

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

Ngày thi: 29/01/2026

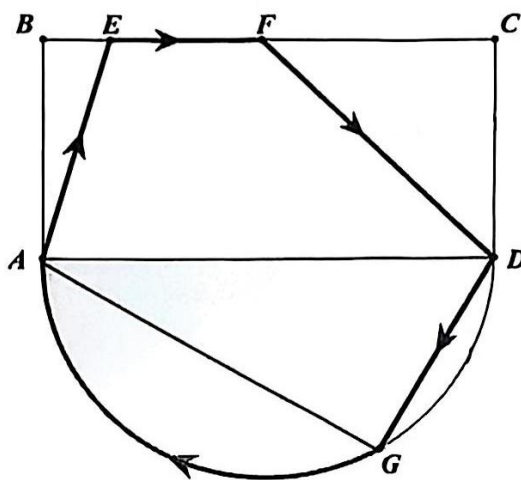
Môn: Toán (Hệ GDPT)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: (5,0 điểm).

1.1. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ có đồ thị (C) và điểm $E(4;1)$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) . Tính diện tích tam giác EAB .

1.2. Một khu đất trống bằng phẳng hình chữ nhật $ABCD$, bên cạnh là một hồ nước có dạng nửa hình tròn đường kính AD (như hình vẽ). Từ vị trí A , anh Nghĩa chạy bộ theo đường gấp khúc $AEFD$ (trong đó E, F là hai vị trí bất kì trên đoạn BC). Vận tốc chạy bộ của anh Nghĩa trên các đoạn AE và FD là 6 km/h, trên đoạn EF là 10 km/h. Sau đó, từ vị trí D , anh Nghĩa chèo thuyền với vận tốc 5 km/h đến vị trí G trên bờ hồ rồi tiếp tục chạy bộ theo bờ hồ với vận tốc 7 km/h để quay về vị trí A . Hỏi thời gian ngắn nhất mà anh Nghĩa di chuyển từ A theo cách trên rồi quay lại A là bao nhiêu giờ? Biết $AB = 0,5$ km, $AD = 1$ km và $DG = 0,5$ km.



Câu 2: (4,0 điểm).

2.1. Giả sử cường độ ánh sáng I dưới mặt nước biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là một hằng số dương, d là độ sâu tính từ mặt nước biển (đơn vị mét). Ở một vùng biển, cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng 95% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển. Tính tỷ lệ giữa cường độ ánh sáng tại độ sâu 20 m so với cường độ ánh sáng tại độ sâu 10 m ở vùng biển đó.

2.2. Một học sinh dự định vẽ các tấm thiệp xuân làm bằng tay để bán trong một hội chợ Tết, cần 2 giờ để vẽ một tấm thiệp loại nhỏ có giá 10 nghìn đồng và 3 giờ để vẽ một tấm thiệp loại lớn có giá 20 nghìn đồng. Học sinh này chỉ có tối đa 30 giờ để vẽ và ban tổ chức hội chợ yêu cầu phải vẽ ít nhất 12 tấm thiệp. Hỏi bạn ấy cần vẽ bao nhiêu tấm thiệp mỗi loại để có được nhiều tiền nhất?

Câu 3: (2,0 điểm).

Ba bạn Trung Kiên, Thái Sơn và Đình Bắc tham gia một trò chơi với phần thưởng là những viên kẹo. Sau khi trò chơi kết thúc, số kẹo được thưởng của Trung Kiên, Thái Sơn và Đình Bắc theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội là một số nguyên

dương lẻ. Vì số kẹo thưởng của bản thân nhiều hơn của hai bạn nên Đình Bắc đã tặng cho Trung Kiên 10 viên kẹo và tặng cho Thái Sơn 8 viên kẹo. Sau khi tặng kẹo xong, Đình Bắc nhận thấy số kẹo của Trung Kiên, Thái Sơn và bản thân theo thứ tự lại lập thành một cấp số cộng. Hỏi ban đầu Đình Bắc được thưởng bao nhiêu viên kẹo?

