

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Mục lục của chương

Bài 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn	62
Bài 2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn	71
Bài 3. Ôn tập chương 2	82
Lời giải - Hướng dẫn - Đáp số chương 2	98

1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. KHÁI NIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng

$$ax + by + c < 0; \quad ax + by + c > 0; \quad ax + by + c \leq 0; \quad ax + by + c \geq 0,$$

trong đó a, b, c là những số cho trước; a, b không đồng thời bằng 0 và x, y là các ẩn.



Ví dụ 1



Bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y ?

a) $2x - 3y + 1 < 0$;

b) $-x - y + 1 \geq 0$;

c) $x + y^2 - 1 > 0$.

Hướng dẫn giải.

- ◇ Các bất phương trình ở câu a), b) là các bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y .
- ◇ Bất phương trình ở câu c) không phải bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y vì có chứa y^2 .



① Tìm các bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y trong các bất phương trình dưới đây.

a) $3x + y + 2025 < 0$;

c) $y \leq 0$;

e) $10 + y - 5 > 0$;

b) $-x - y + 2024^2 \geq 0$;

d) $x^2 + 5y - 3 \leq 0$;

f) $x + 2y - 3 = 0$.

II. NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



Xét bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là một **ng nghiệm** của bất phương trình đã cho.



Lưu ý. Nghiệm của các bất phương trình

$$ax + by + c > 0; \quad ax + by + c \leq 0; \quad ax + by + c \geq 0$$

được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 2



Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $4x - 7y - 28 \geq 0$?

- a) (9;1) b) (2;6) c) (0;-4)

Lời giải.

- a) Vì $4 \cdot 9 - 7 \cdot 1 - 28 = 36 - 7 - 28 = 1 > 0$ nên (9;1) là nghiệm của bất phương trình $4x - 7y - 28 \geq 0$.
- b) Vì $4 \cdot 2 - 7 \cdot 6 - 28 = 8 - 42 - 28 = -62 < 0$ nên (2;6) không phải là nghiệm của bất phương trình $4x - 7y - 28 \geq 0$.
- c) Vì $4 \cdot 0 - 7 \cdot (-4) - 28 = 0 + 28 - 28 = 0$ nên (0;-4) là nghiệm của bất phương trình $4x - 7y - 28 \geq 0$.

Vậy các cặp số là nghiệm của bất phương trình đã cho là: (9;1) và (0;-4).

Ví dụ 3



Cho biết mỗi 100 g thịt bò chứa khoảng 26,1 g protein, một quả trứng nặng 44 g chứa khoảng 5,7 g protein (nguồn: <https://www.vinmec.com>). Giả sử có một người mỗi ngày cần không quá 60 g protein. Gọi số gam thịt bò và số quả trứng mà người đó ăn trong một ngày lần lượt là x và y .

- a) Lập bất phương trình theo x, y diễn tả giới hạn về lượng protein trong khẩu phần ăn hàng ngày của người đó.
- b) Dùng bất phương trình ở câu a) để trả lời hai câu hỏi sau:
- ◇ Nếu người đó ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng (mỗi quả 44 g) trong một ngày thì có phù hợp không?
 - ◇ Nếu người đó ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng (mỗi quả 44 g) trong một ngày thì có phù hợp không?

Lời giải.

- a) Số gam protein trong 1 g thịt bò là: $26,1 \div 100 = 0,261$ (g).
Số gam protein trong x gam thịt bò là: $0,261x$ (g).
Số gam protein trong y quả trứng là: $5,7y$ (g).

Khi đó, tổng lượng protein người đó ăn trong một ngày là: $0,261x + 5,7y$ (g).

Theo giả thiết, người đó cần không quá 60 g protein mỗi ngày nên ta có bất phương trình:

$$0,261x + 5,7y \leq 60.$$

b) $\diamond$ Với $x = 150, y = 2$:

$$0,261 \cdot 150 + 5,7 \cdot 2 = 39,15 + 11,4 = 50,55 < 60.$$

Vậy $(150; 2)$ là nghiệm của bất phương trình.

$\Rightarrow$ Nếu người đó ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng thì phù hợp.

$\diamond$ Với $x = 200, y = 2$:

$$0,261 \cdot 200 + 5,7 \cdot 2 = 52,2 + 11,4 = 63,6 > 60.$$

Vậy $(200; 2)$ không là nghiệm của bất phương trình.

$\Rightarrow$ Nếu người đó ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng thì không phù hợp.



② Cho bất phương trình $x + 4y - 5 \leq 0$.

Cặp số $\left(-\frac{3}{2}; 2\right)$ có là nghiệm của bất phương trình đã cho không? Hãy tìm thêm hai nghiệm khác nữa của bất phương trình này.



③ Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng 60m^2 . Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,5\text{m}^2$, một chiếc bàn là $1,2\text{m}^2$. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là 12m^2 .

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

III. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là **miền nghiệm** của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Mỗi phương trình $ax + by + c = 0$ (a, b không đồng thời bằng 0) xác định một đường thẳng Δ . Đường thẳng Δ chia mặt phẳng tọa độ Oxy thành hai nửa mặt phẳng, trong đó một nửa (không kể bờ Δ) là tập hợp các điểm $(x; y)$ thỏa mãn $ax + by + c > 0$, nửa còn lại (không kể bờ Δ) là tập hợp các điểm $(x; y)$ thỏa mãn $ax + by + c < 0$.

Ta có thể biểu diễn miền nghiệm của BPT bậc nhất hai ẩn $ax + by + c < 0$ như sau:



◇ **Bước 1:** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.

◇ **Bước 2:** Lấy một điểm $(x_0; y_0)$ không thuộc Δ . Tính giá trị $ax_0 + by_0 + c$.

◇ **Bước 3:** Kết luận

☆ Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) chứa điểm $(x_0; y_0)$.

☆ Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) không chứa điểm $(x_0; y_0)$.



🔔 **LƯU Ý.** Đối với các bất phương trình bậc nhất hai ẩn dạng $ax + by + c \leq 0$ (hoặc $ax + by + c \geq 0$) thì miền nghiệm là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$ (hoặc $ax + by + c > 0$) kể cả bờ.

🔑 Ví dụ 4



Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $2x + y - 2 \leq 0$;

b) $x - y - 2 \geq 0$.

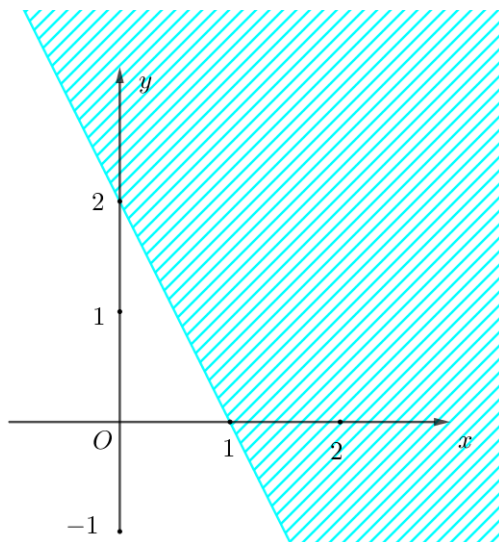
🔑 Hướng dẫn giải.

a) Vẽ đường thẳng $\Delta: 2x + y - 2 = 0$ đi qua hai điểm $A(0; 2)$ và $B(1; 0)$.

Xét gốc tọa độ O , ta thấy $O \notin \Delta$ và $2 \cdot 0 + 0 - 2 = -2 < 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng, kể cả bờ Δ , chứa gốc tọa độ O .

(Miền không gạch chéo trên hình)

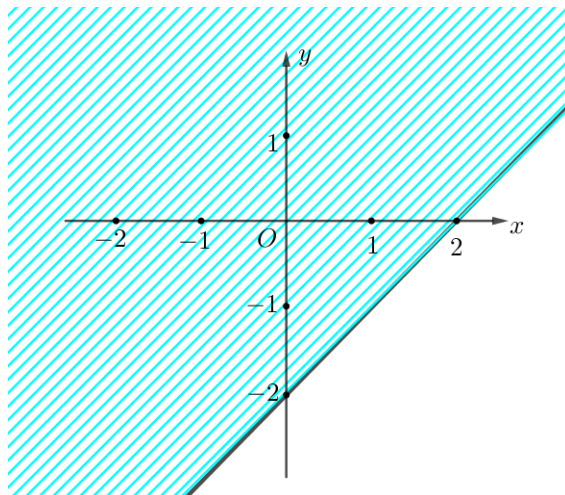


b) Vẽ đường thẳng $\Delta: x - y - 2 = 0$ đi qua hai điểm $A(0; -2)$ và $B(2; 0)$.

Xét gốc tọa độ O , ta thấy $O \notin \Delta$ và $0 - 0 - 2 = -2 < 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng, kể cả bờ Δ , không chứa gốc tọa độ O .

(Miền không gạch chéo trên hình)



④ Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

- a) $x - 2y + 5 > 0$; b) $x + 2y \leq 0$; c) $y \geq 2$; d) $x \leq 4$.



⑤ Sản phẩm của một công ty có hai loại là loại đơn giản và loại cao cấp. Mỗi loại đơn giản cần 2 giờ và mỗi loại cao cấp cần 3 giờ để sơn màu. Công ty đã giao công việc cho một người thợ sơn và người này làm việc tối đa 40 giờ/tuần.

- a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y thể hiện điều kiện ràng buộc để có thể sơn x mẫu đơn giản và y mẫu cao cấp trong một tuần.
b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình tìm được ở câu a).

BÀI TẬP



1 Bài tập tự luận

 **Bài 1.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x - 2y + 6 > 0$.

- a) $(0; 0)$ có phải là một nghiệm của bất phương trình đã cho không?
b) Chỉ ra ba cặp số $(x; y)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.
c) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

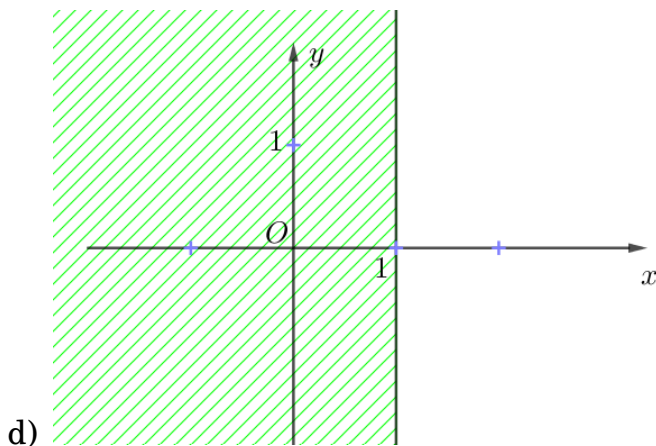
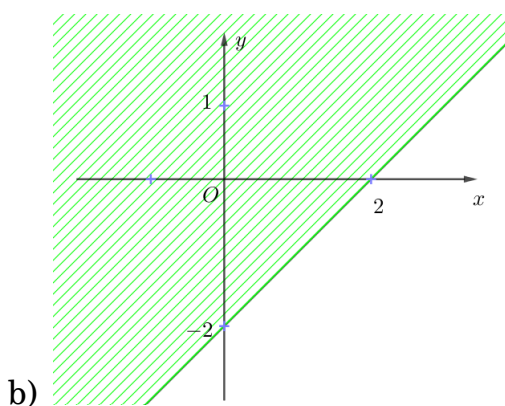
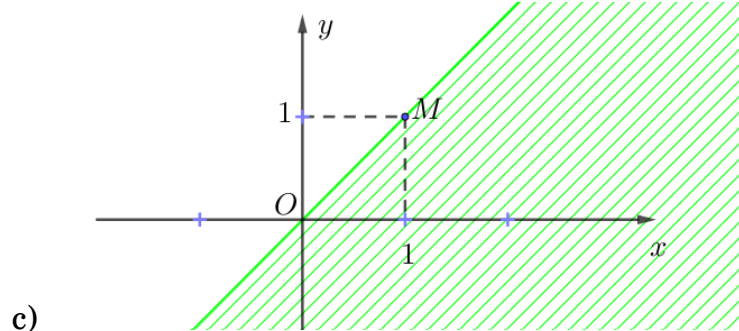
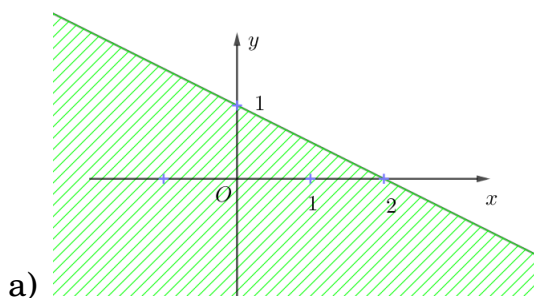
 **Bài 2.** Biểu diễn tập nghiệm của các BPT sau trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

- a) $-x + y + 2 > 0$; b) $y + 2 \geq 0$; c) $-x + 2 \leq 0$.

