  $(0; 1; -1)$ .

**D.**  $(2; 0; -1)$ .

**Lời giải:**

Hình chiếu của  $M(2; 1; -1)$  lên mặt phẳng  $(Oxz)$  là điểm có tọa độ  $(2; 0; -1)$ .

**Câu 10:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; -3; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; -1)$ ,  $\vec{c} = (3; -1; 5)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ .

**A.**  $(10; -2; 13)$ .

**B.**  $(-2; 2; -7)$ .

**C.**  $(-2; -2; 7)$ .

**D.**  $(-2; 2; 7)$ .

**Lời giải:**

$$\text{Có } 2\vec{a} = (4; -6; 6); 3\vec{b} = (0; 6; -3); -2\vec{c} = (-6; 2; -10).$$

$$\text{Khi đó: } \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7).$$

**Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (1; -4; 0)$  và  $\vec{v} = (-1; -2; 1)$ . Vectơ  $\vec{u} + 3\vec{v}$  có tọa độ là

**A.**  $(-2; -10; 3)$ .

**B.**  $(-2; -6; 3)$ .

**C.**  $(-4; -8; 4)$ .

**D.**  $(-2; -10; -3)$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } 3\vec{v} = (-3; -6; 3).$$

Do đó  $\vec{u} + 3\vec{v} = (-2; -10; 3)$ .

**Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai véc tơ  $\vec{a} = (1; -2; 3)$ ,  $\vec{b} = (-2; 1; 2)$ . Khi đó, tích vô hướng  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$  bằng

- A. 12.                                      B. 2.                                      C. 10.                                      **D. 11.**

**Lời giải:**

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1; -1; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = -1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11.$$

**Câu 13:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(0; 2; -1)$ ,  $C(-2; 0; 1)$ . Xác định tọa độ của  $\vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$ .

- A.  $\vec{u} = (7; 2; -2)$ .**                      B.  $\vec{u} = (5; 6; -16)$ .                      C.  $\vec{u} = (3; 6; -8)$ .                      D.  $\vec{u} = (4; 14; -14)$ .

**Lời giải:**

Ta có:

$$+ ) \vec{AB} = (-1; 4; -4) \Rightarrow 2\vec{AB} = (-2; 8; -8);$$

$$+ ) \vec{AC} = (-3; 2; -2) \Rightarrow -3\vec{AC} = (9; -6; 6).$$

$$\text{Suy ra } \vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC} = (7; 2; -2).$$

**Câu 14:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 1; 1)$  và  $\vec{AB} + \vec{AC} = (4; 0; -6)$ . Tọa độ trung điểm  $M$  của  $BC$  là

- A.  $(5; 1; -5)$ .                                      B.  $(3; -1; -7)$ .                                      C.  $(1; -1; -4)$ .                                      **D.  $(3; 1; -2)$ .**

**Lời giải:**

Gọi  $M(x; y; z)$  là trung điểm của  $BC$ .

$$\text{Ta có: } \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = (2; 0; -3). \text{ Nên } \begin{cases} x = 2 + 1 = 3 \\ y = 0 + 1 = 1 \\ z = -3 + 1 = -2 \end{cases} \text{ hay } M(3; 1; -2).$$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

**Câu 15:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{OM} = 2\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$ ,  $\vec{ON} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$  và  $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j}$ .

| Khẳng định |                                                                   | Đúng | Sai |
|------------|-------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là $(4; 1; 1)$ .                       |      |     |
| b)         | Tọa độ của điểm $M$ là $(2; -1; 8)$ .                             |      |     |
| c)         | Tọa độ của vectơ $\vec{MN}$ là $(-1; 3; -11)$ .                   |      |     |
| d)         | Nếu $\vec{MK} = \vec{a}$ thì tọa độ của điểm $K$ là $(6; 0; 8)$ . |      |     |

**Lời giải:**

|        |         |         |         |
|--------|---------|---------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|---------|---------|---------|

a) Sai.

Ta có tọa độ của vectơ  $\vec{a}$  là  $(4; 1; 0)$ .

b) Đúng.

Tọa độ của điểm  $M$  là  $(2; -1; 8)$ .

c) Đúng.

Tọa độ của điểm  $N$  là  $(1; 2; -3)$ .

Tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{MN}$  là  $(1-2; 2+1; -3-8) = (-1; 3; -11)$ .

d) Đúng.

Gọi tọa độ của  $K$  là  $(x; y; z)$ .

Ta có  $\overrightarrow{MK} = (x-2; y+1; z-8)$ .

$$\text{Vì } \overrightarrow{MK} = \vec{a} \text{ nên } \begin{cases} x-2=4 \\ y+1=1 \\ z-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=0 \\ z=8 \end{cases}.$$

Vậy  $K(6; 0; 8)$ .

**Câu 16:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -1; 2)$ ,  $B(2; 0; 3)$ .

| Khẳng định |                                                                       | Đúng | Sai |
|------------|-----------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ .               |      |     |
| b)         | $\overrightarrow{BA} = (-1; -1; 2)$ .                                 |      |     |
| c)         | $\overrightarrow{OA} = (1; -1; 2)$ .                                  |      |     |
| d)         | Tọa độ điểm $C$ để tứ giác $OABC$ là hình bình hành là $C(1; 1; 2)$ . |      |     |

**Lời giải:**

|        |        |         |        |
|--------|--------|---------|--------|
| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|--------|--------|---------|--------|

a) Sai.

$$\overrightarrow{OB} = (2; 0; 3) = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} = 2\vec{i} + 3\vec{k}.$$

b) Sai.

$$\overrightarrow{BA} = (-1; -1; -1).$$

c) Đúng.

$$\overrightarrow{OA} = (1; -1; 2).$$

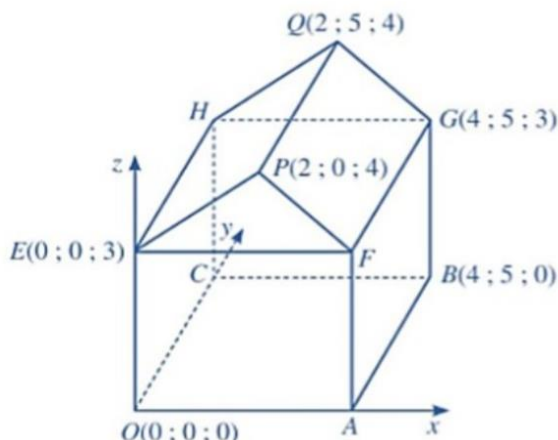
d) Sai.

Gọi  $C(x; y; z)$ . Tứ giác  $OABC$  là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 - x \\ -1 = 0 - y \\ 2 = 3 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Suy ra  $C(1; 1; 1)$ .

**Câu 17:** Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



| Khẳng định |                                     | Đúng | Sai |
|------------|-------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ điểm $A$ là $(4; 0; 0)$ .    |      |     |
| b)         | $\overrightarrow{OQ} = (2; 5; 4)$ . |      |     |
| c)         | $\overrightarrow{AH} = (4; 5; 3)$ . |      |     |
| d)         | $C(0; 5; 0)$ .                      |      |     |

**Lời giải:**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

c) Sai.

Ta có:  $H(0;5;3) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-4;5;3)$ .

**Câu 18:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1)$  và  $C'(4;5;-5)$ .

| Khẳng định |                                                                                                                     | Đúng | Sai |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ vector $\overrightarrow{AD}$ là $(0; -1; 0)$ .                                                               |      |     |
| b)         | Tọa độ điểm $C$ là $(2; -2; 2)$ .                                                                                   |      |     |
| c)         | Tọa độ trung điểm của $B'C$ là $\left(3; 3; -\frac{3}{2}\right)$ .                                                  |      |     |
| d)         | Tọa độ của một vector vuông góc với cả hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$ là $(2; 0; 2)$ . |      |     |

**Lời giải:**

|         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|

b) Sai.

Gọi tọa độ của điểm  $C$  là  $(x_C; y_C; z_C)$ , ta có  $\overrightarrow{BC} = (x_C - 2; y_C - 1; z_C - 2)$ . Trong hình hộp

$ABCD.A'B'C'D'$ , ta có  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ . Suy ra: 
$$\begin{cases} x_C - 2 = 0 \\ y_C - 1 = -1 \\ z_C - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ của điểm  $C(2;0;2)$ .

c) Đúng.

Ta có:  $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 0)$ . Trong hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , ta có  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ . Gọi tọa độ của

điểm  $B'$  là  $(x_{B'}; y_{B'}; z_{B'})$ , Suy ra: 
$$\begin{cases} 4 - x_{B'} = 0 \\ 5 - y_{B'} = -1 \\ -5 - z_{B'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = 4 \\ y_{B'} = 6 \\ z_{B'} = -5 \end{cases}$$
. Gọi tọa độ trung điểm  $I$  của

$B'C$  là  $(x_I; y_I; z_I)$ .

Ta có: 
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_{B'} + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_{B'} + y_C}{2} \\ z_I = \frac{z_{B'} + z_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 3 \\ y_I = 3 \\ z_I = -\frac{3}{2} \end{cases}$$
. Vậy tọa độ của điểm  $I \left( 3; 3; -\frac{3}{2} \right)$ .

d) Sai.

Theo câu b) ta có:  $C(2; 0; 2)$ . Tương tự, ta có:  $D'(3; 4; -6)$ ,  $B'(4; 6; -5)$ . Tọa độ vectơ

$\overrightarrow{AC} = (1; 0; 1)$  và  $\overrightarrow{B'D'} = (-1; -2; -1)$ . Khi đó,  $\vec{u} = [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{B'D'}] = (2; 0; -2)$ .

Vậy tọa độ của một vectơ vuông góc với cả hai vectơ  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{B'D'}$  là  $(2; 0; -2)$ .

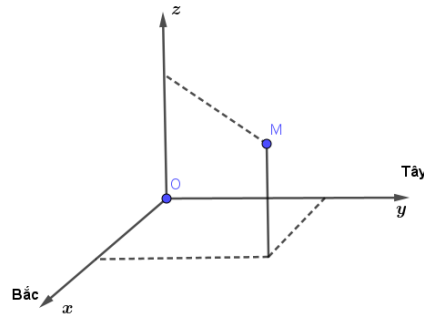
**Câu 19:** Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm và luôn giữ nguyên hướng bay. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông  $40(km)$  và về phía Nam  $40(km)$ , đồng thời cách mặt đất  $2(km)$ . Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc  $80(km)$  và về phía Tây  $50(km)$ , đồng thời cách mặt đất  $4(km)$ . Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.

| Khẳng định |                                                                                                              | Đúng | Sai |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Máy bay thứ nhất cách vị trí xuất phát là $6\sqrt{89}(km)$ .                                                 |      |     |
| b)         | Khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai là $10\sqrt{223}(km)$ .                     |      |     |
| c)         | Chiều cao của máy bay thứ ba so với mặt đất là $3(km)$ .                                                     |      |     |
| d)         | Hai máy bay một và hai bay theo hai hướng hợp với nhau một góc có cosin bằng $\frac{2596}{3\sqrt{793524}}$ . |      |     |

**Lời giải:**

|         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , với gốc  $O$  đặt tại điểm xuất phát, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất, trục  $Ox$  hướng về phía Bắc, trục  $Oy$  hướng về phía Tây, trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ  $A(-40; -40; 2)$ .

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ  $B(80; 50; 4)$ .

a) Đúng.

Máy bay thứ nhất cách vị trí xuất phát là  $d_1 = \sqrt{(-40)^2 + (-40)^2 + 2^2} = 6\sqrt{89}$  (km).

b) Sai.

Khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai là

$$AB = \sqrt{(80 + 40)^2 + (50 + 40)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{22504} \text{ (km)}.$$

c) Đúng.

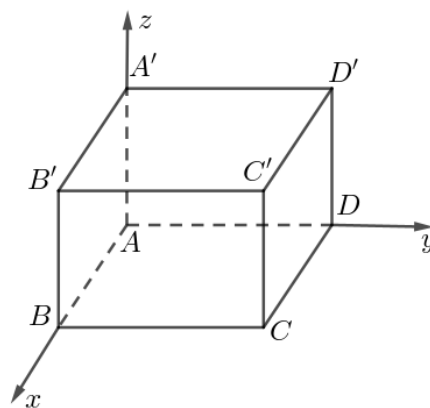
Chiều cao của máy bay thứ ba so với mặt đất là  $h = \frac{z_A + z_B}{2} = 3$  (km).

d) Sai.

Hai máy bay một và hai bay theo hai hướng hợp với nhau một góc  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

$$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{-40 \cdot 80 + (-40) \cdot 50 + 2 \cdot 4}{\sqrt{(-40)^2 + (-40)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{80^2 + 50^2 + 4^2}} = -\frac{2596}{3\sqrt{793524}}.$$

**Câu 20:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = 2$ ,  $AD = 4$ ,  $AA' = 3$  và hệ trục tọa độ  $Oxyz$  được gắn như hình vẽ, ( $O \equiv A$ ).



| Khẳng định |                                                                                        | Đúng | Sai |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ trọng tâm của tam giác $B'C'D$ là $G\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$ . |      |     |
| b)         | $\overrightarrow{D'B} = (2; -4; -3)$                                                   |      |     |

|    |                                                                                                       |  |  |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| c) | $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D}) = -\frac{6}{\sqrt{145}}$ .                           |  |  |
| d) | Gọi $M$ là trung điểm của đoạn thẳng $AA'$ , điểm $N(6;12;6)$ . Khi đó ba điểm $M, N, C'$ thẳng hàng. |  |  |

**Lời giải:**

|        |         |        |         |
|--------|---------|--------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|--------|---------|--------|---------|

a) Sai.

Ta có  $A$  là gốc tọa độ nên  $A(0;0;0)$

$B'(2;0;3); C'(2;4;3); D(0;4;0)$ .

Tọa độ trọng tâm của tam giác  $B'C'D$  là  $G\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; 2\right)$ .

b) Đúng.

Ta có  $D'(0;4;3), B(2;0;0)$  nên  $\overrightarrow{D'B} = (2; -4; -3)$ .

c) Sai.

Ta có  $A(0;0;0), C(2;4;0)$  nên  $\overrightarrow{AC} = (2;4;0)$

$B'(2;0;3), D(0;4;0)$  nên  $\overrightarrow{B'D} = (-2;4;-3)$

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D}) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{B'D}|} = \frac{-4+16}{\sqrt{4+16} \cdot \sqrt{4+16+9}} = \frac{12}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{29}} = \frac{6}{\sqrt{145}}.$$

d) Đúng.

Ta có  $A'(0;0;3), M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AA'$  nên  $M\left(0;0;\frac{3}{2}\right)$

$$\overrightarrow{MN} = \left(6;12;\frac{9}{2}\right), \overrightarrow{MC'} = \left(2;4;\frac{3}{2}\right)$$

Vì  $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MC'}$  nên 3 điểm  $M, N, C'$  thẳng hàng.

**Câu 21:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1;2;3); B(4;5;6); C(-3;2;-1)$  và  $D'(0;-3;5)$ .  $M$  là trung điểm  $CC'$ .

| Khẳng định |                                                                                                       | Đúng | Sai |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ . |      |     |
| b)         | $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}$ .           |      |     |
| c)         | Tọa độ tâm của hình hộp là $\left(2;1;\frac{11}{2}\right)$ .                                          |      |     |
| d)         | Tọa độ điểm $C'(9;4;10)$ .                                                                            |      |     |

**Lời giải:**

|         |         |         |        |
|---------|---------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|---------|---------|---------|--------|

a) Đúng. Ta có  $M$  là trung điểm  $CC'$

$$\text{nên } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}.$$

b) Đúng. Ta có  $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}$ .

c) Đúng. Tâm của hình hộp là trung điểm của đường chéo  $BD'$  nên có tọa độ là  $\left(2; 1; \frac{11}{2}\right)$ .

d) Sai. Tâm của hình hộp là trung điểm của đường chéo  $AC'$  nên  $C'(3; 0; 8)$ .

**Câu 22:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(2; 3; 0)$ ,  $B(1; 2; 3)$ ,  $C(-1; 2; 0)$  và  $D(2; 4; 0)$ .

| Khẳng định |                                                                                                                                      | Đúng | Sai |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Trọng tâm của tam giác $ABC$ là điểm $G\left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; 1\right)$ .                                                   |      |     |
| b)         | Góc giữa 2 véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ xấp xỉ bằng $113^\circ$ .                                           |      |     |
| c)         | Gọi $H(x_0; y_0; z_0)$ là trực tâm của tam giác $ACD$ thì $3x_0 - y_0 + 2024z_0 = 6$ .                                               |      |     |
| d)         | Gọi $M$ là điểm sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $M\left(\frac{9}{4}; \frac{11}{4}; \frac{5}{4}\right)$ . |      |     |

**Lời giải:**

|         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|

a) Đúng.

Trọng tâm của tam giác  $ABC$  là điểm  $G\left(\frac{2+1-1}{3}; \frac{3+2+2}{3}; \frac{0+3+0}{3}\right)$  hay  $G\left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; 1\right)$ .

b) Sai.

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 3)$  và  $\overrightarrow{CD} = (3; 2; 0)$ .

Khi đó  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{-3-2+0}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{5}{\sqrt{143}} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \approx 115^\circ$ .

c) Đúng.

Dễ thấy  $A, C, D$  cùng thuộc  $(Oxy)$  nên trực tâm  $H(x_0; y_0; 0)$ , suy ra  $z_0 = 0$ .

Vì  $\begin{cases} AH \perp CD \\ CH \perp AD \end{cases}$  nên  $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases} (*)$

Ta có  $\overrightarrow{AH} = (x_0 - 2; y_0 - 3; 0)$ ,  $\overrightarrow{CD} = (3; 2; 0)$ ,  $\overrightarrow{CH} = (x_0 + 1; y_0 - 2; 0)$  và  $\overrightarrow{AD} = (0; 1; 0)$ .

Khi đó  $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_0 - 2) + 2(y_0 - 3) = 0 \\ 0 \cdot (x_0 + 1) + 1 \cdot (y_0 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 + 2y_0 = 12 \\ y_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{8}{3} \\ y_0 = 2 \end{cases}$

Vậy  $H\left(\frac{8}{3}; 2; 0\right)$  nên  $3x_0 - y_0 + 2024z_0 = 6$ .

d) Sai.

Cách 1:

Gọi  $I(x; y; z)$  là điểm thỏa mãn:  $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{9}{4}; \frac{11}{4}; \frac{3}{2}\right)$ . Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 &= 3\overline{MA}^2 + 2\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = 3(\overline{MI} + \overline{IA})^2 + 2(\overline{MI} + \overline{IB})^2 - (\overline{MI} + \overline{IC})^2 \\ &= 4\overline{MI}^2 + 2\overline{MI}(3\overline{IA} + 2\overline{IB} - \overline{IC}) + 3\overline{IA}^2 + 2\overline{IB}^2 - \overline{IC}^2 = 4MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 - IC^2. \end{aligned}$$

Do đó  $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất  $\Leftrightarrow MI$  đạt giá trị nhỏ

nhất  $\Leftrightarrow MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$ . Vậy  $M\left(\frac{9}{4}; \frac{11}{4}; \frac{3}{2}\right)$

Cách 2:

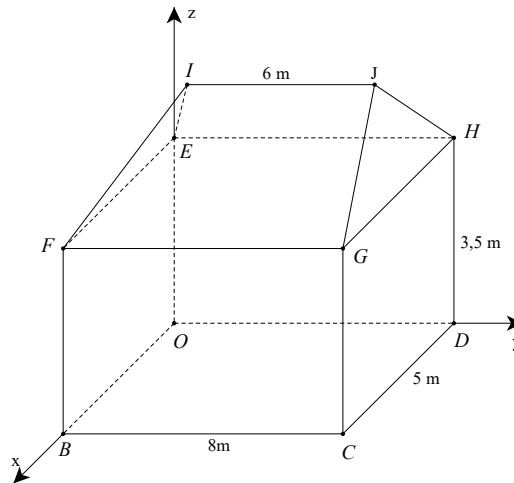
$$\text{Gọi } M(x; y; z) \Rightarrow \begin{cases} \overline{AM} = (x-2; y-3; z) \\ \overline{BM} = (x-1; y-2; z-3) \\ \overline{CM} = (x+1; y-2; z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z)^2 \\ BM^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \\ CM^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z)^2 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 &= 3[(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z)^2] + 2[(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2] \\ &\quad - [(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z)^2] \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 18x - 22y - 12z + 62 = \left(2x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(2y - \frac{11}{2}\right)^2 + (2z-3)^2 + \frac{10}{4} \geq \frac{10}{4}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow x = \frac{9}{4}; y = \frac{11}{4}; z = \frac{3}{2}$ . Vậy  $M\left(\frac{9}{4}; \frac{11}{4}; \frac{3}{2}\right)$ .

**Câu 23:** Một ngôi nhà có hình dáng và kích thước như hình vẽ dưới đây:



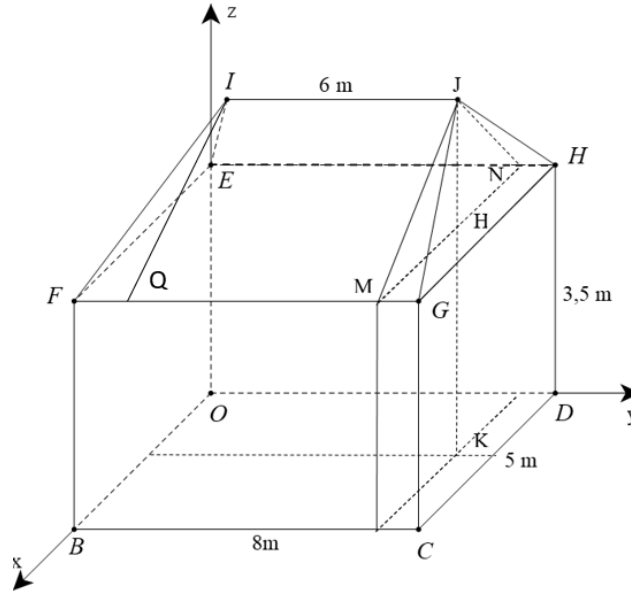
Biết rằng các bức tường và nền nhà đều là các hình chữ nhật; hai bên mái nhà là các hình thang cân  $IJGF$  và  $IJHE$  có diện tích bằng nhau; độ dốc của mái nhà (số đo góc nhị diện  $[J, FG, H]$ ) là  $45^\circ$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là 1m).

| Khẳng định |                                                       | Đúng | Sai |
|------------|-------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ của vectơ $\overline{JI}$ là $(0; 6; 0)$ .     |      |     |
| b)         | Tọa độ điểm $J$ là $\left(\frac{5}{2}; 7; 6\right)$ . |      |     |

|    |                                                           |  |  |
|----|-----------------------------------------------------------|--|--|
| c) | Tọa độ của điểm $E$ là $\left(0; 0; \frac{7}{2}\right)$ . |  |  |
| d) | Tọa độ điểm $G$ là $\left(5; 8; \frac{7}{2}\right)$ .     |  |  |

Lời giải:

|        |         |         |         |
|--------|---------|---------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|---------|---------|---------|



a) Sai.

Ta có

$$JI \parallel OD; O, D \in Oy \Rightarrow \vec{JI} = k\vec{j}, (\vec{j} = (0; 1; 0)), JI = 6, \vec{JI} \nearrow \swarrow \vec{j} \Rightarrow k = -6$$

$$\Rightarrow \vec{JI} = (0; -6; 0)$$

b) Đúng.

Gọi  $M, N, K$  lần lượt là hình chiếu của  $J$  trên  $FG, EH, (Oxy)$ .

Gọi  $Q$  là hình chiếu của  $I$  trên  $FG$ .

Do  $IJGF, IJHE$  là các hình thang cân có cùng diện tích nên chúng bằng nhau.

Ta có

$$JM \perp FG; MN \perp FG, (do MN \parallel GH)$$

$$\Rightarrow (JMN) \perp FG$$

$$\Rightarrow [J, FG, H] = JMN = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta JMN \text{ vuông cân tại } J.$$

Gọi  $H$  là giao điểm của  $JK$  và  $MN$  thì  $H$  là trung điểm  $MN$ .

$$\text{Từ đó } JH = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}CD = \frac{5}{2} = 2,5.$$

$$JK = JH + HK = 2,5 + 3,5 = 6.$$

$$\text{Ngoài ra, do } IJFG \text{ là hình thang cân nên } MG = FQ = \frac{1}{2}(FG - IJ) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Từ đó  $MF = 7$ .

Trên hệ trục  $Oxyz$  đã chọn có  $K\left(\frac{5}{2}; 7; 0\right), J\left(\frac{5}{2}; 7; 6\right)$

c) Đúng.

Điểm  $E$  nằm trên trục  $Oz$  có  $OE = DH = 3,5$  nên tọa độ của điểm  $E$  là  $\left(0; 0; \frac{7}{2}\right)$ .

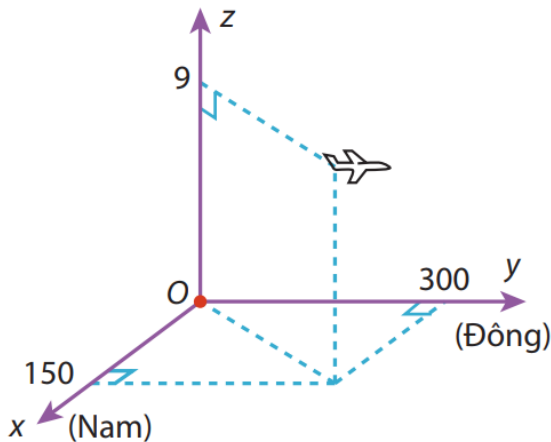
d) Đúng.

