

CHƯƠNG 3: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN Oxyz

BÀI 1: HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

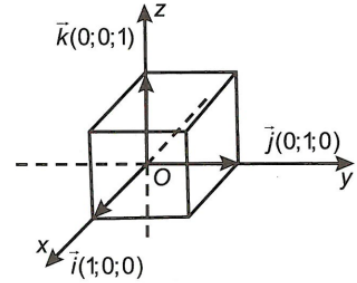
1. Hệ tọa độ trong không gian

Hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc trong không gian gồm ba trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một.

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox , Oy , Oz . Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) là các mặt phẳng tọa độ.

Không gian gắn với hệ tọa độ Oxyz được gọi là không gian Oxyz.



2. Tọa độ của vectơ

Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{u}$. Khi đó

$$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Chú ý:

1) $\vec{0} = (0; 0; 0)$.

2) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

3) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$

Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và k là số thực tùy ý.

Khi đó ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.
- $k \cdot \vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3)$.

Ứng dụng của tích vô hướng:

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$
- $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

- $|\vec{a}| = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$
- $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Với $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}.$

3. Tọa độ của một điểm

Trong không gian Oxyz, cho điểm M tùy ý.

Khi đó $M(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$

Tính chất

- Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ thì

$$\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

Khi đó $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$

- Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

- Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

- Tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

4. Tích có hướng của hai vector

Định nghĩa

Trong không gian Oxyz, cho hai vector $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3).$ Tích có hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một

vector vuông góc với cả hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$ và được xác định như sau:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned}$$

Tính chất

- $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}.$
- $[\vec{a}, \vec{b}]$ vuông góc với cả hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}.$

Chú ý: Trong hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M (x; y; z) ta có các khẳng định sau:

- $M \equiv O \Leftrightarrow M(0; 0; 0).$
- $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0$, tức là $M(x; y; 0).$
- $M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0$, tức là $M(0; y; z).$
- $M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$, tức là $M(x; 0; z).$
- $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0$, tức là $M(x; 0; 0).$
- $M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0$, tức là $M(0; y; 0).$
- $M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$, tức là $M(0; 0; z).$

-
- $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$.
 - $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$.

5. Phương trình mặt cầu

Trong không gian Oxyz, mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính R có phương trình là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Ngược lại phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0 \quad (1).$$

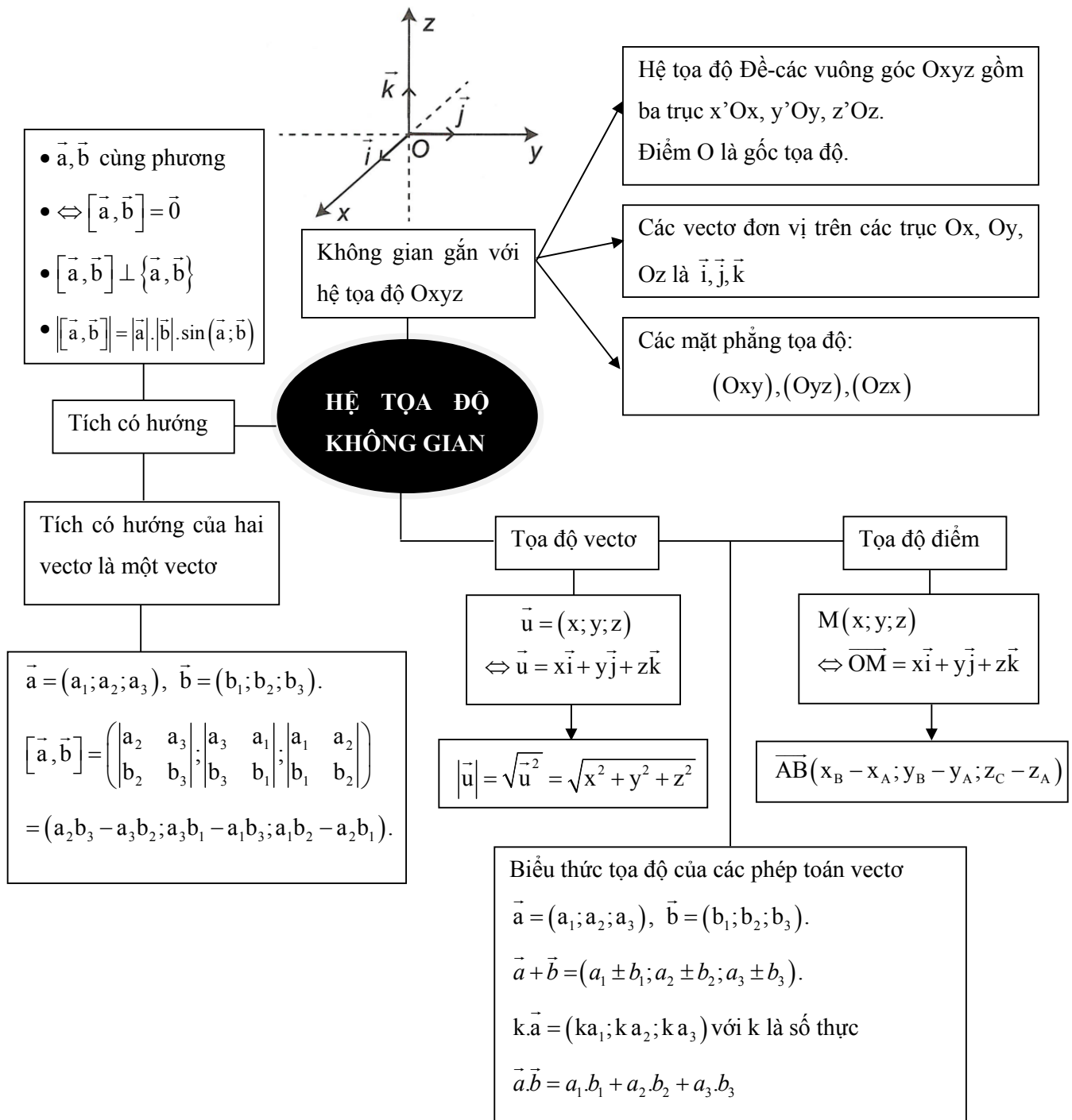
Với $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(-A; -B; -C)$

có bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

Chú ý: Điều kiện để phương trình (1) là phương trình mặt cầu là:

$$A^2 + B^2 + C^2 - D > 0.$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tọa độ điểm, vector trong hệ trục Oxyz

1. Phương pháp

Sử dụng các định nghĩa và khái niệm có liên quan đến điểm, vector: Tọa độ của điểm, vector; độ dài vector, ... và các phép toán vector ... để tính tổng, hiệu các vector; tìm tọa độ trọng tâm tam giác, ...

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}(-2;2;0), \vec{b}(2;2;0), \vec{c}(2;2;2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng

- A. 6. B. $2\sqrt{6}$. C. 11. D. $2\sqrt{11}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2;6;2)$ nên $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$.

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1;2;3), B(-1;0;1)$. Trọng tâm G của tam giác OAB có tọa độ là:

- A. $(0;1;1)$. B. $\left(0; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. C. $(0;2;4)$. D. $(-2;-2;-2)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Tọa độ trọng tâm tam giác là: } \begin{cases} x_G = \frac{1-1+0}{3} = 0 \\ y_G = \frac{2+0+0}{3} = \frac{2}{3} \\ z_G = \frac{3+1+0}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(0; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Chọn B.

Bài tập 3. Trong không gian Oxyz, cho vector $\vec{a} = (1;-2;4), \vec{b} = (x_0; y_0; z_0)$ cùng phương với vector $\vec{a}$. Biết vector $\vec{b}$ tạo với tia Oy một góc nhọn và $|\vec{b}| = \sqrt{21}$. Giá trị của tổng $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

- A. -3. B. 6. C. -6. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Lại có $|\vec{b}| = \sqrt{21}$. suy ra $\sqrt{k^2 + 4k^2 + 16k^2} = \sqrt{21} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=-1. \end{cases}$

Với $k=1$ ta có $|\vec{b}| = (1;-2;4)$, suy ra góc giữa $\vec{b}$ và Oy thỏa mãn

$$\cos(\vec{b}, Oy) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{j}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{j}|}, \text{ trong đó } \vec{b} \cdot \vec{j} = -2 < 0.$$

Suy ra góc tạo bởi $\vec{b}$ và Oy là góc tù. Suy ra $k=1$ không thỏa mãn.

Với $k=-1$ ta có $|\vec{b}| = (-1;2;-4)$, suy ra góc giữa $\vec{b}$ và Oy thỏa mãn

$$\cos(\vec{b}, Oy) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{j}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{j}|}, \text{ trong đó } \vec{b} \cdot \vec{j} = 2 > 0.$$

Suy ra góc tạo bởi $\vec{b}$ và Oy là góc nhọn. Vậy $k=-1$ thỏa mãn.

Do đó $\vec{b} = (-1; 2; -4)$. Suy ra $x_0 + y_0 + z_0 = -1 + 2 - 4 = -3$.

Bài tập 4. Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'(\sqrt{3}; -1; 1)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA' = 1$ (C không trùng với O). Biết vector $\vec{u} = (a; b; 2)$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) là một vector chỉ phương của đường thẳng $A'C$. Tính $T = a^2 + b^2$.

A. $T = 5$.

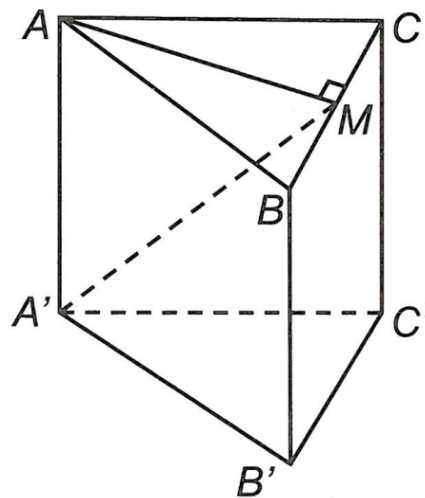
B. $T = 16$.

C. $T = 4$.

D. $T = 9$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Lấy M là trung điểm BC.

Khi đó ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AA' \perp BC \end{cases}$ nên $BC \perp A'M$ tại M;

suy ra M là hình chiếu của A' trên trục Oz

$\Rightarrow M(0; 0; 1)$ và $A'M = 2$.

Mặt khác $AM = \sqrt{A'M^2 - AA'^2} = \sqrt{3}$.

Lại có $\triangle ABC$ đều nên $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \sqrt{3}$

$\Rightarrow BC = 2 \Rightarrow MC = 1$.

Gọi $C(0; 0; c), c \neq 0$ suy ra $MC = |c - 1|$.

$MC = 1 \Leftrightarrow |c - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 2 \end{cases}$ (loại $c = 0$) $\Rightarrow C(0; 0; 2)$.

$\overrightarrow{A'C} = (-\sqrt{3}; 1; 1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng $A'C$

Suy ra $\vec{u} = (-2\sqrt{3}; 2; 2)$ cũng là một vector chỉ phương của $A'C$.

Vậy $a = -2\sqrt{3}; b = 2$. Suy ra $T = a^2 + b^2 = 16$.

Dạng 2. Tích có hướng

1. Phương pháp giải

Để tính tích có hướng của hai vector, ta áp dụng công thức:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

Bài tập: Tính tích có hướng của hai vector

$$\vec{a} = (1; 0; 1), \vec{b} = (2; 1; -1)$$

Hướng dẫn giải

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1; 3; 1)$$

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Kết luận nào sau đây sai?

A. $[\vec{a}, 3\vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$.

B. $[\vec{2a}, \vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$.

C. $[\vec{3a}, \vec{3b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$.

D. $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $[\vec{3a}, \vec{3b}] = 3[\vec{a}, 3\vec{b}] = 9[\vec{a}, \vec{b}]$. (C sai)

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz, cho ba vector $\vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (0; 2; -1), \vec{c} = (m; 1; 0)$.

Tìm giá trị thực của tham số m để ba vector $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng.

A. $m = 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = -\frac{1}{4}$.

D. $m = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-4; 1; 2)$.

Ba vector $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho năm điểm $A(0; 0; 3), B(2; -1; 0), C(3; 2; 4),$

$D(1; 3; 5), E(4; 2; 1)$ tạo thành một hình chóp có đáy là tứ giác. Đỉnh của hình chóp tương ứng là

A. Điểm C.

B. Điểm A.

C. Điểm B.

D. Điểm D.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét đáp án A, giả sử C là đỉnh của hình chóp, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (2; -1; -3), \overrightarrow{AD} = (1; 3; 2), \overrightarrow{AE} = (4; 2; -2), \overrightarrow{AC} = (3; 2; 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\overline{AB}, \overline{AD}] \cdot \overline{AE} = 4.7 - 2.7 - 2.7 = 0 \\ [\overline{AB}, \overline{AD}] \cdot \overline{AC} = 3.7 - 2.7 + 1.7 = 14. \end{cases}$$

Suy ra A, B, D, E đồng phẳng.

Vậy điểm C là đỉnh của hình chóp.

Bài tập 4. Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$, $D(2;-2;0)$.

Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D?

