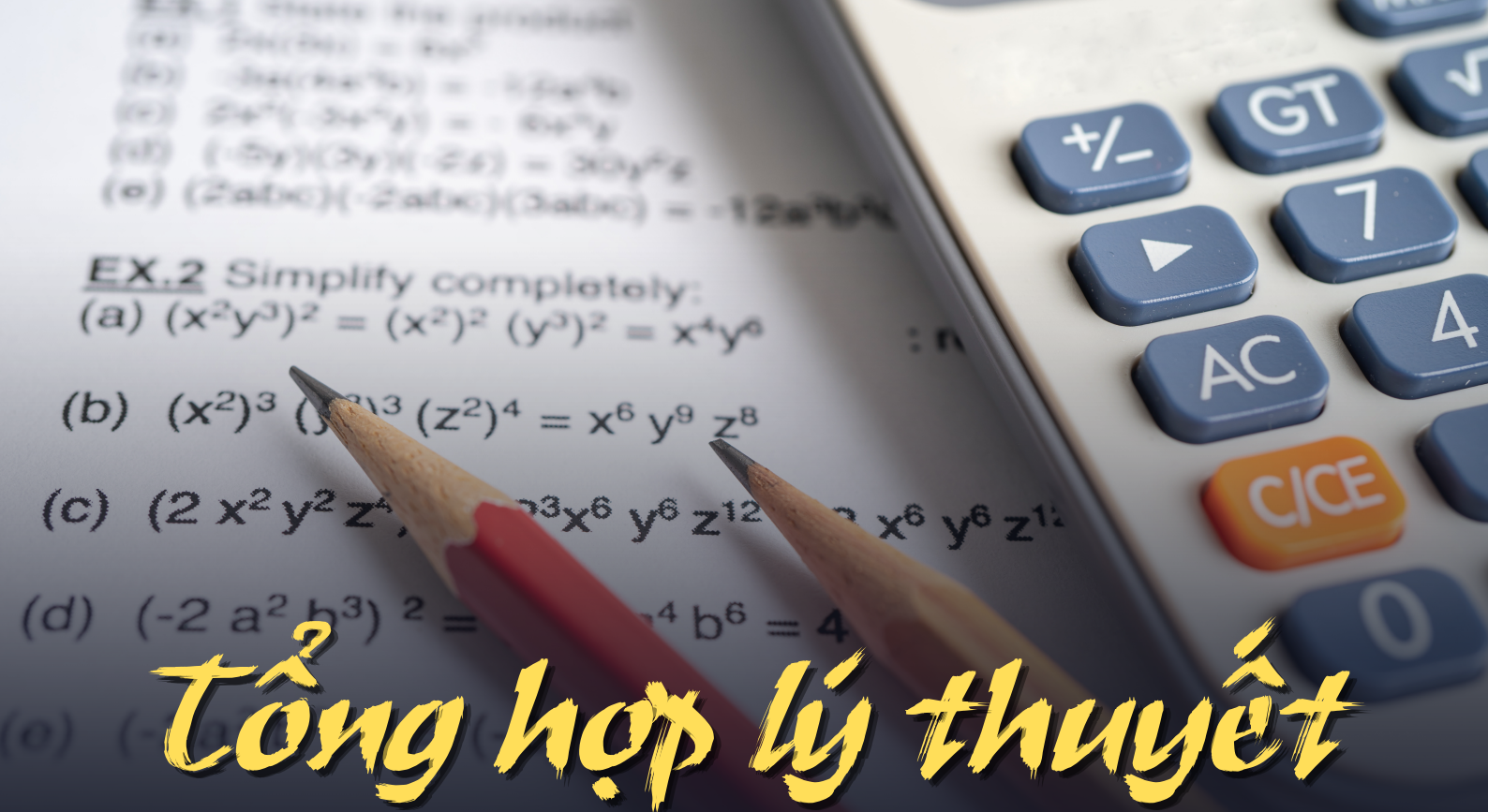




Tổng hợp lý thuyết

CHƯƠNG 01

KHẢO SÁT HÀM SỐ

KHÓA 2023 - 2024

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 12

Biên soạn

LÊ MINH TÂM



Mục lục

Chương 01

Chủ đề 01. ĐƠN ĐIỀU HÀM SỐ

▮ Dạng 1.1. Xét tính đơn điệu của hàm số (biết đồ thị, bbt).....	4
▮ Dạng 1.2. Hàm số bậc ba đơn điệu trên khoảng k.	5
▮ Dạng 1.3. Hàm số phân thức đơn điệu trên khoảng k.	7
▮ Dạng 1.4. Hàm hợp $y=f(u(x))$	8
▮ Dạng 1.5. Hàm hợp $y=g(x)+h(x)$	10
▮ Dạng 1.6. Ứng dụng phương pháp hàm số.....	11

Chủ đề 02. CỰC TRỊ

▮ Dạng 2.1. Tìm cực trị của hàm số $y=f(x)$ khi cho BBT hoặc Đồ Thị.....	17
▮ Dạng 2.2. Tìm cực trị của hàm số tường minh.....	18
▮ Dạng 2.3. Tìm m để hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0	19
▮ Dạng 2.4. Tìm m để hàm số $y=f(x)$ có n cực trị.	20
▮ Dạng 2.5. Đường thẳng qua hai điểm cực trị.....	21
▮ Dạng 2.6. Cực trị hàm bậc ba thỏa điều kiện với đường thẳng.....	22
▮ Dạng 2.7. Cực trị hàm bậc ba thỏa điều kiện x_1, x_2	24
▮ Dạng 2.8. Cực trị hàm trùng phương.....	25
▮ Dạng 2.9. Cực trị hàm hợp $y=f(u(x))$	26

Chủ đề 03. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

▮ Dạng 3.1. Max - Min hàm số cho trước đoạn $[a;b]$	30
▮ Dạng 3.1. Max - Min hàm số cho trước đồ thị hoặc BBT.	32
▮ Dạng 3.3. Max - min trên khoảng $(a;b)$	33
▮ Dạng 3.4. Max - min hàm vô tỷ.	34
▮ Dạng 3.5. Max - min hàm lượng giác.	35
▮ Dạng 3.6. Max - min hàm trị tuyệt đối.	36

Chủ đề 04. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

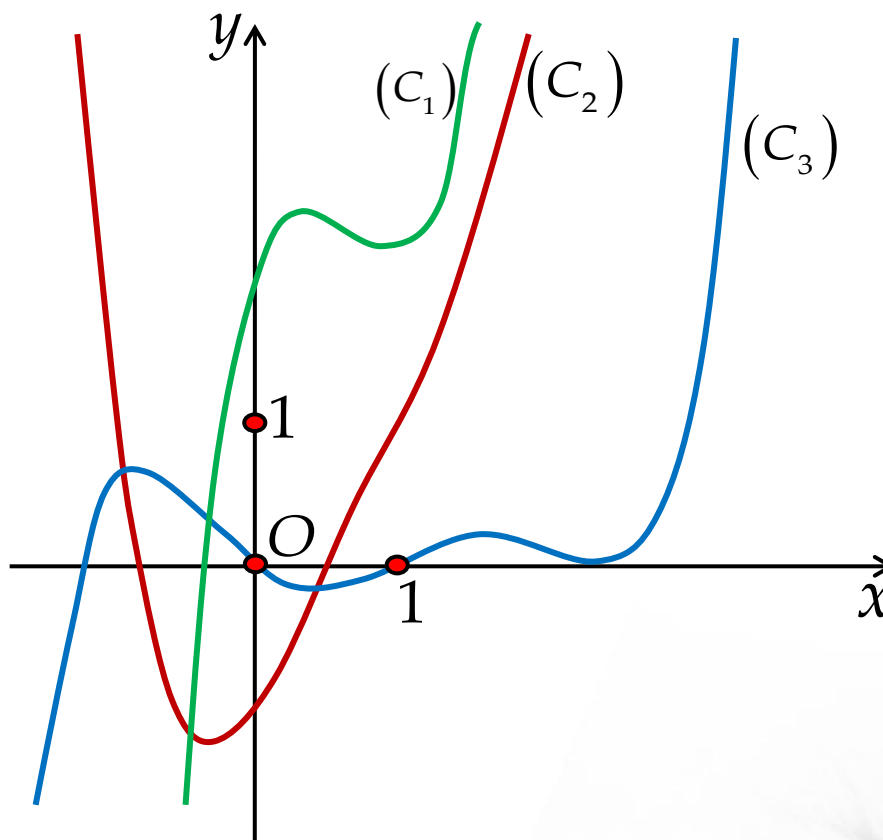
▮ Dạng 4.1. Lý thuyết về đường tiệm cận.....	39
▮ Dạng 4.2. Tìm đường tiệm cận từ đồ thị hoặc bbt.	40
▮ Dạng 4.3. Tìm đường tiệm cận của đồ thị hàm số tường minh.....	41
▮ Dạng 4.4. Biện luận tiệm cận chứa tham số m.....	43
▮ Dạng 4.5. Tìm đường tiệm cận hàm ẩn.	45

📖 Chủ đề 05. ĐỒ THỊ HÀM SỐ

- Dạng 5.1. Từ đồ thị/bbt đã cho xác định hàm số. 53
- Dạng 5.2. Từ đồ thị/bbt đã cho xác định các hệ số. 54
- Dạng 5.3. Đồ thị hàm số chứa trị tuyệt đối. 55

📖 Chủ đề 06. SỰ TƯƠNG GIAO

- Dạng 6.1. Đếm số giao điểm (điểm chung) biết hàm tường minh. 57
- Dạng 6.2. Đếm số giao điểm (điểm chung) biết đồ thị/bbt. 58
- Dạng 6.3. Tìm m để đths giao với (c') tại n nghiệm. 59
- Dạng 6.4. Tìm m để đths phân thức giao với (c') thỏa điều kiện. 62



Chương 01

Chủ đề 01

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

SỰ ĐỒNG BIẾN – NGHỊCH BIẾN

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

Định nghĩa 01.

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên K , ta có hàm số $f(x)$ được gọi là :

- ↪ **đồng biến** (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- ↪ **nghịch biến** (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- ↪ Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K gọi chung là **đơn điệu** trên K .

Định lý.

01	Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K. Khi đó: ↪ Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$. ↪ Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.
02	Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K. Khi đó: ↪ Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K. ↪ Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K. ↪ Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số f không đổi trên K.

Ta có các nhận xét sau:

Nhận xét 01

– Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x) + g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D . Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x) - g(x)$.

Nhận xét 02

– Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x).g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D .

Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x), g(x)$ không là các hàm số dương trên D .

Nhận xét 03

Cho hàm số $u = u(x)$, xác định với $x \in (a; b)$ và $u(x) \in (c; d)$.

Hàm số $f[u(x)]$ cũng xác định với $x \in (a; b)$. Ta có nhận xét sau:

- + Giả sử hàm số $u = u(x)$ đồng biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ đồng biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ đồng biến với $u \in (c; d)$.
- + Giả sử hàm số $u = u(x)$ nghịch biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ nghịch biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ nghịch biến với $u \in (c; d)$.

Định lý.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f **đồng biến** trên K .
- Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f **nghịch biến** trên K .

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ **Dạng 1.1. Xét tính đơn điệu của hàm số (biết đồ thị, bbt)**

- ➊ Đề cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ hoặc Bảng biến thiên $\rightarrow$ nhìn hướng đi của đồ thị:
 - ☑ Khoảng mà đồ thị có hướng “đi lên” $\rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng đó.
 - ☑ Khoảng mà đồ thị có hướng “đi xuống” $\rightarrow$ hàm số nghịch biến trên khoảng đó.
- ➋ Đề cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ $\rightarrow$ làm theo các bước sau:
 - ☑ **Bước 01.** Tìm các giao điểm của đồ thị $f'(x)$ với Ox .
 - ☑ **Bước 02.** Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ bằng cách nhìn:
 - Phần trên Ox mang dấu $+$.
 - Phần dưới Ox mang dấu $-$.
 - ☑ **Bước 03.** Từ bảng xét dấu ta tìm được chiều “lên – xuống” của $f(x)$.

➤ **Ví dụ 1.1.1**

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		0	0	
	$+$	$-$	$+$	
y		5	-1	

Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy trên khoảng $(-\infty; 0)$ thì bảng biến thiên thể hiện hàm số đồng biến.

Dạng 1.2. Hàm số bậc ba đơn điệu trên khoảng k.

① Tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên tập xác định

☑ **Bước 01.** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

☑ **Bước 02.** Ghi điều kiện để hàm đơn điệu, chẳng hạn:

$$\text{Để } f(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m?$$

$$\text{Để } f(x) \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R} \Rightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m?$$

🔴 **Lưu ý:** Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\bullet \quad f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad \bullet \quad f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 1.2.1

⎧ Tìm các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+2)x + 3m - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
⎪ A. $m \geq 1$. B. $m < 1$. C. $m = 0$. D. $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+2)x + 3m - 1$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6x + 3(m+2) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 9 - 9(m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1.$$

Vậy với $m \geq -1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

② Tìm tham số m để hàm số bậc ba đơn điệu trên miền D cho trước.

❖ **Phương pháp 1.** (Khi $f'(x) = 0$ nhằm được nghiệm).

☑ **Bước 01.** Tính $f'(x)$.

☑ **Bước 02.** Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$.

☑ **Bước 03.** Lập bảng xét dấu, xác định các khoảng đơn điệu của hàm số.

☑ **Bước 04.** Từ bảng xét dấu, giả sử điều kiện để hàm số đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến theo yêu cầu bài toán) là D .

☑ **Bước 05.** Để hàm số đơn điệu trên K là $K \subset D$.

Ví dụ 1.2.2

⎧ Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
⎪ A. $m \leq -1$. B. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases}$. C. $m = 0$. D. $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m$

Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Hay $-3x^2 + 6x + 3m \leq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x, \forall x \in (0; +\infty)$. (1)

Xét $f(x) = x^2 - 2x$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(x) = 2x - 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có (1) $m \leq -1$.

Vậy với $m \leq -1$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

❖ **Phương pháp 2.** (Khi $f'(x) = 0$ không nhầm được nghiệm).

☑ **Bước 01.** Ghi điều kiện để $y = f(x; m)$ đơn điệu trên D. Chẳng hạn:

Đề yêu cầu $y = f(x; m)$ đồng biến trên $D \Rightarrow y' = f'(x; m) \geq 0$.

