

CHỦ ĐỀ 8: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ TÍNH TÍCH PHÂN

1) Định lý: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a; \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$.

$$\text{Khi đó } \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Chú ý: Trong nhiều trường hợp ta còn sử dụng phép biến đổi biến số ở dạng sau:

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Để tính $\int_a^b f(x)dx$, đôi khi ta chọn hàm số $u = u(x)$ làm biến số mới, trong đó trên đoạn $[a; b]$, $u(x)$ có đạo hàm liên tục và $u(x) \in [\alpha; \beta]$.
- Giả sử có thể viết $f(x) = g(u(x))u'(x)$, $x \in [a; b]$, với $g(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$.

$$\text{Khi đó, ta có } \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$$

2) Các dạng toán trọng tâm

Dạng 1: Đổi biến số với các hàm vô tỉ quen thuộc

- Trong biểu thức của $f(x)dx$ có chứa căn thì đặt căn đó bằng t .
- Trong biểu thức của $f(x)dx$ có chứa biểu thức lũy thừa bậc cao thì đặt biểu thức đó bằng t .
- Trong biểu thức của $f(x)dx$ có chứa hàm mũ với biểu thức trên mũ là một hàm số thì đặt biểu thức trên mũ bằng t .

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến số:

$$\text{a) } I = \int_0^4 \frac{dx}{3 + \sqrt{2x+1}}. \quad \text{b) } I = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}. \quad \text{c) } I = \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx. \quad \text{d) } I = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Lời giải

Chú ý: Đổi biến nhớ phải đổi cận.

$$\text{a) Đặt } t = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow t^2 = 2x+1 \Leftrightarrow dx = t dt. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=4 \Rightarrow t=3 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^3 \frac{t}{3+t} dt = \int_1^3 \left(1 - \frac{3}{t+3}\right) dt = \left(t - 3 \ln|t+3|\right) \Big|_1^3 = 3 - 3 \ln 6 - 1 + 3 \ln 4 = 2 + 3 \ln \frac{2}{3}.$$

$$\text{b) Đặt } t = \sqrt{e^x + 1} \Leftrightarrow t^2 = e^x + 1 \Leftrightarrow 2t dt = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=\ln 3 \Rightarrow t=2 \end{cases}, \text{ khi đó } I = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t^2 - 1} = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^2 = -\ln 3(3 - 2\sqrt{2}).$$

c) Đặt $t = \sqrt[3]{1-x} \Leftrightarrow t^3 = 1-x \Leftrightarrow 3t^2 dt = -dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=9 \Rightarrow t=-2 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_0^{-2} (1-t^3)t(-3t^2)dt = \int_0^{-2} (t^6 - t^3)dt = 3\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^{-2} = \frac{-468}{7}$.

d) Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$ ($t \in [0; \pi]$). Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{6} \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\cos t}{2\cos t} dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$.

Ví dụ 2: [Đề thi THPT Quốc gia 2018] Cho $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$ với a, b, c là các số hữu tỷ.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

- A. $a-b=-c$. B. $a+b=c$. C. $a+b=3c$. D. $a-b=-3c$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x+9} \Rightarrow t^2 = x+9 \Rightarrow 2t dt = dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=16 \Rightarrow t=5 \\ x=55 \Rightarrow t=8 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_5^8 \frac{2t dt}{(t^2-9)t} = \int_5^8 \frac{2 dt}{(t-3)(t+3)} = \frac{2}{6} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| \Big|_5^8 = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{11} - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 5 - \frac{1}{3} \ln 11$

Do đó $a = \frac{2}{3}; b = \frac{1}{3}; c = -\frac{1}{3} \Rightarrow a-b=-c$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Cho $I = \int_2^6 \frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}} = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ, tính tổng

$A = a + 4b + 12c$.

- A. $A = -2$. B. $A = -4$. C. $A = 4$. D. $A = 2$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{4x+1} \Rightarrow t^2 = 4x+1 \Rightarrow t dt = 2dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=6 \Rightarrow t=5 \\ x=2 \Rightarrow t=3 \end{cases}$

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{t dt}{\left(\frac{t^2+1}{2}\right)+t} = \int_3^5 \frac{t dt}{(t+1)^2} = \int_3^5 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = \left(\ln|t+1| + \frac{1}{t+1} \right) \Big|_3^5 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{12}$

$= \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{12} \Rightarrow a = 1; b = -1; c = \frac{-1}{12}$

Do đó $A = a + 4b + 12c = 1 - 4 - 1 = -4$. **Chọn B.**

➤ Dạng 2: Tích phân đổi biến số với hàm ẩn

Chú ý tính chất: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$ (tích phân không phụ thuộc vào biến).

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx = 12$.

Tính tích phân $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

- A. $I = 6$. B. $I = 36$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^2 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^2 f(3x)d(3x) \xrightarrow{t=3x} \frac{1}{3} \int_0^6 f(t)dt = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x)dx = \frac{12}{3} = 4$. **Chọn D.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; +\infty)$ và $\int_0^3 f(\sqrt{x+1})dx = 8$. Tính $I = \int_1^2 x.f(x)dx$

- A. $I = 2$. B. $I = 8$. C. $I = 4$. D. $I = 16$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2tdt = dx$ và đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=3 \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_0^3 f(\sqrt{x+1})dx = 2 \int_1^2 t.f(t)dt = 8 \Rightarrow \int_1^2 t.f(t)dt = 4 \Rightarrow \int_1^2 x.f(x)dx = 4$. **Chọn C.**

Ví dụ 3: Cho $\int_4^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = a$ và $\int_0^1 f(2x)dx = b$. Tính tích phân $I = \int_0^3 f(x)dx$ theo a và b .

