



NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 1. NGUYÊN HÀM



I LÝ THUYẾT.

Kí hiệu K là một khoảng, hay một đoạn hay một nửa khoảng.

1) Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

2) Định lý

a. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì $\forall C \in \mathbb{R}$ hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

b. Đảo lại nếu $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $F(x) = G(x) + C$

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ ký hiệu là $\int f(x) = F(x) + C$.

Chú ý: Người ta chứng minh được rằng: “Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K ”

3) Tính chất của nguyên hàm.

a. Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

b. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi số thực k khác 0.

$$\text{Suy ra } \int [k.f(x) + l.g(x)] dx = k \int f(x) dx + l \int g(x) dx$$

c. $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$.

4) Công thức nguyên hàm từng phần

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

5) Công thức đổi biến số

$$\int f[u(x)]u'(x) dx = F[u(x)] + C.$$

6) Bảng nguyên hàm và vi phân của những hàm số thường gặp

Hàm sơ cấp	Hàm số hợp $u = u(x)$	Thường gặp
1) $\int dx = x + C$	1) $\int du = u + C$	1) Vi phân $d(ax + b) = \frac{1}{a} dx$
2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	2) $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	2) $\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\alpha+1} (ax + b)^{\alpha+1} + C$
3) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$	3) $\int \frac{du}{u} = \ln u + C \quad (u(x) \neq 0)$	3) $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln ax + b + C \quad (a \neq 0)$
4) $\int \cos x dx = \sin x + C$	4) $\int \cos u du = \sin u + C$	4) $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$	5) $\int \sin u du = -\cos u + C$	5) $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
6) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	6) $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$ Với $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	6) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax + b)} = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
7) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$	7) $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$ Với $u(x) \neq k\pi$	7) $\int \frac{dx}{\sin^2(ax + b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$
8) $\int e^x dx = e^x + C$	8) $\int e^u du = e^u + C$	8) $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
9) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$	9) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$	9) $\int a^{px+q} dx = \frac{1}{p \cdot \ln a} a^{px+q} + C \quad (0 < a \neq 1)$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

1 LÝ THUYẾT.

Phương pháp đổi biến số được sử dụng khá phổ biến trong việc tính các tích phân bất định. Phương pháp đổi biến số để xác định nguyên hàm có hai dạng dựa trên định lý sau:

a) Nếu: $\int f(x) = F(x) + C$ và với $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm thì: $\int f(u) du = F(u) + C$

b) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục thì đặt $x = \varphi(t)$. Trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó ($\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục) thì ta được: $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int g(t) dt = G(t) + C$.

Từ đó ta trình bày hai dạng toán về phương pháp đổi biến số như sau:

Dạng 1: Sử dụng phương pháp đổi biến số dạng 1 để tính nguyên hàm: $I = \int f(x) dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG.

Ta thực hiện theo các bước sau:

- ☐ Bước 1: Chọn $t = \varphi(x)$. Trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- ☐ Bước 2: Tính vi phân hai vế: $dt = \varphi'(x)dx$.
- ☐ Bước 3: Biểu thị: $f(x)dx = g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = g(t)dt$.
- ☐ Bước 4: Khi đó: $I = \int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$

* Chú ý: Ta có một số dấu hiệu để đổi biến thường gặp:

STT	Dạng nguyên hàm	Cách đặt	Đặc điểm nhận dạng
1	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$t = f(x)$	Biểu thức dưới mẫu
2	$\int f[e^{u(x)}]u'(x) dx$	$t = u(x)$	Biểu thức ở phần số mũ
3	$\int f[u(x)]u'(x) dx$	$t = u(x)$	Biểu thức trong dấu ngoặc
4	$\int f[\sqrt[n]{u(x)}]u'(x) dx$	$t = \sqrt[n]{u(x)}$	Căn thức
5	$\int f(\ln x) \frac{dx}{x}$	$t = \ln x$	$\frac{dx}{x}$ đi kèm biểu thức theo $\ln x$
6	$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx$	$t = \sin x$	$\cos x dx$ đi kèm biểu thức theo $\sin x$
7	$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx$	$t = \cos x$	$\sin x dx$ đi kèm biểu thức theo $\cos x$
8	$\int f(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$ đi kèm biểu thức theo $\tan x$
9	$\int f(\cot x) \frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$	$\frac{dx}{\sin^2 x}$ đi kèm biểu thức theo $\cot x$
10	$\int f(e^{ax})e^{ax} dx$	$t = e^{ax}$	$e^{ax} dx$ đi kèm biểu thức theo e^{ax}
Đôi khi thay cách đặt $t = t(x)$ bởi $t = m \cdot t(x) + n$ ta sẽ biến đổi dễ dàng hơn.			

Các dạng đặc biệt

Dấu hiệu	Cách chọn
Hàm $f(x) = \frac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x + e}$	$t = \tan \frac{x}{2}; \left(\cos \frac{x}{2} \neq 0 \right)$
Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	+ Với: $x+a > 0$ và $x+b > 0$, Đặt: $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ + Với $x+a < 0$ và $x+b < 0$, đặt: $t = \sqrt{x-a} + \sqrt{-x-b}$



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Tìm các họ nguyên hàm sau đây

a) $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$

b) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$

c) $\int x^3 \sqrt{x^2+9} dx$

Câu 2: Tìm các họ nguyên hàm sau đây

a) $\int \frac{\ln^2 x - 1}{x \ln x} dx$

b) $\int \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$

c) $\int \frac{\ln^2 x}{x(1+\sqrt{\ln x+1})} dx$

Câu 3: Tìm nguyên hàm:

a) $I = \int (x+1)\sqrt[3]{3-2x} dx$

b) $J = \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x+2}}$

c) $K = \int \frac{x dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{5x+3}}$

Câu 4: Tìm nguyên hàm: a) $I = \int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx$

b) $J = \int \frac{\cos x dx}{(\sin x + 2 \cos x)^3}$

Câu 5: Tìm nguyên hàm:

1) $I = \int \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$

2) $J = \int \frac{e^{2x}}{1 + \sqrt{e^x + 2}} dx$

3) $K = \int \sqrt{\frac{e^x + 4}{4e^x + 1}} dx$

Câu 6: Tìm nguyên hàm:

1) $I = \int \frac{\ln^2 x + 1}{x} dx$

2) $J = \int \frac{\ln x \cdot dx}{x(1 + \sqrt{3 \ln x + 2})}$

3) $K = \int \frac{\ln x \sqrt[3]{2 + \ln^2 x}}{x} dx$

Câu 7: Tìm nguyên hàm:

1) $I = \int \frac{dx}{2 \sin^2 x - 3 \sin 2x + 2}$

2) $J = \int \frac{dx}{2 \cos x - \sin x + 1}$

Câu 8: Tìm nguyên hàm: $I = \int \frac{\sin^4 2x \cdot \cos^3 x}{\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$

Câu 9: Tìm nguyên hàm: 1) $I = \int \frac{e^x dx}{e^x + 4e^{-x}}$ 2) $J = \int \frac{(\ln x + 1) \ln x}{(\ln x + x + 1)^3} dx$

Câu 10: Tìm nguyên hàm: 1) $I = \int \frac{x^3 - 1}{x(x^6 + 3x^3 + 2)} dx$ 2) $J = \int \frac{dx}{x(x^6 + 1)^2}$

Câu 11: Tìm nguyên hàm: $I = \int \frac{\tan x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int x\sqrt{x+1} dx \quad I_2 = \int \frac{x^2 dx}{(x+3)^{10}} \quad I_3 = \int \frac{(x+1)^{2010}}{(3x+1)^{2012}} dx$$

Bài 2: Tìm nguyên hàm:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x^3 + 3x}{(x^2 + 1)^3} dx & I_2 &= \int \sqrt{x^2 + 2x + 4} dx & I_3 &= \int \frac{1 - x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx, x \neq 0 \\ J_1 &= \int x\sqrt{x^2 - 4} dx & J_2 &= \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 3}} dx & J_3 &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \end{aligned}$$

Bài 3: Tìm nguyên hàm:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}} & I_2 &= \int x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 9} dx \\ I_3 &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} & I_4 &= \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}} \end{aligned}$$

Bài 4: Tìm nguyên hàm:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+1}} dx & I_3 &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} & J_1 &= \int \frac{x}{1 + \sqrt{2x+1}} dx \\ J_2 &= \int \frac{dx}{1+x+\sqrt{x^2+1}} & J_4 &= \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}} & J_5 &= \int \sqrt[3]{3x-x^3} dx \\ J_6 &= \int \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx \end{aligned}$$

Bài 5: Tìm nguyên hàm:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \tan^2 x dx & I_2 &= \int \frac{1}{\cos^4 x} dx & I_3 &= \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \\ J_1 &= \int \tan^3 x dx & J_2 &= \int \frac{5 \sin x + 2 \sin 2x}{\cos 2x + 6 \cos x + 5} dx & J_3 &= \int \frac{\tan x}{\cos^3 x} dx \end{aligned}$$

Bài 6: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int \sin^5 x \cos^3 x dx \quad I_2 = \int \frac{\cos x}{(\sin x + 2 \cos x)^3} dx \quad I_3 = \int \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$$

Bài 7: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx \quad I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx \quad I_3 = \int \frac{\sqrt{2 \ln x + 3}}{x} dx$$

Bài 8: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int \frac{\ln x}{x(\ln x + 1)} dx \quad I_2 = \int \frac{\ln^2 x}{x(1 + \sqrt{\ln x + 1})} dx \quad I_3 = \int \frac{\ln^2(\ln x)}{x \ln x [\ln(\ln x) + 1]} dx$$

Bài 9: Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \frac{\sin 2x dx}{1 + 4 \sin x} \quad J = \int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \quad K = \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

Bài 10: Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \frac{\sin 2x + 3 \cos x}{1 + \sqrt[3]{1 + 2 \sin x}} dx \quad J = \int \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} \cot x dx \quad K = \int \frac{4 \sin^2 3x + \sin 4x}{\tan x + \cot 2x} dx$$

Bài 11: Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \frac{2x + 1}{2 + \sqrt{x - 1}} dx \quad J = \int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \quad K = \int \sqrt{\frac{x - 1}{x + 2}} dx$$

Bài 12: Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \sqrt{\frac{(x + 3)^{2009}}{(2x - 1)^{2013}}} dx \quad K = \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$$

Bài 13: Tìm nguyên hàm:

$$\begin{aligned} 1. I &= \int x \sqrt[3]{x + 1} dx & 2. I &= \int \frac{x}{\sqrt[4]{x + 1}} dx \\ 3. I &= \int \frac{(x + 1) dx}{1 + \sqrt{4x + 1}} & 4. I &= \int \frac{x^5 - x^2}{\sqrt{x^3 + 2}} dx \\ 5. I &= \int \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{3 \sin x + 1}} dx & 6. I &= \int \frac{\tan x dx}{1 + \sqrt[3]{\ln(\cos x) + 1}} \\ 7. I &= \int \frac{\ln x}{(1 + \sqrt{\ln x + 2})x} dx & 8. I &= \int \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 5} \cdot e^x dx \end{aligned}$$

Bài toán 2: (Lượng giác hóa) Sử dụng phương pháp đổi biến số dạng 2 tính tích phân bất định: $I = \int f(x) dx$

Ta thực hiện theo các bước sau:

- ☐ Bước 1: chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- ☐ Bước 2: lấy vi phân hai vế: $dx = \varphi'(t)dt$
- ☐ Bước 3: Biến đổi: $f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = g(t)dt$
- ☐ Bước 4: Khi đó tính: $\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$.

* Lưu ý: Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} x = a \sin t \leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ x = a \cos t \leftrightarrow 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\begin{cases} x = \frac{ a }{\sin t} \leftrightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \\ x = \frac{ a }{\cos t} \leftrightarrow t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \end{cases}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\begin{cases} x = a \tan t \leftrightarrow t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ x = a \cot t \leftrightarrow t \in (0; \pi) \end{cases}$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \vee \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cdot \cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a)\sin^2 t$

Câu 1: Tính tích phân bất định a/ $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ b/ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

Câu 2: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN



LÝ THUYẾT.

Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$. (*)

Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u'.dx$.

Bước 2. Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lý sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.** $I = \int P(x) \sin(ax+b) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(ax+b) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x).dx \\ v = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) \end{cases}$.

• **Dạng 2.** $I = \int P(x) \cos(ax+b) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos(ax+b) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x).dx \\ v = \frac{1}{a} \sin(ax+b) \end{cases}$.

• **Dạng 3.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x).dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax+b} \end{cases}$.

• **Dạng 4.** $I = \int P(x) \ln g(x) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln g(x) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

• **Dạng 5.** $I = \int \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] e^x dx$.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ dv = e^x dx \end{cases}$.



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Tìm $\int x \sin 2x dx$

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$

Câu 3. Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

Câu 4. Tìm nguyên hàm $I = \int (x-1) \sin 2x dx$

Câu 5. Tìm nguyên hàm $\int \sin \sqrt{x} dx$

Câu 6. Họ nguyên hàm của $\int e^x (1+x) dx$ là:

Câu 7. Biết $\int x e^{2x} dx = a x e^{2x} + b e^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính tích ab .

Câu 8. Biết $F(x) = (ax+b)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y = (2x+3)e^x$. Khi đó, tính $a+b$

Câu 9. Biết $\int (x+3).e^{-2x}dx = -\frac{1}{m}e^{-2x}(2x+n)+C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Tính $S = m^2 + n^2$.

Câu 10. Tìm nguyên hàm $I = \int (2x-1)e^{-x}dx$.

Câu 11. Tìm nguyên hàm $\int \ln x dx$

Câu 12. Tìm nguyên hàm $I = \int x \ln x dx$

Câu 13. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x+2)$.

Câu 14. Tìm nguyên hàm của $g(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}$?



NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 1. NGUYÊN HÀM



I LÝ THUYẾT.

Kí hiệu K là một khoảng, hay một đoạn hay một nửa khoảng.

1) Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

2) Định lý

a. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì $\forall C \in \mathbb{R}$ hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

b. Đảo lại nếu $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $F(x) = G(x) + C$

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ ký hiệu là $\int f(x) = F(x) + C$.

Chú ý: Người ta chứng minh được rằng: “Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K ”

3) Tính chất của nguyên hàm.

a. Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

b. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi số thực k khác 0.

$$\text{Suy ra } \int [k.f(x) + l.g(x)] dx = k \int f(x) dx + l \int g(x) dx$$

c. $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$.

4) Công thức nguyên hàm từng phần

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

5) Công thức đổi biến số

$$\int f[u(x)]u'(x) dx = F[u(x)] + C.$$

6) Bảng nguyên hàm và vi phân của những hàm số thường gặp

Hàm sơ cấp	Hàm số hợp $u = u(x)$	Thường gặp
1) $\int dx = x + C$	1) $\int du = u + C$	1) Vi phân $d(ax + b) = \frac{1}{a} dx$
2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	2) $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	2) $\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\alpha+1} (ax + b)^{\alpha+1} + C$
3) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$	3) $\int \frac{du}{u} = \ln u + C \quad (u(x) \neq 0)$	3) $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln ax + b + C \quad (a \neq 0)$
4) $\int \cos x dx = \sin x + C$	4) $\int \cos u du = \sin u + C$	4) $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$	5) $\int \sin u du = -\cos u + C$	5) $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
6) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	6) $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$ Với $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	6) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax + b)} = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
7) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$	7) $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$ Với $u(x) \neq k\pi$	7) $\int \frac{dx}{\sin^2(ax + b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$
8) $\int e^x dx = e^x + C$	8) $\int e^u du = e^u + C$	8) $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
9) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$	9) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$	9) $\int a^{px+q} dx = \frac{1}{p \cdot \ln a} a^{px+q} + C \quad (0 < a \neq 1)$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

1 LÝ THUYẾT.

Phương pháp đổi biến số được sử dụng khá phổ biến trong việc tính các tích phân bất định. Phương pháp đổi biến số để xác định nguyên hàm có hai dạng dựa trên định lý sau:

a) Nếu: $\int f(x) = F(x) + C$ và với $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm thì: $\int f(u) du = F(u) + C$

b) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục thì đặt $x = \varphi(t)$. Trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó ($\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục) thì ta được: $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int g(t) dt = G(t) + C$.

Từ đó ta trình bày hai dạng toán về phương pháp đổi biến số như sau:

Dạng 1: Sử dụng phương pháp đổi biến số dạng 1 để tính nguyên hàm: $I = \int f(x) dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG.

Ta thực hiện theo các bước sau:

- ☐ Bước 1: Chọn $t = \varphi(x)$. Trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- ☐ Bước 2: Tính vi phân hai vế: $dt = \varphi'(x)dx$.
- ☐ Bước 3: Biểu thị: $f(x)dx = g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = g(t)dt$.
- ☐ Bước 4: Khi đó: $I = \int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$

* Chú ý: Ta có một số dấu hiệu để đổi biến thường gặp:

STT	Dạng nguyên hàm	Cách đặt	Đặc điểm nhận dạng
1	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$t = f(x)$	Biểu thức dưới mẫu
2	$\int f[e^{u(x)}]u'(x) dx$	$t = u(x)$	Biểu thức ở phần số mũ
3	$\int f[u(x)]u'(x) dx$	$t = u(x)$	Biểu thức trong dấu ngoặc
4	$\int f[\sqrt[n]{u(x)}]u'(x) dx$	$t = \sqrt[n]{u(x)}$	Căn thức
5	$\int f(\ln x) \frac{dx}{x}$	$t = \ln x$	$\frac{dx}{x}$ đi kèm biểu thức theo $\ln x$
6	$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx$	$t = \sin x$	$\cos x dx$ đi kèm biểu thức theo $\sin x$
7	$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx$	$t = \cos x$	$\sin x dx$ đi kèm biểu thức theo $\cos x$
8	$\int f(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$ đi kèm biểu thức theo $\tan x$
9	$\int f(\cot x) \frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$	$\frac{dx}{\sin^2 x}$ đi kèm biểu thức theo $\cot x$
10	$\int f(e^{ax})e^{ax} dx$	$t = e^{ax}$	$e^{ax} dx$ đi kèm biểu thức theo e^{ax}
Đôi khi thay cách đặt $t = t(x)$ bởi $t = m \cdot t(x) + n$ ta sẽ biến đổi dễ dàng hơn.			

Các dạng đặc biệt

Dấu hiệu	Cách chọn
Hàm $f(x) = \frac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x + e}$	$t = \tan \frac{x}{2}; \left(\cos \frac{x}{2} \neq 0 \right)$
Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	+ Với: $x+a > 0$ và $x+b > 0$, Đặt: $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ + Với $x+a < 0$ và $x+b < 0$, đặt: $t = \sqrt{x-a} + \sqrt{-x-b}$



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Tìm các họ nguyên hàm sau đây

a) $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$

b) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$

c) $\int x^3 \sqrt{x^2+9} dx$

Lời giải

a) Xét $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$.

Đặt $t = \sqrt[4]{1-x^2} \Rightarrow t^4 = 1-x^2$, suy ra $4t^3 dt = -2x dx \Rightarrow -2t^3 dt = x dx$

Khi đó $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx = -2 \int t.t^3 dt = -\frac{2t^5}{5} + C = -\frac{2(1-x^2)^{\frac{5}{4}} \sqrt{1-x^2}}{5} + C$

b) Xét $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1$. Suy ra $\begin{cases} 2t dt = dx \\ x = t^2 - 1 \end{cases}$

Khi đó $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{2t}{(t^2-1)t} dt = \int \frac{2}{t^2-1} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$
 $= \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$

c) Xét $\int x^3 \sqrt{x^2+9} dx = \int x^2 \sqrt{x^2+9}.x dx$.

Đặt $t = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow t^2 = x^2+9$. Suy ra $\begin{cases} t dt = x dx \\ x^2 = t^2 - 9 \end{cases}$

Khi đó $\int x^2 \sqrt{x^2+9}.x dx = \int (t^2-9)t.t dt = \int (t^4-9t^2) dt = \frac{t^5}{5} - 3t^3 + C$.

$$\text{Nhu vậy } \int x^3 \sqrt{x^2+9} \, dx = \frac{(\sqrt{x^2+9})^5}{5} - 3(\sqrt{x^2+9})^3 + C$$

Câu 2: Tìm các họ nguyên hàm sau đây

a) $\int \frac{\ln^2 x - 1}{x \ln x} dx$

b) $\int \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$

c) $\int \frac{\ln^2 x}{x(1+\sqrt{\ln x+1})} dx$

Lời giải

a) Xét $\int \frac{\ln^2 x - 1}{x \ln x} dx$.

Đặt $t = \ln x$, suy ra $dt = \frac{1}{x} dx$

Khi đó $\int \frac{\ln^2 x - 1}{x \ln x} dx = \int \frac{t^2 - 1}{t} dt = \int \left(t - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \ln|t| + C = \frac{\ln^2 x}{2} - \ln|\ln x| + C$

b) Xét $\int \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$.

Đặt $t = \ln(x^2+1)$, suy ra $dt = \frac{2x}{x^2+1} dx \Rightarrow \frac{1}{2} dt = \frac{x}{x^2+1} dx$.

Khi đó $\int \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{4} t^2 + C = \frac{1}{4} \ln^2(x^2+1) + C$.

c) Xét $\int \frac{\ln^2 x}{x(1+\sqrt{\ln x+1})} dx$.

Đặt $t = 1 + \sqrt{1 + \ln x} \Rightarrow (t-1)^2 = 1 + \ln x \Leftrightarrow \ln x = t^2 - 2t$

suy ra $\frac{dx}{x} = (2t-2) dt$.

Khi đó $\int \frac{\ln^2 x}{x(1+\sqrt{\ln x+1})} dx = \int \frac{(t^2-2t)^2}{t} \cdot (2t-2) dt$

$$= 2 \int (t^4 - 5t^3 + 8t^2 - 4t) dt = \frac{2}{5} t^5 - \frac{5}{2} t^4 + \frac{16}{3} t^3 - 4t^2 + C.$$

Nhu vậy $\int \frac{\ln^2 x}{x(1+\sqrt{\ln x+1})} dx = \frac{2}{5} t^5 - \frac{5}{2} t^4 + \frac{16}{3} t^3 - 4t^2 + C$ với $t = 1 + \sqrt{\ln x+1}$

Câu 3: Tìm nguyên hàm:

a) $I = \int (x+1) \sqrt[3]{3-2x} dx$

b) $J = \int \frac{x dx}{\sqrt{2x+2}}$

c) $K = \int \frac{x dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{5x+3}}$

Lời giải.

a. Đặt $t = \sqrt[3]{3-2x} \Rightarrow x = \frac{3-t^3}{2} \Rightarrow dx = -\frac{3}{2}t^2 dt$

$$\Rightarrow I = -\frac{3}{2} \int \left(\frac{3-t^3}{2} + 1 \right) t^2 dt = -\frac{3}{4} \int (5t^3 - t^6) dt$$

$$= -\frac{3}{4} \left(\frac{5t^4}{4} - \frac{t^7}{7} \right) + C = \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt[3]{(3-2x)^7}}{7} - \frac{5\sqrt[3]{(3-2x)^4}}{4} \right) + C$$

b. Đặt $t = \sqrt[3]{2x+2} \Rightarrow x = \frac{t^3-2}{2} \Rightarrow dx = \frac{3}{2}t^2 dt$

$$\text{Suy ra } J = \int \frac{\frac{t^3-2}{2} \cdot \frac{3}{2}t^2 dt}{t} = \frac{3}{4} \int (t^4 - 2t) dt = \frac{3}{4} \left(\frac{t^5}{5} - t^2 \right) + C$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt[3]{(2x+2)^5}}{5} - \sqrt[3]{(2x+2)^2} \right) + C.$$

c. Ta có: $I = \int \frac{x(\sqrt{5x+3} - \sqrt{x+3})dx}{5x+3-x-3} = \frac{1}{4} \int (\sqrt{5x+3} - \sqrt{x+3})dx$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} \sqrt{(5x+3)^3} - \sqrt{(x+3)^3} \right) + C.$$

Câu 4: Tìm nguyên hàm: a) $I = \int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx$

b) $J = \int \frac{\cos x dx}{(\sin x + 2 \cos x)^3}$

Lời giải.

a. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$$\text{Ta có: } I = \int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x \sin x dx = -\int (1 - t^2) t^5 dt$$

$$= \int (t^7 - t^5) dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

b. $I = \int \frac{\cos x dx}{\cos^3 x (\tan x + 2)^3} = \int \frac{dx}{\cos^2 x (\tan x + 2)^3}$

$$\text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx. \text{ Do đó: } J = -\frac{1}{2} \frac{1}{(\tan x + 2)^2} + C$$

Câu 5: Tìm nguyên hàm:

1) $I = \int \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$

2) $J = \int \frac{e^{2x}}{1 + \sqrt{e^x + 2}} dx$

3) $K = \int \sqrt{\frac{e^x + 4}{4e^x + 1}} dx$

Lời giải.

1. Ta có: $I = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2}$. Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

Suy ra: $I = \int \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \ln \left| \frac{t-2}{t-1} \right| + C = \ln \left| \frac{e^x - 2}{e^x - 1} \right| + C$

2. Đặt $t = \sqrt{e^x + 2} \Rightarrow e^x = t^2 - 2 \Rightarrow e^x dx = 2t dt$

$J = \int \frac{(t^2 - 2)2t dt}{1+t} = 2 \int \left(t^2 - t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) + C$

$= 2 \left[\frac{\sqrt{(e^x + 2)^3}}{3} - \frac{e^x + 2}{2} - \sqrt{e^x + 2} + \ln(\sqrt{e^x + 2} + 1) \right] + C$

3. Đặt $t = \sqrt{\frac{e^x + 4}{4e^x + 1}} \Rightarrow e^x = -\frac{t^2 - 4}{4t^2 - 1} \Rightarrow e^x dx = -\frac{30t}{(4t^2 - 1)^2} dt$

$\Rightarrow dx = \frac{30t}{(t^2 - 4)(4t^2 - 1)} dt$

$K = 30 \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 4)(4t^2 - 1)} = 2 \int \left(\frac{1}{t^2 - 4} - \frac{4}{4t^2 - 1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| - \ln \left| \frac{2t-1}{2t+1} \right| + C,$

với $t = \sqrt{\frac{e^x + 4}{4e^x + 1}}$.

Câu 6: Tìm nguyên hàm:

1) $I = \int \frac{\ln^2 x + 1}{x} dx$ 2) $J = \int \frac{\ln x \cdot dx}{x(1 + \sqrt{3 \ln x + 2})}$ 3) $K = \int \frac{\ln x \sqrt{2 + \ln^2 x}}{x} dx$

Lời giải.

1. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

Suy ra $I = \int (t^2 + 1) dt = \left(\frac{t^3}{3} + t \right) + C = \left(\frac{\ln^3 x}{3} + \ln x \right) + C.$

2. Đặt $t = \sqrt{3 \ln x + 2} \Rightarrow \ln x = \frac{t^2 - 2}{3} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2}{3} t dt$

Suy ra $J = \int \frac{\frac{t^2 - 2}{3} \cdot \frac{2}{3} t dt}{1+t} = \frac{2}{9} \int \left(t^2 - t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1) \right) + C$

với $t = \sqrt{3 \ln x + 2}.$

3. Đặt $t = \sqrt[3]{\ln^2 x + 2} \Rightarrow \ln^2 x = t^3 - 2 \Rightarrow \frac{\ln x dx}{x} = \frac{3}{2} t^2 dt$

$$\text{Suy ra } I = \frac{3}{2} \int t^3 dt = \frac{3}{8} t^4 + C = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(3 \ln x + 2)^4} + C$$

Câu 7: Tìm nguyên hàm:

$$1) I = \int \frac{dx}{2 \sin^2 x - 3 \sin 2x + 2} \quad 2) J = \int \frac{dx}{2 \cos x - \sin x + 1}$$

Lời giải.

$$1. \text{ Ta có: } I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x (2 \tan^2 x - 3 \tan x + 1)}$$

$$\text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\text{Ta được: } I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{2t^2 - 3t + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{(2t-1) - 2(t-1)}{(2t-1)(t-1)} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{2}{2t-1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{2t-1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan x - 1}{2 \tan x - 1} \right| + C$$

$$2. \text{ Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \text{ và } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{Suy ra: } 2 \cos x - \sin x + 1 = \frac{-t^2 - 2t + 3}{1+t^2}$$

$$J = -2 \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 3} = -\frac{1}{2} \int \frac{(t+3) - (t-1)}{(t-1)(t+3)} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+3}{t-1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 3}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right| + C$$

Câu 8: Tìm nguyên hàm: $I = \int \frac{\sin^4 2x \cdot \cos^3 x}{\tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} dx$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} \cdot \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = -1$$

$$\text{Suy ra: } I = -16 \int \sin^4 x \cdot \cos^6 x \cos x dx$$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \sin x dx$ nên ta có:

$$I = -16 \int t^4 (1-t^2)^3 dt = 16 \int t^4 (t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1) dt$$

$$= 16 \left(\frac{t^{11}}{11} - \frac{t^9}{3} + \frac{3t^7}{7} - \frac{t^5}{5} \right) + C = 16 \left(\frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^9 x}{3} + \frac{3 \sin^7 x}{7} - \frac{\sin^5 x}{5} \right) + C$$

Câu 9: Tìm nguyên hàm: 1) $I = \int \frac{e^x dx}{e^x + 4e^{-x}}$ 2) $J = \int \frac{(\ln x + 1) \ln x}{(\ln x + x + 1)^3} dx$

Lời giải.