 **Bài 3.** Biểu diễn miền nghiệm của các BPT sau trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

- a) $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$; b) $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$.

Bài 4. Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể đường thẳng d) ở mỗi Hình a, b, c là miền nghiệm của bất phương trình nào?



Bài 5. Bạn Cúc muốn pha hai loại nước cam. Để pha một lít nước cam loại I cần 30g bột cam, còn một lít nước cam loại II cần 20g bột cam. Gọi x và y lần lượt là số lít nước cam loại I và II pha chế được. Biết rằng Cúc chỉ có thể dùng không quá 100g bột cam. Hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước cam loại I và II mà bạn Cúc có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình đó trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

Bài 6. Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng $60m^2$. Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,5m^2$, một chiếc bàn là $1,2m^2$. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là $612m^2$.

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

Bài 7. Bạn Nga muốn pha hai loại nước rửa xe. Để pha một lít loại I cần $600ml$ dung dịch chất tẩy rửa, loại II chỉ cần $400ml$. Gọi x và y lần lượt là số lít nước rửa xe loại I và II pha chế được, và biết rằng Nga chỉ có $2400ml$ chất tẩy rửa. Hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước rửa xe loại I và II mà bạn Nga có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của từng bất phương trình đó lên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Bài 8. Trong 1 lạng (100g) thịt bò chứa khoảng 26g protein, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20g protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu 46g protein. (Nguồn: <https://vinmec.com> và <https://thanhnien.vn>). Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày.

- Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày.
- Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

Bài 9. Một cửa hàng bán lẻ bán hai loại hạt cà phê. Loại thứ nhất giá 140 nghìn đồng/kg và loại thứ hai giá 180 nghìn đồng/kg. Cửa hàng trộn x kg loại thứ nhất và y kg loại thứ hai sao cho hạt cà phê đã trộn có giá không quá 170 nghìn đồng/kg.

- Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y thỏa mãn điều kiện đề bài.
- Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình tìm được ở câu a) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Bài 10. Ông An muốn thuê một chiếc ô tô (có lái xe) trong một tuần. Giá thuê xe được cho như bảng sau:

	Phí cố định (nghìn đồng/ngày)	Phí tính theo quãng đường di chuyển (nghìn đồng/km)
Thứ Hai đến thứ Sáu	900	8
Thứ Bảy và Chủ nhật	1500	10

- Gọi x và y lần lượt là số kilômét ông An đi trong các ngày từ thứ Hai đến thứ Sáu và trong hai ngày cuối tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa x và y sao cho tổng số tiền ông An phải trả không quá 14 triệu đồng.
- Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình ở câu a) trên mặt phẳng tọa độ.



Câu hỏi trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Bất phương trình nào dưới đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- (A) $2x^2 - 3x \geq 1$. (B) $2x + y \leq 1$.
(C) $3x + y^2 + 1 \leq 0$. (D) $3x + y = 1$.

❖ **Câu 2.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $2x - y + 1 < 0$?

- (A) $(0; -1)$. (B) $(3; 5)$. (C) $(1; 4)$. (D) $(2; -1)$.

❖ **Câu 3.** Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của bất phương trình $2x + 3y - 1 > 0$?

- (A) $(-2; 3)$. (B) $(-1; 4)$. (C) $(4; 0)$. (D) $(-1; 0)$.

❖ **Câu 4.** Miền nghiệm của bất phương trình $3x + 2(y + 3) > 4(x + 1) - y + 3$ là phần mặt phẳng chứa điểm nào?

- (A) $(3; 0)$. (B) $(3; 1)$. (C) $(1; 1)$. (D) $(0; 0)$.

❖ **Câu 5.** Miền nghiệm của bất phương trình $5(x + 2) - 9 < 2x - 2y + 7$ là phần mặt phẳng **không** chứa điểm nào?

- (A) $(-2; 1)$. (B) $(2; 3)$. (C) $(2; -1)$. (D) $(0; 0)$.

❖ **Câu 6.** Cho đường thẳng $d : 7x - 9y + 2 = 0$ chia mặt phẳng tọa độ làm hai nửa mặt phẳng, trong đó miền nghiệm của bất phương trình $7x - 9y + 2 > 0$ là nửa mặt phẳng

- (A) có bờ là đường thẳng d và không chứa điểm $O(0; 0)$.
(B) không có bờ d và chứa điểm $O(0; 0)$.
(C) có bờ là đường thẳng d và chứa điểm $O(0; 0)$.
(D) không chứa bờ d và không chứa điểm $O(0; 0)$.

❖ **Câu 7.** Cặp số $(9; 8)$ là một nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- (A) $2x - 5y - 1 > 0$. (B) $x - y < 0$.
(C) $x + 3y - 5 < 0$. (D) $2x - y + 1 \geq 0$.

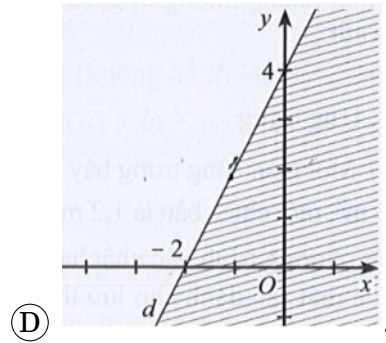
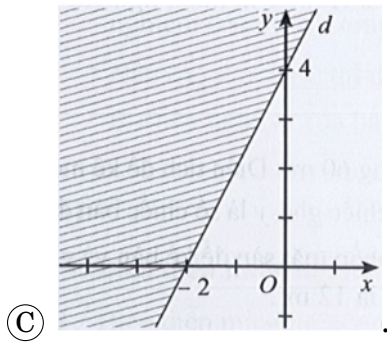
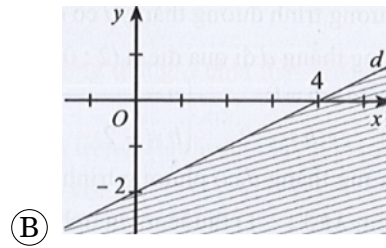
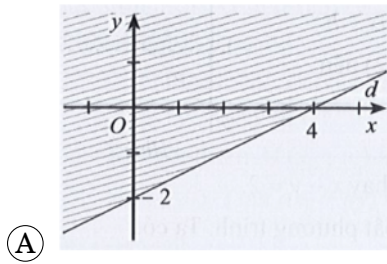
❖ **Câu 8.** Tìm m để $mx - 3y < 2$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- (A) $m \in \mathbb{R}$. (B) $m \neq 0$. (C) $m > 0$. (D) $m < 0$.

❖ **Câu 9.** Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $(m^2 - 1)x + (2 - 2m)y > 2$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

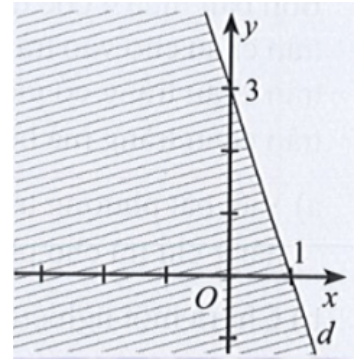
- (A) $m \neq 1$. (B) $m \neq \pm 1$. (C) $m = 1$. (D) $m = -1$.

❖ **Câu 10.** Miền nghiệm của bất phương trình $x - 2y < 4$ được xác định bởi miền nào (nửa mặt phẳng không bị gạch và không kể d) sau đây?



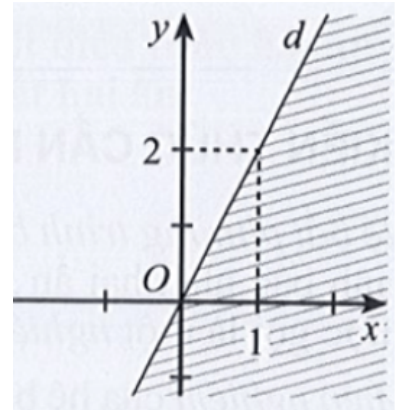
❖ **Câu 11.** Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể d) ở hình bên là miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- (A) $3x + y < 3$. (B) $x + 3y > 3$. (C) $x + 3y < 3$. (D) $3x + y > 3$.



❖ **Câu 12.** Nửa mặt phẳng không bị gạch (kể cả d) ở hình bên là miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- (A) $2x - y \leq 0$. (B) $2x - y \geq 0$. (C) $x - 2y \geq 0$. (D) $x - 2y \leq 0$.



I. KHÁI NIỆM HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



- ♦ **Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn** là hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y . Mỗi nghiệm chung của tất cả các bất phương trình đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.
- ♦ Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn được gọi là **miền nghiệm** của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ 1

Cặp số $(1; -2)$ có là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau đây không?

$$\begin{cases} y + 2 > 0 \\ x - 2 \leq 0 \\ 2y - 6 < 0. \end{cases}$$

Lời giải. Thay $x = 1, y = -2$ vào các bất phương trình của hệ, ta có:

$-2 + 2 > 0$ là mệnh đề đúng; $1 - 2 \leq 0$ là mệnh đề đúng; $2 \cdot (-2) - 6 < 0$, tức $-10 < 0$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(1; -2)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



① Hãy chỉ ra 3 nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - 3y - 10 < 0 \end{cases}.$$

II. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ Oxy , ta thực hiện như sau:

- ◇ Trên cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ.
- ◇ Phần giao của các miền nghiệm là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

Ví dụ 2

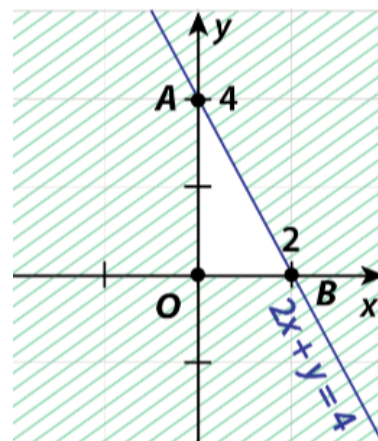


Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y - 4 \leq 0. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải.

- ✎ Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên mặt phẳng tọa độ Oxy .
- ✎ Miền không bị gạch (gồm miền trong tam giác OAB và các cạnh của nó) ở Hình bên là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



Ví dụ 3

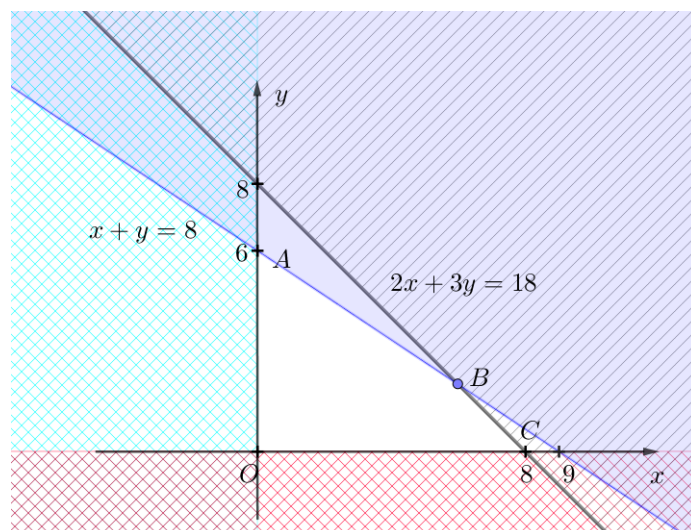


Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải.

- ➡ Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên mặt phẳng tọa độ Oxy .
- ➡ Miền không gạch chéo (miền tứ giác $OABC$, bao gồm cả các cạnh) trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm cũng là phần biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



🔔 **LƯU Ý.** Trong mặt phẳng tọa độ, miền bao gồm một đa giác lồi và phần nằm bên trong đa giác đó được gọi là **miền đa giác**.
 Chẳng hạn, miền nghiệm của hệ bất phương trình trong Ví dụ 2 là miền tam giác OAB , trong ví dụ 3 là tứ giác $OABC$.



② Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x - 2y - 6 \geq 0 \\ 4x + y - 4 \leq 0. \end{cases}$$



③ Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \\ x + y \leq 100 \\ 2x + y < 120. \end{cases}$$

III. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT HOẶC GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC $F = ax + by$ TRÊN MỘT MIỀN ĐA GIÁC

• Hệ bất phương trình giúp ta mô tả được nhiều bài toán thực tế để tìm ra cách giải quyết tối ưu. Chúng thường được đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác.