- A. $I = \frac{a}{2} + 2b$. B. $I = 2a + b$. C. $I = 2(a+b)$. D. $I = \frac{a+b}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\int_4^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = \int_4^9 2f(\sqrt{x})d(\sqrt{x}) \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \int_2^3 2f(t)dt = a \Rightarrow \int_2^3 2f(t)dt = \frac{a}{2}$

Do đó $\int_2^3 2f(x)dx = \frac{a}{2}$.

Lại có: $\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x)d(2x) \xrightarrow{u=2x} \frac{1}{2} \int_0^2 f(u)du = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx = b$

Do đó $\int_0^2 f(x)dx = 2b \Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = 2b + \frac{a}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cdot \cos 3x dx = 1$ và $\int_0^{\ln 2} e^x \cdot f(e^x) dx = 3$.

Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$.

A. $I = 4$.

B. $I = 5$.

C. $I = 2$.

D. $I = 6$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cdot d(\sin 3x) \xrightarrow{t=\sin 3x} \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) \cdot dt = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) \cdot dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) \cdot dx = 3$$

$$\text{Lại có: } \int_0^{\ln 2} e^x \cdot f(e^x) dx = \int_0^{\ln 2} f(e^x) d(e^x) \xrightarrow{u=e^x} \int_1^2 f(u) du = \int_1^2 f(x) dx = 3$$

$$\text{Do đó } I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 3 + 3 = 6. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$.

Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx$.

A. $I = 3$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = 2$.

D. $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x f(\sin^2 x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} f(\sin^2 x) dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx, \text{ đổi cận suy ra } A = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{2t} dt = 1 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx = 2.$$

$$\text{Mặt khác } B = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1 \xrightarrow{u=\sqrt{x}} \int_1^4 \frac{f(u)}{u^2} 2u du \Rightarrow B = 2 \int_1^4 \frac{f(u)}{u} du = 1 \Rightarrow \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{Xét } I = \int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx \xrightarrow{v=4x} I = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(v)}{\frac{v}{4}} \cdot \frac{dv}{4} = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(v)}{v} dv = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(x)}{x} dx = A + B = \frac{5}{2}. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 6: Cho các khẳng định sau:

$$(1). \int_0^1 \sin(1-x) dx = \int_0^1 \sin x dx.$$

$$(2). \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

$$(3). \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx.$$

$$(4). \int_1^2 f(x) dx = 2 \int_1^2 x.f(x^2+1) dx.$$

Số khẳng định **đúng** là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^1 \sin(1-x) dx = - \int_0^1 \sin(1-x) d(1-x) \xrightarrow{t=1-x} - \int_1^0 \sin t dt = \int_0^1 \sin t dt = \int_0^1 \sin x dx.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} d \frac{x}{2} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) d(\sin 2x) = \frac{1}{4} \int_0^1 f(v) dv = \frac{1}{4} \int_0^1 f(x) dx.$$

$$2 \int_1^2 x.f(x^2+1) dx = \int_1^2 f(x^2+1) d(x^2+1) = \int_1^5 f(z) dz = \int_1^5 f(x) dx.$$

Số khẳng định **đúng** là 2. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x).dx = a$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = b$.

Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ theo a và b .

A. $I = a - b$.

B. $I = a + b$.

C. $I = \frac{a}{b}$.

D. $I = a + b - 1$.

Lời giải

$$\text{Đặt } x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt. \text{ Đổi cận } \left| \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t.f(\tan t)}{\tan^2 t+1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t.f(\tan t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x.f(\tan x) dx = b$$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x.f(\tan x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x).f(\tan x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x) dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) d(\tan x) = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx.$$

Do đó $I = \int_0^1 f(x) dx = a + b$. **Chọn A.**

Dạng 3: Tích phân đổi biến số với hàm số chẵn, hàm số lẻ

Bài toán tổng quát: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-a; a]$. Chứng minh rằng:

a) $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ nếu $f(x)$ là hàm số chẵn.

b) $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ nếu $f(x)$ là hàm số lẻ.

Lời giải

a) Hàm số $f(x)$ là hàm chẵn thì $f(-x) = f(x)$

Ta có: $\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^0 f(-x) d(-x) \xrightarrow{t=-x} - \int_a^0 f(t) dt = - \int_a^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx.$

Do đó $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$

b) Hàm số $f(x)$ là hàm lẻ thì $f(-x) = -f(x)$

Ta có: $\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^0 f(-x) dx = \int_0^0 f(-x) d(-x) \xrightarrow{t=-x} \int_a^0 f(t) dt = - \int_a^0 f(x) dx$

Do đó $2 \int_{-a}^0 f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-a}^0 f(x) dx = 0.$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2 \cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Tính $I = \int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$

A. $I = -6.$

B. $I = 0.$

C. $I = -2.$

D. $I = 6.$

Lời giải

Lấy tích phân 2 vế của $f(x) + f(-x) = \cos 2x$ cận từ $-\frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ ta có:

$$\int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx = \int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2 \cos 2x} dx = 2 \int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| dx = 12 \quad (\text{Sử dụng máy tính Casio}).$$

Đặt $t = x \Rightarrow dt = -dx$ và đổi cận $\left| \begin{array}{l} x = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = -\frac{3\pi}{2} \end{array} \right.$.

Khi đó $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx = -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} f(t)dt = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t)dt = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$.

Suy ra $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx = 2I = 12 \Rightarrow I = 6$.

Cách 2: Vì $\sqrt{2+2\cos 2x} = \sqrt{2+2\cos(-2x)}$ ta có thể chọn $f(x) = \frac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{2}$.