Ta có  $C(5; 8; 0)$  là hình chiếu của  $G$  trên mp  $(Oxy)$ .

Điểm  $E\left(0; 0; \frac{7}{2}\right)$  là hình chiếu của  $G$  trên trục  $Oz$ .

Suy ra tọa độ điểm  $G$  là  $\left(5; 8; \frac{7}{2}\right)$ .

**Câu 24:** Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9 giờ 30 phút. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị  $km$ . Mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất,  $O$  trùng với vị trí trung tâm điều khiển.



| Khẳng định |                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Đúng | Sai |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay đang ở độ cao $9km$ so với mặt đất.                                                                                                                                                                                                             |      |     |
| b)         | Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, tọa độ của máy bay là $(300; 150; 9)$ .                                                                                                                                                                                                                 |      |     |
| c)         | Phi công để máy bay ở chế độ tự động bay thẳng theo hướng đông với vận tốc là $750km/h$ , độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc $10m/s$ . Giả sử vận tốc và hướng gió không thay đổi thì tại thời điểm 10 giờ 30 phút máy bay ở tọa độ $(150; 1086; 9)$ . |      |     |
| d)         | Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay cách trung tâm điều khiển một khoảng (làm tròn đến hàng phần mười) là $335,6km$ .                                                                                                                                                               |      |     |

**Lời giải:**

|         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|

a) Đúng.

Do mặt đất là mặt (Oxy). Cao độ của máy bay là 9. Nên độ cao so với mặt đất là 9km

b) Sai.

Tọa độ của máy bay phải là (150;300;9).

c) Đúng.

Vận tốc của máy bay  $750 \text{ km/h}$

Vận tốc của gió  $10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/h}$

Vì máy bay bay cùng hướng với gió nên Vận tốc của máy bay lúc này là  $786 \text{ km/h}$

Tại thời điểm 10 giờ 30 phút thì máy bay được 1 giờ nên quãng đường đi được là  $786.1 = 786 \text{ km}$  theo hướng đông

Nên tung độ của máy bay là  $786 + 300 = 1086$

Vậy tọa độ của máy bay là (150;1086;9).

d) Sai.

Khoảng cách từ máy bay đến trung tâm điều khiển lúc 9 giờ 30 phút là  $\sqrt{150^2 + 300^2 + 9^2} \approx 335,5 (\text{km})$

**Câu 25:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(2;3;-1), N(-1;1;1)$ .

| Khẳng định |                                                                                                                                                        | Đúng | Sai |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Hình chiếu của điểm $M$ trên trục $Oy$ có tọa độ là $(-2;3;1)$ .                                                                                       |      |     |
| b)         | Gọi $E$ là điểm đối xứng của điểm $M$ qua $N$ . Tọa độ của điểm $E$ là $(-4;-1;3)$ .                                                                   |      |     |
| c)         | Cho $P(1;m-1;3)$ . Tam giác $MNP$ vuông tại $N$ khi và chỉ khi $m = 1$ .                                                                               |      |     |
| d)         | Điểm $I(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng $(Oxy)$ thỏa mãn $T =  3\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN} $ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $2a + b + c = 9$ . |      |     |

**Lời giải:**

|        |         |         |        |
|--------|---------|---------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|

a) Sai.

Hình chiếu của điểm  $M$  trên trục  $Oy$  có tọa độ là  $(0;3;0)$ .

b) Đúng.

$$\text{Vì } N \text{ là trung điểm của } ME \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \frac{2+x_E}{2} \\ 1 = \frac{3+y_E}{2} \\ 1 = \frac{-1+z_E}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -4 \\ y_E = -1 \\ z_E = 3 \end{cases} \Rightarrow E(-4;-1;3).$$

c) Đúng.

Ta có  $\overrightarrow{NM} = (3;2;-2); \overrightarrow{NP} = (2;m-2;2)$ .

$\Delta MNP$  vuông tại  $N \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow 3.2 + 2.(m-2) + (-2).2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

d) Sai.

$$\text{Gọi } J(x; y; z) \text{ thỏa mãn } 3\overrightarrow{JM} - \overrightarrow{JN} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2-x) - (-1-x) = 0 \\ 3(3-y) - (1-y) = 0 \\ 3(-1-z) - (1-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Suy ra  $J\left(\frac{7}{2}; 4; -2\right)$ .

$$\text{Khi đó } T = |3\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN}| = |3\overrightarrow{IJ} + 3\overrightarrow{JM} - \overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{JN}| = |2\overrightarrow{IJ}| = 2IJ.$$

$T$  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $I$  là hình chiếu của  $J$  trên  $(Oxy) \Leftrightarrow I\left(\frac{7}{2}; 4; 0\right)$ .

Vậy  $a = \frac{7}{2}; b = 4; c = 0$ . Suy ra  $2a + b + c = 11$ .

**Câu 26:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(4; 0; 2)$ ,  $B(1; -4; -2)$  và  $C(2; 1; 1)$ .

| Khẳng định |                                                                                                                                  | Đúng | Sai |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Diện tích của tam giác $ABC$ bằng $\frac{\sqrt{210}}{2}$ .                                                                       |      |     |
| b)         | $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6$ .                                                                           |      |     |
| c)         | Tọa độ trọng tâm tam giác $ABC$ là $G\left(\frac{7}{3}; 1; \frac{1}{3}\right)$ .                                                 |      |     |
| d)         | Gọi điểm $E(a; b; c)$ là giao điểm của đường thẳng $BC$ với mặt phẳng tọa độ $(Oxz)$ , khi đó $\frac{2a}{c} + b = \frac{9}{2}$ . |      |     |

**Lời giải:**

|         |        |        |        |
|---------|--------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Sai |
|---------|--------|--------|--------|

a) Đúng.

Ta có:  $\overrightarrow{AC}(-2; 1; -1), \overrightarrow{BC}(1; 5; 3)$ .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{\sqrt{210}}{2}.$$

b) Sai.

Ta có  $\overrightarrow{AB}(-3; -4; -4), \overrightarrow{AC}(-2; 1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$ .

c) Sai.

$$\text{Tọa độ trọng tâm } G \text{ của tam giác } ABC \text{ được xác định bởi: } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{7}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = -1 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

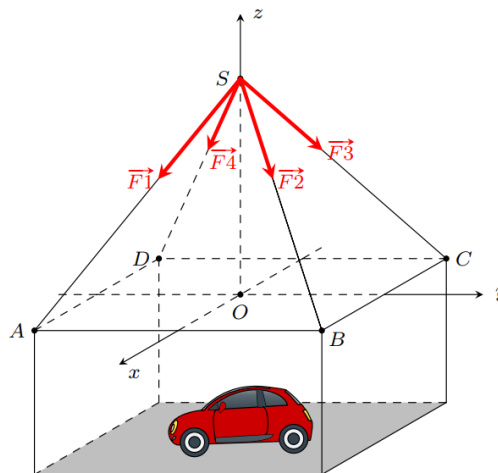
d) Sai.

Vì  $E(a; b; c) \in Oxz \Rightarrow b = 0$ . Ta có  $\overrightarrow{BC} = (1; 5; 3), \overrightarrow{BE} = (a-1; 4; c+2)$ .

$$\text{Vì } B, C, E \text{ thẳng hàng nên: } k \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} \Rightarrow \begin{cases} k = a-1 \\ 5k = 4 \\ 3k = c+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{4}{5} \\ a = \frac{9}{5} \\ c = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Suy ra:  $\frac{2a}{c} + b = 9$ .

**Câu 27:** Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$ , với cạnh  $AB = 8m$ ,  $BC = 6m$ . Mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $S$  của một chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $SA, SB, SC, SD$  có độ dài bằng nhau và móc  $S$  cách mặt phẳng  $(ABCD)$   $5m$ . Biết rằng các lực căng  $F_1; F_2; F_3; F_4$  đều có cường độ bằng  $6500N$  và trọng lượng của khung sắt bằng  $2500N$ . Chọn hệ trục tọa độ như trong hình bên (đơn vị độ dài trên mỗi trục là  $1m$ ).



| Khẳng định |                                                                             | Đúng | Sai |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | $\overrightarrow{OB} = (3; 4; 0)$ .                                         |      |     |
| b)         | $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$ .        |      |     |
| c)         | Tọa độ của các đỉnh $A, C, D$ là $A(3; -4; 0), C(-3; 4; 0), D(-4; -3; 0)$ . |      |     |
| d)         | Trọng lượng của chiếc ô tô xấp xỉ là $15885N$ .                             |      |     |

**Lời giải:**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

a) Đúng.

Vì  $AB = 8m$ ;  $BC = 6m$  nên ta có  $B = (3; 4; 0) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (3; 4; 0)$

b) Đúng.

Xét tam giác  $SBD$  ta có  $O$  là trung điểm của  $BD$  nên  $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$

c) Sai.

Vì  $AB = 8m$ ;  $BC = 6m$  nên ta có  $A(-3; 4; 0), C(-3; 4; 0), D(-3; -4; 0)$ .

d) Đúng.

Ta có:  $SO = 5m; BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 8^2} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \Delta SOB$  vuông cân tại  $O$

$\Rightarrow SBO = 45^\circ \Rightarrow \Delta SBD$  vuông tại  $S$ . Tương tự  $\Delta SAC$  vuông tại  $S$ .

Từ đó ta có  $\overrightarrow{F_{12}}^2 = \overrightarrow{F_1}^2 + \overrightarrow{F_2}^2 = 6500^2 + 6500^2$ ;  $\overrightarrow{F_{34}}^2 = \overrightarrow{F_3}^2 + \overrightarrow{F_4}^2 = 6500^2 + 6500^2$

Với  $\vec{P}$  là trọng lực của ô tô và khung sắt ta có:  $|\vec{P}| = |\vec{F_{12}}| + |\vec{F_{34}}| \approx 18385$  ( vì  $\vec{F_{12}}, \vec{F_{34}}$  cùng hướng)

Vì vậy Trọng lượng ô tô bằng  $18385 - 2500 \approx 115885$

**Câu 28:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 5)$  và điểm  $B(5; -5; 7)$ .

| Khẳng định |                                                                                                     | Đúng | Sai |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ của điểm $A$ là $(2; -1; 5)$ .                                                               |      |     |
| b)         | Gọi $C(a; b; c)$ thỏa mãn $\Delta ABC$ nhận $G(1; 1; 1)$ làm trọng tâm. Khi đó $a + b + c = -4$ .   |      |     |
| c)         | Nếu $A, B, M(x; y; 1)$ thẳng hàng thì tổng $x + y = 3$ .                                            |      |     |
| d)         | Cho $N \in (Oxy)$ để $\Delta ABN$ vuông cân tại $A$ . Tổng hoành độ và tung độ của điểm $N$ bằng 3. |      |     |

**Lời giải:**

|         |         |         |        |
|---------|---------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|---------|---------|---------|--------|

a) Đúng.

Ta có tọa độ của điểm  $A$  là  $(2; -1; 5)$ .

b) Đúng.

$$G \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{2+5+x_C}{3} \\ 1 = \frac{-1-5+y_C}{3} \\ 1 = \frac{5+7+z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -4 \\ y_C = 9 \\ z_C = -9 \end{cases} \Rightarrow C(-4; 9; -9).$$

Suy ra  $a + b + c = -4$ .

c) Đúng.

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2), \overrightarrow{AM} = (x-2; y+1; -4)$ .

$$\text{Ba điểm } A, B, M \text{ thẳng hàng khi và chỉ khi } \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = k \cdot 3 \\ y+1 = k(-4) \\ -4 = k \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \\ k = -2 \end{cases}$$

Suy ra  $x + y = 3$ .

d) Sai.

Ta có  $N \in (Oxy) \Rightarrow N(x; y; 0)$  suy ra  $\overrightarrow{AN} = (x-2; y+1; -5), \overrightarrow{AB} = (3; -4; 2)$

Ta có  $\triangle ABN$  vuông cân tại  $A \Leftrightarrow \begin{cases} AN \perp AB & (1) \\ AN = AB & (2) \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3(x-2) - 4(y+1) - 10 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y = 20 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - 5$$

$$(2) \Leftrightarrow AN^2 = AB^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + 25 = 9 + 16 + 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(\frac{3x}{4} - 4\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + \frac{9x^2}{16} - 6x + 16 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$$

$$\text{Suy ra } y = -\frac{13}{5} \Rightarrow N\left(\frac{16}{5}; -\frac{13}{5}; 0\right). \text{ Vậy } x_N + y_N = \frac{3}{5}.$$

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 29:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(2; -1; 3); B(-3; 2; 0); C(-1; 0; 2)$  và  $D(a; b; c)$ . Tính  $P = a^2 - b^2 + c^2$ .

**Kết quả:**

**Lời giải:**

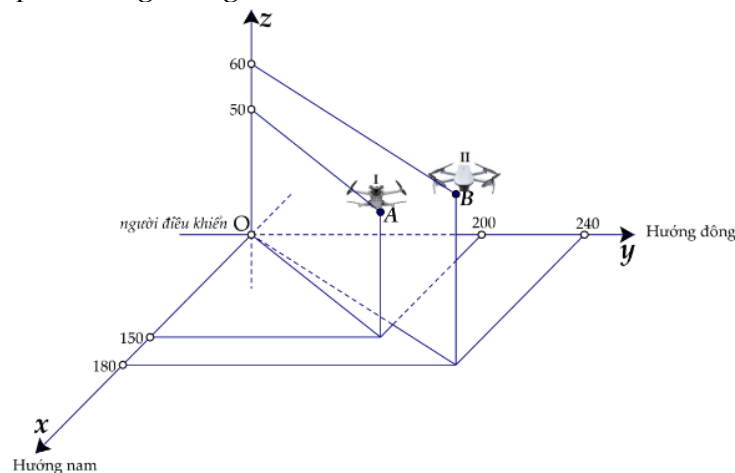
**Đáp án: 32.**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-5; 3; -3), \overrightarrow{DC} = (-1-a; -b; 2-c)$ .

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-a = -5 \\ -b = 3 \\ 2-c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \\ c = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } P = a^2 - b^2 + c^2 = 16 - 9 + 25 = 32.$$

**Câu 30:** Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển 150m về phía nam và 200m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50m. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển 180m về phía nam và 240m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 60m.



Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc  $O$  là vị trí người điều khiển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất, trục  $Ox$  có hướng trùng với hướng nam, trục  $Oy$  có hướng trùng với hướng đông,

trục  $Oz$  vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Đáp án: 51.**

Tọa độ của flycam  $I$  là  $A(150; 200; 50)$ .

Tọa độ của flycam  $II$  là  $B(180; 240; 60)$ .

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{(180-150)^2 + (240-200)^2 + (60-50)^2} = 10\sqrt{26} \approx 51.$$

Khoảng cách giữa hai flycam  $I$  và  $II$  là  $51m$ .

**Câu 31:** Trong không gian  $Oxyz$ , (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là  $1m$ ), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm  $A(10; 3; 0)$  và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí  $D$  cách  $A$   $4050m$ . Biết đường đi của cabin cùng phương với vector  $\vec{u}(2; -2; 1)$  và sau 3 phút kể từ khi xuất phát thì cabin đi đến vị trí  $B$  có hoành độ  $x_B = 550$ . Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường  $AD$  là bao nhiêu phút?

**Lời giải:**

**Đáp án: 15.**

Giả sử  $B(550; y_0; z_0)$ .

Theo bài ra đường đi của cabin cùng phương với vector  $\vec{u}(2; -2; 1)$  nên ta có  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương với  $\vec{u}$ , khi đó ta có  $\frac{540}{2} = \frac{y_0 - 3}{-2} = \frac{z_0}{1} \Rightarrow B(550; -537; 270) \Rightarrow AB = 810m$ .

Vậy cabin cáp treo chuyển động đều từ  $A$  đến  $B$  với vận tốc  $v_{AB} = \frac{S_{AB}}{t_{AB}} = 270$  (m/phút).

Do đó thời gian cabin cáp treo chuyển động đều từ  $A$  đến  $D$  là  $t_{AD} = \frac{S_{AD}}{v_{AD}} = 15$  (phút).

**Câu 32:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 2 điểm  $A(2; 1; 1)$ ,  $B(0; 3; -1)$  và điểm  $C$  trên mặt phẳng  $Oxy$  sao cho 3 điểm đó thẳng hàng. Biết  $C(a; b; c)$ . Tính  $a - b + 2025c$ .

**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Đáp án: -1.**

Vì  $C$  trên mặt phẳng  $Oxy$  nên  $z_C = 0$  giả sử  $C(x; y; 0)$ , ta có  $\overrightarrow{AB}(-2; 2; -2)$ ,  $\overrightarrow{AC}(x-2; y-1; -1)$

Từ giả thiết ta có  $A, B, C$  thẳng hàng, hay 2 véc tơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương,

$$\longrightarrow \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{-1}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -1 \\ y-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(1; 2; 0) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a - b + 2025c = -1.$$

**Câu 33:** Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Anh di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $M(500;200;10)$  đến điểm  $N(800;300;10)$  trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 4 phút tiếp là  $Q(a;b;c)$ . Khi đó  $a+b+c$  bằng bao nhiêu?



**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Đáp án: 1190**

Gọi  $Q(x;y;z)$  là tọa độ của máy bay sau 4 phút tiếp theo.

Ta có:  $\overrightarrow{MN} = (300;100;0)$ ;  $\overrightarrow{NQ} = (x-800;y-300;z-10)$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{NQ}$  cùng hướng.

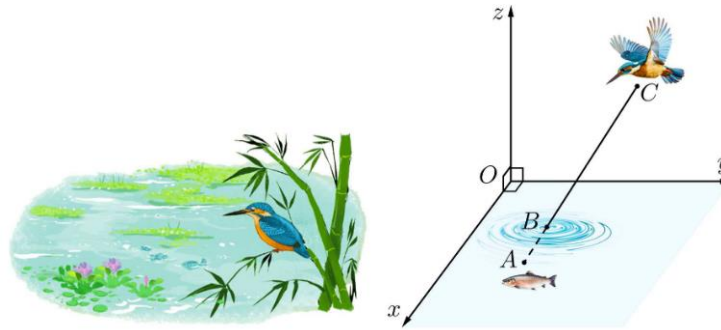
Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ  $M \rightarrow N$  gấp 5 lần thời gian bay từ  $N \rightarrow Q$  nên  $MN = 5NQ$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = 5\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 300 = 5(x-800) \\ 100 = 5(y-300) \\ 0 = 5(z-10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 860 \\ y = 320 \\ z = 10 \end{cases} \Rightarrow Q(860;320;10).$$

Tọa độ của máy bay sau 4 phút tiếp theo là  $Q(860;320;10)$ .

Vậy  $a+b+c = 860+320+10 = 1190$ .

**Câu 34:** Với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho  $O$  nằm trên mặt nước, mặt phẳng  $(Oxy)$  là mặt nước, trục  $Oz$  hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí (có hoành độ, tung độ và cao độ là các số thực dương) cách mặt nước  $2m$ , cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $3m$  và  $1m$  phóng thẳng xuống vị trí con cá, biết con cá (có hoành độ và tung độ là các số thực dương) cách mặt nước  $50cm$ , cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $1m$  và  $1,5m$ . Tọa độ điểm  $B$  lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước là  $(a;b;c)$ . Tính  $T = 5a + 15b + 25c$ .



**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Đáp số: 28.**

Theo bài ra ta có  $C(1;3;2)$ ,  $A\left(\frac{3}{2};1;-\frac{1}{2}\right)$ ,  $B \in (Oxy) \Rightarrow B(a;b;0)$ .

$$\overrightarrow{CA} = \left(\frac{1}{2}; -2; -\frac{5}{2}\right), \overrightarrow{CB} = (a-1; b-3; -2).$$

Ba điểm  $C, B, A$  thẳng hàng nên  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$  cùng phương, do đó ta có:

$$\frac{a-1}{\frac{1}{2}} = \frac{b-3}{-2} = \frac{-2}{-\frac{5}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{5} \\ b = \frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow T = 28.$$

**Câu 35:** Trong không gian  $Oxyz$ , một thiết bị âm thanh được phát từ vị trí  $A(1;3;8)$ . Người ta dự định đặt một máy thu tín hiệu trên mặt phẳng  $(Oxz)$ . Biết máy thu đặt ở vị trí  $M(a;b;c)$  sẽ nhận được tín hiệu sớm nhất. Tính giá trị biểu thức  $T = a + 2b + 3c$ .

**Kết quả:**

**Lời giải:**

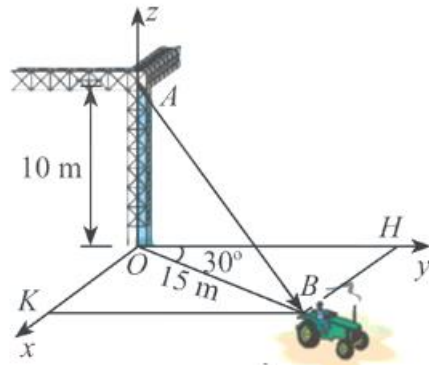
**Đáp số: 25.**

Máy thu tín hiệu trên mặt phẳng, máy thu sẽ nhận được tín hiệu sớm nhất khi  $M(a;b;c)$  là hình chiếu của  $A(1;3;8)$  lên mặt phẳng  $(Oxz)$ .

Khi đó  $M(1;0;8)$ .

$$\text{Vậy } T = a + 2b + 3c = 25.$$

**Câu 36:** Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp  $AB$  trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình với độ dài đơn vị trên các trục bằng  $1m$ .



Biết  $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$ , tính  $2a + c$ .

**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Đáp số: 5.**

Trên hệ trục tọa độ cho trước, theo giả thiết ta suy ra  $A(0; 0; 10)$

Gọi điểm  $B(x; y; 0)$  thì  $H(0; y; 0)$ ;  $K(x; 0; 0)$

Xét tam giác  $OBH$  vuông tại  $H$ , có  $OB = 15$ ,  $\angle BOH = 30^\circ$

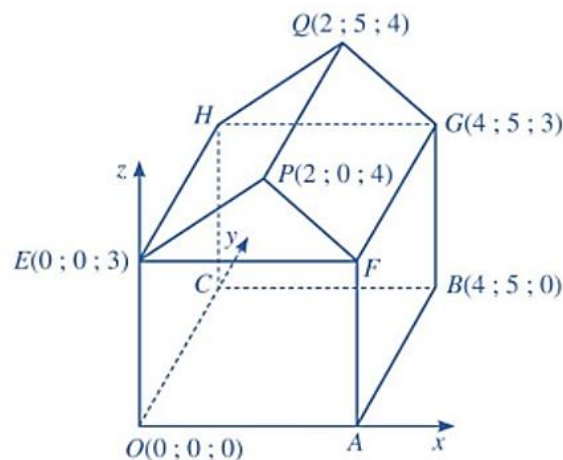
$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{OB} \Rightarrow BH = 7,5 = OK$$

$$\cos 30^\circ = \frac{OH}{OB} \Rightarrow OH = 7,5\sqrt{3}$$

Tức là  $H(0; 7,5\sqrt{3}; 0)$ ;  $K(7,5; 0; 0)$ , suy ra  $B(7,5; 7,5\sqrt{3}; 0)$

$\overrightarrow{AB} = (7,5; 7,5\sqrt{3}; -10)$ . Vậy  $a = 7,5$  và  $c = -10$ . Khi đó  $2a + c = 5$ .

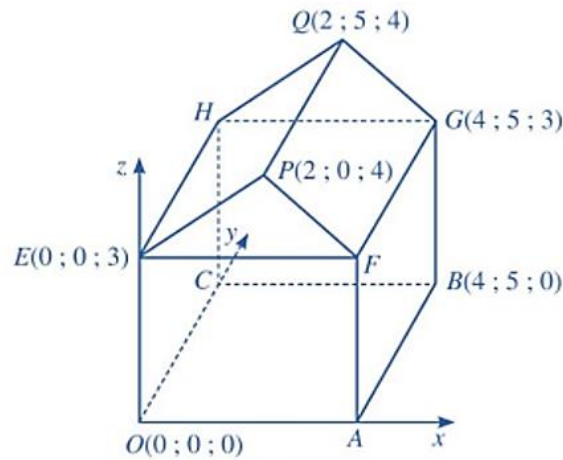
**Câu 37:** Hình sau đây minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Biết  $F(a; b; c)$ . Giá trị của tổng  $a + b + c$  bằng bao nhiêu?



**Kết quả:**

Lời giải:

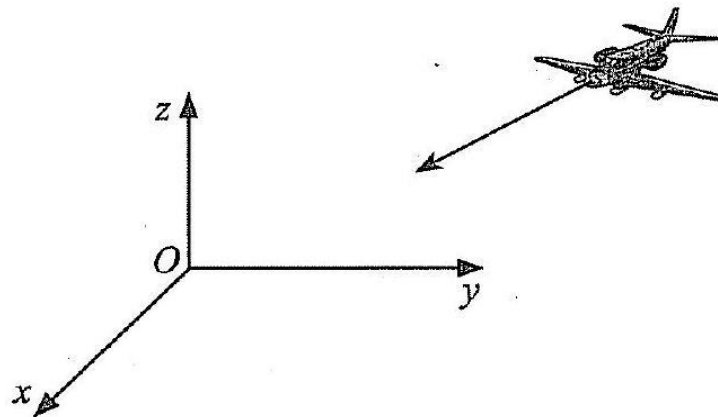
Đáp án: 7.