1. Cách 1: với cách đặt $t = e^x$

Cách 2: Xét $J = \int \frac{e^{-x} dx}{e^x + 4e^{-x}}$

$$\text{Ta xét hệ : } \begin{cases} I + 4J = \int \frac{e^x + 4e^{-x}}{e^x + 4e^{-x}} dx = \int dx = x + C_1 \\ I - 4J = \int \frac{e^x - 4e^{-x}}{e^x + 4e^{-x}} dx = \ln|e^x + 4e^{-x}| + C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2I = x + \ln|e^x + 4e^{-x}| + C_1 + C_2 \text{ hay } I = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln|e^x + 4e^{-x}| + C$$

$$2. \text{ Ta có : } J = \int \frac{\ln x + 1}{x \left(\frac{\ln x + 1}{x} + 1 \right)^3} \cdot \frac{\ln x dx}{x^2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{\ln x + 1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\text{Suy ra } J = -\int \frac{t dt}{(t+1)^3} = \int \left[\frac{1}{(t+1)^3} - \frac{1}{(t+1)^2} \right] dt = -\frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{1}{t+1} + C$$

$$= -\frac{x^2}{2(\ln x + 1 + x)^2} + \frac{x}{\ln x + x + 1} + C$$

Câu 10: Tìm nguyên hàm: 1) $I = \int \frac{x^3 - 1}{x(x^6 + 3x^3 + 2)} dx$ 2) $J = \int \frac{dx}{x(x^6 + 1)^2}$

Lời giải.

$$1. \text{ Đặt } t = x^3 \Rightarrow I = \frac{1}{3} \int \frac{t-1}{t(t^2+3t+2)} dt = \frac{1}{3} \int \frac{t-1}{t(t+1)(t+2)} dt$$

$$t-1 = -\frac{3}{2}t(t+1) - \frac{1}{2}(t+1)(t+2) + 2t(t+2)$$

$$\text{Suy ra } I = -\frac{1}{2} \ln|x^3 + 2| - \frac{1}{6} \ln|x^3| + \frac{2}{3} \ln|x^3 + 1| + C.$$

$$2. \text{ Đặt } t = x^6 \Rightarrow I = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t(t+1)^2} = \frac{1}{6} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^6}{x^6 + 1} \right| + \frac{1}{x^6 + 1} + C.$$

Câu 11: Tìm nguyên hàm: $I = \int \frac{\tan x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}$

Lời giải.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$. Suy ra $I = -\int \frac{dt}{t\sqrt{4-t^2}}$

$$\bullet \quad t > 0 \Rightarrow I = -\int \frac{dt}{t^2 \sqrt{\frac{4}{t^2} - 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad (\text{với } y = \frac{2}{t})$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln \left| y + \sqrt{y^2 - 1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{\cos x} + \sqrt{\frac{4}{\cos^2 x} - 1} \right| + C$$

$$\bullet \quad t < 0 \Rightarrow I = \int \frac{dt}{t^2 \sqrt{\frac{4}{t^2} - 1}} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{\cos x} + \sqrt{\frac{4}{\cos^2 x} - 1} \right| + C.$$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int x\sqrt{x+1} dx \quad I_2 = \int \frac{x^2 dx}{(x+3)^{10}} \quad I_3 = \int \frac{(x+1)^{2010}}{(3x+1)^{2012}} dx$$

Bài 2: Tìm nguyên hàm:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x^3 + 3x}{(x^2 + 1)^3} dx & I_2 &= \int \sqrt{x^2 + 2x + 4} dx & I_3 &= \int \frac{1-x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx, x \neq 0 \\ J_1 &= \int x\sqrt{x^2 - 4} dx & J_2 &= \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 3}} dx & J_3 &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \end{aligned}$$

Bài 3: Tìm nguyên hàm:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}} & I_2 &= \int x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 9} dx \\ I_3 &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} & I_4 &= \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}} \end{aligned}$$

Bài 4: Tìm nguyên hàm:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+1}} dx & I_3 &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} & J_1 &= \int \frac{x}{1 + \sqrt{2x+1}} dx \\ J_2 &= \int \frac{dx}{1+x+\sqrt{x^2+1}} & J_4 &= \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}} & J_5 &= \int \sqrt[3]{3x-x^3} dx \\ & & & & J_6 &= \int \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx \end{aligned}$$

Bài 5: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int \tan^2 x dx \quad I_2 = \int \frac{1}{\cos^4 x} dx \quad I_3 = \int \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

$$J_1 = \int \tan^3 x dx \quad J_2 = \int \frac{5 \sin x + 2 \sin 2x}{\cos 2x + 6 \cos x + 5} dx \quad J_3 = \int \frac{\tan x}{\cos^3 x} dx$$

Bài 6: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int \sin^5 x \cos^3 x dx \quad I_2 = \int \frac{\cos x}{(\sin x + 2 \cos x)^3} dx \quad I_3 = \int \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$$

Bài 7: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx \quad I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx \quad I_3 = \int \frac{\sqrt{2 \ln x + 3}}{x} dx$$

Bài 8: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int \frac{\ln x}{x(\ln x + 1)} dx \quad I_2 = \int \frac{\ln^2 x}{x(1 + \sqrt{\ln x + 1})} dx \quad I_3 = \int \frac{\ln^2(\ln x)}{x \ln x [\ln(\ln x) + 1]} dx$$

Bài 9: Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \frac{\sin 2x dx}{1 + 4 \sin x} \quad J = \int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \quad K = \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

Bài 10: Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \frac{\sin 2x + 3 \cos x}{1 + \sqrt[3]{1 + 2 \sin x}} dx \quad J = \int \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} \cot x dx \quad K = \int \frac{4 \sin^2 3x + \sin 4x}{\tan x + \cot 2x} dx$$

Bài 11: Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \frac{2x + 1}{2 + \sqrt{x - 1}} dx \quad J = \int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \quad K = \int \sqrt{\frac{x - 1}{x + 2}} dx$$

Bài 12: Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \sqrt{\frac{(x + 3)^{2009}}{(2x - 1)^{2013}}} dx \quad K = \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$$

Bài 13: Tìm nguyên hàm:

$$\begin{aligned} 1. I &= \int x \sqrt[3]{x + 1} dx & 2. I &= \int \frac{x}{\sqrt[4]{x + 1}} dx \\ 3. I &= \int \frac{(x + 1) dx}{1 + \sqrt{4x + 1}} & 4. I &= \int \frac{x^5 - x^2}{\sqrt{x^3 + 2}} dx \\ 5. I &= \int \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{3 \sin x + 1}} dx & 6. I &= \int \frac{\tan x dx}{1 + \sqrt[3]{\ln(\cos x) + 1}} \\ 7. I &= \int \frac{\ln x}{(1 + \sqrt{\ln x + 2}) x} dx & 8. I &= \int \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 5} \cdot e^x dx \end{aligned}$$

LỜI GIẢI

Bài 1:

$$1. I_1 = \int x\sqrt{x+1}dx.$$

Cách 1: Đặt $t = x+1 \Rightarrow x = t-1$ và $dx = dt$

$$\text{Khi đó } I_1 = \int (t-1)\sqrt{t}dt = \int t\sqrt{t}dt - \int \sqrt{t}dt$$

$$= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\sqrt{t} - \frac{2}{3}t\sqrt{t} + C = 2t\sqrt{t}\left(\frac{t}{5} - \frac{1}{3}\right) + C = 2(x+1)\sqrt{x+1}\left(\frac{x+1}{5} - \frac{1}{3}\right) + C.$$

$$\textbf{Cách 2: } I_1 = \int (x+1)\sqrt{x+1}dx - \int \sqrt{x+1}dx$$

$$= \int (x+1)\sqrt{x+1}d(x+1) - \int \sqrt{x+1}d(x+1)$$

$$= \frac{2(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + C = 2(x+1)\sqrt{x+1}\left(\frac{x+1}{5} - \frac{1}{3}\right) + C$$

$$= 2(x+1)\sqrt{x+1}\left(\frac{3x-2}{15}\right) + C.$$

$$2. I_2 = \int \frac{x^2 dx}{(x+3)^{10}}$$

Đặt $t = x+3 \Rightarrow x = t-3$ và $dx = dt$.

$$\text{Khi đó } I_2 = \int \frac{(t-3)^2}{t^{10}} dt = \int (t^{-8} - 6t^{-9} + 9t^{-10}) dt = -\frac{1}{7t^7} + \frac{3}{4t^8} - \frac{1}{t^9} + C$$

$$= -\frac{1}{7(x+3)^7} + \frac{3}{4(x+3)^8} - \frac{1}{(x+3)^9} + C.$$

$$3. I_3 = \int \left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^{2010} \frac{dx}{(3x+1)^2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x+1}{3x+1} \Rightarrow dt = \frac{-2dx}{(3x+1)^2} \Rightarrow \frac{dx}{(3x+1)^2} = -\frac{1}{2}dt$$

$$\text{Khi đó } I_3 = -\frac{1}{2} \int t^{2010} dt = -\frac{t^{2011}}{4022} + C = -\frac{1}{4022} \left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^{2011} + C$$

Bài 2:

$$1. \text{Đặt } t = x^2 + 1 \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{t^2 + 2}{t^3} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t^3}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t| - \frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| - \frac{1}{2(x^2 + 1)^2} + C.$$

2. Đặt $t = x + \sqrt{x^2 + 2x + 4} \Rightarrow (t - x)^2 = x^2 + 2x + 4$

$$\Rightarrow 2x(t+1) = t^2 - 4 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 4}{2(t+1)} \Rightarrow dx = \frac{t^2 + 2t + 4}{2(t+1)^2} dt$$

Và $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = t - x = t - \frac{t^2 - 4}{2(t+1)} = \frac{t^2 + 2t + 4}{2(t+1)}$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{1}{4} \int \frac{(t^2 + 2t + 4)^2}{(t+1)^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{[(t+1)^2 + 3]^2}{(t+1)^3} dt$$

$$= \frac{1}{4} \int \left[t+1 + \frac{6}{t+1} + \frac{9}{(t+1)^3} \right] dt = \frac{1}{4} \left[\frac{t^2}{2} + t + 6 \ln|t+1| - \frac{9}{2(t+1)^2} \right] + C$$

3. Vì $x \neq 0$ nên chia cả tử và mẫu cho x^2 (Nếu không có điều kiện $x \neq 0$ thì không được phép

chia cả tử và mẫu cho x^2). Khi đó $I_3 = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1} dx$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$.

$$\Rightarrow I_3 = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{t+1 - (t-1)}{(t-1)(t+1)} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right| + C.$$

4. Đặt $t = x^2 - 4 \Rightarrow J_1 = \frac{\sqrt{(x^2 - 4)^3}}{3} + C = \frac{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}}{3} + C.$

5. Đặt $t = x^2 + 3 \Rightarrow J_2 = \sqrt{x^2 + 3} \frac{(x^2 - 6)}{3} + C.$

6. Đặt $t = x + \sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow x = \frac{t^2 - 4}{2t} \Rightarrow dx = \frac{t^2 + 4}{2t^2} dt$ và $\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$

$$\Rightarrow J_3 = \frac{1}{4} \int \left(\frac{t^2 - 4}{t} \right)^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \int \frac{t^4 - 8t^2 + 16}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left(t - \frac{8}{t} + \frac{16}{t^3} \right) dt$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{t^2}{2} - 8 \ln|t| - \frac{8}{t^2} \right) + C \text{ với } t = x + \sqrt{x^2 + 4}.$$

Bài 3:

1. Đặt $t = \sqrt[6]{1+x} \Rightarrow t^6 = 1+x \Rightarrow 6t^5 dt = dx$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
 &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|t+1| + C \\
 &= 2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + 6\sqrt[6]{1+x} - 6 \ln|\sqrt[6]{1+x} + 1| + C
 \end{aligned}$$

2. Đặt $\sqrt{x^2+9} = x-t \Rightarrow x = \frac{t^2-9}{2t} \Rightarrow dx = \frac{t^2+9}{2t^2} dt$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \left(\frac{t^2+9}{2t^2} \right) \cdot \left(\frac{-t^2-9}{2t} \right) \frac{(t^2-9)^2}{4t^2} dt = -\frac{1}{16} \int \frac{(t^4-81)^2}{t^5} dt \\
 &= -\frac{1}{16} \int \left(t^3 - \frac{162}{t} + \frac{6561}{t^5} \right) dt = -\frac{1}{16} \left(\frac{t^4}{4} - 162 \ln|t| - \frac{6561}{4t^4} \right) + C \\
 &= -\frac{1}{16} \left(\frac{(x-\sqrt{x^2+9})^4}{4} - 162 \ln|x-\sqrt{x^2+9}| - \frac{6561}{4(x-\sqrt{x^2+9})^4} \right) + C
 \end{aligned}$$

3. Đặt: $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{tdt}{(t^2-1)t} \\
 &= \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C
 \end{aligned}$$

Vậy $I_3 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right) + C$.

4. Đặt: $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$

$$\Rightarrow \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \frac{tdt}{t\sqrt{1+t}} = \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$$

$$I_4 = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2\sqrt{1+t} + C = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Bài 4:

1. Đặt $t = 2x+1 \Rightarrow I_2 = \frac{3\sqrt[3]{(2x+1)^5}}{20} - \frac{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}{8} + C$.

2. Đặt $t = x + \sqrt{x^2+4} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \right) dx = \left(\frac{x + \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} \right) dx$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{dt}{t} \Rightarrow I_3 = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2+4}| + C.$$

3. Đặt $t = 1 + \sqrt{2x+1} \Rightarrow 2x+1 = (t-1)^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-2t}{2} \Rightarrow dx = (t-1)dt$

$$\Rightarrow J_1 = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2-2t)(t-1)dt}{t} = \frac{1}{2} \int (t^2-3t+2)dt = \frac{t^3}{6} - \frac{3t^2}{4} + t + C$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2x+1})^3}{6} - \frac{3(1+\sqrt{2x+1})^2}{4} + (1+\sqrt{2x+1}) + C.$$

4. Đặt $t = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t-x = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2-2xt+x^2 = x^2+1$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t} \Rightarrow dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt \Rightarrow J_2 = \frac{1}{2} \int \frac{t^2+1}{t^2(1+t)}dt$$

Ta có : $\frac{t^2+1}{t^2(t+1)} = \frac{2}{t+1} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \Rightarrow J_2 = 2\ln|t+1| - \frac{1}{t} - \ln|t| + C$

Hay $J_2 = 2\ln|1+x+\sqrt{x^2+1}| + x - \sqrt{x^2+1} - \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C.$

5. Đặt $t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

6. Đặt $t = \sqrt[6]{x+1}$

7. Đặt $t = \frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$

Bài 5:

1. $I_1 = \int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \tan x - x + C.$

2. $I_2 = \int \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

Khi đó $I_2 = \int (1+t^2)dt = t + \frac{1}{3}t^3 + C = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C.$

3. $I_3 = \int \frac{1}{1+\sin x} dx = \int \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} dx = \int \frac{-2d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$

$$= -\int \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C.$$

4. $J_1 = \int \tan^3 x dx = \int \tan x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} \tan x dx - \int \tan x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \tan x dx - \int \tan x dx$$

$$A = \int \frac{1}{\cos^2 x} \tan x dx$$

$$\text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$A = \int \frac{1}{\cos^2 x} \tan x dx = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C_1 = \frac{1}{2} \tan^2 x + C_1$$

$$B = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(-\sin x \cdot dx)}{\cos x}$$

$$\text{Đặt } a = \cos x \Rightarrow da = -\sin x dx$$

$$B = - \int \frac{(-\sin x \cdot dx)}{\cos x} = - \int \frac{da}{a} = -\ln|a| + C_2 = -\ln|\cos x| + C_2$$

$$\text{Vậy } J_1 = A - B = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

$$5. I_2 = \frac{1}{2} \int \frac{(4 \cos x + 5) \sin x \cdot dx}{\cos^2 x + 3 \cos x + 2}. \text{ Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\text{Khi đó } J_2 = - \int \frac{4t + 5}{t^2 + 3t + 2} dt = - \int \frac{3(t+1) + (t+2)}{(t+1)(t+2)} dt$$

$$= - \int \left(\frac{3}{t+2} + \frac{1}{t+1} \right) dt = -3 \ln|t+2| - \ln|t+1| + C$$

$$= -3 \ln|\cos x + 2| - \ln|\cos x + 1| + C.$$

$$6. J_3 = \int \frac{\tan x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -dt$$

$$I_3 = \int \frac{-dt}{t^4} = -\frac{1}{3 \cdot t^3} + C = -\frac{1}{3 \cdot \cos^3 x} + C.$$

Bài 6:

$$1. I_1 = \int \sin^5 x (1 - \sin^2 x) \cos x \cdot dx. \text{ Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \cdot dx$$

$$\Rightarrow I_1 = \int t^5 (1 - t^2) dt = \int (t^5 - t^7) dt = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C.$$

$$2. I_2 = \int \frac{dx}{\cos^2 x (\tan x + 2)^3}. \text{ Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow I_2 = \int \frac{dt}{(t+2)^3} = -\frac{1}{2(t+2)^2} + C = -\frac{1}{2(\tan x + 2)^2} + C.$$

$$3. \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow I_3 = \int \frac{\tan^4 x (1 + \tan^2 x) dx}{1 - \tan^2 x}. \text{ Đặt } t = \tan x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_3 &= \int \frac{t^4}{1-t^2} dt = \int \left[-t^2 - 1 + \frac{1}{(1-t)(1+t)} \right] dt \\ &= \int \left[-t^2 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) \right] dt = -\frac{t^3}{3} - t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \\ &= -\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{Cách 2 : } I_3 = \int \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx = \int \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x (1 - \tan^2 x)} dx$$

Đặt $t = \tan x$.

Bài 7:

$$1. I_1 = \int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{(1 - \sin^2 x) \sin^2 x} dx$$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dt}{(1-t^2)t^2} = \int \frac{t^2 - (1-t^2)}{(1-t^2)t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2-1} \right) dt \\ &= \int \frac{1}{t^2} dt - \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} (\ln|t-1| - \ln|t+1|) + C \\ &= -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = -\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$2. I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx$$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = \int \frac{1}{(t-2)(t-3)} dt = \int \frac{(t-2) - (t-3)}{(t-2)(t-3)} dt \\ &= \int \frac{1}{t-3} dt - \int \frac{1}{t-2} dt = \ln|t-3| - \ln|t-2| + C \\ &= \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| + C = \ln \left| \frac{\sin x - 3}{\sin x - 2} \right| + C. \end{aligned}$$

3. Đặt $t = 2 \ln x + 3 \Rightarrow dt = \frac{2}{x} dx \Rightarrow \frac{1}{2} dt = \frac{1}{x} dx$.

Khi đó $I_1 = \int \frac{1}{2} \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t \sqrt{t} + C = \frac{t \sqrt{t}}{3} + C = \frac{(2 \ln x + 3) \sqrt{2 \ln x + 3}}{3} + C$

Bài 8:

1. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow I_1 = \int \frac{t dt}{t+1} = \int \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = t - \ln|t+1| + C$

$= \ln|x| - \ln|1 + \ln x| + C = \ln \left| \frac{x}{1 + \ln x} \right| + C$.

2. Đặt $t = 1 + \sqrt{1 + \ln x} \Rightarrow (t-1)^2 = 1 + \ln x \Rightarrow \ln x = t^2 - 2t$

Lấy vi phân hai vế ta được: $\frac{dx}{x} = (2t-2) dt$

$\Rightarrow I_2 = 2 \int (t^4 - 5t^3 + 8t^2 - 4t) dt = \frac{2}{5} t^5 - \frac{5}{2} t^4 + \frac{16}{3} t^3 - 4t^2 + C$

Với $t = 1 + \sqrt{\ln x + 1}$.

3. Đặt $t = \ln(\ln x) + 1 \Rightarrow dt = \frac{dx}{x \ln x}$

$\Rightarrow I_3 = \int \left(t - 2 + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{\ln^2(\ln x)}{2} - 2 \ln(\ln x) + \ln|\ln(\ln x)| + C$.

Bài 9

1. Ta có: $I = 2 \int \frac{\sin x \cos x dx}{1 + 4 \sin x}$

Đặt $t = 1 + 4 \sin x \Rightarrow \sin x = \frac{t-1}{4} \Rightarrow \cos x dx = \frac{1}{4} dt$

Suy ra: $I = 2 \int \frac{\frac{t-1}{4} \frac{1}{4} dt}{t} = \frac{1}{8} \int \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{8} (t - \ln|t|) + C$.

$= \frac{1}{8} (1 + 4 \sin x - \ln|1 + 4 \sin x|) + C$.

2. Ta có: $\sin \frac{\pi}{3} = \sin \left[\left(x + \frac{\pi}{3} \right) - x \right] = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos x - \sin x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$

Suy ra: $\frac{1}{\sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} \right)$

$$\text{Do đó: } I = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\ln \left| \frac{\sin x}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} \right| \right) + C.$$

$$\begin{aligned} \text{Cách khác: } I &= 2 \int \frac{dx}{\sin x (\sin x + \sqrt{3} \cos x)} = 2 \int \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \sqrt{3} \cot x)} \\ &= -2 \int \frac{d(\cot x)}{1 + \sqrt{3} \cot x} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \ln |\sqrt{3} \cot x + 1| + C. \end{aligned}$$

3. Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ và ta có được

$$\begin{aligned} K &= \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{[(1+t)+(1-t)]^2}{(1-t)^2(1+t)^2} dt = \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{2}{(t+1)(t-1)} + \frac{1}{(t+1)^2} \right] dt \\ &= \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} \right] dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{2t}{t^2-1} \right) + C = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \frac{\tan x}{\cos x} \right) + C. \end{aligned}$$

Bài 10:

1. Ta có: $I = \int \frac{(2 \sin x + 3) \cos x dx}{1 + \sqrt[3]{1 + 2 \sin x}}.$

$$\text{Đặt } t = 1 + \sqrt[3]{1 + 2 \sin x} \Rightarrow \sin x = \frac{(t-1)^3 - 1}{2} \Rightarrow \cos x dx = \frac{3}{2} (t-1)^2 dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \frac{[(t-1)^2 + 2] \frac{3}{2} (t-1)^2 dt}{t} = \frac{3}{2} \int \frac{(t^2 - 2t + 3)(t^2 - 2t + 1) dt}{t} \\ &= \frac{3}{2} \int \left(t^3 - 4t^2 + 8t - 8 + \frac{3}{t} \right) dt = \frac{3}{2} \left[\frac{t^4}{4} - \frac{4t^3}{3} + 4t^2 - 8t + 3 \ln |t| \right] + C, \text{ với } t = 1 + \sqrt[3]{1 + 2 \sin x} \end{aligned}$$

2. Ta có: $J = \int \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \cot x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \sqrt[3]{\cot^2 x} \cdot \cot x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx$

$$\text{Đặt } t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow J = -\int \sqrt[3]{t^2} \cdot t dt = -\int t^{\frac{5}{3}} dt = -\frac{3}{8} t^{\frac{8}{3}} + C$$

3. Ta có: $\frac{4 \sin^2 3x + \sin 4x}{\tan x + \cot 2x} = \frac{2(1 - \cos 6x) + \sin 4x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}}$

$$\begin{aligned} &= (\sin 4x - 2 \cos 6x + 2) \sin 2x = \sin 6x \sin 2x - 2 \cos 6x \cdot \sin 2x + 2 \sin 2x \\ &= \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 8x - \sin 8x + \sin 4x + 2 \sin 2x \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{8} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 4x - \cos 2x + C$$

Bài 11:

1. Đặt $t = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow x = (t-2)^2 + 1 = t^2 - 4t + 5 \Rightarrow dx = (2t-4)dt$.

Suy ra: $I = \int \frac{(2t^2 - 8t + 11)(2t-4)dt}{t} = 2 \int (2t^2 - 12t + 27 - \frac{22}{t})dt$

$$= 2 \left(\frac{2t^3}{3} - 6t^2 + 27t - 22 \ln|t| \right) + C \text{ với } t = 2 + \sqrt{x-1}.$$

2. Đặt $t - x = \sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow x = \frac{t^2 - 2}{2t} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \frac{t^2 + 2}{t^2} dt$

Và $\sqrt{x^2 + 2} = t - \frac{t^2 - 2}{2t} = \frac{t^2 + 2}{2t}.$

Suy ra: $J = \int \frac{\left(\frac{t^2 - 2}{2t} + 1 \right) \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 + 2}{t^2}}{\frac{t^2 + 2}{2t}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^2 + 2t - 2}{t^2} dt$

$$= \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{2}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left(t + 2 \ln|t| + \frac{2}{t} \right) + C$$

$$= \left(\sqrt{x^2 + 2} + 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 2} \right| \right) + C.$$

3. Đặt $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \Rightarrow x = \frac{2t^2 + 1}{1 - t^2} \Rightarrow dx = \frac{6t}{(t^2 - 1)^2} dt$

$$\Rightarrow K = \int \frac{6t^2}{(t^2 - 1)^2} dt = 6 \int \left[\frac{1}{t^2 - 1} + \frac{1}{(t^2 - 1)^2} \right] dt$$

Mà: $\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{(t+1) - (t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right)$

$$\frac{1}{(t^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \frac{[(t+1) - (t-1)]^2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right]$$

Suy ra: $\int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right|; \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2} = -\frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right).$

Vậy: $I = \frac{3}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{3t}{t^2 - 1} + C \text{ với } t = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}.$

Bài 12:

$$1. I = \int \sqrt{\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)^{2009}} \frac{1}{(2x-1)^2} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x+3}{2x-1}} \Rightarrow t^2 = \frac{x+3}{2x-1} \Rightarrow -\frac{2}{7} t dt = \frac{1}{(2x-1)^2} dx$$

$$\text{Suy ra } I = -\frac{2}{7} \int t^{2010} dt = -\frac{2}{1407} t^{2011} = -\frac{2}{1407} \sqrt{\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)^{2011}} + C$$

$$3. \text{Đặt } t = x + \sqrt{x^2 + 3x + 2} \Rightarrow (t-x)^2 = x^2 + 3x + 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2 - 2}{2t + 3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} = \frac{dt}{2t + 3} \\ x - 1 = \frac{t^2 - 2t - 5}{2t + 3} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int \frac{dt}{t^2 - 2t - 5} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{6}}{t-1+\sqrt{6}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{6}+\sqrt{x^2+3x+2}}{x-1+\sqrt{6}+\sqrt{x^2+3x+2}} \right| + C.$$

Bài 13:

$$1. \text{Đặt } t = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow x = t^3 - 1, \text{ta có : } I = \frac{3}{7} \sqrt[3]{(x+1)^7} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} + C.$$

$$2. \text{Đặt } t = \sqrt[4]{x+1} \Rightarrow x = t^4 - 1, I = \frac{4}{7} \sqrt[4]{(x+1)^7} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{(x+1)^3} + C$$

$$3. \text{Đặt } t = 1 + \sqrt{4x+1} \Rightarrow x = \frac{1}{4}(t^2 - 2t)$$

$$I = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{3}{2} t^2 + 6t - 4 \ln |t| \right) \text{ với } t = 1 + \sqrt{4x+1}.$$

$$4. \text{Đặt } t = \sqrt{x^3 + 2} \Rightarrow x^3 = t^2 - 2 \Rightarrow x^2 dx = \frac{2}{3} t dt$$

$$I = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 2)^3} - 2\sqrt{x^3 + 2} + C$$

$$5. \text{Đặt } t = \sqrt{3 \sin x + 1} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{3}(t^2 - 1)$$

$$I = \frac{4}{27} \sqrt{(3 \sin x + 1)^3} + \frac{2}{9} \sqrt{3 \sin x + 1} + C.$$

$$6. \text{Đặt } t = 1 + \sqrt[3]{\ln(\cos x) + 1} \Rightarrow \ln(\cos x) = t^3 - 3t^2 + 3t - 2$$

$$\Rightarrow \tan x dx = 3(t^2 - 2t + 1)dt$$

$$I = \frac{3}{2}(1 + \sqrt[3]{\ln(\cos x) + 1})^2 - 6(1 + \sqrt[3]{\ln(\cos x) + 1}) + 3 \ln|1 + \sqrt[3]{\ln(\cos x) + 1}| + C$$

7. Đặt $t = 1 + \sqrt{\ln x + 2} \Rightarrow \ln x = t^2 - 2t - 1 \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2(t - 1)dt$

$$I = \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + 2t + 2 \ln|t| + C \text{ với } t = 1 + \sqrt{\ln x + 2}.$$

8. Đặt $t + e^x = \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 5} \Rightarrow e^x = \frac{5 - t^2}{2t - 4}$

$$\Rightarrow e^x dx = \frac{-t^2 + 4t - 5}{2(t - 2)^2}; \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 5} = \frac{t^2 - 4t + 5}{2t - 4}$$

$$I = -\frac{1}{4} \int \frac{[(t - 2)^2 + 1]^2}{(t - 2)^3} dt = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{2}t^2 - 2t + 2 \ln|t - 2| - \frac{1}{2(t - 2)^2} \right] + C$$

với $t = \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 5} - e^x$.

Bài toán 2: (Lượng giác hóa) Sử dụng phương pháp đổi biến số dạng 2 tính tích phân bất định: $I = \int f(x)dx$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

- ☐ Bước 1: chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- ☐ Bước 2: lấy vi phân hai vế: $dx = \varphi'(t)dt$
- ☐ Bước 3: Biến đổi: $f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = g(t)dt$
- ☐ Bước 4: Khi đó tính: $\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$.