Đề yêu cầu $y = f(x; m)$ nghịch biến trên $D \Rightarrow y' = f'(x; m) \leq 0$.

☑ **Bước 02.** Cô lập m ra khỏi biến số và đặt vế còn lại là $g(x)$ được: $\begin{cases} m \geq g(x) \\ m \leq g(x) \end{cases}$.

☑ **Bước 03.** Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên D.

☑ **Bước 04.** Dựa vào bảng biến thiên kết luận: $\begin{cases} \text{Khi } m \geq g(x) \Rightarrow m \geq \max_D g(x) \\ \text{Khi } m \leq g(x) \Rightarrow m \leq \min_D g(x) \end{cases}$.

☞ Ví dụ 1.2.3

Tìm m để hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2+2m)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m \leq 2$. B. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m = 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m > 1 \end{cases}$. D. $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + m^2 + 2m$; $\Delta_{y'} = (2m+1)^2 - 3(m^2+2m) = (m-1)^2$.

Với $m=1$, ta có $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 1$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	y_1	y_2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow x_2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2m+1+|m-1|}{3} \leq 0 \Leftrightarrow |m-1| \leq -2m-1.$$

Với $m > 1$, ta có $|m-1| \leq -2m-1 \Leftrightarrow m-1 \leq -2m-1 \Leftrightarrow m < 0$ (loại).

Với $m < 1$, ta có $|m-1| \leq -2m-1 \Leftrightarrow -m+1 \leq -2m-1 \Leftrightarrow m \leq -2$ (thỏa mãn).

Vậy với $m \leq -2$ hoặc $m = 1$, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Dạng 1.3. Hàm số phân thức đơn điệu trên khoảng k.

❶ Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định

☑ **Bước 01.** Tính $f'(x) = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.

☑ **Bước 02.** Thực hiện yêu cầu bài toán:

☞ Hàm số **đồng biến** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{ad-cb}{(cx+d)^2} > 0 \Leftrightarrow ad-cb > 0$

☞ Hàm số **ngược biến** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{ad-cb}{(cx+d)^2} < 0 \Leftrightarrow ad-cb < 0$.

Ví dụ 1.3.1

⎧ Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+m-7}{5x-m+3}$ đồng biến trên mọi khoảng xác định
⎪
⎪ **A.** $m \in (-7; 5)$. **B.** $m \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. **C.** $m \in \left[-1; \frac{3}{2}\right)$. **D.** $m \in (6; 15)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{m-3}{5} \right\}$.

Ta có: $y' = \frac{-m^2 - 2m + 35}{(5x - m + 3)^2}$.

Hàm số đồng biến trên mọi khoảng của tập xác định khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \neq \frac{m-3}{5} \Leftrightarrow -m^2 - 2m + 35 > 0 \Leftrightarrow m \in (-7; 5).$$

Vậy $m \in (-7; 5)$ thì hàm số đồng biến trên mọi khoảng xác định của nó.

② Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định

☑ **Bước 01.** Điều kiện xác định $cx+d \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{d}{c}$.

☑ **Bước 02.** Tính $f'(x) = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.

☑ **Bước 03.** Thực hiện yêu cầu bài toán:

☞ Hàm số **đồng biến** trên $(a;b) \Leftrightarrow \begin{cases} ad-cb > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases}$ với $-\frac{d}{c}$ chứa tham số m .

☞ Hàm số **nghịch biến** trên $(a;b) \Leftrightarrow \begin{cases} ad-cb < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases}$ với $-\frac{d}{c}$ chứa tham số m .

☞ **Ví dụ 1.3.2**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

A. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

B. $m \in [-2; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $m \in [-1; 2)$.

D. $m \in (-1; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$$y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2}, x \neq -m$$

Hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên $(2;+\infty) \Leftrightarrow y' > 0 \forall x \in (2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 2 \\ m^2-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m < -1 \Leftrightarrow m \in [-2; -1) \cup (1; +\infty) \\ m > 1 \end{cases}$$

🔄 **Dạng 1.4. Hàm hợp $y=f(u(x))$.**

☑ **Bước 01.** Tính $y' = u' \cdot f'(u) \rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 (*) \end{cases}$.

☑ **Bước 02.** Để giải $(*)$ ta tìm $f'(x) = 0$ (đồ thị cắt trục hoành).

$$\text{Giả sử } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{cases} \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = a \\ \vdots \\ u = b \end{cases} \rightarrow \text{nghiệm của } (*).$$

☑ **Bước 03.** Lập bảng xét dấu của $y' = u' \cdot f'(u) \Rightarrow$ khoảng đơn điệu cần tìm.

☞ Ví dụ 1.4.1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-3; 0)$. C. $(-\infty; -3)$. D. $(-2; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = [f(x^2)]' = (x^2)' x^4 (x^2 - 9)(x^2 - 4)^2 = 2x^5 (x-3)(x+3)(x-2)^2 (x+2)^2$.

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu của y' như sau:

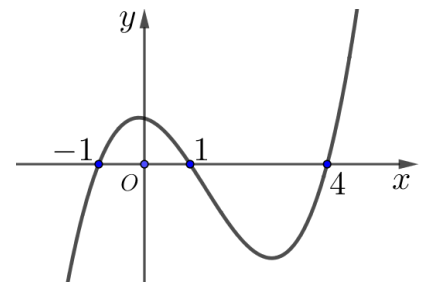
x	$-\infty$	-3	-2	0	2	3	$+\infty$	
y'		-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên $(-\infty; -3)$ và $(0; 3)$.

☞ Ví dụ 1.4.2

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(2-x)$ trên khoảng:

- A. $(-2; 1)$ B. $(-2; 2)$.
C. $(-\infty; -2)$. D. $(1; 3)$.



Lời giải

Chọn A

Ta có $(f(2-x))' = (2-x)f'(2-x) = -f'(2-x)$

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ thì

$$(f(2-x))' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

$$(f(2-x))' < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 2-x < 1 \\ 2-x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x < -2 \end{cases}$$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-2; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; 3)$.

Dạng 1.5. Hàm hợp $y=g(x)+h(x)$.

☑ **Bước 01.** Tính $y' = f'(x) \pm h'(x) \rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \mp h'(x) (*)$.

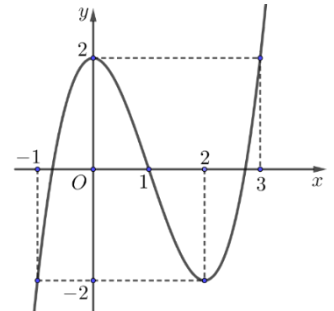
☑ **Bước 02.** Giải $(*)$ bằng cách vẽ $h'(x)$ vào hệ trục tọa độ và xét các điểm mà f' cắt h'

Sau khi tìm được các nghiệm ta lập bảng xét dấu của $y' = f'(x) \pm h'(x)$.

☑ **Bước 03.** Từ bảng xét dấu của $y' = f'(x) \pm h'(x) \Rightarrow$ khoảng đơn điệu cần tìm.

Ví dụ 1.5.1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình. Đặt $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x$.
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $g(x)$.



- A. $(-1; 0)$. B. $(-\infty; 0)$.
C. $(0; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

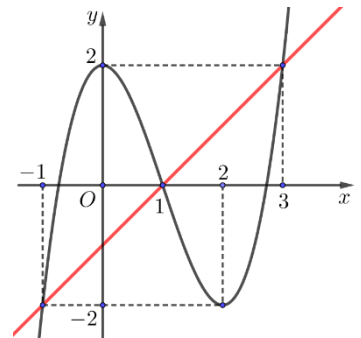
Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2 = 2(f'(x) - x + 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

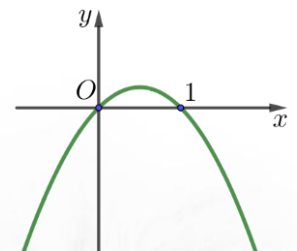
Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 1); (3; +\infty)$.



Ví dụ 1.5.2

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x+2) - 3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-1; 0)$. B. $(0; 1)$.
C. $(-\infty; 0)$. D. $(1; +\infty)$.



Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2 = 2(f'(x) - x + 1)$

Ta tính đạo hàm $y = f(x+2) - 3$; $y' = (x+2)' f'(x+2) = f'(x+2)$ sự biến thiên của hàm số $y = f(x+2) - 3$ phụ thuộc vào dấu của $f'(x+2)$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \rightarrow f'(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-1 \end{cases}$ (nghiệm đơn)
- $f'(x) > 0$ khi $0 < x < 1 \rightarrow f'(x+2) > 0$ khi $0 < x+2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < -2$
- $f'(x) < 0$ khi $x < 0 \vee x > 1 \rightarrow f'(x+2) < 0$. Trên các khoảng còn lại

Dạng 1.6. Ứng dụng phương pháp hàm số.

- ☑ Nếu $f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = m$ nếu có nghiệm chỉ có duy nhất 1 nghiệm trên $(a;b)$;
- ☑ Nếu $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì phương trình $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ trên $(a;b)$.
- ☑ Nếu $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì bất phương trình $f(u) < f(v) \Leftrightarrow u < v$.
- ☑ Nếu $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ thì bất phương trình $f(u) < f(v) \Leftrightarrow u > v$.

Ví dụ 1.6.1

Giải phương trình: $x^{2019} + x = 2$

Lời giải

Đặt $f(x) = x^{2019} + x \Rightarrow f'(x) = 2019x^{2018} + 1 > 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

$\Rightarrow f(x)$ là hàm đồng biến.

Mặt khác $f(1) = 2$ (thỏa mãn phương trình).

Nên nghiệm phương trình là $x = 1$.

Ví dụ 1.6.2

Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x-1} = 5$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1$, ta thấy $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình.

Đặt $f(x) = x^2 + \sqrt{x-1} (x > 1); f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0 (x > 1)$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Mặt khác $f(2) = 5$ (thỏa mãn phương trình).

Nghiệm phương trình: $x = 2$.

Ví dụ 1.6.3

Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} + \sqrt[3]{2x^2}$

Lời giải

Ta có $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} + \sqrt[3]{2x^2} \quad (1)$.

Nhận xét $\begin{cases} x+2 = (x+1)+1 \\ 2x^2+1 = (2x^2)+1 \end{cases}$. Ta đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{x+1} \\ v = \sqrt[3]{2x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 - 1 = x \\ v^3 = 2x^2 \end{cases}$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{u^3+1} + u = \sqrt[3]{v^3+1} + v \Leftrightarrow f(u) = f(v)$.

Xét $f(t) = t + \sqrt[3]{t^3+1}$ có $f'(t) = 1 + \frac{t^2}{\sqrt[3]{(t^3+1)^2}} > 0, \forall t \neq -1 \Rightarrow f(t)$ đồng biến.

Nên $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Rightarrow \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy phương trình có nghiệm: $\left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$.

Chương 01

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

Chủ đề 02

CỰC TRỊ

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

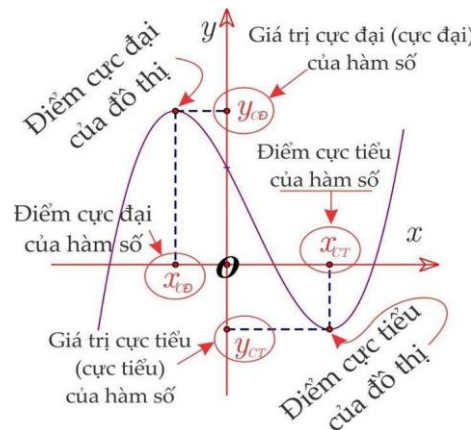
1. CÁC ĐỊNH NGHĨA - ĐỊNH LÝ.

Định nghĩa 01.

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:

- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm f .
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm f .

Tên gọi	Ký hiệu
➤ Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là điểm cực trị .	x_0
➤ Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là cực trị (giá trị cực trị) .	y_0
➤ Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là điểm cực trị của hàm số .	$M(x_0; f(x_0))$



Định lý.

01

Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 .

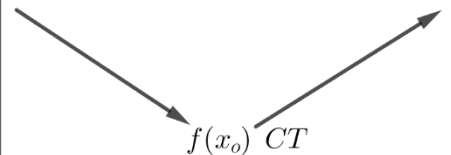
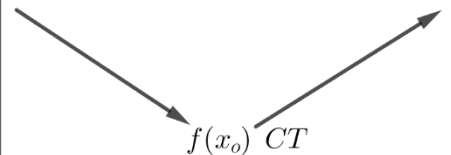
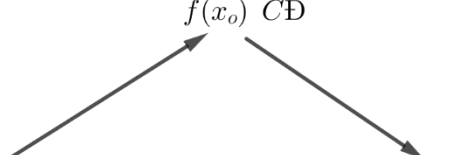
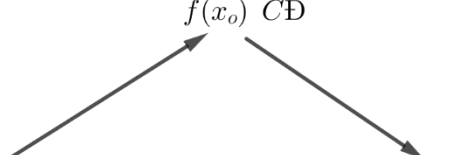
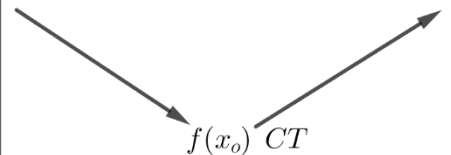
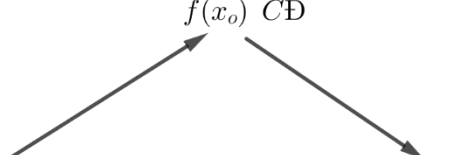
Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

02

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 .

Khi đó, nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

- ❑ Nếu $\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) < 0 & \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases} \longrightarrow x_0$ là một điểm cực đại của hàm $f(x)$.
- ❑ Nếu $\begin{cases} f'(x) < 0 & \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) > 0 & \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases} \longrightarrow x_0$ là một điểm cực tiểu của hàm $f(x)$.

	<table><tr><td>x</td><td>$x_o - h$</td><td>x_o</td><td>$x_o + h$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	$x_o - h$	x_o	$x_o + h$	y'	$-$	0	$+$	y				<table><tr><td>x</td><td>$x_o - h$</td><td>x_o</td><td>$x_o + h$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr><tr><td>y</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	$x_o - h$	x_o	$x_o + h$	y'	$+$	0	$-$	y			
x	$x_o - h$	x_o	$x_o + h$																							
y'	$-$	0	$+$																							
y																										
x	$x_o - h$	x_o	$x_o + h$																							
y'	$+$	0	$-$																							
y																										

03

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$.