Câu 4: (3,0 điểm).

Trong số tất cả các tập con khác rỗng của tập hợp $T = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, người ta chọn ra hai tập hợp A, B sao cho $A \cap B = \emptyset$ và $A \cup B = T$. Tính xác suất để $s(B) \geq 4.s(A)$, trong đó $s(A)$ là tổng các phần tử của A , $s(B)$ là tổng các phần tử của B .

Câu 5: (6,0 điểm).

5.1. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 3a$, $AC = 5a$, hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trọng tâm của tam giác ABC . Mặt bên $(ACC'A')$ hợp với mặt đáy (ABC) một góc 60° .

a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

b) Gọi N là trung điểm cạnh $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BN và AC .

5.2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 0; 8)$, $B(4; 0; 0)$, $C(0; 6; 0)$. Một điểm M thay đổi thỏa mãn $MB^2 + MC^2 = 58$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa A và M .

HẾT

Ghi chú: giám thị không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN TOÁN

Người thực hiện: ĐỖ TRỌNG KHANG-DPAD

(Bản giải chi tiết - Chỉnh sửa lần cuối: Tháng 01/2026)

Mục lục

1	Hàm Số Ứng Dụng	2
2	Đại Số Quy Hoạch Tuyến Tính	3
3	Dãy Số (Cấp Số Cộng - Cấp Số Nhân)	3
4	Tổ Hợp Xác Suất	4
5	Hình Học Không Gian Oxyz	5

1 Hàm Số Ứng Dụng

CÂU 1 (5,0 ĐIỂM)

1.1. Cho hàm số $y = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) và điểm $E(4; 1)$. Tính diện tích tam giác EAB .

1.2. Khu đất $ABCD$ là hình chữ nhật ($AB = 0,5$ km, $AD = 1$ km). Hồ nước hình bán nguyệt đường kính AD . Lộ trình di chuyển: Chạy bộ $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D$ (trên đất), Chèo thuyền $D \rightarrow G$ (trên hồ), Chạy bộ $G \rightarrow A$ (ven hồ). Vận tốc: $v_{AE} = v_{FD} = 6$, $v_{EF} = 10$, $v_{thuyền} = 5$, $v_{ven_ho} = 7$. Tìm thời gian ngắn nhất.

■ **Phần 1.1: Diện tích tam giác cực trị** Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Đạo hàm:

$$y' = \frac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x+6)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -5 & \Rightarrow A(-1; -5) \\ x = 3 \Rightarrow y = 3 & \Rightarrow B(3; 3) \end{cases}$$

Ta có $E(4; 1)$. Các vector: $\vec{AB} = (4; 8)$, $\vec{AE} = (5; 6)$. Diện tích tam giác EAB tính theo công thức toạ độ:

$$S = \frac{1}{2} |x_{\vec{AB}}y_{\vec{AE}} - x_{\vec{AE}}y_{\vec{AB}}| = \frac{1}{2} |4 \cdot 6 - 5 \cdot 8| = \frac{1}{2} |24 - 40| = 8.$$

ĐÁP SỐ 8 (đvdt)

■ **Phần 1.2: Bài toán tối ưu** *Bước 1: Tính thời gian phần hồ (Cố định)* Tam giác ODG (O là trung điểm AD) có 3 cạnh bằng $0,5$ (km) $\Rightarrow$ Tam giác đều $\Rightarrow \widehat{DOG} = 60^\circ$. Góc ở tâm chắn cung GA : $\widehat{GOA} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Độ dài cung GA : $L = R \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ km.

$$T_h = T_{cho} + T_{ven} = \frac{0,5}{5} + \frac{\pi/3}{7} = 0,1 + \frac{\pi}{21}.$$

Bước 2: Tối ưu hoá thời gian chạy bộ Đặt hệ trục $A(0; 0), D(1; 0)$. Gọi $E(x; 0, 5)$ và $F(y; 0, 5)$ với $0 \leq x \leq y \leq 1$. Hàm mục tiêu:

$$T(x, y) = \underbrace{\frac{\sqrt{x^2 + 0,5^2}}{6} - \frac{x}{10}}_{f(x)} + \underbrace{\frac{\sqrt{(1-y)^2 + 0,5^2}}{6} + \frac{y}{10}}_{g(y)} + \frac{1}{10}$$