- A. 10. B. 7. C. 5. D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\overline{AB} = (-1; 2; 0)$, $\overline{AD} = (1; -2; 0)$, suy ra 3 điểm A, B, D thẳng hàng.

Từ đó chúng ta xác định được vị trí các điểm trong hệ trục độ Oxyz và đếm trực tiếp ta có 5 mặt phẳng đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D là:

(OCB) , (OCA) , (OCD) , (OAB) , (ABC)

Dạng 3. Ứng dụng của tích có hướng để tính diện tích và thể tích

1. Phương pháp giải

- Diện tích hình bình hành: $S_{\square ABCD} = |[\overline{AB}, \overline{AD}]|$.
- Tính diện tích tam giác: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]|$.
- Tính thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD}|$.
- Tính thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD}|$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;3;1)$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

- A. $3\sqrt{10}$. B. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. D. $\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\overline{AB} = (1; -1; 2)$, $\overline{AC} = (-2; 1; 1)$, $\overline{BC} = (-3; 2; -1)$

Suy ra $AB = AC = \sqrt{6}$; $BC = \sqrt{14}$.

Suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

Gọi R_{ABC} là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , ta có

$$R_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{14}}{4 \cdot \frac{\sqrt{35}}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

Bài tập 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$ và D nằm trên trục Oy .

Thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tọa độ của D là

A. $D(0; -7; 0)$.

B. $D(0; 8; 0)$.

C. $D(0; -7; 0)$ hoặc $D(0; 8; 0)$.

D. $D(0; 7; 0)$ hoặc $D(0; -8; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $D \in Oy$ nên $D(0; y; 0)$. Khi đó. Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |4y - 2|$$

Theo đề ra, ta có $\frac{1}{6} |4y - 2| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 \\ y = 8. \end{cases}$

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tọa độ các đỉnh

$A(0; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$ và $A'(0; 0; 2a)$. Gọi D là trung điểm cạnh BB' và M di động

trên cạnh AA' . Diện tích nhỏ nhất của tam giác MDC' là

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

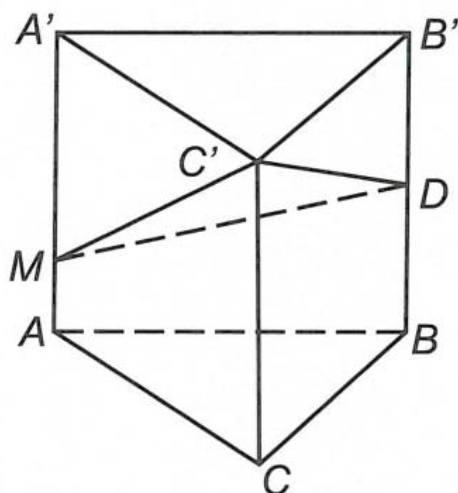
B. $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow C' \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 2a \right)$.

$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow B' (0; a; 2a)$.

Điểm D là trung điểm của BB' nên $D(0; a; a)$.

$M(0; 0; t)$ với $0 < t < 2a$. Ta có $\overrightarrow{DC'} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a \right)$, $\overrightarrow{DM} = (0; -a; t - a)$.

Ta có:

$$S_{\triangle MDC'} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{DC'} \times \overrightarrow{DM} \right\| = \frac{a\sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}}{4} = \frac{a\sqrt{(2t - 3a)^2 + 6a^2}}{4} \geq \frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

Suy ra $\min S_{\triangle MDC'} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$ khi $t = \frac{3}{2}a$.

Dạng 4: Phương trình mặt cầu

1. Phương pháp giải

Cách viết phương trình mặt cầu:

- Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Bài tập: Phương trình mặt cầu tâm $I(2; -1; 1)$, bán kính $R = 3$ là $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$.

- Xét phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0. (*)$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow (x^2 + 2ax) + (y^2 + 2by) + (z^2 + 2cz) = -d$

$$\Leftrightarrow (x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d.$$

Điều kiện để phương trình (*) là phương trình mặt cầu $a^2 + b^2 + c^2 > d$.

Khi đó (S) có $\begin{cases} \text{tâm } I(-a; -b; -c) \\ \text{bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}. \end{cases}$

Đặc biệt mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ thì (S) có

$$\begin{cases} \text{tâm } O(0; 0; 0) \\ \text{bán kính } R. \end{cases}$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 6z - 6 = 0$. Tính diện tích mặt cầu (S)

A. 100π .

B. 120π .

C. 9π .

D. 42π .

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 3)$, bán kính $r = \sqrt{1+9+9+6} = 5$.

Vậy diện tích mặt cầu là $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$.

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Chú ý:

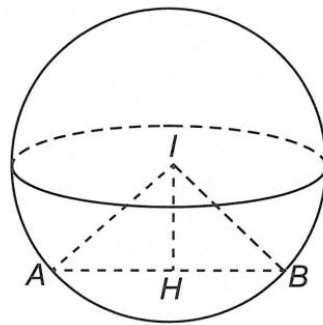
Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ :

- Xác định điểm $M \in \Delta$.

- Áp dụng công thức: $d(A, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH \perp AB$ tại H $\Rightarrow IH = d_{(I; (AB))} = d_{(I; Ox)}$

Lấy $M(2; 0; 0) \in Ox \Rightarrow IH = d_{(I, Ox)} = \frac{|\overrightarrow{IM} \cdot \vec{i}|}{|\vec{i}|} = \sqrt{3}$.

Bán kính mặt cầu cần tìm là $R = IA = \sqrt{IH^2 + HA^2} = 4$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm A(4;3;1), B(3;1;3); M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Giá trị $(m-n)$ bằng

A. 64.

B. 60.

C. 68.

D. 48.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm I(1;2;-1) và bán kính R = 3.

Lấy điểm E sao cho $2\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE} = \vec{0} \Leftrightarrow E(5;5;-1)$. Ta có IE = 5.

Dễ thấy điểm E là điểm nằm ngoài mặt cầu (S).

Khi đó $P = 2MA^2 - MB^2 = 2(\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{AE})^2 - (\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{BE})^2 = ME^2 + 2AE^2 - BE^2$.

P lớn nhất và nhỏ nhất khi và chỉ khi ME lớn nhất và nhỏ nhất.

$\max ME = IE + R = 8; \min ME = IE - R = 2$.

Do đó $m = \max P = 64 + 2AE^2 - BE^2; n = \min P = 4 + 2AE^2 - BE^2$.

Suy ra $m - n = 60$.

Chọn B.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Phương trình mặt phẳng

Vector pháp tuyến

Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vector pháp tuyến của (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α) .

Cặp vector chỉ phương của mặt phẳng

Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương là cặp vector chỉ phương của (α) nếu các giá của chúng song song hoặc nằm trên (α) .

Chú ý:

- Nếu $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của (α) thì $k\vec{n} (k \neq 0)$ cũng là vector pháp tuyến của (α) .
- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là một cặp vector chỉ phương của (α) thì $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ là một vector pháp tuyến của (α) .

Phương trình tổng quát của mặt phẳng

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

- Nếu (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n} = (A; B; C)$ là một vector pháp tuyến của (α) .
- Phương trình mặt phẳng đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Các trường hợp đặc biệt

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
$D = 0$.	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc tọa độ O
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	$(\alpha) // Ox$ hoặc $(\alpha) \supset Ox$
$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	$(\alpha) // Oy$ hoặc $(\alpha) \supset Oy$
$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	$(\alpha) // Oz$ hoặc $(\alpha) \supset Oz$
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	$(\alpha) // (Oxy)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxy)$
$A = C = 0$	$By + D = 0$	$(\alpha) // (Oxz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxz)$
$B = C = 0$	$Ax + D = 0$	$(\alpha) // (Oyz)$ hoặc

		$(\alpha) \equiv (Oyz)$
--	--	-------------------------

Nếu (α) cắt các trục toạ độ tại các điểm $(a;0;0), (0;b;0), (0;0;c)$ với $abc \neq 0$ thì ta có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn $(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Chú ý: Nếu trong phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.

2. Khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và mặt phẳng

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0.$$

Khi đó khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức:

$$d(A, (\alpha)) = \frac{|Ax_A + By_A + Cz_A + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3. Vị trí tương đối

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad (\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$+) (\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

$$+) (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

$$+) (\alpha) \cap (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ hoặc } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

$$+) (\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng và mặt cầu

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

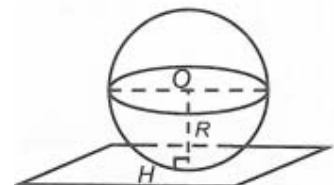
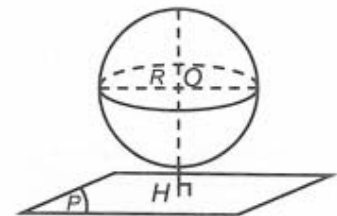
Để xét vị trí của (α) và (S) ta làm như sau:

+) Nếu $d(I, (\alpha)) > R$ thì (α) không cắt (S) .

+) Nếu $d(I, (\alpha)) = R$ thì (α) tiếp xúc (S) tại H . Khi đó H được gọi là

tiếp điểm đồng thời H là hình chiếu vuông góc của I lên (α) và (α)

được gọi là tiếp diện.

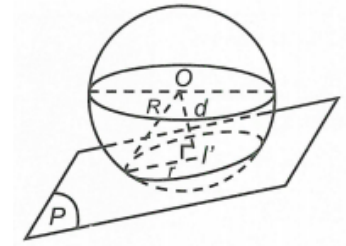


+) Nếu $d(I, (\alpha)) < R$ thì (α) cắt (S) theo đường tròn có phương trình

$$(C): \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Bán kính của (C) là $r = \sqrt{R^2 - d^2[I, (\alpha)]}$.

Tâm J của (C) là hình chiếu vuông góc của I trên (α) .



4. Góc giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ và } (\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Góc giữa (α) và (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$. Tức là

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \left| \cos \widehat{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta} \right| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Chùm mặt phẳng

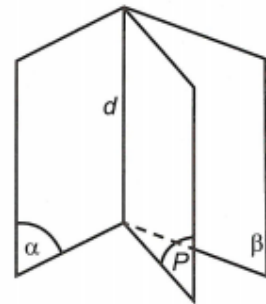
- Tập hợp tất cả các mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là một chùm mặt phẳng.
- Gọi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

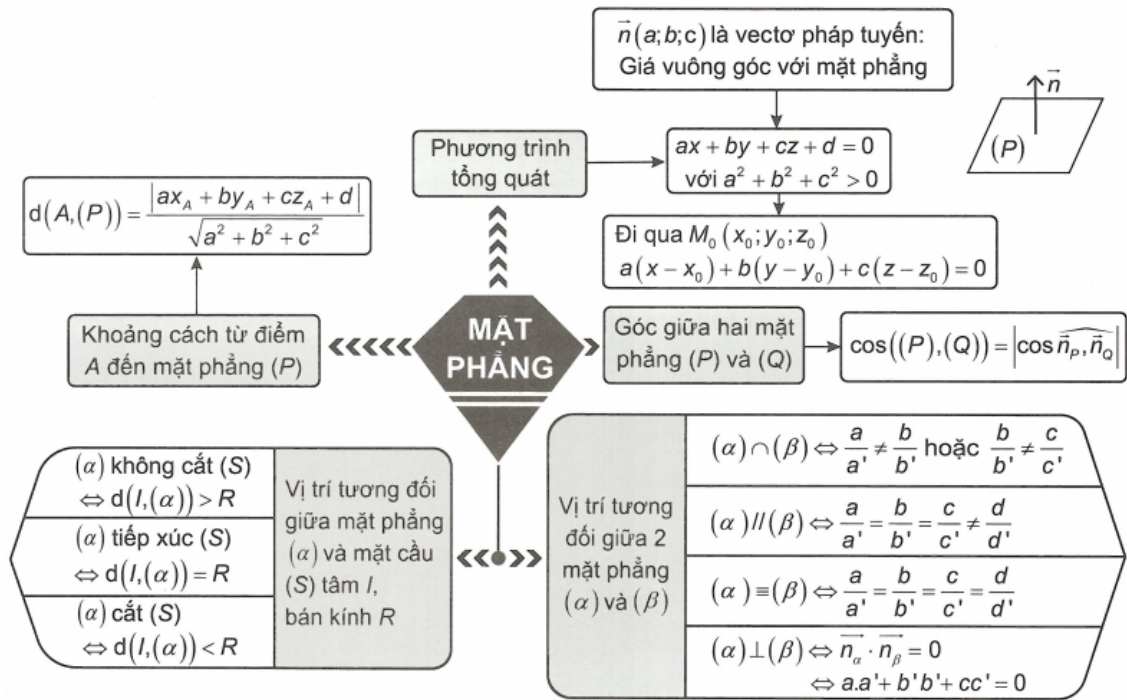
$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Khi đó nếu (P) là mặt phẳng chứa (d) thì mặt phẳng (P) có dạng

$$m \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \text{ với } m^2 + n^2 \neq 0$$



SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định vector pháp tuyến và viết phương trình mặt phẳng

1. Phương pháp

- Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$
- Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có cặp vector chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$. Khi đó một vector pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho mặt phẳng (Q): $x - y + 2z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q), đồng thời cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm M, N sao cho $MN = 2\sqrt{2}$.