Vì nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật, nên ta có điểm  $F$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $G(4;5;3)$  lên mặt phẳng  $(xOz)$ . Do đó, tọa độ điểm  $F$  là  $F(4;0;3)$ .

Do đó,  $a = 4; b = 0; c = 3$ . Vậy, giá trị tổng  $a + b + c = 4 + 0 + 3 = 7$ .

**Câu 38:** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), một chiếc máy bay đang di chuyển với hướng bay không đổi từ điểm  $(-50;30;10)$  đến vị trí hạ cánh là  $(2;3;0)$ . Hỏi đường bay của máy bay hợp với mặt đất một góc bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Kết quả:

Lời giải:

Đáp số: 9,69.

Gọi  $A(-50; 30; 10)$ ,  $B(2; 3; 0)$ . Khi đó  $H(-50; 30; 0)$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  và  $ABH$  là góc hợp bởi đường bay với mặt đất.

$$\text{Khi đó } \tan ABH = \frac{AH}{BH} = \frac{10}{\sqrt{(-52)^2 + 27^2}} \Rightarrow ABH \approx 9,69^\circ.$$

**Câu 39:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  với  $A(-1;3;5), B(2;-3;7), D(-4;1;-2)$ . Hiệu giữa hoành độ với cao độ của điểm  $C$  bằng bao nhiêu?

**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Đáp án: -1.**

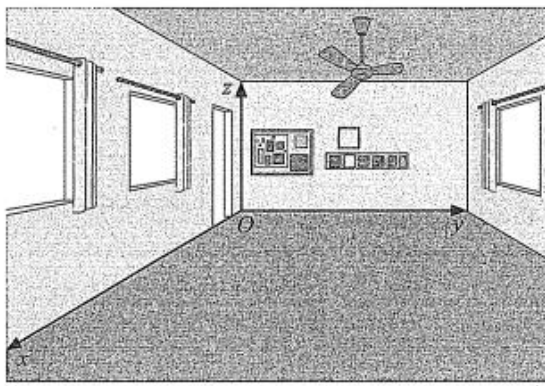
Ta có:  $\overrightarrow{AD} = (-3; -2; -7)$ ;  $\overrightarrow{BC} = (x-2; y+3; z-7)$

$$\text{Để } ABCD \text{ là hình bình hành } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -3 \\ y+3 = -2 \\ z-7 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \\ z = 0 \end{cases}$$

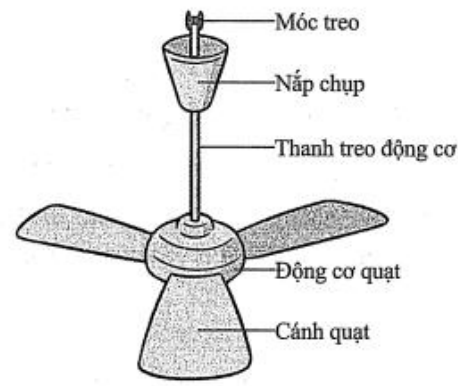
Vậy  $C(-1; -5; 0)$

Hiệu giữa hoành độ với cao độ của điểm  $C$  là:  $x - z = -1 - 0 = -1$ .

**Câu 40:** Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 10 m ; chiều rộng 7,2 m và chiều cao 3,3 m. Một chiếc quạt trần được treo trên trần nhà tại vị trí chính giữa trần nhà của phòng học như hình sau:



a)



b)

Hình 17

Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc tọa độ  $O$  trùng với một góc phòng và mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sàn như Hình 17a (đơn vị đo lấy theo mét). Biết rằng thanh treo động cơ của quạt có độ dài 0,8 m. Giả sử tọa độ của động cơ chiếc quạt trần là  $I(a;b;c)$ . Khi đó  $a+b+c$  bằng bao nhiêu?

**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Đáp số: 11,1.**

Điểm chính giữa của trần nhà (nơi treo móc treo của chiếc quạt trần) có tọa độ là  $S(5;3,6;3,3)$ .

Do thanh treo động cơ của quạt có độ dài 0,8 m nên độ cao của động cơ thấp hơn điểm chính giữa trần nhà là 0,8 m. Do đó tọa độ của động cơ là  $I(5;3,6;2,5)$ .

Suy ra  $a + b + c = 5 + 3,6 + 2,5 = 11,1$ .

**Câu 41:** Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm trong không gian. Sau một khoảng thời gian, chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 3 km về phía Đông và 2 km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất 0,5 km; chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía Bắc và 1 km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 0,3 km. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai khinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai khinh khí cầu là nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục)

**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Đáp số:** 5,1.

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc  $O$  đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất với trục  $Ox$  hướng về phía Nam, trục  $Oy$  hướng về phía Đông và trục  $Oz$  hướng thẳng lên trời (đơn vị đo lấy theo kilômét).

Khi đó  $O(0;0;0)$ ,  $A(2;3;0,5)$ ,  $B(-1;-1;0,3)$  lần lượt là vị trí xuất phát và vị trí của hai khinh khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn tại thời điểm được quan sát.

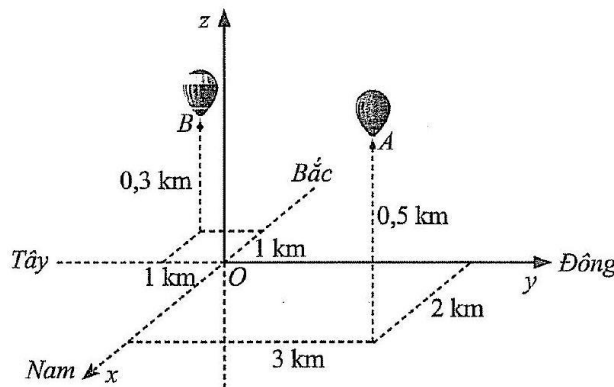
Gọi  $M$  là vị trí đứng của người quan sát.

Gọi  $B'(-1;-1;-0,3)$  là điểm đối xứng với  $B$  qua mặt phẳng  $(Oxy)$ .

Ta có  $MA + MB = MA + MB'$ .

Suy ra  $MA + MB$  nhỏ nhất khi  $MA + MB'$  nhỏ nhất, nghĩa là khi và chỉ khi  $A, B', M$  thẳng hàng.

Gọi  $M(x_M; y_M; 0)$ , suy ra



Hình 7

$$\overrightarrow{MA} = (2 - x_M; 3 - y_M; 0,5), \overrightarrow{MB'} = (-1 - x_M; -1 - y_M; -0,3).$$

$A, B', M$  thẳng hàng nên  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB'}$  cùng phương

$$\Rightarrow \frac{-1 - x_M}{2 - x_M} = \frac{-1 - y_M}{3 - y_M} = \frac{-0,3}{0,5} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1}{8} \\ y_M = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}; 0\right).$$

Khi đó:  $\min(MA + MB) = \min(MA + MB') = AB' \approx 5,1 \text{ km}.$

**Câu 42:** Trong không gian  $Oxyz$ , xét mặt phẳng  $(P)$  đi qua hai điểm  $A(2;0;0), M(1;1;1)$  và cắt các tia  $Oy, Oz$  lần lượt tại hai điểm  $B, C$  ( $B, C$  khác gốc tọa độ  $O$ ). Diện tích tam giác  $ABC$  nhỏ nhất bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Đáp số:** 9,8.

Giả sử  $(P)$  cắt các tia  $Oy, Oz$  theo thứ tự tại các điểm  $B(0;b;0), C(0;0;c)$  với  $b, c > 0$ .

Suy ra phương trình mặt phẳng  $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .

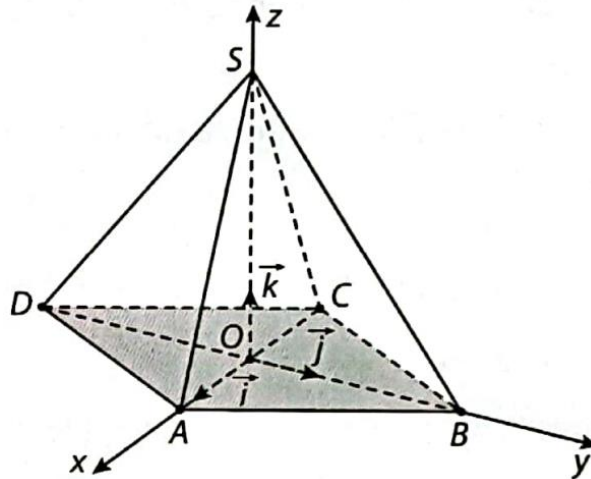
Do  $M(1;1;1) \in (P)$  nên  $\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{1}{bc}} \Rightarrow bc \geq 16$ .

Ta có  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + 4(b^2 + c^2)} \geq \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + 8bc}$ .

Suy ra  $S_{ABC} \geq \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + 8bc} \geq 4\sqrt{6}$ . Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $b = c = 4$ .

Khi đó:  $\min S_{ABC} = 4\sqrt{6} \approx 9,8$

**Câu 43:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có chiều cao bằng 12 và độ dài cạnh đáy bằng 6. Gọi  $K$  là trung điểm  $AD$  và  $M$  là trung điểm  $SK$ . Điểm  $N$  thuộc cạnh  $SB$  sao cho  $SN = 2NB$ . Đặt hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với tâm của hình vuông  $ABCD$ , tia  $Ox$  chứa  $A$ , tia  $Oy$  chứa  $B$  và tia  $Oz$  chứa  $S$  (minh họa như hình vẽ bên dưới). Gọi tọa độ  $\overrightarrow{MN}$  là  $(x_0; y_0; z_0)$  được tính theo hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như trên. Tính giá trị  $x_0 + y_0 + z_0$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Đáp số:** 0,8.

Theo hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có tọa độ các điểm:

$A(3\sqrt{2}; 0; 0); B(0; 3\sqrt{2}; 0); C(-3\sqrt{2}; 0; 0); D(0; -3\sqrt{2}; 0); S(0; 0; 12)$ .

Từ đó ta có  $K\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right); M\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}; -\frac{3\sqrt{2}}{4}; 6\right)$ .

Do  $N$  thuộc cạnh  $SB$  sao cho  $SN = 2NB$  nên  $\overrightarrow{SN} = 2\overrightarrow{NB} \Rightarrow N(0; 2\sqrt{2}; 4)$ .

Vậy  $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}; \frac{11\sqrt{2}}{4}; -2\right) \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 \approx 0,8$ .

**Câu 44:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có tọa độ các đỉnh  $A(1;0;0)$ ,  $B(0;0;1)$ ,  $C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$  và  $B'(0;0;2)$ . Gọi  $N$  là trung điểm cạnh  $AA'$  và  $M$  di động trên tia  $Oz$ . Tính diện tích nhỏ nhất của tam giác  $MNC'$ . (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Đáp số:** 0,48.

Theo giả thiết, ta có  $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow C'\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$ .

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow A'(1;0;1)$ , do  $N$  là trung điểm của cạnh  $AA'$  nên  $N\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$ .

Do  $M$  di động trên tia  $Oz$  nên  $M(0;0;t)$ , ( $t \geq 0$ ).

Ta có  $\overrightarrow{NC'} = \left(\frac{-1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{NM} = \left(-1; 0; \frac{2t-1}{2}\right)$ .

$[\overrightarrow{NC'}, \overrightarrow{NM}] = \left(\frac{(2t-1)\sqrt{3}}{4}; \frac{2t-3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Vì vậy

$$S_{MNC'} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{NC'}, \overrightarrow{NM}] \right| = \frac{\sqrt{3(2t-1)^2 + (2t-3)^2 + 12}}{8} = \frac{\sqrt{16t^2 - 24t + 24}}{8} = \frac{\sqrt{(4t-3)^2 + 15}}{8} \geq \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

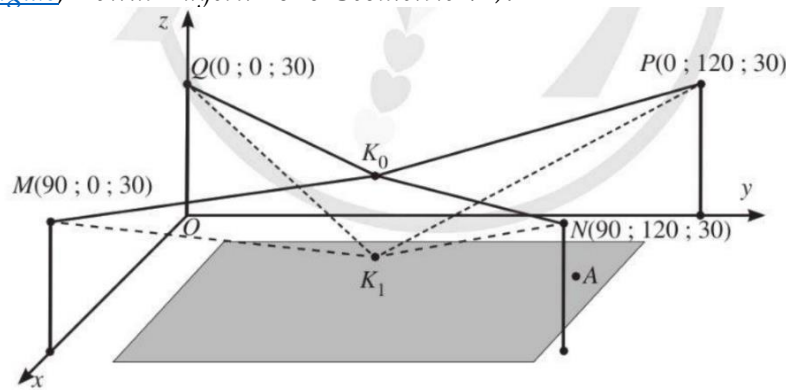
Suy ra  $\min S_{\Delta MNC'} = \frac{\sqrt{15}}{8}$  khi  $t = \frac{3}{4}$ .

Đáp số  $\min S_{\Delta MNC'} \approx 0,48$ .

**Câu 45:** Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn.

Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm  $M(90;0;30)$ ,  $N(90;120;30)$ ,  $P(0;120;30)$ ,  $Q(0;0;30)$  (Hình 15). Giả sử  $K_0$  là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và  $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$ . Để theo dõi quả bóng đến vị trí  $A$ ,

camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm  $K_1$  có cao độ bằng 19 (nguồn: <https://abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI).



Hình 15

Giả sử tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{K_0K_1}(a; b; c)$ . Tính  $T = a + 2b + 3c$ .

**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Đáp số: -18.**

Gọi  $I(x_I; y_I; z_I)$  là tâm của hình chữ nhật  $MNPQ$ .

Ta có  $\overrightarrow{MI} = (x_I - 90; y_I - 0; z_I - 30)$ ,  $\overrightarrow{IP} = (0 - x_I; 120 - y_I; 30 - z_I)$ .

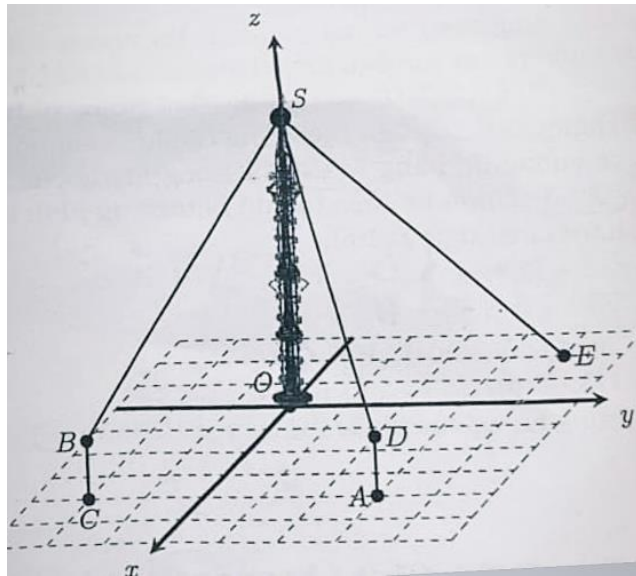
$I$  là trung điểm của  $MP$  khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} x_I - 90 = 0 - x_I \\ y_I - 0 = 120 - y_I \\ z_I - 30 = 30 - z_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 45 \\ y_I = 60 \\ z_I = 30 \end{cases} \Rightarrow \text{Tọa độ điểm}$$

$I(45; 60; 30)$ .

Các điểm  $I, K_0, K_1$  nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(Oxy)$ . Mà  $K_0$  có cao độ bằng 25 nên  $K_0(45; 60; 25)$ ;  $K_1$  có cao độ bằng 19 nên  $K_1(45; 60; 19)$ . Suy ra  $\overrightarrow{K_0K_1} = (0; 0; -6) \Rightarrow a = 0; b = 0; c = -6$ .

Vậy  $T = a + 2b + 3c = -18$ .

**Câu 46:** Một trụ Anten viễn thông được lắp đặt trên nóc của một toà nhà cao tầng, để trụ Anten được vững chắc và chống chọi được gió bão, các kỹ sư lắp đặt đã chằng trụ Anten này bằng ba sợi dây thép đặc biệt không bị trùng đồng thời được căng thẳng bằng các thiết bị chuyên dụng. Do đặc điểm của mặt sàn, để đảm bảo yếu tố kỹ thuật, các kỹ sư đã xây thêm hai trụ  $BC, AD$ , mỗi trụ cao 1 mét (tính từ mặt sàn), hai dây được móc vào hai đầu trụ, dây thứ ba được móc liền với mặt sàn tại vị trí điểm  $E$ , điểm móc dây trên thân Anten (điểm  $S$ ) cách mặt sàn 5 mét. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình bên (mỗi đơn vị trên trục là 1 mét), với gốc tọa độ trùng với chân trụ Anten, mặt sàn trùng với mặt phẳng  $(Oxy)$  (xem hình minh họa). Biết rằng  $\overrightarrow{DE} = (a; b; c)$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = 2a + b + c$ .



## Kết quả:

**Lời giải:**

Đáp án: -12.

Dựa vào hình vẽ, ta xác định được toạ độ các đỉnh:

$$A(4;3;0), D(4;3;1), C(4;-2;0), B(4;-2;1), E(-2;4;0), S(0;0;5).$$

Ta có:  $\overrightarrow{DE} = (-6; 1; -1)$  nên  $a = -6$ ;  $b = 1$ ;  $c = -1$ .

Vậy:  $T = 2a + b + c = 2(-6) + 1 - 1 = -12$ .

**Câu 47:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-3;0;0)$ ,  $B(0;0;3)$ ,  $C(0;-3;0)$ . Biết điểm  $M(a;b;c)$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ , tính  $a+b+c$ .

### Kết quả:

**Lời giải:**

**Đáp án: 0.**

Gọi  $I(a;b;c)$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$  (1)

Ta có  $\overrightarrow{IA}(-3-a; -b; -c)$ ,  $\overrightarrow{IB}(-a; -b; 3-c)$ ,  $\overrightarrow{IC}(-a; 3-b; -c)$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -3-a=0 \\ b-3=0 \\ 3-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=3 \\ c=3 \end{cases} \Leftrightarrow I(-3;3;3).$$

Lúc đó:  $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| = \left| \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} \right| = \left| \overrightarrow{MI} \right| = MI.$

$\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right|$  nhỏ nhất khi chỉ khi  $MI$  nhỏ nhất, hay  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  trên mặt phẳng  $(Oxy) \longrightarrow M(-3; 3; 0) \longrightarrow a = -3; b = 3; c = 0$ .

**Câu 48:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; -3; 2)$ ,  $B(3; 5; 4)$ . Biết điểm  $M$  trên trục  $Oz$  so cho  $MA^2 + MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính  $OM$ .

## Kết quả:

**Lời giải:**

**Đáp án: 3.**

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; 1; 3\right)$ .

Ta có:  $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2$ .

$IA^2 + IB^2$  không đổi nên  $MA^2 + MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $MI$  đạt giá trị nhỏ nhất.

$\Rightarrow M$  là hình chiếu của  $I$  trên trục  $Oz$ .

$\Rightarrow M(0; 0; 3) \rightarrow OM = 3$ .

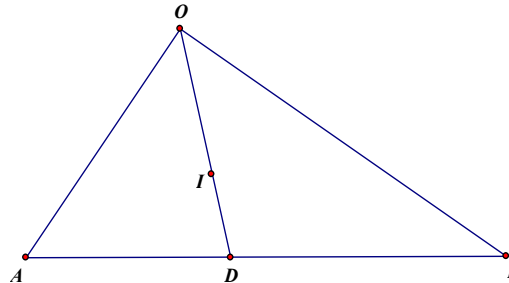
**Câu 49:** Trong không gian  $Oxyz$  cho hai điểm  $A(2; 2; 1)$ ,  $B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$ . Biết  $I(a; b; c)$  là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác  $OAB$ . Tính  $S = a + b + c$ .

**Kết quả:**

**Lời giải:**

**Đáp án: 2.**



Ta có:  $\overrightarrow{OA} = (2; 2; 1)$ ,  $\overrightarrow{OB} = \left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{16}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ .

Lại có:  $OA = 3$ ,  $OB = 4 \Rightarrow AB = 5$ .

Gọi  $D$  là chân đường phân giác trong góc  $AOB \Rightarrow D$  thuộc đoạn  $AB$ .

Theo tính chất của phân giác trong ta có:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DB} \Rightarrow D = \left(0; \frac{12}{7}; \frac{12}{7}\right).$$

Tam giác  $OAB$  có diện tích  $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 6$ , nửa chu vi  $p = \frac{OA + OB + AB}{2} = 6$

$\Rightarrow r = \frac{S}{p} = 1$  là bán kính đường tròn nội tiếp; chiều cao  $OH = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{12}{5}$ .

Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $OAB \Rightarrow I$  thuộc đoạn  $OD$ .

$$\text{Ta có: } \frac{DI}{DO} = \frac{r}{OH} = \frac{5}{12} \Rightarrow \overrightarrow{DI} = \frac{5}{12}\overrightarrow{DO} \Rightarrow I = (0; 1; 1) \text{ hay } \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy  $S = a + b + c = 2$ .

**Câu 50:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; -1; 2)$ ,  $B(-1; 1; 1)$ ,  $C(-3; -3; 4)$ ,  $D(1; \frac{1}{2}; 1)$ . Điểm  $M$  thay đổi trên  $mp(Oxy)$ . Khi biểu thức  $T = -3\left(\frac{MA}{MD}\right)^2 - 2\left(\frac{MB}{MD}\right)^2 + \left(\frac{MC}{MD}\right)^2$  đạt giá trị lớn nhất thì hoành độ của điểm  $M$  bằng bao nhiêu?

**Kết quả:**





**Lời giải:**

**Đáp án: 1**

$$\text{Ta có: } T = -3\left(\frac{MA}{MD}\right)^2 - 2\left(\frac{MB}{MD}\right)^2 + \left(\frac{MC}{MD}\right)^2 = \frac{-3MA^2 - 2MB^2 + MC^2}{MD^2} = \frac{-3\overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2}{MD^2}$$

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn S suy ra } \begin{cases} x_I = \frac{-3x_A - 2x_B + x_C}{-3 - 2 + 1} = 1 \\ y_I = \frac{-3y_A - 2y_B + y_C}{-3 - 2 + 1} = \frac{1}{2} \\ z_I = \frac{-3z_A - 2z_B + z_C}{-3 - 2 + 1} = 1 \end{cases} \text{ hay } I \equiv D.$$

$$\text{Có } \overrightarrow{DA} = \left(0; \frac{-3}{2}; 1\right); \overrightarrow{DB} = \left(-2; \frac{1}{2}; 0\right); \overrightarrow{DC} = \left(-4; \frac{-7}{2}; 3\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } T &= \frac{-3\overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2}{MD^2} = \frac{-3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})^2 - 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB})^2 + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})^2}{MD^2} \\ &= \frac{-3(\overrightarrow{MD}^2 + 2\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA}^2) - 2(\overrightarrow{MD}^2 + 2\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}^2) + \overrightarrow{MD}^2 + 2\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}^2}{MD^2} \\ &= \frac{-4\overrightarrow{MD}^2 + (-3\overrightarrow{DA}^2 - 2\overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DC}^2) + 2\overrightarrow{MD} \cdot \underbrace{(-3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})}_0}{MD^2} \\ &= \frac{-4\overrightarrow{MD}^2 + (-3\overrightarrow{DA}^2 - 2\overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DC}^2)}{MD^2} = \frac{-4MD^2 + (-3DA^2 - 2DB^2 + DC^2)}{MD^2} \\ &= -4 + \frac{-3DA^2 - 2DB^2 + DC^2}{MD^2} = -4 + \frac{19}{MD^2} \end{aligned}$$

**Nhận xét:** Để biểu thức  $T$  đạt giá trị lớn nhất thì  $MD^2$  phải nhỏ nhất hay  $M$  là hình chiếu của điểm  $D$  xuống  $(Oxy)$ , suy ra  $M\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$ . Vậy hoành độ điểm  $M$  bằng 1.

**HẾT**

Huế, 10h20' Ngày 01 tháng 8 năm 2025



ĐỀ ÔN TẬP SỐ 01\_TrNg 2025

# TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ

Môn: **Toán 12 - KNTT**

**BIỂU THỨC TỌA ĐỘ OXYZ**

**Định hướng cấu trúc 2025**

## Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

Trường THPT Đặng Huy Trứ

SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo

116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế Trung tâm Km10- Hương Trà – Huế

### NỘI DUNG ĐỀ BÀI

Trong quá trình sưu tầm và biên soạn, nếu tài liệu có sai sót gì thì rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô cùng các em học sinh! Xin chân thành cảm ơn!