Khi đó:

□ Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0 .

□ Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0 .

Chú ý:

- ① Đạo hàm $f'(x)$ có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0 .
- ② Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
- ③ Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

Từ định lý 03, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

☑ **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.

☑ **Bước 2:** Tìm các nghiệm x_i ($i=1;2;\dots$) của phương trình $f'(x)=0$.

☑ **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

* Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i .

* Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i .

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP.

2.1. Cực trị của hàm đa thức bậc ba.

2.1.1. Cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

✎ Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$). Có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ ($a \neq 0$).

Điều kiện	Hướng giải quyết
Có hai cực trị	$b^2 - 3ac > 0$
Không có cực trị (hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$).	$b^2 - 3ac \leq 0$
Có hai cực trị trái dấu	$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ac < 0 \end{cases}$

Có hai cực trị cùng dấu		$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$
Có hai cực trị cùng dấu dương		$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ab < 0 \\ ac > 0 \end{cases}$
Có hai cực trị cùng dấu âm		$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} < 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ab > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$
Có hai cực trị $x_1; x_2$ thỏa	$x_1 < \alpha < x_2$	$\Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 < 0$.
	$x_1 < x_2 < \alpha$	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases}$.
	$\alpha < x_1 < x_2$	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases}$.

2.1.1. Cực trị thỏa mãn điều kiện với đường thẳng.

2.1.2.1. Cực trị nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng.

Tổng quát: VTTĐ giữa 2 điểm với đường thẳng		Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$. ☑ Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) < 0$ thì hai điểm A, B nằm khác phía so với đường thẳng Δ. ☑ Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) > 0$ thì hai điểm A, B nằm cùng phía so với đường thẳng Δ.
Đặc biệt:		Các điểm cực trị của đồ thị nằm cùng phía đối với trục Oy $\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu
		Các điểm cực trị của đồ thị nằm khác phía đối với trục Oy $\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị trái dấu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu
		Các điểm cực trị của đồ thị nằm cùng phía đối với trục Ox $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$.

① Cùng về phía trên đối với trục Ox .

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt và } \begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} > 0 \end{cases}$$

② Cùng về phía dưới đối với trục Ox .

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt và } \begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} < 0 \end{cases}$$

Các điểm cực trị của đồ thị nằm **khác phía đối với trục Ox**

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt và } y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$$

Hoặc

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt (khi nhầm được nghiệm).}$$

2.1.2.2. Phương trình đường thẳng qua các hai cực trị.

$$g(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right) x + d - \frac{bc}{9a} \quad \text{hoặc} \quad g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{18a} \quad \text{hoặc} \quad g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{3y'''}$$

2.1.2.3. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc 3 là.

$$AB = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}} \quad \text{với } e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}$$

2.2. Cực trị của hàm đa thức bậc bốn (trùng phương).

2.2.1. Cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

✎ Xét hàm số bậc bốn $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$).

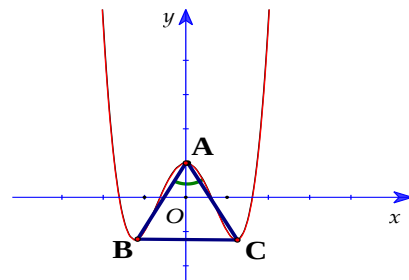
Điều kiện	Tổng quát	Cụ thể
Có một điểm cực trị (một cực trị)	$ab \geq 0$	Đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$
		Đúng một cực trị và cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$
Có ba điểm cực trị (hai cực trị).	$ab < 0$	Hai cực tiểu và một cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$
		Một cực tiểu và hai cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

2.2.2. Cực trị thỏa mãn điều kiện hình học.

Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị: $A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ tạo thành

tam giác ABC thỏa mãn đủ điều kiện: $ab < 0$. Đặt $BAC = \alpha$.

Tổng quát: $\cot^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{-b^3}{8a}$



DỮ KIẾN CỤ THỂ		CÔNG THỨC THỎA MÃN $ab < 0; c \neq 0$
Tính chất (vuông/đều/nhọn)	$\triangle ABC$ vuông cân tại A .	$b^3 = -8a$.
	$\triangle ABC$ đều.	$b^3 = -24a$.
	$\triangle ABC$ có 3 góc nhọn.	$b(8a + b^3) > 0$.
Diện tích	$\triangle ABC$ có $S_{\triangle ABC} = S_0$.	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$.
	$\triangle ABC$ có $\max(S_0)$.	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$.
Thỏa độ dài cạnh	$\triangle ABC$ có $BC = m_0$.	$am_0^2 + 2b = 0$.
	$\triangle ABC$ có $AB = AC = n_0$.	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$.
	$\triangle ABC$ có $BC = kAB = kAC$.	$b^3 \cdot k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$.
Trọng/trục tâm	$\triangle ABC$ có trọng tâm O .	$b^2 = 6ac$.
	$\triangle ABC$ có trục tâm O .	$b^3 + 8a - 4ac = 0$.
Nội/ngoại tiếp đường tròn	$\triangle ABC$ có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\triangle ABC} = r_0$.	$r = \frac{b^2}{4 a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}$.
	$\triangle ABC$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\triangle ABC} = R$.	$R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$.
	$\triangle ABC$ có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$.
	$\triangle ABC$ có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là:

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$$

Liên quan trục tọa độ	$\triangle ABC$ có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 = 4ac$
-----------------------	--	-------------

	ΔABC có điểm cực trị cách đều Ox .	$b^2 = 8ac$.
	Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2} ac $.
Liên quan tứ giác	ΔABC cùng gốc O tạo thành hình thoi	$b^2 = 2ac$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng 2.1. Tìm cực trị của hàm số $y=f(x)$ khi cho BBT hoặc Đồ Thị

❶ Đề cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ hoặc Bảng biến thiên $\rightarrow$ nhìn vị trí “cù chỗ”:

- ☒ Thấy “đi lên” rồi “đi xuống” $\rightarrow$ “cù chỗ” là cực đại.
- ☒ Thấy “đi xuống” rồi “đi lên” $\rightarrow$ “cù chỗ” là cực tiểu.

❷ Đề cho bảng xét dấu $f'(x) \rightarrow$ nếu đề hỏi:

- ☒ Số điểm cực trị $\rightarrow$ đếm số lần $f'(x)$ đổi dấu ($f'(x)$ đổi dấu bao nhiêu lần thì $f(x)$ có bấy nhiêu cực trị).
- ☒ Số điểm cực đại/cực tiểu $\rightarrow$ từ bảng xét dấu $f'(x)$ “phác họa” đường đi $f(x)$.

Tên gọi	Ký hiệu
$\hookrightarrow$ Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là điểm cực trị .	x_0
$\hookrightarrow$ Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là cực trị (giá trị cực trị) .	y_0
$\hookrightarrow$ Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị của hàm số .	$M(x_0; f(x_0))$

Khi đó ta có hệ quả:

Khoảng cách giữa:

- ① Hai điểm cực trị của hàm số:
- ② Hai cực trị của hàm số:
- ③ Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số:

Công thức

$$\begin{aligned} &|x_2 - x_1| \\ &|y_2 - y_1| \\ &\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

Ví dụ 2.1.1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	5	-1	$+\infty$			

Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là

- A. $x = -1$. B. $x = 5$. C. $x = 1$. D. $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là $x = 0$.

Dạng 2.2. Tìm cực trị của hàm số tường minh

Quy tắc 01:

- ☑ **Bước 01.** Tìm tập xác định của hàm số.
- ☑ **Bước 02.** Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
- ☑ **Bước 03.** Lập bảng biến thiên.
- ☑ **Bước 04.** Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Quy tắc 02:

- ☑ **Bước 01.** Tìm tập xác định của hàm số.
- ☑ **Bước 02.** Tính $f'(x)$. Giải $f'(x) = 0$ và ký hiệu x_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) là các nghiệm của nó.
- ☑ **Bước 03.** Tính $f''(x) \rightarrow f''(x_i)$.
- ☑ **Bước 04.** Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .
 - ➡ $f''(x_i) > 0 \rightarrow x_i$ là điểm cực tiểu.
 - ➡ $f''(x_i) < 0 \rightarrow x_i$ là điểm cực đại.

Ví dụ 2.2.1

Tìm điểm cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

A. $x = -1$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Cách 1:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		6		-26		$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CD} = 6$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -26$.

Cách 2:

$$y'' = 6x - 6.$$

$$y''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow \text{Hàm số đạt cực đại tại } x = -1, y_{CD} = 6.$$

$$y''(3) = 12 > 0 \Rightarrow \text{Hàm số đạt cực tiểu tại } x = 3, y_{CT} = -26.$$

Ví dụ 2.2.2

Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

A. $x = -1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$. Do đó hàm số không có cực trị.

Dạng 2.3. Tìm m để hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0

Bài toán: Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f'(x)=0$ đạt cực trị tại $x=x_0$.

☑ **Bước 01.** Tính $f'(x) \rightarrow f''(x)$.

☑ **Bước 02.** Thực hiện yêu cầu bài toán:

$$\square \text{ Hàm số đạt cực đại tại } x=x_0 \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)<0 \end{cases}.$$

$$\square \text{ Hàm số đạt cực tiểu tại } x=x_0 \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)>0 \end{cases}.$$

Ví dụ 2.3.1

|| Tìm giá trị thực của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$
A. $m=-1$. B. $m=-7$. C. $m=5$. D. $m=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=x^2-2mx+(m^2-4)$; $y''=2x-2m$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3)=0 \\ y''(3)<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-6m+m^2-4=0 \\ 6-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+5=0 \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1(L) \\ m=5(TM) \\ m>3 \end{cases}.$$

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2.3.2

|| Tìm tất cả m để hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.
A. $m=0$. B. $m=-2$. C. $m=1$. D. $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=x^2-2mx+(m^2-4)$; $y''=2x-2m$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=4(m-1)x^3-2(m^2-2)x$.

$$\text{Hàm số đạt cực tiểu tại } x=-1 \Rightarrow y'(-1)=0 \Leftrightarrow -4(m-1)+2(m^2-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=2 \end{cases}.$$

Với $m=0$, hàm số thành $y=-x^4+2x^2+2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Với $m=2$, hàm số thành $y=x^4-2x^2+2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Vậy $m=2$ thì hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Dạng 2.4. Tìm m để hàm số $y=f(x)$ có n cực trị.

☑ **Hàm bậc 3** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$):

Có 2 điểm cực trị	$b^2 - 3ac > 0$
Không có điểm cực trị	$b^2 - 3ac \leq 0$

☑ **Hàm bậc 4 (trùng phương)** $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$):

Có 3 điểm cực trị	$ab < 0$	Có 1 Đại – 2 Tiểu	$\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$
		Có 2 Đại – 1 Tiểu	$\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$
Có 1 điểm cực trị	$ab \geq 0$	Chỉ có Đại	$\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$
		Chỉ có Tiểu	$\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

Ví dụ 2.4.1

Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m-3 = 0$.

Để hàm số không có cực trị thì

$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (7m-3) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy S có 4 phần tử.

Ví dụ 2.4.2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị?

A. 2019. B. 2020. C. 0. D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: $m=0 \Rightarrow y=-1$ nên hàm số không có cực trị $\Rightarrow m=0$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 0 \Rightarrow m^2 > 0$.

Hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị

$\Leftrightarrow -m^2 \cdot (m^2 - 2019m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2019m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2019$.

Vì $m \neq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2019$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2019 giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Dạng 2.5. Đường thẳng qua hai điểm cực trị.

Bài toán: Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

☑ Sử dụng một trong các cách sau:

$$\textcircled{1} \quad g(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right)x + d - \frac{bc}{9a}.$$

$$\textcircled{2} \quad g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{18a} = y - \frac{y' \cdot y''}{3y'''}.$$

☑ Dùng phép chia đa thức: đề chia đạo $\rightarrow$ lấy dư.

Bài toán: Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$:

☑ Sử dụng tính chất: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ thì giá trị cực trị tương

ứng của hàm số là $y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$ (đạo tử chia đạo mẫu).

Ví dụ 2.5.1

Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB .

- A. $P(1;0)$. B. $M(0;-1)$. C. $N(1;-10)$. D. $Q(-1;10)$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 \rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y = -26 \end{cases}$$

Ta có $A(-1;6), B(3;-26) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4;-32)$ nên) Chọn -1.

Phương trình đường thẳng là: $8(x+1)+1(y-6)=0 \Leftrightarrow 8x+y+2=0$.

Thay P, M, N, Q vào đường thẳng AB ta có điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng.

Ví dụ 2.5.2

Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

- A. $m = \frac{1}{3}$. B. $m = -\frac{1}{6}$. C. $m = \frac{1}{6}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Có : } y' = 3x^2 - 6x, \quad y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \right) y' - 2x - 1.$$

Đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là $y = -2x - 1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1) \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Dạng 2.6. Cực trị hàm bậc ba thỏa điều kiện với đường thẳng.

○ Vị trí tương đối:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.

Xét biểu thức $T = (ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c)$. Khi đó:

☑ Nếu $T < 0$ thì hai điểm A, B nằm khác phía so với đường thẳng Δ .

☑ Nếu $T > 0$ thì hai điểm A, B nằm cùng phía so với đường thẳng Δ .

○ Đặc biệt

① Các điểm cực trị của đồ thị nằm **cùng phía đối với trục Oy**

$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

② Các điểm cực trị của đồ thị nằm **khác phía đối với trục Oy**

$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị trái dấu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

③ Các điểm cực trị của đồ thị nằm **cùng phía đối với trục Ox**

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$.

☑ Cùng **phía trên** đối với trục Ox $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} > 0 \end{cases}$

☑ Cùng **phía dưới** đối với trục Ox $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} < 0 \end{cases}$.

④ Các điểm cực trị của đồ thị nằm **khác phía đối với trục Ox**

$\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$, hoặc

$\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (khi nhầm được nghiệm).

○ Bài toán: Hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng d .