- A. (P): $x - y + 2z + 2 = 0$.

C. (P): $x - y + 2z \pm 2 = 0$.

B. (P): $x - y + 2z = 0$.

D. (P): $x - y + 2z - 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

(P) // (Q) nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x - y + 2z + D = 0$ ($D \neq -2$).

Khi đó mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm $M(-D; 0; 0)$, $N(0; D; 0)$.

Từ giả thiết: $MN = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2D^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow D = 2$ (do $D \neq -2$).

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $x - y + 2z + 2 = 0$.

Chú ý: Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ thì (α) có phương trình là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Bài tập 2: Cho điểm $M(1; 2; 5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M cắt trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho M là trọng tâm tam giác ABC . Phương trình mặt phẳng (P) là

- A. $x + y + z - 8 = 0$. B. $x + 2y + 5z - 30 = 0$. C. $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 0$. D. $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $OA \perp (OBC) \Rightarrow \left. \begin{matrix} OA \perp BC \\ AM \perp BC \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC \perp (OAM) \Rightarrow BC \perp OM$ (1)

Tương tự $AB \perp OM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OM \perp (ABC)$ hay $OM \perp (P)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM} = (1; 2; 5)$ là vectơ pháp tuyến của (P) .

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là

$$x - 1 + 2(y - 2) + 5(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 30 = 0.$$

Bài tập 3: Cho tứ diện $ABCD$ có đỉnh $A(8; -14; -10)$; AD, AB, AC lần lượt song song với Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng (BCD) đi qua $H(7; -16; -15)$ là trọng tâm $\triangle BCD$ có phương trình là

- A. $x + 2y + 5z - 100 = 0$. B. $x + 2y + 5z + 100 = 0$.
C. $\frac{x}{7} + \frac{y}{-16} + \frac{z}{-15} = 0$. D. $\frac{x}{7} + \frac{y}{-16} + \frac{z}{-15} = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Theo đề ra, ta có (BCD) đi qua $H(7; -16; -15)$, nhận $\overrightarrow{HA} = (1; 2; 5)$ là vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (BCD) là

$$\begin{aligned} (x - 7) + 2(y + 16) + 5(z + 15) &= 0 \\ \Leftrightarrow x + 2y + 5z + 100 &= 0. \end{aligned}$$

Vậy $(BCD): x + 2y + 5z + 100 = 0$.

Bài tập 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình của các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): x + y - z + 3 = 0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

- A. $x + y - z + 6 = 0; x + y - z = 0$. B. $x + y - z + 6 = 0$.
C. $x - y - z + 6 = 0; x - y - z = 0$. D. $x + y + z + 6 = 0; x + y + z = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Ta có $A(0;0;3) \in (\beta)$.

Do $(\alpha) // (\beta)$ nên phương trình của mặt phẳng (α) có dạng:

$$x + y - z + m = 0 \text{ với } m \neq 3.$$

$$\text{Ta có } d((\alpha), (\beta)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow d(A, (\alpha)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|m-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$\Leftrightarrow |m-3| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = 0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy phương trình của các mặt phẳng cần tìm là

$$x + y - z + 6 = 0 \text{ và } x + y - z = 0.$$

Bài tập 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(P): x + 3z + 2 = 0, (Q): x + 3z - 4 = 0.$$

Mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) có phương trình là:

$$\text{A. } x + 3z - 1 = 0. \quad \text{B. } x + 3z - 2 = 0. \quad \text{C. } x + 3z - 6 = 0. \quad \text{D. } x + 3z + 6 = 0.$$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điểm $M(x; y; z)$ bất kỳ cách đều (P) và $(Q) \Leftrightarrow d(M; (P)) = d(M; (Q))$

$$\Leftrightarrow \frac{|x+3z+2|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|x+3z-4|}{\sqrt{1+9}} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3z+2 = x+3z-4 \\ x+3z+2 = -x-3z+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -4 \\ x+3z-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+3z-1 = 0.$$

Vậy M thuộc $(\alpha): x + 3z - 1 = 0$. Nhận thấy (α) song song với (P) và (Q) .

Bài tập 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(3;4;0)$ và mặt phẳng $(P): ax + by + cz + 46 = 0$. Biết rằng khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (P) lần lượt bằng 6 và 3. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ bằng

$$\text{A. } -3. \quad \text{B. } -6. \quad \text{C. } 3. \quad \text{D. } 6.$$

Hướng dẫn giải

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng (P) .

Theo giả thiết, ta có: $AB = 3, AH = 6, BK = 3$.

Do đó A, B ở cùng phía với mặt phẳng (P) .

Lại có: $AB + BK \geq AK \geq AH$. Mà $AB + BK = AH$ nên $H \equiv K$.

Suy ra A, B, H là ba điểm thẳng hàng và B là trung điểm của AH nên tọa độ $H(5;6;-1)$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua $H(5;6;-1)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (2;2;-1)$ là vector pháp tuyến nên có phương trình là $2(x-5) + 2(y-6) - 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z - 23 = 0$

Theo bài ra, ta có $(P): -4x - 4y + 2z + 46 = 0$ nên $a = -4, b = -4, c = 2$.

Vậy $T = a + b + c = -6$.

Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến mặt cầu

1. Phương pháp

Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H .

Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R , khi đó ta viết được phương trình mặt phẳng (α) đi qua H và có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = \overrightarrow{IH}$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm mặt cầu và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất.

A. $2x + 2y - z + 2 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 8 = 0$.

B. $2x + 2y - z - 1 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 11 = 0$.

C. $2x + 2y - z - 6 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 3 = 0$.

D. $2x + 2y - z + 2 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 2 = 0$.

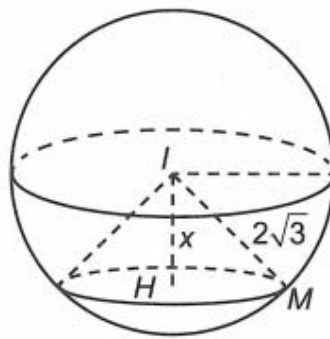
Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $(\alpha) \parallel (P)$ nên $(\alpha): 2x + 2y - z + d = 0$ ($d \neq -3$).

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Gọi (H) là khối nón thỏa mãn đề bài với đường sinh $IM = R = 2\sqrt{3}$.



Đặt $x = h = d(I, (\alpha))$. Khi đó bán kính đường tròn đáy hình nón là $r = \sqrt{12 - x^2}$.

Thể tích khối nón là $V_{(H)} = \frac{1}{3} \pi (12 - x^2) x$ với $0 < x < 2\sqrt{3}$.

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{3} \pi (12 - x^2) x$ với $0 < x < 2\sqrt{3}$.

Khi đó $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2$ hay $d(I, (\alpha)) = 2$.

$$\text{Ta có } d(I, (\alpha)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) - 3 + d|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} d - 5 = 6 \\ d - 5 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 11 \\ d = -1 \end{cases}.$$

Chú ý: Công thức tính thể tích hình nón:

$$V = \frac{1}{3}hS = \frac{1}{3} \cdot 2\pi R \cdot h$$

Trong đó R là bán kính đáy, h là chiều cao.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ và điểm $A(2; 2; 2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với mặt cầu (B, C, D là các tiếp điểm). Phương trình mặt phẳng (BCD) là

A. $2x + 2y + z - 1 = 0$.

B. $2x + 2y + z - 3 = 0$.

C. $2x + 2y + z + 1 = 0$.

D. $2x + 2y + z - 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 1)$ và bán kính $R = 2$.

Do AB, AC, AD là ba tiếp tuyến của mặt cầu (S) với B, C, D là các tiếp điểm nên

$$\begin{cases} AB = AC = AD \\ IB = IC = ID = R \end{cases} \Rightarrow IA \text{ là trục của đường tròn ngoại tiếp } \triangle BCD.$$

$$\Rightarrow IA \perp (BCD).$$

Khi đó mặt phẳng (BCD) có một vector pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{IA} = (2; 2; 1)$.

Gọi J là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD \Rightarrow J \in IA$ và $IJ \perp BJ$.

Ta có $\triangle IBA$ vuông tại B và $BJ \perp IA$ nên

$$IB^2 = IJ \cdot IA \Rightarrow IJ = \frac{IB^2}{IA} = \frac{4}{3} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{4}{9} \overrightarrow{IA}.$$

Đặt $J(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{IJ} = (x; y; z-1); \overrightarrow{IA} = (2; 2; 1)$.

$$\text{Từ } \overrightarrow{IJ} = \frac{4}{9} \overrightarrow{IA} \text{ suy ra } J\left(\frac{8}{9}; \frac{8}{9}; \frac{13}{9}\right).$$

Mặt phẳng (BCD) đi qua $J\left(\frac{8}{9}; \frac{8}{9}; \frac{13}{9}\right)$ và nhận vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; 2; 1)$ có phương trình:

$$2\left(x - \frac{8}{9}\right) + 2\left(y - \frac{8}{9}\right) + \left(z - \frac{13}{9}\right) = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z - 5 = 0.$$

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 11 = 0$. Xét điểm M di động trên (P) và các điểm A, B, C phân biệt di động trên (S) sao cho AM, BM, CM là các tiếp tuyến của (S) . Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

B. $(0; -1; 3)$.

C. $\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$.

D. $(0; 3; -1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Xét điểm $M(a; b; c) \in (P); A(x; y; z) \in (S)$ nên ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12 \\ AI^2 + AM^2 = IM^2 \\ a - 2b + 2c + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12 & (1) \\ 12 + (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 & (2) \\ a - 2b + 2c + 11 = 0 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) ta có:

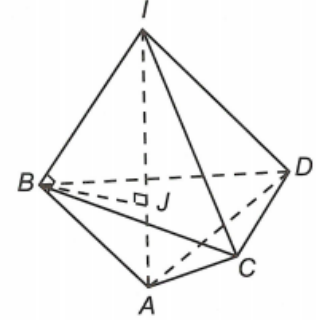
$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - [12 + (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2] \\ = 12 - [(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)x + (b-1)y + (c-1)z - a - b - c - 9 = 0$$

Vậy mặt phẳng đi qua ba tiếp điểm là:

$$(Q): (a-1)x + (b-1)y + (c-1)z - a - b - c - 9 = 0$$

Kết hợp với (3) suy ra mặt phẳng này luôn đi qua điểm cố định $(0; 3; -1)$.



Dạng 3. Phương trình mặt phẳng đoạn chắn

1. Phương pháp

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; 0; 0), N(2; 2; 2)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua M, N cắt các trục Oy, Oz lần lượt tại $B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $b, c \neq 0$. Hệ thức nào dưới đây là đúng?

A. $b + c = 6$.

B. $bc = 3(b + c)$.

C. $bc = b + c$.

D. $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng (P) đi qua $M(3; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $b, c \neq 0$ nên phương trình mặt phẳng (P)

theo đoạn chắn là: $\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Mặt phẳng (P) đi qua $N(2;2;2)$ suy ra $\frac{2}{3} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Phương trình mặt phẳng cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{12} + \frac{z}{9} = 1$.

B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} + \frac{z}{12} = 1$.

C. $3x + 12y + 9z - 78 = 0$.

D. $4x + 16y + 12z - 104 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giả sử $A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c)$.

$$G(1;4;3) \text{ là trọng tâm tứ diện } OABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 + a + 0 + 0 = 4.1 \\ 0 + 0 + b + 0 = 4.4 \\ 0 + 0 + 0 + c = 4.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \\ c = 12 \end{cases}$$

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} + \frac{z}{12} = 1$.

Bài tập 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C khác với gốc tọa độ O sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $(P): x + 2y + z - 14 = 0$.

B. $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$.

C. $(P): x + 2y + 3z - 11 = 0$.

D. $(P): x + y + 3z - 14 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi H là trực tâm ΔABC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BH \perp AC \\ OB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp OH \quad (1).$$

Chứng minh tương tự, ta có: $BC \perp OH \quad (2)$.

Từ (1), (2) ta có $OH \perp (ABC)$.

$$\text{Suy ra } \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2}.$$

Vậy để biểu thức $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì OH đạt giá trị lớn nhất. Mà $OH \leq OM$ nên OH đạt giá trị lớn nhất bằng OM hay $H \equiv M$.

Khi đó $OM \perp (ABC)$ nên (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM} = (1; 2; 3)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$1(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua điểm $M(4; -4; 1)$ và chắn trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn thẳng có độ dài theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{2}$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ là giao điểm của mặt phẳng (P) và các trục tọa độ. Khi đó (P) có phương trình là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} M \in (P) \\ OC = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{4}OA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a} - \frac{4}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ |c| = \frac{1}{2}|b| = \frac{1}{4}|a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8, b = -4, c = 2 \\ a = 8, b = -4, c = -2 \\ a = 16, b = -8, c = 4 \end{cases}$$

Vậy có ba mặt phẳng thỏa mãn.