Sau đó sử dụng **Casio** để bấm $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{2} dx$. **Chọn D.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$f(x) + f(-x) = \cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx$ bằng:

- A. 2. B. -2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Lấy tích phân 2 vế của $f(x) + f(-x) = \cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ cận từ $-\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{6}$ ta có:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(-x)dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6}, t = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{6}, t = -\frac{\pi}{6} \end{array} \right. \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(-x)dx = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} f(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx$.

Suy ra $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(-x)dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{4}$. **Chọn D.**

Cách 2: Vì $\cos 2x = \cos(-2x)$ ta chọn $f(x) = \frac{\cos 2x}{2} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) + 2f(1-x) = 3x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = 2$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $f(x) + 2f(1-x) = 3x \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(1-x) dx = 3 \int_0^1 x dx = \frac{3}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$.

Đặt $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx \Rightarrow \begin{cases} x=0, t=1 \\ x=1, t=0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 f(1-x) dx = - \int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx$.

Suy ra $\int_0^1 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(1-x) dx = 3 \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}$. **Chọn C.**

Cách 2: Ta có $f(x) + 2f(1-x) = 3x \Rightarrow f(1-x) + 2f(x) = 3(1-x) = 3-3x$.

Khi đó $\begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = 3x & (1) \\ f(1-x) + 2f(x) = 3-3x & (2) \end{cases}$, lấy $2 \cdot (2) - (1)$, ta được

$3f(x) = 2(3-3x) - 3x \Leftrightarrow f(x) = 2-3x$.

Vậy $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (2-3x) dx = \left(2x - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{2}{3}$.

B. $I = 1$.

C. $I = 2$.

D. $I = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $f(x) + f(-x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^1 [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-1}^1 x^2 dx \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 f(-x) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx$.

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx \Rightarrow \begin{cases} x=-1, t=1 \\ x=1, t=-1 \end{cases} \Rightarrow \int_{-1}^1 f(-x) dx = - \int_1^{-1} f(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

Suy ra $\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx \Leftrightarrow 2 \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực a dương. Biết rằng với mọi $x \in [0; a]$ thì $f(x) > 0$

và $f(x) \cdot f(a-x) = 1$. Tính $I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $I = \frac{a}{2}$.

B. $I = 2a$.

C. $I = a$.

D. $I = -\frac{a}{2}$.

Lời giải

Ta có: $f(x) \cdot f(a-x) = 1 \Leftrightarrow (1+f(x))f(a-x) = 1+f(a-x) \Leftrightarrow \frac{1}{1+f(x)} = \frac{f(a-x)}{1+f(a-x)}$

Lấy tích phân 2 vế ta có: $I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \int_0^a \frac{f(a-x)}{1+f(a-x)} dx$

Đặt $t = a-x \Rightarrow dt = -dx$ khi đó $\int_0^a \frac{1+f(a-x)}{f(a-x)} dx = \int_a^0 \frac{f(t)}{1+f(t)} (-dt) = \int_0^a \frac{f(t)}{1+f(t)} dt = \int_0^a dt - \int_0^a \frac{dt}{1+f(t)}$

$= a - \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$. Khi đó $I = a - I \Leftrightarrow I = \frac{a}{2}$. **Chọn A.**

Cách 2: Vì $f(x) \cdot f(a-x) = 1$ ta có thể chọn $f(x) = 1 \Rightarrow f(a-x) = 1 \Rightarrow I = \int_0^a \frac{dx}{2} = \frac{x}{2} \Big|_0^a = \frac{a}{2}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho $\int_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

- A. $I = 6$. B. $I = 36$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Câu 2: Cho $\int_5^{10} f(x)dx = -8$. Tính $I = \int_1^2 f(5x)dx$.

- A. $I = \frac{4}{5}$. B. $I = -\frac{8}{5}$. C. $I = \frac{8}{5}$. D. $I = -\frac{4}{5}$.

Câu 3: Cho $\int_4^{10} f(x)dx = 10$. Tính $I = \int_2^5 f(2x)dx$.

- A. $I = 10$. B. $I = 5$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Câu 4: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017) Cho $\int_0^6 f(x)dx = 12$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

- A. $I = 6$. B. $I = 36$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Câu 5: Cho $\int_0^4 f(x)dx = 16$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(2x)dx$.

- A. $I = 32$. B. $I = 8$. C. $I = 16$. D. $I = 4$.

Câu 6: Cho tích phân $\int_0^1 f(x)dx = 9$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cdot \cos 3x dx$.

- A. $I = 5$. B. $I = 9$. C. $I = 3$. D. $I = 2$.

Câu 7: Cho $\int_4^{10} f(x)dx = 18$. Tính $I = \int_1^3 f(3x+1)dx$.

- A. $I = 18$. B. $I = 6$. C. $I = 9$. D. $I = 15$.

Câu 8: Cho $\int_0^4 f(x)dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(4x)dx$.

- A. $I = 8$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = 4$. D. $I = 2$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{2017} f(x)dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(2017x)dx$.

- A. $\int_0^1 f(2017x)dx = 2017$. B. $\int_0^1 f(2017x)dx = 0$.
C. $\int_0^1 f(2017x)dx = 1$. D. $\int_0^1 f(2017x)dx = \frac{1}{2017}$.

Câu 10: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx = 2017$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx$.

- A. $I = \frac{2}{2017}$. B. $I = \frac{2017}{2}$. C. $I = 2017$. D. $I = -\frac{2017}{2}$.

Câu 11: Cho tích phân $\int_1^2 f(x)dx = a$. Hãy tính tích phân $I = \int_0^1 x.f(x^2+1)dx$ theo a .

- A. $I = 2a$. B. $I = 4a$. C. $I = \frac{a}{2}$. D. $I = \frac{a}{4}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e$. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $\int_0^1 f(x)dx = 1$. B. $\int_0^1 f(x)dx = e$. C. $\int_0^e f(x)dx = 1$. D. $\int_0^e f(x)dx = e$.