☑ **Bước 01.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

☑ **Bước 02.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 trường hợp thường gặp:

✎ **Trường hợp 1:** $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

✎ **Trường hợp 2:** $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

☑ **Bước 03.** Gọi $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ $\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow m \in D_2$.

☑ **Bước 04.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

○ Bài toán: Hai điểm cực trị cách đều đường thẳng d .

☑ **Bước 01.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

☑ **Bước 02.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 trường hợp thường gặp:

✎ **Trường hợp 1:** $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

✎ **Trường hợp 2:** $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

☑ **Bước 03.** Do A, B cách đều đường thẳng d nên $d(A; d) = d(B; d) \Rightarrow m \in D_2$.

☑ **Bước 04.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

☞ Ví dụ 2.6.1

Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = 3$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 3x^2 - 6x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị có tọa độ là $A(0; m)$ và $B(2; -4 + m)$.

$$\text{Ta có } OA = OB \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + m^2} = \sqrt{2^2 + (-4 + m)^2} \Leftrightarrow m^2 = 4 + (4 - m)^2 \Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

☞ Ví dụ 2.6.2

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. 3. B. 6. C. -6. D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ x = m+1 \end{cases} \Rightarrow A\left(m-1; \frac{m^3 - 3m + 2}{3}\right) \text{ và } B\left(m+1; \frac{m^3 - 3m - 2}{3}\right)$$

$$\text{Để thấy phương trình đường thẳng } AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{m(m^2 - 1)}{3}$$

Nên AB không thể song song hoặc trùng với d

$\Rightarrow A, B$ cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$$I\left(m; \frac{m^3 - 3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{m^3 - 3m}{3} = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Với $m = 3 \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Với $m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Dạng 2.7. Cực trị hàm bậc ba thỏa điều kiện x_1, x_2 .

○ **Bài toán:** Hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa điều kiện:

☑ **Bước 01.** Tính y' .

☑ **Bước 02.** Tìm điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ (1).

☑ **Bước 03.** Áp dụng định lý Vi-ét:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} (*)$$

☑ **Bước 04.** Biến đổi ycbt về dạng $S; P \rightarrow$ thay (*) vào ycbt giải tìm m (2).

☑ **Bước 05.** Từ (1); (2) $\rightarrow m \in ?$

Ví dụ 2.7.1

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng

A. $\frac{40}{9}$.

B. $\frac{22}{9}$.

C. $\frac{25}{4}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Hàm số có 2 điểm cực trị thì $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases}$$

Theo bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3m-4}{m} \\ x_2 = 1 - \frac{2(m-1)}{m} = \frac{2-m}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3m-4}{m} \cdot \frac{2-m}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Rightarrow 3(2-m)m + (3m-4)(2-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(t/m) \\ m = \frac{2}{3}(t/m) \end{cases}$$

Vậy $m_1^2 + m_2^2 = \frac{40}{9}$.

Dạng 2.8. Cực trị hàm trùng phương.

Điều kiện	Tổng quát	Cụ thể
Có một điểm cực trị (một cực trị)	$ab \geq 0$	Đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$
		Đúng một cực trị và cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$
Có ba điểm cực trị (hai cực trị).	$ab < 0$	Hai cực tiểu và một cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$
		Một cực tiểu và hai cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

↪ Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị: $A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ tạo thành

tam giác ABC thỏa mãn đủ kiện: $ab < 0$ và có $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

☑ Đặt $BAC = \alpha$, luôn có: $8a(1 + \cos\alpha) + b^3(1 - \cos\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ và $S^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$

☑ Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y = -\frac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$

☑ Phương trình đường tròn đi qua $A, B, C: x^2 + y^2 - (c+n)x + cn = 0$, với $n = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}$ và bán

kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R = \left| \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right|$

☑ Xem thêm các dạng ở mục **“2.2.2. Cực trị thỏa mãn điều kiện hình học”**.

Ví dụ 2.8.1

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

- A. $S = 3$. B. $S = \frac{1}{2}$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ x = \pm 1 \rightarrow y = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	1	2	1	$+\infty$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0; 2), B(-1; 1), C(1; 1)$.

Nhận xét $\triangle ABC$ cân tại A . Vì vậy $S = \frac{1}{2}|y_A - y_B| \cdot |x_C - x_B| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Dạng 2.9. Cực trị hàm hợp $y=f(u(x))$.

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ (đề có thể ra bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của $f(x), f'(x)$).

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(u)$.

CÁCH 01.

✓ **Bước 01.** Tính $y' = u' \cdot f'(u)$.

✓ **Bước 02.** Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases}$

✓ **Bước 03.** Giải lần lượt $u' = 0$ và $f'(u) = 0$ thông thường giải $u' = 0$ sẽ đơn giản,

Để giải $f'(u) = 0$, ta tìm $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{cases}$ (đồ thị cắt Ox) $\rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = a \\ \vdots \\ u = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ? \\ \vdots \\ x = ? \end{cases}$.

✓ **Bước 04.** Lập bảng xét dấu của $y' = u' \cdot f'(u)$.

✓ **Bước 05.** Từ bảng xét dấu kết luận yêu cầu bài toán.

CÁCH 02.

✓ **Bước 01.** Tính $y' = u' \cdot f'(u)$.

✓ **Bước 02.** Từ đề ra ta tìm được $f'(x)$, giả sử đề ra:

① Bảng xét dấu của $f'(x) \rightarrow$ nhìn những vị trí $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{cases} \Rightarrow f'(x) = (x-a) \dots (x-b)$.

② Đồ thị của $f'(x) \rightarrow$ nhìn những vị trí đồ thị cắt Ox $\Rightarrow \begin{cases} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{cases} \Rightarrow f'(x) = (x-a) \dots (x-b)$.

③ Đồ thị của $f(x) \rightarrow$ nhìn những vị trí "cù chỏ" $\Rightarrow \begin{cases} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{cases} \Rightarrow f'(x) = (x-a) \dots (x-b)$.

✓ **Bước 03.** Từ $f'(x) \rightarrow f'(u)$ bằng cách chỗ nào có x thay bằng u .

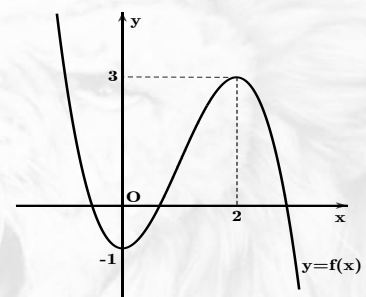
✓ **Bước 04.** Ta có được $y' = u'(x) \cdot f'(u(x)) \rightarrow$ lập bảng xét dấu của hàm này.

✓ **Bước 05.** Từ bảng xét dấu kết luận yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2.9.1

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Giá trị x_0 thuộc khoảng nào sau đây

- A. $(1; 3)$. B. $(-1; 1)$.
C. $(0; 2)$. D. $(3; +\infty)$.



Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x) = f(x^3 + x) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 1)f'(x^3 + x)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 1)f'(x^3 + x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x = 0 \\ x^3 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } g'(x) > 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 1)f'(x^3 + x) > 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x^3 + x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

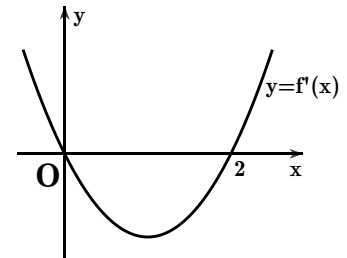
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$g(x)$	$+\infty$						$-\infty$

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = 0$. Suy ra $x_0 \in (-1; 1)$.

Ví dụ 2.9.2

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ là

- A. 1. B. 4.
C. 3. D. 2.



Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } g(x) = f(-x^2 + x) \Rightarrow g'(x) = (-2x + 1)f'(-x^2 + x).$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x + 1)f'(-x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 = 0 \\ f'(-x^2 + x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ -x^2 + x = 0 \\ -x^2 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } g'(x) > 0 \Leftrightarrow (-2x + 1)f'(-x^2 + x) > 0$$

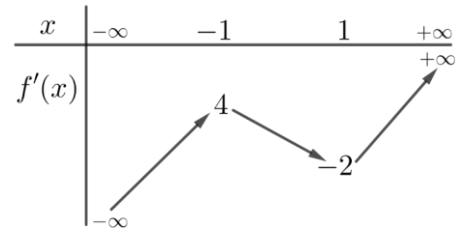
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 > 0 \\ f'(-x^2 + x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -x^2 + x > 2 \\ -x^2 + x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Ví dụ 2.9.3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là:



- A. 2. B. 4.
C. 3. D. 5.

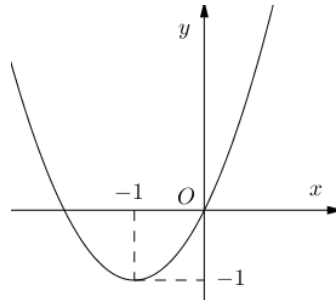
Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f'(x^2 + 2x) = 0 \end{cases} \quad (1)$.

Từ BBT ta thấy phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = a < -1 & (2) \\ x^2 + 2x = b \in (-1; 1) & (3) \\ x^2 + 2x = c > 1 & (4) \end{cases}$.

Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ có dạng



Từ đồ thị $y = x^2 + 2x$ ta thấy (2) vô nghiệm; (3) và (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $y' = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt. Vậy hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ có 5 điểm cực trị.

Ví dụ 2.9.4

Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 8. C. 10. D. 7.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là $-2; -1; 0$ (ba nghiệm bội lẻ).

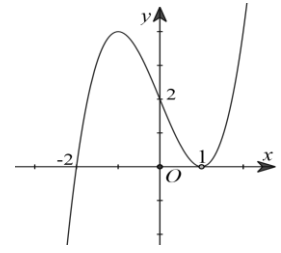
Xét $y = f(x^2 - 2x) \rightarrow y' = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x);$

$y' = 0 \Leftrightarrow (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Do $y' = 0$ có một nghiệm bội lẻ ($x = 1$) và hai nghiệm đơn ($x = 0; x = 2$) nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ chỉ có ba điểm cực trị.

Ví dụ 2.9.5

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



- A. 4. B. 2.
C. 5. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

$$\text{Ta có } y' = [f(x^2 - 3)]' = 2x \cdot f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

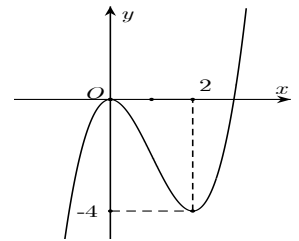
$x = \pm 2$ là nghiệm kép, các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên $y = f(x^2 - 3)$ có 3 cực trị.

Ví dụ 2.9.6

Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên.

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$?

- A. 4. B. 2.
C. 5. D. 3.



Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = [f(f(x))]' = f'(x) \cdot f'(f(x)); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$$

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ vì hàm số } f(x) \text{ có hai điểm cực trị } x = 0; x = 2$$

$$+ f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

Từ đồ thị ta thấy $f(x) = 0$ có một nghiệm bội chẵn $x = 0$

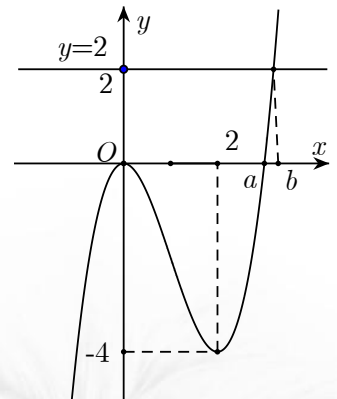
và một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x = a > 2$.

Kẻ đường thẳng $y = 2$ nhận thấy phương trình $f(x) = 2$ có một nghiệm đơn hoặc

bội lẻ $x = b > a$

Do đó y' có các điểm đổi dấu là $x = 0; x = 2, x = a, x = b$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.



Chương 01

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

Chủ đề 03

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

Định nghĩa.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- ☐ Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$.

Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$.

- ☐ Số m gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$.

Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$.

Chú ý

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(a) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(b) \end{cases}$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(b) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(a) \end{cases}$.
- Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 3.1. Max – Min hàm số cho trước đoạn $[a; b]$.

- ☑ **Bước 01.** Tính $f'(x) \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ \vdots \\ x = x_n \end{cases}$, nghiệm nào $\in [a; b] \rightarrow$ nhận và tất cả

các điểm $\alpha_i \in (a; b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

- ☑ **Bước 02.** Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.

- ☑ **Bước 03.** Khi đó: $\Rightarrow \max_{[a; b]} f(x) = \max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}$.

$$\Rightarrow \min_{[a; b]} f(x) = \min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

☞ Nếu $y = f(x)$:

$$\text{➤ đồng biến trên } [a; b] \text{ thì } \begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(a) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(b) \end{cases} \quad \text{➤ nghịch biến trên } [a; b] \text{ thì } \begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(b) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$

☞ Ví dụ 3.1.1

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $\min_{[0;2]} y = -1$. B. $\min_{[0;2]} y = -\frac{1}{2}$. C. $\min_{[0;2]} y = -11$. D. $\min_{[0;2]} y = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2] \end{cases}$.

$$y(0) = 1; y(1) = -1; y(2) = 3.$$

Suy ra $\min_{[0;2]} y = -1$.

☞ Ví dụ 3.1.2

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ trên đoạn $[1; \sqrt{3}]$.

- A. $\max_{[1; \sqrt{3}]} y = \sqrt{3}$. B. $\max_{[1; \sqrt{3}]} y = 14$. C. $\max_{[1; \sqrt{3}]} y = 0$. D. $\max_{[1; \sqrt{3}]} y = 12$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 4x^3 + 4x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin [1; \sqrt{3}].$$

$$y(1) = 2; y(\sqrt{3}) = 14$$

$\max_{[1; \sqrt{3}]} y = 14$ khi $x = \sqrt{3}$ và $\min_{[1; \sqrt{3}]} y = 2$ khi $x = 1$.

☞ Ví dụ 3.1.3

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ trên đoạn $[-2, 0]$. Tính giá trị của biểu thức $5M + m$.

- A. 12. B. -5. C. -2. D. 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = \frac{-3}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \in [-2, 0]$, suy ra hàm số nghịch biến trên $[-2, 0]$,

Do đó, $M = \max_{[-2, 0]} y = y(-2) = \frac{1}{5}$ và $m = \min_{[-2, 0]} y = y(0) = -1$.

$$\text{Vậy } 5M + m = 5\left(\frac{1}{5}\right) + (-1) = 0.$$

Dạng 3.2. Max - Min hàm số cho trước đồ thị hoặc BBT.