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm  $A(2;1;-1)$ ,  $B(1;2;3)$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng  
 A. 18. B.  $3\sqrt{2}$ . C.  $\sqrt{3}$ . D.  $\sqrt{22}$ .
- Câu 2:** Trong không gian Oxyz, cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;3;4)$ ,  $B(2;-1;0)$ ,  $C(3;1;2)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là  
 A.  $G\left(3;\frac{2}{3};3\right)$ . B.  $G(2;-1;2)$ . C.  $G(2;1;2)$ . D.  $G(6;3;6)$ .
- Câu 3:** Trong không gian Oxyz, cho vectơ  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ . Tính độ dài của vectơ  $\vec{a}$ .  
 A.  $|\vec{a}| = 1$ . B.  $|\vec{a}| = 4$ . C.  $|\vec{a}| = 5$ . D.  $|\vec{a}| = 3$ .
- Câu 4:** Trong không gian Oxyz, cho  $\vec{a} = (2;-1;3)$ . Tọa độ của vectơ  $2\vec{a}$  là  
 A.  $(4;-2;3)$ . B.  $(4;-1;3)$ . C.  $(4;-2;6)$ . D.  $(4;-2;5)$ .
- Câu 5:** Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ  $\vec{a} = (-4;5;-3)$ ,  $\vec{b} = (2;-2;1)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ .  
 A.  $\vec{x} = (0;-1;1)$ . B.  $\vec{x} = (0;1;-1)$ . C.  $\vec{x} = (-8;9;-5)$ . D.  $\vec{x} = (2;3;-2)$ .
- Câu 6:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm  $A(1;2;-3)$  và  $B(-3;4;5)$ . Tìm điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .  
 A.  $I(-1;3;1)$ . B.  $I(-1;-3;1)$ . C.  $I(-2;1;4)$ . D.  $I(2;-1;-4)$ .
- Câu 7:** Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ  $\vec{a} = 3\vec{j} + \vec{k}$  và  $\vec{b} = (1;m;6)$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  để  $\vec{a}$  vuông góc với  $\vec{b}$ .  
 A.  $m = 3$ . B.  $m = -2$ . C.  $m = -3$ . D.  $m = 2$ .
- Câu 8:** Trong không gian Oxyz, cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;1;1)$ ,  $B(-1;1;0)$ ,  $C(4;1;2)$ . Chu vi của tam giác  $ABC$  bằng  
 A.  $\sqrt{29} + 2\sqrt{5}$ . B.  $\sqrt{29} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ .  
 C.  $\sqrt{13} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ . D.  $2 + 2\sqrt{5}$ .
- Câu 9:** Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ  $\vec{a} = (2;-1;4)$ ;  $\vec{b} = (3;0;-2)$ . Khi đó,  $\cos(\vec{a};\vec{b})$  bằng

A.  $\frac{2}{\sqrt{273}}$ .      B.  $\frac{1}{\sqrt{273}}$ .      C.  $\frac{-1}{\sqrt{273}}$ .      D.  $-\frac{2}{\sqrt{273}}$ .

**Câu 10:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(0;1;-1)$ ,  $B(1;2;0)$ ;  $C(m;n;0)$ . Tìm  $m,n$  sao cho ba điểm  $A,B,C$  thẳng hàng.

A.  $m=1;n=1$ .      B.  $m=1;n=2$ .      C.  $m=2;n=1$ .      D.  $m=2;n=2$ .

**Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(0;-2;-1)$  và  $B(1;-1;2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}$ .

A.  $M\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3};1\right)$ .      B.  $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ .      C.  $M(2;0;5)$ .      D.  $M(-1;-3;-4)$ .

**Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;0;-1)$ ,  $B(-1;-1;2)$ . Điểm  $M$  nằm trên trục  $Ox$  và cách đều hai điểm  $A,B$  có tọa độ là

A.  $(0;-2;0)$ .      B.  $(1;0;0)$ .      C.  $(0;1;1)$ .      D.  $(-1;0;0)$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ ,  $\vec{b}=2\vec{j}+\vec{k}$ ,  $\vec{c}=2\vec{k}+\vec{i}$ .

| Khẳng định |                                         | Đúng | Sai |
|------------|-----------------------------------------|------|-----|
| a)         | $\vec{a}=(2;1;0)$ .                     |      |     |
| b)         | $ \vec{b} =3$ .                         |      |     |
| c)         | $\vec{b}+\vec{c}=(1;2;3)$ .             |      |     |
| d)         | $2\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=(3;0;-3)$ . |      |     |

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a}=(2;-1;2)$  và  $\vec{b}=(-1;2;3)$ .

| Khẳng định |                                                | Đúng | Sai |
|------------|------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | $\vec{a}+\vec{b}=(1;1;5)$ .                    |      |     |
| b)         | $\vec{a}.\vec{b}=2$ .                          |      |     |
| c)         | $2\vec{a}-3\vec{b}=(7;-8;1)$ .                 |      |     |
| d)         | $\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{\sqrt{14}}{21}$ . |      |     |

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1;2;2)$ ,  $B(4;0;2)$  và  $C(1;0;-1)$ .

| Khẳng định |                                                                                                                          | Đúng | Sai |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ trung điểm của $BC$ là $\left(\frac{5}{2};0;\frac{1}{2}\right)$ .                                                 |      |     |
| b)         | Hình chiếu của điểm $A$ lên trục hoành $Ox$ là $I(-1;0;0)$ .                                                             |      |     |
| c)         | $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ thì tọa độ điểm $M\left(\frac{7}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$ . |      |     |
| d)         | Chu vi tam giác $ABC$ bằng $\sqrt{29}+\sqrt{17}+3\sqrt{2}$ .                                                             |      |     |

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-2;1;0)$ ;  $B(1;1;-2)$  và  $C(4;1;-4)$ .

| Khẳng định |  | Đúng | Sai |
|------------|--|------|-----|
|------------|--|------|-----|

|    |                                                                                                          |  |  |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| a) | $\overrightarrow{AB} = (3; 0; -2).$                                                                      |  |  |
| b) | Tọa độ trung điểm của $BC$ là $I(1; 1; -2).$                                                             |  |  |
| c) | Tọa độ trọng tâm của tam giác $ABC$ là $G(1; 1; -2).$                                                    |  |  |
| d) | Điểm $M(a; b; c)$ trên mặt phẳng $(Oyz)$ sao cho ba điểm $A, B, M$ thẳng hàng. Khi đó $a + 4b + 3c = 0.$ |  |  |

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $\overrightarrow{AB} = (-3; 0; 4), \overrightarrow{AC} = (5; 4; 0)$ . Tính độ dài đường trung tuyến  $AM$ .

Kết quả:

Trình bày:

.....

.....

.....

.....

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , ba điểm  $A(0; 1; -1), B(1; 2; 0); C(m; n; 0)$ . Biết ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng, tính  $m + n$ .

Kết quả:

Trình bày:

.....

.....

.....

.....

**Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 3; 1)$  và  $B(5; 6; 2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$  và  $BM = mAM$ . Tính  $m$ .

Kết quả:

Trình bày:

.....

.....

.....

.....

**Câu 4:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-4; 7; 5)$ . Gọi  $D(a; b; c)$  là chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$ . Tính  $6a + 3b + c$ .

Kết quả:

Trình bày:

.....

.....

.....

.....

**Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ . Biết ba đỉnh  $A(1;2;1), B(2;0;-1) C(6;1;0)$  và hình thang  $ABCD$  có diện tích bằng  $6\sqrt{2}$ . Giả sử đỉnh  $D(a;b;c)$ , tính  $a+b+c$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

**Câu 6:** Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc  $20(km)$  và về phía Tây  $10(km)$ , đồng thời cách mặt đất  $0,7(km)$ . Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông  $30(km)$  và về phía Nam  $25(km)$ , đồng thời cách mặt đất  $1(km)$ .



Tính gần đúng đến hàng phần chục khoảng cách giữa hai chiếc máy bay (đơn vị  $km$ )

**Kết quả:**

**Trình bày:**

**HẾT**

*Huế, 17h20' Ngày 13 tháng 7 năm 2024*



ĐỀ ÔN TẬP SỐ 01\_TrNg 2025

**TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ****Môn: Toán 12 - KNTT****BIỂU THỨC TỌA ĐỘ OXYZ****Định hướng cấu trúc 2025****LỜI GIẢI CHI TIẾT**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2;1;-1)$ ,  $B(1;2;3)$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng

A. 18.

B.  $3\sqrt{2}$ .C.  $\sqrt{3}$ .D.  $\sqrt{22}$ .**Lời giải:**

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + (3+1)^2} = 3\sqrt{2}.$$

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;3;4)$ ,  $B(2;-1;0)$ ,  $C(3;1;2)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

A.  $G\left(3;\frac{2}{3};3\right)$ .B.  $G(2;-1;2)$ .C.  $G(2;1;2)$ .D.  $G(6;3;6)$ .**Lời giải:**

Theo công thức trọng tâm của tam giác, ta có:  $G(2;1;2)$ .

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vector  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ . Tính độ dài của vector  $\vec{a}$ .

A.  $|\vec{a}| = 1$ .B.  $|\vec{a}| = 4$ .C.  $|\vec{a}| = 5$ .D.  $|\vec{a}| = 3$ .**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = (2;1;-2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2;-1;3)$ . Tọa độ của vector  $2\vec{a}$  là

A.  $(4;-2;3)$ .B.  $(4;-1;3)$ .C.  $(4;-2;6)$ .D.  $(4;-2;5)$ .**Lời giải:**

Ta có  $\vec{a} = (2;-1;3)$  suy ra  $2\vec{a} = (4;-2;6)$ .

**Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{a} = (-4;5;-3)$ ,  $\vec{b} = (2;-2;1)$ . Tìm tọa độ của vector  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ .

A.  $\vec{x} = (0;-1;1)$ .B.  $\vec{x} = (0;1;-1)$ .C.  $\vec{x} = (-8;9;-5)$ .D.  $\vec{x} = (2;3;-2)$ .**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b} = (-4 + 2.2; 5 + 2.(-2); -3 + 2.1) = (0;1;-1).$$

**Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;-3)$  và  $B(-3;4;5)$ . Tìm điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .

A.  $I(-1;3;1)$ .B.  $I(-1;-3;1)$ .C.  $I(-2;1;4)$ .D.  $I(2;-1;-4)$ .**Lời giải:**

$$\text{Tọa độ trung điểm } I \text{ của đoạn thẳng } AB \text{ là } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = -1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 3 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 1 \end{cases} \longrightarrow I(-1; 3; 1).$$

- Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = 3\vec{j} + \vec{k}$  và  $\vec{b} = (1; m; 6)$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  để  $\vec{a}$  vuông góc với  $\vec{b}$ .
- A.  $m = 3$ .      B.  $m = -2$ .      C.  $m = -3$ .      D.  $m = 2$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\vec{a} = (0; 3; 1)$  và  $\vec{b} = (1; m; 6)$ .

$\vec{a}$  vuông góc với  $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 3m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ .

- Câu 8:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-1; 1; 0)$ ,  $C(4; 1; 2)$ . Chu vi của tam giác  $ABC$  bằng
- A.  $\sqrt{29} + 2\sqrt{5}$ .      B.  $\sqrt{29} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ .  
C.  $\sqrt{13} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ .      D.  $2 + 2\sqrt{5}$ .

**Lời giải:**

Ta có:

$$\overline{AB} = (-2; 0; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = (3; 0; 1) \Rightarrow AC = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\overline{BC} = (5; 0; 2) \Rightarrow BC = \sqrt{5^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

Vậy chu vi tam giác  $ABC$  bằng  $\sqrt{29} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ .

- Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; -1; 4)$ ;  $\vec{b} = (3; 0; -2)$ . Khi đó,  $\cos(\vec{a}; \vec{b})$  bằng
- A.  $\frac{2}{\sqrt{273}}$ .      B.  $\frac{1}{\sqrt{273}}$ .      C.  $\frac{-1}{\sqrt{273}}$ .      D.  $-\frac{2}{\sqrt{273}}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{273}}.$$

- Câu 10:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(0; 1; -1)$ ,  $B(1; 2; 0)$ ;  $C(m; n; 0)$ . Tìm  $m, n$  sao cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.
- A.  $m = 1; n = 1$ .      B.  $m = 1; n = 2$ .      C.  $m = 2; n = 1$ .      D.  $m = 2; n = 2$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\overline{AB} = (1; 1; 1)$ ;  $\overline{AC} = (m; n - 1; 1)$ .

$$\text{Ba điểm } A, B, C \text{ thẳng hàng } \overline{AC} = k \overline{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} m = k \\ n - 1 = k \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}.$$

- Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(0; -2; -1)$  và  $B(1; -1; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  sao cho  $\overline{MA} = 2\overline{MB}$ .

A.  $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; 1\right)$ .      B.  $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .      **C.  $M(2; 0; 5)$ .**      D.  $M(-1; -3; -4)$ .

**Lời giải:**

Giả sử  $M(x_M; y_M; z_M)$ .

Ta có:  $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (0 - x_M) - 2(1 - x_M) = 0 \\ (-2 - y_M) - 2(-1 - y_M) = 0 \\ (-1 - z_M) - 2(2 - z_M) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = 0 \\ z_M = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2; 0; 5)$ .

**Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 0; -1)$ ,  $B(-1; -1; 2)$ . Điểm  $M$  nằm trên trục  $Ox$  và cách đều hai điểm  $A, B$  có tọa độ là

A.  $(0; -2; 0)$ .      B.  $(1; 0; 0)$ .      C.  $(0; 1; 1)$ .      **D.  $(-1; 0; 0)$ .**

**Lời giải:**

Gọi điểm  $M(x; 0; 0)$  thuộc  $Ox$ , khi đó theo giả thiết ta có  $MA = MB$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 0^2 + (0+1)^2 = (x+1)^2 + (0+1)^2 + (0-2)^2$ . Suy ra  $M(-1; 0; 0)$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vector  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{k} + \vec{i}$ .

| Khẳng định |                                                 | Đúng | Sai |
|------------|-------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | $\vec{a} = (2; 1; 0)$ .                         |      |     |
| b)         | $ \vec{b}  = 3$ .                               |      |     |
| c)         | $\vec{b} + \vec{c} = (1; 2; 3)$ .               |      |     |
| d)         | $2\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = (3; 0; -3)$ . |      |     |

**Lời giải:**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

b) Sai vì  $|\vec{b}| = \sqrt{5}$ .

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{a} = (2; -1; 2)$  và  $\vec{b} = (-1; 2; 3)$ .

| Khẳng định |                                                   | Đúng | Sai |
|------------|---------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | $\vec{a} + \vec{b} = (1; 1; 5)$ .                 |      |     |
| b)         | $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ .                     |      |     |
| c)         | $2\vec{a} - 3\vec{b} = (7; -8; 1)$ .              |      |     |
| d)         | $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\sqrt{14}}{21}$ . |      |     |

**Lời giải:**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

a) Tọa độ của vector  $\vec{a} + \vec{b} = (2 + (-1); -1 + 2; 2 + 3) = (1; 1; 5)$  là mệnh đề đúng.

b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2$  là mệnh đề đúng.

c) Ta có:  $2\vec{a} = (4; -2; 4)$  và  $3\vec{b} = (-3; 6; 9)$

Tọa độ của vector  $2\vec{a} - 3\vec{b} = (4 - (-3); -2 - 6; 4 - 9) = (7; -8; -5)$ .

$$d) \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{21}.$$

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 2; 2)$ ,  $B(4; 0; 2)$  và  $C(1; 0; -1)$ .

|    | Khẳng định                                                                                               | Đúng | Sai |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a) | Tọa độ trung điểm của $BC$ là $\left(\frac{5}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$ .                               |      |     |
| b) | Hình chiếu của điểm $A$ lên trục hoành $Ox$ là $I(-1; 0; 0)$ .                                           |      |     |
| c) | $\vec{MA} + 2\vec{MB} = \vec{0}$ thì tọa độ điểm $M\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ . |      |     |
| d) | Chu vi tam giác $ABC$ bằng $\sqrt{29} + \sqrt{17} + 3\sqrt{2}$ .                                         |      |     |

**Lời giải:**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

a) Tọa độ trung điểm của  $BC$  là  $\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}; \frac{z_B + z_C}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$ .

b) Hình chiếu của điểm  $A$  lên trục hoành  $Ox$  là  $I(x_A; 0; 0) \Rightarrow I(-1; 0; 0)$ .

c)  $\vec{MA} + 2\vec{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M + 2(x_B - x_M) = 0 \\ y_A - y_M + 2(y_B - y_M) = 0 \\ z_A - z_M + 2(z_B - z_M) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + 2x_B}{3} = \frac{7}{3} \\ y_M = \frac{y_A + 2y_B}{3} = \frac{2}{3} \\ x_M = \frac{z_A + 2z_B}{3} = 2 \end{cases}.$

Suy ra, tọa độ điểm  $M\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; 2\right)$ .

d) Ta có:  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Chu vi tam giác  $ABC$  bằng  $AB + BC + AC = \sqrt{29} + \sqrt{17} + 3\sqrt{2}$ .

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-2; 1; 0)$ ;  $B(1; 1; -2)$  và  $C(4; 1; -4)$ .

|    | Khẳng định                                                                                                | Đúng | Sai |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a) | $\vec{AB} = (3; 0; -2)$ .                                                                                 |      |     |
| b) | Tọa độ trung điểm của $BC$ là $I(1; 1; -2)$ .                                                             |      |     |
| c) | Tọa độ trọng tâm của tam giác $ABC$ là $G(1; 1; -2)$ .                                                    |      |     |
| d) | Điểm $M(a; b; c)$ trên mặt phẳng $(Oyz)$ sao cho ba điểm $A, B, M$ thẳng hàng. Khi đó $a + 4b + 3c = 0$ . |      |     |

**Lời giải:**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

a) Tọa độ của  $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (1 - (-2); 1 - 1; -2 - 0) = (3; 0; -2)$ .

b) Tọa độ trung điểm của  $BC$  là  $I\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}; \frac{z_B + z_C}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}; 1; -3\right)$ .

c) Tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$  là  $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}; \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right) = (1; 1; -2)$ .

d) Điểm  $M$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  nên  $M(0; y; z)$

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (3; 0; -2)$  và  $\overrightarrow{AM} = (2; y-1; z)$

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3k \\ y-1 = 0.k \\ z = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ y = 1 \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó, tọa độ điểm } M\left(0; 1; -\frac{4}{3}\right) \longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -\frac{4}{3} \end{cases} \longrightarrow a + 4b + 3c = 0.$$

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $\overrightarrow{AB} = (-3; 0; 4)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (5; 4; 0)$ . Tính độ dài đường trung tuyến  $AM$ .

**Kết quả:**

3

**Trình bày:**

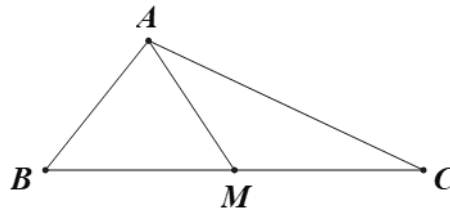
.....

.....

.....

.....

**Lời giải:**



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (2; 4; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (1; 2; 2).$$

$$\text{Khi đó } AM = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , ba điểm  $A(0; 1; -1)$ ,  $B(1; 2; 0)$ ;  $C(m; n; 0)$ . Biết ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng, tính  $m+n$ .

**Kết quả:**

3

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Lời giải:**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (m; n-1; 1)$ .

$$\text{Ba điểm } A, B, C \text{ thẳng hàng } \overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} m = k \\ n-1 = k \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}.$$

**Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 3; 1)$  và  $B(5; 6; 2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$  và  $BM = mAM$ . Tính  $m$ .

**Kết quả:**

2

**Trình bày:**

.....  
.....  
.....  
.....

**Lời giải:**

Điểm  $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$ ;  $\overrightarrow{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}$ ;  $\overrightarrow{AM} = (x+2; -3; z-1)$  và

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0).$$

$$\overrightarrow{BM} = (-14; -6; -2); \overrightarrow{AM} = (-7; -3; -1) \Rightarrow BM = 2AM \longrightarrow m = 2.$$

**Câu 4:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-4; 7; 5)$ . Gọi  $D(a; b; c)$  là chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$ . Tính  $6a + 3b + c$ .

**Kết quả:**

8

**Trình bày:**

.....  
.....  
.....  
.....

**Lời giải:**

Ta có  $BA = \sqrt{26}$ ;  $BC = 2\sqrt{26}$ .

Gọi  $D$  là chân đường phân giác trong góc  $B$  ta có  $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2DA$ .

$$\text{Vì } D \text{ là chân đường phân giác trong nên } 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_D = \frac{2x_A + x_C}{3} = -\frac{2}{3} \\ y_D = \frac{2y_A + y_C}{3} = \frac{11}{3} \\ z_D = \frac{2z_A + z_C}{3} = 1 \end{cases}.$$

Vậy  $D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right) \longrightarrow a = -\frac{2}{3}; b = \frac{11}{3}; c = 1 \longrightarrow 6a + 3b + c = -4 + 11 + 1 = 8.$

**Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ . Biết ba đỉnh  $A(1;2;1), B(2;0;-1) C(6;1;0)$  và hình thang  $ABCD$  có diện tích bằng  $6\sqrt{2}$ . Giả sử đỉnh  $D(a;b;c)$ , tính  $a+b+c$ .

**Kết quả:**

6

**Trình bày:**

.....  
 .....  
 .....  
 .....

**Lời giải:**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3; \overrightarrow{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}.$

Theo giả thiết  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$  và có diện tích bằng  $6\sqrt{2}$  nên  $\frac{1}{2}AB(AD+BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.3.(AD+3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC.$

Do  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$  nên  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$

Giả sử  $D(a;b;c)$  khi đó ta có 
$$\begin{cases} a-1 = \frac{4}{3} \\ b-2 = \frac{1}{3} \\ c-1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 6.$$

**Câu 6:** Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc  $20(km)$  và về phía Tây  $10(km)$ , đồng thời cách mặt đất  $0,7(km)$ . Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông  $30(km)$  và về phía Nam  $25(km)$ , đồng thời cách mặt đất  $1(km)$ .



Tính gần đúng đến hàng phần chục khoảng cách giữa hai chiếc máy bay (đơn vị  $km$ )

**Kết quả:**

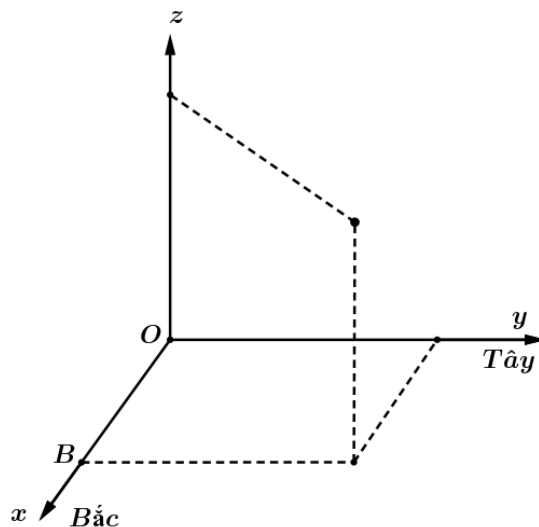
60,2

**Trình bày:**

.....  
 .....

.....  
.....  
.....  
**Lời giải:**

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất, trục  $Ox$  hướng về phía Bắc, trục  $Oy$  hướng về phía Tây, trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ  $(20;10;0,7)$ .

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ  $(-30;-25;1)$ .

Do đó khoảng cách giữa hai chiếc máy bay là:  $\sqrt{(20+30)^2 + (10+25)^2 + (0,7-1)^2} \approx 60,2(km)$

**HẾT**

---

*Huế, 17h20' Ngày 13 tháng 7 năm 2024*



ĐỀ ÔN TẬP SỐ 02\_TrNg 2025

**TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ****Môn: Toán 12 - KNTT****BIỂU THỨC TỌA ĐỘ OXYZ****Định hướng cấu trúc 2025****Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO**

Trường THPT Đặng Huy Trứ

SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo

116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế Trung tâm Km10- Hương Trà – Huế

**NỘI DUNG ĐỀ BÀI**

Trong quá trình sưu tầm và biên soạn, nếu tài liệu có sai sót gì thì rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô cùng các em học sinh! Xin chân thành cảm ơn!

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-2; 2; -4)$  và  $\vec{b} = (-3; 3; -6)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?  
 A.  $2\vec{b} = 3\vec{a}$ .      B.  $2\vec{a} = 3\vec{b}$ .      C.  $-2\vec{a} = 3\vec{b}$ .      D.  $-2\vec{b} = 3\vec{a}$ .
- Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (-1; 1; 3)$  và  $\vec{v} = (-2; 1; -3)$ . Tính  $|2\vec{u} - 3\vec{v}|$ .  
 A.  $\sqrt{242}$ .      B.  $\sqrt{216}$ .      C.  $\sqrt{152}$ .      D.  $\sqrt{322}$ .
- Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Biết  $A(2; 1; -1)$ ,  $I(1; 2; 0)$ , điểm  $B$  có tọa độ là  
 A.  $(1; -1; -1)$ .      B.  $(3; 0; -2)$ .      C.  $(0; 3; 1)$ .      D.  $(-1; 1; 1)$ .
- Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$  là  
 A.  $(-4; 3; -7)$ .      B.  $(-4; 3; 7)$ .      C.  $(4; 3; -7)$ .      D.  $(4; 3; 7)$ .
- Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Biết  $G(2; 1; 0)$  và  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(2; 3; 5)$ , tọa độ điểm  $C$  là  
 A.  $(4; 2; -1)$ .      B.  $(-6; -2; 0)$ .      C.  $(3; -1; -5)$ .      D.  $(-12; 0; 8)$ .
- Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?  
 A.  $\vec{b} \perp \vec{c}$ .      B.  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ .      C.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .      D.  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ .
- Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(2; 1; -2)$ ,  $B(-1; 1; 2)$ ,  $C(7; -1; 2)$ . Độ dài trung tuyến  $AM$  của tam giác  $ABC$  bằng  
 A.  $5\sqrt{3}$ .      B.  $2\sqrt{3}$ .      C.  $3\sqrt{2}$ .      D.  $4\sqrt{2}$ .
- Câu 8:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; -2; 1)$ ,  $B(-3; 1; 0)$  và  $C(2; m; -5)$ . Tìm  $m$  biết tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .  
 A.  $m = \frac{8}{3}$ .      B.  $m = \frac{4}{3}$ .      C.  $m = -\frac{4}{3}$ .      D.  $m = -\frac{8}{3}$ .
- Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (-1; 3; 2)$ ,  $\vec{v} = (-3; -1; 2)$ . Khi đó,  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  bằng  
 A. 3.      B. 2.      C. 4.      D. 10.