Câu 13: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{e^x}{x}$ trên $(0; +\infty)$. Tính $\int_1^2 \frac{e^{3x}}{x} dx$.

- A. $I = 3[F(2) - F(1)]$. B. $I = F(6) - F(3)$
C. $I = \frac{F(6) - F(3)}{3}$. D. $I = 3[F(6) - F(3)]$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-2}^4 f(x)dx = 2$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\int_{-1}^2 f(2x)dx = 1$. B. $\int_{-3}^3 f(x+1)dx = 2$.
C. $\int_{-1}^2 f(2x)dx = 2$. D. $\int_0^6 \frac{1}{2} f(x-2)dx = 1$.

Câu 15: Cho $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f(2) = 2$ và $f(4) = 2018$. Tính $I = \int_1^2 f'(2x)dx$.

- A. $I = -1008$. B. $I = 2018$. C. $I = 1008$. D. $I = -2018$.

Câu 16: Biết $\int_1^3 f(3x-1)dx = 20$. Hãy tính tích phân $I = \int_2^8 f(x)dx$.

- A. $I = 20$. B. $I = 40$. C. $I = 10$. D. $I = 60$.

Câu 17: Biết $\int_0^{27} f(x)dx = 81$. Tính $I = \int_0^3 f(9x)dx$.

- A. $I = 3$. B. $I = 81$. C. $I = 27$. D. $I = 9$.

Câu 18: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cdot \cos x dx = 2$.

Tính tích phân $I = \int_0^3 f(x) dx$.

- A. $I = 2$. B. $I = 6$. C. $I = 4$. D. $I = 10$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $[1; 2]$ thỏa mãn $\int_1^2 f'(x) dx = 10$ và

$\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln 2$. Biết rằng hàm số $f(x) > 0, \forall x \in [1; 2]$. Tính $f(2)$.

- A. $f(2) = -10$. B. $f(2) = 20$. C. $f(2) = 10$. D. $f(2) = -20$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $[-1; +\infty)$ và $\int_0^3 f(\sqrt{x+1}) dx = 4$. Tính $\int_1^2 xf'(x) dx$.

- A. $I = 8$. B. $I = 4$. C. $I = 16$. D. $I = 2$.

Câu 21: Biết $\int_0^1 xf'(x) dx = 4$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \cdot \sin 4x dx$.

- A. $I = 2$. B. $I = 6$. C. $I = 8$. D. $I = 4$.

Câu 22: Biết $\int_{\frac{1}{2}}^1 xf'(x) dx = \frac{1}{2}$. Tính $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\sin x) dx$.

- A. $I = 2$. B. $I = \frac{\pi}{3}$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = 1$.

Câu 23: Biết $\int_0^2 f(x^2) x dx = 1$. Tính $\int_0^4 f(x) dx$.

- A. $I = 2$. B. $I = 4$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = 1$.

Câu 24: Biết $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Tính $\int_{-1}^1 f(|2x|) dx$.

- A. $I = 3$. B. $I = 6$. C. $I = \frac{3}{2}$. D. $I = 0$.

Câu 25: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x) dx = -5$ và $\int_1^3 f(2x) dx = 10$. Tính giá trị của

$I = \int_0^2 f(3x) dx$.

- A. $I = 8$. B. $I = 5$. C. $I = \frac{3}{5}$. D. $I = 6$.

Câu 26: Biết $\int_{-1}^5 f(x)dx = 15$. Tính $\int_0^2 [f(5-3x) + 7]dx$.

- A. $I = 15$. B. $I = 37$. C. $I = 27$. D. $I = 19$.

Câu 27: Biết $\int_1^2 f(x)dx = -3$. Tính $\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$.

- A. $I = -6$. B. $I = -\frac{3}{2}$. C. $I = -1$. D. $I = 5$.

Câu 28: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1}dx = 2$. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 f(x)dx.$$

- A. $I = 6$. B. $I = 2$. C. $I = 3$. D. $I = 1$.

Câu 29: Biết $\int_1^2 \sqrt{2x-1}dx = -\frac{a}{b} + \sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $a + b^2 + c^3$.

- A. 37. B. 11. C. 45. D. 27.

Câu 30: Biết $\int_{-1}^1 \sqrt{6-3x}dx = a - \frac{\sqrt{b}}{3}$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $a^2 - b$.

- A. 31. B. 18. C. 12. D. 24.

Câu 31: Biết $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{3}\sqrt{a} - \frac{b}{3}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Tính tổng $a + b$.

- A. 28. B. 30. C. 32. D. 36.

Câu 32: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} + c}{3}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Tính $a + b + c$.

- A. 36. B. 42. C. 27. D. 54.

Câu 33: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}} = a\sqrt{b} - a$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức

$$P = b - a.$$

- A. $P = -5$. B. $P = -1$. C. $P = 5$. D. $P = 1$.

Câu 34: Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$. Tính

$$P = a + b + c.$$

- A. $P = 24$. B. $P = 12$. C. $P = 18$. D. $P = 46$.

Câu 35: Biết $\int_5^6 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}+(x-1)\sqrt{x}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Tính $P = a - bc$.

- A. $P = 16$. B. $P = -19$. C. $P = 19$. D. $P = -16$.

Câu 36: Biết $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} = \frac{a}{3} - \frac{\sqrt{b}}{3}$ với a, b nguyên dương. Tính $T = a^2 - 2b + 1$.

- A. $T = 1$. B. $T = 4$. C. $T = -2$. D. $T = 5$.