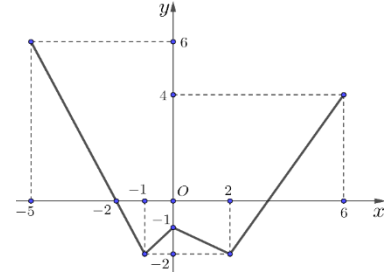
☑ **Bước 01.** Xác định chính xác đoạn cần xét:

- ☞ Nếu đề ra đồ thị thì xác định trên trục $Ox \rightarrow$ đoạn không cần xét gạch bỏ.
- ☞ Nếu đề ra BBT thì xác định trên hàng $x \rightarrow$ đoạn không cần xét gạch bỏ.

☑ **Bước 02.** Tra các vị trí cao nhất và thấp nhất $\rightarrow$ kết luận $\max_{[a,b]} f(x); \min_{[a,b]} f(x)$.

☞ Ví dụ 3.2.1

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-5; 6]$ và có đồ thị như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-2; 2]$. Giá trị của $M + m$ bằng bao nhiêu?



- A. $M + m = -2$. B. $M + m = -5$.
C. $M + m = 1$. D. $M + m = 12$.

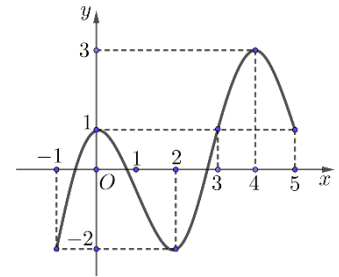
Lời giải

Chọn A

Ta có $M = \max_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = 0$ và $m = \min_{[-2;2]} f(x) = f(-1) = f(2) = -2$. Vậy $M + m = -2$.

☞ Ví dụ 3.2.2

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 5]$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 5]$. Giá trị của $2m - 3M$ bằng bao nhiêu?



- A. 1. B. 22.
C. -5. D. -13.

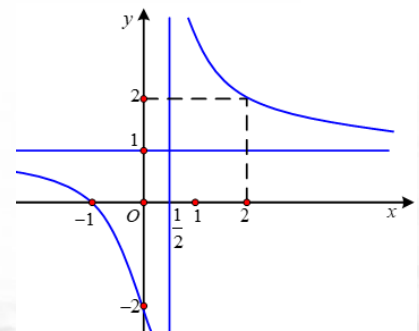
Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta xác định được $m = -2; M = 3$. Ta có $2m - 3M = 2(-2) - 3 \cdot 3 = -13$.

☞ Ví dụ 3.2.3

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm mệnh đề đúng.



- A. $\max_{[3;4]} f(x) = f(4)$. B. $\max_{[1;2]} f(x) = 2$.
C. $\max_{[-2;1]} f(x) = 0$. D. $\max_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.

Lời giải

Chọn D

Trên $[1; 2]$ hàm số liên tục và $f(1) > f(2) = 2$ nên loại A.

Trên $[-2; 1]$ hàm số gián đoạn tại $x = 0,5$ nên loại B.

Trên $[3; 4]$ hàm số liên tục và $f(3) > f(4)$ nên loại D.

Trên $[-3; 0]$ hàm số liên tục và $f(-3) > f(0)$ nên $\max_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.

Dạng 3.4. Max - min hàm vô tỷ.

☑ **Bước 01.** Tìm tập xác định $D=?$, khi đó sẽ xét max - min trên $D=?$ nếu đề không yêu cầu xét trên đâu.

☑ **Bước 02.** Tính $f'(x) \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ \vdots \\ x = x_n \end{cases}$, nghiệm nào $\in [a; b] \rightarrow$ nhận.

☑ **Bước 03.** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max_{(a; b)} f(x)$, $m = \min_{(a; b)} f(x)$.

Ví dụ 3.4.1

Tìm tập giá trị T của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$.

A. $T = [-2; 2]$. B. $T = [0; 2]$. C. $T = [0; 2\sqrt{2}]$. D. $T = [-2; 2\sqrt{2}]$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = [-2; 2]$. Hàm số liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Ta có: $y(2) = 2$; $y(-2) = -2$; $y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Vì hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ liên tục trên $[-2; 2]$ nên $\begin{cases} \max_{x \in [-2; 2]} y = y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \\ \min_{x \in [-2; 2]} y = y(-2) = -2 \end{cases}$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [-2; 2\sqrt{2}]$.

Ví dụ 3.4.2

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x) = x + 1 + \sqrt{2 - x^2}$. Tính $M - m$?

A. $M - m = 2\sqrt{2}$. B. $M - m = 2 + \sqrt{2}$.
C. $M - m = 2 - \sqrt{2}$. D. $M - m = 4 - \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 = x^2 (x \geq 0).$$

$\Leftrightarrow x = 1$ và đạo hàm không xác định tại $x = \pm\sqrt{2}$.

Ta có: $m = f(-\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}$; $f(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$; $f(1) = 3 = M \Rightarrow M - m = 2 + \sqrt{2}$.

Dạng 3.5. Max - min hàm lượng giác.

○ Lưu ý:

$$\textcircled{1} \begin{cases} -1 \leq \sin X \leq 1 \\ -1 \leq \cos X \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin^2 X \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 X \leq 1 \end{cases}.$$

$$\textcircled{2} \text{ Đổi biến } \begin{cases} t = \sin X \\ t = \cos X \end{cases} \Rightarrow t \in [-1; 1] \rightarrow f(t).$$

$\textcircled{3}$ Dùng điều kiện để phương trình $a \sin X \pm b \cos X = c$ có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Ví dụ 3.5.1

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} \sin(x)\right)$ trên $\mathbb{R}$ bằng.

- A. 1. B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. -1. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} \sin x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(\frac{\pi}{4} \sin x\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} \sin(x)\right)$ là $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 3.5.2

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$ trên $\mathbb{R}$.

- A. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{16}{5}$. B. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{7}{2}$.
C. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3$. D. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4 = -\sin^2 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + 5$.

Đặt $t = \sin 2x$. Ta có $x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Xét hàm số $g(t) = -t^2 - \frac{1}{2}t + 5$ với $t \in [-1; 1]$.

$$g'(t) = -2t - \frac{1}{2}, \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}.$$

$$g(-1) = \frac{9}{2}, \quad g\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{81}{16}, \quad g(1) = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{t \in [-1; 1]} g(t) = \frac{7}{2}.$$

Dạng 3.6. Max - min hàm trị tuyệt đối.

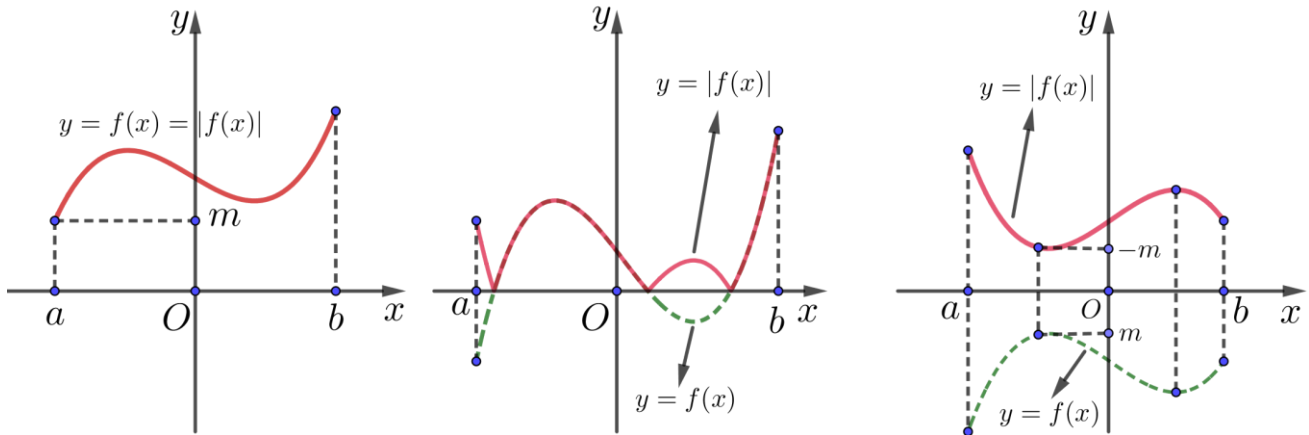
Bài toán: Cho hàm số $y = f(x; m)$ liên tục trên D . Tìm $\max_D |f(x)|$ hoặc $\min_D |f(x)|$.

Các tính chất quan trọng:

① Giả sử $y = f(x; m)$ xác định trên D và tồn tại $\begin{cases} m = \min_D f(x) \\ M = \max_D f(x) \end{cases}$. Khi đó

$$\boxed{\max_D |f(x)| = \max_D \{|m|; |M|\}}.$$

$$\boxed{\min_D |f(x)| = \begin{cases} m & \text{khi } m > 0 \\ 0 & \text{khi } m \leq 0 \leq M \\ -M & \text{khi } M < 0 \end{cases}}$$



② Nếu $\begin{cases} \max_D |f(x)| = M \\ \min_D |f(x)| = m \end{cases}$ thì $\begin{cases} M \geq |f(x)|, \forall x \in D \\ m \leq |f(x)|, \forall x \in D \end{cases}$.

③ $|x| + |y| \geq |x + y|$, dấu "=" xảy ra khi $xy \geq 0$ (mục tiêu để khử biến).

Bên cạnh đó ta có các bước làm như sau:

☑ **Bước 01.** Tính $f'(x)$ và lập bảng biến thiên trên đoạn $[a; b]$.

☑ **Bước 02.** Biện luận $\begin{cases} m = \min_{[a; b]} f(x) \geq 0 \\ M = \max_{[a; b]} f(x) \leq 0 \end{cases}$, từ đó kết luận $M = \max_{[a; b]} |f(x)|$.

☑ **Bước 03.** Kết luận m .

☞ **Ví dụ 3.6.1**

Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 3|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$ bằng 10. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. 2.

B. -1.

C. -3.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta xét hàm số: $f(x) = x^2 + 2x + m - 3$.

Đặt $g(x) = |f(x)|$.

Ta có: $f'(x) = 2x + 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

x	-2	-1	2
$f(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$m-3$	$m-4$	$m+5$

Trường hợp 1: $m-4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4$, ta có $\max_{[-2;2]} g(x) = g(2) = |f(2)| = |m+5| = m+5$.

Ta phải có $m+5=10 \Leftrightarrow m=5$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m+5 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -5$, ta có $\max_{[-2;2]} g(x) = g(-1) = |f(-1)| = |m-4|$.

Ta phải có $|m-4|=10 \Leftrightarrow \begin{cases} m-4=10 \\ m-4=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=14(l) \\ m=-6 \end{cases}$.

Vậy, ta có $S = \{-6; 5\}$ nên tổng tất cả các phần tử của S bằng $-6+5=-1$.

Ví dụ 3.6.2

Cho hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 2m - 1|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 6. Tích tất cả các phần tử của tập S bằng

- A. 0. B. -14. C. $-\frac{7}{4}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta xét hàm số: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2m - 1$.

Đặt $g(x) = |f(x)|$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \notin [-1; 1] \end{cases} (l)$.

x	-1	0	1
$f(x)$	+	0	-
$f'(x)$	$2m-5$	$2m-1$	$2m-3$

Trường hợp 1: $2m-5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{2}$, ta có $\max_{[-1;1]} g(x) = g(0) = |f(0)| = |2m-1| = 2m-1$.

Ta phải có $2m-1=6 \Leftrightarrow m=\frac{7}{2}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $2m-1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$, ta có $\max_{[-1;1]} g(x) = g(-1) = |f(-1)| = |2m-5|$.

Ta phải có $|2m-5|=6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-5=6 \\ 2m-5=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{11}{2}(l) \\ m=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy, ta có $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right\}$ nên tích tất cả các phần tử của S bằng $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{7}{2} = -\frac{7}{4}$.

Chương 01

Chủ đề 04

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

Định nghĩa tiệm cận ngang.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn $(a; +\infty); (-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$.

Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

Định nghĩa tiệm cận đứng.

Đường thẳng $x = x_0$ là đường **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

Nhận xét

Với đồ thị hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad-bc \neq 0$) luôn có TCN $y = \frac{a}{c}$ và TCD $x = -\frac{d}{c}$.

Chú ý:

① Hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $ac \neq 0$ có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

② Hàm $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x), g(x)$ là hàm đa thức, gọi bậc $f(x), g(x)$ lần lượt là $p; q$. Khi đó:

□ Nếu $p < q$ thì có tiệm cận ngang duy nhất $y = 0$.

□ Nếu $p = q$ thì có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{b}$ với $a; b$ là hệ số của lũy thừa cao nhất tử và mẫu.

□ Nếu $p > q$ thì không có tiệm cận ngang.

③ $x = x_0$ là tiệm cận đứng $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x_0) = 0; f(x_0) \neq 0 \\ g(x_0) = f(x_0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \end{cases}$.

④ Dùng CASIO để tìm TCD hoặc TCN của hàm số qua CASIO, ta sử dụng CALC trên máy.

Giới hạn	Trên máy tính
$x \rightarrow x_0^+$	CALC $x_0 + 10^{-10}$
$x \rightarrow x_0^-$	CALC $x_0 - 10^{-10}$
$x \rightarrow +\infty$	CALC 10^{10}
$x \rightarrow -\infty$	CALC -10^{10}

Dạng 4.1. Lý thuyết về đường tiệm cận.

- Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$.

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

- Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

① $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$.

② $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$.

③ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.

④ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

Ví dụ 4.1.1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$;

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C) .
- B. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C) .
- C. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C) .
- D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C) .

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C) .

Ví dụ 4.1.2

Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai TCN là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
- B. Đồ thị hàm số đã cho có hai TCN là các đường thẳng $x = 1$ và $y = x + 1$.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một TCN.
- D. Đồ thị hàm số đã cho không có TCN.

Lời giải

Chọn A

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Dạng 4.2. Tìm đường tiệm cận từ đồ thị hoặc bbt.

○ Đề cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ → nhìn đường thẳng mà đồ thị không cắt.