Bài tập 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0)$. Mặt phẳng $x + ay + bz + c = 0$ đi qua các điểm A, B đồng thời cắt tia Oz tại C sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích bằng $\frac{1}{6}$. Giá trị của $a + 3b - 2c$ là

A. 16.

B. 1.

C. 10.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng đi qua các điểm A, B đồng thời cắt tia Oz tại $C(0; 0; t)$ với $t > 0$ có phương trình là

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{t} = 1.$$

$$\text{Mặt khác: } V_{OABC} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6}. OA.OB.OC = \frac{1}{6} \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng } \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0.$$

$$\text{Vậy } a = b = 1, c = -1.$$

$$\text{Suy ra } a + 3b - 2c = 1 + 3.1 + 2 = 6.$$

Dạng 4. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Cho hai mặt phẳng:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$(P'): A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Khi đó:

- (P) cắt $(P') \Leftrightarrow A:B:C \neq A':B':C'$.
- $(P) // (P') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$.
- $(P) \equiv (P') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$.
- $(P) \perp (P') \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(P')} \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(P')} = 0$.
 $\Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$.

Chú ý:

- Nếu $A = 0$ thì tương ứng $A' = 0$.
- Nếu $B = 0$ thì tương ứng $B' = 0$.
- Nếu $C = 0$ thì tương ứng $C' = 0$.

Ví dụ: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x + 4y - mz - 2 = 0$.

Tìm m để (α) và (β) song song với nhau.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-1}{-m} \neq \frac{-1}{-2}$$

$$(\text{vô lý vì } \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-2}{-1}).$$

Vậy không tồn tại m để hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ song song với nhau.

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình

$$mx + (m-1)y + z - 10 = 0 \text{ và mặt phẳng } (Q): 2x + y - 2z + 3 = 0.$$

Với giá trị nào của m thì (P) và (Q) vuông góc với nhau?

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$(P): mx + (m-1)y + z - 10 = 0 \text{ có vector pháp tuyến } \vec{n}_1 = (m; m-1; 1).$$

$$(Q): 2x + y - 2z + 3 = 0 \text{ có vector pháp tuyến } \vec{n}_2 = (2; 1; -2).$$

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2m + m - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Dạng 5. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

1. Phương pháp

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và mặt cầu tâm I ; bán kính R .

- (α) và (S) không có điểm chung $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) > R$.
- (α) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$. Khi đó (α) là tiếp diện.
- (α) và (S) cắt nhau $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) < R$.

Khi đó (O) có tâm là hình chiếu của I trên (α) và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (\alpha))}$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

Mặt phẳng nào cắt (S) theo một đường tròn có bán kính $r = 3$?

- A.** $4x - 3y - z - 4\sqrt{26} = 0$. **B.** $2x + 2y - z + 12 = 0$.
C. $3x - 4y + 5z - 17 + 20\sqrt{2} = 0$. **D.** $x + y + z + \sqrt{3} = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình mặt cầu (S) là $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

Suy ra tâm $I(3; -2; 0)$ và bán kính $R = 5$.

Ta gọi khoảng cách từ tâm I của mặt cầu tới các mặt phẳng ở các đáp án là h , khi đó để mặt phẳng cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r = 3$ thì $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Đáp án A loại vì $h = \frac{|18 - 4\sqrt{26}|}{\sqrt{26}} \neq 4$.

Đáp án **B** loại vì $h = \frac{14}{3} \neq 4$.

Chọn đáp án **C** vì $h = 4$.

Đáp án **D** loại vì $h = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \neq 4$.

Bài tập 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; -2)$ và mặt phẳng

(P): $2x + 2y + z + 5 = 0$. Phương trình mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 16π là

- A.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$.
B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9$.
C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$.
D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 16$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } a = d(I; (P)) = \frac{|2.1 + 2.2 - 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3.$$

$$\text{Bán kính của đường tròn giao tuyến là: } r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{16} = 4.$$

Mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn nên ta có

$$R^2 = a^2 + r^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow R = 5.$$

Vậy phương trình mặt cầu tâm I , bán kính $R = 5$ là:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25.$$

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Tìm phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S) ; song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x + 3y - 12z - 78 = 0$.

B. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

C. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

D. $4x + 3y - 12z + 26 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Mặt cầu } (S) \text{ có tâm } I(1; 2; 3), \text{ bán kính } R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2} = 4.$$

$$\text{Vì } (\alpha) // (\beta) \text{ nên phương trình } (\alpha) \text{ có dạng: } 4x + 3y - 12z + d = 0, d \neq 10.$$

Vì (β) tiếp xúc mặt cầu (S) nên

$$d_{(I, (\beta))} = R \Leftrightarrow \frac{|4.1 + 3.2 - 12.3 + d|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-12)^2}} = 4 \Leftrightarrow |d - 26| = 52 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -26 \\ d = 78 \end{cases}.$$

Do (β) cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương nên chọn $d = 78$.

$$\text{Vậy phương trình mặt phẳng } (\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0.$$

Dạng 6. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

1. Phương pháp

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. 3.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì $(P) // (Q)$ nên $d((P), (Q)) = d(A, (Q))$ với $A \in (P)$.

$$\text{Chọn } A(0; 0; 5) \in (P) \text{ thì } d(A, (Q)) = \frac{|0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{7}{3}.$$

Chú ý: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.

Bài tập 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3), B(3; 4; 4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(P): 2x + y + mz - 1 = 0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB .

A. $m = 2$.

B. $m = -2$.

C. $m = -3$.

D. $m = \pm 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \overline{AB} = (2; 2; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \quad (1).$$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là

$$d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 + m \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + m^2}} = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \quad (2).$$

$$\text{Vì } AB = d(A, (P)) \Leftrightarrow 3 = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \Leftrightarrow 9(5 + m^2) = 9(m + 1)^2 \Leftrightarrow m = 2.$$

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1; 2; 1), B(2; 1; 3),$

$C(3; 2; 2), D(1; 1; 1)$. Độ dài chiều cao DH của tứ diện bằng

A. $\frac{3\sqrt{14}}{14}$.

B. $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

C. $\frac{4\sqrt{14}}{7}$.

D. $\frac{3\sqrt{14}}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\overline{AB} = (1; -1; 2), \overline{AC} = (2; 0; 1) \Rightarrow [\overline{AB}; \overline{AC}] = (-1; 3; 2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$-1(x - 1) + 3(y - 2) + 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow -x + 3y + 2z - 7 = 0.$$

Độ dài chiều cao DH của tứ diện $ABCD$ là khoảng cách từ D đến (ABC) .

$$\text{Suy ra } DH = d(D, (ABC)) = \frac{|-1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 7|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}.$$

Bài tập 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với $a, b, c \neq 0$. Xét (P) là mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A . Khoảng cách lớn nhất từ điểm O đến mặt phẳng (P) bằng

- A. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. B. $2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. C. $3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. D. $4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

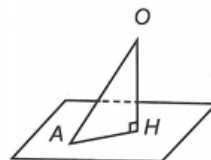
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P) .

Khi đó

$$d(O, (P)) = OH \leq OA = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Dạng 7. Góc giữa hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ có phương trình:

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Góc giữa $(\alpha), (\beta)$ bằng hoặc bù với góc giữa hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1, \vec{n}_2$.

$$\cos(\widehat{(\alpha), (\beta)}) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Chú ý: $0^\circ \leq \widehat{(\alpha), (\beta)} \leq 90^\circ$.

2. Bài tập

Bổ sung sau

Dạng 8. Một số bài toán cực trị

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(-1;2;0), C(3;-1;2)$ và M là điểm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 7 = 0$.

Tính giá trị nhỏ nhất của $P = |3\vec{MA} + 5\vec{MB} - 7\vec{MC}|$.

- A. $P_{\min} = 20$. B. $P_{\min} = 5$. C. $P_{\min} = 25$. D. $P_{\min} = 27$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi điểm $I(x; y; z)$ sao cho $3\vec{IA} + 5\vec{IB} - 7\vec{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 3(1-x) + 5(-1-x) - 7(3-x) = 0 \\ 3(1-y) + 5(2-y) - 7(-1-y) = 0 \\ 3(1-z) + 5(0-z) - 7(2-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 \\ y = 20 \\ z = -11 \end{cases} \Rightarrow I(-23; 20; -11).$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } P &= \left| 3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC} \right| = \left| 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 5(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - 7(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \right| \\ &= \left| \overrightarrow{MI} + (3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC}) \right| = \left| \overrightarrow{MI} \right| = MI. \end{aligned}$$

$P_{\min}$ khi MI ngắn nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α) .

$$\text{Khi đó: } P_{\min} = d(I, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot (-23) - 20 + 2 \cdot (-11) + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 27.$$

Bài tập 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 5; -5), B(5; -3; 7)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất.

- A. $M(-2; 1; 1)$. B. $M(2; -1; 1)$. C. $M(6; -18; 12)$. D. $M(-6; 18; 12)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} - 2(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow I(13; -11; 19)$.

Ta có $MA^2 - 2MB^2 = (\overrightarrow{MA})^2 - 2(\overrightarrow{MB})^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = -MI^2 + (IA^2 - 2IB^2)$.

$MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất khi MI nhỏ nhất. Khi đó I là hình chiếu vuông góc của M lên (P) .

Ta tìm được $M(6; -18; 12)$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m; 0; 0), N(0; n; 0), P(0; 0; p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2 + n^2 + p^2 = 3$. Giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{1}{27}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do M, N, P không trùng với gốc tọa độ nên $m \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m}x + \frac{1}{n}y + \frac{1}{p}z - 1 = 0$.

$$\text{Suy ra } d(O, (MNP)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương m^2, n^2, p^2 và ba số dương $\frac{1}{m^2}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{p^2}$ ta có:

$$m^2 + n^2 + p^2 \geq 3\sqrt[3]{m^2 n^2 p^2} \text{ và } \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{m^2 n^2 p^2}}.$$

$$\text{Suy ra } (m^2 + n^2 + p^2) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) \geq 9 \quad (\text{do } m^2 + n^2 + p^2 = 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy $d(O, (MNP)) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m^2 = n^2 = p^2 = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) là $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overline{MN}$ cùng phương với vector $\vec{u} = (1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

- A. $MN = 3$. B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$. C. $MN = 3\sqrt{2}$. D. $MN = 14$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

(S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = 1$.

Ta có: $d(I, (P)) = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2 > R$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (P) và α là góc giữa MN và NH .

Vì $\overline{MN}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên góc α có số đo không đổi.

$\triangle MNH$ vuông tại H có $\alpha = \widehat{HNM}$ nên $HN = MN \cdot \cos \alpha \Rightarrow MN = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot HN$

Do đó MN lớn nhất $\Leftrightarrow HN$ lớn nhất $\Leftrightarrow HN = d(I, (P)) + R = 3$.

Có $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}_P) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $MN = \frac{1}{\cos \alpha} HN = 3\sqrt{2}$.

Bài tập 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi $(P): ax + by + cz - 3 = 0$ (với a, b, c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0; -1; 2), N(-1; 1; 3)$ và không đi qua điểm $H(0; 0; 2)$. Biết rằng khoảng cách từ H đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của tổng $T = a - 2b + 3c + 12$ bằng

- A. -16 . B. 8 . C. 12 . D. 16 .

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi K là hình chiếu của H lên (P) , E là hình chiếu của H lên MN .

Ta có $d(H; (P)) = HK$ và $d(H; MN) = HE$, $HK \leq HE$ (không đổi).

Vậy $d(H; (P))$ lớn nhất khi $K \equiv E$, với E là hình chiếu của H lên MN .

Suy ra $E\left(\frac{-1}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Vậy mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng nhận $\overrightarrow{HE} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ làm vector pháp tuyến và đi qua M có phương trình là $-x - y + z - 3 = 0$.

Suy ra $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$.

Vậy $T = 16$.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Phương trình đường thẳng

Vector chỉ phương của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ . Vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là vector chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ .

Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.

Phương trình tham số của đường thẳng

Phương trình tham số của đường thẳng Δ có dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình chính tắc

Nếu $a, b, c \neq 0$ thì phương trình chính tắc của đường thẳng Δ có dạng

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (2)$$

2. Khoảng cách

Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua M_0 , có vector chỉ phương $\vec{u}$ và điểm $M \notin \Delta$. Khi đó để tính khoảng cách từ M đến Δ ta có các cách sau:

Cách 1: Sử dụng công thức: $d[M, \Delta] = \frac{|\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.

Cách 2:

- + Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M vuông góc với Δ .
 - + Tìm giao điểm H của (P) với Δ .
 - + Khi đó độ dài MH là khoảng cách cần tìm.
-

Chú ý:

+ Nếu $\vec{u}$ là vector chỉ phương của Δ thì $k\vec{u} (k \neq 0)$ cũng là vector chỉ phương của Δ .

+ Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một vector chỉ phương. Cho đường thẳng Δ có phương trình (1) thì

+ $\vec{u} = (a; b; c)$ là một vector chỉ phương của Δ .

+ Với điểm $M \in \Delta$ thì $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$ trong đó t là một giá trị cụ thể tương ứng với từng điểm M .