Câu 37: Biết $\int_1^4 \sqrt{x + \frac{1}{x}} = 2dx = 2 + \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính tổng $a + b$.

- A. 14. B. 3. C. 17. D. 20.

Câu 38: Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2 - 1}dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $I = 2 \int_1^3 \sqrt{u}du$. B. $I = \int_1^2 \sqrt{u}du$. C. $I = \int_0^3 \sqrt{u}du$. D. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u}du$.

Câu 39: Cho $I = \int_1^2 x\sqrt{4-x^2}dx$ và $t = \sqrt{4-x^2}$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $I = \sqrt{3}$. B. $I = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}}$. C. $I = \int_0^{\sqrt{3}} t^2 dt$. D. $I = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}}$.

Câu 40: Cho tích phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x+3}}$ và đặt $t = \sqrt{2x+3}$, ta được $I = \int_2^3 \frac{m}{t^2+n} dt$ với m, n là những số

nguyên. Tính $T = 3m + n$.

- A. $T = 7$. B. $T = 2$. C. $T = 4$. D. $T = 5$.

Câu 41: Cho $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$ và đặt $t = \sqrt{1+3\ln x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $I = \frac{2}{3} \int_1^e t^2 dt$. B. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt$. C. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt$. D. $I = \frac{2}{3} \int_1^e t dt$.

Câu 42: Cho $I = \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx$ và đặt $t = \sqrt{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $I = \int_1^2 (t^2 + t) dt$. B. $I = \int_1^2 (2t^2 + 2t) dt$. C. $I = \int_1^2 (t^2 - t) dt$. D. $I = \int_1^2 (2t^2 - 2t) dt$.

Câu 43: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos x}} dx$ và đặt $t = \sqrt{1+\cos x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4t^3 - 4t}{t} dt.$ B. $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t^3 + 4t}{t} dt.$ C. $I = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt.$ D. $I = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (1 - t^2) dt.$

Câu 44: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx$ và đặt $t = \sin^2 x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t e^t dt \right].$ B. $I = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^t dt - \int_0^1 t e^t dt \right].$

C. $I = 2 \left[\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t e^t dt \right].$ D. $I = 2 \left[\int_0^1 e^t dt - \int_0^1 t e^t dt \right].$

Câu 45: Cho $I = \int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx$ và đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = 3 \int_0^1 t dt.$ B. $I = \int_0^1 t^3 dt.$ C. $I = 3 \int_0^1 t^2 dt.$ D. $I = 3 \int_0^1 t^3 dt.$

Câu 46: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin^2 x - 1)^4 \sin 4x dx$ và đặt $t = \cos 2x$. Khẳng định nào đúng?

A. $I = \frac{1}{2} \int_0^1 t^4 dt.$ B. $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} t^3 dt.$ C. $I = \int_0^1 t^5 dt.$ D. $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^4 dt.$

Câu 47: Cho $I = \int_1^2 2x \sqrt{x^2 - 1} dx$ và đặt $u = x^2 - 1$. Tìm khẳng định sai?

A. $I = \int_1^2 \sqrt{u} du.$ B. $I = \frac{2}{3} \sqrt{27}.$ C. $I = \int_0^3 \sqrt{u} du.$ D. $I = \frac{2}{3} u \sqrt{u} \Big|_0^3.$

Câu 48: Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x \sqrt{3 \ln^2 x + 1}} dx$ và đặt $t = \sqrt{3 \ln^2 x + 1}$. Khẳng định nào đúng?

A. $I = \frac{1}{3} \int_1^2 t dt.$ B. $I = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{t} dt.$ C. $I = \frac{2}{3} \int_1^{e^2} t dt.$ D. $I = \frac{1}{4} \int_1^e \frac{t-1}{t} dt.$

Câu 49: Cho $I = \int x(1-x^2)^{10} dx$ và đặt $u = 1-x^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = -2 \int u^{10} du.$ B. $I = \int 2u^{10} du.$ C. $I = \frac{1}{2} \int u^{10} du.$ D. $I = -\frac{1}{2} \int u^{10} du.$

Câu 50: Tìm tham số m thỏa mãn $I = \int_0^{\ln m} \frac{e^x dx}{e^x + 2} = \ln 2.$

A. $m = \frac{1}{2}.$ B. $m = 2.$ C. $m = 4.$ D. $m = 0, m = 4.$

Câu 51: Biết $\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x + 2x^{-x} - 3} = 3 \ln a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tìm $P = ab$.

- A. $P = 10$. B. $P = -10$. C. $P = 15$. D. $P = 20$.

Câu 52: Biết $\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}} = a \ln 3 - b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a^2 + ab + 3b^2$.

- A. 4. B. 5. C. 1. D. 0.

Câu 53: Biết $\int_0^4 \frac{1}{3 + \sqrt{2x+1}} dx = a + b \ln \frac{2}{3}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $a + b = 3$. B. $a - b = 3$. C. $a - b = 5$. D. $a + b = 5$.

Câu 54: Biết $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

- A. $S = 2$. B. $S = -2$. C. $S = 0$. D. $S = 1$.