○ Đề cho BBT → nhìn theo những vị trí sau:

☑ Hai vị trí $-\infty$ và $+\infty$ (trên hàng x) giống xuống hàng y nếu hữu hạn thì đó là TCN.

☑ Vị trí x_0 mà y có "2 gạch" → ta xem thử tại x_0^+ ; x_0^- thì y có chứa ∞ thì đó là TCD. (chỉ cần một trong hai vị trí hoặc cả hai vị trí x_0^+ ; x_0^- làm cho y có chứa ∞ thì đó là TCD).

Ví dụ 4.2.1

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và có bảng biến thiên. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	0	+
$f(x)$					

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số có ít nhất một tiệm cận ngang.
- C. Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$.
- D. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và $\lim_{x \rightarrow (1)^+} y = -\infty$

Nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Ví dụ 4.2.2

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới. Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	-	0	-	+
y				

Lời giải

Chọn D

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -3$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y = -3$.

Dạng 4.3. Tìm đường tiệm cận của đồ thị hàm số tường minh.

1. Các bước tìm Tiệm cận ngang:

☑ **Bước 01.** Tìm tập xác định của $y = f(x)$. Giả sử $x \in (a; b)$.

① Nếu $a; b$ hữu hạn $\rightarrow$ ĐTHS không có Tiệm cận ngang.

② Nếu a/b là vô cùng $\rightarrow$ Bước 2.

☑ **Bước 02.** Tính $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_2 \end{cases} (*)$.

☑ **Bước 03.** Kết luận:

Trường hợp 1. Nếu $y_1 = y_2$ (hữu hạn) $\rightarrow$ Có 1 tiệm cận ngang.

Trường hợp 2. Nếu $y_1 \neq y_2$ (hữu hạn) $\rightarrow$ Có 2 tiệm cận ngang.

Trường hợp 3. Nếu

① y_1 hữu hạn và $\begin{cases} y_2 = \pm\infty \\ y_2 \neq \end{cases} \rightarrow$ Có 1 tiệm cận ngang.

② y_2 hữu hạn và $\begin{cases} y_1 = \pm\infty \\ y_1 \neq \end{cases} \rightarrow$ Có 1 tiệm cận ngang.

Cách xác định nhanh tiệm cận ngang: Hàm $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ gọi bậc của $f(x), g(x)$ lần lượt là $p; q$.

Khi đó:

☐ Nếu $p < q$ thì có TCN duy nhất $y = 0$.

☐ Nếu $p = q$ thì có TCN $y = \frac{a}{b}$ với $a; b$ là hệ số của lũy thừa cao nhất trên tử và dưới mẫu.

☐ Nếu $p > q$ thì không có tiệm cận ngang.

2. Các bước tìm Tiệm cận đứng:

Xét hàm $y = f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ có $D; E; F$ lần lượt là tập xác định của $f(x); h(x); g(x)$.

☑ **Bước 01.** Giải $g(x) = 0 \rightarrow x_0$. Nếu $\begin{cases} x_0 \in E \\ x_0 \in F \\ x_0 \notin D \end{cases} \rightarrow$ bước 2, ngược lại không thỏa thì loại.

☑ **Bước 02.** Thay x_0 vào $h(x)$ ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu x_0 không là nghiệm của tử $\rightarrow x = x_0$ là TCD.

Trường hợp 2. Nếu x_0 là nghiệm tử (bội m) và là nghiệm mẫu (bội n) với $m < n \rightarrow x = x_0$ là tiệm cận đứng.

Ví dụ 4.3.1

Đồ thị hàm số nào sau đây nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận:

A. $y = x - 2 - \frac{2}{x}$.

B. $y = 2$.

C. $y = \frac{2x}{x+2}$.

D. $y = \frac{2x}{x-2}$.

Lời giải

Chọn D

Chỉ có đáp án D hàm số không xác định tại $x = 2$ nên đáp án D đúng.

☞ Ví dụ 4.3.2

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-5x+6}$ là ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x^2-5x+6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 2, x \neq 3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Tuy nhiên $x=3$ không thỏa mãn $4-x^2 \geq 0$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-5x+6} = +\infty \Rightarrow (C) \text{ có một tiệm cận đứng } x=2.$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 2, x \neq 3 \end{cases} \text{ nên không tồn tại } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y \Rightarrow (C) \text{ không có tiệm cận ngang.}$$

Tóm lại (C) có 1 tiệm cận đứng duy nhất là $x=2$.

☞ Ví dụ 4.3.3

Cho hàm số $y = \frac{x(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+2x+1}$ có đồ thị (C). Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. Đồ thị (C) không có tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

B. Đồ thị (C) không có tiệm cận đứng và có một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị (C) có một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

D. Đồ thị (C) có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} - \frac{2}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 \left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} - \frac{2}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x(x^2-1)}{(x^2+2x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x(x^2-1)}{(x^2+2x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = -\infty$$

Vậy đồ thị (C) có một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Dạng 4.4. Biện luận tiệm cận chứa tham số m.

Bài toán 1. Tiệm cận đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (C).

Để đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thì $\begin{cases} c \neq 0 \\ ad-bc \neq 0 \end{cases}$.

Bài toán 2. Tiệm cận đồ thị hàm số $y = \frac{a}{f(x)}$ (C') với a là hằng số; $f(x)$ là đa thức bậc $n > 0$.

☑ Ta có a là hằng số và $f(x)$ là đa thức bậc $n > 0$ nên đồ thị hàm số (C') luôn có **tiệm cận ngang** duy nhất là $y = 0$ (bậc tử < bậc mẫu).

☑ Tìm tiệm cận đứng bằng cách giải $f(x) = 0 \rightarrow x = x_0$.

Bài toán 3. Tiệm cận đồ thị hàm số $y = \frac{g(x)}{f(x)}$ (C'') với $f(x); g(x)$ là đa thức bậc $n > 0$.

○ Tìm **tiệm cận ngang** ta có các trường hợp sau:

☑ Bậc tử > bậc mẫu $\rightarrow$ ĐTHS không có TCN.

☑ Bậc tử < bậc mẫu $\rightarrow$ ĐTHS có một TCN duy nhất $y = 0$.

☑ Bậc tử = bậc mẫu $\rightarrow$ ĐTHS có TCN $y = \frac{a}{b}$.

○ Tìm **tiệm cận đứng** ta có các trường hợp sau:

☑ **Bước 01.** Tìm điều kiện $f(x) = 0$ có nghiệm (1).

☑ **Bước 02.** Giả sử $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$, khi đó $f(x_0) \neq 0$ (2).

☑ **Bước 03.** Từ (1) & (2) $\rightarrow$ kết luận.

Bài toán 4. Tiệm cận đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C'''), với $f(x)$ là hàm vô tỉ.

☑ **Bước 01.** Tìm tập xác định D của hàm số.

☑ **Bước 02.** Để tồn tại tiệm cận ngang của ĐTHS (C''') thì tập D phải chứa ký hiệu ∞ hoặc tồn tại ít nhất $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ với y_0 hữu hạn.

Ví dụ 4.4.1

Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+m}{mx+1}$ không có tiệm cận đứng là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

☑ **Trường hợp 1:** $m = 0 \Rightarrow y = x$: Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

☑ **Trường hợp 2:** $x = -\frac{1}{m}$ là nghiệm của tử số $\Leftrightarrow -\frac{1}{m} + m = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Ví dụ 4.4.2

Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{x^2 + mx + 1}$ có 2 đường tiệm cận.

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $y = \frac{2}{x^2 + mx + 1}$ có bậc tử < bậc mẫu nên ĐTHS luôn có TCN $y = 0$.

Do đó chỉ cần 1 TCD nữa là thỏa yêu cầu bài toán.

Để ĐTHS có TCD $\Leftrightarrow x^2 + mx - 3 = 0$ có một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4.1.1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4.4.3

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + m^2 + 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) có tiệm cận đứng.

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m = 0$.

C. $m \neq 0$.

D. $m \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x = 1$ không là nghiệm của $g(x) = x^2 - 2x + m^2 + 1$

$$\Leftrightarrow g(1) \neq 0 \Leftrightarrow m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Ví dụ 4.4.4

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) có đúng 3 đường tiệm cận?

A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$.

D. $m > 2$.

Lời giải

Chọn A

$$y = \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}; \text{ Xét } x^2 - 2mx + 4 = 0 \text{ có } \Delta' = m^2 - 4.$$

+ Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận ngang $y = 0$ (do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$).

+ Nếu $m = 2$ hoặc $m = -2$ hoặc $m = -\frac{5}{2}$ thì đồ thị hàm số chỉ có hai đường tiệm cận.

+ Nếu $m \in (-\infty; -2) \setminus \left\{-\frac{5}{2}\right\}$ hoặc $m \in (2; +\infty)$ thì đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Dạng 4.5. Tìm đường tiệm cận hàm ẩn.

Bài toán 1. Cho đồ thị/ bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ tìm tiệm cận đồ thị hàm số $y = \frac{a}{g(x)}$ với a là hằng số khác 0 và $g(x)$ xác định theo $f(x)$.

☑ Tìm TCN: nhìn vào vị trí $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_2$ để xác định $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a}{g(x)} \right)$.

☑ Tìm TCD: giải $g(x) = 0$ (dựa vào đồ thị/ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ để xác định số nghiệm).

Bài toán 2. Cho đồ thị/ bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ tìm tiệm cận đồ thị hàm số $y = \frac{h(x)}{g(x)}$ với $h(x)$ là một biểu thức theo x và $g(x)$ là biểu thức theo $f(x)$.

☑ Từ đồ thị/BBT tìm nghiệm $g(x) = 0 \rightarrow$ biểu thức $g(x)$.

☑ Rút gọn biểu thức $\frac{h(x)}{g(x)}$ rồi các đường tiệm cận.

📖 **Lưu ý:** điều kiện tồn tại của $h(x)$.

Ví dụ 4.5.1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình. Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$.

- A. 1. B. 3.
C. 2. D. 0.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	1		-3	1

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$\text{Phương trình } 2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_1 \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \\ x=x_2 \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases}$$

$$\text{Do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_1^+} y = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{1}{2f(x)-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_1^-} y = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{1}{2f(x)-1} = +\infty \end{cases} \text{ nên } x=x_1 \text{ là một TCD của đồ thị hàm số } y = \frac{1}{2f(x)-1}.$$

$$\text{Do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_2^+} y = \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{1}{2f(x)-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_2^-} y = \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{1}{2f(x)-1} = -\infty \end{cases} \text{ nên } x=x_2 \text{ là một TCD của đồ thị hàm số } y = \frac{1}{2f(x)-1}$$

Do $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 1 \end{cases}$ nên $y=1$ là một TCN của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ có 2 đường TĐĐ là $x = x_1; x = x_2$ và 1 TCN là $y = 1$.

Ví dụ 4.5.2

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Tìm số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị

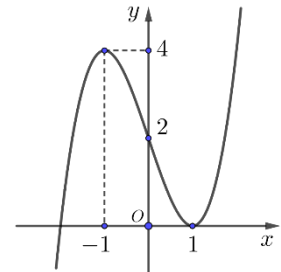
hàm số $y = g(x) = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$.

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 3.



Lời giải

Chọn A

Ta có: $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:

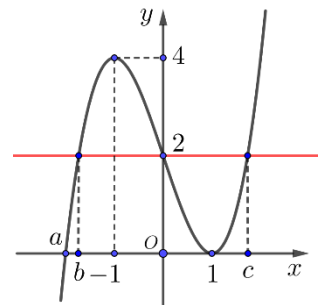
(1) có nghiệm $x_1 = a < -1$ (nghiệm đơn) và $x_2 = 1$ (nghiệm kép)

$\Rightarrow f(x) = k(x-a)(x-1)^2 \quad (k \neq 0)$

(2) có nghiệm ba nghiệm đơn x_1, x_2, x_3 với $x_1 = b < -1 < x_2 = 0 < 1 < x_3 = c$

$\Rightarrow f(x) - 2 = k(x-b)x(x-c) \quad (k \neq 0).$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{a; b; 0; 1; c\}$



+) Tìm tiệm cận ngang:

Vì $g(x) = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)} = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f(x)[f(x)-2]} = \frac{(x+1)^2}{k^2(x-1)(x-b)x(x-c)(x-a)}$

Nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \Rightarrow$ ĐTHS $y = g(x)$ nhận đường thẳng $y = 0$ làm TCN.

+) Tìm tiệm cận đứng:

Tại các điểm $x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$ mẫu của $g(x)$ nhận giá trị bằng 0 còn tử nhận các giá trị dương.

Và do hàm số xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{a; b; 0; 1; c\}$ nên giới hạn một bên của hàm số

$y = g(x)$ tại các điểm $x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$ là các giới hạn vô cực.

Do đó, ĐTHS $y = g(x)$ có 5 TĐĐ: $x = a, x = b, x = 0, x = 1$ và $x = c$.

Vậy ĐTHS $y = g(x)$ có 6 đường tiệm cận: 1 TCN $y = 0$ và 5 TĐĐ

$x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$.

Chương 01

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Chủ đề 05

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Đồ thị hàm số bậc ba.

1.1. Hình dạng cơ bản:

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

1.2. Từ đồ thị xác định hàm số.

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Từ đồ thị đã cho để xác định được dấu của các hệ số trong hàm ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1.** Xác định bậc.
- **Bước 2.** Xác định nhánh cuối của đồ thị.
- **Bước 3.** Xác định giao điểm của đồ thị với trục tung.
- **Bước 4.** Xác định số cực trị.
- **Bước 5.** Điểm thuộc đồ thị hàm số.

Trên là các bước tổng quát, giờ ta sẽ xét từng hệ số cụ thể như sau:

Xác định	Nhìn vào	Trường hợp xảy ra
☐ Dấu của a	Nhánh cuối của đồ thị	① Đi lên $\rightarrow a > 0$. ② Đi xuống $\rightarrow a < 0$.
☐ Dấu của d	Vị trí đồ thị cắt Oy	① Cắt trên gốc $O \rightarrow d > 0$. ② Cắt dưới gốc $O \rightarrow d < 0$. ③ Cắt ngay gốc $O \rightarrow d = 0$.
☐ Dấu của c	Cách 1: Đồ thị đã cho có ? cực trị	① Có 2 cực trị $\rightarrow ac \leq 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow c$. ② Có 0 cực trị $\rightarrow ac > 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow c$.