• Người ta chứng minh được $F = ax + by$ đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của đa giác.

Ví dụ 4



Một công ty cần thuê xe vận chuyển ít nhất 140 người và 9 tấn hàng hoá. Nơi cho thuê xe có hai loại: A và B. Một chiếc xe loại A có thể chở 20 người và 0,6 tấn hàng hoá. Một chiếc xe loại B có thể chở 10 người và 1,5 tấn hàng hoá. Gọi x là số xe loại A và y là số xe loại B mà công ty này thuê.

- Viết một hệ bất phương trình ẩn x, y thỏa mãn tất cả các điều kiện đã cho.
- Giải bài toán bằng cách biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó và xác định tọa độ các đỉnh của miền nghiệm này.
- Giả sử chi phí thuê một chiếc xe loại A là 4 triệu đồng, loại B là 3 triệu đồng. Công ty này phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí là thấp nhất?

Hướng dẫn giải.

- Vì mỗi chỗ thuê xe chỉ có 10 xe loại A và 9 xe loại B nên ta có:

$$x, y \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 9.$$

Vì công ty này cần vận chuyển **ít nhất** 140 người và 9 tấn hàng hoá nên ta có:

$$20x + 10y \geq 140, \quad 0,6x + 1,5y \geq 9.$$

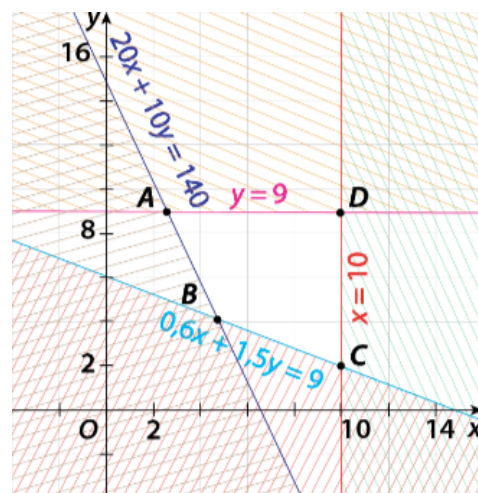
Vậy hệ bất phương trình cần tìm là:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x + 10y \geq 140 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9. \end{cases}$$

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , miền nghiệm của hệ bất phương trình.

Các đỉnh của tứ giác là:

$$A\left(\frac{5}{2}; 9\right), \quad B(5; 4), \quad C(10; 2), \quad D(10; 9).$$



c) Chi phí thuê xe là:

$$F(x, y) = 4x + 3y \text{ (triệu đồng)}.$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $F(x, y)$ tại các đỉnh của tứ giác trên:

$$F\left(\frac{5}{2}; 9\right) = 37, \quad F(10; 9) = 67, \quad F(5; 4) = 32, \quad F(10; 2) = 46.$$

Giá trị nhỏ nhất là $F(5; 4) = 32$ khi công ty thuê $x = 5$, $y = 4$.

Vậy công ty nên thuê 5 chiếc xe loại A và 4 chiếc xe loại B để chi phí là thấp nhất.

Ví dụ 5

Một người dùng ba loại nguyên liệu A, B, C để sản xuất ra hai loại sản phẩm P và Q . Để sản xuất 1 kg mỗi loại sản phẩm P hoặc Q phải dùng một số kilôgam nguyên liệu khác nhau. Tổng số kilôgam nguyên liệu mỗi loại mà người đó có và số kilôgam từng loại nguyên liệu cần thiết để sản xuất ra 1 kg sản phẩm mỗi loại được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Số kilôgam nguyên liệu đang có	Số kilôgam từng loại nguyên liệu cần để sản xuất 1 kg sản phẩm	
		P	Q
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

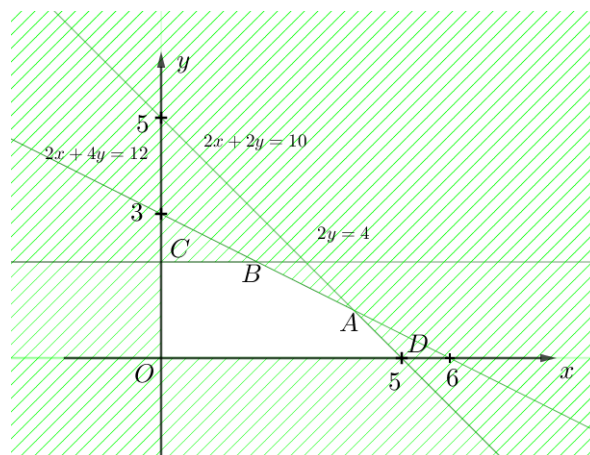
Biết 1 kg sản phẩm P có lợi nhuận 3 triệu đồng và 1 kg sản phẩm Q có lợi nhuận 5 triệu đồng. Lập phương án sản xuất hai loại sản phẩm trên sao cho có lãi cao nhất.

 *Hướng dẫn giải.* Gọi x là số kilôgam sản phẩm P , y là số kilôgam sản phẩm Q cần sản xuất. Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x + 4y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy , ta được như hình bên.

Miền nghiệm là ngũ giác $OCBAD$ với các đỉnh: $O(0;0)$; $C(0;2)$; $B(2;2)$; $A(4;1)$; $D(5;0)$.



Gọi F là số tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) thu được, ta có: $F = 3x + 5y$.

Tính giá trị F tại các đỉnh của ngũ giác:

- ◇ Tại $O(0;0)$: $F = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$;
- ◇ Tại $A(4;1)$: $F = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 17$;
- ◇ Tại $C(0;2)$: $F = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 10$;
- ◇ Tại $D(5;0)$: $F = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = 15$.
- ◇ Tại $B(2;2)$: $F = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 16$;

F đạt giá trị lớn nhất bằng 17 tại điểm $A(4;1)$.

Vậy người đó cần sản xuất 4 kg sản phẩm P và 1 kg sản phẩm Q để có lãi cao nhất là 17 triệu đồng.



④ Bác Năm dự định trồng khoai lang và khoai mì trên mảnh đất có diện tích 8 ha. Nếu trồng 1 ha khoai lang thì cần 10 ngày công và thu được 20 triệu đồng. Nếu trồng 1 ha khoai mì thì cần 15 ngày công và thu được 25 triệu đồng. Bác Năm cần trồng bao nhiêu hecta cho mỗi loại cây để thu được nhiều tiền nhất? Biết rằng, bác Năm chỉ có thể sử dụng được không quá 90 ngày công cho việc trồng khoai lang và khoai mì.

BÀI TẬP



1

Bài tập tự luận

Bài 1. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau:

a)

$$\begin{cases} x + y - 3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x + y - 5 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bài 2. Xét hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 3x + 2y \leq 12 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.

b) Tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình sao cho $F = 3x + 7y$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = 4x - 3y$ trên

miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + y \geq -4 \\ x + y \leq 5 \\ x - y \leq 5 \\ x - y \geq -4 \end{cases}.$$

Bài 4. Một người bán nước giải khát đang có 24 g bột cam, 9 l nước và 210 g đường để pha chế hai loại nước cam A và B. Để pha chế 1 l nước cam loại A cần 30 g đường, 1 l nước và 1 g bột cam; để pha chế 1 l nước cam loại B cần 10 g đường, 1 l nước và 4 g bột cam. Mỗi lít nước cam loại A bán được 60 nghìn đồng, mỗi lít nước cam loại B bán được 80 nghìn đồng. Người đó nên pha chế bao nhiêu lít nước cam mỗi loại để có doanh thu cao nhất?

Bài 5. Anh Trung có kế hoạch đầu tư 400 triệu đồng vào hai khoản X và Y. Để đạt được lợi nhuận thì khoản X phải đầu tư ít nhất 100 triệu đồng và số tiền đầu tư cho khoản Y không nhỏ hơn số tiền cho khoản X. Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để mô tả hai khoản đầu tư đó và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình vừa tìm được.

Bài 6. Một nhà máy sản xuất hai loại thuốc trừ sâu nông nghiệp là A và B. Cứ sản xuất mỗi thùng loại A thì nhà máy thải ra 0,25 kg khí cacbon dioxide (CO_2) và 0,6 kg khí sulfur dioxide (SO_2), sản xuất mỗi thùng loại B thì thải ra 0,5 kg CO_2 và 0,2 kg SO_2 . Biết rằng, quy định hạn chế sản lượng CO_2 của nhà máy tối đa là 75 kg và SO_2 tối đa là 90 kg mỗi ngày.

- Tìm hệ bất phương trình mô tả số thùng của mỗi loại thuốc trừ sâu mà nhà máy có thể sản xuất mỗi ngày để đáp ứng các điều kiện hạn chế trên. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó trên mặt phẳng tọa độ.
- Việc nhà máy sản xuất 100 thùng loại A và 80 thùng loại B mỗi ngày có phù hợp với quy định không?
- Việc nhà máy sản xuất 60 thùng loại A và 160 thùng loại B mỗi ngày có phù hợp với quy định không?

Bài 7. Để gây quỹ từ thiện, câu lạc bộ thiện nguyện của một trường THPT tổ chức hoạt động bán hàng với hai mặt hàng là nước chanh và khoai chiên. Câu lạc bộ thiết kế hai thực đơn. Thực đơn 1 có giá 35 nghìn đồng, bao gồm hai cốc nước chanh và một túi khoai chiên. Thực đơn 2 có giá 60 nghìn đồng, bao gồm ba cốc nước chanh và hai túi khoai chiên. Biết rằng câu lạc bộ chỉ làm được không quá 165 cốc nước chanh và 100 túi khoai chiên. Số tiền lớn nhất mà câu lạc bộ có thể nhận được sau khi bán hết hàng bằng bao nhiêu nghìn đồng?

Bài 8. Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc không quá 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

Bài 9. Bạn Lan thu xếp được không quá 10 giờ để làm hai loại đèn trung thu tặng cho các trẻ em khuyết tật. Loại đèn hình con cá cần 2 giờ để làm xong 1 cái, còn loại đèn ông sao chỉ cần 1 giờ để làm xong 1 cái. Gọi x, y lần lượt là số đèn hình con cá và đèn ông sao bạn Lan sẽ làm. Hãy lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Bài 10. Một học sinh dự định vẽ các tấm thiệp xuân bằng tay để bán trong một hội chợ Tết. Cần 2 giờ để vẽ một tấm thiệp loại nhỏ có giá 10 nghìn đồng và 3 giờ để vẽ một tấm thiệp lớn có giá 20 nghìn đồng. Học sinh này chỉ có 30 giờ để vẽ và ban tổ chức hội chợ yêu cầu phải vẽ ít nhất 12 tấm. Hãy cho biết bạn ấy cần vẽ bao nhiêu tấm thiệp mỗi loại để có được nhiều tiền nhất.

Bài 11. Trong một tuần, bạn Mạnh có thể thu xếp được tối đa 12 giờ để tập thể dục giảm cân bằng hai môn: đạp xe và tập cử tạ tại phòng tập. Cho biết mỗi giờ đạp xe sẽ tiêu hao 350 calo và không tốn chi phí, mỗi giờ tập cử tạ sẽ tiêu hao 700 calo với chi phí 50 000 đồng/giờ. Mạnh muốn tiêu hao nhiều calo nhưng không được vượt quá 7 000 calo một tuần. Hãy giúp bạn Mạnh tính số giờ đạp xe và số giờ tập tạ một tuần trong hai trường hợp sau:

- a) Mạnh muốn chi phí tập luyện là ít nhất.
- b) Mạnh muốn số calo tiêu hao là lớn nhất.

Bài 12. Cho biết mỗi kilôgam thịt bò giá 250 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 800 đơn vị protein và 100 đơn vị lipit, mỗi kilôgam thịt heo có giá 200 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 600 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Một gia đình cần ít nhất 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit trong khẩu phần thức ăn mỗi ngày và họ chỉ có thể mua một ngày không quá 1 kg thịt bò và 1,5 kg thịt heo. Hỏi gia đình này phải mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để chi phí là ít nhất?

Bài 13. Một phân xưởng may áo vest và quần âu để chuẩn bị cho dịp cuối năm. Biết may 1 áo vest hết 2m vải và cần 20 giờ; 1 quần âu hết 1,5 m vải và cần 5 giờ. Xí nghiệp được giao sử dụng không quá 900 m vải và số giờ công không vượt quá 6000 giờ. Theo khảo sát thị trường, số lượng quần bán ra không nhỏ hơn số lượng áo và không vượt quá 2 lần số lượng áo. Khi xuất ra thị trường, 1 chiếc áo lãi 350 nghìn đồng, 1 chiếc quần lãi 100 nghìn đồng. Phân xưởng cần may bao nhiêu áo vest và quần âu để thu được tiền lãi cao nhất (biết thị trường tiêu thụ luôn đón nhận sản phẩm của xí nghiệp).