Câu 55: Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = \ln a + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $2a + 3b = 3$ B. $\frac{1}{a} - b = 1$ C. $4a^2 + 9b^2 = 11$ D. $2ab = 1$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: $I = \int_0^2 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^2 f(3x)d(3x) = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x)dx = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$. **Chọn D.**

Câu 2: $I = \int_1^2 f(5x)dx = \frac{1}{5} \int_1^2 f(5x)d(5x) = \frac{1}{5} \int_5^{10} f(x)dx = \frac{1}{5} \cdot (-8) = -\frac{8}{5}$. **Chọn B.**

Câu 3: $I = \int_2^5 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_2^5 f(2x)d(2x) = \frac{1}{2} \int_4^{10} f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$. **Chọn B.**

Câu 4: $I = \int_0^2 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^2 f(3x)d(3x) = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x)dx = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$. **Chọn D.**

Câu 5: $I = \int_0^2 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(2x)d(2x) = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$. **Chọn B.**

Câu 6: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) d(\sin 3x) = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$. **Chọn C.**

Câu 7: $I = \int_1^3 f(3x+1)dx = \frac{1}{3} \int_1^3 f(3x+1)d(3x+1) = \frac{1}{3} \int_4^{10} f(x)dx = \frac{1}{3} \cdot 18 = 6$. **Chọn B.**

Câu 8: $I = \int_0^1 f(4x)dx = \frac{1}{4} \int_0^1 f(4x)d(4x) = \frac{1}{4} \int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 9: $I = \int_0^1 f(2017x)dx = \frac{1}{2017} \int_0^1 f(2017x)d(2017x) = \frac{1}{2017} \int_0^{2017} f(x)dx = \frac{1}{2017}$. **Chọn D.**

Câu 10: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) d(\sin 2x) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = \frac{2017}{2}$. **Chọn B.**

Câu 11: $I = \int_0^1 x \cdot f(x^2+1)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x^2+1)d(x^2+1) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx = \frac{a}{2}$. **Chọn C.**

Câu 12: $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e \Leftrightarrow \int_1^e f(\ln x) d(\ln x) = e \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = e$. **Chọn B.**

Câu 13: $\int_1^2 \frac{e^{3x}}{x} dx = \int_1^2 \frac{e^{3x} d(3x)}{3x} = \int_3^6 \frac{e^x}{x} dx = F(x) \Big|_3^6 = F(6) - F(3)$. **Chọn B.**

Câu 14: $I = \int_{-1}^2 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(2x)d(2x) = \frac{1}{2} \int_{-2}^4 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ nên đáp án C sai. **Chọn C.**

Câu 15: $I = \int_1^2 f'(2x)dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f'(2x)d(2x) = \frac{1}{2} f(2x) \Big|_1^2 = \frac{f(4) - f(2)}{2} = 1008$. **Chọn C.**

Câu 16: $\int_1^3 f(3x-1)dx = 20 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_1^3 f(3x-1)d(3x-1) = 20 \Leftrightarrow \int_2^8 f(x)dx = 60$. **Chọn D.**

Câu 17: $I = \int_0^3 f(9x)dx = \frac{1}{9} \int_0^3 f(9x)d(9x) = \frac{1}{9} \int_0^{27} f(x)dx = \frac{1}{9} \cdot 81 = 9$. **Chọn D.**

Câu 18: $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4 \Leftrightarrow 2 \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx = 4 \Leftrightarrow \int_1^9 f(\sqrt{x})d(\sqrt{x}) = 2 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx = 2$

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cdot \cos x dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)d(\sin x) = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2$

Ta có $I = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = 2 + 2 = 4$. **Chọn C.**

Câu 19: $\int_1^2 f'(x)dx = 10 \Leftrightarrow f(x) \Big|_1^2 = 10 \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 10$

Ta có $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln 2 \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{d(f(x))}{f(x)} dx = \ln 2 \Leftrightarrow \ln |f(x)| \Big|_1^2 = \ln 2 \Leftrightarrow \ln \left| \frac{f(2)}{f(1)} \right| = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{f(2)}{f(1)} = 2$

Từ đó suy ra $f(2) = 20, f(1) = 10$. **Chọn B.**

Câu 20: Đặt $t = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow t^2 = x+1 \Leftrightarrow 2tdt = dx$. Với $x=0 \Rightarrow t=1, x=3 \Rightarrow t=2$

Ta có $\int_0^3 f\sqrt{x+1}dx = 4 \Leftrightarrow \int_1^2 f(t) \cdot 2tdt = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 xf(x)dx = 2$. **Chọn D.**

Câu 21: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot f(\cos 2x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \cdot f(\cos 2x) d(\cos 2x)$

$= - \int_1^0 tf(t)dt = \int_0^1 xf(x)dx = 4$. **Chọn D.**

Câu 22: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cdot \cos x \cdot f(\sin x) dx = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\sin x) d(\sin x) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 t \cdot f(t) dt = 1$. **Chọn D.**

Câu 23: Ta có $1 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x^2)d(x^2) = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{2} I \Rightarrow I = 2$. **Chọn A.**

Câu 24: $I = \int_{-1}^0 f(|2x|)dx + \int_0^1 f(|2x|)dx = \int_{-1}^0 f(-2x)dx + \int_0^1 f(2x)dx$

$= \int_2^0 f(t)d\left(-\frac{t}{2}\right) + \int_0^2 f(u)d\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx + \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx = 3$. **Chọn A.**

Câu 25: Ta có $10 = \int_2^6 f(t)d\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_2^6 f(x)dx \Rightarrow \int_2^6 f(x)dx = 20$.