	Cách 2: Sử dụng Vi-ét.	+ Từ đồ thị xác định hai điểm cực trị của hàm số. + Tính tích hai điểm cực trị đó, giả sử là P : ① $P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow c$. ② $P < 0 \rightarrow \frac{c}{a} < 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow c$.
□ Dấu của b	Cách 1: Sử dụng điểm uốn Với $x_{uon} = -\frac{b}{3a}$.	+ Kẻ đường thẳng nối 2 điểm cực trị $\rightarrow$ cắt đồ thị tại 1 điểm. + Chiếu điểm đó xuống Ox: ① Bên phải gốc $O \rightarrow -\frac{b}{a} > 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow b$. ② Bên trái gốc $O \rightarrow -\frac{b}{a} < 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow b$.
	Cách 2: Sử dụng Vi-ét (dùng khi xác định được tổng hai điểm cực trị âm hoặc dương)	+ Từ đồ thị xác định hai điểm cực trị của hàm số. + Tính tổng hai điểm cực trị đó, giả sử là S : ① $S > 0 \rightarrow -\frac{2b}{3a} > 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow b$. ② $S < 0 \rightarrow -\frac{2b}{3a} < 0$ kết hợp dấu của $a \rightarrow b$.

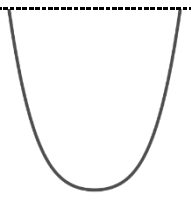
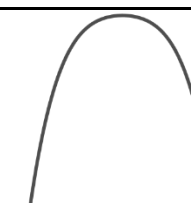
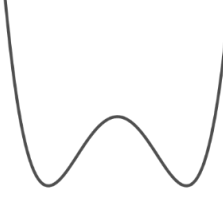
□ **Lưu ý:** Đồ thị hàm số bậc ba có TÂM ĐỐI XỨNG là điểm uốn.

Cách tìm tâm đối xứng như sau:

- Với đồ thị hàm số: kẻ đường thẳng nối 2 điểm cực trị $\rightarrow$ cắt đồ thị tại 1 điểm thì điểm này là điểm uốn.
- Với hàm số: ta tìm nghiệm của $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ thì đây là hoành độ của điểm uốn.

2. Đồ thị hàm số bậc bốn.

2.1. Hình dạng cơ bản:

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt		

2.2. Từ đồ thị xác định hàm số.

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$).

Từ đồ thị đã cho để xác định được dấu của các hệ số trong hàm ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1.** Xác định bậc.
- **Bước 2.** Xác định nhánh cuối của đồ thị.
- **Bước 3.** Xác định giao điểm của đồ thị với trục tung.
- **Bước 4.** Xác định số cực trị.
- **Bước 5.** Điểm thuộc đồ thị hàm số.

Trên là các bước tổng quát, giờ ta sẽ xét từng hệ số cụ thể như sau:

Xác định	Nhìn vào	Trường hợp xảy ra
☐ Dấu của a	Nhánh cuối của đồ thị	① Đi lên $\rightarrow a > 0$. ② Đi xuống $\rightarrow a < 0$.
☐ Dấu của c	Vị trí đồ thị cắt Oy	① Cắt trên gốc $O \rightarrow c > 0$. ② Cắt dưới gốc $O \rightarrow c < 0$. ③ Cắt ngay gốc $O \rightarrow c = 0$.
☐ Dấu của b	Đồ thị đã cho có ? điểm cực trị	① Có 3 điểm cực trị $\rightarrow ab \leq 0$ kết hợp dấu $a \rightarrow b$. ② Có 1 điểm cực trị $\rightarrow ab > 0$ kết hợp dấu $a \rightarrow b$.

□ Lưu ý:

- ↪ Đồ thị hàm số bậc bốn (trùng phương) có TRỤC ĐỐI XỨNG là trục tung (Oy).
- ↪ Đồ thị hàm số bậc bốn (trùng phương) không có tâm đối xứng.
- ↪ Đồ thị hàm số bậc bốn (trùng phương) là hàm số chẵn.

4. Các phép biến đổi đồ thị.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) với số $a > 0$ ta có:

Hàm số	Cách biến đổi
$\square y = f(x) + a$ có đồ thị (C') .	Tịnh tiến (C) theo phương của Oy lên trên a đơn vị.
$\square y = f(x) - a$ có đồ thị (C') .	Tịnh tiến (C) theo phương của Oy xuống dưới a đơn vị.
$\square y = f(x + a)$ có đồ thị (C') .	Tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua trái a đơn vị.
$\square y = f(x - a)$ có đồ thị (C') .	Tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua phải a đơn vị.
$\square y = -f(x)$ có đồ thị (C') .	Đối xứng của (C) qua trục Ox .
$\square y = f(-x)$ có đồ thị (C') .	Đối xứng của (C) qua trục Oy .

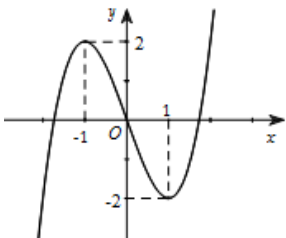
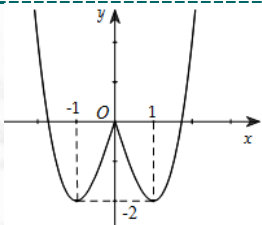
❖ Biến đổi đồ thị hàm số chứa trị tuyệt đối.

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra:

① Đồ thị $y = f(|x|)$ (C')

Nhận xét:	Ta có: $y = f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ Và $y = f(x)$ là hàm chẵn nên đồ thị (C') nhận Oy làm trục đối xứng.
Cách vẽ:	- Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y = f(x)$. - Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C), lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.

Ví dụ 1. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$.

Khảo sát và vẽ (C)	Ta có đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$: 
Biến đổi (C) :	- Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái Oy, giữ nguyên (C) bên phải Oy. - Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy 

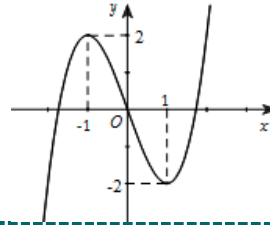
② Đồ thị $y = |f(x)|$ (C') .

Nhận xét:	Ta có: $y = f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$
Cách vẽ:	- Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị $(C): y = f(x)$. - Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

Ví dụ 2. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = |x^3 - 3x|$.

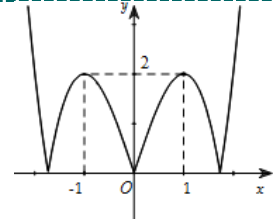
Khảo sát và vẽ (C)

Ta có đồ thị (C): $y = f(x) = x^3 - 3x$:



Biến đổi (C):

- Bỏ phần đồ thị của (C) dưới Ox , giữ nguyên (C) phía trên Ox .
- Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .



③ Đồ thị $y = |u(x)| \cdot v(x)$ (C').

Nhận xét:

Ta có: $y = |u(x)| \cdot v(x) = \begin{cases} u(x) \cdot v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x) \cdot v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}$

Cách vẽ:

- Giữ nguyên phần trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị (C): $y = f(x)$.
- Bỏ phần trên miền $u(x) < 0$ của (C), lấy đối xứng phần bị bỏ qua Ox .

Ví dụ 3. Từ đồ thị (C): $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị (C'): $y = |x-1|(2x^2 - x - 1)$.

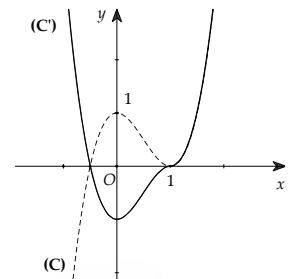
Nhận xét

$y = |x-1|(2x^2 - x - 1) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 1 \\ -f(x) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Biến đổi (C):

- Giữ nguyên (C) với $x \geq 1$.
- Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .

Chú ý: Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên lấy đối xứng các điểm đặc biệt của (C): giao điểm với Ox , Oy , CD , CT ...



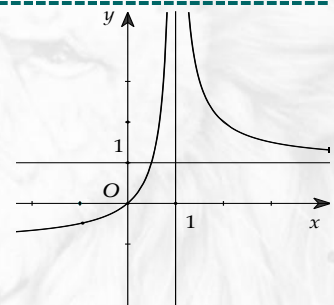
Ví dụ 4. Từ đồ thị (C): $y = f(x) = \frac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị (C'): $y = \frac{x}{|x-1|}$.

Nhận xét

$y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (1; +\infty) \\ -\frac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \end{cases}$

Biến đổi (C):

- Bỏ phần đồ thị của (C) với $x < 1$, giữ nguyên (C) với $x > 1$.
 - Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .
- Chú ý:** Đối với hàm phân thức thì nên lấy đối xứng các đường tiệm cận để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.



Chú ý: với dạng: $y = |f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$

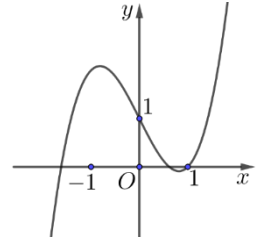
Dạng 5.1. Từ đồ thị/bbt đã cho xác định hàm số.

- ☑ **Bước 01.** Xác định bậc.
- ☑ **Bước 02.** Xác định nhánh cuối của đồ thị.
- ☑ **Bước 03.** Xác định giao điểm của đồ thị với trục tung.
- ☑ **Bước 04.** Xác định số cực trị.
- ☑ **Bước 05.** Điểm thuộc đồ thị hàm số.

Ví dụ 5.1.1

Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D . Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 + 2x + 1$. B. $y = x^3 - 2x^2 + 1$.
C. $y = x^3 - 2x + 1$. D. $y = -x^3 + 2x + 1$.



Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, loại phương án D.

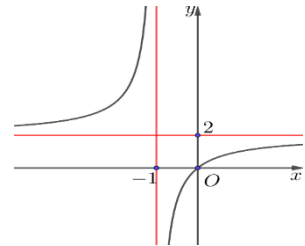
Xét phương án A có $y' = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, hàm số không có cực trị, loại A.

Xét phương án B có $y' = 3x^2 - 6x$ và y' đổi dấu khi đi qua các điểm $x = 0, x = 2$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 2$, loại phương án B.

Ví dụ 5.1.2

Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào

- A. $y = \frac{x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.
C. $y = \frac{2x-3}{x+1}$. D. $y = \frac{2x+5}{x+1}$.



Lời giải

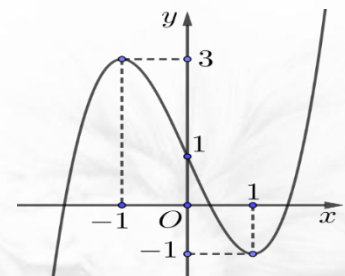
Chọn B

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0;1)$ nên chọn phương án B.

Ví dụ 5.1.3

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $y = -x^3 + 3x + 1$.
B. $y = x^4 - x^2 + 1$.
C. $y = -x^2 + x - 1$.
D. $y = x^3 - 3x + 1$.



Lời giải

Chọn D

Đồ thị đã cho có hình dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nên loại phương án B và C

Dựa vào đồ thị, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$ nên loại phương án A

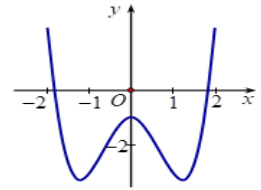
Dạng 5.2. Từ đồ thị/bbt đã cho xác định các hệ số.

☑ Xem lại các mục "Từ đồ thị xác định hàm số."

Ví dụ 5.2.1

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c < 0$. B. $a > 0, b > 0, c < 0$.
C. $a < 0, b > 0, c < 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$.



Lời giải

Chọn A

Do đồ thị cắt Oy tại $M(0;c)$ nằm dưới trục Ox nên $c < 0$.

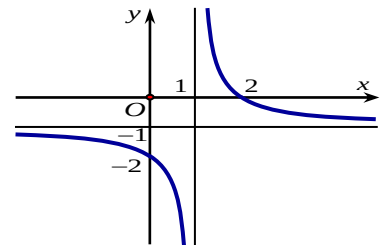
Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$.

Hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$

Ví dụ 5.2.2

Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $b < 0 < a$ B. $0 < b < a$
C. $b < a < 0$ D. $0 < a < b$



Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=a$ và tiệm cận đứng $x=1$.

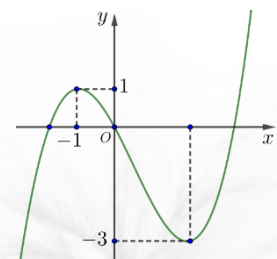
Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = \frac{b}{a} > 1$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{a}{-1} = 1 \\ \frac{b}{a} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow b < a = -1 < 0.$$

Ví dụ 5.2.3

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3



Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình dạng đồ thị ta có $a > 0$.

Đồ thị hàm số qua gốc tọa độ nên $d = 0$.

$$\text{Hàm số có hai điểm cực trị } x_1, x_2 \text{ với } |x_1| < |x_2| \text{ nên } \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0 \\ x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c < 0 \end{cases}$$

Dạng 5.3. Đồ thị hàm số chứa trị tuyệt đối.

1. Cách vẽ ĐTHS $y = f(|x|)$

- ☑ Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- ☑ Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy .

2. Cách vẽ ĐTHS $y = |f(x)|$

- ☑ Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- ☑ Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .

3. Cách vẽ ĐTHS $y = |u(x)|v(x)$

- ☑ Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- ☑ Bỏ phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .

Ví dụ 5.3.1

Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây.

- A. $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3$
- B. $y = 2x^4 - 4x^2 - 3$
- C. $y = 2|x|^3 - 3|x| - 3$
- D. $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 3$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$

Lời giải

Chọn A

Xét $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$; $f'(x) = 6x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	-3	-4	$+\infty$

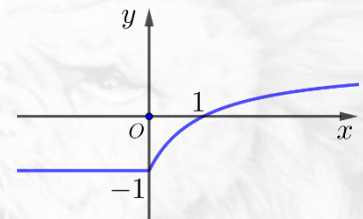
Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3$ là:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$

Ví dụ 5.3.2

Hình vẽ bên là một phần của đồ thị hàm số nào?