Cách 3:

- + Gọi $N \in d$, suy ra tọa độ N theo tham số t .
- + Tính MN^2 theo t .
- + Tìm giá trị nhỏ nhất của tam thức bậc hai.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ đi qua M_0 có vector chỉ phương $\vec{u}$ và Δ' đi qua M'_0 có vector chỉ phương $\vec{u}'$. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' được tính theo các cách sau:

Cách 1: Sử dụng công thức: $d(\Delta, \Delta') = \frac{|\left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}|}{\left| \left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \right|}$.

Cách 2: Tìm đoạn vuông góc chung MN . Khi đó độ dài MN là khoảng cách cần tìm.

Cách 3: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa qua Δ và song song với Δ' . Khi đó khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ' đến (P) .

3. Vị trí tương đối**Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng**

Trong không gian $Oxyz$, hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \text{ đi qua } M_1(x_0; y_0; z_0) \text{ có}$$

vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (a; b; c)$, và

$$d_2: \frac{x-x'_0}{a'} = \frac{y-y'_0}{b'} = \frac{z-z'_0}{c'} \text{ đi qua } M_2(x'_0; y'_0; z'_0) \text{ có}$$

vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (a'; b'; c')$.

Để xét vị trí tương đối của d_1 và d_2 , ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp hình học

$$+ d_1 \text{ trùng } d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 // \vec{u}_2 \\ M_1 \in d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \\ M_1 \in d_2 \end{cases}$$

$$+ d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1 M_2} \right] \neq \vec{0} \end{cases} \text{ hoặc}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_1 \not// \vec{u}_2 \\ M_1 \notin d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases}$$

Ta có thể dùng **phương pháp đại số** để xét vị trí tương đối: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình các đường thẳng.

Chú ý trường hợp vô nghiệm

+ Nếu $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ cùng phương thì $d_1 // d_2$.

+ Nếu $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ không cùng phương thì $d_1; d_2$ chéo nhau.

$$+ d_1 \text{ cắt } d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = 0 \end{cases}$$

$$+ d_1 \text{ chéo } d_2 \Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \neq 0$$

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ có vector pháp tuyến

$$\vec{n}_\alpha = (A; B; C) \text{ và đường thẳng } d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ đi qua}$$

$M(x_0; y_0; z_0)$ có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (a; b; c)$.

Để xét vị trí tương đối của d và (α) ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp hình học

- Nếu $\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_\alpha \\ M(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha) \end{cases}$ thì $d \subset (\alpha)$.
- Nếu $\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_\alpha \\ M(x_0; y_0; z_0) \notin (\alpha) \end{cases}$ thì $d // (\alpha)$.
- Nếu $\vec{u}_d$ và $\vec{n}_\alpha$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{u}_d = k \cdot \vec{n}_\alpha$ với $k \neq 0$ thì $d \perp (\alpha)$.
- Nếu $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$; $\vec{u}_d$ và $\vec{n}_\alpha$ không cùng phương thì d cắt (α) .

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng và mặt cầu

$$\text{có phương trình lần lượt là: } d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ và}$$

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Để xét vị trí tương đối của d và (α) ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp đại số

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + at & (1) \\ y = y_0 + bt & (2) \\ z = z_0 + ct & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4), ta được

$$A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0(*)$$

+) Nếu phương trình (*) vô nghiệm t thì $d // (\alpha)$.

+) Nếu phương trình (*) có nghiệm t duy nhất thì d cắt (α) .

+) Nếu phương trình (*) có vô số nghiệm t thì $d \subset (\alpha)$.

Chú ý: Để tìm điểm chung của đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta giải phương trình (*), sau đó thay giá trị t vào phương trình tham số của d để tìm $(x; y; z)$

Phương pháp hình học

Bước 1: Tìm khoảng cách từ tâm I của (S) đến d .

Bước 2:

- + Nếu $d(I, d) > R$ thì d không cắt (S) .
- + Nếu $d(I, d) = R$ thì d tiếp xúc (S) .
- + Nếu $d(I, d) < R$ thì d cắt (S) .

4. Góc

Góc giữa hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các vector pháp tuyến là $\vec{u_1}, \vec{u_2}$.

Góc giữa d_1 và d_2 bằng hoặc bù với góc giữa $\vec{u_1}$ và $\vec{u_2}$.

$$\text{Ta có: } \cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u_1}, \vec{u_2}) \right| = \frac{|\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}|}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{u_2}|}.$$

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u_d}$ và mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n_\alpha}$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d' của nó trên (α) .

$$\text{Ta có: } \sin(d, (\alpha)) = \left| \cos(\vec{u_d}, \vec{n_\alpha}) \right| = \frac{|\vec{u_d} \cdot \vec{n_\alpha}|}{|\vec{u_d}| \cdot |\vec{n_\alpha}|}.$$

Phương pháp đại số

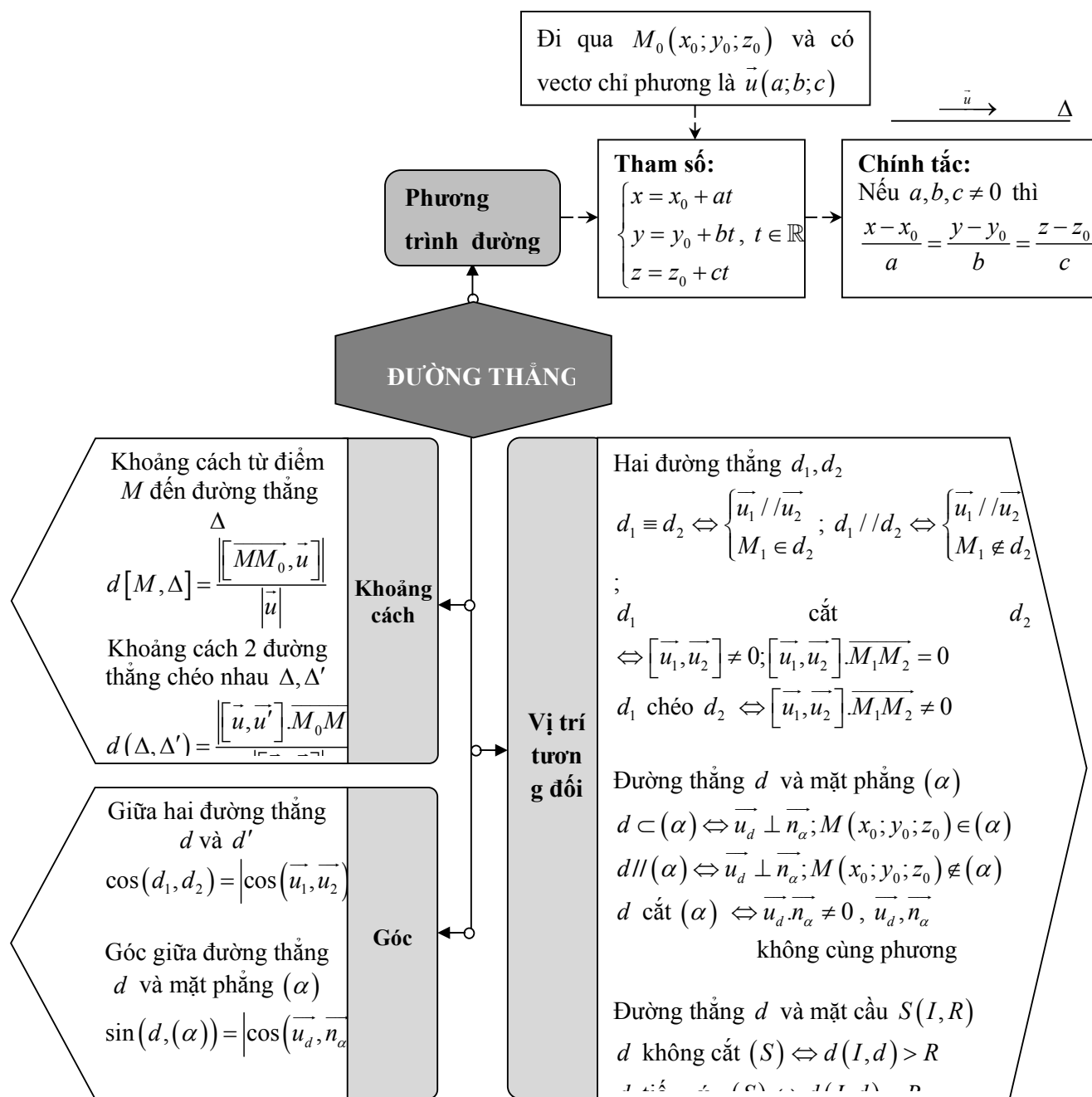
thay x, y, z từ phương trình tham số của d vào phương trình (S) , khi đó ta được phương trình bậc hai theo t . Biện luận số giao điểm của (d) và (S) theo số nghiệm của phương trình bậc hai theo t .

Chú ý: Để tìm điểm chung của đường thẳng và mặt cầu ta giải phương trình bậc hai theo t , sau đó thay giá trị của t vào phương trình tham số của d để tìm $(x; y; z)$.

Chú ý: Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

Chú ý: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc nhọn.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng

1. Phương pháp

- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vector chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ có phương

$$\text{trình tham số là } \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B : Một vector chỉ phương của d là $\overrightarrow{AB}$.
- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước: Vì $d // \Delta$ nên vector chỉ phương của Δ cũng là vector chỉ phương của d .
- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước: Vì $d \perp (P)$ nên vector pháp tuyến của (P) cũng là vector chỉ phương của d .

Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

Cách 1: Tìm một điểm và một vector chỉ phương

- Tìm tọa độ một điểm $A \in d$ bằng cách giải hệ phương trình mặt phẳng của $(P), (Q)$ với việc chọn giá trị cho một ẩn.
- Tìm một vector chỉ phương của d : $\vec{a} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}]$.

Cách 2: Tìm hai điểm A, B thuộc d rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.

- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 : Vì $d \perp d_1, d \perp d_2$ nên một vector chỉ phương của d là: $\vec{u} = [\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{u_{d_2}}]$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2; 1; -1)$, $B(-2; 3; 1)$ và $C(0; -1; 3)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$.

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

C. $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; 2; 2) \Rightarrow AB = \sqrt{16 + 4 + 4} = 2\sqrt{6}$.

$$\overrightarrow{AC} = (-2; -2; 4) \Rightarrow AC = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}.$$

$$\overrightarrow{BC} = (2; -4; 2) \Rightarrow BC = \sqrt{4+16+4} = 2\sqrt{6}.$$

Vậy tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trọng tâm $G(0;1;1)$.

$$\text{Ta có } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; 12; 12) = 12(1; 1; 1).$$

Đường thẳng d đi qua $G(0;1;1)$ và có vectơ chỉ phương cùng phương với $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$, do đó chọn $\vec{u} = (1; 1; 1)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } d \text{ là } \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Với $t = -1$, ta có điểm $A(-1; 0; 0) \in d$.

Vậy đường thẳng d đi qua $A(-1; 0; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 1)$.

Bài tập 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai $M(1; 2; 3)$, $N(3; 4; 5)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P) , các điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N trên Δ . Biết rằng khi $MH = NK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của đường thẳng d là

$$\text{A. } \begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = t \\ y = 13 + 2t \\ z = -4 + t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 - t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 1 \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm của HK .

Do $MH = NK$ nên $\Delta HMI = \Delta KNI \Rightarrow IM = IN$. Khi đó I thuộc mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN .

Ta có (Q) đi qua trung điểm của MN là điểm $J(2; 3; 4)$ và nhận $\vec{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = (1; 1; 1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $(Q): x + y + z - 9 = 0$.

$$\text{Mà } I \in A \subset (P). \text{ Suy ra } I \in d = (P) \cap (Q): \begin{cases} x + y + z - 9 = 0 \\ x + 2y + 3z - 14 = 0 \end{cases}$$

Tìm được $(0; 13; -4) \in d$ và vectơ chỉ phương của d là $(1; -2; 1)$.

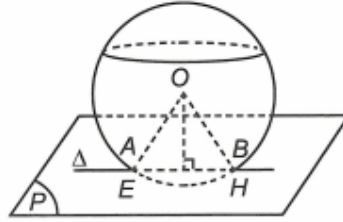
$$\text{Vậy } d: \begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$$

Bài tập 3. Trong không gian $Oxyz$. Cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho ΔOAB là tam giác đều. Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là một vector chỉ phương của Δ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Ta có $\vec{n}_P = (1; -3; 5)$.

Vì $\Delta \subset (P)$ nên $\vec{u} \perp \vec{n}_P \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow a - 3b + 5c = 0 \Leftrightarrow a = 3b - 5c$. (1)

Mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AB

Ta có ΔOAB là tam giác đều cạnh R nên $OH = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Suy ra khoảng cách từ O đến đường thẳng Δ bằng $OH = \sqrt{3}$.

Khi đó $\frac{|\vec{u} \cdot \vec{OE}|}{|\vec{u}|} = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 = 0 \Leftrightarrow a+b+c = 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$3b - 5c + b + c = 0 \Leftrightarrow b = c \Rightarrow a = -2c.$$

Thay $c = -1$ thì $b = -1$ và $a = 2$.