Câu hỏi trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ -x + y < 3 \end{cases} \quad ?$$

- (A) (1;0). (B) (-1;0). (C) (-2;3). (D) (0;-1).

❖ **Câu 2.** Trong các cặp số sau, cặp nào **không** là nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$$

- (A) (0;0). (B) (1;1). (C) (-1;1). (D) (-1;-1).

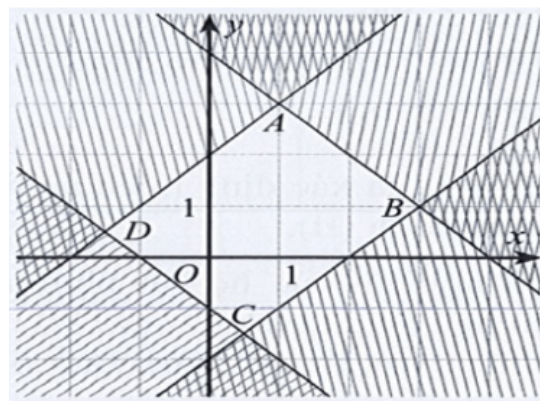
❖ **Câu 3.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 2x - 5y > 1 \\ 2x + y > -5 \\ x + y < -1 \end{cases}$$
 là phần mặt phẳng

chứa điểm có tọa độ:

- (A) (0;0). (B) (1;0). (C) (0;2). (D) (0;-2).

❖ **Câu 4.** Miền đa giác ABCD ở Hình bên là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

- (A)
$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x + y \geq -1 \\ x - y \leq 2 \\ x - y \geq -2 \end{cases} .$$
- (B)
$$\begin{cases} x - y \leq 4 \\ x - y \geq -1 \\ x + y \leq 2 \\ x + y \geq -2 \end{cases} .$$
- (C)
$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ x + y \geq -4 \\ x - y \leq 2 \\ x - y \geq -2 \end{cases} .$$
- (D)
$$\begin{cases} x - y \leq 1 \\ x - y \geq -4 \\ x + y \leq 2 \\ x + y \geq -2 \end{cases} .$$



❖ **Câu 5.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = -x + y$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$
 là:

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

❖ **Câu 6.** Tính chu vi P của miền nghiệm hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 6 \\ y \leq 5 \\ y \geq -6 \end{cases}.$$

- (A) $P = 38$. (B) $P = 36$. (C) $P = 42$. (D) $P = 40$.

❖ **Câu 7.** Ngoài giờ học, bạn Nam làm thêm việc phụ bán cơm được 15 nghìn đồng/một giờ và phụ bán tạp hóa được 10 nghìn đồng/một giờ. Nam không thể làm thêm việc nhiều hơn 15 giờ mỗi tuần. Gọi x, y lần lượt là số giờ phụ bán cơm và phụ bán tạp hóa. Hệ bất phương trình nào sau đây xác định giờ để làm mỗi việc nếu Nam muốn kiếm được ít nhất 100 nghìn đồng mỗi tuần?

- (A)
$$\begin{cases} x + y \leq 15 \\ 15x + 10y < 100 \end{cases}.$$
 (B)
$$\begin{cases} x + y \leq 15 \\ 15x + 10y > 100 \end{cases}.$$
- (C)
$$\begin{cases} x + y \leq 15 \\ 15x + 10y \geq 100 \end{cases}.$$
 (D)
$$\begin{cases} x + y \leq 15 \\ 15x + 10y \leq 100 \end{cases}.$$

❖ **Câu 8.** Để trở thành một thành viên của ban nhạc thì một sinh viên phải đạt điểm trung bình các môn học ít nhất là 7,0 và phải có ít nhất 5 lần thực hành sau giờ học. Gọi x là điểm trung bình các môn học và y là số lần thực hành sau giờ học, hãy chọn hệ bất phương trình thể hiện tốt nhất tình huống trên.

- (A)
$$\begin{cases} x \geq 7 \\ y \geq 5 \end{cases}.$$
 (B)
$$\begin{cases} x < 7 \\ y \geq 5 \end{cases}.$$
 (C)
$$\begin{cases} x < 7 \\ y < 5 \end{cases}.$$
 (D)
$$\begin{cases} x \geq 7 \\ y < 5 \end{cases}.$$



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

❖ **Câu 1.** Bất phương trình nào dưới đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- (A) $x + y > 3$. (B) $x^2 + y^2 \leq 4$.
(C) $(x - y)(3x + y) \geq 1$. (D) $y^3 - 2 < 0$.

❖ **Câu 2.** Hệ bất phương trình nào dưới đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- (A) $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2y \geq 0 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} 3x + y^3 < 0 \\ x + y > 3 \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} x + 2y < 0 \\ y^2 + 3 < 0 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} -x^3 + y < 4 \\ x + 2y < 1 \end{cases}$.

❖ **Câu 3.** Cho bất phương trình $2x + y > 3$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- (A) Bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.
(B) Bất phương trình đã cho vô nghiệm.
(C) Bất phương trình đã cho có vô số nghiệm.
(D) Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $[3; +\infty)$.

❖ **Câu 4.** Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của bất phương trình $x - 2y \geq 5$?

- (A) $(3; -1)$. (B) $(-1; 4)$. (C) $(2; -3)$. (D) $(1; -2)$.

❖ **Câu 5.** Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y > 4 \\ 2x + y > 6 \end{cases}$?

- (A) $(2; -1)$. (B) $(7; 1)$. (C) $(5; -1)$. (D) $(6; -2)$.

❖ **Câu 6.** Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x + 5y \leq 10$?

- (A) $(5; 2)$. (B) $(-1; 4)$. (C) $(2; 1)$. (D) $(-5; 6)$.

❖ **Câu 7.** Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào **không phải** là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- (A) $2x - 3y - 2022 \leq 0$. (B) $5x + y \geq 2x + 11$.
 (C) $x + 2025 > 0$. (D) $\frac{x}{y} + 1 > 0$.

❖ **Câu 8.** Cho bất phương trình $x + 2y \leq 3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

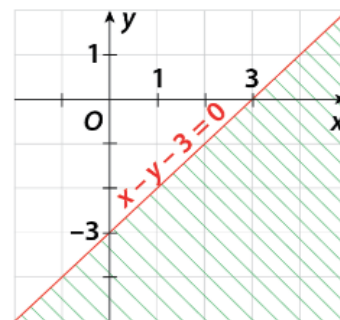
- (A) Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ $d : x + 2y = 3$ chứa gốc tọa độ.
 (B) Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ $d : x + 2y = 3$ không chứa gốc tọa độ.
 (C) Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ $d : x + 2y = -3$ chứa gốc tọa độ.
 (D) Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ $d : x + 2y = -3$ không chứa gốc tọa độ.

❖ **Câu 9.** Cặp số nào dưới đây là nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \geq 4 \\ x > 0 \end{cases}$$

- (A) $(-1; 2)$. (B) $(-2; -4)$. (C) $(0; 1)$. (D) $(2; -4)$.

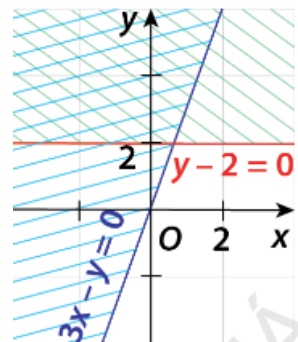
❖ **Câu 10.** Miền không bị gạch chéo trong hình (kể cả bờ) là miền nghiệm của bất phương trình nào?

- (A) $-x + y + 3 \leq 0$. (B) $x - y - 3 \leq 0$.
 (C) $x - y - 3 < 0$. (D) $-x + y + 3 < 0$.

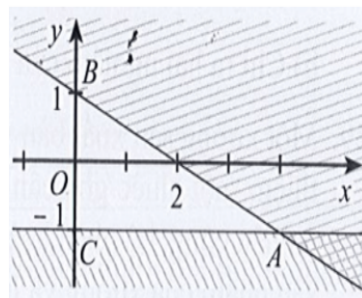


❖ **Câu 11.** Miền không bị gạch chéo trong hình (kể cả bờ) là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?

- (A) $\begin{cases} 3x - y \geq 0 \\ y - 2 < 0 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} 3x - y \geq 0 \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$.
 (C) $\begin{cases} 3x - y \leq 0 \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} 3x - y \leq 0 \\ y - 2 \geq 0 \end{cases}$.

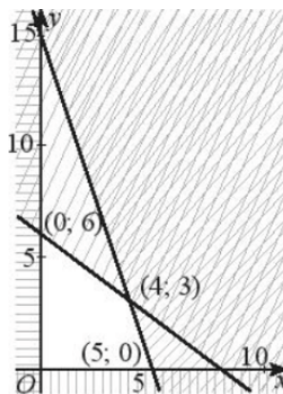


❖ **Câu 12.** Phần không bị gạch (kể cả tia AB , AC) ở Hình bên là miền nghiệm của hệ bất phương trình:



- (A) $\begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ y \geq -1 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x + 2y \leq 2 \\ y \geq -1 \end{cases}$.
- (C) $\begin{cases} x + 2y < 2 \\ y > -1 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x + 2y > 2 \\ y > -1 \end{cases}$.

❖ **Câu 13.** Miền tam giác không gạch chéo trong Hình bên là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình dưới đây?



- (A) $\begin{cases} x + y - 4 \leq 0 \\ x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.
- (C) $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$.

❖ **Câu 14.** Bạn Danh để dành được 900 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ trẻ em mồ côi, bạn Danh đã lấy ra x tờ tiền loại 50 nghìn đồng, y tờ tiền loại 100 nghìn đồng để trao tặng. Một bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y là:

- (A) $50x + 100y \leq 900$. (B) $50x + 100y \geq 900$.
(C) $100x + 50y \leq 900$. (D) $x + y = 900$.

❖ **Câu 15.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn (1): $ax + by + c > 0$, với $a^2 + b^2 \neq 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- (A) Bất phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.
(B) Bất phương trình (1) chỉ có một nghiệm duy nhất.
(C) Bất phương trình (1) vô nghiệm.
(D) Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của bất phương trình (1) nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$.

❖ Câu 16. Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x + y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 là:

- (A) Một nửa mặt phẳng. (B) Miền tam giác.
(C) Miền tứ giác. (D) Miền ngũ giác.

❖ Câu 17. Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ -3 \leq y \leq 3 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$$
 là:

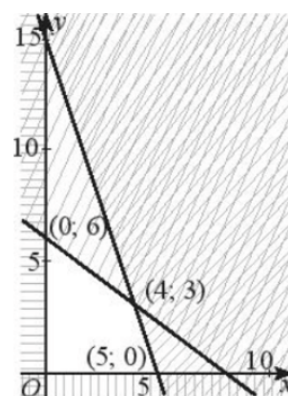
- (A) Miền lục giác. (B) Miền tam giác.
(C) Miền tứ giác. (D) Miền ngũ giác.

❖ Câu 18. Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ -3 \leq y \leq 3 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$$
 là:

- (A) Miền lục giác. (B) Miền tam giác.
(C) Miền tứ giác. (D) Miền ngũ giác.

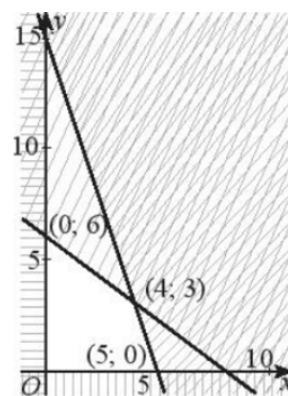
❖ Câu 19. Biểu thức $F = 2x - 8y$ đạt GTNN bằng bao nhiêu trên miền đa giác không gạch chéo trong hình bên

- (A) -48. (B) 0. (C) -160. (D) -40.



❖ Câu 20. Biểu thức $F = 5x + 2y$ đạt GTLN bằng bao nhiêu trên miền đa giác không gạch chéo trong hình bên

- (A) 30. (B) 12. (C) 25. (D) 26.



❖ **Câu 21.** Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x; y) = 3x + y$ với $(x; y)$ thuộc miền nghiệm

của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x + y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{là:}$$

(A) -3.

(B) 6.

(C) 5.

(D) 8.

❖ **Câu 22.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = -x + 4y$ với $(x; y)$ thuộc miền nghiệm

của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3 \end{cases} \quad \text{là:}$$

(A) -2.

(B) 3.

(C) 11.

(D) -4.

