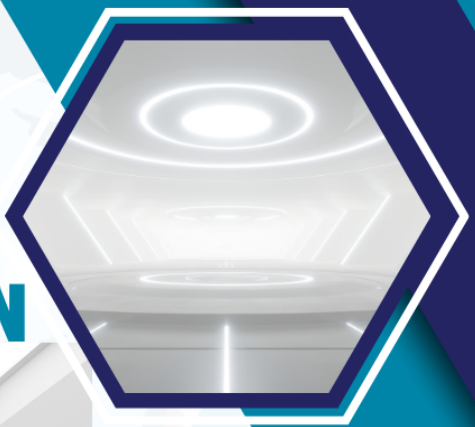
PHAN NHẬT LINH

PHƯƠNG PHÁP
TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN





OXYZ



File word

Giải chi tiết cho giáo viên

Liên hệ Zalo
0817.098.716

CHƯƠNG 5

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 01 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng: Cho mặt phẳng (α). Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

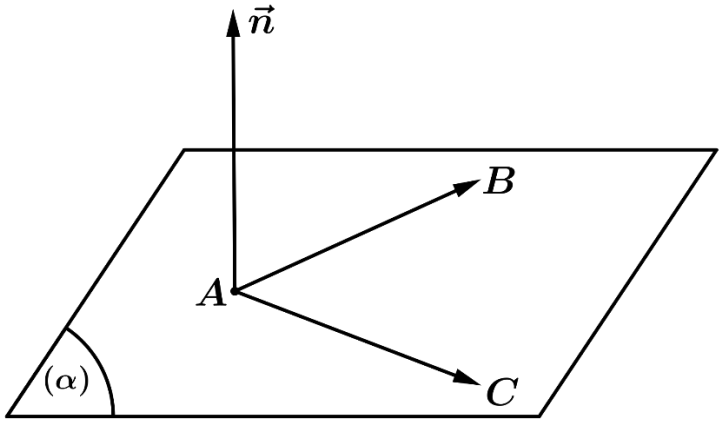
Nhận xét:

- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k.\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).
- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.

Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng: Cho mặt phẳng (α). Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương và giá của chúng song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\vec{a},\vec{b}$ là cặp véctơ chỉ phương của mặt phẳng (α).

Nhận xét: Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và cặp vectơ chỉ phương của nó.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vectơ chỉ phương : Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.



Chú ý: Vectơ $\vec{n}=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$ được gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ và $\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$.
- $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.
- Nếu $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

2 Phương trình tổng quát của mặt phẳng

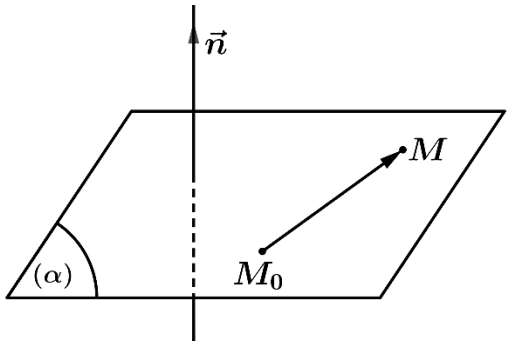
Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$, phương trình có dạng $Ax+By+Cz+D=0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0 được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Nhận xét: Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó:

- Mặt phẳng (α) có một vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$
- Điểm $N\left(x_0;y_0;z_0\right)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$
- Mỗi phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0) đều là phương trình của một mặt phẳng xác định.

Một số dạng toán viết phương trình mặt phẳng cơ bản:

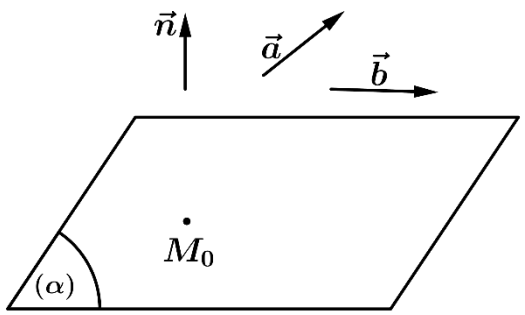
Dạng 1: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một vectơ pháp tuyến



Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0 \text{ với } D=-Ax_0-By_0-Cz_0.$$

Dạng 2: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một cặp vectơ chỉ phương

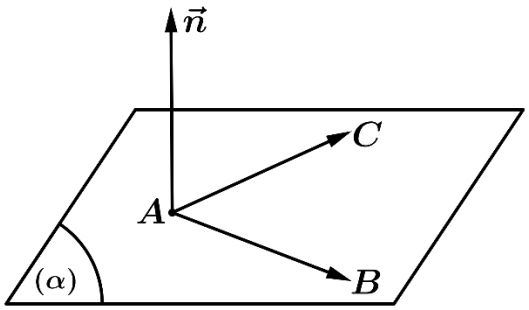


Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}$, $\vec{b}$ thì ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Dạng 3: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng



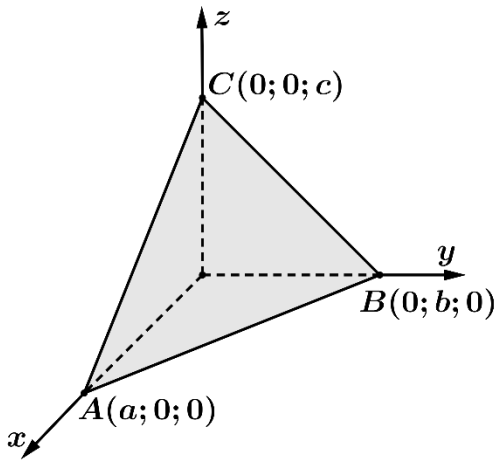
Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm cặp vectơ chỉ phương chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bước 2: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Dạng 3: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng theo đoạn chắn



Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

3 Điều kiện để hai mặt phẳng song song hoặc vuông góc

Điều kiện để hai mặt phẳng song song: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó: $(\alpha_1)\,//\,(\alpha_2)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1\neq kD_2\end{cases}(k\in\mathbb{R})$.

Chú ý: Ta có một số tính chất sau:

- $(\alpha_1)\equiv(\alpha_2)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1=kD_2\end{cases}\ (k\in\mathbb{R})$.
- (α_1) cắt $(\alpha_2)\Leftrightarrow\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$.

Khi đó: $(\alpha_1)\perp(\alpha_2)\Leftrightarrow\vec{n}_1.\vec{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

4 Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ và điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức:

$$\mathrm{d}(M_0,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

5 Các phương trình mặt phẳng đặc biệt trong không gian

Tính chất mặt phẳng	Phương trình	Hệ số đặc biệt
(α) đi qua/chứa gốc O	$(\alpha): Ax+By+Cz=0$	$D=0$
(α) song song/chứa Ox	$(\alpha): By+Cz+D=0$	$A=0$
(α) song song/chứa Oy	$(\alpha): Ax+Cz+D=0$	$B=0$
(α) song song/chứa Oz	$(\alpha): Ax+By+D=0$	$C=0$
(α) song song/trùng (Oxy)	$(\alpha): Cz+D=0$	$A=B=0$
(α) song song/trùng (Oxz)	$(\alpha): By+D=0$	$A=C=0$
(α) song song/trùng (Oyz)	$(\alpha): Ax+D=0$	$B=C=0$

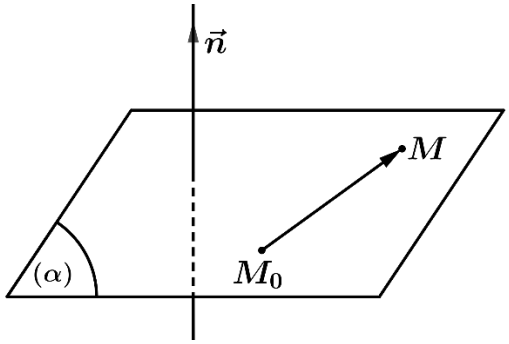
Nhận xét: Mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song/chứa trục đó hoặc mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song/chứa mặt phẳng đó.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng

Phương pháp: Ta thường gặp các dạng toán sau:

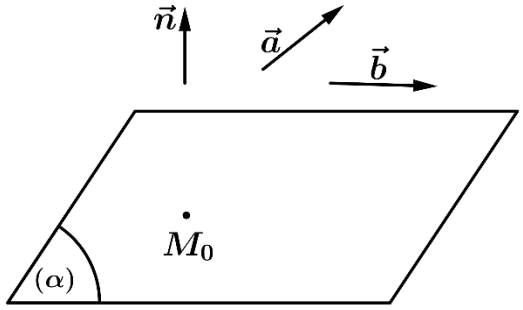
Dạng 1: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một vectơ pháp tuyến



Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0 \text{ với } D=-Ax_0-By_0-Cz_0.$$

Dạng 2: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một cặp vectơ chỉ phương

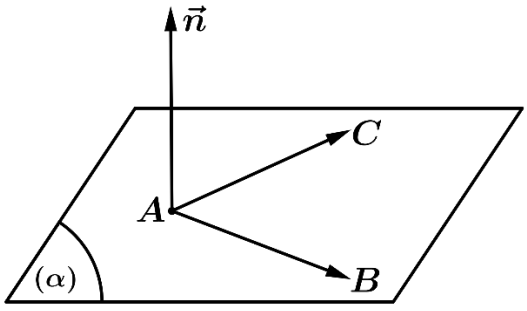


Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}$, $\vec{b}$ thì ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Dạng 3: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng



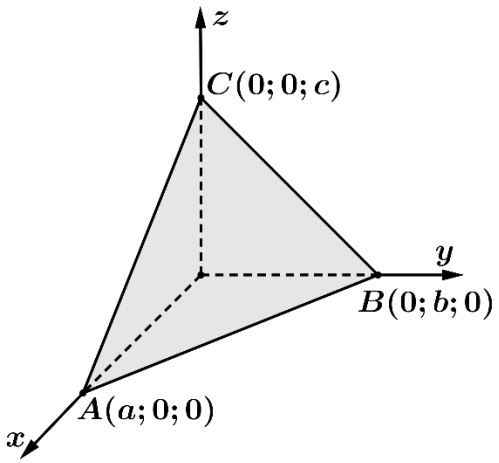
Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm cặp vectơ chỉ phương chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bước 2: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Dạng 3: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng theo đoạn chắn



Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Ngoài các dạng toán lập phương trình mặt phẳng cơ bản đã nêu. Chúng ta có thể gặp thêm một số dạng toán nâng cao hơn được trình bày ở các bài tập dưới đây.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;6)$.

Bài tập 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;0)$ và có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;3), \vec{b}=(1;1;2)$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và vuông góc với trục Ox.

Bài tập 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;-1;3)$, $B(0;2;4)$ $D(2;-1;1), A'(0;1;2)$.

a) Tính tọa độ các điểm C, B', D'.

b) Viết phương trình mặt phẳng $(CB'D')$.

Bài tập 5: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;-1;5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): 3x+2y-z=0$, $(R): x+y-z=0$.

Bài tập 6: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua $M(2;3;-1)$, song song với trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+2y-3z+1=0$.

Bài tập 7: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua:

a) Điểm $I(3;-4;1)$ và vuông góc với trục Ox

b) Điểm $K(-2;4;-1)$ và song song với mặt phẳng (ozx)

c) Điểm $K(-2;4;-1)$ và song song với mặt phẳng $(Q):3x+7y+10z+1=0$

Bài tập 8: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;1;1)$; $B(0;4;0)$; $C(2;2;0)$.

Bài tập 9: Lập phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn của mặt phẳng (P), biết rằng mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(5;0;0), B(0;3;0), C(0;0;6)$.

Bài tập 10: Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$.

Bài tập 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

Bài tập 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;2;1)$ và $B(5;-4;1)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (Oxy), và N là điểm đối xứng với B qua (Oyz). Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng MN.

Bài tập 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1;2;1), B(3;0;0)$, $C(1;-1;-2), D(-1;1;-1)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và G là trọng tâm ΔABC. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của GI.

Bài tập 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1):3x-y+z-2=0, (\alpha_2):x+4y-5=0$ và song song với mặt phẳng $(\alpha_3):2x+21y-z+7=0$. Viết phương trình của mặt phẳng P.

Bài tập 15: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

Bài tập 16: Trong không gian $Oxyz$,cho hai mặt phẳng $(\alpha):3x-2y+2z+7=0, (\beta):5x-4y+3z+1=0$ Viết phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β).

Bài tập 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q):x+2y-z=0$.

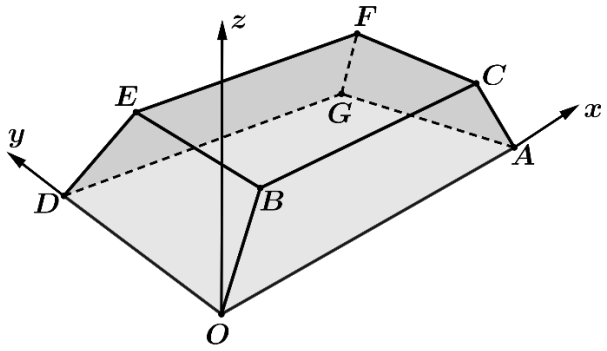
Bài tập 18: Hình vẽ dưới đây minh họa hình ảnh một tòa nhà trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Biết $A(50;0;0)$, $D(0;20;0)$, $B(4k;3k;2k)$ với $k>0$ và mặt phẳng $(BCFE)$ có phương trình là $z=3$.

a) Tìm tọa độ điểm B.

b) Lập phương trình mặt phẳng $(AOBC)$.

c) Lập phương trình mặt phẳng $(DOBE)$.

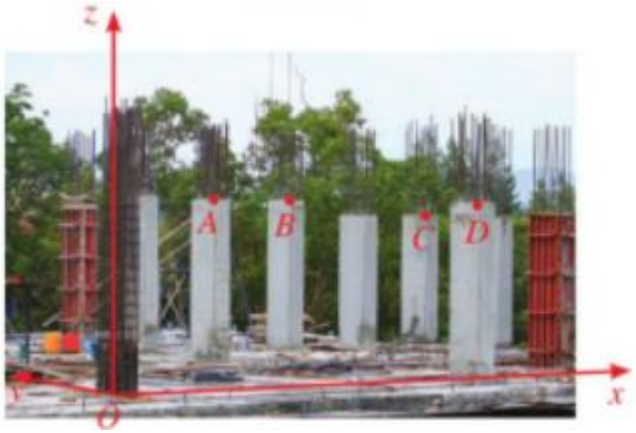
d) Chỉ ra một véc tơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng $(AOBC)$ và $(DOBE)$.



Bài tập 19: Hình dưới đây minh họa một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2;1;3)$, $B(4;3;3)$, $C(6;3;2,5)$, $D(4;0;2,8)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

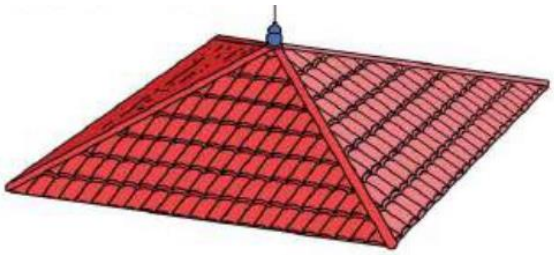
b) Bốn điểm A,B,C,D có đồng phẳng không?



Bài tập 20: Một công trường xây dựng nhà cao tầng đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Hãy kiểm tra tính song song hoặc vuông góc giữa các mặt kính (P), (Q), (R) (hình bên) của một tòa nhà biết các mặt phẳng có phương trình lần lượt là: $(P):3x+y-z+2=0$; $(Q):6x+2y-2z+11=0$; $(R):x-3y+1=0$.

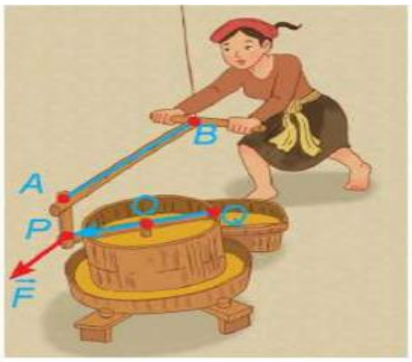


Bài tập 21: Bác An dự định làm bốn mái nhà của một ngôi nhà sao cho chúng là bốn mặt bên của một hình chóp tứ giác đều và các mái kề nhau thì vuông góc với nhau. Hỏi ý tưởng đó có làm được không?



Bài tập 22: Trong không gian $Oxyz$, một ngôi nhà có sàn nhà thuộc mặt phẳng Oxy và trần nhà tầng 1 thuộc mặt phẳng $z-1=0$, mái nhà tầng 2 thuộc mặt phẳng $x+y+50z-100=0$. Hỏi trong 3 mặt phẳng tương ứng chứa sàn nhà, trần nhà tầng 1, mái nhà tầng 2, hai mặt nào song song với nhau?

Bài tập 23: Xét một cối xay lúa trong không gian $Oxyz$, với đơn vị đo là mét. Nếu tác động vào tại cối xay lúa (Ở vị trí P) một lực $\vec{F}$ thì moment lực $\vec{M}$ được tính bởi công thức $\vec{M}=\left[\overrightarrow{OP};\vec{F}\right]$ như hình minh họa. Trong quá trình xay, các thanh gỗ AB và PQ luôn có phương nằm ngang. Vectơ lực $\vec{F}$ có giá song song với AB. Giải thích vì sao giá của vecto moment lực $\vec{M}$ có phương thẳng đứng?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $A(1;1;3)$. **B.** $B(1;1;-3)$. **C.** $C(3;1;1)$. **D.** $D(-1;-1;3)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (Oxy)?

A. $A(1;1;0)$. **B.** $B(1;0;-3)$. **C.** $C(0;1;1)$. **D.** $D(0;0;3)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$. Mặt phẳng (α) biết (α) đi qua điểm $M(-1;5;2)$ đồng thời (α) có cặp vetơ chỉ phương $\vec{u}=(0;1;1)$ và $\vec{v}=(-3;-5;1)$ có phương trình là

A. $y+z-7=0$. **B.** $2x-y+z+5=0$.

C. $-x+5y+2z+5=0$. **D.** $2x+y+z-5=0$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$,cho ba điểm $A(0;2;1)$, $B(3;0;1)$, $C(1;0;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x-3y-4z+2=0$. **B.** $4x+6y-8z+2=0$.

C. $2x+3y-4z-2=0$. **D.** $2x-3y-4z-2=0$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-3;-2)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $z+2=0$. **B.** $z-2=0$. **C.** $2x-3y=0$. **D.** $2x-3y-2=0$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-3;-2)$ và song song với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A. $x+z=0$. **B.** $y+3=0$. **C.** $y-3=0$. **D.** $x-z=0$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-3;-2)$ và song song với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là

A. $3y-2z=0$. **B.** $x+2=0$. **C.** $x-2=0$. **D.** $3y+2z=0$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+3z-3=0$ có phương trình là

A. $2x-y+3z=0$. **B.** $2x-y+3z-1=0$.

C. $2x-3y-2z=0$. **D.** $2x-3y-2z-1=0$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;1), C(3;1;1), D(4;1;1)\ B(-1;2;2)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A,B và song song với CD.

A. $y-2z+2=0$. **B.** $x-2z+2=0$. **C.** $x-y+2z+2=0$. **D.** $x-2y+2=0$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$; $B(-1;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A,B và vuông góc với (P).

A. $(Q): 2x-y+3=0$. **B.** $(Q): x+z=0$. **C.** $(Q): -x+y+z=0$. **D.** $(Q): 3x-y+z=0$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là

A. $2x-y-2z=0$. **B.** $x+y+z+3=0$. **C.** $-2x+z+6=0$. **D.** $-2x+z-6=0$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;5)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và chứa trục Ox

A. $(\alpha): 5y+3z=0$. **B.** $3y+5z=0$. **C.** $3y-5z=0$. **D.** $(\alpha): 5y-3z=0$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;1;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và chứa trục Oy

A. $(\alpha): 2x-3z=0$. **B.** $3x+2z=0$. **C.** $3x-2z=0$. **D.** $(\alpha): 2x+3z=0$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;-5)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và chứa trục Oz

A. $(\alpha): x-2y=0$. **B.** $x+2y=0$. **C.** $2x-y=0$. **D.** $(\alpha): 2x+y=0$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$ và (Q) cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng bằng 3 có phương trình là

A. $x+2y-2z+10=0; x+2y-2z-1=0$. **B.** $x+2y-2z=0; x+2y-2z-14=0$.

C. $x+2y-2z-14=0; x+2y-2z-4=0$. **D.** $x+2y-2z+4=0; x+2y-2z-14=0$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $B(1;-1;0)$, $C(2;-1;-1)$, $M(-2;1;3)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với BC và cách M một khoảng bằng $\sqrt{2}$ có phương trình là

A. $x-z-7=0;\ x-z-3=0$. **B.** $x-z+7=0;\ x-z-3=0$.

C. $x-z+7=0;\ x-z+3=0$. **D.** $x-z-7=0; x-z+3=0$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) qua hai điểm $C(2;1;6)$, $D(3;5;1)$ và cách đều hai điểm $A(6;4;0)$, $B(4;5;0)$ có phương trình là:

A. $13x+18y+15z+134=0; 5x+10y+9z-7=0$.

B. $13x+18y+15z=0; 5x+10y+9z-4=0$.

C. $5x+10y+9z-74=0; 13x+18y+15z-134=0$.

D. $13x+18y+15z-13=0; 5x+10y+9z+4=0$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ khác $\vec{0}$. Tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{c}=(a_1b_3-a_2b_1,a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3)$. **B.** $\vec{c}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$.

C. $\vec{c}=(a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1,a_2b_3-a_3b_1)$. **D.** $\vec{c}=(a_1b_3-a_3b_1,a_2b_2-a_1b_2,a_3b_2-a_2b_3)$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây nhận $\vec{n}=(3;1;-7)$ là một vectơ pháp tuyến?

A. $3x+z+7=0$. **B.** $3x-y-7z+1=0$. **C.** $3x+y-7=0$. **D.** $3x+y-7z-3=0$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x-2z+2=0$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $B(4;2;1)$. **B.** $A(1;2;4)$. **C.** $D(2;1;4)$. **D.** $C(2;4;-1)$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Mặt phẳng chứa điểm A và trục Oz có phương trình là

A. $2x-y=0$. **B.** $x+y-z=0$. **C.** $3y-2z=0$. **D.** $3x-z=0$ vô số.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+4z-5=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $3x-2y+4z-4=0$ **B.** $3x-2y+4z+4=0$.

C. $3x-2y+4z+5=0$. **D.** $3x+2y+4z+8=0$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

A. $3x+y+z-6=0$. **B.** $6x-2y-2z-1=0$.

C. $3x-y-z+1=0$. **D.** $3x-y-z=0$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P):2x-y+3z-1=0$, $(Q):y=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A, vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $3x-y+2z-4=0$. **B.** $3x+y-2z-2=0$. **C.** $3x-2z=0$. **D.** $3x-2z-1=0$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2;3;5)$, $B(3;2;4)$ và $C(4;1;2)$ có phương trình là

A. $3x-y+2z-4=0$. **B.** $x+y-5=0$. **C.** $y-z+2=0$. **D.** $2x+y-7=0$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P):2x+y+z-2=0$ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-1=0$. **B.** $x-y-z-2=0$. **C.** $4x+2y+2z+4=0$. **D.** $2x+y+z-2=0$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $mx+(m-1)y+z-10=0$ và mặt phẳng $(Q):2x+y-2z+3=0$. Với giá trị nào của dưới đây của m thì (P) và (Q) vuông góc với nhau

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{a}=(2;1;-2)$ và vecto $\vec{b}=(1;0;2)$. Tìm tọa độ vecto $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{c}=(2;6;-1)$. **B.** $\vec{c}=(4;6;-1)$. **C.** $\vec{c}=(4;-6;-1)$. **D.** $\vec{c}=(2;-6;-1)$

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+3y+z+2=0$. Véctơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_2(2;3;1)$. **B.** $\vec{n}_3(2;3;2)$. **C.** $\vec{n}_1(2;3;0)$. **D.** $\vec{n}_4(2;0;3)$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $P(0;0;-5)$. **B.** $M(1;1;6)$. **C.** $Q(2;-1;5)$. **D.** $N(-5;0;0)$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$ và $B(3;0;2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $x+y+z-3=0$. **B.** $2x-y+z+2=0$. **C.** $2x+y+z-4=0$. **D.** $2x-y+z-2=0$.

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;3)$.

A. $x-2y+3z+12=0$. **B.** $x-2y-3z-6=0$.

C. $x-2y+3z-12=0$. **D.** $x-2y-3z+6=0$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;-4;2)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $2x-3y-z-20=0$. **B.** $3x-y+3z-25=0$.

C. $2x-3y-z+8=0$. **D.** $3x-y+3z-13=0$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$ $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

A. $3x+2z+1=0$. **B.** $x+2y-2z+1=0$. **C.** $x+2y-2z-1=0$. **D.** $3x+2z-1=0$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;4)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

A. $2x-2y+4z-21=0$. **B.** $3x-2y+z-12=0$.

C. $2x-2y+4z+21=0$. **D.** $3x-2y+z+12=0$

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $M(-2;0;0)$, $N(0;-1;0)$ và $P(0;0;3)$ là

A. $3x+6y-2z-6=0$. **B.** $2x+y-3z-1=0$.

C. $3x+6y-2z=0$. **D.** $3x+6y-2z+6=0$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $A(-1;1;3)$, $B(2;-1;3)$, $C(2;2;-1)$ là.

A. $8x+12y+9z-31=0$. **B.** $8x+12y+9z+31=0$.

C. $8x-12y+9z-31=0$. **D.** $8x+12y-9z+31=0$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+y+2z-3=0$ là.

A. $2x+4y-3z-8=0$. **B.** $2x+4y-3z=0$.

C. $2x+4y-3z+8=0$. **D.** $2x-4y-3z=0$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y+2z-3=0$ và $(R): x-y-z+4=0$ là.

A. $x+3y-2z+9=0$. **B.** $2x+y-2z-9=0$. **C.** $x+3y-2z-9=0$. **D.** $2x+y-2z+9=0$.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $N(2;1;-2)$, song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x-2y+z-8=0$ là

A. $x-z-4=0$. **B.** $x-z+4=0$. **C.** $2x+y-2z-4=0$. **D.** $2x+y-2z+4=0$.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1)$ và $B(2;1;0)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với AB là

A. (P): $3x+y-z+4=0$. **B.** (P): $3x+y-z-4=0$.

C. (P): $3x+y-z=0$. **D.** (P): $2x+y-z+1=0$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0;1;3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x-3z+2025=0$ là

A. $(P): 2x-3z+9=0$. **B.** $(P): 2x-3z-9=0$.

C. $(P): 2x-3z+3=0$. **D.** $(P): 2x-3z-3=0$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y+3z-5=0$, $(R): 2x-y+z-1=0$ là

A. $4x+5y-3z+22=0$. **B.** $4x-5y-3z-12=0$.

C. $2x+y-3z-14=0$. **D.** $4x+5y-3z-22=0$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;-1;1)$, $N(2;1;2)$ và song song với trục Oz có phương trình là

A. $x+2y+z=0$. **B.** $2x-y-3=0$. **C.** $x+2y+z-6=0$. **D.** $2x-y+5=0$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+11=0$ và hai điểm $A(1;0;-2), B(-1;-1;3)$. Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $3x+14y+4z+5=0$. **B.** $2x-y+2z-2=0$.

C. $2x-y+2z+2=0$. **D.** $3x+14y+4z-5=0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;5)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z-6=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Véc tơ $\vec{n}=(1;2;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (α).

b) Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) có phương trình $x+2y+2z+15=0$

c) Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $2x-y=0$.

d) Điểm $M\in(\alpha)$ sao cho A,O,M thẳng hàng thì tọa độ $M\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5};2\right)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-2);B(2;1;2);C(3;-2;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A,B,C có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$

b) Phương trình mặt phẳng (P) là $13x+5y-2z+27=0$.

c) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và nhận $\overrightarrow{BC}$ làm véc tơ pháp tuyến có dạng: $1(x+1)x-3(y+2)-1(z-2)=0$.

d) Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $E;F;K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên trục $Ox;Oy;Oz$ có phương trình $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}-\frac{z}{2}=1$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $3x+y+5z-10=0$.

b) Bốn điểm A,B,C,D tạo thành tứ diện.

c) Mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD có một vectơ pháp tuyến là $\vec{a}=(4;-2;7)$.

d) Có 2 mặt phẳng đi qua 2 điểm A,B sao cho khoảng cách từ C và D đến mặt phẳng đó bằng nhau và 2 mặt phẳng này đều đi qua điểm $M(1;2;1)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=(3;3;2)$.

b) Mặt phẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là $x-y=0$.

c) Mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với (ABC) có phương trình là:

$x+y-3z+2=0..$

d) Gọi $M(a;b;c)\in(Oyz)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất thì khi đó $3(a+b)+c=5.$

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):(4-a)x-(a+3)y+z+1=0$ và mặt phẳng $(Q):3x-4y+z+3=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) song song với nhau khi $a=1$.

b) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) vuông góc với nhau khi $a=2$.

c) Không có giá trị nào của a để hai mặt phẳng trên trùng nhau.

d) Mặt phẳng vuông góc với cả hai mặt phẳng trên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;-7)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(3;5;-1)$, $B(7;x;1)$, $C(9;2;y)$, $D(-1;2;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Toạ độ điểm M trung điểm của đoạn AD là $(1;7;1)$.

b) Toạ độ điểm E để tứ giác $OADE$ là hình bình hành là $(-4;-3;4)$.

c) Toạ độ điểm C để tam giác ACD vuông tại A là $(9;2;11)$.

d) Để ba điểm A, B, C thẳng hàng thì giá trị của biểu thức $x+y$ bằng 5.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;-1;1)$, $B(2;1;-2)$, $C(0;0;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $(1;0;0)$.

b) Toạ độ điểm $E\in Ox$ sao cho $AE\perp BC$ là $(-1;0;0)$.

c) Toạ độ điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ là $(3;0;2)$.

d) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC có toạ độ là $\left(\frac{5}{9};-\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$ với ba vecto đơn vị $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, cho $A(1;1;2)$, $B(2;-1;0)$, $\vec{u}=(1;-2;-1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tích có hướng của hai veccto $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là vecto $\vec{k}$.

b) $\left[\vec{u},\vec{i}\right]=(0;1;2)$.

c) $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(6;1;0)$.

d) $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(2;4;-3)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(1;-2;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

b) Vecto $\vec{n}=(1;2;3)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

c) Vecto $\vec{u}=(1;1;0)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng đi qua O và chứa đường thẳng AB.

d) Vecto $\vec{v}=(1;2;3)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng song song với hai đường thẳng AB và OC.

Câu 10: Cho các điểm $A(1;-2;0);B(2;-1;1);C(1;1;2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x+2y-3z-3=0$.

b) Phương trình mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với BC là $x-2y-z-5=0$.

c) Phương trình mặt phẳng trung trực (β) của đoạn AC là $6y+4z-1=0$.

d) Phương trình mặt phẳng (γ) chứa trục Ox và điểm C là $2y+z=0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, Cho tam giác ABC với $A(1;1;1),B(1;2;2),C(4;1;0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}=(0;1;1)$.

b) Tích có hướng của hai vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ là $\vec{a}=(-1;3;-3)$.

c) $\overrightarrow{BC},\vec{b}=(6;-2;-4)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC).

d) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (AOB) là: $\vec{n}=(1;1;2)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, Cho các điểm $A(1;-2;-1),B(4;1;2),C(2;3;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}=(3;3;3)$.

b) Ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

c) Mặt phẳng đi qua 3 điểm A,B,C có vectơ pháp tuyến là: $\vec{a}=(3;1;-4)$.

d) Mặt phẳng (α) đi qua A đồng thời song song với Oy và đường thẳng BC có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}=(1;0;2)$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c đều dương. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $G(1;2;3)$ sao cho G là trọng tâm của ΔABC là

$$6x+3y+2z+18=0$$

c) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $H(1;1;1)$ sao cho H là trực tâm ΔABC là $x+y+z-3=0$

d) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(2;-2;3)$ sao cho độ dài OA,OB,OC theo thứ tự tạo thành cấp số cộng có công sai bằng 2. Khoảng cách từ gốc tọa độ O tới mặt phẳng (α) bằng $\frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, khi đó $T=m+n=19$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1);B(1;-2;3);C(2;-1;2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ba điểm A,B,C đã cho thẳng hàng.

b) Có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm A,B,C đã cho.

c) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;3)$.

d) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $x+2y+3z-6=0$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-3)$ và các $\vec{u}=(-1;-2;5)$, $\vec{v}=(3;-1;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua A và nhận $\vec{u},\vec{v}$ làm cặp vectơ chỉ phương. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(9;13;7)$.

b) Phương trình mặt phẳng $(\alpha):9x+13y+7z-2=0$.

c) Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;-2;-3)$.

d) Mặt phẳng (R) đi qua M song song với (α) có phương trình $x+2y+5z+18=0$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-2;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt ba trục tọa độ tại các điểm A,B,C khác gốc tọa độ O sao cho tam giác ABC có trực tâm M. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hình chiếu của điểm M trên trục Ox là $H(-2;0;0)$.

b) Mặt phẳng (P) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;3)$.

c) Phương trình mặt phẳng (P) là $2x-y-3z+14=0$

d) Mặt phẳng $(Q):\ x-y+z-3=0$ vuông góc với (P)

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;3),B(-1;3;2),C(-1;2;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

b) Điểm $G\left(\frac{-1}{3};2;\frac{8}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC.

c) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là: $x+ay+bz+c=0$. Khi đó $a+b+c=4$

d) Điểm $M(1;2;3)$ thuộc mặt phẳng (ABC).

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z+1=0$. (P) là mặt phẳng đi qua A và song song với (α). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mọi mặt phẳng có pt dạng $x+2y-z+m=0$ (m là tham số thực) đều song song với (α).

b) (P) vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x-3y-4z=0$.

c) (P) có phương trình dạng $ax+by+cz+d=0$ với $\frac{a}{d}=\frac{1}{5}$.

d) (P) đi qua điểm $M(1;2;-1)$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;-2)$ và các mặt phẳng $(\alpha): x+2y-2z-1=0$, $(\beta): x+2y-2z+5=0$.

a) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với (α). Giao điểm của (P) và trục Ox là $I(8;0;0)$.

b) Mặt phẳng song song và cách đều 2 mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ có phương trình là

$$(\alpha): x+2y-2z+2=0.$$

c) Mặt phẳng đối xứng với mặt phẳng (α) qua mặt phẳng (β) có phương trình là

$$x+2y-2z+11=0.$$

d) Gọi H là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (α). Mặt phẳng đi qua điểm H và song song với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là $9x+7=0$.

Câu 20: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1), B(0;-1;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(-1;2;-2)$.

b) Điểm A,B nằm về cùng phía của mặt phẳng (P).

c) Mặt phẳng (Q) chứa A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2;-2;3)$.

d) Mặt phẳng (R) đi qua A song song với (P) có phương trình $x-2y+2z-1=0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;0;0)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-1=0$ có dạng $-x+by+cz+d=0$. Tính $b+c-3d$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC có dạng $x+by+cz+d=0$. Tính $b+c+d$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$ và 2 vecto $\vec{a}=(1;-3;2)$, $\vec{b}=(-1;-1;2)$. Một mặt phẳng (Q) chứa điểm A và nhận $\vec{a}, \vec{b}$ làm cặp vecto chỉ phương có phương trình là $ax+by+cz-3=0$. Tính $a+b+c$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(-3;1;1), C(5;5;-5)$ có dạng $ax+by+cz+5=0$, khi đó giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

Câu 5: Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;3)$ là trực tâm của ΔABC với A,B,C là ba điểm lần lượt nằm trên các trục Ox,Oy,Oz (khác gốc tọa độ). Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A,B,C có dạng $mx+ny+pz-14=0$, $(m,n,p\in\mathbb{Z})$. Khi đó $m+n+p$ bằng bao nhiêu?

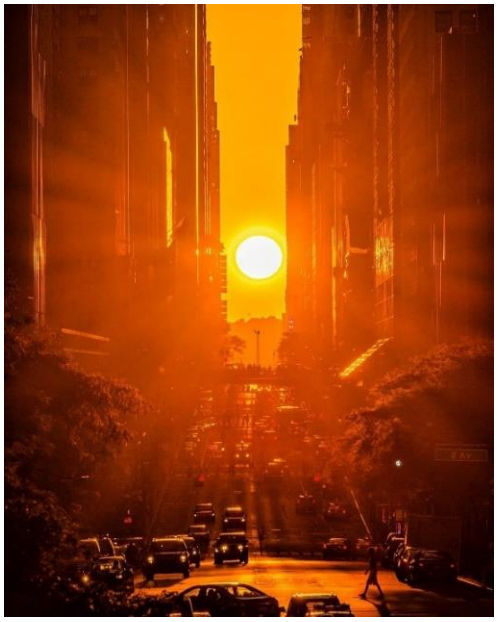
Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1;2;0)$, $B(1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-2y+3z-5=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua hai điểm A, B, đồng thời vuông góc (P) là $2x-ay-bz+c=0$. Giá trị của biểu thức $a+2b+3c$ bằng bao nhiêu?

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x+by+cz+d=0$ vuông góc với mặt phẳng $(\beta):x+2y+3z+4=0$ và chứa giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x+3y+z-7=0$, $(Q):x-y+z+1=0$. Khi đó d bằng bao nhiêu?

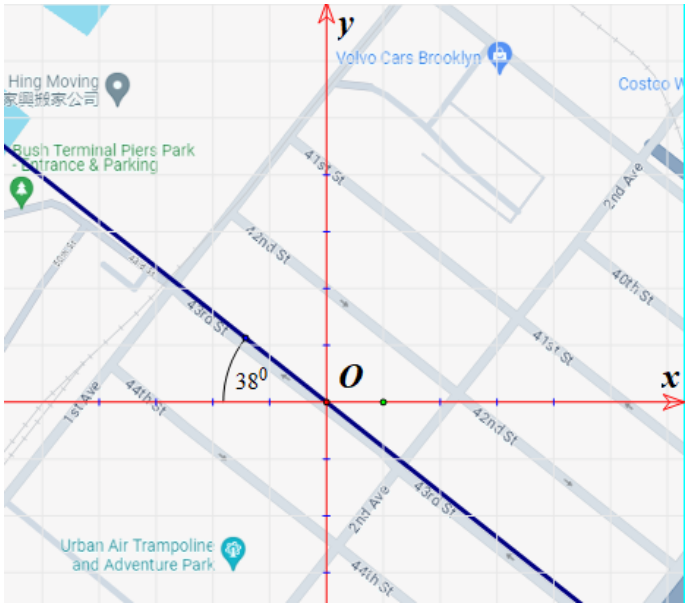
Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A,B,C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $Ax+By+z+D=0$, $(A,B,D\in\mathbb{R})$. Giá trị của biểu thức $A+B+D$ bằng bao nhiêu?

Câu 9: Cho hai điểm $A(3;-1;2)$, $B(2;3;-3)$, $C(-2;1;-2)$ và mặt phẳng (Oyz). Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oyz) sao $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ có giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a-2b+c$.

Câu 10: Manhattanhenge (Hình 1) là một sự kiện diễn ra khi Mặt Trời mọc hoặc khi Mặt Trời lặn nằm thẳng hàng với các tuyến phố Đông - Tây thuộc mạng lưới đường phố chính tại quận Manhattan của thành phố New York. Khi mặt trời lặn, tia sáng song song mặt đất lệch một góc khoảng $38°$ so với hướng tây (Hình 2).



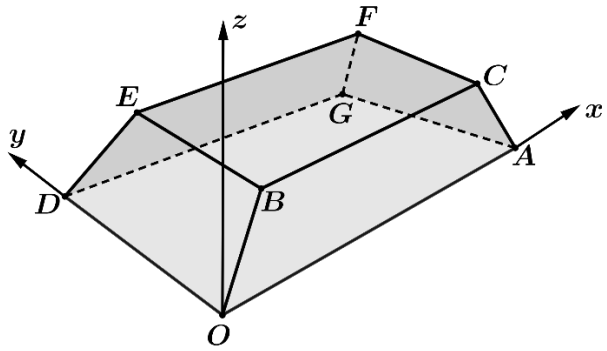
Hình 1



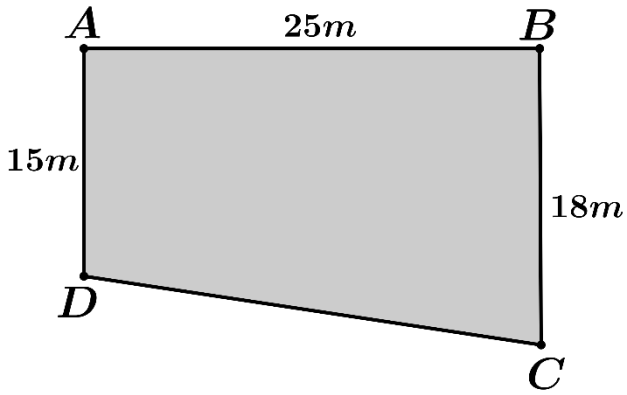
Hình 2

Giả sử mặt tiền các tòa nhà hai bên đường nằm trong 2 mặt phẳng song song cách nhau $30\,\text{m}$ và vuông góc với mặt đất. Biết rằng mặt phẳng phía bắc đi qua gốc O của hệ trục $Oxyz$, với tia Oz vuông góc với mặt đất và hướng lên trên. Phương trình mặt phẳng thứ hai có dạng $(Q):x+ay+bz+c=0$ với $c=\dfrac{m}{\sin n°}$. Tính $m+n$.

Câu 11: Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA=100\,\text{m}$, chiều rộng $OD=60\,\text{m}$ và tọa độ điểm $B(10;10;8)$. Giả sử phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ có dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính giá trị biểu thức $a+c+d$.

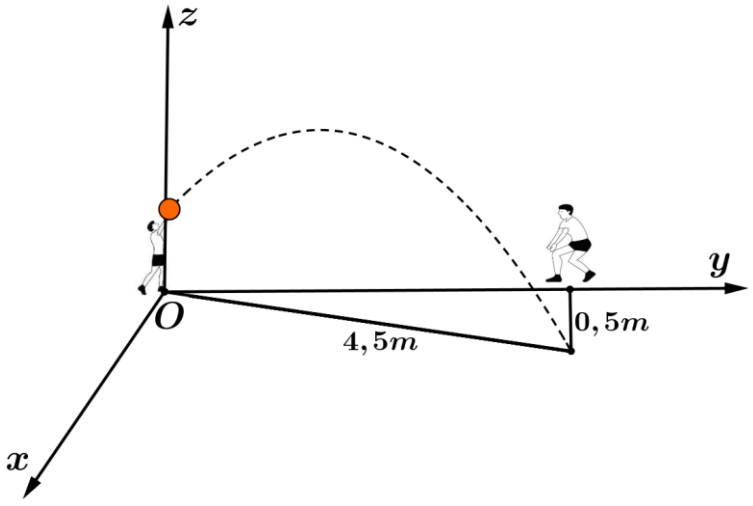


Câu 12: Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A,B,C,D, như hình vẽ:



Bước đầu chúng được lấy "thăng bằng" để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB=25\text{m}$, $AD=15\text{m}$, $BC=18\text{m}$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phàn sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10cm, $a\,\text{cm}$, 6cm tương ứng. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

Câu 13: Trong tiết thể dục học về kĩ thuật chuyền bóng hơi, Nam và An đang tập chuyền bóng cho nhau, Nam ném bóng cho An đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Nam và rơi xuống vị trí cách An $0,5\,\text{m}$ và cách Nam $4,5\,\text{m}$ được mô tả bằng hình vẽ bên dưới:



Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax + \frac{1}{2}y + cx + d = 0$ và vuông góc với mặt đất. Khi đó giá trị của $a + c + d$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

----------HẾT----------

Dạng 2: Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp: Tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ như sau :

Bước 1: Tìm $M_0(x_0;y_0;z_0)$; viết phương trình mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$.

Bước 2: Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ theo công thức:

$$d(M_0,(P))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

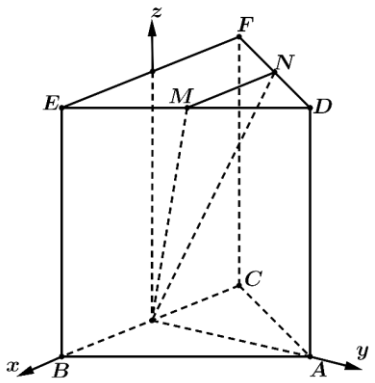
Lưu ý: $d(M_0,(Oxy))=\sqrt{(z_0)^2}$ và $d(M_0,Ox)=\sqrt{(y_0)^2+(z_0)^2}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

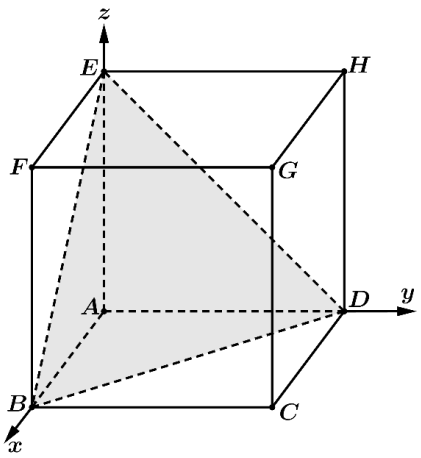
Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-3=0$ và mặt phẳng (P) không qua O, song song mặt phẳng (Q) và $d((P);(Q))=1$. Viết phương trình mặt phẳng (P)

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

Bài tập 3: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$ biết rằng $AB=6$, $AD=2$. Gọi ba điểm M, N, P lần lượt là trung điểm DE, DF, BC. Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên. Gọi điểm S thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP).



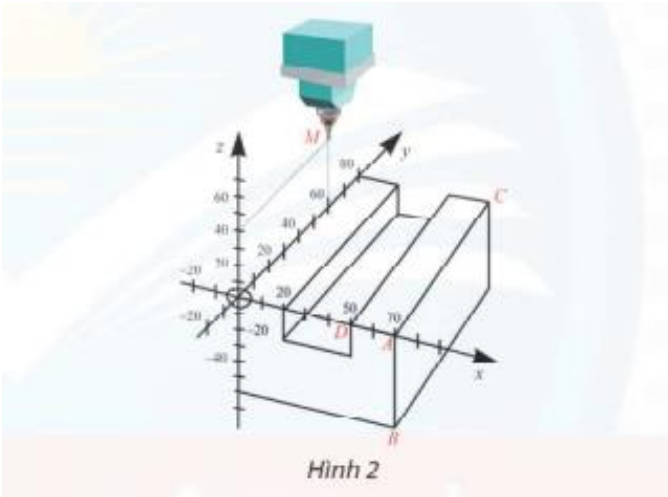
Bài tập 4: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh 1. Điểm M được cho thỏa mãn hệ thức vectơ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CD}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD).



Bài tập 5: Phần mềm điều khiển máy in 3D cho biết đầu in phun của máy đang đặt tại điểm $M(3;4;24)$ (đơn vị: cm). Tính khoảng cách từ đầu in đến khay đặt vật in có phương trình $z-4=0$.



Bài tập 5: Phần mềm của máy tiện kĩ thuật số CNC (Computer Numerical Control) đang biểu diễn một chi tiết máy như hình vẽ dưới đây:



Hình 2

a) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D.

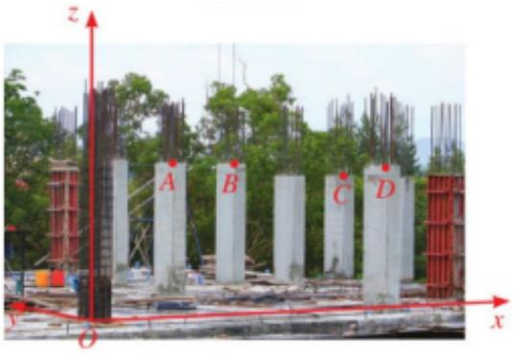
b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (ACD).

c) Cho biết đầu mũi tiện đang đặt tại điểm $M(0;60;40)$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC).

Bài tập 6: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét), một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có sàn nhà nằm trên mặt phẳng (Oxy). Hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x-2y+5=0$ và $(Q): x-2y-3z+20=0$. Hỏi là chiều cao của ngôi nhà tính từ sàn nhà lên nóc nhà (điểm cao nhất của mái nhà) là bao nhiêu?



Bài tập 7: Hình bên dưới minh hoạ một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét).



Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều cạnh đáy dài $1m$ và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2;1;3), B(4;3;3), C(6;3;3)$, $D(4;0;2,5)$. Giám sát công trình tính toán nhận thấy A,B,C,D không đồng phẳng, yêu cầu bên nhà thầu tính khối lượng bê tông cần bổ sung để độ cao các cột bê tông bằng nhau. Tính thể tích bê tông cần bổ sung (giả sử thể tích phần cốt thép là 3% trên một mét khối bê tông).

Bài tập 8: Một ngôi nhà có các bậc thang của cầu thang đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Biết hai mặt bậc thang song song nằm trên hai mặt phẳng phân biệt: $(P): 2x - y + 2z + 8 = 0$ và $(Q): 2x - y + 2z + 2 = 0$. Khoảng cách giữa hai bậc thang này bằng bao nhiêu?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+5=0$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là :

A. $3\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 2: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(3;1;-2)$ đến mặt phẳng $z=0$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{14}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+1=0$. Khoảng cách điểm M đến mặt phẳng (P) bằng

A. 2. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{10}{3}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(0;3;-1)$ đến mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-2z-2=0$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 3.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): x+2y+2z-5=0$ bằng

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** 5. **D.** $\frac{5}{9}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+1=0$ và mặt phẳng $(Q): 2x-y+2z+4=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đã cho bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P): x+y+z-2=0$; $(Q): x+y+z+4=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+12=0$ bằng

A. 12. **B.** 1. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 4.

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P): 2x+y-2z-1=0$, $(Q): 6x+3y-6z+15=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ bằng:

A. 2. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-4)$. Khoảng cách từ O đến (α) bằng

A. $\frac{\sqrt{61}}{12}$. **B.** 4. **C.** $\frac{12\sqrt{61}}{61}$. **D.** 3.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+y+4z-3=0$ và điểm $A(1;1;3)$. Mặt phẳng $(Q)\,//\,(P)$ và cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại các điểm B và C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $2\sqrt{22}$. Khoảng cách từ điểm $M(2;2;1)$ đến (Q) bằng:

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{8\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(5;-1;3)$ đến (P) bằng

A. 5. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{11}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;0;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;-2)$ và đi qua A.

b) Phương trình mặt phẳng qua A và song song (P) là $2x+y-2z+6=0$.

c) Mặt phẳng qua gốc toạ độ O, điểm A và vuông góc (P) có phương trình là $2x-2y+z=0$.

d) Có tất cả hai mặt phẳng song song với (P) và có khoảng cách đến A bằng 2.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=(3;3;2)$.

b) Mặt phẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là $x-y=0$.

c) Mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với (ABC) có phương trình là

$$x+y-3z+2=0..$$

d) Gọi $M(a;b;c)\in(Oyz)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất,khi đó $3(a+b)+c=5$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-3y+2z-1=0$ và $(Q): -2x+y+4z-3=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q).

b) Mặt phẳng (R) có phương trình $14x+8y+5z-2=0$ cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

c) Mặt phẳng $(\alpha): 2x-6y+4z-9=0$ song song mặt phẳng $(P): x-3y+2z-1=0$ và cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 1.

d) Mặt phẳng (β) qua hai điểm $A(1;0;1)$, $B(2;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_\beta}=(8;4;3)$.

Câu 4: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+1=0$, $(Q): 2x-2y+z-5=0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(2;0;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

b) Khoảng cách $d(A,(Q))=4$.

c) Khoảng cách $d(P,(Q))=6$.

d) Cho biết điểm $C\in(P)$ và đường thẳng BC tạo với mặt phẳng (P) góc 30^0. Khi đó ta có khoảng cách $BC=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+3=0, (Q): x+2y-2z+4=0$ và điểm $A(1;2;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm A cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 5.

b) Mặt phẳng (Q) cắt mặt phẳng (P).

c) Mặt phẳng $(R): 2x+2y-z=0$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 3.

d) Với mọi giá trị m thì hai mặt phẳng (P) và $(T): x+y+mz+1=0$ cắt nhau.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;0;2)$, $C(2;1;3)$, và mặt phẳng $(P): x-y+2z+7=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $(2;1;1)$.

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(3;1;5)$.

c) Mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P).

d) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 6.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình là $(P): x-2y+3z+1=0$ và $(Q): 2x-4y+6z+1=0$.

a) Các vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng trên cùng phương.

b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) đều đi qua điểm $M(1;1;2)$.

c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

d) Phương trình mặt phẳng (R) cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) là: $4x+8y+12z-5=0$.

Câu 8: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;0;-5)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (P) có phương trình là $4x-5z+4=0$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;5)$.

c) Mặt phẳng $(Q): 4x-5z+4=0$ song song với (P).

d) Cho điểm $A(-2;1;3)$. Khi đó $d(A,(P))=\frac{19}{\sqrt{41}}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-3;1), B(1;0;-1), C(3;1;2), D(1;0;-1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là $y-3=0$.

b) Mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng trung trực của BC có phương trình là $2x+y+3z-4=0$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trọng tâm của ΔABC và song song với mp $(\beta): z-2=0$.

Khoảng cách từ điểm A đến (α) bằng $\frac{1}{3}$.

d) Mặt phẳng đi qua điểm D và song song với mặt phẳng (ABC) có phương trình là $11x-y-7z-18=0$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-1;0), B(1;1;3), C(-3;2;1), D(-1;14)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (P) qua A,B song song CD có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;3;-1)$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;5)$.

c) Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua C,D song song với AB. Khi đó $d(A,(Q))=\frac{7}{\sqrt{19}}$.

d) Mặt phẳng cách đều AB,CD có dạng $(R): 3x+3y-z+\frac{1}{2}=0$.

Câu 11: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và hai mặt phẳng $(Q): x+y-3z-5=0$, $(R): x+2y-z-1=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (R) đi qua điểm M.

b) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{7}{\sqrt{11}}$.

c) Mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (Q) có phương trình là: $x+y-3z-2=0$

d) Mặt phẳng đi qua điểm $A(1;-2;0)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y-3z-5=0$, $(R): x+2y-z-1=0$ có phương trình là $5x-2y+z-9=0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua điểm $A(1;-2;-2)$, vuông góc với mặt phẳng (Oxz) đồng thời khoảng cách từ điểm $B(3;1;-3)$ đến (P) bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $2x+by+cz+d=0$ $(d\neq 0)$. Tính $P=3b+2c-d$.

Câu 2: Trong hệ tục toạ độ không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, biết $b,c>0$, phương trình mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Tính $M=c+b$ biết $(ABC)\perp(P)$, $d\left[O;(ABC)\right]=\frac{1}{3}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+by+cz+d=0$ vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x+2y+3z+4=0$ và chứa giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x+3y+z-7=0$, $(Q): x-y+z+1=0$. Khi đó d bằng

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;3;4)$, $B(6;-3;0)$ và mặt phẳng (P) sao cho $d(B;(P))=2d(A;(P))$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm trên đoạn thẳng AB. Tính $S=a+b+c$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng $(P): x+Ay+Bz+C=0$ chứa trục Oz và cách điểm M một khoảng lớn nhất, khi đó tính tổng $A+B+C$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y+z+1=0$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với (α), cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 6. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) (*kết quả là tròn đến hàng phần trăm*).

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6), D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC), (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của mặt phẳng (P) là $ax+by+2z+d=0$ với $a,b,d\in\mathbb{Z}$. Giá trị của d bằng bao nhiêu?

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $B(6;4;0)$, $C(4;5;1)$, $M(2;1;6)$.Mặt phẳng (P) vuông góc với BC và cách M một khoảng bằng $\sqrt{6}$ có dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính $-3a+c$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P):2x-y-2z+19=0$ và cách (P) một khoảng bằng 5 có dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính $a+c+d$.

Câu 11: Biết góc quan sát ngang của một camera là $116°$. Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $A(2;1;5)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P):2x-y-2z+13=0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có đường kính bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số hàng chục)



----------HẾT----------

BÀI 02 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ chỉ phương của đường phẳng: Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

Chú ý:

- Đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một vectơ chỉ phương
- Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì $k.\vec{u}$ (với k là một số khác 0) cũng là một vectơ chỉ phương của Δ.

2 Phương trình tham số của đường thẳng

Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$.

Hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ (t là tham số, $t \in \mathbb{R}$).

Chú ý: Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó:

- Với các số a, b, c không đồng thời bằng 0 thì hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ xác định một đường thẳng đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$.
- Từ phương trình tham số của đường thẳng, mỗi giá trị của tham số tương ứng với một điểm thuộc đường thẳng đó và ngược lại.

3 Phương trình chính tắc của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ với a, b, c là các số khác 0.

Hệ phương trình: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ.

4 Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Trong không $Oxyz$, cho hai điểm phân biệt $A_1(x_1;y_1;z_1)$ và $A_2(x_2;y_2;z_2)$. Đường thẳng A_1A_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{A_1A_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.

- Đường thẳng A_1A_2 có phương trình tham số là $\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t\\y=y_1+(y_2-y_1)t\\z=z_1+(z_2-z_1)t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.
- Trong trường hợp $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$, $z_1\neq z_2$ thì đường thẳng A_1A_2 có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có các vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$, $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$. Khi đó $\Delta_1\perp\Delta_2\Leftrightarrow\vec{u}_1.\vec{u}_2=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

5 Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ và tương ứng có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$, $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$. Khi đó:

- $\Delta_1\ //\ \Delta_2\Leftrightarrow\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1\notin\Delta_2$.
- $\Delta_1\equiv\Delta_2\Leftrightarrow\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1\in\Delta_2$.
- Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq\vec{0}\\\overrightarrow{A_1A_2}\perp[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq\vec{0}\\\overrightarrow{A_1A_2}\cdot[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=0.\end{cases}$
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow\overrightarrow{A_1A_2}.[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq0$.

Chú ý: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$, $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$ và có phương trình tham số: $\Delta_1:\begin{cases}x=x_1+a_1t\\y=y_1+b_1t\\z=z_1+c_1t\end{cases}$ $\Delta_2:\begin{cases}x=x_2+a_2t\\y=y_2+b_2t\\z=z_2+c_2t\end{cases}$

Xét hệ phương trình hai ẩn t và s: $\begin{cases}x_1+a_1t=x_2+a_2s\\y_1+b_1t=y_2+b_2s\\z_1+c_1t=z_2+c_2s\end{cases}(*)$. Khi đó

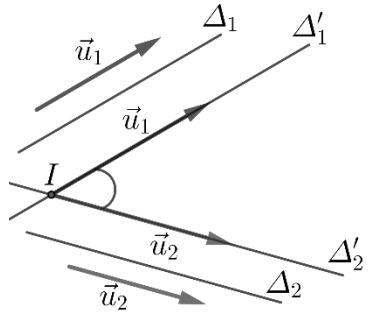
- $\Delta_1\ //\ \Delta_2\Leftrightarrow\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.
- $\Delta_1\equiv\Delta_2\Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có vô số nghiệm.
- Δ_1 cắt $\Delta_2\Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất.
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương và hệ $(*)$ vô nghiệm.

6 Góc

Góc giữa hai đường thẳng:

Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$ và $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

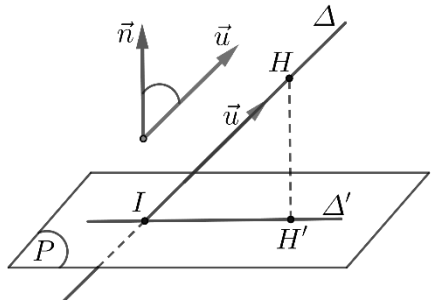
$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\vec{u}_1.\vec{u}_2)\right|=\frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$



Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$. Khi đó, ta có:

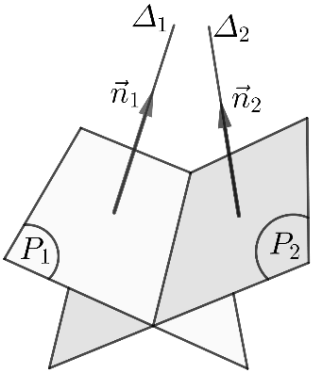
$$\sin(\Delta,(P))=\left|\cos(\vec{u}.\vec{n})\right|=\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



Góc giữa hai mặt phẳng:

Trong không gian *Oxyz*, cho hai mặt phẳng $(P_1),(P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ và $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos((P_1),(P_2))=\left|\cos(\vec{n}_1.\vec{n}_2)\right|=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định các yếu tố cơ bản của đường thẳng trong không gian. Vị trí tương đối trong không gian

Phương pháp: Trong không gian $Oxyz$, vecto $\vec{u}=(a;b;c)\neq\vec{0}$ là vecto chỉ phương của đường thẳng Δ thì vecto $\vec{m}=k.\vec{u}$ cũng là vecto chỉ phương của đường thẳng Δ.

Phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ có vecto chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ (hệ số trước t).

Phương trình chính tắc $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ có vecto chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ (hệ số ở mẫu).

Nhận xét:

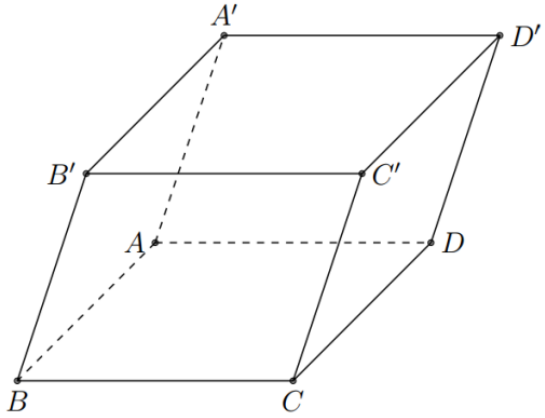
- Với phương trình tham số lấy đúng thứ tự hệ số trước tham số t.
- Với phương trình chính tắc lấy hệ số dưới mẫu.
- Nếu giả thiết chưa đúng cấu trúc, ta phải sắp xếp lại rồi mới lấy hệ số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, xác định một vecto chỉ phương của đường thẳng dưới đây:

a) $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$ b) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ c) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2-z}{1}$

Bài tập 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các vecto có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp, những véc tơ nào là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AC?



Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+3t\\y=-1+t\\z=5-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Trong các điểm sau đây, điểm nào thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(11;2;4)$. **B.** $N(5;0;3)$. **C.** $P(10;3;-3)$. **D.** $Q(8;-3;1)$.

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=3-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ và $d':\begin{cases}x=2+2t'\\y=3+4t'\\z=5-2t'\end{cases}\ (t'\in\mathbb{R})$

b) $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=5+t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ và $d':\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{2}$

c) $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và $d':\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ nào là một vectơ chỉ phương của đường thẳng có phương trình $\frac{x-1}{3}=\frac{3y}{2}=\frac{3-z}{1}$?

A. $\vec{a}=\left(3;\frac{3}{2};1\right)$. **B.** $\vec{a}=(9;2;3)$. **C.** $\vec{a}=(3;2;1)$. **D.** $\vec{a}=\left(3;\frac{2}{3};-1\right)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x+2z+3=0$. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{a}=(1;0;2)$. **B.** $\vec{a}=(2;-1;0)$. **C.** $\vec{a}=(1;2;3)$. **D.** $\vec{a}=(2;0;-1)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$; $\overrightarrow{OB}=-2\vec{j}-4\vec{k}$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là

A. $\vec{a}=(-2;-5;-1)$. **B.** $\vec{a}=(2;5;-1)$. **C.** $\vec{a}=(2;5;-9)$. **D.** $\vec{a}=(2;1;-9)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{a}=(3;4;-1)$. **B.** $\vec{a}=(2;-5;3)$. **C.** $\vec{a}=(-3;-4;1)$. **D.** $\vec{a}=(2;-5;-3)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{a}=(-1;2;1)$. **B.** $\vec{a}=(2;1;3)$. **C.** $\vec{a}=(1;2;3)$. **D.** $\vec{a}=(2;0;-1)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ nào sau đây là tọa độ của một véctơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+4t\\y=1-6t\\z=9t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$?

A. $\vec{a}=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **B.** $\vec{a}=(2;1;0)$. **C.** $\vec{a}=(4;-6;0)$. **D.** $\vec{a}=\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{3}$?

A. $Q(1;-2;-1)$. **B.** $N(-1;3;2)$. **C.** $A(1;2;1)$. **D.** $P(-1;2;1)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$. Điểm nào sau đây thuộc d?

A. $Q(-1;-2;1)$. **B.** $N(-1;3;2)$. **C.** $A(2;3;-1)$. **D.** $P(1;2;-1)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=5+t\\z=2+3t\end{cases}$?

A. $Q(-1;1;3)$. **B.** $N(1;-1;3)$. **C.** $A(-2;5;-2)$. **D.** $P(1;5;2)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=1-t\end{cases}$ không đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(3;2;0)$. **B.** $N(5;1;-1)$. **C.** $A(1;3;1)$. **D.** $P(0;1;2)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-4}{1}$. Trong các điểm sau đây, điểm nào **không thuộc** đường thẳng Δ?

A. $M(4;-7;-2)$. **B.** $N(7;-12;6)$. **C.** $P(10;-17;7)$. **D.** $Q(13;-22;8)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+3t\\y=-1+t\\z=5-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Véc tơ nào sau đây là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ?

A. $\vec{u}=(2;-1;5)$. **B.** $(2;-1;-2)$. **C.** $\vec{u}=(3;1;5)$. **D.** $\vec{u}=(3;1;-2)$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-4}{1}$. Véc tơ nào sau đây là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ?

A. $\vec{u}=(1;-2;4)$. **B.** $\vec{u}=(3;-5;1)$. **C.** $\vec{u}=(-1;2;-4)$. **D.** $\vec{u}=(3;-5;4)$.

Câu 14: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3},\ \Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{1}$$

A. Δ_1 song song với Δ_2. **B.** Δ_1 chéo với Δ_2.

C. Δ_1 cắt Δ_2. **D.** Δ_1 trùng với Δ_2.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3-t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=1+2t'\\y=-1+2t'\\z=2-2t'\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

B. Hai đường thẳng d và d' song song với nhau.

C. Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

D. Hai đường thẳng d và d' trùng nhau.

Câu 16: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d':\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=3\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. d và d' chéo nhau. **B.** d song song với d'.

C. d trùng với d'. **D.** d cắt d' tại điểm $A(0;1;-2)$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-3}{m-1}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=4+4t \\ y=3-t \\ z=2+2t \end{cases}$. Giá trị của m để Δ_1 và Δ_2 vuông góc là

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-3$.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ và $d_2: \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+4}{1}$ cắt nhau tại điểm M có toạ độ bằng

A. $M(0;3;-4)$. **B.** $M(1;7;3)$. **C.** $M(-3;5;-5)$. **D.** $M(3;-5;5)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $M(1;3;2)$ nằm trên đường thẳng d.

b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(1;3;2)$

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=2+2t \end{cases}$.

d) Đường thẳng d và đường thẳng $d': \begin{cases} x=-3t \\ y=t \\ z=-1-3t \end{cases}$ là hai đường chéo nhau.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3+t \\ z=4-5t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là: $\vec{u}=(1;3;4)$.

b) Điểm $A(5;5;-6)$ thuộc đường thẳng Δ.

c) Đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+3t \\ y=4t \\ z=3+2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ vuông góc với đường thẳng Δ.

d) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm $M(-5;0;19)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có phương trình là: $\Delta_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ và $\Delta_2: \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Xets

a) Đường thẳng Δ_1 có một vectơ chỉ phương là: $\vec{u_1}=(1;-1;2)$ và đi qua điểm $A(-1;-2;1)$.

b) Điểm $M(10;1;-2)$ thuộc đường thẳng Δ_2. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

c) Đường thẳng Δ_1 vuông góc với đường thẳng Δ_2.

d) Đường thẳng Δ_1 và đường thẳng Δ_2 là hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có phương trình là: $\Delta_1: \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x+4}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng Δ_1 có một vectơ chỉ phương là: $\vec{u_1}=(1;-1;2)$ và đi qua điểm $A(-1;4;-5)$.

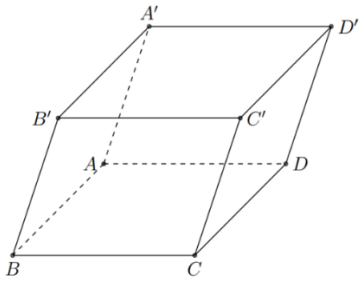
b) Đường thẳng Δ_2 không cắt trục toạ độ Oz.

c) Đường thẳng Δ_1 song song với đường thẳng Δ_2.

d) Đường thẳng Δ_1 và đường thẳng Δ_2 là hai đường thẳng chéo nhau.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu vectơ chỉ phương của đường thẳng AB có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của hình hộp.



Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi $m\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$ thì đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1;2;0)$; $B(m;-1;3)$ cắt mặt phẳng (P): $x+y+z-6=0$. Giá trị của a bằng bao nhiêu ?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(-1;3;1)$, $N(-2;1;-2)$, $P(1;2;3)$, $Q(2;-1;2)$, $S(1;2;-3)$. Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$ đi qua bao nhiêu điểm trong số các điểm đã cho?

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=3+2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ và các điểm $M(-1;3;1)$, $N(-2;1;-2)$, $P(1;2;3)$, $Q(2;-1;2)$, $S(1;2;-3)$. Có mấy điểm không thuộc đường thẳng (d) cho trước?

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;4)$ và $B(5;2;-2)$. Biết $\vec{u}=(a;b;1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là đường đối xứng với AB qua mặt phẳng (Oyz). Tính $a+b$

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-5}{1}$ và $\Delta': \frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{1}$ đối xứng với nhau qua mặt phẳng (P). Biết (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;3)$. Tính $a+b$.

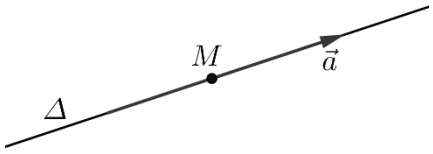
----------HẾT----------

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng

Phương pháp: Ta thường gặp các dạng toán sau:

Dạng 1: Đường thẳng đi qua một điểm và có một vectơ chỉ phương:

Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng Δ đi qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a;b;c)$

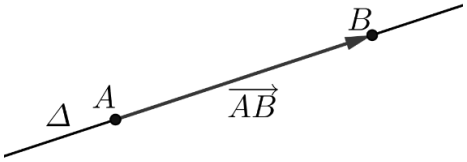


Khi đó phương trình đường thẳng Δ $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ hoặc $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ nếu $\{a;b;c\}\neq 0$.

Chú ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

Dạng 2: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm:

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ qua hai điểm A và B.



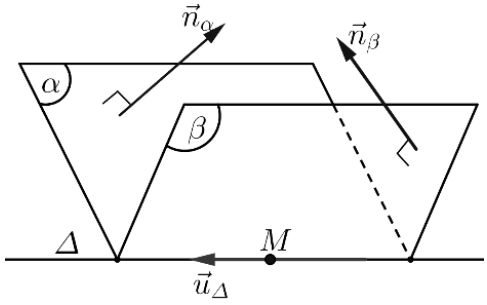
- Chọn A hoặc B là điểm mà Δ đi qua.
- Nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTCP $\rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

Dạng 3: Đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$



- Cho 1 trong 3 ẩn $x;y;z=0$ để tìm 2 ẩn còn lại
- $x=0 \longrightarrow \begin{cases} By+Cz+D=0 \\ B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=? \\ z=? \end{cases} \Rightarrow M(0;?;?)$
- Vecto chỉ phương $\vec{u}=\left[\vec{n}_\alpha;\vec{n}_\beta\right]$.

Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, viết các phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;2)$ và song song với đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+5}{3}$.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, viết các phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng Δ đi qua $A(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):x+3y-z-1=0$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, viết các phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(2;3;-1)$ và $B(1;-2;4)$.

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=2+3t\end{cases} \text{ và } \Delta_2:\frac{x-8}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2}.$$

a) Chứng minh rằng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và Δ_2.

Bài tập 5: Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ đi qua điểm $A(-1;3;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;3;4)$;

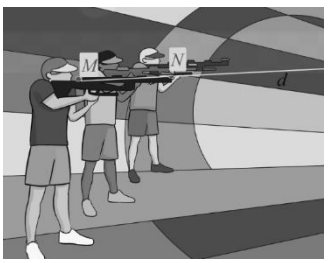
b) Δ đi qua hai điểm $M(2;-1;3)$ và $N(3;0;4)$.

Bài tập 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha):2x+y-z+3=0$ và $(\beta):x+y+z-1=0$. Viết phương trình chính tắc đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β)

Bài tập 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-5z+4=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+5}{6}$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P). Xác định phương trình giao tuyến d' của (Q) và (P)?

Bài tập 8: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=-2+5t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1+s\\y=2+s\\z=1+3s\end{cases}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1;d_2$.

Bài tập 9: Trong một trò chơi mô phỏng bắn súng 3D trong không gian $Oxyz$, một xạ thủ đang ngắm với tọa độ khe ngắm và đầu ruồi lần lượt là $M(3;3;1,5)$, $N(3;4;1,5)$. Viết phương trình tham số của đường nắm bắn của xạ thủ (xem như đường thẳng MN).

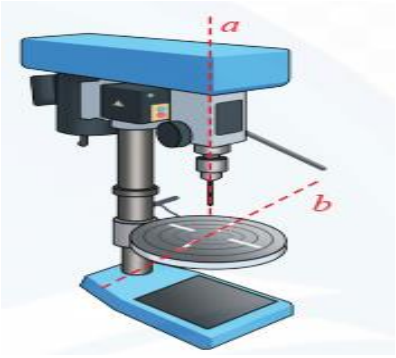


Bài tập 10: Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$, cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan như hình vẽ dưới đây lần lượt là:

$$a:\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3t\end{cases} \text{ và } b:\begin{cases}x=1+4t'\\y=2+2t'\\z=6\end{cases}$$

a) Chứng minh a và b vuông góc và cắt nhau.

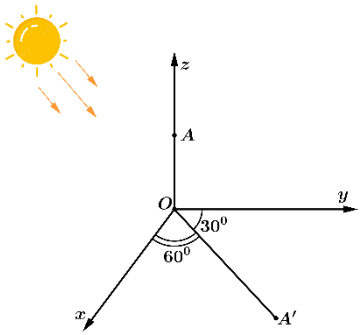
b) Tìm giao điểm của a và b.



Bài tập 11: Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(1;3;4)$ và trong 3 giây, đầu đạn đi với vận tốc không đổi, vectơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v}=(2;1;6)$. Hỏi viên đạn trên có bắn trúng mục tiêu trong mỗi tình huống sau hay không?

a) Mục tiêu đặt tại điểm $M\left(7;\frac{7}{2};21\right)$ b) Mục tiêu đặt tại điểm $N(-3;1;-8)$.

Bài tập 12: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột thẳng cao 6m vuông góc với mặt đất có chân cột đặt tại ví trí O trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời thì bóng của đỉnh cột dưới mặt đất cách chân cột 3m về hướng S60°E (hướng tạo với hướng nam góc $60°$ tạo với hướng đông góc $30°$). Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ là O, tia Ox chỉ hướng nam, tia Oy chỉ hướng đông, tia Oz chứa cây cột, đơn vị đo là mét. Hãy viết phương trình đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho điểm $A(1;2;0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt trục Ox.

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$

Câu 2: Cho điểm $A(-1;1;0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt trục Ox, sao cho góc tạo bởi Δ với hai trục Ox, Oy bằng nhau.

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-2t \\ z=0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-t \\ z=0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=0 \end{cases}$

Câu 3: Cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Oz.

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$ **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{4}$ **D.** $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt hai trục Ox, Oz tại M, N sao cho $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AN}$.

A. $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=0 \\ z=3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=0 \\ z=3t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=3+3t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=0 \\ z=3t \end{cases}$

Câu 5: Cho điểm $A(1;-2;1)$ và 2 đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-3}$, $d_2: \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. Phương trình đường thẳng d_3 đi qua A cắt hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{1-z}{-5}$ **B.** $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+6}{4}=\dfrac{z-6}{-5}$

C. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{5}$ **D.** $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+6}{4}=\dfrac{z-6}{5}$

Câu 6: Cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}; d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{2-y}{-3}=\frac{z-3}{-5}$. **D.** $\frac{1-x}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{5}$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $E(2;2;1)$, $F\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$, $O(0;0;0)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A,B,C xuống các cạnh BC,CA,AB. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt trục Ox tại điểm có hoành độ nguyên và tạo với $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ một góc α, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{51}}{9}$.

A. $\frac{x+3}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$ **B.** $\frac{x+4}{7}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$

C. $\frac{x-3}{7}=\frac{y}{1}=\frac{-z}{1}$ **D.** $\frac{x-3}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$

Câu 8: Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha):x+y-z-3=0$, cắt $d_1:\begin{cases}x=3\\y=1+3t\\z=1-2t\end{cases}$ và tạo với đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\y=4+3t\\z=-3-2t\end{cases}$ một góc nhỏ nhất, thì phương trình của Δ là:

A. $\begin{cases}x=1\\y=-t'\\z=2t'\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=8+5t'\\y=-3-4t'\\z=2+t'\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t'\\y=1-t'\\z=3-2t'\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+5t'\\y=1-4t'\\z=3+2t'\end{cases}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):z-1=0$ và $(Q):x+y+z-3=0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt đường thẳng $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$ và vuông góc với đường thẳng Δ. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=3+t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3-t\\y=t\\z=1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+t\\y=t\\z=1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=-t\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $(d):\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P):x-y-z-1=0$. Viết pt đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(1;1;-2)$, biết $(\Delta)//(P)$ và (Δ) cắt d.

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{3}$.

C. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{5}$. **D.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d.

A. $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}$. **B.** $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-3}$.

C. $\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$. **D.** $\frac{x+1}{5}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{3}$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z+5=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P), đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d có phương trình là

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{2}$. **B.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+1}{2}$.

C. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-2}$. **D.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{2}$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+z+1=0$. Viết phương trình đường thẳng qua giao điểm của đường thẳng d với (P), nằm trên mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d.

A. $\begin{cases} x=-2-t \\ y=-2 \\ z=3+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=0 \\ z=1-2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-3-t \\ y=4 \\ z=1+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-2 \\ z=4-2t \end{cases}$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=4-2t \end{cases}$ và $d': \frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

A. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{-2}$. **B.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+2}{2}$.

C. $\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{2}$. **D.** $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-2}$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{4}$ và $d_2: \frac{x+1}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;2;-4)$ và cắt hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. $\begin{cases} x=t \\ y=2-2t \\ z=-4+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=2+2t \\ z=-4-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-t \\ y=2-2t \\ z=-4+3t \end{cases}$.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2), B(3;3;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{3}$. Gọi M là trung điểm của AB. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $H(1;1;1)$ và cắt hai đường thẳng d và OM

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+23t \\ z=1-15t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+23t \\ z=1+15t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=1-23t \\ z=1-15t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-23t \\ z=1-15t \end{cases}$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $N(0;-1;2)$ và hai đường thẳng $d_1:\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=3-2t \end{cases}$, $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-11}{4}$. Đường thẳng Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho N là trung điểm của AB. Đường thẳng Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=-1+t \\ z=2+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=0 \\ y=1+4t \\ z=-1-6t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=0 \\ y=-1+5t \\ z=2+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=0 \\ y=3+4t \\ z=1-t \end{cases}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $P(2;1;-4)$ và đường thẳng $d_1:\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-12+t \end{cases}$.

Đường thẳng Δ cắt d_1, và trục Oy lần lượt tại A và B sao cho P là trung điểm của AB. Đường thẳng Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1+2t \\ z=-4+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2t \\ y=-2+3t \\ z=-4t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-5t \\ z=-4+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3-t \\ y=3-2t \\ z=1-5t \end{cases}$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$ **C.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm M, cắt và vuông góc với Δ.

A. $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{1}$. **B.** $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z}{1}$.

C. $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{1}$. **D.** $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{-2}$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;-1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{-4}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng d.

A. $\dfrac{x}{13}=\dfrac{y-1}{28}=\dfrac{z+1}{-20}$. **B.** $\dfrac{x}{-13}=\dfrac{y-1}{28}=\dfrac{z+1}{20}$.

C. $\frac{x}{13}=\frac{y-1}{28}=\frac{z+1}{20}$. **D.** $\frac{x}{13}=\frac{y-1}{-28}=\frac{z+1}{20}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0;2;0)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=4+3t\\y=2+t\\z=-1+t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$. Đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\frac{x}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$. **B.** $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{2}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-2}$. **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3-2t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x-2y+z+5=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với Δ là

A. $\begin{cases}x=-3\\y=-1+3t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\\z=-1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=0\\y=-1+5t\\z=2+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-3t\\y=3-t\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=-5+t\\y=2t\\z=1+7t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):3x+y-2z-8=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với Δ là

A. $\begin{cases}x=-7-11t\\y=-4+23t\\z=-13-5t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-11-7t\\y=23-4t\\z=-5-13t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3-t\\y=-1+5t\\z=2+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=4-11t\\y=3+23t\\z=1-5t\end{cases}$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):x-2y-z+3=0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-3\\y=-t\\z=2t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-z-1=0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=1-2t\\z=1+t\end{cases}$ **B.** $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=1+3t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=1-2t\\z=2+t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=1+2t\\z=2+t\end{cases}$

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+y-z-1=0$, $(Q): x-2y+z-5=0$. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(1;-2;1)$. **B.** $\vec{u}=(2;1;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;3;5)$. **D.** $\vec{u}=(-1;3;-5)$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 3x-2y+2z-5=0$ và $(Q): 4x+5y-z+1=0$. Biết hai điểm A, B phân biệt cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với véctơ nào sau đây?

A. $\vec{u}=(8;-11;-23)$. **B.** $\vec{u}=(3;-2;2)$. **C.** $\vec{u}=(-8;11;-23)$. **D.** $\vec{u}=(4;5;-1)$.

Câu 29: Cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(3;2;1)$, mặt phẳng $(P): x-2y-z+3=0$. Đường thẳng d nằm trên (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases} x=4+t \\ y=\dfrac{5}{2} \\ z=2+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=4+t \\ y=\dfrac{5}{2}+2t \\ z=2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=4+t \\ y=-\dfrac{5}{2} \\ z=2+t \end{cases}$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x+y-2z-1=0$. Giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào trong các điểm sau.

A. $C(1;2;1)$. **B.** $D(2;1;0)$. **C.** $B(0;1;0)$. **D.** $A(2;1;1)$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x=t \\ y=3 \\ z=-2+t \end{cases}$. Phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=2-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=3-2t \\ z=1-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-2t \\ z=2-5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=3 \\ z=1-t \end{cases}$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-5+t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=0 \\ y=4-2t' \\ z=5+3t' \end{cases}$ có phương trình là

A. $\dfrac{x+4}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{2}$. **B.** $\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{2}$.

C. $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{1}$. **D.** $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{-2}$.

Câu 33: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (Δ) là đường vuông góc chung của hai đường thẳng: $(d_1):\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{3}$ và $(d_2):\begin{cases}x=1+t'\\y=3-2t'\\z=1\end{cases}$. Phương trình của (Δ) là

A. $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}+2t\\y=\dfrac{8}{3}+t\\z=1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}-2t\\y=\dfrac{8}{3}+t\\z=1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}+2t\\y=\dfrac{8}{3}+t\\z=1-2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}+2t\\y=\dfrac{8}{3}+t\\z=1+2t\end{cases}$.

Câu 34: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau có phương trình $(d_1):\begin{cases}x=1\\y=10+2t\\z=t\end{cases}$, $(d_2):\begin{cases}x=3t\\y=3-2t\\z=-2\end{cases}$. Gọi (Δ) là đường thẳng vuông góc chung của (d_1) và (d_2). Phương trình của (Δ) là

A. $\begin{cases}x=2t\\y=\dfrac{177}{98}+3t\\z=-6t-\dfrac{17}{49}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}-46t\\y=-147t\\z=246t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=2-3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-3t\\z=6-4t\end{cases}$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{z+3}{1}$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

A. $\begin{cases}x=5-6t\\y=11+9t\\z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=5-6t\\y=11-9t\\z=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=5+6t\\y=11-9t\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3-6t\\y=11-9t\\z=0\end{cases}$.

Câu 36: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng Oxy.

A. $d':\begin{cases}x=-3+t\\y=t\\z=0\end{cases},(t\in\mathbb{R})$. **B.** $d':\begin{cases}x=-3+t\\y=-t\\z=0\end{cases},(t\in\mathbb{R})$.

C. $d':\begin{cases}x=-3+t\\y=1+t\\z=0\end{cases},(t\in\mathbb{R})$. **D.** $d':\begin{cases}x=3-t\\y=-t\\z=0\end{cases},(t\in\mathbb{R})$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-1;3;-2)$ và mặt hai phẳng $(P):2x-y+z+3=0$; $(Q):x-2y-1=0$. Phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P). Biết d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (Q)

A. $\begin{cases} x=u \\ y=1+7u \\ z=-2+10u \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=u \\ y=1-7u \\ z=-2+10u \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1 \\ y=1+3u \\ z=-2+u \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=0 \\ y=-1+3u \\ z=2+u \end{cases}$.

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(Oxy);(Oyz);(P): x+2y-4=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng $(P): x+2y-4=0$. Với d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(Oxy);(Oyz)$.

A. $\begin{cases} x=-2u \\ y=2+u \\ z=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2u \\ y=2+u \\ z=0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2u \\ y=2+u \\ z=u \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-2u \\ y=u \\ z=2 \end{cases}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-5}{-4}=\dfrac{z+2}{1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $M(3;-4;1)$ nằm trên đường thẳng d.

b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(-3;4;-1)$

c) Đường thẳng d song song với đườn thẳng $\Delta: \begin{cases} x=-4+3t \\ y=5-4t \\ z=-2+t \end{cases}$.

d) Đường thẳng Δ song song với d và cắt cả hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d_2: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{1}$ có phương trình là $\Delta: \dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{1}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho $M(2;1;0)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $M(1;-1;1)$ nằm trên đường thẳng d.

b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;1;-1)$

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-t \end{cases}$.

d) Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d thì phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-4t \\ z=-2t \end{cases}$

Câu 3: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $M(1;3;-2)$ nằm trên đường thẳng d.

b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(-1;1;2)$.

c) Đường thẳng d song song với đườn thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\\z=2+2t\end{cases}$.

d) Phương trình đường vuông góc chung của d và đường thẳng $d_2:\begin{cases}x=-3t\\y=t\\z=-1-3t\end{cases}$ là $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-4}{-2}$.

Câu 4: Trong $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-1;0;-2)$.

b) Đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) cắt nhau.

c) Gọi $H=d\cap(P)\Rightarrow H=(1;-1;1)$.

d) Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(1;1;2)$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với d có phương trình tổng quát là $x+y+2z-1=0$.

c) Hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng d là điểm $H(1;0;-1)$.

d) Phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d có dạng: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-1)$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với d có phương trình tổng quát là $2x+by+cz+d=0$. Khi đó $b+c+d=-5$

c) Gọi M' là điểm đối xứng với M qua d. Khi đó $M'(1;0;-2)$.

d) Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M cắt và vuông góc với đường thẳng d. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{a}=\frac{z}{b}$. Khi đó $a+b=-6$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+6=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{5}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+6=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;-1)$.

b) Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{5}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-4;0)$.

c) Đường thẳng d cắt (α).

d) Hình chiếu vuông góc của d trên (α) có phương trình là $\frac{x}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{5}$

Câu 8: Trong không gian với hê toa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+1}{1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $N(0;2;0)$ thuộc đường thẳng d.

b) Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P).

c) Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-4-2t \\ z=-1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

d) Phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là $d': \frac{x-2}{7}=\frac{y}{-5}=\frac{z-1}{2}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;3)$ và $B(3;5;9)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là: $\vec{u}=(1;1;3)$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng AB là: $\begin{cases} x=3+t \\ y=5+3t \\ z=9+3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

c) Điểm $M(4;6;9)$ thuộc đường thẳng AB.