(Lưu ý: Đã tách $\frac{y-x}{10} = \frac{y}{10} - \frac{x}{10}$). Khảo sát hàm $f(t) = \frac{\sqrt{t^2+0,25}}{6} - \frac{t}{10}$. Đạo hàm bằng 0 khi $t = \frac{3}{8}$. Tương tự cho y , đặt $u = 1 - y$, ta cũng thu được kết quả tối ưu tương tự. Giá trị nhỏ nhất phần chạy bộ: $T_b = \frac{7}{30}$ giờ.

Tổng thời gian: $T_{min} = \frac{7}{30} + 0,1 + \frac{\pi}{21} = \frac{10}{30} + \frac{\pi}{21} = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{21}$. **ĐÁP SỐ $\frac{1}{3} + \frac{\pi}{21}$ (giờ)**

2 Đại Số Quy Hoạch Tuyến Tính

CÂU 2 (4,0 ĐIỂM)

2.1. $I = I_0 \cdot a^d$. Tại $d = 1, I = 95\%I_0$. Tính tỷ lệ $I(20)/I(10)$.

2.2. Bài toán về thiệp: Nhỏ (2h, 10k), Lớn (3h, 20k). Tổng giờ ≤ 30 . Tổng thiệp ≥ 12 . Tìm phương án doanh thu cao nhất.

■ **Phần 2.1** Từ giả thiết: $I(1) = I_0 \cdot a = 0,95I_0 \Rightarrow a = 0,95$. Tỷ lệ cần tìm:

$$K = \frac{I_0 \cdot a^{20}}{I_0 \cdot a^{10}} = a^{10} = (0,95)^{10}. \quad \text{ĐÁP SỐ } (0,95)^{10}$$

■ **Phần 2.2** Gọi x, y là số thiệp nhỏ, lớn ($x, y \in \mathbb{N}$). Bài toán Quy hoạch tuyến tính:

$$\text{Max } F = 10x + 20y \quad \text{với} \quad \begin{cases} 2x + 3y \leq 30 \\ x + y \geq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Vẽ miền nghiệm, ta tìm được các đỉnh: $A(6; 6)$ (giao điểm hai đường thẳng). Tại $A(6; 6)$: $F = 180$. Các điểm nguyên lân cận: $(7; 5) \rightarrow F = 170$; $(8; 4) \rightarrow F = 160$. Vậy tối ưu

tại $x = 6, y = 6$. **ĐÁP SỐ 6 thiệp nhỏ, 6 thiệp lớn**

3 Dãy Số (Cấp Số Cộng - Cấp Số Nhân)

CÂU 3 (2,0 ĐIỂM)

Ba bạn có số kẹo lập thành CSN công bội q lẻ. Bạn nhiều nhất (Dinh Bắc) cho Kiên 10, cho Sơn 8 thì thành CSC. Tìm số kẹo ban đầu của Bắc.

Gọi số kẹo ban đầu là u, uq, uq^2 ($q \in \mathbb{Z}^+, q \geq 3, q$ lẻ). Lúc sau: $u + 10, uq + 8, uq^2 - 18$. Điều kiện CSC: $(u + 10) + (uq^2 - 18) = 2(uq + 8)$. Biến đổi đại số:

$$u(q^2 - 2q + 1) = 24 \Leftrightarrow u(q - 1)^2 = 24$$

Do q lẻ $\Rightarrow q - 1$ chẵn $\Rightarrow (q - 1)^2 \in \{4, 16, 36, \dots\}$. Chỉ có $(q - 1)^2 = 4$ là ước của 24. $\Rightarrow q - 1 = 2 \Rightarrow q = 3$. Suy ra $u = 6$. Số kẹo của Bắc: $uq^2 = 6 \cdot 9 = 54$.