❖ **Câu 23.** Tổng các giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = x + 5y$

với $(x; y)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -2 \leq y \leq 2 \\ x + y \leq 4 \\ y - x \leq 4 \end{cases} \quad \text{là:}$$

(A) -20.

(B) -4.

(C) 28.

(D) 16.

❖ **Câu 24.** Một hợp tác xã chăn nuôi dự định trộn hai loại thức ăn gia súc X và Y để tạo thành thức ăn hỗn hợp cho gia súc. Giá một bao loại X là 250 nghìn đồng, giá một bao loại Y là 200 nghìn đồng. Mỗi bao loại X chứa 2 đơn vị chất dinh dưỡng A, 2 đơn vị chất dinh dưỡng B và 2 đơn vị chất dinh dưỡng C. Mỗi bao loại Y chứa 1 đơn vị chất dinh dưỡng A, 9 đơn vị chất dinh dưỡng B và 3 đơn vị chất dinh dưỡng C. Tìm chi phí nhỏ nhất để mua hai loại thức ăn gia súc X và Y sao cho hỗn hợp thu được tối thiểu 12 đơn vị chất dinh dưỡng A, 36 đơn vị chất dinh dưỡng B và 24 đơn vị chất dinh dưỡng C.

(A) 1,95 triệu đồng.

(B) 4,5 triệu đồng.

(C) 1,85 triệu đồng.

(D) 1,7 triệu đồng.

❖ **Câu 25.** Cho hệ
$$\begin{cases} 2x + 3y < 5 & (1) \\ x + \frac{3}{2}y < 5 & (2) \end{cases}$$
. Gọi S_1 là tập nghiệm của bất phương trình (1), S_2 là tập nghiệm của bất phương trình (2) và S là tập nghiệm của hệ thì:

- (A) $S_1 \subset S_2$. (B) $S_2 \subset S_1$. (C) $S_2 = S$. (D) $S_1 \neq S$.

2 Trắc nghiệm đúng sai

❖ **Câu 1.** Bác An có 100 hecta đất dự định trồng hai loại cây ăn trái là chôm chôm và sầu riêng. Biết rằng 1 hecta trồng chôm chôm cần 40 công và lãi được 150 triệu đồng, 1 hecta trồng sầu riêng cần 80 công và lãi được 200 triệu đồng. Biết rằng tổng số công không vượt quá 5600. Gọi x, y (hecta) lần lượt là diện tích đất trồng chôm chôm và sầu riêng. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

- (A) $x + y \leq 100$.
- (B) Ta có hệ bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán là
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ 2x + y \leq 140 \end{cases}$$
.
- (C) Miền nghiệm của hệ bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán là miền tứ giác.
- (D) Tổng lợi nhuận thu được là $F = 150x + 200y$ (triệu đồng).



❖ **Câu 2.** Cho hệ bất phương trình

$$(I) \begin{cases} 2x + 5y \geq 30 \\ 2x + y \geq 14 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

Các mệnh đề sau đúng hay sai

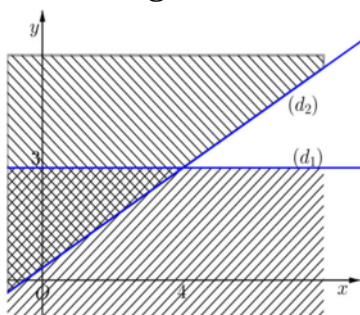
Phát biểu	Đ	S
(A) Hệ (I) là một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.		
(B) (2;6) là một nghiệm của hệ bất phương trình.		
(C) Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là một miền tam giác.		

Ⓐ Biểu thức $F(x, y) = 4x + 3y$ với $(x; y)$ là nghiệm của hệ bất phương trình đã cho đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $(x_0; y_0)$. Khi đó $y_0 - x_0 = -1$.



⇨ **Câu 3.** Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3 - y < 0 & (d_1) \\ 2x - 3y + 1 > 0 & (d_2) \end{cases}$$

Phát biểu	Đ	S
Ⓐ Hệ đã cho không là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.		
Ⓑ $B(4; 3)$ là một điểm thuộc miền nghiệm của hệ.		
Ⓒ $C(7; 4)$ là một điểm thuộc miền nghiệm của hệ .		
Ⓓ Miền không bị gạch (không kể bờ) là miền nghiệm của hệ		



⇨ **Câu 4.** Hưởng ứng phong trào ủng hộ đồng bào miền Bắc vùng bị lũ lụt do cơn bão YAGI gây ra vào đầu tháng 9 vừa qua, bạn Bình được mẹ cho 250000 đồng mua vở và bút ủng hộ các bạn học sinh vùng lũ. Bình mang 250000 đồng đi nhà sách để mua một số vở viết và bút. Biết rằng giá một quyển vở viết là 8000 đồng và giá của một cây bút là 5000 đồng Gọi x và y ($x, y \in \mathbb{N}$) lần lượt là số vở viết và số bút Bình mua được.

Phát biểu	Đ	S
Ⓐ Số tiền mua vở viết là $8x$ (nghìn đồng), số tiền mua bút là $5y$ (nghìn đồng).		

B Để Bình trả đủ tiền mua bút và vở viết thì ta có bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là $8x + 5y \leq 250$.		
C Với số tiền mẹ cho, Bình có thể mua được 20 quyển vở và 20 chiếc bút để đem ủng hộ.		
D Nếu Bình đã mua 20 chiếc bút thì Bình có thể mua tối đa 19 quyển vở.		



❖ **Câu 5.** Bà Lan được tư vấn bổ sung chế độ ăn kiêng đặc biệt bằng cách sử dụng hai loại thực phẩm khác nhau là X và Y . Mỗi gói thực phẩm X chứa 20 đơn vị canxi, 20 đơn vị sắt và 10 đơn vị vitamin B . Mỗi gói thực phẩm Y chứa 20 đơn vị canxi, 10 đơn vị sắt và 20 đơn vị vitamin B . Yêu cầu hàng ngày tối thiểu trong chế độ ăn uống là 240 đơn vị canxi, 160 đơn vị sắt và 140 đơn vị vitamin B . Mỗi ngày không nên dùng quá 12 gói mỗi loại.

A ___ Hệ bất phương trình mô tả số gói thực phẩm X và Y mà bà Lan cần dùng mỗi ngày trong chế độ ăn kiêng để đáp ứng đủ nhu cầu cần thiết đối với canxi, sắt và

$$\text{vitamin } B \text{ là } \begin{cases} x + y \geq 12 \\ 2x + y \geq 16 \\ x + 2y \geq 14 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases} .$$

B ___ Miền nghiệm của hệ bất phương trình mô tả số gói thực phẩm X và Y mà bà Lan cần dùng mỗi ngày trong chế độ ăn kiêng để đáp ứng đủ nhu cầu cần thiết đối với canxi, sắt và vitamin B là một ngũ giác.

C ___ Biết 1 gói thực phẩm loại X giá 20000 đồng, 1 gói thực phẩm loại Y giá 25000 đồng Bà Lan cần dùng 10 gói thực phẩm loại X và 2 gói thực phẩm loại Y để chi phí mua là ít nhất.

D ___ Điểm $(10; 8)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình mô tả số gói thực phẩm X và Y mà bà Lan cần dùng mỗi ngày trong chế độ ăn kiêng để đáp ứng đủ nhu cầu cần thiết đối với canxi, sắt và vitamin B .



⇔ **Câu 6.** Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + y - 9 \leq 0 \\ x - y \geq 0 \\ y - 1 \geq 0 \end{cases} .$$
 Khi đó:

- ☐ **A** ____ Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x + y - 9 \leq 0$.
- ☐ **B** ____ Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x - y \geq 0$.
- ☐ **C** ____ Điểm $I(2;3)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.
- ☐ **D** ____ Miền nghiệm của hệ đã cho là miền tam giác kể cả biên, diện tích tam giác đó là 3.



⇔ **Câu 7.** Một cửa hàng dành tối đa 20 triệu đồng để nhập x tạ gạo và y tạ mì. Biết mỗi tạ gạo mua hết 2 triệu đồng, mỗi tạ mì mua hết 1,6 triệu đồng. Khi đó:

- ☐ **A** ____ Số tiền (triệu đồng) mua x tạ gạo và y tạ mì là: $2x + 1,6y$.
- ☐ **B** ____ Bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa x, y và số tiền của hàng đó dành để mua gạo và mì là: $2x + 1,6y > 20$.
- ☐ **C** ____ Cặp $(4;7)$ là một nghiệm của bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa x, y và số tiền của hàng đó dành để mua gạo và mì.
- ☐ **D** ____ Miền nghiệm bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa x, y và số tiền của hàng đó dành để mua gạo và mì là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $d: 2x + 1,6y = 20$ chứa điểm $O(0;0)$, kể cả bờ.



⇔ **Câu 8.** Một hộ nông dân định trồng dưa và củ đậu trên diện tích 8 héc-ta. Trên diện tích mỗi héc-ta, nếu trồng dưa thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng, nếu trồng củ đậu thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng. Biết rằng tổng số công không quá 180 và hộ nông dân này muốn thu được nhiều tiền nhất. Gọi x, y lần lượt là số héc-ta dưa và số héc-ta củ đậu. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- ☐ **A** ____ Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mô tả bài toán trên là:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \end{cases} .$$
- ☐ **B** ____ $(2;4)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình mô tả bài toán trên.

C ___ Miền nghiệm của hệ bất phương trình mô tả bài toán trên là một tam giác.

D ___ Gọi F là số tiền thu được khi trồng x héc-ta dưa và y héc-ta củ đậu (đơn vị: triệu đồng). Khi đó $F = 3x + 4y$ và số tiền nhiều nhất mà hộ nông dân đó thu được là 28 triệu đồng.

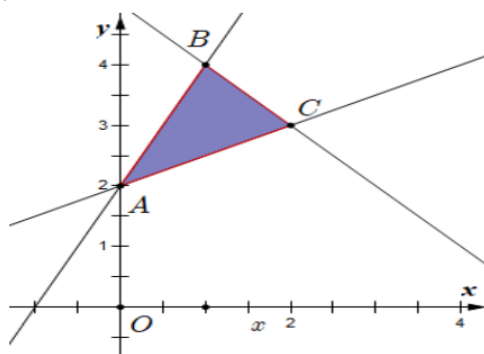


❖ **Câu 9.** Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x - y \geq -2 \\ x - 2y \leq -4 \\ x + y \leq 5 \end{cases} \quad (1)$$

A ___ Hệ (1) là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

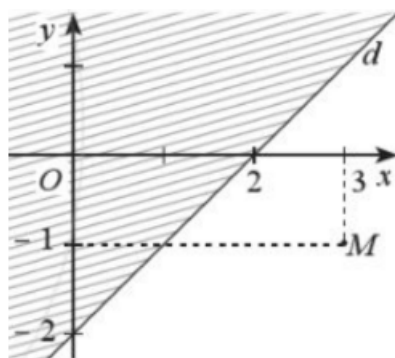
B ___ Điểm $M(2; -1)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (1).

C ___ Miền nghiệm của hệ (1) là một miền tam giác ABC (như hình vẽ) với các đỉnh $A(0; 2), B(1; 4), C(2; 3)$



D ___ Giá trị nhỏ nhất của $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ (1) bằng 1.

❖ **Câu 10.** Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể d) ở hình vẽ dưới đây là miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn:



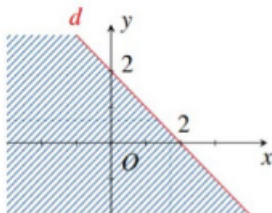
Phát biểu	Đ	S
A Đường thẳng d đi qua hai điểm có tọa độ $(2; 0)$ và $(0; -2)$.		
B Phương trình của đường thẳng d là $x - y + 2 = 0$.		

C Điểm $M(3; -1)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình.		
D Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể d) là miền nghiệm của bất phương trình $x - y - 2 \geq 0$.		



❖ **Câu 11.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + y - 2 \geq 0$.