Lại có $I = \int_0^6 f(u) d\left(\frac{u}{3}\right) = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[\int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx \right] = 5$. **Chọn B.**

Câu 26: $I = \int_0^2 f(5-3x) dx + 7 \int_0^2 dx = \int_5^{-1} f(t) d\left(\frac{5-t}{3}\right) + 7 \cdot 2 = \frac{1}{3} \int_{-1}^5 f(x) dx + 14 = 19$. **Chọn D.**

Câu 27: $I = \int_1^2 f(t) d(2t) = 2 \int_1^2 f(x) dx = -6$. **Chọn A.**

Câu 28: Ta có $2 = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1} dx = I - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\tan^2 t + 1} d(\tan t)$

$= I - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\tan^2 t + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = I - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx \Rightarrow I = 6$. **Chọn A.**

Câu 29: $I = \int_1^{\sqrt{3}} t d\left(\frac{t^2+1}{2}\right) = \int_1^{\sqrt{3}} t \cdot 2t dt = \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{3}$. **Chọn A.**

Câu 30: $I = \int_3^{\sqrt{3}} t d\left(\frac{6-t^2}{3}\right) = \int_{\sqrt{3}}^3 t \cdot \frac{2t}{3} dt = \frac{2t^3}{9} \Big|_{\sqrt{3}}^3 = \frac{54-6\sqrt{3}}{9} = \frac{18-2\sqrt{3}}{3}$. **Chọn D.**

Câu 31: $I = \int_0^1 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx = \int_1^{\sqrt{2}} t d(t^2-1) - \int_0^1 u d(u^2)$

$= \int_1^{\sqrt{2}} t \cdot 2t dt - \int_0^1 u \cdot 2u du = \frac{2t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} - \frac{2u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2}-1) - \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2}-4}{3}$. **Chọn D.**

Câu 32: $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} t d(t^2-1) + \frac{1}{2} \int_0^1 u d(u^2-1)$

$= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} t \cdot 2t dt + \frac{1}{2} \int_0^1 u \cdot 2u du = \frac{t^3}{3} \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}$. **Chọn A.**

Câu 33: Ta có $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$.

Lại có: $\sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = 2 \left(\int_1^2 \frac{dx}{2\sqrt{x}} + \int_1^2 \frac{d(x+1)}{2\sqrt{x+1}} \right)$

$= \left(2\sqrt{x} + 2\sqrt{x+1} \right) \Big|_1^2 = 2\sqrt{3} - 2 \Rightarrow a = 2; b = 3 \Rightarrow P = b - a = 1$. **Chọn D.**

Câu 34: Ta có $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$.

Lại có: $(\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = 2 \left(\int_1^2 \frac{dx}{2\sqrt{x}} - \int_1^2 \frac{d(x+1)}{2\sqrt{x+1}} \right)$$

$$= \left(2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} \right) \Big|_1^2 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2 = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2 \Rightarrow a = 32; b = 12; c = 2$$

Vậy $a+b+c=46$. **Chọn D.**

Câu 35: Ta có $I = \int_5^6 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}$.

Lại có: $(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

$$\Rightarrow I = \int_5^6 \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x(x-1)}} dx = \int_5^6 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = 2 \left(\int_5^6 \frac{dx}{2\sqrt{x-1}} - \int_5^6 \frac{d(x+1)}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$= \left(2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \right) \Big|_5^6 = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{6} - 4 + 2\sqrt{5} = \sqrt{80} - \sqrt{24} - 4 \Rightarrow a = 80; b = 24; c = 4$$

Vậy $a-bc=-16$. **Chọn D.**

Câu 36: Đặt $t = \sqrt{1+x} \Rightarrow t^2 = 1+x \Rightarrow 2tdt = dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=0 \\ x=0 \Rightarrow t=1 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_0^1 \frac{2tdt}{\sqrt{1+t}} = 2 \int_0^1 \left(\sqrt{t+1} - \frac{1}{\sqrt{t+1}} \right) dt = \left(\frac{4}{3} \sqrt{(t+1)^3} - 4\sqrt{t+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{8-\sqrt{32}}{3}$

Do đó $a=8; b=32 \Rightarrow T=8^2=32.2+1=1$. **Chọn A.**

Câu 37: Ta có $\int_1^4 \sqrt{x+\frac{1}{x}} + 2dx = \int_1^4 \sqrt{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}\right) \Big|_1^4$

$$= \frac{20}{3} = 2 + \frac{14}{3} = 2 + \frac{a}{b} \Rightarrow a+b=17. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 38: Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2xdx$.

Đổi cận $x=1 \Rightarrow u=0; x=2 \Rightarrow u=3$. Khi đó $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$. **Chọn C.**

Câu 39: Đặt $t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow t^2 = 4-x^2 \Rightarrow tdt = -xdx$. Đổi cận $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=\sqrt{3} \\ x=2 \Rightarrow t=0 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_{\sqrt{3}}^0 t(-tdt) = \int_0^{\sqrt{3}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Khẳng định sai là **B. Chọn B.**

Câu 40: Đặt $t = \sqrt{2x+3} \Rightarrow t^2 = 2x+3 \Rightarrow 2tdt = 2dx \Leftrightarrow tdt = dx$. Đổi cận $\left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 2 \\ x = 3 \Rightarrow t = 3 \end{array} \right.$

Khi đó $I = \int_2^3 \frac{tdt}{\left(\frac{t^2-3}{2} + 1\right)t} = \int_1^3 \frac{2dt}{t^2-1} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-1 \end{cases} \Rightarrow T = 3m+n = 5$. **Chọn D.**

Câu 41: Đặt $t = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow t^2 = 1+3\ln x \Rightarrow 2tdt = \frac{3dx}{x}$. Đổi cận $\left| \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = e \Rightarrow t = 2 \end{array} \right.$

Khi đó $I = \int_1^2 t \cdot \frac{2}{3} tdt = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt$. **Chọn C.**

Câu 42: Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2tdt = dx$. Đổi cận $\left| \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 3 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right.$

Khi đó $I = \int_1^2 \frac{t^2-1}{1+t} 2tdt = \int_1^2 (t-1) \cdot 2tdt = \int_1^2 (2t^2-2t) dt$. **Chọn D.**

Câu 43: Đặt $t = \sqrt{1-\cos x} \Rightarrow t^2 = 1-\cos x \Rightarrow 2tdt = -\sin x dx$. Đổi cận $\left| \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right.$