* Lưu ý: Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} x = a \sin t \leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ x = a \cos t \leftrightarrow 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\begin{cases} x = \frac{ a }{\sin t} \leftrightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \\ x = \frac{ a }{\cos t} \leftrightarrow t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \end{cases}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\begin{cases} x = a \tan t \leftrightarrow t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ x = a \cot t \leftrightarrow t \in (0; \pi) \end{cases}$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \vee \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cdot \cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a) \sin^2 t$

Câu 1: Tính tích phân bất định a/ $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ b/ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

Lời giải

a/ Đặt: $x = \sin t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \cos t dt$

Suy ra: $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{\cos t dt}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} = \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \frac{dt}{\cos^2 t} = d(\tan t).$

Khi đó: $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \int d(\tan t) = \tan t + C = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

b/ Vì: $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + (\sqrt{2})^2$, nên

Đặt: $x+1 = \sqrt{2} \tan t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \sqrt{2} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t}; \tan t = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$

Suy ra: $\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{dt}{\sqrt{2(\tan^2 t + 1)} \cdot \cos^2 t} = \frac{dt}{\sqrt{2} \cos t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos t dt}{1-\sin^2 t}$

$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\cos t dt}{\sin t - 1} - \frac{\cos t dt}{\sin t + 1} \right).$

Khi đó: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{\cos t dt}{\sin t - 1} - \frac{\cos t dt}{\sin t + 1} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sin t - 1}{\sin t + 1} \right| + C (*)$

Từ: $\tan t = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \tan^2 t = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} = \frac{(x+1)^2}{2} \Rightarrow \sin^2 t = 1 - \frac{2}{x^2 + 2x + 3}$. Ta tìm được $\sin t$, thay vào (*) ta tính được I.

Nhận xét:

Câu 2: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Lời giải

Đặt: $x = \tan t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$

Suy ra: $\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 t)^3}} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \cos t dt$.

Khi đó: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

Nhận xét:

1. Sở dĩ trong ví dụ trên có kết quả như vậy vì:

$$\begin{cases} \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos t > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\cos^2 t} = \cos t; \sin t = \tan t \cdot \cos t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

2. Phương pháp trên áp dụng để giải bài toán tổng quát: $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^{2k+1}}} (k \in \mathbb{Z})$.

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN



LÝ THUYẾT.

Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$. (*)

Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u , v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u' dx$.

Bước 2. Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lý sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.** $I = \int P(x) \sin(ax+b) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(ax+b) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) dx \\ v = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) \end{cases}$$

• **Dạng 2.** $I = \int P(x) \cos(ax+b) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos(ax+b) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) dx \\ v = \frac{1}{a} \sin(ax+b) \end{cases}$$

• **Dạng 3.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax+b} \end{cases}$$

• **Dạng 4.** $I = \int P(x) \ln g(x) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = \ln g(x) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$$

• **Dạng 5.** $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$$



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Tìm $\int x \sin 2x dx$

Lời giải

Ta có: $I = \int x \sin 2x dx$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = uv - \int v du = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$

Lời giải

$$\text{Ta có: } I = \int f(x) dx = \int x \sin x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \text{ Ta có } \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$$

$$I = \int f(x) dx = \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Câu 3. Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } ab = \frac{1}{8}.$$

Câu 4. Tìm nguyên hàm $I = \int (x-1) \sin 2x dx$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x-1 \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int (x-1) \sin 2x dx = -\frac{1}{2} (x-1) \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} (x-1) \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Câu 5. Tìm nguyên hàm $\int \sin \sqrt{x} dx$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x}, \text{ ta có } \int \sin \sqrt{x} dx = \int 2t \sin t dt$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2t \\ dv = \sin t dt \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} du = 2 dt \\ v = -\cos t \end{cases}$$

$$\int 2t \sin t dt = -2t \cos t + \int 2 \cos t dt = -2t \cos t + 2 \sin t + C = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$$

Câu 6. Họ nguyên hàm của $\int e^x (1+x) dx$ là:

Lời giải

Ta có:

$$I = \int e^x (1+x) dx = \int e^x dx + \int e^x x dx = e^x + C_1 + \underbrace{\int x e^x dx}_{I_1}.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int x e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_1 = xe^x - \int xe^x dx \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}xe^x + C_2.$$

$$\Rightarrow I = e^x + \frac{1}{2}xe^x + C.$$

Câu 7. Biết $\int xe^{2x} dx = axe^{2x} + be^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính tích ab .

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \int xe^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$\text{Vậy: } a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{4} \Rightarrow ab = -\frac{1}{8}.$$

Câu 8. Biết $F(x) = (ax+b)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y = (2x+3)e^x$. Khi đó, tính $a+b$

Lời giải

Ta có: $\int (2x+3)e^x dx = (ax+b)e^x$, nghĩa là:

$$[(ax+b)e^x]' = (2x+3)e^x$$

$$\Leftrightarrow a.e^x + e^x(ax+b) = (2x+3)e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x(ax+a+b) = (2x+3)e^x$$

Đồng nhất hệ số ta được: $a=2$ và $b=1$

Vậy $a+b=3$.

Câu 9. Biết $\int (x+3).e^{-2x} dx = -\frac{1}{m}e^{-2x}(2x+n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Tính $S = m^2 + n^2$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+3 \\ dv = e^{-2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int (x+3).e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}(x+3) + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}.e^{-2x}(x+3) - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-2x}.(2x+6+1) + C = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+7) + C \Rightarrow m=4; n=7.$$

$$S = m^2 + n^2 = 65.$$

Câu 10. Tìm nguyên hàm $I = \int (2x-1)e^{-x} dx$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } I = -(2x-1)e^{-x} + \int 2.e^{-x} dx = -(2x-1)e^{-x} - 2e^{-x} + C = -(2x+1)e^{-x} + C.$$

Câu 11. Tìm nguyên hàm $\int \ln x dx$

Lời giải

Ta có: $I = \int \ln x dx$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = uv - \int v du = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Câu 12. Tìm nguyên hàm $I = \int x \ln x dx$

Lời giải

Ta đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{2} x dx.$$

Câu 13. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x+2)$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+2) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+2} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{suy ra } \int f(x) dx &= \int x \ln(x+2) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \int \left(x - 2 + \frac{4}{x+2} \right) dx = \frac{x^2 - 4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2 - 4x}{2} + C. \end{aligned}$$

Câu 14. Tìm nguyên hàm của $g(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}$?

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{-1}{x+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)} dx = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{-\ln x}{x+1} + (\ln|x| - \ln|x+1|) + C = \frac{-\ln x}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$$



NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 1. NGUYÊN HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC
CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

- Câu 1:** (MĐ 101-2022) Cho $\int f(x)dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?
- A. $f(x) = -\sin x$. B. $f(x) = -\cos x$. C. $f(x) = \sin x$. D. $f(x) = \cos x$.
- Câu 2:** (MĐ 101-2022) Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?
- A. $\int f(x)dx = e^x + x^2 + C$. B. $\int f(x)dx = e^x + C$.
C. $\int f(x)dx = e^x - x^2 + C$. D. $\int f(x)dx = e^x + 2x^2 + C$.
- Câu 3:** (MĐ 101-2022) Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 2x}$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?
- A. $\int f(x)dx = x + \tan 2x + C$. B. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2} \cot 2x + C$.
C. $\int f(x)dx = x - \frac{1}{2} \tan 2x + C$. D. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2} \tan 2x + C$.
- Câu 4:** (MĐ 102-2022) Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?
- A. $\int f(x)dx = e^x + 2x^2 + C$. B. $\int f(x)dx = e^x - x^2 + C$.
C. $\int f(x)dx = e^x + C$. D. $\int f(x)dx = e^x + x^2 + C$.
- Câu 5:** (MĐ 102-2022) Cho $\int f(x)dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?
- A. $f(x) = -\sin x$. B. $f(x) = \cos x$. C. $f(x) = \sin x$. D. $f(x) = -\cos x$.
- Câu 6:** (MĐ 102-2022) Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 2x}$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?
- A. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2} \cot 2x + C$. B. $\int f(x)dx = x + \tan 2x + C$.
C. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2} \tan 2x + C$. D. $\int f(x)dx = x - \frac{1}{2} \tan 2x + C$.
- Câu 7:** (MĐ 103-2022) Khẳng định nào dưới đây **đúng**?
- A. $\int e^x dx = xe^x + C$. B. $\int e^x dx = e^{x+1} + C$. C. $\int e^x dx = -e^{x+1} + C$. D. $\int e^x dx = e^x + C$.
- Câu 8:** (MĐ 103-2022) Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$. B. $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$. C. $f_1(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. D. $f_2(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 9: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^x + C$. B. $\int f(x)dx = x + 2e^{2x} + C$.

C. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$. D. $\int f(x)dx = x + e^{2x} + C$.

Câu 10: (MĐ 104-2022) Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ B. $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$ C. $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ D. $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

Câu 11: (MĐ 104-2022) Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int e^x dx = e^x + C$. B. $\int e^x dx = xe^x + C$. C. $\int e^x dx = -e^{x+1} + C$. D. $\int e^x dx = e^{x+1} + C$.

Câu 12: (MĐ 104-2022) Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^x + C$. B. $\int f(x)dx = x + 2e^{2x} + C$.

C. $\int f(x)dx = x + e^{2x} + C$. D. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Câu 13: (TK 2020-2021) Cho hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)dx = 3x^3 - x + C$. B. $\int f(x)dx = x^3 - x + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C$. D. $\int f(x)dx = x^3 - C$.

Câu 14: (TK 2020-2021) Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$. B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $\int f(x)dx = 2\sin 2x + C$. D. $\int f(x)dx = -2\sin 2x + C$.

Câu 15: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = 2x + C$. B. $\int f(x)dx = x^2 + 4x + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C$. D. $\int f(x)dx = x^3 + 4x + C$

Câu 16: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = e^x + 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = e^{x-2} + C$. B. $\int f(x)dx = e^x + 2x + C$.

C. $\int f(x)dx = e^x + C$. D. $\int f(x)dx = e^x - 2x + C$.

Câu 17: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = x^2 + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x^2 + 3x + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + 3x + C$.

C. $\int f(x)dx = x^3 + 3x + C$. D. $\int f(x)dx = 2x + C$.

- Câu 18: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x) = e^x + 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int f(x)dx = e^{x-1} + C$. **B.** $\int f(x)dx = e^x - x + C$.
C. $\int f(x)dx = e^x + x + C$. **D.** $\int f(x)dx = e^x + C$.
- Câu 19: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x) = x^2 + 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?
A. $\int f(x)dx = x^3 + x + C$. **B.** $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + x + C$.
C. $\int f(x)dx = x^2 + x + C$. **D.** $\int f(x)dx = 2x + C$.
- Câu 20: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x) = e^x + 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int f(x)dx = e^x + 3x + C$. **B.** $\int f(x)dx = e^x + C$.
C. $\int f(x)dx = e^{x-3} + C$. **D.** $\int f(x)dx = e^x - 3x + C$.
- Câu 21: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int f(x)dx = x^4 - 3x + C$. **B.** $\int f(x)dx = x^4 + C$.
C. $\int f(x)dx = 4x^3 - 3x + C$. **D.** $\int f(x)dx = 12x^2 + C$.
- Câu 22: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = 4 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int f(x)dx = -\sin x + C$. **B.** $\int f(x)dx = 4x + \sin x + C$.
C. $\int f(x)dx = 4x - \sin x + C$. **D.** $\int f(x)dx = 4x + \cos x + C$.
- Câu 23: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = 2 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int f(x)dx = 2x + \sin x + C$. **B.** $\int f(x)dx = 2x + \cos x + C$.
C. $\int f(x)dx = -\sin x + C$. **D.** $\int f(x)dx = 2x - \sin x + C$.
- Câu 24: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int f(x)dx = x^4 - 2x + C$. **B.** $\int f(x)dx = 4x^3 - 2x + C$.
C. $\int f(x)dx = 12x^2 + C$. **D.** $\int f(x)dx = x^4 + C$.
- Câu 25: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = 1 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int f(x)dx = -\sin x + C$. **B.** $\int f(x)dx = x - \sin x + C$.
C. $\int f(x)dx = x + \cos x + C$. **D.** $\int f(x)dx = x + \sin x + C$.
- Câu 26: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int f(x)dx = x^4 - x + C$. **B.** $\int f(x)dx = 12x^2 + C$.
C. $\int f(x)dx = 4x^3 - x + C$. **D.** $\int f(x)dx = x^4 + C$.
- Câu 27: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int f(x)dx = 12x^2 + C$. **B.** $\int f(x)dx = 4x^3 - 4x + C$.
C. $\int f(x)dx = x^4 - 4x + C$. **D.** $\int f(x)dx = x^4 + C$.

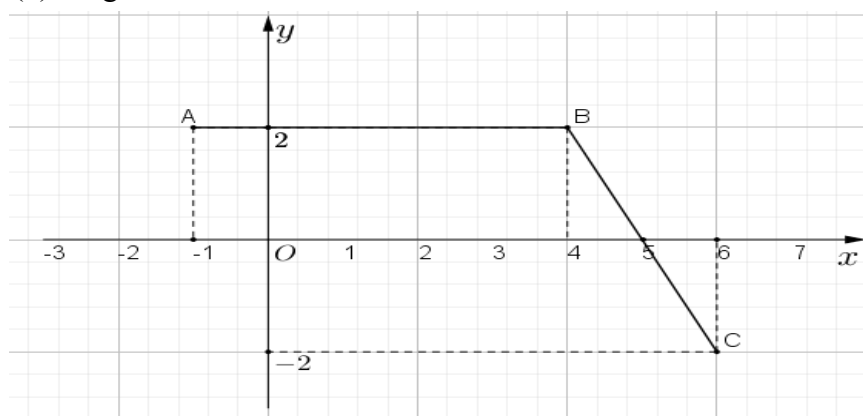
Câu 28: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 27. B. 29. C. 12. D. 33.

Câu 29: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng:

A. 23. B. 11. C. 10. D. 21.

Câu 30: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$, liên tục trên $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(-1) = -1$. Giá trị của $F(5) + F(6)$ bằng



A. 23. B. 21 C. 25 D. 19

Câu 31: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$. B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.
C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$. D. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.

Câu 32: (Mã 101 - 2020 Lần 1) $\int x^2 dx$ bằng

A. $2x + C$. B. $\frac{1}{3}x^3 + C$. C. $x^3 + C$. D. $3x^3 + C$

Câu 33: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là

A. $4x^4 + C$. B. $3x^2 + C$. C. $x^4 + C$. D. $\frac{1}{4}x^4 + C$.

Câu 34: (Mã 103 - 2020 Lần 1) $\int x^4 dx$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5 + C$ B. $4x^3 + C$ C. $x^5 + C$ D. $5x^5 + C$

Câu 35: (Mã 104 - 2020 Lần 1) $\int x^5 dx$ bằng

A. $5x^4 + C$. B. $\frac{1}{6}x^6 + C$. C. $x^6 + C$. D. $6x^6 + C$.

Câu 36: (Mã 101- 2020 Lần 2) $\int 5x^4 dx$ bằng

- A. $\frac{1}{5}x^5 + C$. B. $x^5 + C$. C. $5x^5 + C$. D. $20x^3 + C$.

Câu 37: (Mã 102 - 2020 Lần 2) $\int 6x^5 dx$ bằng

- A. $6x^6 + C$. B. $x^6 + C$. C. $\frac{1}{6}x^6 + C$. D. $30x^4 + C$.

Câu 38: (Mã 103 - 2020 Lần 2) $\int 3x^2 dx$ bằng

- A. $3x^3 + C$. B. $6x + C$. C. $\frac{1}{3}x^3 + C$. D. $x^3 + C$.

Câu 39: (Mã 104 - 2020 Lần 2) $\int 4x^3 dx$ bằng

- A. $4x^4 + C$. B. $\frac{1}{4}x^4 + C$. C. $12x^2 + C$. D. $x^4 + C$.

Câu 40: (Mã 103 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- A. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$ B. $x^4 + x^2 + C$ C. $x^5 + x^3 + C$. D. $4x^3 + 2x + C$

Câu 41: (Mã 104 - 2019) Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

- A. $x^2 + C$. B. $2x^2 + C$. C. $2x^2 + 4x + C$. D. $x^2 + 4x + C$.

Câu 42: (Mã 102 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

- A. $x^2 + C$. B. $x^2 + 6x + C$. C. $2x^2 + C$. D. $2x^2 + 6x + C$.

Câu 43: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

- A. $\sin x + 3x^2 + C$. B. $-\sin x + 3x^2 + C$. C. $\sin x + 6x^2 + C$. D. $-\sin x + C$.

Câu 44: (Mã 105 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

- A. $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$ B. $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$
C. $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$ D. $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$

Câu 45: (Mã 101 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

- A. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$ B. $3x^2 + 1 + C$ C. $x^3 + x + C$ D. $x^4 + x^2 + C$

Câu 46: (Mã 103 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

- A. $x^2 + 3x + C$. B. $2x^2 + 3x + C$. C. $x^2 + C$. D. $2x^2 + C$.

Câu 47: (Đề Minh Họa 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.
C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Câu 48: (Đề Tham Khảo 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

Câu 49: (Mã 110 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C$

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$

Câu 50: (Mã 123 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$

B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

C. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$

D. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$

Câu 51: (Mã 104 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

A. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$

B. $3x^2 + 2x + C$

C. $x^3 + x^2 + C$

D. $x^4 + x^3 + C$

Câu 52: (Đề Tham Khảo 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

A. $e^x + 1 + C$

B. $e^x + x^2 + C$

C. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

D. $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

Câu 53: (Mã 101 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là

A. $x^2 + C$.

B. $x^2 + 5x + C$.

C. $2x^2 + 5x + C$.

D. $2x^2 + C$.

Câu 54: (Mã 104 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

B. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$

C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$

D. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

Câu 55: (Mã 102 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x$ là

A. $4x^3 + 1 + C$

B. $x^5 + x^2 + C$

C. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C$

D. $x^4 + x + C$

Câu 56: (Đề Tham Khảo 2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C$

B. $\frac{x^3}{3} + x + C$

C. $6x + C$

D. $x^3 + x + C$

Câu 57: (Đề Tham Khảo 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ thỏa mãn

$f'(x) = \frac{2}{2x-1}, f(0) = 1, f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $2 + \ln 15$

B. $3 + \ln 15$

C. $\ln 15$

D. $4 + \ln 15$

- Câu 58:** (Mã 105 2017) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$.
 Tìm $F(x)$.
- A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$ B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$
 C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$ D. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$
- Câu 59:** (Mã 104 2017) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
- A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$ B. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$
 C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$ D. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$
- Câu 60:** (Mã 123 2017) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$ B. $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$
 C. $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$ D. $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$
- Câu 61:** (Mã 101 – 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng
- A. $2e^x + 2x^2 + C$. B. $\frac{1}{2}e^{2x} + x^2 + C$. C. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$. D. $e^{2x} + 4x^2 + C$.
- Câu 62:** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x - 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng
- A. $2e^x - 4x^2 + C$. B. $\frac{1}{2}e^{2x} - 4x^2 + C$. C. $e^{2x} - 8x^2 + C$. D. $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$.
- Câu 63:** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x - x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng
- A. $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$. B. $e^{2x} - 4x^2 + C$. C. $2e^x - 2x^2 + C$. D. $\frac{1}{2}e^{2x} - x^2 + C$.
- Câu 64:** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x + 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng
- A. $e^{2x} + 8x^2 + C$. B. $2e^x + 4x^2 + C$. C. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$. D. $\frac{1}{2}e^{2x} + 4x^2 + C$.
- Câu 65:** (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là
- A. $x + 3\ln(x-1) + C$. B. $x - 3\ln(x-1) + C$.
 C. $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C$. D. $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C$.

- Câu 66:** (Mã đề 104 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là
- A. $3\ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$ B. $3\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$
 C. $3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C$ D. $3\ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C$.
- Câu 67:** (Mã đề 101 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là
- A. $2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$ B. $2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C$.
 C. $2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C$ D. $2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C$.
- Câu 68:** (Mã 102 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là
- A. $3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + c$ B. $3\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + c$.
 C. $3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + c$ D. $3\ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + c$.
- Câu 69:** (Mã 103 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ là
- A. $2\ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C$ B. $2\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C$.
 C. $2\ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C$ D. $2\ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C$.
- Câu 70:** (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1) \cdot f'(x)$ là
- A. $\frac{x^2+2x-2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$ B. $\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} + C$ C. $\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}} + C$ D. $\frac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$.
- Câu 71:** (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1) \cdot f'(x)$ là
- A. $\frac{x^2+2x-3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$ B. $\frac{x+3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$ C. $\frac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+3}} + C$ D. $\frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}} + C$.

- Câu 72: (Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$
- A. $\frac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}} + C$. B. $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. C. $\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. D. $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.
- Câu 73: (Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$ là
- A. $\frac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. B. $\frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C$. C. $\frac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. D. $\frac{2x^2+x+4}{\sqrt{x^2+4}} + C$.
- Câu 74: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là:
- A. $-\sin 2x + \cos 2x + C$. B. $-2\sin 2x + \cos 2x + C$.
C. $-2\sin 2x - \cos 2x + C$. D. $2\sin 2x - \cos 2x + C$.
- Câu 75: (Đề Tham Khảo 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là:
- A. $2x^2 \ln x + 3x^2$. B. $2x^2 \ln x + x^2$.
C. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$. D. $2x^2 \ln x + x^2 + C$.
- Câu 76: (Mã 104 2017)** Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.
- A. $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$ B. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$
C. $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$ D. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$
- Câu 77: (Mã 105 2017)** Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$
- A. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$ B. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$
C. $\int f'(x)\ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$ D. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$
- Câu 78: (Mã 110 2017)** Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.
- A. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$ B. $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$
C. $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$ D. $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$

Câu 79: (Mã 103 2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{391}{400}$

B. $-\frac{1}{40}$

C. $-\frac{41}{400}$

D. $-\frac{1}{10}$



NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 1. NGUYÊN HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: (MĐ 101-2022) Cho $\int f(x)dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- A. $f(x) = -\sin x$. B. $f(x) = -\cos x$. C. $f(x) = \sin x$. D. $f(x) = \cos x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Vậy $f(x) = \sin x$.

Câu 2: (MĐ 101-2022) Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- A. $\int f(x)dx = e^x + x^2 + C$. B. $\int f(x)dx = e^x + C$.
C. $\int f(x)dx = e^x - x^2 + C$. D. $\int f(x)dx = e^x + 2x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x)dx = \int (e^x + 2x)dx = e^x + x^2 + C$.

Câu 3: (MĐ 101-2022) Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 2x}$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- A. $\int f(x)dx = x + \tan 2x + C$. B. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2} \cot 2x + C$.
C. $\int f(x)dx = x - \frac{1}{2} \tan 2x + C$. D. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2} \tan 2x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có, $\int f(x)dx = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 2x}\right)dx = \int 1dx - \int \frac{1}{\cos^2 2x}dx = x - \frac{1}{2} \tan 2x + C$.

Câu 4: (MĐ 102-2022) Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- A. $\int f(x)dx = e^x + 2x^2 + C$. B. $\int f(x)dx = e^x - x^2 + C$.

C. $\int f(x)dx = e^x + C$. **D. $\int f(x)dx = e^x + x^2 + C$.**

Lời giải

Chọn D

Có: $\int f(x)dx = \int (e^x + 2x)dx = e^x + x^2 + C$.

Câu 5: (MĐ 102-2022) Cho $\int f(x)dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = -\sin x$. B. $f(x) = \cos x$. **C. $f(x) = \sin x$.** D. $f(x) = -\cos x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = (-\cos x)' = \sin x$.

Câu 6: (MĐ 102-2022) Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}\cot 2x + C$.

B. $\int f(x)dx = x + \tan 2x + C$.

C. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}\tan 2x + C$.

D. $\int f(x)dx = x - \frac{1}{2}\tan 2x + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 2x}\right)dx = x - \frac{1}{2}\tan 2x + C$.

Câu 7: (MĐ 103-2022) Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int e^x dx = xe^x + C$. B. $\int e^x dx = e^{x+1} + C$. C. $\int e^x dx = -e^{x+1} + C$. **D. $\int e^x dx = e^x + C$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 8: (MĐ 103-2022) Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$.

B. $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $f_1(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

D. $f_2(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F'(x) = (\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 9: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^x + C$.

B. $\int f(x)dx = x + 2e^{2x} + C$.

C. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

D. $\int f(x)dx = x + e^{2x} + C.$

Lời giải

Chọn C

Áp dụng bảng nguyên hàm ta có $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

Câu 10: (MĐ 104-2022) Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$

B. $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$

C. $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

D. $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = [F(x)]' = (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Câu 11: (MĐ 104-2022) Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int e^x dx = e^x + C.$

B. $\int e^x dx = xe^x + C.$

C. $\int e^x dx = -e^{x+1} + C.$

D. $\int e^x dx = e^{x+1} + C.$

Lời giải

Chọn A

Câu 12: (MĐ 104-2022) Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^x + C.$

B. $\int f(x)dx = x + 2e^{2x} + C.$

C. $\int f(x)dx = x + e^{2x} + C.$

D. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

Lời giải

Chọn D

- Ta có $\int (1 + e^{2x})dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

Câu 13: (TK 2020-2021) Cho hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)dx = 3x^3 - x + C.$

B. $\int f(x)dx = x^3 - x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C.$

D. $\int f(x)dx = x^3 - C.$

Lời giải

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản: $\int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C.$

Câu 14: (TK 2020-2021) Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + C.$

C. $\int f(x)dx = 2\sin 2x + C.$

D. $\int f(x)dx = -2\sin 2x + C.$

Lời giải

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản: $\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C.$

Câu 15: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = 2x + C.$ **B.** $\int f(x)dx = x^2 + 4x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C.$

D. $\int f(x)dx = x^3 + 4x + C$

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int (x^2 + 4)dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C.$

Câu 16: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = e^x + 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = e^{x-2} + C.$ **B.** $\int f(x)dx = e^x + 2x + C.$

C. $\int f(x)dx = e^x + C.$ **D.** $\int f(x)dx = e^x - 2x + C.$

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int (e^x + 2)dx = e^x + 2x + C.$

Câu 17: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = x^2 + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x^2 + 3x + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + 3x + C.$

C. $\int f(x)dx = x^3 + 3x + C.$

D. $\int f(x)dx = 2x + C.$

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int (x^2 + 3x)dx = \frac{x^3}{3} + 3x + C.$

Câu 18: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = e^x + 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = e^{x-1} + C.$ **B.** $\int f(x)dx = e^x - x + C.$

C. $\int f(x)dx = e^x + x + C.$

D. $\int f(x)dx = e^x + C.$

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = \int (e^x + 1)dx = e^x + x + C$

Câu 19: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = x^2 + 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int f(x)dx = x^3 + x + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + x + C.$

C. $\int f(x)dx = x^2 + x + C.$

D. $\int f(x)dx = 2x + C.$

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x + C.$$

Câu 20: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = e^x + 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = e^x + 3x + C.$

B. $\int f(x) dx = e^x + C.$

C. $\int f(x) dx = e^{x-3} + C.$ **D.** $\int f(x) dx = e^x - 3x + C.$

Lời giải

Có $\int (e^x + 3) dx = e^x + 3x + C.$

Câu 21: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = x^4 - 3x + C.$

B. $\int f(x) dx = x^4 + C.$

C. $\int f(x) dx = 4x^3 - 3x + C.$

D. $\int f(x) dx = 12x^2 + C.$

Lời giải

Ta có; $\int f(x) dx = \int (4x^3 - 3) dx = x^4 - 3x + C.$

Câu 22: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = 4 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = -\sin x + C.$

B. $\int f(x) dx = 4x + \sin x + C.$

C. $\int f(x) dx = 4x - \sin x + C.$

D. $\int f(x) dx = 4x + \cos x + C.$

Lời giải

Ta có $\int f(x) dx = \int (4 + \cos x) dx = 4x + \sin x + C.$

Câu 23: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = 2 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = 2x + \sin x + C.$

B. $\int f(x) dx = 2x + \cos x + C.$

C. $\int f(x) dx = -\sin x + C.$

D. $\int f(x) dx = 2x - \sin x + C.$

Lời giải

$\int f(x) dx = \int (2 + \cos x) dx = 2x + \sin x + C.$

Ta chọn đáp án **A.**

Câu 24: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = x^4 - 2x + C.$

B. $\int f(x) dx = 4x^3 - 2x + C.$

C. $\int f(x) dx = 12x^2 + C.$

D. $\int f(x) dx = x^4 + C.$

Lời giải

Ta có: $\int f(x) dx = \int (4x^3 - 2) dx = x^4 - 2x + C.$ **Chọn A**

Câu 25: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = 1 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = -\sin x + C.$

B. $\int f(x) dx = x - \sin x + C.$

C. $\int f(x)dx = x + \cos x + C.$

D. $\int f(x)dx = x + \sin x + C.$

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = \int (1 + \cos x)dx = \int dx + \int \cos x dx = x + \sin x + C.$

Câu 26: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x^4 - x + C.$

B. $\int f(x)dx = 12x^2 + C.$

C. $\int f(x)dx = 4x^3 - x + C.$

D. $\int f(x)dx = x^4 + C.$

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = x^4 - x + C.$

Câu 27: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = 12x^2 + C.$

B. $\int f(x)dx = 4x^3 - 4x + C.$

C. $\int f(x)dx = x^4 - 4x + C.$

D. $\int f(x)dx = x^4 + C.$

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int (4x^3 - 4)dx = x^4 - 4x + C$

Câu 28: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên

hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 27.