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $C(2;0;-3)$ và song song với đường thẳng AB là: $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng d qua điểm $M(1;2;2)$.

b) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{v}=(2;4;4)$.

c) Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=-3+2t\end{cases}$.

d) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=3-t\\y=2-2t\\z=-1-2t\end{cases}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;3;-2)$, $B(1;1;5)$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm A,B có dạng $\begin{cases}x=a\\y=b-2t\\z=-2+ct\end{cases}$. Tính $a+b+c$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3;-2;1)$ và song song với đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-6}{5}$ có dạng $\begin{cases}x=a+4t\\y=-2+bt\\z=1+ct\end{cases}$. Tính $a+b+2c$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;3;5)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-3z+1=0$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có dạng $\begin{cases}x=1+at\\y=b+t\\z=5+ct\end{cases}$. Tính $3a+b+c$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=-1-4t\\z=6+6t\end{cases}$ và $d_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-5}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d_3 qua $M(1;-1;2)$ và vuông góc với cả d_1, d_2 có dạng $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y+1}{b}=\dfrac{z-a}{c}$. Tính $a+b+c$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng (Δ) qua $M(2;3;1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P):2x-y+2z-7=0$ và $(Q):x+3y-2z+3=0$ có dạng $\begin{cases}x=a+bt\\y=3+6t\\z=c+dt\end{cases};t\in\mathbb{R}$. Tính $2a+b+c+d$.

Câu 6: Trong không gian *Oxyz*, cho điểm $A(1;-2;3)$, $B(2;b;c)$, mặt phẳng $(\alpha): x+3y-2z+5=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$. Khi đó, để đường thẳng *d* đi qua hai điểm *A*, *B*, song song với mặt phẳng (α) và vuông góc với đường thẳng Δ thì $b+c$ bằng:

Câu 7: Trong không gian *Oxyz*, cho mặt phẳng $(\alpha): ax+by+cz+10=0$. Biết mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=-1+t \\ y=2+2t \\ z=-t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=-1+2t' \\ y=4+2t \\ z=-1-t \end{cases}$. Khi đó $a+b+c$ bằng:

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=2-t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$. Gọi giao điểm của hai đường thẳng Δ và d là $M(a;b;c)$. Tính $a+b+c$.

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$. đường thẳng đi qua 2 điểm *A, B* có phương trình dạng $\Delta: \begin{cases} x=2t \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$. Tính y_0+z_0+b+c.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;2;1)$, $C(3;-2;0)$, $D(1;1;-3)$. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm $M(2;a;b)$. Khi đó a^b bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{4}$ và $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d và Δ có dạng: $ax+by+z+c=0$. Tính giá trị của $a+b+c$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(1;2;3)$ và trong 3 giây, đầu đạn đi với vận tốc không đổi; véctơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v}=(2;1;5)$. Khi viên đạn trúng mục tiêu tại điểm $B(-5;a;b)$ thì giá trị của biểu thức b^a bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(1;1;3)$, nằm trong mặt phẳng $(P): x+2y+z-6=0$ và cắt đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$ có dạng $\begin{cases} x=1+at \\ y=1 \\ z=3+bt \end{cases}$.

Tính giá trị của biểu thức $M=2024a-b$.

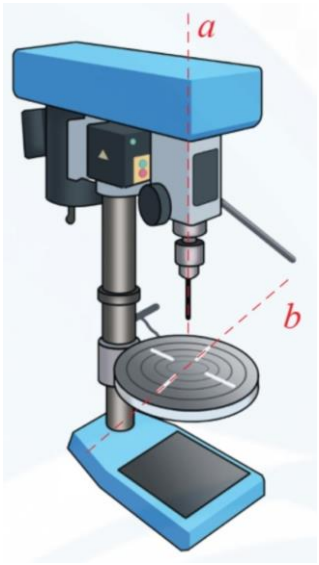
Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-5+t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=0 \\ y=4-2t'. \\ z=5+3t' \end{cases}$

Đường vuông góc chung của hai đường thẳng d và d' đi qua điểm $K(6;m;n)$. Tính $m+n$

Câu 15: Trong không gian *Oxyz*, cho mặt phẳng (α) và $B(3;a;2a)$. Biết mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+5t\\y=2-4t\\z=3+3t\end{cases}$ và đường thẳng $d':\begin{cases}x=2+5t\\y=-4t\\z=5+3t\end{cases}$. Khi đó để điểm B nằm trong mặt phẳng (α) thì giá trị của a bằng:

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Gọi $\vec{u}(a;b;3)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng Δ và cắt trục Oy. Tính $a+b$.

Câu 17: Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$ cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan (tham khảo hình vẽ) lần lượt là $a:\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3t\end{cases}$ và $b:\begin{cases}x=1+4k\\y=2+2k\\z=6\end{cases}$. Tọa độ giao điểm của a và b là $M(a;b;c)$. Tính $S=a+b+c$.

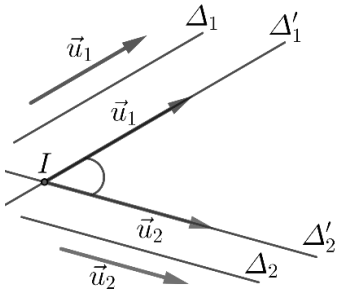


----------HẾT----------

Dạng 3: Góc và khoảng cách trong không gian Oxyz

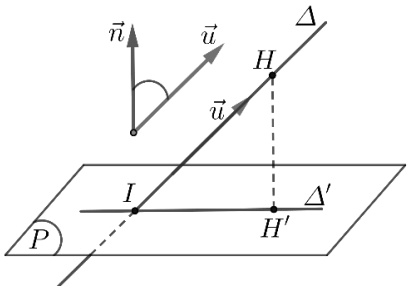
Phương pháp:

- Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó:



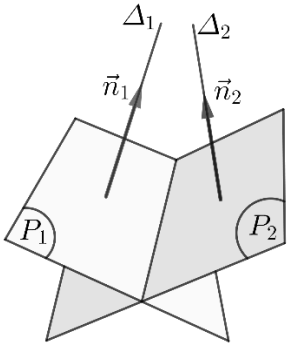
$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\vec{u}_1.\vec{u}_2)\right| = \frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$.



$$\sin(\Delta, (P)) = \left|\cos(\vec{u}.\vec{n})\right| = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó, ta có:



$$\cos((P_1), (P_2)) = \left|\cos(\vec{n}_1.\vec{n}_2)\right| = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

- Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A, y_A, z_A)$ và $B(x_B, y_B, z_B)$ là:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ là:

$$d\left(M_0;(\alpha)\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

- Khoảng cách từ điểm M_1 đến đường thẳng Δ đi qua M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là:

$$d\left(M_1,\Delta\right)=\frac{\left\|\left[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{u}\right]\right\|}{\left|\vec{u}\right|}$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ', trong đó đường thẳng Δ đi qua M_0 và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}$, đường thẳng Δ' đi qua M_0' và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}$ là:

$$d\left(\Delta,\Delta'\right)=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_0'}.\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}{\left\|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right\|}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=5-2t\\z=14-3t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-4t'\\y=2+t'\\z=-1+5t'\end{cases}$. Tính góc giữa hai đường thẳng đã cho.

Bài tập 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z-1=0$. Tính góc giữa Δ và (P)

Bài tập 3: Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$. Tính cos giữa hai tia sáng có phương trình lần lượt là $d_1:\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$, $d_2:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{9}$.

Bài tập 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ và $d_2:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$

Bài tập 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=6+5t\\y=2+t\\z=1\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+1=0.$ Góc hợp bởi giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu?

Bài tập 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y-z-2=0.$ Cosin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng bao nhiêu?

Bài tập 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x-y-z-3=0$ và $(Q):x-z-2=0.$ Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng bao nhiêu?

Bài tập 8: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;1).$ Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) bằng bao nhiêu ?

Bài tập 9: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): x+2y+2z-5=0$ bằng bao nhiêu?

Bài tập 10: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y-z+1=0$ bằng bao nhiêu?

Bài tập 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+4z-3=0$ và điểm $A(1;1;3)$. Mặt phẳng $(Q)\,//\,(P)$ và cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại các điểm B và C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $2\sqrt{22}$. Khoảng cách từ điểm $M(2;2;1)$ đến (Q) bằng bao nhiêu?

Bài tập 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y-2z+2=0$ và hai điểm $A(2;0;1)$, $B(1;1;2)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong (α) và cắt đường thẳng AB, thỏa mãn góc giữa hai đường thẳng AB và d bằng góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (α). Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d bằng

Bài tập 13: Trong không gian $Oxyz$, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A(0;10;0)$ với vận tốc $\vec{v}=(150;150;40)$. Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Bài tập 14: Trong một khung lưới ô vuông gồm các hình lập phương, xét các đường thẳng đi qua hai nút lưới (mỗi nút lưới là đỉnh của hình lập phương), người ta đưa ra một cách kiểm tra độ lệch về phương của hai đường thẳng bằng cách gắn hệ tọa độ $Oxyz$ vào khung lưới ô vuông và tìm vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó. Giả sử, đường thẳng a đi qua hai nút lưới $M(1;1;2)$ và $N(0;3;0)$, đường thẳng b đi qua hai nút lưới $P(1;0;3)$ và $Q(3;3;9)$. Sau khi làm tròn đến hàng đơn vị của độ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng $n°$ (n là số tự nhiên). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Bài tập 15: Trên một cánh đồng điện năng lượng mặt trời, người ta đã thiết lập sẵn một hệ tọa độ $Oxyz$. Hai tấm pin năng lượng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng $(P): 2x+2z+1=0$ và $(P'): x+z+7=0$



a) Tính góc giữa (P) và (P').

b) Tính góc hợp bởi (P) và (P') với mặt đất (Q) có phương trình $z=0$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa trục Oy và mặt phẳng (Oxz) bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $120°$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng Oxy và Oxz bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Câu 3: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;1;-3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oyz). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng $(P):x+y-z-11=0$ và $(P):2x+2y-2z+7=0$ bằng

A. $0°$. **B.** $45°$. **C.** $180°$. **D.** $90°$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+1=0$ và mặt phẳng $(Q):2x-y+2z+4=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đã cho bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-4)$. Khoảng cách từ O đến (α) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{61}}{12}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{12\sqrt{61}}{61}$. **D.** 3.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$,cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$. Biết góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$ bằng $120°$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$. Biết góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$ bằng $120°$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. $45°$. **B.** $120°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) bằng

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P): x+y+z-2=0;$. $(Q): x+y+z+4=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+12=0$ bằng

A. 12. **B.** 1. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 4.

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P): 2x+y-2z-1=0,$ $(Q): 6x+3y-6z+15=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Câu 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1=0$ và $(Q): 2x+2y-z-3=0$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Tính $\cos\alpha$.

A. $-\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 2x+y-2z-4=0$ và $(Q): x-2y+2z+6=0$.Tính khoảng cách h từ điểm $M(1;0;1)$ đến đường thẳng d.

A. $h=3$. **B.** $h=6$. **C.** $h=9$. **D.** $h=1$.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y-z+2=0$ và $(Q): 2x-y-z+4=0$. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha=\frac{2}{3}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{3}{4}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{6}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxz) và $(P): x-y+1=0$ bằng

A. $60°$. **B.** $135°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Khoảng cách từ điểm A đến trục Ox bằng

A. $\sqrt{4}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxz) và (Oyz) bằng:

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Câu 20: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x=-2t \\ y=6+t \\ z=1-3t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+3z+12=0$. Tìm sin của góc giữa d và (P)?

A. 0°. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 90°.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-2022=0$. Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin\alpha=-\frac{4}{9}$. **B.** $\sin\alpha=\frac{4}{9}$. **C.** $\cos\alpha=-\frac{4}{9}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{4}{9}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;0)$, góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (Oxz) bằng

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 90^0. **D.** 0^0.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{4}$, $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và song song với đường thẳng d. Tính khoảng cách từ điểm $M(3;0;-1)$ đến mặt phẳng (P).

A. 3. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** 1.

Câu 24: Trong không gian có hệ trục $Oxyz$, đường thẳng (d) có phương trình: $\begin{cases}x=2-t\\y=3+t\\z=1+t\end{cases}$ và mặt phẳng $(\Delta):x+2y-2z+3=0$. Góc giữa (d) và (Δ) bằng α. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot\alpha=\frac{\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Câu 25: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;1;-3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oyz). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\frac{8\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=8$ và điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B phân biệt. Tính diện tích lớn nhất của tam giác OAB.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** 4. **D.** $\sqrt{7}$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng $(P):x+3y-2z+2=0$ và chứa đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{1}$. Khoảng cách từ điểm $A(1;-2;-1)$ đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{24\sqrt{3}}{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

Câu 28: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):\frac{x-2}{3}+\frac{y-1}{2}+\frac{z-4}{-6}=1$ và $(Q):x+2y+3z+7=0$. Tính tang góc tạo bởi hai mặt phẳng đã cho.

A. $\frac{3}{\sqrt{19}}$ **B.** $\frac{3}{5\sqrt{19}}$. **C.** $\frac{5}{3\sqrt{19}}$. **D.** $\frac{3\sqrt{19}}{5}$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$, mặt phẳng $(P):3x+y-z-1=0$ và mặt phẳng $(Q):x+3y+z-3=0$. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua A, cắt và vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q). Sin của góc tạo bởi đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{\sqrt{55}}{55}$. **B.** 0. **C.** $\frac{-3\sqrt{55}}{11}$. **D.** $\frac{7\sqrt{55}}{55}$.

Câu 30: Cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}; d_2:\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{4}$. Số đo góc giữa hai đường thẳng $d_1;d_2$ bằng

A. $90°$. **B.** $60°$ **C.** $30°$ **D.** $45°$

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$, $d':\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $d;d'$.

A. $\cos(d;d')=\frac{1}{3\sqrt{6}}$. **B.** $\cos(d;d')=\frac{1}{3+\sqrt{6}}$

C. $\cos(d;d')=\frac{-1}{3\sqrt{6}}$. **D.** $\cos(d;d')=\frac{1}{54}$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-9}{-2}$, $d_2:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{1}$. Góc giữa hai đường thẳng đó bằng

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;2;0)$ và $A'(0;0;2)$. Góc giữa BC' và $A'C$ là:

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Câu 34: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$ và hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=2+2t\end{cases}$; $d':\begin{cases}x=3-t'\\y=1+t'\\z=1-2t'\end{cases}$. Biết rằng có 2 đường thẳng có các đặc điểm: song song với (P); cắt d,d' và tạo với d góc 30°. Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

A. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 35: Với giá trị nào của m thì đường thẳng $(D):\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{m}=\frac{z-1}{m-2}$ vuông góc với mặt phẳng $(P):x+3y+2z=2$.

A. 5. **B.** -7. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 36: Trong không giam *Oxyz*, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x-y+2z+1=0$, đường thẳng *d* có phương trình $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{2}$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng *d* và mặt phẳng (P). Tính giá trị $\cos\varphi$

A. $\cos\varphi=\frac{6}{9}$ **B.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{65}}{9}$ **C.** $\cos\varphi=\frac{9\sqrt{65}}{65}$ **D.** $\cos\varphi=\frac{4}{9}$

Câu 37: Trong không gian *Oxyz*, hãy tính số đo góc α giữa đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x-y+2z+1=0.$

A. $\alpha=30°.$ **B.** $\alpha=60°.$ **C.** $\alpha=150°.$ **D.** $\alpha=120°.$

Câu 38: Trong không gian *Oxyz*, hãy tính số đo góc α giữa đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P):5x+11y+2z-4=0.$

A. $\alpha=-30°.$ **B.** $\alpha=30°.$ **C.** $\alpha=60°.$ **D.** $\alpha=45°.$

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-1+2t\\z=-2t\end{cases}$ và mặt phẳng $(Q):x+my+(m-1)z+2021=0$. Khi mặt phẳng (Q) tạo với đường thẳng *d* một góc lớn nhất thì điểm *H* nào dưới đây nằm trong mặt phẳng (Q)?

A. $H(-2021;1;1).$ **B.** $H(2021;-1;1).$ **C.** $H(-2021;0;0).$ **D.** $H(0;2021;1).$

Câu 40: Trong không gian cho hai điểm $E(3;0;0)$, $F(0;0;1)$. Cặp mặt phẳng nào dưới đây đi qua hai điểm E,F đồng thời tạo với trục *Oz* một góc $30°$.

A. $(Q_1):x-\sqrt{26}y+3z-3=0$ và $(Q_2):x+\sqrt{26}y+3z-3=0$.

B. $(Q_1):x-2\sqrt{6}y+3z-3=0$ và $(Q_2):x+\sqrt{26}y+3z-3=0$.

C. $(Q_1):x-\sqrt{26}y+3z-3=0$ và $(Q_2):x+2\sqrt{6}y+3z-3=0$.

D. $(Q_1):x-4\sqrt{3}y+3z-3=0$ và $(Q_2):x+3\sqrt{7}y+3z-3=0$.

Câu 41: Trong không gian *Oxyz*, cho tam giác nhọn *ABC* có $E(2;2;1)$, $F\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$, $O(0;0;0)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A,B,C xuống các cạnh BC,CA,AB. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua *A* cắt trục *Ox* tại điểm có hoành độ nguyên và tạo với $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ một góc α, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{51}}{9}$.

A. $\frac{x+3}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$ **B.** $\frac{x+4}{7}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$

C. $\frac{x-3}{7}=\frac{y}{1}=\frac{-z}{1}$ **D.** $\frac{x-3}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$

Câu 42: Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-3=0$, cắt $d_1: \begin{cases} x=3 \\ y=1+3t \\ z=1-2t \end{cases}$ và tạo với đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=4+3t \\ z=-3-2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất, thì phương trình của Δ là:

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-t' \\ z=2t' \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=8+5t' \\ y=-3-4t' \\ z=2+t' \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t' \\ y=1-t' \\ z=3-2t' \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+5t' \\ y=1-4t' \\ z=3+2t' \end{cases}$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): z-1=0$ và $(Q): x+y+z-3=0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt đường thẳng $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$ và vuông góc với đường thẳng Δ. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3-t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases}$.

Câu 44: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{6}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{4}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d_2 và song song với đường thẳng d_1. Khoảng cách giữa đường thẳng d_1 và mặt phẳng (P) là

A. $\frac{1}{7}$. **B.** 2. **C.** $\frac{12}{7}$. **D.** 1.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(5;-1;3)$ đến (P) bằng

A. 5. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{11}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-2t\\y=3-2t\\z=1-3t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=6+2t'\\y=3+2t'\\z=7+9t'\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;3;1)$.

b) Đường thẳng d' đi qua điểm $B(6;3;7)$.

c) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

d) Cosin góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng $\dfrac{35}{\sqrt{1513}}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=2-3t\\z=1+2t\end{cases}$ và $d:\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $A(0;2;1)$ không thuộc đường thẳng Δ.

b) Đường thẳng d có vtcp $\vec{u}_d=(3;2;2)$.

c) Hai đường thẳng Δ và d chéo nhau.

d) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng Δ và d. Khi đó $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{38}}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' có phương trình chính tắc lần lượt là: $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-7}{5}=\dfrac{z-15}{6}$ và $d':\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình tham số của d là: $\begin{cases}x=3+2t\\y=7+5t\\z=15+6t\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

b) Phương trình tham số của d' là: $\begin{cases}x=1+t'\\y=2+t'\\z=3+t'\end{cases},t'\in\mathbb{R}$.

c) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

d) Góc giữa đường thẳng d và d' là $35°$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=3+t\\y=4+2t,t\in\mathbb{R}\\z=-3-t\end{cases}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x+y+z-1=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(3;4;-3)$.

b) $\sin(\Delta,(P))=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Góc giữa Δ và (P) là: 30°.

d) Giao điểm của Δ và (P) là: $M(3;4;-3)$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $3x+6y-3z+2024=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(-1;-2;1)$.

b) Một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;2;-1)$.

c) Góc giữa Δ và (P) là: $90°$.

d) Lấy tuỳ ý hai điểm phân biệt $A,B\in\Delta$. Gọi A',B' lần lượt là hình chiếu của A,B lên (P). Khi đó $A'B'=2024$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=-1-3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x+y-3z-1=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(2;0;-3)$.

b) Góc giữa Δ và (P) là: $150°$.

c) Không có điểm chung nào giữa Δ và (P).

d) Hình chiếu của $M(1;2;-1)$ lên (P) là: $N(1;2;1)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=1+t\\y=2+3t\\z=3-t\end{cases}$ và đường thẳng $\Delta_2:\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $M(1;2;3)$ thuộc Δ_1 và điểm $N(2;-2;1)$ thuộc Δ_2.

b) $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{2\sqrt{154}}{77}$.

c) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

d) Đường thẳng d đi qua điểm $N(2;3;-1)$ đồng thời cắt và vuông góc với Δ_2 có phương trình là $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-71}=\frac{z+1}{25}$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-2024}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2025}{-2}$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+1=0$. Xét các vectơ $\vec{u}=(2;1;-2),\vec{n}=(2;2;-1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

b) $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

c) $\cos(\Delta,(P))=\frac{8}{9}$.

d) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng khoảng 63° (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t,t\in\mathbb{R}\\z=3+3t\end{cases}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+2y-z-2=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;2;-1)$.

b) Góc giữa Δ và (P) là: 60°.

c) Chỉ có một điểm chung duy nhất giữa Δ và (P).

d) Mọi điểm thuộc Δ có hình chiếu lên (P) là chính nó.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=3-2t\\y=1+2t\\z=-5+t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x+y-5=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vectơ $\vec{u}=(-2;2;1)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

b) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Oyz) bằng $45°$.

c) Đường thẳng đi qua $N(2;3;-4)$ và song song với Δ có phương trình là $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+4}{1}$

d) Đường thẳng d vuông góc Δ và tạo với (P) một góc $45°$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;4)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian với hệ truvcj tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x-2y-2z+5=0$. Điểm $A(a;b;c)$ có hoành độ dương thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (α) bằng 3. Tính tổng $a+b-c$?

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{2}$, $d_2:\begin{cases}x=2t\\y=1\\z=1-t\end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2. Giá trị $\cos\varphi$ có dạng $\frac{a\sqrt{c}}{b}$. Tính giá trị biểu thức $P=b-3a+c$?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác góc ABC của tam giác ABC là $I(a;b;c)$. Tính tổng $a+b+c$?

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=-2-t\end{cases}$ và $(P):-x+2y+2z+5=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ cắt đường thẳng Δ_1 và tạo với đường thẳng Δ_2 một góc nhỏ nhất. Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(a;b;c)$. Tính tổng $a+2b-3c$?

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0);B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc $60°$. Tính tổng $a+b+c$? *(Làm tròn đến hàng phần trăm)*

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=4+t\\y=-4-t\\z=6+2t\end{cases}$; $d_2:\frac{x-5}{2}=\frac{y-11}{4}=\frac{z-5}{2}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt d_1,d_2 lần lượt ở B,C. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$, $d_2:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một góc 45^0 và nhận vectơ $\vec{n}=(1;b;c)$ làm một vectơ pháp tuyến. Xác định tích bc.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

Câu 9: Cho hai điểm $A(1;-1;1)$; $B(2;-2;4)$. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa A, B và tạo với mặt phẳng $(\alpha):x-2y+z-7=0$ một góc $60°$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ với $c<0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc $60°$. Tính giá trị $a+b+c$.

Câu 11: Tại một nút giao thông có 2 con đường khác mức. Trên thiết kế, trong không gian *Oxyz* hai con đường đó thuộc hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$; $d_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-3}$.



Người ta muốn tạo một con đường Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho AB nhỏ nhất. Tính độ dài AB, *kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.*

----------HẾT----------

Dạng 4: Tọa độ hóa một số HHKG và ứng dụng thực tế

Phương pháp: Để tọa độ hóa một số hình học không gian thì ta thực hiện như sau:

- **Bước 1:** Chọn hệ trục tọa độ. Trong bước này ta sẽ xác định 3 đường vuông góc có trong bài toán và gọi đó là 3 đường cơ sở. Thông thường thì ta sẽ quy ước trục Ox hướng vào mình, trục Oy nằm ngang, còn lại là trục Oz.
- **Bước 2**: Xác định tọa độ các điểm liên trên hình liên quan tới bài toán. Với những bạn chưa quen thì chúng ta xác định tọa độ hình chiếu của điểm cần tìm lên các trục, từ đó sẽ suy ra được tọa độ điểm cần tính.
- **Bước 3**: Áp dụng công thức. Sau đây chúng ta sẽ nhắc lại một số công thức cần nhớ trong phần này:

  Diện tích và thể tích: Diện tích tam giác, thể tích tứ diện, thể tích hình hộp, thể tích hình lăng trụ.

  Góc: Góc giữa 2 mặt phẳng, góc giữa 2 đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.
  Khoảng cách: Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng, Khoảng cách từ một điểm đến 1 đường thẳng, Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Chú ý: Thông thường các bài mà không có 3 đường vuông góc thì ta sẽ phải tự dựng thêm để gắn tọa độ và những bài liên quan tới hình lập phương, hình hộp chữ nhật, chối chóp có 3 đường vuông góc, lăng trụ đứng thì khi áp dụng phương pháp này sẽ giải rất nhanh.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B biết $AB=BC=a, AD=2a$. Biết rằng $SA=a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD=2AB=2BC=2CD=2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin góc giữa MN và (SAC), biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

Bài tập 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=AC=a, BAC=120^\circ, AA'=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC'. Số đo góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) bằng

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, BC=a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm AC. Tính cot góc của hai mặt phẳng (SBM) và (SAB)

Bài tập 5: Cho hình tứ diện $EFGH$ có EF vuông góc với EG, EG vuông góc với EH, EH vuông góc với EF. Biết $EF=6a, EG=8a, EH=12a$ (với $a>0, a\in\mathbb{R}$). Gọi I,J tương ứng là trung điểm của hai cạnh FG,FH. Tính khoảng cách d từ điểm F đến mặt phẳng (EIJ) theo a.

Bài tập 6: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Bài tập 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm các cạnh BC, SA và α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD). Tính $\tan\alpha$

Bài tập 8: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng bao nhiêu?

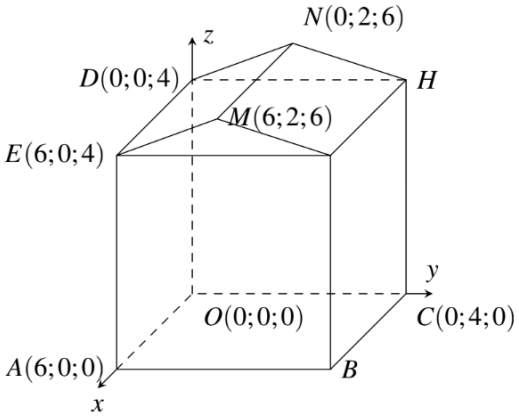
Bài tập 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết rằng $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Hãy tính sin α, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

Bài tập 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng $45°$. Gọi E là trung điểm BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC.

Bài tập 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

Bài tập 12: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh đáy bằng 1 và chiều cao bằng x. Tìm x để góc tạo bởi đường thẳng B_1D và (B_1D_1C) đạt giá trị lớn nhất.

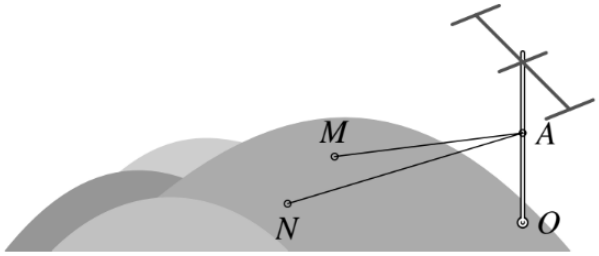
Bài tập 13: Một kĩ sư xây dựng thiết kế khung một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$ như hình dưới đây nhờ một phần mềm đồ họa máy tính.



a) Viết phương trình mặt phẳng mái nhà $(DEMN)$.

b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mái nhà $(DEMN)$.

Bài tập 14: Người ta muốn dựng một cột ăngten trên một sườn đồi. Ăngten được dựng thẳng đứng trong không gian $Oxyz$ với độ dài đơn vị trên mỗi trục bằng 1m. Gọi O là gốc cột, A là điểm buộc dây cáp vào cột ăngten và M, N là hai điểm neo dây cáp xuống mặt sườn đồi (hình vẽ).



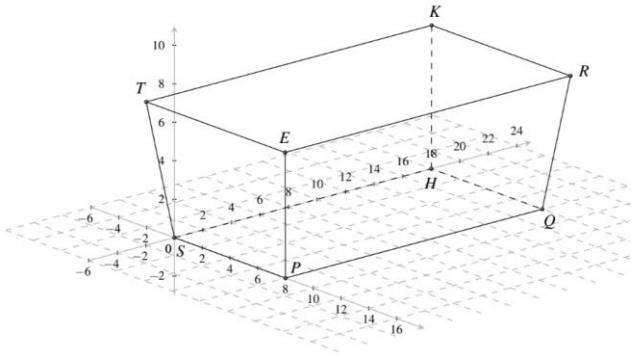
Cho biết tọa độ các điểm nói trên lần lượt là $O(0;0;0), A(0;0;6), M(3;-4;3)$, $N(-5;-2;2)$.

a) Tính độ dài các đoạn dây cáp MA và NA.

b) Tính góc tạo bởi các sợi dây cáp MA, NA với mặt phẳng sườn đồi.

Bài tập 15: Một khuôn nướng bánh mì được mô phỏng trong không gian $Oxyz$ như hình minh họa dưới đây với $S(0;0;0), P(8;0;0), Q(8;18;0), T(-1;-1;7), R(9;19;7)$. Tính góc giữa hai cạnh kề nhau, giữa cạnh bên và mặt đáy, giữa mặt bên và mặt đáy của khuôn.





BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=2a$, $OC=a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Khoảng cách giữa A_1B và B_1C bằng

A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{6}}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $4x-4y+2z-1=0$ và $2x-2y+z+1=0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó bằng

A. $V=\frac{1}{27}$. **B.** $V=\frac{1}{8}$. **C.** $V=\frac{1}{3\sqrt{3}}$. **D.** $V=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tam giác vuông với $AB=AC=2$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=3$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính khoảng cách giữa AM và BC.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt{22}}{11}$. **D.** $\frac{\sqrt{22}}{6}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $SB>2a$ và $ABC=BAS=BCS=90^0$. Biết sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{11}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Tính góc giữa CC' và mặt phẳng $(AB'C')$

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(C'AB)$ và $(BCC'B')$. Giá trị $\tan\alpha$ bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{4a}{3}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Câu 9: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, $AA'=a$ và góc $ABC=60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MO và $C'D$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}a$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}a$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{12}a$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$.

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q, lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD'. Thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB=a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Gọi D, E, F lần lượt là điểm đối xứng của A qua C, của S qua B và của A qua mặt phẳng (SBC). Thể tích của khối tứ diện $ADEF$ bằng

A. $\frac{2a^3}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên $SA=a$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM=2MD$. Hãy tính **cosin** của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC)?

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** 1.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và độ dài cạnh $SA=a$ và vuông góc với (ABC). Góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SBC) là α. Khi đó $\tan\alpha$ bằng:

A. 1. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$, $AA'=a\sqrt{3}$. Trên BB' lấy điểm N sao cho $BN=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(AC'N)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 15: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB=a, AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Khoảng cách từ điểm B đến $(AB'D')$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết $A(2;0;0)$, $B(0;1;0)$, $S(0;0;2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp $S.ABMN$.

A. $V=\sqrt{2}$. **B.** $V=2\sqrt{3}$. **C.** $V=3\sqrt{2}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 17: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, $C'D'$ và DD'. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$.

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

Câu 18: Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA=a$ và $OB=OC=2a$. Gọi P là trung điểm của BC (minh họa như hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng OP và AB bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. **C.** a. **D.** $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 19: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của BC. Biết góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy bằng $60°$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(AB'C)$ là

A. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=0\\y=2+t\\z=-t\end{cases}$ và $d:\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=1+t'\\z=-1+t'\end{cases}$. Biết rằng có một hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thỏa mãn A, C cùng thuộc Ox, B, C' cùng thuộc Δ và D, B' cùng thuộc d. Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $9\sqrt{2}$. **B.** $18\sqrt{2}$. **C.** 9. **D.** 18.

Câu 21: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy. Đường thẳng MN $(M\in A'C;\ N\in BC')$ là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC'. Tỷ số $\frac{NB}{NC'}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O. Biết rằng $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với m, n là các số dương và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $BDA'M$ bằng

A. $\frac{64}{27}$. **B.** $d(M;(P))=\frac{11\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{75}{32}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các điểm $A(1;2;0)$ $B(4;6;0)$, $D(-3;5;0)$. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$. Tính khoảng cách từ đường vuông góc chung của đường thẳng SI và BC đến đường thẳng AB.

A. $\frac{15}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 5. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 24: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng 3. Gọi I là điểm trên cạnh BB' sao cho $BI=\frac{1}{3}BB'$, điểm M di động trên cạnh AA'. Biết diện tích của tam giác MIC' nhỏ nhất khi tỷ số $\frac{AM}{AA'}=\frac{a}{b}(a\in\mathbb{N};b\in\mathbb{N}^*,(a,b)=1)$. $P=a+b$ là

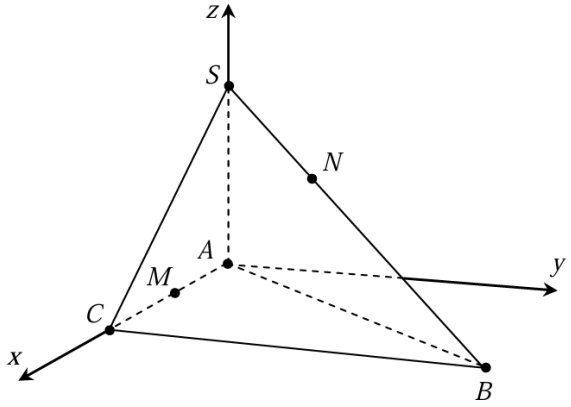
A. 4. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 25: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng 4. Gọi d là đường thẳng đi qua trọng tâm của tứ diện $EABD$, cắt đường thẳng AE tại M và song song với mặt phẳng (EBD). Tính AM.

A. $AM=1$. **B.** $AM=2$. **C.** $AM=3$. **D.** $AM=4$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SA=h$ và có đáy là tam giác ABC vuông tại C. Biết rằng $AC=b, BC=a$. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$ và được gắn vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ (với $A\equiv O$) như hình vẽ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



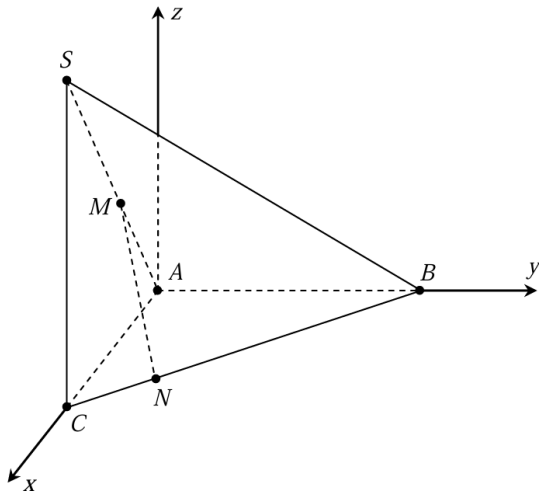
a) $A(0;0;0), C(b;0;0), B(b;a;0), S(0;0;h), M\left(\frac{b}{2};0;0\right)$

b) $\overrightarrow{SB}=(a;b;-h)$

c) $MN=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+4a^2+16h^2}$

b) Khi $4h^2=2a^2-b^2$ thì hai đường thẳng MN và SB vuông góc với nhau.

Câu 2: Cho tứ diện $S.ABC$ có $SC=CA=AB=a\sqrt{2}$ và $SC\perp(ABC)$. Biết rằng tam giác ABC là tam giác vuông tại A. Các điểm $M\in SA, N\in BC$ sao cho $AM=CN=t\ (0<t<2a)$. Gắn tứ diện vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A\equiv O$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



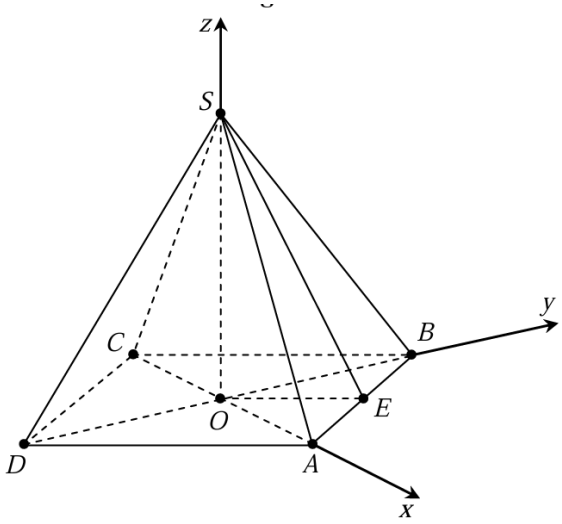
a) $A(0;0;0), B\left(0;a\sqrt{2};0\right), C\left(a\sqrt{2};0;0\right), S\left(a\sqrt{2};0;a\sqrt{2}\right)$

b) Tọa độ điểm $M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2};0;\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)$

c) Đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

d) Khi MN ngắn nhất thì MN là đường vuông góc chung của BC và SA

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy a và mặt bên tạo với đáy góc α. Chọn hệ trục $Oxyz$ có O là tâm đáy $ABCD$, tia Ox chứa A, tia Oy chứa B, tia Oz chứa S. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



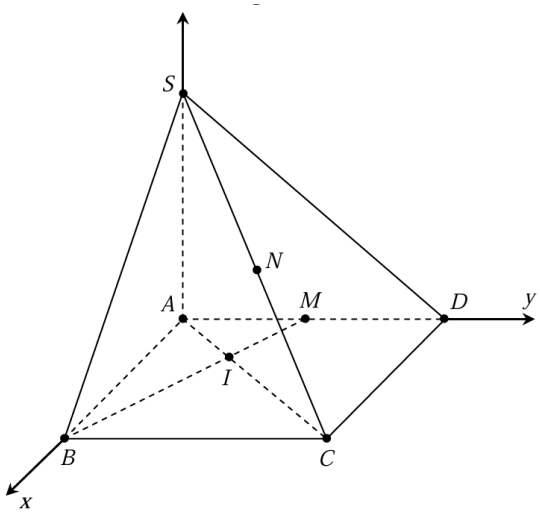
a) $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), S\left(0;0;\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

b) $\overrightarrow{SA}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;-\frac{a}{2}\tan\alpha\right), \overrightarrow{SB}=\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

c) $\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;-\frac{a}{2}\tan\alpha\right), \overrightarrow{SD}=\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

d) Để hai đường thẳng $SA\perp SC$ vuông góc với nhau thì $\tan\alpha=\sqrt{3}$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB=a, AD=a\sqrt{2}, SA=a$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SC. Gọi I là giao điểm BM và AC. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $S(0;0;a), A(0;0;0), B(a;0;0), C\left(a;a\sqrt{2};0\right)$

b) $I\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right), \overrightarrow{BM}\left(-a;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), \overrightarrow{BS}(-a;0;a)$

c) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là $\left(-a^2\sqrt{2};a;0\right)$

d) Thể tích tứ diện $ANIB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$ (đvtt)

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-2;1)$ với tốc độ $4,5$ m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).



a) Phương trình tham số của đường cáp là: $\begin{cases} x=10+2t \\ y=3-2t \\ z=t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

b) Giả sử sau thời gian t (s) kể từ lúc xuất phát $(t\geq 0)$ thì cabin đến điểm M. Khi đó tọa độ điểm M là $M\left(3t+10;-3t+3;\frac{3t}{2}\right)$.

c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B=550$, khi đó quãng đường AB dài 800 m.

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc $30°$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh có cạnh bằng a và SA vuông góc với đáy. Khi $a=2$, hãy tính độ dài cạnh SA để góc tạo bởi (SBC) và (SCD) bằng $60°$.

Câu 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên hai tia Bx, Dy vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và cùng chiều lần lượt lấy hai điểm M,N sao cho $BM=\frac{a}{4}; DN=2a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AMN) và (CMN).

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan\alpha=\sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng bao nhiêu?

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, thỏa mãn điều kiện, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC). *(Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*

Câu 5: Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$. Cho biết trục d của nòng súng có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$ và hồng tâm $A(8;-19;6m+4)$. Hỏi m bằng bao nhiêu vận động viên có bắn trúng hồng tâm.



Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo ở Bà Nà Hill xuất phát từ điểm $A(-2;1;5)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (0;-2;6)$ với tốc độ là 4 m/s (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Giả sử sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm M. Gọi tọa độ $M(a;b;c)$. Tính $a+3b+c$.

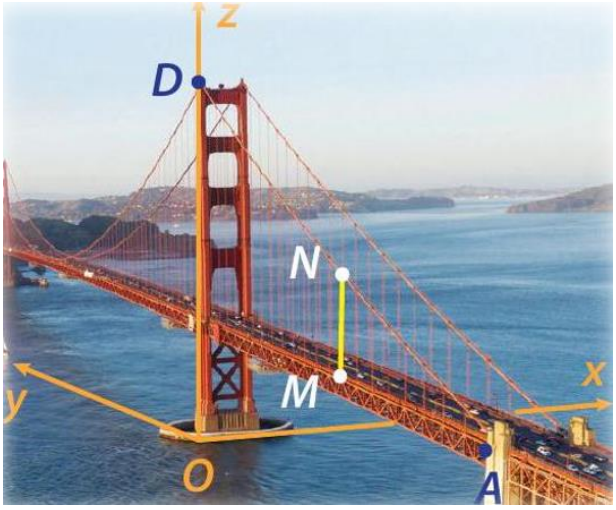


Câu 7: Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$. Khi du khách khi ở độ cao 12 mét thì tọa độ của du khách lúc đó là $M(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a+b+c$



Câu 8: Cầu Cổng Vàng *(The Golden Gate Bridge)* ở Mỹ. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz, trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227 m, điểm A cách mặt nước 75 m và cách trục Oz 343 m.

Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước 75 m và MN song song với cột trụ.



(Nguồn ảnh: https://www.goldengate.org/assets/1/6/ggb-exhibit-chapter-statistics.pdf).

Tính độ dài MN, biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 230 m (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)

----------HẾT----------

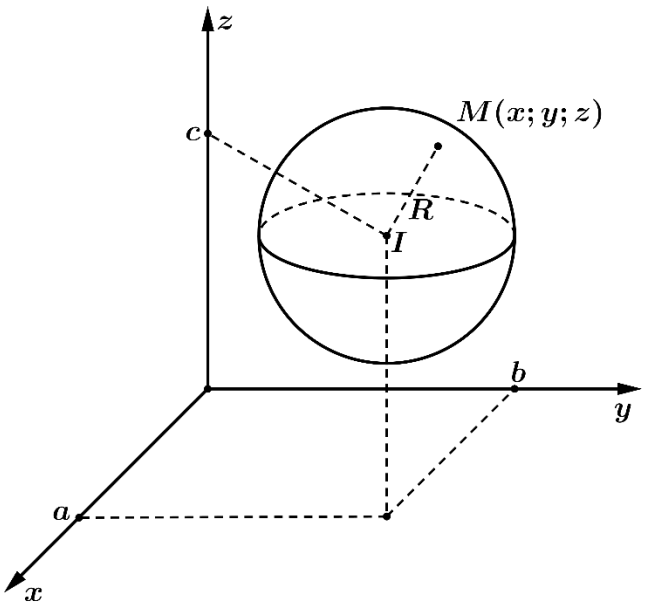
BÀI 03 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Trong không gian, tập hợp tất cả các điểm M cách điểm I cố định một khoảng không đổi là $R\,(R>0)$ cho trước được gọi là mặt cầu tâm I bán kính R. Kí hiệu là $S(I;R)$ hay viết tắt là (S).

Vậy $S(I;R)=\{M \mid IM=R\}$



Chú ý:

- Điểm $M(x;y;z)$ nằm trong mặt cầu (S) nếu $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2<R^2$.
- Điểm $M(x;y;z)$ nằm trên mặt cầu (S) nếu $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=R^2$.
- Điểm $M(x;y;z)$ nằm ngoài mặt cầu (S) nếu $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2>R^2$.

2 Phương trình mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính R.

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=R^2$.

Phương trình mặt cầu dạng khai triển là $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định các yếu tố cơ bản của mặt cầu trong không gian

Loại 1: Cho (S) là: $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=R^2$. Khi đó:

- Tâm $I(a;b;c)$ (đổi dấu số trong dấu ngoặc)
- Bán kính R (rút căn vế phải)

Loại 2: Cho (S) là: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Khi đó:

- Điều kiện để phương trình trên là mặt cầu là $a^2+b^2+c^2-d>0$
- Tâm $I(a;b;c)$ (đổi dấu hệ số của x,y,z và chia đôi)
- Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+z^2=9$. Xác định tâm và bán kính của (S).

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+2x-2y+8z-18=0$. Xác định tâm, bán kính của (S).

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2+y^2+z^2-2x-5z+30=0$.

b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z=0$.

c) $x^3+y^3+z^3-2x+6y-9z-10=0$.

d) $x^2+y^2+z^2+5=0$.

e) $3x^2+2y^2+z^2-2x-2y+2z+1=0$

f) $x^2+y^2-2x+6y-8z-3=0$

g) $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+10=0$

h) $2x^2+2y^2+2z^2+12x+4y-8z+20=0$

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(2;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 1. Hỏi vị trí $M(2;1;1)$ có thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên hay không?

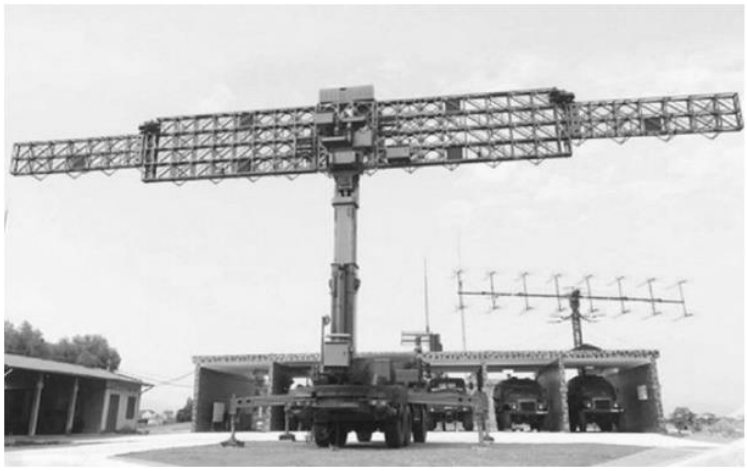


Bài tập 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilomet), một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1;2;1)$ và được thiết kế bán kinh phủ sóng 5000 mét.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian?

b) Nhà bạn Diệp Chi, và Tuệ Nhi có vị trí tọa độ lần lượt là $A(3;2;-1)$ và $B(4;-3;5)$. Hỏi Diệp Chi và Tuệ Nhi dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

Bài tập 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilomet), một trạm phát sóng rađa của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa 500 kilomet.



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian?

b) Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ $M(-200;100;-250)$ và $N(350;-100;300)$. Hỏi hai chiếc máy bay đó có bị rađa phát hiện hay không?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=16$, bán kính R của mặt cầu là

A. $R=4$. **B.** $R=16$. **C.** $R=0$. **D.** $R=2$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$. Xác định toạ độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(3;-1;2), R=2.$ **B.** $I(-3;1;-2), R=2.$ **C.** $I(-3;1;-2), R=4.$ **D.** $I(3;-1;2), R=4.$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-2=0$. Xác định toạ độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(1;2;-1), R=2\sqrt{2}.$ **B.** $I(-1;-2;1), R=2\sqrt{2}.$

C. $I(2;4;-2), R=\sqrt{2}.$ **D.** $I(2;4;2), R=8.$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$. Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

A. $I(-1;2;-3)$; $R=3$. **B.** $I(1;2;-3)$; $R=9$. **C.** $I(1;-2;3)$; $R=9$. **D.** $I(1;2;-3)$; $R=3$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình của một mặt cầu?

A. $(S): x^2+y^2-z^2-4x+2y+2z-3=0$. **B.** $(S): x^2+2y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$.

C. $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$. **D.** $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+8=0$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2z-6y-2=0$ là phương trình của mặt cầu có tâm I. Xác định tọa độ tâm I

A. $I(2;-1;3)$. **B.** $I(2;3;-1)$. **C.** $I(2;-3;1)$. **D.** $I(2;1;-3)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là

A. $I(2;2;-1)$. **B.** $I(-2;-2;1)$. **C.** $I(-2;2;-1)$. **D.** $I(4;4;-2)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-\sqrt{2}x+y-z-1=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. 3. **B.** 2. **C.** $R=\sqrt{2}$. **D.** $R=\sqrt{3}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có phương trình: $(x-a)^2+y^2+(z-c)^2=16$ đi qua hai điểm O và $M(1;0;1)$. Tính $a+c$

A. $a+c=4$. **B.** $a+c=16$. **C.** $a+c=1$. **D.** $a+c=0$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-2x+4z-1=0$ **B.** $x^2+z^2+3x-2y+4z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2xy-4y+4z-1=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+8=0$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0$. **B.** $2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0$.

C. $2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các phương trình sau phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+2y^2+2z^2-2x+4z-1=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2+3x-2y+4z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z-1=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-8=0$

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

A. $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$ **B.** $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$

C. $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$ **D.** $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+5=0$

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y=0$ **B.** $x^2+2y^2+z^2-2x+4y-2z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2-2x+2y+3=0$. **D.** $x^2+y^2-z^2-2x+2y-4z+8=0$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-x+6z+16=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-6y+8z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z+13=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+9=0$

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2-z^2-2x+4y+4z+5=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-2=0$

C. $x^2+y^2+z^2+x-2y+3=0$. **D.** $x^2-y^2+z^2-2x+6y-8z+1=0$

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-2=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=6$

C. $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2y+4xz+2=0$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(6;5;4)$ và mặt cầu (S) đi qua M, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy). Gọi R là bán kính của mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của R là

A. 3. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** 4. **D.** 2.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường kính mặt cầu bằng 8.

b) Mặt cầu (S) đi qua điểm $A(-1;3;0)$.

c) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (Oyz) bằng 2.

d) Mặt phẳng (P) có phương trình $x+2y-2z-2=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2), B(1;0;3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Ox và đi qua hai điểm A, B. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) có dạng $I(a;0;0)$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là $R=9$.

c) Mặt cầu (S) có phương trình là $:(x-1)^2+y^2+z^2=9$.

d) Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $P=MA^2+MB^2+MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T=x+y+z=2$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(10;20;30)$ với bán kính phủ sáng là 3 km. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là

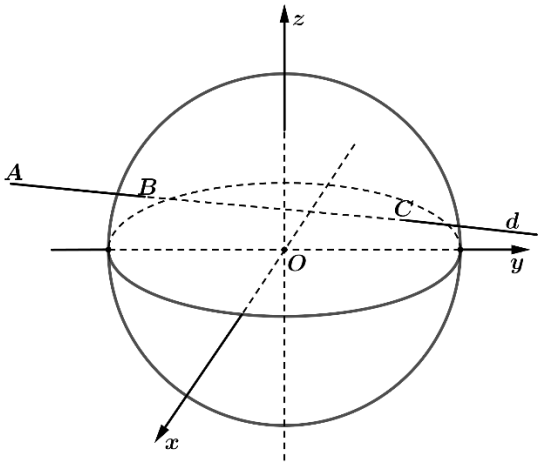
$$(x-10)^2+(y-20)^2+(z-30)^2=3000^2.$$

b) Người đi biển ở vị trí $A(50;20;0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Người đi biển ở vị trí $B(4030;50;40)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Câu 4: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay đang chuyển động với vận tốc 900 km/h theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=-1000+100t \\ y=-300+80t \\ z=100\sqrt{11} \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Ranh giới vùng phát sóng bên ngoài của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng $300\,km$.

b) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2+y^2+z^2=360000$.

c) Máy bay đang chuyển động theo đường thẳng d đến vị trí điểm $M\left(-500;100;100\sqrt{11}\right)$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Thời gian kể từ khi đài kiểm soát không lưu phát hiện may bay đến khi máy ra khỏi vùng kiểm soát không lưu là $\frac{4}{3}$ giờ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $I(0;2;3)$. Tính bán kính mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua hai điểm $A(3;-1;2), B(1;1;-2)$ và có tâm thuộc trục Oz. Bán kính của mặt cầu (S) là R. Giá trị R^2 bằng?

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$, $B(-3;-2;-5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2+BM^2=30$ là một mặt cầu (S). Tìm bán kính R của mặt cầu (S).

Câu 4: Cho hai điểm A,B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA=3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$ và I là hình chiếu vuông góc của $M(3;1;2)$ trên trục Ox. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và đi qua điểm M. Độ dài bán kính mặt cầu bằng bao nhiêu?

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm là điểm $A(1;2;-3)$ và đi qua điểm $B(3;-2;1)$. Gọi $M(1;b;-3)$ là điểm thuộc mặt cầu biết $b\in\mathbb{N}^*$. Tung độ điểm M có giá trị bằng bao nhiêu?

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;-4;3)$ và tiếp xúc với trục Ox. Bán kính của mặt cầu trên bằng bao nhiêu?

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox. Hoành độ của tâm mặt cầu (S) bằng bao nhiêu?

Câu 9: Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$ và có đúng một điểm chung với mặt phẳng (Oxy). Gọi một giao điểm của mặt cầu (S) với trục Oz là $A(a;b;c)$ $(c>1)$. Tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

----------HẾT----------

Dạng 2: Viết phương trình mặt cầu

Phương pháp: Cần xác định được tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và độ dài bán kính r.

Các bài toán cơ bản:

Bài toán 1: Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và đi qua điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ thì bán kính

$$r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 + (z_A - z_I)^2}$$

Bài toán 2: Mặt cầu (S) có đường kính AB thì

- Tâm $I(a;b;c)$ là trung điểm của AB hay $I\left(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2};\frac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Bán kính $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{2}$

Bài toán 3: Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ thì bán kính

$$r = d\left(I,(\alpha)\right) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Bài toán 4: Mặt cầu qua bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng (hay gọi là ngoại tiếp tứ diện $ABCD$). Gọi (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ $(*)$

- Thay tọa độ 4 điểm A,B,C,D vào $(*)$ thì ta được hệ phương trình với 4 ẩn số a,b,c,d
- Giải tìm a,b,c,d.
- Suy ra tâm $I(a,b,c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Viết phương trình mặt cầu (S):

a) có tâm $I(7;-3;0)$, bán kính $R = 8$

b) có tâm $M(3;1;-4)$ và đi qua điểm $N(1;0;1)$

c) có đường kính AB với $A(4;6;8)$ và $B(2;4;4)$

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $A(1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục Ox.

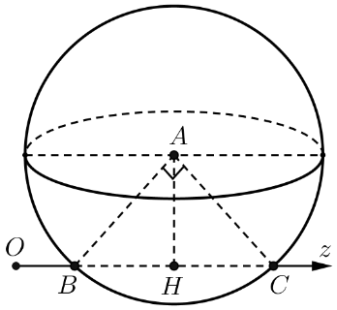
Bài tập 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(6;0;0), B(0;4;0)$ và $C(0;0;2)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Bài tập 5: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz) và đi qua các điểm $A(0;8;0), B(4;6;2), C(0;12;4)$.

Bài tập 6: Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $A(1;4;-3)$ và chứa trục Ox. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Bài tập 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hãy viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(-2;3;3), B(-1;1;2), C(4;2;2)$ và có tâm nằm thuộc mặt phẳng (Oyz).

Bài tập 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-4;5)$. Viết phương trình của mặt cầu tâm là A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho ΔABC vuông.



Bài tập 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=t \\ y=-1-2t \\ z=2-2t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ sao cho tiếp xúc với (P).

Bài tập 10: Phần mềm mô phỏng thiết bị thám hiểm đại dương có dạng hình cầu trong không gian $Oxyz$. Cho biết tọa độ tâm mặt cầu là $I(360;200;400)$ và bán kính $r=2m$. Viết phương trình mặt cầu.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;1;0)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=8$. **D.** $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=2$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;0;-1)$ và $A(2;2;-3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;0;-1)$ và $A(2;2;-3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$.

Câu 4: Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$ là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3$

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+5=0$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu đường kính AB với $A(0;-3;2)$, $B(2;1;-2)$ có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=3$.

C. $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;2)$ và bán kính $R=3$.

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=9$. **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=3$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$. **D.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(4;-4;2)$ và đi qua gốc tọa độ có phương trình là

A. $(x+4)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=6$. **B.** $(x+4)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=36$.

C. $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=36$. **D.** $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=6$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm $I(2;-1;3)$ và đi qua điểm $A(1;2;-1)$ là

A. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=26$. **B.** $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=26$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=26$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\sqrt{26}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x-2y-z+12=0$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. **B.** $x^2+y^2+(z+3)^2=5$.

C. $x^2+y^2+(z-3)^2=25$. **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

Câu 10: Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$ là:

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+5=0$.

Câu 11: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và bán kính $R=4$ có phương trình là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$. **B.** $(x+1)^2+y^2+(z+2)^2=16$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=4$. **D.** $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=16$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt cầu có đường kính AB với $A(2;1;0)$ và $B(0;1;2)$ là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$. **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=2$.

C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=2$ là

A. $x^2+2y^2+3z^2=4$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. **D.** $(x-1)^2-(y+2)^2+(z-3)^2=4$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(0;1;-2)$ và đi qua điểm $M(1;0;-1)$ có phương trình là:

A. $x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$.

C. $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$. **D.** $x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. **B.** $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=13$. **D.** $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và đi qua điểm $A(0;4;-1)$ là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=5$. **B.** $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

C. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=25$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(3;4;0)$, $B(2;5;4)$, $C(-1;1;1)$, $D(3;5;3)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó

A. $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=9$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20: Mặt cầu tâm $I(5;3;-2)$ và đi qua điểm $A(3;-1;2)$ có phương trình

A. $(x-5)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=36$. **B.** $(x-5)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=6$.

C. $(x+5)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=36$. **D.** $(x+5)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=6$..

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x-y-z+2=0$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x+2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$. **D.** $(x+2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-2)$, $B(3;-1;4)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\sqrt{14}$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=14$.

C. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=\sqrt{14}$. **D.** $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=14$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;-3;4)$ và $B(3;-1;2)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=6$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=24$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=24$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=6$.

Câu 24: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;1)$. Phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) là

A. $(S):(x+2)^2+y^2+z^2=1$. **B.** $(S):(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=5$.

C. $(S):(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=4$. **D.** $(S):(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Câu 25: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với trục Oz là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=5$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với tọa độ các điểm $A(2;0;-1)$, $B(0;-2;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=24$. **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=24$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, $A(-3;\ 4;\ 2)$, $B(-5;\ 6;\ 2)$, $C(-10;\ 17;-7)$. Viết phương trình mặt cầu tâm C, bán kính AB.

A. $(x+10)^2+(y-17)^2+(z-7)^2=8$. **B.** $(x+10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$.

C. $(x-10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$. **D.** $(x+10)^2+(y+17)^2+(z+7)^2=8$.

Câu 28: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$, $B(0;2;3)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

A. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$. **B.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$.

C. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$. **D.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=\frac{5}{4}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;0), B(0;3;-4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu đường kính AB

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu đường kính AB với $A(0;1;2)$ và $B(4;5;-4)$ có phương trình là

A. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=68$. **B.** $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=\sqrt{68}$.

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$. **D.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\sqrt{17}$.

Câu 31: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+1=0$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$.

Câu 32: Cho mặt cầu (S) đi qua $A(3;1;0)$, $B(5;5;0)$ và có tâm I thuộc trục Ox. Mặt cầu (S) có phương trình là

A. $(x+10)^2+y^2+z^2=5\sqrt{2}$. **B.** $(x-10)^2+y^2+z^2=5\sqrt{2}$.

C. $(x-10)^2+y^2+z^2=50$. **D.** $(x+10)^2+y^2+z^2=50$.

Câu 33: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(5;4;7)$. Phương trình mặt cầu nhận AB làm đường kính là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=17$. **B.** $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=17$.

C. $(x-5)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=17$. **D.** $(x-6)^2+(y-2)^2+(z-10)^2=17$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-1=0$. Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$.

Câu 35: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-3;4;2)$, $B(-5;6;2)$ và $C(-10;17;-7)$. Phương trình mặt cầu tâm C bán kính AB là

A. $(x+10)^2+(y-17)^2+(z-7)^2=8$. **B.** $(x+10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$.

C. $(x-10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$. **D.** $(x+10)^2+(y+17)^2+(z+7)^2=8$.

Câu 36: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Hãy viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).

A. $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=13$.

C. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$. **D.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;1;-2)$. Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Ox là

A. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5$. **B.** $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=25$.

C. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=5$. **D.** $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=25$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(6;2;-5), N(-4;0;7)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính MN?

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=62$. **B.** $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+6)^2=62$.

C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=62$. **D.** $(x+5)^2+(y+1)^2+(z-6)^2=62$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):4x-y+2z-5=0$ có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\dfrac{16}{21}$. **B.** $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\dfrac{16}{21}$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=\dfrac{16}{441}$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\dfrac{16}{441}$.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Xét (S) là mặt cầu tâm I và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5. Phương trình của (S) là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho đường tròn (C) tâm O có bán kính bằng 2 và nằm trong mặt phẳng (xOy). Tìm phương trình mặt cầu chứa đường tròn (C) và đi qua điểm $A(0;0;-4)$.

A. $x^2+y^2+z^2=\dfrac{25}{4}$. **B.** $x^2+y^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$.

C. $x^2+y^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. **D.** $x^2+y^2+(z+4)^2=1$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho đường tròn (C) có bán kính bằng 4 nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tâm là gốc tọa độ O. Hãy viết phương trình mặt cầu chứa đường tròn (C) đồng thời cắt trục Oz tại điểm $A(0;0;8)$.

A. $x^2+y^2+(z-4)^2=16$ **B.** $x^2+y^2+z^2=64$.

C. $(x-4)^2+(y-4)^2+(z-8)^2=32$. **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=25$

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{2}$; $d_2:\frac{x+8}{2}=\frac{y-6}{1}=\frac{z-10}{-1}$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với $d_1;d_2$ và có bán kính nhỏ nhất. Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $x^2+(y-10)^2+(z-6)^2=35$. **B.** $(x-2)^2+y^2+z^2=35$.

C. $(x-2)^2+(y-10)^2+(z-6)^2=35$. **D.** $(x-1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=35$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;2)$. Gọi M,N,K là hình chiếu vuông góc của A lên ba trục tọa độ. Mặt cầu tâm O tiếp xúc với mặt phẳng (MNK) có phương trình là:

A. $x^2+y^2+z^2=6$. **B.** $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{3}$. **C.** $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{9}$. **D.** $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{9}$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có các đỉnh $S(1;2;-2), A(-1;0;-2)$, $C(3;-4;0)$. Tam giác ABC vuông tại B có độ dài cạnh $BC=3\sqrt{3}$ đồng thời mặt đáy (ABC) vuông góc với mặt bên (SAC). Gọi I là trung điểm của AC. Mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (SBC) có phương trình là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{18}{17}$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{72}{17}$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{18}{11}$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{72}{11}$.

Câu 46: Một vệ tinh quay quanh Trái Đất với độ cao so với mặt đất là 18900 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là tâm Trái Đất, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6300 km trên thực tế. Biết bán kính Trái Đất khoảng 6300 km. Phương trình biểu diễn quỹ đạo chuyển động của vệ tinh đó là

A. $x^2+y^2+z^2=4$. **B.** $x^2+y^2+z^2=16$. **C.** $x^2+y^2+z^2=2$. **D.** $x^2+y^2+z^2=5$.

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là cm), mặt sàn nhà đa năng thuộc mặt phẳng Oxy. Một quả cầu bằng nhựa nằm trên mặt sàn nhà đa năng và có tâm $I(12;20;50)$. Khi đó, mặt ngoài của quả cầu nhựa (S) có phương trình là:

A. $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=12^2$. **B.** $(x+12)^2+(y+20)^2+(z+50)^2=12^2$.

C. $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=20^2$. **D.** $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=50^2$.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(1;5;5)$ như hình vẽ. Ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sáng là 5 km.



Một người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(1;5;5)$ đến vị trí $A(7;14;11)$. Điểm nào sau đây mà người đi biển đi qua và vẫn thuộc vùng phủ sáng của ngọn hải đăng?

A. $M(3;8;7)$. **B.** $N(0;4;8)$. **C.** $P(7;3;0)$. **D.** $Q(7;11;3)$.

Câu 49: Một máy Rađa có tầm hoạt động với bán kính tối đa là 20 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là vị trí máy Rađa, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 10 km trên thực tế. Hỏi trong không gian $Oxyz$ trên, vật thể có tọa độ tương ứng với đáp án nào dưới đây sẽ bị Rađa phát hiện?

A. $M(1;0;2)$. **B.** $N(2;-1;1)$. **C.** $P(1;1;\sqrt{2})$. **D.** $Q(3;0;0)$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3;-2;1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2;-5;0)$ trên đường băng. Có một đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=16$ tại $M\left(\frac{10}{9};-\frac{25}{9};\frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy))

A. $\frac{3}{5}$ km. **B.** $\frac{4}{5}$ km. **C.** $\frac{1}{5}$ km. **D.** $\frac{2}{5}$ km.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{2}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;0)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB=8$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(3;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $x+2y+2z-7=0$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông của I lên d. Khi đó $H(1;-1;2)$.

c) Mặt cầu (S) có bán kính $R=5$.

d) Phương trình mặt cầu (S): $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=25$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$.

b) Điểm A nằm trong mặt cầu (S).

c) Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính bằng $\sqrt{6}$.

d) Điểm M thay đổi thuộc (S), giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2 bằng 5.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;1;1), B(1;0;-3), C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có bán kính $R=2$.

b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $2x-2y+z-1=0$.

c) Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

d) Điểm $D(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất. Khi đó, $a+b+c=\frac{2}{3}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Biết mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có diện tích là 25π. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Bán kính đường tròn (C) là $r=5$.

b) Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là 3.

c). Tâm đường tròn (C) có tọa độ là $H(1;3;1)$.

d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=3$.

b) Điểm $M(1;3;5)$ nằm trong mặt cầu.

c) Mặt phẳng $(P): x+2y-2z+8=0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=2$.

d) Đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=3-t\end{cases}$ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B. Khi đó, diện tích tam giác IAB là: $\frac{\sqrt{182}}{3}$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ cắt đường thẳng $(d):\dfrac{x-11}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+25}{-2}$ tại hai điểm A,B sao cho $AB=16$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-2)$.

b) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(5;-3;-31)$.

c) Mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $2x+y-2z-9=0$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=225$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và điểm $M(-1;0;2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có bán kính là $R=IM=\sqrt{3}$.

b) Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có phương trình là

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9.$$

c) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M là $-2x+2y-z=0$.

d) Phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho độ dài đoạn $AB=2\sqrt{3}$ là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S_1) tâm A, bán kính $R=1$ có phương trình là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$.

b) Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $\sqrt{50}$.

c) Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính có phương trình là

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

d) Bán kính R của mặt cầu (S_4) đi qua ba điểm A,B,C và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) là $R=\sqrt{26}$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0),B(1;3;0),C(-1;0;3),D(1;2;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu $(S):(x-2)^2+y^2+z^2=25$ có tâm là điểm A.

b) Mặt cầu (S) tâm O bán kính OA có phương trình $(S):x^2+y^2+z^2=4$.

c) Mặt cầu (S) đường kính AC có phương trình $(S): \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+z^2=\frac{9}{2}$.

d) Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bánh kính $R=6$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu là $(1;0;-2)$.

b) Diện tích mặt cầu bằng $16\pi(dvdt)$.

c) Điểm $A(1;2;3)$ nằm trong mặt cầu.

d) Số điểm chung của đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu (S) bằng 0.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=5$ và hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-1)$.

b) $|R-d|<2$ với d là khoảng cách từ tâm I mặt cầu (S) đến mặt phẳng $(P): x+y+1=0$.

c) Đường thẳng AB không cắt mặt cầu (S).

d) Điểm M thay đổi thuộc (S), biểu thức $2MA^2+3MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 105 (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=169$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có đường kính bằng 13.

b) Diện tích mặt cầu $S_{mc}=338\pi$.

c) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-39=0$.

d) Mặt cầu (S) cắt trục Oz tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=24$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1;3;7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

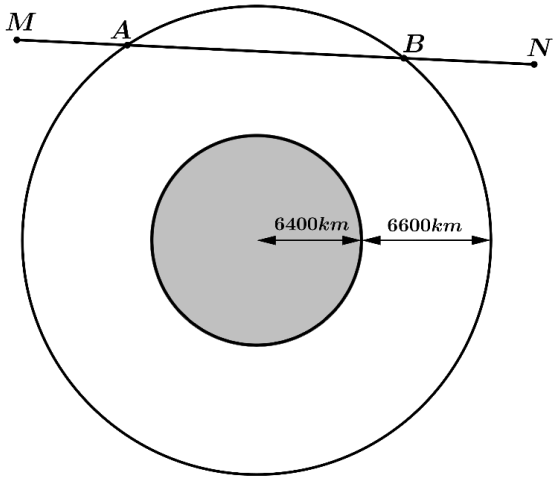
a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phù sóng trong không gian là $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+7)^2=9$.

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí điểm $A(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét là 8 km.

Câu 14: Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7 500 000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6 600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6 400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6;20;0)$ đến điểm $N(-6;-12;16)$.



a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 6+3t \\ y = 20+8t \\ z = -4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3;-4;12)$.

c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18 900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị km).

d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm $M(1;0;1)$, $N(1;0;0)$, $P(2;1;0)$ và $Q(1;1;1)$ có dạng $\frac{\sqrt{a}}{b}$; $a,b \in \mathbb{N}$ và nguyên tố cùng nhau. Khi đó giá trị của biểu thức $S = a^b$ bao nhiêu?

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ nằm trên đường thẳng $(d): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): 2x - z - 4 = 0$, $(Q): x - 2y - 2 = 0$. Tổng $P = a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Diện tích của mặt cầu đó có kết quả bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trục)

Câu 4: Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-3}{3}$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt trong đó $M(x_M;y_M;z_M)$ với $x_M>0$ Giá trị biểu thức $T=x_M^2+y_M^2+z_M^2$ bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Câu 5: Cho 3 điểm $M(2;3;3),N(2;-1;-1),P(-2;-1;3)$ và mặt phẳng $(\alpha):2x+3y-z+2=0$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm M,N,P và có tâm thuộc mặt phẳng (α) có bán kính bằng bao nhiêu?

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x-2y-z-8=0$ có phương trình $(C):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c+2d$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;2)$ và có một tiếp tuyến là đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Tính $T=a+b+c-d$.

Câu 8: Trong không gian với tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(C):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=11$. Đường thẳng d là tiếp tuyến của mặt cầu (C) tại điểm $A(2;1;0)$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=(-1;b;c)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. Tính giá trị $b+c$ (kết quả làm tròn đến hang phần trăm).

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(-2;0;0)$; $B(0;-2;0)$; $C(0;0;-2)$. D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc. $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tứ diện $ABCD$. Tính $S=a+b+c$.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(-2;3;0)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-3}{2}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=8$. Tính bán kính của mặt cầu (S).

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, một vòm được thiết kế có bề mặt là mặt cầu tâm $I(1;2;20)$, bán kính bằng $50\,\text{m}$ và có đáy nằm trên mặt phẳng (Oxy). Chiều cao của vòm là bao nhiêu? (biết đơn vị của hệ trục tọa độ là mét)



Câu 12: Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật trong không gian. Cách thức hoạt động của GPS như sau: Trong cùng một thời điểm, vị trí M

của một vật sẽ được xác định bằng 4 vệ tinh cho trước, các vệ tinh này có gắn máy thu tín hiệu, bằng cách so sánh thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận tín hiệu phản hồi thì sẽ xác định được khoảng cách từ các vệ tinh đến vị trí M. Như vậy, vị trí M là giao điểm của 4 mặt cầu có tâm là 4 vệ tinh đã cho. Giả sử trong không gian $Oxyz$, 4 vệ tinh có tọa độ là $A(-1;6;3)$, $B(4;8;1)$, $C(9;6;7)$, $D(-15;18;7)$. Biết khoảng cách từ M đến các vệ tinh lần lượt là $MA=6$, $MB=7$, $MC=12$, $MD=24$. Khi đó tọa độ điểm $M(x_M;y_M;z_M)$. Tính giá trị biểu thức $T=x_M+y_M+z_M$.

----------HẾT----------

Dạng 3: Vị trí tương đối liên quan đến mặt cầu và ứng dụng thực tế

Phương pháp: Có ba trường hợp như sau:

Mặt cầu

Mặt phẳng	Tính $d\left(I;(P)\right)=\dfrac{\left\|ax_I+by_I+cz_I+d\right\|}{\left\|\vec{n}_{(P)}\right\|}$ và so sánh với bán kính R	
	$d\left(I;(P)\right)>R$	Mặt phẳng không cắt mặt cầu
	$d\left(I;(P)\right)=R$	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại M
	$d\left(I;(P)\right)<R$	Mặt phẳng cắt mặt cầu
Đường thẳng	Tính $d\left(I;d\right)=\dfrac{\left\|\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ và so sánh $d\left(I;(P)\right)>R$ với bán kính R	
	$d\left(I;d\right)>R$	Đường thẳng không cắt mặt cầu
	$d\left(I;d\right)=R$	Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu
	$d\left(I;d\right)<R$	Đường thẳng cắt mặt cầu
Điểm	Tính IM và so sánh với bán kính R	
	$IM>R$	Điểm M nằm ngoài mặt cầu
	$IM=R$	Điểm M nằm trên mặt cầu
	$IM<R$	Điểm M nằm trong mặt cầu

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+3y+z+17=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-8=0$. Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Bài tập 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+4=0$. Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

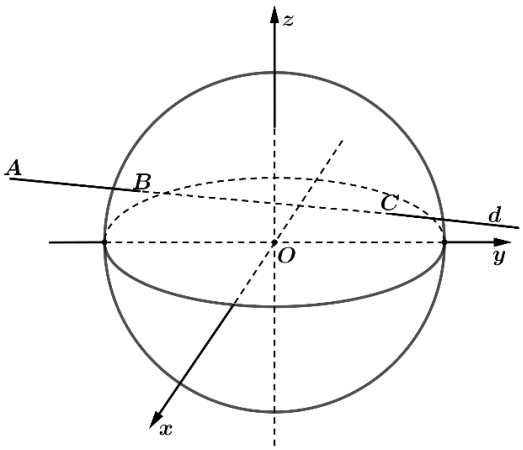
Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ và đường thẳng có phương trình $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$. Tìm vị trí tương đối của đường thẳng Δ và mặt cầu (S)

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=4+2t\\y=3+t\\z=3+2t\end{cases},t\in\mathbb{R}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;0)$ và đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn thẳng $AB=8$.

Bài tập 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{-5}$ và $d':\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d),(d')$.

Bài tập 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M,N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

Bài tập 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688;-185;8)$, chuyển động theo theo đường thẳng d có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu. Hãy xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.

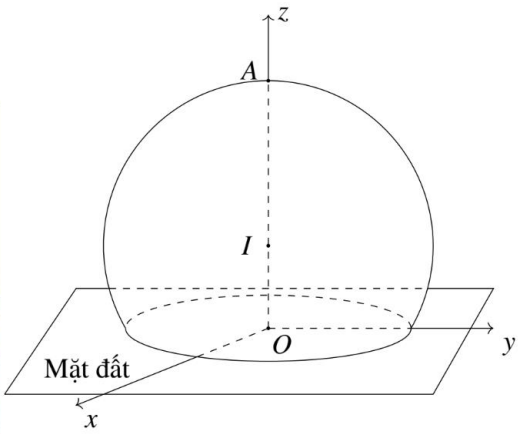


Bài tập 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21;35;50)$ và ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km. Nếu người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(21;35;50)$ đến vị trí $D(5121;658;0)$. Hãy tìm vị trí cuối cùng trên đoạn ID sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng (kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai).

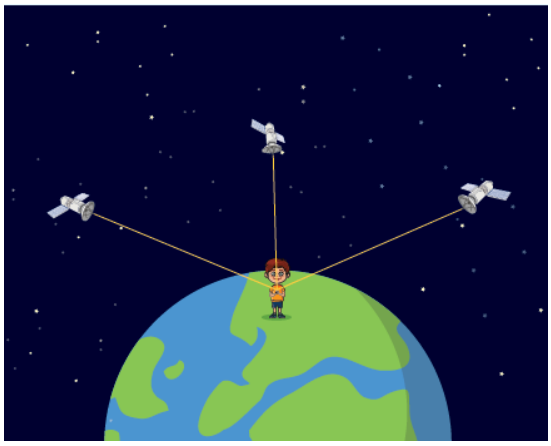


Bài tập 9: Ericsson Globe (Thuỵ Điển) là toà nhà bán cầu lớn nhất trên thế giới (năm 2020),với hình dạng một quả cầu màu trắng có đường kính 110 m và chiều cao bên trong 85 m, nó có đủ chỗ ngồi cho 16 000 khán giả của các buổi biểu diễn hoà nhạc hoặc 13 850 khán giả của các trận đấu khúc côn cầu trên băng. Giả sử ta biểu diễn mô phỏng của toà nhà Ericsson Globe trong hệ trục toạ độ *Oxyz* bởi một mặt cầu có tâm *I*, đường kính 110 m và *OA* = 85 m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.





Bài tập 10: Giả sử Trái Đất có dạng hình cầu bán kính bằng $6,4.10^6$ m. Bạn An đang đứng trên mặt đất. Có 3 vệ tinh báo về máy chủ tiếp nhận thông tin rằng vệ tinh thứ nhất đang cách An 3.10^6 m, vệ tinh thứ hai đang cách An 4.10^6 m và vệ tinh thứ ba đang cách An 5.10^6 m. Biết rằng trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước với O là tâm Trái Đất (1 đơn vị $=10^6$ m), tại thời điểm vệ tinh thông báo về máy chủ thì toạ độ của các vệ tinh lần lượt là $I_1(4;4;6)$, $I_2(8;4;3)$ và $I_3(4;9;3)$. Hãy tìm tọa độ vị trí của bạn An (làm tròn đến hàng đơn vị).



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Trong ba điểm có tọa độ lần lượt là $(0;0;0),(1;2;3),(2;0;6)$ thì có bao nhiêu điểm nằm trên mặt cầu (S)?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Trong ba điểm có tọa độ lần lượt là $(0;0;0)$, $(1;2;3)$ và $(2;0;6)$ thì có bao nhiêu điểm nằm trên mặt cầu.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ trong các điểm có tọa độ lần lượt là $(0;0;0)$, $(1;2;3)$, $(2;0;6)$ thì có bao nhiêu điểm trên mặt cầu.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S):(x-3)^2+y^2+z^2=9$ và $(S'):(x+2)^2+y^2+z^2=4$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt cầu tiếp xúc ngoài. **B.** Hai mặt cầu tiếp xúc trong.
C. Hai mặt cầu không có điểm chung. **D.** Hai mặt cầu có nhiều hơn một điểm chung.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$ và ba điểm $A(1;0;0),B(2;1;3),C(0;2;-3)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn biểu thức $MA^2+2.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$ là đường tròn cố định, bán kính r của đường tròn này là.

A. $r=\sqrt{6}$. **B.** $r=3$. **C.** $r=6$. **D.** $r=\sqrt{3}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=16$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. Điểm $Q(-2;-1;-1)$. **B.** Điểm $N(-2;-1;3)$. **C.** Điểm $M(2;1;-3)$. **D.** Điểm $P(2;1;1)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$. Điểm nào dưới đây thuộc mặt cầu (S)?

A. $B(3;1;1)$. **B.** $A(3;-2;2)$. **C.** $C(3;-2;3)$. **D.** $D(1;0;4)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. Điểm nào trong các điểm bên dưới thuộc mặt cầu (S)?

A. $K(5;-3;1)$. **B.** $J(-2;3;-1)$. **C.** $H(-7;-3;1)$. **D.** $I(2;-3;1)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, gọi I là tâm của mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4z-1=0$. Độ dài đoạn OI (với O là gốc tọa độ) bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 6.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$. Có bao nhiêu điểm P thuộc (S) mà tiếp diện của (S) tại P cắt các trục Ox, Oz tương ứng tại các điểm $E(a;0;0), F(0;0;b)$ sao cho a, b là các số nguyên dương và $EPF=90^o$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

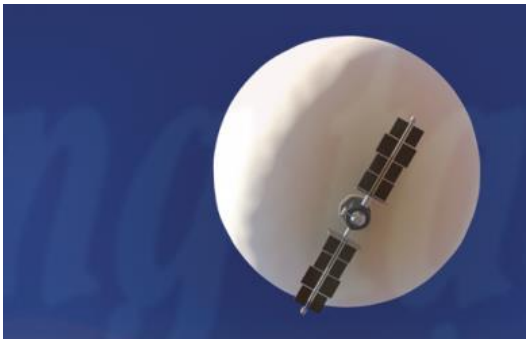
Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$: (S_1) có tâm $I\left(0,0,\frac{21}{2}\right)$, bán kính $r_1=6$ và (S_2) có tâm $J(0,0,1)$, bán kính $r_2=\frac{9}{2}$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M(x,y,z)$ với x,y,z nguyên thuộc phần giao của hai khối cầu?

A. 11. **B.** 13. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;5;2)$ và $B(5;13;10)$. Có bao nhiêu điểm $I(a;b;c)$ với a,b,c là các số nguyên sao cho có mặt cầu tâm I đi qua A,B và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy)?

A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 13: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, bề mặt của một quả bóng thám không dạng hình cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-200x-600y-4000z+4099900=0$. Tìm tâm và bán kính mặt cầu.



A. Tâm $I(100;300;2000)$, bán kính $r=100$.

B. Tâm $I(-100;-300;-2000)$, bán kính $r=10$.

C. Tâm $I(100;300;2000)$, bán kính $r=10$.

D. Tâm $I(-100;-300;-2000)$, bán kính $r=100$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-4;0;2)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(0;-1;4)$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì **không** sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-5;0;3)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(-7;-2;3)$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(C):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

b) Điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C).

c) Điểm $C(0;2;1)$ nằm trên mặt cầu (C).

d) Với điểm $D(2;1;-1)$, ta có $ID<4$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ có tâm I và bán kính R. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$.

b) Điểm $A(0;2;-3)$ nằm trong mặt cầu.

c) Điểm $J(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.

d) Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu $(S'):x^2+y^2+(z-1)^2=3$ bằng $\sqrt{2}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có tâm I và bán kính R. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=2$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1;1;2)$.

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0;1;-2)$ và $B(2;-1;-4)$.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x+y-z-2=0$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):3x+y-z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất có bán kính $r=5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng $(P):3x+y-z-5=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;1;-1)$.

b) Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t;-1+2t;-2-t)$.

c) $d(I,(P))=3$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):\ 2x-y+2z-14=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Lấy $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giá trị của biểu thức $K=a+b+c$ là

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-2;1;-4)$. Biết bán kính phủ sóng của trạm là 3km. Có 5 người sử dụng điện thoại tại các điểm $A(2;-1;3), B(0;1;-4), C(-2;1;-3),$

$D(0;1;-3)$, $E(-4;-2;1)$. Hỏi trong số 5 người đó, có bao nhiêu người có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

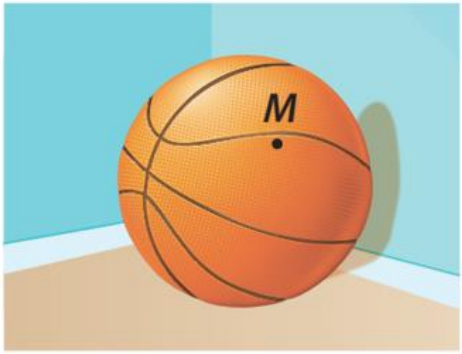
Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-2=0$ chứa đường thẳng AB và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $M=2a+b-c$ bằng bao nhiêu?

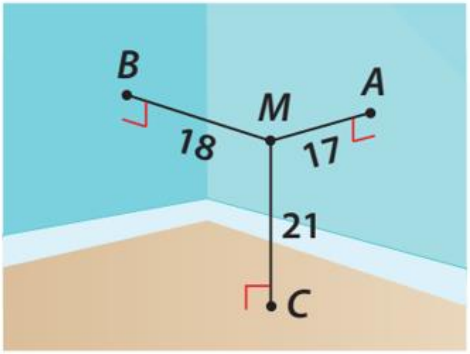
Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q. Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

Câu 5: Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$, $(P):x+2y-2z-2=0$, $(Q):x+2y-2z+4=0$. Gọi mặt cầu $S(I,R)$ có tâm I thuộc Δ và tiếp xúc với $(P),(Q)$. Khi đó đường kính của mặt cầu có giá trị bằng bao nhiêu?

Câu 7: Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đương kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? *Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.*





----------HẾT----------

CHƯƠNG 5

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 01 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng: Cho mặt phẳng (α). Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

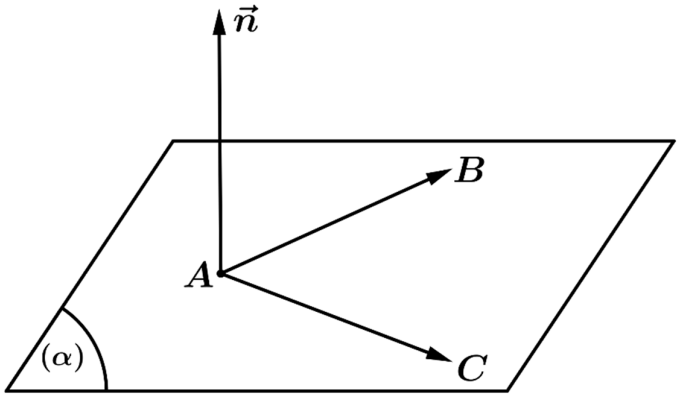
Nhận xét:

- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k.\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).
- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.

Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng: Cho mặt phẳng (α). Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương và giá của chúng song song hoặc nằm trên mặt phẳng(α) thì $\vec{a},\vec{b}$ là cặp véctơ chỉ phương của mặt phẳng (α).

Nhận xét: Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và cặp vectơ chỉ phương của nó.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vectơ chỉ phương : Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.



Chú ý: Vectơ $\vec{n}=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$ được gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ và $\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$.
- $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.
- Nếu $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

2 Phương trình tổng quát của mặt phẳng

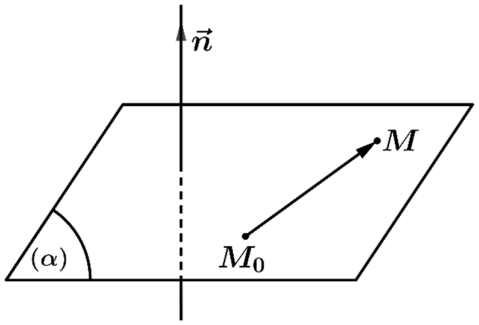
Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$, phương trình có dạng $Ax+By+Cz+D=0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0 được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Nhận xét: Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó:

- Mặt phẳng (α) có một vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$
- Điểm $N\left(x_0;y_0;z_0\right)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$
- Mỗi phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0) đều là phương trình của một mặt phẳng xác định.