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x dx}{\sqrt{1+\cos x}} = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{2(t^2-1) \cdot (-2tdt)}{t} = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1) dt$. **Chọn C.**

Câu 44: Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx$. Đổi cận $\left| \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right.$

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \cdot \sin x \cos x \cdot \cos^2 x dx = \int_1^e e^t \cdot (1-t^2) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 e^t dt - \int_0^1 te^t dt \right)$. **Chọn B.**

Câu 45: Đặt $t = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow t^3 = 1-x \Leftrightarrow 3t^2 dt = -dx \Leftrightarrow dx = -3t^2 dt$. Với $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 1 \Rightarrow t = 0$

Ta có $I = \int_1^0 t \cdot (-3t^2 dt) = 3 \int_0^1 t^3 dt$. **Chọn D.**

Câu 46: Đặt $t = \cos 2x \Leftrightarrow dt = -2 \sin 2x dx$. Với $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$

Khi đó $I = \int_1^0 (2 \sin^2 x - 1)^4 \sin 4x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 2x \cdot 2 \cos 2x \sin 2x dx = \int_0^1 t^5 dt$. **Chọn C.**

Câu 47: Đặt $u = x^2 - 1 \Leftrightarrow du = 2xdx$. Với $x = 1 \Rightarrow u = 0, x = 2 \Rightarrow u = 3$

Ta có $I = \int_1^2 \sqrt{x^2 - 1} \cdot 2xdx = \int_0^3 \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u\sqrt{u} \Big|_0^3 = \frac{2}{3} \sqrt{27}$. Do đó đáp án A sai. **Chọn A.**

Câu 48: Đặt $t = \sqrt{3\ln^2 x + 1} \Rightarrow t^2 = 3\ln^2 x + 1 \Leftrightarrow 2tdt = \frac{6\ln x}{x} dx$. Với $x = 1 \Rightarrow t = 1, x = e \Rightarrow t = 2$

Ta có $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{3\ln^2 x + 1}} dx = \int_1^2 \frac{tdt}{3} \frac{1}{t} = \frac{1}{3} \int_1^2 dt$. **Chọn A.**

Câu 49: Đặt $u = 1 - x^2 \Leftrightarrow du = -2xdx$. Ta có $I = \int x(1 - x^2)^{10} dx = -\frac{1}{2} \int u^{10} du$. **Chọn D.**

Câu 50: Ta có $\int_0^{\ln m} \frac{e^x dx}{e^x + 2} = \int_0^{\ln m} \frac{d(e^x + 2)}{e^x + 2} = \ln(e^x + 2) \Big|_0^{\ln m} = \ln(m + 2) - \ln 3 = \ln \frac{m + 2}{3}$

Mà $\int_0^{\ln m} \frac{e^x dx}{e^x + 2} = \ln 2 \Rightarrow \ln \frac{m + 2}{3} = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{m + 2}{3} = 2 \Leftrightarrow m = 4$. **Chọn C.**

Câu 51: Ta có $\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 2 - 3e^x} = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{d(e^x)}{(e^x - 1)(e^x - 2)} = \ln \left| \frac{e^x - 2}{e^x - 1} \right| \Big|_{\ln 3}^{\ln 6} =$
 $= \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{1}{2} = 3 \ln 2 - \ln 5$. Do đó suy ra $a = 2, b = 5 \Rightarrow P = ab = 10$. **Chọn A.**

Câu 52: Đặt $t = \sqrt{3x + 1} \Rightarrow t^2 = 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2tdt = 3dx \\ x = \frac{t^2 - 1}{3} \end{cases}$. Với $x = 1 \Rightarrow t = 2, x = 5 \Rightarrow t = 4$

Ta có $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x + 1}} = \int_2^4 \frac{\frac{2tdt}{3}}{\frac{t^2 - 1}{3} t} = \int_2^4 \frac{2tdt}{t^2 - 1} = \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| \Big|_2^4 = \ln \frac{3}{5} - \ln \frac{1}{3} = 2 \ln 3 - \ln 5$

Do đó suy ra $a = 2, b = -1 \Rightarrow a^2 + ab + 3b^2 = 5$. **Chọn B.**

Câu 53: Đặt $t = \sqrt{2x + 1} \Rightarrow t^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow 2tdt = 2dx \Leftrightarrow dx = tdt$. Với $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 4 \Rightarrow t = 3$

Ta có $\int_0^4 \frac{1}{3 + \sqrt{2x + 1}} dx = \int_1^3 \frac{tdt}{3 + t} = \int_1^3 \left(1 - \frac{3}{3 + t} \right) dt = (t - 3 \ln |t + 3|) \Big|_1^3 = 2 + 3 \ln \frac{2}{3}$

Do đó suy ra $a = 2, b = 3 \Rightarrow a + b = 5$. **Chọn D.**

Câu 54: $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x(e^x + 1)} = \int_0^1 \frac{d(e^x)}{e^x(e^x + 1)} = \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 1} \right| \Big|_0^1 = \ln \frac{e}{e + 1} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{2e}{e + 1} = 1 - \ln \frac{1 + e}{2}$

Do đó suy ra $a = 1, b = -1 \Rightarrow S = a^3 + b^3 = 0$. **Chọn C.**

Câu 55: Ta có $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = \int_1^e \frac{\ln x d(\ln x)}{(\ln x + 2)^2} = \int_1^e \left(\frac{1}{\ln x + 2} - \frac{2}{(\ln x + 2)^2} \right) d(\ln x)$

$= \left(\ln |\ln x + 2| + \frac{2}{\ln x + 2} \right) \Big|_1^e = \ln \frac{3}{2} + \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} + \ln \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{a} - b = 1.$ **Chọn B.**