- A. $y = \frac{-x-1}{|x|+1}$
- B. $y = \frac{x-1}{|x|+1}$
- C. $y = \frac{x-1}{|x+1|}$
- D. $y = \frac{x}{|x|+1}$



Lời giải

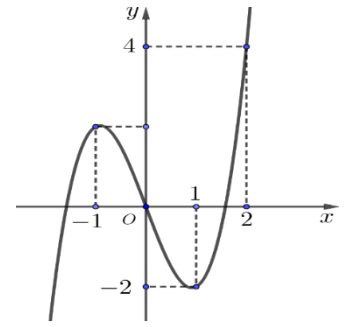
Chọn B

Từ đồ thị, ta có tập xác định hàm số $D = \mathbb{R}$ nên loại phương án B.
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;0)$ nên loại phương án C, D.

Ví dụ 5.3.3

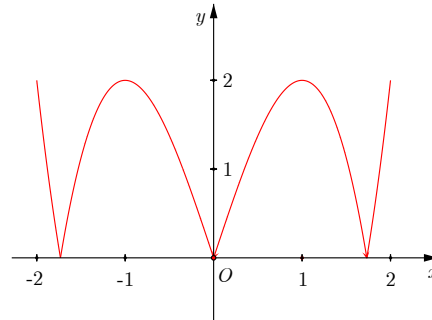
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 5 B. 3
C. 4 D. 6



Lời giải

Chọn A

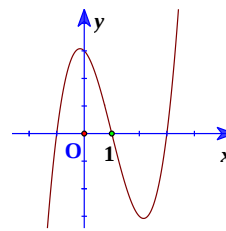


Từ đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ ta có hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị

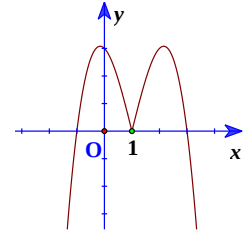
Ví dụ 5.3.4

Cho hàm số $y = (x-1)(x^2 - 2x - 3)$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = |(x-1)(x^2 - 2x - 3)|$
B. $y = -|(x-1)(x^2 - 2x - 3)|$
C. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 3|$
D. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 3)$



Hình 1



Hình 2

Lời giải

Chọn B

Nhận thấy đồ thị hàm số ở hình 2 giữ nguyên phần đồ thị trên khoảng $(-\infty; 1)$ và lấy đối xứng phần đồ thị trên khoảng $(1; +\infty)$.

Xét đáp án B : Ta có $y = -|(x-1)(x^2 - 2x - 3)| = \begin{cases} -(x-1)(x^2 - 2x - 3), & x \in (1; +\infty) \\ (x-1)(x^2 - 2x - 3), & x \in (-\infty; 1) \end{cases}$.

Đồ thị của $y = -|(x-1)(x^2 - 2x - 3)|$ giữ nguyên trong khoảng $(-\infty; 1)$ và lấy đối xứng phần đồ thị trong khoảng $(1; +\infty)$.

Chương 01

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

Chủ đề 06

SỰ TƯƠNG GIAO

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

Phương pháp tổng quát.

- Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1); (C_2)$. Khi đó số giao điểm (điểm chung) của hai đồ thị $(C_1); (C_2)$ chính là số nghiệm $f(x) = g(x)$.
- Với $g(x) = 0$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ là phương trình hoành độ giao điểm với trục hoành.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng 6.1. Đếm số giao điểm (điểm chung) biết hàm tường minh.

- Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1); (C_2)$. Khi đó số giao điểm (điểm chung) của hai đồ thị $(C_1); (C_2)$ chính là số nghiệm $f(x) = g(x)$.

Ví dụ 6.1.1

Đồ thị hàm số $y = 15x^4 - 3x^2 - 2018$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$15x^4 - 3x^2 - 2018 = 0 (*)$$

$$\text{Đặt } x^2 = t, t \geq 0. \text{ Phương trình tương đương } 15t^2 - 3t - 2018 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3 + \sqrt{121089}}{30} > 0 \\ t = \frac{3 - \sqrt{121089}}{30} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3 + \sqrt{121089}}{30} \text{ nên } (*) \text{ có 2 nghiệm phân biệt.}$$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm.

Ví dụ 6.1.2

Đường thẳng $y = 2x - 1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\frac{x^2 - x - 1}{x + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - x - 1 = (2x - 1)(x + 1) \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}. \text{ Suy ra } d \text{ và } (C) \text{ có hai điểm chung.}$$

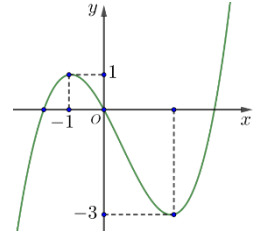
Dạng 6.2. Đếm số giao điểm (điểm chung) biết đồ thị/bbt.

- ☑ Giải phương trình $f(x) = a$ với a là hằng số ta kẻ đường thẳng $y = a$ song song với Ox cắt đồ thị $f(x)$ tại bao nhiêu điểm thì có bấy nhiêu điểm chung.
- ☑ Áp dụng các phép biến đổi đồ thị ở “**Chủ đề 05. Đồ thị hàm số**”

Ví dụ 6.2.1

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$ là

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.



Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -1$.

Kẻ đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Ví dụ 6.2.2

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$		$-$	0	$+$
y		2	$+\infty$	-4	$+\infty$

- A. $(-4; 2)$. B. $[-4; 2)$. C. $(-4; 2]$. D. $(-\infty; 2]$.

Lời giải

Chọn A

Số nghiệm phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của hai đường $y = f(x)$ và $y = m$: là đường thẳng song song với trục Ox cắt Oy tại điểm có tung độ m .

Phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên có $m \in (-4; 2)$.

Dạng 6.3. Tìm m để đths giao với (c') tại n nghiệm.

○ Với đồ thị hàm số bậc ba:

01

↪ Nhắm được (*) có nghiệm nghiệm $x = x_0$, khi đó:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)(a_1x^2 + b_1x + c_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \end{cases}$$

Để tách ra được như thế ta chia hookne.

↪ Tùy theo yêu cầu bài toán mà có điều kiện cho $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$.

02

↪ Cô lập được m về một vế (vế phải) và biến số ở vế còn lại (vế trái) có dạng:

$$h(x) = k(m)$$

Khi đó thực hiện các bước sau:

○ **Bước 1.** Tính $h'(x) \rightarrow$ lập BBT của hàm số $h(x)$.

○ **Bước 2.** Từ BBT của hàm số $h(x)$ ta thực hiện yêu cầu bài toán.

03

↪ Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có các điểm cực trị là "số đẹp", khi đó:

○ (*) có một nghiệm $\Leftrightarrow f(x)$ không có cực trị hoặc có cực trị thỏa $f_{CD} \cdot f_{CT} > 0$.

○ (*) có hai nghiệm pb $\Leftrightarrow f(x)$ có cực trị thỏa $f_{CD} \cdot f_{CT} = 0$.

○ (*) có ba nghiệm pb $\Leftrightarrow f(x)$ có cực trị thỏa $f_{CD} \cdot f_{CT} < 0$.

04

↪ Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có các điểm cực trị là "số không đẹp", khi đó ta dùng phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị kết hợp định lý Vi-ét để tính $f_{CD} \cdot f_{CT}$

○ Với đồ thị hàm số bậc bốn (trùng phương):

Phương pháp nhắm nghiệm:

↪ Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.

01

↪ Khi đó ta phân tích: $f(x, m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

↪ Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc 2 $g(x) = 0$

02

Phương pháp đặt ẩn phụ:

↪ Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).

① Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{cases}$

② Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{cases}$

③ Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$

④ Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$

○ Với đồ thị hàm số phân thức:

□ Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (C) và đường thẳng $d: y = px+q$. Phương trình hoành độ giao điểm

của (C) và $d: \frac{ax+b}{cx+d} = px+q \Leftrightarrow F(x, m) = 0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

□ Một số câu hỏi thường gặp:

01	Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$.
02	Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn: $-\frac{d}{c} < x_1 < x_2$.
03	Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}$.
04	Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < -\frac{d}{c} < x_2$.
05	Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước: ① Đoạn thẳng $AB = k$ ② Tam giác ABC vuông. ③ Tam giác ABC có diện tích S_0

☞ Ví dụ 6.3.1

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - (2+m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

- A. $m > \frac{1}{2}$. B. $m \leq \frac{1}{2}$. C. $m > -\frac{1}{2}; m \neq 4$. D. $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$2x^3 - (2+m)x + m = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 1) - m(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 2x - m) = 0.$$

Vậy phương trình luôn có một nghiệm $x = 1$.

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì phương trình:

$$2x^2 + 2x - m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + 2m > 0 \\ 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < m \\ m \neq 4 \end{cases}.$$

☞ Ví dụ 6.3.2

Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm là

- A. $-1 \leq m < 0$. B. $0 \leq m < 1$. C. $-1 < m < 0$. D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } x^4 - 2x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = -m.$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$, ta thấy để phương trình trên có 4 điểm phân biệt thì $-1 < m < 0$.

Suy ra $0 < m < 1$.

Ví dụ 6.3.3

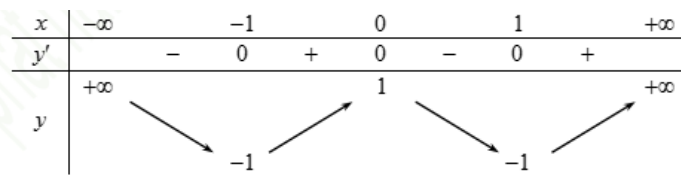
Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|2x^4 - 4x^2 + 1| = m$ có 8 nghiệm phân biệt. Tìm S ?

- A. $S = (1; 2)$. B. $S = (0; 2)$. C. $S = (0; 1)$. D. $S = (-1; 1)$.

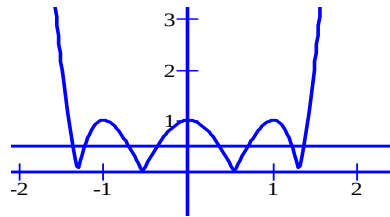
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. $y' = 8x^3 - 8x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.



Suy ra đồ thị hàm số $y = |2x^4 - 4x^2 + 1|$



Nghiệm của phương trình $|2x^4 - 4x^2 + 1| = m$ chính là số giao điểm của đường thẳng $y = m$ và ĐTHS $y = |2x^4 - 4x^2 + 1|$.

Dựa vào đồ thị ta có $0 < m < 1$ thì phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 6.3.4

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|x|^3 - 3x^2 + 2 = m$ có nhiều nghiệm thực nhất.

- A. $-2 \leq m \leq 2$. B. $-2 < m < 2$.
C. $0 \leq m \leq 2$. D. $0 < m < 2$.

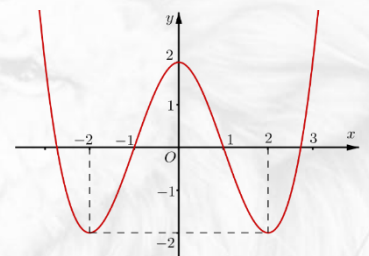
Lời giải

Chọn B

Ta có hàm số $g(x) = |x|^3 - 3x^2 + 2$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Khi $x \geq 0$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x) = |x|^3 - 3x^2 + 2$ có dạng như hình.



Dựa vào đồ thị suy ra phương trình $|x|^3 - 3x^2 + 2 = m$ có nhiều nghiệm thực nhất khi và chỉ khi $-2 < m < 2$.

Dạng 6.4. Tìm m để đths phân thức giao với (c') thỏa điều kiện.

○ Với đồ thị hàm số phân thức:

□ Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (C) và đường thẳng $d: y = px + q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d: \frac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x, m) = 0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

□ Một số câu hỏi thường gặp:

01	Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$
02	Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn: $-\frac{d}{c} < x_1 < x_2$.
03	Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}$.
04	Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < -\frac{d}{c} < x_2$.
05	Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước: ① Đoạn thẳng $AB = k$ ② Tam giác ABC vuông. ③ Tam giác ABC có diện tích S_0

Ví dụ 6.4.1

Cho hàm số (C): $y = \frac{x-2}{x+1}$. Đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B phân biệt và $AB = 2\sqrt{2}$ khi m nhận giá trị nào trong các giá trị sau đây?

- A. $m = -2$. B. $m = 1$. C. $m = 8$. D. $m = 5$.

Lời giải

Chọn A

$$\frac{x-2}{x+1} = x + m \Rightarrow x - 2 = x^2 + (m+1)x + m \Rightarrow x^2 + mx + m + 2 = 0, x \neq -1.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases} \text{ mà } AB = |x_1 - x_2| \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow AB^2 = (S^2 - 4P) \cdot 2 \Rightarrow m^2 - 4(m+2) = 4 \Rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -2 \end{cases} \text{ (nhận hết).}$$

$$\text{Do điều kiện } \Delta = m^2 - 4m - 8 > 0.$$

☞ Ví dụ 6.4.2

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C). Tìm giá trị m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt sao cho tam giác OAB vuông tại A hoặc B .

A. $m = 1 \pm \sqrt{5}$. B. $m = 1 \pm \sqrt{2}$. C. $m = 1 \pm \sqrt{6}$. D. $m = 1 \pm \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2x-1}{x-1} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x + 1 - m = 0$ (*).

Ta có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 2m + 5 > 0 \\ (1)^2 + (m-3) \cdot 1 + 1 - m \neq 0 \end{cases}$ (luôn đúng $\forall m$).

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình (*), ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m \\ x_1 x_2 = 1 - m \end{cases}$ và (C) cắt d tại $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$.

Vecto $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1)$ cùng phương với vecto $\vec{u} = (1; 1)$.

Tam giác OAB vuông tại A khi chỉ khi $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + m = 0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m \\ x_1 x_2 = 1 - m \\ 2x_1 = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = -m \\ 2x_2 = 6 - m \\ -m(6 - m) = 4 - 4m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{5} \\ m = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$.

☞ Ví dụ 6.4.3

Tìm m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

A. $m \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. B. $m \in (0; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; 0)$. D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm

$$mx + 1 = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (mx+1)(x-1) = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ mx^2 - mx - 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

YCBT $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 thỏa mãn $(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m^2 + 8m > 0 \\ m \cdot 1^2 - m \cdot 1 - 2 \neq 0 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \begin{cases} m > 0 \\ m < -8 \end{cases} \\ m \in \mathbb{R} \\ -\frac{2}{m} - 1 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -8 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$