Một số dạng toán viết phương trình mặt phẳng cơ bản:

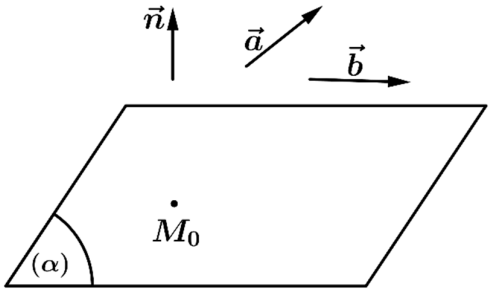
Dạng 1: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một vectơ pháp tuyến



Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0 \text{ với } D=-Ax_0-By_0-Cz_0.$$

Dạng 2: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một cặp vectơ chỉ phương

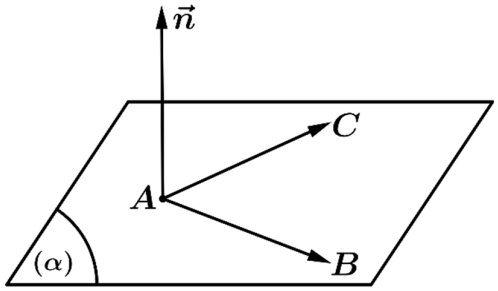


Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}$, $\vec{b}$ thì ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Dạng 3: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng



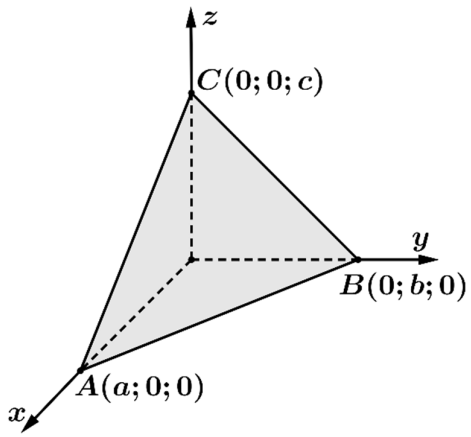
Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm cặp vectơ chỉ phương chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bước 2: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Dạng 3: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng theo đoạn chắn



Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

3 Điều kiện để hai mặt phẳng song song hoặc vuông góc

Điều kiện để hai mặt phẳng song song: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó: $(\alpha_1)\,//\,(\alpha_2)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1\neq kD_2\end{cases}(k\in\mathbb{R})$.

Chú ý: Ta có một số tính chất sau:

- $(\alpha_1)\equiv(\alpha_2)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1=kD_2\end{cases}\ (k\in\mathbb{R})$.
- (α_1) cắt $(\alpha_2)\Leftrightarrow\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$.

Khi đó: $(\alpha_1)\perp(\alpha_2)\Leftrightarrow\vec{n}_1.\vec{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

4 Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ và điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức:

$$\mathrm{d}(M_0,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

5 Các phương trình mặt phẳng đặc biệt trong không gian

Tính chất mặt phẳng	Phương trình	Hệ số đặc biệt
(α) đi qua/chứa gốc O	$(\alpha): Ax+By+Cz=0$	$D=0$
(α) song song/chứa Ox	$(\alpha): By+Cz+D=0$	$A=0$
(α) song song/chứa Oy	$(\alpha): Ax+Cz+D=0$	$B=0$
(α) song song/chứa Oz	$(\alpha): Ax+By+D=0$	$C=0$
(α) song song/trùng (Oxy)	$(\alpha): Cz+D=0$	$A=B=0$
(α) song song/trùng (Oxz)	$(\alpha): By+D=0$	$A=C=0$
(α) song song/trùng (Oyz)	$(\alpha): Ax+D=0$	$B=C=0$

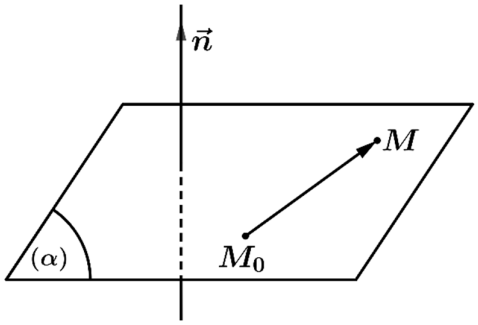
Nhận xét: Mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song/chứa trục đó hoặc mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song/chứa mặt phẳng đó.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng

Phương pháp: Ta thường gặp các dạng toán sau:

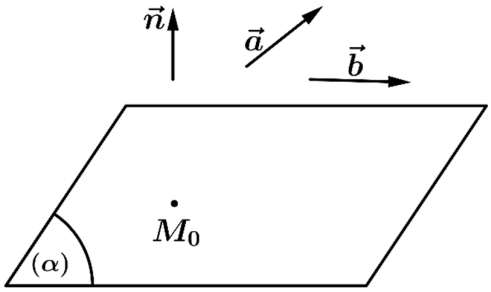
Dạng 1: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một vectơ pháp tuyến



Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0 \text{ với } D=-Ax_0-By_0-Cz_0.$$

Dạng 2: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một cặp vectơ chỉ phương

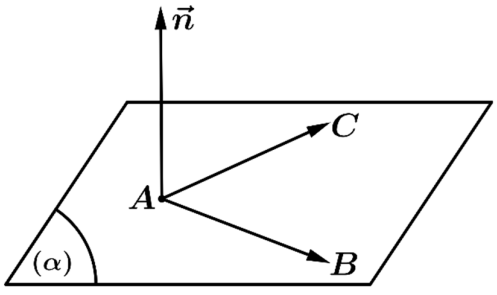


Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}$, $\vec{b}$ thì ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Dạng 3: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng



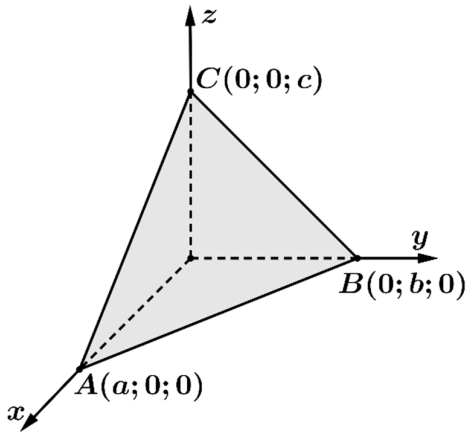
Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm cặp vectơ chỉ phương chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bước 2: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Dạng 3: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng theo đoạn chắn



Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Ngoài các dạng toán lập phương trình mặt phẳng cơ bản đã nêu. Chúng ta có thể gặp thêm một số dạng toán nâng cao hơn được trình bày ở các bài tập dưới đây.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;6)$.

Lời giải

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;6)$ có dạng: $3(x-2)-2(y-1)+6(z+3)=0\Leftrightarrow 3x-2y+6z+14=0$.

Bài tập 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;0)$ và có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;3),\vec{b}=(1;1;2)$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;3),\vec{b}=(1;1;2)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\vec{a};\vec{b}\right]=(-1;-1;1)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;0)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-1;-1;1)$ có dạng: $-1(x-2)-1(y+1)+1(z-0)=0\Leftrightarrow -x-y+z+1=0$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và vuông góc với trục Ox.

Lời giải

Mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và vuông góc với trục Ox thì nhận vectơ $\vec{i}=(1;0;0)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng cần tìm là:

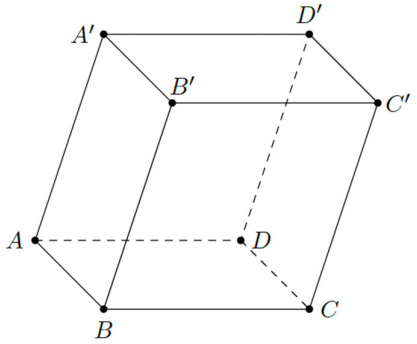
$$1(x-1)+0(y-2)+0(z+1)=0 \text{ hay } x-1=0.$$

Bài tập 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;-1;3)$, $B(0;2;4)$ $D(2;-1;1), A'(0;1;2)$.

a) Tính tọa độ các điểm C, B', D'.

b) Viết phương trình mặt phẳng $(CB'D')$.

Lời giải



a) Tính tọa độ các điểm C, B', D'.

Ta có: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=1 \\ y_C-2=0 \\ z_C-4=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=1 \\ y_C=2 \\ z_C=2 \end{cases}$ suy ra $C(1;2;2)$.

$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'}=-1 \\ y_{B'}-2=2 \\ z_{B'}-4=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=-1 \\ y_C=4 \\ z_C=3 \end{cases}$ suy ra $B'(-1;4;3)$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'D'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{D'}=1 \\ y_{D'}-1=0 \\ z_{D'}-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{D'}=1 \\ y_{D'}=1 \\ z_{D'}=0 \end{cases}$ suy ra $D'(1;1;0)$.

b) Viết phương trình mặt phẳng $(CB'D')$.

Ta có: $\overrightarrow{CB'}=(-2;2;1), \overrightarrow{CD'}=(0;-1;-2)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(CB'D')$ nên $(CB'D')$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=\left[\overrightarrow{CB'},\overrightarrow{CD'}\right]=(-3;-4;2)$ và đi qua điểm $C(1;2;2)$ có phương trình là: $3x+4y-2z-7=0$.

Bài tập 5: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;-1;5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): 3x+2y-z=0$, $(R): x+y-z=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (R) lần lượt có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(3;2;-1)$, $\vec{n}_R=(1;1;-1)$

Vì mặt phẳng (P) vuông góc với cả hai mặt phẳng (R), (Q) nên giá của các vectơ $\vec{n}_R$, $\vec{n}_Q$ song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P).

Suy ra $\left[\vec{n}_Q,\vec{n}_R\right]=(-1;2;1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;-1;5)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(-1;2;1)$ có phương trình là: $-1(x-1)+2(y+1)+1(z-5)=0$ hay $x-2y-z+2=0$.

Bài tập 6: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua $M(2;3;-1)$, song song với trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q):x+2y-3z+1=0$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm.

Do $(P)//Ox$ nên mặt phẳng (P) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=\vec{i}=(1;0;0)$.

Mặt khác: $(P)\perp(Q)\Rightarrow$ mặt phẳng (P) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{n_{(Q)}}=(1;2;-3)$.

$\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(0;3;2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;3;-1)$ có phương trình $(P):3y+2z-7=0$.

Bài tập 7: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua:

a) Điểm $I(3;-4;1)$ và vuông góc với trục Ox

b) Điểm $K(-2;4;-1)$ và song song với mặt phẳng (ozx)

c) Điểm $K(-2;4;-1)$ và song song với mặt phẳng $(Q):3x+7y+10z+1=0$

Lời giải

a) Mặt phẳng $(P)\perp Ox$ nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;0;0)$

Phương trình mặt phẳng (P) là $x-3=0$.

b) Mặt phẳng $(P)\,//\,(Ozx)\Rightarrow(P)\perp Oy\Rightarrow\vec{n}_{(P)}=(0;1;0)$

Phương trình mặt phẳng (P) là $y-4=0$.

c) Mặt phẳng $(P)\,//\,(Q)\Rightarrow\vec{n}_{(P)}=\vec{n}_{(Q)}=(3;7;10)$

Phương trình mặt phẳng (P) là: $3(x+2)+7(y-4)+10(z+1)=0\Leftrightarrow3x+7y+10z-12=0$.

Bài tập 8: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;1;1)$; $B(0;4;0)$; $C(2;2;0)$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;3;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(1;1;-1)$.

Xét $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}3&-1\\1&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&3\\1&1\end{vmatrix}\right)=(-2;-2;-4)$.

Khi đó $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) đi qua $B(0;4;0)$ nên có phương trình

$$-2(x-0)-2(y-4)-4(z-0)=0\Leftrightarrow x+y+2z-4=0$$

Vậy $(P):x+y+2z-4=0$.

Bài tập 9: Lập phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn của mặt phẳng (P), biết rằng mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(5;0;0),B(0;3;0),C(0;0;6)$.

Lời giải

Mặt phẳng đi qua ba điểm $A(5;0;0),B(0;3;0),C(0;0;6)$ có phương trình là: $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$.

Bài tập 10: Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$.

Lời giải

Phương trình mặt chắn cắt tia Ox tại $A(a;0;0)$, cắt tia Oy tại $B(0;b;0)$, cắt tia Oz tại $C(0;0;c)$ có dạng là (P): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (với $a>0$, $b>0$, $c>0$).

Theo đề: $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}\Leftrightarrow\frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{b}{2}\\c=2b\end{cases}$.

Vì $M(1;3;-2)$ nằm trên mặt phẳng (P) nên ta có: $\frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{3}{b}+\frac{-2}{2b}=1\Leftrightarrow\frac{4}{b}=1\Leftrightarrow b=4$.

Khi đó $a=2$, $c=8$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1\Leftrightarrow 4x+2y+z-8=0$.

Bài tập 11: Trong không gian *Oxyz*, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB*.

Lời giải

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB* có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(-6;2;2)$ và đi qua trung điểm $I(1;1;2)$ của đoạn thẳng *AB*.

Do đó, ta có: $-6(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0\Leftrightarrow -6x+2y+2z=0\Leftrightarrow 3x-y-z=0.$

Bài tập 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;2;1)$ và $B(5;-4;1)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (Oxy), và N là điểm đối xứng với B qua (Oyz). Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng MN.

Lời giải

M là hình chiếu của $A(-3;2;1)$ trên trục (Oxy) nên ta có $M(-3;2;0)$.

N là đối xứng với $B(5;-4;1)$ qua (Oyz) nên ta có $N(-5;-4;1)$.

Gọi I là trung điểm MN. Ta có $I\left(-4;-1;\frac{1}{2}\right)$ và $\overrightarrow{MN}=(-2;-6;1)$

Phương trình mặt phẳng $2(x+4)+6(y+1)-1\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 4x+12y-2z+29=0.$

Bài tập 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1;2;1), B(3;0;0)$, $C(1;-1;-2), D(-1;1;-1)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và G là trọng tâm ΔABC. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của GI.

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình vuông nên tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Khi đó $I\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ và do G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};\frac{-1}{3}\right)$.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng GI nên $M\left(\frac{4}{3};\frac{5}{12};-\frac{5}{12}\right)$

Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn thẳng GI:

$$-4\left(x-\frac{4}{3}\right)+\left(y-\frac{5}{12}\right)-\left(z+\frac{5}{12}\right)=0 \Leftrightarrow 8x-2y+2z-9=0.$$

Bài tập 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1): 3x-y+z-2=0, (\alpha_2): x+4y-5=0$ và song song với mặt phẳng $(\alpha_3): 2x+21y-z+7=0$. Viết phương trình của mặt phẳng (P).

Lời giải

Ta có: $(P)//(\alpha_3) \Rightarrow (P): 2x+21y-z+m=0 \ (m\neq -7)$

Gọi d là giao tuyến của $(\alpha_1);(\alpha_2)$ $d: \begin{cases}(\alpha_1): 3x-y+z-2=0\\(\alpha_2): x+4y-5=0\end{cases}$

Cho $\xrightarrow{y=0}\begin{cases}3x+z-2=0\\x-5=0\end{cases} \Rightarrow M(5;0;-13)$ và $\xrightarrow{z=0}\begin{cases}3x-y-2=0\\x+4y-5=0\end{cases} \rightarrow N(1;1;0)$

$M\in(P) \Rightarrow 2.5+21.0-(-13)+m=0 \Rightarrow m=-23$

$N\in(P) \Rightarrow 2.1+21.1-0+m=0 \Rightarrow m=-23$. Vậy $2x+21y-z-23=0$.

Bài tập 15: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

Lời giải

Do $(Q)//(P)$ nên mặt phẳng $(Q): 2x-2y+z+C=0$; $C\neq -5$, chọn $M(0;0;5)\in(P)$

Ta có $d((P);(Q))=d(M;(Q))=\dfrac{|5+C|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C=4\\C=-14\end{array}\right.$

Với $C=4\Rightarrow(Q): 2x-2y+z+4=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_1(-2;0;0)$ có hoành độ âm nên trường hợp này (Q) không thỏa đề bài.

Với $C=-14\Rightarrow(Q): 2x-2y+z-14=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_2(7;0;0)$ có hoành độ dương do đó $(Q): 2x-2y+z-14=0$ thỏa đề bài.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): 2x-2y+z-14=0$.

Bài tập 16: Trong không gian $Oxyz$,cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$, $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$ Viết phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β).

Lời giải

Vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\vec{n}_\alpha=(3;-2;2)$, $\vec{n}_\beta=(5;-4;3)$.

Khi đó vecto pháp tuyến mặt phẳng cần tìm là $\vec{n}=\left[\vec{n}_\alpha;\vec{n}_\beta\right]=(2;1;-2)$

Mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;-2)$ là : $2x+y-2z=0$.

Bài tập 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+2y-z=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$, vectơ pháp tuyến mặt phẳng (Q): $\overrightarrow{n_Q}=(1;2;-1)$.

Theo đề bài ta có vectơ pháp tuyến mặt phẳng (P): $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}\wedge\overrightarrow{AB}=(4;-3;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $4x-3y-2z+C=0$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;0)$ nên: $-3+C=0\Leftrightarrow C=3$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4x-3y-2z+3=0$.

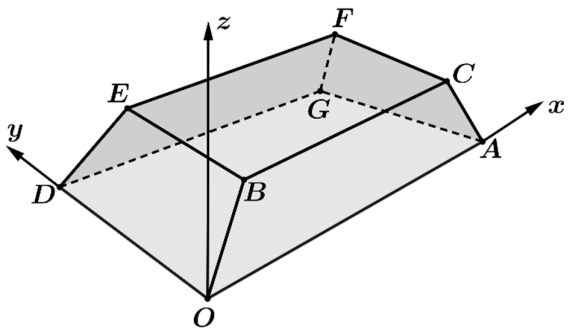
Bài tập 18: Hình vẽ dưới đây minh họa hình ảnh một tòa nhà trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Biết $A(50;0;0)$, $D(0;20;0)$, $B(4k;3k;2k)$ với $k>0$ và mặt phẳng $(BCFE)$ có phương trình là $z=3$.

a) Tìm tọa độ điểm B.

b) Lập phương trình mặt phẳng $(AOBC)$.

c) Lập phương trình mặt phẳng $(DOBE)$.

d) Chỉ ra một véc tơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng $(AOBC)$ và $(DOBE)$.



Lời giải

a) Mặt phẳng $(BCFE)$ có phương trình là $z=3$ và điểm $B\in(BCFE)$ nên ta có thể suy ra được giá trị: $2k=3\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}\Rightarrow B\left(6;\frac{9}{2};3\right)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{u_1}=\frac{1}{50}\overrightarrow{OA}=(1;0;0)$; $\overrightarrow{u_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=(4;3;2)\Rightarrow\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(0;-2;3)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(AOBC)$

Phương trình mặt phẳng $(AOBC)$ là: $-2(y-0)+3(z-0)=0\Leftrightarrow -2y+3z=0$.

c) Ta có: $\overrightarrow{u_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=(4;3;2)$; $\overrightarrow{u_3}=\frac{1}{20}\overrightarrow{OD}=(0;1;0)\Rightarrow\vec{n}'=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{u_3},\overrightarrow{u_2}\right]=(1;0;-2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(DOBE)$.

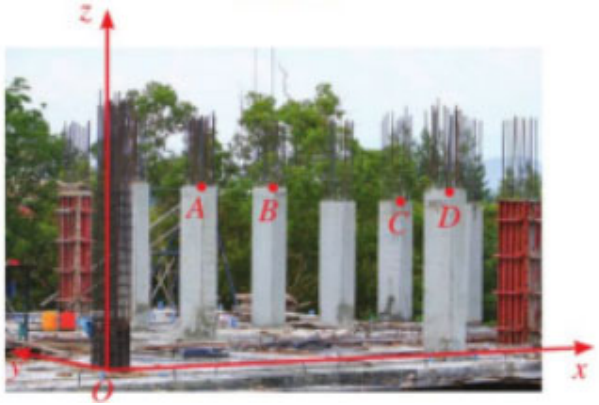
Phương trình mặt phẳng $(DOBE)$ là: $1(x-0)-2(z-0)=0\Leftrightarrow x-2z=0$.

d) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(AOBC)$ là $\vec{n}=(0;-2;3)$ và một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(DOBE)$ là $\overrightarrow{n'}=(1;0;-2)$.

Bài tập 19: Hình dưới đây minh họa một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2;1;3)$, $B(4;3;3)$, $C(6;3;2,5)$, $D(4;0;2,8)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

b) Bốn điểm A,B,C,D có đồng phẳng không?



Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2;0)\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{AC}=(4;2;-0,5)\neq\vec{0}$.

Xét: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}2&0\\2&-0,5\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0&2\\-0,5&4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&2\\4&2\end{vmatrix}\right)=(-1;1;-4)$ hay $\vec{n}=(1;-1;4)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

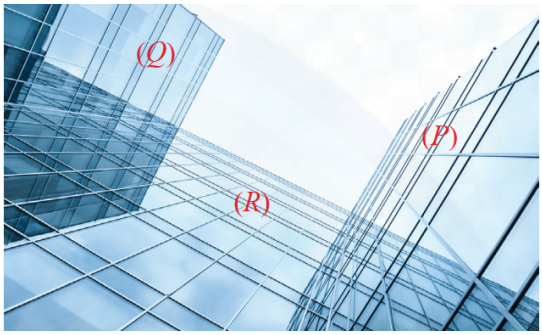
Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $1(x-2)-1(y-1)+4(z-3)=0\Leftrightarrow x-y+4z-13=0$.

b) Thay tọa độ điểm $D(4;0;2,8)$ vào phương trình mặt phẳng (ABC) ta có:

$$x-y+4z-13=0\Leftrightarrow 4+4.2,8-13=0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng.

Bài tập 20: Một công trường xây dựng nhà cao tầng đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Hãy kiểm tra tính song song hoặc vuông góc giữa các mặt kính (P), (Q), (R) (hình bên) của một tòa nhà biết các mặt phẳng có phương trình lần lượt là: $(P):3x+y-z+2=0$; $(Q):6x+2y-2z+11=0$; $(R):x-3y+1=0$.



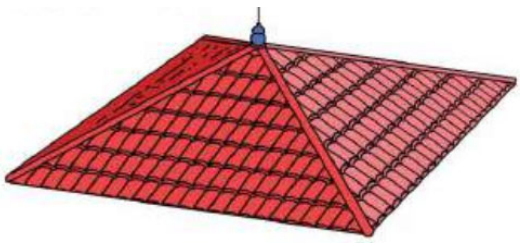
Lời giải

Các mặt phẳng (P), (Q) và (R) lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(3;1;-1)$, $\vec{n}_Q=(6;2;-2)$ và $\vec{n}_R=(1;-3;0)$.

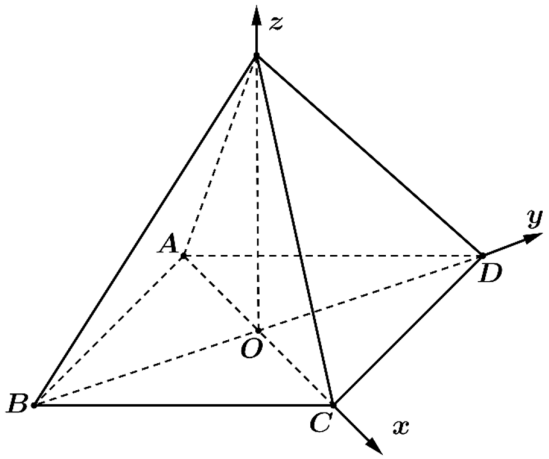
Khi đó ta có: $\begin{cases}\vec{n}_P=\dfrac{1}{2}\vec{n}_Q\\ 2\neq\dfrac{1}{2}.11\end{cases}\Rightarrow(P)\,//\,(Q)$.

Mặt khác $\vec{n}_P.\vec{n}_R=0\Rightarrow(P)\perp(R)$ và $\vec{n}_Q.\vec{n}_R=0\Rightarrow(Q)\perp(R)$.

Bài tập 21: Bác An dự định làm bốn mái nhà của một ngôi nhà sao cho chúng là bốn mặt bên của một hình chóp tứ giác đều và các mái kề nhau thì vuông góc với nhau. Hỏi ý tưởng đó có làm được không?



Lời giải



Giả sử mái nhà của ngôi nhà được minh họa như hình vẽ trên. Ta gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Gọi các cạnh đáy của hình chóp có độ dài là a và các cạnh bên có độ dài là b.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $OA = OB = OC = OD = a\sqrt{2}$.

Vì SO là đường cao của tam giác SOC nên $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{2}}$

Khi đó ta có: $O(0;0;0); A\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2};0;0\right), C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{-a\sqrt{2}}{2};0\right); D\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

và $S\left(0;0;\sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{2}}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{SC} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;-\sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{2}}\right); \overrightarrow{DC} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right);\ \overrightarrow{BC} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

Mặt khác: $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{SC};\frac{\sqrt{2}}{a}\overrightarrow{DC}\right] = \left(\sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{2}};\sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{2}};-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{SC};\frac{\sqrt{2}}{a}\overrightarrow{BC}\right] = \left(\sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{2}};-\sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{2}};\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

Mặt phẳng (SCD) nhận $\overrightarrow{n_1}$ làm một vectơ pháp tuyến.

Mặt phẳng (SBC) nhận $\overrightarrow{n_2}$ làm một vectơ pháp tuyến.

Vì $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = \frac{-a^2}{2} \neq 0$ do đó hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) không vuông góc với nhau.

Do đó ý tưởng trên không thực hiện được.

Bài tập 22: Trong không gian $Oxyz$, một ngôi nhà có sàn nhà thuộc mặt phẳng Oxy và trần nhà tầng 1 thuộc mặt phẳng $z-1=0$, mái nhà tầng 2 thuộc mặt phẳng $x+y+50z-100=0$. Hỏi trong 3 mặt phẳng tương ứng chứa sàn nhà, trần nhà tầng 1, mái nhà tầng 2, hai mặt nào song song với nhau?

Lời giải

Vì mặt phẳng Oxy vuông góc với Oz nên mặt phẳng Oxy nhận $\vec{k}=(0;0;1)$ làm một vectơ pháp tuyến.

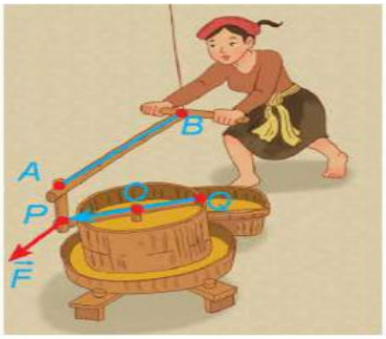
Vì mặt phẳng Oxy đi qua điểm O(0; 0; 0) và có vectơ pháp tuyến $\vec{k}=(0;0;1)$ nên có phương trình là: $z-0=0 \Leftrightarrow z=0$

Mặt phẳng $z-1=0$ có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(0;0;1)$.

Vì $\overrightarrow{n_1}=\vec{k}$ và $-1\neq 0$ nên mặt phẳng chứa sàn nhà song song với trần tầng 1.

Mặt mái tầng 2 có phương trình $x+y+50z-100=0$ và có nhận một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(1;1;50)$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_1},\vec{k}$ nên không song song với hai mặt phẳng còn lại .

Bài tập 23: Xét một cối xay lúa trong không gian $Oxyz$, với đơn vị đo là mét. Nếu tác động vào tại cối xay lúa (Ở vị trí P) một lực $\vec{F}$ thì moment lực $\overrightarrow{M}$ được tính bởi công thức $\overrightarrow{M}=\left[\overrightarrow{OP};\vec{F}\right]$ như hình minh họa. Trong quá trình xay, các thanh gỗ AB và PQ luôn có phương nằm ngang. Vectơ lực $\vec{F}$ có giá song song với AB. Giải thích vì sao giá của vecto moment lực $\overrightarrow{M}$ có phương thẳng đứng?



Lời giải

Vì các thanh gỗ AB và PQ luôn có phương nằm ngang và vectơ lực $\vec{F}$ có giá song song với AB nên giá của vectơ $\vec{F}$ có phương nằm ngang.

Mặt khác $\overrightarrow{M}=\left[\overrightarrow{OP};\vec{F}\right]$ nên moment lực $\overrightarrow{M}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{F}$ và $\overrightarrow{OP}$

Do đó giá của vectơ moment lực $\overrightarrow{M}$ có phương thẳng đứng.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $A(1;1;3)$. **B.** $B(1;1;-3)$. **C.** $C(3;1;1)$. **D.** $D(-1;-1;3)$.

Lời giải

Ta có: $1+1-3+1=0 \Rightarrow$ điểm $A(1;1;3) \in (P)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (Oxy)?

A. $A(1;1;0)$. **B.** $B(1;0;-3)$. **C.** $C(0;1;1)$. **D.** $D(0;0;3)$.

Lời giải

Ta có: mặt phẳng $(Oxy): z=0$. Quan sát bốn phương án, ta thấy chỉ có phương án A thỏa.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$. Mặt phẳng (α) biết (α) đi qua điểm $M(-1;5;2)$ đồng thời (α) có cặp vetơ chỉ phương $\vec{u}=(0;1;1)$ và $\vec{v}=(-3;-5;1)$ có phương trình là

A. $y+z-7=0$. **B.** $2x-y+z+5=0$.

C. $-x+5y+2z+5=0$. **D.** $2x+y+z-5=0$.

Lời giải

Ta có $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(6;-3;3)=3(2;-1;1)$. Chọn $\vec{n}=(2;-1;1)$ là 1 véc tơ pháp tuyến của (α).

Phương trình mặt phẳng qua $M(-1;5;2)$ nhận $\vec{n}=(2;-1;1)$ làm 1 véc tơ pháp tuyến là:
$2(x+1)-(y-5)+(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-y+z+5=0$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$,cho ba điểm $A(0;2;1)$, $B(3;0;1)$, $C(1;0;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x-3y-4z+2=0$. **B.** $4x+6y-8z+2=0$.

C. $2x+3y-4z-2=0$. **D.** $2x-3y-4z-2=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-2;0), \overrightarrow{AC}(1;-2;-1)$

Vì mặt phẳng (ABC) đi qua ba điểm A,B,C nên VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;3;-4)$

Phương trình mặt phẳng (ABC): $2(x-0)+3(y-2)-4(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-4z-2=0$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-3;-2)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $z+2=0$. **B.** $z-2=0$. **C.** $2x-3y=0$. **D.** $2x-3y-2=0$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Do $(P)//(Oxy) \Rightarrow \overrightarrow{n_P}=\vec{k}=(0;0;1)$.

Và (P) đi qua điểm $A \Rightarrow (P): 0.(x-2)+0.(y+3)+1.(z+2)=0 \Rightarrow (P): z+2=0$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-3;-2)$ và song song với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A. $x+z=0$. **B.** $y+3=0$. **C.** $y-3=0$. **D.** $x-z=0$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Do $(P)//(Oxz) \Rightarrow \overrightarrow{n_P}=\vec{j}=(0;1;0)$.

Và (P) đi qua điểm $A \Rightarrow (P): 0.(x-2)+1.(y+3)+0.(z+2)=0 \Rightarrow (P): y+3=0$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-3;-2)$ và song song với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là

A. $3y-2z=0$. **B.** $x+2=0$. **C.** $x-2=0$. **D.** $3y+2z=0$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Do $(P)//(Oyz) \Rightarrow \overrightarrow{n_P}=\vec{i}=(1;0;0)$.

Và (P) đi qua điểm $A \Rightarrow (P): 1.(x-2)+0.(y+3)+0.(z+2)=0 \Rightarrow (P): x-2=0$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+3z-3=0$ có phương trình là

A. $2x-y+3z=0$. **B.** $2x-y+3z-1=0$.

C. $2x-3y-2z=0$. **D.** $2x-3y-2z-1=0$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Do $(P)//(\alpha) \Rightarrow \overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-1;3)$.

Và (P) đi qua điểm $A \Rightarrow (P): 2.(x-2)-1.(y+3)+3.(z+2)=0 \Rightarrow (P): 2x-y+3z-1=0$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(1;0;1), C(3;1;1), D(4;1;1)$ $B(-1;2;2)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A,B và song song với CD.

A. $y-2z+2=0$. **B.** $x-2z+2=0$. **C.** $x-y+2z+2=0$. **D.** $x-2y+2=0$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm.

Vì (P) đi qua hai điểm A,B và song song với CD nên (P) nhận hai véc tơ $\overrightarrow{AB}=(-2;2;1)$, $\overrightarrow{CD}=(1;0;0)$ làm cặp véc tơ chỉ phương suy ra (P) có véc tơ pháp tuyến là :

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}\right] = (0;-1;2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $0(x-1)-1(y-0)+2(z-1)=0$ hay $y-2z+2=0$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$; $B(-1;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A,B và vuông góc với (P).

A. $(Q): 2x-y+3=0$. **B.** $(Q): x+z=0$. **C.** $(Q): -x+y+z=0$. **D.** $(Q): 3x-y+z=0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;-2;2) = -2(1;1;-1), \vec{u} = (1;1;-1)$ và $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1;2;-1)$

Vì mặt phẳng (Q) qua A,B và vuông góc với (P) nên (Q) nhận hai véc tơ $\vec{u} = (1;1;-1)$, $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1;2;-1)$ làm cặp véc tơ chỉ phương suy ra (Q) có véc tơ pháp tuyến là

$\overrightarrow{n_{(Q)}} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (1;0;1)$.

Mặt phẳng (Q) qua $A \Rightarrow (Q): x+z=0$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là

A. $2x-y-2z=0$. **B.** $x+y+z+3=0$. **C.** $-2x+z+6=0$. **D.** $-2x+z-6=0$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm.

Véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\overrightarrow{n_\alpha} = (3;-2;2), \overrightarrow{n_\beta} = (5;-4;3)$.

Vì mặt phẳng (P) đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) nên (P) nhận hai véc tơ $\overrightarrow{n_\alpha} = (3;-2;2)$, $\overrightarrow{n_\beta} = (5;-4;3)$ làm cặp véc tơ chỉ phương suy ra (P) có véc tơ pháp tuyến là

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{n_\alpha}; \overrightarrow{n_\beta}\right] = (2;1;-2)$

Mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O nên $(P): 2x+y-2z=0$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;5)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và chứa trục Ox

A. $(\alpha): 5y+3z=0$. **B.** $3y+5z=0$. **C.** $3y-5z=0$. **D.** $(\alpha): 5y-3z=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (α) có dạng: $By+Cz=0$ và $A \in (\alpha) \Rightarrow 3B+5C=0 \Rightarrow 3B=-5C$

Chọn $B=5 \Rightarrow C=-3$. Vậy $(\alpha): 5y-3z=0$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;1;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và chứa trục Oy

A. $(\alpha): 2x-3z=0$. **B.** $3x+2z=0$. **C.** $3x-2z=0$. **D.** $(\alpha): 2x+3z=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (α) có dạng: $Ax+Cz=0$ và $A\in(\alpha)\Rightarrow -3A+2C=0\Rightarrow 3A=2C$

Chọn $A=2\Rightarrow C=3\Rightarrow(\alpha):2x+3z=0$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;-5)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và chứa trục Oz

A. $(\alpha): x-2y=0$. **B.** $x+2y=0$. **C.** $2x-y=0$. **D.** $(\alpha): 2x+y=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (α) có dạng: $Ax+By=0$ và $A\in(\alpha)\Rightarrow 2A+4B=0\Rightarrow A=-2B$

Chọn $A=2\Rightarrow B=-1\Rightarrow(\alpha):2x-y=0$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P):x+2y-2z+1=0$ và (Q) cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng bằng 3 có phương trình là

A. $x+2y-2z+10=0; x+2y-2z-1=0$. **B.** $x+2y-2z=0; x+2y-2z-14=0$.

C. $x+2y-2z-14=0; x+2y-2z-4=0$. **D.** $x+2y-2z+4=0; x+2y-2z-14=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P):x+2y-2z+1=0$ nên mặt phẳng (Q) có phương trình $:x+2y-2z+D=0\,(D\neq 1)$.

Mặt phẳng (Q) cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng bằng 3 nên $d(M;(Q))=3$

$$\Leftrightarrow |D-5|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=14\quad(t/m)\\D=-4\quad(t/m)\end{array}\right.$$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $B(1;-1;0)$, $C(2;-1;-1)$, $M(-2;1;3)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với BC và cách M một khoảng bằng $\sqrt{2}$ có phương trình là

A. $x-z-7=0$; $x-z-3=0$. **B.** $x-z+7=0$; $x-z-3=0$.

C. $x-z+7=0$; $x-z+3=0$. **D.** $x-z-7=0$; $x-z+3=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{BC}=(1;0;-1)\Rightarrow(P):x-z+D=0$.

Lại có $d(M;(P))=\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{|D-5|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|D-5|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=7\\D=3\end{array}\right.$

Với $D=7\Rightarrow(P):x-z+7=0$.

Với $D=3\Rightarrow(P):x-z+3=0$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) qua hai điểm $C(2;1;6)$, $D(3;5;1)$ và cách đều hai điểm $A(6;4;0)$, $B(4;5;0)$ có phương trình là:

A. $13x+18y+15z+134=0;5x+10y+9z-7=0$.

B. $13x+18y+15z=0;5x+10y+9z-4=0$.

C. $5x+10y+9z-74=0;13x+18y+15z-134=0$.

D. $13x+18y+15z-13=0;5x+10y+9z+4=0$

Lời giải

Mặt phẳng (α) cách đều hai điểm $A;B$ khi và chỉ khi $AB//(\alpha)$ hoặc (α) đi qua trung điểm I của AB

Trường hợp 1: $(\alpha)//AB$ ta có $\overrightarrow{CD}=(1;4;-5)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;1;0)$.

Mặt phẳng (α) qua điểm $C(2;1;6)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}\right]=(5;10;9)$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $5(x-2)+10(y-1)+9(z-6)=0$ hay $5x+10y+9z-74=0$.

Trường hợp 2: (α) qua trung điểm $I\left(5;\frac{9}{2};0\right)$ của AB có $\overrightarrow{CD}=(1;4;-5)$, $\overrightarrow{CI}=\left(3;\frac{7}{2};-6\right)$.

Mặt phẳng (α) qua điểm $C(2;1;6)$ và có một vectơ pháp tuyến là

$\vec{n}=\left[\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CI}\right]=\left(-\frac{13}{2};-9;-\frac{17}{2}\right)=-\frac{1}{2}(13;18;17)$.

Chọn một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_{(\alpha)}=(13;18;17)$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $13(x-2)+18(y-1)+17(z-6)=0$ hay

$13x+18y+17z-146=0$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ khác $\vec{0}$. Tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{c}=(a_1b_3-a_2b_1,a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3)$.

B. $\vec{c}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$.

C. $\vec{c}=(a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1,a_2b_3-a_3b_1)$.

D. $\vec{c}=(a_1b_3-a_3b_1,a_2b_2-a_1b_2,a_3b_2-a_2b_3)$.

Lời giải

Ta có: $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây nhận $\vec{n}=(3;1;-7)$ là một vectơ pháp tuyến?

A. $3x+z+7=0$. **B.** $3x-y-7z+1=0$. **C.** $3x+y-7=0$. **D.** $3x+y-7z-3=0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng $3x+y-7z-3=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;1;-7)$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x-2z+2=0$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $B(4;2;1)$. **B.** $A(1;2;4)$. **C.** $D(2;1;4)$. **D.** $C(2;4;-1)$.

Lời giải

Thay tọa độ điểm $B(4;2;1)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được:

$$3.4-2.1+2=0 \Leftrightarrow 12=0 \text{ (Vô lí)} \Rightarrow \text{Điểm } B \notin (P).$$

Thay tọa độ điểm $A(1;2;4)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được:

$$3.1-2.4+2=0 \Leftrightarrow -3=0 \text{ (Vô lí)} \Rightarrow \text{Điểm } A \notin (P).$$

Thay tọa độ điểm $D(2;1;4)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được:

$$3.2-2.4+2=0 \Leftrightarrow 0=0 \text{ (Thỏa mãn)} \Rightarrow \text{Điểm } D \in (P).$$

Thay tọa độ điểm $C(2;4;-1)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được:

$$3.2-2.(-1)+2=0 \Leftrightarrow 10=0 \text{ (Vô lí)} \Rightarrow \text{Điểm } C \notin (P).$$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Mặt phẳng chứa điểm A và trục Oz có phương trình là

A. $2x-y=0$. **B.** $x+y-z=0$. **C.** $3y-2z=0$. **D.** $3x-z=0$ vô số.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng chứa điểm A và trục Oz.

Oz đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(0;0;1)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{u},\overrightarrow{OA}\right]=(-2;1;0)$ và đi qua điểm $O(0;0;0)$ nên có phương trình $2x-y=0$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+4z-5=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $3x-2y+4z-4=0$ **B.** $3x-2y+4z+4=0$.

C. $3x-2y+4z+5=0$. **D.** $3x+2y+4z+8=0$.

Lời giải

Mặt phẳng $(P):3x-2y+4z-5=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;4)$.

Do (Q) song song với (P) nên (Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;4)$.

Phương trình mặt phẳng $(Q):\ 3(x-2)-2(y+1)+4(z+3)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+4z+4=0$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

A. $3x+y+z-6=0$. **B.** $6x-2y-2z-1=0$.

C. $3x-y-z+1=0$. **D.** $3x-y-z=0$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, suy ra $I(1;1;2)$.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

(α) đi qua $I(1;1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(-6;2;2)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $-6(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-y-z=0$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P):2x-y+3z-1=0$, $(Q):y=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A, vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $3x-y+2z-4=0$. **B.** $3x+y-2z-2=0$. **C.** $3x-2z=0$. **D.** $3x-2z-1=0$.

Lời giải

$(P):2x-y+3z-1=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;3)$.

$(Q):y=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=(0;1;0)$.

Do mặt phẳng (R) vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(R)}=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right] \Rightarrow \vec{n}_{(R)}=(-3;0;2)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (R) là: $-3(x-1)+0(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x-2z-1=0$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2;3;5)$, $B(3;2;4)$ và $C(4;1;2)$ có phương trình là

A. $3x-y+2z-4=0$. **B.** $x+y-5=0$. **C.** $y-z+2=0$. **D.** $2x+y-7=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2;-3)$ suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;0)$.

Vì $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}\subset(ABC)$ nên (ABC) sẽ nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ làm một vectơ pháp tuyến.

Hiển nhiên (ABC) đi qua $A(2;3;5)$ nên ta có phương trình của (ABC) là

$1(x-2)+1(y-3)+0(z-5)=0 \Leftrightarrow x+y-5=0$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P):2x+y+z-2=0$ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-1=0$. **B.** $x-y-z-2=0$. **C.** $4x+2y+2z+4=0$. **D.** $2x+y+z-2=0$.

Lời giải

Xét $(P):2x+y+z-2=0$ và $(Q_1):\ x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-1=0$ có $\frac{2}{1}=\frac{1}{\frac{1}{2}}\neq\frac{1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow (P)$ không song

song với (Q_1).

Xét $(P): 2x+y+z-2=0$ và $(Q_2): x-y-z-2=0$ có $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{-1}=\frac{1}{-1}\Rightarrow(P)$ không song song với (Q_2).

Xét $(P): 2x+y+z-2=0$ và $(Q_3): 4x+2y+2z-4=0$ có $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq\frac{-2}{4}\Rightarrow(P)$ song song với (Q_3).

Xét $(P): 2x+y+z-2=0$ và $(Q_4): 2x+y+z-2=0$ có $\frac{2}{2}=\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{-2}{-2}\Rightarrow(P)$ trùng với (Q_4).

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $mx+(m-1)y+z-10=0$ và mặt phẳng $(Q): 2x+y-2z+3=0$. Với giá trị nào của dưới đây của m thì (P) và (Q) vuông góc với nhau

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Mặt phẳng (P): $mx+(m-1)y+z-10=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(m;m-1;1)$

Mặt phẳng $(Q): 2x+y-2z+3=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(2;1;-2)$.

Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc $\Leftrightarrow\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\Leftrightarrow m.2+(m-1).1+1.(-2)=0$

$\Leftrightarrow 3m-3=0\Leftrightarrow m=1$

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;-2)$ và vectơ $\vec{b}=(1;0;2)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{c}=(2;6;-1)$. **B.** $\vec{c}=(4;6;-1)$. **C.** $\vec{c}=(4;-6;-1)$. **D.** $\vec{c}=(2;-6;-1)$

Lời giải

Công thức tính tích có hướng trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ ta được: $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(2;-6;-1)$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+3y+z+2=0$. Véctơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_2(2;3;1)$. **B.** $\vec{n}_3(2;3;2)$. **C.** $\vec{n}_1(2;3;0)$. **D.** $\vec{n}_4(2;0;3)$.

Lời giải

Véctơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_2(2;3;1)$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $P(0;0;-5)$. **B.** $M(1;1;6)$. **C.** $Q(2;-1;5)$. **D.** $N(-5;0;0)$.

Lời giải

Ta có $1-2.1+6-5=0$ nên $M(1;1;6)$ thuộc mặt phẳng (P).

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$ và $B(3;0;2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $x+y+z-3=0$. **B.** $2x-y+z+2=0$. **C.** $2x+y+z-4=0$. **D.** $2x-y+z-2=0$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Suy ra $I(1;1;1)$ và $\overrightarrow{AB}=(4;-2;2)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm I của AB và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $(\alpha): 2x-y+z-2=0$.

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;3)$.

A. $x-2y+3z+12=0$. **B.** $x-2y-3z-6=0$.

C. $x-2y+3z-12=0$. **D.** $x-2y-3z+6=0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;3)$ là $1(x-1)-2(y-2)+3(z+3)=0 \Leftrightarrow x-2y+3z+12=0$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;-4;2)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $2x-3y-z-20=0$. **B.** $3x-y+3z-25=0$.

C. $2x-3y-z+8=0$. **D.** $3x-y+3z-13=0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-4;6;2)=-2(2;-3;-1)$

Mặt phẳng (P) đi qua $A(5;-4;2)$ nhận $\vec{n}=(2;-3;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do đó, phương trình mặt phẳng (P): $2(x-5)-3(y+4)-1(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-3y-z-20=0$

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$ $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

A. $3x+2z+1=0$. **B.** $x+2y-2z+1=0$. **C.** $x+2y-2z-1=0$. **D.** $3x+2z-1=0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(-1;-2;2)$ là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần tìm.

$\vec{n} = -\overrightarrow{BC} = (1;2;-2)$ cũng là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x+2y-2z+1=0$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;4)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

A. $2x-2y+4z-21=0$. **B.** $3x-2y+z-12=0$.

C. $2x-2y+4z+21=0$. **D.** $3x-2y+z+12=0$

Lời giải

Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

$3(x-2)-2(y+1)+(z-4)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-12=0$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $M(-2;0;0)$, $N(0;-1;0)$ và $P(0;0;3)$ là

A. $3x+6y-2z-6=0$. **B.** $2x+y-3z-1=0$.

C. $3x+6y-2z=0$. **D.** $3x+6y-2z+6=0$.

Lời giải

Áp dụng phương trình mặt phẳn theo đoạn chắn, ta có phương trình mặt (MNP) là

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 3x+6y-2z+6=0$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $A(-1;1;3)$, $B(2;-1;3)$, $C(2;2;-1)$ là.

A. $8x+12y+9z-31=0$. **B.** $8x+12y+9z+31=0$.

C. $8x-12y+9z-31=0$. **D.** $8x+12y-9z+31=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (ABC) nhận $\overrightarrow{AB}=(3;-2;0)$, $\overrightarrow{AC}=(3;1;-4)$ làm cặp vectơ chỉ phương nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(8;12;9)$.

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $A(-1;1;3)$ và nhận $\vec{n}=(8;12;9)$ làm một vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $8(x+1)+12(y-1)+9(z-3)=0 \Leftrightarrow 8x+12y+9z-31=0$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+y+2z-3=0$ là.

A. $2x+4y-3z-8=0$. **B.** $2x+4y-3z=0$.

C. $2x+4y-3z+8=0$. **D.** $2x-4y-3z=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=(1;1;2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) nên có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(-1;2;2)$ và $\vec{n}_{(Q)}=(1;1;2)$. Do đó (P) có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(Q)}\right]=(2;4;-3)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;0)$ và nhận $\vec{n}_{(P)}=(2;4;-3)$ làm một vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $2(x-2)+4(y+1)-3(z-0)=0\Leftrightarrow 2x+4y-3z=0$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y+2z-3=0$ và $(R): x-y-z+4=0$ là.

A. $x+3y-2z+9=0$. **B.** $2x+y-2z-9=0$. **C.** $x+3y-2z-9=0$. **D.** $2x+y-2z+9=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q), (R) có một vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_{(Q)}=(1;1;2)$ và $\vec{n}_{(R)}=(1;-1;-1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (Q) và (R) nên có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{n}_{(Q)}=(1;1;2)$ và $\vec{n}_{(R)}=(1;-1;-1)$. Do đó (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{n}_{(Q)};\vec{n}_{(R)}\right]=(1;3;-2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-2)$ và nhận $\vec{n}_{(P)}=(1;3;-2)$ làm một vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $1(x-2)+3(y-1)-2(z+2)=0\Leftrightarrow x+3y-2z-9=0$.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $N(2;1;-2)$, song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x-2y+z-8=0$ là

A. $x-z-4=0$. **B.** $x-z+4=0$. **C.** $2x+y-2z-4=0$. **D.** $2x+y-2z+4=0$.

Lời giải

Trục Oy có một vectơ chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$. Mặt phẳng (Q) một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=(1;-2;1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $N(2;1;-2)$, song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng (Q) nên có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$ và $\vec{n}_{(Q)}=(1;-2;1)$. Do đó (P) có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{j};\vec{n}_{(Q)}\right]=(1;0;-1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $N(2;1;-2)$ và nhận $\vec{n}_{(P)}=(1;0;-1)$ làm một vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $1(x-2)+0(y-1)-1(z+2)=0\Leftrightarrow x-z-4=0$.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1)$ và $B(2;1;0)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với AB là

A. $(P): 3x+y-z+4=0$. **B.** $(P): 3x+y-z-4=0$.

C. $(P): 3x+y-z=0$. **D.** $(P): 2x+y-z+1=0$.

Lời giải

Do mặt phẳng (P) vuông góc AB nên chọn một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(P)}} = \overrightarrow{AB} = (3;1;-1)$.

Suy ra (P): $3(x+1)+y-(z-1)=0 \Leftrightarrow (P)$: $3x+y-z+4=0$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0;1;3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x-3z+2025=0$ là

A. $(P): 2x-3z+9=0$. **B.** $(P): 2x-3z-9=0$.

C. $(P): 2x-3z+3=0$. **D.** $(P): 2x-3z-3=0$.

Lời giải

Ta có (P): $\begin{cases} \text{qua } A(0;1;3) \\ \text{VTPT: } \vec{n}_{(P)} = \vec{n}_{(Q)} = (2;0;-3) \end{cases} \Rightarrow (P): 2(x-0)+0(y-1)-3(z-3)=0$

$\Rightarrow 2x-3z+9=0$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y+3z-5=0$, $(R): 2x-y+z-1=0$ là

A. $4x+5y-3z+22=0$. **B.** $4x-5y-3z-12=0$.

C. $2x+y-3z-14=0$. **D.** $4x+5y-3z-22=0$.

Lời giải

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) và (R) lần lượt là $\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} = (1;1;3) \\ \overrightarrow{n_R} = (2;-1;1) \end{cases}$.

$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_R} \end{cases} \Rightarrow VTPT\ \overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_R}\right] = (4;5;-3).$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$ và vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (4;5;-3)$ có phương trình

$4(x-2)+5(y-1)-3(z+3)=0 \Leftrightarrow 4x+5y-3z-22=0$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;-1;1)$, $N(2;1;2)$ và song song với trục Oz có phương trình là

A. $x+2y+z=0$. **B.** $2x-y-3=0$. **C.** $x+2y+z-6=0$. **D.** $2x-y+5=0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN}(1;2;1); \vec{k}(0;0;1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN}, \vec{k}\right] = (2;-1;0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;-1;1)$ có véc tơ pháp tuyến $(2;-1;0)$ là :

$2(x-1)-1(y+1)=0 \Leftrightarrow 2x-y-3=0$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+11=0$ và hai điểm $A(1;0;-2),B(-1;-1;3)$. Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $3x+14y+4z+5=0$. **B.** $2x-y+2z-2=0$.

C. $2x-y+2z+2=0$. **D.** $3x+14y+4z-5=0$.

Lời giải

Gọi $\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;5)$, $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;2)$.

Vì (Q) đi qua A,B và $(Q)\perp(P)$ nên $\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_P}$

Chọn $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(3;14;4)$.

Do đó phương trình của (Q) là: $3(x-1)+14(y-0)+4(z+2)=0$ hay $3x+14y+4z+5=0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;5)$ và mặt phẳng $(\alpha):x+2y+2z-6=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Véc tơ $\vec{n}=(1;2;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (α).

b) Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) có phương trình $x+2y+2z+15=0$

c) Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $2x-y=0$.

d) Điểm $M\in(\alpha)$ sao cho A,O,M thẳng hàng thì tọa độ $M\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5};2\right)$.

Lời giải

a) Đúng: Theo định nghĩa vectơ $\vec{n}=(1;2;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (α).

b) Sai: Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) nên:

$\overrightarrow{n_\beta}=(1;2;2)$, do đó (β) có phương trình: $x-1+2(y-2)+2(z-5)=0\Leftrightarrow x+2y+2z-15=0$

c) Đúng: Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α) nên $\begin{cases}\overrightarrow{n_\beta}\perp\overrightarrow{OA}=(1;2;5)\\ \overrightarrow{n_\beta}\perp\vec{n}=(1;2;2)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{OA},\vec{n}\right]=(-6;3;0)=-3(2;-1;0)$,

Do đó (β) có phương trình: $2x-y=0$.

d) Đúng: Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho A,O,M thẳng hàng

Do $M \in (\alpha): x = 6 - 2y - 2z \Rightarrow M(6 - 2b - 2c; b; c)$

Vì A,O,M thẳng hàng nên $\overrightarrow{OM}(6 - 2b - 2c; b; c) = k.\overrightarrow{OA} = (k; 2k; 5k)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2b - 2c = k \\ b = 2k \\ c = 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{4}{5} \\ c = 2 \\ k = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; 2\right).$$

Câu 2: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-2); B(2;1;2); C(3;-2;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A,B,C có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$

b) Phương trình mặt phẳng (P) là $13x + 5y - 2z + 27 = 0$.

c) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và nhận $\overrightarrow{BC}$ làm véc tơ pháp tuyến có dạng: $1(x+1)x - 3(y+2) - 1(z-2) = 0$.

d) Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $E;F;K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên trục $Ox;Oy;Oz$ có phương trình $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1$.

Lời giải

a) Đúng: Vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1;-1;4) \\ \overrightarrow{AC} = (2;-4;3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (13;5;-2)$.

b) Sai: Phương trình mặt phẳng (P) là

$$13(x-1) + 5(y-2) - 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow 13x + 5y - 2z - 27 = 0.$$

c) Sai: Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và nhận $\overrightarrow{BC} = (1;-3;-1)$ làm véc tơ pháp tuyến có dạng: $1(x-1)x - 3(y-2) - 1(z+2) = 0$.

d) Đúng: Tọa độ ba điểm $E(1;0;0); F(0;2;0); K(0;0;-2)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(1;2;-2)$ lên trục, nên mặt phẳng (EFK) có phương trình $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $3x + y + 5z - 10 = 0$.

b) Bốn điểm A,B,C,D tạo thành tứ diện.

c) Mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD có một vectơ pháp tuyến là $\vec{a}=(4;-2;7)$.

d) Có 2 mặt phẳng đi qua 2 điểm A,B sao cho khoảng cách từ C và D đến mặt phẳng đó bằng nhau và 2 mặt phẳng này đều đi qua điểm $M(1;2;1)$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;2),\overrightarrow{AC}=(1;-3;0)$ suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(6;2;10)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là $3x+y+5z-10=0$.

b) Đúng: Ta có $3.0+3+5.1-10=-2\neq 0$ nên $D\notin(ABC)$.

Do đó bốn điểm A,B,C,D tạo thành tứ diện.

c) Sai: Ta có mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(-8;-4;-14)$.

Vì $\vec{n}$ không cùng phương với $\vec{a}$ nên $\vec{a}=(4;-2;7)$ không là vectơ pháp tuyến của (P).

d) Đúng: **Trường hợp 1:** (P) qua hai điểm A, B và song song với CD, khi đó (P) có vectơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(-8;-4;-14)$ và $A\in(P)\Rightarrow(P):4x+2y+7z-15=0.$

Vì $4.1+2.2+7.1-15=0$ nên $M\in(P)$.

Trường hợp 2: (Q) qua hai điểm A, B cắt CD tại trung điểm I của đoạn CD và ta có $I(1;1;1)\Rightarrow\overrightarrow{AI}(0;-1;0)$ nên vectơ pháp tuyến của (Q) là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]=(2;0;3)$ nên phương trình $(Q):2x+3z-5=0$. Vì $2.1+3.1-5=0$ nên $M\in(Q)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0),B(0;2;0),C(0;0;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=(3;3;2)$.

b) Mặt phẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là $x-y=0$.

c) Mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với (ABC) có phương trình là:

$$x+y-3z+2=0..$$

d) Gọi $M(a;b;c)\in(Oyz)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất thì khi đó $3(a+b)+c=5$.

Lời giải

a) Đúng: Phương trình mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow 3x+3y+2z-6=0.$

Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=(3;3;2)$.

b) Đúng: Gọi (α) là mặt phẳng qua C và vuông góc với AB.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(-2;2;0)=-2(1;-1;0)$.

Phương trình của (α) là $1(x-0)-1(y-0)+0(z-3)=0\Leftrightarrow x-y=0$.

c) Sai: Gọi (β) là mặt phẳng mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với (ABC) có vectơ pháp tuyến của (β) là: $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=(4;4;-12)=4(1;1;-3)$.

Phương trình của (β) là: $1(x-2)+1(y-0)-3(z-0)=0\Leftrightarrow x+y-3z-2=0$.

d) Sai: Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};1\right)$.

Vì $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{MG}\right|$, suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|_{\min}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MG}\right|_{\min}$.

Mà $M\in Oyz\Rightarrow M$ phải là hình chiếu của G lên $Oyz\Rightarrow M\left(0;\frac{2}{3};1\right)$.

$\Rightarrow 3(a+b)+c=2+1=3$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):(4-a)x-(a+3)y+z+1=0$ và mặt phẳng $(Q):3x-4y+z+3=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) song song với nhau khi $a=1$.

b) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) vuông góc với nhau khi $a=2$.

c) Không có giá trị nào của a để hai mặt phẳng trên trùng nhau.

d) Mặt phẳng vuông góc với cả hai mặt phẳng trên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;-7)$.

Lời giải

Đáp án: a) Đúng, b) Sai, c) Đúng, d) Đúng

a) Đúng: Khi $a=1$ ta có $\overrightarrow{n_P}=(3;-4;1)$ và $\overrightarrow{n_Q}=(3;-4;1)$. Vì $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}$ và $1\neq$ nên $(P)\,//\,(Q)$.

b) Sai: Khi $a=2$ thì ta có $\overrightarrow{n_P}=(2;-5;1)$ và $\overrightarrow{n_Q}=(3;-4;1)$.

Vì $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=2.3+(-5).(-4)+1.1=27\neq 0$ nên (P) và (Q) không vuông góc với nhau.

c) Đúng: Hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau khi $\frac{4-a}{3}=\frac{-(a+3)}{-4}=\frac{1}{1}=\frac{1}{3}$.

Vì $1\neq\frac{1}{3}$ nên không có giá trị nào của a để hai mặt phẳng trên trùng nhau.

d) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{n_P}.\vec{n}=(4-a).1+(a+3).1-7=0$ và $\overrightarrow{n_Q}.\vec{n}=3.1+4.1-7=0$.

Vậy $\vec{n}=(1;-1;-7)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng vuông góc với cả (P) và (Q).

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(3;5;-1)$, $B(7;x;1)$, $C(9;2;y)$, $D(-1;2;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Toạ độ điểm M trung điểm của đoạn AD là $(1;7;1)$.

b) Toạ độ điểm E để tứ giác $OADE$ là hình bình hành là $(-4;-3;4)$.

c) Toạ độ điểm C để tam giác ACD vuông tại A là $(9;2;11)$.

d) Để ba điểm A, B, C thẳng hàng thì giá trị của biểu thức $x+y$ bằng 5.

Lời giải

a) Sai: M trung điểm của đoạn AD suy ra toạ độ M là $\left(1;\frac{7}{2};1\right)$.

b) Đúng: Giả sử $E(x;y;z)$

Tứ giác $OADE$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OE} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow E(-4;-3;4)$.

c) Sai: Ta có: $\overrightarrow{AC}=(6;-3;y+1), \overrightarrow{AD}=(-4;-3;4)$

Tam giác ACD vuông tại A suy ra $AC \perp AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=0$

$\Leftrightarrow 6(-4)+(-3).(-3)+(y+1).4=0 \Leftrightarrow y=\frac{11}{4}$ nên $C\left(9;2;\frac{11}{4}\right)$.

d) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4;x-5;2)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-3;y+1)$

Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4=k.6 \\ x-5=k(-3) \\ 2=k(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{2}{3} \\ x=3 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow x+y=5$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;-1;1)$, $B(2;1;-2)$, $C(0;0;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $(1;0;0)$.

b) Toạ độ điểm $E \in Ox$ sao cho $AE \perp BC$ là $(-1;0;0)$.

c) Toạ độ điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ là $(3;0;2)$.

d) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC có toạ độ là $\left(\frac{5}{9};-\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$.

Lời giải

a) Đúng: Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $(1;0;0)$.

b) Đúng: Vì $E \in Ox \Rightarrow E(x;0;0)$ mà $AE \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}=0$

Ta có $\overrightarrow{AE}=(x-1;1;-1),\overrightarrow{BC}=(-2;-1;3)$

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow(x-1)(-2)+1.(-1)-1.3=0\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow E(-1;0;0)$.

c) Sai: Giả sử $M(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(x-1;y+1;z-1)$

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}=(2;1;-3)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2\\y+1=1\\z-1=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=0\\x=-2\end{cases}\Rightarrow M(3;0;-2).$$

d) Đúng: Giả sử $H(x;y;z)$. Ta có: $\overrightarrow{BC}=(-2;-1;3),\overrightarrow{AC}=(-1;1;0),\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;-3;-3)$

$\overrightarrow{AH}=(x-1;y+1;z-1),\overrightarrow{BH}=(x-2;y-1;z+2),\overrightarrow{CH}=(x;y;z-1)$.

Khi đó: $\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CH}\text{ dong phang}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{CH}=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2(x-1)-(y+1)+3(z-1)=0\\-(x-2)+(y-1)=0\\-3x-3y-3(z-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{9}\\y=-\dfrac{4}{9}\\z=\dfrac{8}{9}\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{5}{9};-\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$ với ba vecto đơn vị $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, cho $A(1;1;2)$, $B(2;-1;0),\vec{u}=(1;-2;-1)$.
Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tích có hướng của hai veccto $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là vecto $\vec{k}$.

b) $\left[\vec{u},\vec{i}\right]=(0;1;2)$.

c) $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(6;1;0)$.

d) $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(2;4;-3)$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\begin{cases}\vec{i}=(1;0;0)\\\vec{j}=(0;1;0)\end{cases}\Rightarrow\left[\vec{i},\vec{j}\right]=(0;0;1)=\vec{k}$.

b) Sai: Ta có $\begin{cases}\vec{u}=(1;-2;-1)\\\vec{i}=(1;0;0)\end{cases}\Rightarrow\left[\vec{u},\vec{i}\right]=(0;-1;2)$.

c) Sai: Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)\\\vec{u}=(1;-2;-1)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(-2;-1;0)$.

d) Đúng: Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=(1;1;2)\\ \overrightarrow{OB}=(2;-1;0)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(2;4;-3)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(1;-2;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

b) Vecto $\vec{n}=(1;2;3)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

c) Vecto $\vec{u}=(1;1;0)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng đi qua O và chứa đường thẳng AB.

d) Vecto $\vec{v}=(1;2;3)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng song song với hai đường thẳng AB và OC.

Lời giải

a) Đúng: Ta có một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

b) Sai: Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2;-2;2)\\ \overrightarrow{AC}=(2;-3;1)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(4;2;-2)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC). Mà $\vec{n}=(1;2;3)$ không cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ do $\frac{4}{1}\neq\frac{2}{2}$ nên $\vec{n}=(1;2;3)$ không là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

d) Đúng: Ta có một vecto pháp tuyến của mặt phẳng đi qua O và chứa đường thẳng AB là $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(2;2;0)$. Mà $\vec{n}=(1;1;0)$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]$ nên $\vec{n}=(1;1;0)$ cũng là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng đi qua O và chứa đường thẳng AB.

d) Sai: Ta có một vecto pháp tuyến của mặt phẳng song song với hai đường thẳng AB và OC là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\right]=(2;0;-2)$. Mà $\vec{v}=(1;2;3)$ không cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\right]$ nên $\vec{v}=(1;2;3)$ không phải là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng song song với hai đường thẳng AB và OC.

Câu 10: Cho các điểm $A(1;-2;0);B(2;-1;1);C(1;1;2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x+2y-3z-3=0$.

b) Phương trình mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với BC là $x-2y-z-5=0$.

c) Phương trình mặt phẳng trung trực (β) của đoạn AC là $6y+4z-1=0$.

d) Phương trình mặt phẳng (γ) chứa trục Ox và điểm C là $2y+z=0$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1;1);\overrightarrow{AC}=(0;3;2)$

Vectơ pháp tuyến của (ABC) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;-2;3)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $-1(x-1)-2(y+2)+3z=0$ hay $x+2y-3z+3=0$

b) Đúng : Vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=\overrightarrow{BC}=(-1;2;1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $-1(x-1)+2(y+2)+1z=0$ hay $x-2y-z-5=0$

c) Đúng: Ta có trung điểm của đoạn AC là $M\left(1;\frac{-1}{2};1\right)$

Vectơ pháp tuyến của (β) là $\vec{n}=\overrightarrow{AC}=(0;3;2)$.

Phương trình mặt phẳng (β) là: $0(x-1)+3\left(y+\frac{1}{2}\right)+2(z-1)=0$ hay $6y+4z-1=0$

d) Sai: Ta có $\vec{i}=(1;0;0);\overrightarrow{OC}=(1;1;2)$

Vectơ pháp tuyến của (γ) là $\vec{n}=\left[\vec{i},\overrightarrow{OC}\right]=(0;-2;1)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $0x-2y+1z=0$ hay $2y-z=0$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, Cho tam giác ABC với $A(1;1;1),B(1;2;2),C(4;1;0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}=(0;1;1)$.

b) Tích có hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ là $\vec{a}=(-1;3;-3)$.

c) $\overrightarrow{BC},\vec{b}=(6;-2;-4)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC).

d) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (AOB) là: $\vec{n}=(1;1;2)$.

Lời giải

a) Đúng: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=(0;1;1)$

b) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{AB}=(0;1;1),\overrightarrow{AC}=(3;0;-1)$ và $\vec{a}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;3;-3)$

c) Sai: Ta có: $\overrightarrow{BC}=(3;-1;-2)$

Do đó $\vec{b}=2\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BC},\vec{b}$ là hai vectơ cùng phương. Do đó $\overrightarrow{BC},\vec{b}$ không phải là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC).

d) Sai: Mặt phẳng (AOB) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{OA}=(1;1;1),\overrightarrow{OB}=(1;2;2)$ nên có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;-1;1)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, Cho các điểm $A(1;-2;-1),B(4;1;2),C(2;3;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}=(3;3;3)$.

b) Ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

c) Mặt phẳng đi qua 3 điểm A,B,C có vectơ pháp tuyến là: $\vec{a}=(3;1;-4)$.

d) Mặt phẳng (α) đi qua A đồng thời song song với Oy và đường thẳng BC có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}=(1;0;2)$.

Lời giải

a) Đúng: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=(3;3;3)$

b) Đúng: Hai vectơ $\overrightarrow{AB}=(3;3;3),\overrightarrow{AC}=(1;5;2)$ không cùng phương nên 3 điểm A,B,C không thẳng hàng.

c) Đúng: Mặt phẳng (ABC) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(3;3;3),\overrightarrow{AC}=(1;5;2)$ nên có vectơ pháp tuyến là: $\vec{b}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-9;-3;12)$. Do đó $\vec{a}=(3;1;-4)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

d) Sai: Vectơ $\vec{j}=(0;1;0)$ có giá song song mặt phẳng (α); vectơ $\overrightarrow{BC}=(-2;2;-1)$ có giá song song mặt phẳng (α). Hai vectơ $\vec{j},\overrightarrow{BC}$ không cùng phương.

Do đó: mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương $\vec{j}=(0;1;0),\overrightarrow{BC}=(-2;2;-1)$ nên mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}=\left[\vec{j},\overrightarrow{BC}\right]=(-1;0;2)$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a,b,c đều dương. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $G(1;2;3)$ sao cho G là trọng tâm của ΔABC là

$$6x+3y+2z+18=0$$

c) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $H(1;1;1)$ sao cho H là trực tâm ΔABC là $x+y+z-3=0$

d) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(2;-2;3)$ sao cho độ dài OA,OB,OC theo thứ tự tạo thành cấp số cộng có công sai bằng 2. Khoảng cách từ gốc tọa độ O tới mặt phẳng (α) bằng $\frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, khi đó $T=m+n=19$.

Lời giải

a) Đúng: Theo phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

b) Sai: Vì G là trọng tâm ΔABC ta có $\begin{cases}\frac{a}{3}=1\\ \frac{b}{3}=2\\ \frac{c}{3}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=6\\ c=9\end{cases}$

Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0$

c) Đúng: Vì $H(1;1;1)$ là trực tâm ΔABC ta có $\begin{cases}H\in(ABC)\\ \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\\ -b+c=0\\ a-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=3\\ c=3\end{cases}$

Phương trình (ABC) là: $x+y+z-3=0$

d) Đúng: Giả sử mặt phẳng (α) cắt tia Ox tại điểm có hoành độ bằng a $(a>0)$ khi đó phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{a+2}+\frac{z}{a+4}=1$.

Do (α) đi qua điểm $M(2;-2;3)$ nên ta có $\frac{2}{a}+\frac{-2}{a+2}+\frac{3}{a+4}=1\Leftrightarrow a=2$.

Vậy (α) cắt Ox,Oy,Oz lần lượt tại $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$.

Gọi $d=d(O,(ABC))$.

Áp dụng công thức tính nhanh ta có $\frac{1}{d^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}=\frac{49}{144}$

$\Rightarrow d^2=\frac{144}{49}\Rightarrow d=\frac{12}{7}$. Vậy: $T=m+n=19$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1);B(1;-2;3);C(2;-1;2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ba điểm A,B,C đã cho thẳng hàng.

b) Có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm A,B,C đã cho.

c) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;3)$.

d) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $x+2y+3z-6=0$.

Lời giải

a) Sai: Ta có: $\overrightarrow{AB}=(0;-3;2);\overrightarrow{AC}=(1;-2;1)$ và $\frac{0}{1}\neq\frac{-3}{-2}\Rightarrow\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Do đó ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

b) Sai: Ba điểm A,B,C không thẳng hàng nên tồn tại một mặt duy nhất qua ba điểm này. Vậy

c) Đúng: Ta có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;2;3)$.

d) Đúng: Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $A(1;1;1)$ và nhận vectơ $\vec{n}=(1;2;3)$ làm một vectơ pháp tuyến là: $1(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$ hay $(ABC):x+y+z-6=0$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-3)$ và các $\vec{u}=(-1;-2;5)$, $\vec{v}=(3;-1;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua A và nhận $\vec{u},\vec{v}$ làm cặp vectơ chỉ phương. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(9;13;7)$.

b) Phương trình mặt phẳng $(\alpha):9x+13y+7z-2=0$.

c) Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;-2;-3)$.

d) Mặt phẳng (R) đi qua M song song với (α) có phương trình $x+2y+5z+18=0$.

Lời giải

a) Đúng: Mặt phẳng (α) nhận $\vec{u},\vec{v}$ làm cặp vectơ chỉ phương nên (α) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q}=\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(9;13;7)$.

b) Sai: Phương trình mặt phẳng $(\alpha):9(x-2)+13y+7(z+3)=0\Leftrightarrow 9x+13y+7z+2=0$.

c) Sai: Thay điểm $M(1;-2;-3)$ vào phương trình mặt phẳng $(\alpha):9x+13y+7z+2=0$ ta thấy không thỏa mãn.

d) Sai: Mặt phẳng có dạng $(R):9x+13y+7z+d=0(d\neq 2)$

Vì mặt phẳng qua $M(1;-2;-3)$ nên thay vào ta suy ra $d=38$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình mặt phẳng $(R):9x+13y+7z+38=0$

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-2;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt ba trục tọa độ tại các điểm A,B,C khác gốc tọa độ O sao cho tam giác ABC có trực tâm M. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hình chiếu của điểm M trên trục Ox là $H(-2;0;0)$.

b) Mặt phẳng (P) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;3)$.

c) Phương trình mặt phẳng (P) là $2x-y-3z+14=0$

d) Mặt phẳng $(Q):\ x-y+z-3=0$ vuông góc với (P)

Lời giải

a) Đúng:

b) Đúng:

Do tứ diện $OABC$ vuông tại O và $H(-2;0;0)$ là trực tâm nên $OH \perp (ABC)$, hay $OH \perp (P)$

Mặt phẳng (P) có một véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{HO} = (2;-1;3)$.

c) Sai:Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(-2;1;3)$ có một véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{HO} = (2;-1;3)$ là: $2(x+2)-(y-1)-3(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-3z+14=0$

d) Đúng: Mặt phẳng (Q) có một véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (1;-1;1)$.

Mặt phẳng (P) có một véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (2;-1;-3)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 1.2+(-1).(-1)+1.(-3)=0 \Rightarrow (P) \perp (Q)$

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;3), B(-1;3;2), C(-1;2;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

b) Điểm $G\left(\frac{-1}{3};2;\frac{8}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC.

c) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là: $x+ay+bz+c=0$. Khi đó $a+b+c=4$

d) Điểm $M(1;2;3)$ thuộc mặt phẳng (ABC).

Lời giải

a) Sai: $\overrightarrow{AB} = (-2;2;-1); \overrightarrow{AC} = (-2;1;0)$

Ta có $\frac{-2}{-2} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{0}{-1}$. Do đó $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương.

b) Đúng:

c) Sai: $\overrightarrow{AB} = (-2;2;-1); \overrightarrow{AC} = (-2;1;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = (1;2;2)$

Mặt phẳng (ABC) đi qua A và nhận vecto $\vec{n} = (1;2;2)$ là một vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $1(x-1)+2(y-1)+2(z-3)=0$

$\Rightarrow (ABC): x+2y+2z-9=0$. Khi đó $a=2;b=2;c=-9 \Rightarrow a+b+c=-5$.

d) Sai: Tọa độ điểm M không thỏa mãn phương trình mặt phẳng (ABC) vì $1+2.2+2.3-9 \neq 0$.

Do đó M không thuộc mặt phẳng (ABC).

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z+1=0$. (P) là mặt phẳng đi qua A và song song với (α). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mọi mặt phẳng có pt dạng $x+2y-z+m=0$ (m là tham số thực) đều song song với (α).

b) (P) vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x-3y-4z=0$.

c) (P) có phương trình dạng $ax+by+cz+d=0$ với $\frac{a}{d}=\frac{1}{5}$.

d) (P) đi qua điểm $M(1;2;-1)$.

Lời giải

a) Sai: Nếu $m=1$ thì mặt phẳng đó sẽ trùng với mặt phẳng (α).

b) Đúng: Do $(P)//(\alpha)\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_P}=(1;2;-1)$; $\overrightarrow{n_Q}=(2;-3;-4)$.

Ta có: $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=1.2+2.(-3)+(-1).(-4)=0\Rightarrow(P)\perp(Q)$.

c) Đúng: Do $(P)//(\alpha)\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;2;-1)$ và (P) đi qua điểm $A(2;-3;1)$

$\Rightarrow(P):1.(x-2)+2.(y+3)-1.(z-1)=0\Rightarrow(P):x+2y-z+5=0\Rightarrow a=1;d=5\Rightarrow\frac{a}{d}=\frac{1}{5}$.

d) Sai: Theo trên ta biết $(P):x+2y-z+5=0$

Thay tọa độ điểm $M(1;2;-1)$ vào pt của (P) ta được: $1+2.2-(-1)+5=0$ (vô lí).

Vậy (P) không đi qua M.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;-2)$ và các mặt phẳng $(\alpha):x+2y-2z-1=0$, $(\beta):x+2y-2z+5=0$.

a) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với (α). Giao điểm của (P) và trục Ox là $I(8;0;0)$.

b) Mặt phẳng song song và cách đều 2 mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ có phương trình là

$$(\alpha):x+2y-2z+2=0.$$

c) Mặt phẳng đối xứng với mặt phẳng (α) qua mặt phẳng (β) có phương trình là

$$x+2y-2z+11=0.$$

d) Gọi H là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (α). Mặt phẳng đi qua điểm H và song song với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là $9x+7=0$.

Lời giải

a) Đúng: $(P):1.(x-0)+2.(y-2)-2.(z+2)=0\Leftrightarrow(P):x+2y-2z-8=0$.

Thay $y=0,z=0$ vào phương trình $(P)\Rightarrow x=8$. Vậy (P) cắt trục Ox tại $I(8;0;0)$.

b) Đúng: Trên (α) lấy điểm $M(1;0;0)$, trên (β) lấy điểm $N(-5;0;0)$. Trung điểm MN là $E(-2;0;0)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm$\Rightarrow(P)$ đi qua E và song song với (α)

$\Rightarrow(P):1.(x+2)+2.(y-0)-2.(z-0)=0\Rightarrow(P):x+2y-2z+2=0$.

c) Đúng: Trên (α) lấy điểm $M(1;0;0)$, trên (β) lấy điểm $N(-5;0;0)$. Gọi F là điểm đối xứng với M qua $N \Rightarrow F(-11;0;0)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng đối xứng với mặt phẳng (α) qua mặt phẳng $(\beta) \Rightarrow (Q)$ đi qua F và song song với $(\alpha) \Rightarrow (Q): 1.(x+11)+2.(y-0)-2.(z-0)=0 \Rightarrow (Q): x+2y-2z+11=0$.

d) Đúng: Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x=t \\ y=2+2t \\ z=-2-2t \end{cases}$.

Ta có $H=\Delta \cap (\alpha)$. Xét phương trình: $t+2.(2+2t)-2.(-2-2t)-1=0$

$\Rightarrow t=-\frac{7}{9} \Rightarrow H\left(-\frac{7}{9};\frac{4}{9};-\frac{4}{9}\right)$.

Gọi (R) là mặt phẳng đi qua điểm H và song song với mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow \overrightarrow{n_R}=\vec{i}=(1;0;0)$

$\Rightarrow (R): 1.\left(x+\frac{7}{9}\right)+0.\left(y-\frac{4}{9}\right)+0.\left(z+\frac{4}{9}\right)=0 \Rightarrow (R): 9x+7=0$.

Câu 20: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1), B(0;-1;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(-1;2;-2)$.

b) Điểm A,B nằm về cùng phía của mặt phẳng (P).

c) Mặt phẳng (Q) chứa A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2;-2;3)$.

d) Mặt phẳng (R) đi qua A song song với (P) có phương trình $x-2y+2z-1=0$.

Lời giải

a) Đúng: Từ phương trình mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$ suy ra một vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;2)$. Vậy vectơ $\vec{n}=(-1;2;-2)$ cũng là vectơ pháp tuyến

b) Sai: Đặt $f(x,y,z)=x-2y+2z-5$. Khi đó $f(A).f(B)<0 \Rightarrow A,B$ nằm về 2 phía của (P)

c) Đúng: $\overrightarrow{AB}=(3;-1;2)$; $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;2)$. Vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(2;-4;-5)$

Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $2x-4y-5z+11=0$

Thay toạ độ điểm $M(-2;-2;3)$ vào phương trình mặt phẳng (Q) ta thấy thỏa mãn.

d) Sai: Phương trình mặt phẳng có dạng $(R): x-2y+2z+d=0\ (*)$

Vì mặt phẳng (R) đi qua điểm $A(-3;0;1)$ nên thay toạ độ điểm A vào phương trình $(*)$ ta được $d=1$. Vậy $(R): x-2y+2z+1=0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;0;0)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-1=0$ có dạng $-x+by+cz+d=0$. Tính $b+c-3d$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Do $(P)//(\alpha) \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{n_\alpha} = (2;-1;0)$.

Và (P) đi qua điểm $M \Rightarrow (P): 2.(x-1)-1.(y+0)+0.(z+0)=0 \Rightarrow (P): 2x-y-2=0$.

Vậy $b=\frac{1}{2}, c=0, d=1 \Rightarrow b+c-3d=-2,5$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC có dạng $x+by+cz+d=0$. Tính $b+c+d$.

Lời giải

Mặt phẳng vuông góc với BC có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (1;-2;-5)$.

Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC là $1(x-2)-2(y-1)-5(z+1)=0$ hay $x-2y-5z-5=0$.

Vậy $b=-2, c=-2, d=-5 \Rightarrow b+c+d=-9$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$ và 2 vecto $\vec{a}=(1;-3;2)$, $\vec{b}=(-1;-1;2)$. Một mặt phẳng (Q) chứa điểm A và nhận $\vec{a}, \vec{b}$ làm cặp vecto chỉ phương có phương trình là $ax+by+cz-3=0$. Tính $a+b+c$.

Lời giải

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\overrightarrow{n_{(Q)}} = \left[\vec{b}, \vec{a}\right] = (4;4;4)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) là: $4(x-2)+4(y-0)+4(z-1)=0 \Leftrightarrow 4x-8+4y+4z-4=0$

$\Leftrightarrow 4x+4y+4z-12=0 \Leftrightarrow x+y+z-3=0$. Suy ra $a=b=c=1$ nên $a+b+c=3$.

Câu 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;0;-2), B(-3;1;1), C(5;5;-5)$ có dạng $ax+by+cz+5=0$, khi đó giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;1;3), \overrightarrow{AC}=(4;5;-3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-18;0;-24)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và có một vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = -\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (3;0;4)$ là: $3(x-1)+4(z+2)=0 \Leftrightarrow 3x+4z+5=0$.

Suy ra $a=3, b=0, c=4$ nên $a+b+c=7$.

Câu 5: Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;3)$ là trực tâm của ΔABC với A,B,C là ba điểm lần lượt nằm trên các trục Ox,Oy,Oz (khác gốc tọa độ). Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A,B,C có dạng $mx+ny+pz-14=0$, $(m,n,p\in\mathbb{Z})$. Khi đó $m+n+p$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử: $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}(1-a;2;3);\ \overrightarrow{BH}(1;2-b;3);\ \overrightarrow{BC}(0;-b;c);\overrightarrow{AC}(-a;0;c)$

Do H là trực tâm tam giác ABC nên ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2b+3c=0\\ -a+3c=0\end{cases}$

Phương trình mặt phẳng $(ABC):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ và do $H\in(ABC)\Rightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1.$

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-2b+3c=0\\ -a+3c=0\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b\\ c=\dfrac{2b}{3}\\ \dfrac{1}{2b}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{9}{2b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=14\\ b=7\\ c=\dfrac{14}{3}\end{cases}.$

Phương trình mặt phẳng $(ABC):\dfrac{x}{14}+\dfrac{y}{7}+\dfrac{3z}{14}=1\Leftrightarrow x+2y+3z-14=0.$

Vậy $m+n+p=6$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1;2;0),B(1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-2y+3z-5=0.$ Phương trình của mặt phẳng đi qua hai điểm A, B, đồng thời vuông góc (P) là $2x-ay-bz+c=0.$ Giá trị của biểu thức $a+2b+3c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B, đồng thời vuông góc (P). Khi đó $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}\perp\overrightarrow{n_P}$ với $\overrightarrow{AB}(2;-1;3)$ và $\overrightarrow{n_P}(1;-2;3)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Chọn $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{n_P}\right]=(3;-3;-3)$. Do đó $\overrightarrow{n_Q}(1;-1;-1)$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) mà mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(-1;2;0)$ nên có phương trình là

$(x+1)-(y-2)-z=0\Leftrightarrow x-y-z+3=0\Leftrightarrow 2x-2y-2z+6=0.$

Suy ra $a=2,b=2,c=6$ nên $a+2b+3c=24$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x+by+cz+d=0$ vuông góc với mặt phẳng $(\beta):x+2y+3z+4=0$ và chứa giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x+3y+z-7=0,$ $(Q):x-y+z+1=0.$ Khi đó d bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có vectơ chỉ phương của $(\beta),(P),(Q)$ lần lượt là: $\overrightarrow{n_1}(1;2;3),\ \overrightarrow{n_2}(1;3;1),\ \overrightarrow{n_3}(1;-1;1).$

Khi đó: $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{n_1},\left[\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3}\right]\right]=(-8;16;-8)=-8(1;-2;1)$.

Gọi $A(x;y;z)\in d$ là giao tuyến của (P) và (Q) khi đó toạ độ điểm A thoả mãn hệ:

$\begin{cases}x+3y+z-7=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$ và cho $x=0$ ta có $\begin{cases}3y+z-7=0\\-y+z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\z=1\end{cases}$ khi đó $A(0;2;1)$

Do (α) chứa giao tuyến của (P) và (Q) nên (α) đi qua $A(0;2;1)$.

Phương trình $(\alpha):x-2(y-2)+z-1=0\Leftrightarrow x-2y+z+3=0$. Vậy $d=3$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho độ dài OA,OB,OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $Ax+By+z+D=0$, $(A,B,D\in\mathbb{R})$. Giá trị của biểu thức $A+B+D$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$, điều kiện $a>0;b>0;c>0$

Độ dài OA,OB,OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3

Suy ra $\begin{cases}OB=3OA\\OC=3OB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3a\\c=3b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3a\\c=9a\end{cases}$ nên $A(a;0;0),B(0;3a;0),C(0;0;9a)$

Khi đó phương trình mặt phẳng (α) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{3a}+\frac{z}{9a}=1$.

Vì $M(1;2;3)\in(\alpha)$ nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{3a}+\frac{3}{9a}=1\Leftrightarrow 6=3a\Leftrightarrow a=2$

$\Rightarrow(\alpha):\frac{x}{2}+\frac{y}{6}+\frac{z}{18}=1\Leftrightarrow(\alpha):9x+3y+z-18=0\Rightarrow A=9,B=3,D=-18\Rightarrow A+B+D=-6$

Câu 9: Cho hai điểm $A(3;-1;2)$, $B(2;3;-3)$, $C(-2;1;-2)$ và mặt phẳng (Oyz). Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oyz) sao $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ có giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a-2b+c$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$, sao cho $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow I$ là trong tâm $\Delta ABC\Rightarrow I(1;1;-1)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

$=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)$

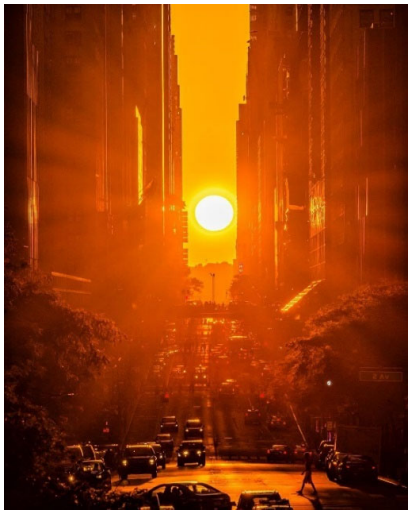
$=3MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}\right)$, (mà $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$)

$=3MI^2+\left(\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}\right)$

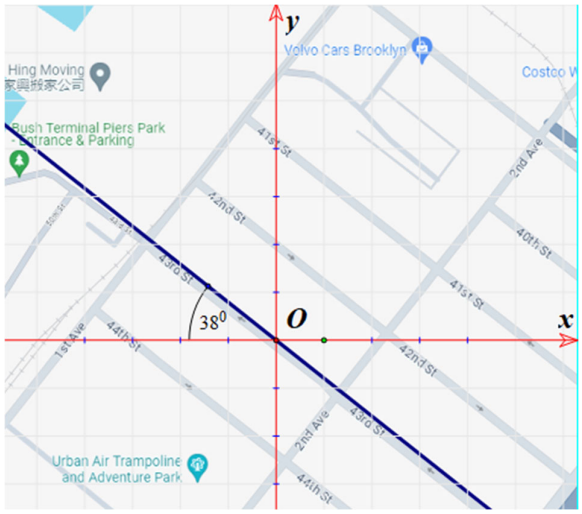
Vì điểm I, A, B, C cố định nên $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}$ có giá trị không đổi.

Để $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ có giá trị min $\Leftrightarrow MI$ min mà I cố định nên M là hình chiếu của I lên (Oyz) suy ra $M(0;1;-1)$. Vậy $a - 2b + c = 0 - 2.1 - 1 = -3$.