Phát biểu	Đ	S
A Đường thẳng $d : x + y - 2 = 0$ đi qua hai điểm $A(0; 2)$ và $B(2; 0)$.		
B Điểm $O(0; 0)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x + y - 2 \geq 0$.		
C $M(1; 4)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x + y - 2 \geq 0$.		
D Phần bị gạch trong hình bên dưới (hình vẽ) là miền nghiệm của bất phương trình $x + y - 2 \geq 0$ kể cả bờ $d : x + y - 2 = 0$		



3 Tự luận

❖ **Bài 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x, y) = 2x + 3y$ với

$$(x, y) \text{ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình } \begin{cases} y \geq -1 \\ y \leq 1 \\ x + y \leq 4 \\ y - x \leq 4 \end{cases}.$$

❖ **Bài 2.** Một công ty dự định sản xuất hai loại sản phẩm A và B. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II, III. Số kilogram dự trữ từng loại nguyên liệu và số kilogram từng loại cần dùng để sản xuất 1 kg sản phẩm được cho trong bảng

sau:

Loại nguyên liệu	Số kilôgam nguyên liệu dự trữ	Số kilôgam nguyên liệu cần dùng để sản xuất 1 kg sản phẩm	
		A	B
I	8	2	1
II	24	4	4
III	8	1	2

Công ty đó nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để tiền lãi thu về lớn nhất? Biết rằng, mỗi kilôgam sản phẩm loại A lãi 30 triệu đồng, mỗi sản phẩm loại B lãi 50 triệu đồng.

 **Bài 3.** Bác Ngọc thực hiện chế độ ăn kiêng với yêu cầu tối thiểu hằng ngày qua thức uống là 300 calo, 36 đơn vị vitamin A, 90 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ nhất cung cấp 60 calo, 12 đơn vị vitamin A, 10 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ hai cung cấp 60 calo, 6 đơn vị vitamin A, 30 đơn vị vitamin C.

- Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai mà bác Ngọc nên uống mỗi ngày để đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số calo và số đơn vị vitamin hấp thụ.
- Chỉ ra hai phương án mà bác Ngọc có thể chọn lựa số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai nhằm đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số calo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

 **Bài 4.** Một công ty cần mua các tủ đựng hồ sơ. Có hai loại tủ: Tủ loại A chiếm 3 m^2 sàn, loại này có sức chứa 12 m^3 và có giá 7,5 triệu đồng; tủ loại B chiếm 6 m^2 sàn, loại này có sức chứa 18 m^3 và có giá 5 triệu. Cho biết công ty chỉ thu xếp được nhiều nhất là 60 m^2 mặt bằng cho chỗ đựng hồ sơ và ngân sách mua tủ không quá 60 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch mua sắm để công ty có thể được thể tích đựng hồ sơ lớn nhất.

 **Bài 5.** Một nông trại thu hoạch được 180 kg cà chua và 15 kg hành tây. Chủ nông trại muốn làm các hũ tương cà để bán. Biết rằng, để làm ra một hũ tương cà loại A cần 10 kg cà chua cùng với 1kg hành tây và khi bán lãi được 200 nghìn đồng, còn để làm được một hũ tương cà loại B cần 5 kg cà chua cùng với 0,25 kg hành tây và khi bán lãi được 150 nghìn đồng. Thăm dò thị hiếu của khách hàng cho thấy cần phải

làm số hũ tương loại A ít nhất gấp 3,5 lần số hũ tương loại B. Hãy giúp chủ nông trại lập kế hoạch làm tương cà để có được nhiều tiền lãi nhất.

Bài 6. Một phân xưởng có hai máy chuyên dụng M_1 và M_2 để sản xuất hai loại sản phẩm A và B theo đơn đặt hàng. Nếu sản xuất được một tấn sản phẩm loại A thì phân xưởng nhận được số tiền lãi là 2 triệu đồng. Nếu sản xuất được một tấn sản phẩm loại B thì phân xưởng nhận được số tiền lãi là 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại A, người ta phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại B, người ta phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm này. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ một ngày và máy M_2 làm việc không quá 4 giờ một ngày. Hỏi số tiền lãi lớn nhất mà phân xưởng này có thể thu được trong một ngày là bao nhiêu?

Bài 7. Một xưởng sản xuất có hai máy đặc chủng A, B sản xuất hai loại sản phẩm X, Y. Để sản xuất một tấn sản phẩm X cần dùng máy A trong 6 giờ và dùng máy B trong 2 giờ. Để sản xuất một tấn sản phẩm Y cần dùng máy A trong 2 giờ và dùng máy B trong 2 giờ. Cho biết mỗi máy không thể sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy A làm việc không quá 12 giờ một ngày; máy B làm việc không quá 8 giờ một ngày. Một tấn sản phẩm X lãi 10 triệu đồng và một tấn sản phẩm Y lãi 8 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất mỗi ngày sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

Bài 8. Một chuỗi nhà hàng ăn nhanh bán đồ ăn từ 10h00 sáng đến 22h00 mỗi ngày. Nhân viên phục vụ của nhà hàng làm việc theo hai ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 10h00 đến 18h00 và ca II từ 14h00 đến 22h00. Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng dưới).

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ
10h00 – 18h00	20 000 đồng
14h00 – 22h00	22 000 đồng

Để mỗi nhà hàng hoạt động được thì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 - 18h00, tối thiểu 24 nhân viên trong khoảng thời gian cao điểm 14h00 - 18h00 và không quá 20 nhân viên trong khoảng 18h00 - 22h00. Do số lượng khách trong khoảng 14h00 - 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I. Em hãy giúp chủ chuỗi nhà hàng chỉ ra cách huy động số lượng nhân viên cho mỗi ca sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.

Bài 9. Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu: trái phiếu chính phủ với lãi suất 7% một năm, trái phiếu ngân hàng với lãi suất 8% một năm và trái phiếu doanh nghiệp rủi ro cao với lãi suất 12% một năm. Vì lí do giảm thuế, bác An muốn số tiền đầu tư lãi suất chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng. Hơn nữa, để giảm thiểu rủi ro, bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp. Hỏi bác An nên đầu tư mỗi loại trái phiếu bao nhiêu tiền để lợi nhuận thu được sau một năm là lớn nhất?

Bài 10. Một xưởng sản xuất có 12 tấn nguyên liệu A và 8 tấn nguyên liệu B để sản xuất hai loại sản phẩm X, Y. Để sản xuất một tấn sản phẩm X cần dùng 6 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B, khi bán lãi được 10 triệu đồng. Để sản xuất một tấn sản phẩm Y cần dùng 2 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B, khi bán lãi được 8 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho xưởng nói trên sao cho có tổng số tiền lãi cao nhất.

Bài 11. Nhân dịp tết Trung Thu, xí nghiệp sản xuất bánh muốn sản xuất hai loại bánh: Bánh đậu xanh, bánh dẻo nhân đậu xanh. Để sản xuất hai loại bánh này, xí nghiệp cần: Đường, Đậu, Bột, Trứng, Mứt,... Giả sử đường có thể chuẩn bị được là 300kg, đậu là 200kg, các nguyên liệu khác bao nhiêu cũng có. Sản xuất một cái bánh đậu xanh cần 0,06kg đường; 0,08kg đậu và cho lãi 2000 đồng. Sản xuất một cái bánh dẻo cần 0,07kg đường; 0,04kg đậu và cho lãi 1,800 đồng. Hỏi cần làm bao nhiêu chiếc bánh dẻo và bao nhiêu bánh đậu xanh để tổng số lãi thu được là lớn nhất (nếu sản xuất bao nhiêu cũng bán hết)?

Bài 12. Một công ty dự định chi tối đa 160 triệu đồng cho quảng cáo một sản phẩm mới trong một tháng trên các đài phát thanh và truyền hình. Biết cùng một thời lượng quảng cáo, số người mới quan tâm đến sản phẩm trên truyền hình gấp 8 lần trên đài phát thanh, tức là quảng cáo trên truyền hình có hiệu quả gấp 8 lần trên đài phát thanh. Đài phát thanh chỉ nhận được quảng cáo có tổng thời lượng trong một tháng tối đa là 900 giây với chi phí là 80 nghìn đồng/giây. Đài truyền hình chỉ nhận được các quảng cáo có tổng thời lượng tối đa trong một tháng tối đa là 360 giây với chi phí là 400 nghìn đồng/giây. Công ty cần đặt thời gian quảng cáo trên các đài phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?



LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ CHƯƠNG 2

Bài 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bài tập tự luận

Bài 1.

a) Vì $0 - 2 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$ nên $(0;0)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Vì $0 - 2 \cdot 1 + 6 = 4 > 0$ nên $(0;1)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

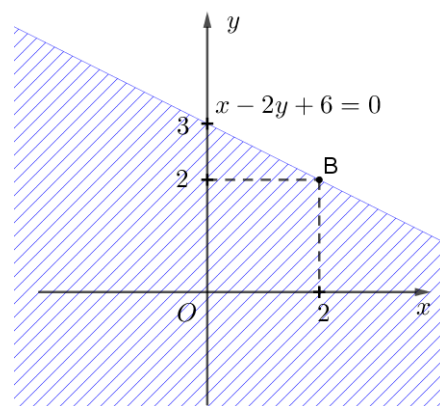
Vì $1 - 2 \cdot 0 + 6 = 7 > 0$ nên $(1;0)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vì $1 - 2 \cdot 1 + 6 = 5 > 0$ nên $(1;1)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Vẽ đường thẳng $\Delta: x - 2y + 6 = 0$ đi qua hai điểm $A(0;3)$ và $B(-2;2)$.

Xét gốc tọa độ $O(0;0)$. Ta thấy $O \notin \Delta$ và $0 - 2 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không kể bờ Δ , chứa gốc tọa độ O (miền không gạch chéo trên hình).



Bài 2.

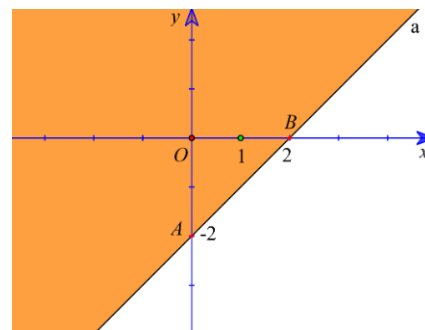
a) Vẽ đường thẳng $a: -x + y + 2 = 0$ đi qua hai điểm

$A(0;-2)$ và $B(2;0)$.

Xét gốc tọa độ $O(0;0)$. Ta thấy $O \notin a$ và $-0 + 0 + 2 = 2 > 0$.

Suy ra $(0;0)$ là một nghiệm của bất phương trình $-x + y + 2 > 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình $-x + y + 2 > 0$ là nửa mặt phẳng không kể bờ a , chứa điểm O (là miền tô màu trong hình sau).

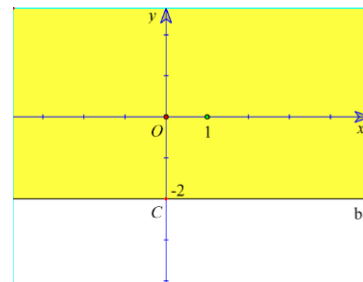


- b) Vẽ đường thẳng $b: y + 2 = 0$ đi qua điểm $C(0; -2)$ và song song với trục Ox .

Xét gốc tọa độ $O(0; 0)$. Ta thấy $O \notin b$ và $0 + 2 = 2 > 0$.

Suy ra $(0; 0)$ là nghiệm của bất phương trình $y + 2 \geq 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình $y + 2 \geq 0$ là nửa mặt phẳng kể cả bờ b , chứa điểm O (là miền tô màu vàng trong hình sau).

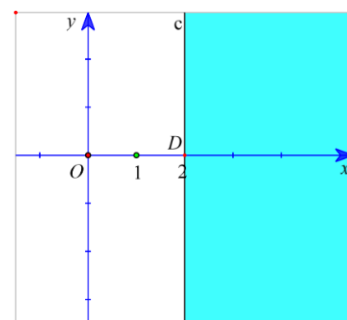


- c) Vẽ đường thẳng $c: -x + 2 = 0$ đi qua điểm $D(2; 0)$ và song song với trục Oy .

Xét gốc tọa độ $O(0; 0)$. Ta thấy $O \notin c$ và $-0 + 2 = 2 > 0$.

Suy ra $(0; 0)$ không là nghiệm của bất phương trình $-x + 2 \leq 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình $-x + 2 \leq 0$ là nửa mặt phẳng kể cả bờ c , không chứa điểm O (là miền tô màu xanh trong hình sau).



Bài 3.

- a) Đưa bất phương trình về dạng $x + 2y - 4 < 0$. HS tự biểu diễn trên mặt phẳng Oxy .
b) Đưa bất phương trình về dạng $-x + 2y - 4 < 0$. HS tự biểu diễn trên mặt phẳng Oxy .

- a) Đường thẳng đi qua hai điểm $(2; 0)$ và $(0; 1)$.

Giả sử phương trình có dạng $y = ax + b$. Khi đó:

$$\begin{cases} 0 = 2a + b \\ 1 = b \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 1$$

Suy ra phương trình đường thẳng là $y = -\frac{1}{2}x + 1$, hay $-\frac{1}{2}x - y + 1 = 0$.