Ta được một vector chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (2; -1; -1)$

Vậy phương trình của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng bằng phương pháp tham số hóa

1. Phương pháp

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ .

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng Δ . Khi đó $H \in \Delta$, $\overrightarrow{M_0H} \perp \overrightarrow{u_\Delta}$.

Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, H .

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và vuông góc với d . (Q) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d . Khi đó $d = (P) \cap (Q)$

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 .

Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1 \cap d$, $M_2 \in d_2 \cap d$. Suy ra M_0, M_1, M_2 thẳng hàng. Từ đó tìm được M_1, M_2 và suy ra phương trình đường thẳng d .

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d_1 ; (Q) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d_2 .

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$. Do đó một vectơ chỉ phương của d có thể chọn là $\vec{u} = [\vec{n_P}, \vec{n_Q}]$.

- Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 : Tìm các giao điểm $A = d_1 \cap (P)$, $B = d_2 \cap (P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB .

- Đường thẳng d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 : Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với Δ và chứa d_1 , mặt phẳng (Q) song song với Δ và chứa d_2 . Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

- Đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau:

Cách làm: Gọi $M \in d_1$, $N \in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, ta tìm được M, N . Viết phương trình

đường thẳng MN chính là đường vuông góc chung của d_1, d_2 .

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$ và đường

thẳng $d: \frac{x-4}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{1}$. Phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là

A. $\frac{x}{5} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+1}{2}$.

B. $\frac{x}{-5} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$.

C. $\frac{x}{-5} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+1}{2}$.

D. $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng d có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Lấy điểm $M = d \cap (P) \Rightarrow M(4 - 2t; -2 + 2t; -1 + t) \in d$. Thay đổi tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (P) ta được: $4 - 2t - 2 + 2t + 1 - t = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Suy ra $M(0; 2; 1)$.

Do đó $d \cap (P) = M(0; 2; 1)$.

Lấy $A(4; -2; -1) \in d$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P) .

Đường thẳng AH đi qua $A(4; -2; -1)$ và nhận $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1; 1; -1)$ làm vector chỉ phương nên AH có

phương trình là
$$\begin{cases} x = 4 + t_1 \\ y = -2 + t_1 \\ z = -1 - t_1 \end{cases} \quad (t_1 \in \mathbb{R}).$$

Suy ra $H(4 + t_1; -2 + t_1; -1 - t_1)$.

Thay tọa độ H vào phương trình mặt phẳng (P) được

$$4 + t_1 - 2 + t_1 + 1 + t_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow H\left(\frac{10}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

MH là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P) , MH đi qua $M(0; 2; 1)$ và nhận

$\overrightarrow{MH} = \left(\frac{10}{3}; -\frac{14}{3}; -\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}(-5; 7; 2)$ là vector chỉ phương nên có phương trình là

$$\frac{x}{-5} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}.$$

Bài tập 2. Cho các đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và đường thẳng $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1; 0; 2)$, cắt d_1 và vuông góc với d_2 là

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-4}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $I = d_1 \cap \Delta$, $I(1+t, -1+2t, -t) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (t; 2t-1; -t-2)$ là một vector chỉ phương của Δ .

Do $\vec{u}_{d_2} = (1; 2; 2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng d_2 và $\Delta \perp d_2$.

Suy ra $\overrightarrow{AI} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0 \Leftrightarrow t + 2(2t - 1) + 2(-t - 2) = 0 \Leftrightarrow 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy $\overrightarrow{AI} = (2; 3; -4)$. Phương trình đường thẳng Δ cần tìm là $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-4}$.

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + y - 2z = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{4}$. Đường thẳng vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$.

B. $\frac{x+5}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{2}$.

C. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$d_1: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1-t \\ y = 6+2t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

$$M \in d_1 \Leftrightarrow M(-1-t; 6+2t; t).$$

$$d_2: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-3t' \\ y = 2-t', t' \in \mathbb{R} \\ z = -4+4t' \end{cases}$$

$$N \in d_2 \Leftrightarrow N(1-3t'; 2-t'; -4+4t').$$

$$\overrightarrow{MN} = (2+t-3t'; -4-2t-t'; -4-t+4t').$$

$$(P): 3x + y - 2z = 0 \text{ có vectơ pháp tuyến } \vec{n}(3; 1; -2).$$

Đường thẳng (d) vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 tại M và cắt d_2 tại N suy ra

$$\overrightarrow{MN} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+t-3t' = 3k \\ -4-2t-t' = k \\ -4-t+4t' = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t' = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

$$t = -2 \Rightarrow M(1; 2; -2)$$

Do $(d) \perp (P)$ nên $\vec{u}_d = \overrightarrow{n_{(P)}}$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } d \text{ là } \begin{cases} x = 1+3s \\ y = 2+s \\ z = -2-2s \end{cases}; s \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Chọn } s = -1 \Rightarrow A(-2; 1; 0) \in d \Rightarrow d: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}.$$

Bài tập 4. Viết phương trình đường thẳng d qua $A(1;2;3)$ cắt đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ và song song với mặt phẳng $(P): x + y - z - 2 = 0$.

A. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do $d \cap d_1 = B \Rightarrow B(2m; m; m+2) \Rightarrow \overline{AB} = (2m-1; m-2; m-1)$.

d song song với mặt phẳng (P) nên

$$\overline{AB} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow 1(2m-1) + 1(m-2) - (m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow \overline{AB} = (1; -1; 0).$$

Vậy phương trình đường thẳng $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3 \end{cases}$

Bài tập 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 10 = 0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của MN .

A. $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$ B. $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-1}$
C. $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{-1}$ D. $\frac{x-6}{7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-1}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $N = \Delta \cap d \Rightarrow N(-2+2t; 1+t; 1-t)$.

A là trung điểm của $MN \Rightarrow M(4-2t; 5-t; 3+t)$.

Mà $M \in (P)$ nên tọa độ M thỏa phương trình (P) , ta được:

$$2(4-2t) - (5-t) + (3+t) - 10 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow N(-6; -1; 3), M(8; 7; 1).$$

Suy ra $\overline{MN} = (14; 8; -2)$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm M và N nên có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = \frac{1}{2} \overline{NM} = (7; 4; -1)$

nên có phương trình là $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

Bài tập 6. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại M, N . Để độ dài MN lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

B. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.

C. $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$.

D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$ và bán kính $R=10$.

Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; -2; 1)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên Δ và mặt phẳng (α) .

$\Rightarrow IK \perp (\alpha)$ nên phương trình đường thẳng IK đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

Tọa độ điểm K là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \\ 2x - 2y + z + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(-2; 7; 3)$.

Vì $\Delta \subset (\alpha)$ nên $IH \geq IK$. Do đó IH nhỏ nhất khi H trùng với K .

Để MN lớn nhất thì IH phải nhỏ nhất.

Khi đó đường thẳng Δ cần tìm đi qua A và K . Ta có $\overrightarrow{AK} = (1; 4; 6)$.

Đường thẳng Δ có phương trình là: $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

Bài tập 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ

B là $d: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là

$\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một vector chỉ phương là

A. $\vec{u}(2; 1; -1)$.

B. $\vec{u}(1; -1; 0)$.

C. $\vec{u}(0; 1; -1)$.

D. $\vec{u}(1; 2; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có phương trình tham số của Δ là:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow C(2 + 2t; 4 - t; 2 - t).$$

Gọi M là trung điểm của AC nên $M = \left(2 + t; \frac{7 - t}{2}; \frac{5 - t}{2}\right).$

Vì $M \in d$ nên $\frac{(2 + t) - 3}{-1} = \frac{\left(\frac{7 - t}{2}\right) - 3}{2} = \frac{\left(\frac{5 - t}{2}\right) - 2}{-1} \Leftrightarrow \frac{t - 1}{-1} = \frac{1 - t}{4} = \frac{1 - t}{-2} \Rightarrow t = 1.$

Suy ra $C(4; 3; 1).$

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với Δ là: $2x - y - z + 2 = 0.$

Gọi H là giao điểm của (P) và $\Delta \Rightarrow H(2; 4; 2).$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường phân giác Δ , suy ra H là trung điểm $AA' \Rightarrow A'(2; 5; 1).$

Do $A' \in BC$ nên đường thẳng BC có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CA'} = (-2; 2; 0) = 2(-1; 1; 0).$

Suy ra phương trình của đường thẳng BC là
$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \end{cases}.$$

Vì $B = BM \cap BC \Rightarrow B(2; 5; 1) = A'.$

Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0; 2; -2) = 2(0; 1; -1).$

Bài tập 8. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(4; -2; 4), B(0; 0; -2).$ Gọi d là đường thẳng song song và cách Δ một khoảng bằng $\sqrt{5}$, gần đường thẳng AB nhất. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm nào dưới đây?

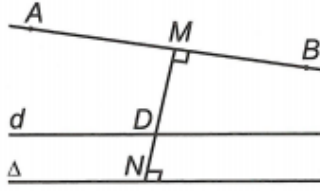
- A. $(2; 1; 0).$ B. $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{14}{3}; 0\right).$ C. $(3; 2; 0).$ D. $(0; 0; 0).$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình tham số của đường thẳng AB có dạng:
$$\begin{cases} x = 4t \\ y = -2t \\ z = -2 + 6t \end{cases}.$$

Để đường thẳng d thỏa mãn bài toán thì ta có hình vẽ tương ứng



Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và Δ là MN với $M(0; -5; 1), N(3; 1; 1)$.

Để d gần đường thẳng AB nhất thì d phải đi qua điểm D nằm trên đoạn MN mà $DN = d(d, \Delta) = \sqrt{5}, MN = 3\sqrt{5}$. Do đó $\overline{MN} = 3\overline{DN} \Rightarrow D = (2; -1; 1)$.

Vector chỉ phương của đường thẳng d là $\overline{u_{(d)}} = (2; -1; 1)$.

Suy ra phương trình tham số của d là
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt (Oxy) tại điểm có $z = 1 + t = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy giao điểm của d và (Oxy) là $(0; 0; 0)$.

Bài tập 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-1}; \Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$$

$$\Delta_3: \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}; \Delta_4: \frac{x-5}{1} = \frac{y-a}{3} = \frac{z-b}{1}$$

Biết không tồn tại đường thẳng nào trong không gian mà cắt được đồng thời cả bốn đường thẳng trên. Giá trị của biểu thức $T = a - 2b$ bằng

A. -2.

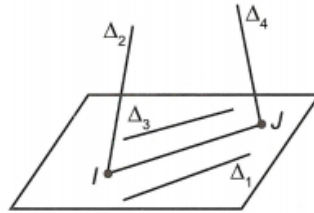
B. -3.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có: $\Delta_1 // \Delta_3$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ_1 và $\Delta_3 \Rightarrow (P): x + 2y - z + 3 = 0$.

Gọi $I = \Delta_2 \cap (P) \Rightarrow I(0; -1; 1)$.

Gọi $J = \Delta_4 \cap (P) \Rightarrow J\left(\frac{-2a+b+22}{6}; \frac{3b-24}{6}; \frac{-2a+7b-8}{6}\right)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \left(\frac{-2a+b+22}{6}; \frac{3b-18}{6}; \frac{-2a+7b-14}{6} \right).$$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $\overrightarrow{IJ}$ phải cùng phương với $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (1; -1; -1)$.

$$\text{Suy ra } \frac{-2a+b+22}{6} = \frac{3b-18}{-6} = \frac{-2a+7b-14}{-6} \Leftrightarrow a-2b=2.$$

Dạng 3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp

Cho đường thẳng

Ví dụ: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho

$$(\Delta): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \text{ và mặt phẳng } \Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1} \text{ và mặt phẳng}$$

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0.$$

$$(\alpha): 3x + 4y + 5z + 8 = 0.$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Δ) và (α) . Tính góc tạo bởi Δ và (α) .

và (α) ta có công thức:

Hướng dẫn giải

$$\sin \varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 1)$.

(α) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (3; 4; 5)$.

Chú ý: A, B, C và a, b, c không đồng thời bằng 0.

$$\text{Ta có: } \sin(\widehat{(\Delta, (\alpha))}) = |\cos(\vec{n}, \vec{u})|$$

$$= \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{(\Delta, (\alpha))} = 60^\circ.$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{4}$ và mặt phẳng

$(P): x + y - 2z + 6 = 0$. Biết Δ cắt mặt phẳng (P) tại A, M thuộc Δ sao cho $AM = 2\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P) .

A. $\sqrt{2}$.

B. 2.

C. $\sqrt{3}$.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Đường thẳng } \Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{4} \text{ có vector chỉ phương } \vec{u} = (1; 1; 4).$$

$$\text{Mặt phẳng } (P): x + y - 2z + 6 = 0 \text{ có vector chỉ phương } \vec{n} = (1; 1; -2).$$

$$\sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sin \varphi$$

$$\text{Suy ra } d(M, \Delta) = MH = MA \cdot \sin \varphi = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 2.$$

Dạng 4: Góc giữa hai đường thẳng

1. Phương pháp

Cho hai đường thẳng:

$$(\Delta_1): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$(\Delta_2): \frac{x-x_0}{a'} = \frac{y-y_0}{b'} = \frac{z-z_0}{c'}$$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) .

$$\text{Ta có: } \cos \varphi = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Ví dụ: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2};$$

$$\Delta_2: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-4}.$$

Tính góc giữa hai đường thẳng trên.