Câu 10: Manhattanhenge (Hình 1) là một sự kiện diễn ra khi Mặt Trời mọc hoặc khi Mặt Trời lặn nằm thẳng hàng với các tuyến phố Đông - Tây thuộc mạng lưới đường phố chính tại quận Manhattan của thành phố New York. Khi mặt trời lặn, tia sáng song song mặt đất lệch một góc khoảng $38°$ so với hướng tây (Hình 2).



Hình 1

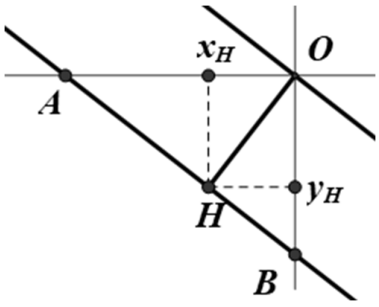


Hình 2

Giả sử mặt tiền các tòa nhà hai bên đường nằm trong 2 mặt phẳng song song cách nhau 30 m và vuông góc với mặt đất. Biết rằng mặt phẳng phía bắc đi qua gốc O của hệ trục $Oxyz$, với tia Oz vuông góc với mặt đất và hướng lên trên. Phương trình mặt phẳng thứ hai có dạng $(Q): x + ay + bz + c = 0$ với $c = \dfrac{m}{\sin n°}$. Tính $m+n$.

Lời giải

Gọi A, B là giao điểm của mp (Q) với trục Ox và Oy, H là hình chiếu vuông góc của O lên AB.



Vì khoảng cách giữa hai mặt phẳng bằng 30 m nên $OH = 30$

Theo giả thiết ta có góc $\widehat{OAH} = 38°$ nên khi đó $OA = \dfrac{OH}{\sin 38°} = \dfrac{30}{\sin 38°}$

$x_H = -OH.\cos 52° = -30.\cos 52°$, $y_H = -OH\cos 38^0 = -30\cos 38^0$

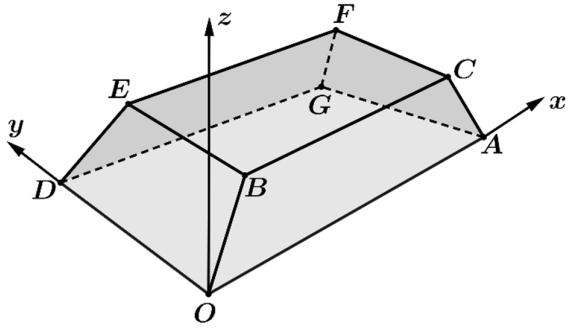
Tọa độ điểm $A\left(-\frac{30}{\sin 38°};0;0\right)$, $H\left(-30\cos 52°;-30\cos 38°;0\right)$ và chọn một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left(1;\frac{\cos 38°}{\cos 52°};0\right)$

Mặt phẳng (Q) đi qua A vuông góc OH nhận $\vec{n}$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình:

$$\left(x+\frac{30}{\sin 38°}\right)+\frac{\cos 38°}{\cos 52°}y=0\Leftrightarrow x+\frac{\cos 38°}{\cos 52°}y+\frac{30}{\sin 38°}=0$$

Vậy $m+n=68$.

Câu 11: Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA=100$ m, chiều rộng $OD=60$ m và tọa độ điểm $B(10;10;8)$. Giả sử phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ có dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính giá trị biểu thức $a+c+d$.



Lời giải

Gắn hình chóp cụt vào hệ trục $Oxyz$ ta có:

$O(0;0;0)$, $A(100;0;0)$, $G(100;60;0)$, $D(0;60;0)$, $B(10;10;8)$

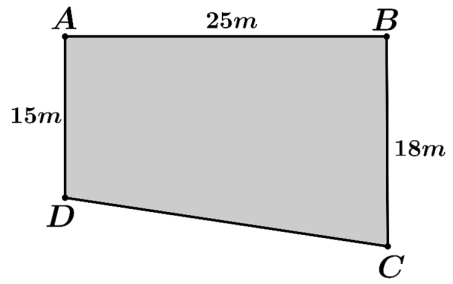
Do $\overrightarrow{OA}=(100;0;0)$, $\overrightarrow{OB}=(10;10;8)$ nên $\vec{n}=[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}]=(0;-100;1000)$.

Suy ra mặt phẳng $(OACB)$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(0;1;-10)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ là $y-10z=0$.

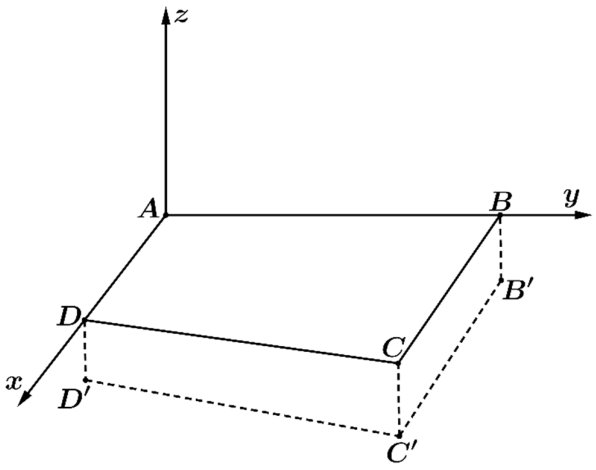
Do đó $a=0,c=-10,d=0$. Vậy $a+c+d=0-10+0=-10$.

Câu 12: Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A,B,C,D, như hình vẽ:



Bước đầu chúng được lấy "thăng bằng" để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB=25\text{m}$, $AD=15\text{m}$, $BC=18\text{m}$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10cm, a cm, 6cm tương ứng. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O\equiv A$, tia $Ox\equiv AD$; tia $Oy\equiv AB$.

Khi đó: $A(0;0;0)$; $B(0;2500;0)$; $C(1800;2500;0)$; $D(1500;0;0)$.

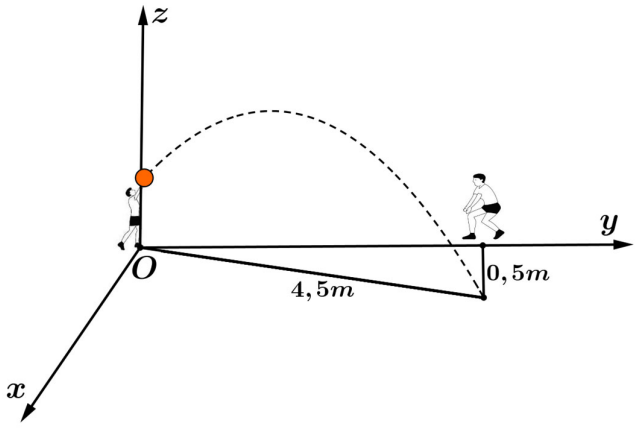
Khi hạ độ cao các điểm ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10cm, a cm 6cm tương ứng ta có các điểm mới $B'(0;2500;-10)$; $C'(1800;2500;-a)$; $D'(1500;0;-6)$. Theo bài ra có bốn điểm A; B'; C'; D' đồng phẳng.

Phương trình mặt phẳng $(AB'D'):x+y+250z=0$.

Do $C'(1800;\,2500;-a)\in(AB'D')$ nên ta có $1800+2500-250a=0\Leftrightarrow a=17{,}2$.

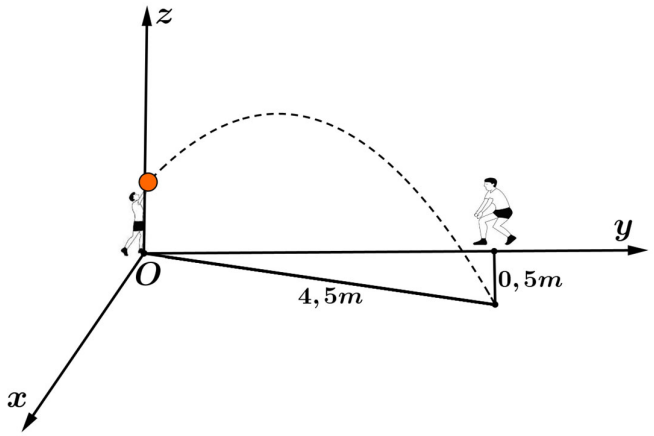
Vậy $a=17{,}2\text{cm}$.

Câu 13: Trong tiết thể dục học về kĩ thuật chuyền bóng hơi, Nam và An đang tập chuyền bóng cho nhau, Nam ném bóng cho An đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Nam và rơi xuống vị trí cách An $0{,}5\text{ m}$ và cách Nam $4{,}5\text{ m}$ được mô tả bằng hình vẽ bên dưới:



Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax+\frac{1}{2}y+cx+d=0$ và vuông góc với mặt đất. Khi đó giá trị của $a+c+d$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải



Chọn hệ trục như hình vẽ. Gọi M là điểm mà quả bóng chạm đất.

Khi đó $x_M=0,5$, $y_M=\sqrt{4,5^2-0,5^2}=2\sqrt{5}$

Vì $(\alpha)\perp(Oxy)$ nên (α) có vectơ chỉ phương $\vec{k}=(0;0;1)$.

Mà (α) có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{OM}=(0,5;2\sqrt{5};0)$

Khi đó vec tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\vec{k},\overrightarrow{OM}\right]=(-2\sqrt{5};0,5;0)$.

Vậy $(\alpha):-2\sqrt{5}x+0,5y=0$ nên $a=-2\sqrt{5};b=0,5;c=0;d=0\Rightarrow a+b+c+d\approx -4,5$.

----------HẾT----------

Dạng 2: Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp: Tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ như sau :

Bước 1: Tìm $M_0(x_0;y_0;z_0)$; viết phương trình mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$.

Bước 2: Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ theo công thức:

$$d(M_0,(P))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Lưu ý: $d(M_0,(Oxy))=\sqrt{(z_0)^2}$ và $d(M_0,Ox)=\sqrt{(y_0)^2+(z_0)^2}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-3=0$ và mặt phẳng (P) không qua O, song song mặt phẳng (Q) và $d((P);(Q))=1$. Viết phương trình mặt phẳng (P)

Lời giải

Gọi phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x+2y+2z+d=0$ Với $d\neq 0; d\neq -3$.

Có $d((P);(Q))=1\Leftrightarrow\frac{|d+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}d=0\\d=-6\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow (P)$ có dạng: $x+2y+2z-6=0$.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

Lời giải

Ta có $(Q)//(P)$ nên mặt phẳng $(Q): 2x-2y+z+C=0$; $C\neq -5$, chọn $M(0;0;5)\in(P)$

Ta có $d((P);(Q))=d(M;(Q))=\frac{|5+C|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C=4\\C=-14\end{array}\right.$

Với $C=4\Rightarrow (Q): 2x-2y+z+4=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_1(-2;0;0)$ có hoành độ âm nên trường hợp này (Q) không thỏa đề bài.

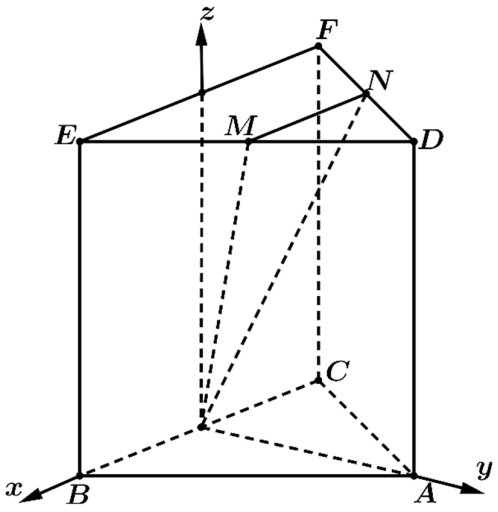
Với $C=-14\Rightarrow (Q): 2x-2y+z-14=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_2(7;0;0)$ có hoành độ dương do đó $(Q): 2x-2y+z-14=0$ thỏa đề bài.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): 2x-2y+z-14=0$.

Bài tập 3: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$ biết rằng $AB=6$, $AD=2$. Gọi ba điểm M, N, P lần lượt là trung điểm DE, DF, BC. Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên. Gọi điểm S thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP).

Lời giải

Ta có $P(0;0;0)$, $A(3\sqrt{3};0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;-3;0)$, $E(0;3;2)$, $F(0;-3;2)$, $D(3\sqrt{3};0;2)$



Suy ra $M\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};2\right)$, $N\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{-3}{2};2\right)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}\right]=\left(6;0;\frac{-9\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow\vec{n}=\left(4;0;-3\sqrt{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $4x-3\sqrt{3}z=0$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm cạnh AC, $IB\Rightarrow I\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{-3}{2};0\right)$, $J\left(\frac{3\sqrt{3}}{4};\frac{3}{4};0\right)$.

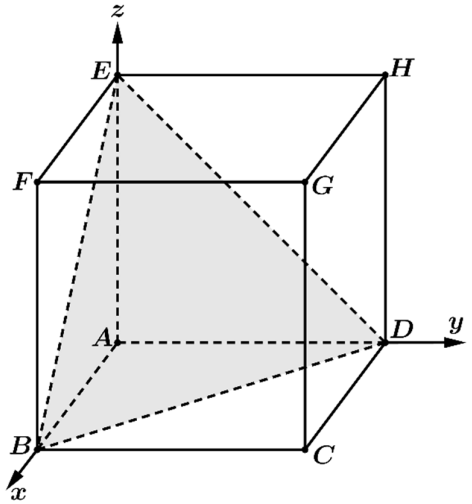
Ta có $\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{SI}+2\overrightarrow{SB}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{SJ}=\vec{0}\Leftrightarrow S\equiv J$.

Do đó $S\left(\frac{3\sqrt{3}}{4};\frac{3}{4};0\right)$.

Vậy khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP) bằng $d=3\sqrt{3}$.

Bài tập 4: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh 1. Điểm M được cho thỏa mãn hệ thức vectơ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CD}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD).

Lời giải



Ta có $A(0;0;0)$, $\overrightarrow{AE}=(0;0;1)$, $\overrightarrow{CD}=(-1;0;0)$.

Đặt $M(a;b;c)$, suy ra $\overrightarrow{AM}=(a;b;c)$.

Đề cho $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CD}$, ta được $\begin{cases}a+0=-3\\b+0=0\\c+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=0\\c=-1\end{cases}$. Suy ra $M(-3;0;-1)$.

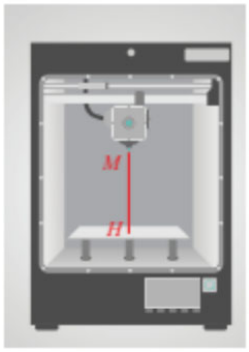
Mặt phẳng (EBD), phương trình theo đoạn chắn là $x+y+z-1=0$.

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD) bằng

$$d(M;(EBD))=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-3+0-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy khoảng cách bằng $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Bài tập 5: Phần mềm điều khiển máy in 3D cho biết đầu in phun của máy đang đặt tại điểm $M(3;4;24)$ (đơn vị: cm). Tính khoảng cách từ đầu in đến khay đặt vật in có phương trình $z-4=0$.

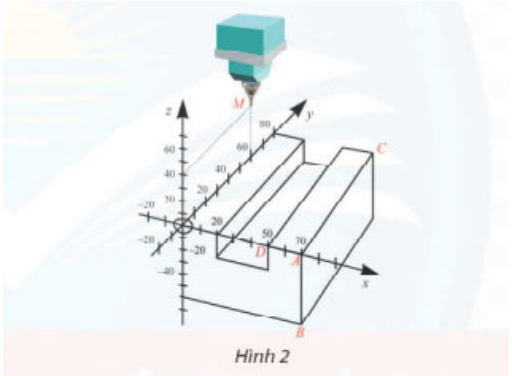


Lời giải

Ta có phương trình mặt phẳng là $(P):z-4=0$

Khoảng cách từ đầu in đến khay đặt vật in là: $d(M,(P))=\frac{|24-4|}{1}=20$.

Bài tập 5: Phần mềm của máy tiện kĩ thuật số CNC (Computer Numerical Control) đang biểu diễn một chi tiết máy như hình vẽ dưới đây:



Hình 2

a) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D.

b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (ACD).

c) Cho biết đầu mũi tiện đang đặt tại điểm $M(0;60;40)$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC).

Lời giải

a) Ta có $A(70;0;0)$, $B(70;0;-60)$, $C(70;80;0)$, $D(50;0;0)$.

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua $A(70;0;0)$ và vuông góc với trục Ox nên có vectơ pháp tuyến là: $\vec{i}=(1;0;0)$.

Suy ra mặt phẳng (ABC) có phương trình là: $1(x-70)=0 \Leftrightarrow x-70=0$.

Mặt phẳng (ACD) đi qua $A(70;0;0)$ và vuông góc với trục Oz nên có vectơ pháp tuyến là: $\vec{k}=(0;0;1)$.

Suy ra mặt phẳng (ACD) có phương trình là: $1(z-0)=0 \Leftrightarrow z=0$.

c) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC) là: $d(M,(ABC))=\dfrac{|0-70|}{1}=70$.

Bài tập 6: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét), một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có sàn nhà nằm trên mặt phẳng (Oxy). Hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x-2y+5=0$ và $(Q): x-2y-3z+20=0$. Hỏi là chiều cao của ngôi nhà tính từ sàn nhà lên nóc nhà (điểm cao nhất của mái nhà) là bao nhiêu?



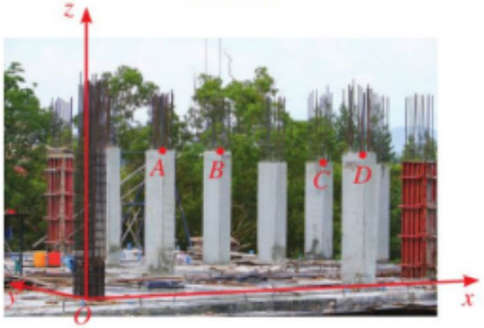
Lời giải

Những điểm thuộc đường nóc nhà có tọa độ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ x-2y-3z+20=0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất chọn $x=-5 \Rightarrow y=0$. Thay vào phương trình còn lại ta được $z=5$

Vậy điểm $A(-5;0;5)$ là một điểm thuộc đường nóc nhà. Khi đó chiều cao cần tìm của của ngôi nhà là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Oxy) và bằng 5 mét.

Bài tập 7: Hình bên dưới minh hoạ một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét).



Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều cạnh đáy dài $1m$ và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2;1;3), B(4;3;3), C(6;3;3)$, $D(4;0;2,5)$. Giám sát công trình tính toán nhận thấy A,B,C,D không đồng phẳng, yêu cầu bên nhà thầu tính khối lượng bê tông cần bổ sung để

độ cao các cột bê tông bằng nhau. Tính thể tích bê tông cần bổ sung (giả sử thể tích phần cốt thép là 3% trên một mét khối bê tông).

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2;0)$, $\overrightarrow{AC}=(4;2;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;0;-4)$.

Phương trình (ABC) đi qua $A(2;1;3)$ và nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;0;-4)$ làm một véctơ pháp tuyến là: $-4(z-3)=0\Leftrightarrow z-3=0$.

Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC): $d\left(D,(ABC)\right)=\dfrac{|2,5-3|}{1}=0,5(m)$.

Vì mỗi cột bê tông là hình lăng trụ tứ giác đều và thể tích phần cốt thép là 3% trên một mét khối bê tông, do đó thể tích phần bê tông cần bổ sung là:

$$V=1.1.0,5(100-3)\%=0,5.97\%=0,485\left(m^3\right).$$

Bài tập 8: Một ngôi nhà có các bậc thang của cầu thang đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Biết hai mặt bậc thang song song nằm trên hai mặt phẳng phân biệt: $(P):2x-y+2z+8=0$ và $(Q):2x-y+2z+2=0$. Khoảng cách giữa hai bậc thang này bằng bao nhiêu?



Lời giải

Khoảng cách giữa hai bậc thang này bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)

$$d\left((P),(Q)\right)=\frac{|2-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2.$$

Vậy khoảng cách giữa hai bậc thang bằng 2.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+5=0$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là :

A. $3\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có $d\left(M,(P)\right)=\frac{|2.1+0+2.1+5|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3$

Câu 2: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(3;1;-2)$ đến mặt phẳng $z=0$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{14}$. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Khoảng cách từ $A(3;1;-2)$ đến mặt phẳng $z=0$ bằng 2.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+1=0$. Khoảng cách điểm M đến mặt phẳng (P) bằng

A. 2. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Ta có: $d\left[M,(P)\right]=\frac{|2.2-2.(-1)+3+1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{10}{3}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(0;3;-1)$ đến mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-2z-2=0$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $d\left(M;(\alpha)\right)=\frac{|2.0+3-2.(-1)-2|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=1$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): x+2y+2z-5=0$ bằng

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** 5. **D.** $\frac{5}{9}$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $M(10;0;0)\in(P)$. Vì $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{2}{2}\neq\frac{-10}{-5}$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) song song.

Khi đó, $d\big((P),(Q)\big)=d\big(M,(Q)\big)=\frac{|10-5|}{\sqrt{9}}=\frac{5}{3}$.

Cách 2: Dùng công thức khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(P):ax+by+cz-d_1=0$ và $(Q):ax+by+cz-d_2=0$ bằng: $d\big((P),(Q)\big)=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Ta có: $d\big((P),(Q)\big)=\frac{|10-5|}{\sqrt{9}}=\frac{5}{3}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+1=0$ và mặt phẳng $(Q):2x-y+2z+4=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đã cho bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Dễ thấy $(P)//(Q)\Rightarrow d((P),(Q))=d\big(M,(Q)\big)$ với $M(0;1;0)\in(P)$

Vậy $d\big((P),(Q)\big)=\frac{|2.0-1+2.0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P):x+y+z-2=0$; $(Q):x+y+z+4=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $d\big((P),(Q)\big)=\frac{|4+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng $(P):2x-y+2z+12=0$ bằng

A. 12. **B.** 1. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $d\big(O,(P)\big)=\frac{|2.0-0+2.0+12|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4$.

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P):2x+y-2z-1=0$, $(Q):6x+3y-6z+15=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ bằng:

A. 2. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Ta có: $(Q):6x+3y-6z+15=0\Leftrightarrow 2x+y-2z+5=0$. Lấy $M(0;1;0)\in(P)$.

Vậy $d\left((P),(Q)\right)=d\left(M,(Q)\right)=\dfrac{|1+5|}{\sqrt{1+4+4}}=2.$

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-4)$. Khoảng cách từ O đến (α) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{61}}{12}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{12\sqrt{61}}{61}$. **D.** 3.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{-4}=1\Leftrightarrow 6x+4y-3z-12=0$

Khoảng cách từ O đến (α) bằng $d\left(O,(\alpha)\right)=\dfrac{|6.0+4.0-3.0-12|}{\sqrt{6^2+4^2+(-3)^2}}=\dfrac{12\sqrt{61}}{61}.$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+y+4z-3=0$ và điểm $A(1;1;3)$. Mặt phẳng $(Q)\,//\,(P)$ và cắt các tia Ox,Oy lần lượt tại các điểm B và C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $2\sqrt{22}$. Khoảng cách từ điểm $M(2;2;1)$ đến (Q) bằng:

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Mặt phẳng $(Q)\,//\,(P)\Rightarrow(Q)$ có dạng: $x+y+4z+d=0\,(d\neq -3)$.

$(Q)\cap Ox=B(-d;0;0)$, $(Q)\cap Oy=C(0;-d;0)$.

Do B, C lần lượt thuộc các tia $Ox,Oy\Rightarrow d<0$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-d-1;-1;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;-d-1;-3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3d;-3d;d^2+2d)$.

$S_{\Delta ABC}=2\sqrt{22}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=2\sqrt{22}\Leftrightarrow 9d^2+9d^2+\left(d^2+2d\right)^2=352$

$\Leftrightarrow d^4+4d^3+22d^2-352=0\,(*)$

Giải $(*)$ chỉ có $d=-4$ thỏa mãn. Khi đó ta có phương trình mặt phẳng $(Q):x+y+4z+4=0$.

Khoảng cách từ điểm $M(2;2;1)$ đến (Q) bằng: $\dfrac{|2+2+4.1+4|}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}=2\sqrt{2}..$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(5;-1;3)$ đến (P) bằng

A. 5. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn $B(2;1;1)\in d$ ta có $\overrightarrow{AB}=(2;0;-1)$ và có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]=(2;4;4)=2(1;2;2)$

Mặt phẳng (P) đi qua A và chứa d suy ra $\overrightarrow{n_P}=(1;2;2)\Rightarrow(P):x+2y+2z-6=0$

Vậy $\mathrm{d}\left(M,(P)\right)=\dfrac{|x_M+2y_M+2z_M-6|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;0;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;-2)$ và đi qua A.

b) Phương trình mặt phẳng qua A và song song (P) là $2x+y-2z+6=0$.

c) Mặt phẳng qua gốc toạ độ O, điểm A và vuông góc (P) có phương trình là $2x-2y+z=0$.

d) Có tất cả hai mặt phẳng song song với (P) và có khoảng cách đến A bằng 2.

Lời giải

a) Sai: Thay toạ độ điểm $A(-1;0;2)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $-2-4=0$ (vô lý).

b) Đúng: Gọi (α) là mặt phẳng qua A và song song (P), suy ra (α) có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;1;-2)$.

Phương trình (α) là: $2(x+1)+1(y-0)-2(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z+6=0$.

c) Đúng: Gọi (β) là mặt phẳng qua O, A và vuông góc (P). Ta có $\overrightarrow{n_P}=(2;1;-2), \overrightarrow{OA}=(-1;0;2)$.

(β) có VTPT là $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{OA}\right]=(2;-2;1)$.

Phương trình của (β) là: $2(x-0)-2(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+z=0$.

d) Sai: Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $2x+y-2z+d=0$.

Ta có $d\left(A,(Q)\right)=2 \Leftrightarrow \dfrac{\left|2(-1)+0-2.2+d\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=2 \Leftrightarrow |d-6|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d-6=6 \\ d-6=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=12(n) \\ d=0(l) \end{array}\right.$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=(3;3;2)$.

b) Mặt phẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là $x-y=0$.

c) Mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với (ABC) có phương trình là

$$x+y-3z+2=0..$$

d) Gọi $M(a;b;c) \in (Oyz)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất,khi đó $3(a+b)+c=5$.

Lời giải

a) Đúng: Phương trình mặt phẳng $(ABC): \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 3x+3y+2z-6=0$.

Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=(3;3;2)$.

b) Đúng: Gọi (α) là mặt phẳng qua C và vuông góc với AB.

Mặt phẳng (α) có VTPT là $\overrightarrow{AB}=(-2;2;0)=-2(1;-1;0)$.

Phương trình của (α) là $1(x-0)-1(y-0)+0(z-3)=0\Leftrightarrow x-y=0$.

c) Sai: Gọi (β) là mặt phẳng mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với (ABC) có một vectơ pháp tuyến của (β) là: $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=(4;4;-12)=4(1;1;-3)$.

Phương trình của (β) là: $1(x-2)+1(y-0)-3(z-0)=0\Leftrightarrow x+y-3z-2=0$.

d) Sai: Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};1\right)$.

Vì $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{MG}\right|$, suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|_{\min}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MG}\right|_{\min}$.

Mà $M\in Oyz\Rightarrow M$ phải là hình chiếu của G lên $Oyz\Rightarrow M\left(0;\frac{2}{3};1\right)\Rightarrow 3(a+b)+c=2+1=3$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x-3y+2z-1=0$ và $(Q):-2x+y+4z-3=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q).

b) Mặt phẳng (R) có phương trình $14x+8y+5z-2=0$ cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

c) Mặt phẳng $(\alpha):2x-6y+4z-9=0$ song song mặt phẳng $(P):x-3y+2z-1=0$ và cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 1.

d) Mặt phẳng (β) qua hai điểm $A(1;0;1)$, $B(2;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_\beta}=(8;4;3)$.

Lời giải

a) Sai: Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\overrightarrow{n_Q}=(-2;1;4)$

Vì hai vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$ và $\overrightarrow{n_Q}=(-2;1;4)$ của hai mặt phẳng (P) và (Q) không cùng phương. Do đó mặt phẳng (P) không song song mặt phẳng (Q).

b) Đúng: Mặt phẳng (R) cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có cặp vecto chỉ phương là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$ và $\overrightarrow{n_Q}=(-2;1;4)$

Mặt phẳng (R) có một vectơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(-14;-8;-5)$ hay chọn $\overrightarrow{n_R}=(14;8;5)$

Vậy mặt phẳng (R) có phương trình $14x+8y+5z-2=0$ cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

c) Sai: Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-6;4)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{n_\alpha}=2.\overrightarrow{n_P}\\ -9\neq 2.(-1)\end{cases}$ nên mặt phẳng (α) song song mặt phẳng (P)

Lấy điểm $M(1;0;0)$ thuộc mặt phẳng $(P):x-3y+2z-1=0$.

Lại có $d(M,mp(\alpha))=\dfrac{|2.1-9|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+4^2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

Nên mặt phẳng (α) cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

d) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-2;0)$ và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\overrightarrow{n_Q}=(-2;1;4)$

Mặt phẳng (β) qua hai điểm $A(1;0;1)$, $B(2;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) nên có cặp vec tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{n_Q}$. Do đó mặt phẳng (β) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{AB}\right]=(8;4;3)$.

Câu 4: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x-2y+z+1=0$, $(Q):2x-2y+z-5=0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(2;0;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

b) Khoảng cách $d(A,(Q))=4$.

c) Khoảng cách $d(P,(Q))=6$.

d) Cho biết điểm $C\in(P)$ và đường thẳng BC tạo với mặt phẳng (P) góc 30^0. Khi đó ta có khoảng cách $BC=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\overrightarrow{n_1}=(2;-2;1)$ và $\overrightarrow{n_2}=(2;-2;1)$ là các véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) tương ứng. Rõ ràng chúng cùng phương nhau

Mặt khác ta có $1\neq -5$ là các hệ số tự do của phương trình tổng quát của 2 mặt phẳng tương ứng.

Từ đó ta có hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau.

b) Sai: Ta có: $d\left(A,(Q)\right)=\dfrac{|0-2+1-5|}{\sqrt{4+4+1}}=2$.

c) Sai: Ta thấy $A(0;1;1)$ thuộc (P) vì tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P): $2.0-2.1+1.1+1=0$.

Vậy có $(P)//(Q)$ và $A\in(P)$ nên $d\left(P,(Q)\right)=d\left(A,(Q)\right)=2$.

d) Sai: Ta thấy $B(2;0;1)$ thuộc (Q) vì tọa độ điểm B thỏa mãn phương trình mặt phẳng (Q): $2.2-2.0+1.1-5=0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P), ta có $BH=d\left(B,(P)\right)=d\left(A,(Q)\right)=2$.

Vì góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (P) bằng 30^0 nên suy ra góc $\widehat{BCH}=30°$.

Do $C\in(P)$ nên xét tam giác BHC vuông tại H có $BH=2$, $\widehat{BCH}=30°$

dó đó ta có $\sin 30°=\dfrac{BH}{BC}\Rightarrow BC=\dfrac{BH}{\sin 30°}=\dfrac{2}{0,5}=4$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x+2y-z+3=0$, $(Q):x+2y-2z+4=0$ và điểm $A(1;2;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm A cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 5.

b) Mặt phẳng (Q) cắt mặt phẳng (P).

c) Mặt phẳng $(R):2x+2y-z=0$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 3.

d) Với mọi giá trị m thì hai mặt phẳng (P) và $(T):x+y+mz+1=0$ cắt nhau.

Lời giải

a) Ta có $d\left(A,(P)\right)=\dfrac{|2+4-3+3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2$.

b) Ta có vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là $\overrightarrow{n_P}=(2;2;-1),\overrightarrow{n_Q}=(1;2;-2)$

Hơn nữa $\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{2}{2}\neq\dfrac{-1}{-2}$ nên hai véctơ $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$ không cùng phương.

Do đó hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau.

c) Ta có hai mặt phẳng (P) và (R) song song nhau.

Lấy điểm $O(0;0;0)$ thuộc mặt phẳng (R) thì $d\left((R),(P)\right)=d\left(O,(P)\right)=\dfrac{|3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=1$

d) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(2;2;-1)$.

Mặt phẳng (T) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_T}=(1;1;m)$.

Vì hai mặt phẳng (P) và (T) cắt nhau nên hai vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_T}$ không cùng phương.

$\Rightarrow m\neq\dfrac{-1}{2}$. Vậy với $m\neq\dfrac{-1}{2}$ thì hai mặt phẳng (P) và (T) cắt nhau.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;0;2)$, $C(2;1;3)$, và mặt phẳng $(P):x-y+2z+7=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $(2;1;1)$.

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(3;1;5)$.

c) Mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P).

d) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 6.

Lời giải

a) Sai: Ta có: $\overrightarrow{AB}(0;-2;2),\overrightarrow{BC}(1;1;1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]=(-4;2;2)=2(-2;1;1)=2.\vec{n}$

Mặt phẳng (ABC) có một véctơ pháp tuyến: $\vec{n}(-2;1;1)$.

b) Đúng: Phương trình mặt phẳng $(ABC):-2(x-1)+1(y-2)+1(z-0)=0\Leftrightarrow -2x+y+z=0$

Thay toạ độ điểm $M(3;1;5)$ vào phương trình mặt phẳng $(ABC):-2.3+1+5=0$: thoả mãn.

c) Sai: Ta có vecto pháp tuyến của mặt phẳng $(P):\overrightarrow{n_P}=(1;-1;2)$.

Khi đó $\overrightarrow{n_P}.\vec{n}=-2.1-1.1+1.2=-1\neq 0$

Mặt phẳng (ABC) không vuông góc với mặt phẳng (P).

d) Sai: $d\left(A;(P)\right)=\dfrac{|1-2+2.0+7|}{\sqrt{1+1+4}}=\sqrt{6}.$

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình là $(P):x-2y+3z+1=0$ và $(Q):2x-4y+6z+1=0$.

a) Các vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng trên cùng phương.

b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) đều đi qua điểm $M(1;1;2)$.

c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

d) Phương trình mặt phẳng (R) cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) là: $4x+8y+12z-5=0$.

Lời giải

a) Đúng: Một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;3)$ và một vectơ pháp tuyến của $\overrightarrow{n_Q}=(2;-4;6)$ và $\overrightarrow{n_Q}=2\overrightarrow{n_P}\Rightarrow\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}$ cùng phương.

b) Sai: Ta có $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{3}{6}\neq\frac{1}{1}\Rightarrow(P)\,//\,(Q)$.

Do đó hai mặt phẳng (P) và (Q) không có điểm chung.

c) Sai: Ta có $(P)\,//\,(Q)$.

Lấy điểm $N(1;1;0)\in(P)\Rightarrow d\big((P),(Q)\big)=d\big(N,(Q)\big)=\frac{|2.1-4.1+6.0+1|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+6^2}}=\frac{\sqrt{14}}{28}$.

d) Đúng: Ta có $(P)\,//\,(Q)$. Lấy $N(1;1;0)\in(P);P\left(1;0;-\frac{1}{2}\right)\in(Q)$.

Gọi I là trung điểm $MN\Rightarrow I\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(R)$ qua I và nhận vectơ $\vec{n}=(1;2;3)$ làm một vectơ pháp tuyến là: $1(x-1)+2\left(y-\frac{1}{2}\right)+3\left(z+\frac{1}{4}\right)=0$

Hay $(R):4x+8y+12z-5=0$.

Câu 8: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;0;-5)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (P) có phương trình là $4x-5z+4=0$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;5)$.

c) Mặt phẳng $(Q):4x-5z+4=0$ song song với (P).

d) Cho điểm $A(-2;1;3)$. Khi đó $d\big(A,(P)\big)=\frac{19}{\sqrt{41}}$.

Lời giải

a) Đúng: Phương trình mặt phẳng (P): $4(x+1)+0(y-2)-5(z-0)=0\Leftrightarrow 4x-5z+4=0$.

b) Sai: Thay điểm M vào phương trình mặt phẳng $(P):4x-5z+4=0$ ta thấy không thỏa mãn

c) Sai: Do $(Q)\equiv(P)$

d) Đúng: $d\big(A,(P)\big)=\frac{|4.(-2)-5.3+4|}{\sqrt{4^2+5^2}}=\frac{19}{\sqrt{41}}$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-3;1)$, $B(1;0;-1)$, $C(3;1;2)$, $D(1;0;-1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là $y-3=0$.

b) Mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng trung trực của BC có phương trình là $2x+y+3z-4=0$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trọng tâm của ΔABC và song song với mp $(\beta): z-2=0$.

Khoảng cách từ điểm A đến (α) bằng $\frac{1}{3}$.

d) Mặt phẳng đi qua điểm D và song song với mặt phẳng (ABC) có phương trình là $11x-y-7z-18=0$

Lời giải

a) Sai: Gọi (P) là mp cần tìm. Do $(P)//(Oxz) \Rightarrow \overrightarrow{n_P}=\vec{j}=(0;1;0)$

Và (P) đi qua điểm $A(2;-3;1) \Rightarrow (P): 0.(x-2)+1.(y+3)+0.(z-1)=0 \Rightarrow (P): y+3=0$

b) Đúng: Trung điểm BC là $I\left(2;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}=(2;1;3)$

Mặt phẳng trung trực của BC là $(Q): 2.(x-2)+1.\left(y-\frac{1}{2}\right)+3.\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$

$\Rightarrow (Q): 2x+y+3z-6=0$.

Gọi (R) là mặt phẳng cần tìm. Do $\Rightarrow (R): 2.(x-2)+1.(y+3)+3.(z-1)=0$

$\Rightarrow (R): 2x+y+3z-4=0$ dễ thấy $(R)//(Q)$

c) Đúng: Trọng tâm ΔABC là điểm $G\left(2;-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Do $(\alpha)//(\beta) \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{n_\beta}=(0;0;1)$ và (α) đi qua điểm G

$\Rightarrow (\alpha): 0.(x-2)+0.\left(y+\frac{2}{3}\right)+1.\left(z-\frac{2}{3}\right)=0 \Rightarrow (\alpha): 3z-2=0$ và

$d\left(A;(\alpha)\right)=\frac{|3.1-2|}{\sqrt{0^2+0^2+3^2}}=\frac{1}{3}$.

d) Sai: $\overrightarrow{AB}=(-1;3;-2), \overrightarrow{AC}=(1;4;1) \Rightarrow$ VTPT $\overrightarrow{n_{ABC}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(11;-1;-7)$

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm. Do $(Q)//(ABC) \Rightarrow$ VTPT $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{n_{ABC}}=(11;-1;-7)$ và (Q) đi qua điểm $D(1;0;-1) \Rightarrow (Q): 11.(x-1)-1.(y-0)-7.(z+1)=0 \Rightarrow (Q): 11x-y-7z-18=0$

Nhận thấy tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình (Q) (vì: $11.2-1.(-3)-7.1-18=0$) nên mặt phẳng (Q) chính là mặt phẳng (ABC).

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-1;0), B(1;1;3), C(-3;2;1), D(-1;14)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (P) qua A,B song song CD có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;3;-1)$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;5)$.

c) Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua C,D song song với AB. Khi đó $d(A,(Q))=\frac{7}{\sqrt{19}}$.

d) Mặt phẳng cách đều AB,CD có dạng $(R):3x+3y-z+\frac{1}{2}=0$.

Lời giải

a) Đúng: Mặt phẳng (P) qua A,B song song CD nên mặt phẳng (P) nhận hai vectơ $\overrightarrow{AB}=(-1;2;3)$, $\overrightarrow{CD}=(2;-1;3)$ làm cặp vectơ chỉ phương suy ra mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(9;9;-3)$

b) Sai: Phương trình mặt phẳng $(P):3x+3y-z-3=0$ thay toạ độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (P) ta thấy không thỏa mãn

c) Đúng: $d(A,(Q))=d(C,(P))=\frac{7}{\sqrt{19}}$

d) Đúng: Mặt phẳng cách đều AB,CD song song với (P) nên có phương trình dạng $(R):3x+3y-z+d=0$

Gọi H là trung điểm của $AC\Rightarrow H\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, suy ra $H\in(R)\Rightarrow d=\frac{1}{2}$

Vậy $(R):3x+3y-z+\frac{1}{2}=0$

Câu 11: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và hai mặt phẳng $(Q):x+y-3z-5=0$, $(R):x+2y-z-1=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (R) đi qua điểm M.

b) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{7}{\sqrt{11}}$.

c) Mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (Q) có phương trình là: $x+y-3z-2=0$

d) Mặt phẳng đi qua điểm $A(1;-2;0)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q):x+y-3z-5=0$, $(R):x+2y-z-1=0$ có phương trình là $5x-2y+z-9=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;-3)$.

Mặt phẳng (R) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(1;2;-1)$.

a) Sai: Thay tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (R) ta được: $1+2.0-1-1\neq 0$ nên mặt phẳng (R) không đi qua điểm M.

b) Đúng: Ta có: $d\left(M;(Q)\right)=\dfrac{|1+0-3-5|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{11}}$.

c) Sai: Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Do (α) song song với (Q) nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}=(1;1;-3)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;-3)$ có phương trình: $(x-1)+(y-0)-3(z-1)=0\Leftrightarrow x+y-3z+2=0$

d) Đúng: Gọi mặt phẳng cần tìm là (P).

Mặt phẳng (P) vuông góc với hai mặt phẳng $(Q),(R)$ nên (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;-3)$, $\overrightarrow{n_2}=(1;2;-1)$. Do đó, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=(5;-2;1)$$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-2;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(5;-2;1)$ có phương trình:

$$5(x-1)-2(y+2)+(z-0)=0\Leftrightarrow 5x-2y+z-9=0.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua điểm $A(1;-2;-2)$, vuông góc với mặt phẳng (Oxz) đồng thời khoảng cách từ điểm $B(3;1;-3)$ đến (P) bằng $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $2x+by+cz+d=0$ $(d\neq 0)$. Tính $P=3b+2c-d$.

Lời giải

Giả sử mặt phẳng cần lập có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(a;b;c)$, $a^2+b^2+c^2\neq 0$

Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $(Oxz):y=0$ nên $\overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(Oxz)}}=0\Leftrightarrow b=0$.

(P) đi qua điểm $A(1;-2;-2)\Rightarrow (P):a(x-1)+c(z+2)=0\Leftrightarrow ax+cz-a+2c=0$.

$$d\left(B;(P)\right)=\frac{|2a-c|}{\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow 5(2a-c)^2=9(a^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow 11a^2-20ac-4c^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2c\\11a=-2c\end{array}\right.$$

Với $a=2c$ chọn $c=1\Rightarrow a=2\Rightarrow (P):2x+z=0$ (loại).

Với $11a=-2c$ chọn $a=2\Rightarrow c=-11\Rightarrow (P):2x-11z-24=0$ (thỏa mãn).

Vậy $P=3b-2c-d=0-2(-11)-(-24)=46$.

Câu 2: Trong hệ tục toạ độ không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, biết $b,c>0$, phương trình mặt phẳng $(P):y-z+1=0$. Tính $M=c+b$ biết $(ABC)\perp(P)$, $d\left[O;(ABC)\right]=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có: $(ABC)\perp(P)\Rightarrow\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0\Leftrightarrow b=c$.

$$d\left[O;(ABC)\right]=\frac{|-1|}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 9=1+2\left(\frac{1}{b}\right)^2,\ (b=c).$$

$\Leftrightarrow b=\pm\frac{1}{2}$, do $b,c>0$ nên $b=c=\frac{1}{2}$. Vậy $M=c+b=1$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x+by+cz+d=0$ vuông góc với mặt phẳng $(\beta):x+2y+3z+4=0$ và chứa giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x+3y+z-7=0$, $(Q):x-y+z+1=0$. Khi đó d bằng

Lời giải

Ta có vectơ pháp tuyến của $(\beta),(P),(Q)$ lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(1;2;3),\overrightarrow{n_2}=(1;3;1),\overrightarrow{n_3}=(1;-1;1)$.

Khi đó $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{n_1},\left[\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3}\right]\right]=(-8;16;-8)=-8(1;-2;1)$.

Gọi $A(x;y;z)\in d$ là giao tuyến của (P) và (Q), khi đó toạ độ điểm A thoả mãn hệ

$\begin{cases}x+3y+z-7=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$. Cho $x=0$ ta có $\begin{cases}3y+z-7=0\\-y+z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\z=1\end{cases}$, khi đó $A(0;2;1)$

Do (α) chứa giao tuyến của (P) và (Q) nên (α) đi qua $A(0;2;1)$.

Phương trình $(\alpha):x-2(y-2)+z-1=0\Leftrightarrow x-2y+z+3=0$. Vậy $d=3$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;3;4)$, $B(6;-3;0)$ và mặt phẳng (P) sao cho $d(B;(P))=2d(A;(P))$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm trên đoạn thẳng AB. Tính $S=a+b+c$.

Lời giải

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên mặt phẳng (P)

Suy ra $BK=d(B;(P))$, $AH=d(A;(P))$ do $AH\perp(P)$; $BK\perp(P)$ nên $AH\ //\ BK$

Suy ra A, H, K, B đồng phẳng và ta có $\Delta IKB\backsim\Delta IHA$ (góc – góc)

Suy ra $\frac{BI}{AI}=\frac{BK}{AH}=\frac{d\left(B;(P)\right)}{d\left(A;(P)\right)}=2\Rightarrow BI=2AI$ mà I thuộc đoạn AB nên $\overrightarrow{BI}=-2\overrightarrow{AI}$

Ta có $\overrightarrow{BI}(a-6;b+3;c),\overrightarrow{AI}(a-2;b-3;c-4)$

$$\overrightarrow{BI}=-2\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\begin{cases}a-6=-2(a-2)\\b+3=-2(b-3)\\c=-2(c-4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{10}{3}\\b=1\\c=\frac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow a+b+c=7.$$ Vậy $S=7$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng $(P):x+Ay+Bz+C=0$ chứa trục Oz và cách điểm M một khoảng lớn nhất, khi đó tính tổng $A+B+C$.

Lời giải

Vì (P) chứa trục Oz nên luôn có $d\left(M;(P)\right)\le d\left(M;Oz\right)$.

Suy ra $d\left(M;(P)\right)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $d\left(M;Oz\right)=MH$, với H là hình chiếu của M trên trục Oz.

Ta có $H(0;0;3)$. Vậy (P) đi qua $H(0;0;3)$, có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{MH}(-1;-2;0)$.

$(P):-x-2y=0\Leftrightarrow x+2y=0\Rightarrow A=2;B=C=0\Rightarrow A+B+C=2$

Câu 6: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha):2x+3y+z+1=0$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với (α), cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 6. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Lời giải

Do (P) song song với (α) nên (P) có phương trình: $2x+3y+z+m=0$, điều kiện $m\neq 1$.

Khi đó: (P) cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm là: $A\left(-\frac{m}{2};0;0\right)$, $B\left(0;-\frac{m}{3};0\right)$, $C(0;0;-m)$, với $m<0$. Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 6 nên $\frac{1}{6}OA.OB.OC=6$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{6}.\left|-\frac{m}{2}\right|.\left|-\frac{m}{3}\right|.\left|-m\right|=6\Leftrightarrow-\frac{m^3}{36}=6\ (\text{do } m<0)\Leftrightarrow m^3=-216\Leftrightarrow m=-6\ (\text{thỏa mãn}).$$

Ta có: $(P):2x+3y+z-6=0\Rightarrow d\left(O;(P)\right)=\frac{\left|2.0+3.0+0-6\right|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{14}}\approx 1,60$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) (*kết quả là tròn đến hàng phần trăm*).

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Phương trình mặt phẳng $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$; $OA+OB+OC=a+b+c$

$M(1;4;9)\in(P)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1$. Áp dụng BĐT Bunhiacopxki**:**

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)(a+b+c)=\left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{9}{c}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right)\geq(1+2+3)^2.$$

$\Rightarrow a+b+c\geq 36$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1\\ \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}\end{cases}\xrightarrow{a+b+c=49}\begin{cases}a=6\\ b=12\\ c=18\end{cases}$. Nên $(P):\frac{x}{6}+\frac{y}{12}+\frac{z}{18}=1$.

Vậy $d=\frac{36}{7}\approx 5{,}14$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;0;0),B(0;4;0),C(0;0;6),D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng $(ABC),(P)$ cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của mặt phẳng (P) là $ax+by+2z+d=0$ với $a,b,d\in\mathbb{Z}$. Giá trị của d bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ABC) nên (P) có dạng:

$$6x+3y+2z+d=0\ \ (d\neq -12)$$

Vì (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC) nên ta có:

$$d(D;(P))=d((ABC);(P))\Leftrightarrow d(D;(P))=d(A;(P))\Leftrightarrow|36+d|=|12+d|\Leftrightarrow d=-24.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $6x+3y+2z-24=0$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $B(6;4;0)$, $C(4;5;1)$, $M(2;1;6)$.Mặt phẳng (P) vuông góc với BC và cách M một khoảng bằng $\sqrt{6}$ có dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính $-3a+c$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{BC}=(-2;1;1)\Rightarrow(P):-2x+y+z+D=0$.

Lại có $d(M;(P))=\sqrt{6}\Leftrightarrow\frac{|D+3|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow|D+3|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=-3\\ D=3\end{array}\right.$

Với $D=-3\Rightarrow(P):-2x+y+z-3=0$.

Với $D=3\Rightarrow (P):-2x+y+z+3=0$.

Vậy $a=-2;c=1\Rightarrow -3a+c=7$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P):2x-y-2z+19=0$ và cách (P) một khoảng bằng 5 có dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính $a+c+d$.

Lời giải

Trên mặt phẳng $(P):2x-y-2z+4=0$ chọn điểm $M(0;4;0)$.

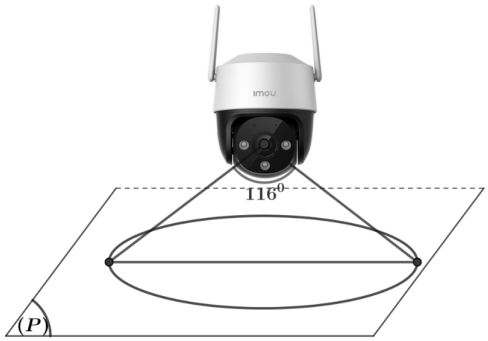
Do (Q) song song với mặt phẳng (P) nên (Q) có dạng: $2x-y-2z+D=0$ với $D\neq 19$.

Vì $d((P),(Q))=5\Leftrightarrow d(M,(Q))=5\Leftrightarrow \dfrac{|-4+D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=5\Leftrightarrow |-4+D|=15\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=-11\\ D=19\end{array}\right.$

Mặt phẳng (Q) thỏa mãn yêu cầu bài toán: $2x-y-2z-11=0$

Vậy $a+c+d=11$

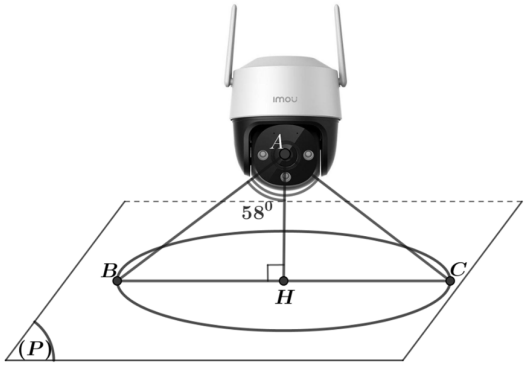
Câu 11: Biết góc quan sát ngang của một camera là $116°$. Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $A(2;1;5)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P):2x-y-2z+13=0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có đường kính bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số hàng chục)



Lời giải

Gọi A,B,C là các điểm như hình vẽ bên dưới và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P)

Hình vẽ minh hoạ



Theo đề $\widehat{BAC}=116^\circ \Rightarrow \widehat{BAH}=58^\circ$. Khi đó $AH=\mathrm{d}\left(A,\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|2\cdot 2-1-2\cdot 5+13\right|}{\sqrt{4+1+4}}=2$ (đvđd).

Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có: $\tan\widehat{BAH}=\dfrac{BH}{AH}\Rightarrow BH=\tan 58^\circ\cdot 2=2\tan 58^\circ$ (đvđd).

Suy ra $BC=2BH=2\cdot 2\tan 58^\circ\approx 6,4$ (đvđd)

Vậy vùng quan sát của camera trên mặt phẳng $\left(P\right)$ là hình tròn có đường kính khoảng $6,4$ (đvđd).

----------HẾT----------

BÀI 02 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ chỉ phương của đường phẳng: Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

Chú ý:

- Đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một vectơ chỉ phương
- Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì $k.\vec{u}$ (với k là một số khác 0) cũng là một vectơ chỉ phương của Δ.

2 Phương trình tham số của đường thẳng

Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$.

Hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ (t là tham số, $t \in \mathbb{R}$).

Chú ý: Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó:

- Với các số a, b, c không đồng thời bằng 0 thì hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ xác định một đường thẳng đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$.
- Từ phương trình tham số của đường thẳng, mỗi giá trị của tham số tương ứng với một điểm thuộc đường thẳng đó và ngược lại.

3 Phương trình chính tắc của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ với a, b, c là các số khác 0.

Hệ phương trình: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ.

4 Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Trong không $Oxyz$, cho hai điểm phân biệt $A_1(x_1;y_1;z_1)$ và $A_2(x_2;y_2;z_2)$. Đường thẳng A_1A_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{A_1A_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.

- Đường thẳng A_1A_2 có phương trình tham số là $\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t\\y=y_1+(y_2-y_1)t\\z=z_1+(z_2-z_1)t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.
- Trong trường hợp $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$, $z_1\neq z_2$ thì đường thẳng A_1A_2 có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có các vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$, $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$. Khi đó $\Delta_1\perp\Delta_2\Leftrightarrow\vec{u}_1.\vec{u}_2=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

5 Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ và tương ứng có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$, $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$. Khi đó:

- $\Delta_1\ /\!/\ \Delta_2\Leftrightarrow\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1\notin\Delta_2$.
- $\Delta_1\equiv\Delta_2\Leftrightarrow\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1\in\Delta_2$.
- Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq\vec{0}\\\overrightarrow{A_1A_2}\perp[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq\vec{0}\\\overrightarrow{A_1A_2}\cdot[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=0.\end{cases}$
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow\overrightarrow{A_1A_2}.[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq0$.

Chú ý: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$, $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$ và có phương trình tham số: $\Delta_1:\begin{cases}x=x_1+a_1t\\y=y_1+b_1t\\z=z_1+c_1t\end{cases}$ $\Delta_2:\begin{cases}x=x_2+a_2t\\y=y_2+b_2t\\z=z_2+c_2t\end{cases}$

Xét hệ phương trình hai ẩn t và s: $\begin{cases}x_1+a_1t=x_2+a_2s\\y_1+b_1t=y_2+b_2s\\z_1+c_1t=z_2+c_2s\end{cases}(*)$. Khi đó

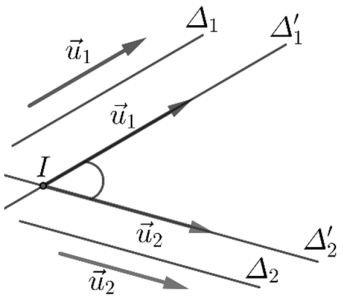
- $\Delta_1\ /\!/\ \Delta_2\Leftrightarrow\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.
- $\Delta_1\equiv\Delta_2\Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có vô số nghiệm.
- Δ_1 cắt $\Delta_2\Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất.
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương và hệ $(*)$ vô nghiệm.

6 Góc

Góc giữa hai đường thẳng:

Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$ và $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

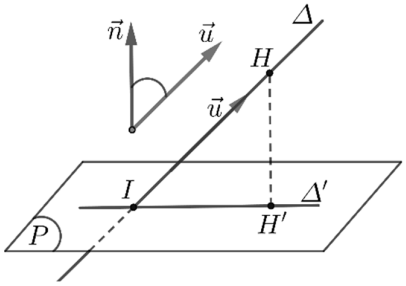
$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\vec{u}_1.\vec{u}_2)\right|=\frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$



Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Trong không gian *Oxyz,* cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$. Khi đó, ta có:

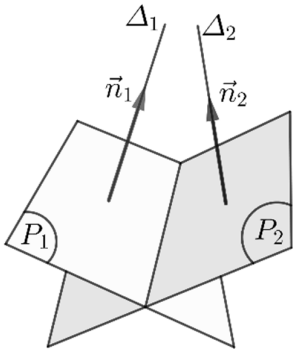
$$\sin(\Delta,(P))=\left|\cos(\vec{u}.\vec{n})\right|=\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



Góc giữa hai mặt phẳng:

Trong không gian *Oxyz*, cho hai mặt phẳng $(P_1),(P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ và $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos((P_1),(P_2))=\left|\cos(\vec{n}_1.\vec{n}_2)\right|=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định các yếu tố cơ bản của đường thẳng trong không gian. Vị trí tương đối trong không gian

Phương pháp: Trong không gian $Oxyz$, vecto $\vec{u}=(a;b;c)\neq\vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì vecto $\vec{m}=k.\vec{u}$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ (hệ số trước t).

Phương trình chính tắc $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ (hệ số ở mẫu).

Nhận xét:

- Với phương trình tham số lấy đúng thứ tự hệ số trước tham số t.
- Với phương trình chính tắc lấy hệ số dưới mẫu.
- Nếu giả thiết chưa đúng cấu trúc, ta phải sắp xếp lại rồi mới lấy hệ số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, xác định một vecto chỉ phương của đường thẳng dưới đây:

a) $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$ b) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ c) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2-z}{1}$

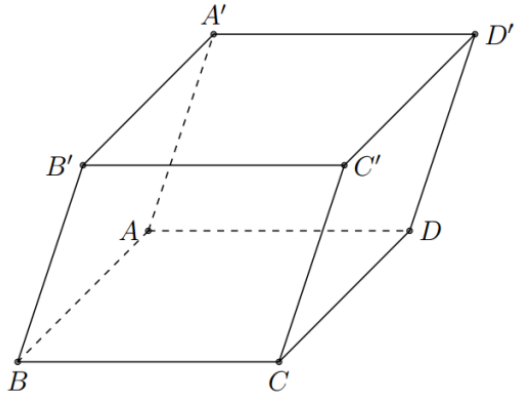
Lời giải

a) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;2;1)$.

b) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{v}=(2;1;2)$.

c) Ta viết lại $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2-z}{1}\Leftrightarrow d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}\Rightarrow\vec{u}_1=(2;2;-1)$.

Bài tập 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp, những véc tơ nào là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AC?



Lời giải

Vì AC song song với $A'C'$ nên các vectơ chỉ phương của đường thẳng AC thỏa bài toán là các vectơ sau đây: $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{C'A'}$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+3t\\y=-1+t\\z=5-2t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$. Trong các điểm sau đây, điểm nào thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(11;2;4)$. **B.** $N(5;0;3)$. **C.** $P(10;3;-3)$. **D.** $Q(8;-3;1)$.

Lời giải

Thế tọa độ $M(11;2;4)$ vào phương trình đường thẳng Δ ta được $\begin{cases}11=2+3t\\2=-1+t\\4=5-2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=3\\t=3\\t=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Vì hệ phương trình trên vô nghiệm nên M không thuộc đường thẳng Δ.

Thế tọa độ $N(5;0;3)$ vào phương trình đường thẳng Δ ta được $\begin{cases}5=2+3t\\0=-1+t\\3=5-2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=1\\t=1\end{cases}$

Vì hệ phương trình trên có nghiệm nên N thuộc đường thẳng Δ.

Thế tọa độ $P(10;3;-3)$ vào phương trình đường thẳng Δ ta được $\begin{cases}10=2+3t\\3=-1+t\\-3=5-2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{8}{3}\\t=4\\t=4\end{cases}$

Vì hệ phương trình trên vô nghiệm nên P không thuộc đường thẳng Δ.

Thế tọa độ $Q(8;-3;1)$ vào phương trình đường thẳng Δ ta được $\begin{cases}8=2+3t\\-3=-1+t\\1=5-2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\t=-2\\t=2\end{cases}$

Vì hệ phương trình trên vô nghiệm nên Q không thuộc đường thẳng Δ.

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=3-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ và $d':\begin{cases}x=2+2t'\\y=3+4t'\\z=5-2t'\end{cases}\ (t'\in\mathbb{R})$

b) $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=5+t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ và $d':\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{2}$

c) $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và $d':\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$

Lời giải

a) Ta có các vectơ chỉ phương của d và d' lần lượt là $\vec{a}=(1;2;-1)$ và $\vec{a}'=(2;4;-2)$.

Vì $\vec{a}'=2\vec{a}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ cùng phương $\Rightarrow d$ và d' song song với nhau hoặc trùng nhau.

Xét điểm $M(1;0;3)\in d$ nên ta có $M\notin d'$ nên $d\parallel d'$.

b) Ta có d và d' lần lượt nhận $\vec{a}=(2;3;1)$ và $\vec{a}'=(3;2;2)$ là các vectơ chỉ phương.

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

Đường thẳng d' qua $M(1;-2;-1)$; có VTCP $\vec{a}'=(3;2;2)$ nên có phương trình là:

$$d':\begin{cases}x=1+3t'\\y=-2+2t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$$
$$z=-1+2t'$$

Xét hệ phương trình : $\begin{cases}1+2t=1+3t'\\-1+3t=-2+2t'\\5+t=-1+2t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{3}{5}\\t'=-\dfrac{2}{5}\\5+t=-1+2t'\end{cases}\Rightarrow$ Hệ vô nghiệm

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

c) Ta có: d đi qua $M(0;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;-1;2)$;

Đường thẳng d' đi qua $M'(1;2;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}'=(5;1;-2)$.

Nên phương trình tham số của d và d' lần lượt là:

$$d:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}\text{ và }d':\begin{cases}x=1+5t'\\y=2+t'\\z=-2-2t'\end{cases}$$

Xét hệ phương trình $\begin{cases}t=1+5t'\\1-t=2+t'\\2t=-2-2t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-5t'=1\\-t-t'=1\\2t+2t'=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{2}{3}\\t'=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ nào là một vectơ chỉ phương của đường thẳng có phương trình $\frac{x-1}{3}=\frac{3y}{2}=\frac{3-z}{1}$?

A. $\vec{a}=\left(3;\frac{3}{2};1\right)$. **B.** $\vec{a}=(9;2;3)$. **C.** $\vec{a}=(3;2;1)$. **D.** $\vec{a}=\left(3;\frac{2}{3};-1\right)$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x-1}{3}=\frac{3y}{2}=\frac{3-z}{1} \Rightarrow \frac{x-1}{3}=\frac{y}{\frac{2}{3}}=\frac{z-3}{-1}$

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng có phương trình là $\vec{a}=\left(3;\frac{2}{3};-1\right)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x+2z+3=0$. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{a}=(1;0;2)$. **B.** $\vec{a}=(2;-1;0)$. **C.** $\vec{a}=(1;2;3)$. **D.** $\vec{a}=(2;0;-1)$.

Lời giải

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α): $x+2z+3=0$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{a}=(1;0;2)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$; $\overrightarrow{OB}=-2\vec{j}-4\vec{k}$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là

A. $\vec{a}=(-2;-5;-1)$. **B.** $\vec{a}=(2;5;-1)$. **C.** $\vec{a}=(2;5;-9)$. **D.** $\vec{a}=(2;1;-9)$.

Lời giải

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{a}=(2;5;-1)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{a}=(3;4;-1)$. **B.** $\vec{a}=(2;-5;3)$. **C.** $\vec{a}=(-3;-4;1)$. **D.** $\vec{a}=(2;-5;-3)$.

Lời giải

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+1}{3}$ là $\vec{a}=(2;-5;3)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{a}=(-1;2;1)$. **B.** $\vec{a}=(2;1;3)$. **C.** $\vec{a}=(1;2;3)$. **D.** $\vec{a}=(2;0;-1)$.

Lời giải

Đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{a}=(-1;2;1)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ nào sau đây là tọa độ của một véctơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+4t\\y=1-6t\\z=9t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$?

A. $\vec{a}=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **B.** $\vec{a}=(2;1;0)$. **C.** $\vec{a}=(4;-6;0)$. **D.** $\vec{a}=\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

Lời giải

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+4t\\y=1-6t\\z=9t\end{cases}$ là $\vec{a}=\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{3}$?

A. $Q(1;-2;-1)$. **B.** $N(-1;3;2)$. **C.** $A(1;2;1)$. **D.** $P(-1;2;1)$.

Lời giải

Điểm thuộc đường thẳng $d:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{3}$ là $P(-1;2;1)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$. Điểm nào sau đây thuộc d?

A. $Q(-1;-2;1)$. **B.** $N(-1;3;2)$. **C.** $A(2;3;-1)$. **D.** $P(1;2;-1)$.

Lời giải

Điểm thuộc đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$ là $P(1;2;-1)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=5+t\\z=2+3t\end{cases}$?

A. $Q(-1;1;3)$. **B.** $N(1;-1;3)$. **C.** $A(-2;5;-2)$. **D.** $P(1;5;2)$.

Lời giải

Điểm thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=5+t\\z=2+3t\end{cases}$ là $P(1;5;2)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=1-t\end{cases}$ không đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(3;2;0)$. **B.** $N(5;1;-1)$. **C.** $A(1;3;1)$. **D.** $P(0;1;2)$.

Lời giải

Điểm không thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=1-t\end{cases}$ là $P(0;1;2)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-4}{1}$. Trong các điểm sau đây, điểm nào **không thuộc** đường thẳng Δ?

A. $M(4;-7;-2)$. **B.** $N(7;-12;6)$. **C.** $P(10;-17;7)$. **D.** $Q(13;-22;8)$.

Lời giải

Thế tọa độ $M(4;-7;-2)$ vào phương trình đường thẳng Δ ta được

$\dfrac{4-1}{3}=\dfrac{-7+2}{-5}=\dfrac{-2-4}{1}\Leftrightarrow 1=1=-6$ (vô lý).

Suy ra M **không thuộc** đường thẳng Δ.

Thế tọa độ $N(7;-12;6)$ vào phương trình đường thẳng Δ ta được

$\dfrac{7-1}{3}=\dfrac{-12+2}{-5}=\dfrac{6-4}{1}\Leftrightarrow 2=2=2$ (đúng).

Suy ra N **thuộc** đường thẳng Δ.

Thế tọa độ $P(10;-17;7)$ vào phương trình đường thẳng Δ ta được

$\dfrac{10-1}{3}=\dfrac{-17+2}{-5}=\dfrac{7-4}{1}\Leftrightarrow 3=3=3$ (đúng).

Suy ra P **thuộc** đường thẳng Δ.

Thế tọa độ $Q(13;-22;8)$ vào phương trình đường thẳng Δ ta được

$\dfrac{13-1}{3}=\dfrac{-22+2}{-5}=\dfrac{8-4}{1}\Leftrightarrow 4=4=4$ (đúng).

Suy ra Q **thuộc** đường thẳng Δ.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+3t\\y=-1+t\\z=5-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Véc tơ nào sau đây là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ?

A. $\vec{u}=(2;-1;5)$. **B.** $(2;-1;-2)$. **C.** $\vec{u}=(3;1;5)$. **D.** $\vec{u}=(3;1;-2)$.

Lời giải

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(3;1;-2)$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-4}{1}$. Véc tơ nào sau đây là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ?

A. $\vec{u}=(1;-2;4)$. **B.** $\vec{u}=(3;-5;1)$. **C.** $\vec{u}=(-1;2;-4)$. **D.** $\vec{u}=(3;-5;4)$.

Lời giải

Một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(3;-5;1)$.

Câu 14: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3},\ \Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{1}$$

A. Δ_1 song song với Δ_2. **B.** Δ_1 chéo với Δ_2.

C. Δ_1 cắt Δ_2. **D.** Δ_1 trùng với Δ_2.

Lời giải

Vì $\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{2}{-2}$ nên vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;2;3)$ của đường thẳng Δ_1 không cùng phương với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(-1;-2;1)$ của Δ_2 suy ra Δ_1 chéo với Δ_2 hoặc Δ_1 cắt Δ_2.

Lấy $M(1;-1;0)\in\Delta_1$, $N(3;3;-2)\in\Delta_2$. Ta có $\overrightarrow{MN}=(2;4;-2)$.

Khi đó $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN}=0$ suy ra $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Vậy Δ_1 cắt Δ_2.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3-t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=1+2t'\\y=-1+2t'\\z=2-2t'\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

B. Hai đường thẳng d và d' song song với nhau.

C. Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

D. Hai đường thẳng d và d' trùng nhau.

Lời giải

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;1;-1)$

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(2;2;-2)$.

Ta có $\overrightarrow{u_2}=2.\overrightarrow{u_1}$ nên đường thẳng d và d' song song hoặc trùng nhau.

Chọn điểm $M(1;2;3)$ thuộc đường thẳng d, thay tọa độ điểm M vào phương trình đường thẳng d', ta có $d':\begin{cases}1=1+2t'\\2=-1+2t'\\3=2-2t'\end{cases}$ vô nghiệm, vậy M không thuộc đường thẳng d' nên 2 đường thẳng song song nhau.

Câu 16: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d':\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=3\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. d và d' chéo nhau. **B.** d song song với d'.

C. d trùng với d'. **D.** d cắt d' tại điểm $A(0;1;-2)$.

Lời giải

Làm bằng phương pháp tự luận:

Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;1;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;1)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $N(-1;1;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(2;1;0)$.

$\Rightarrow\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(-1;2;4)$, $\overrightarrow{MN}=(-1;0;5)\Rightarrow\left[\vec{u},\vec{v}\right].\overrightarrow{MN}=21\neq 0\Rightarrow d$ và d' chéo nhau.

Làm bằng phương pháp trắc nghiệm:

Ta có: $\vec{u}=(2;-1;1)$ và $\vec{v}=(2;1;0)$ không cùng phương $\Rightarrow$ Đáp án B, C loại.

Điểm $A(0;1;-2)$ không thuộc đường thẳng $d'\Rightarrow$ Đáp án D loại.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-3}{m-1}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=4+4t\\y=3-t\\z=2+2t\end{cases}$. Giá trị của m để Δ_1 và Δ_2 vuông góc là

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Đường thẳng Δ_1 qua $M_1(8;-2;3)$ và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;4;m-1)$.

Đường thẳng Δ_2 qua $M_2(4;3;2)$ và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(4;-1;2)$.

Ta có: Δ_1 và Δ_2 vuông góc kh $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0\Leftrightarrow 8-4+2m-2=0\Leftrightarrow m=-1$

Câu 18: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ và $d_2:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+4}{1}$ cắt nhau tại điểm M có toạ độ bằng

A. $M(0;3;-4)$. **B.** $M(1;7;3)$. **C.** $M(-3;5;-5)$. **D.** $M(3;-5;5)$.

Lời giải

Chuyển hai đường thẳng đã cho về dạng phương trình tham số, sau đó:

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 3t'=1+2t \\ 3-2t'=7+t \\ -4+t'=3+4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=-1 \\ t=-2 \end{cases}$

Suy ra hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $M(-3;5;-5)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $M(1;3;2)$ nằm trên đường thẳng d.

b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(1;3;2)$

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=2+2t \end{cases}$.

d) Đường thẳng d và đường thẳng $d':\begin{cases} x=-3t \\ y=t \\ z=-1-3t \end{cases}$ là hai đường chéo nhau.

Lời giải

a) Đúng: Tọa độ điểm $M(1;3;2)$ thỏa mãn phương trình d

b) Vectơ chỉ phương của d là là $\vec{u}(1;-1;2)$

c) Sai: Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=2+2t \end{cases}$.

$d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t' \\ y=3-t' \\ z=2+2t' \end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 1+t'=1+t \\ 3-t'=3-t \\ 2+2t'=2+2t \end{cases}$ hệ có vô số nghiệm nên $d \equiv \Delta$

d) Đúng: Đường thẳng d và đường thẳng $d':\begin{cases} x=-3t \\ y=t \\ z=-1-3t \end{cases}$ là hai đường chéo nhau.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;3;2)$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-1;2)$ và đường thẳng d' đi qua $N(0;0;-1)$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u'}=(-3;1;-1)$.

Ta có $\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{MN}=21\neq 0$ nên d và d' chéo nhau.

Câu 2: Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=3+t\\z=4-5t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là: $\vec{u}=(1;3;4)$.

b) Điểm $A(5;5;-6)$ thuộc đường thẳng Δ.

c) Đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+3t\\y=4t\\z=3+2t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ vuông góc với đường thẳng Δ.

d) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm $M(-5;0;19)$.

Lời giải

a) Sai: Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-5)$.

b) Đúng: Ta có: $\begin{cases}5=1+2t\\5=3+t\\-6=4-5t\end{cases}\Leftrightarrow t=2.$

c) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;-5)$ và $\overrightarrow{u_d}=(3;4;2)$ và dễ thấy: $\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{u_d}=0$.

d) Đúng: Ta có: $y=0\Leftrightarrow 3+t=0\Leftrightarrow t=-3$ nên điểm $M(-5;0;19)$ là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (Oxz).

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có phương trình là: $\Delta_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ và $\Delta_2:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Xets

a) Đường thẳng Δ_1 có một vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2)$ và đi qua điểm $A(-1;-2;1)$.

b) Điểm $M(10;1;-2)$ thuộc đường thẳng Δ_2. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

c) Đường thẳng Δ_1 vuông góc với đường thẳng Δ_2.

d) Đường thẳng Δ_1 và đường thẳng Δ_2 là hai đường thẳng chéo nhau.

Lời giải

a) Sai: Đường thẳng Δ_1 có một vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2)$ và đi qua điểm $A(1;2;-1)$

b) Đúng: Ta có $\dfrac{10-4}{3}=\dfrac{1+1}{1}=\dfrac{-2}{-1}$ là mệnh đề đúng.

c) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;-5)$ và $\overrightarrow{u_d}=(3;4;-2)$ và dễ thấy: $\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{u_d}=0$.

d) Đúng: Đường thẳng Δ_1 có một vectơ chỉ phương là: $\vec{u_1}=(1;-1;2)$ và đi qua điểm $A(1;2;-1)$.

Đường thẳng Δ_2 có một vectơ chỉ phương là: $\vec{u_2}=(3;1;-1)$ và đi qua điểm $M(10;1;-2)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}=(9;-1;-1)$ và $\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right].\overrightarrow{MA}=-20$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có phương trình là: $\Delta_1:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{2}$ và $\Delta_2:\frac{x+4}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng Δ_1 có một vectơ chỉ phương là: $\vec{u_1}=(1;-1;2)$ và đi qua điểm $A(-1;4;-5)$.

b) Đường thẳng Δ_2 không cắt trục toạ độ Oz.

c) Đường thẳng Δ_1 song song với đường thẳng Δ_2.

d) Đường thẳng Δ_1 và đường thẳng Δ_2 là hai đường thẳng chéo nhau.

Lời giải

a) Đúng: Đường thẳng Δ_1 có một vectơ chỉ phương là: $\vec{u}=(1;-1;2)$ và đi qua điểm $A(-1;4;-5)$

b) Sai: Đường thẳng Δ_2 cắt trục toạ độ Oz tại $M(0;0;2)$.

c) Sai: Ta có: $\vec{u_1}=(1;-1;2)$ và $\vec{u_2}=(2;1;-1)$ nên $\vec{u_\Delta},\vec{u_d}$ không cùng phương.

d) Sai: Đường thẳng Δ_1 có một vectơ chỉ phương là: $\vec{u_1}=(1;-1;2)$ và đi qua điểm $A(-1;4;-5)$.

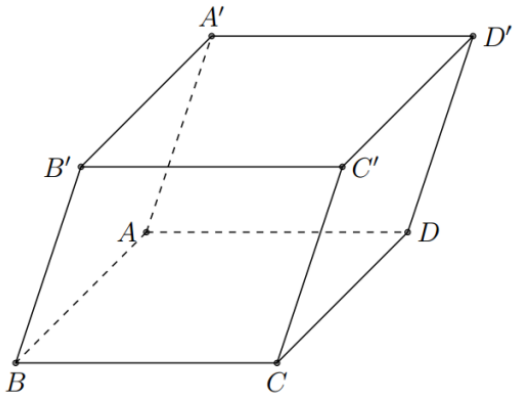
Đường thẳng Δ_2 có một vectơ chỉ phương là: $\vec{u_2}=(2;1;-1)$ và đi qua điểm $M(-4;-2;4)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}=(-3;-6;9)$ và $\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right].\overrightarrow{MA}=0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu vectơ chỉ phương của đường thẳng AB có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của hình hộp.

Lời giải



Đường thẳng $\overrightarrow{AB}$ nhận các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{C'D'},\overrightarrow{D'C'}$ là các vectơ chỉ phương.

Vậy có 8 vectơ thỏa mãn.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi $m\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$ thì đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1;2;0)$; $B(m;-1;3)$ cắt mặt phẳng $(P):\ x+y+z-6=0$. Giá trị của a bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;0)$ và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{AB}(m-1;-3;3)$

Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}(1;1;1)$

d cắt $(P) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{u} = m-1-3+3 = 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Vậy với $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ thì d cắt (P) nên $a = 1$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(-1;3;1)$, $N(-2;1;-2)$, $P(1;2;3)$, $Q(2;-1;2)$, $S(1;2;-3)$. Đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$ đi qua bao nhiêu điểm trong số các điểm đã cho?

Lời giải

Ta có: $M(-1;3;1), P(1;2;3) \in (d)$; $N(-2;1;-2), Q(2;-1;2), S(1;2;-3) \notin (d)$

Vậy đường thẳng (d) đi qua hai điểm.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 3+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và các điểm $M(-1;3;1)$, $N(-2;1;-2)$, $P(1;2;3)$, $Q(2;-1;2)$, $S(1;2;-3)$. Có mấy điểm không thuộc đường thẳng (d) cho trước?

Lời giải

Ta có: $M(-1;3;1), P(1;2;3) \in (d)$; $N(-2;1;-2), Q(2;-1;2), S(1;2;-3) \notin (d)$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;4)$ và $B(5;2;-2)$. Biết $\vec{u} = (a;b;1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là đường đối xứng với AB qua mặt phẳng (Oyz). Tính $a+b$

Lời giải

Do $A'(1;2;4)$ và $B'(-5;2;-2)$ là hai điểm đối xứng với A, B qua mặt phẳng (Oyz) vậy nên đường thẳng Δ đi qua A' và B' nên Δ nhận $\overrightarrow{A'B'} = (-6;0;-6)$ là vectơ chỉ phương.

Khi đó Δ nhận $\vec{u} = (1;0;1)$ là vecto chỉ phương $\Rightarrow a = 1; b = 0 \Rightarrow a+b = 1$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-5}{1}$ và $\Delta': \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{1}$ đối xứng với nhau qua mặt phẳng (P). Biết (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b;3)$. Tính $a+b$.

Lời giải

Đường thẳng Δ qua $A(1;-4;5)$ và nhận $\vec{u} = (2;3;1)$ là vecto chỉ phương.

Đường thẳng Δ' qua $B(-3;-2;3)$ và nhận $\vec{u} = (2;3;1)$ là vecto chỉ phương $\Rightarrow \Delta \,//\, \Delta'$.

Gọi A' là điểm trên Δ' sao cho $AA' \perp \Delta$.

Do $A' \in \Delta' \Rightarrow A'(-3+2t;-2+3t;3+t) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = (-4+2t;2+3t;-2+t)$.

Do $AA' \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AA'}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -8+4t+6+9t-2+t=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{7}$

$\Rightarrow A'\left(\frac{-17}{7};\frac{-8}{7};\frac{23}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \left(\frac{-24}{7};\frac{20}{7};\frac{-12}{7}\right) = -\frac{4}{7}.(6;-5;3)$

Khi đó (P) nhận $\vec{n} = (6;-5;3)$ là vectơ pháp tuyến $\Rightarrow a=6; b=-5 \Rightarrow a+b=1$.

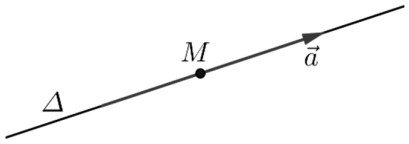
----------HẾT----------

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng

Phương pháp: Ta thường gặp các dạng toán sau:

Dạng 1: Đường thẳng đi qua một điểm và có một vectơ chỉ phương:

Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng Δ đi qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a;b;c)$

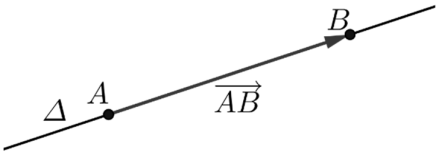


Khi đó phương trình đường thẳng Δ $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ hoặc $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ nếu $\{a;b;c\}\neq 0$.

Chú ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

Dạng 2: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm:

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ qua hai điểm A và B.



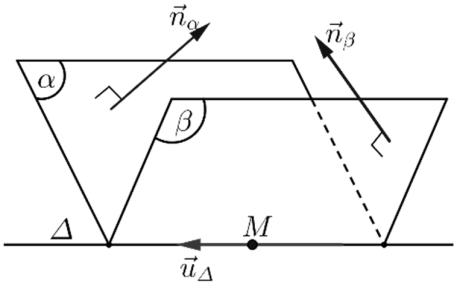
- Chọn A hoặc B là điểm mà Δ đi qua.
- Nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTCP $\rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

Dạng 3: Đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$



- Cho 1 trong 3 ẩn $x;y;z=0$ để tìm 2 ẩn còn lại
- $x=0 \longrightarrow \begin{cases} By+Cz+D=0 \\ B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=? \\ z=? \end{cases} \Rightarrow M(0;?;?)$
- Vecto chỉ phương $\vec{u}=\left[\vec{n}_\alpha;\vec{n}_\beta\right]$.

Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, viết các phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;2)$ và song song với đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+5}{3}$.

Lời giải

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;3)$

Vì $\Delta \,//\, d$ nên vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(2;1;3)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;3)$.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=2+3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

Phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, viết các phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng Δ đi qua $A(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):x+3y-z-1=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;3;-1)$

Vì $\Delta\perp(P)$ nên véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=\vec{n}=(1;3;-1)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2;-1;4)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;3;-1)$.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+3t \\ z=4-t \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$

Phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-4}{-1}$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, viết các phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(2;3;-1)$ và $B(1;-2;4)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-5;5)$.

Vì Δ đi qua hai điểm A và B nên véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-1;-5;5)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2;3;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;-5;5)$.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=2-t \\ y=3-5t \\ z=-1+5t \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$

Phương trình chính tắc của Δ là $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z+1}{5}$.

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=2+3t\end{cases} \text{ và } \Delta_2:\frac{x-8}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2}.$$

a) Chứng minh rằng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và Δ_2.

Lời giải

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $A(1;3;2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;-1;3)$

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $B(8;-2;2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(-1;1;2)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(7;-5;0)$ và $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(-5;-7;1)\neq\vec{0}$ (1).

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=-35+35=0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

b) Mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và Δ_2 nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(-5;-7;1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;3;2)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-5;-7;1)$. có phương trình là:

$$-5(x-1)-7(y-3)+(z-2)=0\Leftrightarrow 5x+7y-z-24=0.$$

Bài tập 5: Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ đi qua điểm $A(-1;3;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;3;4)$;

b) Δ đi qua hai điểm $M(2;-1;3)$ và $N(3;0;4)$.

Lời giải

a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-1;3;2)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}=(-2;3;4)$ là: $\begin{cases}x=-1-2t\\y=3+3t\\z=2+4t\end{cases}$ (t là tham số)

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-1;3;2)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}=(-2;3;4)$ là: $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{4}$

b) Ta có $\overrightarrow{MN}=(1;1;1)$ là một vecto chỉ phương của đường thẳng Δ

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases}x=2+t'\\y=-1+t'\\z=3+t'\end{cases}$ (t' là tham số)

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$

Bài tập 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha):2x+y-z+3=0$ và $(\beta):x+y+z-1=0$. Viết phương trình chính tắc đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β)

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\vec{n}_{(\alpha)}=(2;1;-1)\\\vec{n}_{(\beta)}=(1;1;1)\end{cases}\Rightarrow\left[\vec{n}_{(\alpha)},\vec{n}_{(\beta)}\right]=(2;-3;1)\Rightarrow\vec{u}_{\Delta}=\left[\vec{n}_{\alpha},\vec{n}_{\beta}\right]=(2;-3;1)..$

Gọi $M=(\alpha)\cap(\beta)$ thì $M\in\Delta$ và M thỏa $\begin{cases}2x+y-z+3=0\\x+y+z-1=0\end{cases}\xrightarrow{x=0}\begin{cases}x=0\\y=-1\Rightarrow M(0;-1;2)\\z=2\end{cases}$

Đường thẳng Δ đi qua $M(0;-1;2)$ và nhận $\vec{u}_{\Delta}=(2;-3;1)$ làm một vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Bài tập 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-5z+4=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+5}{6}$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P). Xác định phương trình giao tuyến d' của (Q) và (P)?

Lời giải

Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên (P)

Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;-1;-5)$ và có $\vec{u}_d=(2;1;6)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;1;-5)$.

Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với $(P)\Rightarrow(P)\cap(Q)=d'$.

Vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q=\left[\vec{n}_P,\vec{u}_d\right]=(11;-16;-1)$.

Phương trình của mặt phẳng (Q) là : $11x-16y-z-10=0$.

Do $(P)\cap(Q)=d'$ nên vectơ chỉ phương của đường thẳng d' là: $\vec{u}_{d'}=\left[\vec{n}_Q,\vec{n}_P\right]=-27(3;2;1)$,

$\longrightarrow d'$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(3;2;1)$.

Gọi $I=d\cap(P)$, khi đó tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y-5z+4=0\\\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+5}{6}\end{cases}$.

Giải hệ ta được $(x;y;z)=(1;0;1)$.

Do đó $d':\begin{cases}x=1+3t\\y=2t\\z=1+t\end{cases}$, suy ra đường thẳng d' đi qua điểm $P(4;2;2)$.

Bài tập 8: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=-2+5t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1+s\\y=2+s\\z=1+3s\end{cases}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1;d_2$.

Lời giải

Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1;d_2$.

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(2;1;5)$; d_2 có VTCP là $\vec{u}_2=(1;1;3)$.

Gọi $A=\Delta\cap d_1\Rightarrow A(1+2t;2+t;-2+5t)$; $B=\Delta\cap d_2\Rightarrow B(1+s;2+s;1+3s)$.

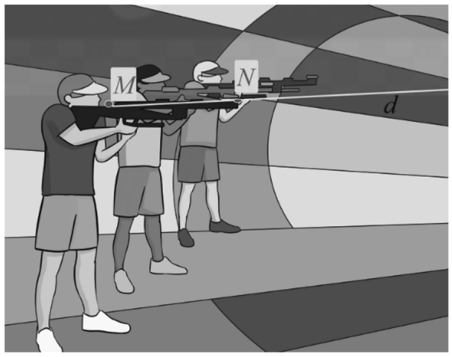
$\overrightarrow{AB}=(s-2t;s-t;3+3s-5t)$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(s-2t)+s-t+5(3+3s-5t)=0\\s-2t+s-t+3(3+3s-5t)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}18s-30t=-15\\11s-18t=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=0\\t=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Suy ra $B(1;2;1)$ và $\overrightarrow{AB}=\left(-1;-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Phương trình đường thẳng đi qua B và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;-1;1)$ là $\begin{cases}x=1-2t\\y=2-t\\z=1+t\end{cases}$.

Bài tập 9: Trong một trò chơi mô phỏng bắn súng 3D trong không gian $Oxyz$, một xạ thủ đang ngắm với tọa độ khe ngắm và đầu ruồi lần lượt là $M(3;3;1,5)$, $N(3;4;1,5)$. Viết phương trình tham số của đường nắm bắn của xạ thủ (xem như đường thẳng MN).



Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MN}=(0;1;0)$ là một vectơ chỉ phương của đường ngắm bắn (đường thẳng MN).

Vậy phương trình tham số của đường ngắm bắn là: $\begin{cases}x=3\\y=3+t\\z=1,5\end{cases}$

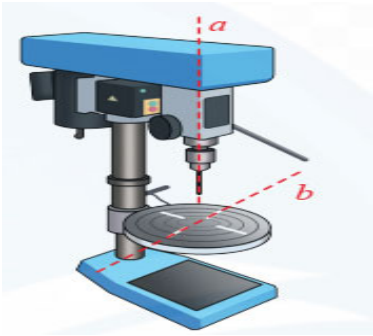
Bài tập 10: Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$, cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan như hình vẽ dưới đây lần lượt là:

$$a:\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3t\end{cases} \text{ và } b:\begin{cases}x=1+4t'\\y=2+2t'\\z=6\end{cases}$$

a) Chứng minh a và b vuông góc và cắt nhau.

b) Tìm giao điểm của a và b.

