

Câu 1 (2,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ (1)

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1)
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x + 1$

Câu 2 (1,0 điểm) Tìm GTLN-GTNN của hàm số sau : $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$

Câu 3 (1,0 điểm) Tính $A = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{6} + \log_4 81 - \log_2 27 + 81^{\frac{1}{\log_5 3}}$

Câu 4 (1,0 điểm) Tìm mọi giá trị của m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt. Khi nào có ít nhất một trong hai giao điểm có tọa độ nguyên ?

Câu 5 (3,0 điểm) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I và có cạnh bằng a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi H là trung điểm của IB và SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ biết $SH = \frac{a\sqrt{13}}{4}$

- Hãy tính thể tích của khối chóp $SABCD$.
- Gọi M là trung điểm của SB , N thuộc SC sao cho $SC = 3SN$. Tính tỉ số thể tích khối chóp $SAMN$ và khối chóp $SABCD$.
- Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

Câu 6 (1,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3(4y^2 + 1) + x\sqrt{2y} = 3 & (1) \\ 2y + \sqrt{4y^2 + 1} = x + \sqrt{x^2 + 1} & (2) \end{cases}$$

Câu 7 (1,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$

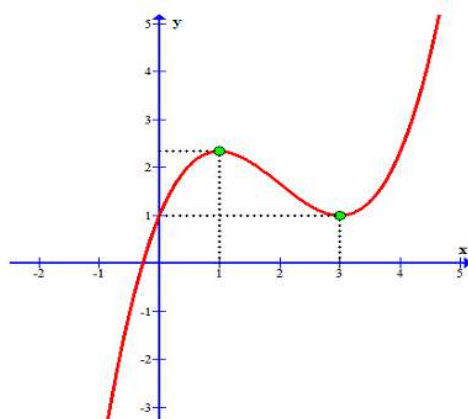
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{7}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{121}{14(ab + bc + ca)}$

-----Hết-----

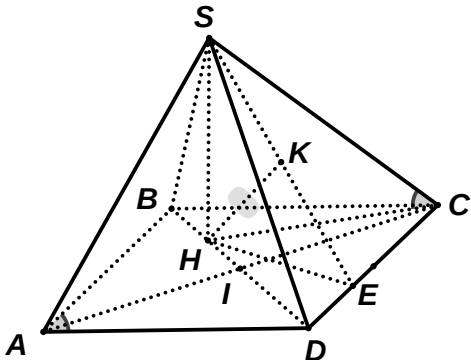
Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

ĐÁP ÁN ĐỀ THI KSCL MÔN TOÁN NĂM HỌC 2015 - 2016

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM																
Câu 1a	Ta có: $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \quad D = R$ $y' = x^2 - 4x + 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$	0,25																
	Sự biến thiên: +Trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$ $y' > 0$ nên hàm số đồng biến + Trên khoảng $(1; 3)$ có $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến Cực trị: +Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ giá trị cực đại $y = \frac{7}{3}$ +Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$; giá trị cực tiểu $y = 1$ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$	0,25																
	Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{7}{3}$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	y'	$+$	0	$-$	0	$+$	y	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	1	$+\infty$	0,25
x	$-\infty$	1	3	$+\infty$														
y'	$+$	0	$-$	0	$+$													
y	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	1	$+\infty$														
	Đồ thị: giao Oy tại $(0;1)$ Đi qua $(2;\frac{5}{3})$ và $(4;\frac{7}{3})$ 	0,25																

Câu 1b	$y' = x^2 - 4x + 3.$	0,25
	Đường thẳng $y = 3x + 1$ có hệ số góc 3	
	Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên: $y'(x) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$	0,25
	$x = 0 \Rightarrow y = 1$ pttt $y = 3x + 1$ $x = 4 \Rightarrow y = \frac{7}{3}$ pttt $y = 3x - \frac{29}{3}$	0,25
	Thử lại, ta được $y = 3x - \frac{29}{3}$ thỏa yêu cầu bài toán.	0,25
Câu 2(1,0 điểm)	Tìm GTLN-GTNN của hàm số sau : $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$	
	$y' = -4x^3 + 4x$	0,25
	Trên $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$	0,25
	$y(-2) = -7, y(-1) = 2, y(0) = 1, y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{16}$	0,25
	Kết luận $\max_{\left[-2; \frac{1}{2}\right]} y = y(-1) = 2$ và $\min_{\left[-2; \frac{1}{2}\right]} y = y(-2) = -7$	0,25
Câu 3 (1,0đ)	Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1} (C)$. Tìm giá trị của m để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt. Tìm m để trong đó có ít nhất một điểm có tọa độ nguyên .	
	Xét phương trình hoành độ giao điểm	
	$\frac{x+2}{x-1} = -x + m$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - mx + m + 2 = 0 \end{cases} \dots\dots$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 - 2\sqrt{3} \\ m > 2 + 2\sqrt{3} \end{cases}$	0,25
	Do (C) có bốn điểm có tọa độ nguyên là $A(0; -2); B(2; 4); C(4; 2)$ và $D(-2; 0)$	
	Ycbt $\Leftrightarrow d : y = -x + m$ đi qua một trong bốn điểm A, B, C, D	0,25