B. 29.

C. 12.

D. 33.

Lời giải

Ta có $I = \int_0^{-1} f(x)dx + 2 \int_0^2 f(x)dx = F(-1) - F(0) + 2F(2) - 2F(0).$

Do đó $I = F(-1) + 2F(2) - 3F(0) = F(-1) + 2F(2) - 6 \Rightarrow F(-1) + 2F(2) = I + 6.$

Mà $\int_0^{-1} f(x)dx = -\int_{-1}^0 (3x^2 + 4)dx = -5$ và $2 \int_0^2 f(x)dx = 2 \left(\int_0^1 (3x^2 + 4)dx + \int_1^2 (2x + 5)dx \right) = 26.$

Suy ra $I = 26 - 5 = 21.$

Vậy $F(-1) + 2F(2) = 21 + 6 = 27.$

Câu 29: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên

hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng:

A. 23.

B. 11.

C. 10.

D. 21.

Lời giải

Vì F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $F(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 2x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$

Ta có: $F(0) = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2.$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 5$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

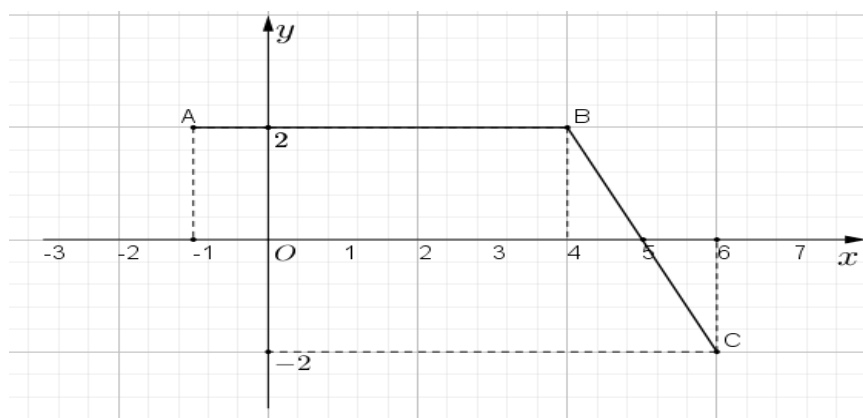
Do đó hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $F(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Leftrightarrow 5 = 4 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = 1$.

$$\text{Vậy } F(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

Ta có: $F(-1) + 2F(2) = -1 - 2 + 2 + 2(4 + 6 + 1) = 21$.

Câu 30: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$, liên tục trên $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(-1) = -1$. Giá trị của $F(5) + F(6)$ bằng



A. 23.

B. 21

C. 25

D. 19

Lời giải

Xét hàm số $f(x)$ với $x \in [-1; 6]$; từ đồ thị hàm số ta có:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -1 \leq x \leq 4 \\ -2x + 10 & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } F(x) = \begin{cases} 2x + C_1 & -1 \leq x \leq 4 \\ -x^2 + 10x + C_2 & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 4$ nên hàm số $F(x)$ liên tục tại $x = 4$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} F(x) = F(4) \text{ suy ra: } 8 + C_1 = 24 + C_2$$

$$\text{Mặt khác: } F(-1) = -1 \Rightarrow C_1 - 2 = -1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$\text{Từ } 8 + C_1 = 24 + C_2 \text{ ta có: } C_2 = -15$$

$$\text{Vậy: } F(x) = \begin{cases} 2x + 1 & -1 \leq x \leq 4 \\ -x^2 + 10x - 15 & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Suy ra $F(5) + F(6) = 19$.

Câu 31: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$.

B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.

C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

D. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa thì hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

Câu 32: (Mã 101 - 2020 Lần 1) $\int x^2 dx$ bằng

A. $2x + C$.

B. $\frac{1}{3}x^3 + C$.

C. $x^3 + C$.

D. $3x^3 + C$

Lời giải

Chọn B

Câu 33: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là

A. $4x^4 + C$.

B. $3x^2 + C$.

C. $x^4 + C$.

D. $\frac{1}{4}x^4 + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$.

Câu 34: (Mã 103 - 2020 Lần 1) $\int x^4 dx$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5 + C$

B. $4x^3 + C$

C. $x^5 + C$

D. $5x^5 + C$

Lời giải

Chọn A

$\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$.

Câu 35: (Mã 104 - 2020 Lần 1) $\int x^5 dx$ bằng

A. $5x^4 + C$.

B. $\frac{1}{6}x^6 + C$.

C. $x^6 + C$.

D. $6x^6 + C$.

Lời giải

Chọn B

Câu 36: (Mã 101- 2020 Lần 2) $\int 5x^4 dx$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5 + C$.

B. $x^5 + C$.

C. $5x^5 + C$.

D. $20x^3 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int 5x^4 dx = x^5 + C$.

Câu 37: (Mã 102 - 2020 Lần 2) $\int 6x^5 dx$ bằng

- A. $6x^6 + C$. **B.** $x^6 + C$. C. $\frac{1}{6}x^6 + C$. D. $30x^4 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int 6x^5 dx = x^6 + C$.

Câu 38: (Mã 103 - 2020 Lần 2) $\int 3x^2 dx$ bằng

- A. $3x^3 + C$. B. $6x + C$. C. $\frac{1}{3}x^3 + C$. **D.** $x^3 + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$

Câu 39: (Mã 104 - 2020 Lần 2) $\int 4x^3 dx$ bằng

- A. $4x^4 + C$. B. $\frac{1}{4}x^4 + C$. C. $12x^2 + C$. **D.** $x^4 + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int 4x^3 dx = x^4 + C$.

Câu 40: (Mã 103 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- A. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$ B. $x^4 + x^2 + C$ C. $x^5 + x^3 + C$. D. $4x^3 + 2x + C$

Lời giải

Chọn A

$\int f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$.

Câu 41: (Mã 104 - 2019) Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

- A. $x^2 + C$. B. $2x^2 + C$. C. $2x^2 + 4x + C$. D. $x^2 + 4x + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x) dx = \int (2x + 4) dx = x^2 + 4x + C$.

Câu 42: (Mã 102 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

A. $x^2 + C$.

B. $x^2 + 6x + C$.

C. $2x^2 + C$.

D. $2x^2 + 6x + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\int (2x + 6) dx = x^2 + 6x + C$$

Câu 43: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

A. $\sin x + 3x^2 + C$.

B. $-\sin x + 3x^2 + C$.

C. $\sin x + 6x^2 + C$.

D. $-\sin x + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (\cos x + 6x) dx = \sin x + 3x^2 + C.$$

Câu 44: (Mã 105 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

A. $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$

B. $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$

C. $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$

D. $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$

Lời giải

Chọn A

Câu 45: (Mã 101 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$

B. $3x^2 + 1 + C$

C. $x^3 + x + C$

D. $x^4 + x^2 + C$

Lời giải

Chọn A

$$\int (x^3 + x^2) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Câu 46: (Mã 103 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

A. $x^2 + 3x + C$.

B. $2x^2 + 3x + C$.

C. $x^2 + C$.

D. $2x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + C.$$

Câu 47: (Đề Minh Họa 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \sqrt{2x-1}dx = \frac{1}{2} \int (2x-1)^{\frac{1}{2}} d(2x-1) \\ &= \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C\end{aligned}$$

Câu 48: (Đề Tham Khảo 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int \left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Câu 49: (Mã 110 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C$

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$ ($a \neq 0$) ta được $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$.

Câu 50: (Mã 123 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$

B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

C. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$

D. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

Câu 51: (Mã 104 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

A. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$

B. $3x^2 + 2x + C$

C. $x^3 + x^2 + C$

D. $x^4 + x^3 + C$

Lời giải

Chọn A

Câu 52: (Đề Tham Khảo 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

- A. $e^x + 1 + C$ B. $e^x + x^2 + C$ C. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$ D. $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

Lời giải

Chọn C

Câu 53: (Mã 101 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là

- A. $x^2 + C$. B. $x^2 + 5x + C$. C. $2x^2 + 5x + C$. D. $2x^2 + C$.

Lời giải

Chọn B

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là $F(x) = x^2 + 5x + C$.

Câu 54: (Mã 104 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

- A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$ B. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$
C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$ D. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, ($0 < a \neq 1$) ta được đáp án B

Câu 55: (Mã 102 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x$ là

- A. $4x^3 + 1 + C$ B. $x^5 + x^2 + C$ C. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C$ D. $x^4 + x + C$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int (x^4 + x) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 56: (Đề Tham Khảo 2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

- A. $x^3 + C$ B. $\frac{x^3}{3} + x + C$ C. $6x + C$ D. $x^3 + x + C$

Lời giải

Chọn D

$\int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C$.

Câu 57: (Đề Tham Khảo 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ thỏa mãn

$f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $2 + \ln 15$

B. $3 + \ln 15$

C. $\ln 15$

D. $4 + \ln 15$

Lời giải

Chọn C

$$\int \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| + C = f(x)$$

Với $x < \frac{1}{2}$, $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$ nên $f(-1) = 1 + \ln 3$

Với $x > \frac{1}{2}$, $f(1) = 2 \Rightarrow C = 2$ nên $f(3) = 2 + \ln 5$

Nên $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$

Câu 58: (Mã 105 2017) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$.

Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$

D. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$

Theo bài ra ta có: $F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

Câu 59: (Mã 104 2017) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$

B. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$

C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

D. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

Lời giải

Chọn C

Có $F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

Câu 60: (Mã 123 2017) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$

B. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$

C. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$

D. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \int (3 - 5 \sin x) dx = 3x + 5 \cos x + C$

Theo giả thiết $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$.

Câu 61: (Mã 101 – 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

- A. $2e^x + 2x^2 + C$. B. $\frac{1}{2}e^{2x} + x^2 + C$. C. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$. D. $e^{2x} + 4x^2 + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x) = e^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int f(2x) dx = \frac{1}{2} \int f(2x) d2x = \frac{1}{2} F(2x) + C = \frac{1}{2} e^{2x} + 2x^2 + C.$$

Câu 62: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x - 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

- A. $2e^x - 4x^2 + C$. B. $\frac{1}{2}e^{2x} - 4x^2 + C$. C. $e^{2x} - 8x^2 + C$. D. $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x) = e^x - 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$

Suy ra:

$$f(x) = F'(x) = (e^x - 2x^2)' = e^x - 4x \Rightarrow f(2x) = e^{2x} - 8x$$

$$\Rightarrow \int f(2x) dx = \int (e^{2x} - 8x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - 4x^2 + C.$$

Câu 63: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x - x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

- A. $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$. B. $e^{2x} - 4x^2 + C$. C. $2e^x - 2x^2 + C$. D. $\frac{1}{2}e^{2x} - x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int f(2x) dx = \frac{1}{2} \int f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} F(2x) + C = \frac{1}{2} e^{2x} - 2x^2 + C.$$

Câu 64: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x + 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

- A.** $e^{2x} + 8x^2 + C$. **B.** $2e^x + 4x^2 + C$. **C.** $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$. **D.** $\frac{1}{2}e^{2x} + 4x^2 + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int f(2x)dx = \frac{1}{2} \int f(t)dt = \frac{1}{2} F(t) + C = \frac{1}{2} [e^t + 2t^2] + C = \frac{1}{2} e^{2x} + (2x)^2 + C = \frac{1}{2} e^{2x} + 4x^2 + C.$$

Câu 65: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

- A.** $x + 3\ln(x-1) + C$. **B.** $x - 3\ln(x-1) + C$.
C. $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C$. **D.** $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C$.

Lời giải

Chọn A

Trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $x-1 > 0$ nên

$$\int f(x)dx = \int \frac{x+2}{x-1}dx = \int \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)dx = x + 3\ln|x-1| + C = x + 3\ln(x-1) + C.$$

Câu 66: (Mã đề 104 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là

- A.** $3\ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$ **B.** $3\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$
C. $3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C$ **D.** $3\ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2} = \frac{3(x-2)+4}{(x-2)^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}. \text{ Do đó}$$

$$\int \frac{3x-2}{(x-2)^2}dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right)dx = 3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$$

Câu 67: (Mã đề 101 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

- A. $2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$. B. $2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C$.
 C. $2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C$. D. $2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\int f(x) dx = \int \frac{2x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2} dx = \int \left[\frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} \right] dx = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$$

Câu 68: (Mã 102 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

- A. $3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + c$. B. $3\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + c$.
 C. $3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + c$. D. $3\ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + c$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{3x-3+2}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)+2}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \int f(x) dx &= \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx = 3 \int \frac{d(x-1)}{x-1} + 2 \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} \\ &= 3\ln|x-1| + 2 \int (x-1)^{-2} d(x-1) = 3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C \text{ vì } x > 1. \end{aligned}$$

Câu 69: (Mã 103 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ là

- A. $2\ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C$. B. $2\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C$.
 C. $2\ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C$. D. $2\ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x+2=t \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow dx=dt$ với $t > 0$

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{2t-1}{t^2} dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = 2\ln t + \frac{1}{t} + C$$

$$\text{Hay } \int f(x) dx = 2\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C.$$

Câu 70: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số

$g(x) = (x+1)f'(x)$ là

- A. $\frac{x^2+2x-2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$. B. $\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} + C$. C. $\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}} + C$. D. $\frac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Tính } g(x) &= \int (x+1)f'(x)dx = (x+1)f(x) - \int (x+1)'f(x)dx = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \int f(x)dx \\ &= \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2} + C = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} + C. \end{aligned}$$

Câu 71: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số

$g(x) = (x+1)f'(x)$ là

- A. $\frac{x^2+2x-3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$. B. $\frac{x+3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$. C. $\frac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+3}} + C$. D. $\frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}} + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int (x+1)f'(x)dx = (x+1)f(x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}} + C.$$

Câu 72: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số

$g(x) = (x+1)f'(x)$

- A. $\frac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}} + C$. B. $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. C. $\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. D. $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } \int g(x)dx = \int (x+1)f'(x)dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \int g(x)dx = (x+1)f(x) - \int f(x)dx \Rightarrow \int g(x)dx = \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+1}} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$\Rightarrow \int g(x)dx = \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1} + C \Rightarrow \int g(x)dx = \frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

$$\Rightarrow \int g(x)dx = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

Câu 73: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số

$g(x) = (x+1)f'(x)$ là

- A. $\frac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. B. $\frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C$. C. $\frac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. D. $\frac{2x^2+x+4}{\sqrt{x^2+4}} + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x' \cdot \sqrt{x^2+4} - (\sqrt{x^2+4})' \cdot x}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \cdot x}{x^2+4} = \frac{\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} = \frac{4}{(\sqrt{x^2+4})^3}$$

$$\text{Suy ra: } g(x) = (x+1)f'(x) = x \cdot f'(x) + f'(x)$$

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \int [x \cdot f'(x) + f'(x)] dx = \int x \cdot f'(x) dx + \int f'(x) dx \\ &= \int \frac{4x}{(\sqrt{x^2+4})^3} dx + \int f'(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Xét: } I = \int \frac{4x}{(\sqrt{x^2+4})^3} dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 4 \Rightarrow dt = 2x dx$$

$$\text{Suy ra: } I = \int \frac{2dt}{(\sqrt{t})^3} = \int \frac{2dt}{t^{\frac{3}{2}}} = 2 \int t^{-\frac{3}{2}} dt = 2 \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C_1 = \frac{-4}{\sqrt{t}} + C_1 = \frac{-4}{\sqrt{x^2+4}} + C_1$$

$$\text{và: } J = \int f'(x) dx = f(x) + C_2$$

$$\text{Vậy: } \int g(x) dx = \frac{-4}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + C = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C.$$

$$\text{Cách 2: } g(x) = (x+1)f'(x)$$

$$\Rightarrow \int g(x) dx = \int (x+1)f'(x) dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \int g(x) dx = (x+1)f(x) - \int f(x) dx = \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+4}} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

$$= \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}} - \int \frac{d(x^2+4)}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}} - \sqrt{x^2+4} + C = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C.$$

Câu 74: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là:

A. $-\sin 2x + \cos 2x + C$. **B.** $-2\sin 2x + \cos 2x + C$.

C. $-2\sin 2x - \cos 2x + C$.

D. $2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Lời giải

Chọn C

Do $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$

$$\text{nên } f(x)e^x = (\cos 2x)' \Leftrightarrow f(x)e^x = -2\sin 2x.$$

$$\text{Khi đó ta có } \int f(x)e^x dx = \cos 2x + C.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \int f(x)e^x dx = \cos 2x + C \Leftrightarrow \int f(x)d(e^x) = \cos 2x + C$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x - \int f'(x)e^x dx = \cos 2x + C \Leftrightarrow \int f'(x)e^x dx = -2\sin 2x - \cos 2x + C.$$

Vậy tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là $-2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Câu 75: (Đề Tham Khảo 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là:

A. $2x^2 \ln x + 3x^2$.

B. $2x^2 \ln x + x^2$.

C. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$.

D. $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) = 4x(1 + \ln x) \Rightarrow F(x) = \int (4x(1 + \ln x)) dx$$

đặt

$$\begin{cases} u = 1 + \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \\ dv = 4x \Rightarrow v = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow F(x) = 2x^2(1 + \ln x) - \int 2x dx = 2x^2(1 + \ln x) - x^2 + C = 2x^2 \ln x + x^2 + C$$

Câu 76: (Mã 104 2017) Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$

B. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$

C. $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$

D. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2x^2}$. Chọn $f(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Suy ra $\int f'(x) \ln x dx = \int \frac{2}{x^3} \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{2}{x^3} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{-1}{x^2} \end{cases}$.

Khi đó: $\int f'(x) \ln x dx = \int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{x^2} + \int \frac{1}{x^3} dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$.

Câu 77: (Mã 105 2017) Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$

A. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$

B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$

C. $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

D. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = x.F'(x) = x.\left(-\frac{1}{3}.x^{-3}\right)' = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$

$\Rightarrow f'(x) = -3x^{-4} \Rightarrow f'(x) \ln x = -3x^{-4} \ln x$

Vậy $\int f'(x) \ln x dx = \int (-3x^{-4} \ln x) dx = -3 \int \ln x . x^{-4} dx$

Đặt $u = \ln x; dv = x^{-4} dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}; v = \frac{x^{-3}}{-3}$

Nên $\int f'(x) \ln x dx = -3 \int \ln x . x^{-4} dx = -3 \left(\frac{\ln x}{-3x^3} + \int \frac{x^{-4}}{3} dx \right) = \frac{\ln x}{x^3} - \int x^{-4} dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

Câu 78: (Mã 110 2017) Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x) e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$

B. $\int f'(x) e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$

C. $\int f'(x) e^{2x} dx = \frac{2-x}{2} e^x + C$

D. $\int f'(x) e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài ta có $\int f(x).e^{2x} dx = (x-1)e^x + C$, suy ra $f(x).e^{2x} = [(x-1)e^x]' = e^x + (x-1).e^x$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-x} + (x-1).e^{-x} = x.e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (1-x).e^{-x}$$

$$\text{Suy ra } K = \int f'(x)e^{2x} dx = \int (1-x)e^x dx = \int (1-x)d(e^x) = e^x(1-x) + \int e^x dx = (2-x)e^x + C.$$

Câu 79: (Mã 103 2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{391}{400}$

B. $-\frac{1}{40}$

C. $-\frac{41}{400}$

D. $-\frac{1}{10}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C$$

$$\text{Do } f(2) = -\frac{1}{25}, \text{ nên ta có } C = -9. \text{ Do đó } f(x) = -\frac{1}{x^4 + 9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}.$$



NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 1. NGUYÊN HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

<i>Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp</i>	
① $\int 0 dx = C.$	$\longrightarrow \int k dx = kx + C.$
② $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\longrightarrow \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
③ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C.$
④ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C.$
⑤ $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	$\longrightarrow \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C.$
⑥ $\int \cos x dx = \sin x + C.$	$\longrightarrow \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C.$
⑦ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C.$
⑧ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C.$
⑨ $\int e^x dx = e^x + C.$	$\longrightarrow \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\longrightarrow \int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C.$
♦ Nhận xét. Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.	

Một số nguyên tắc tính cơ bản

- Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.
- Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.
- Bậc chẵn của sin và cosin $\Rightarrow$ Hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a$, $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a$.
- Chứa tích các căn thức của $x \xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.

Câu 1: Tìm nguyên hàm $\int x(x^2 + 7)^{15} dx$?

- A.** $\frac{1}{2}(x^2 + 7)^{16} + C$ **B.** $-\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$ **C.** $\frac{1}{16}(x^2 + 7)^{16} + C$ **D.** $\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

- A.** $3e^x + C$. **B.** $\frac{1}{3}e^{3x} + C$. **C.** $\frac{1}{3}e^x + C$. **D.** $3e^{3x} + C$.

Câu 3: Tính $\int (x - \sin 2x) dx$.

- A.** $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$. **B.** $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$. **C.** $x^2 + \frac{\cos 2x}{2} + C$. **D.** $\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$.

Câu 4: Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

- A.** $2e^{2x-1} + C$. **B.** $e^{2x-1} + C$. **C.** $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$. **D.** $\frac{1}{2}e^x + C$.

Câu 5: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

- A.** $\ln|2x+3| + C$. **B.** $\frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$. **C.** $\frac{1}{\ln 2}\ln|2x+3| + C$. **D.** $\frac{1}{2}\lg(2x+3) + C$.

Câu 6: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

- A.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$. **B.** $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.
C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$. **D.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Câu 7: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$

- A.** $-3\cos 3x + C$. **B.** $3\cos 3x + C$. **C.** $\frac{1}{3}\cos 3x + C$. **D.** $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Câu 8: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

- A.** $x^3 + \cos x + C$. **B.** $6x + \cos x + C$. **C.** $x^3 - \cos x + C$. **D.** $6x - \cos x + C$.

Câu 9: Nếu $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

- A.** $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx$. **B.** $f(x) = 12x^2 + 2x + C$.
C. $f(x) = 12x^2 + 2x$. **D.** $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$.

Câu 10: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

B. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

D. $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$

Câu 11: Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

A. $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C.$ **B.** $\int 2^x dx = 2^x + C.$ **C.** $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$ **D.** $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C.$

Câu 12: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x - \sin x.$

A. $\int f(x) dx = 3x^2 + \cos x + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C.$

D. $\int f(x) dx = 3 + \cos x + C.$

Câu 13: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là:

A. $\cos x + C.$

B. $-\cos x + C.$

C. $-\sin x + C.$

D. $\sin x + C.$

Câu 14: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $4x^3 + 2x + C.$

B. $x^4 + x^2 + C.$

C. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$

D. $x^5 + x^3 + C.$

Câu 15: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là.

A. $e^x + x^2 + C.$

B. $e^x - x^2 + C.$

C. $\frac{1}{x+1}e^x - x^2 + C.$

D. $e^x - 2 + C.$

Câu 16: Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos x + x$ là

A. $\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

B. $\sin x + x^2 + C.$

C. $-\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

D. $-\sin x + x^2 + C.$

Câu 17: Họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C.$ **B.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C.$ **C.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$ **D.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C.$

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

A. $\ln x - \cos x + C.$

B. $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C.$

C. $\ln|x| + \cos x + C.$

D. $\ln|x| - \cos x + C.$

Câu 19: Hàm số $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $(-\infty; +\infty)$?

A. $f(x) = 3x^2.$

B. $f(x) = x^3.$

C. $f(x) = x^2.$

D. $f(x) = \frac{1}{4}x^4.$

Câu 20: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Câu 21: Tính $F(x) = \int e^x dx$, trong đó e là hằng số và $e \approx 2,718$.

A. $F(x) = \frac{e^2 x^2}{2} + C$.

B. $F(x) = \frac{e^3}{3} + C$.

C. $F(x) = e^2 x + C$.

D. $F(x) = 2ex + C$.

Câu 22: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

A. $\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$.

B. $\frac{1}{2} \ln(1-2x) + C$.

C. $-\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$.

D. $\ln|2x-1| + C$.

Câu 23: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + x$ là

A. $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^2}{2} + C$.

B. $2^x + x^2 + C$.

C. $\frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$.

D. $2^x + \frac{x^2}{2} + C$.

Câu 24: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \sin x$

A. $1 + \cos x + C$.

B. $1 - \cos x + C$.

C. $x + \cos x + C$.

D. $x - \cos x + C$.

Câu 25: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2022$ là

A. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$.

B. $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2022x + C$.

C. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2022x + C$.

D. $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2022x + C$.

Câu 26: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ là:

A. $\frac{1}{3} \ln(3x-1) + C$

B. $\ln(1-3x) + C$

C. $\frac{1}{3} \ln(1-3x) + C$

D. $\ln(3x-1) + C$

Câu 27: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C$.

B. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$.

C. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

D. $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C \quad (\forall x \neq -1)$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = 2^x + x + 1$. Tìm $\int f(x) dx$.

A. $\int f(x) dx = 2^x + x^2 + x + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$.

C. $\int f(x) dx = 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{x+1} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$.

Câu 29: Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

- A. $f(x) = 2xe^{x^2}$. B. $f(x) = x^2e^{x^2} - 1$. C. $f(x) = e^{2x}$. D. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Câu 30: Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

- A. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$ B. $-3^{-x} + C$ C. $3^{-x} \ln 3 + C$ D. $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

Câu 31: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

- A. $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$. B. $x^4 + x^3 + C$. C. $3x^2 + 2x + C$. D. $\frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{4} + C$

Câu 32: Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2019}$?

- A. $\frac{x^{2020}}{2020} + 1$. B. $\frac{x^{2020}}{2020}$. C. $y = 2019x^{2018}$. D. $\frac{x^{2020}}{2020} - 1$.

Câu 33: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

- A. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$. B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$.
C. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$. D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$.

Câu 34: Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

- A. $2e^x + \tan x + C$ B. $2e^x - \tan x + C$ C. $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$ D. $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$

Câu 35: họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x+4}$ là:

- A. $\frac{1}{5} \ln(5x+4) + C$. B. $\ln|5x+4| + C$. C. $\frac{1}{\ln 5} \ln|5x+4| + C$. D. $\frac{1}{5} \ln|5x+4| + C$.

Câu 36: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn $F(e+1) = 4$ Tìm $F(x)$.

- A. $2 \ln(x-1) + 2$ B. $\ln(x-1) + 3$ C. $4 \ln(x-1)$ D. $\ln(x-1) - 3$

Câu 37: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-2}$, biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(0)$ bằng

- A. $2 + \ln 2$. B. $\ln 2$. C. $2 + \ln(-2)$. D. $\ln(-2)$.

Câu 38: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; biết $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.

- A. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$. B. $F(1) = \ln 3 + 2$. C. $F(1) = 2 \ln 3 - 2$. D. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$.

- Câu 39:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$.
 Tính $S = f(3) - f(-1)$.
A. $S = \ln 4035$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = \ln 2$. **D.** $S = 1$.
- Câu 40:** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng
A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.
- Câu 41:** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số e^{2x} và $F(0) = \frac{201}{2}$. Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là
A. $\frac{1}{2}e + 200$ **B.** $2e + 100$ **C.** $\frac{1}{2}e + 50$ **D.** $\frac{1}{2}e + 100$
- Câu 42:** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 2e^{2x} + 1$, $\forall x, f(0) = 2$. Hàm $f(x)$ là
A. $y = 2e^x + 2x$. **B.** $y = 2e^x + 2$. **C.** $y = e^{2x} + x + 2$. **D.** $y = e^{2x} + x + 1$.
- Câu 43:** Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.
A. $F(x) = x^2 + e^x + 2018$. **B.** $F(x) = x^2 + e^x - 2018$.
C. $F(x) = x^2 + e^x + 2017$. **D.** $F(x) = e^x - 2019$.
- Câu 44:** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$.
A. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$. **B.** $T = 2^{2019 \cdot 2020}$. **C.** $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$. **D.** $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$.
- Câu 45:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
A. $f(x) = 2x + 5 \cos x + 3$. **B.** $f(x) = 2x - 5 \cos x + 15$.
C. $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$. **D.** $f(x) = 2x - 5 \cos x + 10$.
- Câu 46:** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.
A. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} + 2}{6}$ **B.** $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} - 2}{6}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} + 6}{6}$ **D.** $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} - 6}{6}$
- Câu 47:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.
 Tính $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$.
A. 55. **B.** 44. **C.** 45. **D.** 0.
- Câu 48:** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019)$.
A. $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$. **B.** $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2}$. **C.** $T = 2^{2019 \cdot 2020}$. **D.** $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$.