Lời giải



Đường thẳng $b:\begin{cases}x=1+4t'\\y=2+2t'\\z=6\end{cases}$ có veco chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(4;2;0)$.

Ta thấy: $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0.4+0.2+3.0=0$ do đó đường thẳng a,b vuông góc.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}1=1+4t'\\2=2+2t'\\3t=6\end{cases}(*)$. Vậy đường thẳng a,b vuông góc và cắt nhau.

b) Gọi giao điểm của a và b là M.

Với $t=2$, thay vào phương trình đường thẳng a ta được $\begin{cases}x=1\\y=2\\z=6\end{cases}$

Vậy giao điểm của a và b là $M(1;2;6)$.

Bài tập 11: Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(1;3;4)$ và trong 3 giây, đầu đạn đi với vận tốc không đổi, vectơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v}=(2;1;6)$. Hỏi viên đạn trên có bắn trúng mục tiêu trong mỗi tình huống sau hay không?

a) Mục tiêu đặt tại điểm $M\left(7;\frac{7}{2};21\right)$ b) Mục tiêu đặt tại điểm $N(-3;1;-8)$.

Lời giải

Phương trình mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=3+t\\z=4+6t\end{cases}$

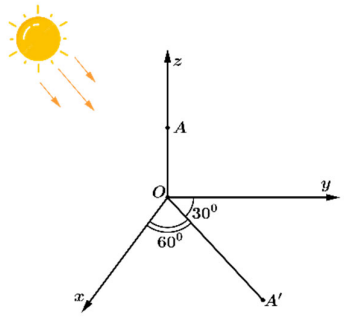
a) Thay tọa độ điểm M vào phương trình chuyển động ta có: $\begin{cases} 7=1+2t \\ \frac{7}{2}=3+t \\ 21=4+6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{17}{6} \end{cases}$

Ta thấy các giá trị t này đều khác nhau do đó điểm M không nằm trên quỹ đạo chuyển động của viên đạn nên viên đạn không bắn trúng mục tiêu đặt tại điểm M.

b) Thay tọa độ điểm N vào phương trình chuyển động của viên đạn ta có: $\begin{cases} -3=1+2t \\ 1=3+t \\ -8=4+6t \end{cases} \Leftrightarrow t=-2$

Suy ra điểm N nằm trên quỹ đạo chuyển động của viên đạn. Do đó viên đạn trên có bắn trúng mục tiêu đặt tại điểm N.

Bài tập 12: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột thẳng cao 6m vuông góc với mặt đất có chân cột đặt tại ví trí O trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời thì bóng của đỉnh cột dưới mặt đất cách chân cột 3m về hướng S60°E (hướng tạo với hướng nam góc $60°$ tạo với hướng đông góc $30°$). Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ là O, tia Ox chỉ hướng nam, tia Oy chỉ hướng đông, tia Oz chứa cây cột, đơn vị đo là mét. Hãy viết phương trình đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét.



Lời giải

Để viết được phương trình đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét ta cần xác định tọa độ của A (đỉnh cột) và A' (bóng của đỉnh cột). Khi đó $A(0;0;6)$

Hoành độ của điểm A' là $x=3\cos 60°=\frac{1}{2}$

Tung độ của điểm A' là $y=3\cos 30°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ do đó $A'\left(\frac{1}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua $A(0;0;6)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AA'}\left(\frac{1}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2};-6\right)$

có phương trình là: $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t \\ y=\frac{3\sqrt{3}}{2}t \\ z=6-6t \end{cases}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho điểm $A(1;2;0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt trục Ox.

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$

Lời giải

Nhận thấy $A(1;2;0) \in (Oxy)$.

Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt trục $Ox \Rightarrow \Delta$ đi qua A và hình chiếu vuông góc của A trên Ox.

Phương trình $\Delta: \begin{cases} x=1 \\ y=2+t \\ z=0 \end{cases}$, hay $\Delta: \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$.

Câu 2: Cho điểm $A(-1;1;0)$.Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt trục Ox, sao cho góc tạo bởi Δ với hai trục Ox, Oy bằng nhau.

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-2t \\ z=0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-t \\ z=0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=0 \end{cases}$

Lời giải

Nhận thấy $A(-1;1;0) \in (Oxy)$.

Nhận thấy đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=-1+t \\ y=1-t \\ z=0 \end{cases}$ đi qua A, O thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Oz.

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$ **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{4}$ **D.** $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$

Lời giải

Đường thẳng Δ cắt trục Oz tại $B(0;0;b) \Rightarrow \overrightarrow{BA}=(1;2;3-b)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Vì $\Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{u_d}=0 \Leftrightarrow 2+2-2(3-b)=0 \Leftrightarrow b=1 \Rightarrow \overrightarrow{BA}=(1;2;2)$.

Vậy phương trình Δ là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt hai trục Ox, Oz tại M, N sao cho $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AN}$.

A. $\begin{cases}x=-1-2t\\y=0\\z=3t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=0\\z=3t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=3+3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=0\\z=3t\end{cases}$

Lời giải

Ta có: $M(m;0;0)$, $N(0;0;n)\ (m\neq n)$; $\overrightarrow{AM}=(m-1;0;-3), \overrightarrow{AN}=(-1;0;n-3)$.

Theo đề bài: $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AN}\Leftrightarrow\begin{cases}m-1=-2\\-3=2n-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\n=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow M(-1;0;0), N\left(0;0;\frac{3}{2}\right)$.

Vậy phương trình $\Delta:\begin{cases}x=-1+2t\\y=0\\z=3t\end{cases}$.

Câu 5: Cho điểm $A(1;-2;1)$ và 2 đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-3}$, $d_2:\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$. Phương trình đường thẳng d_3 đi qua A cắt hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{4}=\frac{1-z}{-5}$ **B.** $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+6}{4}=\frac{z-6}{-5}$

C. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{5}$ **D.** $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+6}{4}=\frac{z-6}{5}$

Lời giải

Gọi giao điểm của đường thẳng d_3 với hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt là M, N.

Ta có: $M(1-t;-1+2t;-3t)$, $N(-u;1+2u;-1+u)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(-t,2t+1,-3t-1), \overrightarrow{AN}=(-u-1,2u+3,u-2)$.

Có A, M, N thẳng hàng nên $\Rightarrow\begin{cases}-t=k(-u-1)\\2t+1=k(2u+3)\\-3t-1=k(u-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-t+ku+k=0\\2t-2ku-3k=-1\\-3t-ku+2k=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{1}{2}\\k=1\\ku=-\frac{1}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{1}{2},2,\frac{-5}{2}\right)=\frac{1}{2}(-1;4;-5)$.

Phương trình đường thẳng d_3 đi qua A có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_3}=(-1;4;-5)$ là:

$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{-5}$.

Nhận thấy điểm $M(2;-6;6)\in d_3$ do đó phương trình d_3 được viết lại thành:

$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+6}{4}=\frac{z-6}{-5}$.

Câu 6: Cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{1}; d_2:\begin{cases}x=1-t\\y=1+2t\\z=-1+t\end{cases}$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{1}$.

B. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{2-y}{-3}=\frac{z-3}{-5}$.

D. $\frac{1-x}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{5}$.

Lời giải

Gọi giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng d_2 là $M(1-t;1+2t;-1+t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(-t;2t-1;t-4)$.

Δ vuông góc $d_1\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_1}=0\Leftrightarrow -2t-2t+1+t-4=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow M(2;-1;-2)$.

Δ đi qua $A(1;2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}=(1;-3;-5)$.

Phương trình chính tắc $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}$ hay $\frac{1-x}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{5}$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $E(2;2;1)$, $F\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$, $O(0;0;0)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A,B,C xuống các cạnh BC,CA,AB. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt trục Ox tại điểm có hoành độ nguyên và tạo với $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ một góc α, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{51}}{9}$.

A. $\frac{x+3}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$

B. $\frac{x+4}{7}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$

C. $\frac{x-3}{7}=\frac{y}{1}=\frac{-z}{1}$

D. $\frac{x-3}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\widehat{OEH}=\widehat{OBH}=90^\circ-\widehat{BAC}\\\widehat{FEH}=\widehat{FCH}=90^\circ-\widehat{BAC}\end{cases}\Rightarrow \widehat{OEH}=\widehat{FEH}$.

Tương tự ta có $\begin{cases}\widehat{FOH}=\widehat{FAH}=90^\circ-\widehat{ACB}\\ \widehat{EOH}=\widehat{EBH}=90^\circ-\widehat{ACB}\end{cases}\Rightarrow \widehat{FOH}=\widehat{EOH}$.

Suy ra trực tâm H của tam giác ABC cũng chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Do đó: $EF.\overrightarrow{HO}+OE.\overrightarrow{HF}+OF.\overrightarrow{HE}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{HO}+3\overrightarrow{HF}+4\overrightarrow{HE}=\vec{0}\Rightarrow H(0;1;1)$.

Do A,H,E thẳng hàng nên $\overrightarrow{HA}=k\overrightarrow{HE}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\\ y=k+1\\ z=1\end{cases}\Rightarrow A(2k;k+1;1)$.

Do $OH\perp OA$ nên $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=0\Leftrightarrow 1.(k+1)+1=0\Leftrightarrow k=-2\Rightarrow A(-4;-1;1)$.

Gọi $M=Ox\cap\Delta, M(m;0;0)$ và $\overrightarrow{AM}=(m+4;1;-1);\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)$.

$$\cos(\Delta;d)=\frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_d}\right|}{AM.\left|\overrightarrow{u_d}\right|}=\frac{|2m+11|}{\sqrt{m^2+8m+18}.3}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{51}}{9}=\frac{|2m+11|}{3\sqrt{m^2+8m+18}}$$

$$\Leftrightarrow 51(m^2+8m+18)=9(4m^2+44m+121)\Leftrightarrow 15m^2+12m-171=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-\dfrac{19}{5}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow M(3;0;0),\overrightarrow{AM}=(7;1;-1)$.

Vậy phương trình $\Delta:\dfrac{x-3}{7}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{-z}{1}$

Câu 8: Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha):x+y-z-3=0$, cắt $d_1:\begin{cases}x=3\\ y=1+3t\\ z=1-2t\end{cases}$ và tạo với đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\ y=4+3t\\ z=-3-2t\end{cases}$ một góc nhỏ nhất, thì phương trình của Δ là:

A. $\begin{cases}x=1\\ y=-t'\\ z=2t'\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=8+5t'\\ y=-3-4t'\\ z=2+t'\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t'\\ y=1-t'\\ z=3-2t'\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+5t'\\ y=1-4t'\\ z=3+2t'\end{cases}$.

Lời giải

Ta thấy: $M\in(\alpha)$. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;3;-2)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Vì $\vec{u}.\vec{n}=0.1+3.1+(-2).(-1)=5\neq 0$ nên d cắt (α).

Dễ thấy $M\in d_1, d\ /\!/\ d_1$.

Lấy $N(3;4;-1)\in d_1$. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ.

Ta có: $\widehat{(d,\Delta)}=\widehat{(d_1,\Delta)}=\widehat{NMH}$ và $\sin\widehat{NMH}=\dfrac{NH}{MN}\geq\dfrac{NK}{MN}$.

Do vậy $\widehat{(d,\Delta)}$ nhỏ nhất khi $K\equiv H$ hay Δ là đường thẳng MK.

Đường thẳng NK có phương trình: $\begin{cases}x=3+t\\y=4+t\\z=-1-t\end{cases}$.

Tọa độ K ứng với t là nghiệm của phương trình: $(3+t)+(4+t)-(-1-t)-3=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{5}{3}$.

Suy ra $K\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MK}=\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}(5;-4;1)$

Đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases}x=3+5t'\\y=1-4t'\\z=1+t'\end{cases}$ hay $\Delta\begin{cases}x=8+5t'\\y=-3-4t'\\z=2+t'\end{cases}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):z-1=0$ và $(Q):x+y+z-3=0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt đường thẳng $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$ và vuông góc với đường thẳng Δ. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=3+t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3-t\\y=t\\z=1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+t\\y=t\\z=1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=-t\\z=1+t\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\vec{n}_P=(0;0;1)$ và $\vec{n}_Q=(1;1;1)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q).

Do $\Delta=(P)\cap(Q)$ nên Δ có một véctơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(-1;1;0)$.

Đường thẳng d nằm trong (P) và $d\perp\Delta$ nên d có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_P,\vec{u'}_\Delta\right]$ $=(-1;-1;0)$.

Gọi $d':\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$ và $A=d'\cap d\Rightarrow A=d'\cap(P)$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} z-1=0 \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=0 \Rightarrow A(3;0;1). \\ x=3 \end{cases}$

Do đó phương trình đường thẳng $d:\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $(d):\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P):x-y-z-1=0$. Viết pt đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(1;1;-2)$, biết $(\Delta)//(P)$ và (Δ) cắt d.

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$.

B. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{5}$.

D. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$.

Lời giải

Gọi $M=(d)\cap(\Delta)\Rightarrow M(-1+2t;1+t;2+3t)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM}=(2t-2;t;3t+4)$ là một vectơ chỉ phương của (Δ).

Hai mặt phẳng $(\Delta)//(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{n_{(P)}}$ với $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;-1;-1)$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_{(P)}}=0\Leftrightarrow 2t-2-t-3t-4=0 \Leftrightarrow t=-3 \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-8;-3;-5)$.

Vậy $(\Delta):\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{5}$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d.

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

B. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

C. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

D. $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\vec{n}_{(P)}=(1;2;1)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d=(2;1;3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=-2+3t \end{cases}$.

Xét phương trình: $-1+2t+2t-2+3t-4=0\Leftrightarrow 7t-7=0\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là $A(1;1;1)$. Ta có: $A \in \Delta$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là: $\vec{u}_\Delta = \left[\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_d\right] = (5;-1;-3)$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z+5=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$. Đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P), đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+1}{2}$.

B. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$.

C. $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$.

D. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải

Vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (3;2;-1)$, vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2;2;1)$.

$\left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (2;-3;2)$ là vectơ chỉ phương của Δ.

Mặt khác, do Δ cắt d nên Δ đi qua giao điểm M của d và mặt phẳng (P).

Tọa độ giao điểm M của d và (P) là nghiệm hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+2t \\ z = t \\ x+2y+2z+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow M(-1;-1;-1).$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+z+1=0$. Viết phương trình đường thẳng qua giao điểm của đường thẳng d với (P), nằm trên mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d.

A. $\begin{cases} x = -2-t \\ y = -2 \\ z = 3+2t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 0 \\ z = 1-2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -3-t \\ y = 4 \\ z = 1+2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -2+t \\ y = -2 \\ z = 4-2t \end{cases}$.

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm

Gọi $H = d \cap (P)$, suy ra $H(1+2t;2-t;3+t)$ thay tọa độ H và (P)

$2(1+2t)+(2-t)+(3+t)+1=0 \Leftrightarrow t=-2$ suy ra $H(-3;4;1)$

Vì đường thẳng Δ nằm trong (P) nên nhận $\vec{n}=(2;1;1)$ làm vectơ pháp tuyến của đường thẳng d.

Vì đường thẳng Δ vuông góc với d nên nhận $\overrightarrow{u_d}=(2;-1;1)$ làm vectơ pháp tuyết của đường thẳng Δ.

Ta có: $\overrightarrow{u_t}=\left[\vec{n},\overrightarrow{u_d}\right]=(2;0;-4)$ hay $(-1;0;2)$ là vectơ pháp tuyến của Δ, phương trình cần tìm Δ:

$$\begin{cases} x=-3-t \\ y=4 \\ z=1+2t \end{cases}$$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d:\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=4-2t \end{cases}$ và $d':\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

A. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

B. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+2}{2}$.

C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$.

D. $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $A(2;1;4)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(-1;2;-2)$.

Đường thẳng d' đi qua $B(4;-1;0)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;2)$.

Ta có $\overrightarrow{u_1}=-\overrightarrow{u_2}$ và $\dfrac{2-4}{1}\neq\dfrac{1+1}{-2}\neq\dfrac{4}{2}$ nên $d//d'$.

Đường thẳng Δ thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta//d//d' \\ d(\Delta,d)=d(\Delta,d') \end{cases}$ hay Δ qua trung điểm $I(3;0;2)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-2;2)$. Khi đó phương trình của $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{4}$ và $d_2:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;2;-4)$ và cắt hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. $\begin{cases} x=t \\ y=2-2t \\ z=-4+3t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=t \\ y=2+2t \\ z=-4-3t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=-t \\ y=2-2t \\ z=-4+3t \end{cases}$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d_1

Đường thẳng d_1 đi qua $B(2;1;-1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;-1;3)$

Ta có, $\overrightarrow{AB}=(2;-1;3)$

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là: $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{AB}\right]=(-2;2;2)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và chứa d_2

Đường thẳng d_2 đi qua $C(-1;3;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(-2;3;-1)$

Ta có $\overrightarrow{AC}=(-1;1;2)$

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là: $\left[\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{AC}\right]=(7;5;1)$.

Khi đó đường thẳng Δ cần tìm là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q)

Suy ra một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là: $\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(-8;16;-24)=-8(1;-2;3)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần tìm là: $\begin{cases}x=t\\y=2-2t\\z=-4+3t\end{cases}$.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2), B(3;3;0)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{3}$. Gọi M là trung điểm của AB. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $H(1;1;1)$ và cắt hai đường thẳng d và OM

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+23t\\z=1-15t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+23t\\z=1+15t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-2t\\y=1-23t\\z=1-15t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-23t\\z=1-15t\end{cases}$.

Lời giải

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $M(2;3;1)$

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua H và chứa d

Đường thẳng d đi qua $M_1(0;-2;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(-2;1;3)$; $\overrightarrow{HM_1}=(-1;-3;0)$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_p}=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{HM_1}\right]=(9;3;7)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua H và chứa OM

Đường thẳng OM đi qua O và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{OM}=(2;3;1)$; $\overrightarrow{OH}=(1;1;1)$

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OH}\right]=(2;-1;-1)$.

Đường thẳng Δ đi qua $H(1;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(2;23;-15)$ nên có phương trình là $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+23t\\z=1-15t\end{cases}$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $N(0;-1;2)$ và hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3-2t\end{cases}$, $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-11}{4}$. Đường thẳng Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho N là trung điểm của AB. Đường thẳng Δ có phương trình là

A. $\begin{cases}x=0\\y=-1+t\\z=2+3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=0\\y=1+4t\\z=-1-6t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=0\\y=-1+5t\\z=2+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=0\\y=3+4t\\z=1-t\end{cases}$.

Lời giải

Do $A=\Delta\cap d_1$ suy ra $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{IA}\right]=(4;-6;-1)$ nên $A(1-t;2+t;3-2t)$.

Vì N là trung điểm AB, suy ra $B(t-1;-4-t;2t+1)$.

Theo giả thiết, $B\in d_2$ nên $\dfrac{1-t-2}{1}=\dfrac{2+t+1}{-2}=\dfrac{2t+1-11}{4}\Leftrightarrow t=1\Rightarrow\begin{cases}A(0;3;1)\\B(0;-5;3)\end{cases}$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(0;3;1)$, $B(0;-5;3)$ nên $\Delta:\begin{cases}x=0\\y=3+4t\\z=1-t\end{cases}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $P(2;1;-4)$ và đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=-12+t\end{cases}$.

Đường thẳng Δ cắt d_1, và trục Oy lần lượt tại A và B sao cho P là trung điểm của AB. Đường thẳng Δ có phương trình là

A. $\begin{cases}x=2+3t\\y=1+2t\\z=-4+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2t\\y=-2+3t\\z=-4t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=1-5t\\z=-4+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3-t\\y=3-2t\\z=1-5t\end{cases}$.

Lời giải

Do $B=\Delta\cap Oy$ suy ra $B\in Oy$ nên $B(0;a;0)$.

Vì P là trung điểm AB, suy ra $A(4;2-a;-8)$.

Theo giả thiết, $A \in d_1$ nên $\begin{cases} 4 = t \\ 2 - a = t \\ -8 = -12 + t \end{cases} \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow \begin{cases} A(4;4;-8) \\ B(0;-2;0) \end{cases}$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(4;4;-8)$, $B(0;-2;0)$ nên $\Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = -4t \end{cases}$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$ **C.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ **D.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$

Lời giải

Cách1: Đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;2)$

Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d, nên nhận véc tơ chỉ phương của d là vecto pháp tuyến $(P): 1(x-1) + y + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 5 = 0$

Gọi B là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng $d \Rightarrow B(1+t;t;-1+2t)$

Vì $B \in (P) \Leftrightarrow (1+t) + t + 2(-1+2t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow B(2;1;1)$

Ta có đường thẳng Δ đi qua A và nhận vecto $\overrightarrow{AB} = (1;1;-1)$ là véc tơ chỉ phương có dạng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Cách2: Gọi $d \cap \Delta = B \Rightarrow B(1+t;t;-1+2t)$

$\overrightarrow{AB} = (t;t;-3+2t)$, Đường thẳng d có VTCP là $\overrightarrow{u_d} = (1;1;2)$

Vì $d \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t + t + 2(-3+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (1;1;-1)$. Ta có đường thẳng Δ đi qua $A(1;0;2)$ và nhận véc tơ $\overrightarrow{AB} = (1;1;-1)$ là véc tơ chỉ phương có dạng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm M, cắt và vuông góc với Δ.

A. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$. **B.** $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1}$.

C. $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$. **D.** $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Lời giải

Gọi $N = d \cap \Delta \Rightarrow N \in \Delta$ nên $N(1+2t;-1+t;-t)$. Khi đó ta có $\overrightarrow{MN} = (2t-1;t-2;-t)$. Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2;1;-1)$.

Vì $d \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 2(1+2t) - 2 + t + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$. Chọn vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{a_d} = (1;-4;-2)$.

Vậy phương trình của $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;-1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{-4}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng d.

A. $\frac{x}{13} = \frac{y-1}{28} = \frac{z+1}{-20}$.

B. $\frac{x}{-13} = \frac{y-1}{28} = \frac{z+1}{20}$.

C. $\frac{x}{13} = \frac{y-1}{28} = \frac{z+1}{20}$.

D. $\frac{x}{13} = \frac{y-1}{-28} = \frac{z+1}{20}$.

Lời giải

Gọi B là giao điểm của đường thẳng d và đường thẳng Δ.

Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -3+4t \\ y = 1-t \\ z = 3-4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

$B \in d \Rightarrow B(-3+4t;1-t;3-4t)$; $\overrightarrow{AB} = (-3+4t;-t;4-4t)$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4;-1;-4)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 4(-3+4t) - 1(-t) - 4(4-4t) = 0 \Leftrightarrow 33t = 28 \Leftrightarrow t = \frac{28}{33}$

$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{13}{33};\frac{-28}{33};\frac{20}{33}\right)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;1;-1)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{AB}$ hay $\vec{u}_d(13;-28;20)$ là vectơ chỉ phương, có phương trình chính tắc là $\frac{x}{13} = \frac{y-1}{-28} = \frac{z+1}{20}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0;2;0)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4+3t \\ y = 2+t \\ z = -1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\frac{x}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$. **B.** $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{2}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-2}$. **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

Lời giải

Ta có đường thẳng d đi qua điểm $N(4;2;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d(3;1;1)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d, suy ra $H \in d$.

Giả sử $H(4+3t;2+t;-1+t)$

$MH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 3.(4+3t)+(t)+(-1+t)=0 \Leftrightarrow 11t=-11 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(1;1;-2)$

Đường thẳng đi qua M và vuông góc với d có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MH}(1;-1;-2)$ có phương trình là: $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{2}$

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3-2t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x-2y+z+5=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với Δ là

A. $\begin{cases}x=-3\\y=-1+3t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\\z=-1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=0\\y=-1+5t\\z=2+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-3t\\y=3-t\\z=1+t\end{cases}$.

Lời giải

Gọi $I(x;y;z)$ là giao điểm của Δ và (P). Khi đó tọa độ của I là thỏa mãn

$$\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3-2t\\x-2y+z+5=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\y=3\\z=1\end{cases} \Rightarrow I(0;3;1).$$

Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(-1;1;-2)$, vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;-2;1)$.

Gọi $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $\vec{v}\perp\vec{u},\vec{v}\perp\vec{n} \Rightarrow \vec{v}=\left[\vec{u},\vec{n}\right]=(-3;-1;1)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $I(0;3;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(-3;-1;1)$ nên có phương trình là $\Delta:\begin{cases}x=-3t\\y=3-t\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=-5+t\\y=2t\\z=1+7t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):3x+y-2z-8=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với Δ là

A. $\begin{cases}x=-7-11t\\y=-4+23t.\\z=-13-5t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-11-7t\\y=23-4t\\z=-5-13t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3-t\\y=-1+5t.\\z=2+3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=4-11t\\y=3+23t.\\z=1-5t\end{cases}$

Lời giải

Gọi $I(x;y;z)$ là giao điểm của Δ và (P). Khi đó tọa độ của I là thỏa mãn

$$\begin{cases}x=-5+t\\y=2t\\z=1+7t\\3x+y-2z-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-7\\y=-4\\z=-13\end{cases}\Rightarrow I(-7;-4;-13).$$

Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(1;2;7)$, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(3;1;-2)$.

Gọi $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $\vec{v}\perp\vec{u},\vec{v}\perp\vec{n}\Rightarrow\vec{v}=\left[\vec{u},\vec{n}\right]=(-11;23;-5)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $I(-7;-4;-13)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(-11;23;-5)$ nên có phương trình là $\Delta:\begin{cases}x=-7-11t\\y=-4+23t.\\z=-13-5t\end{cases}$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):x-2y-z+3=0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-3\\y=-t\\z=2t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$

Lời giải

Ta có $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=1+t\end{cases}$

Gọi $M=\Delta\cap(P)\Rightarrow M\in\Delta\Rightarrow M(t;2t-1;t+1)$

$M\in(P)\Rightarrow t-2(2t-1)-(t+1)+3=0\Leftrightarrow 4-4t=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(1;1;2)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;-2;-1)$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(1;2;1)$

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ

Đường thẳng d nhận $\frac{1}{2}\left[\vec{n},\vec{u}\right]=(0;-1;2)$ làm véc tơ chỉ phương và $M(1;1;2)\in d$

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-z-1=0$.

Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=1-2t\\z=1+t\end{cases}$ **B.** $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=1+3t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=1-2t\\z=2+t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=1+2t\\z=2+t\end{cases}$

Lời giải

Ta có $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=t\end{cases}$

Gọi $M=\Delta\cap(P)\Rightarrow M\in\Delta\Rightarrow M(t;2t-1;t)$

$M\in(P)\Rightarrow t+(2t-1)-t-1=0\Leftrightarrow 2t-2=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(1;1;1)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;1;-1)$

Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(1;2;1)$

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ

Đường thẳng d nhận $\left[\vec{n},\vec{u}\right]=(3;-2;1)$ làm véc tơ chỉ phương và $M(1;1;1)\in d$

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=1-2t\\z=1+t\end{cases}$

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x+y-z-1=0$, $(Q):x-2y+z-5=0$. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(1;-2;1)$. **B.** $\vec{u}=(2;1;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;3;5)$. **D.** $\vec{u}=(-1;3;-5)$.

Lời giải

Gọi $d=(P)\cap(Q)$. Khi đó một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(-1;-3;-5)$.

Vậy $\vec{u}=(1;3;5)$ cũng là một vectơ chỉ phương của d.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):3x-2y+2z-5=0$ và $(Q):4x+5y-z+1=0$. Biết hai điểm A, B phân biệt cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với véctơ nào sau đây?

A. $\vec{u}=(8;-11;-23)$. **B.** $\vec{u}=(3;-2;2)$. **C.** $\vec{u}=(-8;11;-23)$. **D.** $\vec{u}=(4;5;-1)$.

Lời giải

Ta có (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(3;-2;2)$ và (Q) có vectơ pháp tuyến là:

$\vec{n}_{(Q)}=(4;5;-1)$.

Do $\begin{cases}AB\subset(P)\\AB\subset(Q)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB\perp\vec{n}_{(P)}\\AB\perp\vec{n}_{(Q)}\end{cases}$ nên đường thẳng AB có một véctơ chỉ phương là:

$\vec{u}=\left[\vec{n}_{(Q)};\vec{n}_{(P)}\right]=(8;-11;-23)$.

Do $\overrightarrow{AB}$ cũng là một véc tơ chỉ phương của AB nên $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với vectơ:
$\vec{u}=(8;-11;-23)$.

Câu 29: Cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(3;2;1)$, mặt phẳng $(P):x-2y-z+3=0$. Đường thẳng d nằm trên (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases}x=4+t\\y=\dfrac{5}{2}\\z=2+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=7+3t\\z=2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=4+t\\y=\dfrac{5}{2}+2t\\z=2+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=4+t\\y=-\dfrac{5}{2}\\z=2+t\end{cases}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-1;0)$; $I\left(3;\dfrac{5}{2};1\right)$ là trung điểm của AB và A, B nằm ở hai phía của mặt phẳng (P).

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của AB và $d=(\alpha)\cap(P)$. Khi đó d chính là đường thẳng thuộc mặt phẳng (P) và cách đều hai điểm A,B.

Mặt phẳng (α) đi qua $I\left(3;\dfrac{5}{2};1\right)$ và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(0;-1;0)$ là

$0\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)+0\left(z-\dfrac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2y-5=0$

Vì d là đường giao tuyến của (α) và (P) nên một véctơ chỉ phương của d là

$\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(\alpha)}}\right]=(-2;0;-2)=-2(1;0;1)$.

Mà d đi qua $C\left(4;\frac{5}{2};2\right)\in(\alpha)\cap(P)$. Vậy d có phương trình tham số: $\begin{cases}x=4+t\\y=\frac{5}{2}\\z=2+t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta):x+y-2z-1=0$. Giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào trong các điểm sau.

A. $C(1;2;1)$. **B.** $D(2;1;0)$. **C.** $B(0;1;0)$. **D.** $A(2;1;1)$.

Lời giải

Ta có vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(1;1;2)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\beta):x+y-2z-1=0$ là $\vec{n}=(1;1;-2)$

Vì (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta):x+y-2z-1=0$ nên (α) có một vectơ pháp tuyến là:

$\overrightarrow{n_\beta}=\left[\vec{u},\vec{n}\right]=(-4;4;0)=-4(1;-1;0)=4.\vec{a}$.

Gọi $d=(\alpha)\cap(\beta)$, suy ra d có véc – tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=\left[\vec{a},\vec{n}\right]=(2;2;2)=2(1;1;1)$.

Giao điểm của đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ và mặt phẳng

$$(\beta):x+y-2z-1=0 \text{ là } I(3;2;2).$$

Suy ra phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=3+t\\y=2+t\\z=2+t\end{cases}$.

Vậy $A(2;1;1)$ thuộc đường thẳng d.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$ và $d_2:\begin{cases}x=t\\y=3\\z=-2+t\end{cases}$. Phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $\begin{cases}x=2+t\\y=1+2t.\\z=2-t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=3+t\\y=3-2t.\\z=1-t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=2+3t\\y=1-2t.\\z=2-5t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=3\\z=1-t\end{cases}$.

Lời giải

Gọi d là đường thẳng cần tìm. Gọi $A = d \cap d_1, B = d \cap d_2$.

Khi đó: $A \in d_1 \Rightarrow A(2+a; 1-a; 2-a)$; $B \in d_2 \Rightarrow B(b; 3; -2+b)$

$\overrightarrow{AB} = (-a+b-2; a+2; a+b-4)$

Mà d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1; -1; -1)$, d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (1; 0; 1)$.

Do $\Rightarrow A(2; 1; 2); B(3; 3; 1)$

$$\begin{cases} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-2-a-2-a-b+4=0 \\ -a+b-2+a+b-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a=0 \\ 2b-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=3 \end{cases}$$

Vậy d đi qua điểm $A(2; 1; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AB} = (1; 2; -1)$ nên phương trình của d là $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = 2-t \end{cases}$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = -5+t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 0 \\ y = 4-2t' \\ z = 5+3t' \end{cases}$ có phương trình là

A. $\dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{2}$.

B. $\dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{2}$.

C. $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{1}$.

D. $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-2}{-2}$.

Lời giải

Giả sử AB là đường vuông góc chung của d và d' với $A \in d$, $B \in d'$.

Ta có $\overrightarrow{u_d} = (1;0;1)$, $\overrightarrow{u_{d'}} = (0;-2;3)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d và d'.

Ta có $\begin{cases} A(a+1;0;a-5) \\ B(0;4-2b;3b+5) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (a+1;2b-4;a-3b-10)$.

Khi đó $\begin{cases} d \perp AB \\ d' \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{BA} = 0 \\ \overrightarrow{u_{d'}}.\overrightarrow{BA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)+(a-3b-10)=0 \\ -2(2b-4)+3(a-3b-10)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A(4;0;-2) \\ B(0;6;2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (4;-6;-4) \Rightarrow \vec{u} = (-2;3;2)$ là một VTCP của AB.

Kết hợp với AB qua $A(4;0;-2) \Rightarrow AB: \dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{2}$.

Câu 33: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (Δ) là đường vuông góc chung của hai đường thẳng: $(d_1):\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{3}$ và $(d_2):\begin{cases}x=1+t'\\y=3-2t'\\z=1\end{cases}$. Phương trình của (Δ) là

A. $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}+2t\\y=\dfrac{8}{3}+t\\z=1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}-2t\\y=\dfrac{8}{3}+t\\z=1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}+2t\\y=\dfrac{8}{3}+t\\z=1-2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}+2t\\y=\dfrac{8}{3}+t\\z=1+2t\end{cases}$.

Lời giải

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, (d_1) có VTCP là $\vec{u}_1=(-1;2;3)$, (d_2) có VTCP là $\vec{u}_2=(1;-2;0)$. Gọi M,N lần lượt là giao điểm của (Δ) với hai đường thẳng (d_1), (d_2).

$\Rightarrow M(1-t;2+2t;3t)\in(d_1)$, $N(1+t';3-3t';1)\in(d_2)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(t'+t;1-2t'-2t;1-3t)$. Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\vec{u}_1=0\\\overrightarrow{MN}.\vec{u}_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{1}{3}\\t'=\dfrac{1}{15}\end{cases}$

Do đó: $M\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{8}{3};1\right)$, $\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{6}{15};\dfrac{3}{15};0\right)=\dfrac{3}{15}(2;1;0)$

Từ đó suy ra phương trình của $(\Delta):\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}+2t\\y=\dfrac{8}{3}+t\\z=1\end{cases}$.

Câu 34: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau có phương trình $(d_1):\begin{cases}x=1\\y=10+2t\\z=t\end{cases}$, $(d_2):\begin{cases}x=3t\\y=3-2t\\z=-2\end{cases}$. Gọi (Δ) là đường thẳng vuông góc chung của (d_1) và (d_2). Phương trình của (Δ) là

A. $\begin{cases}x=2t\\y=\dfrac{177}{98}+3t\\z=-6t-\dfrac{17}{49}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}-46t\\y=-147t\\z=246t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=2-3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-3t\\z=6-4t\end{cases}$.

Lời giải

Đường thẳng (d_1) có VTCP là $\vec{u}_1=(0;2;1)$, (d_2) có VTCP là $\vec{u}_1=(3;-2;0)$.

Gọi $M(1;10+2t_1;t_1)\in(d_1)$, $N(3t_2;3-2t_2;-2)\in(d_2)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(3t_2-1;-2t_2-7;-t_1-2)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\vec{u}_1=0\\ \overrightarrow{MN}.\vec{u}_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5t_1+4t_2=-16\\ 4t_1+13t_2=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=-\dfrac{164}{49}\\ t_2=\dfrac{9}{49}\end{cases}$

Do đó: $M\left(1;\dfrac{162}{49};-\dfrac{164}{49}\right)$, $N\left(\dfrac{27}{49};\dfrac{129}{49};-2\right)$, $\overrightarrow{MN}=-\dfrac{11}{49}(2;3;-6)$

Từ đó suy ra phương trình của $(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\\ y=\dfrac{162}{49}+3t\\ z=-6t-\dfrac{164}{49}\end{cases}$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{z+3}{1}$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

A. $\begin{cases}x=5-6t\\ y=11+9t\\ z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=5-6t\\ y=11-9t\\ z=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=5+6t\\ y=11-9t\\ z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3-6t\\ y=11-9t\\ z=0\end{cases}$.

Lời giải

Lấy $N(-1;2;-3)\in d$ và gọi H là hình chiếu của điểm N trên (Oxy) thì $H(-1;2;0)$.

Thay tọa độ điểm H vào các phương án ta thấy chỉ có phương án B thỏa mãn.

Câu 36: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng Oxy.

A. $d':\begin{cases}x=-3+t\\ y=t\\ z=0\end{cases},(t\in\mathbb{R})$. **B.** $d':\begin{cases}x=-3+t\\ y=-t\\ z=0\end{cases},(t\in\mathbb{R})$.

C. $d':\begin{cases}x=-3+t\\ y=1+t\\ z=0\end{cases},(t\in\mathbb{R})$. **D.** $d':\begin{cases}x=3-t\\ y=-t\\ z=0\end{cases},(t\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=-2+t\\y=1+t\\z=2+2t\end{cases}$.

Hình chiếu của d lên mặt phẳng (Oxy) (có phương trình $z=0$) là $\Delta:\begin{cases}x=-2+t\\y=1+t\\z=0\end{cases}$.

Nhận xét d' ở đáp án A có vectơ chỉ phương cùng phương với VTCP của Δ và có 1 điểm chung với $\Delta \Rightarrow d' \equiv \Delta$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-1;3;-2)$ và mặt hai phẳng $(P):2x-y+z+3=0$; $(Q):x-2y-1=0$. Phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P). Biết d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (Q)

A. $\begin{cases}x=u\\y=1+7u\\z=-2+10u\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=u\\y=1-7u\\z=-2+10u\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1\\y=1+3u\\z=-2+u\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=0\\y=-1+3u\\z=2+u\end{cases}$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q=(1;-2;0)$. Vì $d\perp(Q)\Rightarrow \overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_Q}=(1;-2;0)$.

Khi đó phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases}x=-1+t\\y=3-2t\\z=-2\end{cases}$

Gọi H là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P)

Khi đó, tọa điểm điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x=-1+t\\y=3-2t\\z=-2\\2x-y+z+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\\z=-2\\t=1\end{cases}$$

Suy ra $H(0;1;-2)$. Lấy $A(-1;3;-2)\in d$

d_1 là đường thẳng đi qua A và vuông góc với $mp(P)\Rightarrow d_1:\begin{cases}x=-1+2t'\\y=3-t'\\z=-2+t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$.

Gọi B là hình chiếu vuông góc của điểm A trên $mp(P)\Rightarrow B=d_1\cap(P)\Rightarrow B\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BH}=\left(\frac{-1}{3};-\frac{7}{3};-\frac{10}{3}\right)=\frac{-1}{3}(1;7;10)\Rightarrow$ Một VTCP của đường thẳng d' là $(1;7;10)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x = u \\ y = 1 + 7u \\ z = -2 + 10u \end{cases} \left(u \in \mathbb{R}\right)$.

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(Oxy);(Oyz);(P): x + 2y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng $(P): x + 2y - 4 = 0$. Với d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(Oxy);(Oyz)$.

A. $\begin{cases} x = -2u \\ y = 2 + u \\ z = 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2u \\ y = 2 + u \\ z = 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -2u \\ y = 2 + u \\ z = u \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -2u \\ y = u \\ z = 2 \end{cases}$.

Lời giải

Vì d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(Oxy);(Oyz)$ nên $d \equiv Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.

Gọi H là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P)

Suy ra $H(0;2;0)$ và lấy $A(0;1;0) \in d$

d_1 là đường thẳng đi qua A và vuông góc với $mp(P) \Rightarrow d_1: \begin{cases} x = t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 0 \end{cases} \left(t' \in \mathbb{R}\right)$.

Gọi B là hình chiếu vuông góc của điểm A trên $mp(P) \Rightarrow B = d_1 \cap (P) \Rightarrow B\left(\frac{2}{5};\frac{9}{5};0\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BH} = \left(-\frac{2}{5};\frac{1}{5};0\right) \Rightarrow$ Một VTCP của đường thẳng d' là $(-2;1;0)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x = -2u \\ y = 2 + u \\ z = 0 \end{cases} \left(u \in \mathbb{R}\right)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+4}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $M(3;-4;1)$ nằm trên đường thẳng d.

b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (-3;4;-1)$

c) Đường thẳng d song song với đườn thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 5 - 4t \\ z = -2 + t \end{cases}$.

d) Đường thẳng Δ song song với d và cắt cả hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{2}$ và $d_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{1}$ có phương trình là $\Delta:\frac{x+4}{3}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z+1}{1}$.

Lời giải

a) Sai: Tọa độ điểm $M(3;-4;1)$ không thỏa mãn phương trình d.

b) Đúng: Ta có $\vec{u}(-3;4;-1)=-(3;-4;1)$

c) Sai: Đường thẳng d trùng với đường thẳng Δ

d) Đúng: Đường thẳng Δ song song với d và cắt cả hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{2}$ và $d_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{1}$ có phương trình là $\Delta:\frac{x+4}{3}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z+1}{1}$.

Gọi M,N là giao điểm của Δ và d_1,d_2.

Khi đó M,N thuộc d_1,d_2 nên $\begin{cases}x_M=1+3t\\y_M=-1+t\\z_M=2+2t\end{cases},\begin{cases}x_N=-2+2t'\\y_N=3+4t'\\z_N=t'\end{cases}$.

Vector chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{MN}=(-3+2t'-3t;4+4t'-t;-2+t'-2t)$

Δ song song với $d:\frac{x+4}{3}=\frac{y-5}{-4}=\frac{z+2}{1}$ nên $\frac{-3+2t'-3t}{3}=\frac{4+4t'-t}{-4}=\frac{-2+t'-2t}{1}$

Giải hệ ta được $t'=-1;t=-\frac{4}{3}$. Vậy $N(-4;-1;-1),M\left(-3;-\frac{7}{3};-\frac{2}{3}\right)$

Vậy $\Delta:\frac{x+4}{3}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z+1}{1}$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho $M(2;1;0)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $M(1;-1;1)$ nằm trên đường thẳng d.

b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;1;-1)$

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-t\end{cases}$.

d) Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d thì phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$

Lời giải

a) Sai: Tọa độ điểm $M(1;-1;1)$ không thỏa mãn phương trình d.

b) Đúng: Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;1;-1)$

c) Sai: Đường thẳng d trùng với đường thẳng Δ

d) Đúng: Gọi Δ là đường thẳng đi qua M cắt và vuông góc với d thì phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-t\end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên d đường thẳng Δ cần tìm là đường thẳng MH.

Vì H thuộc d nên $H(1+2t;-1+t;-t)$ suy ra $\overrightarrow{MH}=(2t-1;-2+t;-t)$.

Vì $MH\perp d$ và d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-1)$ nên $\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$.

Do đó $\overrightarrow{MH}=\left(\frac{1}{3};\frac{-4}{3};\frac{-2}{3}\right)$. Vậy phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$

Câu 3: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $M(1;3;-2)$ nằm trên đường thẳng d.

b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(-1;1;2)$.

c) Đường thẳng d song song với đườn thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\\z=2+2t\end{cases}$.

d) Phương trình đường vuông góc chung của d và đường thẳng $d_2:\begin{cases}x=-3t\\y=t\\z=-1-3t\end{cases}$ là $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-4}{-2}$.

Lời giải

a) Sai: Tọa độ điểm $M(1;3;-2)$ không thỏa mãn phương trình d.

b) Sai: $\vec{u}=(-1;1;2)$ không là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

c) Sai: Đường thẳng d trùng với đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\\z=2+2t\end{cases}$

d) Đúng: Phương trình đường vuông góc chung của d và đường thẳng $d_2:\begin{cases}x=-3t\\y=t\\z=-1-3t\end{cases}$ là

$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-4}{-2}$.

Gọi: $\Delta\cap d_1=M\left(1+t';3-t';2+2t'\right)$, $\Delta\cap d_2=N\left(-3t;t;-1-3t\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(-3t-1-t';t-3+t';-3-3t-2t'\right)$.

Hai đường thẳng d_1,d_2 lần lượt có 2 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=\left(1;-1;2\right),\overrightarrow{u_2}=\left(-3;1;-3\right)$.

Vì Δ là đường vuông góc chung của $d_1;d_2$ nên $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6t'-10t=4\\10t'+19t=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=1\\t=-1\end{cases}$

$\Rightarrow M\left(2;2;4\right),N\left(3;-1;2\right),\overrightarrow{MN}=\left(1;-3;-2\right)$.

Vậy phương trình $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-4}{-2}$.

Câu 4: Trong $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right):x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=\left(-1;0;-2\right)$.

b) Đường thẳng $\left(d\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right)$ cắt nhau.

c) Gọi $H=d\cap\left(P\right)\Rightarrow H=\left(1;-1;1\right)$.

d) Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $\left(P\right)$ đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}$.

Lời giải

a) Sai: Mặt phẳng $\left(P\right)$có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_p}=\left(1;2;1\right)$

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=\left(2;1;3\right)$

b) Đúng: Vì $\vec{n}.\vec{u}=7\neq 0$ nên đường thẳng $\left(d\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right)$ cắt nhau.

c) Sai: Gọi $H=d\cap\left(P\right)\Rightarrow$ Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}x+2y+z-4=0\\\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow H=\left(1;1;1\right)$.

d) Đúng: Vì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d nên đường thẳng Δ đi qua điểm H và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{u_d}\right] = (5;-1;-3)$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(1;1;2)$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với d có phương trình tổng quát là $x + y + 2z - 1 = 0$.

c) Hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng d là điểm $H(1;0;-1)$.

d) Phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d có dạng: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$

Lời giải

a) Đúng: Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;1;2)$

b) Sai: Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với d có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;2)$. Khi đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là $x + y + 2z - 5 = 0$.

c) Sai: Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;1;2)$.

Gọi $H(t+1;t;2t-1)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d.

Ta có $\overrightarrow{AH} = (t;t;2t-3)$ và $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2;1;1)$

d) Đúng: Gọi $d \cap \Delta = B \Rightarrow B(1+t;t;-1+2t)$ và $\overrightarrow{AB} = (t;t;-3+2t)$

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d} = (1;1;2)$

Vì $d \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t + t + 2(-3+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ suy ra $\overrightarrow{AB} = (1;1;-1)$.

Ta có đường thẳng Δ đi qua $A(1;0;2)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{AB} = (1;1;-1)$ là vectơ chỉ phương có dạng $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;-1)$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với d có phương trình tổng quát là $2x+by+cz+d=0$. Khi đó $b+c+d=-5$

c) Gọi M' là điểm đối xứng với M qua d. Khi đó $M'(1;0;-2)$.

d) Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M cắt và vuông góc với đường thẳng d. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{a}=\frac{z}{b}$. Khi đó $a+b=-6$.

Lời giải

a) Đúng: Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-1)$.

b) Đúng: Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;-1)$.

Khi đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là $2(x-2)+y-1-z=0\Leftrightarrow 2x+y-z-5=0.$

Do (P) có phương trình tổng quát là $2x+by+cz+d=0.\Rightarrow\begin{cases}b=1\\c=-1\\d=-5\end{cases}\Rightarrow b+c+d=-5$

c) Sai: Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-1;1)$.

Gọi $H(2b+1;-1+b;-b)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng d.

Ta có $\vec{MH}(2b-1;b-2;-b)$.

Do $\vec{MH}\perp\vec{u}\Rightarrow\vec{MH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2(2a-1)+1(a-2)+a=0\Leftrightarrow a=\frac{2}{3}\Rightarrow H\left(\frac{7}{3};\frac{-1}{3};\frac{-2}{3}\right).$

Điểm M' là điểm đối xứng với M qua d. Khi đó H là trung điểm $MM'\Rightarrow M'\left(\frac{8}{3};-\frac{5}{3};-\frac{4}{3}\right).$

d) Gọi $N(1+2t;-1+t;-t)$ là giao điểm của đường thẳng Δ và đường thẳng d

Lúc đó đường thẳng Δ nhận $\vec{MN}(-1+2t;-2+t;-t)$ làm vectơ chỉ phương.

Mặt khác Δ vuông góc với đường thẳng d nên ta có: $2(2t-1)+t-2+t=0\Rightarrow t=\frac{2}{3}.$

Với $t=\frac{2}{3}$ đường thẳng Δ nhận $\vec{MN}\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$ hoặc $\vec{u}(1;-4;2)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng Δ: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z}{-2}$. Do đường thẳng $\Delta\ \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{a}=\frac{z}{b}.$

Khi đó $a+b=-6$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+6=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z}{5}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+6=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;-1)$.

b) Đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z}{5}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-4;0)$.

c) Đường thẳng d cắt (α).

d) Hình chiếu vuông góc của d trên (α) có phương trình là $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+5}{3}=\dfrac{z-1}{5}$

Lời giải

a) Đúng: Mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+6=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;-1)$.

b) Sai: Đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z}{5}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;5)$.

c) Sai: Vì $\vec{n}.\vec{u}=1.2+1.3+(-1).5=0$ nên $d \,//\, (\alpha)$.

d) Đúng: Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên $(\alpha) \Rightarrow d' \,//\, d$.

Lấy $A(1;-4;0) \in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (α).

Suy ra phương trình dường thẳng Δ là $\begin{cases} x=1+t \\ y=-4+t. \\ z=-t \end{cases}$

Goi A' là hình chiếu của A lên (α) thì $A'=\Delta \cap (\alpha) \Rightarrow A'(0;-5;1)$.

Đường thẳng d' là đường thẳng đi qua $A'(0;-5;1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;5)$ có phương trình là $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+5}{3}=\dfrac{z-1}{5}$.

Câu 8: Trong không gian với hê toa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $N(0;2;0)$ thuộc đường thẳng d.

b) Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P).

c) Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-4-2t, t \in \mathbb{R}. \\ z=-1+t \end{cases}$

d) Phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là $d': \frac{x-2}{7} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{2}$.

Lời giải

a) Đúng: Thay tọa độ $N(0;2;0)$ vào d thỏa mãn phương trình đường thẳng d.

b) Sai: Ta có $\vec{n}_P = (1;1;-1)$; $\vec{u}_d = (1;-1;1)$ nên $\vec{n}_P.\vec{u}_d = 1.1 + (-1).1 + 1.(-1) = -2 \neq 0$

Vậy đường thẳng d không song song với mặt phẳng (P)

c) Sai: Phương trình tham số của $d: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

d) Đúng: Gọi $M = (-2+2t; 4-2t; -1+t)$ là giao điểm của d và (P)

Suy ra $(-2+2t) + (4-2t) - (-1+t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M = (2;0,1)$.

Măt phẳng (P) có 1 vector pháp tuyến là $\vec{n}_p = (1;1;-1)$. Điểm $N = (0;2;0) \in d$.

Gọi Δ là đường thẳng qua $N(0,2;0)$ và vuông góc với măt phẳng (P)\

Đường thẳng Δ nhận vector $\vec{n}_p = (1;1;-1)$ làm vector chỉ phương.

Suy ra phương trình của Δ là: $(\Delta): \frac{x-0}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-1} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = c \\ y = 2 + c, c \in \mathbb{R}. \\ z = -c \end{cases}$

Gọi $M' = (c; 2+c; -c)$ là giao điểm của Δ với măt phẳng (P)

Suy ra $c + (2+c) - (-c) - 1 = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3} \Rightarrow M'\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{MM'} = \left(-\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên măt phẳng (P) nên d' chính là đường thẳng MM'.

Suy ra d' đi qua $M(2;0;1)$ và nhân vector $\vec{u} = -3\overrightarrow{MM'} = (7;-5;2)$ làm vector chỉ phương nên phương trình của d' là: $d': \frac{x-2}{7} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{2}$.

Câu 9: Trong không gian *Oxyz*, cho hai điểm $A(1;3;3)$ và $B(3;5;9)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là: $\vec{u} = (1;1;3)$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 3t \\ z = 9 + 3t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$.

c) Điểm $M\left(4;6;9\right)$ thuộc đường thẳng AB.

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $C\left(2;0;-3\right)$ và song song với đường thẳng AB là: $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$.

Lời giải

a) Đúng: $\overrightarrow{AB} = \left(2;2;6\right)$ nên một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là: $\vec{u} = \left(1;1;3\right)$.

b) Sai: Phương trình tham số của đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + t \\ z = 9 + 3t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$

c) Sai: Ta có: $\begin{cases} 4 = 3 + t \\ 6 = 5 + t \\ 9 = 9 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \varnothing$.

d) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{u_d} = \left(1;1;3\right)$ và điểm $C \in d$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng d qua điểm $M\left(1;2;2\right)$.

b) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{v} = \left(2;4;4\right)$.

c) Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$.

d) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$.

Lời giải

a) Sai: Thay $M\left(1;2;0\right)$ vào đường thẳng d, ta có $\frac{1-2}{1} \neq \frac{2-1}{2}$.

b) Đúng: Đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{2}$ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(-1;-2;-2\right)$

c) Đúng: $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{2}$ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(-1;-2;-2\right)$ và đi qua điểm $N\left(3;2;-1\right)$ suy ra phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$.

d) Sai: Đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{2}$ có một vectơ chỉ phương $\vec{k}=(1;2;2)$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;-2;-2)\Rightarrow \vec{u}=-\vec{k}$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;2;-1)$. Thay tọa độ điểm $M(3;2;-1)$ vào phương trình của $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{2}$ ta được $\dfrac{3-2}{1}=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{-1+3}{2}$ đúng suy ra $M\in d$.

Vậy $d\equiv\Delta$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;3;-2)$, $B(1;1;5)$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm A,B có dạng $\begin{cases}x=a\\y=b-2t\\z=-2+ct\end{cases}$. Tính $a+b+c$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(0;-2;7)$

Đường thẳng AB đi qua $A(1;3;-2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(0;-2;7)$ làm vecto chỉ phương có phương trình là: $\begin{cases}x=1\\y=3-2t\\z=-2+7t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3;-2;1)$ và song song với đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-6}{5}$ có dạng $\begin{cases}x=a+4t\\y=-2+bt\\z=1+ct\end{cases}$. Tính $a+b+2c$.

Lời giải

Đường thẳng cần tìm đi qua điểm $M(3;-2;1)$ và nhận véctơ $\vec{u}=(4;-3;5)$ làm véctơ chỉ phương có phương trình tham số là $\begin{cases}x=3+4t\\y=-2-3t\\z=1+5t\end{cases}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;3;5)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-3z+1=0$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có dạng $\begin{cases}x=1+at\\y=b+t\\z=5+ct\end{cases}$. Tính $3a+b+c$.

Lời giải

Một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}(2;1;-3)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $M(1;3;5)$ và vuông góc với (P) thì vec tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;1;-3)$.

Vậy phương trình của đường thẳng d là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=3+t\\z=5-3t\end{cases}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=-1-4t\\z=6+6t\end{cases}$ và $d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-5}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d_3 qua $M(1;-1;2)$ và vuông góc với cả d_1, d_2 có dạng $\frac{x-1}{14}=\frac{y+1}{b}=\frac{z-a}{c}$. Tính $a+b+c$.

Lời giải

Đường d_1 có VTCP $\vec{a}=(1;-4;6)$; d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{b}=(2;1;-5)$.

Vì d_3 vuông góc với $d_1; d_2$ nên có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(14;17;9)$.

Vậy phương trình của đường thẳng d_3 là: $\frac{x-1}{14}=\frac{y+1}{17}=\frac{z-2}{9}$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng (Δ) qua $M(2;3;1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P):2x-y+2z-7=0$ và $(Q):x+3y-2z+3=0$ có dạng $\begin{cases}x=a+bt\\y=3+6t\\z=c+dt\end{cases};t\in\mathbb{R}$. Tính $2a+b+c+d$.

Lời giải

Mặt phẳng $(P):2x-y+2z-7=0$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(2,-1,2)$

Mặt phẳng $(Q):x+3y-2z+3=0$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(1,3,-2)$

Vì $(\Delta)//(P)$ và $(\Delta)//(Q)$ nên vectơ chỉ phương của (Δ) là $\vec{a}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(-4;6;7)$

Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) $\begin{cases}x=2-4t\\y=3+6t\\z=1+7t\end{cases};t\in\mathbb{R}$.

Câu 6: Trong không gian *Oxyz*, cho điểm $A(1;-2;3)$, $B(2;b;c)$, mặt phẳng $(\alpha):x+3y-2z+5=0$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{1}$. Khi đó, để đường thẳng *d* đi qua hai điểm *A*, *B*, song song với mặt phẳng (α) và vuông góc với đường thẳng Δ thì $b+c$ bằng:

Lời giải

Mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n}=(1;3;-2)$.

Đường thẳng Δ có VTCP là $\vec{u}=(3;2;1)$.

Vì đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) và vuông góc với đường thẳng Δ nên VTCP của d là $\overrightarrow{u_d}=\left[\vec{n},\vec{u}\right]=(7;-7;-7)$ hay $\overrightarrow{u_d}=(-1;1;1)$.

Phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A, song song với mặt phẳng (α) và vuông góc với đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{1}$.

Vì $B\in d$ nên: $\frac{2-1}{-1}=\frac{b+2}{1}=\frac{c-3}{1}\Rightarrow\begin{cases}b=-3\\c=2\end{cases}$.

Vậy $b+c=-1$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):ax+by+cz+10=0$. Biết mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+t\\y=2+2t\\z=-t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=-1+2t'\\y=4+2t\\z=-1-t\end{cases}$. Khi đó $a+b+c$ bằng:

Lời giải

$d:\begin{cases}x=-1+t\\y=2+2t\\z=-t\end{cases}$ có VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-1)$.

$d':\begin{cases}x=-1+2t'\\y=4+2t'\\z=-3+t'\end{cases}$ có VTCP là $\overrightarrow{u_{d'}}=(2;2;1)$.

Gọi $A=d\cap d'\Rightarrow\begin{cases}-1+t=-1+2t'\\2+2t=4+2t\\-t=-3-t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-2t'=0\\2t-2t'=2\\-t-t'=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\t'=1\end{cases}\Rightarrow A(1;6;-2)$.

Vì mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng d và d' nên (α) có VTPT là

$\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_d}'\right]=(4;-3;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (α): $4(x-1)-3(y-6)-2(z+2)=0\Leftrightarrow 4x-3y-2z+10=0$

$\Rightarrow a+b+c+d=4+(-3)+(-2)=-1$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2-t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$. Gọi giao điểm của hai đường thẳng Δ và d là $M(a;b;c)$. Tính $a+b+c$.

Lời giải

Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=-1-s\\y=6+2s\\z=-3-2s\end{cases}$.

Để xét vị trí tương đ của Δ và d ta xét hệ: $\begin{cases}2-t=-1-s\\2t=6+2s\\1-t=-3-2s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-s=3\\t-s=3\\t-2s=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\s=-1\end{cases}$.

Hệ có nghiệm duy nhất nên Δ và d cắt nhau.

Thay $t=2$ vào phương trình Δ (hoặc thay $s=-1$ vào phương trình của d) ta được tọa độ giao điểm của Δ và d là $M(0;4;-1)\Rightarrow a+b+c=0+4+(-1)=3.$

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$. đường thẳng đi qua 2 điểm A, B có phương trình dạng $\Delta:\begin{cases}x=2t\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$. Tính y_0+z_0+b+c.

Lời giải

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(1;-3;4)=\dfrac{1}{2}(2;-6;8)\Rightarrow b=-6,c=8$.

Thay tọa độ điểm B vào phương trình Δ ta được: $\begin{cases}2=2t\\-1=y_0-6t\\3=z_0+8t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\y_0=5\\z_0=-5\end{cases}$

Từ đó ta có: $y_0+z_0+b+c=5-5-6+8=2$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;2;1)$, $C(3;-2;0)$, $D(1;1;-3)$. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm $M(2;a;b)$. Khi đó a^b bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;3;1)$; $\overrightarrow{AC}=(1;-1;0)$; $\vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;-2)$.

Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên có véc tơ chỉ phương là $\vec{n}_{(ABC)}=(1;1;-2)$, phương trình tham số là: $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=-3-2t\end{cases}$. Chọn $t=1\Rightarrow M(2;2;-5)$.

Suy ra $a=2;b=-5\Rightarrow a^b=2^{-5}=0{,}03.$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{4}$ và $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d và Δ có dạng: $ax+by+z+c=0$. Tính giá trị của $a+b+c$

Lời giải

Đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{4}\Rightarrow d$ qua $M(2;0;0)$ và nhận $\vec{u}=(2;-1;4)$ làm một VTCP

Đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{4}\Rightarrow\Delta$ qua $N(1;2;-1)$ và nhận $\vec{u}=(2;-1;4)$ làm một VTCP

Thế tọa độ điểm $M(2;0;0)$ vào đường thẳng Δ, ta được: $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{-2}{-1}\neq\dfrac{1}{4}\Rightarrow d\,//\,\Delta$.

$\overrightarrow{MN}=(-1;2;-1)$. (P) chứa d và $\Delta\Rightarrow\overrightarrow{n_P}=\left[\vec{u};\overrightarrow{MN}\right]=(7;-7;7)$

Suy ra phương trình mặt phẳng $(P):x-y+z-2=0$

$\Rightarrow a=1,b=-1;c=-2\Rightarrow a+b+c=-2$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(1;2;3)$ và trong 3 giây, đầu đạn đi với vận tốc không đổi; véctơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v}=(2;1;5)$. Khi viên đạn trúng mục tiêu tại điểm $B(-5;a;b)$ thì giá trị của biểu thức b^a bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Phương trình mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn là : $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=3+5t\end{cases}(1)$.

Khi viên đạn trúng mục tiêu tại điểm $B(-5;a;b)$ thì tọa độ của điểm B thỏa (1), tức là

$$\begin{cases}-5=1+2t\\a=2+t\\b=3+5t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-3\\a=2+t\\b=3+5t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-3\\a=-1\\b=-12\end{cases}\Rightarrow b^a=-0{,}1.$$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(1;1;3)$, nằm trong mặt phẳng $(P):x+2y+z-6=0$ và cắt đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$ có dạng $\begin{cases}x=1+at\\y=1\\z=3+bt\end{cases}$.

Tính giá trị của biểu thức $M=2024a-b$.

Lời giải

Gọi $B=\Delta\cap(P)\Rightarrow$ tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} x+2y+z-6=0 \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow B(2;1;2)$

Vì $d \subset (P)$ và d cắt $\Delta \Rightarrow B \in d \Rightarrow d$ đi qua $A(1;1;3)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(1;0;-1)$ làm một VTCP.

Suy ra PTTS của $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=3-t \end{cases} \Rightarrow a=1, b=-1 \Rightarrow M=2025.$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-5+t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=0 \\ y=4-2t' \\ z=5+3t' \end{cases}$.

Đường vuông góc chung của hai đường thẳng d và d' đi qua điểm $K(6;m;n)$. Tính $m+n$

Lời giải

Giả sử AB là đường vuông góc chung của d và d' với $A \in d$, $B \in d'$.

Ta có $\overrightarrow{u_d}=(1;0;1)$, $\overrightarrow{u_{d'}}=(0;-2;3)$

$\begin{cases} A(1+t;0;-5+t) \\ B(0;4-2t';5+3t') \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA}=(t+1;2t'-4;t-3t'-10).$

Ta có $\begin{cases} d \perp AB \\ d' \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{BA}=0 \\ \overrightarrow{u_{d'}}.\overrightarrow{BA}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+1)+(t-3t'-10)=0 \\ -2(2t'-4)+3(t-3t'-10)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t'=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A(4;0;-2) \\ B(0;6;2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA}=(4;-6;-4) \Rightarrow \vec{u}=(-2;3;2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Phương trình đường thẳng $AB: \dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{2}$.

Đường thẳng AB đi qua $K(6;m;n)$ nên $\dfrac{6-4}{-2}=\dfrac{m}{3}=\dfrac{n+2}{2} \Rightarrow m=-3, n=-4$.

Vậy $m+n=-7$.

Câu 15: Trong không gian *Oxyz*, cho mặt phẳng (α) và $B(3;a;2a)$. Biết mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=-1+5t \\ y=2-4t \\ z=3+3t \end{cases}$ và đường thẳng $d': \begin{cases} x=2+5t \\ y=-4t \\ z=5+3t \end{cases}$. Khi đó để điểm *B* nằm trong mặt phẳng (α) thì giá trị của *a* bằng:

Lời giải

Đường thẳng $d: \begin{cases} x=-1+3t \\ y=2-2t \\ z=3+2t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(5;-4;3)$ và đi qua điểm $A(-1;2;3)$.

Đường thẳng $d':\begin{cases}x=2+5t\\y=-4t\\z=5+3t\end{cases}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(5;-4;3)$ và đi qua điểm $B(2;0;5)$.

$\overrightarrow{AB}=(3;-2;2)$

Vì mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và d' nên (α) có VTPT là $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}\right]=(2;1;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (α) có VTPT $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=(2;1;-2)$ và đi qua điểm $A(-1;2;3)$ là:

$2(x+1)+(y-2)-2(z-3)=0\Leftrightarrow 2x+y-2z+6=0$

$B\in(\alpha)\Rightarrow 2.3+a-2.2a+6=0\Leftrightarrow a=4$.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Gọi $\vec{u}(a;b;3)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng Δ và cắt trục Oy. Tính $a+b$.

Lời giải

Gọi giao điểm của đường thẳng d và trục Oy là $B(0;t;0)$.

Đường thẳng Δ có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-2;2)$.

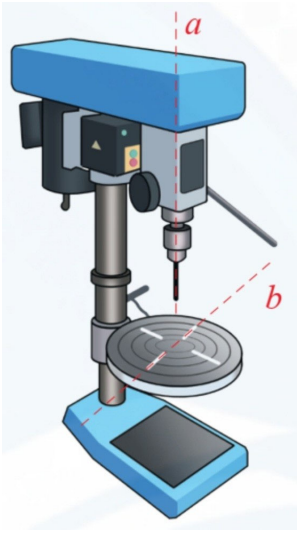
Đường thẳng d có véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(-2;t-1;-3)$.

Từ giả thiết ta có $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow -2-2(t-1)-6=0\Leftrightarrow t=-3$.

Có $\overrightarrow{AB}=(-2;-4;-3)$ nên có thể chọn $\vec{v}=(2;4;3)$ là véc tơ chỉ phương của d.

Vậy $a=2, b=4$ nên $a+b=6$.

Câu 17: Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$ cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan (tham khảo hình vẽ) lần lượt là $a:\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3t\end{cases}$ và $b:\begin{cases}x=1+4k\\y=2+2k\\z=6\end{cases}$. Tọa độ giao điểm của a và b là $M(a;b;c)$. Tính $S=a+b+c$.



Lời giải

Vì M là giao điểm của a và b nên $\begin{cases}1=1+4k\\2=2+2k\\3t=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=2\\k=0\end{cases}\Rightarrow M\left(1;2;6\right)$

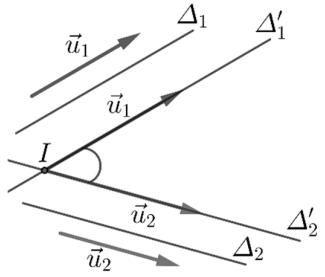
Vậy $S=1+2+6=9.$

----------HẾT----------

Dạng 3: Góc và khoảng cách trong không gian Oxyz

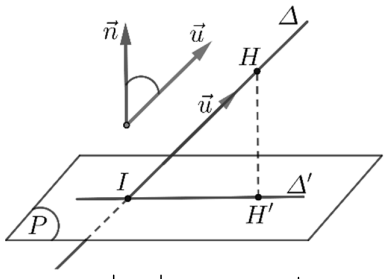
Phương pháp:

- Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$ và $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó:



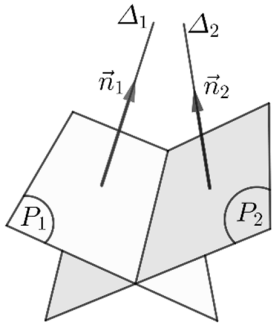
$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\vec{u}_1.\vec{u}_2)\right|=\frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

- Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$.



$$\sin(\Delta,(P))=\left|\cos(\vec{u}.\vec{n})\right|=\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

- Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hai mặt phẳng $(P_1),(P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ và $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó, ta có:



$$\cos((P_1),(P_2))=\left|\cos(\vec{n}_1.\vec{n}_2)\right|=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

- Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A,y_A,z_A)$ và $B(x_B,y_B,z_B)$ là:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

- Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$ đến mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ là:

$$d\left(M_0;(\alpha)\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

- Khoảng cách từ điểm M_1 đến đường thẳng Δ đi qua M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là:

$$d\left(M_1,\Delta\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ', trong đó đường thẳng Δ đi qua M_0 và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}$, đường thẳng Δ' đi qua M_0' và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}$ là:

$$d\left(\Delta,\Delta'\right)=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_0'}.\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\right|}{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\right|}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=5-2t\\z=14-3t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-4t'\\y=2+t'\\z=-1+5t'\end{cases}$. Tính góc giữa hai đường thẳng đã cho.

Lời giải

Đường thẳng d_1 có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(1;-2;-3)$.

Đường thẳng d_2 có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(-4;1;5)$.

Ta có: $\cos\left(\widehat{d_1,d_2}\right)=\frac{\left|\vec{u}_1.\vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right|.\left|\vec{u}_2\right|}=\frac{\left|1.(-4)+(-2).1+(-3).5\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}.\sqrt{(-4)^2+1^2+5^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow(d_1,d_2)=30^\circ$.

Bài tập 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z-1=0$. Tính góc giữa Δ và (P)

Lời giải

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;-1)$.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;1)$.

Ta có: $\sin\left(\widehat{\Delta,(P)}\right)=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|1.2+2.1+(-1).1\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}.\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\widehat{\Delta,(P)}\right)=30^\circ$

Bài tập 3: Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$. Tính cos giữa hai tia sáng có phương trình lần lượt là $d_1:\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$, $d_2:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{9}$.

Lời giải

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(2;1;-1)$.

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(3;3;9)$.

Ta có $\cos(d_1,d_2)=\frac{\left|2.3+1.3+(-1).9\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{3^2+3^2+9^2}}=0$.

Bài tập 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ và $d_2:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$

Lời giải

Vectơ chỉ phương $\vec{u}_{d_1}=(1;-1;2)$, vectơ chỉ phương $\vec{u}_{d_2}=(-1;1;1)$

Ta có $\cos(d_1,d_2)=\left|\cos(\vec{u}_{d_1},\vec{u}_{d_2})\right|=\frac{|1.(-1)-1.1+2.1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}.\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=0$

Vậy $(d_1,d_2)=90°$.

Bài tập 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=6+5t\\y=2+t\\z=1\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+1=0$.

Góc hợp bởi giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ta có $\vec{u}_d=(5;1;0)$ và $\vec{n}_{(P)}=(3;-2;0)$

Khi đó $\sin\varphi=\left|\cos(\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)})\right|=\frac{|\vec{u}_d.\vec{n}_{(P)}|}{|\vec{u}_d|.|\vec{n}_{(P)}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=45°$.

Bài tập 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y-z-2=0$. Cosin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;2)$ và mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Ta có $\sin(\Delta,(\alpha))=\left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right|=\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{9}\Rightarrow\cos(\Delta,(\alpha))=\frac{\sqrt{78}}{9}$.

Bài tập 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x-y-z-3=0$ và $(Q):x-z-2=0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng bao nhiêu?

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(2;-1;-1)$.

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q=(1;0;-1)$.

Ta có $\cos[(P),(Q)]=\left|\cos(\vec{n}_P,\vec{n}_Q)\right|=\frac{|\vec{n}_P.\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|.|\vec{n}_Q|}=\frac{|2+0+1|}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $[(P),(Q)]=30°$.

Bài tập 8: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;1)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Mặt phẳng (MNP) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(1;1;1)$.

Mặt phẳng (Oxy) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (Oxy).

Ta có $\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{k}\right)\right|=\dfrac{|1.0+1.0+1.1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập 9: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y+2z-10=0$ và $(Q):x+2y+2z-5=0$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Cách 1: Ta có $M(10;0;0)\in(P)$. Vì $\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{2}=\dfrac{2}{2}\neq\dfrac{-10}{-5}$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) song song.

Khi đó, $d\left((P),(Q)\right)=d\left(M,(Q)\right)=\dfrac{|10-5|}{\sqrt{9}}=\dfrac{5}{3}$.

Cách 2: Công thức khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(P):ax+by+cz-d_1=0$ và $(Q):ax+by+cz-d_2=0$ bằng: $d\left((P),(Q)\right)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Rightarrow d\left((P),(Q)\right)=\dfrac{|10-5|}{\sqrt{9}}=\dfrac{5}{3}$.

Bài tập 10: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P):\ 2x-2y-z+1=0$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;-2;1)$, có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$.

Mặt phẳng (P) có 1 véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-2;-1)$.

Ta có: $\vec{u}.\vec{n}=2.2-2.1-1.2=0\Rightarrow\vec{u}\perp\vec{n}$.

Mà $M\notin(P)\Rightarrow d\ //\ (P)\Rightarrow d\left(\Delta,(P)\right)=d\left(M,(P)\right)=\dfrac{|2.1-2.(-2)-1.1+1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\dfrac{6}{3}=2.$

Bài tập 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):\ x+y+4z-3=0$ và điểm $A(1;1;3)$. Mặt phẳng $(Q)\ //\ (P)$ và cắt các tia Ox,Oy lần lượt tại các điểm B và C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $2\sqrt{22}$. Khoảng cách từ điểm $M(2;2;1)$ đến (Q) bằng bao nhiêu?

Lời giải

Mặt phẳng $(Q)\ //\ (P)\Rightarrow(Q)$ có dạng: $x+y+4z+d=0\ (d\neq-3)$.

$(Q)\cap Ox=B(-d;0;0),\ (Q)\cap Oy=C(0;-d;0)$. Do B, C lần lượt thuộc các tia Ox,Oy

Suy ra $d<0$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-d-1;-1;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;-d-1;-3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3d;-3d;d^2+2d)$.

$S_{\Delta ABC}=2\sqrt{22}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=2\sqrt{22}\Leftrightarrow 9d^2+9d^2+\left(d^2+2d\right)^2=352$

$\Leftrightarrow d^4+4d^3+22d^2-352=0\ (*)$

Giải $(*)$ chỉ có $d=-4$ thỏa mãn. Khi đó ta có phương trình mặt phẳng $(Q):x+y+4z+4=0$.

Khoảng cách từ điểm $M(2;2;1)$ đến (Q) bằng: $\frac{|2+2+4.1+4|}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}=2\sqrt{2}$.

Bài tập 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x+y-2z+2=0$ và hai điểm $A(2;0;1)$, $B(1;1;2)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong (α) và cắt đường thẳng AB, thỏa mãn góc giữa hai đường thẳng AB và d bằng góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (α). Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d bằng

Lời giải

Gọi A' là hình chiếu của $A(2;0;1)$ lên (α).

Ta có $B\in(\alpha)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong (α) và cắt đường thẳng AB, thỏa mãn góc giữa hai đường thẳng AB và d bằng góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (α)

Khi đó $d\equiv A'B\Rightarrow d(A,d)=d(A,(\alpha))=\left|\frac{2}{\sqrt{6}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Bài tập 13: Trong không gian $Oxyz$, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A(0;10;0)$ với vận tốc $\vec{v}=(150;150;40)$. Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng biểu thị cho hướng chuyển động bay lên của máy bay.

Ta có Δ nhận vectơ $\vec{v}=(150;150;40)=10(15;15;4)$ làm vectơ chỉ phương.

Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;0;1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (Oxy).

Suy ra $\sin\varphi=\left|\cos(\vec{v},\vec{n})\right|=\frac{|\vec{v}.\vec{n}|}{|\vec{v}|.|\vec{n}|}=\frac{|15.0+15.0+4.1|}{\sqrt{15^2+15^2+4^2}.\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{466}}$.

Vậy góc nâng của máy bay là $\varphi\approx 11°$.

Bài tập 14: Trong một khung lưới ô vuông gồm các hình lập phương, xét các đường thẳng đi qua hai nút lưới (mỗi nút lưới là đỉnh của hình lập phương), người ta đưa ra một cách kiểm tra độ lệch về phương của hai đường thẳng bằng cách gắn hệ tọa độ $Oxyz$ vào khung lưới ô vuông và tìm vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó. Giả sử, đường thẳng a đi qua hai nút lưới $M(1;1;2)$ và $N(0;3;0)$, đường thẳng b đi qua hai nút lưới $P(1;0;3)$ và $Q(3;3;9)$. Sau khi làm tròn đến hàng đơn vị của độ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng $n°$ (n là số tự nhiên). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN}=(-1;2;-2)$, $\overrightarrow{PQ}=(2;3;6)$.

Khi đó: $\cos(a,b)=\dfrac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{PQ}\right|}=\dfrac{8}{21}$, suy ra $(a,b)\approx 68^0$.

Bài tập 15: Trên một cánh đồng điện năng lượng mặt trời, người ta đã thiết lập sẵn một hệ tọa độ $Oxyz$. Hai tấm pin năng lượng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng $(P):2x+2z+1=0$ và $(P'):x+z+7=0$



a) Tính góc giữa (P) và (P').

b) Tính góc hợp bởi (P) và (P') với mặt đất (Q) có phương trình $z=0$.

Lời giải

a) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;0;2)$ và mặt phẳng (P') có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}'=(1;0;1)$ nên $\cos((P),(P'))=\dfrac{|2.1+0.0+2.1|}{\sqrt{2^2+0^2+2^2}.\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{4}{4}=1$

Suy ra $((P),(P'))=0^\circ$.

b) Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q}=(0;0;1)$

$$\cos((P),(Q))=\frac{|2.0+0.0+2.1|}{\sqrt{2^2+0^2+2^2}.\sqrt{1^2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow((P),(Q))=45°.$$

$$\cos((P'),(Q))=\frac{|1.0+0.0+1.1|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}.\sqrt{1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow((P'),(Q))=45°.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa trục Oy và mặt phẳng (Oxz) bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Vì $Oy \perp (Oxz)$ nên góc giữa Oy và mặt phẳng (Oxz) bằng $90°$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng Oxy và Oxz bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Góc giữa hai mặt phẳng Oxy và Oxz bằng $90°$.

Câu 3: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;1;-3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oyz). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\frac{8\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2;0)$, có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-3;1)$ và mặt phẳng (Oyz) có một vecto pháp tuyến $\vec{i} = (1;0;0)$.

Do $d \subset (\alpha)$, $(\alpha) \perp (Oyz)$ nên suy ra vectơ $\vec{n} = \left[\vec{u}, \vec{i}\right] = (0;-1;-3)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) và $M \in (\alpha)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (0;-1;-3)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình là: $y + 3z - 2 = 0$.

Khi đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) bằng: $\frac{|1 + 3(-3) - 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10}$.

Khoảng cách từ O đến (α) bằng $d(O,(\alpha)) = \frac{|6.0 + 4.0 - 3.0 - 12|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{12\sqrt{61}}{61}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + y - z - 11 = 0$ và $(P): 2x + 2y - 2z + 7 = 0$ bằng

A. $0°$. **B.** $45°$. **C.** $180°$. **D.** $90°$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{n_P}=(1;1;-1)$, $\overrightarrow{n_Q}=(2;2;-2)\Rightarrow\overrightarrow{n_Q}=2\overrightarrow{n_P}$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là $0°$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Do mặt phẳng (Oxy) vuông góc với mặt phẳng (Oyz) nên góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) bằng $90°$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+1=0$ và mặt phẳng $(Q):2x-y+2z+4=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đã cho bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Dễ thấy $(P)//(Q)\Rightarrow d((P),(Q))=d(M,(Q))$ với $M(0;1;0)\in(P)$

Vậy $d((P),(Q))=\dfrac{|2.0-1+2.0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-4)$. Khoảng cách từ O đến (α) bằng

A. $\frac{\sqrt{61}}{12}$. **B.** 4. **C.** $\frac{12\sqrt{61}}{61}$. **D.** 3.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-4}=1\Leftrightarrow 6x+4y-3z-12=0$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$,cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$. Biết góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$ bằng $120°$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Do $(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})=120°>90°\Rightarrow\varphi=180°-120°=60°$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $60°$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$. Biết góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$ bằng $120°$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. $45°$. **B.** $120°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Ta có $\left(\widehat{\vec{n}_P,\vec{n}_Q}\right)=120^\circ \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right)=60^\circ$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) bằng

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

Lời giải

Ta có vectơ pháp tuyến của (Oxy) và (Oyz) lần lượt là $\vec{k}$ và $\vec{i}$.

Vì $\vec{k}\perp\vec{i}$ nên $\left(\widehat{(Oxy);(Oyz)}\right)=90^\circ$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P):x+y+z-2=0;$. $(Q):x+y+z+4=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $d\left((P),(Q)\right)=\frac{|4+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng $(P):2x-y+2z+12=0$ bằng

A. 12. **B.** 1. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $d\left(O,(P)\right)=\frac{|2.0-0+2.0+12|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4$.

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P):2x+y-2z-1=0,$ $(Q):6x+3y-6z+15=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Ta có: $(Q):6x+3y-6z+15=0\Leftrightarrow 2x+y-2z+5=0$. Lấy $M(0;1;0)\in(P)$.

Vậy $d\left((P),(Q)\right)=d\left(M,(Q)\right)=\frac{|1+5|}{\sqrt{1+4+4}}=2.$

Câu 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x-2y+2z-1=0$ và $(Q):2x+2y-z-3=0$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Tính $\cos\alpha$.

A. $-\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;2)$ và vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(2;2;-1)$.

Suy ra $\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{\left|1.2+(-2).2+2.(-1)\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}.\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{9}$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):2x+y-2z-4=0$ và $(Q):x-2y+2z+6=0$.Tính khoảng cách h từ điểm $M(1;0;1)$ đến đường thẳng d.

A. $h=3$. **B.** $h=6$. **C.** $h=9$. **D.** $h=1$.

Lời giải

Hai mặt phẳng $(P):2x+y-2z-4=0$ và $(Q):x-2y+2z-6=0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là: $\overrightarrow{n_P}=(2;1;-2);\overrightarrow{n_Q}=(1;-2;2)$.

Giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) và (Q) có vectơ chỉ phương:

$$\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(-2;-6;-5)=-1(2;6;5)$$

Đường thẳng d đi qua $N(0;2;-1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;6;5)$

$\overrightarrow{MN}=(-1;2;-2);\ \left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]=(22;1;-10)$.

Khi đó $d(M,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{22^2+1^2+(-10)^2}}{\sqrt{2^2+6^2+5^2}}=3$.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y-z+2=0$ và $(Q):2x-y-z+4=0$. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha=\frac{2}{3}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{3}{4}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{6}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(1;2;-1)$.

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;-1)$.

Vậy $\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{|2-2+1|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}}=\frac{1}{6}$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxz) và $(P):x-y+1=0$ bằng

A. $60°$. **B.** $135°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Ta có véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxz) là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P):x-y+1=0$ là $\vec{n}=(1;-1;0)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (Oxz) và (P), ta có:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}.\vec{j}|}{|\vec{n}|.|\vec{j}|}=\frac{|1.0+1.(-1)+0.0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}.\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $\alpha=45°$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Khoảng cách từ điểm A đến trục Ox bằng

A. $\sqrt{4}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Trục Ox có vectơ chỉ phương $\vec{i}=(1;0;0)$

Khi đó $\left[\overrightarrow{OA},\vec{i}\right]=(0;3;-2)$ nên $d\left[A,Ox\right]=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OA},\vec{i}\right]\right|}{|\vec{i}|}=\frac{\sqrt{3^2+(-2)^2}}{\sqrt{1}}=\sqrt{13}$

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxz) và (Oyz) bằng:

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Dễ thấy, do $Ox;Oy;Oz$ đôi một vuông góc nên $(Oxz)\perp(Oyz)$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (Oxz) và (Oyz) bằng 90^0.

Câu 20: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=-2t\\y=6+t\\z=1-3t\end{cases}$

và mặt phẳng $(P):2x-y+3z+12=0$. Tìm sin của góc giữa d và (P)?

A. 0°. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 90°.

Lời giải

Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=-2t\\y=6+t\\z=1-3t\end{cases}\Rightarrow d$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;1;-3)$

Mặt phẳng $(P):2x-y+3z+12=0\Rightarrow(P)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;3)$

Ta có $\vec{u}=-\vec{n}$ nên $d\perp(P)\Rightarrow\left(\widehat{d,(P)}\right)=90^o\Rightarrow\sin\left(\widehat{d,(P)}\right)=1.$

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-2022=0$. Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin\alpha=-\dfrac{4}{9}$. **B.** $\sin\alpha=\dfrac{4}{9}$. **C.** $\cos\alpha=-\dfrac{4}{9}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{4}{9}$.

Lời giải

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;-2)$; mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;2)$.

Ta có $\sin\alpha=\left|\cos(\vec{n},\vec{u})\right|=\dfrac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|}=\dfrac{4}{9}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;0)$, góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (Oxz) bằng

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 90^0. **D.** 0^0.

Lời giải

Ta có $OA\perp(Oxz)$ nên góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (Oxz) bằng 90^0.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{4}$, $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và song song với đường thẳng d. Tính khoảng cách từ điểm $M(3;0;-1)$ đến mặt phẳng (P).

A. 3. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(0;-2;0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;3;4)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $N(1;2;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(2;1;2)$.

Khi đó: $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{u_d}\right]=(1;2;-2)$.

Mặt phẳng $(P):1(x-0)+2(y+2)-2(z-0)=0\Leftrightarrow x+2y-2z+4=0$.

Thử lại $N\notin(P)$ nên thỏa mãn.

Vậy $d(M;(P))=\dfrac{|3+2.0-2(-1)+4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3$.

Câu 24: Trong không gian có hệ trục $Oxyz$, đường thẳng (d) có phương trình: $\begin{cases}x=2-t\\y=3+t\\z=1+t\end{cases}$ và mặt phẳng $(\Delta):x+2y-2z+3=0$. Góc giữa (d) và (Δ) bằng α. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Đường thẳng (d) có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;1;1)$, mặt phẳng (Δ) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;-2)$, khi đó:

$$\sin((d),(\Delta))=\sin\alpha=\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=|\cos(\vec{u},\vec{n})|=\frac{|(-1).1+1.2+1.(-2)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}.\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Câu 25: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;1;-3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oyz). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\frac{8\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2;0)$, có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;1)$ và mặt phẳng (Oyz) có một vecto pháp tuyến $\vec{i}=(1;0;0)$.

Do $d\subset(\alpha)$, $(\alpha)\perp(Oyz)$ nên suy ra vectơ $\vec{n}=[\vec{u},\vec{i}]=(0;-1;-3)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) và $M\in(\alpha)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và nhận vectơ $\vec{n}=(0;-1;-3)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình là: $y+3z-2=0$.

Khi đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) bằng: $\frac{|1+3(-3)-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=8$ và điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B phân biệt. Tính diện tích lớn nhất của tam giác OAB.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** 4. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Ta có: mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và $R=2\sqrt{2}$.

$OM=1<R\Rightarrow$ điểm M nằm trong mặt cầu (S).

Gọi $h=d(O,d)\le OM=1$, khi đó ta có: $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}h.AB=\frac{1}{2}h.2\sqrt{OA^2-h^2}=\sqrt{8h-h^3}$.

Xét hàm $f(x)=\sqrt{8x-x^3}\ \ \forall x\in[0;1]$.

$S_{\Delta OAB}$ đạt giá trị lớn nhất là $\underset{[0;1]}{Max}\, f(x)=\sqrt{7} \Leftrightarrow x=1 \Leftrightarrow OM \perp d$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng $(P): x+3y-2z+2=0$ và chứa đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$. Khoảng cách từ điểm $A(1;-2;-1)$ đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{24\sqrt{3}}{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

Lời giải

$\overrightarrow{n_P}(1;3;-2), \overrightarrow{u_d}(2;-1;1) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(\alpha)}}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{u_d}\right]=(1;-5;-7)$.