	$\Leftrightarrow m = -2 \vee m = 6$	0,25
Câu 4 (1 đ)	Tính $A = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{6} + \log_4 81 - \log_2 27 + 81^{\frac{1}{\log_5 3}}$	
	$A = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{6} + \log_4 81 - \log_2 27 + 81^{\frac{1}{\log_5 3}} = \log_2 6 + \log_2 9 - \log_2 27 + \left(3^{\log_3 5}\right)^4$ $= \log_2 \frac{6 \cdot 9}{27} + 5^4 = 1 + 625 = 626$	0.5 0,5
Câu 5	a) Ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH$ là đường cao của chóp S.ABCD Theo giả thiết hình thoi ABCD có góc $A = 60^\circ$ suy ra tam giác BAD đều $BD = a \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ $\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{39}}{24} a^3$	 0,5 0,5
	b) $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{6}$ $\frac{V_{SABC}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{2}$ $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}$	0.5 0.25 0.25
5c	$gt \Rightarrow HD = \frac{3}{4}a$ Trong (ABCD) kẻ $HE \perp CD$ và trong (SHE) kẻ $HK \perp SE$ Lập luận chỉ ra $HK \perp (SCD) \Rightarrow d(H; SCD) = HK$	0,25 0,25

	Xét $\triangle HED$ vuông tại E, ta có $HE = HD \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{8}a$ Xét $\triangle SHE$ vuông tại H, ta có $HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3\sqrt{39}}{4\sqrt{79}}a$ Mà $\frac{d(B, (SCD))}{d(H, (SCD))} = \frac{BD}{HD} = \frac{4}{3} \Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{4}{3}d(H, (SCD)) = \frac{4}{3}HK = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{79}}a$ Do $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = d(B, (SCD)) = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{79}}a$	0,25
		0,25
Câu 6	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(4y^2 + 1) + x\sqrt{2y} = 3 & (1) \\ 2y + \sqrt{4y^2 + 1} = x + \sqrt{x^2 + 1} & (2) \end{cases}$	
	Điều kiện: $y \geq 0$ $PT(1) \Leftrightarrow x[x^2(4y^2 + 1) + \sqrt{2y}] = 3 \Rightarrow x > 0$ Khi đó, $PT(2) \Leftrightarrow 2y + \sqrt{4y^2 + 1} = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad (3)$	0,25
	Xét hàm $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ trên $[0; +\infty)$ Có $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0 \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ Khi đó, $PT(3) \Leftrightarrow f(2y) = f(x) \Leftrightarrow 2y = x$	0,25
	Thay vào phương trình (1) ta được phương trình: $x^5 + x^3 + x\sqrt{x} = 3$ Đặt $t = \sqrt{x} > 0$ có hàm số $g(t) = t^{10} + t^6 + t^3$ có $g'(t) = 10t^9 + 6t^5 + 3t^2 > 0 \text{ do } t > 0$ Mà $g(1) = 3 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$	0,25
	Với $x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$	0,25
Câu 7	Ta có $1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ $\Rightarrow ab + bc + ca = \frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$. Do đó $A = \frac{7}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{121}{7(1 - (a^2 + b^2 + c^2))}$	0.25

	Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$. Vì $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$ nên $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$ Suy ra $t = a^2 + b^2 + c^2 < a + b + c = 1$ Mặt khác $1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \stackrel{B.C.S}{\leq} 3(a^2 + b^2 + c^2)$ Suy ra $t = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$. Vậy $t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$	0.25												
	Xét hàm số $f(t) = \frac{7}{t} + \frac{121}{7(1-t)}; t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$ $f'(t) = -\frac{7}{t^2} + \frac{121}{7(1-t)^2}$ $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{18}$ BBT <table> <tr> <td>t</td> <td>$\frac{1}{3}$</td> <td>$\frac{7}{18}$</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>$f'(t)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(t)$</td> <td colspan="3"> </td> </tr> </table>	t	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	1	$f'(t)$	-	0	+	$f(t)$				0,25
t	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	1											
$f'(t)$	-	0	+											
$f(t)$														
	Suy ra $f(t) \geq \frac{324}{7}; \forall t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$. Vậy $A \geq \frac{324}{7}$ với mọi $a; b; c$ thỏa điều kiện đề bài. Hơn nữa, với $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{6}$ thì $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = \frac{7}{18} \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ và $A = \frac{324}{7}$ Vậy $\min A = \frac{324}{7}$	0,25												