- Câu 10:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; 2; 0)$  và  $\vec{b} = (-1; 3; 0)$ . Tính góc giữa hai vectơ đó.  
**A.**  $45^\circ$ . **B.**  $135^\circ$ . **C.**  $30^\circ$ . **D.**  $60^\circ$ .
- Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(4; 2; 1)$ ,  $B(-2; -1; 4)$ . Biết điểm  $M(a; b; c)$  thỏa mãn  $\vec{AM} + 3\vec{BM} = \vec{0}$ , tổng  $2a + b + c$  bằng  
**A.** 2. **B.** 3. **C.**  $\frac{5}{2}$ . **D.** 6.
- Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2; -1; 5)$ ,  $B(5; -5; 7)$ ;  $M(x; y; 1)$ . Biết  $A, B, M$  thẳng hàng, tính  $x + y$ .  
**A.** -3. **B.** 3. **C.** 11. **D.** -11.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

- Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; 1; -3)$ ,  $\vec{b} = (-4; -2; 6)$ .

| Khẳng định |                                       | Đúng | Sai |
|------------|---------------------------------------|------|-----|
| a)         | $\vec{b} = -2\vec{a}$ .               |      |     |
| b)         | $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$ . |      |     |
| c)         | $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .         |      |     |
| d)         | $ \vec{b}  = 2 \vec{a} $ .            |      |     |

- Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (0; -1; 1)$ ;  $\vec{b} = (-1; 1; 2)$  và  $\vec{c} = (-2; 3; -2)$ .

| Khẳng định |                                                      | Đúng | Sai |
|------------|------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | $ \vec{a}  = \sqrt{2}$ .                             |      |     |
| b)         | Tọa độ của vectơ đối của $\vec{a}$ là $(0; 1; -1)$ . |      |     |
| c)         | $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc nhau.               |      |     |
| d)         | $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ .                    |      |     |

- Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(0; -3; 1)$  và  $C(4; -1; 4)$ .

| Khẳng định |                                                                                   | Đúng | Sai |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ trọng tâm tam giác $ABC$ là $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}; 2\right)$ . |      |     |
| b)         | $\vec{AB} = (1; 3; 0)$ .                                                          |      |     |
| c)         | Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ .                                                    |      |     |
| d)         | $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D(5; 2; 4)$ .                           |      |     |

- Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(3; 0; 0)$ ,  $B(0; -2; 0)$  và  $C(0; 0; -1)$ .

| Khẳng định |                                  | Đúng | Sai |
|------------|----------------------------------|------|-----|
| a)         | Điểm $A$ thuộc trục hoành $Ox$ . |      |     |
| b)         | $\vec{AB} = (-3; 2; 0)$ .        |      |     |
| c)         | Diện tích tam giác $OAB$ bằng 3. |      |     |
| d)         | Thể tích tứ diện $OABC$ bằng 1.  |      |     |

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -2; 5)$  và  $B(-2; -2; 1)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-4;1;5); B(1;5;-3)$ . Gọi  $C$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(Oyz)$  và  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}$ . Tính  $k$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;3); B(-2;-4;9)$ . Điểm  $M(a;b;c)$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$ , tính  $a + b + c$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-3;3;-1), B(2;-2;4)$ . Biết điểm  $M(a;b;c)$  thuộc mặt phẳng  $(Oyz)$  sao cho biểu thức  $T = 3MA^2 + 2MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính  $a + b + c$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-1;4;2); B(3;2;1); C(-2;0;2)$ . Biết điểm  $D(m;0;n)$  sao cho  $ABCD$  là hình thang có đáy  $AD$  và diện tích hình thang  $ABCD$  gấp ba lần diện tích tam giác  $ABC$ , tính  $m + n$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Câu 6:** Trong không gian, xét hệ toạ độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục  $Ox$  hướng về phía tây, trục  $Oy$  hướng về phía nam và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời. Đơn vị đo trong không gian  $Oxyz$  lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là 30 km (tham khảo hình vẽ)



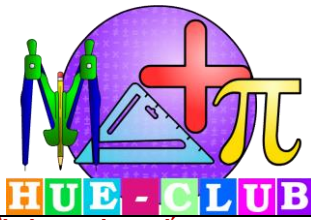
Một chiếc tàu thám hiểm có toạ độ là  $(25;15;-10)$  đối với hệ toạ độ nói trên. Tính gần đúng đến hàng phần chục (đơn vị km) khoảng cách giữa rada và tàu thám hiểm nói trên.

**Kết quả:**

**Trình bày:**

HẾT

Huế, 17h20' Ngày 13 tháng 7 năm 2024

**TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ****Môn: Toán 12 - KNTT****BIỂU THỨC TỌA ĐỘ OXYZ****Định hướng cấu trúc 2025****LỜI GIẢI CHI TIẾT**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-2; 2; -4)$  và  $\vec{b} = (-3; 3; -6)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.**  $2\vec{b} = 3\vec{a}$ .

**B.**  $2\vec{a} = 3\vec{b}$ .

**C.**  $-2\vec{a} = 3\vec{b}$ .

**D.**  $-2\vec{b} = 3\vec{a}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Để thấy } 2\vec{b} = (-6; 6; -12), 3\vec{a} = (-6; 6; -12) \Rightarrow 2\vec{b} = 3\vec{a}.$$

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (-1; 1; 3)$  và  $\vec{v} = (-2; 1; -3)$ . Tính  $|2\vec{u} - 3\vec{v}|$ .

**A.**  $\sqrt{242}$ .

**B.**  $\sqrt{216}$ .

**C.**  $\sqrt{152}$ .

**D.**  $\sqrt{322}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } 2\vec{u} - 3\vec{v} = (4; -1; 15). \text{ Suy ra } |2\vec{u} - 3\vec{v}| = \sqrt{242}.$$

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Biết  $A(2; 1; -1)$ ,  $I(1; 2; 0)$ , điểm  $B$  có tọa độ là

**A.**  $(1; -1; -1)$ .

**B.**  $(3; 0; -2)$ .

**C.**  $(0; 3; 1)$ .

**D.**  $(-1; 1; 1)$ .

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$  là

**A.**  $(-4; 3; -7)$ .

**B.**  $(-4; 3; 7)$ .

**C.**  $(4; 3; -7)$ .

**D.**  $(4; 3; 7)$ .

**Lời giải:**

$$\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2(2\vec{j} - 3\vec{k}) - (4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 4\vec{j} - 6\vec{k} - 4\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (-4; 3; -7).$$

$$\text{Hoặc: } \begin{cases} \vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k} \longrightarrow \vec{a} = (0; 2; -3) \\ \vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \longrightarrow \vec{b} = (4; 1; 1) \end{cases} \longrightarrow \vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} = (-4; 3; -7).$$

**Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Biết  $G(2; 1; 0)$  và  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(2; 3; 5)$ , tọa độ điểm  $C$  là

**A.**  $(4; 2; -1)$ .

**B.**  $(-6; -2; 0)$ .

**C.**  $(3; -1; -5)$ .

**D.**  $(-12; 0; 8)$ .

**Lời giải:**

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \text{ nên } \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \\ z_C = 3z_G - z_A - z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3.2 - 1 - 2 = 3 \\ y_C = 3.1 - 1 - 3 = -1 \\ z_C = 3.0 - 0 - 5 = -5 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } C(3; -1; -5).$$

**Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A.  $\vec{b} \perp \vec{c}$ .      B.  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ .      C.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .      D.  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1.1 + 1.1 + 0.1 = 2 \neq 0$ .

**Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(2; 1; -2)$ ,  $B(-1; 1; 2)$ ,  $C(7; -1; 2)$ . Độ dài trung tuyến  $AM$  của tam giác  $ABC$  bằng

- A.  $5\sqrt{3}$ .      B.  $2\sqrt{3}$ .      C.  $3\sqrt{2}$ .      D.  $4\sqrt{2}$ .

**Lời giải:**

Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ , suy ra  $M(3; 0; 2)$ .

Vậy  $AM = \sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2 + (2+2)^2} = 3\sqrt{2}$ .

**Câu 8:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; -2; 1)$ ,  $B(-3; 1; 0)$  và  $C(2; m; -5)$ . Tìm  $m$  biết tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

- A.  $m = \frac{8}{3}$ .      B.  $m = \frac{4}{3}$ .      C.  $m = -\frac{4}{3}$ .      D.  $m = -\frac{8}{3}$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-4; 3; -1)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (1; m+2; -6)$ .

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -4.1 + 3(m+2) - 6.(-1) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{8}{3}$ .

**Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (-1; 3; 2)$ ,  $\vec{v} = (-3; -1; 2)$ . Khi đó,  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  bằng

- A. 3.      B. 2.      C. 4.      D. 10.

**Lời giải:**

Ta có:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1)(-3) + 3(-1) + 2.2 = 4$ .

**Câu 10:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; 2; 0)$  và  $\vec{b} = (-1; 3; 0)$ . Tính góc giữa hai véc tơ đó.

- A.  $45^\circ$ .      B.  $135^\circ$ .      C.  $30^\circ$ .      D.  $60^\circ$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$ .

**Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(4; 2; 1)$ ,  $B(-2; -1; 4)$ . Biết điểm  $M(a; b; c)$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ , tổng  $2a + b + c$  bằng

- A. 2.      B. 3.      C.  $\frac{5}{2}$ .      D. 6.

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{AM} = (a-4; b-2; c-1)$ ;  $\overrightarrow{BM} = (a+2; b+1; c-4)$ .

$$\text{Lúc đó: } \overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a-4+3(a+2)=0 \\ b-2+3(b+1)=0 \\ c-1+3(c-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{4} \\ c=\frac{13}{4} \end{cases}.$$

Vậy  $2a+b+c=2$ .

**Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2;-1;5)$ ,  $B(5;-5;7)$ ;  $M(x;y;1)$ . Biết  $A, B, M$  thẳng hàng, tính  $x+y$ .

**A.** -3.

**B.** 3.

**C.** 11.

**D.** -11.

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2)$ ;  $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+1; -4)$

Để ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng thì  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=7 \end{cases}$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; 1; -3)$ ,  $\vec{b} = (-4; -2; 6)$ .

|    | Khẳng định                            | Đúng | Sai |
|----|---------------------------------------|------|-----|
| a) | $\vec{b} = -2\vec{a}$ .               |      |     |
| b) | $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$ . |      |     |
| c) | $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .         |      |     |
| d) | $ \vec{b}  = 2 \vec{a} $ .            |      |     |

**Lời giải:**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

c)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -28$ . Sai.

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (0; -1; 1)$ ;  $\vec{b} = (-1; 1; 2)$  và  $\vec{c} = (-2; 3; -2)$ .

|    | Khẳng định                                           | Đúng | Sai |
|----|------------------------------------------------------|------|-----|
| a) | $ \vec{a}  = \sqrt{2}$ .                             |      |     |
| b) | Tọa độ của vectơ đối của $\vec{a}$ là $(0; 1; -1)$ . |      |     |
| c) | $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc nhau.               |      |     |
| d) | $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ .                    |      |     |

**Lời giải:**

|         |         |        |        |
|---------|---------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|---------|---------|--------|--------|

a) Độ dài của vectơ  $\vec{a}$  là  $|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  là mệnh đề đúng.

b) Tọa độ của vectơ đối của  $\vec{a}$  là  $-\vec{a} = (0; 1; -1)$  là mệnh đề đúng.

c) Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 1 \neq 0$  nên  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc nhau là mệnh đề sai.

d) Ta có:  $-\vec{a} + 2\vec{b} = (0; 1; -1) + (-2; 2; 4) = (-2; 3; 3) \neq \vec{c}$ .

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(0; -3; 1)$  và  $C(4; -1; 4)$ .

| Khẳng định |                                                                                   | Đúng | Sai |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ trọng tâm tam giác $ABC$ là $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}; 2\right)$ . |      |     |
| b)         | $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 0)$ .                                               |      |     |
| c)         | Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ .                                                    |      |     |
| d)         | $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D(5; 2; 4)$ .                           |      |     |

**Lời giải:**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

a) Tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$  là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}; 2\right).$$

b) Tọa độ vector  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (0 - 1; -3 - 0; 1 - 1) = (-1; -3; 0)$ .

c) Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-1; -3; 0); \overrightarrow{AC} = (3; -1; 3)$ .

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}.$$

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

$$d) ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 4 - x \\ -3 = -1 - y \\ 0 = 4 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Suy ra, tọa độ điểm  $D(5; 2; 4)$ .

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(3; 0; 0)$ ,  $B(0; -2; 0)$  và  $C(0; 0; -1)$ .

| Khẳng định |                                      | Đúng | Sai |
|------------|--------------------------------------|------|-----|
| a)         | Điểm $A$ thuộc trục hoành $Ox$ .     |      |     |
| b)         | $\overrightarrow{AB} = (-3; 2; 0)$ . |      |     |
| c)         | Diện tích tam giác $OAB$ bằng 3.     |      |     |
| d)         | Thể tích tứ diện $OABC$ bằng 1.      |      |     |

**Lời giải:**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

a) Điểm  $A$  thuộc trục hoành  $Ox$  vì  $y_A = z_A = 0$

b) Tọa độ vector  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-3; -2; 0)$ .

c) Ta có  $A \in Ox; B \in Oy$  nên tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$ .

$$\text{Diện tích tam giác } OAB \text{ bằng } S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |x_A| \cdot |y_B| = 3.$$

d) Ta có  $A \in Ox; B \in Oy; C \in Oz$  nên tứ diện  $OABC$  có  $OA; OB; OC$  đôi một vuông góc.

$$\Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -2; 5)$  và  $B(-2; -2; 1)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

**Kết quả:**

5

**Trình bày:**

.....

.....  
.....  
.....  
.....  
**Lời giải:**

Ta có:  $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2+2)^2 + (1-5)^2} = 5$ .

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-4;1;5); B(1;5;-3)$ . Gọi  $C$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(Oyz)$  và  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}$ . Tính  $k$ .

**Kết quả:**

-4

**Trình bày:**  
.....  
.....  
.....  
.....

**Lời giải:**

Gọi  $C(0;a;b)$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(Oyz)$ . Khi đó  $A;B;C$  thẳng hàng hay  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương.

Lại có  $\overrightarrow{AB} = (5;4;-8); \overrightarrow{AC} = (4;a-1;b-5)$  nên  $\frac{4}{5} = \frac{a-1}{4} = \frac{b-5}{-8} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{21}{5} \\ b = -\frac{7}{5} \end{cases}$ .

Khi đó  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (5;4;-8) \\ \overrightarrow{AC} = \left(4; \frac{16}{5}; -\frac{32}{5}\right) \end{cases}$  nên  $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{BC} \longrightarrow k = -4$ .  
 $\overrightarrow{BC} = \left(-1; -\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right)$

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;3); B(-2;-4;9)$ . Điểm  $M(a;b;c)$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$ , tính  $a+b+c$ .

**Kết quả:**

4

**Trình bày:**  
.....  
.....  
.....  
.....

**Lời giải:**

Gọi  $M(x;y;z)$ .

Vì điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$  nên

$$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.(-2-a) = -3 \\ 3.(-4-b) = -6 \\ 3.(9-c) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 7. \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(-1; -2; 7) \longrightarrow a = -1; b = -2; c = 7.$$

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-3; 3; -1)$ ,  $B(2; -2; 4)$ . Biết điểm  $M(a; b; c)$  thuộc mặt phẳng  $(Oyz)$  sao cho biểu thức  $T = 3MA^2 + 2MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính  $a + b + c$ .

**Kết quả:**

2

**Trình bày:**

**Lời giải:**

$$\text{Xét } T = 3\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 5MI^2 + 5IA^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB})$$

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn } 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(-1; 1; 1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (-2; 2; -2) \longrightarrow IA^2 = 12 \\ \overrightarrow{IB} = (3; -3; 3) \longrightarrow IB^2 = 27 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } T = 5MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 = 5MI^2 + 90. \text{ Do đó } T_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min}.$$

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu vuông góc của } I \text{ lên mặt phẳng } (Oyz) \Rightarrow H(0; 1; 1)$$

$$\text{Để thấy } IM \geq IH \Rightarrow T_{\min} \geq 5IH^2 + 90 = 95$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow M \equiv H \longrightarrow M(0; 1; 1) \longrightarrow a = 0; b = 1; c = 1.$$

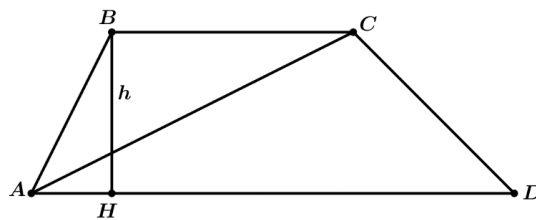
**Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-1; 4; 2)$ ,  $B(3; 2; 1)$ ,  $C(-2; 0; 2)$ . Biết điểm  $D(m; 0; n)$  sao cho  $ABCD$  là hình thang có đáy  $AD$  và diện tích hình thang  $ABCD$  gấp ba lần diện tích tam giác  $ABC$ , tính  $m + n$ .

**Kết quả:**

-7

**Trình bày:**

**Lời giải:**



Vì diện tích hình thang  $ABCD$  gấp ba lần diện tích tam giác  $ABC$

nên  $\frac{1}{2}h \cdot (BC + AD) = 3 \cdot \frac{1}{2}h \cdot BC$ , với  $h$  là chiều cao của hình thang và cũng chính là chiều cao

tam giác  $ABC$  ứng với cạnh  $BC$ .

$$\text{Ta có: } AD = 2BC. \text{ Do đó } \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -11 \\ y_D = 0 \\ z_D = 4 \end{cases} \Rightarrow D(-11; 0; 4) \longrightarrow m = -11; n = 4.$$

**Câu 6:** Trong không gian, xét hệ toạ độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục  $Ox$  hướng về phía tây, trục  $Oy$  hướng về phía nam và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời. Đơn vị đo trong không gian  $Oxyz$  lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là 30 km (tham khảo hình vẽ)



Một chiếc tàu thám hiểm có toạ độ là  $(25; 15; -10)$  đối với hệ toạ độ nói trên. Tính gần đúng đến hàng phần chục (đơn vị km) khoảng cách giữa rada và tàu thám hiểm nói trên.

**Kết quả:**

30,8

**Trình bày:**

.....  
 .....  
 .....  
 .....

**Lời giải:**

Để xác định xem ra đa có thể phát hiện được tàu thám hiểm hay không, ta cần xác định khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm.

Theo đề ta có toạ độ của ra đa là  $(0; 0; 0)$  toạ độ của tàu thám hiểm là  $(25; 15; -10)$ . Khi đó khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm là:

$$d = \sqrt{(25-0)^2 + (15-0)^2 + (-10-0)^2} = 5\sqrt{38} \approx 30,8$$

**Nhận xét:**

Vì phạm vi theo dõi của ra đa là 30 km mà khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm là 30,82 km nên ra đa không phát hiện được tàu thám hiểm.

**HẾT**

Huế, 17h20' Ngày 13 tháng 7 năm 2024



ĐỀ ÔN TẬP SỐ 03\_TrNg 2025

# TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ

Môn: **Toán 12 - KNTT**

**BIỂU THỨC TỌA ĐỘ OXYZ**

**Định hướng cấu trúc 2025**

## Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

Trường THPT Đặng Huy Trứ

SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo

116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế Trung tâm Km10- Hương Trà – Huế

### NỘI DUNG ĐỀ BÀI

Trong quá trình sưu tầm và biên soạn, nếu tài liệu có sai sót gì thì rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô cùng các em học sinh! Xin chân thành cảm ơn!

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ . Tính độ dài của vectơ  $\vec{a}$ .  
 A. 1. B. 4. C. 5. **D. 3.**
- Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2;1;-1)$ ,  $B(1;2;3)$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng  
 A. 18. B.  $3\sqrt{2}$ . C.  $\sqrt{3}$ . **D.  $\sqrt{22}$ .**
- Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; -1; 3)$ . Tọa độ của vectơ  $2\vec{a}$  là  
 A.  $(4; -2; 3)$ . B.  $(4; -1; 3)$ . C.  $(4; -2; 6)$ . **D.  $(4; -2; 5)$ .**
- Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-4; 5; -3)$ ,  $\vec{b} = (2; -2; 1)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ .  
 A.  $\vec{x} = (0; -1; 1)$ . B.  $\vec{x} = (0; 1; -1)$ . C.  $\vec{x} = (-8; 9; -5)$ . **D.  $\vec{x} = (2; 3; -2)$ .**
- Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm  $I$ . Biết  $A(2;1;-1)$ ,  $I(1;2;0)$ . Khi đó, điểm  $B$  có tọa độ là  
 A.  $(1; -1; -1)$ . B.  $(3; 0; -2)$ . C.  $(0; 3; 1)$ . **D.  $(-1; 1; 1)$ .**
- Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G(2;1;0)$  và  $A(1;1;0)$ ,  $B(2;3;5)$ . Tọa độ điểm  $C$  là  
 A.  $(4; 2; -1)$ . B.  $(-6; -2; 0)$ . C.  $(3; -1; -5)$ . **D.  $(-12; 0; 8)$ .**
- Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\triangle ABC$  có  $A(2;1;-2)$ ,  $B(-1;1;2)$ ,  $C(7;-1;2)$ . Độ dài trung tuyến  $AM$  là  
 A.  $5\sqrt{3}$ . B.  $2\sqrt{3}$ . C.  $3\sqrt{2}$ . **D.  $4\sqrt{2}$ .**
- Câu 8:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tọa độ điểm  $A(3; -2; 1)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của điểm  $A$  trên trục  $Ox$ . Độ dài đoạn thẳng  $AH$  bằng  
 A. 3. B.  $\sqrt{10}$ . C. 1. **D.  $\sqrt{5}$ .**
- Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = 3\vec{j} + \vec{k}$  và  $\vec{b} = (1; m; 6)$ . Giá trị thực của tham số  $m$  để  $\vec{a}$  vuông góc với  $\vec{b}$  là  
 A.  $m = 3$ . B.  $m = -2$ . C.  $m = -3$ . **D.  $m = 2$ .**

**Câu 10:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 2 điểm  $B(1;2;-3)$  và  $C(7;4;-2)$ . Nếu điểm  $E$  thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$  thì tọa độ điểm  $E$  là

A.  $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ .      B.  $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$ .      C.  $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$       D.  $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$

**Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; -1; 4)$ ;  $\vec{b} = (3; 0; -2)$ . Khi đó,  $\cos(\vec{a}; \vec{b})$  bằng

A.  $\frac{2}{\sqrt{273}}$ .      B.  $\frac{1}{\sqrt{273}}$ .      C.  $\frac{-1}{\sqrt{273}}$ .      D.  $-\frac{2}{\sqrt{273}}$ .

**Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $B(0;3;1)$ ,  $C(-3;6;4)$ . Biết điểm  $M(a;b;c)$  là điểm nằm trên đoạn  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Tính  $-2a - b + c$ .

A. 5.      B. 0.      C. 2.      D. -2.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ .

| Khẳng định |                                        | Đúng | Sai |
|------------|----------------------------------------|------|-----|
| a)         | $\vec{b} \perp \vec{c}$ .              |      |     |
| b)         | $ \vec{a}  = \sqrt{2}$ .               |      |     |
| c)         | $\vec{a} \perp \vec{b}$ .              |      |     |
| d)         | $ 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}  = 3$ . |      |     |

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;3;4)$ ,  $B(2;-1;0)$ ,  $C(3;1;2)$ .

| Khẳng định |                                                                       | Đúng | Sai |
|------------|-----------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Trung điểm của đoạn thẳng $AB$ là $I\left(\frac{3}{2}; 1; 2\right)$ . |      |     |
| b)         | Trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$ là $G(2; 1; 2)$ .                    |      |     |
| c)         | $\cos BAC = \frac{2\sqrt{11}}{11}$ .                                  |      |     |
| d)         | Diện tích tam giác $ABC$ bằng $3\sqrt{2}$ .                           |      |     |

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;0;0)$  và  $B(-\sqrt{3};1;0)$ .

| Khẳng định |                                                               | Đúng | Sai |
|------------|---------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | $OA = 1$ .                                                    |      |     |
| b)         | $OB = 2$ .                                                    |      |     |
| c)         | $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\sqrt{3}$ . |      |     |
| d)         | Số đo góc $AOB$ của tam giác $OAB$ bằng $150^\circ$ .         |      |     |

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;2;0)$ ,  $B(0;1;1)$ ,  $C(2;1;0)$ .

| Khẳng định |                                                                                 | Đúng | Sai |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ .                                                  |      |     |
| b)         | Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ .                           |      |     |
| c)         | Diện tích tam giác $ABC$ là $\sqrt{6}$ .                                        |      |     |
| d)         | Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là $I\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$ . |      |     |

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G(2;1;0)$  và  $A(1;1;0), B(2;3;5)$ . Biết tọa độ điểm  $C$  là  $(a;b;c)$ , tính  $2a+b+c$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a}=(1;-1;2)$ ,  $\vec{b}=(3;0;-1)$  và  $\vec{c}=(-2;5;1)$ . Biết vectơ  $\vec{d}=(6;-6;0)$  thỏa mãn  $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ , tính  $m^2+n+p^2$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(2;3;-1)$ ,  $N(-1;1;1)$  và  $P(1;m+1;2)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;3)$ ,  $B(-2;-4;9)$ . Biết điểm  $M(a;b;c)$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $3AM=2AB$ , tính  $a+3b+c$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$ , có  $A(0;-4;0)$ ;  $B(-5;6;0)$ ,  $C(3;2;0)$ . Tọa độ chân đường phân giác ngoài của góc  $A$  là  $(a;b;c)$ , tính  $a+4b+c$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....