Điểm $M(1;-1;4)\in d \Rightarrow M\in(\alpha)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là $1(x-1)-5(y+1)-7(z-4)=0 \Leftrightarrow x-5y-7z+22=0$.

$d(A;(\alpha))=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Câu 28: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{y-1}{2}+\dfrac{z-4}{-6}=1$ và $(Q): x+2y+3z+7=0$. Tính tang góc tạo bởi hai mặt phẳng đã cho.

A. $\dfrac{3}{\sqrt{19}}$ **B.** $\dfrac{3}{5\sqrt{19}}$. **C.** $\dfrac{5}{3\sqrt{19}}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{19}}{5}$.

Lời giải

Mặt phẳng $(P):\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{y-1}{2}+\dfrac{z-4}{-6}=1 \Leftrightarrow (P): 2x+3y-z-9=0$

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}_{(P)}=(2;3;-1)$

$(Q): x+2y+3z+7=0 \Rightarrow \vec{n}_{(Q)}=(1;2;3)$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(Q) \Rightarrow 0^0 \le \alpha \le 90^0$

Ta có: $\cos\alpha=\dfrac{\left|\vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(Q)}\right|}{\left|\vec{n}_{(P)}\right|.\left|\vec{n}_{(Q)}\right|}=\dfrac{\left|2.1+3.2+(-1).3\right|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\dfrac{5}{14}$

$\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\dfrac{171}{25} \Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{3\sqrt{19}}{5}$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$, mặt phẳng $(P): 3x+y-z-1=0$ và mặt phẳng $(Q): x+3y+z-3=0$. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua A, cắt và vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q). Sin của góc tạo bởi đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{\sqrt{55}}{55}$. **B.** 0. **C.** $\frac{-3\sqrt{55}}{11}$. **D.** $\frac{7\sqrt{55}}{55}$.

Lời giải

Ta có mặt phẳng $(P): 3x+y-z-1=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(3;1;-1)$ và mặt phẳng $(Q): x+3y+z-3=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(1;3;1)$.

Gọi $d=(P)\cap(Q)$ thì d nên có một vectơ chỉ phương là $\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(4;-4;8)=4(1;-1;2)$.

Suy ra d cũng nhận vecto $\vec{u}=(1;-1;2)$ là một vectơ chỉ phương.

Lấy điểm $M\in d=(P)\cap(Q)\Rightarrow$ toạ độ điểm M thoả mãn hệ $\begin{cases}3x+y-z-1=0\\x+3y+z-3=0\end{cases}$.

Chọn $y=1\Rightarrow x=z=0\Rightarrow M(0;1;0)$.

Phương trình tham số đường thẳng d là $\begin{cases}x=t\\y=1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.
$z=2t$

Giả sử $\Delta\cap d=B\Rightarrow B(t;1-t;2t)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(t-1;-t-1;2t+3)$.

Vì $AB\perp d\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-2;0;1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P), ta có

$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_1}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\frac{7}{\sqrt{55}}=\frac{7\sqrt{55}}{55}.$$

Câu 30: Cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1};d_2:\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{4}$. Số đo góc giữa hai đường thẳng $d_1;d_2$ bằng

A. $90°$. **B.** $60°$ **C.** $30°$ **D.** $45°$

Lời giải

Đường thẳng d_1 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1(2;-2;1)$; d_2 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_2(1;3;4)$

$$\cos(d_1;d_2)=\left|\cos\left(\vec{u}_1;\vec{u}_2\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}_1.\vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right|.\left|\vec{u}_2\right|}=\frac{|0|}{3\sqrt{26}}=0$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng là $90°$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$, $d':\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $d;d'$.

A. $\cos(d;d')=\frac{1}{3\sqrt{6}}$. **B.** $\cos(d;d')=\frac{1}{3+\sqrt{6}}$

C. $\cos(d;d')=\frac{-1}{3\sqrt{6}}$. **D.** $\cos(d;d')=\frac{1}{54}$.

Lời giải

Đường thẳng d, d' có véc tơ chỉ phương lần lượt là : $\vec{u}=(2;1;-2);\vec{u'}=(2;-1;1)$.

Ta có $\cos(d;d')=\dfrac{|\vec{u}.\vec{u'}|}{|\vec{u}|.|\vec{u'}|}=\dfrac{|2.2+1.(-1)+(-2).1|}{3\sqrt{6}}=\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-9}{-2}$, $d_2:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+5}{1}$.

Góc giữa hai đường thẳng đó bằng

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Đường thẳng d_1, d_2 có véc tơ chỉ phương lần lượt là : $\vec{u_1}=(-1;1;-2);\vec{u_2}=(-1;1;1)$.

Ta có $\cos(d_1;d_2)=\dfrac{|\vec{u_1}.\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}|.|\vec{u_2}|}=\dfrac{|(-1).(-1)+1.1+(-2).1|}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=0$.

Do đó góc giữa hai đường thẳng đã cho là $90°$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;2;0)$ và $A'(0;0;2)$. Góc giữa BC' và $A'C$ là:

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải

Ta có: $B(2;0;0)$, $C'(0;2;2)$ nên $\overrightarrow{BC'}=(-2;2;2)$.

Mặt khác: $A'(0;0;2)$, $C(0;2;0)$ nên $\overrightarrow{A'C}=(0;2;-2)$.

Suy ra: $\cos(\widehat{BC',A'C})=\left|\cos(\widehat{\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{A'C}})\right|=\dfrac{|0+4-4|}{\sqrt{12}.\sqrt{8}}=0$, $\Rightarrow (\widehat{BC',A'C})=90^o$.

Câu 34: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$ và hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=2+2t\end{cases}$; $d':\begin{cases}x=3-t'\\y=1+t'\\z=1-2t'\end{cases}$. Biết rằng có 2 đường thẳng có các đặc điểm: song song với (P); cắt d,d' và tạo với d góc 30°. Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

A. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, $\overrightarrow{n_P}$ là VTPT của mặt phẳng (P).

Gọi $M(1+t;t;2+2t)$ là giao điểm của Δ và d; $M(3-t';1+t';1-2t')$ là giao điểm của Δ và d'

Ta có: $\overrightarrow{MM'}=(2-t'-t;1+t'-t;-1-2t'-2t)$

$MM'//(P) \Leftrightarrow \begin{cases} M \notin (P) \\ \overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{n_P} \end{cases} \Leftrightarrow t' = -2 \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = (4-t; -1-t; 3-2t)$

Ta có $\cos 30° = \cos\left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{u_d}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|-6t+9|}{\sqrt{36t^2-108t+156}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-1 \end{array}\right.$

Vậy, có 2 đường thẳng thoả mãn là $\Delta_1 : \begin{cases} x=5 \\ y=4+t \\ z=10+t \end{cases}$; $\Delta_2 : \begin{cases} x=t' \\ y=-1 \\ z=t' \end{cases}$

Khi đó $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{1}{2}$.

Câu 35: Với giá trị nào của m thì đường thẳng $(D): \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{m} = \frac{z-1}{m-2}$ vuông góc với mặt phẳng $(P): x+3y+2z=2$.

A. 5. **B.** -7. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải

Vectơ chỉ phương của (D): $\vec{a} = (2; m; m-2)$.

Vectơ pháp tuyến của (P): $\vec{n} = (1;3;2)$.

$(D) \perp (P) \Leftrightarrow$ $\vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương: $2 = \frac{m}{3} = \frac{m-2}{2} \Leftrightarrow m = 6$.

Câu 36: Trong không giam *Oxyz*, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x-y+2z+1=0$, đường thẳng *d* có phương trình $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{2}$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng *d* và mặt phẳng (P). Tính giá trị $\cos\varphi$

A. $\cos\varphi = \frac{6}{9}$ **B.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{65}}{9}$ **C.** $\cos\varphi = \frac{9\sqrt{65}}{65}$ **D.** $\cos\varphi = \frac{4}{9}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2;1-1;2)$, $\overrightarrow{u_d} = (-1;-2;2)$

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{u_d}\right)\right| = \frac{\left|2.(-1)-1.(-2)+2.2\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}.\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{9}.$$

Câu 37: Trong không gian *Oxyz*, hãy tính số đo góc α giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x-y+2z+1=0$.

A. $\alpha = 30°$. **B.** $\alpha = 60°$. **C.** $\alpha = 150°$. **D.** $\alpha = 120°$.

Lời giải

Ta có: đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (1;2;-1)$; mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (1;-1;2)$.

Áp dụng công thức $\sin\alpha = \sin(\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P) = \dfrac{|\vec{u}_\Delta.\vec{n}_P|}{|\vec{u}_\Delta|.|\vec{n}_P|}$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{|1.1+2.(-1)+(-1).2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 30°$$

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, hãy tính số đo góc α giữa đường thẳng $\Delta : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 5x+11y+2z-4=0.$

A. $\alpha = -30°$. **B.** $\alpha = 30°$. **C.** $\alpha = 60°$. **D.** $\alpha = 45°$.

Lời giải

Ta có đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (1;-2;1)$; mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (5;11;2)$.

Áp dụng công thức $\sin\alpha = \sin(\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P) = \dfrac{|\vec{u}_\Delta.\vec{n}_P|}{|\vec{u}_\Delta|.|\vec{n}_P|}$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{|1.5-2.11+1.2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}.\sqrt{5^2+11^2+2^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 30°$$

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = -2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(Q): x+my+(m-1)z+2021=0$. Khi mặt phẳng (Q) tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất thì điểm H nào dưới đây nằm trong mặt phẳng (Q)?

A. $H(-2021;1;1)$. **B.** $H(2021;-1;1)$. **C.** $H(-2021;0;0)$. **D.** $H(0;2021;1)$.

Lời giải

Vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = (1; m; m-1)$, vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (1;2;-2)$.

Gọi φ là góc tạo bởi mặt phẳng (Q) và đường thẳng d thì $0° \le \varphi \le 90°$, đồng thời

Ta có: $\vec{u}.\vec{n}_{(Q)} = 3$; $|\vec{u}| = 3$; $|\vec{n}_{(Q)}| = \sqrt{2m^2-2m+2}$ suy ra $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

Để φ lớn nhất thì $\sin\varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sqrt{2m^2-2m+2}$ nhỏ nhất.

Mà $\sqrt{2m^2-2m+2}=\sqrt{2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}\ge\sqrt{\frac{3}{2}}$ nên giá trị lớn nhất của $\sin\varphi=\sqrt{\frac{2}{3}}$ khi $m=\frac{1}{2}$

Khi đó $(Q):x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z+2021=0$. Vậy $H(-2021;1;1)\in(Q)$.

Câu 40: Trong không gian cho hai điểm $E(3;0;0)$, $F(0;0;1)$. Cặp mặt phẳng nào dưới đây đi qua hai điểm E,F đồng thời tạo với trục Oz một góc $30°$.

A. $(Q_1):x-\sqrt{26}y+3z-3=0$ và $(Q_2):x+\sqrt{26}y+3z-3=0$.

B. $(Q_1):x-2\sqrt{6}y+3z-3=0$ và $(Q_2):x+\sqrt{26}y+3z-3=0$.

C. $(Q_1):x-\sqrt{26}y+3z-3=0$ và $(Q_2):x+2\sqrt{6}y+3z-3=0$.

D. $(Q_1):x-4\sqrt{3}y+3z-3=0$ và $(Q_2):x+3\sqrt{7}y+3z-3=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) đi qua E,F và tạo với trục Oz một góc $30°$ nên sẽ tạo với (Oxy) một góc $60°$ nên mặt phẳng (Q) cắt Oy tại điểm $H(0;b;0)$ khác gốc O do vậy $b\neq 0$.

Khi đó phương trình của mặt phẳng (Q) là có dạng:

$\frac{x}{3}+\frac{y}{b}+\frac{z}{1}=1\Leftrightarrow bx+3y+3bz-3b=0$ nên pháp tuyến của (Q) là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(b;3;3b)$.

Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}(0;0;1)$. Theo giả thiết bài toán ta có

$$\left|\cos\left(\overrightarrow{n_{(Q)}},\vec{k}\right)\right|=\frac{|3b|}{\sqrt{b^2+9+9b^2}.\sqrt{1}}\Leftrightarrow\cos 60°=\frac{|3b|}{\sqrt{b^2+9+9b^2}.\sqrt{1}}\Leftrightarrow\frac{|3b|}{\sqrt{b^2+9+9b^2}.\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2|3b|=\sqrt{9+10b^2}\Leftrightarrow b^2=\frac{9}{26}\Leftrightarrow b=\pm\frac{3}{\sqrt{26}}.$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là $(Q_1):x-\sqrt{26}y+3z-3=0$ và $(Q_2):x+\sqrt{26}y+3z-3=0$.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $E(2;2;1)$, $F\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$, $O(0;0;0)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A,B,C xuống các cạnh BC,CA,AB. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt trục Ox tại điểm có hoành độ nguyên và tạo với $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ một góc α, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{51}}{9}$.

A. $\frac{x+3}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$

B. $\frac{x+4}{7}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$

C. $\frac{x-3}{7}=\frac{y}{1}=\frac{-z}{1}$

D. $\frac{x-3}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\widehat{OEH}=\widehat{OBH}=90^\circ-\widehat{BAC}\\ \widehat{FEH}=\widehat{FCH}=90^\circ-\widehat{BAC}\end{cases}\Rightarrow \widehat{OEH}=\widehat{FEH}$.

Tương tự, ta có $\begin{cases}\widehat{FOH}=\widehat{FAH}=90^\circ-\widehat{ACB}\\ \widehat{EOH}=\widehat{EBH}=90^\circ-\widehat{ACB}\end{cases}\Rightarrow \widehat{FOH}=\widehat{EOH}$.

Suy ra, trực tâm H của tam giác ABC cũng chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Do đó, $EF.\overrightarrow{HO}+OE.\overrightarrow{HF}+OF.\overrightarrow{HE}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{HO}+3\overrightarrow{HF}+4\overrightarrow{HE}=\vec{0}\Rightarrow H(0;1;1)$.

Do A,H,E thẳng hàng nên $\overrightarrow{HA}=k\overrightarrow{HE}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\\ y=k+1\\ z=1\end{cases}\Rightarrow A(2k;k+1;1)$.

Do $OH\perp OA$ nên $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=0\Leftrightarrow 1.(k+1)+1=0\Leftrightarrow k=-2\Rightarrow A(-4;-1;1)$.

Gọi $M=Ox\cap\Delta, M(m;0;0)$

$\overrightarrow{AM}=(m+4;1;-1);\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)$.

$$\cos(\Delta;d)=\frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_d}\right|}{AM.\left|\overrightarrow{u_d}\right|}=\frac{|2m+11|}{\sqrt{m^2+8m+18}.3}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{51}}{9}=\frac{|2m+11|}{3\sqrt{m^2+8m+18}}$$

$$\Leftrightarrow 51(m^2+8m+18)=9(4m^2+44m+121)\Leftrightarrow 15m^2+12m-171=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-\frac{19}{5}\end{array}\right.$$

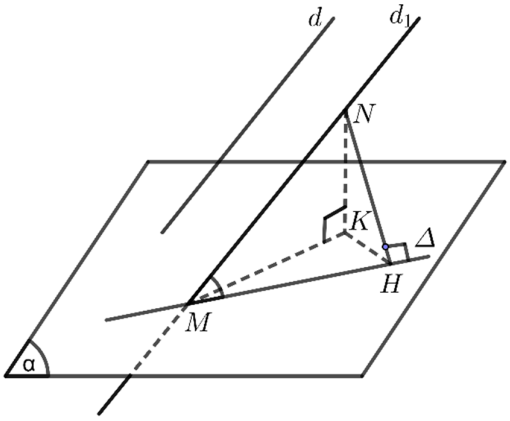
$\Rightarrow M(3;0;0),\overrightarrow{AM}=(7;1;-1)$.

Vậy phương trình $\Delta:\frac{x-3}{7}=\frac{y}{1}=\frac{-z}{1}$

Câu 42: Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha):x+y-z-3=0$, cắt $d_1:\begin{cases}x=3\\ y=1+3t\\ z=1-2t\end{cases}$ và tạo với đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\ y=4+3t\\ z=-3-2t\end{cases}$ một góc nhỏ nhất, thì phương trình của Δ là:

A. $\begin{cases}x=1\\ y=-t'\\ z=2t'\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=8+5t'\\ y=-3-4t'\\ z=2+t'\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t'\\ y=1-t'\\ z=3-2t'\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+5t'\\ y=1-4t'\\ z=3+2t'\end{cases}$.

Lời giải



Ta thấy: $M \in (\alpha)$. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (0;3;-2)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;-1)$.

Vì $\vec{u}.\vec{n} = 0.1 + 3.1 + (-2).(-1) = 5 \neq 0$ nên d cắt (α).

Dễ thấy $M \in d_1, d \,//\, d_1$.

Lấy $N(3;4;-1) \in d_1$. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ.

Ta có: $\widehat{(d,\Delta)} = \widehat{(d_1,\Delta)} = \widehat{NMH}$ và $\sin\widehat{NMH} = \dfrac{NH}{MN} \geq \dfrac{NK}{MN}$.

Do vậy $\widehat{(d,\Delta)}$ nhỏ nhất khi $K \equiv H$ hay Δ là đường thẳng MK.

Đường thẳng NK có phương trình: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$.

Tọa độ K ứng với t là nghiệm của phương trình: $(3+t) + (4+t) - (-1-t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{5}{3}$.

Suy ra $K\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

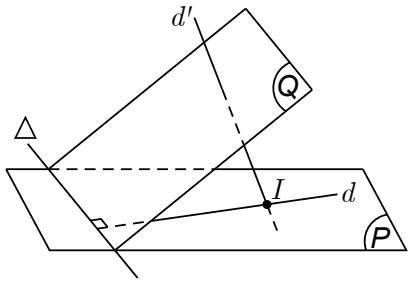
Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MK} = \left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}(5;-4;1)$

Đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x = 3 + 5t' \\ y = 1 - 4t' \\ z = 1 + t' \end{cases}$ hay $\Delta\begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = -3 - 4t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): z-1=0$ và $(Q): x+y+z-3=0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt đường thẳng $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$ và vuông góc với đường thẳng Δ. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3-t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases}$.

Lời giải



Đặt $\vec{n}_P=(0;0;1)$ và $\vec{n}_Q=(1;1;1)$ lần lượt là véctơ pháp tuyến của (P) và (Q).

Do $\Delta=(P)\cap(Q)$ nên Δ có một véctơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(-1;1;0)$.

Đường thẳng d nằm trong (P) và $d\perp\Delta$ nên d có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_P,\vec{u'}_\Delta\right]$ $=(-1;-1;0)$.

Gọi $d': \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$ và $A=d'\cap d\Rightarrow A=d'\cap(P)$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} z-1=0 \\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} z=1 \\ y=0 \\ x=3 \end{cases}\Rightarrow A(3;0;1)$.

Do đó phương trình đường thẳng $d:\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$.

Câu 44: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{6}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{4}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d_2 và song song với đường thẳng d_1. Khoảng cách giữa đường thẳng d_1 và mặt phẳng (P) là

A. $\frac{1}{7}$. **B.** 2. **C.** $\frac{12}{7}$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\vec{u_1}=(6;-1;2), \vec{u_2}=(3;1;4)$ là vectơ chỉ phương của d_1 và d_2

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(-2;-6;3)$.

Vì $d_2\subset(P)\Rightarrow A(1;-1;-1)\in d_2\Rightarrow A\in(P)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $-2(x-1)-6(y+1)+3(z+1)=0\Leftrightarrow -2x-6y+3z-1=0$.

$d\left(d_1;(P)\right)=d\left(B;(P)\right)=2$ với $B(2;1;-1)\in d_1$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(5;-1;3)$ đến (P) bằng

A. 5. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải

Lấy $B(2;1;1)\in d$ ta có $\overrightarrow{AB}=(2;0;-1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]=(2;4;4)=2(1;2;2)$

Mặt phẳng (P) đi qua A và chứa d suy ra $\overrightarrow{n_P}=(1;2;2)$.

Phương trình mặt phẳng $(P):x+2y+2z-6=0$

Vậy $d\left(M,(P)\right)=\dfrac{\left|x_M+2y_M+2z_M-6\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-2t\\y=3-2t\\z=1-3t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=6+2t'\\y=3+2t'\\z=7+9t'\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;3;1)$.

b) Đường thẳng d' đi qua điểm $B(6;3;7)$.

c) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

d) Cosin góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng $\dfrac{35}{\sqrt{1513}}$.

Lời giải

a) Đúng: Khi $t=0$ thì $\begin{cases}x=2\\y=3\\z=1\end{cases}$ nên đường thẳng d đi qua điểm $A(2;3;1)$.

b) Đúng: Khi $t'=0$ thì $\begin{cases}x=6\\y=3\\z=7\end{cases}$ nên đường thẳng d' đi qua điểm $B(6;3;7)$.

c) Sai: d đi qua điểm $A(2;3;1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(-2;-2;-3)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $B(6;3;7)$ có vectơ chỉ phương $\vec{b}=(2;2;9)$.

Ta có: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-12;12;0);\overrightarrow{AB}=(4;0;6)\Rightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{AB}=-48\neq 0$ nên d và d' chéo nhau.

d) Đúng: $\cos(d;d')=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{35}{\sqrt{1513}}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=2-3t\\z=1+2t\end{cases}$ và $d:\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $A(0;2;1)$ không thuộc đường thẳng Δ.

b) Đường thẳng d có vtcp $\vec{u}_d=(3;2;2)$.

c) Hai đường thẳng Δ và d chéo nhau.

d) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng Δ và d. Khi đó $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{38}}$.

Lời giải

a) Sai: Khi $t=0$ thì $\begin{cases}x=0\\y=2\\z=1\end{cases}$ nên điểm $A(0;2;1)$ thuộc đường thẳng Δ

b) Sai: Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d=(-3;2;2)$.

c) Đúng: Δ đi qua điểm $A(0;2;1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=(1;-3;2)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $B(1;0;2)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d=(-3;2;2)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{u_d}\right]=(-10;-8;-7);\overrightarrow{AB}=(1;-2;1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{u_d}\right]\cdot\overrightarrow{AB}=-1\neq 0$ nên Δ và d chéo nhau.

d) Sai: Ta có các vecto chỉ phương của hai đường thẳng là $\vec{u}_\Delta=(1;-3;2),\vec{u}_d=(-3;2;2)$.

Khi đó: $\cos\alpha=\left|\cos(\vec{u}_\Delta,\vec{u}_d)\right|=\dfrac{|\vec{u}_\Delta\cdot\vec{u}_d|}{|\vec{u}_\Delta|\cdot|\vec{u}_d|}=\dfrac{\left|1\cdot(-3)+(-3)\cdot 2+2\cdot 2\right|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+2^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{238}}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' có phương trình chính tắc lần lượt là: $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-7}{5}=\dfrac{z-15}{6}$ và $d':\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình tham số của d là: $\begin{cases}x=3+2t\\y=7+5t\\z=15+6t\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

b) Phương trình tham số của d' là: $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t' \end{cases}$.

c) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

d) Góc giữa đường thẳng d và d' là $35°$.

Lời giải

a) Đúng: Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 7 + 5t \\ z = 15 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b) Đúng: Phương trình tham số của d' là: $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t', t' \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + t' \end{cases}$

c) Sai: Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;5;6)$.

Đường thẳng d' có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u'} = (1;1;1)$. Suy ra d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

Xét $\begin{cases} 3 + 2t = 1 + t' \\ 7 + 5t = 2 + t' \\ 15 + 6t = 3 + t' \end{cases}; t, t' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - t' = -2 \\ 5t - t' = -5 \\ 6t - t' = -12 \end{cases}; t, t' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -7 \\ 6t - t' = -12 \end{cases}; t, t' \in \mathbb{R}$.

Hệ phương trình trên vô nghiệm. Do đó hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

d) Sai: Góc giữa đường thẳng d và d' là:

$$\cos(d, d') = \left|\cos\left(\vec{u}, \vec{u}'\right)\right| = \frac{|2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{13}{\sqrt{195}}.$$

Suy ra $(d, d') \approx 21°$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = -3 - t \end{cases}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x + y + z - 1 = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (3;4;-3)$.

b) $\sin(\Delta, (P)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Góc giữa Δ và (P) là: 30°.

d) Giao điểm của Δ và (P) là: $M(3;4;-3)$

Lời giải

a) Sai: Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (1;2;-1)$

b) Sai: Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (1;2;-1)$, một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (2;1;1)$

Khi đó $\sin\left(\Delta,\left(P\right)\right)=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\dfrac{\left|1.2+2.1+\left(-1\right).1\right|}{\sqrt{1^2+2^2+\left(-1\right)^2}.\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$.

c) Đúng: Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=\left(1;2;-1\right)$, một vectơ pháp tuyến của $\left(P\right)$ là $\vec{n}=\left(2;1;1\right)$. Khi đó $\sin\left(\Delta,\left(P\right)\right)=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\dfrac{\left|1\cdot2+2\cdot1+\left(-1\right)\cdot1\right|}{\sqrt{1^2+2^2+\left(-1\right)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $\left(\Delta,\left(P\right)\right)=30°$.

d) Sai: Ta có $2.3+\left(-4\right)+\left(-3\right)-1=-2\neq0$ nên $M\left(3;4;-3\right)\notin\left(P\right)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$ và mặt phẳng $\left(P\right)$ có phương trình $3x+6y-3z+2024=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=\left(-1;-2;1\right)$.

b) Một vectơ pháp tuyến của $\left(P\right)$ là $\vec{n}=\left(1;2;-1\right)$.

c) Góc giữa Δ và $\left(P\right)$ là: $90°$.

d) Lấy tuỳ ý hai điểm phân biệt $A,B\in\Delta$. Gọi A',B' lần lượt là hình chiếu của A,B lên $\left(P\right)$. Khi đó $A'B'=2024$.

Lời giải

a) Đúng: Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=\left(-1;-2;1\right)$.

b) Đúng: Một vectơ chỉ phương của $\left(P\right)$ là $\vec{n}=\left(1;2;-1\right)$.

c) Đúng: Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=\left(-1;-2;1\right)$, một vectơ pháp tuyến của $\left(P\right)$ là $\vec{n}=\left(1;2;-1\right)$. Khi đó $\sin\left(\Delta,\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|\left(-1\right)\cdot1+\left(-2\right)\cdot2+1\cdot\left(-1\right)\right|}{\sqrt{\left(-1\right)^2+\left(-2\right)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+\left(-1\right)^2}}=1$.

Vậy $\left(\Delta,\left(P\right)\right)=90°$.

d) Sai: Vì $\Delta\perp\left(P\right)$ nên A' trùng B'. Do đó $A'B'=0$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=-1-3t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ và mặt phẳng $\left(P\right)$ có phương trình $2x+y-3z-1=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=\left(2;0;-3\right)$.

b) Góc giữa Δ và $\left(P\right)$ là: $150°$.

c) Không có điểm chung nào giữa Δ và $\left(P\right)$.

d) Hình chiếu của $M(1;2;-1)$ lên (P) là: $N(1;2;1)$.

Lời giải

a) Sai: Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(2;1;-3)$.

b) Sai: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không thể lớn hơn $90°$.

c) Sai: Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(2;1;-3)$, một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(2;1;-3)$. Khi đó $\sin(\Delta,(P))=\dfrac{|2\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+3\cdot 3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=1$.

Do đó $(\Delta,(P))=90°$. Vậy có điểm chung giữa Δ và (P).

d) Sai: Ta có $\Delta\perp(P), M(1;2;-1)\in\Delta$ và $\overrightarrow{MN}=(0;0;2)$ không cùng phương với $\vec{n}=(2;1;-3)$ nên đáp án sai.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=1+t\\y=2+3t\\z=3-t\end{cases}$ và đường thẳng $\Delta_2:\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $M(1;2;3)$ thuộc Δ_1 và điểm $N(2;-2;1)$ thuộc Δ_2.

b) $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{2\sqrt{154}}{77}$.

c) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

d) Đường thẳng d đi qua điểm $N(2;3;-1)$ đồng thời cắt và vuông góc với Δ_2 có phương trình là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{-71}=\dfrac{z+1}{25}$.

Lời giải

a) Đúng: Từ phương trình của $\Delta_1;\Delta_2$ ta có $M(1;2;3)\in\Delta_1$ và $N(2;-2;1)\in\Delta_2$.

b) Sai: Ta có $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{|1\cdot(-2)+3\cdot 1+(-1)\cdot 3|}{\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}}=\dfrac{\sqrt{154}}{77}$.

c) Sai: Ta có $\overrightarrow{u_1}=(1;3;-1)$ là vectơ chỉ phương của $\Delta_1;\overrightarrow{u_2}=(-2;1;3)$ là vectơ chỉ phương của Δ_2

$M(1;2;3)\in\Delta_1$ và $N(2;-2;1)\in\Delta_2\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(1;-4;-2)$.

Do đó $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(10;-1;7)\neq\vec{0};\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\cdot\overrightarrow{MN}=10\cdot 1+(-1)\cdot(-4)+7\cdot(-2)=0$. Suy ra Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

d) Đúng: Gọi $P=d\cap\Delta_2$ và $P\in\Delta_2\Rightarrow P(-2t+2;t-2;3t+1)$ (với $t\in\mathbb{R}$)

$\Rightarrow \overrightarrow{NP}=(-2t;t-5;3t+2)$ mà $N\in d, P\in d$ và $d\perp\Delta_2$ nên $\overrightarrow{NP}\perp\overrightarrow{u_2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{u_2}=0\Rightarrow(-2t)\cdot(-2)+(t-5)\cdot 1+(3t+2)\cdot 3=0\Rightarrow t=-\dfrac{1}{14}$.

Do đó $\overrightarrow{NP}=\left(\dfrac{1}{7};-\dfrac{71}{14};\dfrac{25}{14}\right)\Rightarrow\overrightarrow{u_3}=(2;-71;25)$ là vectơ chỉ phương của d.

Vậy d có phương trình là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{-71}=\dfrac{z+1}{25}$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2024}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2025}{-2}$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+1=0$. Xét các vectơ $\vec{u}=(2;1;-2),\vec{n}=(2;2;-1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

b) $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

c) $\cos(\Delta,(P))=\dfrac{8}{9}$.

d) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng khoảng 63° (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Lời giải

a) Đúng: Do $\Delta:\dfrac{x-2024}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2025}{-2}$ nên $\vec{u}=(2;1;-2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

b) Đúng: Do $(P):2x+2y-z+1=0$ nên $\vec{n}=(2;2;-1)$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng (P).

c) Sai: Ta có $\sin(\Delta,(P))=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|2.2+1.2-2(-1)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{8}{9}$

$\cos^2(\Delta,(P))=1-\sin^2(\Delta,(P))=1-\dfrac{64}{81}=\dfrac{17}{81}\Rightarrow\cos(\Delta,(P))=\dfrac{\sqrt{17}}{9}$.

d) Đúng: Từ ý c) suy ra $(\Delta,(P))\approx 63^0$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+3t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+2y-z-2=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;2;-1)$.

b) Góc giữa Δ và (P) là: 60°.

c) Chỉ có một điểm chung duy nhất giữa Δ và (P).

d) Mọi điểm thuộc Δ có hình chiếu lên (P) là chính nó.

Lời giải

a) Đúng: Một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;2;-1)$.

b) Sai: Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(1;1;3)$,

Một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;2;-1)$.

Khi đó $\sin(\Delta,(P))=\dfrac{|1\cdot 1+2\cdot 1+(-1)\cdot 3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+3^2}}=0$. Do đó $(\Delta,(P))=0^\circ$.

c) Sai:Xét $M(1;2;3)$ và $N(0;1;0)$, dễ thấy $\begin{cases}M\in\Delta\\M\in(P)\\N\in\Delta\\N\in(P)\end{cases}$ do đó giữa Δ và (P) có nhiều hơn hai điểm chung.

d) đúng:

Vì mọi điểm thuộc Δ đều thuộc (P) nên mọi điểm thuộc Δ có hình chiếu lên (P) là chính nó.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=3-2t\\y=1+2t\\z=-5+t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x+y-5=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vectơ $\vec{u}=(-2;2;1)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

b) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Oyz) bằng $45°$.

c) Đường thẳng đi qua $N(2;3;-4)$ và song song với Δ có phương trình là $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+4}{1}$

d) Đường thẳng d vuông góc Δ và tạo với (P) một góc $45°$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;4)$.

Lời giải

a) Đúng: Từ phương trình của $\Delta:\begin{cases}x=3-2t\\y=1+2t\\z=-5+t\end{cases}$ ta có $\vec{u}=(-2;2;1)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

b) Đúng: $(P):x+y-5=0;(Oyz):x=0$ nên ta có $\cos((P),(Oyz))=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $((P),(Oyz))=45°$.

c) Đúng: Đường thẳng $\Delta_1 // \Delta$ nên Δ_1 nhận $\vec{u}=(-2;2;1)$ làm vectơ chỉ phương.

Hơn nữa Δ_1 đi qua $N(2;3;-4)$ nên có phương trình là $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+4}{1}$.

d) Sai: Gọi $\overrightarrow{u_1}=(a;b;c)$ (với $a^2+b^2+c^2>0$) là một vectơ chỉ phương của d.

Do $d\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{u_1}\perp\vec{u}\Rightarrow\overrightarrow{u_1}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow -2a+2b+c=0\Rightarrow c=2a-2b(*)$.

Hơn nữa $(d,(P))=45^\circ$ nên $\sin(d,(P))=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{|a+b|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow|a+b|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow(a+b)^2=a^2+b^2+c^2\Leftrightarrow c^2=2ab$.

Thay (*) vào ta được $(2a-2b)^2=2ab\Leftrightarrow 2a^2-5ab+2b^2=0(**)$.

Nếu $b=0\Rightarrow a=0;c=0$ (không thỏa mãn).

Nếu $b\neq 0$, ta có $(**)\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{a}{b}=2\\ \frac{a}{b}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Với $\frac{a}{b}=2\Rightarrow a=2b$, thay vào $(^*)$ ta được $c=2b$. Do đó $\overrightarrow{u_1}=(2b;b;2b)$ (với $b\neq 0$).

Với $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}\Rightarrow b=2a$, thay vào $(^*)$ ta được $c=-2a$. Do đó $\overrightarrow{u_1}=(a;2a;-2a)$ (với $a\neq 0$).

Vậy $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;4)$ không là một vectơ chỉ phương. của d.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian với hệ truvcj tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x-2y-2z+5=0$. Điểm $A(a;b;c)$ có hoành độ dương thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (α) bằng 3. Tính tổng $a+b-c$?

Lời giải

Điểm A có hoành độ dương thuộc đường thẳng d, tọa độ A là $(2t;-t;-1+t)$ với $t>0$.

Khoảng cách từ A đến (α) bằng 3 nên ta có: $\frac{|2t-2(-t)-2(-1+t)+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3$

$\Leftrightarrow\frac{|2t+7|}{3}=3\Leftrightarrow|2t+7|=\pm 9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-8\,(L)\\ t=1(TM)\end{array}\right.$.

Vậy tọa độ A là $(2;-1;0)\Rightarrow a+b-c=2-1-0=1$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{2}$, $d_2:\begin{cases}x=2t\\ y=1\\ z=1-t\end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2. Giá trị $\cos\varphi$ có dạng $\frac{a\sqrt{c}}{b}$. Tính giá trị biểu thức $P=b-3a+c$?

Lời giải

Ta có $\vec{u}_{d_1}=(-1;2;2),\vec{u}_{d_2}=(2;0;-1)$

Khi đó $\cos\varphi=\dfrac{\left|\vec{u}_{d_1}.\vec{u}_{d_2}\right|}{\left|\vec{u}_{d_1}\right|\left|\vec{u}_{d_2}\right|}=\dfrac{\left|-1.2+2.0+2.(-1)\right|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}.\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{3\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$.

Vậy $a=4,b=15,c=5\Rightarrow b-3a+c=15-3.4+5=8$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác ABC là $I(a;b;c)$. Tính tổng $a+b+c$?

Lời giải

Ta có: Ta có phương trình đường thẳng AC là $\begin{cases}x=1-5t\\y=2+5t\\z=-1+6t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$.

Gọi I là chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác $ABC\Rightarrow I(1-5t;2+5t;-1+6t)$.

Lại có $\overrightarrow{BA}=(-1;3;-4)$, $\overrightarrow{BC}=(-6;8;2)$, $\overrightarrow{BI}=(-5t-1;5t+3;6t-4)$.

Vì I là chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác nên ABC:

$\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BI}\right)=\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}\right)\Leftrightarrow\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BI}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BI}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{BI}\right|}$

$\Leftrightarrow\dfrac{5t+1+15t+9+16-24t}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-4)^2}}=\dfrac{30t+6+40t+24+12t-8}{\sqrt{(-6)^2+8^2+2^2}}\Leftrightarrow\dfrac{-4t+26}{\sqrt{26}}=\dfrac{82t+22}{\sqrt{104}}$

$\Leftrightarrow-8t+52=82t+22\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow I\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};1\right)$.

Vậy $a=-\dfrac{2}{3},b=\dfrac{11}{3},c=1\Rightarrow a+b+c=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{11}{3}+1=4$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=-2-t\end{cases}$ và $(P):-x+2y+2z+5=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ cắt đường thẳng Δ_1 và tạo với đường thẳng Δ_2 một góc nhỏ nhất. Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(a;b;c)$. Tính tổng $a+2b-3c$?

Lời giải

Giả sử đường thẳng d cắt đường thẳng Δ_1 tại B, ta có: $B(1+2t;2+t;-2-t)\in\Delta_1$.

Đường thẳng d có VTCP là: $\overrightarrow{AB}=(2t+2;t+2;-t-1)$, mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(-1;2;2)$.

Gọi φ là góc giữa d và Δ_2, ta có: $\sin\varphi=\dfrac{\left|-2t-2+2t+4-2t-2\right|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}}=\dfrac{\left|2t\right|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}}\geq 0$, $\Rightarrow d$ tạo với đường thẳng Δ_2 một góc φ nhỏ nhất khi $\varphi=0°$ hay $\sin\varphi=0\Rightarrow t=0$.

Khi đó đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ và có VTCP $\overrightarrow{AB}=(2;2;-1)$.

Vậy $a=2,b=2,c=-1\Rightarrow a+2b-3c=2+2.2-3.(-1)=9$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0);B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc $60°$. Tính tổng $a+b+c$? *(Làm tròn đến hàng phần trăm)*

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, B nên ta có: $\begin{cases} b-1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$

Và (P) tạo với (Oyz) một góc 60° nên $\cos\big((P);(Oyz)\big)=\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$ $(*)$

Thay $a=b=1$ vào phương trình $(*)$ được: $\sqrt{2+c^2}=2\Rightarrow c=-\sqrt{2}$

Khi đó: $a+b+c=2-\sqrt{2}\approx 0,59$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases} x=4+t \\ y=-4-t \\ z=6+2t \end{cases}; d_2:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-11}{4}=\dfrac{z-5}{2}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt d_1,d_2 lần lượt ở B,C. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$

Lời giải

$B\in d_1\Rightarrow B(4+t;-4-t;6+2t)$. Phương trình tham số $d_2:\begin{cases} x=5+2s \\ y=11+4s \\ z=5+2s \end{cases}$

$C\in d_2\Rightarrow C(5+2s;11+4s;5+2s)$. Khi đó: $\overrightarrow{AB}=(-1+t;-1-t;2t+1); \overrightarrow{AC}=(2s;4s+14;2s)$

Do A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}:\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-1=2ks \\ -t-1=4ks+14k \\ 2t+1=2ks \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ s=-3 \\ k=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$. Do đó $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}=0,5$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$,

$d_2:\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một góc 45^0 và nhận vectơ $\vec{n}=(1;b;c)$ làm một vectơ pháp tuyến. Xác định tích bc.

Lời giải

Ta có vectơ chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1=(2;-2;-1)$ và $\vec{u}_2=(1;0;-1)$.

Mặt phẳng (P) qua $d_1\Rightarrow \vec{n}.\vec{u}_1=0\Leftrightarrow 2-2b-c=0.$ (1)

$$\sin\big(d_2,(P)\big)=\frac{|\vec{u}_2.\vec{n}|}{|\vec{u}_2|.|\vec{n}|}=\sin 45^\circ\Leftrightarrow\frac{|1-c|}{\sqrt{b^2+c^2+1}.\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow|1-c|=\sqrt{b^2+c^2+1}\Leftrightarrow b^2+2c=0.(2)$$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow\begin{cases} b=2 \\ c=-2 \end{cases}\Rightarrow b.c=-4.$

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của A đến d. Khi đó $H(2-t;-1+2t;1+t)\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(-1-t;2t;1+t)$.

Do $AH\perp d\Rightarrow -(-1-t)+2.2t+1+t=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{AH}=\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi $AH\perp(\alpha)$.

Do đó (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Vậy (α): $1(x-2)+1(y+1)-1(z-1)=0\Leftrightarrow x+y-z=0$.

Câu 9: Cho hai điểm $A(1;-1;1)$; $B(2;-2;4)$. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa A, B và tạo với mặt phẳng $(\alpha): x-2y+z-7=0$ một góc $60°$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;3)$, $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;-2;1)$

Gọi $\overrightarrow{n_\beta}=(a;b;c)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) cần lập.

$$\cos((\alpha),(\beta))=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_\beta}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}=\frac{|1.a-2.b+1.c|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow 2(a-2b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)\ (1)$$

Mặt khác vì mặt phẳng (β) chứa A, B nên: $\overrightarrow{n_\beta}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow a-b+3c=0\Leftrightarrow a=b-3c$

Thế vào (1) ta được: $2b^2-13bc+11c^2=0\ (2)$

Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

Suy ra có 2 vectơ $\overrightarrow{n_\beta}=(a;b;c)$ thỏa mãn và có 2 mặt phẳng.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ với $c<0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc $60°$. Tính giá trị $a+b+c$.

Lời giải

Ta có: $A,B\in(P)$ nên $\begin{cases}b+d=0\\a+d=0\end{cases}$. Suy ra (P) có dạng $ax+ay+cz-a=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;a;c)$.

Măt phẳng (yOz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Ta có: $\cos 60°=\dfrac{|\vec{n}.\vec{i}|}{|\vec{n}|.|\vec{i}|}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{|a|}{\sqrt{2a^2+c^2}.1}\Leftrightarrow 2a^2+c^2=4a^2\Leftrightarrow 2a^2-c^2=0$.

Chọn $a=1$, ta có: $c^2=2\Rightarrow c=-\sqrt{2}$ do $c<0$.

Ta có: $a+b+c=a+a+c=1+1-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}$.

Câu 11: Tại một nút giao thông có 2 con đường khác mức. Trên thiết kế, trong không gian *Oxyz* hai con đường đó thuộc hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$; $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.



Người ta muốn tạo một con đường Δ cắt d_1,d_2 lần lượt tại A và B sao cho AB nhỏ nhất. Tính độ dài AB, *kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.*

Lời giải

Ta có AB ngắn nhất khi AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2.

Gọi $A(2+a;2+a;-a)\in d_1$; $B(2+b;-1+2b;-3b)\in d_2\Rightarrow\overrightarrow{AB}(b-a;2b-a-3;-3b+a)$.

d_1,d_2 lần lượt có các véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d_1}=(1;1;-1)$ và $\vec{u}_{d_2}=(1;2;-3)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}_{d_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_{d_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1(b-a)+1(2b-a-3)-1(-3b+a)=0\\ 1(b-a)+2(2b-a-3)-3(-3b+a)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6b-3a-3=0\\ 14b-6a-6=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(1;1;1)\\ B(2;-1;0)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$

Do đó $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{6}\approx 2,45$.

----------HẾT----------

Dạng 4: Tọa độ hóa một số HHKG và ứng dụng thực tế

Phương pháp: Để tọa độ hóa một số hình học không gian thì ta thực hiện như sau:

- **Bước 1:** Chọn hệ trục tọa độ. Trong bước này ta sẽ xác định 3 đường vuông góc có trong bài toán và gọi đó là 3 đường cơ sở. Thông thường thì ta sẽ quy ước trục Ox hướng vào mình, trục Oy nằm ngang, còn lại là trục Oz.
- **Bước 2**: Xác định tọa độ các điểm liên trên hình liên quan tới bài toán. Với những bạn chưa quen thì chúng ta xác định tọa độ hình chiếu của điểm cần tìm lên các trục, từ đó sẽ suy ra được tọa độ điểm cần tính.
- **Bước 3**: Áp dụng công thức. Sau đây chúng ta sẽ nhắc lại một số công thức cần nhớ trong phần này:

  Diện tích và thể tích: Diện tích tam giác, thể tích tứ diện, thể tích hình hộp, thể tích hình lăng trụ.

  Góc: Góc giữa 2 mặt phẳng, góc giữa 2 đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

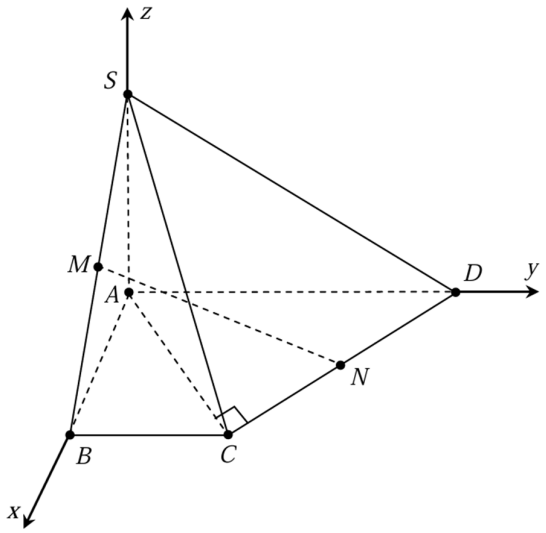
  Khoảng cách: Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng, Khoảng cách từ một điểm đến 1 đường thẳng, Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Chú ý: Thông thường các bài mà không có 3 đường vuông góc thì ta sẽ phải tự dựng thêm để gắn tọa độ và những bài liên quan tới hình lập phương, hình hộp chữ nhật, chối chóp có 3 đường vuông góc, lăng trụ đứng thì khi áp dụng phương pháp này sẽ giải rất nhanh.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B biết $AB = BC = a, AD = 2a$. Biết rằng $SA = a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

Lời giải



Chọn hệ trục như hình vẽ, chọn đơn vị là a.

Có $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;2;0), S(0;0;1); M\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right); N\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};0\right)$.

Vectơ chỉ phương của MN là $2\overrightarrow{MN} = 2\left(0;\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right) = (0;3;-1)$.

Vectơ pháp tuyến của (SAC) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AS}\right] = (1;-1;0)$.

Vậy $\sin\left(MN;(SAC)\right) = \frac{|3|}{\sqrt{9+1}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$ nên $\cos\left(MN;(SAC)\right) = \sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{10}$.

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin góc giữa MN và (SAC), biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

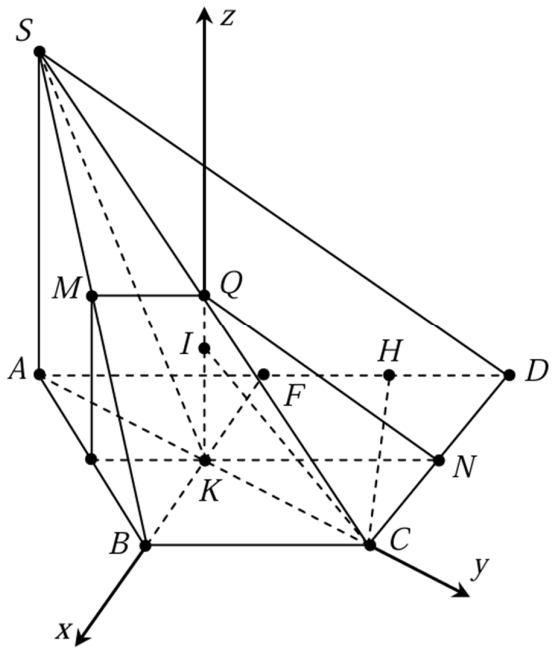
Lời giải

Vì $ABCD$ là hình thang cân có $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$

Suy ra $AD = 2a; AB = BC = CD = a \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Nên $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. SA $= \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SA = a$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây:



Ta có $K(0;0;0), B\left(\frac{a}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), A\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$N\left(\frac{-a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), S\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right), M\left(\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{2}\right)$

Vectơ $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{-3a}{4};\frac{3a\sqrt{3}}{4};\frac{-a}{2}\right)$. Chọn $\overrightarrow{u_1} = \left(-3;3\sqrt{3};-2\right)$ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$

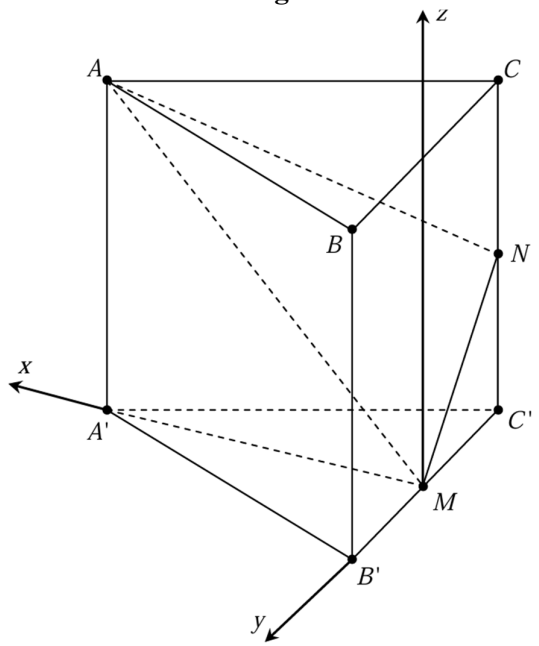
Nhận xét $\begin{cases} BK \perp SA \\ BK \perp AC \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAC)$

Vectơ $\overrightarrow{BK} = \left(\frac{a}{2};0;0\right)$ là VTPT của (SAC) nên ta chọn $\vec{n_1} = (1;0;0)$ cùng phương với $\overrightarrow{BK}$

Gọi α là góc góc giữa MN và (SAC) khi đó $\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|} = \frac{3\sqrt{10}}{20} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{310}}{20}$.

Bài tập 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, BAC = 120^\circ, AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC'. Số đo góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) bằng

Lời giải



Thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ trong không gian như hình vẽ, gốc toạ độ O trùng M.

Dễ dàng tính được $MB' = MC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}; MA' = \frac{a}{2}$ và $M(0;0;0), N \in (Oyz) \Rightarrow N\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right)$

Ta có: $A \in (Oxz) \Rightarrow A\left(\frac{a}{2};0;a\right)$ và $(ABC) // (A'B'C'); (A'B'C') \equiv (Oxy)$

Suy ra mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$

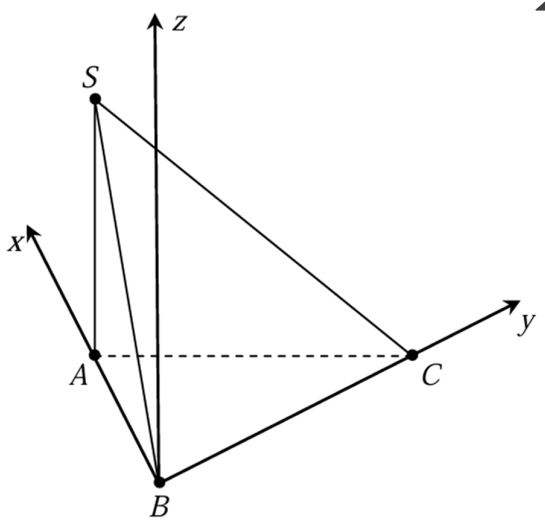
Ta có $\overrightarrow{MA}\left(\frac{a}{2};0;0\right)$ cùng phương $\overrightarrow{u_1} = (1;0;2); \overrightarrow{MN}\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right)$ cùng phương $\overrightarrow{u_2} = \left(0;-\sqrt{3};1\right)$

Mặt phẳng (AMN) có một vecto pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = \left(2\sqrt{3};-1;-\sqrt{3}\right)$

Khi đó: $\cos\left((AMN),(ABC)\right) = \left|\cos\left(\vec{k},\vec{n}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm AC. Tính cot góc của hai mặt phẳng (SBM) và (SAB)

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Khi đó ta có tọa độ các điểm như sau: $B(0;0;0);A(a;0;0);C(0;a;0);S(a;0,a\sqrt{3});M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

Ta có: $\vec{n}_{(SAB)}=(0;1;0);\vec{n}_{(SBM)}=\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{MB}\right]=\left(a\left(1;0,\sqrt{3}\right)\right)\wedge\left(\frac{a}{2}(1;1;0)\right)=\frac{a^2}{2}\left(-\sqrt{3};\sqrt{3};1\right)$

Đặt góc (SBM) và (SAB) là α, khi đó ta có: $|\cos\alpha|=\frac{\left|\vec{n}_{(SAB)}.\vec{n}_{(SMB)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SAB)}\right|.\left|\vec{n}_{(SMB)}\right|}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

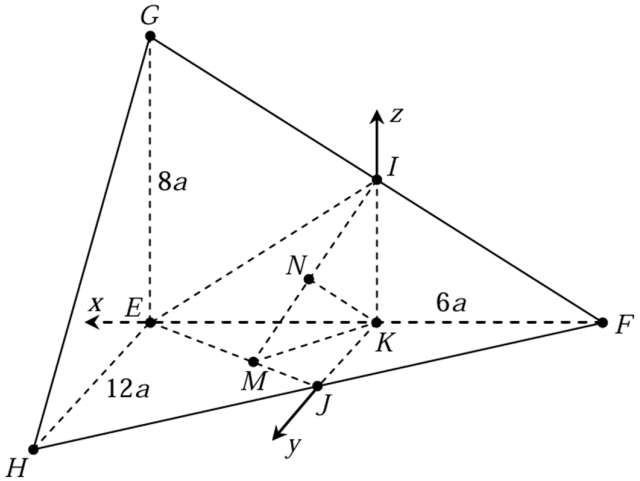
Khi đó $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{7}}{7}\Rightarrow\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 5: Cho hình tứ diện $EFGH$ có EF vuông góc với EG, EG vuông góc với EH, EH vuông góc với EF. Biết $EF=6a, EG=8a, EH=12a$ (với $a>0,a\in\mathbb{R}$). Gọi I,J tương ứng là trung điểm của hai cạnh FG,FH. Tính khoảng cách d từ điểm F đến mặt phẳng (EIJ) theo a.

Lời giải

Vì EF vuông góc với EG, EG vuông góc với EH nên $EG\perp(EFH)$. Gọi K là trung điểm của EF suy ra $IK\perp(EFH)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ

Khi đó ta có: $K(0;0;0),I(0;0;4a),E(3a;0;0),J(0;6a;0)$.



Phương trình mặt phẳng $(EIJ): \frac{x}{3a}+\frac{y}{6a}+\frac{z}{4a}=1 \Leftrightarrow 4x+2y+3z-12a=0$.

Vậy $d=\left(F,(EIJ)\right)=2d\left(K,(EIJ)\right)=2\frac{12a}{\sqrt{4+9+16}}=\frac{24a}{\sqrt{29}}=\frac{24\sqrt{29}a}{29}$.

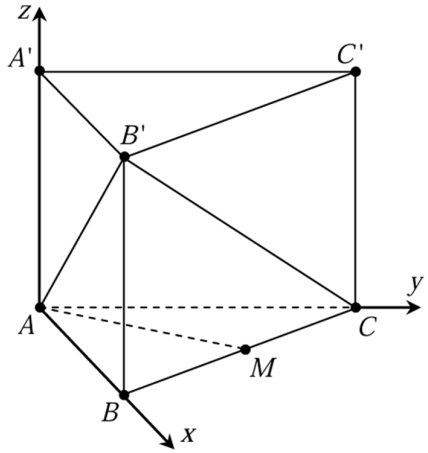
Bài tập 6: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC=a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải

Gọi chiều cao của hình lăng trụ là h.

Đặt hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ. Khi đó $A(0;0;0), B\left(a\sqrt{3};0;0\right), C\left(0;a\sqrt{3};0\right), B'\left(a\sqrt{3};0;h\right)$

Suy ra $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$ là trung điểm của BC.



Vì $AM \perp (BCC'B')$ và $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$ nên $\vec{n}=(1;1;0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(BCC'B')$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB'}\right]=\left(ah\sqrt{3};0;-3a^2\right) \Rightarrow \vec{n_1}=\left(h;0;-\sqrt{3}a\right)$ là vectơ pháp tuyến của $(AB'C)$.

Theo giả thiết góc giữa $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $60°$

Tức là: $\cos 60°=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{n_1}\right)\right| \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{|h|}{\sqrt{2}.\sqrt{h^2+3a^2}} \Rightarrow h=\sqrt{3}a$

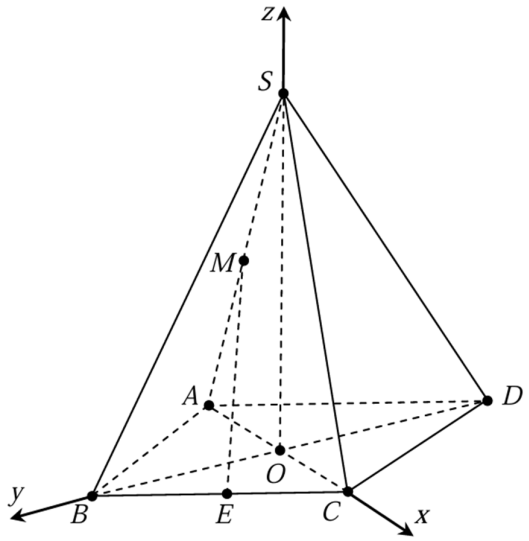
Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E,M lần lượt là trung điểm các cạnh BC, SA và α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD). Tính $\tan\alpha$

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $Ox \equiv OC, Oy \equiv OB, Oz \equiv OS$. Chọn $OA=1$

Ta có $C(1;0;0), A(-1;0;0) \Rightarrow (SBD)$ nhận $\overrightarrow{AC}=(2;0;0)$ là một vectơ pháp tuyến.



Từ $SA = AB = OA\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} S(0;0;1) \\ A(-1;0;0) \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$

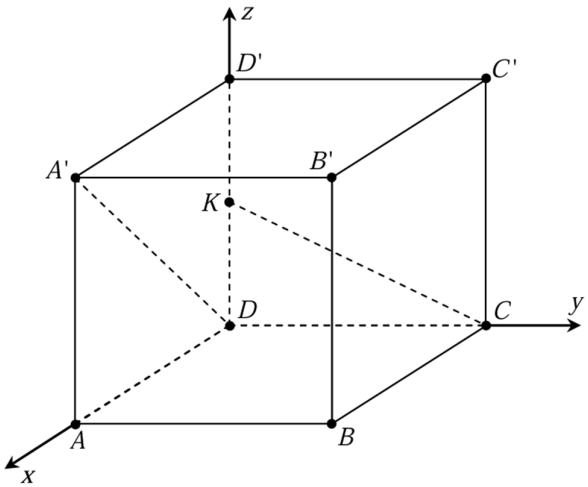
Ta có $\begin{cases} C(1;0;0) \\ B(0;1;0) \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right) \Rightarrow EM$ nhận $\overrightarrow{ME} = \left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ là một vectơ chỉ phương.

Suy ra: $\sin\left(EM;(SBD)\right) = \sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{AC}\right|}{ME.AC} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}.2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{2}$.

Bài tập 8: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Chọn $a = 1$ ta có hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $D(0;0;0), A'(1;0;1), K\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ và $C(0;1;0)$

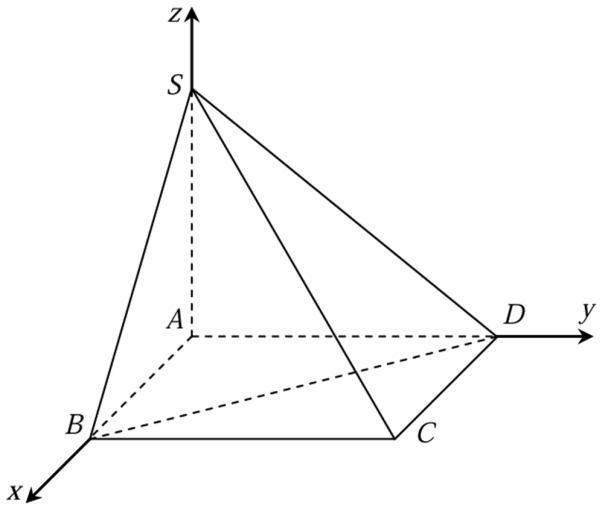
Ta có $\overrightarrow{DA'} = (1;0;1); \overrightarrow{CK}\left(0;-1;\frac{1}{2}\right)$ và $\overrightarrow{DK}\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$

Khi đó $\left[\overrightarrow{DA'};\overrightarrow{\mathrm{CK}}\right]=\left(1;-\frac{1}{2};-1\right),\left[\overrightarrow{DA'};\overrightarrow{\mathrm{CK}}\right].\overrightarrow{DK}=-\frac{1}{2}$

Do đó: $d\left(A'D;CK\right)=\frac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}}=\frac{1}{3}.$

Bài tập 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết rằng $AB=a, BC=a\sqrt{3}$, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Hãy tính sin α, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

Lời giải



Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, ta có: $A(0;0;0), B(a;0;0), D\left(0;a\sqrt{3};0\right), S(0;0;a)$

$\overrightarrow{BD}=\left(-a;a\sqrt{3};0\right)=a\left(-1;\sqrt{3};0\right)$ nên đường thẳng BD có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left(-1;\sqrt{3};0\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{SB}=(a;0;-a), \overrightarrow{BC}=\left(0;a\sqrt{3};0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right]=\left(a^2\sqrt{3};0;a^2\sqrt{3}\right)=a^2\sqrt{3}(1;0;1)$.

Như vậy, mặt phẳng (SBC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;0;1)$.

Do đó, α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) thì

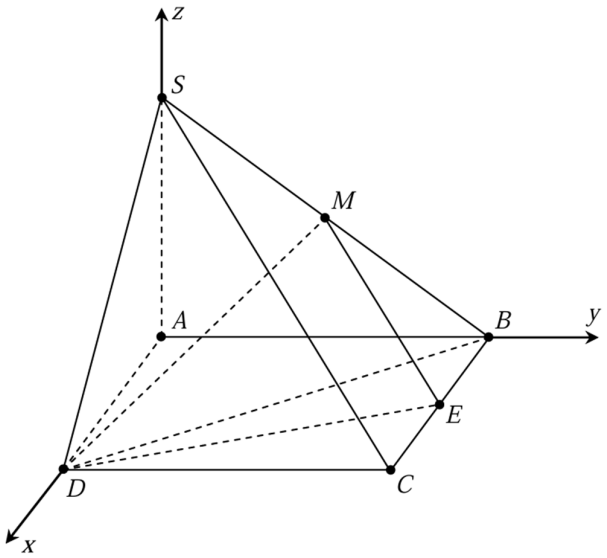
$$\sin\alpha=\frac{|\vec{u}.n|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\frac{\left|(-1).1+\sqrt{3}.0+0.1\right|}{\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2+0^2}.\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Bài tập 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng $45°$. Gọi E là trung điểm BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC.

Lời giải

Ta có thể đưa ra các cách giải như sau:

Do SAC là tam giác vuông có góc $SCA = 45^\circ$ nên $SA = AC = a\sqrt{2}, SC = 2a, SB = SD = a\sqrt{3}$.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS.

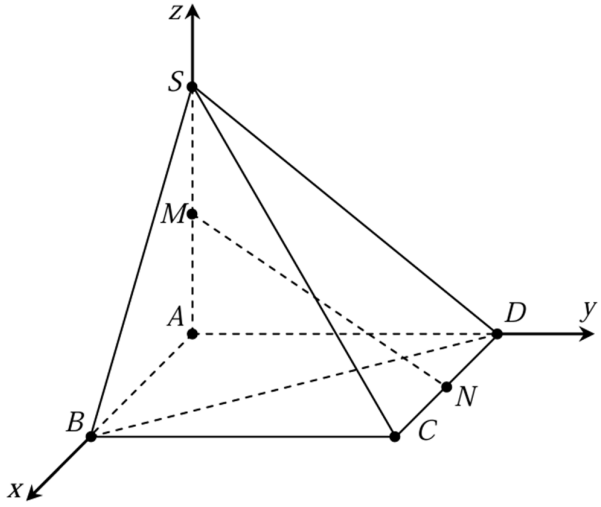
Khi đó tọa độ điểm các điểm là $D(0;a;0), E\left(a;\frac{a}{2};0\right), C(a;a;0), S\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$

Do đó: $\overrightarrow{DE} = \left(a;-\frac{a}{2};0\right), \overrightarrow{SC} = \left(-a;-a;a\sqrt{2}\right), \overrightarrow{DC} = (a;0;0)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{DE};\overrightarrow{SC}\right] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2};-a^2\sqrt{2};-\frac{3a^2}{2}\right) \Rightarrow d(DE;SC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{DE};\overrightarrow{SC}\right]\cdot\overrightarrow{DC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{DE};\overrightarrow{SC}\right]\right|} = \frac{a\sqrt{38}}{19}$

Bài tập 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

Lời giải



Xét tam giác vuông SAC có: $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{500 - 200} = 10\sqrt{3}$.

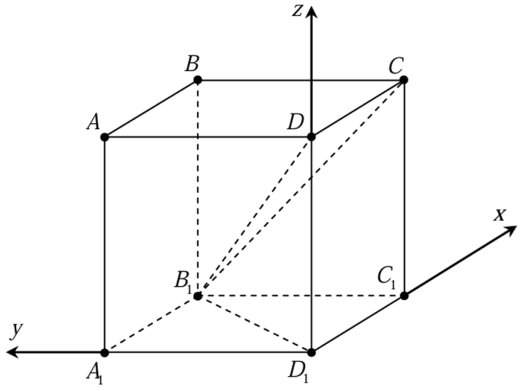
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Ta có $A(0;0;0), M\left(0;0;5\sqrt{3}\right), B(10;0;0), D(0;10;0), C(10;0;0), N(5;10;0)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN}=\left(5;10;-5\sqrt{3}\right)\Rightarrow \overrightarrow{u_1}=\left(1;2;-\sqrt{3}\right) \\ \overrightarrow{BD}=(-10;10;0)\Rightarrow \overrightarrow{u_2}=(-1;1;0)\Rightarrow d(MN,BD)=\dfrac{|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\overrightarrow{ND}|}{|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]|}=\sqrt{5}. \\ \left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=\left(\sqrt{3};\sqrt{3};3\right), \overrightarrow{ND}=(-5;0;0) \end{cases}$$

Bài tập 12: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh đáy bằng 1 và chiều cao bằng x. Tìm x để góc tạo bởi đường thẳng B_1D và (B_1D_1C) đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O\equiv D_1, C_1$ thuộc tia Ox, A_1 thuộc tia Oy, D thuộc tia Oz (như hình vẽ).

Khi đó $D_1(0;0;0), B_1(1;1;0), D(0;0;x), C(1;0;x)$.

Mặt phẳng (B_1D_1C) nhận véctơ $\vec{n}=\left[\overrightarrow{D_1B_1},\overrightarrow{D_1C}\right]=(x;-x;-1)$ là véctơ pháp tuyến

Đường thẳng B_1D nhận véctơ $\vec{u}=(1;1;-x)$ là véctơ chỉ phương.

Gọi φ là góc giữa B_1D và (B_1D_1C), suy ra:

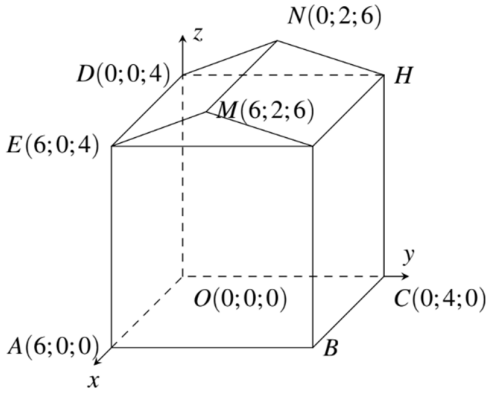
$$\sin\varphi=\frac{|x-x+x|}{\sqrt{x^2+(-x)^2+1}.\sqrt{1^2+1^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{\left(2x^2+1\right)\left(x^2+2\right)}}\ (x>0)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(2x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{2}{x}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5}}\le\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}+5}}=\frac{1}{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=1$ và góc φ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow x=1$.

Vậy góc tạo bởi đường thẳng B_1D và (B_1D_1C) đạt giá trị lớn nhất khi $x=1$.

Bài tập 13: Một kĩ sư xây dựng thiết kế khung một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$ như hình dưới đây nhờ một phần mềm đồ họa máy tính.



a) Viết phương trình mặt phẳng mái nhà $(DEMN)$.

b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mái nhà $(DEMN)$.

Lời giải

a) Mặt phẳng $(DEMN)$ có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{DE}=(6;0;0),\overrightarrow{DN}=(0;2;2)$.

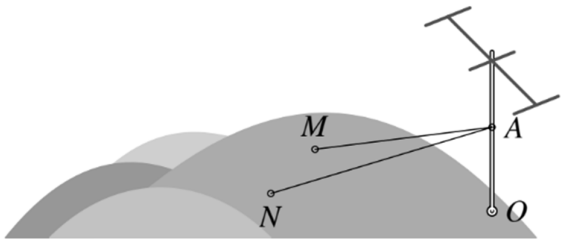
Ta có $\left[\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DN}\right]=(0;-12;12)$ nên suy ra $(DEMN)$ có vectơ pháp tuyến là:

$\vec{n}=-\frac{1}{12}\left[\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DN}\right]=(0;1;-1)$

Phương trình của mặt phẳng $(DEMN)$ là: $y-z+4=0$.

b) Điểm $B(6;4;0)$ nên suy ra $d\left(B,(DEMN)\right)=\frac{|4+4|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$.

Bài tập 14: Người ta muốn dựng một cột ăngten trên một sườn đồi. Ăngten được dựng thẳng đứng trong không gian $Oxyz$ với độ dài đơn vị trên mỗi trục bằng 1m. Gọi O là gốc cột, A là điểm buộc dây cáp vào cột ăngten và M,N là hai điểm neo dây cáp xuống mặt sườn đồi (hình vẽ).



Cho biết tọa độ các điểm nói trên lần lượt là $O(0;0;0),A(0;0;6),M(3;-4;3),\ N(-5;-2;2)$.

a) Tính độ dài các đoạn dây cáp MA và NA.

b) Tính góc tạo bởi các sợi dây cáp MA,NA với mặt phẳng sườn đồi.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{MA}=(-3;4;3),\overrightarrow{NA}=(5;2;4)$ suy ra $MA=\sqrt{(-3)^2+4^2+3^2}=\sqrt{34}\approx 5{,}8$ m

Khi đó $NA=\sqrt{5^2+2^2+4^2}=\sqrt{45}\approx 6{,}7$ m.

b) Mặt phẳng (OMN) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{OM}=(3;-4;3),\overrightarrow{ON}=(-5;-2;2)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right]=(-2;-21;-26)$.

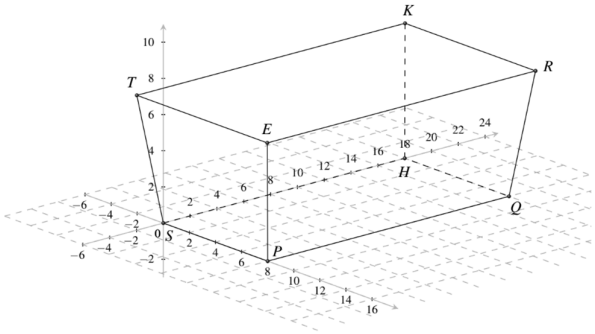
Gọi α,β lần lượt là góc tạo bởi MA,NA với mặt phẳng (AMN).

Ta có: $\sin\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{MA}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|-3.(-2)+4.(-21)+3.(-26)\right|}{\sqrt{(-3)^2+4^2+3^2}.\sqrt{(-2)^2+(-21)^2+(-26)^2}}=\dfrac{156}{\sqrt{38114}}\Rightarrow\alpha\approx53°$

Khi đó: $\sin\beta=\dfrac{\left|\overrightarrow{NA}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{NA}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|5.(-2)+2.(-21)+4.(-26)\right|}{\sqrt{5^2+2^2+4^2}.\sqrt{(-2)^2+(-21)^2+(-26)^2}}==\dfrac{156}{\sqrt{50445}}\Rightarrow\beta\approx44°$

Bài tập 15: Một khuôn nướng bánh mì được mô phỏng trong không gian $Oxyz$ như hình minh họa dưới đây với $S(0;0;0),P(8;0;0),Q(8;18;0),T(-1;-1;7),R(9;19;7)$. Tính góc giữa hai cạnh kề nhau, giữa cạnh bên và mặt đáy, giữa mặt bên và mặt đáy của khuôn.





Lời giải

a) Tính góc giữa hai cannh kề nhau: $\overrightarrow{SP}=(8;0;0);\ \overrightarrow{SH}=(0;18;0);\overrightarrow{ST}=(-1;-1;7)$

Ta có: $\overrightarrow{SP}.\overrightarrow{SH}=0\Rightarrow\left(\overrightarrow{SP};\overrightarrow{SH}\right)=90°$

$\cos(SP,ST)=\dfrac{\left|\overrightarrow{SP}.\overrightarrow{ST}\right|}{\left|\overrightarrow{SP}\right|.\left|\overrightarrow{ST}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{51}}\Rightarrow(SP,ST)\approx82°$

$\cos(SH,ST)=\dfrac{\left|\overrightarrow{SH}.\overrightarrow{ST}\right|}{\left|\overrightarrow{SH}\right|.\left|\overrightarrow{ST}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{51}}\Rightarrow(SH,ST)\approx82°$

b) Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy. Gọi α là góc giữa cạnh bên ST và mặt phẳng đáy.

Khi đó: $\sin\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{ST}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{ST}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\dfrac{7}{\sqrt{51}}\Rightarrow\alpha\approx78°$

c) Tính góc giữa mặt bên và mặt đáy. Gọi β là góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy.

Khi đó: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{ST},\overrightarrow{SP}\right]=(0;56;8)\Rightarrow\cos\beta=\dfrac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}\Rightarrow\beta\approx82°$.

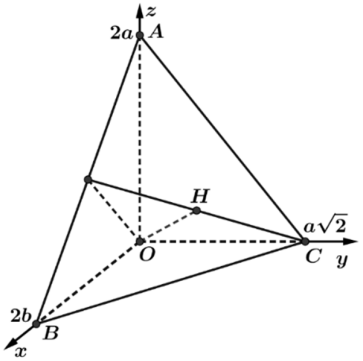
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = 2a$, $OC = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Lời giải



Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ như sau điểm O là gốc tọa độ $OA \equiv Oz$; $OB \equiv Ox$ và $OC \equiv Oy$.

Khi đó ta có $O(0;0;0)$; $A(0;0;2a)$; $B(2a;0;0)$ và $C(0;a\sqrt{2};0)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{2a} + \frac{y}{a\sqrt{2}} + \frac{z}{2a} = 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{2}y + z - 2a = 0$.

Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) là $d(O,(ABC)) = \frac{|0 + \sqrt{2}.0 + 0 - 2a|}{\sqrt{1+2+1}} = a$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Khoảng cách giữa A_1B và B_1C bằng

A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{6}}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Đặt $a = 1$. Chọn B_1A_1 là trục Ox, B_1C_1 là trục Oy, B_1B là trục Oz

Suy ra $B_1(0;0;0), A_1(1;0;0), C_1(0;1;0), B(0;0;1), C(0;1;1)$

Ta có $\overrightarrow{A_1B} = (-1;0;1), \overrightarrow{B_1B} = (0;0;1), \overrightarrow{B_1C} = (0;1;1)$

Vậy $d(A_1B, B_1C) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1C}\right].\overrightarrow{B_1B}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1C}\right]\right|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $4x-4y+2z-1=0$ và $2x-2y+z+1=0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó bằng

A. $V=\frac{1}{27}$. **B.** $V=\frac{1}{8}$. **C.** $V=\frac{1}{3\sqrt{3}}$. **D.** $V=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Giả sử $(P):4x-4y+2z-1=0$, $(Q):2x-2y+z+1=0$. Ta thấy $(P)\,//\,(Q)$. Mặt khác lấy điểm $M(0;0;-1)\in(Q)$. Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương

Khi đó ta có: $a=d\big((P),(Q)\big)=d\big(M;(P)\big)=\frac{|-3|}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}}=\frac{1}{2}$ nên $V=a^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tam giác vuông với $AB=AC=2$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=3$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính khoảng cách giữa AM và BC.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt{22}}{11}$. **D.** $\frac{\sqrt{22}}{6}$.

Lời giải

Gắn hệ trụ tọa độ ta có $A(0;0;0)$ là gốc tọa độ, $S(0;0;3),B(2;0;0),C(0;2;0)$.

Điểm $M\left(0;1;\frac{3}{2}\right)$. Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(0;1;\frac{3}{2}\right),\overrightarrow{BC}=(-2;2;0)$. Gọi $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC}\right]=(-3;-3;2)$

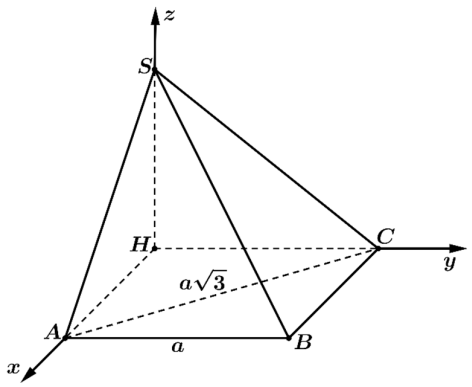
Gọi (P) là mặt phẳng qua $B(2;0;0)$ nhận $\vec{n}=(-3;-3;2)$ làm vectơ pháp tuyến.

$(P):-3x-3y+2z+6=0.$ Ta có $d(AM,BC)=d\big(A,(P)\big)=\frac{|-3.0-3.0+2.0+6|}{\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+2^2}}=\frac{3\sqrt{22}}{11}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $SB>2a$ và $\widehat{ABC}=\widehat{BAS}=\widehat{BCS}=90^0$. Biết sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{11}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC).

Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB$ và $SH \perp BC$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = \widehat{BCS} = 90° \Rightarrow \begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp SA \\ BC \perp SC \end{cases}$.

Suy ra $AB \perp (SHA) \Rightarrow AB \perp AH$ và $BC \perp (SHC) \Rightarrow BC \perp HC$ nên tứ giác $ABCH$ là hình chữ nhật. Suy ra $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Gắn hệ trục toạ độ như hình vẽ ta có $H(0;0;0), A(a\sqrt{2};0;0), B(a\sqrt{2};a;0), C(0;a;0)$.

Giả sử $SH = x (x > 0) \Rightarrow S(0;0;x)$. Ta có $\overrightarrow{AC} = (-a\sqrt{2};a;0), \overrightarrow{SA} = (a\sqrt{2};0;-x)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SA}\right] = (-ax;-ax\sqrt{2};-a^2\sqrt{2}) // \vec{n} = (x;x\sqrt{2};a\sqrt{2})$ mà $\overrightarrow{SB} = (a\sqrt{2};a;-x)$.

Suy ra $\sin(SB,(SAC)) = \left|\cos\left(\overrightarrow{SB}, \vec{n}\right)\right| = \left|\dfrac{\overrightarrow{SB}.\vec{n}}{\left|\overrightarrow{SB}\right|.\left|\vec{n}\right|}\right| \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{11}}{11} = \left|\dfrac{xa\sqrt{2} + xa\sqrt{2} - xa\sqrt{2}}{\sqrt{3x^2 + 2a^2}.\sqrt{3a^2 + x^2}}\right|$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 2a^2}.\sqrt{3a^2 + x^2} = \sqrt{11}\left|xa\sqrt{2}\right| \Leftrightarrow (3x^2 + 2a^2)(3a^2 + x^2) = 11(2a^2x^2)$

$\Leftrightarrow 9a^2x^2 + 3x^4 + 6a^4 + 2a^2x^2 = 22x^2a^2 \Leftrightarrow 3x^4 - 11x^2a^2 + 6a^4 = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 2a^2)(x^2 - 3a^2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{2}{3}a^2 \\ x^2 = 3a^2 \end{array}\right.$. $HB = AC = a\sqrt{3}$ nên với $SH = x^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = a\sqrt{6} > 2a$

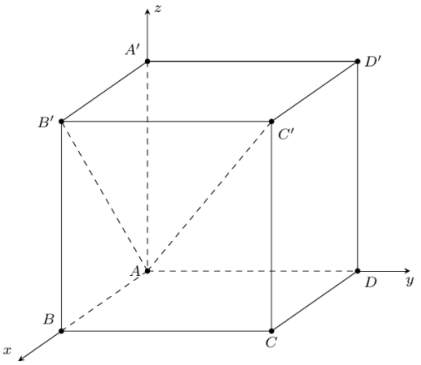
(thoả mãn). Do đó $SH = a\sqrt{3}$. Diện tích của tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Tính góc giữa CC' và mặt phẳng $(AB'C')$

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Chọn hệ trục *Oxyz* như hình vẽ



Gắn tọa độ $A(0;0;0)$, $C(2;2;0)$, $B'(2;0;2)$, $C'(2;2;2)$.

Ta có $\overrightarrow{AB'}=(2;0;2)$, $\overrightarrow{AC'}=(2;2;2)$ suy ra $\overrightarrow{n_{(AB'C')}}=\left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AC'}\right]=(-4;0;4)$, $\overrightarrow{CC'}=(0;0;2)$.

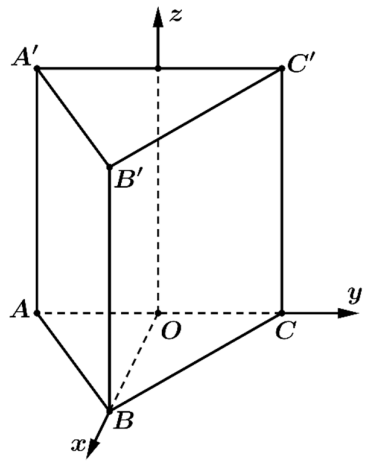
$$\sin\left(CC';(AB'C')\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{CC'};\overrightarrow{n_{(AB'C')}}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{n_{(AB'C')}}\right|}{\left|\overrightarrow{CC'}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(AB'C')}}\right|}=\frac{\left|-4.0+0.0+4.2\right|}{\sqrt{0^2+0^2+2^2}.\sqrt{(-4)^2+0^2+4^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $\left(CC';(AB'C')\right)=45°$

Câu 7: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(C'AB)$ và $(BCC'B')$. Giá trị $\tan\alpha$ bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Giả sử lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1.
Chọn hệ trục $Oxyz$, với O là trung điểm AC, $B\in Ox$, $C\in Oy$.

Ta có $A\left(0;-\frac{1}{2};0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;1\right)$, $C'\left(0;\frac{1}{2};1\right)$.

$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{BC'}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1\right)$, $\overrightarrow{CC'}=(0;0;1)$

Mặt phẳng $(C'B)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC'}\right]=\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Mặt phẳng $(BCC'B')$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{CC'}\right]=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Ta có $\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\left|\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.0\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}.\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+0}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Ta lại có $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\tan\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}=\sqrt{\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)^2}-1}=\sqrt{6}$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

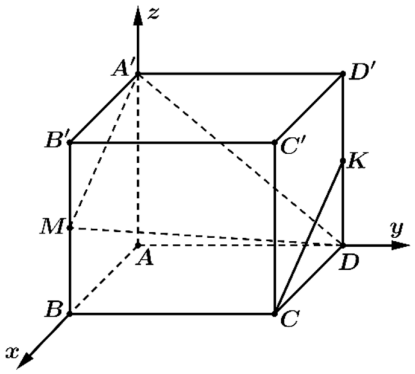
A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{4a}{3}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm BB' thì ta có $CK\,//\,A'M\Rightarrow CK\,//\,(A'MD)$

Suy ra $d(CK,A'D)=d(CK,(A'MD))=d(C,(A'MD))$

Chọn trục toạ độ như hình vẽ:



Ta có $A(0;0;0),B(a;0;0),D(0;a;0),A'(0;0;a),C(a;a;0),B'(a;0;a),M\left(a;0;\dfrac{a}{2}\right)$

Khi đó $\overrightarrow{A'M}=\left(a;0;-\dfrac{a}{2}\right),\overrightarrow{A'D}=(0;a;-a)\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'D}\right]=\left(\dfrac{a^2}{2};a^2;a^2\right)$.

Suy ra mặt phẳng $(A'MD)$ có một vectơ pháp tuyến là $(1;2;2)$

Phương trình mặt phẳng $(A'MD)$ có dạng: $x+2y+2z-2a=0$.

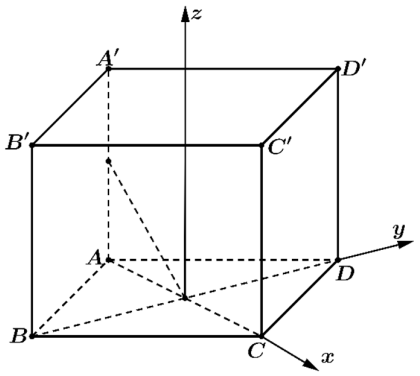
Vậy $d(C,(A'MD))=\dfrac{|a+2a-2a|}{3}=\dfrac{a}{3}$.

Câu 9: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, $AA'=a$ và góc $\widehat{ABC}=60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MO và $C'D$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}a$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}a$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{12}a$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$.

Lời giải

Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chọn $a=1$.

Dễ dàng tính được $O(0;0;0)$, $M\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và $C'\left(\frac{1}{2};0;1\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM}=\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{C'D}=\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-1\right)$ và $\overrightarrow{OC'}=\left(\frac{1}{2};0;1\right)$.

Khi đó $\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{C'D}\right]=\left(-\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{-3}{4};\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$.

Khi đó khoảng cách : $d\left(OM;C'D\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{OM},C'D\right].\overrightarrow{OC'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{OM},C'D\right]\right|}=\dfrac{\left|\frac{-\sqrt{3}}{8}+\frac{-\sqrt{3}}{4}\right|}{\sqrt{\frac{3}{16}+\frac{9}{16}+\frac{3}{16}}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}=\dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

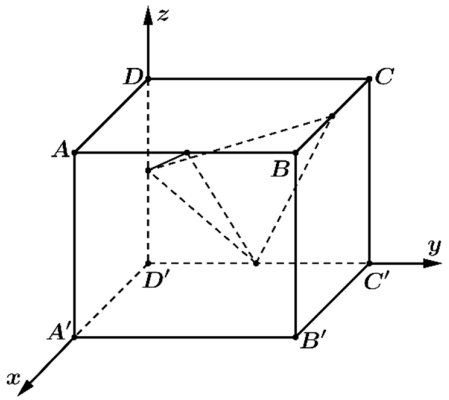
Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N,P,Q, lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, $C'D'$ và DD′. Thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $D'\equiv O;Ox\equiv D'A';Oy\equiv D'C';Oz\equiv D'D$.

Khi đó: $A(1;0;1)$, $B(1;1;1)$, $C(0;1;1)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;0;0)$, $B'(1;1;0)$, $C'(0;1;0)$



Ta có: $M\left(1;\frac{1}{2};1\right)$, $N\left(\frac{1}{2};1;1\right)$, $P\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $Q\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$.