DẠNG 2. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

“ Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u(x)).u'(x)dx = F(u(x)) + C$ ”.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích

$f(x) = g(u(x))u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t = u(x)$

$\Rightarrow dt = u'(x)dx$. Khi đó: $I = \int g(t)dt = G(t) + C = G(u(x)) + C$

Chú ý: Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$

1. Đổi biến số với một số hàm thường gặp

- $\int f(ax+b)^n x dx \xrightarrow{PP} t = ax+b$. • $\int_a^b \sqrt[n]{f(x)} f'(x) dx \xrightarrow{PP} t = \sqrt[n]{f(x)}$.
- $\int_a^b f(\ln x) \frac{1}{x} dx \xrightarrow{PP} t = \ln x$. • $\int_a^b f(e^x) e^x dx \xrightarrow{PP} t = e^x$.
- $\int_a^b f(\sin x) \cos x dx \xrightarrow{PP} t = \sin x$. • $\int_a^b f(\cos x) \sin x dx \xrightarrow{PP} t = \cos x$.
- $\int_a^b f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx \xrightarrow{PP} t = \tan x$. • $\int_a^b f(\sin x \pm \cos x) (\sin x \pm \cos x) dx \Rightarrow t = \sin x \pm \cos x$.
- $\int_a^\beta f(\sqrt{a^2 - x^2}) x^{2n} dx \xrightarrow{PP} x = a \sin t$. • $\int_a^\beta f\left((\sqrt{x^2 + a^2})^m\right) x^{2n} dx \xrightarrow{PP} x = a \tan t$.
- $\int_a^\beta f\left(\sqrt{\frac{a \pm x}{a \mp x}}\right) dx \xrightarrow{PP} x = a \cos 2t$. • $\int_a^\beta \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} \Rightarrow t = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}$.
- $\int_a^\beta R\left[\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}\right] dx \Rightarrow t^n = ax+b$. • $\int_a^\beta \frac{dx}{(a+bx^n)^n \sqrt[n]{a+bx^n}} \xrightarrow{PP} x = \frac{1}{t}$.

2. Đổi biến số với hàm ẩn

• **Nhận dạng tương đối:** Đề cho $f(x)$, yêu cầu tính $f(\neq x)$ hoặc đề cho $f(\neq x)$, yêu cầu tính $f(x)$.

• **Phương pháp:** Đặt $t = (\neq x)$.

• **Lưu ý:** Đổi biến nhớ đổi cận và ở trên đã sử dụng tính chất: “**Tích phân không phụ thuộc**

vào biến số, mà chỉ phụ thuộc vào hai cận”, nghĩa là $\int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt = \dots = \int_a^b f(x)dx = \dots$

Câu 49: Biết $\int f(2x)dx = \sin^2 x + \ln x + C$. Tìm nguyên hàm $\int f(x)dx$?

- A. $\int f(x)dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C$. B. $\int f(x)dx = 2 \sin^2 2x + 2 \ln x + C$.
C. $\int f(x)dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C$. D. $\int f(x)dx = 2 \sin^2 x + 2 \ln x + C$.

Câu 50: Cho $\int f(4x)dx = x^2 + 3x + c$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{4} + 2x + C$. B. $\int f(x+2)dx = x^2 + 7x + C$.
C. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C$. D. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C$.

Câu 51: Cho $\int f(x)dx = 4x^3 + 2x + C_0$. Tính $I = \int xf(x^2)dx$.

- A. $I = 2x^6 + x^2 + C$. B. $I = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^6}{6} + C$. C. $I = 4x^6 + 2x^2 + C$. D. $I = 12x^2 + 2$.

Câu 52: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C$. B. $\int f(x)dx = 3e^{x^3+1} + C$.
C. $\int f(x)dx = e^{x^3+1} + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$.

Câu 53: Nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$ là

- A. $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x-1} + C$. B. $\frac{e^{\sin^2 x+1}}{\sin^2 x+1} + C$. C. $e^{\sin^2 x} + C$. D. $\frac{e^{\sin^2 x-1}}{\sin^2 x-1} + C$.

Câu 54: Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^9 + 3x^5}$

- A. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$ B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$
C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$ D. $\int f(x)dx = -\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$

Câu 55: Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4+1}dx$ và $F(0) = 1$.

- A. $F(x) = \ln(x^4+1) + 1$. B. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + \frac{3}{4}$.
C. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + 1$. D. $F(x) = 4 \ln(x^4+1) + 1$.

Câu 56: Biết $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}}dx = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^b + C, x \neq -1$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a = 2b$. B. $b = 2a$. C. $a = 2018b$. D. $b = 2018a$.

Câu 57: Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0$

. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. C. $m = \frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 58: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ và $F(0) = -\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x + 1) = 2$ là:

A. $S = \{3\}$ B. $S = \{2; 3\}$ C. $S = \{-2; 3\}$ D. $S = \{-3; 3\}$

Câu 59: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3(x^2 + 1)^{2019}$ là

A. $\frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} \right]$. B. $\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020}$.

C. $\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} + C$. D. $\frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} \right] + C$.

Câu 60: Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \ln x}$ là:

A. $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \ln |\ln x| + C$. B. $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \ln |x^2 \cdot \ln x| + C$.

C. $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \ln |x + \ln x| + C$. D. $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \ln |x \cdot \ln x| + C$.

Câu 61: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

A. $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$. B. $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} e^{x^3+1} + C$.

Câu 62: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ là

A. $\int f(x) dx = (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C$. B. $\int f(x) dx = \sqrt[3]{3x+1} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3x+1} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C$.

Câu 63: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+2}$ là

A. $\frac{2}{3} (3x+2) \sqrt{3x+2} + C$ B.

$\frac{1}{3} (3x+2) \sqrt{3x+2} + C$

C. $\frac{2}{9} (3x+2) \sqrt{3x+2} + C$ D. $\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3x+2}} + C$

Câu 64: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$ là

A. $-\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C.$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C.$

C. $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C.$

D. $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C.$

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C$

B. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$

C. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$

D. $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C$

Câu 66: Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2(u^2 - 4) du.$

B. $\int (u^2 - 4) du.$

C. $\int (u^2 - 3) du.$

D. $\int 2u(u^2 - 4) du.$

Câu 67: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\int f(x) dx = \sqrt{2x+1} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$

Câu 68: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là

A. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \sqrt{x^2 + 1} + C.$

B. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C.$

C. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$

D. $F(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$

Câu 69: Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm

$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S = a + b + c$ bằng

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Câu 70: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C.$

B. $\int f(x) dx = \ln|1 + 3 \cos x| + C.$

C. $\int f(x) dx = 3 \ln|1 + 3 \cos x| + C.$

D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C.$

Câu 71: Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}$.

A. $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C.$

B. $f(x) = \frac{1}{(2 + \cos x)} + C.$

C. $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C.$

D. $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C.$

Câu 72: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$.

A. $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 + 2$. B. $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 + 2$. C. $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 - 2$. D. $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 - 2$.

Câu 73: Biết $\int f(x)dx = 3x \cos(2x-5) + C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\int f(3x)dx = 3x \cos(6x-5) + C$ B. $\int f(3x)dx = 9x \cos(6x-5) + C$
C. $\int f(3x)dx = 9x \cos(2x-5) + C$ D. $\int f(3x)dx = 3x \cos(2x-5) + C$

Câu 74: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^5 x$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$.
B. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C$.
C. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$.
D. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C$.

Câu 75: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$. B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$. D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$.

Câu 76: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{e}\right) = 2$ và $F(e) = \ln 2$.

Giá trị của biểu thức $F\left(\frac{1}{e^2}\right) + F(e^2)$ bằng

A. $3\ln 2 + 2$. B. $\ln 2 + 2$. C. $\ln 2 + 1$. D. $2\ln 2 + 1$.

Câu 77: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình

$F(x) = x$ có nghiệm là:

A. $x = 0$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 1 - \sqrt{3}$.

Câu 78: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2}$. Biết $F(3) = 6$, giá trị của $F(8)$ là

A. $\frac{217}{8}$. B. 27 . C. $\frac{215}{24}$. D. $\frac{215}{8}$.

Câu 79: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ là

A. $(4x^2 + 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C$. B. $(4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}$.
C. $(3x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}$. D. $(4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C$.

DẠNG 3. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ HỮU TỶ

1. Công thức thường áp dụng

$$\bullet \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C. \bullet \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C.$$

$$\bullet \ln a + \ln b = \ln(ab). \bullet \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$$

$$\bullet \ln a^n = n \ln a. \bullet \ln 1 = 0.$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$

• Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.

• Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp che để đưa về công thức nguyên hàm số 01.

• Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X = a \tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng $X^2 + a^2$.

Câu 80: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2} (x \neq 0)$, biết rằng

$$F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0$$

A. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}.$

B. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}.$

C. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$

D. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}.$

Câu 81: Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C.$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8.$

B. $a+b=8.$

C. $2a-b=8.$

D. $a-b=8.$

Câu 82: Cho biết $\int \frac{1}{x^3-x} dx = a \ln|(x-1)(x+1)| + b \ln|x| + C.$ Tính giá trị biểu thức: $P = 2a + b.$

A. 0.

B. -1.

C. $\frac{1}{2}.$

D. 1.

Câu 83: Cho biết $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = a \ln|x+2| + b \ln|x+3| + C.$ Tính giá trị biểu thức: $P = a^2 + ab + b^2.$

A. 12.

B. 13.

C. 14.

D. 15.

Câu 84: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}, f'(1) = 3, f(1) = 2, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}.$ Khi đó $2a + b$ bằng

A. $-\frac{3}{2}.$

B. 0.

C. 5.

D. $\frac{3}{2}.$

Câu 85: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn

$F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$ bằng

- A. $\frac{2019}{2020}$. B. $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}$. C. $2018 \frac{1}{2020}$. D. $-\frac{2019}{2020}$.

Câu 86: Cho $I = \int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx = \frac{-a}{x^2} - b \ln|x| + 2c \ln(1+x^2) + C$. Khi đó $S = a + b + c$ bằng

- A. $-\frac{1}{4}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{7}{4}$. D. 2.

Câu 87: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3) + f(-3) = 4$ và

$f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-5) + f(0) + f(2)$ bằng

- A. $5 - \frac{1}{2} \ln 2$. B. $6 - \frac{1}{2} \ln 2$. C. $5 + \frac{1}{2} \ln 2$. D. $6 + \frac{1}{2} \ln 2$.

Câu 88: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3) - f(3) = 0$ và

$f(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng

- A. $\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$. B. $\ln 80 + 1$. C. $\frac{1}{3} \ln \frac{4}{5} + \ln 2 + 1$. D. $\frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} + 1$.

Câu 89: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$.

Tính $S = (f(3) - 2018)(f(-1) - 2017)$.

- A. $S = 1$. B. $S = 1 + \ln^2 2$. C. $S = 2 \ln 2$. D. $S = \ln^2 2$.

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$, $f(-2) + f(2) = 0$ và

$f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính $f(-3) + f(0) + f(4)$ được kết quả

- A. $\ln \frac{6}{5} + 1$. B. $\ln \frac{6}{5} - 1$. C. $\ln \frac{4}{5} + 1$. D. $\ln \frac{4}{5} - 1$.

DẠNG 4. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$. Khi đó:

$$\int u dv = uv - \int v du (*)$$

Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$.

Tính $v = \int dv$ và $du = u' . dx$.

Bước 2: Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$. (*)

Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u' . dx$.

Bước 2. Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.** $I = \int P(x) \sin(ax+b) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(ax+b) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) . dx \\ v = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) \end{cases}$$

• **Dạng 2.** $I = \int P(x) \cos(ax+b) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos(ax+b) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) . dx \\ v = \frac{1}{a} \sin(ax+b) \end{cases}$$

• **Dạng 3.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) . dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax+b} \end{cases}$$

- **Dạng 4.** $I = \int P(x) \ln g(x) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = \ln g(x) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$$

- **Dạng 5.** $I = \int \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] e^x dx$.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ dv = e^x dx \end{cases}$$

Câu 91: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là

- A. $F(x) = x \cos x + \sin x + C$. B. $F(x) = x \cos x - \sin x + C$.
C. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C$. D. $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$.

Câu 92: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là :

- A. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$ B. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} (x - 2) + C$
C. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$ D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$

Câu 93: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x - 1)e^x$ là

- A. $(2x - 3)e^x + C$. B. $(2x + 3)e^x + C$. C. $(2x + 1)e^x + C$. D. $(2x - 1)e^x + C$.

Câu 94: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{2x}$?

- A. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$. B. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} (x - 2) + C$.
C. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$. D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$.

Câu 95: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(1 + \sin x)$ là

- A. $\frac{x^2}{2} - x \sin x + \cos x + C$. B. $\frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C$.
C. $\frac{x^2}{2} - x \cos x - \sin x + C$. D. $\frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + C$.

Câu 96: Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^x$. Tính tích $P = abc$.

- A. -4. B. 1. C. -5. D. -3.

Câu 97: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1 + e^x)$ là

- A. $(2x - 1)e^x + x^2$. B. $(2x + 1)e^x + x^2$. C. $(2x + 2)e^x + x^2$. D. $(2x - 2)e^x + x^2$.

Câu 98: Họ nguyên hàm của $f(x) = x \ln x$ là kết quả nào sau đây?

- A. $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{2} x^2 + C$. B. $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C$.
C. $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$. D. $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x + C$.

Câu 99: Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x^2 + 1) \cdot \ln x$.

- A. $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} + C$. B. $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C$.
 C. $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$. D. $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$.

Câu 100: Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

- A. $-x \cot x + \ln |\sin x| + C$. B. $x \cot x - \ln |\sin x| + C$.
 C. $x \cot x + \ln |\sin x| + C$. D. $-x \cot x - \ln (\sin x) + C$.

Câu 101: Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3x(x + \cos x)$ là

- A. $x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$ B. $x^3 - 3(x \sin x + \cos x) + C$
 C. $x^3 + 3(x \sin x - \cos x) + C$ D. $x^3 - 3(x \sin x - \cos x) + C$

Câu 102: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + xe^x$ là

- A. $\frac{1}{5}x^5 + (x+1)e^x + C$. B. $\frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$. C. $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$. D. $4x^3 + (x+1)e^x + C$.

Câu 103: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cdot e^{2x}$ là

- A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$. B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C$.
 C. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$. D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$.

Câu 104: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\int xe^x dx = e^x + xe^x + C$. B. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + e^x + C$.
 C. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$. D. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + C$.

Câu 105: Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x \cos ax$.

- A. $x \sin x - \cos x + C$ B. $\frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$
 C. $x \sin x + \cos x + C$ D. $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

Câu 106: Họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x}$ là

- A. $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$. B. $(x^2 + x - 1) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C$.
 C. $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$. D. $(x^2 + x - 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$.

Câu 107: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = xe^x$ và $f(0) = 2$. Tính $f(1)$.

- A. $f(1) = 3$. B. $f(1) = e$. C. $f(1) = 5 - e$. D. $f(1) = 8 - 2e$.

Câu 108: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) + f(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

- A. $(x-2)e^x + e^x + C$ B. $(x+2)e^{2x} + e^x + C$ C. $(x-1)e^x + C$ D. $(x+1)e^x + C$

Câu 109: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)e^x, f(0) = 0$ và $\int f(x)dx = (ax+b)e^x + c$ với a, b, c là các hằng số. Khi đó:

- A. $a+b=2$. B. $a+b=3$. C. $a+b=1$. D. $a+b=0$.

Câu 110: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

- A. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$. B. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$.
C. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$. D. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$.

Câu 111: Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

- A. $ab = \frac{1}{8}$. B. $ab = \frac{1}{4}$. C. $ab = -\frac{1}{8}$. D. $ab = -\frac{1}{4}$.

Câu 112: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

- A. $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5$. B. 0 . C. $\frac{7}{3} \ln 2$. D. $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5$.

Câu 113: Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x-1)$. Cho biết $g(2) = 1$ và $g(3) = a \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên dương phân biệt. Hãy tính giá trị của $T = 3a^2 - b^2$

- A. $T = 8$. B. $T = -17$. C. $T = 2$. D. $T = -13$.

Câu 114: Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

- A. $ab = \frac{1}{8}$. B. $ab = \frac{1}{4}$. C. $ab = -\frac{1}{8}$. D. $ab = -\frac{1}{4}$.



NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 1. NGUYÊN HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG. NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

<i>Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp</i>	
① $\int 0 dx = C.$	$\longrightarrow \int k dx = kx + C.$
② $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\longrightarrow \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
③ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C.$
④ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C.$
⑤ $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	$\longrightarrow \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C.$
⑥ $\int \cos x dx = \sin x + C.$	$\longrightarrow \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C.$
⑦ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C.$
⑧ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C.$
⑨ $\int e^x dx = e^x + C.$	$\longrightarrow \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\longrightarrow \int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C.$
♦ <u>Nhận xét.</u> Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.	

Một số nguyên tắc tính cơ bản

- Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.
- Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.
- Bậc chẵn của sin và cosin $\Rightarrow$ Hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a$, $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a$.
- Chứa tích các căn thức của $x \xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.

Câu 1: Tìm nguyên hàm $\int x(x^2 + 7)^{15} dx$?

- A.** $\frac{1}{2}(x^2 + 7)^{16} + C$ **B.** $-\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$ **C.** $\frac{1}{16}(x^2 + 7)^{16} + C$ **D.** $\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$

Lời giải

Chọn D

$$\int x(x^2 + 7)^{15} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 7)^{15} d(x^2 + 7) = \frac{1}{32} (x^2 + 7)^{16} + C$$

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

- A.** $3e^x + C$. **B.** $\frac{1}{3}e^{3x} + C$. **C.** $\frac{1}{3}e^x + C$. **D.** $3e^{3x} + C$.

Lời giải

Ta có: $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$, với C là hằng số bất kì.

Câu 3: Tính $\int (x - \sin 2x) dx$.

- A.** $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$. **B.** $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$. **C.** $x^2 + \frac{\cos 2x}{2} + C$. **D.** $\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int (x - \sin 2x) dx = \int x dx - \int \sin 2x dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C.$$

Câu 4: Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

- A.** $2e^{2x-1} + C$. **B.** $e^{2x-1} + C$. **C.** $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$. **D.** $\frac{1}{2}e^x + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x-1} d(2x-1) = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C.$$

Câu 5: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

- A.** $\ln|2x+3| + C$. **B.** $\frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$. **C.** $\frac{1}{\ln 2} \ln|2x+3| + C$. **D.** $\frac{1}{2} \lg(2x+3) + C$.

Câu 6: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

B. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

Lời giải

Ta có: $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

Câu 7: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$

A. $-3\cos 3x + C.$

B. $3\cos 3x + C.$

C. $\frac{1}{3}\cos 3x + C.$

D. $-\frac{1}{3}\cos 3x + C.$

Lời giải

$$\int \sin 3x dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C$$

Câu 8: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 + \cos x + C.$

B. $6x + \cos x + C.$

C. $x^3 - \cos x + C.$

D. $6x - \cos x + C.$

Lời giải

Ta có $\int (3x^2 + \sin x) dx = x^3 - \cos x + C.$

Câu 9: Nếu $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

A. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx.$

B. $f(x) = 12x^2 + 2x + C.$

C. $f(x) = 12x^2 + 2x.$

D. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}.$

Lời giải

Có $f(x) = (4x^3 + x^2 + C)' = 12x^2 + 2x.$

Câu 10: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

B. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

D. $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$

Lời giải

Ta có: $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$ sai vì $\int e^x dx = e^x + C.$

Câu 11: Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

A. $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C.$

B. $\int 2^x dx = 2^x + C.$

C. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

D. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C.$

Lời giải

Do theo bảng nguyên hàm: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

Câu 12: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x - \sin x$.

- A.** $\int f(x) dx = 3x^2 + \cos x + C$. **B.** $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C$. **D.** $\int f(x) dx = 3 + \cos x + C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x) dx = \int (3x - \sin x) dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C$.

Câu 13: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là:

- A.** $\cos x + C$. **B.** $-\cos x + C$. **C.** $-\sin x + C$. **D.** $\sin x + C$.

Lời giải

Ta có $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Câu 14: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- A.** $4x^3 + 2x + C$. **B.** $x^4 + x^2 + C$. **C.** $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$. **D.** $x^5 + x^3 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$.

Câu 15: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là.

- A.** $e^x + x^2 + C$. **B.** $e^x - x^2 + C$. **C.** $\frac{1}{x+1}e^x - x^2 + C$. **D.** $e^x - 2 + C$.

Lời giải

Ta có: $\int (e^x - 2x) dx = e^x - x^2 + C$

Câu 16: Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos x + x$ là

- A.** $\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C$. **B.** $\sin x + x^2 + C$. **C.** $-\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C$. **D.** $-\sin x + x^2 + C$.

Lời giải

$\int (\cos x + x) dx = \sin x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 17: Họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

- A.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$. **B.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$. **C.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$. **D.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$.

Lời giải

Ta có:

$$\int (x^2 - 3x + \frac{1}{x}) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

- A.** $\ln x - \cos x + C$. **B.** $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$. **C.** $\ln|x| + \cos x + C$. **D.** $\ln|x| - \cos x + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \sin x \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \sin x dx = \ln|x| - \cos x + C.$$

Câu 19: Hàm số $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $(-\infty; +\infty)$?

- A.** $f(x) = 3x^2$. **B.** $f(x) = x^3$. **C.** $f(x) = x^2$. **D.** $f(x) = \frac{1}{4}x^4$.

Lời giải

$$\text{Gọi } F(x) = \frac{1}{3}x^3 \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x).$$

$$\text{Suy ra } F'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = x^2.$$

Câu 20: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$.

- A.** $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$. **B.** $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int \frac{x^4 + 2}{x^2} dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$$

Câu 21: Tính $F(x) = \int e^2 dx$, trong đó e là hằng số và $e \approx 2,718$.

- A.** $F(x) = \frac{e^2 x^2}{2} + C$. **B.** $F(x) = \frac{e^3}{3} + C$. **C.** $F(x) = e^2 x + C$. **D.** $F(x) = 2ex + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } F(x) = \int e^2 dx = e^2 x + C.$$

Câu 22: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

- A.** $\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$. **B.** $\frac{1}{2} \ln(1-2x) + C$. **C.** $-\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$. **D.** $\ln|2x-1| + C$.

Lời giải

Trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{1}{1-2x}dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1-2x}d(1-2x) = -\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$.

Câu 23: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + x$ là

- A. $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^2}{2} + C$. B. $2^x + x^2 + C$. C. $\frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$. D. $2^x + \frac{x^2}{2} + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int (2^x + x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Câu 24: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \sin x$

- A. $1 + \cos x + C$. B. $1 - \cos x + C$. C. $x + \cos x + C$. D. $x - \cos x + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int f(x)dx = \int (1 + \sin x)dx = x - \cos x + C.$$

Câu 25: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2022$ là

- A. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$. B. $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2022x + C$.
C. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2022x + C$. D. $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2022x + C$.

Lời giải

Sử dụng công thức $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ta được:

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2022 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2022x + C = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2022x + C.$$

Câu 26: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ là:

- A. $\frac{1}{3} \ln(3x-1) + C$ B. $\ln(1-3x) + C$ C. $\frac{1}{3} \ln(1-3x) + C$ D. $\ln(3x-1) + C$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int \frac{1}{3x-1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3} \ln|3x-1| + C = \frac{1}{3} \ln(1-3x) + C$$

Câu 27: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C$. B. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$.
 C. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$. D. $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C \quad (\forall x \neq -1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = 2^x + x + 1$. Tìm $\int f(x) dx$.

A. $\int f(x) dx = 2^x + x^2 + x + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$.

C. $\int f(x) dx = 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{x+1} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int (2^x + x + 1) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$.

Câu 29: Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $f(x) = 2xe^{x^2}$.

B. $f(x) = x^2 e^{x^2} - 1$.

C. $f(x) = e^{2x}$.

D. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = F'(x) \Rightarrow f(x) = (e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$.

Câu 30: Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

A. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

B. $-3^{-x} + C$

C. $3^{-x} \ln 3 + C$

D. $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x) dx = \int 3^{-x} dx = -\int 3^{-x} d(-x) = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.

Câu 31: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

A. $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$.

B. $x^4 + x^3 + C$.

C. $3x^2 + 2x + C$.

D. $\frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{4} + C$

Lời giải

Chọn A

$\int f(x) dx = \int (x^3 + x^2) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$.

Câu 32: Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2019}$?

A. $\frac{x^{2020}}{2020} + 1$.

B. $\frac{x^{2020}}{2020}$.

C. $y = 2019x^{2018}$.

D. $\frac{x^{2020}}{2020} - 1$.

Lời giải

Ta có: $\int x^{2019} dx = \frac{x^{2020}}{2020} + C$, C là hằng số. Nên các phương án **A, B, D** đều là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2019}$.

Câu 33: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

A. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$.

B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$.

C. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$.

D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$.

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right) dx = \int \left(2017e^x - \frac{2018}{x^5} \right) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$$

Câu 34: Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

A. $2e^x + \tan x + C$

B. $2e^x - \tan x + C$

C. $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$

D. $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$

Lời giải

Ta có: $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) = 2e^x + \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int y dx = \int \left(2e^x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 2e^x + \tan x + C$$

Câu 35: họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x+4}$ là:

A. $\frac{1}{5} \ln(5x+4) + C$.

B. $\ln|5x+4| + C$.

C. $\frac{1}{\ln 5} \ln|5x+4| + C$.

D. $\frac{1}{5} \ln|5x+4| + C$.

Lời giải

Ta có $\int \frac{1}{5x+4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{5x+4} d(5x+4) = \frac{1}{5} \ln|5x+4| + C$.

Câu 36: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn $F(e+1) = 4$ Tìm $F(x)$.

A. $2\ln(x-1) + 2$

B. $\ln(x-1) + 3$

C. $4\ln(x-1)$

D. $\ln(x-1) - 3$

Lời giải

Chọn B

$$F(x) = \int \frac{1}{x-1} dx + C = \ln|x-1| + C$$

$F(e+1) = 4$. Ta có $1 + C = 4 \Rightarrow C = 3$

- Câu 37:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-2}$, biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(0)$ bằng
- A.** $2 + \ln 2$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2 + \ln(-2)$. **D.** $\ln(-2)$.

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có: } \int f(x)dx = \int \frac{1}{x-2}dx = \ln|x-2| + C, C \in \mathbb{R}.$$

Giả sử $F(x) = \ln|x-2| + C_0$ là một nguyên hàm của hàm số đã cho thỏa mãn $F(1) = 2$.

$$\text{Do } F(1) = 2 \Rightarrow C_0 = 2 \Rightarrow F(x) = \ln|x-2| + 2. \text{ Vậy } F(0) = 2 + \ln 2.$$

- Câu 38:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; biết $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.
- A.** $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$. **B.** $F(1) = \ln 3 + 2$. **C.** $F(1) = 2 \ln 3 - 2$. **D.** $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

$$\text{Do } F(0) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 0 + 1| + C = 2 \Rightarrow C = 2$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 2 \Rightarrow F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$$

- Câu 39:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$.
Tính $S = f(3) - f(-1)$.
- A.** $S = \ln 4035$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = \ln 2$. **D.** $S = 1$.

Lời giải

$$\text{Trên khoảng } (1; +\infty) \text{ ta có } \int f'(x)dx = \int \frac{1}{x-1}dx = \ln(x-1) + C_1 \Rightarrow f(x) = \ln(x-1) + C_1.$$

$$\text{Mà } f(2) = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018.$$

$$\text{Trên khoảng } (-\infty; 1) \text{ ta có } \int f'(x)dx = \int \frac{1}{x-1}dx = \ln(1-x) + C_2 \Rightarrow f(x) = \ln(1-x) + C_2.$$

$$\text{Mà } f(0) = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + 2018 & \text{ khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + 2017 & \text{ khi } x < 1 \end{cases}. \text{ Suy ra } f(3) - f(-1) = 1.$$

Câu 40: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

- A.** 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

$$F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C; F(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}.$$

Khi đó $F(\ln 3) = \frac{1}{2}e^{2\ln 3} - \frac{1}{2} = 4$.

Câu 41: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số e^{2x} và $F(0) = \frac{201}{2}$. Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là

- A.** $\frac{1}{2}e+200$ **B.** $2e+100$ **C.** $\frac{1}{2}e+50$ **D.** $\frac{1}{2}e+100$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$.

Theo đề ra ta được: $F(0) = \frac{201}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot e^0 + C = \frac{201}{2} \Leftrightarrow C = 100.$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 100 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{2 \cdot \frac{1}{2}} + 100 = \frac{1}{2}e + 100.$$

Câu 42: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x, f(0) = 2$. Hàm $f(x)$ là

- A.** $y = 2e^x + 2x$. **B.** $y = 2e^x + 2$. **C.** $y = e^{2x} + x + 2$. **D.** $y = e^{2x} + x + 1$.

Lời giải

Ta có: $\int f'(x) dx = \int (2e^{2x} + 1) dx = e^{2x} + x + C.$

Suy ra $f(x) = e^{2x} + x + C$.

Theo bài ra ta có: $f(0)=2 \Rightarrow 1+C=2 \Leftrightarrow C=1$.

Vậy: $f(x) = e^{2x} + x + 1$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.

- A.** $F(x) = x^2 + e^x + 2018$. **B.** $F(x) = x^2 + e^x - 2018$.
C. $F(x) = x^2 + e^x + 2017$. **D.** $F(x) = e^x - 2019$.

Lời giải

Ta có $\int f(x) dx = \int (2x + e^x) dx = x^2 + e^x + C.$

Có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2019$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2019 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2018.$$

$$\text{Vậy } F(x) = x^2 + e^x + 2018.$$

Câu 44: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$.

A. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$. **B.** $T = 2^{2019 \cdot 2020}$. **C.** $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$. **D.** $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$F(x) \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) = 2^x, \text{ ta có } F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C \text{ mà } F(0) = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}.$$

$$T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2018} + 2^{2019}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^{2020} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$$

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = 2x + 5 \cos x + 3$. **B.** $f(x) = 2x - 5 \cos x + 15$.
C. $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$. **D.** $f(x) = 2x - 5 \cos x + 10$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 - 5 \sin x) dx = 2x + 5 \cos x + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = 10 \text{ nên } 5 + C = 10 \Rightarrow C = 5.$$

$$\text{Vậy } f(x) = 2x + 5 \cos x + 5.$$

Câu 46: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} + 2}{6}$ **B.** $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} - 2}{6}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} + 6}{6}$ **D.** $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} - 6}{6}$

Lời giải

$$F(x) = \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{\sin 3x}{3} + 1 \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3} + 6}{6}.$$

Câu 47: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Tính $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$.