ĐỀ ÔN TẬP SỐ 03\_TrNg 2025

**TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ****Môn: Toán 12 - KNTT****BIỂU THỨC TỌA ĐỘ OXYZ****Định hướng cấu trúc 2025****LỜI GIẢI CHI TIẾT**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ . Tính độ dài của vectơ  $\vec{a}$ .

A. 1.

B. 4.

C. 5.

**D. 3.****Lời giải:**

$$\text{Ta có } \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = (2; 1; -2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; 1; -1)$ ,  $B(1; 2; 3)$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng

A. 18.

**B.  $3\sqrt{2}$ .**C.  $\sqrt{3}$ .D.  $\sqrt{22}$ .**Lời giải:**

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + (3+1)^2} = 3\sqrt{2}.$$

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; -1; 3)$ . Tọa độ của vectơ  $2\vec{a}$  là

A.  $(4; -2; 3)$ .B.  $(4; -1; 3)$ .**C.  $(4; -2; 6)$ .**D.  $(4; -2; 5)$ .**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \vec{a} = (2; -1; 3) \text{ suy ra } 2\vec{a} = (4; -2; 6).$$

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-4; 5; -3)$ ,  $\vec{b} = (2; -2; 1)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ .

A.  $\vec{x} = (0; -1; 1)$ .**B.  $\vec{x} = (0; 1; -1)$ .**C.  $\vec{x} = (-8; 9; -5)$ .D.  $\vec{x} = (2; 3; -2)$ .**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b} = (-4 + 2.2; 5 + 2.(-2); -3 + 2.1) = (0; 1; -1).$$

**Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm  $I$ . Biết  $A(2; 1; -1)$ ,  $I(1; 2; 0)$ . Khi đó, điểm  $B$  có tọa độ là

A.  $(1; -1; -1)$ .B.  $(3; 0; -2)$ .**C.  $(0; 3; 1)$ .**D.  $(-1; 1; 1)$ .

**Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G(2; 1; 0)$  và  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(2; 3; 5)$ . Tọa độ điểm  $C$  là

A.  $(4; 2; -1)$ .B.  $(-6; -2; 0)$ .**C.  $(3; -1; -5)$ .**D.  $(-12; 0; 8)$ .**Lời giải:**

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \text{ nên } \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \\ z_C = 3z_G - z_A - z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3.2 - 1 - 2 = 3 \\ y_C = 3.1 - 1 - 3 = -1 \\ z_C = 3.0 - 0 - 5 = -5 \end{cases}$$

Do đó:  $C(3; -1; -5)$ .

**Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\Delta ABC$  có  $A(2; 1; -2)$ ,  $B(-1; 1; 2)$ ,  $C(7; -1; 2)$ . Độ dài trung tuyến  $AM$  là

A.  $5\sqrt{3}$ .

B.  $2\sqrt{3}$ .

C.  $3\sqrt{2}$ .

D.  $4\sqrt{2}$ .

**Lời giải:**

Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  suy ra  $M(3; 0; 2)$ .

$$\text{Vậy } AM = \sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2 + (2+2)^2} = 3\sqrt{2}.$$

**Câu 8:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tọa độ điểm  $A(3; -2; 1)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của điểm  $A$  trên trục  $Ox$ . Độ dài đoạn thẳng  $AH$  bằng

A. 3.

B.  $\sqrt{10}$ .

C. 1.

D.  $\sqrt{5}$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $H$  là hình chiếu của điểm  $A$  trên trục  $Ox$  suy ra tọa độ điểm  $H(3; 0; 0)$

$$\text{Vậy } AH = \sqrt{(3-3)^2 + (0+2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}.$$

**Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = 3\vec{j} + \vec{k}$  và  $\vec{b} = (1; m; 6)$ . Giá trị thực của tham số  $m$  để  $\vec{a}$  vuông góc với  $\vec{b}$  là

A.  $m = 3$ .

B.  $m = -2$ .

C.  $m = -3$ .

D.  $m = 2$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\vec{a} = (0; 3; 1)$  và  $\vec{b} = (1; m; 6)$ .

$$\vec{a} \text{ vuông góc với } \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 3m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

**Câu 10:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 2 điểm  $B(1; 2; -3)$  và  $C(7; 4; -2)$ . Nếu điểm  $E$  thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$  thì tọa độ điểm  $E$  là

A.  $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ .

B.  $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$ .

C.  $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ .

D.  $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$ .

**Lời giải:**

Gọi tọa độ điểm  $E(x; y; z)$ , ta có  $\overrightarrow{CE} = (x-7; y-4; z+2)$ .

$$\overrightarrow{EB} = (1-x; 2-y; -3-z) \Rightarrow 2\overrightarrow{EB} = (2-2x; 4-2y; -6-2z).$$

$$\text{Từ đẳng thức } \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}, \text{ suy ra: } \begin{cases} x-7=2-2x \\ y-4=4-2y \\ z+2=-6-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{8}{3} \\ z=-\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow E\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right).$$

**Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; -1; 4)$ ;  $\vec{b} = (3; 0; -2)$ . Khi đó,  $\cos(\vec{a}; \vec{b})$  bằng

A.  $\frac{2}{\sqrt{273}}$ .

B.  $\frac{1}{\sqrt{273}}$ .

C.  $\frac{-1}{\sqrt{273}}$ .

D.  $-\frac{2}{\sqrt{273}}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{273}}.$$

- Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $B(0;3;1)$ ,  $C(-3;6;4)$ . Biết điểm  $M(a;b;c)$  là điểm nằm trên đoạn  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Tính  $-2a - b + c$ .
- A. 5.                      B. 0.                      C. 2.                      D. -2.

**Lời giải:**

Giả sử  $M(x; y; z)$ . Vì  $M$  là điểm nằm trên đoạn  $BC$  thỏa  $MC = 2MB$  nên  $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ .

$$\text{Hay } \begin{cases} x_C - x_M = -2(x_B - x_M) \\ y_C - y_M = -2(y_B - y_M) \\ z_C - z_M = -2(z_B - z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{2x_B + x_C}{3} \\ y_M = \frac{2y_B + y_C}{3} \\ z_M = \frac{2z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = a = -1 \\ y_M = b = 4 \\ z_M = c = 2 \end{cases}.$$

Vậy  $-2a - b + c = 0$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

- Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ .

| Khẳng định |                                        | Đúng | Sai |
|------------|----------------------------------------|------|-----|
| a)         | $\vec{b} \perp \vec{c}$ .              |      |     |
| b)         | $ \vec{a}  = \sqrt{2}$ .               |      |     |
| c)         | $\vec{a} \perp \vec{b}$ .              |      |     |
| d)         | $ 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}  = 3$ . |      |     |

**Lời giải:**

|        |         |         |         |
|--------|---------|---------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|---------|---------|---------|

a) Sai vì  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \neq 0$ .

d) Ta có:  $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (-2; 2; 1) \longrightarrow |2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| = 3$ .

- Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 3; 4)$ ,  $B(2; -1; 0)$ ,  $C(3; 1; 2)$ .

| Khẳng định |                                                                       | Đúng | Sai |
|------------|-----------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Trung điểm của đoạn thẳng $AB$ là $I\left(\frac{3}{2}; 1; 2\right)$ . |      |     |
| b)         | Trọng tâm $G$ của tam giác $ABC$ là $G(2; 1; 2)$ .                    |      |     |
| c)         | $\cos BAC = \frac{2\sqrt{11}}{11}$ .                                  |      |     |
| d)         | Diện tích tam giác $ABC$ bằng $3\sqrt{2}$ .                           |      |     |

**Lời giải:**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

c) Ta có:  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; -4; -4) \longrightarrow AB = \sqrt{33} \\ \overrightarrow{AC} = (2; -2; -2) \longrightarrow AC = 2\sqrt{3} \end{cases}$

Suy ra:  $\cos BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2 + 8 + 8}{\sqrt{1+16+16} \cdot \sqrt{4+4+4}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$ .

d) Ta có:  $\sin BAC = \sqrt{1 - \cos^2 BAC} = \frac{\sqrt{22}}{11}$ . (Với mọi góc  $\alpha$  trong tam giác thì  $\sin \alpha > 0$ )

Vậy diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{33} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{22}}{11} = 3\sqrt{2}$ .

**Cách khác:** Tính  $AB, AC, BC$  và dùng công thức Herong.

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;0;0)$  và  $B(-\sqrt{3};1;0)$ .

| Khẳng định |                                                               | Đúng | Sai |
|------------|---------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | $OA = 1$ .                                                    |      |     |
| b)         | $OB = 2$ .                                                    |      |     |
| c)         | $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\sqrt{3}$ . |      |     |
| d)         | Số đo góc $AOB$ của tam giác $OAB$ bằng $150^\circ$ .         |      |     |

**Lời giải:**

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|---------|---------|---------|

Ta có:  $\overrightarrow{OA} = (1;0;0)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (-\sqrt{3};1;0)$ .

Lúc đó:  $\cos AOB = \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AOB = 150^\circ$ .

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;2;0)$ ,  $B(0;1;1)$ ,  $C(2;1;0)$ .

| Khẳng định |                                                                               | Đúng | Sai |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ .                                                |      |     |
| b)         | Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ .                         |      |     |
| c)         | Diện tích tam giác $ABC$ là $\sqrt{6}$ .                                      |      |     |
| d)         | Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là $I\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$ . |      |     |

**Lời giải:**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-1;-1;1) \Rightarrow AB = \sqrt{3}$

$\overrightarrow{AC} = (1;-1;0) \Rightarrow AC = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC} = (2;0;-1) \Rightarrow BC = \sqrt{5}$

a) Xét  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$

Vậy tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

b) Chu vi tam giác  $ABC$  là  $AB + AC + BC = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$ .

c) Do tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

d) Do tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là trung điểm cạnh huyền  $BC$ .

$$\text{Gọi } I(x; y; z) \text{ là tọa độ của tâm đường tròn ngoại tiếp } ABC \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{0+2}{2} \\ y = \frac{1+1}{2} \\ z = \frac{1+0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là  $I\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$ .

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G(2; 1; 0)$  và  $A(1; 1; 0), B(2; 3; 5)$ . Biết tọa độ điểm  $C$  là  $(a; b; c)$ , tính  $2a + b + c$ .

**Kết quả:**

0

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

.....

**Lời giải:**

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \text{ nên } \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \\ z_C = 3z_G - z_A - z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3 \cdot 2 - 1 - 2 = 3 \\ y_C = 3 \cdot 1 - 1 - 3 = -1 \\ z_C = 3 \cdot 0 - 0 - 5 = -5 \end{cases}$$

Do đó:  $C(3; -1; -5) \rightarrow a = 3; b = -1; c = -5$ .

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (1; -1; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; 0; -1)$  và  $\vec{c} = (-2; 5; 1)$ . Biết vectơ  $\vec{d} = (6; -6; 0)$  thỏa mãn  $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ , tính  $m^2 + n + p^2$ .

**Kết quả:**

3

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

.....

**Lời giải:**

$$\text{Từ giả thiết: } \vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3n - 2p = 6 \\ -m + 5p = -6 \\ 2m - n + p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \\ p = -1 \end{cases}.$$

Suy ra:  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \rightarrow m = 1; n = 1; p = -1$ .

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$  và  $P(1; m+1; 2)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ .

**Kết quả:**

-2

Trình bày:

.....

.....

.....

.....

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{MN} = (-3; -2; 2)$  và  $\overrightarrow{PN} = (-2; -m; -1)$ .

Do tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$  nên  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow 6 + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ .

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(-2; -4; 9)$ . Biết điểm  $M(a; b; c)$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $3AM = 2AB$ , tính  $a + 3b + c$ .

**Kết quả:**

0

Trình bày:

.....

.....

.....

.....

**Lời giải:**



Đặt  $M(x; y; z)$ , khi đó:  $\overrightarrow{MA} = (1 - x; 2 - y; 3 - z)$  và  $\overrightarrow{MB} = (-2 - x; -4 - y; 9 - z)$

$$\text{Ta có: } MA = 2MB \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = -2(-2 - x) \\ 2 - y = -2(-4 - y) \\ 3 - z = -2(9 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(-1; -2; 7) \longrightarrow a = -1; b = -2; c = 7.$$

**Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$ , có  $A(0; -4; 0)$ ;  $B(-5; 6; 0)$ ,  $C(3; 2; 0)$ . Tọa độ chân đường phân giác ngoài của góc  $A$  là  $(a; b; c)$ , tính  $a + 4b + c$ .

**Kết quả:**

-1

Trình bày:

.....

.....

.....

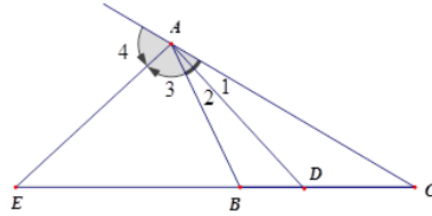
.....

**Lời giải:**

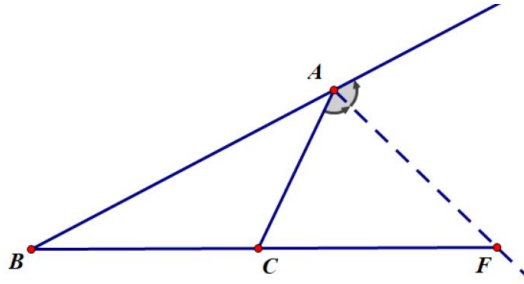
**Chú ý kết quả:**

Cho tam giác  $ABC$  có  $AD, AE$  lần lượt là đường phân giác góc trong và góc ngoài tại đỉnh

$A$ . Khi đó ta có  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$  và  $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$



Gọi  $F(x; y; z)$  là chân đường phân giác ngoài của góc  $A$ .



Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-5; 10; 0) \Rightarrow AB = 5\sqrt{5}$ ;  $\overrightarrow{AC} = (3; 6; 0) \Rightarrow AC = 3\sqrt{5}$ . Do đó  $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$ .

Theo tính chất đường phân giác ngoài của tam giác ta có:  $\frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$ .

$$\text{Từ đó suy ra } \overrightarrow{FB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{FC} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 - x = \frac{5}{3}(3 - x) \\ 6 - y = \frac{5}{3}(2 - y) \\ -z = \frac{5}{3}(-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = -4 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow a = 15; b = -4; c = 0.$$

**Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; 3), B(0; 1; 1), C(1; 0; -2)$ . Biết điểm  $M(a; b; c)$  nằm trên mặt phẳng  $(Oxz)$  sao cho  $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất, tính  $3a + 10b + 6c$ .

**Kết quả:**

1

**Trình bày:**

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**Lời giải:**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}^2 + 2 \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}^2 + 3 \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}^2 \\ &= MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2 + 2 MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2 + 3 MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IC} + IC^2 \\ &= 6MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 \end{aligned}$$

Gọi  $I(a; b; c)$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-a+2 & 0-a+3 & 1-a=0 \\ 2-b+2 & 1-b+3 & 0-b=0 \\ 3-c+2 & 1-c+3 & -2-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=-\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right).$$

Lúc đó:  $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2$

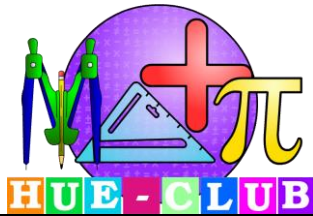
Suy ra:  $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất khi chỉ khi  $MI$  ngắn nhất.

Mà  $M \in Oxz$  nên  $M$  là hình chiếu vuông góc  $I$  của lên  $(Oxz)$ .

Vậy  $M\left(\frac{2}{3}; 0; -\frac{1}{6}\right) \longrightarrow a = \frac{2}{3}; b = 0; c = -\frac{1}{6}$ .

**HẾT**

*Huế, 10h20' Ngày 13 tháng 8 năm 2024*



ĐỀ ÔN TẬP SỐ 04\_TrNg 2025

# TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ

Môn: **Toán 12 - KNTT**

**BIỂU THỨC TỌA ĐỘ OXYZ**

**Định hướng cấu trúc 2025**

## Lớp Toán thầy **LÊ BÁ BẢO**

Trường THPT Đặng Huy Trứ

SĐT: **0935.785.115** Facebook: **Lê Bá Bảo**

**116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế** Trung tâm Km10- Hương Trà – Huế

### NỘI DUNG ĐỀ BÀI

Trong quá trình sưu tầm và biên soạn, nếu tài liệu có sai sót gì thì rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô cùng các em học sinh! Xin chân thành cảm ơn!

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (2; -1; 4)$ . Tọa độ của vectơ  $-\vec{a}$  là  
 A.  $(-2; 1; -4)$ .      B.  $(2; -1; -4)$ .      C.  $(-2; -1; 4)$ .      D.  $(2; 1; 4)$ .
- Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (1; 2; 3)$  và  $\vec{b} = (4; 5; 6)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{a} + \vec{b}$  tương ứng là  
 A.  $(5; 7; 9)$ .      B.  $(3; 7; 9)$ .      C.  $(5; 3; 9)$ .      D.  $(3; 5; 9)$ .
- Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{u} = (1; 2; 3)$  và  $\vec{v} = (4; -5; 6)$ . Tìm tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .  
 A. 12.      B. 20.      C. 14.      D. 28
- Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; 3)$  và điểm  $B(3; 4; 5)$ . Tọa độ điểm  $C$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là  
 A.  $(2; 3; 4)$ .      B.  $(1; 3; 5)$ .      C.  $(2; 4; 3)$ .      D.  $(2; 2; 3)$ .
- Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; 2; -5), B(1; 2; 4), C(2; 5; -2)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABC$  là  
 A.  $G(6; 9; -3)$ .      B.  $G(2; 3; -1)$ .      C.  $G(2; 3; 1)$ .      D.  $G(6; 9; 3)$ .
- Câu 6:** Trong không gian  $Oxz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (1; 2; 3)$  và  $\vec{b} = (2; -1; 1)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ .  
 A.  $(-1; 8; 7)$ .      B.  $(3; 4; 5)$ .      C.  $(-1; 7; 7)$ .      D.  $(4; 5; 6)$ .
- Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm đối xứng với điểm  $M(2; 2; -1)$  qua mặt phẳng  $(Oyz)$  là  
 A.  $M'(2; -2; 1)$ .      B.  $M'(-2; 0; 0)$ .      C.  $M'(-2; -2; 1)$ .      D.  $M'(-2; 2; -1)$ .
- Câu 8:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1; -2; 3)$ . Điểm đối xứng với  $M$  qua trục  $Oy$  là  
 A.  $M_2(1; 2; 3)$ .      B.  $M_3(-1; 2; -3)$ .      C.  $M_4(-1; -2; -3)$ .      D.  $M_1(1; -2; -3)$ .
- Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$ , với  $A(1; 2; 1), B(-3; 0; 3), C(2; 4; -1)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.  
 A.  $D(6; 6; -3)$ .      B.  $D(6; -6; 3)$ .      C.  $D(6; 6; 3)$ .      D.  $D(6; -6; -3)$ .
- Câu 10:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (1; -2; 3)$  và  $\vec{b} = (-2; 1; 2)$ . Tích vô hướng  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$  bằng  
 A. 12.      B. 2.      C. 11.      D. 10.

**Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (1; 0; 0)$  và  $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ . Góc giữa hai vectơ này là  
 A.  $30^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $90^\circ$ .

**Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 1); B(2; -1; 3)$  và điểm  $M(a; b; 0)$  sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất. Giá trị của  $a + b$  là  
 A. 3.                      B. -2.                      C. 1.                      D. 2.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; -2; 3), B(-2; 1; 2), C(3; -1; 2)$ .

- a)  $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; 1)$ .
- b)  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ .
- c) Ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.
- d) Tọa độ chân đường cao vẽ từ  $A$  của tam giác  $ABC$  là  $\left(-\frac{47}{29}; \frac{13}{29}; 2\right)$ .

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; 3; 5), B(1; 1; 3), C(4; -2; 3)$ .

- a) Tọa độ trung điểm của  $BC$  là  $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 3\right)$ .
- b)  $BC = 3\sqrt{2}$ .
- c)  $\cos BAC = \frac{7\sqrt{19}}{38}$ .
- d) Gọi  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ABCD$ . Tọa độ hình chiếu của trọng tâm tam giác  $ABD$  lên mặt phẳng  $Oyz$  là  $(2; 0; 0)$ .

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - \vec{k}$ , với  $\vec{i}, \vec{k}$  là hai vectơ đơn vị trên hai trục tọa độ  $Ox, Oz$ , hai điểm  $B(-1; 2; 3), C(1; 4; 1)$ .

- a)  $A(3; 0; -1)$ .
- b) Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.
- c) Điểm  $D(a; b; c)$  là điểm đối xứng của với  $A$  qua  $B$ . Khi đó  $a + b + c = 6$ .
- d) Điểm  $M(m; n; p)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $2m - n + 2024p = 0$ .

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; 3), B(2; 1; 5), C(2; 4; 2)$ .

- a) Tọa độ trung điểm của  $AB$  là  $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 4\right)$ .
- b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (5; 7; 10)$ .
- c) Góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $AC$  bằng  $30^\circ$ .
- d) Điểm  $I(a; b; c)$  nằm trên mặt phẳng  $(Oxz)$  thỏa mãn  $T = |3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $a - 2b + 2c = 15$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; m - 1; 3), \vec{b} = (1; 3; -2n)$ . Nếu  $\vec{a}$  cùng phương với  $\vec{b}$  thì giá trị  $m + n$  bằng bao nhiêu?

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-1;-1;1)$  và  $B(3;-1;1)$ . Điểm  $M(a;b;c)$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ . Tính  $a - 2b + c$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là  $1m$ ), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm  $A(10;3;0)$  và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí  $D$  cách  $A$   $4050m$ . Biết đường đi của cabin cùng phương với vectơ  $\vec{u}(2;-2;1)$  và sau 3 phút kể từ khi xuất phát thì cabin đến vị trí  $B$  có hoành độ  $x_B = 550$ . Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường  $AD$  là bao nhiêu phút?

**Kết quả:**

**Trình bày:**

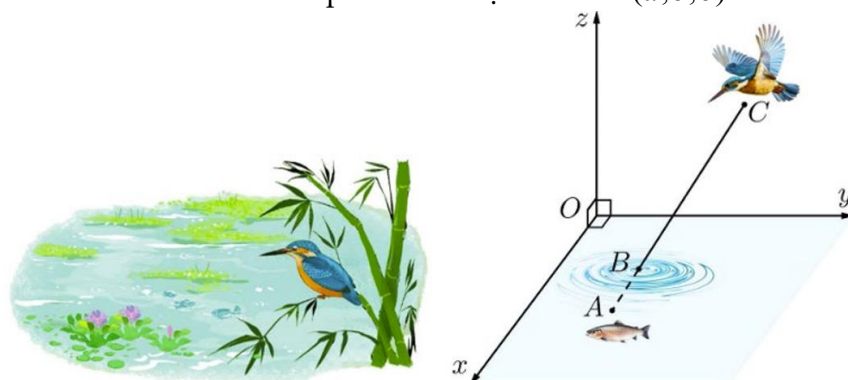
.....

.....

.....

.....

**Câu 4:** Với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho  $O$  nằm trên mặt nước, mặt phẳng  $(Oxy)$  là mặt nước, trục  $Oz$  hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước  $2m$ , cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $3m$  và  $1m$  phóng thẳng xuống vị trí con cá cách mặt nước  $50cm$ , cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $1m$  và  $1,5m$ . Tọa độ điểm  $B$  lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước là  $(a;b;c)$ . Tính  $T = 5a + 15b + 25c$ .



**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

### Kết quả:

|  |
|--|
|  |
|--|

*Trình bày:*

[illegible]

The diagram shows a cone with vertex  $O$  and a horizontal base. A horizontal line passes through  $O$ . Three forces,  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ , and  $\vec{F}_3$ , are shown acting on the cone's surface, originating from  $O$  and pointing towards points  $A$ ,  $B$ , and  $C$  respectively. A line segment labeled  $L$  connects  $O$  to point  $C$ . The base of the cone is an ellipse with center  $I$ . A vertical line segment of length 18 in. is shown from  $I$  to the base of the cone. A force vector  $\vec{P}$  acts downwards from  $I$ .

### Kết quả:

\_\_\_\_\_

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

.....

HẾT

**Huế, 10h20' Ngày 16 tháng 8 năm 2025**



ĐỀ ÔN TẬP SỐ 04\_TrNg 2025

# TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ

Môn: **Toán 12 - KNTT**

**BIỂU THỨC TỌA ĐỘ OXYZ**

**Định hướng cấu trúc 2025**

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (2; -1; 4)$ . Tọa độ của vectơ  $-\vec{a}$  là  
**A.**  $(-2; 1; -4)$ . **B.**  $(2; -1; -4)$ . **C.**  $(-2; -1; 4)$ . **D.**  $(2; 1; 4)$ .

Lời giải

Ta có  $-\vec{a} = (-2; 1; -4)$ .

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (1; 2; 3)$  và  $\vec{b} = (4; 5; 6)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{a} + \vec{b}$  tương ứng là  
**A.**  $(5; 7; 9)$ . **B.**  $(3; 7; 9)$ . **C.**  $(5; 3; 9)$ . **D.**  $(3; 5; 9)$ .

Lời giải:

Ta có  $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 4; 2 + 5; 3 + 6) = (5; 7; 9)$ .

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{u} = (1; 2; 3)$  và  $\vec{v} = (4; -5; 6)$ . Tìm tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .  
**A.** 12. **B.** 20. **C.** 14. **D.** 28

Lời giải:

Ta có  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6 = 12$ .