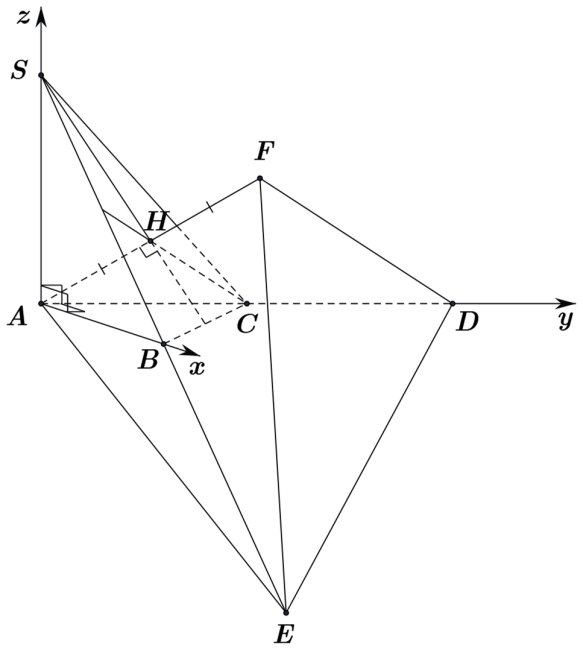
Ta có: $\overrightarrow{MN}\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{MP}(-1;0;-1)$, $\overrightarrow{MQ}\left(-1;\frac{-1}{2};\frac{-1}{2}\right)$

$\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right| = \left|\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right| = \frac{1}{12}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi D, E, F lần lượt là điểm đối xứng của A qua C, của S qua B và của A qua mặt phẳng (SBC). Thể tích của khối tứ diện $ADEF$ bằng

A. $\frac{2a^3}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ với độ dài vectơ đơn vị bằng a, ta được tọa độ các điểm như sau:

$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $S(0;0;1) \Rightarrow D(0;2;0)$, $E(2;0;-1)$.

Gọi H là trọng tâm tam giác $SBC \Rightarrow H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Vì tam giác SBC là tam giác đều nên H cũng là trực tâm của tam giác $SBC \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow F$ là điểm đối xứng với A qua H $\Rightarrow F\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Ta tính được: $\overrightarrow{AD} = (0;2;0)$, $\overrightarrow{AE} = (2;0;-1)$, $\overrightarrow{AF} = \left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right] = (-2;0;-4)$

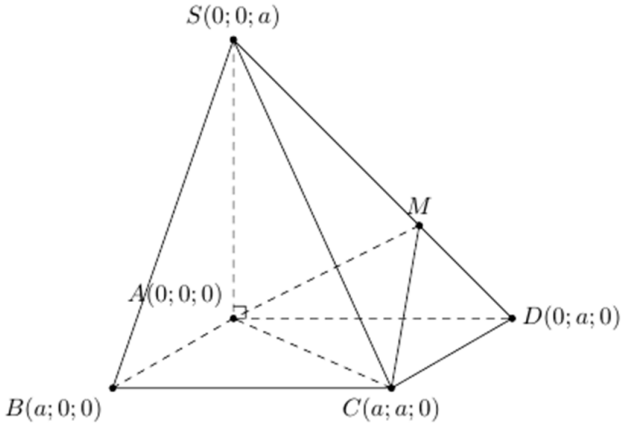
Khi đó: $V_{A.DEF}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right].\overrightarrow{AF}\right|=\frac{1}{6}.\left|-2.\frac{2}{3}+0.\frac{2}{3}-4.\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$.

Vì độ dài vectơ đơn vị trên trục bằng a nên ta được thể tích cần tính là $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên $SA=a$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM=2MD$. Hãy tính **cosin** của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC)?

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** 1.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho điểm $A\equiv O$, các điểm B,D,S lần lượt thuộc chiều dương các trục tọa độ Ox,Oy,Oz. Suy ra tọa độ các điểm như trên hình vẽ.

Do M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM=2MD$ suy ra

$$\overrightarrow{SM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SD}\Rightarrow M\left(0;\frac{2a}{3};\frac{a}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}=\left(0;\frac{2a}{3};\frac{a}{3}\right)\\ \overrightarrow{AC}=(a;a;0)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-\frac{a^2}{3};\frac{a^2}{3};-\frac{2a^2}{3}\right)$$

$=-\frac{a^2}{3}(1;-1;2)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{SB}=(a;0;-a)\\ \overrightarrow{SC}=(a;a;-a)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(a^2;0;a^2\right)=a^2(1;0;1)$.

Chọn vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (AMC) là $\overrightarrow{n_1}=(1;-1;2)$.

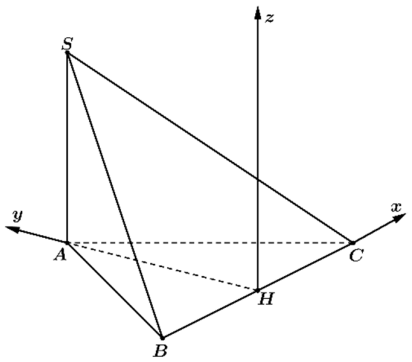
Chọn vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\overrightarrow{n_2}=(1;0;1)$.

Khi đó: $\cos\left((AMC),(SBC)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và độ dài cạnh $SA=a$ và vuông góc với (ABC). Góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SBC) là α. Khi đó $\tan\alpha$ bằng:

A. 1. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải



Gắn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:

Ta có: $H(0;0;0)$, $C\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right)$

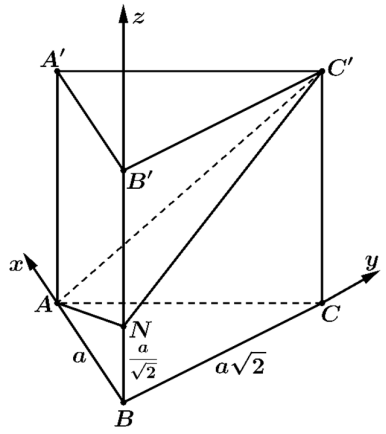
Suy ra $\vec{n}_{(SAB)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS}\right]=\left(-\frac{a^2\sqrt{3}}{2};\frac{a^2}{2};0\right)$, $\vec{n}_{(SBC)}=\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BC}\right]=\left(0;a^2;-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$

$\cos\alpha=\left|\frac{\vec{n}_{(SAB)}.\vec{n}_{(SBC)}}{\left|\vec{n}_{(SAB)}\right|.\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|}\right|=\frac{\frac{a^4}{2}}{\sqrt{\frac{3a^4}{4}+\frac{a^4}{4}}.\sqrt{a^4+\frac{3a^4}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$. Vậy $\tan\alpha=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=\sqrt{6}$

Câu 14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$, $AA'=a\sqrt{3}$. Trên BB' lấy điểm N sao cho $BN=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(AC'N)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó ta có: $A(a;0;0)$, $N\left(0;0;\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $C'\left(0;a\sqrt{2};a\sqrt{3}\right)$, $B'\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$. $\overrightarrow{AN}=\left(-a;0;\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $\overrightarrow{AC'}=\left(-a;a\sqrt{2};a\sqrt{3}\right)$.

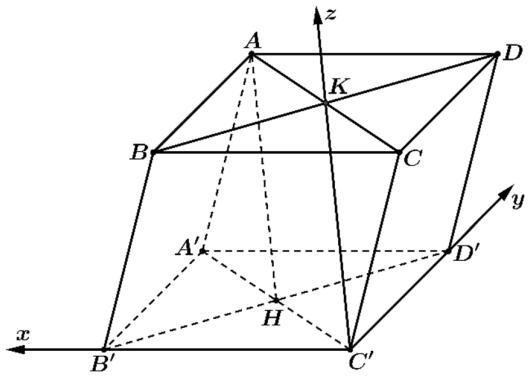
Mặt phẳng $(AC'N)$ đi qua $A(a;0;0)$ có vtpt $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC'}\right]=\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}a;\frac{4a}{\sqrt{3}};-a\sqrt{2}\right)$ có phương trình là: $(AC'N):\frac{-\sqrt{6}}{3}(x-a)+\frac{4}{\sqrt{3}}y-\sqrt{2}z=0$.

Khoảng cách: $d\left(B',(AC'N)\right)=\frac{\left|\frac{\sqrt{6}a}{3}-\sqrt{6}a\right|}{\sqrt{\frac{6}{9}+\frac{16}{3}+2}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 15: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB=a, AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Khoảng cách từ điểm B đến $(AB'D')$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Gọi $H=A'C'\cap B'D'$ và $K=AC\cap BD$.

Chọn hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ với $C'\equiv O, B'\in Ox, D'\in Oy, K\in Oz$.

Đặt $AH=m>0$.

Khi đó $B'\left(a\sqrt{3};0;0\right), D'(0;a;0), A'\left(a\sqrt{3};a;0\right)$, $H\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right), A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};m\right)$.

Ta có $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{A'A}\Rightarrow B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};m\right)$.

Mặt khác $\overrightarrow{B'D'}=\left(-a\sqrt{3};a;0\right), \overrightarrow{B'A}=\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};m\right)$ nên $(AB'D')$ có véctơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{B'A}\right]=\left(am;\sqrt{3}am;0\right)$ nên $(AB'D')$ có phương trình $x+\sqrt{3}y-a\sqrt{3}=0$.

Vậy $d\left(B;\left(AB'D'\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết $A(2;0;0)$, $B(0;1;0)$, $S\left(0;0;2\sqrt{2}\right)$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp $S.ABMN$.

A. $V=\sqrt{2}$. **B.** $V=2\sqrt{3}$. **C.** $V=3\sqrt{2}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Điểm O là trung điểm của $AC,BD \Rightarrow C(-2;0;0), D(0;-1;0)$.

Điểm M là trung điểm của $SC \Rightarrow M\left(-1;0;\sqrt{2}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (ABM) là $\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+3z-2\sqrt{2}=0$.

Phương trình đường thẳng SD là $\begin{cases}x=0\\y=-1+t\\z=2\sqrt{2}t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$.

Điểm N là giao điểm của (ABM) và $SD \Rightarrow N\left(0;-\dfrac{1}{2};\sqrt{2}\right)$.

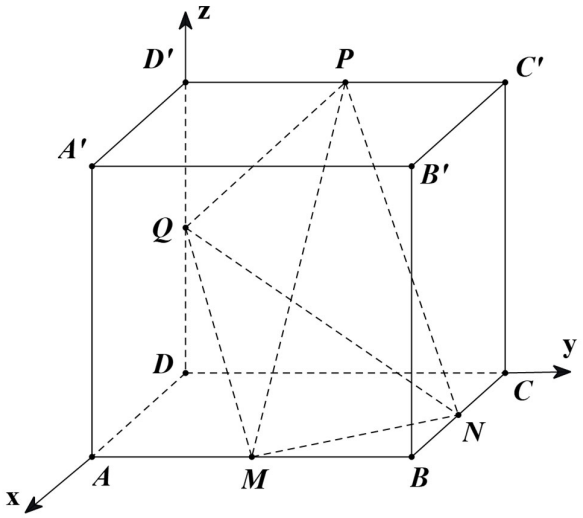
Vậy thể tích khối chóp $S.ABMN$ là:

$$V=V_{S.ABM}+V_{S.AMN}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SM}\right|+\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SN}\right|=\frac{4\sqrt{2}}{6}+\frac{2\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}.$$

Câu 17: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, $C'D'$ và DD'. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{24}$.

Lời giải



Gắn hệ trục toạ độ như hình vẽ ta có $D(0;0;0), A(1;0;0)$, $B(1;1;0), C(0;1;0)$, $A'(1;0;1)$, $B'(1;1;1)$, $C'(0;1;1), D'(0;0;1)$.

Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, $C'D'$ và DD' nên:

$M\left(1;\frac{1}{2};0\right), N\left(\frac{1}{2};1;0\right), P\left(0;\frac{1}{2};1\right), Q\left(0;0;\frac{1}{2}\right).$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right), \overrightarrow{MP}=(-1;0;1), \overrightarrow{MQ}=\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

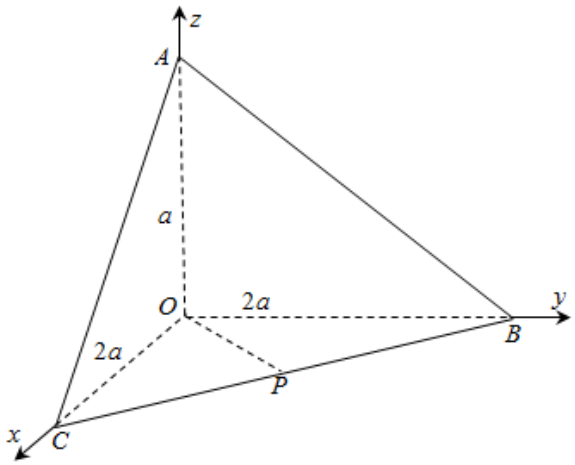
Suy ra $\left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP}\right]=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \Rightarrow\left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}=-\frac{1}{2}.$

Vậy $V_{MNPQ}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right|=\frac{1}{6}\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{12}.$

Câu 18: Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA=a$ và $OB=OC=2a$. Gọi P là trung điểm của BC (minh họa như hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng OP và AB bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. **C.** a. **D.** $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải



Đặt khối tứ diện $O.ABC$ vào hệ trục tọa độ gốc $Oxyz$: các điểm A,B,C lần lượt thuộc các trục tọa độ Oz,Oy,Ox.

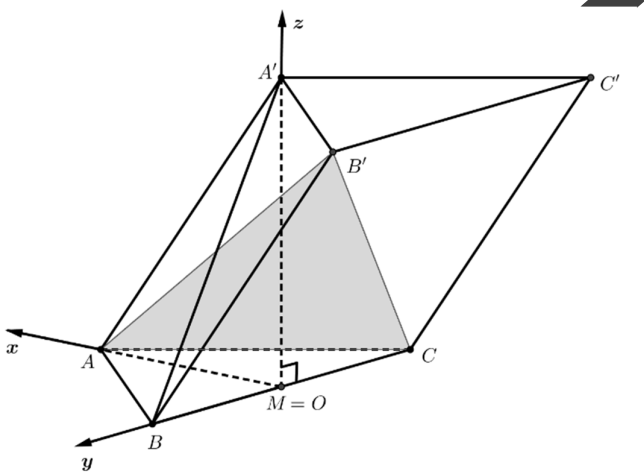
Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(0;2;0)$, $C(2;0;0)$, $P(1;1;0)$, $\overrightarrow{AB}=(0;2;-1)$.

Khi đó: $d(OP;AB)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OP};\overrightarrow{AB}\right]\cdot\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{OP};\overrightarrow{AB}\right]\right|}=\frac{\sqrt{6}}{3}(a).$

Câu 19: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của BC. Biết góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy bằng $60°$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(AB'C)$ là

A. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải



Góc giữa $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{A'BM} = 60°$.

Ta có $A'M = BM.\tan 60° = a\sqrt{3}$; $AM = AB.\sin 60° = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Đặt hệ trục toạ $Oxyz$ như hình vẽ. Coi $a = 1$ khi đó $A\left(\sqrt{3};0;0\right)$, $B(0;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $A'\left(0;0;\sqrt{3}\right)$. Gọi $B'(x_0;y_0;z_0)$, $\overrightarrow{A'B'} = \left(x_0;y_0;z_0-\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{3};1;0\right)$.

Vì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ nên $\begin{cases} x_0 = -\sqrt{3} \\ y_0 = 1 \\ z_0 = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow B'\left(-\sqrt{3};1;\sqrt{3}\right)$.

Ta có $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{3};-1;0\right) \\ \overrightarrow{AB'} = \left(-2\sqrt{3};1;\sqrt{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB'}\right] = \left(-\sqrt{3};3;-3\sqrt{3}\right) \Rightarrow \vec{n} = \left(1;-\sqrt{3};3\right)$ là vectơ pháp tuyến của mp(ACB'). Phương trình mặt phẳng (ACB') là: $x - \sqrt{3}y + 3z - \sqrt{3} = 0$.

$\Rightarrow d\left(B,(ACB')\right) = \dfrac{\left|-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+3+9}} = \dfrac{2\sqrt{39}}{13}$. Vậy khoảng cách từ B đến $(AB'C)$ là $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2+t \\ z = -t \end{cases}$ và $d: \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 1+t' \\ z = -1+t' \end{cases}$. Biết rằng có một hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thỏa mãn A, C cùng thuộc Ox, B, C' cùng thuộc Δ và D, B' cùng thuộc d. Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $9\sqrt{2}$. **B.** $18\sqrt{2}$. **C.** 9. **D.** 18.

Lời giải

Nhận xét rằng các đường thẳng Δ, d, Ox đôi một vuông góc với nhau nên $\begin{cases} AC \perp BC' \\ BC' \perp B'D \\ B'D \perp AC \end{cases}$.

Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$ và M là giao của $D'I$ và $B'D$.

Ta có $\frac{IM}{MD'}=\frac{ID}{B'D'}=\frac{1}{2}\Rightarrow IM=\frac{1}{3}ID'$. Mặt khác $\begin{cases}B'D\perp AC\\ B'D\perp BC'\Rightarrow B'D\perp AD'\end{cases}\Rightarrow B'D\perp (AD'C)$.

Kẻ $MH // AD'$ $(H\in AC)\Rightarrow MH\perp AC$ suy ra MH là đoạn vuông góc chung của $AC, B'D\Rightarrow MH=d(AC,B'D)=d(Ox;d)=\sqrt{2}$.

Vì $\frac{MH}{AD'}=\frac{IM}{ID'}=\frac{1}{3}\Rightarrow AD'=3\sqrt{2}$.

Kẻ $MK // AC$ $(K\in AD')\Rightarrow MK\perp AD'$ suy ra MK là đoạn vuông góc chung của $AD', B'D$.

$\Rightarrow MK=d(AD',B'D)=d(\Delta;d)=\sqrt{2}$

Vì $\frac{MK}{AI}=\frac{D'M}{ID'}=\frac{2}{3}\Rightarrow AI=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow AC=3\sqrt{2}$.

Ta lại có $BC'//(AD'C)\Rightarrow d(BC';AC)=d(BC';(AD'C))=d(B;(AD'C))=d(D;(AD'C))$

$\Rightarrow d(D;(AD'C))=d(Ox;\Delta)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow V_{DAD'C}=\frac{1}{3}.d(D;(AD'C)).S_{AD'C}=\frac{1}{3}.d(D;(AD'C)).\frac{1}{2}AD'AC=3\sqrt{2}$

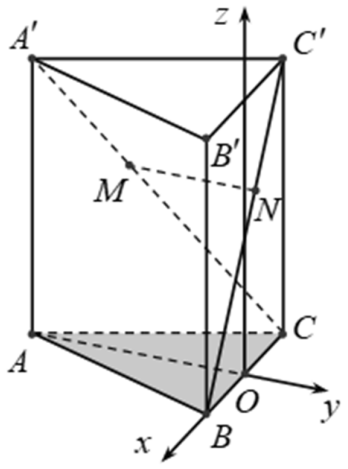
$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'}=6V_{DAD'C}=18\sqrt{2}$.

Câu 21: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy. Đường thẳng MN $(M\in A'C;\ N\in BC')$ là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC'. Tỷ số $\frac{NB}{NC'}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Kết quả bài toán sẽ không thay đổi nếu ta xét lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng 2.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (O là trung điểm của BC) thì ta có: $A'\left(0;-\sqrt{3};2\right)$, $B(1;0;0)$, $C(-1;0;0)$, $C'(-1;0;2)$, $\overrightarrow{CA'}=\left(1;-\sqrt{3};2\right)$, $\overrightarrow{BC'}=(-2;0;2)$.

Do $\begin{cases}\overrightarrow{CM}=m\overrightarrow{CA'}\\ \overrightarrow{BN}=n\overrightarrow{BC'}\end{cases}$ nên ta có $M\left(-1+m;-\sqrt{3}m;2m\right)$, $N(1-2n;0;2n)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(-m-2n+2;\sqrt{3}m;2n-2m\right)$.

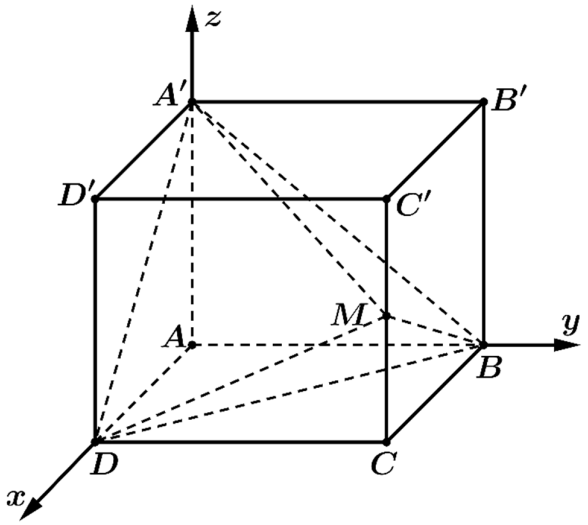
Đường thẳng MN là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' nên:

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CA'}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC'}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4m+2n=-1\\ -m+4n=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{2}{5}\\ n=\dfrac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow\frac{BN}{BC'}=n=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{NB}{NC'}=\frac{3}{2}.$$

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O. Biết rằng $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với m, n là các số dương và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $BDA'M$ bằng

A. $\dfrac{64}{27}$. **B.** $d\left(M;(P)\right)=\dfrac{11\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $\dfrac{75}{32}$.

Lời giải



Ta có $A(0;0;0)$, $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$.

Suy ra $C(m;m;0)$, $B'(m;0;n)$, $C'(m;m;n)$, $D'(0;m;n)$, $M\left(m;m;\dfrac{n}{2}\right)$.

Và $\overrightarrow{BD}=(-m;m;0)$, $\overrightarrow{BA'}=(-m;0;n)$, $\overrightarrow{BM}=\left(0;m;\dfrac{n}{2}\right)$.

$\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA'}\right]=\left(mn;mn;m^2\right)$; $\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA'}\right].\overrightarrow{BM}=\dfrac{3}{2}m^2n$.

Ta được $V_{BDA'M}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA'}\right].\overrightarrow{BM}\right|=\frac{1}{4}\left|m^2.n\right|=\frac{1}{4}\left|m^2.(4-m)\right|=\frac{1}{8}\left|m.m.(8-2m)\right|$.

$\Rightarrow V_{BDA'M}\le\frac{1}{8}\left(\frac{m+m+8-2m}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các điểm $A(1;2;0)$ $B(4;6;0)$, $D(-3;5;0)$. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$. Tính khoảng cách từ đường vuông góc chung của đường thẳng SI và BC đến đường thẳng AB.

A. $\frac{15}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 5. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Vì I là tâm hình vuông $ABCD$ nên I là trung điểm của BD.

Tọa độ $I\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2};0\right)$. Suy ra tọa độ điểm $C(0;9;0)$.

Gọi H là trung điểm BC khi đó tọa độ $H\left(2;\frac{15}{2};0\right)$ và $IH\perp BC$ (1).

Vì hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SI\perp(ABCD)\Rightarrow SI\perp IH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra đường vuông góc chung của SI và BC là đường thẳng IH.

Vì $IH\ //\ AB$ nên khoảng cách từ IH đến AB bằng $\frac{AB}{2}=\frac{5}{2}$.

Câu 24: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng 3. Gọi I là điểm trên cạnh BB' sao cho $BI=\frac{1}{3}BB'$, điểm M di động trên cạnh AA'. Biết diện tích của tam giác MIC' nhỏ nhất khi tỷ số $\frac{AM}{AA'}=\frac{a}{b}\left(a\in\mathbb{N};b\in\mathbb{N}^*,(a,b)=1\right)$. $P=a+b$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn hệ toạ độ $Axyz$ sao cho: $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $A'(0;0;3)$.

Khi đó $B'(0;1;3);C'\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};3\right);I(0;1;1)$.

Gọi toạ độ điểm $M(0;0;x)\in AA'(0\le x\le 3)$; $\overrightarrow{IC'}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};2\right);\overrightarrow{IM}=(0;-1;x-1)$

Diện tích của tam giác MIC' là: $S=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{IC'},\overrightarrow{IM}\right]\right\|=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2-16x+31}=\frac{1}{4}\sqrt{4(x-2)^2+15}$

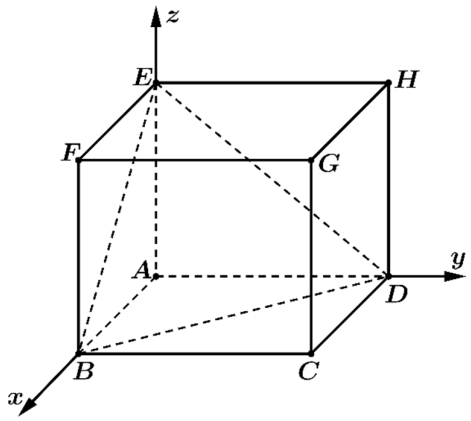
Do đó S nhỏ nhất khi $x=2$. Khi đó tỉ số $\dfrac{AM}{AA'}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow a+b=5$.

Câu 25: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng 4. Gọi d là đường thẳng đi qua trọng tâm của tứ diện $EABD$, cắt đường thẳng AE tại M và song song với mặt phẳng (EBD). Tính AM.

A. $AM=1$. **B.** $AM=2$. **C.** $AM=3$. **D.** $AM=4$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Ta có: $A(0;0;0);B(4;0;0);D(0;4;0);E(0;0;4)$.

Gọi T là trọng tâm của tứ diện $EABD$ suy ra $T(1;1;1)$.

Phương trình mặt phẳng (EBD): $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}=1\Leftrightarrow x+y+z-4=0$.

Đường thẳng d cắt đường thẳng AE tại M suy ra $M(0;0;m)$.

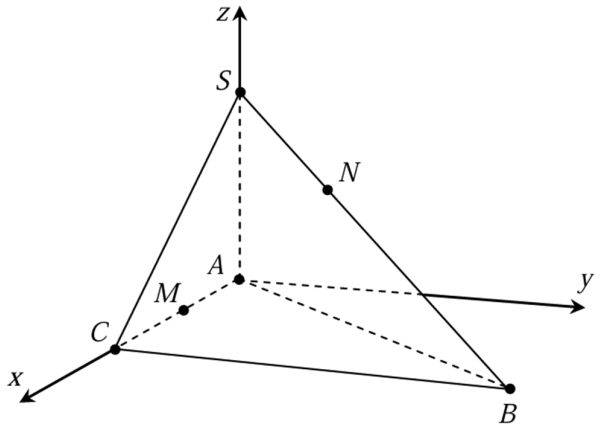
Khi đó, $\overrightarrow{MT}=(1;1;1-m)$ và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (EBD) là $\vec{n}=(1;1;1)$.

Do $d\,//\,(EBD)$ nên $\overrightarrow{MT}.\vec{n}=0\ \Leftrightarrow 1+1+1-m=0\ \Leftrightarrow m=3$.

Suy ra $M(0;0;3)$ nên $AM=3$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SA = h$ và có đáy là tam giác ABC vuông tại C. Biết rằng $AC = b, BC = a$. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$ và được gắn vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ (với $A \equiv O$) như hình vẽ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



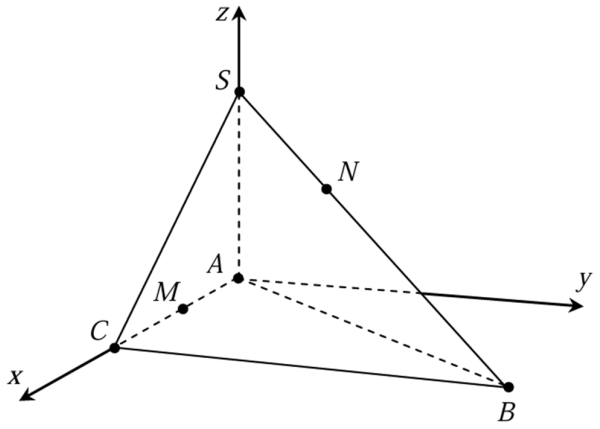
a) $A(0;0;0), C(b;0;0), B(b;a;0), S(0;0;h), M\left(\frac{b}{2};0;0\right)$

b) $\overrightarrow{SB} = (a;b;-h)$

c) $MN = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$

b) Khi $4h^2 = 2a^2 - b^2$ thì hai đường thẳng MN và SB vuông góc với nhau.

Lời giải



Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, tia Ox trùng với tia AC, tia Oz trùng với tia AS sao cho điểm B nằm trong góc xOy.

a) Đúng: Khi đó $A(0;0;0), C(b;0;0), B(b;a;0), S(0;0;h), M\left(\frac{b}{2};0;0\right)$

b) Đúng: $\overrightarrow{SB}=(b;a;-h)$

c) Sai: Gọi $N(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{SN}=(x;y;z-h)$

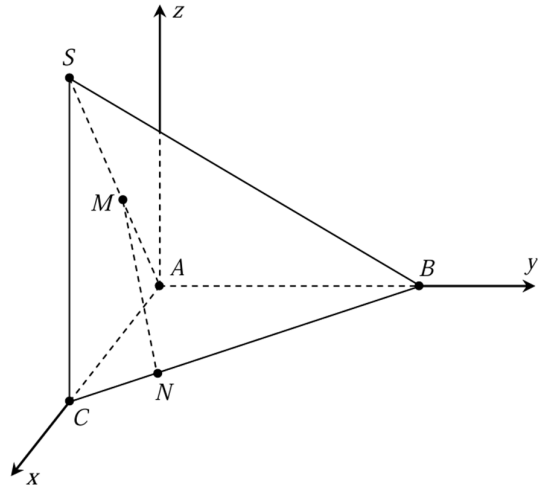
Từ điều kiện $\overrightarrow{SN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$ nên $x=\frac{b}{3};y=\frac{a}{3},z-h=\frac{-h}{3}\Rightarrow z=\frac{2h}{3}\Rightarrow N\left(\frac{b}{3};\frac{a}{3};\frac{2h}{3}\right)$

Ta có $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{b}{3}-\frac{b}{2};\frac{a}{3};\frac{2h}{3}\right)=\left(-\frac{b}{6};\frac{a}{3};\frac{2h}{3}\right)$ nên $MN=\sqrt{\frac{b^2}{36}+\frac{a^2}{9}+\frac{4h^2}{9}}=\frac{1}{6}\sqrt{b^2+4a^2+16h^2}$

d) Sai: Hai đường thẳng MN và SB vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB}=0\Leftrightarrow\frac{-b^2}{6}+\frac{a^2}{3}+\frac{-2h^2}{3}=0\Leftrightarrow 4h^2=2a^2-b^2$$

Câu 2: Cho tứ diện $S.ABC$ có $SC=CA=AB=a\sqrt{2}$ và $SC\perp(ABC)$. Biết rằng tam giác ABC là tam giác vuông tại A. Các điểm $M\in SA,N\in BC$ sao cho $AM=CN=t\ (0<t<2a)$. Gắn tứ diện vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A\equiv O$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



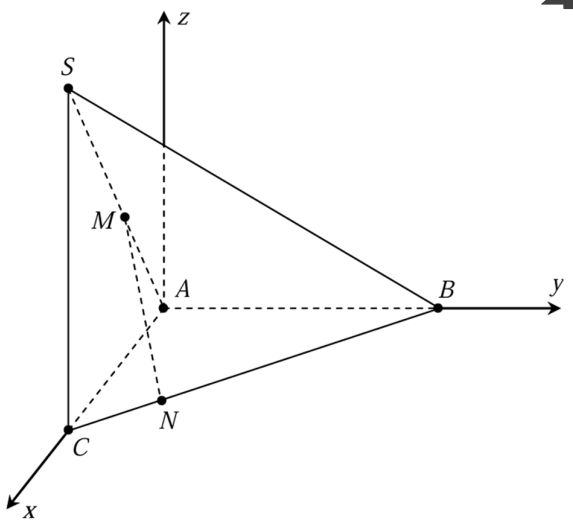
a) $A(0;0;0),B\left(0;a\sqrt{2};0\right),C\left(a\sqrt{2};0;0\right),S\left(a\sqrt{2};0;a\sqrt{2}\right)$

b) Tọa độ điểm $M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2};0;\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)$

c) Đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

d) Khi MN ngắn nhất thì MN là đường vuông góc chung của BC và SA

Lời giải



a) Đúng: Ta chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ $O \equiv A$. Trục Ox chứa AC, trục Oy chứa AB và trục $Oz \perp (ABC)$. Khi đó cạnh SC song song với trục Oz và ta có:

$A(0;0;0), B\left(0;a\sqrt{2};0\right), C\left(a\sqrt{2};0;0\right), S\left(a\sqrt{2};0;a\sqrt{2}\right)$

b) Đúng: Ta có $M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2};0;\frac{t\sqrt{2}}{2}\right); N\left(a\sqrt{2}-\frac{t\sqrt{2}}{2};\frac{t\sqrt{2}}{2};0\right)$

c) Sai: $MN=\sqrt{2\left(a^2-2at+t^2\right)+\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}}=\sqrt{3t^2-4at+2a^2}=\sqrt{3\left(t-\frac{2a}{3}\right)^2+\frac{2a^2}{3}}\geq\frac{a\sqrt{6}}{3}$

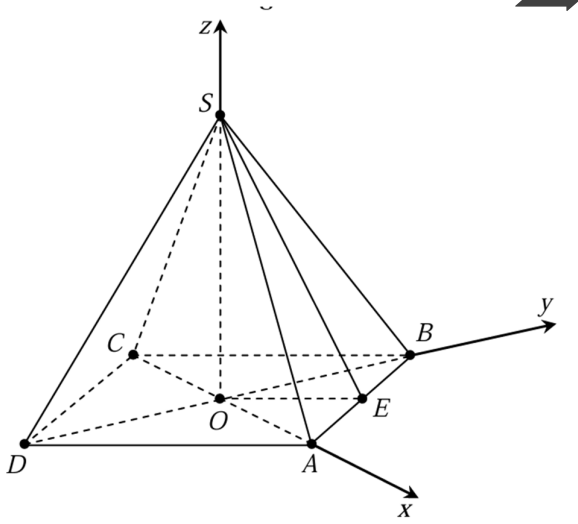
Vậy MN ngắn nhất bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ khi $t=\frac{2a}{3}$

d) Đúng: Khi MN ngắn nhất thì:

$M\left(\frac{a\sqrt{2}}{3};0;\frac{a\sqrt{2}}{3}\right), N\left(\frac{2a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};-\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SA}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$ nên MN là đường vuông góc chung.

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy a và mặt bên tạo với đáy góc α. Chọn hệ trục $Oxyz$ có O là tâm đáy $ABCD$, tia Ox chứa A, tia Oy chứa B, tia Oz chứa S. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), S\left(0;0;\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

b) $\overrightarrow{SA}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;-\frac{a}{2}\tan\alpha\right), \overrightarrow{SB}=\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

c) $\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;-\frac{a}{2}\tan\alpha\right), \overrightarrow{SD}=\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

d) Để hai đường thẳng $SA\perp SC$ vuông góc với nhau thì $\tan\alpha=\sqrt{3}$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), S\left(0;0;\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

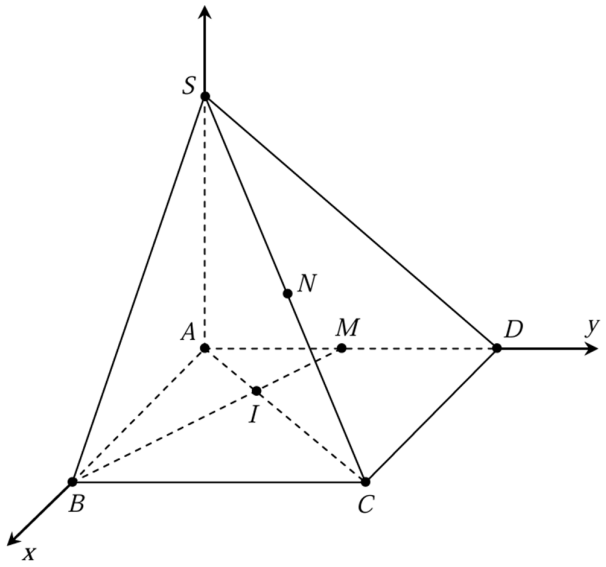
b) Đúng: $\overrightarrow{SA}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;-\frac{a}{2}\tan\alpha\right), \overrightarrow{SB}=\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

c) Đúng: $\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;-\frac{a}{2}\tan\alpha\right), \overrightarrow{SD}=\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

d) Sai: Ta có $SA\perp SC$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=0\Leftrightarrow -\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}\tan^2\alpha=0\Leftrightarrow \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\tan^2\alpha-1\right)=0\Leftrightarrow \tan^2\alpha=2\Rightarrow\tan\alpha=\sqrt{2}$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB=a, AD=a\sqrt{2}, SA=a$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SC. Gọi I là giao điểm BM và AC. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $S(0;0;a), A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a\sqrt{2};0)$

b) $I\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right), \overrightarrow{BM}\left(-a;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), \overrightarrow{BS}(-a;0;a)$

c) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là $\left(-a^2\sqrt{2};a;0\right)$

d) Thể tích tứ diện $ANIB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$ (đvtt)

Lời giải

a) Đúng: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ: $S(0;0;a), A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a\sqrt{2};0)$

Khi đó: $D(0;a\sqrt{2};0), M\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), N\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2}\right)$

b) Đúng: $\frac{IA}{IC}=\frac{IM}{IB}=\frac{AM}{BC}=\frac{1}{2}\Rightarrow IA=\frac{1}{3}AC\Rightarrow I\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right), \overrightarrow{BM}\left(-a;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), \overrightarrow{BS}(-a;0;a)$

c) Sai: Mặt phẳng (SMB) có vecto pháp tuyến $\vec{n}_1=\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}\right]=\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2;\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)$

Mặt phẳng (SCA) có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-a^2\sqrt{2};a^2;0\right)$

d) Sai: Vì $\vec{n}_1.\overrightarrow{n_2}=0$ nên 2 mặt phẳng $(SAC),(SMB)$ vuông góc

Ta có $\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AN}\right]=\left(-\frac{a^2}{3\sqrt{2}};\frac{a^2}{6};0\right), \overrightarrow{AB}=(a;0;0), V_{ANIB}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AB}\right|=\frac{a^3\sqrt{2}}{36}(dvtt)$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-2;1)$ với tốc độ $4,5$ m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).



a) Phương trình tham số của đường cáp là: $\begin{cases} x=10+2t \\ y=3-2t \\ z=t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

b) Giả sử sau thời gian t(s) kể từ lúc xuất phát $(t\geq 0)$ thì cabin đến điểm M. Khi đó tọa độ điểm M là $M\left(3t+10;-3t+3;\dfrac{3t}{2}\right)$.

c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B=550$, khi đó quãng đường AB dài 800 m.

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc $30°$.

Lời giải

a) Đúng: Phương trình tham số của đường cáp là: $\begin{cases} x=10+2t \\ y=3-2t \\ z=t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

b) Đúng: Ta có $AM=v.t=4,5t$ và ta gọi $M(10+2m;\,3-2m;\,m)$ thuộc đường thẳng d

Khi đó: $\overrightarrow{AM}=(2m;-2m;m)$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với vectơ $\vec{u}$ nên m dương

Suy ra $AM=\sqrt{4m^2+4m^2+m^2}=3|m| \xrightarrow{m>0} m=1,5t$ nên $M\left(3t+10;-3t+3;\dfrac{3t}{2}\right)$

c) Sai: Từ câu trên suy ra $M\equiv B \Leftrightarrow 10+3t=550 \Leftrightarrow t=180$

Khi đó: $AB=vt=4,5.t=4,5.180=810$ mét

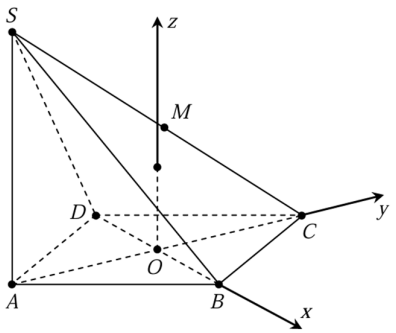
d) Sai: Ta có $\overrightarrow{u_{AB}}=(2;-2;1)$ và mặt phẳng (Oxy) là $z=0$ nên ta có $\vec{n}=(0;0;1)$

Từ đó: $\sin\alpha=\left|\dfrac{\vec{u}.\vec{n}}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}\right|=\dfrac{1}{3}$ nên $\alpha\neq 30°$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh có cạnh bằng a và SA vuông góc với đáy. Khi $a=2$, hãy tính độ dài cạnh SA để góc tạo bởi (SBC) và (SCD) bằng $60°$.

Lời giải



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, M là trung điểm của SC và đặt $SA = 2m(m > 0)$

Khi đó $B\left(\frac{a}{\sqrt{2}};0;0\right), D\left(-\frac{a}{\sqrt{2}};0;0\right), C\left(0;\frac{a}{\sqrt{2}};0\right), M\left(0;0;m\right)$

Ta có $(SBC): \frac{x}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{z}{m} = 1 \Rightarrow \vec{n}_{SBC} = \left(1;1;\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)$

Phương trình mặt phẳng $(SDC): \frac{x}{-\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{z}{m} = 1 \Rightarrow \vec{n}_{\text{SDC}} = \left(-1;1;\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)$

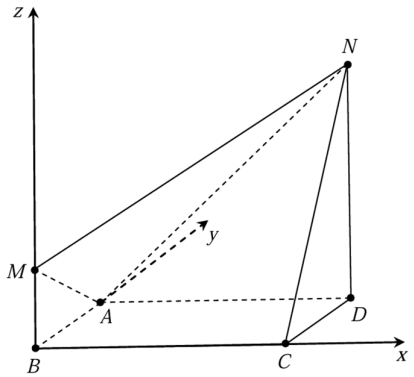
Yêu cầu bài toán tương đương với $\left((SBC),(SDC)\right) = 60° \Leftrightarrow \left|\cos\left(\vec{n}_{SBC}, \vec{n}_{SDC}\right)\right| = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^2\right|}{1+1+\left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow 2m = 2.$$

Câu 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên hai tia Bx, Dy vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và cùng chiều lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $BM = \frac{a}{4}; DN = 2a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AMN) và (CMN).

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có: $B(0;0;0), A(0;a;0), C(a;0;0), M\left(0;0;\frac{a}{4}\right), N(a;a;2a)$.

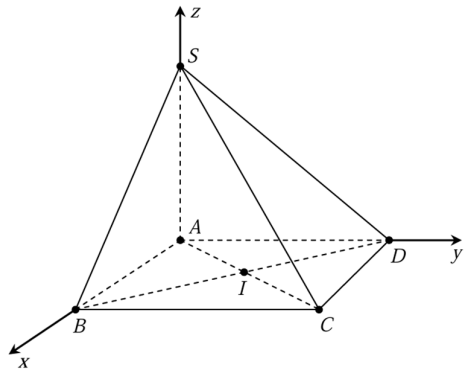
Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(0;-a;\frac{a}{4}\right),\overrightarrow{AN}=(0;0;2a)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=\left(-2a^2;\frac{a^2}{4};a^2\right)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (AMN) nên $\overrightarrow{CM}=\left(-a;0;\frac{a}{4}\right),\overrightarrow{CN}=(0;a;2a)$.

Khi đó $\left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right]=\left(\frac{-a^2}{4};2a^2;-a^2\right)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (CMN)

Do đó: $\cos\varphi=\dfrac{\left|\frac{a^4}{2}+\frac{a^4}{2}-a^4\right|}{\sqrt{4a^4+\frac{a^4}{16}+a^4}\cdot\sqrt{4a^4+\frac{a^4}{16}+a^4}}=0\Rightarrow\varphi=90°$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan\alpha=\sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi $I=AC\cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a.

Ta có $\begin{cases}(SBD)\cap(ABCD)=BD\\SI\perp BD\\AI\perp BD\end{cases}\Rightarrow\big((SBD);(ABCD)\big)=(SI;AI)=SIA$.

Ta có $\tan\alpha=\tan SIA=\dfrac{SA}{AI}\Leftrightarrow SA=a$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0),B(a;0;0),C(a;a;0),S(0;0;a)$.

Khi đó $\overrightarrow{SA}=(0;0;-a);\overrightarrow{SC}=(a;a;-a);\overrightarrow{SB}=(a;0;-a)$.

Mặt phẳng (SAC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(-1;1;0)$.

Mặt phẳng (SBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(1;0;1)$.

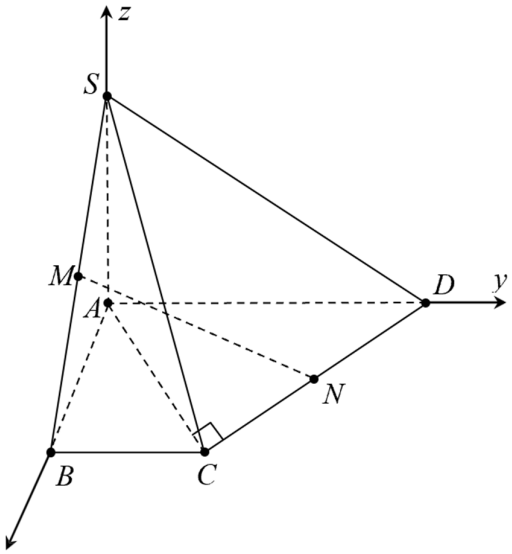
Suy ra $\cos\big((SAC);(SBC)\big)=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\big((SAC);(SBC)\big)=60°$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, thỏa mãn điều kiện, $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA=a$. Gọi M,N lần lượt là trung

điểm của SB, CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC). *(Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Chọn đơn vị là a

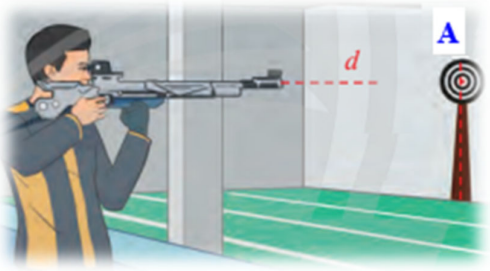
Có $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;2;0), S(0;0;1), M\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right), N\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};0\right)$.

Vecto chỉ phương của $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{MN}=\left(0;\frac{3}{2};\frac{-1}{2}\right)\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=(0;3;-1)$

Vecto pháp tuyến của (SAC) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}\right]=(1;-1;0)$

Vậy $\sin\left(MN,(SAC)\right)=\frac{|3|}{\sqrt{9+1}.\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$ nên $\cos\left(MN,(SAC)\right)=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{55}}{10}\approx 0,74$

Câu 5: Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$. Cho biết trục d của nòng súng có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}$ và hồng tâm $A(8;-19;6m+4)$. Hỏi m bằng bao nhiêu vận động viên có bắn trúng hồng tâm.



Lời giải

Để vận động viên có bắn trúng hồng tâm thì trục d phải đi qua hồng tâm.

Ta thay điểm $A(8;-19;6m+4)$ vào phương trình trục d:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}\Leftrightarrow\frac{8-1}{1}=\frac{-19-2}{-3}=\frac{6m+4-3}{-5}=7\Leftrightarrow 6m=-36\Leftrightarrow m=-6.$$

Vậy $m=-6$ thì vận động viên bắn trúng hồng tâm.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo ở Bà Nà Hill xuất phát từ điểm $A(-2;1;5)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;-2;6)$ với tốc độ là 4 m/s (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Giả sử sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm M. Gọi tọa độ $M(a;b;c)$. Tính $a+3b+c$.



Lời giải

Phương trình tham số của đường cáp là: $d:\begin{cases}x=-2\\y=1-2k\\z=5+6k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{R})$

Do tốc độ chuyển động của cabin là 4 m/s nên độ dài $AM=4t\ (m)$.

Vì vậy sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm M thì $AM=4.5=20\ (m)$.

Vì $M\in d\Rightarrow M(-2;1-2k;5+6k)$ nên suy ra $\overrightarrow{AM}(0;-2k;6k)$.

Do 2 vec tơ $\overrightarrow{AM};\vec{u}$ cùng hướng $k>0$

$AM=20\Leftrightarrow\sqrt{0^2+4k^2+36k^2}=20\Leftrightarrow 40k^2=400\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{10}$

Vì $k>0\Rightarrow k=\sqrt{10}$.

Vậy tọa độ $M(-2;1-2\sqrt{10};5+6\sqrt{10})$. Khi đó $a+3b+c=-2+3(1-2\sqrt{10})+5+6\sqrt{10}=6$.

Câu 7: Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$. Khi du khách khi ở độ cao 12 mét thì tọa độ của du khách lúc đó là $M(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$



Lời giải

Ta có: $A(3;2,5;15)$, $B(21;27,5;10) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (18;15;-5)$

Phương trình tham số đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 3+18t \\ y = 2,5+15t \\ z = 15-5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Vậy phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline là $\begin{cases} x = 3+18t \\ y = 2,5+15t \\ z = 15-5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

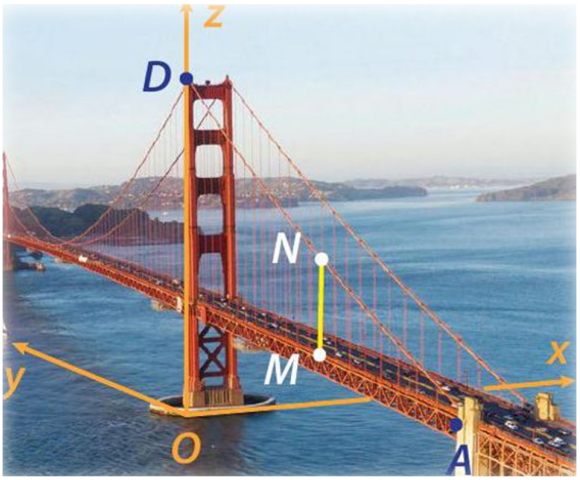
Xác định toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

Khi du khách khi ở độ cao 12 mét $\Rightarrow z = 12 \Rightarrow 15-5t = 12 \Rightarrow t = \frac{3}{5}$

Thay $t = \frac{3}{5}$ vào phương trình đường thẳng AB ta được $\begin{cases} x = 13,8 \\ y = 11,5 \\ z = 12 \end{cases} \Rightarrow C(13,8;11,5;12)$

Vậy $T = a+b+c = 13,8+11.5+12 = 37,3$

Câu 8: Cầu Cổng Vàng *(The Golden Gate Bridge)* ở Mỹ. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz, trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227 m, điểm A cách mặt nước 75 m và cách trục Oz 343 m.
Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước 75 m và MN song song với cột trụ.



(Nguồn ảnh: https://www.goldengate.org/assets/1/6/ggb-exhibit-chapter-statistics.pdf).
Tính độ dài MN, biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 230 m (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)

Lời giải

Ta có $A \in Oyz$ và A cách mặt nước 75 m và cách trục Oz 343 m $\Rightarrow A(0;343;75)$

Điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227 m $\Rightarrow D(0;0;227) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (0;-343;152)$

Phương trình đường thẳng AD là $\begin{cases} x = 0 \\ y = -343t \\ z = 227 + 152t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Vì $N \in AD \Rightarrow N(0;-343t;227+152t)$

Điểm M trên thành cầu, M cách mặt nước 75 m và cách trục Oz một khoảng bằng 230 m nên tọa độ điểm M là $M(0;230;75)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0;-343t-230;152+152t)$

MN song song với cột trụ $\Rightarrow MN \perp Oy \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{j} = 0 \Rightarrow -343t - 230 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{230}{343}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(0;0;\dfrac{17176}{343}\right) \Rightarrow MN = \dfrac{17176}{343} \approx 50,08$ m.

----------HẾT----------

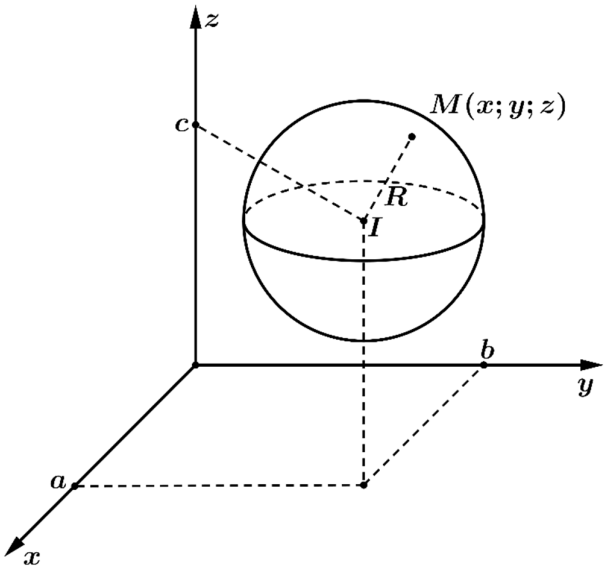
BÀI 03 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Trong không gian, tập hợp tất cả các điểm M cách điểm I cố định một khoảng không đổi là $R\,(R>0)$ cho trước được gọi là mặt cầu tâm I bán kính R. Kí hiệu là $S(I;R)$ hay viết tắt là (S).

Vậy $S(I;R)=\{M \mid IM=R\}$



Chú ý:

- Điểm $M(x;y;z)$ nằm trong mặt cầu (S) nếu $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2<R^2$.
- Điểm $M(x;y;z)$ nằm trên mặt cầu (S) nếu $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=R^2$.
- Điểm $M(x;y;z)$ nằm ngoài mặt cầu (S) nếu $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2>R^2$.

2 Phương trình mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính R.

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=R^2$.

Phương trình mặt cầu dạng khai triển là $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định các yếu tố cơ bản của mặt cầu trong không gian

Loại 1: Cho (S) là: $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=R^2$. Khi đó:

- Tâm $I(a;b;c)$ (đổi dấu số trong dấu ngoặc)
- Bán kính R (rút căn vế phải)

Loại 2: Cho (S) là: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Khi đó:

- Điều kiện để phương trình trên là mặt cầu là $a^2+b^2+c^2-d>0$
- Tâm $I(a;b;c)$ (đổi dấu hệ số của x,y,z và chia đôi)
- Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+z^2=9$. Xác định tâm và bán kính của (S).

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{1}{2};-1;0\right)$, bán kính $R=3$.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y+8z-18=0$. Xác định tâm, bán kính của (S).

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(x_I;y_I;z_I)$ với $x_I=\frac{2}{-2}=-1,\ y_I=\frac{-2}{-2}=1,\ z_I=\frac{8}{-2}=-4$ nên $I(-1;1;-4)$.

Mặt cầu (S) có bán kính là $R=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-4)^2-(-18)}=6$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2+y^2+z^2-2x-5z+30=0$.

b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z=0$.

c) $x^3+y^3+z^3-2x+6y-9z-10=0$.

d) $x^2+y^2+z^2+5=0$.

e) $3x^2+2y^2+z^2-2x-2y+2z+1=0$

f) $x^2+y^2-2x+6y-8z-3=0$

g) $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+10=0$

h) $2x^2+2y^2+2z^2+12x+4y-8z+20=0$

Lời giải

a) Ta có $a=1, b=0, c=\frac{5}{2}, d=30$. Do $a^2+b^2+c^2-d=1+0+\frac{25}{4}-30<0$ nên phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

b) Ta có $a=2, b=-1, c=1, d=0$. Do $a^2+b^2+c^2-d=4+1+1-0=6>0$ nên phương trình đã cho là phương trình mặt cầu. Khi đó mặt cầu có tâm $I(2;-1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{6}$.

c) Do phương trình $x^3+y^3+z^3-2x+6y-9z-10=0$ có chứa x^3 nên phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

d) Ta có $a=0, b=0, c=0, d=5$. Do $a^2+b^2+c^2-d=0+0+0-5<0$ nên phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

e) Phương trình $3x^2+2y^2+z^2-2x-2y+2z+1=0$ không phải là phương trình của một mặt cầu vì các hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

f) Phương trình $x^2+y^2-2x+6y-8z-3=0$ không phải là phương trình của một mặt cầu vì không có biểu thức y^2.

g) Ta có: $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+10=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2.3.x+2.4.y-2.1.z+10=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=16$

Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I(3;-4;1)$ bán kính $R=\sqrt{16}=4$.

h) Ta có: $2x^2+2y^2+2z^2+12x+4y-8z+20=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+6x+2y-4z+10=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2.3.x+2.1.y-2.2.z+10=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$.

Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I(-3;-1;2)$ bán kính $R=\sqrt{4}=2$.

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(2;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 1. Hỏi vị trí $M(2;1;1)$ có thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên hay không?

Lời giải

Vùng phủ sóng của thiết bị là khối cầu (S) có tâm $A(2;0;0)$ và bán kính $R=1$.

Do $AM=\sqrt{(2-2)^2+(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}>1$ nên vị trí $M(2;1;1)$ không thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên.

Bài tập 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilomet), một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1;2;1)$ và được thiết kế bán kinh phủ sóng 5000 mét.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian?



b) Nhà bạn Diệp Chi, và Tuệ Nhi có vị trí tọa độ lần lượt là $A(3;2;-1)$ và $B(4;-3;5)$. Hỏi Diệp Chi và Tuệ Nhi dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$$

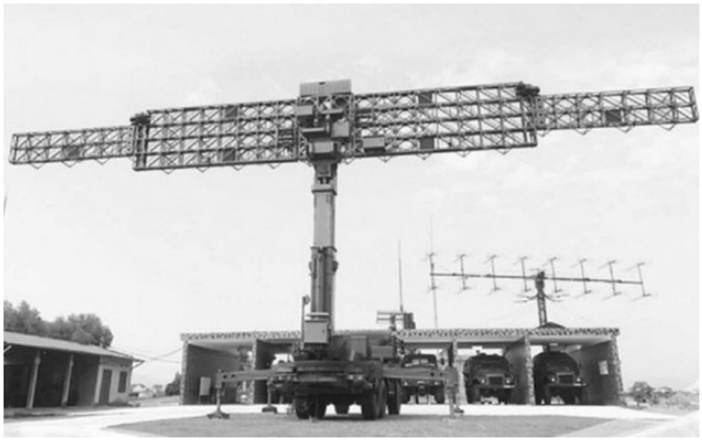
b) Do $IA=\sqrt{(3-1)^2+(2-2)^2+((-1)-1)^2}=\sqrt{8}<5$ nên điểm $A(2;3;-1)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy bạn Diệp Chi có thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Mặt khác $IB=\sqrt{(4-1)^2+((-3)-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{50}>5$ nên điểm $B(4;-3;5)$ nằm ngoài mặt cầu đó.

Vậy bạn Tuệ Nhi không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Bài tập 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilomet), một trạm phát sóng rađa của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa 500 kilomet.



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian?

b) Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ $M(-200;100;-250)$ và $N(350;-100;300)$. Hỏi hai chiếc máy bay đó có bị rađa phát hiện hay không?

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian là:

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=250000$$

b) $IM=\sqrt{(-200+2)^2+(100-1)^2+(-250+1)^2}\approx 333,2<500$ nên điểm $M(-200;100;-250)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy chiếc máy bay do thám của Mỹ có thể bị phát hiện bởi trạm rađa này.

Do $IN=\sqrt{(350+2)^2+((-100)-1)^2+(300+1)^2}\approx 474<500$ nên điểm $N(350;-100;300)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy chiếc máy bay do thám của Anh có thể bị phát hiện bởi trạm rađa này.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=16$, bán kính R của mặt cầu là

A. $R=4$. **B.** $R=16$. **C.** $R=0$. **D.** $R=2$.

Lời giải

Phương trình tổng quát của mặt cầu trong không gian $Oxyz$ là: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

Khi đó: $R^2=16\Rightarrow R=4$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$. Xác định toạ độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(3;-1;2), R=2.$ **B.** $I(-3;1;-2), R=2.$ **C.** $I(-3;1;-2), R=4.$ **D.** $I(3;-1;2), R=4.$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-1;2)$ và bán kính $R=2.$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-2=0$. Xác định toạ độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(1;2;-1), R=2\sqrt{2}.$ **B.** $I(-1;-2;1), R=2\sqrt{2}.$

C. $I(2;4;-2), R=\sqrt{2}.$ **D.** $I(2;4;2), R=8.$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2-(-2)}=2\sqrt{2}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$. Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

A. $I(-1;2;-3)$; $R=3$. **B.** $I(1;2;-3)$; $R=9$. **C.** $I(1;-2;3)$; $R=9$. **D.** $I(1;2;-3)$; $R=3$.

Lời giải

Mặt cầu đã cho có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R=3$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình của một mặt cầu?

A. $(S): x^2+y^2-z^2-4x+2y+2z-3=0$. **B.** $(S): x^2+2y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$.

C. $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$. **D.** $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+8=0$.

Lời giải

Phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2-d>0)$ là phương trình mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Ở đáp án A và B không đúng dạng phương trình mặt cầu vì hệ số của x^2, y^2, z^2 không bằng nhau nên phương trình ở đáp án A, B không là phương trình mặt cầu.

Trong đáp án D ta có: $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-1 \\ d=8 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d=-2<0$ nên phương trình ở đáp án D không là phương trình mặt cầu.

Trong đáp án C ta có: $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-1 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d=4>0$ nên phương trình ở đáp án C là phương trình mặt cầu.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2z-6y-2=0$ là phương trình của mặt cầu có tâm I. Xác định tọa độ tâm I

A. $I(2;-1;3)$. **B.** $I(2;3;-1)$. **C.** $I(2;-3;1)$. **D.** $I(2;1;-3)$.

Lời giải

Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a=-4 \\ -2b=-6 \\ -2c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Vậy tâm của mặt cầu là $I(2;3;-1)$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là

A. $I(2;2;-1)$. **B.** $I(-2;-2;1)$. **C.** $I(-2;2;-1)$. **D.** $I(4;4;-2)$.

Lời giải

Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

Từ phương trình mặt cầu đề bài cho $\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$. Vậy tâm mặt cầu là $I(2;2;-1)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-\sqrt{2}x+y-z-1=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. 3. **B.** 2. **C.** $R=\sqrt{2}$. **D.** $R=\sqrt{3}$.

Lời giải

Tạo độ tâm của mặt cầu (S) là: $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ và hệ số $d=-1$.

Bán kính $R=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-(-1)}=\sqrt{2}>0$. Vậy bán kính mặt cầu (S) là: $R=\sqrt{2}$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có phương trình: $(x-a)^2+y^2+(z-c)^2=16$ đi qua hai điểm O và $M(1;0;1)$. Tính $a+c$

A. $a+c=4$. **B.** $a+c=16$. **C.** $a+c=1$. **D.** $a+c=0$.

Lời giải

Vì mặt cầu (S) đi qua $O(0;0;0)$ nên: $a^2+c^2=16$. (1)

Vì mặt cầu (S) đi qua $M(1;0;1)$ nên: $(1-a)^2+(1-c)^2=16$. (2)

$(2)\Leftrightarrow a^2+c^2-2(a+c)+2=16$ (3).

Thay (1) vào (3) $\Rightarrow 16-2(a+c)+2=16\Leftrightarrow a+c=1\Rightarrow a=1-c$.

Thay $a=1-c$ vào (1) $\Rightarrow (1-c)^2+c^2=16\Rightarrow c=\frac{1\pm\sqrt{31}}{2}$ $\Rightarrow$ Có tồn tại mặt cầu (S) thỏa mãn đề bài. Vậy $a+c=1$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-2x+4z-1=0$ **B.** $x^2+z^2+3x-2y+4z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2xy-4y+4z-1=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+8=0$

Lời giải

Đáp án A thỏa mãn vì $a^2+b^2+c^2-d=1+0+4+1=6>0$.

Đáp án B vì không có số hạng y^2.

Đáp án C loại vì có số hạng $2xy$.

Đáp án D loại vì $a^2+b^2+c^2-d=1+1+4-8=-2<0$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0$. **B.** $2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0$.

C. $2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0$.

Lời giải

Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình của một mặt cầu nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Đáp án D không phải là phương trình mặt cầu vì $1^2+2^2+(-2)^2-10<0$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, trong các phương trình sau phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+2y^2+2z^2-2x+4z-1=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2+3x-2y+4z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z-1=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-8=0$

Lời giải

Phương trình $x^2+2y^2+2z^2-2x+4z-1=0$ có hệ số trước x^2,y^2,z^2 không bằng nhau nên không phải là phương trình mặt cầu

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

A. $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$ **B.** $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$

C. $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$ **D.** $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+5=0$

Lời giải

Ta có mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ có bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

Trong đáp án C ta có: $\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=-1\\d=2\end{cases}\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4}=2$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y=0$ **B.** $x^2+2y^2+z^2-2x+4y-2z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2-2x+2y+3=0$. **D.** $x^2+y^2-z^2-2x+2y-4z+8=0$

Lời giải

Phương trình $2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y=0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x+4y=0$

Có $a=-1,b=-4,c=0,d=0\Rightarrow a^2+b^2+c^2-d>0$ nên đó là phương trình mặt cầu.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-x+6z+16=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-6y+8z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z+13=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+9=0$

Lời giải

Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình của một mặt cầu nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Đáp án B là phương trình mặt cầu vì $2^2+(-3)^2+(4)^2-(-1)>0$

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2-z^2-2x+4y+4z+5=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-2=0$

C. $x^2+y^2+z^2+x-2y+3=0$. **D.** $x^2-y^2+z^2-2x+6y-8z+1=0$

Lời giải

Đáp án A không phải là phương trình mặt cầu vì hệ số trước z^2 bằng -1

Đáp án B là phương trình mặt cầu vì $1^2+1^2+2^2+2>0$.

Đáp án C không phải là phương trình mặt cầu vì $\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2-3<0$.

Đáp án D không phải là phương trình mặt cầu vì hệ số trước y^2 bằng -1

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-2=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=6$

C. $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2y+4xz+2=0$

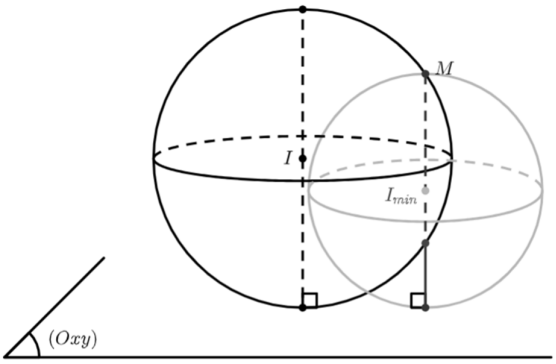
Lời giải

Đáp án D không phải là phương trình mặt cầu vì có số hạng $4xz$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(6;5;4)$ và mặt cầu (S) đi qua M, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy). Gọi R là bán kính của mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của R là

A. 3. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải



Gọi d là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Oxy) $\Rightarrow d=4$.

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc (Oxy) và luôn đi qua M nên ta có đánh giá: $2R\geq d\Leftrightarrow 2R\geq 4\Leftrightarrow R\geq 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của R là: 2.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường kính mặt cầu bằng 8.

b) Mặt cầu (S) đi qua điểm $A(-1;3;0)$.

c) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (Oyz) bằng 2.

d) Mặt phẳng (P) có phương trình $x+2y-2z-2=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S).

Lời giải

a) Sai: Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Đường kính mặt cầu bằng $2R=4$.

b) Sai: Ta có: $IA=\sqrt{(-1+2)^2+(3-1)^2+0^2}=\sqrt{5}>R$ nên mặt cầu (S) không đi qua điểm A.

c) Đúng: Mặt phẳng (Oyz) có phương trình: $x=0$. Khi đó $d\left(I;(Oyz)\right)=|-2|=2$

d) Sai: Ta có: $d\left(I;(P)\right)=\dfrac{|-2+2.1-2.0-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{3}<R$ nên mặt phẳng (P) không tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2), B(1;0;3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Ox và đi qua hai điểm A, B. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) có dạng $I(a;0;0)$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là $R=9$.

c) Mặt cầu (S) có phương trình là : $(x-1)^2+y^2+z^2=9$.

d) Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $P=MA^2+MB^2+MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T=x+y+z=2$.

Lời giải

a) Đúng: Vì tâm $I\in Ox$ nên toạ độ điểm $I(a;0;0))$.

b) Sai: Vì $A\in(S), B\in(S)$ nên ta có:

$IA=IB\Leftrightarrow(3-a)^2+1+4=(1-a)^2+0+9\Leftrightarrow 9-6a+a^2+5=1-2a+a^2+9\Leftrightarrow a=1.$

Ta có bán kính $R=IB=\sqrt{9}=3$.

c) Đúng: Vì $A\in(S), B\in(S)$ nên ta có: $IA=IB\Leftrightarrow(3-a)^2+1+4=(1-a)^2+0+9\Leftrightarrow a=1$.

$\Rightarrow R=IA=IB=3$,tâm $I(1;0;0))$,

Ta có mặt cầu (S) có phương trình là : $(x-1)^2+y^2+z^2=9$

d) Đúng: Gọi K là điểm thõa mãn $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KI}=\vec{0}\Leftrightarrow K\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$

$P=MA^2+MB^2+MI^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MI}^2=\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KI}\right)^2$

$=3.MK^2+KA^2+KB^2+KI^2+2\overrightarrow{MK}\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KI}\right)=3MK^2+KA^2+KB^2+KI^2$

Mà $M\in(Oyz)\Rightarrow MA^2+MB^2+MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của K lên mặt phẳng $(Oyz)\Rightarrow M\left(0;\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$. Vậy $T=0+\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(10;20;30)$ với bán kính phủ sáng là 3 km. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là

$$(x-10)^2+(y-20)^2+(z-30)^2=3000^2.$$

b) Người đi biển ở vị trí $A(50;20;0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Người đi biển ở vị trí $B(4030;50;40)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Lời giải

a) Đúng: Mặt cầu (S) tâm $I(10;20;30)$, bán kính $R=3$ km $=3000$ m có phương trình

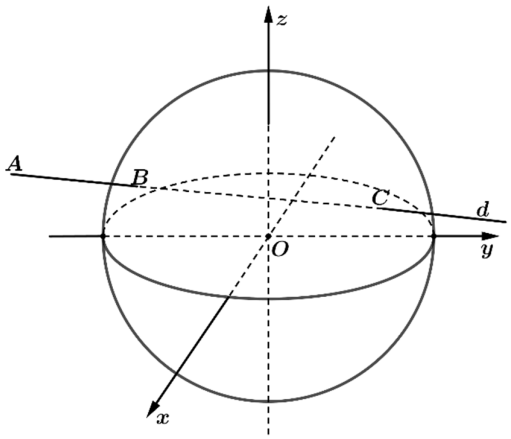
$$(x-10)^2+(y-20)^2+(z-30)^2=3000^2$$

b) Đúng: Ta có $\overrightarrow{IA}=(40;0;-30)\Rightarrow IA=\sqrt{40^2+0^2+30^2}=50m<R=3000m$ nên điểm A nằm trong mặt cầu (S) nên người đi biển ở vị trí $A(50;20;0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Sai: Ta có $\overrightarrow{IB}=(4020;30;10)\Rightarrow IB=\sqrt{4020^2+30^2+10^2}\approx 4020,12m>R=3000m$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu (S) nên người đi biển ở vị trí $B(4030;50;40)$ không nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Đúng: Vì bán kính phủ sáng là 3 km nên đường kính phủ sáng là 6 km nên nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì hai người đó nằm trong mặt cầu, do đó khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Câu 4: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay đang chuyển động với vận tốc 900 km/h theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=-1000+100t \\ y=-300+80t \\ z=100\sqrt{11} \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Ranh giới vùng phát sóng bên ngoài của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng $300\,km$.

b) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2+y^2+z^2=360000$.

c) Máy bay đang chuyển động theo đường thẳng d đến vị trí điểm $M\left(-500;100;100\sqrt{11}\right)$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Thời gian kể từ khi đài kiểm soát không lưu phát hiện may bay đến khi máy ra khỏi vùng kiểm soát không lưu là $\frac{4}{3}$ giờ.

Lời giải

a) Sai: Vì đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km nên ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng 600 km.

b) Đúng: Ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ có bán kính bằng $R=600$ có phương trình là: $x^2+y^2+z^2=360000$

c) Đúng: Ta có $OM=\sqrt{(-500)^2+(100)^2+\left(100\sqrt{11}\right)^2}\approx 608>600=R$.

Vậy, tại vị trí điểm $M\left(-500;100;100\sqrt{11}\right)$ máy bay nằm ngoài vùng kiểm soát không không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Sai: Thay $d:\begin{cases}x=-1000+100t\\y=-300+80t\\z=100\sqrt{11}\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$ vào phương trình mặt cầu $x^2+y^2+z^2=360000$

$$\left(100t-1000\right)^2+\left(80t-300\right)^2+\left(100\sqrt{11}\right)^2=360000$$

$$\Leftrightarrow 164t^2-2480t+8400=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=10\Rightarrow B\left(0;500;100\sqrt{11}\right)\\t=\dfrac{210}{41}\Rightarrow C\left(-\dfrac{20000}{41};\dfrac{4500}{41};100\sqrt{11}\right)\end{array}\right.$$

Quãng đường máy bay di chuyển trong vùng kiểm soát không lưu là:

$$BC=\sqrt{\left(-\frac{20000}{41}\right)^2+\left(\frac{4500}{41}-500\right)^2+\left(100\sqrt{11}-100\sqrt{11}\right)^2}\approx 625\text{ km}.$$

Vậy thời gian máy bay di chuyển theo đường thẳng d và trong phạm vi kiểm soát không lưu của sân bay là: $\dfrac{625}{900}=\dfrac{25}{36}$ giờ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $I\left(0;2;3\right)$. Tính bán kính mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy.

Lời giải

Gọi H hình chiếu vuông góc của I lên trục $Oy\Rightarrow H\left(0;2;0\right)$.

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy nên mặt cầu có bán kính $R=IH=3$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi $\left(S\right)$ là mặt cầu đi qua hai điểm $A\left(3;-1;2\right),B\left(1;1;-2\right)$ và có tâm thuộc trục Oz. Bán kính của mặt cầu $\left(S\right)$ là R. Giá trị R^2 bằng?

Lời giải

Gọi tâm của mặt cầu là $I\left(a;b;c\right)$. Vì $I\in Oz$ nên $I\left(0;0;c\right)$.

Mặt cầu đi qua A,B nên có $IA=IB\Leftrightarrow IA^2=IB^2\Leftrightarrow 9+1+\left(c-2\right)^2=1+1+\left(c+2\right)^2\Leftrightarrow c=1$.

Bán kính mặt cầu $R=IA=\sqrt{11}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(1;0;-3\right)$, $B\left(-3;-2;-5\right)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2+BM^2=30$ là một mặt cầu $\left(S\right)$. Tìm bán kính R của mặt cầu $\left(S\right)$.

Lời giải

Gọi tọa độ điểm $M(x;y;z)$. Khi đó $AM^2+BM^2=30$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z+3)^2+(x+3)^2+(y+2)^2+(z+5)^2=30$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2+4x+4y+16z+18=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x+2y+8z+9=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2+(z+4)^2=9$ là phương trình của mặt cầu (S), có tâm $I(-1;-1;-4)$ và bán kính $R=3$.

Câu 4: Cho hai điểm A,B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA=3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

Lời giải

Ta có: $MA=3MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2=9\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=9\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$\Leftrightarrow IA^2-9IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-9\overrightarrow{IB}\right)=8MI^2\ (1)$

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-9\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ nên $IB=\frac{1}{2};IA=\frac{9}{2}$.

Từ (1) suy ra $\Leftrightarrow 8MI^2=18 \Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}$ suy ra M thuộc mặt cầu (S) có tâm là I và bán kính $R=\frac{3}{2}=1,5$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$ và I là hình chiếu vuông góc của $M(3;1;2)$ trên trục Ox. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và đi qua điểm M. Độ dài bán kính mặt cầu bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0) \Rightarrow IM=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm là điểm $A(1;2;-3)$ và đi qua điểm $B(3;-2;1)$. Gọi $M(1;b;-3)$ là điểm thuộc mặt cầu biết $b\in\mathbb{N}^*$. Tung độ điểm M có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

Mặt cầu (S) đi qua $B(3;-2;1)$ nên bán kính $R=AB$

$\Leftrightarrow R=\sqrt{(3-1)^2+(-2-2)^2+(1+3)^2} \Leftrightarrow R=6$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=36$.

Thay tọa độ điểm $M(1;b;-3)$ vào phương trình mặt cầu (S), ta có:

$(1-1)^2+(b-2)^2+(-3+3)^2=36 \Leftrightarrow (b-2)^2=36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b-2=6 \\ b-2=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=8 \\ b=-4 \end{array}\right.$

Vì $b>0$ nên nhận $b=8$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;-4;3)$ và tiếp xúc với trục Ox. Bán kính của mặt cầu trên bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi R là bán kính của mặt cầu (S) và H là hình chiếu của I trên trục Ox suy ra $H(2;0;0)$ và $R=IH=\sqrt{(2-2)^2+(0+4)^2+(0-3)^2}=5$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-4;3)$ và bán kính là $R=5$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox. Hoành độ của tâm mặt cầu (S) bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi I là tâm mặt cầu (S). Vì tâm I nằm trên tia Ox nên $I(a;0;0),\ (a>0)$.

Vì mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên ta có:

$$d(I,(Oyz))=2\Leftrightarrow\frac{|a|}{1}=2\Leftrightarrow|a|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\a=-2\end{array}\right.\ .$$

Do $a>0$ nên ta nhận $a=2$, loại $a=-2$ suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(2,0,0)$.

Câu 9: Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$ và có đúng một điểm chung với mặt phẳng (Oxy). Gọi một giao điểm của mặt cầu (S) với trục Oz là $A(a;b;c)\ (c>1)$. Tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $(Oxy):z=0$.

Mặt cầu (S) có đúng một điểm chung với mặt phẳng $(Oxy)\ \Leftrightarrow R=\mathrm{d}(I,(Oxy))=3$.

Suy ra $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$. Cho $x=y=0\Rightarrow 1^2+2^2+(z-3)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=5\\z=1\end{array}\right.$.

Vì $c>1$ nên $A(0;0;5)\Rightarrow a+b+c=5$.

----------HẾT----------

Dạng 2: Viết phương trình mặt cầu

Phương pháp: Cần xác định được tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và độ dài bán kính r.

Các bài toán cơ bản:

Bài toán 1: Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và đi qua điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ thì bán kính

$$r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 + (z_A - z_I)^2}$$

Bài toán 2: Mặt cầu (S) có đường kính AB thì

- Tâm $I(a;b;c)$ là trung điểm của AB hay $I\left(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2};\frac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Bán kính $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{2}$

Bài toán 3: Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ thì bán kính

$$r = d(I,(\alpha)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Bài toán 4: Mặt cầu qua bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng (hay gọi là ngoại tiếp tứ diện $ABCD$).

Gọi (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ $(*)$

- Thay tọa độ 4 điểm A,B,C,D vào $(*)$ thì ta được hệ phương trình với 4 ẩn số a,b,c,d
- Giải tìm a,b,c,d.
- Suy ra tâm $I(a,b,c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Viết phương trình mặt cầu (S):

a) có tâm $I(7;-3;0)$, bán kính $R = 8$ b) có tâm $M(3;1;-4)$ và đi qua điểm $N(1;0;1)$

c) có đường kính AB với $A(4;6;8)$ và $B(2;4;4)$

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(7;-3;0)$, bán kính $R = 8$ là:

$(x-7)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 8^2$ hay $(x-7)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 64$.

b) Mặt cầu (S) có tâm $M(3;1;-4)$ và đi qua điểm $N(1;0;1)$ nên có bán kính $R = MN = \sqrt{30}$.

Vậy mặt cầu (S) có phương trình là: $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = \left(\sqrt{30}\right)^2$

Hay $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 30$.

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(4;6;8)$ và $B(2;4;4)$ nên có tâm $J(3;5;6)$ là trung điểm của AB và bán kính $R = AJ = \sqrt{6}$.

Vậy mặt cầu (S) có phương trình là: $(x-3)^2+(y-5)^2+(z-6)^2=6$.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của AB thì IH vuông góc với AB và $IH=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$.

Suy ra bán kính mặt cầu là: $R=IA=\sqrt{3+13}=4$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $A(1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục Ox.

Lời giải

Ta có: $R=d(A,Ox)=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $A(1;2;-3)$, bán kính $R=\sqrt{13}$ có phương trình là:

$$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=13.$$

Bài tập 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(6;0;0),B(0;4;0)$ và $C(0;0;2)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có dạng:
$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2-d>0)$

Do $O,A,B,C\in(S)\Rightarrow\begin{cases}d=0\\36-12a+d=0\\16-8b+d=0\\4-4c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=0\\a=3\\b=2\\c=1\end{cases}\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{14}$

Mặt cầu tâm $I(3;2;1),R=\sqrt{14}$ có phương trình $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=14$.

Bài tập 5: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz) và đi qua các điểm $A(0;8;0),B(4;6;2),C(0;12;4)$.

Lời giải

Gọi tâm mặt cầu là $I(0;b;c)\in(Oyz)$. Do $A(0;8;0),B(4;6;2),C(0;12;4)$ thuộc mặt cầu nên

Khi đó $IA=IB=IC\Leftrightarrow(b-8)^2+c^2=16+(b-6)^2+(c-2)^2=(b-12)^2+(c-4)^2$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}b-c=2\\b+c=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=7\\c=5\end{cases}$. Vậy $I(0;7;5);R=IA=\sqrt{26}$

Phương trình mặt cầu là $x^2+(y-7)^2+(z-5)^2=26$.

Bài tập 6: Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $A(1;4;-3)$ và chứa trục Ox. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OA}=(1;4;-3)$ nên $\left[\overrightarrow{OA},\vec{i}\right]=(0;-3;-4)$ khi đó mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;4;-3)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;3;4)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là: $3y+4z=0$.

Lại có: $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|3.2+4.1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$.

Mặt cầu tâm $I(1;2;1)$ bán kính $R=\mathrm{d}(I,(P))=2$ có phương trình là

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4.$$

Bài tập 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hãy viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(-2;3;3),B(-1;1;2),C(4;2;2)$ và có tâm nằm thuộc mặt phẳng (Oyz).

Lời giải

Vì mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) nên tâm có dạng $I(0;b;c)$.

Vì mặt cầu đi qua ba điểm $A(-2;3;3),B(-1;1;2),C(4;2;2)$ nên ta có:

$$IA=IB=IC=R\Leftrightarrow IA^2=IB^2=IC^2=R^2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4+(3-b)^2+(3-c)^2=1+(1-b)^2+(2-c)^2\\1+(1-b)^2+(2-c)^2=16+(2-b)^2+(2-c)^2\end{cases}$$

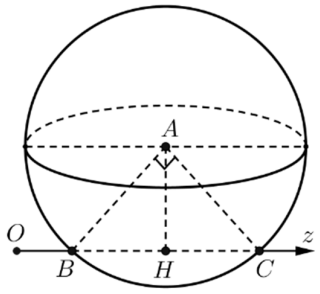
$$\Leftrightarrow\begin{cases}40+9-6c+c^2=65+4-4c+c^2\\b=9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2c=20\\b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-10\\b=9\end{cases}\Rightarrow I(0;9;-10),R=IA=\sqrt{4+36+169}=\sqrt{209}.$$

Phương trình mặt cầu là $x^2+(y-9)^2+(z+10)^2=209$.

Bài tập 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-4;5)$. Viết phương trình của mặt cầu tâm là A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho ΔABC vuông.

Lời giải



Do $AB=AC$ nên ΔABC vuông tại A. Gọi H trung điểm BC suy ra $AH=BH=HC$.
Do đó H là hình chiếu của điểm A lên trục Oz.

Ta có: $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2AH^2$

$\Rightarrow R = AH\sqrt{2} = d(A,Oz).\sqrt{2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}.\sqrt{2} = 2\sqrt{10}$

Vậy mặt cầu có phương trình: $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 40$

Bài tập 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1-2t \\ z = 2-2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ sao cho tiếp xúc với (P).

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $M(0;-1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;-2)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM};\vec{u}\right] = (2;-1;2) \Rightarrow (P): 2x - y + 2z - 5 = 0$.

Bán kính mặt cầu $R = d_{(I;(P))} = 2$ nên phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 4$.

Bài tập 10: Phần mềm mô phỏng thiết bị thám hiểm đại dương có dạng hình cầu trong không gian $Oxyz$. Cho biết tọa độ tâm mặt cầu là $I(360;200;400)$ và bán kính $r = 2m$. Viết phương trình mặt cầu.



Lời giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(360;200;400)$ và bán kính $r = 2m$ là:

$(x-360)^2 + (y-200)^2 + (z-400)^2 = 4$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;1;0)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=8$. **D.** $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=2$.

Lời giải

Mặt cầu có tâm $I(2;1;1)$. Mặt cầu có bán kính $R=AI=\sqrt{2}$

Vậy mặt cầu có phương trình: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;0;-1)$ và $A(2;2;-3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu $R=IA=\sqrt{(2-1)^2+2^2+(-3+1)^2}=3$.

Vậy mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;0;-1)$ và $A(2;2;-3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu $R=IA=\sqrt{(2-1)^2+2^2+(-3+1)^2}=3$.

Vậy mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$.

Câu 4: Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$ là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3$

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+5=0$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$ là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu đường kính AB với $A(0;-3;2), B(2;1;-2)$ có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=3$.

C. $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

Lời giải

Ta có $AB=\sqrt{4+16+16}=6$.

Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(1;-1;0)$, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=3$.

Khi đó phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;2)$ và bán kính $R=3$.

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=9$. **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=3$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$. **D.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;2)$ và bán kính $R=3$ thì phương trình chính tắc của (S) là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(4;-4;2)$ và đi qua gốc tọa độ có phương trình là

A. $(x+4)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=6$. **B.** $(x+4)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=36$.

C. $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=36$. **D.** $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=6$.

Lời giải

Mặt cầu tâm $I(4;-4;2)$ có bán kính bằng $R=OI=\sqrt{(4-0)^2+(-4-0)^2+(2-0)^2}=6$.

Vậy $(S):(x-4)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=36$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm $I(2;-1;3)$ và đi qua điểm $A(1;2;-1)$ là

A. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=26$. **B.** $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=26$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=26$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\sqrt{26}$.

Lời giải

Ta có $R=IA=\sqrt{(1-2)^2+(2+1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{26}$. Vậy phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm A có phương trình là $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=26$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x-2y-z+12=0$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. **B.** $x^2+y^2+(z+3)^2=5$.

C. $x^2+y^2+(z-3)^2=25$. **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

Lời giải

Do mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $(P) \Rightarrow R=d(I,(P))=\dfrac{|2.0-2.0+3+12|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=5.$

Vậy phương trình cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và bán kính $R=5$ là: $x^2+y^2+(z+3)^2=25.$

Câu 10: Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$ là:

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+5=0$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$ là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$

Phương trình dạng khai triển: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$

Câu 11: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và bán kính $R=4$ có phương trình là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$. **B.** $(x+1)^2+y^2+(z+2)^2=16$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=4$. **D.** $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=16$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và bán kính $R=4$ là

$(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=16.$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt cầu có đường kính AB với $A(2;1;0)$ và $B(0;1;2)$ là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$. **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=2$.

C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

Lời giải

Ta có tọa độ tâm mặt cầu là $(1;1;1)$, bán kính bằng $\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{2}$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=2$ là

A. $x^2+2y^2+3z^2=4$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. **D.** $(x-1)^2-(y+2)^2+(z-3)^2=4$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$ bán kính $R=2$ là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(0;1;-2)$ và đi qua điểm $M(1;0;-1)$ có phương trình là:

A. $x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$.

C. $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$. **D.** $x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3$.

Lời giải

Ta có phương trình mặt cầu tâm $I(0;1;-2)$ và bán kính R có dạng:

$$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=R^2.$$

Mặt khác mặt cầu đó đi qua điểm $M(1;0;-1)$ nên: $1^2+(0-1)^2+(-1+2)^2=R^2\Leftrightarrow R^2=3$.

Vậy phương trình mặt cầu tâm $I(0;1;-2)$ và đi qua điểm $M(1;0;-1)$ là:

$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM?

A. $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. **B.** $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=13$. **D.** $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

Lời giải

Vì I là hình chiếu vuông góc của $M(1;-2;3)$ trên trục Ox nên $I(1;0;0)$.

Bán kính: $R=IM=\sqrt{(1-1)^2+(-2-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và đi qua điểm $A(0;4;-1)$ là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

Lời giải

Ta có bán kính $R=IA=3\Rightarrow(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=5$. **B.** $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

C. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=25$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và $R = IM = \sqrt{4^2+0+3^2} = 5$ nên (S) có phương trình:

$x^2+y^2+(z+3)^2 = 25$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(3;4;0)$, $B(2;5;4)$, $C(-1;1;1)$, $D(3;5;3)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó

A. $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=9$.

Lời giải

Gọi mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có dạng $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Ta có A, B, C, $D \in (S) \Leftrightarrow \begin{cases} 9+16-6a-8b+d=0 \\ 4+25+16-4a-10b-8c+d=0 \\ 1+1+1+2a-2b-2c+d=0 \\ 9+25+9-6a-10b-6c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=2 \\ d=5 \end{cases}$.