Lấy điểm $(3; 0)$ thuộc miền nghiệm, thay vào: $-\frac{1}{2} \cdot 3 - 0 + 1 = -\frac{1}{2} < 0$.

Do đó, bất phương trình cần tìm là: $-\frac{1}{2}x - y + 1 < 0$.

- b) Giả sử đường thẳng d có dạng $y = ax + b$.

Vì đường thẳng d đi qua hai điểm $(2;0)$ và $(0;-2)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 0 = 2a + b \\ -2 = b \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -2$$

Suy ra phương trình đường thẳng là $y = x - 2$, hay $x - y - 2 = 0$.

Lấy điểm $(3;0)$ thuộc miền nghiệm, ta có $3 - 0 - 2 = 1 > 0$.

Do đó, bất phương trình cần tìm là: $x - y - 2 > 0$.

c) Đường thẳng đi qua hai điểm $(0;0)$ và $(1;1)$.

Giả sử phương trình có dạng $y = ax + b$. Ta có:

$$\begin{cases} 0 = 0a + b \Rightarrow b = 0 \\ 1 = a + 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow y = x \Leftrightarrow x - y = 0$$

Lấy điểm $(0;1)$ thuộc miền nghiệm, thay vào: $0 - 1 = -1 < 0$.

Do đó, bất phương trình cần tìm là: $x - y < 0$.

d) $y \geq 1$.

Bài 4. Để pha x lít nước cam loại I cần $30x$ g bột cam,

Để pha y lít nước cam loại II cần $20y$ g bột cam,

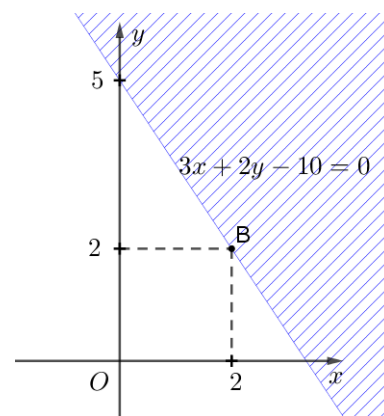
Vì Cúc chỉ có thể dùng không quá 100 gam bột cam nên ta có bất phương trình:

$$30x + 20y \leq 100 \Leftrightarrow 3x + 2y - 10 \leq 0$$

Vẽ đường thẳng $\Delta: 3x + 2y - 10 = 0$ đi qua hai điểm $A(0;5)$ và $B(2;2)$.

Xét gốc tọa độ $O(0;0)$. Ta thấy $O \notin \Delta$ và $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 10 = -10 < 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ Δ , chứa gốc tọa độ O (là miền không gạch chéo trên hình).



Bài 5.

a) Điều kiện: $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$.

Vì diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là 12m^2 , nên diện tích phần mặt sàn để kê bàn và ghế tối đa là:

$$60 - 12 = 48\text{m}^2.$$

Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,5\text{m}^2$, nên diện tích để kê x chiếc ghế là $0,5x\text{m}^2$.

Diện tích để kê một chiếc bàn là $1,2\text{m}^2$, nên diện tích để kê y chiếc bàn là $1,2y\text{m}^2$.

Tổng diện tích cho phần mặt sàn để kê x chiếc ghế và y chiếc bàn là:

$$0,5x + 1,2y (\text{m}^2).$$

Do đó, bất phương trình cần tìm là:

$$0,5x + 1,2y \leq 48.$$

b) $\diamond$ Chọn $x_0 = 2, y_0 = 5$, ta có:

$$0,5 \cdot 2 + 1,2 \cdot 5 = 1 + 6 = 7 < 48.$$

$\diamond$ Chọn $x_0 = 4, y_0 = 10$, ta có:

$$0,5 \cdot 4 + 1,2 \cdot 10 = 2 + 12 = 14 < 48.$$

$\diamond$ Chọn $x_0 = 6, y_0 = 20$, ta có:

$$0,5 \cdot 6 + 1,2 \cdot 20 = 3 + 24 = 27 < 48.$$

Vậy ba cặp số $(2; 5), (4; 10), (6; 20)$ là ba nghiệm của bất phương trình đã cho.

 **Bài 6.** Do x, y lần lượt là số lít nước rửa xe loại I và II pha chế được nên $x \geq 0, y \geq 0$.

Tổng số ml dung dịch chất tẩy rửa Nga dùng để pha chế x lít nước rửa xe loại I và y lít nước rửa xe loại II là:

$$600x + 400y.$$

Mà Nga chỉ có 2400 ml dung dịch chất tẩy rửa nên:

$$600x + 400y \leq 2400 \Leftrightarrow 3x + 2y \leq 12.$$

Vậy các bất phương trình mô tả số lít nước rửa xe loại I và II mà bạn Nga có thể pha chế được là:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 3x + 2y \leq 12.$$

HS tự biểu diễn trên mp Oxy .

 **Bài 7.**

a) Tổng số lượng protein mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày là:

$$26x + 20y \text{ (g protein).}$$

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y biểu diễn lượng protein cần thiết là:

$$26x + 20y \geq 46.$$

b) $\diamond$ Chọn $x_0 = 1, y_0 = 1$, ta có:

$$26 \cdot 1 + 20 \cdot 1 = 46.$$

$\diamond$ Chọn $x_0 = 2, y_0 = 1$, ta có:

$$26 \cdot 2 + 20 \cdot 1 = 72 > 46.$$

$\diamond$ Chọn $x_0 = 1, y_0 = 2$, ta có:

$$26 \cdot 1 + 20 \cdot 2 = 66 > 46.$$

Vậy ba cặp số $(1; 1), (2; 1), (1; 2)$ là ba nghiệm của bất phương trình $26x + 20y \geq 46$.

Bài 8.

a) Giá tiền của x kg cà phê loại thứ nhất là $140x$ (nghìn đồng).

Giá tiền của y kg cà phê loại thứ hai là $180y$ (nghìn đồng).

Tổng số tiền khi trộn x kg loại thứ nhất và y kg loại thứ hai là: $140x + 180y$ (nghìn đồng).

Tổng khối lượng cà phê sau khi trộn là: $x + y$ (kg).

Giá cao nhất của cà phê sau khi trộn là 170 nghìn đồng/kg nên số tiền cao nhất thu được khi bán $x + y$ kg cà phê là: $170(x + y)$ (nghìn đồng).

Do đó, ta có bất phương trình:

$$140x + 180y \leq 170(x + y).$$

Rút gọn ta được bất phương trình $-3x + y \leq 0$.

b) HS tự biểu diễn.

Bài 9.

a) Số tiền ông An phải trả cho việc thuê xe ô tô từ thứ Hai đến thứ Sáu là:

$$900 \cdot 5 + 8x = 4500 + 8x \text{ (nghìn đồng).}$$

Số tiền ông An phải trả cho việc thuê xe ô tô vào hai ngày cuối tuần là:

$$1500 \cdot 2 + 10y = 3000 + 10y \text{ (nghìn đồng).}$$

Tổng số tiền ông An phải trả cho việc thuê xe trong một tuần là:

$$4500 + 8x + 3000 + 10y = 7500 + 8x + 10y \text{ (nghìn đồng)}.$$

Để tổng số tiền không quá 14 triệu đồng, ta có:

$$7500 + 8x + 10y \leq 14000.$$

Rút gọn ta được BPT $4x + 5y \leq 3250$.

b) HS tự biểu diễn

Câu hỏi trắc nghiệm

Bảng đáp án

1	B	2	C	3	D	4	C	5	C	6	B	7	D	8	A	9	A	10	B
11	D	12	A																

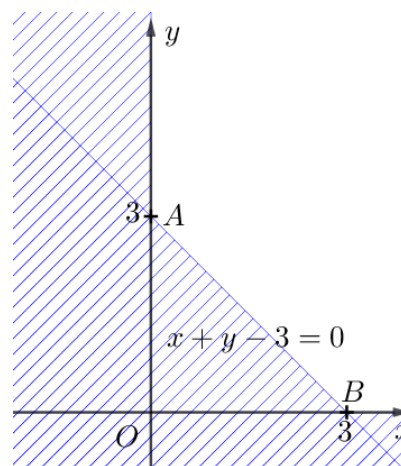
Bài 2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bài tập tự luận

Bài 1.

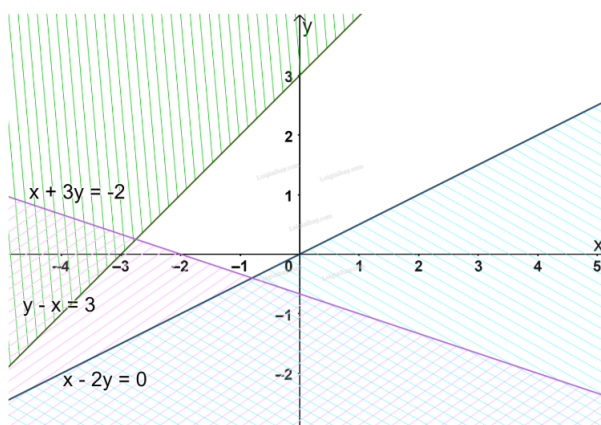
- a) Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên mặt phẳng Oxy

Miền không gạch chéo (bao gồm cạnh AB , tia Ay , Bx) trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



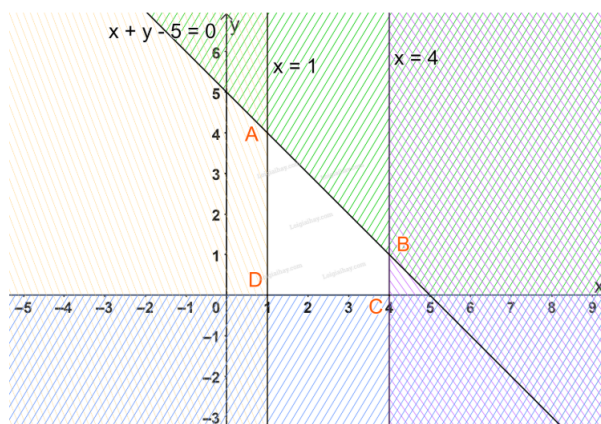
- b) Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên mặt phẳng Oxy

Miền không gạch chéo (không bao gồm cạnh, các bờ) trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



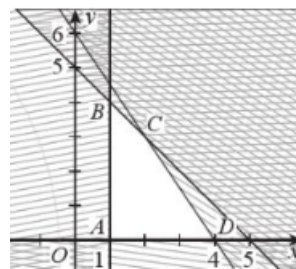
- c) Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên mặt phẳng Oxy

Miền không gạch chéo (miền tứ giác $ABCD$, bao gồm cả các cạnh) trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



Bài 2.

- a) Miền nghiệm của hệ bất phương trình (III) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(1;0)$, $B(1;4)$, $C(2;3)$, $D(4;0)$ (Hình vẽ).



- b) Ta có biểu thức $F = 3x + 7y$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

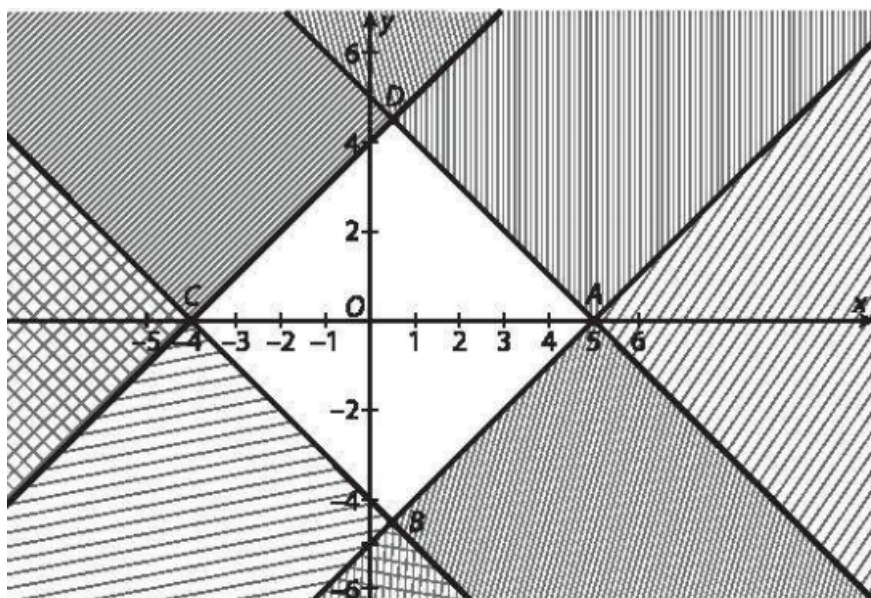
- ◇ Tại $A(1;0)$: $F = 3 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 3$.
- ◇ Tại $B(1;4)$: $F = 3 \cdot 1 + 7 \cdot 4 = 3 + 28 = 31$.
- ◇ Tại $C(2;3)$: $F = 3 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 6 + 21 = 27$.
- ◇ Tại $D(4;0)$: $F = 3 \cdot 4 + 7 \cdot 0 = 12$.