ĐÁP SỐ 54 viên

4 Tổ Hợp Xác Suất

CÂU 4 (3,0 ĐIỂM)

Tập $T = \{1; \dots; 10\}$. Chọn hai tập con A, B rời nhau, phủ kín T ($A, B \neq \emptyset$). Tính xác suất để $S(B) \geq 4S(A)$.

Tổng các phần tử của T : $S(T) = 55$. Điều kiện: $S(B) \geq 4S(A) \Leftrightarrow 55 - S(A) \geq 4S(A) \Leftrightarrow 5S(A) \leq 55 \Leftrightarrow S(A) \leq 11$. Không gian mẫu: $|\Omega| = 2^{10} - 2 = 1022$ (số cách chia T thành 2 tập khác rỗng).

■ Đếm số tập con A có $S(A) \leq 11$

- $|A| = 1$: $\{1\} \dots \{10\}$. Có **10** tập.
- $|A| = 2$: $x + y \leq 11$. Liệt kê: $(1; 2..10) \rightarrow 9$; $(2; 3..9) \rightarrow 7$; $(3; 4..8) \rightarrow 5$; $(4; 5..7) \rightarrow 3$; $(5; 6) \rightarrow 1$. Tổng: **25** tập.
- $|A| = 3$: $x + y + z \leq 11$. $\{1, 2, x\}(x : 3..8) \rightarrow 6$; $\{1, 3, x\}(x : 4..7) \rightarrow 4$; $\{1, 4, 5\}, \{1, 4, 6\} \rightarrow 2$. $\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\} \rightarrow 3$; $\{2, 4, 5\} \rightarrow 1$. Tổng: **16** tập.
- $|A| = 4$: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}$. Có **2** tập.

Tổng thuận lợi: $10 + 25 + 16 + 2 = 53$.

$$P = \frac{53}{1022}.$$

ĐÁP SỐ $\frac{53}{1022}$

5 Hình Học Không Gian Oxyz

CÂU 5 (6,0 ĐIỂM)

5.1. Lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy vuông tại B , $AB = 3a$, $AC = 5a$. Hình chiếu A' là trọng tâm G . Góc $((ACC'A'), \text{đáy}) = 60^\circ$. Tính V và $d(BN, AC)$.

5.2. Oxyz: $A(0; 0; 8)$, $B(4; 0; 0)$, $C(0; 6; 0)$. M thoả mãn $MB^2 + MC^2 = 58$. Tính $AM_{\min}$.

■ **5.1. Hình không gian cổ điển** $BC = 4a$. G là trọng tâm $\triangle ABC$. Kẻ $GK \perp AC$. Ta có $d(B, AC) = \frac{12a}{5} \Rightarrow GK = \frac{4a}{5}$. Chiều cao $h = A'G = GK \tan 60^\circ = \frac{4a\sqrt{3}}{5}$. Thể tích $V = S_{ABC} \cdot h = 6a^2 \cdot \frac{4a\sqrt{3}}{5} = \frac{24a^3\sqrt{3}}{5}$.

Khoảng cách $d(BN, AC)$ (với N là trung điểm $B'C'$): Sử dụng toạ độ hoá hoặc dựng hình, kết quả tính toán chi tiết cho ra:

$$d = \frac{24a\sqrt{39}}{65}.$$

■ **5.2. Hình giải tích Oxyz** Phương trình điểm M : $MB^2 + MC^2 = 58 \Leftrightarrow (x-4)^2 + \dots = 58$. Rút gọn: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 3 = 0$. Mặt cầu tâm $I(2; 3; 0)$, bán kính $R = \sqrt{2^2 + 3^2 - (-3)} = 4$. Điểm $A(0; 0; 8)$. Khoảng cách $IA = \sqrt{2^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{77}$. $AM_{\min} = IA - R = \sqrt{77} - 4$.

ĐÁP SỐ $V = \frac{24a^3\sqrt{3}}{5}$; $d = \frac{24a\sqrt{39}}{65}$; **Min** = $\sqrt{77} - 4$