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; 3)$  và điểm  $B(3; 4; 5)$ . Tọa độ điểm  $C$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là  
**A.**  $(2; 3; 4)$ . **B.**  $(1; 3; 5)$ . **C.**  $(2; 4; 3)$ . **D.**  $(2; 2; 3)$ .

Lời giải:

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = 3 \\ z_C = \frac{z_A + z_B}{2} = 4. \end{cases} \text{ Vậy } C(2; 3; 4).$$

**Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; 2; -5)$ ,  $B(1; 2; 4)$ ,  $C(2; 5; -2)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABC$  là  
**A.**  $G(6; 9; -3)$ . **B.**  $G(2; 3; -1)$ . **C.**  $G(2; 3; 1)$ . **D.**  $G(6; 9; 3)$ .

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_G = \frac{3+1+2}{3} \\ y_G = \frac{2+2+5}{3} \\ z_G = \frac{-5+4-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = 3 \\ z_G = -1. \end{cases} \text{ Vậy } G(2;3;-1).$$

**Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (1;2;3)$  và  $\vec{b} = (2;-1;1)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ .

- A.**  $(-1;8;7)$ . **B.**  $(3;4;5)$ . **C.**  $(-1;7;7)$ . **D.**  $(4;5;6)$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = (3 \cdot 1 - 2 \cdot 2; 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1); 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = (-1;8;7)$ .

**Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm đối xứng với điểm  $M(2;2;-1)$  qua mặt phẳng  $(Oyz)$  là

- A.**  $M'(2;-2;1)$ . **B.**  $M'(-2;0;0)$ . **C.**  $M'(-2;-2;1)$ . **D.**  $M'(-2;2;-1)$ .

**Lời giải:**

Điểm đối xứng với điểm  $M(2;2;-1)$  qua mặt phẳng  $(Oyz)$  là  $M'(-2;2;-1)$ .

**Câu 8:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1;-2;3)$ . Điểm đối xứng với  $M$  qua trục  $Oy$  là

- A.**  $M_2(1;2;3)$ . **B.**  $M_3(-1;2;-3)$ . **C.**  $M_4(-1;-2;-3)$ . **D.**  $M_1(1;-2;-3)$ .

**Lời giải:**

Ta có  $M(1;-2;3)$ .

Vậy điểm đối xứng với  $M$  qua trục  $Oy$  là  $M_4(-1;-2;-3)$ .

**Câu 9:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho tam giác  $ABC$ , với  $A(1;2;1), B(-3;0;3), C(2;4;-1)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

- A.**  $D(6;6;-3)$ . **B.**  $D(6;-6;3)$ . **C.**  $D(6;6;3)$ . **D.**  $D(6;-6;-3)$ .

**Lời giải:**

Gọi  $D(x;y;z)$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-4;-2;2); \overrightarrow{DC} = (2-x;4-y;-1-z)$ .

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 2-x \\ -2 = 4-y \\ 2 = -1-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \\ z = -3. \end{cases} \text{ Vậy } D(6;6;-3).$$

**Câu 10:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (1;-2;3)$  và  $\vec{b} = (-2;1;2)$ . Tích vô hướng  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$  bằng

- A.** 12. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 10.

**Lời giải:**

Ta có  $\vec{a} + \vec{b} = (-1;-1;5)$ .

Suy ra  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11$ .

**Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (1;0;0)$  và  $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ . Góc giữa hai vectơ

này là

- A.**  $30^\circ$ . **B.**  $45^\circ$ . **C.**  $60^\circ$ . **D.**  $90^\circ$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}$$

Suy ra  $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ .

**Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;1); B(2;-1;3)$  và điểm  $M(a;b;0)$  sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất. Giá trị của  $a + b$  là

A. 3.

B. -2.

C. 1.

**D. 2.**

**Lời giải:**

Ta thấy  $M(a;b;0) \in (Oxy)$ . Gọi  $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MA^2 + MB^2 &= \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = (\overline{IA} - \overline{IM})^2 + (\overline{IB} - \overline{IM})^2 \\ &= (\overline{IA}^2 + \overline{IM}^2 - 2\overline{IA} \cdot \overline{IM}) + (\overline{IB}^2 + \overline{IM}^2 - 2\overline{IB} \cdot \overline{IM}) = 2\overline{IM}^2 + 2\overline{IA}^2 = 2\overline{IM}^2 + 7 \end{aligned}$$

Suy ra  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow IM$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow M$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$ .

$$\text{Suy ra } M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right). \text{ Như vậy } a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1;-2;3), B(-2;1;2), C(3;-1;2)$ .

a)  $\overline{AB} = (-3; 3; 1)$ .

b)  $\overline{AB} = 3\overline{AC}$ .

c) Ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

d) Tọa độ chân đường cao vẽ từ  $A$  của tam giác  $ABC$  là  $\left(-\frac{47}{29}; \frac{13}{29}; 2\right)$ .

**Lời giải**

a) Sai: Ta có  $\overline{AB} = (-3; 3; -1)$ .

b) Sai: Ta có  $\overline{AC} = (2; 1; -1) \Rightarrow 3\overline{AC} = (6; 3; -3)$ . Do đó  $\overline{AB} \neq 3\overline{AC}$ .

c) Đúng: Vì  $\overline{AB} = (-3; 3; 1), \overline{AC} = (2; 1; -1)$  suy ra  $\overline{AB}, \overline{AC}$  không cùng phương. Vậy  $A, B, C$  không thẳng hàng.

d) Sai: Gọi  $A'(x; y; z)$  là chân đường cao vẽ từ  $A$  của tam giác  $ABC$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overline{AA'} \cdot \overline{BC} = 0 & (1) \\ \overline{BC}, \overline{BA'} \text{ cùng phương} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \overline{AA'} = (x-1; y+2; z-3), \overline{BC} = (5; -2; 0), \overline{BA'} = (x+2; y-1; z-2).$$

$$(1) \Leftrightarrow 5 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y+2) + 0 \cdot (z-3) = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y = 9.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-2} \\ z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y=1 \\ z=2 \end{cases}. \text{ Suy ra } \begin{cases} x = \frac{47}{29} \\ y = -\frac{13}{29} \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{47}{29}; -\frac{13}{29}; 2\right).$$

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1;3;5), B(1;1;3), C(4;-2;3)$ .

a) Tọa độ trung điểm của  $BC$  là  $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 3\right)$ .

b)  $BC = 3\sqrt{2}$ .

c)  $\cos BAC = \frac{7\sqrt{19}}{38}$ .

d) Gọi  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ABCD$ . Tọa độ hình chiếu của trọng tâm tam giác  $ABD$  lên mặt phẳng  $Oyz$  là  $(2;0;0)$ .

**Lời giải**

a) Đúng: Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} \\ z_M = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{3+3}{2} = 3 \end{cases} \text{ Suy ra } M\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 3\right).$$

b) Đúng. Ta có  $BC = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-1)^2 + (3-3)^2} = 3\sqrt{2}$ .

c) Đúng: Ta có  $\overrightarrow{AB} = (0; -2; -2), \overrightarrow{AC} = (3; -5; -2)$ .

$$\cos BAC = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{0 \cdot 3 + (-2) \cdot (-5) + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-2)^2}} = \frac{7\sqrt{19}}{38}.$$

d) Sai: Gọi  $D(x; y; z)$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (0; -2; -2); \overrightarrow{DC} = (4-x; -2-y; 3-z)$ .

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4-x \\ -2 = -2-y \\ -2 = 3-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 5 \end{cases} \text{ suy ra } D(4;0;5).$$

$$\text{Gọi } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABD. \text{ Ta có } \begin{cases} x_G = \frac{1+1+4}{3} \\ y_G = \frac{3+1+0}{3} \\ z_G = \frac{5+3-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = \frac{4}{3} \\ z_G = \frac{7}{3} \end{cases} \text{ suy ra } G\left(2; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Vậy hình chiếu của  $G$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$  là  $H\left(0; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ .

**Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - \vec{k}$ , với  $\vec{i}, \vec{k}$  là hai vectơ đơn vị trên hai trục tọa độ  $Ox, Oz$ , hai điểm  $B(-1;2;3), C(1;4;1)$ .

a)  $A(3;0;-1)$ .

b) Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

c) Điểm  $D(a;b;c)$  là điểm đối xứng của với  $A$  qua  $B$ . Khi đó  $a+b+c=6$ .

d) Điểm  $M(m;n;p)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $2m - n + 2024p = 0$ .

**Lời giải**

a) Đúng: Vì  $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - \vec{k}$  nên  $A(3;0;-1)$ .

b) Sai: Ta có  $\overrightarrow{AB} = (4; 2; 4), \overrightarrow{AC} = (-2; 4; 2)$ .

Vì  $\frac{4}{-2} \neq \frac{2}{4} \neq \frac{4}{2}$  nên  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  không cùng phương suy ra  $A, B, C$  không thẳng hàng.

c) Đúng: Vì  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $B$  nên  $B$  là trung điểm của  $AD$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_D = 2x_B - x_A = -5 \\ y_D = 2y_B - y_A = 4 \\ z_D = 2z_B - z_A = 7. \end{cases} \text{ suy ra } D(-5; 4; 7).$$

Do đó  $a = -5, b = 4, c = 7$ . Vậy  $a + b + c = 6$ .

d) Đúng. Gọi  $I(x; y; z)$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 3 - x - 1 - x + 1 - x = 0 \\ 0 - y + 2 - y + 4 - y = 0 \\ -1 - z + 3 - z + 1 - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(1; 2; 1)$$

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 \end{aligned}$$

Do  $IA^2 + IB^2 + IC^2$  không thay đổi nên  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  nhỏ nhất khi  $MI$  nhỏ nhất hay  $M$  là hình chiếu của điểm  $I$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$ .

Do đó  $M(1; 2; 0)$  suy ra  $m = 1, n = 2, p = 0$ .

Vậy  $2m - n + 2024p = 2 - 2 + 0 = 0$ .

**Câu 4:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; 3), B(2; 1; 5), C(2; 4; 2)$ .

a) Tọa độ trung điểm của  $AB$  là  $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 4\right)$ .

b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (5; 7; 10)$ .

c) Góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $AC$  bằng  $30^\circ$ .

d) Điểm  $I(a; b; c)$  nằm trên mặt phẳng  $(Oxz)$  thỏa mãn  $T = |3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Khi đó,  $a - 2b + 2c = 15$ .

**Lời giải**

$$\text{a) Đúng: Gọi } I \text{ là trung điểm } AB. \text{ Ta có } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3+5}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 4\right)$$

b) Đúng: Ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (5; 7; 10)$ .

c) Sai: Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; 2; -1)$ .

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}$$

Suy ra  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$ .

d) Đúng: Gọi  $K(x; y; z)$  thỏa mãn  $3\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2-x) - (2-x) = 0 \\ 3(1-y) - (4-y) = 0 \\ 3(5-z) - (2-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{13}{2} \end{cases}$

Suy ra  $K\left(2; -\frac{1}{2}; \frac{13}{2}\right)$ . Khi đó  $T = |3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}| = |3\overrightarrow{IK} + 3\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{IK} - \overrightarrow{KC}| = |2\overrightarrow{IK}| = 2IK$ .

$T$  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $I$  là hình chiếu của  $K$  trên  $(Oxz)$  suy ra  $I\left(2; 0; \frac{13}{2}\right)$ .

Suy ra  $a = 2, b = 0, c = \frac{13}{2}$ . Vậy  $a - 2b + 2c = 15$ .

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; m-1; 3), \vec{b} = (1; 3; -2n)$ . Nếu  $\vec{a}$  cùng phương với  $\vec{b}$  thì giá trị  $m+n$  bằng bao nhiêu (kết quả dưới dạng thập phân)?

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

.....

Nếu  $\vec{a}$  cùng phương với  $\vec{b}$  thì tồn tại số thực  $t$  sao cho  $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$ .

Suy ra:  $\begin{cases} 2 = 1t \\ m-1 = 3t \\ 3 = -2nt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}$  do đó  $m+n = \frac{25}{4} = 6,25$ .

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-1; -1; 1)$  và  $B(3; -1; 1)$ . Điểm  $M(a; b; c)$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ . Tính  $a - 2b + c$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

.....

Gọi  $M(x; y; z)$  ta có  $\overrightarrow{AM} = (x+1; y+1; z-1)$  và  $\overrightarrow{MB} = (3-x; -1-y; 1-z)$ .

Do đó:  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3(3-x) \\ y+1 = 3(-1-y) \\ z-1 = 3(1-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

Suy ra  $M(2; -1; 1)$ . Suy ra  $a = 2, b = -1, c = 1$  suy ra  $a - 2b + c = 2 + 2 + 1 = 5$ .

**Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là  $1m$ ), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm  $A(10; 3; 0)$  và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí  $D$  cách  $A$

4050 m. Biết đường đi của cabin cùng phương với vectơ  $\vec{u}(2; -2; 1)$  và sau 3 phút kể từ khi xuất phát thì cabin đến vị trí  $B$  có hoành độ  $x_B = 550$ . Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường  $AD$  là bao nhiêu phút?

**Kết quả:**

**Trình bày:**

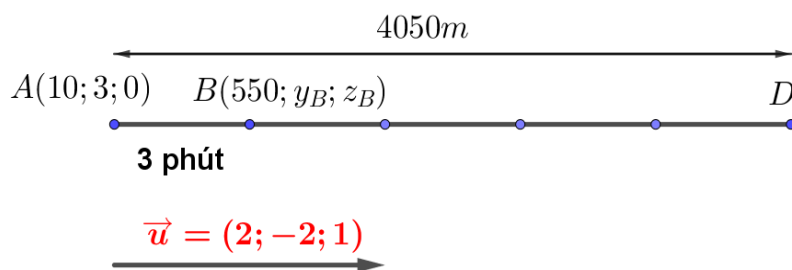
.....

.....

.....

.....

**Đáp án: 15**



Ta có:  $\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$ ,  $k \neq 0$  (do  $\overrightarrow{AB}$  và  $\vec{u}$  cùng phương)

$$\Leftrightarrow (540; y_B - 3; z_B) = k(2; -2; 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 540 = 2k \\ y_B - 3 = -2k \\ z_B = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 270 \\ y_B = -537 \\ z_B = 270 \end{cases}$$

Suy ra  $B(550; -537; 270)$ .

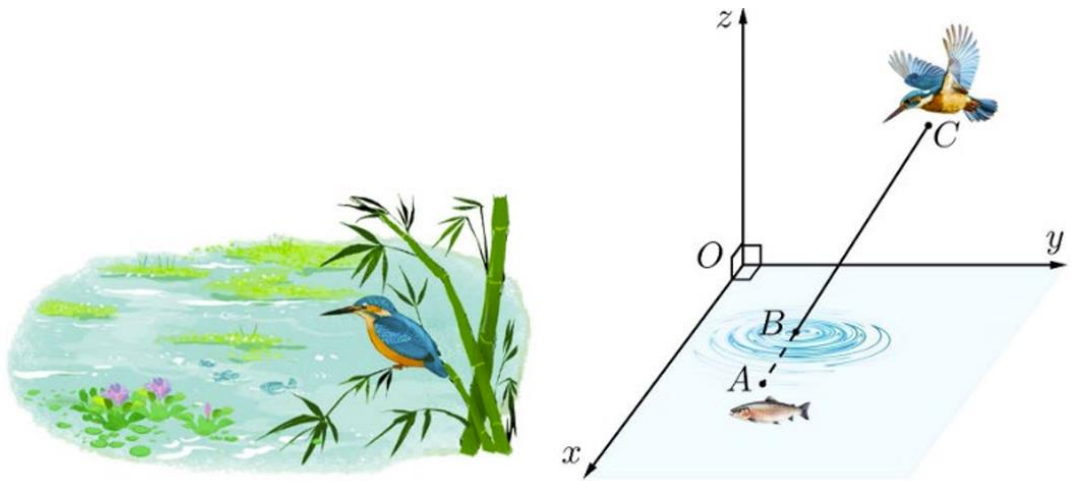
$$\Rightarrow AB = \sqrt{(550 - 10)^2 + (-537 - 3)^2 + (270 - 0)^2} = 810 \text{ (m)}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{AD}{AB} = \frac{4050}{810} = 5 \text{ hay } AD = 5AB.$$

Mà vận tốc không đổi chuyển động đều theo cáp thẳng đến  $D$  và thời gian di chuyển từ  $A$  đến  $B$  là 3 phút

Nên thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường  $AD$  là  $5 \cdot 3 = 15$  (phút).

**Câu 4:** Với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho  $O$  nằm trên mặt nước, mặt phẳng  $(Oxy)$  là mặt nước, trục  $Oz$  hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước  $2m$ , cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $3m$  và  $1m$  phóng thẳng xuống vị trí con cá cách mặt nước  $50cm$ , cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $1m$  và  $1,5m$ . Tọa độ điểm  $B$  lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước là  $(a; b; c)$ . Tính  $T = 5a + 15b + 25c$ .



**Kết quả:**

**Trình bày:**

**Đáp án: 28.**

Ta quy ước cứ  $1m = 1$  đơn vị trong hệ tọa độ  $Oxyz$ .

Gọi vị trí của con chim bới cá ban đầu là  $C$ , khi đó nó cách phía trên mặt nước  $2m$  nên  $z_C = 2$ , ngoài ra cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $3m$  và  $1m$  nên  $y_C = 3$  và  $x_C = 1$ . Do đó tọa độ điểm  $C(1;3;2)$ .

Gọi vị trí của con cá là  $A$ , khi đi con cá đang dưới mặt nước  $50cm = 0,5m$  nên  $z_A = -0,5$ , ngoài ra cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $1m$  và  $1,5m$  nên  $y_A = 1$  và  $x_A = 1,5$ . Do đó tọa độ điểm  $A(1,5;1;-0,5)$

Vì điểm  $B$  lúc chim bới cá vừa tiếp xúc với mặt nước nên  $B \in (Oxy)$  hay  $c = 0$  khi đó tọa độ  $B(a;b;0)$ .

$$\text{Ta có 3 điểm } A, B, C \text{ thẳng hàng nên: } \overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=0,5k \\ b-3=-2k \\ -2=-2,5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{5} \\ b=\frac{7}{5} \\ k=\frac{4}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } B\left(\frac{7}{5}; \frac{7}{5}; 0\right) \text{ suy ra } T = 5a + 15b + 25c = 28.$$

**Câu 5:** Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm  $A(3;1;0)$ ,  $B(3;6;6)$ ,

$C(4;6;2)$ ,  $D(6;2;14)$ ; vị trí  $M(a;b;c)$  thỏa mãn  $MA=3$ ,  $MB=6$ ,  $MC=5$ ,  $MD=13$ . Khoảng cách từ điểm  $M$  đến điểm  $O$  bằng bao nhiêu?

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Đáp án: 3.**

Do vị trí  $M(a;b;c)$  thỏa mãn  $MA=3$ ,  $MB=6$ ,  $MC=5$ ,  $MD=13$

$$\overrightarrow{AM} = (a-3; b-1; c) \Rightarrow (a-3)^2 + (b-1)^2 + c^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 2b + 1 = 0(1)$$

$$\overrightarrow{BM} = (a-3; b-6; c-6) \Rightarrow (a-3)^2 + (b-6)^2 + (c-6)^2 = 6^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 12b - 12c + 45 = 0(2)$$

$$\overrightarrow{CM} = (a-4; b-6; c-2) \Rightarrow (a-4)^2 + (b-6)^2 + (c-2)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 8a - 12b - 4c + 31 = 0(3)$$

$$\overrightarrow{DM} = (a-6; b-2; c-14) \Rightarrow (a-6)^2 + (b-2)^2 + (c-14)^2 = 13^2$$

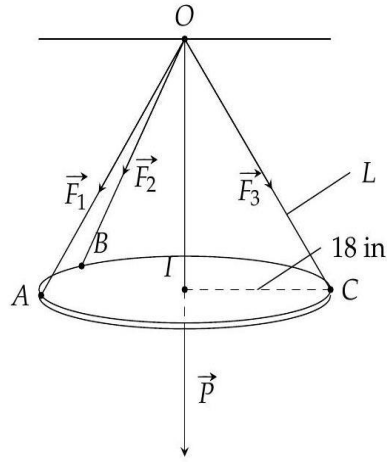
$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 12a - 4b - 28c + 67 = 0(4)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3), (4) ta có hệ phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} 10b + 12c = 44 \\ 2a + 10b + 4c = 30 \\ 6a + 2b + 28c = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(1;2;2) \Rightarrow \overrightarrow{OM}(1;2;2) \Rightarrow OM = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

Vậy khoảng cách từ điểm  $M$  đến điểm  $O$  bằng 3.

**Câu 6:** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm  $A, B, C$  trên đèn tròn sao cho tam giác  $ABC$  đều (Hình vẽ bên). Độ dài của ba đoạn dây  $OA, OB, OC$  đều bằng  $L$ . Trọng lượng của chiếc đèn là 24 N và bán kính của chiếc đèn là 18 in ( 1 inch = 2,54 cm). Gọi  $F$  là độ lớn của các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  trên mỗi sợi dây. Khi đó  $F = F(L)$  là một hàm số với biến số là  $L$ . Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây (tính bằng inch), biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N.



**Kết quả:**

**Trình bày:**

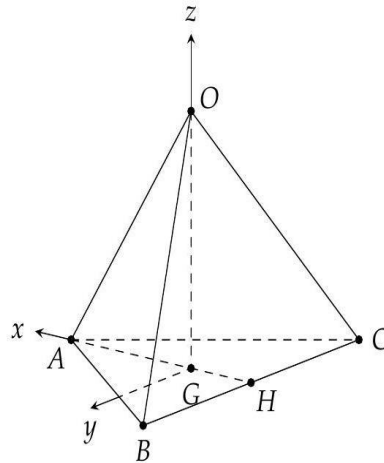
.....

.....

.....

.....

.....



Vì tam giác  $ABC$  là tam giác đều, độ dài ba đoạn dây  $OA, OB, OC$  đều bằng  $L, (L > 0)$ .

Ta chọn hệ trục như hình vẽ, với  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  và  $H$  là trung điểm  $BC$ . Trong đó  $A, H$  nằm trên trục  $Gx$  và  $O$  nằm trên trục  $Gz$ .

Bán kính của chiếc đèn là 18 nên  $AG = 18$  suy ra  $AB = 18\sqrt{3}$  và  $BH = HC = 9\sqrt{3}$ .

Do đó, ta có  $G(0,0,0), A(18,0,0), B(-9,9\sqrt{3},0), C(-9,-9\sqrt{3},0)$ .

Xét tam giác vuông  $AOG$ , suy ra  $OG = \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{L^2 - 18^2}$  nên  $O(0;0;\sqrt{L^2 - 18^2})$ .

Ta có  $\overrightarrow{OA} = (18;0;-\sqrt{L^2 - 18^2}), \overrightarrow{OB} = (-9;9\sqrt{3};-\sqrt{L^2 - 18^2})$  và  $\overrightarrow{OC} = (-9;-9\sqrt{3};-\sqrt{L^2 - 18^2})$ .

Suy ra  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = L$  và  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$ .

Tồn tại hằng số  $c \neq 0$  sao cho  $\vec{F}_1 = c \cdot \overrightarrow{OA} = (18c;0;-c\sqrt{L^2 - 18^2})$ ;

$\vec{F}_2 = c \cdot \overrightarrow{OB} = (-9c;9c\sqrt{3};-c\sqrt{L^2 - 18^2})$ ;  $\vec{F}_3 = c \cdot \overrightarrow{OC} = (-9c;-9c\sqrt{3};-c\sqrt{L^2 - 18^2})$

Suy ra  $\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0;0;-3c\sqrt{L^2 - 18^2})$ , trong đó  $\vec{P}$  là trọng lực tác dụng lên bóng đèn.

Mà trọng lượng của bóng đèn là 24N nên

$$|\vec{P}| = 24 \Leftrightarrow 9c^2(L^2 - 18^2) = 24^2 \Leftrightarrow c = \frac{8}{\sqrt{L^2 - 18^2}}, \forall L \in (18; +\infty)$$

$$\text{Vậy } F = |F_1| = |F_2| = |F_3| = \frac{8L}{\sqrt{L^2 - 18^2}}.$$

$$\text{Xét hàm số } F = \frac{8L}{\sqrt{L^2 - 18^2}} \text{ trên } (18; +\infty).$$

$$\text{Ta có } F' = \frac{-2592}{(L^2 - 18^2)\sqrt{L^2 - 18^2}} < 0, \forall L \in (18; +\infty).$$

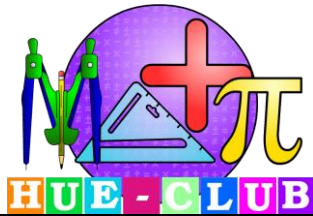
Mỗi sợi dây được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N.

$$\text{Suy ra } F(L) \leq 10 \Leftrightarrow F(L) \leq F(30) \Leftrightarrow L \geq 30.$$

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây bằng 30 in thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**HẾT**

*Huế, 10h20' Ngày 16 tháng 8 năm 2025*



ĐỀ ÔN TẬP SỐ 05\_TrNg 2025

**TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ****Môn: Toán 12 - KNTT****BIỂU THỨC TỌA ĐỘ OXYZ****Định hướng cấu trúc 2025+****Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO**

Trường THPT Đặng Huy Trứ

SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo

116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế Trung tâm Km10- Hương Trà – Huế

**NỘI DUNG ĐỀ BÀI**

Trong quá trình sưu tầm và biên soạn, nếu tài liệu có sai sót gì thì rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô cùng các em học sinh! Xin chân thành cảm ơn!