Suy ra $R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d} = \sqrt{1+3^2+2^2-5} = 3$

Vậy phương trình mặt cầu là $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Phương trình (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -4a+d=-4 \\ -4b+d=-4 \\ -4c+d=-4 \\ -4a-4b-4c+d=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=0 \end{cases}.$$

Vậy bán kính mặt cầu (S) là: $R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d} = \sqrt{3}$.

Câu 20: Mặt cầu tâm $I(5;3;-2)$ và đi qua điểm $A(3;-1;2)$ có phương trình

A. $(x-5)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=36$. **B.** $(x-5)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=6$.

C. $(x+5)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=36$. **D.** $(x+5)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=6$..

Lời giải

Bán kính $R = IA = \sqrt{(3-5)^2+(-1-3)^2+(2+2)^2} = 6$

Mặt cầu tâm $I(5;3;-2)$ và đi qua điểm $A(3;-1;2)$ có phương trình là

$(x-5)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=36.$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x-y-z+2=0$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x+2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$. **D.** $(x+2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu (S) là $R=d(I;(\alpha))=\dfrac{|2-2+1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;2;-1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$ có phương trình là:

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3.$$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-2)$, $B(3;-1;4)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\sqrt{14}$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=14$.

C. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=\sqrt{14}$. **D.** $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=14$.

Lời giải

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $I(2;1;1)$. Độ dài đoạn thẳng AB là $AB=2\sqrt{14}$.

Mặt cầu đường kính AB có tâm I và bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{14}$ có phương trình là

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=14.$

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;-3;4)$ và $B(3;-1;2)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=6$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=24$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=24$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=6$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB, ta có: $I(1;-2;3)$.

Mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm $I(1;-2;3)$ của AB và bán kính

$$R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(3+1)^2+(-1+3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{6}.$$

Vậy phương trình mặt cầu đường kính AB là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=6$.

Câu 24: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;1)$. Phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) là

A. $(S):(x+2)^2+y^2+z^2=1$. **B.** $(S):(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=5$.

C. $(S):(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=4$. **D.** $(S):(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Lời giải

Ta có phương trình mặt phẳng (Oxy): $z=0$ nên khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Oxy) bằng $1 \Rightarrow$ bán kính mặt cầu là $R=1$.

Mặt cầu (S) tâm $A(2;0;1)$, bán kính $R=1$ có phương trình: $(S):(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Câu 25: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với trục Oz là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=5$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên trục Oz, suy ra $H(0;0;3)$.

Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với trục Oz có bán kính $R=d(A,(Oz))=AH=\sqrt{5}$.

Vậy mặt cầu tâm A và tiếp xúc với trục Oz có phương trình: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với tọa độ các điểm $A(2;0;-1)$, $B(0;-2;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=24$. **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=24$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB. Suy ra mặt cầu (S) có tâm là $I(1;-1;1)$ và bán kính

$$R=IA=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}.$$

Phương trình mặt cầu đường kính AB là: $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, $A(-3;\ 4;\ 2)$, $B(-5;\ 6;\ 2)$, $C(-10;\ 17;-7)$. Viết phương trình mặt cầu tâm C, bán kính AB.

A. $(x+10)^2+(y-17)^2+(z-7)^2=8$. **B.** $(x+10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$.

C. $(x-10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$. **D.** $(x+10)^2+(y+17)^2+(z+7)^2=8$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;2;0) \Rightarrow AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

Phương trình mặt cầu tâm C bán kính AB: $(x+10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$.

Câu 28: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$, $B(0;2;3)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

A. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$. **B.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$.

C. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$. **D.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Gọi I là tâm mặt cầu đường kính AB, suy ra I là trung điểm của đoạn $AB \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};2;2\right)$

Bán kính mặt cầu là $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB là $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;0), B(0;3;-4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu đường kính AB

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$.

Lời giải

Gọi I trung điểm AB suy ra I là tâm mặt cầu đường kính AB

Tọa độ điểm I là $I(1;1;-2)$ và $R=IA=3$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu đường kính AB với $A(0;1;2)$ và $B(4;5;-4)$ có phương trình là

A. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=68$. **B.** $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=\sqrt{68}$.

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$. **D.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\sqrt{17}$.

Lời giải

Gọi I là tâm mặt cầu suy ra I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(2;3;-1)$.

Bán kính mặt cầu $r=IA=\sqrt{17}$.

Phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$.

Câu 31: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+1=0$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x-y+2z+1=0$ là:

$$R=d(A,(P))=\frac{|2.2-1+2+1|}{3}=2.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$

Câu 32: Cho mặt cầu (S) đi qua $A(3;1;0)$, $B(5;5;0)$ và có tâm I thuộc trục Ox. Mặt cầu (S) có phương trình là

A. $(x+10)^2+y^2+z^2=5\sqrt{2}$. **B.** $(x-10)^2+y^2+z^2=5\sqrt{2}$.

C. $(x-10)^2+y^2+z^2=50$. **D.** $(x+10)^2+y^2+z^2=50$.

Lời giải

Ta có tâm I thuộc trục Ox nên $I(x;0;0)$.

Ta có (S) đi qua A, B nên $IA=IB\Leftrightarrow IA^2=IB^2\Leftrightarrow(3-x)^2+1^2=(5-x)^2+5^2$

$$\Leftrightarrow 10-6x+x^2=50-10x+x^2\Leftrightarrow 4x=40\Leftrightarrow x=10.$$

Suy ra $I(10;0;0)$ do đó $R=IA=5\sqrt{2}$. Vậy $(S):(x-10)^2+y^2+z^2=50$.

Câu 33: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(5;4;7)$. Phương trình mặt cầu nhận AB làm đường kính là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=17$. **B.** $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=17$.

C. $(x-5)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=17$. **D.** $(x-6)^2+(y-2)^2+(z-10)^2=17$.

Lời giải

Gọi I là tâm của mặt cầu suy ra I là trung điểm của AB suy ra $I(3;1;5)$

Ta có bán kính của mặt cầu $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(5-1)^2+(4+2)^2+(7-3)^2}}{2}=\sqrt{17}$

Vậy phương trình mặt cầu nhận AB làm đường kính là

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=17.$$

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0.$ Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-1=0$ có bán kính là $R=d(I,(P))=\dfrac{|2.1-1.(-2+2.3-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3$.

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 35: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-3;4;2)$, $B(-5;6;2)$ và $C(-10;17;-7)$. Phương trình mặt cầu tâm C bán kính AB là

A. $(x+10)^2+(y-17)^2+(z-7)^2=8$. **B.** $(x+10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$.

C. $(x-10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$. **D.** $(x+10)^2+(y+17)^2+(z+7)^2=8$.

Lời giải

Ta có $R=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-5+3)^2+(6-4)^2+(2-2)^2}=2\sqrt{2}$. Phương trình mặt cầu tâm C bán kính AB là $(x+10)^2+(y-17)^2+(z+7)^2=8$.

Câu 36: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Hãy viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).

A. $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=13$.

C. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$. **D.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

Lời giải

Mặt cầu có tâm $I(2;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên có bán kính

$$R=d(I,(Oxz))=2.$$

Suy ra phương trình mặt cầu: $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;1;-2)$. Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Ox là

A. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5$. **B.** $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=25$.

C. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=5$. **D.** $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=25$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của I lên trục Ox ta được $H(3;0;0)$.

Do mặt cầu tiếp xúc với trục Ox nên $R=IH=\sqrt{5}$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(6;2;-5), N(-4;0;7)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính MN?

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=62$. **B.** $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+6)^2=62$.

C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=62$. **D.** $(x+5)^2+(y+1)^2+(z-6)^2=62$.

Lời giải

Mặt cầu đường kính MN nhận trung điểm $I(1;1;1)$ của đoạn thẳng MN là tâm và có bán kính $R=IM=\sqrt{(6-1)^2+(2-1)^2+(-5-1)^2}=\sqrt{62}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=62$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):4x-y+2z-5=0$ có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\frac{16}{21}$. **B.** $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\frac{16}{21}$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=\frac{16}{441}$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{16}{441}$.

Lời giải

Do mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên bán kính mặt cầu là

$$R=d(I,(P))=\frac{|4.2-1+2.(-3)-5|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}.$$

Phương trình mặt cầu cần tìm có tâm $I(2;1;-3)$, bán kính $R=\frac{4\sqrt{21}}{21}$ là

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\left(\frac{4\sqrt{21}}{21}\right)^2\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\frac{16}{21}$$

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Xét (S) là mặt cầu tâm I và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5. Phương trình của (S) là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Lời giải

Gọi (S) có tâm $I(-1;2;-1)$ và bán kính là R.

Ta có $d(I,(P))=3$.

Vì (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng $r=5$ nên:

$$R^2=d^2(I,(P))+r^2\Rightarrow R^2=34.$$

Vậy phương trình (S) là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho đường tròn (C) tâm O có bán kính bằng 2 và nằm trong mặt phẳng (xOy). Tìm phương trình mặt cầu chứa đường tròn (C) và đi qua điểm $A(0;0;-4)$.

A. $x^2+y^2+z^2=\dfrac{25}{4}$. **B.** $x^2+y^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$.

C. $x^2+y^2+\left(z+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$. **D.** $x^2+y^2+(z+4)^2=1$.

Lời giải

Gọi I,R lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu cần tìm. Do $IO\perp(xOy)$ nên $I\in Oz\Rightarrow I(0;0;c)$

Ta có $R^2=IA^2=IO^2+2^2\Leftrightarrow(c+4)^2=c^2+4\Leftrightarrow 8c=-12\Leftrightarrow c=-\dfrac{3}{2}$.

Vậy $I\left(0;0;-\dfrac{3}{2}\right)$ và $R=\dfrac{5}{2}$. Phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2+y^2+\left(z+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho đường tròn (C) có bán kính bằng 4 nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tâm là gốc tọa độ O. Hãy viết phương trình mặt cầu chứa đường tròn (C) đồng thời cắt trục Oz tại điểm $A(0;0;8)$.

A. $x^2+y^2+(z-4)^2=16$ **B.** $x^2+y^2+z^2=64$.

C. $(x-4)^2+(y-4)^2+(z-8)^2=32$. **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=25$

Lời giải

Đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tâm là gốc tọa độ O nên có trục là trục Oz.

Gọi I,R theo thứ tự là tâm và bán kính của mặt cầu (S) thỏa đề bài thì ta có

Mặt cầu (S) chứa đường tròn $(C)\Rightarrow I\in Oz\Rightarrow I(0;0;c)\Rightarrow d(I,(Oxy))=IO.$

Đường tròn (C) nằm trên mặt phẳng (Oxy) và (C) có bán kính

$$r=4\Rightarrow R=\sqrt{IO^2+r^2}=\sqrt{c^2+16}\quad(1)$$

Mặt cầu (S) cắt trục Oz tại điểm $A(0;0;8)\Rightarrow R=IA=\sqrt{(8-c)^2}\quad(2)$

Từ (1) và (2) ta có $\sqrt{c^2+16}=\sqrt{(8-c)^2}\Leftrightarrow c=3.$

Như vậy mặt cầu (S) tâm $I(0;0;3)$, bán kính $R=5$ thỏa yêu cầu đề bài.

Phương trình của (S) là $x^2+y^2+(z-3)^2=25$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$; $d_2:\dfrac{x+8}{2}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z-10}{-1}$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với $d_1;d_2$ và có bán kính nhỏ nhất. Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $x^2+(y-10)^2+(z-6)^2=35$. **B.** $(x-2)^2+y^2+z^2=35$.

C. $(x-2)^2+(y-10)^2+(z-6)^2=35$. **D.** $(x-1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=35$.

Lời giải

Giả sử mặt cầu (S) có tâm là I và bán kính là R tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1;d_2$ lần lượt tại $M;N$.

Ta có $2R \ge MN \ge d(d_1;d_2)$.

Vậy $MinR = \frac{1}{2}d(d_1;d_2)$ khi MN là đoạn vuông góc chung của $d_1;d_2$

Giải sử $M(m;2-m;-4+2m); N(-8+2n;6+n;10-n)$

Lại có $\overrightarrow{u_1}(1;-1;2); \overrightarrow{u_2}(2;1;-1)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của $d_1;d_2$.

Khi đó: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n-m-8-n-m-4-2n-4m+28=0 \\ 4n-2m-16+n+m+4+n+2m-14=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n+6m=16 \\ 6n+m=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases} \Rightarrow M(2;0;0); N(0;10;6)$

Lúc này (S) có tâm là $I(1;5;3)$ và bán kính là $R = IM = \sqrt{35}$ nên (S) có phương trình dạng $(x-1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2 = 35$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;2)$. Gọi M,N,K là hình chiếu vuông góc của A lên ba trục tọa độ. Mặt cầu tâm O tiếp xúc với mặt phẳng (MNK) có phương trình là:

A. $x^2+y^2+z^2=6$. **B.** $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{3}$. **C.** $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{9}$. **D.** $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{9}$.

Lời giải

Ta có: $M(1;0;0), N(0;-1;0), K(0;0;2)$ nên phương tình mặt phẳng (MNK) là:

$x-y+\frac{z}{2}=1 \Leftrightarrow 2x-2y+z-2=0$. Mặt cầu cần tìm có bán kính $R = d(O;(MNK)) = \frac{2}{3}$

Phương trình mặt cầu là: $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{9}$

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có các đỉnh $S(1;2;-2), A(-1;0;-2)$, $C(3;-4;0)$. Tam giác ABC vuông tại B có độ dài cạnh $BC = 3\sqrt{3}$ đồng thời mặt đáy (ABC) vuông góc với mặt bên (SAC). Gọi I là trung điểm của AC. Mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (SBC) có phương trình là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{18}{17}$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{72}{17}$.

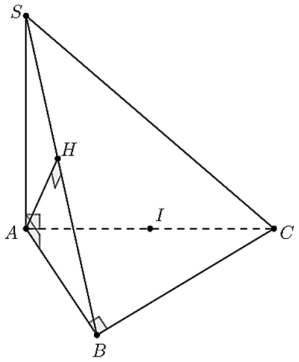
C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{18}{11}$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{72}{11}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{SA}=(-2;-2;0)\Rightarrow SA=2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{SC}=(2;-6;2)\Rightarrow SC=2\sqrt{11}$

Khi đó: $\overrightarrow{AC}=(4;-4;2)\Rightarrow AC=6\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại A

Ta có: $\begin{cases}(ABC)\perp(SAC)\\(ABC)\cap(SAC)=AC\Rightarrow SA\perp(ABC)\\SA\perp AC, SA\subset(SAC)\end{cases}$



Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(1;-2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(SBC)\Rightarrow R=d\left(I,(SBC)\right)$

Ta có: $IA\cap(SBC)=C\Rightarrow\dfrac{d\left(I,(SBC)\right)}{d\left(A,(SBC)\right)}=\dfrac{IC}{AC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow d\left(I,(SBC)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A,(SBC)\right)$

Ta chứng minh được $BC\perp(SAB)$

Gọi H là hình chiếu của A trên $SB\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=AH$

Ta có: $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=3\Rightarrow AH=\dfrac{AS.AB}{\sqrt{AS^2+AB^2}}=\dfrac{6\sqrt{34}}{17}\Rightarrow R=\dfrac{3\sqrt{34}}{17}$

Phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\dfrac{18}{17}$.

Câu 46: Một vệ tinh quay quanh Trái Đất với độ cao so với mặt đất là 18900 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là tâm Trái Đất, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6300 km trên thực tế. Biết bán kính Trái Đất khoảng 6300 km. Phương trình biểu diễn quỹ đạo chuyển động của vệ tinh đó là

A. $x^2+y^2+z^2=4$. **B.** $x^2+y^2+z^2=16$. **C.** $x^2+y^2+z^2=2$. **D.** $x^2+y^2+z^2=5$.

Lời giải

Khoảng cách từ tâm Trái Đất đến vệ tinh là $18900+6300=25200$ tương ứng bằng 4 đơn vị.

Ta thấy quỹ đạo chuyển động của vệ tinh quanh Trái Đất là một mặt cầu có tâm là tâm Trái Đất có tọa độ là $O(0;0;0)$ và bán kính $R=4$. Do đó phương trình mặt cầu là: $x^2+y^2+z^2=16$.

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là cm), mặt sàn nhà đa năng thuộc mặt phẳng Oxy. Một quả cầu bằng nhựa nằm trên mặt sàn nhà đa năng và có tâm I(12;20;50). Khi đó, mặt ngoài của quả cầu nhựa (S) có phương trình là:

A. $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=12^2$. **B.** $(x+12)^2+(y+20)^2+(z+50)^2=12^2$.

C. $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=20^2$. **D.** $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=50^2$.

Lời giải

Do quả cầu nằm trên mặt sàn nhà đa năng nên mặt ngoài của quả cầu tiếp xúc với mặt phẳng Oxy

Ta có: $d\left(I,\left(Oxy\right)\right)=R=50$

Vậy mặt ngoài của quả cầu $\left(S\right)$ có phương trình là $\left(x-12\right)^2+\left(y-20\right)^2+\left(z-50\right)^2=50^2$.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(1;5;5)$ như hình vẽ. Ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sáng là 5 km.



Một người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I\left(1;5;5\right)$ đến vị trí $A\left(7;14;11\right)$. Điểm nào sau đây mà người đi biển đi qua và vẫn thuộc vùng phủ sáng của ngọn hải đăng?

A. $M\left(3;8;7\right)$. **B.** $N\left(0;4;8\right)$. **C.** $P\left(7;3;0\right)$. **D.** $Q\left(7;11;3\right)$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trong không gian là:

$$\left(x-1\right)^2+\left(y-5\right)^2+\left(z-5\right)^2=25$$

Ta có $\overrightarrow{IM}=\left(2;3;2\right)$; $\overrightarrow{IA}=\left(6;9;6\right)=3\overrightarrow{IM}$ và $IM=\sqrt{\left(3-1\right)^2+\left(8-5\right)^2+\left(7-5\right)^2}=\sqrt{17}<5$ nên điểm M nằm trong mặt cầu. Vậy người đi biển đi qua điểm M mà vẫn thuộc vùng phủ sáng.

Câu 49: Một máy Rađa có tầm hoạt động với bán kính tối đa là 20 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là vị trí máy Rađa, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 10 km trên thực tế. Hỏi trong không gian $Oxyz$ trên, vật thể có tọa độ tương ứng với đáp án nào dưới đây sẽ bị Rađa phát hiện?

A. $M\left(1;0;2\right)$. **B.** $N\left(2;-1;1\right)$. **C.** $P\left(1;1;\sqrt{2}\right)$. **D.** $Q\left(3;0;0\right)$.

Lời giải

Ta thấy quỹ đạo của Rađa là một khối cầu giới hạn bởi mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm là vị trí máy Rađa có tọa độ là $O\left(0;0;0\right)$ và bán kính $R=2$.

Do đó ta có phương trình mặt cầu $\left(S\right):x^2+y^2+z^2=4$.

Vật thể bắt đầu bị phát hiện khi nó nằm trong hoặc trên mặt cầu $\left(S\right)$.

Trong 4 đáp án trên ta thấy có đáp án C thỏa mãn phương trình mặt cầu $\left(S\right)$ các đáp án còn lại đều nằm ngoài $\left(S\right)$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3;-2;1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2;-5;0)$ trên đường băng. Có một đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=16$ tại $M\left(\frac{10}{9};-\frac{25}{9};\frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy))

A. $\frac{3}{5}$ km. **B.** $\frac{4}{5}$ km. **C.** $\frac{1}{5}$ km. **D.** $\frac{2}{5}$ km.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-1)$; $\overrightarrow{IM}=\left(-\frac{8}{9};-\frac{16}{9};\frac{16}{9}\right)=-\frac{8}{9}(1;2;-2)$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) tại M nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $x-\frac{10}{9}+2\left(y+\frac{25}{9}\right)-2\left(z-\frac{7}{9}\right)=0$ hay $(P):x+2y-2z+6=0$

Giả sử điểm $C(a;b;c)$ là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh, suy ra $C\in(P)$ và ba điểm A,B,C thẳng hàng, C nằm giữa A và B.

Do đó $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ với $k>0$. Ta có: $\overrightarrow{AC}=(a-3;b+2;c-1),\overrightarrow{AB}=(-1;-3;-1)$.

$$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}a-3=-k\\b+2=-3k\\c-1=-k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-k\\b=-2-3k\\c=1-k\end{cases}\Rightarrow C(3-k;-2-3k;1-k).$$

$C\in(P)\Rightarrow 3-k+2(-2-3k)-2(1-k)+6=0\Rightarrow k=\frac{3}{5}$ suy ra $C\left(\frac{12}{5};-\frac{19}{5};\frac{2}{5}\right)$.

Vậy tại vị trí C độ cao của máy bay là $\frac{2}{5}$ km.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{2}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;0)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB=8$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(3;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $x+2y+2z-7=0$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông của I lên d. Khi đó $H(1;-1;2)$.

c) Mặt cầu (S) có bán kính $R=5$.

d) Phương trình mặt cầu (S): $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=25$.

Lời giải

a) Đúng: Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $I(3;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng d nhận $\vec{u}=(1;2;2)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình:

$$1(x-3)+2(y-2)+2(z-0)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-7=0$$

b) Sai: Gọi $H=d\cap(P)$ khi đó $H\in d\Rightarrow H(-1+t;-3+2t;-2+2t)$

Mặt khác $H\in(P)\Rightarrow -1+t+2(-3+2t)+2(-2+2t)-7=0\Rightarrow t=2$ nên $H(1;1;2)$

c) Đúng: Khi đó $IH=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2+(0-2)^2}=3\Rightarrow R=\sqrt{IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

d) Đúng: Vậy (S): $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=25$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0\,;0\,;2)$, $B(1\,;1;0)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$.

b) Điểm A nằm trong mặt cầu (S).

c) Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính bằng $\sqrt{6}$.

d) Điểm M thay đổi thuộc (S), giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2 bằng 5.

Lời giải

a) Đúng: Mặt cầu (S) có tâm $I(0\,;0\,;1)$, bán kính $R=\frac{1}{2}$.

b) Sai: $IA=1$, $R=\frac{1}{2}$, $IA>R$ nên A nằm ngoài mặt cầu (S).

c) Đúng: Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính $AB=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$.

d) Sai: Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Rightarrow K\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

Ta có: $MA^2+2MB^2=\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)^2$

$=3MK^2+KA^2+2KB^2+2\overrightarrow{MK}\left(\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}\right)=3MK^2+KA^2+2KB^2$.

Biểu thức MA^2+2MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MK đạt giá trị nhỏ nhất.

Với M thay đổi thuộc (S) ta có $MK_{\min}=|KI-R|=\left|1-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

Vậy $\left(MA^2+2MB^2\right)_{\min}=3MK_{\min}^2+KA^2+2KB^2=\frac{3}{4}+\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=\frac{19}{4}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;1;1), B(1;0;-3), C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có bán kính $R=2$.

b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $2x-2y+z-1=0$.

c) Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

d) Điểm $D(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất. Khi đó, $a+b+c=\frac{2}{3}$.

Lời giải

a) Đúng: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=2$.

b) Sai: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-4), \overrightarrow{AC}=(-1;-3;-4)$ nên mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-8;8;-4)$. Suy ra mặt phẳng (ABC) có phương trình $2x-2y+z+1=0$.

c) Đúng: Ta có $d\left(I,(ABC)\right)=\frac{|2.1-2.0-1+1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}}=\frac{2}{3}$. Vậy bán kính đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt cầu (S) là $r=\sqrt{R^2-\left[d\left(I,(ABC)\right)\right]^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

d) Đúng: Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}d\left(D,(ABC)\right).S_{ABC}$ nên V_{ABCD} lớn nhất khi và chỉ khi $d\left(D,(ABC)\right)$ lớn nhất.

Gọi Δ là đường thẳng qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Suy ra $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2t\\z=-1+t\end{cases}$.

Gọi $D_1;D_2$ là các giao điểm của Δ và mặt cầu (S). Tọa độ điểm $D_1;D_2$ thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2t\\z=-1+t\\x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{3}\\t=\frac{-2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow D_1\left(\frac{7}{3};\frac{-4}{3};\frac{-1}{3}\right);D_2\left(\frac{-1}{3};\frac{4}{3};\frac{-5}{3}\right)$

Ta thấy: $d\left(D_1,(ABC)\right)>d\left(D_2,(ABC)\right)$. Vậy điểm $D\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow a+b+c=\frac{2}{3}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Biết mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có diện tích là 25π. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Bán kính đường tròn (C) là $r=5$.

b) Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là 3.

c). Tâm đường tròn (C) có tọa độ là $H(1;3;1)$.

d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Lời giải

Gọi M là điểm nằm trên đường tròn giao tuyến của (S) và (P). Ta có $IM=R$. Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu trong trường hợp mặt cầu (S) giao với mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r là

a) Đúng: Ta có đường tròn (C) có diện tích là 25π. Suy ra $r=5=MH$.

b) Đúng: Ta có $d(I;(P))=\dfrac{|-1-2.2+2.(-1)-2|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}=3=IH$

c) Sai: Phương trình $IH:\begin{cases}x=-1+t\\y=2-2t\\z=-1+2t\end{cases}$

Vậy tọa độ là H là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=-1+t\\y=2-2t\\z=-1+2t\\x-2y+2z-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=1\\t=1\end{cases}\Rightarrow H(0;0;1).$

d) Sai: Suy ra $R^2=MI^2=IH^2+MH^2=3^2+5^2=34$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=3$.

b) Điểm $M(1;3;5)$ nằm trong mặt cầu.

c) Mặt phẳng $(P):x+2y-2z+8=0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=2$.

d) Đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=3-t\end{cases}$ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B. Khi đó, diện tích tam giác IAB là: $\dfrac{\sqrt{182}}{3}$

Lời giải

a) Đúng: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=3$.

b) Sai: Ta có $IM=\sqrt{(1-2)^2+(3+1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{33}>R=3$ nên điểm M nằm ngoài mặt cầu.

c) Sai: Ta có $h=d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|2-2-2+8|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=2<3$.

Suy ra mặt phẳng $(P):x+2y-2z+8=0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn.

Bán kính đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

d) Đúng: Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$, đi quan điểm $N(1;0;3)$.

$\overrightarrow{IN}=(-1;1;2)$, $\left[\vec{u},\overrightarrow{IN}\right]=(3;-1;2)$. Gọi H là trung điểm của AB

$IH=d(I,d)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{IN}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{\dfrac{14}{3}}$; $AH=\sqrt{IA^2-IH^2}=\dfrac{\sqrt{39}}{3}\Rightarrow AB=2AH=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$

Diện tích tam giác IAB là: $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IH.AB=\dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{14}{3}}.\dfrac{2\sqrt{39}}{3}=\dfrac{\sqrt{182}}{3}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ cắt đường thẳng $(d):\dfrac{x-11}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+25}{-2}$ tại hai điểm A,B sao cho $AB=16$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-2)$.

b) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(5;-3;-31)$.

c) Mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $2x+y-2z-9=0$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=225$.

Lời giải

a) Đúng: Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-2)$.

b) Sai: Thay $A(5;-3;-31)$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có $\dfrac{5-11}{2}=\dfrac{-3}{1}\neq\dfrac{-31+25}{-2}$ nên điểm A không thuộc đường thẳng (d).

c) Đúng: Vì mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) nên (P) nhận vectơ chỉ phương của (d) là $\vec{u}=(2;1;-2)$ làm vectơ pháp tuyến. Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) là $2(x-2)+1(y-3)-2(z+1)=0$ hay $2x+y-2z-9=0$.

d) Sai: Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng (d) nên IH và (d) vuông góc với nhau.

Gọi mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $2x+y-2z-9=0.$

Suy ra, H là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P)

Vì H thuộc đường thẳng (d) nên $H(2t+11,t,-2t-25)$

Mặt khác, H thuộc mặt phẳng (P) nên tọa độ $H(2t+11,t,-2t-25)$ thỏa mãn

$2(2t+11)+t-2(-2t-25)-9=0$ hay $t=-7$

Khi đó, điểm $H(-3,-7,-11)$ và $IH=\sqrt{(-3-2)^2+(-7-3)^2+(-11+1)^2}=15$

Ta được $R=\sqrt{IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{15^2+\left(\frac{16}{2}\right)^2}=17.$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và bán kính $R=17$ là

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17^2=289.$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và điểm $M(-1;0;2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có bán kính là $R=IM=\sqrt{3}$.

b) Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có phương trình là

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9.$$

c) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M là $-2x+2y-z=0$.

d) Phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho độ dài đoạn $AB=2\sqrt{3}$ là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$.

Lời giải

a) Sai: $R=IM=\sqrt{9}=3$

b) Đúng: Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có dạng

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Suy ra $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

c) Đúng: Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M đi qua $M(-1;0;2)$ và nhận $\overrightarrow{IM}(-2;2;-1)$ làm vecto pháp tuyến là $-2x+2y-z=0$.

d) Sai: Gọi H là trung điểm AB suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên Ox nên $H(1;0;0)$

Khi đó $IH=\sqrt{13}\Rightarrow R=IA=\sqrt{IH^2+AH^2}=4$.

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S_1) tâm A, bán kính $R=1$ có phương trình là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$.

b) Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $\sqrt{50}$.

c) Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính có phương trình là

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

d) Bán kính R của mặt cầu (S_4) đi qua ba điểm A,B,C và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) là $R=\sqrt{26}$.

Lời giải

a) Sai: Mặt cầu (S_1) tâm A, bán kính $R=1$ có phương trình là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=1$

b) Đúng: $\overrightarrow{AC}=(1;0;7)\Rightarrow AC=\sqrt{50}$. Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $AC=\sqrt{50}$

c) Đúng: $\overrightarrow{AB}=(0;-5;5)\Rightarrow AB=5\sqrt{2}$. Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính nên có tâm $I\left(1;-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $R=\frac{AB}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ có phương trình là: $(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$.

d) Đúng: Gọi phương trình mặt cầu (S_4) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với tọa độ tâm $I(a;b;c)$.

Ta có: $I(a;b;c)\in(Oxy)\Rightarrow c=0$ $\begin{cases}A\in(S)\\B\in(S)\\C\in(S)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a-4b+d=-21\\-2a+6b+d=-11\\-4a-4b+d=-17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\d=-21\end{cases}$

Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4+1+0+21}=\sqrt{26}$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0),B(1;3;0),C(-1;0;3),D(1;2;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu $(S):(x-2)^2+y^2+z^2=25$ có tâm là điểm A.

b) Mặt cầu (S) tâm O bán kính OA có phương trình $(S):x^2+y^2+z^2=4$.

c) Mặt cầu (S) đường kính AC có phương trình $(S):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+z^2=\frac{9}{2}$.

d) Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bánh kính $R=6$.

Lời giải

a) Đúng: Mặt cầu $(S):(x-2)^2+y^2+z^2=25$ có tâm là điểm $A(2;0;0)$.

b) Đúng: Ta có $R=OA=2 \Rightarrow$ Mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=4$.

c) Sai: Tâm $I\left(\frac{1}{2};0;\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{AC}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (S):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$.

d) Sai: Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A,B,C,D. Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2=BI^2 \\ AI^2=CI^2 \\ AI^2=DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-3)^2+c^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a+1)^2+b^2+(c-3)^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=-3 \\ a-c=-1 \\ a-2b-3c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1)$$. Bán kính: $R=IA=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu là $(1;0;-2)$.

b) Diện tích mặt cầu bằng $16\pi(dvdt)$.

c) Điểm $A(1;2;3)$ nằm trong mặt cầu.

d) Số điểm chung của đường thẳng $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu (S) bằng 0.

Lời giải

a) Đúng: Tọa độ tâm I của mặt cầu là $\begin{cases} x_I=-2:-2=1 \\ y_I=0:-2=0 \\ z_I=4:-2=-2 \end{cases} \Rightarrow I(1;0;-2)$.

b) Đúng: $R=\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2-1}=2 \Rightarrow S_{mc}=4\pi R^2=4\pi.2^2=16\pi(dvdt)$.

c) Sai: $\overrightarrow{IA}=(0;2;5) \Rightarrow \left|\overrightarrow{IA}\right|=\sqrt{0^2+2^2+5^2}=\sqrt{29}>2 \Rightarrow$ điểm A nằm ngoài mặt cầu.

d) Đúng: Đường thẳng Δ đi qua $M(0;1;2)$ và nhận $\vec{u}=(2;1;-2)$ làm một vectơ chỉ phương.

$d(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{498}}{6}>R \Rightarrow \Delta$ không cắt $(S) \Rightarrow$ số điểm chung của đường thẳng Δ và mặt cầu (S) bằng 0.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=5$ và hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-1)$.

b) $|R-d|<2$ với d là khoảng cách từ tâm I mặt cầu (S) đến mặt phẳng $(P):x+y+1=0$.

c) Đường thẳng AB không cắt mặt cầu (S).

d) Điểm M thay đổi thuộc (S), biểu thức $2MA^2+3MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 105 (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Sai: Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

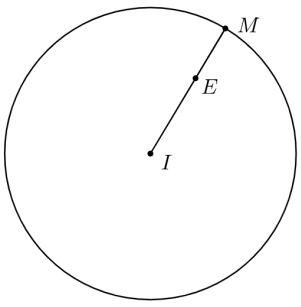
b) Đúng: Ta có khoảng cách từ tâm $I(0;0;1)$ đến mặt phẳng (P) là

$$d_{(I,(P))}=\frac{|1.0+1.0+0.1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ và } \left|R-d_{(I,(P))}\right|=\left|\sqrt{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\approx 1,53<2$$

c) Sai: Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-5;5;-5),\overrightarrow{AI}=(-2;2;-3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]=(-5;-5;0)$

Vậy $d_{(I,AB)}=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{\sqrt{(-5)^2+(-5)^2+0^2}}{\sqrt{(-5)^2+5^2+(-5)^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\approx 0,82<R$ nên đường thẳng AB cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

d) Sai: Mặt cầu có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.



Gọi E là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}=\vec{0}\Rightarrow E(-1;1;1),\overrightarrow{EB}=(-2;2;-2),\overrightarrow{EA}=(3;-3;3)$

Xét $P=2MA^2+3MB^2=2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2$

$=2ME^2+4\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EA}+2EA^2+3ME^2+6\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EB}+3EB^2$

$=5ME^2+2EA^2+3EB^2+2\overrightarrow{ME}.\left(\underbrace{2\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}}_{\vec{0}}\right)=5ME^2+2EA^2+3EB^2$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $\overrightarrow{IE}=(-1;1;0)\Rightarrow IE=\sqrt{2}<R$ suy ra E nằm trong mặt cầu nên

$ME_{\min} = R - IE = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ với $EB = 2\sqrt{3}, EA = 3\sqrt{3}$

Vậy $P_{\min} = 5ME_{\min}{}^2 + 2EA^2 + 3EB^2 = 5.\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2 + 2.\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3.\left(3\sqrt{3}\right)^2 \approx 108$

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 169$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có đường kính bằng 13.

b) Diện tích mặt cầu $S_{mc} = 338\pi$.

c) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 39 = 0$.

d) Mặt cầu (S) cắt trục Oz tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 24$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;-1)$ và bán kính $R = 13$.

a) Sai: Đường kính của mặt cầu (S) là $d = 2R = 2.13 = 26$.

b) Sai: Diện tích mặt cầu bằng $S_{mc} = 4.\pi.R^2 = 4.\pi.13^2 = 676\pi$.

c) Đúng: Ta có $d\left(I,(P)\right) = \dfrac{\left|1.4 - 2.3 - 2.(-1) - 39\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 13 = R$ nên mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng.

d) Đúng: Gọi H là hình chiếu của I lên trục Oz nên $H(0;0;-1)$ và H là trung điểm của AB

$\overrightarrow{IH} = (-4;-3;0) \Rightarrow IH = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = 5$.

Ta có $AH = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

Do H là trung điểm của AB nên $AB = 2IH = 2.12 = 24$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1;3;7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phù sóng trong không gian là $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+7)^2 = 9$.

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí điểm $A(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét là 8 km.

Lời giải

a) Sai: Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(1;3;7)$ bán kính 3 km mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=9$.

b) Đúng: Ta có: $IA=\sqrt{(2-1)^2+(2-3)^2+(7-7)^2}=\sqrt{2}<3$ nên điểm A nằm trong mặt cầu. Vì điểm A nằm trong mặt cầu nên người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $A(2;2;7)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Đúng: Ta có: $IB=\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2+(7-7)^2}=5>3$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Vậy người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{IB}(4;3;0)$; $IB=\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2+(7-7)^2}=5>3$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Phương trình đường thẳng BI dạng: $\begin{cases}x=1+4t\\y=3+3t\\z=7\end{cases}$.

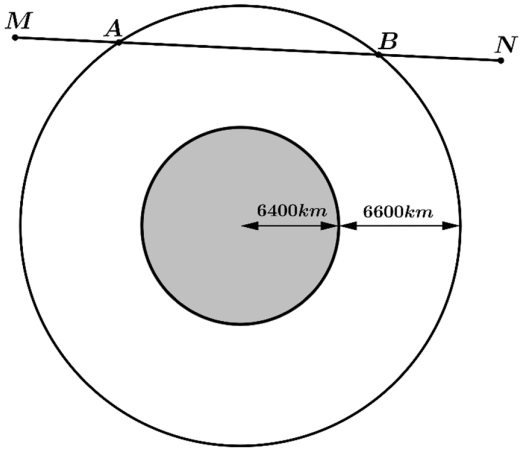
Gọi mặt cầu $(S)\cap BI\equiv E$ suy ra tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x=1+4t\\y=3+3t\\z=7\\(x-1)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}t=\dfrac{3}{5}\\x=\dfrac{17}{5}\\y=\dfrac{24}{5}\\z=7\end{cases}\Rightarrow E\left(\frac{17}{5};\frac{24}{5};7\right)\Rightarrow EB\approx 1,7\right.$$

$$\left.\begin{cases}t=-\dfrac{3}{5}\\x=-\dfrac{7}{5}\\y=\dfrac{6}{5}\\z=7\end{cases}\Rightarrow E\left(-\frac{7}{5};\frac{6}{5};7\right)\Rightarrow EB=8\right.$$

Vậy khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị kilômét là 8 km.

Câu 14: Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7 500 000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6 600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6 400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6;20;0)$ đến điểm $N(-6;-12;16)$.



a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \\ z = -4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3;-4;12)$.

c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18 900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị km).

d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.

Lời giải

a) Đúng: Vectơ chỉ phương của đường thẳng MN là $\overrightarrow{MN} = (-12;-32;16) = -4(3;8;-4)$.

Phương trình tham số của đường thẳng MN là: $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \\ z = -4t \end{cases}, t \in R$.

b) Sai: Để tìm vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi, ta cần tìm điểm giao của đường thẳng MN với mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 6,4 + 6,6 = 13$

Phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 = 13^2$.

Thay $x = 6 + 3t$; $y = 20 + 8t$ và $z = -4t$ vào phương trình mặt cầu ta được:

$(6 + 3t)^2 + (20 + 8t)^2 + (-4t)^2 = 13^2 \Leftrightarrow 89t^2 + 356t + 267 = 0$

Giải phương trình ta tìm được $t = -3$ hoặc $t = -1$.

Thay $t = -3$ và $t = -1$ vào phương trình tham số của đường thẳng MN ta được hai giao điểm của MN và mặt cầu là $(-3;-4;12)$ và $(3;12;4)$. Nhận thấy từ M đến N thì hoành độ có xu hương giảm dần nên điểm $A(3;12;4)$.

c) Đúng: Ta có $B(-3;-4;12)$

Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng là AB:

$AB=\sqrt{(-3-3)^2+(-4-12)^2+(12-4)^2}=2\sqrt{89}$ tương đương với ≈ 18900 km.

d) Đúng: Thời gian thiên thạch di chuyển từ M đến N là:

$MN=\sqrt{(6+6)^2+(-12-20)^2+(16-0)^2}=4\sqrt{89}=2AB$ nên do đó $t=\dfrac{MN}{AB}.3\approx 6$ (phút).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm $M(1;0;1)$, $N(1;0;0)$, $P(2;1;0)$ và $Q(1;1;1)$ có dạng $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$; $a,b\in\mathbb{N}$ và nguyên tố cùng nhau. Khi đó giá trị của biểu thức $S=a^b$ bao nhiêu?

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, $(a^2+b^2+c^2-d>0)$.

Do (S) đi qua bốn điểm *M, N, P, Q* nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}-2a-2c+d=-2\\-2a+d=-1\\-4a-2b+d=-5\\-2a-2b-2c+d=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\b=\dfrac{1}{2}\\c=\dfrac{1}{2}\\d=2\end{cases}.$$ Vậy $R=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó giá trị của biểu thức $S=a^b=3^2=9$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ nằm trên đường thẳng $(d):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P):2x-z-4=0$, $(Q):x-2y-2=0$. Tổng $P=a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi tâm mặt cầu là $I(a;a+1;a+2)\in(d)$. Do mặt cầu tiếp xúc với (P) và (Q) nên $d(I;(P))=d(I;(Q))$.

Suy ra $\dfrac{|2a-a-2-4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|a-2(a+1)-2|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow|a-6|=|-a-4|\Leftrightarrow a=1$.

Tâm mặt cầu là $I(1;2;3)\Rightarrow P=6$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Diện tích của mặt cầu đó có kết quả bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trục)

Lời giải

Ta dễ dàng kiểm chứng được Δ_1 và Δ_2 chéo nhau

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 và có bán kính nhỏ nhất. Suy ra mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính AB (với AB là đoạn vuông góc chung của Δ_1,Δ_2)

Ta có: Δ_1 đi qua $M(4;1;-5)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=(3;-1;-2)$

Δ_2 đi qua $N(2;-3;0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_{\Delta_2}}=(1;3;1)$ suy ra $d(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\overrightarrow{u_{\Delta 2}}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\overrightarrow{u_{\Delta 2}}\right]\right|}=2\sqrt{6}$

Vậy bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{d(\Delta_1,\Delta_2)}{2}=\sqrt{6}$. Diện tích mặt cầu (S) là $S=\pi R^2=6\pi\approx 18.8$

Câu 4: Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-3}{3}$.
Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt trong đó $M(x_M;y_M;z_M)$ với $x_M>0$
Giá trị biểu thức $T=x_M^2+y_M^2+z_M^2$ bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Thay tọa độ tâm $I(1;-2;3)$ vào phương trình đường thẳng d, ta được: $-\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{2}{1}\neq 0$.

Nên đường thẳng d không đi qua tâm $I(1;-2;3)$.

Ta có đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+2t\\y=-4+t,(t\in R)\\z=3+3t\end{cases}$ với $M\in d\Leftrightarrow M(2+2t;-4+t;3+3t)$

Thay điểm $M(2+2t;-4+t;3+3t)$ vào phương trình mặt cầu (S), ta được:

$\Leftrightarrow(2+2t-1)^2+(-4+t+2)^2+(3+3t-3)^2=25\Leftrightarrow(2t+1)^2+(t-2)^2+(3t)^2=25$
$\Leftrightarrow 14t^2+5=25$

$$\Leftrightarrow t^2=\frac{10}{7}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\sqrt{70}}{7}\Rightarrow M\left(2+\dfrac{2\sqrt{70}}{7};-4+\dfrac{\sqrt{70}}{7};3+\dfrac{3\sqrt{70}}{7}\right)\\t=-\dfrac{\sqrt{70}}{7}\Rightarrow N\left(2-\dfrac{2\sqrt{70}}{7};-4-\dfrac{\sqrt{70}}{7};3-\dfrac{3\sqrt{70}}{7}\right)\end{array}\right.$$

Vậy $x_M^2+y_M^2+z_M^2=\left(2+\frac{2\sqrt{70}}{7}\right)^2+\left(-4+\frac{\sqrt{70}}{7}\right)^2+\left(3+\frac{3\sqrt{70}}{7}\right)^2\approx 70,51$

Câu 5: Cho 3 điểm $M(2;3;3),N(2;-1;-1),P(-2;-1;3)$ và mặt phẳng $(\alpha):2x+3y-z+2=0$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm M,N,P và có tâm thuộc mặt phẳng (α) có bán kính bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với

$a^2+b^2+c^2-d>0.$

Mặt cầu qua $M,N,P\Rightarrow\begin{cases}4a+6b+6c-d=22\\4a-2b-2c-d=6\\4a+2b-6c+d=-14\end{cases}$

Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)\Rightarrow 2a+3b-c+2=0.$

Giải hệ ta được: $\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=3\end{cases}\Rightarrow I(2;-1;3).$

Bán kính của mặt cầu là: $R=IM=4$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x-2y-z-8=0$ có phương trình $(C):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c+2d$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu là: $r=d(I;(P))=\frac{|2-4+1-8|}{\sqrt{4+4+1}}=3$.

Phương trình mặt cầu $(C):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$ suy ra $a=1;\ b=2;\ c=-1;\ d=-3.$

Hay $a+b+c+2d=1+2+(-1)+2.(-3)=-4$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;2)$ và có một tiếp tuyến là đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Tính $T=a+b+c-d$.

Lời giải

Ta có đường thẳng $\Delta:\begin{cases}M_0(1;1;0)\in\Delta\\\vec{u}=(1;1;-1)\end{cases}$. Suy ra $\overrightarrow{MM_0}=(0;-2;-2)$.

Vì Δ là một tiếp tuyến của mặt cầu (S) nên $R = d(M,\Delta) = \dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MM_0}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$.

Khi đó phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=8$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z+6=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=2 \\ d=6 \end{cases} \Rightarrow T=a+b+c-d=0.$$

Câu 8: Trong không gian với tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(C):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=11$. Đường thẳng d là tiếp tuyến của mặt cầu (C) tại điểm $A(2;1;0)$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=(-1;b;c)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. Tính giá trị $b+c$ (kết quả làm tròn đến hang phần trăm).

Lời giải

Mặt cầu (C) có tâm $I=(1;2;-3)$, khi đó $\overrightarrow{IA}=(1;-1;3)$

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;2;1)$

Do d là tiếp tuyến của mặt cầu tại điểm $A(2;1;0)$ nên $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{u_d}=0 \Leftrightarrow -b+3c-1=0$

Lại có d vuông góc với đường thẳng Δ nên $\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{u_d}=0 \Leftrightarrow 2b+c-1=0$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} -b+3c-1=0 \\ 2b+c-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{2}{7} \\ c=\dfrac{3}{7} \end{cases}$. Vậy $b+c=\dfrac{5}{7}\approx 0,71$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(-2;0;0)$; $B(0;-2;0)$; $C(0;0;-2)$. D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc. $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tứ diện $ABCD$. Tính $S=a+b+c$.

Lời giải

Gọi $D(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{AD}=(x+2;y;z)$; $\overrightarrow{BD}=(x;y+2;z)$; $\overrightarrow{CD}=(x;y;z+2)$.

Vì DA,DB,DC đôi một vuông góc nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD}=0 \\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}=0 \\ \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CD}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2)+y(y+2)+z^2=0 \\ x(x+2)+y^2+z(z+2)=0 \\ x^2+y(y+2)+z(z+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=-\frac{4}{3}.$$

$I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b+2)^2 + c^2 \\ (a+2)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (c+2)^2 \\ (a+2)^2 + b^2 + c^2 = \left(a+\frac{4}{3}\right)^2 + \left(b+\frac{4}{3}\right)^2 + \left(c+\frac{4}{3}\right)^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = c \\ 4a + 4 = 8a + \frac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{-1}{3}. \text{ Vậy } a + b + c = -1.$$

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(-2;3;0)$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$. Tính bán kính của mặt cầu (S).

Lời giải

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2m = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;0)$ và bán kính $R = \sqrt{13 - 2m}$ với $m < \frac{13}{2}$.

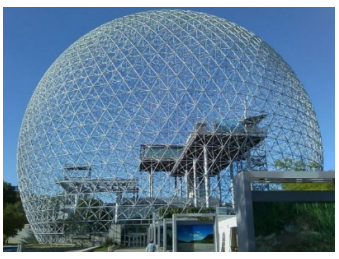
Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(4;3;3)$ và có một vtcp là $\vec{u} = (2;1;2)$.

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng Δ bằng: $d = d(I;\Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = 3$.

Vì đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$ nên ta có $d^2 + \frac{AB^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow 3^2 + 16 = 13 - 2m \Leftrightarrow m = -6$. (thỏa điều kiện).

Suy ra bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{13 - 2.(-6)} = 5$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, một vòm được thiết kế có bề mặt là mặt cầu tâm $I(1;2;20)$, bán kính bằng 50 m và có đáy nằm trên mặt phẳng (Oxy). Chiều cao của vòm là bao nhiêu? (biết đơn vị của hệ trục tọa độ là mét)



Lời giải

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Oxy) là 20 m.

Vậy chiều cao của vòm là $20 + 50 = 70$ m.

Câu 12: Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật trong không gian. Cách thức hoạt động của GPS như sau: Trong cùng một thời điểm, vị trí M của một vật sẽ được xác định bằng 4 vệ tinh cho trước, các vệ tinh này có gắn máy thu tín hiệu, bằng cách so sánh thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận tín hiệu phản hồi thì sẽ xác định được khoảng cách từ các vệ tinh đến vị trí M. Như vậy, vị trí M là giao điểm của 4 mặt cầu có tâm là 4 vệ tinh đã cho. Giả sử trong không gian $Oxyz$, 4 vệ tinh có tọa độ là $A(-1;6;3)$, $B(4;8;1)$, $C(9;6;7)$, $D(-15;18;7)$. Biết khoảng cách từ M đến các vệ tinh lần lượt là $MA=6$, $MB=7$, $MC=12$, $MD=24$. Khi đó tọa độ điểm $M(x_M;y_M;z_M)$. Tính giá trị biểu thức $T=x_M+y_M+z_M$.

Lời giải

Gọi $M(a;b;c)$. Khi đó ta có:

$$(a+1)^2+(b-6)^2+(c-3)^2=36\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2a-12b-6c+10=0 \quad (1)$$

$$(a-4)^2+(b-8)^2+(c-1)^2=49\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-8a-16b-2c+32=0 \quad (2)$$

$$(a-9)^2+(b-6)^2+(c-7)^2=144\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-18a-12b-14c+22=0 \quad (3)$$

$$(a+15)^2+(b-18)^2+(c-7)^2=576\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+30a-36b-14c+22=0 \quad (4)$$

Giải hệ gồm 4 phương trình trên ta được $a=1;b=2;c=-1$ nên $M(1;2;-1)$.

Vậy $T=1+2+(-1)=2$.

----------HẾT----------

Dạng 3: Vị trí tương đối liên quan đến mặt cầu và ứng dụng thực tế

Phương pháp: Có ba trường hợp như sau:

	Mặt cầu	
Mặt phẳng	Tính $d\left(I;(P)\right)=\dfrac{\left\|ax_I+by_I+cz_I+d\right\|}{\left\|\vec{n}_{(P)}\right\|}$ và so sánh với bán kính R	
	$d\left(I;(P)\right)>R$	Mặt phẳng không cắt mặt cầu
	$d\left(I;(P)\right)=R$	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại M
	$d\left(I;(P)\right)<R$	Mặt phẳng cắt mặt cầu
Đường thẳng	Tính $d\left(I;d\right)=\dfrac{\left\|\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ và so sánh $d\left(I;(P)\right)>R$ với bán kính R	
	$d\left(I;d\right)>R$	Đường thẳng không cắt mặt cầu
	$d\left(I;d\right)=R$	Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu
	$d\left(I;d\right)<R$	Đường thẳng cắt mặt cầu
Điểm	Tính IM và so sánh với bán kính R	
	$IM>R$	Điểm M nằm ngoài mặt cầu
	$IM=R$	Điểm M nằm trên mặt cầu
	$IM<R$	Điểm M nằm trong mặt cầu

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+3y+z+17=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-8=0$. Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$, bán kính $R=\sqrt{14}$ và $d\left(I,(P)\right)=\dfrac{\left|2-6+1+17\right|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\sqrt{14}$.

Vậy mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Bài tập 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+4=0$. Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$, bán kính $R=\sqrt{4}=2$ và $d\left(I,(P)\right)=\dfrac{\left|1+2+3+4\right|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{3}}>R$

Vậy mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ và đường thẳng có phương trình $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$. Tìm vị trí tương đối của đường thẳng Δ và mặt cầu (S)

Lời giải

Mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ có tâm $I(-1;2;0)$ bán kính $R=3$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên Δ thì ta có $H(1+2t;2-2t;3+t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $\overrightarrow{IH}=(2+2t;-2t;3+t)$. Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(2;-2;1)$.

Ta có: $\overrightarrow{IH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 4+4t+4t+3+t=0\Leftrightarrow t=-\frac{7}{9}$.

$\overrightarrow{IH}=\left(\frac{4}{9};\frac{14}{9};\frac{20}{9}\right)\Rightarrow IH=\sqrt{\frac{16}{81}+\frac{196}{81}+\frac{400}{81}}=\frac{2\sqrt{17}}{3}\Rightarrow d(I;\Delta)=\frac{2\sqrt{17}}{3}<R$

Vậy đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=4+2t\\y=3+t\\z=3+2t\end{cases},t\in\mathbb{R}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;0)$ và đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn thẳng $AB=8$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow IH\perp AB,\ AH=4$.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(4;3;3)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{IM}=(6;0;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(-3;-6;6)$

$\Rightarrow IH=d(I;d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=3$.

Khi đó: $R^2=IA^2=IH^2+AH^2=25\Rightarrow R=5$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;0)$ và bán kính $R=5$ nên có phương trình là:

$$(x+2)^2+(y-3)^2+z^2=25.$$

Bài tập 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+4}{-5}$ và $d':\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-4}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d),(d')$.

Lời giải

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=(2;3;-5)$.

Đường thẳng d' có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_{d'}}=(3;-2;-1)$.

Gọi $M\in d\Rightarrow M(2+2m;3+3m;-4-5m)$ và $N\in d'\Rightarrow N(-1+3n;4-2n;4-n)$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{MN}=(-3+3n-2m;1-2n-3m;8-n+5m)$.

MN là đường vuông góc chung của d và d' khi và chỉ khi $\begin{cases}MN\perp d\\MN\perp d'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_d}=0\\\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_{d'}}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3+3n-2m)+3.(1-2n-3m)-5(8-n+5m)=0 \\ 3(-3+3n-2m)-2.(1-2n-3m)-1(8-n+5m)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -38m+5n=43 \\ -5m+14n=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases}$.

Suy ra $M(0;0;1)$, $N(2;2;3)$.

Gọi I là trung điểm của suy ra $I(1;1;2)$ và $IM=IN=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$.

Khi đó mặt cầu tâm I, bán kính $R=\sqrt{3}$ tiếp xúc với hai đường thẳng d, d' lần lượt tại M và N

Do MN là khoảng cách giữa hai đường thẳng d, d' nên mặt cầu đường kính MN là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với hai đường thẳng d, d'.

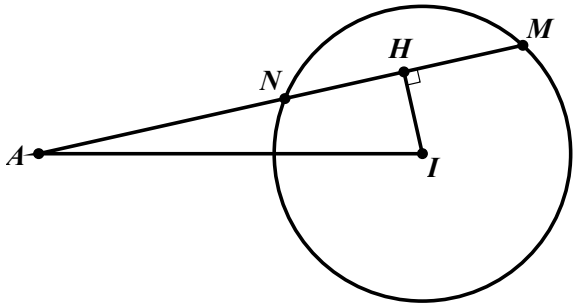
Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$.

Bài tập 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M,N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=3$.

$AI=\sqrt{34}>R \Rightarrow$ A nằm ngoài mặt cầu (S).



Do hai điểm M,N nằm ở vị trí hai đầu một dây cung nên để $S_{\min}$ thì N nằm giữa A và M.

Gọi H là trung điểm $MN \Rightarrow IH \perp MN, NH=\frac{1}{2}MN$.

$S=4(AH-NH)+AH+NH=5AH-3NH$

$S=5\sqrt{AI^2-IH^2}-3\sqrt{R^2-IH^2}=5\sqrt{34-x^2}-3\sqrt{9-x^2}, x=IH$.

Xét hàm số $f(x)=5\sqrt{34-x^2}-3\sqrt{9-x^2}, (0\le x<3)$.

Đạo hàm: $f'(x)=\frac{-5x}{\sqrt{34-x^2}}+\frac{3x}{\sqrt{3^2-x^2}}=x\left(\frac{-5}{\sqrt{34-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{3^2-x^2}}\right)$.

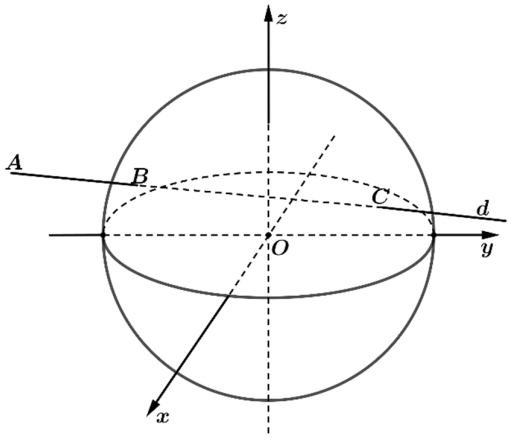
Xét $\left(\frac{-5}{\sqrt{34-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\right)>0 \Leftrightarrow 5\sqrt{9-x^2}<3\sqrt{34-x^2}$

$\Leftrightarrow 225-25x^2<9.34-9x^2 \Leftrightarrow 16x^2+81>0$ (luôn đúng).

Suy ra $f'(x)\ge 0, \forall x\in[0;3), f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;3)$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3)} f(x)=f(0)=5\sqrt{34}-9$.

Bài tập 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688;-185;8)$, chuyển động theo theo đường thẳng d có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu. Hãy xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.



Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(-688;-185;8)$ và nhận $\vec{u}=(91;75;0)$ làm véctơ chỉ phương là $\begin{cases} x=-688+91t \\ y=-185+75t \\ z=8 \end{cases}$.

Gọi B là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.

Vì $B\in d \Rightarrow B(-688+91t;-185+75t;8)$.

Vì B là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa nên

$$OB=417 \Leftrightarrow \sqrt{(-688+91t)^2+(-185+75t)^2+8^2}=417$$

$$\Leftrightarrow 13906t^2-152966t+333744=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=8 \end{array}\right.$$

Với $t=3 \Rightarrow B(-415;40;8) \Rightarrow AB\approx 353,77$ km

Với $t=8 \Rightarrow B(-88;415;8) \Rightarrow AB\approx 848,53$ km

Do $353,77<848,53$ vị trí máy bay xuất hiện sớm nhất là $B(-415;40;8)$.

Bài tập 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21;35;50)$ và ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km. Nếu người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(21;35;50)$ đến vị trí $D(5121;658;0)$. Hãy tìm vị trí cuối cùng trên đoạn ID sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng (kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng là: $(x-21)^2+(y-35)^2+(z-50)^2=4000^2$.

Ta có $\left|\overrightarrow{ID}\right|=\sqrt{26400629}>4000$ nên điểm D nằm ngoài mặt cầu.

Đường thẳng ID đi qua điểm $I(21;35;50)$ và nhận $\overrightarrow{ID}=(5100;623;-50)$ làm véctơ chỉ phương nên phương trình tham số của ID là $\begin{cases}x=21+5100t\\y=35+623t\\z=50-50t\end{cases}$

Giả sử H là điểm cuối cùng trên ID sao cho người đi đường có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng. Khi đó $IH=R$.

Do $H\in ID\Rightarrow H(21+5100t;35+623t;50-50t)\Rightarrow\overrightarrow{IH}=(5100t;623t;-50t)$.

Do $IH=R\Rightarrow\sqrt{(5100t)^2+(623t)^2+(-50t)^2}=4000\Leftrightarrow\sqrt{26400629t^2}=4000\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\approx0,78\\t\approx-0,78\end{array}\right.$

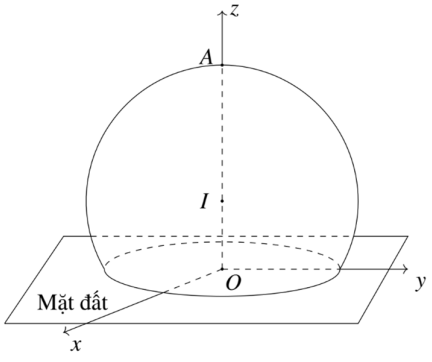
Với $t\approx0,78\Rightarrow H(3999;520,94;11)$. Nhận thấy $\overrightarrow{IH}$ cùng hướng với $\overrightarrow{ID}$ nên H thuộc đoạn thẳng ID.

Với $t\approx-0,78\Rightarrow H(-3957;-450,94;89)$. Nhận thấy $\overrightarrow{IH}$ không cùng hướng với $\overrightarrow{ID}$ nên H không thuộc đoạn thẳng ID.

Vậy vị trí cần tìm là $H(3999;520,94;11)$

Bài tập 9: Ericsson Globe (Thuỵ Điển) là toà nhà bán cầu lớn nhất trên thế giới (năm 2020),với hình dạng một quả cầu màu trắng có đường kính 110 m và chiều cao bên trong 85 m, nó có đủ chỗ ngồi cho 16 000 khán giả của các buổi biểu diễn hoà nhạc hoặc 13 850 khán giả của các trận đấu khúc côn cầu trên băng. Giả sử ta biểu diễn mô phỏng của toà nhà Ericsson Globe trong hệ trục toạ độ *Oxyz* bởi một mặt cầu có tâm *I*, đường kính 110 m và *OA* = 85 m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.





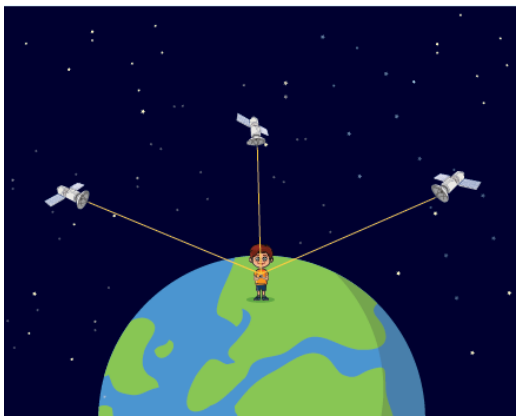
Lời giải

Theo giả thiết đường kính 110 m nên bán kính $R = 55\,\text{m}$.

Ta có $OI = OA - IA = 85 - 55 = 30$ suy ra $I(0;0;30)$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2 + y^2 + (z-30)^2 = 55^2$

Bài tập 10: Giả sử Trái Đất có dạng hình cầu bán kính bằng $6,4.10^6$ m. Bạn An đang đứng trên mặt đất. Có 3 vệ tinh báo về máy chủ tiếp nhận thông tin rằng vệ tinh thứ nhất đang cách An 3.10^6 m, vệ tinh thứ hai đang cách An 4.10^6 m và vệ tinh thứ ba đang cách An 5.10^6 m. Biết rằng trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước với O là tâm Trái Đất (1 đơn vị $=10^6$ m), tại thời điểm vệ tinh thông báo về máy chủ thì toạ độ của các vệ tinh lần lượt là $I_1(4;4;6)$, $I_2(8;4;3)$ và $I_3(4;9;3)$. Hãy tìm tọa độ vị trí của bạn An (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Gọi vị trí bạn An là $A(x; y; z)$ thì An chính là giao điểm của bốn mặt cầu: Trái Đất và ba mặt cầu tâm lần lượt I_1, I_2, I_3 có bán kính lần lượt là khoảng cách từ các vệ tinh đến An

Ta có phương trình mặt cầu của trái đất là $x^2 + y^2 + z^2 = 6,4^2 \approx 41$.

Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ nhất là $(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 3^2 = 9$.

Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ hai là $(x-8)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 4^2 = 16$.

Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ ba là $(x-4)^2 + (y-9)^2 + (z-3)^2 = 5^2 = 25$.

Ta có hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6,4^2 \approx 41 \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 9 \\ (x-8)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 16 \\ (x-4)^2 + (y-9)^2 + (z-3)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6,4^2 \approx 41 \\ 8x + 8y + 12z = 100 \\ 16x + 8y + 6z = 114 \\ 8x + 18y + 6z = 122 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$

Vậy toạ độ bạn An là $A(4;4;3)$ với (1 đơn vị $=10^6$ m).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Trong ba điểm có tọa độ lần lượt là $(0;0;0),(1;2;3),(2;0;6)$ thì có bao nhiêu điểm nằm trên mặt cầu (S)?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Thay tọa độ ba điểm vào phương trình mặt cầu, ta có:

$0^2+0^2+0^2-2.0-4.0-6.0=0$ (Đúng) $\Rightarrow O(0;0;0)\in(S)$.

$1^2+2^2+3^2-2.1-4.2-6.3=0$ (Sai) $\Rightarrow A(1;2;3)\notin(S)$.

$2^2+0^2+6^2-2.2-4.0-6.6=0$ (đúng) $\Rightarrow B(2;0;6)\in(S)$.

Vậy trong ba điểm đề cho, có hai điểm nằm trên mặt cầu (S).

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Trong ba điểm có tọa độ lần lượt là $(0;0;0)$, $(1;2;3)$ và $(2;0;6)$ thì có bao nhiêu điểm nằm trên mặt cầu.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Điểm nằm trên mặt cầu thỏa mãn phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.

Xét hai điểm $(0;0;0)$ và $(2;0;6)$ thỏa mãn.

Xét điểm $(1;2;3)$ ta có $1^2+2^2+3^2-2.1-4.2-6.3=-14\neq 0$ (không thỏa mãn).

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ trong các điểm có tọa độ lần lượt là $(0;0;0)$, $(1;2;3)$, $(2;0;6)$ thì có bao nhiêu điểm trên mặt cầu.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ (1)

Xét điểm $(0;0;0)$ ta có $0^2+0^2+0^2-2.0-4.0-6.0=0$ suy ra điểm $(0;0;0)$ nằm trên mặt cầu (S).

Xét điểm $(1;2;3)$ ta có $1^2+2^2+3^2-2.1-4.2-6.3=-14\neq 0$ suy ra điểm $(1;2;3)$ không nằm trên mặt cầu (S).

Xét điểm $(2;0;6)$ ta có $2^2+0^2+6^2-2.2-4.0-6.6=0$ suy ra điểm $(2;0;6)$ nằm trên mặt cầu (S).

Vậy có 2 điểm nằm trên mặt cầu.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S):(x-3)^2+y^2+z^2=9$ và $(S'):(x+2)^2+y^2+z^2=4$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt cầu tiếp xúc ngoài. **B.** Hai mặt cầu tiếp xúc trong.
C. Hai mặt cầu không có điểm chung. **D.** Hai mặt cầu có nhiều hơn một điểm chung.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;0;0), R=3$ còn mặt cầu (S') có tâm $I'(-2;0;0), R'=2$

Do $II'=5=R+R'$ nên hai mặt cầu tiếp xúc ngoài.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$ và ba điểm $A(1;0;0), B(2;1;3), C(0;2;-3)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn biểu thức $MA^2+2.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$ là đường tròn cố định, bán kính r của đường tròn này là.

A. $r=\sqrt{6}$. **B.** $r=3$. **C.** $r=6$. **D.** $r=\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$ khi đó $MA^2+2.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2+2.\left[(2-x).(-x)+(1-y).(2-y)+(3-z).(-3-z)\right]=8$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=9 \Rightarrow M\in(S_1)$.

Mặt cầu $(S):I(3;3;2), R=3$. Mặt cầu $(S_1):I_1(1;1;0), R_1=3$.

Ta có $II_1=2\sqrt{3}<R+R_1 \Rightarrow (S)$ cắt cầu (S_1) theo giao tuyến là một đường tròn.

Đường tròn này nằm trên mặt phẳng

$(P):(x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2-\left[(x-1)^2+(y-1)^2+z^2\right]=0 \Leftrightarrow x+y+z-5=0$.

$d(I;(P))=\sqrt{3} \Rightarrow r=\sqrt{R^2-d^2(I;(P))}=\sqrt{6}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=16$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. Điểm $Q(-2;-1;-1)$. **B.** Điểm $N(-2;-1;3)$. **C.** Điểm $M(2;1;-3)$. **D.** Điểm $P(2;1;1)$.

Lời giải

Thay tọa độ điểm $P(2;1;1)$ vào phương trình mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=16$ (thỏa mãn). Ta có mặt cầu (S) đi qua điểm P.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$. Điểm nào dưới đây thuộc mặt cầu (S)?

A. $B(3;1;1)$. **B.** $A(3;-2;2)$. **C.** $C(3;-2;3)$. **D.** $D(1;0;4)$.

Lời giải

Ta thấy $(3-2)^2+(-2+1)^2+(3-1)^2=6 \Rightarrow C(3;-2;3)\in(S)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. Điểm nào trong các điểm bên dưới thuộc mặt cầu (S)?

A. $K(5;-3;1)$. **B.** $J(-2;3;-1)$. **C.** $H(-7;-3;1)$. **D.** $I(2;-3;1)$.

Lời giải

Thay tọa độ các điểm vào phương trình mặt cầu (S) ta có:

Điểm $K(5;-3;1)\in(S)$ vì $(5-2)^2+(-3+3)^2+(1-1)^2=9 \Leftrightarrow 9=9$ (luôn đúng).

Điểm $J(-2;3;-1)\notin(S)$ vì $(-2-2)^2+(3+3)^2+(-1-1)^2=9 \Leftrightarrow 56=9$ (vô lý).

Điểm $H(-7;-3;1)\notin(S)$ vì $(-7-1)^2+(-3-2)^2+(1-3)^2=9 \Leftrightarrow 93=9$ (vô lý).

Điểm $I(2;-3;1)\notin(S)$ vì $(2-1)^2+(-3-2)^2+(1-3)^2=9 \Leftrightarrow 30=9$ (vô lý).

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, gọi I là tâm của mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4z-1=0$. Độ dài đoạn OI (với O là gốc tọa độ) bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $I(-1;0;2)$. Suy ra $OI=\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$. Có bao nhiêu điểm P thuộc (S) mà tiếp diện của (S) tại P cắt các trục Ox, Oz tương ứng tại các điểm $E(a;0;0), F(0;0;b)$ sao cho a, b là các số nguyên dương và $\widehat{EPF}=90^\circ$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;4)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $d(I,(Oxz))=\dfrac{|-2|}{1}=2=R$ nên (S) tiếp xúc với (Oxz) tại $H(1;0;4)$.

Dễ thấy $EH=EP, FH=FP$ (do tính chất các tiếp tuyến kẻ từ 1 điểm đến mặt cầu).

Suy ra $\Delta EPF=\Delta EHF$ (c – c – c) nên $\widehat{EHF}=\widehat{EPF}=90^\circ$ (2 góc tương ứng) hay $\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{HF}=0$.

Khi đó $(a-1;0;-4).(-1;0;b-4)=0 \Leftrightarrow -a+1-4b+16=0 \Leftrightarrow a+4b-17=0$.

Vì a nguyên dương nên $a=17-4b\ge 0\Rightarrow b\le \frac{17}{4}\Rightarrow b\in\{1;2;3;4\}$.

Các cặp $(a;b)$ thỏa mãn là $(13;1),(9;2),(5;3),(1;4)$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$: (S_1) có tâm $I\left(0,0,\frac{21}{2}\right)$, bán kính $r_1=6$ và (S_2) có tâm $J(0,0,1)$, bán kính $r_2=\frac{9}{2}$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M(x,y,z)$ với x,y,z nguyên thuộc phần giao của hai khối cầu?

A. 11. **B.** 13. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Ta có phương trình mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+\left(z-\frac{21}{2}\right)^2=36$.

Và phương trình mặt cầu $(S_2): x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{81}{4}$.

Điểm $M(x,y,z)$ thuộc giao của hai khối cầu $(S_1),(S_2)$ nên toạ độ điểm $M(x,y,z)$ là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+\left(z-\frac{21}{2}\right)^2\le 36 \\ x^2+y^2+(z-1)^2\le\frac{81}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2\le\frac{81}{4} \\ z=5\end{cases}.$$

Từ đó suy ra $x^2+y^2+(5-1)^2\le\frac{81}{4}\Leftrightarrow x^2+y^2\le\frac{17}{4}$.

Do $x,y\in\mathbb{Z}$ và $x^2+y^2\le\frac{17}{4}$ suy ra $\begin{cases}x=0\\y=\pm1\end{cases};\begin{cases}x=\pm1\\y=0\end{cases};\begin{cases}x=\pm1\\y=\pm1\end{cases};\begin{cases}x=0\\y=\pm2\end{cases};\begin{cases}x=\pm2\\y=0\end{cases};\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$.

Vậy có 13 điểm $M(x,y,z)$ với x,y,z nguyên thuộc phần giao của hai khối cầu.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;5;2)$ và $B(5;13;10)$. Có bao nhiêu điểm $I(a;b;c)$ với a,b,c là các số nguyên sao cho có mặt cầu tâm I đi qua A,B và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy)?

A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4;8;8)\Rightarrow AB:\begin{cases}x=1+t\\y=5+2t\\z=2+2t\end{cases}$.

Gọi M là trung điểm của $AB\Rightarrow M(3;9;6)\Rightarrow$ Mặt phẳng trung trực của AB là

$(\alpha): x-3+2(y-9)+2(z-6)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-33=0$.

$I \in (\alpha) \Rightarrow a+2b+2c-33=0 \Leftrightarrow a=33-2b-2c \Rightarrow a$ là số nguyên lẻ.

Gọi $J = AB \cap (Oxy) \Rightarrow J(0;3;0) \Rightarrow JA=3, JB=15$.

Gọi C là tiếp điểm của mặt cầu và $(Oxy) \Rightarrow C(a;b;0)$.

Ta có: $JA.JB = JC^2 \Rightarrow JC^2 = 45 \Rightarrow C$ thuộc đường tròn tâm $\left(J, 3\sqrt{5}\right)$.

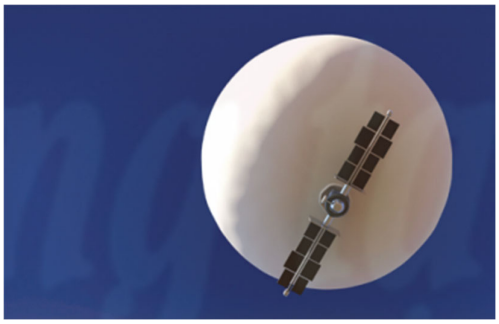
Xét trong mặt phẳng (Oxy), phương trình của $\left(J, 3\sqrt{5}\right)$: $a^2+(b-3)^2=45 \Rightarrow a^2 \le 45$.

Do $a,b,c \in \mathbb{Z}$ và a lẻ nên ta có: $a^2=1 \Rightarrow (b-3)^2=44$ (loại);

$a^2=9 \Rightarrow (b-3)^2=36$ (thỏa mãn); $a^2=25 \Rightarrow (b-3)^2=20$ (loại).

Vậy có 4 bộ $(a;b;c)$ thỏa mãn.

Câu 13: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, bề mặt của một quả bóng thám không dạng hình cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-200x-600y-4000z+4099900=0$. Tìm tâm và bán kính mặt cầu.



A. Tâm $I(100;300;2000)$, bán kính $r=100$.

B. Tâm $I(-100;-300;-2000)$, bán kính $r=10$.

C. Tâm $I(100;300;2000)$, bán kính $r=10$.

D. Tâm $I(-100;-300;-2000)$, bán kính $r=100$.

Lời giải

Tâm của mặt cầu là $I(100;300;2000)$ và bán kính $r=\sqrt{100^2+300^2+2000^2-4099900}=10$ m.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-4;0;2)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(0;-1;4)$

Lời giải

Ta có $IA=3>2; IB=\sqrt{3}<2, IC=\sqrt{13}>2, ID=6>2$.

Vậy người đứng tại điểm B nằm trong mặt cầu nên sẽ sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì **không** sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-5;0;3)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(-7;-2;3)$

Lời giải

Ta có $IA=\sqrt{3}<2; IB=\sqrt{3}<2, IC=\sqrt{13}>2, ID=\sqrt{3}<2$.

Vậy người đứng tại điểm C nằm ngoài mặt cầu nên sẽ không sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(C):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

b) Điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C).

c) Điểm $C(0;2;1)$ nằm trên mặt cầu (C).

d) Với điểm $D(2;1;-1)$, ta có $ID<4$.

Lời giải

a) Đúng: Tâm $I(1;-2;0)$.

Ta có $(1-1)^2+(2+2)^2+(-1)^2=17>16 \Rightarrow$ điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

b) Đúng: Ta có $(0-1)^2+(0+2)^2+1^2=6<16 \Rightarrow$ điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C).

c) Sai: Ta có $(0-1)^2+(2+2)^2+1^2=18>16 \Rightarrow$ điểm $C(0;2;1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

d) Đúng: Ta có $ID=\sqrt{(2-1)^2+(1+2)^2+(-1)^2}=\sqrt{11}<4$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ có tâm I và bán kính R. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$.

b) Điểm $A(0;2;-3)$ nằm trong mặt cầu.

c) Điểm $J(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.

d) Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu $(S'):x^2+y^2+(z-1)^2=3$ bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Sai: Phương trình mặt cầu tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$ là $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$.

b) Sai: Ta có: $(0+1)^2+(2-1)^2+(-3+2)^2=3=R=3$, do đó điểm A nằm trên mặt cầu.

c) Đúng: Ta có: $(1+1)^2+(2-1)^2+(3+2)^2=30>R=3$, do đó điểm J nằm ngoài mặt cầu.

Và $\overrightarrow{IJ}=(0;3;1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IJ}\right|=\sqrt{0^2+3^2+1^2}=\sqrt{10}$

d) Sai: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$,

Mặt cầu (S') có tâm $K(0;0;1)$,

Khi đó $\overrightarrow{IK}=(-1;1;-1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IK}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}\neq\sqrt{2}$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có tâm I và bán kính R. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=2$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1;1;2)$.

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0;1;-2)$ và $B(2;-1;-4)$.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x+y-z-2=0$.

Lời giải

a) Đúng: Mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có $a=1$, $b=-2$, $c=0$, $d=1$

$\Rightarrow$ tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=2$.

b) Sai: Xét $M(1;1;2)$: $1^2+1^2+2^2-2.1+4.1+1=9$ do đó M không nằm trên (S)

Vậy bán kính mặt cầu (S) không là đoạn IM.

c) Sai: Mặt cầu (S) nhận AB làm đường kính thì $\frac{AB}{2}=R$ và tâm I là trung điểm của AB.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;-2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{3}\Rightarrow\frac{AB}{2}=\sqrt{3}\neq R=2$

d) Sai: Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x+y-z-2=0\Leftrightarrow R=d\left(I,(P)\right)$.

Ta có $d\left(I,(P)\right)=\frac{\left|1+(-2)-0-2\right|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}\neq R=2$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:x=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):3x+y-z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất có bán kính $r=5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng $(P):3x+y-z-5=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;1;-1)$.

b) Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t;-1+2t;-2-t)$.

c) $d\left(I,(P)\right)=3$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.

Lời giải

a) Đúng: $(P):3x+y-z-5=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;1;-1)$.

b) Sai: Ta có: $d:x=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}\Rightarrow d:\begin{cases}x=t\\y=1+2t\\z=2-t\end{cases},t\in\mathbb{R}I\in d\Rightarrow I(t;1+2t;2-t)$

c) Sai: Do giao tuyến của (S) và (P) là đường tròn lớn nên $I \in (P) \Rightarrow d(I,(P)) = 0$.

d) Đúng : Ta có $I \in d \Rightarrow I(t;1+2t;2-t)$

Theo giả thiết $I = d \cap (P)$ nên tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P)

Thay tọa độ điểm I vào (P) ta có :

$3t + (1+2t) - (2-t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(1;3;1)$

Vì $(S) \cap (P)$ theo giao tuyến là đường tròn lớn có bán kính $r = 5$ nên ta có bán kính mặt cầu (S) là $R = r = 5$.

Vậy mặt cầu có phương trình là: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 14 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Lấy $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giá trị của biểu thức $K = a + b + c$ là

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$, bán kính $R = 3$.

Ta có: $d(I,(P)) = \dfrac{|2.1 - (-2) + 2.(-1) - 14|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 > R$. Suy ra mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung. Từ đó, điểm thuộc mặt cầu có khoảng cách nhỏ nhất hoặc lớn nhất tới mặt phẳng (P) là giao điểm của mặt cầu với đường thẳng qua I và vuông góc với (P).

Trước hết ta lập phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với (P).

Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;-1;2)$.

Vì $d \perp (P)$ nên nhận $\vec{n} = (2;-1;2)$ làm véctơ chỉ phương.

Từ đó d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ với $(t \in \mathbb{R})$.

Ta tìm giao điểm của d và (S). Xét hệ: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \\ (1+2t)^2 + (-2-t)^2 + (-1+2t)^2 - 2(1+2t) + 4(-2-t) + 2(-1+2t) - 3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \\ 9t^2-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=1 \\ x=3 \\ y=-3 \\ z=1 \end{cases} \\ \begin{cases} t=-1 \\ x=-1 \\ y=-1 \\ z=-3 \end{cases} \end{array}\right.$. Suy ra có hai giao điểm là $A(3;-3;1)$ và $B(-1;-1;-3)$.

Ta có: $d\left(A,(P)\right)=\dfrac{|2.3-(-3)+2.1-14|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1$; $d\left(B,(P)\right)=\dfrac{|2.(-1)-(-1)+2(-3)-14|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=7$.

Suy ra $M\equiv B(-1;-1;-3)$. Từ đó $a=-1$; $b=-1$; $c=-3$.

Vậy $K=-5$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-2;1;-4)$. Biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Có 5 người sử dụng điện thoại tại các điểm $A(2;-1;3), B(0;1;-4), C(-2;1;-3)$, $D(0;1;-3)$, $E(-4;-2;1)$. Hỏi trong số 5 người đó, có bao nhiêu người có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

Lời giải

Ta tính: $IA=\sqrt{4^2+(-2)^2+7^2}=\sqrt{69}>3$; $IB=\sqrt{2^2+0^2+0^2}=2<3$.

$IC=\sqrt{0^2+0^2+1^1}=1<3$; $ID=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}<3$; $IE=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38}>3$.

Vậy có 3 người có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-2=0$ chứa đường thẳng AB và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $M=2a+b-c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $(P)\perp \vec{n}=(a;b;c)$ trong đó $a;b;c$ không đồng thời bằng 0. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$.

Do mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AB nên ta có: $\begin{cases} 3a-2b+6c-2=0 \\ b-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=2-2c \end{cases}$ (1)

Bán kính đường tròn giao tuyến là: $r=\sqrt{R^2-d^2}$ trong đó

$d=d\left(I;(P)\right)=\dfrac{|c+4|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{\dfrac{c^2+8c+16}{5c^2-8c+8}}$.

Để bán kính đường tròn nhỏ nhất điều kiện là d lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{c^2+8c+16}{5c^2-8c+8}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{24}{5}.\dfrac{2c+3}{5c^2-8c+8}$

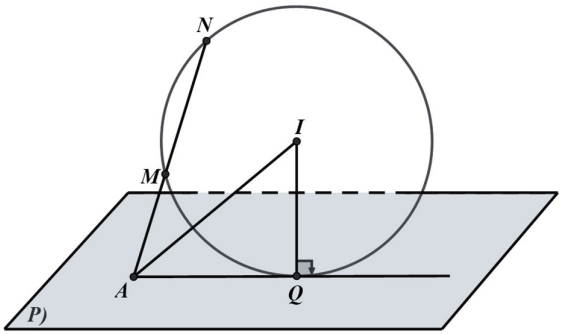
lớn nhất $\Leftrightarrow m=\dfrac{2c+3}{5c^2-8c+8}$ lớn nhất. Coi hàm số $m=\dfrac{2c+3}{5c^2-8c+8}$ là một phương trình ẩn c ta được : $5mc^2-2(4m+1)c+(8m-3)=0$, phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'=-24m^2+23m+1\geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{24}\leq m\leq 1\Rightarrow m$ lớn nhất $\Leftrightarrow c=1$

$\Rightarrow a=0\Rightarrow M=2a+b-c=1$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q. Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

Lời giải



Đường thẳng MN đi qua điểm $M(1;1;1)$ và nhận $\overrightarrow{MN}=(-4;-4;-4)$ là véctơ chỉ phương.

Chọn $\vec{u}=(1;1;1)$ là véctơ chỉ phương của đường thẳng MN, suy ra phương trình đường thẳng MN là: $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$.

Gọi $A=MN\cap(P)$, suy ra tọa độ A là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1+t\\x+y-z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\x=3\\y=3\\z=3\end{cases}$.

Suy ra $A(3;3;3)$.

Các điểm M, N, Q cùng thuộc một đường tròn và AQ là tiếp tuyến đường tròn đó nên ta có $AQ^2=AM.AN$.

Thay tọa độ các điểm vào ta được $AM=2\sqrt{3}$, $AN=6\sqrt{3}$, suy ra $AQ^2=36\Leftrightarrow AQ=6$.

Vậy điểm Q luôn thuộc một đường tròn cố định có tâm $A(3;3;3)$ và bán kính $R=6$.

Câu 5: Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Lời giải

Để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$ thì $IA \le 600 \Leftrightarrow (m-100)^2+(m-80)^2+(-60)^2 \le 600^2$

$\Leftrightarrow 2m^2-360m-340000 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{180-\sqrt{712400}}{2} \le m \le \dfrac{180+\sqrt{712400}}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của m là $\dfrac{180+\sqrt{712400}}{2} \approx 512$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$, $(P): x+2y-2z-2=0$, $(Q): x+2y-2z+4=0$. Gọi mặt cầu $S(I,R)$ có tâm I thuộc Δ và tiếp xúc với $(P),(Q)$. Khi đó đường kính của mặt cầu có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+2t \\ z=1+2t \end{cases}$. Vì $I \in \Delta \Rightarrow I(2-3t;1+2t;1+2t)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2-3t;1+2t;1+2t)$ thuộc Δ và tiếp xúc với $(P),(Q)$ nên ta có:

$d(I,(P))=d(I,(Q))$

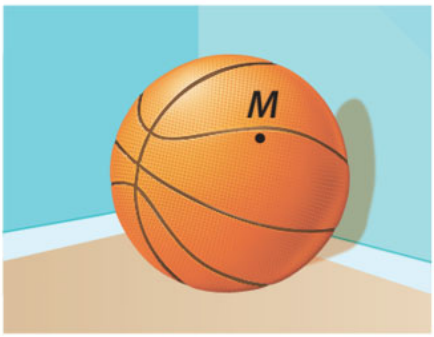
$\Leftrightarrow \dfrac{|(2-3t)+2(1+2t)-2(1+2t)-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \dfrac{|(2-3t)+2(1+2t)-2(1+2t)+4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$

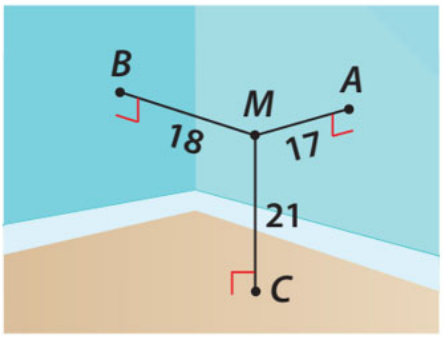
$\Leftrightarrow |-3t| = |-3t+6| \Rightarrow t=1$.

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;3)$ và bán kính $R=1$.

Vậy đường kính của mặt cầu (S) bằng 2.

Câu 7: Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đương kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? *Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.*





Lời giải

Ta đặt hệ trục vào căn phòng sao cho có hai bức tường là mặt $(Oxz),(Oyz)$, và nền là (Oxy).

Vậy bài toán dẫn đến việc tìm đường kính của mặt cầu tiếp xúc với 3 mặt phẳng toạ độ và chứa điểm $M(17;18;21)$.

Ta có thể gọi phương trình mặt cầu là $(S):(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$, với $a>0$ (do mặt cầu tiếp xúc với các mặt phẳng toạ độ nên $a=b=c=R$).

Do $M(17;18;21)\in(S)$ nên $(17-a)^2+(18-a)^2+(21-a)^2=a^2$

$$\Rightarrow 2a^2-112a+1054=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=28-\sqrt{257}\\a=28+\sqrt{257}\end{array}\right.$$

Vì quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm nên $a=28-\sqrt{257}$ thỏa.

Vậy đường kính quả bóng bằng $2a=56-2\sqrt{257}\approx 23,9(\text{cm})$.

----------HẾT----------