A. 55.

B. 44.

C. 45.

D. 0.

Lời giải

Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

$$\text{Suy ra } F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \\ \dots \\ \tan x + C_9, & x \in \left(\frac{17\pi}{2}; \frac{19\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_{10}, & x \in \left(\frac{19\pi}{2}; \frac{21\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{\pi}{4} + 0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \dots \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 9\pi\right) = 1 + C_9 = 9 \Rightarrow C_9 = 8 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 10\pi\right) = 1 + C_{10} = 10 \Rightarrow C_{10} = 9. \end{cases}$$

Vậy $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi) = \tan 0 - 1 + \tan \pi + \tan 2\pi + 1 + \dots + \tan 10\pi + 9 = 44$.

Câu 48: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019)$.

A. $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$.

B. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2}$.

C. $T = 2^{2019 \cdot 2020}$.

D. $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F(x) = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Theo giả thiết $F(0) = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^0}{\ln 2} + C = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow C = 0$. Suy ra: $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$

Vậy $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019) = \frac{2^0}{\ln 2} + \frac{2^1}{\ln 2} + \frac{2^2}{\ln 2} + \dots + \frac{2^{2019}}{\ln 2}$

$$= \frac{1}{\ln 2} (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2019}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot 1 \cdot \frac{1 - 2^{2020}}{1 - 2} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}.$$

DẠNG 2. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

“ Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u(x)).u'(x)dx = F(u(x)) + C$ ”.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích

$f(x) = g(u(x))u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t = u(x)$

$\Rightarrow dt = u'(x)dx$. Khi đó: $I = \int g(t)dt = G(t) + C = G(u(x)) + C$

Chú ý: Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$

1. Đổi biến số với một số hàm thường gặp

- $\int f(ax+b)^n x dx \xrightarrow{PP} t = ax+b$. • $\int_a^b \sqrt[n]{f(x)} f'(x) dx \xrightarrow{PP} t = \sqrt[n]{f(x)}$.
- $\int_a^b f(\ln x) \frac{1}{x} dx \xrightarrow{PP} t = \ln x$. • $\int_a^b f(e^x) e^x dx \xrightarrow{PP} t = e^x$.
- $\int_a^b f(\sin x) \cos x dx \xrightarrow{PP} t = \sin x$. • $\int_a^b f(\cos x) \sin x dx \xrightarrow{PP} t = \cos x$.
- $\int_a^b f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx \xrightarrow{PP} t = \tan x$. • $\int_a^b f(\sin x \pm \cos x) (\sin x \pm \cos x) dx \Rightarrow t = \sin x \pm \cos x$.
- $\int_a^\beta f(\sqrt{a^2 - x^2}) x^{2n} dx \xrightarrow{PP} x = a \sin t$. • $\int_a^\beta f\left((\sqrt{x^2 + a^2})^m\right) x^{2n} dx \xrightarrow{PP} x = a \tan t$.
- $\int_a^\beta f\left(\sqrt{\frac{a \pm x}{a \mp x}}\right) dx \xrightarrow{PP} x = a \cos 2t$. • $\int_a^\beta \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} \Rightarrow t = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}$.
- $\int_a^\beta R\left[\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}\right] dx \Rightarrow t^n = ax+b$. • $\int_a^\beta \frac{dx}{(a+bx^n)^n \sqrt[n]{a+bx^n}} \xrightarrow{PP} x = \frac{1}{t}$.

2. Đổi biến số với hàm ẩn

• **Nhận dạng tương đối:** Đề cho $f(x)$, yêu cầu tính $f(\neq x)$ hoặc đề cho $f(\neq x)$, yêu cầu tính $f(x)$.

• **Phương pháp:** Đặt $t = (\neq x)$.

• **Lưu ý:** Đổi biến nhớ đổi cận và ở trên đã sử dụng tính chất: “**Tích phân không phụ thuộc vào biến số, mà chỉ phụ thuộc vào hai cận**”, nghĩa là $\int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt = \dots = \int_a^b f(x)dx = \dots$

Câu 49: Biết $\int f(2x)dx = \sin^2 x + \ln x + C$. Tìm nguyên hàm $\int f(x)dx$?

A. $\int f(x)dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C$.

B. $\int f(x)dx = 2 \sin^2 2x + 2 \ln x + C$.

C. $\int f(x)dx = 2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\ln x + C.$

D. $\int f(x)dx = 2\sin^2 x + 2\ln x + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int f(2x)dx = \sin^2 x + \ln x + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int f(2x)d(2x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \ln(2x) - \ln 2 + C$

$\Leftrightarrow \int f(2x)d(2x) = 1 - \cos 2x + 2\ln(2x) - 2\ln 2 + 2C$

$\Leftrightarrow \int f(x)dx = 1 - \cos x + 2\ln x - 2\ln 2 + 2C \Leftrightarrow \int f(x)dx = 2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\ln x + C'.$

Câu 50: Cho $\int f(4x)dx = x^2 + 3x + c$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{4} + 2x + C.$

B. $\int f(x+2)dx = x^2 + 7x + C.$

C. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C.$

D. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C.$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết bài toán $\int f(4x)dx = x^2 + 3x + c$.

Đặt $t = 4x \Rightarrow dt = 4dx$ từ đó ta có $\frac{1}{4} \int f(t)dt = \left(\frac{t}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{t}{4}\right) + c \Rightarrow \int f(t)dt = \frac{t^2}{4} + 3t + c.$

Xét $\int f(x+2)dx = \int f(x+2)d(x+2) = \frac{(x+2)^2}{4} + 3(x+2) + c = \frac{x^2}{4} + 4x + C.$

Vậy mệnh đề đúng là $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C.$

Câu 51: Cho $\int f(x)dx = 4x^3 + 2x + C_0$. Tính $I = \int xf(x^2)dx$.

A. $I = 2x^6 + x^2 + C.$ **B.** $I = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^6}{6} + C.$

C. $I = 4x^6 + 2x^2 + C.$ **D.** $I = 12x^2 + 2.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I = \int xf(x^2)dx = \frac{1}{2} \int f(x^2)dx^2 = \frac{1}{2} \left(4(x^2)^3 + 2(x^2) \right) + C = 2x^6 + x^2 + C.$

Câu 52: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = 3e^{x^3+1} + C.$

C. $\int f(x)dx = e^{x^3+1} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C.$

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3+1} d(x^3+1) = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

Câu 53: Nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$ là

- A.** $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x-1} + C.$ **B.** $\frac{e^{\sin^2 x+1}}{\sin^2 x+1} + C.$ **C.** $e^{\sin^2 x} + C.$ **D.** $\frac{e^{\sin^2 x-1}}{\sin^2 x-1} + C.$

Lời giải

$$\text{Ta có } \int \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x} dx = \int e^{\sin^2 x} d(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x} + C$$

Câu 54: Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^9 + 3x^5}$

- A.** $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$ **B.** $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$
C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$ **D.** $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{1}{x^9 + 3x^5} dx = \int \frac{x^3}{(x^4)^2 (x^4 + 3)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx^4}{(x^4)^2 (x^4 + 3)} = \frac{1}{12} \int \frac{(x^4 + 3) - x^4}{(x^4)^2 (x^4 + 3)} dx^4 \\ &= \frac{1}{12} \int \frac{dx^4}{(x^4)^2} - \frac{1}{12} \int \frac{dx^4}{x^4 (x^4 + 3)} = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left(\frac{x^4}{x^4 + 3} \right) + C \end{aligned}$$

Câu 55: Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4+1} dx$ và $F(0) = 1$.

- A.** $F(x) = \ln(x^4 + 1) + 1.$ **B.** $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{3}{4}.$
C. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + 1.$ **D.** $F(x) = 4 \ln(x^4 + 1) + 1.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } F(x) = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^4+1} d(x^4+1) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + C.$$

$$\text{Do } F(0) = 1 \text{ nên } \frac{1}{4} \ln(0+1) + C = 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy: } F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + 1.$$

Câu 56: Biết $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^b + C, x \neq -1$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $a = 2b.$ **B.** $b = 2a.$ **C.** $a = 2018b.$ **D.** $b = 2018a.$

Lời giải

Ta có:

$$\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \int \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2017} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2017} d\left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{1}{4036} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2018} + C.$$

$$\Rightarrow a = 4036, b = 2018$$

Do đó: $a = 2b$.

Câu 57: Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

A. $m = -\frac{1}{2}$. **B.** $m = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. **C.** $m = \frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$. **D.** $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int f(x) dx &= \int \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}} dx = \frac{2017}{2} \int (x^2+1)^{-2018} d(x^2+1) = \frac{2017}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{-2017}}{-2017} + C \\ &= -\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} + C = F(x) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } F(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2 \cdot 2^{2017}} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2^{2018}}$$

$$\text{Do đó } F(x) = -\frac{1}{2 \cdot (x^2+1)^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}} \text{ suy ra}$$

$$F(x) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi } \frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow (x^2+1) \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Vậy } m = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2018}} = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}.$$

Câu 58: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ và $F(0) = -\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x+1) = 2$ là:

A. $S = \{3\}$ **B.** $S = \{2; 3\}$ **C.** $S = \{-2; 3\}$ **D.** $S = \{-3; 3\}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{dx}{e^x+1} = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx = x - \ln(e^x+1) + C$$

$$F(0) = -\ln 2 + C = -\ln 2e \Rightarrow C = -1$$

$$PT: F(x) + \ln(e^x + 1) = 2 \Leftrightarrow x - \ln(e^x + 1) - 1 + \ln(e^x + 1) = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Câu 59: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3(x^2 + 1)^{2019}$ là

A. $\frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} \right].$

B. $\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020}.$

C. $\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} + C.$

D. $\frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} \right] + C.$

Lời giải

$$\text{Xét } \int f(x) dx = \int x^3 (x^2 + 1)^{2019} dx = \int x^2 (x^2 + 1)^{2019} x dx.$$

Đổi biến $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$, ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{2} \int (t-1)t^{2019} dt = \frac{1}{2} \int (t^{2020} - t^{2019}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^{2021}}{2021} - \frac{t^{2020}}{2020} \right] + C = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} \right] + C. \end{aligned}$$

Câu 60: Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x}$ là:

A. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |\ln x| + C.$

B. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x^2 \cdot \ln x| + C.$

C. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x + \ln x| + C.$

D. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x \cdot \ln x| + C.$

Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int f(x) dx = \int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx.$$

$$\text{Đặt } x \ln x = t \Rightarrow (\ln x + 1) dx = dt. \text{ Khi đó ta có } I = \int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |x \cdot \ln x| + C.$$

Câu 61: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

A. $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C.$ **B.** $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} e^{x^3+1} + C.$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$$

$$\text{Do đó, ta có } \int f(x) dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

$$\text{Vậy } \int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

Câu 62: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ là

A. $\int f(x)dx = (3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = \sqrt[3]{3x+1} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3x+1} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}(3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C.$

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \frac{1}{3} \int (3x+1)^{\frac{1}{3}} d(3x+1) = \frac{1}{4}(3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C.$

Câu 63: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+2}$ là

A. $\frac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

B. $\frac{1}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

C. $\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

D. $\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3x+2}} + C$

Lời giải

Chọn C

Do $\int \sqrt{3x+2}dx = \frac{1}{3} \int (3x+2)^{\frac{1}{2}} d(3x+2) = \frac{1}{3} \frac{(3x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

Câu 64: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$ là

A. $-\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

C. $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx \Rightarrow tdt = dx$

$\Rightarrow \int f(x)dx = \int \sqrt{2x+1}dx = \int t^2 dx = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C$

B. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$

C. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$

D. $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx = \int 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx.$

Đặt $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Vậy $F(x) = 2 \ln 2 \cdot \int 2^u \cdot du = 2 \ln 2 \cdot \frac{2^u}{\ln 2} + C = 2^{\sqrt{x}+1} + C$.

Phương án B: $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} - 2 + C$ thỏa.

Phương án C: $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + 2 + C$ thỏa.

Câu 66: Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2(u^2 - 4) du$. **B.** $\int (u^2 - 4) du$. **C.** $\int (u^2 - 3) du$. **D.** $\int 2u(u^2 - 4) du$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = u^2 - 1 \Rightarrow dx = 2u du$.

Khi đó $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$ trở thành $\int \frac{u^2-4}{u} \cdot 2u du = \int 2(u^2 - 4) du$.

Câu 67: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + C$.

B. $\int f(x) dx = \sqrt{2x+1} + C$.

C. $\int f(x) dx = 2\sqrt{2x+1} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C$.

Lời giải

Đặt $\sqrt{2x+1} = t \Rightarrow 2x+1 = t^2 \Rightarrow dx = t dt$.

Khi đó ta có $\int \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{t} = \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{2} t + C = \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + C$.

Câu 68: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ là

A. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \sqrt{x^2+1} + C$.

B. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C$.

C. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$.

D. $F(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$.

Lời giải

Đặt $t = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})(x - \sqrt{x^2+1})}{x - \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \frac{1}{t} = \sqrt{x^2+1} - x$.

$t - \frac{1}{t} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right); t + \frac{1}{t} = 2\sqrt{x^2+1}$

$$\int f(x) dx = \int \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) dx = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \ln t dt = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \ln t dt = I.$$

$$\text{Đặt } u = \ln t \rightarrow du = \frac{1}{t} dt$$

$$dv = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \rightarrow v = t - \frac{1}{t};$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) \ln t - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \left(t - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) \ln t - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) \ln t - \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right) + C \\ &= x \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) - \sqrt{x^2 + 1} + C. \end{aligned}$$

Câu 69: Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}}$ có một nguyên hàm

$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S = a + b + c$ bằng

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x - 3} \Rightarrow t^2 = 2x - 3 \Rightarrow dx = t dt$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}} dx &= \int \frac{20\left(\frac{t^2 + 3}{2}\right)^2 - 30\left(\frac{t^2 + 3}{2}\right) + 7}{t} t dt = \int (5t^4 + 15t^2 + 7) dt \\ &= t^5 + 5t^3 + 7t + C = \sqrt{(2x - 3)^5} + 5\sqrt{(2x - 3)^3} + 7\sqrt{2x - 3} + C \\ &= (2x - 3)^2 \sqrt{2x - 3} + 5(2x - 3)\sqrt{2x - 3} + 7\sqrt{2x - 3} + C = (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x - 3} + C \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } F(x) = (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x - 3}. \text{ Suy ra } S = a + b + c = 3.$$

Câu 70: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C.$

B. $\int f(x) dx = \ln|1 + 3 \cos x| + C.$

C. $\int f(x) dx = 3 \ln|1 + 3 \cos x| + C.$

D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + 3 \cos x} d(1 + 3 \cos x) = -\frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C.$$

Câu 71: Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}$.

A. $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C.$

B. $f(x) = \frac{1}{(2 + \cos x)} + C.$

C. $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C.$

D. $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C.$

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2} dx = \int \frac{d(2 + \sin x)}{(2 + \sin x)^2} = -\frac{1}{2 + \sin x} + C.$

Câu 72: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$.

A. $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 + 2.$ **B.** $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2.$ **C.** $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 - 2.$ **D.** $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 - 2.$

Lời giải

Ta có $F(x) = \int \frac{\sin x dx}{1 + 3 \cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{3 \cos x + 1} = -\frac{1}{3} \ln |3 \cos x + 1| + C.$

mà $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3} \ln \left|3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\right| + C = 2 \Rightarrow C = 2.$

Do đó, $F(0) = -\frac{1}{3} \ln |3 \cos(0) + 1| + 2 = -\frac{1}{3} \ln 4 + 2 = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2.$

Vậy $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2.$

Câu 73: Biết $\int f(x) dx = 3x \cos(2x - 5) + C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\int f(3x) dx = 3x \cos(6x - 5) + C$

B. $\int f(3x) dx = 9x \cos(6x - 5) + C$

C. $\int f(3x) dx = 9x \cos(2x - 5) + C$

D. $\int f(3x) dx = 3x \cos(2x - 5) + C$

Lời giải

Cách 2:

Đặt $x = 3t \Rightarrow dx = 3dt.$

Khi đó: $\int f(x) dx = 3x \cos(2x - 5) + C \Leftrightarrow 3 \int f(3t) dt = 3.(3t) \cos(2.3t - 5) + C$

$\Leftrightarrow \int f(3t) dt = 3t \cos(6t - 5) + C \Leftrightarrow \int f(3x) dx = 3x \cos(6x - 5) + C.$

Câu 74: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^5 x.$

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C.$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 I &= \int f(x) dx = \int \tan^5 x dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx \\
 &= \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx \\
 \text{Đặt } t &= \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \quad I = \int \frac{(1 - t^2) \cdot (1 - t^2)}{t^5} (-dt) = \int \frac{1 - 2t^2 + t^4}{t^5} (-dt) \\
 &= \int \left(-\frac{1}{t^5} + \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} \right) dt = \int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4} t^{-4} - t^{-2} - \ln|t| + C \\
 &= \frac{1}{4} \cos^4 x - \cos^2 x - \ln|\cos x| + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + C \\
 &= \frac{1}{4} \cdot (\tan^2 x + 1)^2 - (\tan^2 x + 1) - \ln|\cos x| + C \\
 &= \frac{1}{4} (\tan^4 x + 2 \tan^2 x + 1) - (\tan^2 x + 1) - \ln|\cos x| + C \\
 &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + \frac{1}{4} + C \\
 &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C.
 \end{aligned}$$

- Câu 75:** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
- A.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$.

Lời giải

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$F(0) = \pi \Rightarrow \frac{\sin^4 0}{4} + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi \Rightarrow F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + \pi.$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^4 \frac{\pi}{2}}{4} + \pi = \frac{1}{4} + \pi.$$

- Câu 76:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{e}\right) = 2$ và $F(e) = \ln 2$.

Giá trị của biểu thức $F\left(\frac{1}{e^2}\right) + F(e^2)$ bằng

- A.** $3 \ln 2 + 2$. **B.** $\ln 2 + 2$. **C.** $\ln 2 + 1$. **D.** $2 \ln 2 + 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| + C, x > 0, x \neq 1.$

Nên: $F(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + C_2 & \text{khi } 0 < x < 1 \end{cases}.$

Mà $F\left(\frac{1}{e}\right) = 2$ nên $\ln\left(-\ln \frac{1}{e}\right) + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2; F(e) = \ln 2$ nên $\ln(\ln e) + C_1 = \ln 2 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2$

Suy ra $F(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) + \ln 2 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + 2 & \text{khi } 0 < x < 1 \end{cases}.$

Vậy $F\left(\frac{1}{e^2}\right) + F(e^2) = \ln\left(-\ln \frac{1}{e^2}\right) + 2 + \ln(\ln e^2) + \ln 2 = 3 \ln 2 + 2.$

Câu 77: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình

$F(x) = x$ có nghiệm là:

A. $x = 0.$

B. $x = 1.$

C. $x = -1.$

D. $x = 1 - \sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int (8-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(8-x^2) = -\sqrt{8-x^2} + C.$

Mặt khác: $F(2) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{8-2^2} + C = 0 \Leftrightarrow C = 2.$

Nên $F(x) = -\sqrt{8-x^2} + 2.$

$F(x) = x \Leftrightarrow -\sqrt{8-x^2} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{8-x^2} = 2-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 8-x^2 = (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ -2x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}.$

Câu 78: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2}$. Biết $F(3) = 6$, giá trị của $F(8)$ là

A. $\frac{217}{8}.$

B. $27.$

C. $\frac{215}{24}.$

D. $\frac{215}{8}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x) dx = \int \left(\frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left(\frac{2(x+1)-2}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

$= 2 \int \sqrt{x+1} dx - 2 \int \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx - \int \frac{1}{x^2} dx$

$$= 2 \int (x+1)^{\frac{1}{2}} d(x+1) - 2 \int (x+1)^{-\frac{1}{2}} d(x+1) - \int x^{-2} dx$$

$$= \frac{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{x+1} + \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{x+1} + \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Mặt khác: } F(3) = 6 \Leftrightarrow 6 = \frac{4(3+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{3+1} + \frac{1}{3} + C \Leftrightarrow C = 3.$$

$$\text{Vậy } F(8) = \frac{4(8+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{8+1} + \frac{1}{8} + 3 = \frac{217}{8}.$$

Câu 79: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ là

A. $(4x^2 + 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C.$

B. $(4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}.$

C. $(3x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}.$

D. $(4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C.$

Lời giải

Chọn D

Xét trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, ta có:

$$\int f(x) dx = \int \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}} dx = \int \frac{10x(2x-3) + 7}{\sqrt{2x-3}} dx.$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{2x-3} \Rightarrow u^2 = 2x-3 \Rightarrow 2udu = 2dx \Rightarrow udu = dx.$$

Khi đó:

$$\int \frac{10x(2x-3) + 7}{\sqrt{2x-3}} dx = \int \frac{5(u^2+3)u^2 + 7}{u} udu = \int [5(u^2+3)u^2 + 7] du = \int [5u^4 + 15u^2 + 7] du$$

$$= u^5 + 5u^3 + 7u + C = (u^4 + 5u^2 + 7)u + C = [(2x-3)^2 + 5(2x-3) + 7]\sqrt{2x-3} + C$$

$$= (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C.$$

DẠNG 3. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ

1. Công thức thường áp dụng

$$\bullet \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C. \bullet \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C.$$

$$\bullet \ln a + \ln b = \ln(ab). \bullet \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$$

• $\ln a^n = n \ln a$. • $\ln 1 = 0$.

2. Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

• Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.

• Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp che để đưa về công thức nguyên hàm số 01.

• Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X = a \tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng $X^2 + a^2$.

Câu 80: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2} (x \neq 0)$, biết rằng

$F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0$

A. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$.

B. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}$.

C. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$.

D. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int \left(ax + \frac{b}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{b}{x} + C$.

Theo bài ra $\begin{cases} F(-1) = 1 \\ F(1) = 4 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a + b + C = 1 \\ \frac{1}{2}a - b + C = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ a = \frac{3}{2} \\ C = \frac{7}{4} \end{cases}$.

Vậy $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$.

Câu 81: Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a + 2b = 8$.

B. $a + b = 8$.

C. $2a - b = 8$.

D. $a - b = 8$.

Lời giải

Ta có: $\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x + (-2A+B)}{(x+1)(x-2)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -2A+B=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-3 \end{cases}$.

Khi đó: $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{5}{x+1} - \frac{3}{x-2} \right) dx = 5 \ln|x+1| - 3 \ln|x-2| + C.$

Suy ra $a = 5; b = -3$ nên $a - b = 8.$

Câu 82: Cho biết $\int \frac{1}{x^3 - x} dx = a \ln|(x-1)(x+1)| + b \ln|x| + C.$ Tính giá trị biểu thức: $P = 2a + b.$

A. 0.

B. -1.

C. $\frac{1}{2}.$

D. 1.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{x+1} = \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Dx(x-1)}{x^3 - x}$
 $= \frac{(A+B+D)x^2 + (B-D)x - A}{x^3 - x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+D=0 \\ B-D=0 \\ -A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Khi đó: $\int \frac{1}{x^3 - x} dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \right) dx = \frac{1}{2} \ln|(x-1)(x+1)| - \ln|x| + C.$

Suy ra $a = \frac{1}{2}; b = -1$ nên $P = 2a + b = 0.$

Câu 83: Cho biết $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = a \ln|x+2| + b \ln|x+3| + C.$ Tính giá trị biểu thức: $P = a^2 + ab + b^2.$

A. 12.

B. 13.

C. 14.

D. 15.

Lời giải

Ta có: $\frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{(A+B)x + (3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ 3A+2B=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \end{cases}.$$

Khi đó: $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx = 3 \ln|x+2| + \ln|x+3| + C.$

Suy ra $a = 3; b = 1$ nên $P = a^2 + ab + b^2 = 13.$

Câu 84: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}, f'(1) = 3, f(1) = 2, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}.$ Khi đó $2a + b$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$.

B. 0.

C. 5.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $f'(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3$ (1).

Hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, các điểm $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ đều thuộc $(0; +\infty)$ nên

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(ax^2 + \frac{b}{x^3} \right) dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{b}{2x^2} + C.$$

$$+ f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \quad (2).$$

$$+ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \\ \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ C = \frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$2a + b = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Câu 85: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn

$F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$ bằng

A. $\frac{2019}{2020}$.

B. $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}$.

C. $2018 \frac{1}{2020}$.

D. $-\frac{2019}{2020}$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

Đặt $t = x(x+1) = x^2 + x \Rightarrow dt = (2x+1)dx$.

Khi đó $F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x(x+1)} + C$.

Mặt khác, $F(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + 1$.

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019) = -\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2019.2020}\right) + 2019 \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) + 2019 = -\left(1 - \frac{1}{2020}\right) + 2019 \\ &= 2018 + \frac{1}{2020} = 2018\frac{1}{2020}. \end{aligned}$$

Câu 86: Cho $I = \int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx = \frac{-a}{x^2} - b \ln|x| + 2c \ln(1+x^2) + C$. Khi đó $S = a + b + c$ bằng

- A. $-\frac{1}{4}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{7}{4}$. D. 2.

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{x^4(1+x^2)} dx \\ t &= 1+x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t-1)^2 \cdot t} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{-1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \left(-\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + \ln|t| \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(-\ln|x^2| - \frac{1}{x^2} + \ln|1+x^2| \right) + C = -\frac{1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \\ \Rightarrow &\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow S = a + b + c = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Câu 87: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3) + f(-3) = 4$ và

$f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-5) + f(0) + f(2)$ bằng

- A. $5 - \frac{1}{2} \ln 2$. B. $6 - \frac{1}{2} \ln 2$. C. $5 + \frac{1}{2} \ln 2$. D. $6 + \frac{1}{2} \ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = \frac{1}{x^2-1} \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$ với $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

$$\text{Khi đó: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{ khi } x > 1 \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 & \text{ khi } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_3 & \text{ khi } x < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(3) + f(-3) = C_1 + C_3 = 4 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2C_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 4 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(-5) + f(0) + f(2) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + C_3 + C_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} + C_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + 5 = 5 - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Câu 88: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$, $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$. **B.** $\ln 80 + 1$. **C.** $\frac{1}{3} \ln \frac{4}{5} + \ln 2 + 1$. **D.** $\frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} + 1$.

Lời giải

$$f(x) = \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_1, \forall x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_2, \forall x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_3, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f(-3) = \frac{1}{3} \ln 4 + C_1, \forall x \in (-\infty; -2), f(0) = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_2, \forall x \in (-2; 1),$$

$$f(3) = \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + C_3, \forall x \in (1; +\infty),$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } f(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{3}(1 + \ln 2).$$

$$\Rightarrow f(-1) = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}.$$

$$\text{Và } f(-3) - f(3) = 0 \Leftrightarrow C_1 - C_3 = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{10}.$$

$$\text{Vậy } f(-4) + f(-1) - f(4) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} + C_1 + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 - C_2 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}.$$

Câu 89: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$.

$$\text{Tính } S = (f(3) - 2018)(f(-1) - 2017).$$

A. $S = 1$.

B. $S = 1 + \ln^2 2$.

C. $S = 2 \ln 2$.

D. $S = \ln^2 2$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1 & \text{ khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2 & \text{ khi } x < 1 \end{cases}$.

Lại có $f(0) = 2017 \Rightarrow \ln(1-0) + C_2 = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017$.

$f(2) = 2018 \ln(2-1) + C_1 = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018$.

Do đó $S = [\ln(3-1) + 2018 - 2018][\ln(1-(-1)) + 2017 - 2017] = \ln^2 2$.

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$, $f(-2) + f(2) = 0$ và

$f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính $f(-3) + f(0) + f(4)$ được kết quả

A. $\ln \frac{6}{5} + 1$.

B. $\ln \frac{6}{5} - 1$.

C. $\ln \frac{4}{5} + 1$.

D. $\ln \frac{4}{5} - 1$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \begin{cases} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{ khi } x < -1 \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 & \text{ khi } -1 < x < 1 \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_3 & \text{ khi } x > 1 \end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases} f(-2) + f(2) = 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 3 + C_1 + \ln \frac{1}{3} + C_3 = 0 \\ \ln 3 + C_2 + \ln \frac{1}{3} + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$

Do đó $f(-3) + f(0) + f(4) = \ln 2 + C_1 + C_2 + \ln \frac{3}{5} + C_3 = \ln \frac{6}{5} + 1$.

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$. Khi đó:

$$\int u dv = uv - \int v du (*)$$

Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$.

Tính $v = \int dv$ và $du = u' \cdot dx$.

Bước 2: Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$. (*)

Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u' \cdot dx$.

Bước 2. Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.** $I = \int P(x) \sin(ax+b) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(ax+b) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) \cdot dx \\ v = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) \end{cases}$$

• **Dạng 2.** $I = \int P(x) \cos(ax+b) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos(ax+b) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) \cdot dx \\ v = \frac{1}{a} \sin(ax+b) \end{cases}$$

• **Dạng 3.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) \cdot dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax+b} \end{cases}$$

- **Dạng 4.** $I = \int P(x) \ln g(x) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln g(x) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

- **Dạng 5.** $I = \int \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] e^x dx$.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ dv = e^x dx \end{cases}$.