Hướng dẫn giải

Vector chỉ phương của Δ_1 là $\vec{u}_1 = (-2; 1; 2)$.

Vector chỉ phương của Δ_2 là $\vec{u}_2 = (1; 1; -4)$.

$$\begin{aligned} \cos(\Delta_1, \Delta_2) &= \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} \\ &= \frac{|(-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-4)|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2}} \\ &= \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng đã cho là 45° .

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng

$(P): x - z \cdot \sin \alpha + \cos \alpha = 0; (Q): y - z \cdot \cos \alpha - \sin \alpha = 0; \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Góc giữa (d) và trục Oz là:

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (1; 0; -\sin \alpha)$.

Mặt phẳng (Q) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = (0; 1; -\cos \alpha)$.

(d) là giao tuyến của (P) và (Q) nên vector chỉ phương của (d) là:

$$\vec{u}_{(d)} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (\sin \alpha; \cos \alpha; 1).$$

Vector chỉ phương của (Oz) là $\vec{u}_{(Oz)} = (0; 0; 1)$.

$$\text{Suy ra } \cos(d, Oz) = \frac{|0 \cdot \sin \alpha + 0 \cdot \cos \alpha + 1 \cdot 1|}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1^2} \cdot \sqrt{0 + 0 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (d, Oz) = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa (d) và trục (Oz) là 45° .

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz, d là đường thẳng đi qua điểm A(1; -1; 2), song song với mặt phẳng (P): $2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc lớn nhất.

Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$.

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{3}$.

C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-3}$.

D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng (P): $2x - y - z + 3 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; -1)$.

Đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (1; -2; 2)$.

Giả sử đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u}_d$.

Do $0^\circ \leq (d, \Delta) \leq 90^\circ$ mà theo giả thiết d tạo Δ góc lớn nhất nên $(d, \Delta) = 90^\circ \Rightarrow \vec{u}_d \perp \vec{u}_\Delta$.

Lại có $d \parallel (P)$ nên $\vec{u}_d \perp \vec{n}_{(P)}$. Do đó chọn $\vec{u}_d = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_{(P)}] = (4; 5; 3)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$.

Bài tập 3. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua E(-2; 1; -2), song song với (P) có một vector chỉ phương $\vec{u} = (m; n; 1)$, đồng thời tạo với d góc bé nhất. Tính $T = m^2 - n^2$.

A. $T = -5$.

B. $T = 4$.

C. $T = 3$.

D. $T = -4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1; 2)$; đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{v} = (4; -4; 3)$.

$$\Delta \parallel (P) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow 2m - n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2m + 2.$$

$$\begin{aligned}\text{Mặt khác ta có: } \cos(\widehat{\Delta; d}) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|4m - 4n + 3|}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1} \cdot \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|4m + 5|}{\sqrt{41(5m^2 + 8m + 5)}} = \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \sqrt{\frac{(4m + 5)^2}{5m^2 + 8m + 5}} = \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \sqrt{\frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5}}.\end{aligned}$$

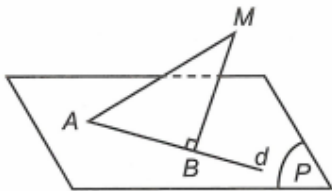
Vì $0^\circ \leq (\widehat{\Delta, d}) \leq 90^\circ$ nên $(\widehat{\Delta, d})$ bé nhất khi và chỉ khi $\cos(\widehat{\Delta, d})$ lớn nhất.

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{16t^2 + 40t + 25}{5t^2 + 8t + 5} \Rightarrow f'(t) = \frac{-72t^2 - 90t}{(5t^2 + 8t + 5)^2}.$$

Bảng biến thiên:

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta gọi B là hình chiếu của M lên đường thẳng d khi đó $MB \leq MA$.

Suy ra $MB_{\max} = MA$ nên đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với MA .

Đồng thời đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) nên ta có

$$\vec{u}_d = [\vec{MA}, \vec{n}_{(P)}] = (1; 3; -1).$$

Bài tập 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; -2), B(5; 1; 1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 12z + 9 = 0$. Xét đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - 4t \\ z = -2 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$

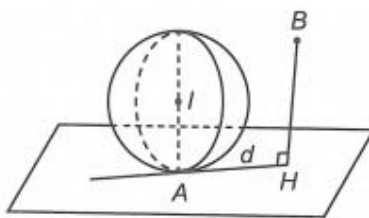
D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = -2 - t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 12z + 9 = 0$ có tâm $I(0; -3; -6)$ bán kính $R = 6$.

$IA = 6 = R \Rightarrow A \in (S)$, $IB = 3\sqrt{10} > R$ nên B nằm ngoài (S) .



Đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) nên d nằm trong mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A .

Mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\vec{IA}$ làm vector pháp tuyến có phương trình là $x + 2y + 2z = 0$.

Gọi H là hình chiếu của B lên (P) thì tọa độ của $H(4; -1; -1)$.

Ta có: $d(B; d) \geq d(B; (P)) = BH$.

Vậy khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất khi d đi qua H . Ta có $\vec{u}_d = \vec{AH} = (2; -2; 1)$.

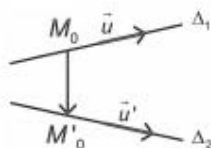
Suy ra phương trình đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Dạng 6: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

1. Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau: Δ_1 có vector chỉ phương

$\vec{u} = (a; b; c)$ và đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$; Δ_2 có vector chỉ phương $\vec{u}' = (a'; b'; c')$ và đi qua $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$.



Khi đó khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 được tính

bởi công thức
$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}|}{\left| \left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \right|}.$$

Nếu $\Delta_1 // \Delta_2$ ($\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương và $M_0 \notin \Delta_2$) thì $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_0, \Delta_2)$

Ví dụ: Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1; -2; 0)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(1; -1; 2)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (4; -2; 2)$.

Do $\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $M \notin d_2$ nên $d_1 // d_2$.

Suy ra $d(d_1; d_2) = d(N; d_1) = \frac{|\left[\vec{u}_1, \overrightarrow{MN} \right]|}{|\vec{u}_1|}.$

Ta có $\overrightarrow{MN} = (0; 1; 2)$, $\left[\vec{u}, \overrightarrow{MN} \right] = (-3; -4; 2)$.

Suy ra
$$\frac{|\left[\vec{u}_1, \overrightarrow{MN} \right]|}{|\vec{u}_1|} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{174}}{6}.$$

Vậy $d(d_1; d_2) = \frac{\sqrt{174}}{6}.$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho phương trình mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 3 = 0$, đường thẳng $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ và điểm $A(0; 2; 1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A , nằm trong (P) sao cho khoảng cách d và d' đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{-9}.$

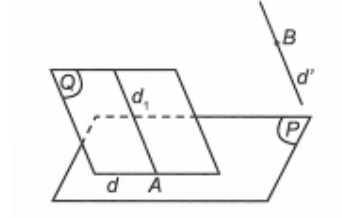
B. $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{7} = \frac{z-1}{9}.$

C. $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z-1}{9}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z-1}{-9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi d_1 là đường thẳng đi qua A và song song với d' .

Phương trình của d_1 là:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Trên đường thẳng d_1 lấy điểm $B(1; 0; 0)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và d_1 .

Ta có $d(d, d') = d(d', (Q)) = d(B, (Q))$.

Do d_1 cố định cho nên $d(d, d') = d(B, (Q)) \leq d(B, d_1)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_{(Q)}} = \overrightarrow{BH}$ trong đó H là hình chiếu của B lên d_1 .

Ta tìm được $H\left(\frac{-2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ nên $\overrightarrow{BH} = \left(\frac{-5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(Q)}} = (-5; 2; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{n_{(Q)}}] = (1; 7; -9)$.

Vậy phương trình của đường thẳng d là $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{-9}$.

Lưu ý: Vì đường thẳng d đi qua A nên ta có thể loại đáp án bằng cách thay tọa độ điểm A vào các đáp án trong bài

Dạng 7: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, xét đường thẳng (Δ) có vector chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$.

(Δ) cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$.

$$(\Delta) // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}.$$

$$(\Delta) \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

$$(\Delta) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a} \text{ và } \vec{n} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = A : B : C.$$

Ta có thể biện luận vị trí tương đối dựa vào số nghiệm của phương trình đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α) .

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : 3x - 3y + 2z - 6 = 0$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. d cắt và không vuông góc với (P) . B. d song song với (P) .
C. d vuông góc với (P) . D. d nằm trong (P) .

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đường thẳng d nhận $\vec{u} = (1; -3; -1)$ làm một vector chỉ phương.

Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n} = (3; -3; 2)$ làm một vector pháp tuyến.

Do $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$ và hai vector này không cùng phương nên đường thẳng d cắt và không vuông góc với (P) .

Bài tập 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng có phương trình $d : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : x + my + (m^2 - 1)z - 7 = 0$ với m là tham số thực. Tìm m sao cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) .

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$. D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; -1)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; m; m^2 - 1)$.

$$d // (P) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1 + m - m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy với $m = -2$ thì $d \subset (P)$ (loại). Vậy $m = -1$.

Bài tập 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng

$(\alpha): x - y + 2z - 5 = 0$, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $d // (\alpha)$.

B. $d \subset (\alpha)$.

C. d cắt (α) và không vuông góc với (α) .

D. $d \perp (\alpha)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + t \end{cases}$

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t & (1) \\ y = 2 + 4t & (2) \\ z = 3 + t & (3) \\ x - y + 2z - 5 = 0 & (*) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (*) ta được $1 + 2t - (2 + 4t) + 2(3 + t) - 5 = 0$.

Phương trình này có vô số nghiệm.

Do đó, đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) .

Bài tập 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(P): x + 2y - z - 1 = 0, (Q): 2x + y - z + 2 = 0$$

và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$, $\Delta_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

Đường thẳng Δ song song với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ và cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng tại H, K . Độ dài đoạn HK bằng

A. $\frac{8\sqrt{11}}{7}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. 6.

D. $\frac{\sqrt{11}}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\vec{u} = [\vec{n_P}, \vec{n_Q}] = (-1; -1; -3)$.

Gọi $H(2t; 1+t; -1+2t)$; $K(m; 2-m; 1+2m)$

$\Rightarrow \overrightarrow{HK} = (m-2t; 1-m-t; 2+2m-2t)$.

Vì Δ song song với 2 mặt phẳng $(P), (Q)$ nên $\overrightarrow{HK} = k\vec{u}$ nên

$$\frac{m-2t}{1} = \frac{1-m-t}{1} = \frac{2+2m-2t}{3}.$$

Tính ra được $m = \frac{2}{7}$; $t = \frac{-3}{7}$. Suy ra $HK = \frac{8\sqrt{11}}{7}$.

Bài tập 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng

$(P): 2(m^2 + m + 2)x + (m^2 - 1)y + (m + 2)z + m^2 + m + 1 = 0$ luôn chứa đường thẳng Δ cố định khi m thay đổi. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ là?

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $2(m^2 + m + 2)x + (m^2 - 1)y + (m + 2)z + m^2 + m + 1 = 0, \forall m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow m^2(2x + y + 1) + m(2x + z + 1) + 4x - y + 2z + 1 = 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \\ 4x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (P) \text{ luôn chứa đường thẳng } (\Delta) \text{ cố định: } \begin{cases} x = -\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Đường thẳng Δ đi qua $A\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = \left(-\frac{1}{2}; 1; 1\right)$.

$$\text{Vậy khoảng cách từ gốc tọa độ đến } \Delta \text{ là: } d(O; \Delta) = \frac{\left| \left[\vec{OA}, \vec{u}_\Delta \right] \right|}{\left| \vec{u}_\Delta \right|} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Dạng 8: Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

1. Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ đi qua $M_1(x_0; y_0; z_0)$

có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a; b; c)$ và $d_2: \frac{x-x'_0}{a'} = \frac{y-y'_0}{b'} = \frac{z-z'_0}{c'}$ đi qua $M_2(x'_0; y'_0; z'_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (a'; b'; c')$.

Để xét vị trí tương đối của d_1 và d_2 , ta sử dụng phương pháp sau:

$$\begin{aligned}
+) \ d_1 \text{ trùng } d_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_1} // \overrightarrow{u_2} \\ M_1 \in d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \\ M_1 \in d_2 \end{cases} \\
+) \ d_1 // d_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = \vec{0} \\ [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1 M_2}] \neq \vec{0} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \overrightarrow{u_1} // \overrightarrow{u_2} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases} \\
+) \ d_1 \text{ cắt } d_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = \vec{0} \\ [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = 0 \end{cases} \\
+) \ d_1 \text{ chéo } d_2 &\Leftrightarrow [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \neq 0.
\end{aligned}$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \text{ và } d_2: \frac{x+3}{4} = \frac{y+9}{8} = \frac{z+2}{m^2} \quad (m \neq 0)$$

Tập hợp các giá trị m thỏa mãn $d_1 // d_2$ có số phần tử là:

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng d_1 đi qua $A(1; -1; 2)$ và có vector chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1; 2; 1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $B(-3; -9; -2)$ và có vector chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (4; 8; m^2)$.