**PHẦN I. (3,0 điểm)** Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho điểm  $M(1; -\sqrt{2}; \sqrt{3})$ . Tìm điểm  $M' \in Ox$  sao cho độ dài đoạn thẳng  $MM'$  ngắn nhất.
- A.  $M'(-1; 0; 0)$ .      B.  $M'(1; 0; 0)$ .      C.  $M'(1; 0; \sqrt{3})$ .      D.  $M'(1; -\sqrt{2}; 0)$ .
- Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-1; 2; -3)$  và  $B(2; -1; 0)$ . Tọa độ của vector  $\overrightarrow{AB}$  là
- A.  $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1)$ .      B.  $\overrightarrow{AB} = (3; 3; -3)$ .      C.  $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -3)$ .      D.  $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 3)$ .
- Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1; 2; 3)$ . Tìm tọa độ hình chiếu  $M$  lên trục  $Ox$ .
- A.  $(2; 0; 0)$       B.  $(1; 0; 0)$ .      C.  $(3; 0; 0)$ .      D.  $(0; 2; 3)$
- Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho vectơ  $\vec{u} = \vec{j} - 4\vec{k}$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{u}$  là
- A.  $(1; -4)$ .      B.  $(0; 1; -4)$ .      C.  $(1; 0; -4)$ .      D.  $(0; -1; 4)$ .
- Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; -2; 1)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  có tọa độ là
- A.  $(2; -2; 0)$ .      B.  $(2; 0; 1)$ .      C.  $(0; -2; 1)$ .      D.  $(0; 0; 1)$ .
- Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho  $\vec{a} = (1; 3; -1)$  và  $\vec{b} = (2; 3; 6)$ . Khi đó, tọa độ của vectơ  $\vec{a} + 2\vec{b}$  là
- A.  $(5; -9; -11)$ .      B.  $(5; -9; 11)$ .      C.  $(5; 9; 11)$ .      D.  $(-5; 9; 11)$ .
- Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho điểm  $M(-2; 5; 7)$ . Tọa độ của vector  $\overrightarrow{MO}$  là
- A.  $(-2; -5; 7)$ .      B.  $(-2; 5; 7)$ .      C.  $(2; -5; -7)$ .      D.  $(2; 5; 7)$ .
- Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 1; 1)$  và  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (4; 0; -6)$ . Tọa độ trung điểm  $M$  của  $BC$  là
- A.  $(5; 1; -5)$ .      B.  $(3; -1; -7)$ .      C.  $(1; -1; -4)$ .      D.  $(3; 1; -2)$ .
- Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ;  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?
- A.  $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ .      B.  $|\vec{a}| = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ .  
C.  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$ .      D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3$ .
- Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho các điểm  $A(3; 0; 0)$ ,  $B(0; -4; 0)$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng

A. 7. B. 4. C. 3. D. 5.

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(-3;1;2)$ ,  $B(-2;4;-1)$ ,  $C(1;-3;3)$ . Tọa độ điểm  $D$  là

A.  $(0;-6;6)$ . B.  $(-6;7;-2)$ . C.  $(2;0;0)$ . D.  $(-4;2;5)$ .

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1;-2;1)$ ,  $\vec{b} = (-2;1;1)$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

A.  $60^\circ$ . B.  $120^\circ$ . C.  $30^\circ$ . D.  $-30^\circ$ .

**PHẦN II. (2,0 điểm) Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 13 đến câu 14. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

**Câu 13.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(4;0;2)$ ,  $B(1;-4;-2)$  và  $C(2;1;1)$ .

| Khẳng định |                                                                                                                                | Đúng | Sai |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ trọng tâm tam giác $ABC$ là $G\left(\frac{7}{3}; -1; \frac{1}{3}\right)$ .                                              |      |     |
| b)         | Điểm $D$ thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành, khi đó tọa độ điểm $D$ là $D(1;-3;-3)$ .                                           |      |     |
| c)         | Tam giác $ABC$ là tam giác tù.                                                                                                 |      |     |
| d)         | Gọi điểm $E(a;b;c)$ là giao điểm của đường thẳng $BC$ với mặt phẳng tọa độ $(Oxz)$ , khi đó $\frac{2a}{c} + b = \frac{9}{2}$ . |      |     |

**Câu 14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(-2;3;1)$ ,  $B(5;6;2)$  và  $C(-2;2;4)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$ .

| Khẳng định |                                                                                                 | Đúng | Sai |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ .                                                                  |      |     |
| b)         | Tọa độ trọng tâm của tam giác $ABC$ là $G\left(\frac{1}{3}; \frac{11}{3}; \frac{7}{3}\right)$ . |      |     |
| c)         | $\vec{AB} = (-7;3;1)$ .                                                                         |      |     |
| d)         | Tọa độ của điểm $M$ là $(-9;0;-2)$ .                                                            |      |     |

**PHẦN III. (2,0 điểm) Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 15 đến câu 18.

**Câu 15.** Khi gắn hệ tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí  $A(5; 0; 5)$  đến vị trí  $B(10; 10; 3)$  và hạ cánh tại vị trí  $M(a; b; 0)$ . Tính  $2a + b$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là 1 m), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm  $A(10;3;0)$  và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí  $D$  cách điểm  $A$  một khoảng 3780 m. Biết đường đi của cabin cùng phương với vectơ  $\vec{u} = (2;-2;1)$  và sau 3 phút kể từ khi xuất phát thì cabin đi đến vị trí  $B$  có hoành độ  $x_B = 550$ . Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường  $AD$  là bao nhiêu giây?

**Kết quả:**

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Trình bày:**

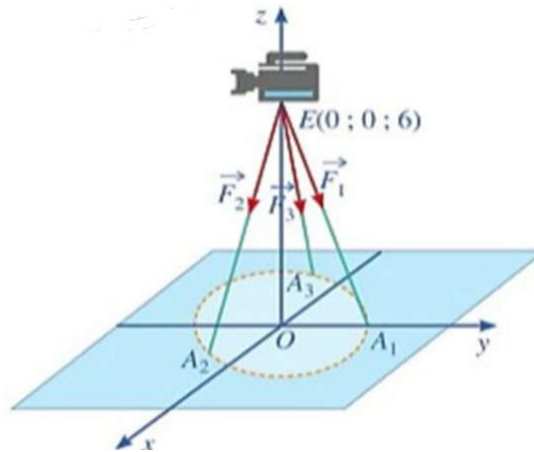
.....

.....

.....

.....

- Câu 17.** Một chiếc máy quay phim có trọng lượng  $300N$  được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt  $E(0;0;6)$  và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là  $A_1(0;1;0)$ ,  $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ ,  $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ . (Tham khảo hình bên dưới).



Giả sử  $\vec{F}_1 = (a; b; c)$ , khi đó  $a + 3b - c$  bằng bao nhiêu?

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

- Câu 18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho  $A(-1;2;1)$ ,  $B(2;-1;3)$ ,  $C(3;5;-1)$ . Điểm  $M(a;b;c)$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  sao cho  $|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{CM}|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó,  $2b + c$  bằng bao nhiêu?

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**PHẦN IV. (3,0 điểm) Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trả lời từ câu 19 đến câu 21.

- Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;2;-1)$ ,  $B(2;-1;3)$ ,  $C(-4;7;5)$ . Gọi  $D(a;b;c)$  là điểm thỏa mãn  $\vec{AD} - \vec{AB} - 2\vec{AC} = \vec{0}$ . Tính giá trị của biểu thức  $a + b + c$ .

**Trình bày:**

.....

.....  
.....  
.....  
.....

**Câu 20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp. Tính giá trị  $OI^2$  biết  $A(2; 2; -2), B(6; -4; 2), C(8; -2; 0)$

*Trình bày:*

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Câu 21.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(1; 2; 0); B(3; -1; 2); C(1; 2; 2)$  và điểm  $M \in (Oxy)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ .

*Trình bày:*

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**HẾT**

*Huế, 10h20' Ngày 16 tháng 8 năm 2025*



## TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ

Môn: Toán 12 - KNTT

## BIỂU THỨC TỌA ĐỘ OXYZ

Định hướng cấu trúc 2025+

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

**PHẦN I. (3,0 điểm)** Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho điểm  $M(1; -\sqrt{2}; \sqrt{3})$ . Tìm điểm  $M' \in Ox$  sao cho độ dài đoạn thẳng  $MM'$  ngắn nhất.

- A.  $M'(-1; 0; 0)$ . B.  $M'(1; 0; 0)$ . C.  $M'(1; 0; \sqrt{3})$ . D.  $M'(1; -\sqrt{2}; 0)$ .

**Lời giải:**

Có  $MM'$  ngắn nhất khi điểm  $M'$  là hình chiếu điểm  $M$  trên trục  $Ox \Rightarrow M'(1; 0; 0)$ .

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-1; 2; -3)$  và  $B(2; -1; 0)$ . Tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là

- A.  $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1)$ . B.  $\overrightarrow{AB} = (3; 3; -3)$ . C.  $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -3)$ . D.  $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 3)$ .

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1; 2; 3)$ . Tìm tọa độ hình chiếu  $M$  lên trục  $Ox$ .

- A.  $(2; 0; 0)$  B.  $(1; 0; 0)$  C.  $(3; 0; 0)$  D.  $(0; 2; 3)$

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho vectơ  $\vec{u} = \vec{j} - 4\vec{k}$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{u}$  là

- A.  $(1; -4)$ . B.  $(0; 1; -4)$ . C.  $(1; 0; -4)$ . D.  $(0; -1; 4)$ .

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; -2; 1)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  có tọa độ là

- A.  $(2; -2; 0)$ . B.  $(2; 0; 1)$ . C.  $(0; -2; 1)$ . D.  $(0; 0; 1)$ .

**Lời giải:**

Hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; -2; 1)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  là điểm  $H(2; -2; 0)$ .

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho  $\vec{a} = (1; 3; -1)$  và  $\vec{b} = (2; 3; 6)$ . Khi đó, tọa độ của vectơ  $\vec{a} + 2\vec{b}$  là

- A.  $(5; -9; -11)$ . B.  $(5; -9; 11)$ . C.  $(5; 9; 11)$ . D.  $(-5; 9; 11)$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $2\vec{b} = (4; 6; 12)$  nên  $\vec{a} + 2\vec{b} = (5; 9; 11)$ .

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho điểm  $M(-2; 5; 7)$ . Tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{MO}$  là

- A.  $(-2; -5; 7)$ . B.  $(-2; 5; 7)$ . C.  $(2; -5; -7)$ . D.  $(2; 5; 7)$ .

**Lời giải:**

$\overrightarrow{MO} = (0 - (-2); 0 - 5; 0 - 7) = (2; -5; -7)$

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 1; 1)$  và  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (4; 0; -6)$ . Tọa độ trung điểm  $M$  của  $BC$  là

- A.  $(5; 1; -5)$ . B.  $(3; -1; -7)$ . C.  $(1; -1; -4)$ . D.  $(3; 1; -2)$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (2; 0; -3)$

Gọi  $M(x; y; z)$  thì  $\overrightarrow{AM} = (x-1; y-1; z-1)$

$\overrightarrow{AM} = (2; 0; -3)$  nên ta có  $\begin{cases} x-1=2 \\ y-1=0 \\ z-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$ . Vậy  $M(3; 1; -2)$ .

**Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ;  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.**  $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ .

**B.**  $|\vec{a}| = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ .

**C.**  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$ .

**D.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ .

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(3; 0; 0)$ ,  $B(0; -4; 0)$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng

**A.** 7.

**B.** 4.

**C.** 3.

**D.** 5.

**Lời giải:**

Ta có  $AB = \sqrt{(0-3)^2 + (-4-0)^2} = 5$ .

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(-3; 1; 2)$ ,  $B(-2; 4; -1)$ ,  $C(1; -3; 3)$ . Tọa độ điểm  $D$  là

**A.**  $(0; -6; 6)$ .

**B.**  $(-6; 7; -2)$ .

**C.**  $(2; 0; 0)$ .

**D.**  $(-4; 2; 5)$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-1 \\ y+3=-3 \\ z-3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-6 \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow D(0; -6; 6)$ .

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; -2; 1)$ ,  $\vec{b} = (-2; 1; 1)$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**A.**  $60^\circ$ .

**B.**  $120^\circ$ .

**C.**  $30^\circ$ .

**D.**  $-30^\circ$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1+(-2)^2+1} \cdot \sqrt{(-2)^2+1+1}} = -\frac{1}{2}$   
 $\Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$ .

**PHẦN II. (2,0 điểm) Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 13 đến câu 14. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

**Câu 13.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(4; 0; 2)$ ,  $B(1; -4; -2)$  và  $C(2; 1; 1)$ .

| Khẳng định |                                                                                        | Đúng | Sai |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tọa độ trọng tâm tam giác $ABC$ là $G\left(\frac{7}{3}; -1; \frac{1}{3}\right)$ .      |      |     |
| b)         | Điểm $D$ thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành, khi đó tọa độ điểm $D$ là $D(1; -3; -3)$ . |      |     |
| c)         | Tam giác $ABC$ là tam giác tù.                                                         |      |     |
| d)         | Gọi điểm $E(a; b; c)$ là giao điểm của đường thẳng $BC$                                |      |     |

|  |                                                                          |  |  |
|--|--------------------------------------------------------------------------|--|--|
|  | với mặt phẳng tọa độ $(Oxz)$ , khi đó $\frac{2a}{c} + b = \frac{9}{2}$ . |  |  |
|--|--------------------------------------------------------------------------|--|--|

**Lời giải:**

|         |        |        |        |
|---------|--------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Sai |
|---------|--------|--------|--------|

a) Đúng.

$$\text{Tọa độ trọng tâm là } G\left(\frac{4+1+2}{3}; \frac{0+(-4)+1}{3}; \frac{2+(-2)+1}{3}\right) = G\left(\frac{7}{3}; -1; \frac{1}{3}\right).$$

b) Sai.

$$\text{Tứ giác } ABDC \text{ là hình bình hành khi và chỉ khi } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = -3 \\ y_D - 1 = -4 \\ z_D - 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = -3 \\ z_D = -3 \end{cases}$$

Vậy  $D(-1; -3; -3)$

c) Sai.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BC} = (1; 5; 3); \overrightarrow{AC} = (-2; 1; -1).$$

Do đó  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + 5 - 3 = 0$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .

d) Sai.

Vì  $E$  thuộc mặt phẳng  $Oxz$  nên  $E(a; 0; c)$ .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BE} = (a-1; 4; c+2), \overrightarrow{BC} = (1; 5; 3).$$

$E$  là giao điểm của đường thẳng  $BC$  với mặt phẳng  $(Oxz)$

Suy ra  $B, C, E$  thẳng hàng nên hai vectơ  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}$  cùng phương, do đó:

$$\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=k \\ 4=5k \\ c+2=3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{9}{5} \\ k=\frac{4}{5} \\ c=\frac{2}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } E\left(\frac{9}{5}; 0; \frac{2}{5}\right) \Rightarrow \frac{2a}{c} + b = 9$$

**Câu 14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(-2; 3; 1)$ ,  $B(5; 6; 2)$  và  $C(-2; 2; 4)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$ .

| Khẳng định |                                                                                                 | Đúng | Sai |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| a)         | Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ .                                                                  |      |     |
| b)         | Tọa độ trọng tâm của tam giác $ABC$ là $G\left(\frac{1}{3}; \frac{11}{3}; \frac{7}{3}\right)$ . |      |     |
| c)         | $\overrightarrow{AB} = (-7; 3; 1)$ .                                                            |      |     |
| d)         | Tọa độ của điểm $M$ là $(-9; 0; -2)$ .                                                          |      |     |

**Lời giải:**

|         |         |        |        |
|---------|---------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|---------|---------|--------|--------|

a) Đúng.

$$\overrightarrow{AB}(7; 3; 1); \overrightarrow{AC}(0; -1; 3)$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  là mệnh đề đúng.

b) Đúng.

Tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$  là  $G\left(\frac{1}{3}; \frac{11}{3}; \frac{7}{3}\right)$  là mệnh đề đúng.

c) Sai.

$\overrightarrow{AB}(-7; 3; 1)$  là mệnh đề sai.

d) Sai.

$M \in (Oxz)$  nên gọi tọa độ  $M(x; 0; z)$ . Do  $M$  thuộc đường thẳng  $AB$  nên 3 điểm  $A; B; M$  thẳng hàng.

$\overrightarrow{AB}(7; 3; 1); \overrightarrow{AM}(x+2; -3; z-1)$ .

3 điểm  $A; B; M$  thẳng hàng  $\frac{x+2}{7} = \frac{-3}{3} = \frac{z-1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ z = 0 \end{cases}$ . Vậy  $M(-9; 0; 0)$ , suy ra mệnh đề sai.

**PHẦN III. (2,0 điểm) Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 15 đến câu 18.**

**Câu 15.** Khi gắn hệ tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí  $A(5; 0; 5)$  đến vị trí  $B(10; 10; 3)$  và hạ cánh tại vị trí  $M(a; b; 0)$ . Tính  $2a + b$ .

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

.....

**Lời giải:**

**Đáp án: 60.**

Phương trình đường thẳng  $AB$  là:  $\frac{x-5}{5} = \frac{y}{10} = \frac{z-5}{-2}$ .

Vì  $M$  thuộc  $AB$  nên tồn tại số thực  $t$  sao cho  $M(5t+5; 10t; -2t+5)$ .

Ngoài ra,  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  nên  $-2t+5=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$ .

Suy ra  $M(17, 5; 25; 0)$ . Vậy  $2a+b=2.17,5+25=60$ .

**Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là 1m), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm  $A(10; 3; 0)$  và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí  $D$  cách điểm  $A$  một khoảng 3780m. Biết đường đi của cabin cùng phương với vectơ  $\vec{u}=(2; -2; 1)$  và sau 3 phút kể từ khi xuất phát thì cabin đi đến vị trí  $B$  có hoành độ  $x_B=550$ . Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường  $AD$  là bao nhiêu giây?

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

.....

**Lời giải:**

**Đáp án: 840.**

Gọi tọa độ điểm  $B(550; y; z)$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (540; y-3; z)$ .

Do đường đi của cabin cùng phương với vectơ  $\vec{u} = (2; -2; 1)$  nên ta có:

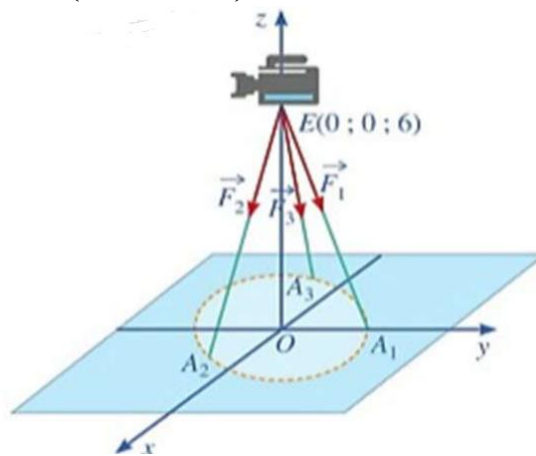
$$\frac{540}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} y-3 = -540 \\ z = 270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -537 \\ z = 270 \end{cases} \Rightarrow B(550; -537; 270).$$

Quãng đường  $AB$  bằng  $AB = \sqrt{540^2 + (-537-3)^2 + 270^2} = 810(\text{m})$ .

Vận tốc của cabin bằng  $v = \frac{AB}{3.60} = 4,5(\text{m/s})$ .

Thời gian để cabin chuyển động đều từ điểm  $A$  đến điểm  $D$  là:  $\frac{3780}{4,5} = 840(\text{s})$ .

**Câu 17.** Một chiếc máy quay phim có trọng lượng  $300N$  được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt  $E(0;0;6)$  và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là  $A_1(0;1;0)$ ,  $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ ,  $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ . (Tham khảo hình bên dưới).



Giả sử  $\vec{F}_1 = (a; b; c)$ , khi đó  $a + 3b - c$  bằng bao nhiêu?

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Lời giải:**

**Đáp án: 150.**

Ta có:  $\overrightarrow{EA_1} = (0; 1; -6)$ ;  $\overrightarrow{EA_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -6\right)$ ;  $\overrightarrow{EA_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -6\right) \Rightarrow EA_1 = EA_2 = EA_3 = \sqrt{37}$

$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$  vì máy quay cân bằng và trọng lực của máy quay tác dụng đều lên 3 chân của giá đỡ. Do đó:

$$\vec{F}_1 = k\overrightarrow{EA_1} = (0; k; -6k); \quad \vec{F}_2 = k\overrightarrow{EA_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k; -\frac{1}{2}k; -6k\right)$$

$$\vec{F}_3 = k\overrightarrow{EA_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k; -\frac{1}{2}k; -6k\right)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0; 0; -18k)$$

$$\text{Mà } |\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| = |\vec{P}| \longrightarrow -18k = -300 \Leftrightarrow k = \frac{50}{3}$$

$$\text{Vậy } \vec{F}_1 = \left( 0; \frac{50}{3}; -100 \right).$$

$$\text{Suy ra } a + 3b - c = 150.$$

**Câu 18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho  $A(-1; 2; 1), B(2; -1; 3), C(3; 5; -1)$ . Điểm  $M(a; b; c)$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  sao cho  $|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{CM}|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó,  $2b + c$  bằng bao nhiêu?

**Kết quả:**

**Trình bày:**

.....

.....

.....

.....

**Lời giải:**

**Đáp án: 4.**

Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{CM} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MB} = 3\vec{MG} + \vec{MB}$$

$$\text{Nên } |\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{CM}| = |3\vec{MG} + \vec{MB}| = |3\vec{MN} + \vec{MN} + 3\vec{NG} + \vec{NB}|$$

$$\text{Gọi } N \text{ là điểm thỏa } 3\vec{NG} + \vec{NB} = \vec{0} \text{ nên } |3\vec{MG} + \vec{MB}| = |4\vec{MN}|.$$

Để  $|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{CM}|$  đạt giá trị nhỏ nhất thì  $|4\vec{MN}|$  đạt giá trị nhỏ nhất hay  $M$  là hình chiếu của  $N$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$ .

$$\text{Tọa độ trọng tâm của tam giác } ABC \text{ là: } G\left(\frac{4}{3}; 2; 1\right).$$

$$3\vec{NG} + \vec{NB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_G - x_N) + (x_B - x_N) = 0 \\ 3(y_G - y_N) + (y_B - y_N) = 0 \\ 3(z_G - z_N) + (z_B - z_N) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{1}{4}(3x_G + x_B) \\ y_N = \frac{1}{4}(3y_G + y_B) \\ z_N = \frac{1}{4}(3z_G + z_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{1}{4}\left(3 \cdot \frac{4}{3} + 2\right) \\ y_N = \frac{1}{4}(3 \cdot 2 - 1) \\ z_N = \frac{1}{4}(3 \cdot 1 + 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{3}{2} \\ y_N = \frac{5}{4} \\ z_N = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ nên } N\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right).$$

$$\text{Vậy tọa độ điểm } M\left(0; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right) \text{ hay } 2b + c = 4.$$

**PHẦN IV. (3,0 điểm) Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trả lời từ câu 19 đến câu 21.

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-4; 7; 5)$ . Gọi  $D(a; b; c)$  là điểm thỏa mãn  $\vec{AD} - \vec{AB} - 2\vec{AC} = \vec{0}$ . Tính giá trị của biểu thức  $a + b + c$ .

**Trình bày:**

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
**Lời giải:**

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow (a-1; b-2; c+1) - (1; -3; 4) - 2 \cdot (-5; 5; 6) = (0; 0; 0)$$

$$\Leftrightarrow (a+8; b-9; c-15) = (0; 0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a+8=0 \\ b-9=0 \\ c-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=9 \\ c=15 \end{cases}.$$

Vậy  $a+b+c = -8+9+15 = 16$ .

**Câu 20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp. Tính giá trị  $OI^2$  biết  $A(2; 2; -2), B(6; -4; 2), C(8; -2; 0)$ .

**Trình bày:**

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Lời giải:**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (4; -6; 4), \overrightarrow{CB} = (-2; -2; 2), \overrightarrow{CA} = (-6; 4; -2)$

Xét:  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = (-2) \cdot (-6) + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) = 0$ . Suy ra tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .

Do đó,  $I$  là trung điểm  $AB$ .

Ta có:  $I(4; -1; 0) \Rightarrow OI^2 = 4^2 + (-1)^2 + 0 = 17$ .

**Câu 21.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(1; 2; 0); B(3; -1; 2); C(1; 2; 2)$  và điểm  $M \in (Oxy)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ .

**Trình bày:**

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Lời giải:**

+) Gọi  $I(x_I; y_I; z_I)$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow I(3; -1; 1)$ .

+) Ta có  $T = MA^2 + 2MB^2 - MC^2$

$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = 2MI^2 + (IA^2 + 2IB^2 - IC^2).$$

+)  $\overrightarrow{IA} = (-2; 3; -1); \overrightarrow{IB} = (0; 0; 1); \overrightarrow{IC} = (-2; 3; 1)$ .

Suy ra  $IA^2 + 2IB^2 - IC^2 = 14 + 2 - 14 = 2$

+) Gọi  $H$  là hình chiếu của  $I$  trên  $(Oxy)$ . Ta có  $MI \geq IH = 1, \forall M \in (Oxy)$ .

Vậy  $\min T = 4$ , khi  $MI = 1$  và  $M \in (Oxy)$ .

**HẾT**

*Huế, 10h20' Ngày 16 tháng 8 năm 2025*