Câu 91: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là

A. $F(x) = x \cos x + \sin x + C$.

B. $F(x) = x \cos x - \sin x + C$.

C. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C$.

D. $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Câu 92: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là :

A. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$

B. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} (x - 2) + C$

C. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$

D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x.e^{2x} dx = \frac{1}{2} x.e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$\Rightarrow \int x.e^{2x} dx = \frac{1}{2} x.e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$$

Câu 93: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x - 1)e^x$ là

A. $(2x - 3)e^x + C$.

B. $(2x + 3)e^x + C$.

C. $(2x + 1)e^x + C$.

D. $(2x - 1)e^x + C$.

Lời giải

$$\text{Gọi } I = \int (2x - 1)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x - 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = (2x-1)e^x - 2 \int e^x dx = (2x-1)e^x - 2e^x + C = (2x-3)e^x + C.$$

Câu 94: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{2x}$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x-2) + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x} (x-2) + C.$

D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$

Lời giải

Ta có $F(x) = \int xe^{2x} dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Suy ra $F(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$

Câu 95: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(1 + \sin x)$ là

A. $\frac{x^2}{2} - x \sin x + \cos x + C.$

B. $\frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C.$

C. $\frac{x^2}{2} - x \cos x - \sin x + C.$

D. $\frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + C.$

Lời giải

Ta có: $\int f(x) dx = \int x(1 + \sin x) dx = \int x dx + \int x \sin x dx = \int x dx - \int x d(\cos x)$

$= \frac{x^2}{2} - \left(x \cos x - \int \cos x dx \right) = \frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C.$

Câu 96: Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2e^x$. Tính tích $P = abc$.

A. -4.

B. 1.

C. -5.

D. -3.

Lời giải

Chọn A

Ta đặt: $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$

Ta đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) = (x^2 - 2x + 2) e^x.$

Vậy $a = 1, b = -2, c = 2 \Rightarrow P = abc = -4.$

Câu 97: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1 + e^x)$ là

A. $(2x-1)e^x + x^2.$

B. $(2x+1)e^x + x^2.$

C. $(2x+2)e^x + x^2.$

D. $(2x-2)e^x + x^2.$

Lời giải

Ta có $\int 2x(1+e^x)dx = 2\int xdx + 2\int xe^x dx$.

Gọi $I = 2\int x \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó $I = 2xe^x - 2\int e^x dx$.

Vậy $\int 2x(1+e^x)dx = 2\int xdx + xe^x - 2\int e^x dx = x^2 + xe^x - 2x + C$
 $= (2x-2)e^x + x^2 + C$.

Câu 98: Họ nguyên hàm của $f(x) = x \ln x$ là kết quả nào sau đây?

A. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$.

C. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$.

D. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x + C$.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int x \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Câu 99: Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x^2 + 1) \cdot \ln x$.

A. $\int f(x)dx = x(x^2 + 1)\ln x - \frac{x^3}{3} + C$.

B. $\int f(x)dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C$.

C. $\int f(x)dx = x(x^2 + 1)\ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$.

D. $\int f(x)dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int (3x^2 + 1) \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (3x^2 + 1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int (3x^2 + 1)dx = x^3 + x \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = (x^3 + x) \ln x - \int (x^3 + x) \frac{1}{x} dx = x(x^2 + 1) \ln x - \int (x^2 + 1) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$$

Câu 100: Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. $-x \cot x + \ln |\sin x| + C$.

B. $x \cot x - \ln |\sin x| + C$.

C. $x \cot x + \ln|\sin x| + C$.

D. $-x \cot x - \ln(\sin x) + C$.

Lời giải

Chọn A

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } F(x) &= \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cdot \cot x + \int \cot x dx = -x \cdot \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -x \cdot \cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} \\ &= -x \cdot \cot x + \ln|\sin x| + C. \text{ Với } x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \ln|\sin x| = \ln(\sin x). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } F(x) = -x \cot x + \ln(\sin x) + C.$$

Câu 101: Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3x(x + \cos x)$ là

A. $x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$

B. $x^3 - 3(x \sin x + \cos x) + C$

C. $x^3 + 3(x \sin x - \cos x) + C$

D. $x^3 - 3(x \sin x - \cos x) + C$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int 3x(x + \cos x) dx = \int 3x^2 dx + \int 3x \cos x dx$$

$$\bullet \int 3x^2 dx = x^3 + C_1$$

$$\bullet \int 3x \cos x dx = \int 3x \cdot d(\sin x) = 3x \cdot \sin x - \int 3 \sin x dx = 3x \cdot \sin x + 3 \cos x + C_2$$

$$\text{Vậy } \int 3x(x + \cos x) dx = x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$$

Câu 102: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + xe^x$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + (x+1)e^x + C$. B. $\frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$.

C. $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$. D. $4x^3 + (x+1)e^x + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int (x^4 + xe^x) dx = \int x^4 dx + \int xe^x dx.$$

$$+) \int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C_1.$$

$$+) \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C_2 = (x-1)e^x + C_2.$$

$$\text{Vậy } \int (x^4 + xe^x) dx = \frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C.$$

Câu 103: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x-2) + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x} (x-2) + C.$

D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$

Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}.$$

$$F(x) = x.e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$$

Câu 104: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\int xe^x dx = e^x + xe^x + C.$

B. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + e^x + C.$

C. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C.$

D. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + C.$

Lời giải

$$\text{Sử dụng công thức: } \int u dv = u.v - \int v du.$$

$$\text{Ta có: } \int xe^x dx = \int x d(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Câu 105: Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x \cos ax$.

A. $x \sin x - \cos x + C$ **B.** $\frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$

C. $x \sin x + \cos x + C$ **D.** $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } F'(x) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2}.$$

$$\text{Do } F(x) \text{ là một nguyên hàm của } f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2} \text{ nên } a = 1.$$

$$\int g(x) dx = \int x \cos x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\int g(x) dx = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

Câu 106: Họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x}$ là

A. $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$

B. $(x^2 + x - 1) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C.$

C. $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C.$

D. $(x^2 + x - 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x} dx = \int (2x + 1) \ln x dx + \int \frac{1}{x} dx = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int (2x + 1) \ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x + 1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 + x \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= (x^2 + x) \ln x - \int (x^2 + x) \frac{1}{x} dx = (x^2 + x) \ln x - \int (x + 1) dx \\ &= (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C_1. \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_2.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x} dx &= I_1 + I_2 \\ &= (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C_1 + \ln x + C_2 = (x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C. \end{aligned}$$

Dạng 4.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện

Câu 107: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = xe^x$ và $f(0) = 2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = 3.$

B. $f(1) = e.$

C. $f(1) = 5 - e.$

D. $f(1) = 8 - 2e.$

Lời giải

Ta có:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x e^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \rightarrow f(x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$\text{Theo đề: } f(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = -1 + C \Leftrightarrow C = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = x.e^x - e^x + 3$$

$$\Rightarrow f(1) = 3.$$

Câu 108: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

- A.** $(x-2)e^x + e^x + C$ **B.** $(x+2)e^{2x} + e^x + C$ **C.** $(x-1)e^x + C$ **D.** $(x+1)e^x + C$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^x = x + C_1.$$

$$\text{Vì } f(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow f(x)e^{2x} = (x+2)e^x \Rightarrow \int f(x)e^{2x} dx = \int (x+2)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int f(x)e^{2x} dx = \int (x+2)e^x dx = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C.$$

Câu 109: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)e^x, f(0) = 0$ và $\int f(x) dx = (ax+b)e^x + c$ với a, b, c là các hằng số. Khi đó:

- A.** $a+b=2$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=1$. **D.** $a+b=0$.

Lời giải

Theo đề: $f'(x) = (x+1)e^x$. Nguyên hàm 2 vế ta được

$$\int f'(x) dx = \int (x+1)e^x dx \Leftrightarrow f(x) = (x+1)e^x - \int e^x dx$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \Rightarrow 0.e^0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = xe^x.$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

$$\text{Suy ra } a=1; b=-1 \Rightarrow a+b=0.$$

Câu 110: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

- A.** $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$. **B.** $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$.
C. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$. **D.** $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = F(x; C).$$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow -e^{-0} + C = 1 \Leftrightarrow C = 2. \text{ Vậy } F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2.$$

Câu 111: Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}.$

B. $ab = \frac{1}{4}.$

C. $ab = -\frac{1}{8}.$

D. $ab = -\frac{1}{4}.$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } ab = \frac{1}{8}.$$

Câu 112: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của

$F(-1) + F(2)$ bằng

A. $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5.$

B. $0.$

C. $\frac{7}{3} \ln 2.$

D. $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5.$

Lời giải

$$\text{Tính } \int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+3) \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+3} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \int \frac{dx}{x(x+3)} = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C = F(x, C).$$

$$\text{Lại có } F(-2) + F(1) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \ln 2 + C \right) + \left(-\ln 4 + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} + C \right) = 0 \Leftrightarrow 2C = \frac{7}{3} \ln 2.$$

$$\text{Suy ra } F(-1) + F(2) = \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + 2C = \frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5.$$

Câu 113: Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x-1)$. Cho biết $g(2) = 1$ và $g(3) = a \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên dương phân biệt. Hãy tính giá trị của $T = 3a^2 - b^2$

A. $T = 8.$

B. $T = -17.$

C. $T = 2.$

D. $T = -13.$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} \\ v = x-1 \end{cases}$$

$$g(x) = \int \ln(x-1) dx = (x-1) \ln(x-1) - \int \frac{x-1}{x-1} dx = (x-1) \ln(x-1) - x + C$$

$$\text{Do } g(2) = 1 \Leftrightarrow 1 \ln 1 - 2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 3 \Rightarrow g(x) = (x-1) \ln(x-1) - x + 3$$

$$\text{Suy ra: } g(3) = 2 \ln 2 - 3 + 3 = 2 \ln 2 = \ln 4 \Rightarrow a = 1, b = 4 \Rightarrow 3a^2 - b^2 = -13$$

Câu 114: Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}$.

B. $ab = \frac{1}{4}$.

C. $ab = -\frac{1}{8}$.

D. $ab = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } ab = \frac{1}{8}.$$



NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 1. NGUYÊN HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

NGUYÊN HÀM CỦA HÀM ẨN HOẶC LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH $f(x), f'(x), f''(x)$

Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Để dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 3. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 4. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\text{Suy ra } f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} h(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 5. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

Phương pháp:

$$\text{Chia hai vế với } f(x) \text{ ta được } \frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = -\int p(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 6. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0$

Phương pháp:

$$\text{Chia hai vế với } [f(x)]^n \text{ ta được } \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?
A. (12;13). **B.** (9;10). **C.** (11;12). **D.** (13;14).

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng
A. $-\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -1 . **D.** $-\frac{3}{4}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2\ln 2$ và $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b \cdot \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2 + b^2)$ là
A. $\frac{27}{4}$. **B.** 9. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1) + f(2) + \dots + f(2020)$ bằng

- A. $-\frac{2020}{2021}$. B. $-\frac{2015}{2019}$. C. $-\frac{2019}{2020}$. D. $-\frac{2016}{2021}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2\ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T = a^2 - b$.

- A. $T = \frac{-3}{16}$. B. $T = \frac{21}{16}$. C. $T = \frac{3}{2}$. D. $T = 0$.

Câu 6: Cho hs $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$ thì giá trị $f(2)$ là

- A. e^2 . B. $2e$. C. $e+1$. D. e^3 .

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}, f(x) \neq 0$ với mọi x và thỏa mãn $f(1) = -\frac{1}{2}$, $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$. Biết $f(1) + f(2) + \dots + f(2019) = \frac{a}{b} - 1$ với $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $a - b = 2019$. B. $ab > 2019$. C. $2a + b = 2022$. D. $b \leq 2020$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1) = \frac{1}{2}$. Tính $f(4)$?

- A. 24. B. 14. C. 4. D. 16.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}, f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x+1}.f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(x) < 2$ B. $2 < f(x) < 4$ C. $f(x) > 6$ D. $4 < f(x) < 6$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2; 4]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$. Biết $4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3, \forall x \in [2; 4], f(2) = \frac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

- A. $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$. B. $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$. C. $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$. D. $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 11: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tính $f(1)$.

- A. $\frac{2}{e}$. B. $\frac{1}{e}$. C. e . D. $\frac{e}{2}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x).f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

- A. $f^2(2) = \sqrt{2\ln 2 + 2}$. B. $f^2(2) = 2\ln 2 + 2$. C. $f^2(2) = \ln 2 + 1$. D. $f^2(2) = \sqrt{\ln 2 + 1}$.

- Câu 13:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Tính giá trị của $T = f^2(2)$
- A. $\frac{43}{30}$ B. $\frac{16}{15}$ C. $\frac{43}{15}$ D. $\frac{26}{15}$
- Câu 14:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x) + \tan x.f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b\ln 3$ trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P = a + b$ bằng
- A. $\frac{14}{9}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $-\frac{4}{9}$
- Câu 15:** Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = (x+1).f(x)$. Tính $f(8)$.
- A. $f(8) = 49$. B. $f(8) = 256$. C. $f(8) = \frac{1}{16}$. D. $f(8) = \frac{49}{64}$.
- Câu 16:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $(x^2 + 1)^2 f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng
- A. $\frac{2}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $-\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{2}$
- Câu 17:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x+1)f^2(x) = 0$, $f(x) > 0$, $\forall x > 0$ và $f(2) = \frac{1}{6}$. Tính giá trị của $P = f(1) + f(2) + \dots + f(2019)$.
- A. $\frac{2021}{2020}$. B. $\frac{2020}{2019}$. C. $\frac{2019}{2020}$. D. $\frac{2018}{2019}$.
- Câu 18:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(f(x))^2.f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ là
- A. $2\sqrt[3]{42}$. B. $2\sqrt[3]{15}$. C. $\sqrt[3]{42}$. D. $\sqrt[3]{15}$.
- Câu 19:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng
- A. 5. B. 10. C. 20. D. 15.
- Câu 20:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện: $f(0) = 2\sqrt{2}$, $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x).f'(x) = (2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng
- A. $\sqrt{26}$. B. $\sqrt{24}$. C. $\sqrt{15}$. D. $\sqrt{23}$.
- Câu 21:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 2x^2 - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng
- A. 28. B. 22. C. $\frac{19}{2}$. D. 10.

- Câu 22:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$.
 Tính $f(2)$.
A. $f(2) = \frac{e}{3}$. **B.** $f(2) = \frac{e}{6}$. **C.** $f(2) = \frac{e^2}{3}$. **D.** $f(2) = \frac{e^2}{6}$.
- Câu 23:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.
A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.
- Câu 24:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $2 < f(5) < 3$. **B.** $1 < f(5) < 2$. **C.** $4 < f(5) < 5$. **D.** $3 < f(5) < 4$.
- Câu 25:** Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?
A. $\frac{a}{b} < -1$. **B.** $\frac{a}{b} > 1$. **C.** $a + b = 1010$. **D.** $b - a = 3029$.
- Câu 26:** Cho hàm số $f(x) \neq 0$, $f'(x) = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} f^2(x)$ và $f(1) = -\frac{1}{3}$. Tính $f(1) + f(2) + \dots + f(80)$.
A. $-\frac{3240}{6481}$. **B.** $\frac{6480}{6481}$. **C.** $-\frac{6480}{6481}$. **D.** $\frac{3240}{6481}$.
- Câu 27:** Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1, f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng
A. $e^{\frac{3}{2}}$. **B.** e^3 . **C.** $e^{\frac{5}{2}}$. **D.** e^2 .
- Câu 28:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$.
 Tính $f(1)$.
A. $f(1) = e^2$. **B.** $f(1) = -\frac{1}{e}$. **C.** $f(1) = \frac{1}{e^2}$. **D.** $f(1) = \frac{1}{e}$.
- Câu 29:** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.
A. $f^2(2) = \frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2) = \frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2) = \frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2) = \frac{323}{15}$.
- Câu 30:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là
A. $(x-2)e^x + e^x + C$. **B.** $(x+2)e^{2x} + e^x + C$.
C. $(x-1)e^x + C$. **D.** $(x+1)e^x + C$.

- Câu 31:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 2x \quad \forall x \in (0; +\infty)$, $f(1) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là:
- A. $\frac{25}{6}$. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{17}{6}$. D. $\frac{17}{3}$.
- Câu 32:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6[f'(x)]^3 + 27[f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng
- A. -1 . B. 1 . C. 7 . D. -7 .
- Câu 33:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng
- A. $\frac{5}{2}$. B. 8 . C. 10 . D. 4 .
- Câu 34:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(1; +\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x) - 2f(x)) \cdot \ln x = x^3 - f(x), \forall x \in (1; +\infty)$; biết $f(\sqrt[3]{e}) = 3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?
- A. $\left(12; \frac{25}{2}\right)$. B. $\left(13; \frac{27}{2}\right)$. C. $\left(\frac{23}{2}; 12\right)$. D. $\left(14; \frac{29}{2}\right)$.
- Câu 35:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x) - x^2 - 1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$, tính tích phân $\int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx$.
- A. $\frac{11}{2}$. B. $\frac{15}{4}$. C. $\frac{45}{8}$. D. $\frac{9}{2}$.
- Câu 36:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x) + 1}$ và $f(0) = 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$. Biết rằng giá trị của biểu thức $P = 2M - m$ có dạng $a\sqrt{11} - b\sqrt{3} + c, (a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính $a + b + c$
- A. $a + b + c = 7$. B. $a + b + c = 4$. C. $a + b + c = 6$. D. $a + b + c = 5$.
- Câu 37:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2\ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T = a^2 - b$.
- A. $T = \frac{21}{16}$. B. $T = \frac{3}{2}$. C. $T = 0$. D. $T = -\frac{3}{16}$.
- Câu 38:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.
- A. $\frac{9}{10}$. B. $\frac{21}{10}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Câu 39: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 6. B. 5. C. 3. D. 4.

Câu 40: Cho $F(x) = \int \frac{(1 + \cos^2 x)(\sin x + \cot x)}{\sin^4 x} dx$ và S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ trên khoảng $(0; 4\pi)$. Tổng S thuộc khoảng

- A. $(6\pi; 9\pi)$. B. $(2\pi; 4\pi)$. C. $(4\pi; 6\pi)$. D. $(0; 2\pi)$.

Câu 41: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0; \pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$ B. $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ D. $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$

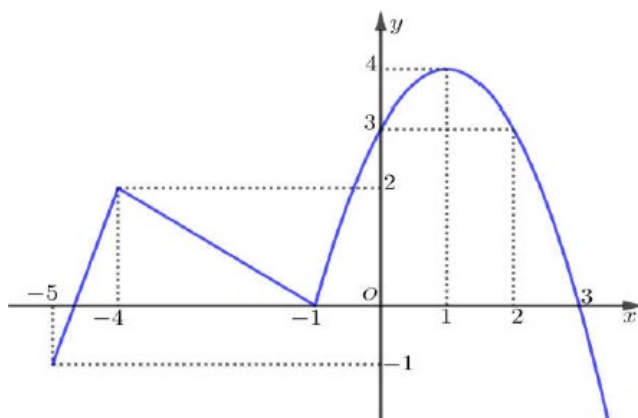
Câu 42: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 4\pi)$?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 43: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x - \cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. vô số điểm. D. 0.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ.



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5) + 3f(2)$ bằng

- A. 33. B. $\frac{109}{3}$. C. $\frac{35}{3}$. D. 11.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và

$f(1) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

- A. $y = -16x - 20$. B. $y = 16x - 20$. C. $y = 16x + 20$. D. $y = -16x + 20$.



NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 1. NGUYÊN HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

NGUYÊN HÀM CỦA HÀM ẨN HOẶC LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH $f(x), f'(x), f''(x)$

Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Để dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 3. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 4. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\text{Suy ra } f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} h(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 5. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

Phương pháp:

$$\text{Chia hai vế với } f(x) \text{ ta được } \frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = -\int p(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 6. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0$

Phương pháp:

$$\text{Chia hai vế với } [f(x)]^n \text{ ta được } \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = 2. \text{ Khi đó } f(2) \text{ thuộc khoảng nào sau đây?}$$

- A.** (12;13). **B.** (9;10). **C.** (11;12). **D.** (13;14).

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời $f(0) = 2$ nên $f'(x) \geq 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0; +\infty)$.

$$\text{Từ giả thiết } (f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ suy ra } f'(x) = \sqrt{f(x)} \cdot e^{\frac{x}{2}}, \forall x \in [0; +\infty).$$

$$\text{Do đó, } \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}, \forall x \in [0; +\infty).$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} + C, \forall x \in [0; +\infty)$ với C là hằng số nào đó.

Kết hợp với $f(0) = 2$, ta được $C = \sqrt{2} - 1$.

Từ đó, tính được $f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2 \approx 9,81$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. -1 .

D. $-\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$\text{Mà } f(2) = -\frac{4}{19} \Rightarrow \frac{19}{4} = \frac{16}{4} + C \Rightarrow C = \frac{3}{4}. \text{ Suy ra } f(x) = -\frac{4}{x^4 + 3}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = -1.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b.\ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2 + b^2)$ là

A. $\frac{27}{4}$.

B. 9 .

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Chia cả hai vế của biểu thức $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$ cho $(x+1)^2$ ta có

$$\frac{x}{x+1}.f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2}f(x) = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1}.f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}.$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{x+1}.f(x) = \int \left[\frac{x}{x+1}.f(x) \right]' dx = \int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = x - \ln|x+1| + C.$$

$$\text{Do } f(1) = -2\ln 2 \text{ nên ta có } \frac{1}{2}.f(1) = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow -\ln 2 = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \frac{x+1}{x}(x - \ln|x+1| - 1).$$

$$\text{Vậy ta có } f(2) = \frac{3}{2}(2 - \ln 3 - 1) = \frac{3}{2}(1 - \ln 3) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } 2(a^2 + b^2) = 2 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(-\frac{3}{2} \right)^2 \right] = 9.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1) + f(2) + \dots + f(2020)$ bằng

A. $-\frac{2020}{2021}$. **B.** $-\frac{2015}{2019}$. **C.** $-\frac{2019}{2020}$. **D.** $-\frac{2016}{2021}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$f'(x) = (2x+1)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+1 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+1) dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2 + x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = \frac{1}{2} - 1 \\ f(2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ f(3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ \vdots \\ f(2020) = \frac{1}{2021} - \frac{1}{2020} \end{array} \right. \Rightarrow f(1) + f(2) + \dots + f(2020) = -1 + \frac{1}{2021} = -\frac{2020}{2021}.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2 \ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b \ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T = a^2 - b$.

A. $T = \frac{-3}{16}$. **B.** $T = \frac{21}{16}$. **C.** $T = \frac{3}{2}$. **D.** $T = 0$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + \frac{x+2}{x(x+1)}f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f'(x) + \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{x+1}f(x) \right]' = \frac{x^2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x) = \int \frac{x^2}{x+1} dx \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c \right).$$

Ta có $f(1) = 2\ln 2 + 1 \Leftrightarrow c = 1$.

Từ đó $f(x) = \frac{x+1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + 1 \right)$, $f(2) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\ln 3$. Nên $\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$.

Vậy $T = a^2 - b = -\frac{3}{16}$.

Câu 6: Cho hàm $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$ thì giá trị $f(2)$ là

A. e^2 .

B. $2e$.

C. $e+1$.

D. e^3 .

Lời giải

Ta có $y' = xy^2 \Rightarrow \frac{y'}{y} = x^2 \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int x^2 dx \Leftrightarrow \ln y = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = e^{\frac{x^3}{3} + C}$.

Theo giả thiết $f(-1) = 1$ nên $e^{\frac{1}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3}$.

Vậy $y = f(x) = e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}}$. Do đó $f(2) = e^3$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ với mọi x và thỏa mãn $f(1) = -\frac{1}{2}$,

$f'(x) = (2x+1)f^2(x)$. Biết $f(1) + f(2) + \dots + f(2019) = \frac{a}{b} - 1$ với $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$. Khẳng

định nào sau đây **sai**?

A. $a - b = 2019$.

B. $ab > 2019$.

C. $2a + b = 2022$.

D. $b \leq 2020$.

Lời giải

$$f'(x) = (2x+1)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+1 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+1) dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = \int (2x+1) dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C \quad (1).$$

Thay $x=1$ vào (1) được $2+C = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow C = 0$. Vậy $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$.

$$T = f(1) + f(2) + \dots + f(2019) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2019}\right) = -1 + \frac{1}{2020}.$$

Suy ra: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2020 \end{cases} \Rightarrow a - b = -2019.$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1) = \frac{1}{2}$.

Tính $f(4)$?

A. 24.

B. 14.

C. 4.

D. 16.

Lời giải

Chọn D

Trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có: $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}x^2.$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x} \cdot f(x)\right)' = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow \int \left(\sqrt{x} \cdot f(x)\right)' dx = \int \frac{3}{2}x^2 dx.$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot f(x) = \frac{1}{2}x^3 + C. (*)$$

Mà $f(1) = \frac{1}{2}$ nên từ (*) có: $\sqrt{1} \cdot f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^3 + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{2}.$

Vậy $f(4) = \frac{4^2\sqrt{4}}{2} = 16.$

Câu 9: Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) < 2$

B. $2 < f(x) < 4$

C. $f(x) > 6$

D. $4 < f(x) < 6$

Lời giải

Ta có: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \Leftrightarrow \ln(f(x)) = 2\sqrt{x+1} + C$

Mà $f(0) = 1$ nên $C = -2 \Rightarrow f(x) = e^{2\sqrt{x+1}-2} \Rightarrow f(3) = e^2 > 6$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2; 4]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$. Biết

$4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3, \forall x \in [2; 4], f(2) = \frac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}.$

B. $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}.$

C. $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}.$

D. $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}.$

Lời giải

Ta có: $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[2; 4] \Rightarrow f(x) \geq f(2)$ mà $f(2) = \frac{7}{4}$. Do đó: $f(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$.

Từ giả thiết ta có: $4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3 \Leftrightarrow x^3 [4f(x) + 1] = [f'(x)]^3$

$$\Leftrightarrow x \sqrt[3]{4f(x) + 1} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x) + 1}} = x.$$

$$\text{Suy ra: } \int \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x) + 1}} dx = \int x dx \Leftrightarrow \frac{1}{4} \int \frac{d[4f(x) + 1]}{\sqrt[3]{4f(x) + 1}} = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow \frac{3}{8} \sqrt[3]{[4f(x) + 1]^2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$f(2) = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 2 + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy: } f(x) = \frac{\sqrt[3]{\left[\frac{4}{3}(x^2 - 1)\right]^3} - 1}{4} \Rightarrow f(4) = \frac{40\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Câu 11: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{2}{e}$.

B. $\frac{1}{e}$.

C. e .

D. $\frac{e}{2}$.

Lời giải

$$f(x) + f'(x) = x \quad (1).$$

Nhân 2 vế của (1) với e^x ta được $e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = x \cdot e^x$.

$$\text{Hay } [e^x \cdot f(x)]' = x \cdot e^x \Rightarrow e^x \cdot f(x) = \int x \cdot e^x dx.$$

$$\text{Xét } I = \int x \cdot e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$I = \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C. \text{ Suy ra } e^x f(x) = x \cdot e^x - e^x + C.$$

$$\text{Theo giả thiết } f(0) = 1 \text{ nên } C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x \cdot e^x - e^x + 2}{e^x} \Rightarrow f(1) = \frac{2}{e}.$$

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

A. $f^2(2) = \sqrt{2 \ln 2 + 2}$. **B.** $f^2(2) = 2 \ln 2 + 2$.

C. $f^2(2) = \ln 2 + 1$. **D.** $f^2(2) = \sqrt{\ln 2 + 1}$.

Lời giải

Ta có: $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]; x > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot [f'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - f(x) \cdot f''(x)$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow [f(x) \cdot f'(x)]' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Do đó: $\int [f(x) \cdot f'(x)]' \cdot dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = x + \frac{1}{x} + c_1.$

Vì $f(1) = f'(1) = 1 \Rightarrow 1 = 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1.$

Nên $\int f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) dx \Leftrightarrow \int f(x) \cdot d(f(x)) = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) dx$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + c_2. \text{ Vì } f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

Vậy $\frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + 1 \Rightarrow f^2(2) = 2 \ln 2 + 2.$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in R$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Tính giá trị của $T = f^2(2)$

A. $\frac{43}{30}$

B. $\frac{16}{15}$

C. $\frac{43}{15}$

D. $\frac{26}{15}$

Lời giải

Có $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x \Leftrightarrow (f(x) \cdot f'(x))' = x^3 - 2x$

$$\Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) = \int (x^3 - 2x) dx = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C$$

Từ $f(0) = f'(0) = 1$. Suy ra $C = 1$. Vậy $f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1$

Tiếp, có $2f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \Leftrightarrow (f^2(x))' = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = \int \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2\right) dx = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$$

Từ $f(0) = 1$. Suy ra $C = 1$. Vậy $f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + 1.$

Do đó $T = \frac{43}{15}$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$.

Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b\ln 3$ trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P = a + b$ bằng

A. $\frac{14}{9}$

B. $-\frac{2}{9}$

C. $\frac{7}{9}$

D. $-\frac{4}{9}$

Lời giải

Chọn D

$$f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x} \Leftrightarrow \cos x \cdot f(x) + \sin x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^2 x}.$$

$$\Leftrightarrow [\sin x \cdot f(x)]' = \frac{x}{\cos^2 x}.$$

$$\text{Do đó } \int [\sin x \cdot f(x)]' dx = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \Rightarrow \sin x \cdot f(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Tính } I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} dx = x \tan x + \ln |\cos x|.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{x \cdot \tan x + \ln |\cos x|}{\sin x} = \frac{x}{\cos x} + \frac{\ln |\cos x|}{\sin x}.$$

$$a\pi\sqrt{3} + b\ln 3 = \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\ln 2}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + 2\ln \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{5\pi\sqrt{3}}{9} - \ln 3. \text{ Suy ra } \begin{cases} a = \frac{5}{9} \\ b = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } P = a + b = -\frac{4}{9}.$$

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = (x+1) \cdot f(x)$. Tính $f(8)$.

A. $f(8) = 49$. **B.** $f(8) = 256$. **C.** $f(8) = \frac{1}{16}$. **D.** $f(8) = \frac{49}{64}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có với $\forall x \in (0; +\infty)$ thì $y = f(x) > 0$; $x+1 > 0$.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

$$\text{Do đó } [f'(x)]^2 = (x+1)f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{(x+1)f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x+1}.$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \sqrt{x+1} dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C.$$

$$\text{Vì } f(3) = \frac{4}{9} \text{ nên } C = \frac{2}{3} - \frac{8}{3} = -2.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \left(\frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2 \right)^2, \text{ suy ra } f(8) = 49.$$

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $(x^2 + 1)^2 f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $-\frac{2}{5}$ **C.** $-\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Từ giả thiết ta có: } f'(x) = [f(x)]^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} > 0 \text{ với mọi } x \in (1; 2].$$

$$\text{Do đó } f(x) \geq f(1) = 1 > 0 \text{ với mọi } x \in [1; 2].$$

Xét với mọi $x \in [1; 2]$ ta có:

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)f'(x) &= [f(x)]^2 (x^2 - 1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx. \\ \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx &= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} dx \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{x + \frac{1}{x}} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Leftrightarrow C = 0. \text{ Vậy } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow f(2) = \frac{5}{2}.$$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x+1)f^2(x) = 0$, $f(x) > 0, \forall x > 0$ và $f(2) = \frac{1}{6}$. Tính giá trị của $P = f(1) + f(2) + \dots + f(2019)$.

A. $\frac{2021}{2020}$.

B. $\frac{2020}{2019}$.

C. $\frac{2019}{2020}$.

D. $\frac{2018}{2019}$.

Lời giải

TH1: $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ trái giả thiết.

TH2: $f(x) \neq 0 \Rightarrow f'(x) = -(2x+1).f^2(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -(2x+1).$

$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\int (2x+1) dx \Rightarrow \frac{-1}{f(x)} = -(x^2 + x + C).$

Ta có: $f(2) = \frac{1}{6} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$

$\Rightarrow P = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{2020} = \frac{2019}{2020}.$

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là

A. $2\sqrt[3]{42}.$

B. $2\sqrt[3]{15}.$

C. $\sqrt[3]{42}.$

D. $\sqrt[3]{15}.$

Lời giải

Ta có: $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$

Lấy nguyên hàm 2 vế của phương trình trên ta được

$\int (f(x))^2 \cdot f'(x) dx = \int (3x^2 + 4x + 2) dx \Leftrightarrow \int (f(x))^2 d(f(x)) = x^3 + 2x^2 + 2x + C$

$\Leftrightarrow \frac{(f(x))^3}{3} = x^3 + 2x^2 + 2x + C \Leftrightarrow (f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + C) \quad (1)$

Theo đề bài $f(0) = 3$ nên từ ta có $(f(0))^3 = 3(0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C) \Leftrightarrow 27 = 3C \Leftrightarrow C = 9$

$\Rightarrow (f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9) \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)}.$

Tiếp theo chúng ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$.

CÁCH 1:

Vì $x^3 + 2x^2 + 2x + 9 = x^2(x+2) + 2(x+2) + 5 > 0, \forall x \in [-2;1]$ nên $f(x)$ có đạo hàm trên

$[-2;1]$ và $f'(x) = \frac{3(3x^2 + 4x + 2)}{3\sqrt[3]{[3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)]^2}} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{\sqrt[3]{[3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)]^2}} > 0, \forall x \in [-2;1].$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[-2;1] \Rightarrow \max_{[-2;1]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{42}.$

Vậy $\max_{[-2;1]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{42}.$

CÁCH 2:

$$f(x) = \sqrt[3]{3\left(x^3 + 2x^2 + 2x + 9\right)} = \sqrt[3]{3\left(x + \frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{223}{9}}.$$

Vì các hàm số $y = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^3$, $y = 2\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{223}{9}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số

$y = \sqrt[3]{3\left(x + \frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{223}{9}}$ cũng đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[-2; 1]$.

Vậy $\max_{[-2; 1]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{42}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5.

B. 10.

C. 20.

D. 15.

Lời giải

$$f(x) - xf'(x) = -2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot f(x) - x \cdot f'(x)}{x^2} = \frac{-2x^3 - 3x^2}{x^2} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \right]' = 2x + 3$$

Suy ra, $\frac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = 2x + 3$.

Ta có $\int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Do đó, $\frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C_1$, với $C_1 \in \mathbb{R}$ nào đó.

Vì $f(1) = 4$ theo giả thiết, nên thay $x = 1$ vào hai vế của ta thu được $C_1 = 0$, từ đó

$f(x) = x^3 + 3x^2$. Vậy $f(2) = 20$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện: $f(0) = 2\sqrt{2}$, $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) \cdot f'(x) = (2x + 1)\sqrt{1 + f^2(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

A. $\sqrt{26}$.

B. $\sqrt{24}$.

C. $\sqrt{15}$.

D. $\sqrt{23}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) \cdot f'(x) = (2x + 1)\sqrt{1 + f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} = (2x + 1).$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} dx = \int (2x + 1) dx \Leftrightarrow \int \frac{d(1 + f^2(x))}{2\sqrt{1 + f^2(x)}} = \int (2x + 1) dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + f^2(x)} = x^2 + x + C.$$

Theo giả thiết $f(0) = 2\sqrt{2}$, suy ra $\sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2} = C \Leftrightarrow C = 3$.

Với $C = 3$ thì $\sqrt{1+f^2(x)} = x^2 + x + 3 \Rightarrow f(x) = \sqrt{(x^2 + x + 3)^2 - 1}$. Vậy $f(1) = \sqrt{24}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

- A.** 28. **B.** 22. **C.** $\frac{19}{2}$. **D.** 10.

Lời giải

Ta có $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $[f(x)f'(x)]' = 2x^2 - x + 1$.

Suy ra $f(x)f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C$. Hơn nữa $f(0) = f'(0) = 3$ suy ra $C = 9$.

Tương tự vì $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$ nên $[f^2(x)]' = 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)$. Suy ra

$f^2(x) = \int 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)dx = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + C$, cũng vì $f(0) = 3$ suy ra

$f^2(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + 9$. Do đó $[f(1)]^2 = 28$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$.

Tính $f(2)$.

- A.** $f(2) = \frac{e}{3}$. **B.** $f(2) = \frac{e}{6}$. **C.** $f(2) = \frac{e^2}{3}$. **D.** $f(2) = \frac{e^2}{6}$.

Lời giải

Ta có

$$(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x \Leftrightarrow (x+1)f(x) + f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)f(x)] + [(x+1)f(x)]' = e^x \Leftrightarrow e^x[(x+1)f(x)] + e^x[(x+1)f(x)]' = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow [e^x(x+1)f(x)]' = e^{2x} \Rightarrow \int [e^x(x+1)f(x)]' dx = \int e^{2x} dx \Leftrightarrow e^x(x+1)f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Mà $f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0$. Vậy $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{x+1}$

Khi đó $f(2) = \frac{e^2}{6}$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\frac{25}{4}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}$, với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$.

Suy ra $\frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx$ hay $\frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| + C$.

Mặt khác, ta có $f(1) = -2 \ln 2$ nên $C = -1$. Do đó $\frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| - 1$.

Với $x = 2$ thì $\frac{2}{3} \cdot f(2) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3$. Suy ra $a = \frac{3}{2}$ và $b = -\frac{3}{2}$.

Vậy $a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$.

Câu 24: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2 < f(5) < 3$.

B. $1 < f(5) < 2$.

C. $4 < f(5) < 5$.

D. $3 < f(5) < 4$.

Lời giải

Ta có $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$

$\Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C}$

Mà $f(1) = 1$ nên $e^{\frac{4}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$. Suy ra $f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,794$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b} < -1$.

B. $\frac{a}{b} > 1$.

C. $a + b = 1010$.

D. $b - a = 3029$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3$

$$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (2x+3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Do đó } f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2} = -\frac{1009}{2020}.$$

$$\text{Vậy } a = -1009; b = 2020. \text{ Do đó } b - a = 3029.$$

Câu 26: Cho hàm số $f(x) \neq 0$, $f'(x) = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} f^2(x)$ và $f(1) = -\frac{1}{3}$. Tính $f(1) + f(2) + \dots + f(80)$.

A. $-\frac{3240}{6481}.$

B. $\frac{6480}{6481}.$

C. $-\frac{6480}{6481}.$

D. $\frac{3240}{6481}.$

Lời giải

$$f'(x) = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2}.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} dx \Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = \int \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} dx. \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = \int \left(3x^2 + 1 - \frac{1}{x^2} \right) dx \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)} = x^3 + x + \frac{1}{x} + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{-1}{x^3 + x + \frac{1}{x}} + C.$$

$$\text{Do } f(1) = -\frac{1}{3} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x^2 - x + 1} \right).$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1} \right); f(2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3} \right); f(3) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{7} \right); \dots; f(80) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6481} - \frac{1}{6321} \right).$$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(80) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6481} = -\frac{3240}{6481}.$$

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1, f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. $e^{\frac{3}{2}}.$

B. $e^3.$

C. $e^{\frac{5}{2}}.$

D. $e^2.$

Lời giải

$$\text{Theo đề bài, ta có } [f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0 \Rightarrow \frac{f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = 1 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C \Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + C.x + D$$

$$\text{Mà } \begin{cases} f(0)=1 \\ f(2)=e^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=2 \\ D=0 \end{cases}. \text{ Suy ra : } f(x) = e^{\frac{x^2}{2}+2x} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{5}{2}}.$$

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$.
Tính $f(1)$.

A. $f(1) = e^2$. **B.** $f(1) = -\frac{1}{e}$. **C.** $f(1) = \frac{1}{e^2}$. **D.** $f(1) = \frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2} f'(x) + 2x.e^{x^2}.f(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{x^2}.f(x))' = 1.$$

$$\text{Suy ra } \int (e^{x^2}.f(x))' dx = \int dx \Leftrightarrow e^{x^2}.f(x) = x + C \Rightarrow f(x) = \frac{x+C}{e^{x^2}}.$$

$$\text{Vì } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}. \text{ Vậy } f(1) = \frac{1}{e}.$$

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2) = \frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2) = \frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2) = \frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2) = \frac{323}{15}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int f'(x).f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx + C \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + C.$$

$$\text{Do } f(0) = 2 \text{ nên suy ra } C = 2.$$

$$\text{Vậy } f^2(2) = 2 \left(\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{332}{15}.$$

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A. $(x-2)e^x + e^x + C$. **B.** $(x+2)e^{2x} + e^x + C$.
C. $(x-1)e^x + C$. **D.** $(x+1)e^x + C$.

Lời giải

Chọn D

$$f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^x = x + C'.$$

Vì $f(0) = 2$ nên $C' = 2$. Do đó $f(x)e^{2x} = (x+2)e^x$. Vậy:

$$\begin{aligned}\int f(x)e^{2x}dx &= \int (x+2)e^x dx = \int (x+2)d(e^x) = (x+2)e^x - \int e^x d(x+2) = (x+2)e^x - \int e^x dx = \\ &= (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C.\end{aligned}$$

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 2x \quad \forall x \in (0; +\infty)$, $f(1) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là:

A. $\frac{25}{6}$.

B. $\frac{25}{3}$.

C. $\frac{17}{6}$.

D. $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $2xf'(x) + f(x) = 2x$ (1) trên $(0; +\infty)$: $(1) \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{2x} \cdot f(x) = 1$ (2).

Đặt $g(x) = \frac{1}{2x}$, ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x)dx = \int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\ln x + C = \ln \sqrt{x} + C$. Ta chọn $G(x) = \ln \sqrt{x}$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $e^{G(x)} = \sqrt{x}$, ta được: $\sqrt{x} \cdot f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f(x) = \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x))' = \sqrt{x} \quad (3).$$

Lấy tích phân 2 vế của (3) từ 1 đến 4, ta được: $\int_1^4 (\sqrt{x} \cdot f(x))' dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x)) \Big|_1^4 = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right) \Big|_1^4 \Rightarrow 2f(4) - f(1) = \frac{14}{3} \Rightarrow f(4) = \frac{1}{2} \left(\frac{14}{3} + 1 \right) = \frac{17}{6}.$$

Vậy $f(4) = \frac{17}{6}$.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6 [f'(x)]^3 + 27[f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 7.

D. -7.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x^6 [f'(x)]^3 + 27[f(x) - 1]^4 = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{-3(f(x) - 1)\sqrt[3]{f(x) - 1}} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} \right]' = \frac{1}{x^2}.$$

Do đó $\int \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} \right]' dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$. Suy ra $\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} = -\frac{1}{x} + C$.

Có $f(1) = 0 \Rightarrow C = 0$. Do đó $f(x) = 1 - x^3$.

Khi đó $f(2) = -7$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. 8.

C. 10.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, $\forall x \in \mathbb{R} : (f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$

$$\Leftrightarrow f'(x).f'(x) + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$$

$$\Leftrightarrow [f(x).f'(x)]' = 15x^4 + 12x$$

$$\Leftrightarrow f(x).f'(x) = \int (15x^4 + 12x) dx = 3x^5 + 6x^2 + C \quad (1).$$

Thay $x = 0$ vào (1), ta được: $f(0).f'(0) = C \Leftrightarrow C = 1$.

Khi đó, (1) trở thành: $f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x).f'(x) dx = \int_0^1 (3x^5 + 6x^2 + 1) dx \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} f^2(x) \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} x^6 + 2x^3 + x \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [f^2(1) - f^2(0)] = \frac{7}{2} \Leftrightarrow f^2(1) - 1 = 7 \Leftrightarrow f^2(1) = 8.$$

Vậy $f^2(1) = 8$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(1; +\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x) - 2f(x)).\ln x = x^3 - f(x)$, $\forall x \in (1; +\infty)$; biết $f(\sqrt[3]{e}) = 3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(12; \frac{25}{2}\right)$.

B. $\left(13; \frac{27}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{23}{2}; 12\right)$.

D. $\left(14; \frac{29}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(xf'(x) - 2f(x)).\ln x = x^3 - f(x)$ (1) trên khoảng $(1; +\infty)$:

$$(1) \Leftrightarrow x \ln x \cdot f'(x) + (1 - 2 \ln x) \cdot f(x) = x^3 \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1 - 2 \ln x}{x \ln x} \cdot f(x) = \frac{x^2}{\ln x} \quad (2).$$

Đặt $g(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x \ln x}$. Ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int g(x) dx &= \int \frac{1 - 2 \ln x}{x \ln x} dx = \int \frac{1 - 2 \ln x}{\ln x} d(\ln x) = \int \left(\frac{1}{\ln x} - 2 \right) d(\ln x) \\ &= \ln(\ln x) - 2 \ln x + C = \ln \left(\frac{\ln x}{x^2} \right) + C. \end{aligned}$$

Ta chọn $G(x) = \ln \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $e^{G(x)} = \frac{\ln x}{x^2}$, ta được: $\frac{\ln x}{x^2} \cdot f'(x) + \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} \cdot f(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\ln x}{x^2} \cdot f(x) \right)' = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} \cdot f(x) = x + C \quad (3).$$

Theo giả thiết, $f(\sqrt[3]{e}) = 3e$ nên thay $x = \sqrt[3]{e}$ vào (3), ta được:

$$\frac{\ln(\sqrt[3]{e})}{\sqrt[3]{e^2}} \cdot f(\sqrt[3]{e}) = \sqrt[3]{e} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{3\sqrt[3]{e^2}} \cdot 3e - \sqrt[3]{e} = 0.$$

Từ đây, ta tìm được $f(x) = \frac{x^3}{\ln x} \Rightarrow f(2) = \frac{2^3}{\ln 2}$. Vậy $f(2) \in \left(\frac{23}{2}; 12 \right)$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x) - x^2 - 1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết

$f(0) = 1$, tính tích phân $\int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx$.

A. $\frac{11}{2}$.

B. $\frac{15}{4}$.

C. $\frac{45}{8}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3f'(x) \cdot e^{f^3(x) - x^2 - 1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)} = 2x \cdot e^{x^2 + 1}$

$$\Rightarrow \int 3f^2(x) \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)} dx = \int 2x \cdot e^{x^2 + 1} dx \Rightarrow \int e^{f^3(x)} d(f^3(x)) = \int e^{x^2 + 1} d(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow e^{f^3(x)} = e^{x^2 + 1} + C. \text{ Mặt khác, vì } f(0) = 1 \text{ nên } C = 0.$$

Do đó $e^{f^3(x)} = e^{x^2 + 1} \Leftrightarrow f^3(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

$$\text{Vậy } \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt[3]{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = \frac{3}{8} \left[(x^2 + 1) \sqrt[3]{x^2 + 1} \right]_0^{\sqrt{7}} = \frac{45}{8}.$$

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0) = 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$. Biết rằng giá trị của biểu thức $P = 2M - m$ có dạng $a\sqrt{11} - b\sqrt{3} + c, (a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính $a + b + c$

A. $a + b + c = 7$. **B.** $a + b + c = 4$. **C.** $a + b + c = 6$. **D.** $a + b + c = 5$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = 2x \Rightarrow \int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int 2x dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2 + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2 + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = (x^2 + 1)^2 - 1 = x^4 + 2x^2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2}.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{2x^3 + 2x}{\sqrt{x^4 + 2x^2}} > 0, \forall x \in [1;3] \Rightarrow \max_{[1;3]} f(x) = f(3) = 3\sqrt{11}; \min_{[1;3]} f(x) = f(1) = \sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có: } P = 2M - m = 6\sqrt{11} - \sqrt{3} \Rightarrow a = 6; b = 1; c = 0 \Rightarrow a + b + c = 7.$$

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2\ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T = a^2 - b$.

A. $T = \frac{21}{16}$. **B.** $T = \frac{3}{2}$. **C.** $T = 0$. **D.** $T = -\frac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}.$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(x+1)} f'(x) + \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x^2}{x+1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}.$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^2}{x+1} f(x) \right]' = \frac{x^2}{x+1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}.$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{x^2}{x+1} f(x) + C', \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}.$$

$$\Rightarrow \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{x^2}{x+1} f(x) + C', \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}.$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C'' = \frac{x^2}{x+1} f(x) + C'.$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C = \frac{x^2}{x+1} f(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}.$$

Ta có: $f(1) = 2\ln 2 + 1$ và $f(1) = -1 + 2\ln 2 + 2C \Rightarrow C = 1.$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + 1 = \frac{x^2}{x+1} f(x).$$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \ln|3| \text{ và } f(2) = a + b \ln 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}, b = \frac{3}{4} \Rightarrow T = a^2 - b = \frac{9}{16} - \frac{3}{4} = \frac{-3}{16}.$$

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

A. $\frac{9}{10}$.

B. $\frac{21}{10}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) = 2f^2(x) \Rightarrow 3x^2 \cdot f(x) - x^3 \cdot f'(x) = 2x \cdot f^2(x)$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 \cdot f(x) - x^3 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = 2x \text{ vì } f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty).$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' = 2x \Rightarrow \frac{x^3}{f(x)} = \int 2x dx = x^2 + C.$$

Mà $f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}.$

Ta có: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2}{(x^2 + 2)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty).$

Vậy, hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty).$

Mà $[1; 2] \subset (0; +\infty)$ nên hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$ đồng biến trên đoạn $[1; 2].$

Suy ra, $M = f(2) = \frac{4}{3}; m = f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow M + m = \frac{5}{3}.$

Câu 39: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2} (x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow F'(x^2 + x) = f(x^2 + x) \cdot (x^2 + x)' = (2x + 1)(x^2 + x)e^{(x^2 + x)^2} \left((x^2 + x)^2 - 4 \right)$$

$$= (2x + 1)x(x + 1)e^{(x^2 + x)^2} (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2)$$

$$= (2x + 1)x(x + 1)(x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 2)e^{(x^2 + x)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -2; -1; \frac{-1}{2}; 0; 1 \right\}$$

$F'(x^2 + x) = 0$ có 5 nghiệm đơn nên $F(x^2 + x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 40: Cho $F(x) = \int \frac{(1 + \cos^2 x)(\sin x + \cot x)}{\sin^4 x} dx$ và S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ trên khoảng $(0; 4\pi)$. Tổng S thuộc khoảng

A. $(6\pi; 9\pi)$.

B. $(2\pi; 4\pi)$.

C. $(4\pi; 6\pi)$.

D. $(0; 2\pi)$.

Lời giải

Chọn

Ta có: $F(x) = \int \frac{(1 + \cos^2 x)(\sin x + \cot x)}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x} dx + \int \frac{(1 + \cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x} dx$

Gọi $A = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x} dx$ và $B = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x} dx$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{(1 + \cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1 + 2\cot^2 x)\cot x}{\sin^2 x} dx = -\int (\cot x + 2\cot^3 x) d(\cot x) \\ &= -\left(\frac{\cot^2 x}{2} + \frac{\cot^4 x}{2} \right) + C_1. \end{aligned}$$

$$B = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\sin x}{(1 - \cos^2 x)^2} dx$$

Đặt $t = \cos x$, suy ra $dt = -\sin x dx$. Khi đó:

$$\begin{aligned} B &= -\int \frac{1 + t^2}{(t^2 - 1)^2} dt = -\int \frac{1 + t^2}{(t - 1)^2 \cdot (t + 1)^2} dt = -\frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{(t - 1)^2} + \frac{1}{(t + 1)^2} \right] dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t - 1} + \frac{1}{t + 1} \right) + C_2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} \right) + C_2 \end{aligned}$$

Do đó:

$$F(x) = A + B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} \right) - \left(\frac{\cot^2 x}{2} + \frac{\cot^4 x}{2} \right) + C$$

Suy ra:

$$F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} \right) - \left(\frac{\cot^2 x}{2} + \frac{\cot^4 x}{2} \right) + C = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} - \cot^2 x - \cot^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cos x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} = 0$$

Với điều kiện $\sin x \neq 0$,

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 + \cos x + \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2(1 - \cos^2 x) + \cos x(1 - \cos^2 x) + \cos^3 x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ -2\cos^2 x + \cos x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Theo giả thiết $x \in (0; 4\pi)$ nên $x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi; x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi;$

$$x = \alpha; x = \alpha + 2\pi;$$

$$x = \beta; x = \beta + 2\pi.$$

Khi đó tổng các nghiệm này sẽ lớn hơn 9π .

Câu 41: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2 \cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0; \pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$ **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{2 \cos x - 1}{\sin^2 x} dx = 2 \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \\ &= 2 \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C \end{aligned}$$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ nên hàm số

$F(x)$ có công thức dạng $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$ với mọi $x \in (0; \pi)$.

Xét hàm số $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$ xác định và liên tục trên $(0; \pi)$.

$$F'(x) = f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$$

Xét $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Trên khoảng $(0; \pi)$, phương trình $F'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \frac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$F'(x)$	$+$	0	$-$
$F(x)$		$-\sqrt{3}+C$	

$$\max_{(0; \pi)} F(x) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + C$$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow C = 2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + 2\sqrt{3}$.

Câu 42: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 4\pi)$?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x) = f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ trên $(0; 4\pi)$.

$$F'(x) = f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x \cos x - \sin x = 0 \text{ trên } (0; 4\pi).$$

Đặt $g(x) = x \cos x - \sin x$ trên $(0; 4\pi)$.

Ta có $g'(x) = -x \cdot \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi \\ x = 2\pi \text{ trên } (0; 4\pi) \\ x = 3\pi \end{cases}$.

Từ đó có bảng biến thiên của $g(x)$:

x	0	π	x_1	2π	x_2	3π	x_3	4π	
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+		
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3π	$\nearrow$	0

Vì $g(x)$ liên tục và đồng biến trên $[\pi; 2\pi]$ và $g(\pi) \cdot g(2\pi) < 0$ nên tồn tại duy nhất $x_1 \in (\pi; 2\pi)$ sao cho $g(x_1) = 0$.

Tương tự ta có $g(x_2) = 0$, $g(x_3) = 0$ với $x_2 \in (2\pi; 3\pi)$, $x_3 \in (3\pi; 4\pi)$.

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta thấy $g(x) < 0$ khi $x \in (0; x_1)$ và $x \in (x_2; x_3)$; $g(x) > 0$ khi $x \in (x_1; x_2)$ và $x \in (x_3; 4\pi)$. Dấu của $f(x)$ là dấu của $g(x)$ trên $(0; 4\pi)$.

Do đó ta có bảng biến thiên của $F(x)$:

x	0	x_1		x_2		x_3		4π
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+	
$F(x)$	CT CĐ CT <							

Vậy hàm số $y = F(x)$ có ba cực trị.

Câu 43: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x - \cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. vô số điểm.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Vì $(F(x))' = f(x)$ nên ta xét sự đổi dấu của hàm số $f(x)$ để tìm cực trị hàm số đã cho.

Ta xét hàm số $g(x) = x - \cos x$, ta có $g'(x) = 1 + \sin x \geq 0 \forall x$.

Vì vậy $g(x)$ là hàm số đồng biến trên toàn trục số.

Hơn nữa ta có
$$\begin{cases} g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0 \\ g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0 \end{cases}, \text{ do đó } g(x) = 0 \text{ có duy nhất nghiệm } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

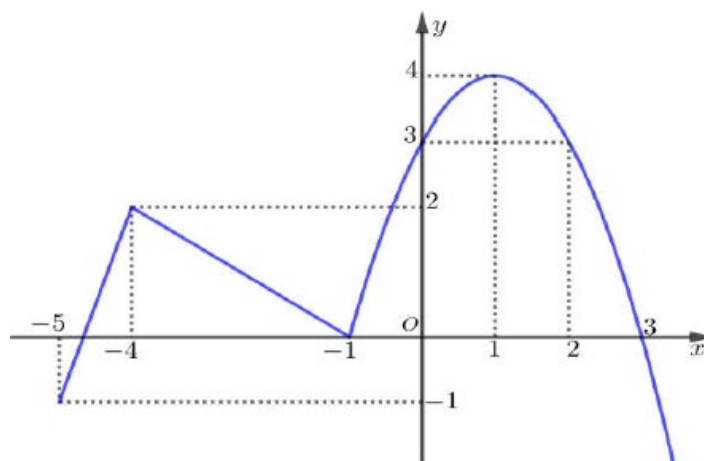
Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	-	0	+

Kết luận hàm số đã cho có một cực trị.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ.



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5) + 3f(2)$ bằng

- A. 33. B. $\frac{109}{3}$. **C. $\frac{35}{3}$.** D. 11.

Lời giải

Chọn C

*)Parabol $y = ax^2 + bx + c$ qua các điểm $(2;3), (1;4), (0;3), (-1;0), (3;0)$ nên xác định được

$y = -x^2 + 2x + 3, \forall x \geq -1$ suy ra $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C_1$. Mà

$f(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x$.

Có $f(-1) = -\frac{5}{3}; f(2) = \frac{22}{3}$

*) Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-4; -1]$ qua các điểm $(-4; 2), (-1; 0)$ nên

$$f'(x) = \frac{-2}{3}(x+1) \Rightarrow f(x) = \frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + C_2.$$

$$\text{Mà } f(-1) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow C_2 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) - 2, \text{ hay } f(-4) = \frac{-14}{3}.$$

*) Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-5; -4]$ qua các điểm $(-4; 2), (-5; -1)$ nên

$$f'(x) = 3x + 14 \Rightarrow f(x) = \frac{3x^2}{2} + 14x + C_3.$$

$$\text{Mà } f(-4) = \frac{-14}{3} \Leftrightarrow \frac{3 \cdot (-4)^2}{2} + 14 \cdot (-4) + C_3 = \frac{-14}{3} \text{ suy ra } C_3 = \frac{82}{3}.$$

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{3x^2}{2} + 14x + \frac{82}{3} \Rightarrow f(-5) = -\frac{31}{6}.$$

$$\text{Từ và ta được } 2f(-5) + 3f(2) = -\frac{31}{3} + 22 = \frac{35}{3}.$$

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và

$f(1) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

A. $y = -16x - 20$. **B.** $y = 16x - 20$. **C.** $y = 16x + 20$. **D.** $y = -16x + 20$.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = 4x^3 + 3x^2.$$

$$\text{Lấy nguyên hàm hai vế ta được: } xf(x) = \int (4x^3 + 3x^2) dx = x^4 + x^3 + C.$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ ta có: } f(1) = 2 + C.$$

$$\text{Theo bài ra } f(1) = 2 \Leftrightarrow 2 + C = 2 \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Vậy } xf(x) = x^4 + x^3 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + x^2.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3x^2 + 2x; f'(2) = 16; f(2) = 12.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là:

$$y = 16(x - 2) + 12 \Leftrightarrow y = 16x - 20.$$