Đường thẳng $d_1 // d_2$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_2}$ và hai đường thẳng d_1 và d_2 không trùng nhau.

Vì $\frac{-3-1}{1} = \frac{-9+1}{2} = \frac{-2-2}{1}$ nên B nằm trên đường thẳng d_1 .

Do đó hai đường thẳng này luôn có điểm chung là B nên hai đường thẳng không thể song song.

Bài tập 2. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}, \Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$$

- A. Δ_1 song song với Δ_2 . B. Δ_1 chéo với Δ_2 .
C. Δ_1 cắt Δ_2 . D. Δ_1 trùng với Δ_2 .

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $\frac{2}{-1} \neq \frac{2}{-2}$ nên vector chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (2; 2; 3)$ của đường thẳng Δ_1 không cùng phương với vector chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-1; -2; 1)$ của Δ_2 .

Suy ra Δ_1 chéo với Δ_2 hoặc Δ_1 cắt Δ_2 .

Lấy $M(1; -1; 0) \in \Delta_1$, $N(3; 3; -2) \in \Delta_2$. Ta có $\overrightarrow{MN} = (2; 4; -2)$.

Khi đó $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] \cdot \overrightarrow{MN} = 0$.

Suy ra $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Vậy Δ_1 cắt Δ_2 .

Dạng 9: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

1. Phương pháp

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t & (1) \\ y = y_0 + a_2 t & (2) \\ z = z_0 + a_3 t & (3) \end{cases}$ và Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 25$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ mặt cầu $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R .

Chứng minh d luôn cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Bước 1: Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến đường thẳng d là Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; -2)$ và bán kính $R = 5$.

Đường thẳng d đi qua $M(-2; 2; -3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 3; 2)$.

$$h = d(I, d) = \frac{\left| [\overrightarrow{IM_0}, \vec{a}] \right|}{|\vec{a}|}$$

$$\text{Ta có } h = d(I, d) = \frac{\left| [\overrightarrow{IM}, \vec{u}] \right|}{|\vec{u}|} = 3.$$

Bước 2: So sánh $d(I, d)$ với bán kính R của mặt cầu: Vì $h < R$ nên d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

- Nếu $d(I, d) > R$ thì d không cắt (S) .
- Nếu $d(I, d) = R$ thì d tiếp xúc (S) .
- Nếu $d(I, d) < R$ thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N và MN vuông góc với đường kính (bán kính) mặt cầu (S) .

Phương pháp đại số

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu

Thế (1), (2), (3) vào phương trình (S) và rút gọn đưa về phương trình bậc hai theo t (*).

Hướng dẫn giải

• Nếu phương trình (*) vô nghiệm thì d không cắt (S).
Gọi M là giao điểm của (S) với trục Oz .
Ta có $M \in Oz$ nên $M(0;0;t)$.

• Nếu phương trình (*) có một nghiệm thì d tiếp xúc (S).
Mà $M \in (S)$ nên $0^2 + 0^2 + (t+2)^2 = 17$

• Nếu phương trình (*) có hai nghiệm thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N .
 $\Leftrightarrow (t+2)^2 = 17 \Leftrightarrow |t+2| = \sqrt{17} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 - \sqrt{17} \\ t = -2 + \sqrt{17} \end{cases}$

Chú ý: Để tìm tọa độ M, N ta thay giá trị t vào phương trình đường thẳng d .
Suy ra tọa độ các giao điểm là $A(0;0;-2-\sqrt{17})$,
 $B(0;0;-2+\sqrt{17}) \Rightarrow AB = 2\sqrt{17}$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng Δ có phương trình là $\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$.

Phương trình mặt cầu tâm A , cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC = 8$ là

- A. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$.
B. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.
C. $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 25$.
D. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi (S) là mặt cầu tâm $A(0;0;-2)$ và có bán kính R .

Đường thẳng Δ đi qua $M(-2;2;-3)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;3;2)$.

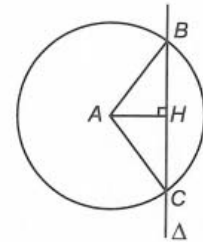
Gọi H là trung điểm BC nên $AH \perp BC$.

Ta có $AH = d(A, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.

Với $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (2; -2; 1) \\ \vec{u} = (2; 3; 2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} = (-7; -2; 10) \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + 10^2}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}} = 3$.

Bán kính mặt cầu (S) là: $R = AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.



Bài tập 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ và điểm $M(1;3;-1)$. Biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$.

Giá trị $2a+b+c$ bằng

A. $\frac{134}{25}$.

B. $\frac{116}{25}$.

C. $\frac{84}{25}$.

D. $\frac{62}{25}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và bán kính $R=3$.

Khi đó $IM=5 > R \Rightarrow M$ nằm ngoài mặt cầu.

Phương trình đường thẳng MI là
$$\begin{cases} x=1 \\ x=-1+4t \\ z=2-3t \end{cases}$$

Tâm $J(a;b;c)$ nằm trên MI nên $J(1;-1+4t;2-3t)$.

Xét $\triangle MHI$ vuông tại H có

$$MI=5; IH=3 \Rightarrow MH=\sqrt{MI^2-IH^2}=4.$$

Mặt khác
$$\begin{cases} M(1;3;-1) \\ J(1;-1+4t;2-3t) \end{cases} \Rightarrow MJ=\sqrt{(-4+4t)^2+(3-3t)^2}.$$

$$MJ.MI = MH^2 \Rightarrow MJ = \frac{16}{5}$$

$$\Leftrightarrow (-4+4t)^2 + (3-3t)^2 = \frac{256}{25}$$

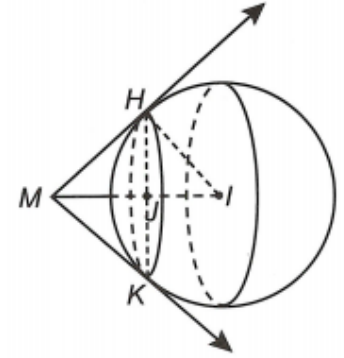
$$\Leftrightarrow 25t^2 - 50t + \frac{369}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{9}{25} \\ t = \frac{41}{25} \end{cases}.$$

Suy ra $J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$ hoặc $J\left(1; \frac{139}{25}; \frac{-73}{25}\right)$.

+) Với $J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$ thì $IJ = \frac{9}{5} < IM$ (nhận).

+) Với $J\left(1; \frac{139}{25}; \frac{-73}{25}\right)$ thì $IJ = \frac{41}{5} > IM$ (loại).

Vậy $J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$ nên $2a+b+c = \frac{84}{25}$.



Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{14}{3} \text{ và đường thẳng } d \text{ có phương trình } \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-4}{2}. \text{ Gọi}$$

$A(x_0; y_0; z_0)$, $x_0 > 0$ là điểm nằm trên đường thẳng d sao cho từ A kẻ được ba tiếp tuyến đến mặt cầu (S) có các tiếp điểm B, C, D sao cho $ABCD$ là tứ diện đều.

Giá trị của biểu thức $P = x_0 + y_0 + z_0$ là

A. 6.

B. 16.

C. 12.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

I là tâm mặt cầu thì $I(1; 2; 3)$.

Gọi O là giao điểm của mặt phẳng (BCD) và đoạn AI .

Vì theo giả thiết $AB = AC = AD$ và $IB = IC = ID = \sqrt{\frac{14}{3}}$ nên AI vuông góc với mặt phẳng (BCD) tại O . Khi đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$.

$$\text{Đặt } AI = x \left(x > \sqrt{\frac{14}{3}} \right).$$

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{AI^2 - IB^2} = \sqrt{x^2 - \frac{14}{3}}$$

$$IB^2 = IO \cdot IA \Rightarrow OI = \frac{14}{3x} \Rightarrow OB = \sqrt{IB^2 - IO^2} = \sqrt{\frac{14}{3} - \left(\frac{14}{3x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2OB \cdot OD \cdot \cos 120^\circ = 3OB^2$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{3}OB \Rightarrow BD = \sqrt{3}OB = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{14}{3} - \frac{196}{9x^2}\right)}$$

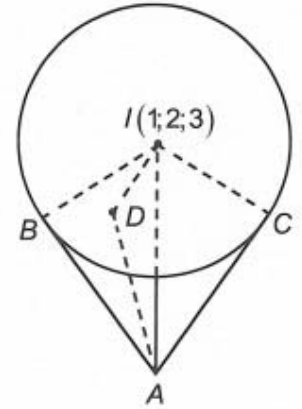
Do $ABCD$ là tứ diện đều nên

$$AB = BD \Rightarrow \sqrt{x^2 - \frac{14}{3}} = \sqrt{3 \left(\frac{14}{3} - \frac{196}{9x^2}\right)} \Leftrightarrow x^2 - \frac{14}{3} = 14 - \frac{196}{3x^2}$$

$$3x^4 - 56x^2 + 196 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{14}{3} \\ x^2 = 14 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{14}.$$

$A \in d$ nên $A(4+3t; 4+2t; 4+t)$.

$$\text{Suy ra } AI = \sqrt{14} \Leftrightarrow \sqrt{(4+3t-1)^2 + (4+2t-2)^2 + (4+t-3)^2} = \sqrt{14}$$



$$\Leftrightarrow |t+1|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4;4;4) \\ A(-2;0;2) \end{cases}.$$

Do $x_0 > 0$ nên điểm A có tọa độ $A(4;4;4)$.

Suy ra $P=12$.

Bài tập 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm P, Q, R lần lượt di động trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} + \frac{1}{OR^2} = \frac{1}{8}$. Biết mặt phẳng (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) cố định. Đường thẳng (d) thay đổi nhưng luôn đi qua

$M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và cắt (S) tại hai điểm A, B phân biệt. Diện tích lớn nhất của $\triangle AOB$ là

A. $\sqrt{15}$.

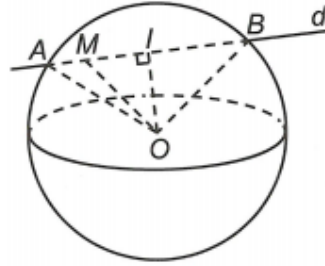
B. $\sqrt{5}$.

C. $\sqrt{17}$.

D. $\sqrt{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (PQR) .

$$\text{Dễ thấy } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} + \frac{1}{OR^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow OH = 2\sqrt{2}.$$

Khi đó (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm O , bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $OM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 0} = 1 < R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu (S) .

Gọi I là trung điểm của AB , do $\triangle OAB$ cân tại O nên $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OI \cdot AB$.

Đặt $OI = x$. Vì $OI \leq OM$ nên $0 < x \leq 1$ và $AB = 2\sqrt{8 - x^2}$.

$$\text{Ta có } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}x \cdot 2\sqrt{8 - x^2} = x\sqrt{8 - x^2} = \sqrt{8x^2 - x^4}.$$

Xét hàm số $f(x) = 8x^2 - x^4$, $0 < x \leq 1$.

Vì $f'(x) = 4x(4 - x^2) > 0$ với mọi $x \in (0; 1]$ nên $f(x) \leq f(1) = 7$.

Suy ra diện tích của $\triangle OAB$ lớn nhất bằng $\sqrt{7}$ đạt được khi M là trung điểm của AB .

Dạng 10: Một số bài toán cực trị

Bài tập 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2; -2; 1)$, $A(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm một vector chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

- A. $\vec{u} = (2; 2; -1)$. B. $\vec{u} = (1; 7; -1)$. C. $\vec{u} = (1; 0; 2)$. D. $\vec{u} = (3; 4; -4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Xét (P) là mặt phẳng qua M và $(P) \perp (d)$.

Mặt phẳng (P) qua $M(-2; -2; 1)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n}_p = \vec{u}_d = (2; 2; -1)$ nên có phương trình: $2x + 2y - z + 9 = 0$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và Δ .

Khi đó $AK \geq AH = \text{const}$ nên AK đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $K \equiv H$.

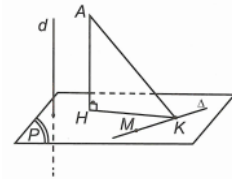
Đường thẳng AH đi qua $A(1; 2; -3)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (2; 2; -1)$ nên AH có phương

$$\text{trình tham số là } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

Vì $H \in AH$ nên $H(1+2t; 2+2t; -3-t)$.

Lại $H \in (P)$ nên $2(1+2t) + 2(2+2t) - (-3-t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow H(-3; -2; -1)$.

Vậy $\vec{u}_\Delta = \vec{HM} = (1; 0; 2)$.



Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ và điểm $A(5; 3; -2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N .

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.

- A. $S_{\min} = 30$. B. $S_{\min} = 20$. C. $S_{\min} = 5\sqrt{34} - 9$. D. $S_{\min} = \sqrt{34} - 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