Vậy: F đạt giá trị lớn nhất bằng 31 tại $x = 1$, $y = 4$.

F đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3 tại $x = 1$, $y = 0$.

Bài 3.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hình vuông $ABCD$ với $A(5;0)$, $B(0,5;-4,5)$, $C(-4;0)$ và $D(0,5;4,5)$.



Tính giá trị F tại các đỉnh của tứ giác:

$$F(5;0) = 20, F(0,5;-4,5) = \frac{31}{2}, F(-4;0) = -16, F(0,5;4,5) = -\frac{23}{2}.$$

So sánh các giá trị đó, ta được GTLN cần tìm là $F(5;0) = 20$ và GTNN cần tìm là $F(-4;0) = -16$.

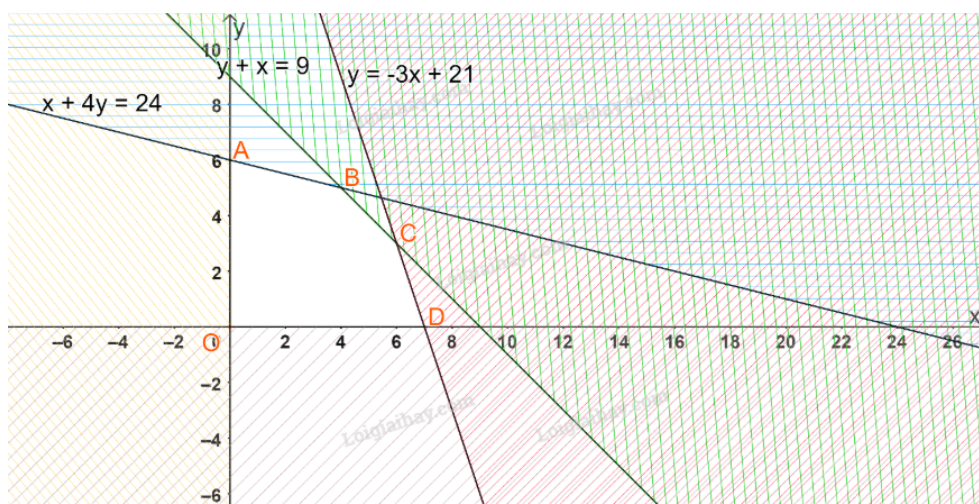
Bài 4.

Gọi x là số lít nước cam loại A, y là số lít nước cam loại B cần pha. Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 30x + 10y \leq 210 \\ x + 4y \leq 24 \\ x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên mặt phẳng tọa độ Oxy , ta được miền ngũ giác $OABCD$ (miền không gạch chéo) với các đỉnh:

$$O(0;0), \quad A(0;6), \quad B(4;5), \quad C(6;3), \quad D(7;0).$$



Doanh thu là:

$$F = 60x + 80y \text{ (nghìn đồng).}$$

Tính giá trị F tại các đỉnh:

- ◊ Tại $O(0;0)$: $F = 60 \cdot 0 + 80 \cdot 0 = 0$
- ◊ Tại $A(0;6)$: $F = 60 \cdot 0 + 80 \cdot 6 = 480$
- ◊ Tại $B(4;5)$: $F = 60 \cdot 4 + 80 \cdot 5 = 640$
- ◊ Tại $C(6;3)$: $F = 60 \cdot 6 + 80 \cdot 3 = 600$
- ◊ Tại $D(7;0)$: $F = 60 \cdot 7 + 80 \cdot 0 = 420$

Vậy giá trị lớn nhất của F là 640 (nghìn đồng), đạt được tại $x = 4$, $y = 5$.

Kết luận: Người đó nên pha chế 4 lít nước cam loại A và 5 lít nước cam loại B để thu được doanh thu cao nhất.

Bài 5. Gọi x, y (triệu đồng) lần lượt là số tiền anh Trung đầu tư vào khoản X và Y ($x, y \geq 0$).

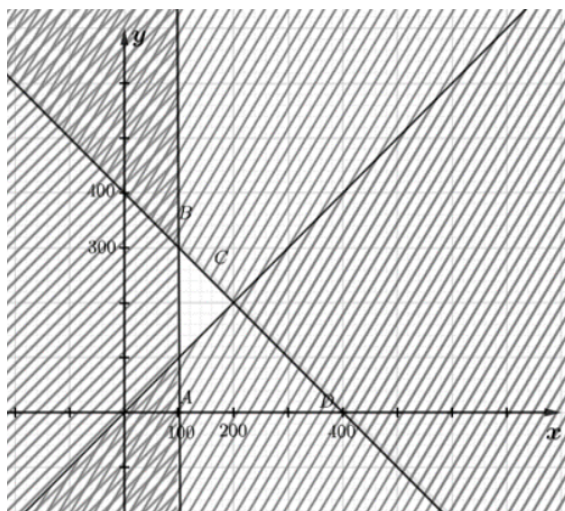
Vì anh Trung đầu tư tổng cộng 400 triệu đồng vào hai khoản nên ta có: $x + y \leq 400$.
Để đạt được lợi nhuận thì khoản X phải đầu tư ít nhất 100 triệu đồng: $x \geq 100$.

Số tiền đầu tư cho khoản Y không nhỏ hơn số tiền cho X nên: $y \geq x \Leftrightarrow x - y \leq 0$.

Vậy ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + y \leq 400 \\ x \geq 100 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền trong tam giác ABC với như hình vẽ sau:



Trong đó $A(100; 100)$, $B(100; 300)$ và $C(200; 200)$.

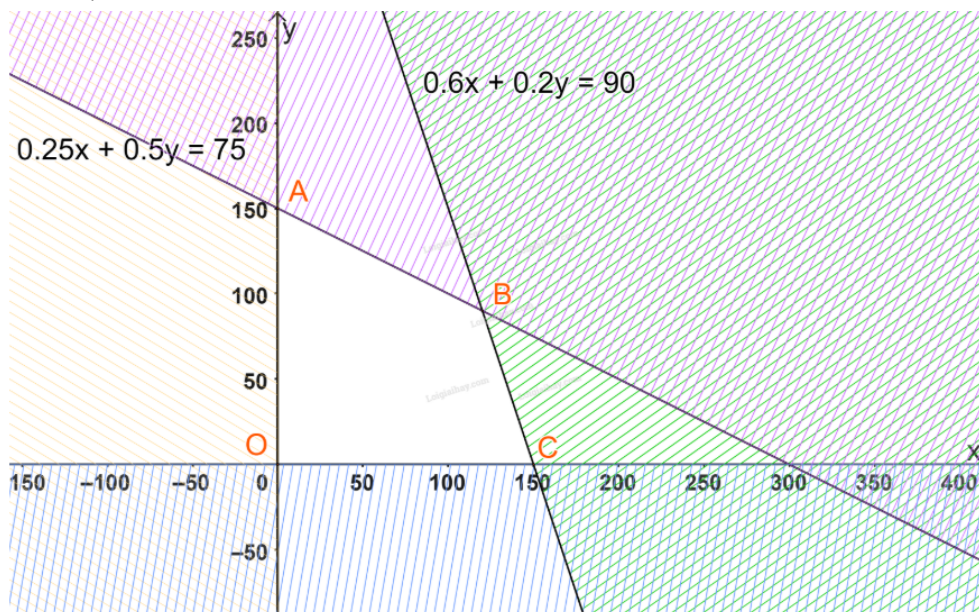
Bài 6.

a) Gọi x là số thùng thuốc trừ sâu loại A, y là số thùng loại B mà nhà máy sản xuất mỗi ngày. Ta có các điều kiện ràng buộc:

- ◇ Hiển nhiên: $x \geq 0, y \geq 0$
- ◇ Sản lượng CO_2 tối đa là 75 kg: $0,25x + 0,5y \leq 75$
- ◇ Sản lượng SO_2 tối đa là 90 kg: $0,6x + 0,2y \leq 90$

Vậy hệ bất phương trình là:
$$\begin{cases} 0,25x + 0,5y \leq 75 \\ 0,6x + 0,2y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn các miền nghiệm của bất phương trình trên hệ trục tọa độ, ta thu được miền nghiệm là phần giao của các miền – chính là miền tứ giác $OABC$, bao gồm cả các cạnh.



b) Với $x = 100$, $y = 80$, ta kiểm tra:

$$0,25 \cdot 100 + 0,5 \cdot 80 = 25 + 40 = 65 \leq 75,$$

$$0,6 \cdot 100 + 0,2 \cdot 80 = 60 + 16 = 76 \leq 90,$$

$$100 \geq 0, \quad 80 \geq 0.$$

Vậy cặp $(100; 80)$ là nghiệm của hệ bất phương trình. Do đó, việc sản xuất như vậy là phù hợp với quy định.

c) Với $x = 60$, $y = 160$, ta tính:

$$0,25 \cdot 60 + 0,5 \cdot 160 = 15 + 80 = 95 > 75.$$

Vượt quá giới hạn CO_2 , nên việc sản xuất 60 thùng loại A và 160 thùng loại B mỗi ngày là không phù hợp với quy định.

🔗 Bài 7. Ta có:

	Cốc nước chanh	Túi khoai chiên	Giá (nghìn đồng)
Thực đơn 1:	2	1	35 (nghìn đồng)
x (thực đơn)	$2x$	x	$35x$ (nghìn đồng)
Thực đơn 2:	3	2	60(nghìn đồng)
y (thực đơn)	$3y$	$2y$	$60y$ (nghìn đồng)

$$\text{Hệ ràng buộc: } \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, (x, y \in \mathbb{Z}) \\ 2x + 3y \leq 165 \\ x + 2y \leq 100 \end{cases}.$$

Gọi $F(x, y)$ (nghìn đồng) là số tiền câu lạc bộ nhận được $\Rightarrow F(x; y) = 35x + 60y$

$$\text{Tìm GTLN của } F(x; y) \text{ thỏa mãn } \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, (x, y \in \mathbb{Z}) \\ 2x + 3y \leq 165 \\ x + 2y \leq 100 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác $OABC$ (kể cả biên). Tọa độ của các đỉnh tứ giác đó là $O(0;0)$, $A(0;50)$, $B(30;35)$, $C(82,5;0)$. Thế lần lượt tọa độ các đỉnh của tứ giác vào hàm $F = 35x + 60y$, ta được:

Tại $O(0;0)$: $F = 35.0 + 60.0 = 0$;

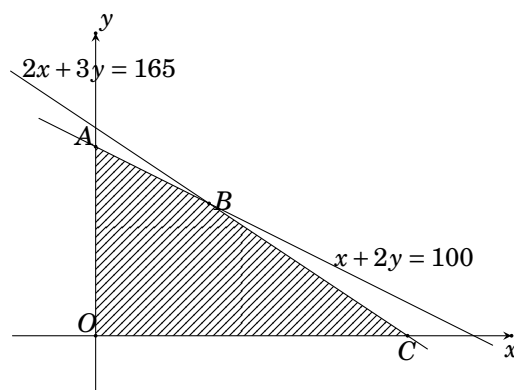
Tại $A(0;50)$: $F = 35.0 + 60.50 = 3000$;

Tại $B(30;35)$: $F = 35.30 + 60.35 = 3150$;

Tại $C(82,5;0)$: $F = 35.82,5 + 60.0 = 2887,5$;

Ta thấy $F(x; y) = 35x + 60y$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3150 nghìn đồng tại điểm $B(30;35)$.

Vậy số tiền lớn nhất mà câu lạc bộ có thể nhận được sau khi bán hết hàng bằng 3150 nghìn đồng.



🔗 Bài 8. Gọi số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất lần lượt là x và y ($x, y \in \mathbb{N}$).

◇ Theo giả thiết, thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu

thứ nhất nên $0 \leq x \leq 200$, và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai nên $0 \leq y \leq 240$.

◇ Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc $\Rightarrow$ Thời gian làm 1 chiếc mũ kiểu thứ hai là $\frac{1}{60}$ (giờ). và thời gian làm y chiếc kiểu hai là $\frac{y}{60}$ (giờ).

◇ Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai

$\Rightarrow$ Thời gian làm 1 chiếc mũ kiểu thứ nhất là $2 \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$ (giờ)

$\Rightarrow$ Thời gian làm x chiếc kiểu thứ nhất là $\frac{x}{30}$ (giờ)

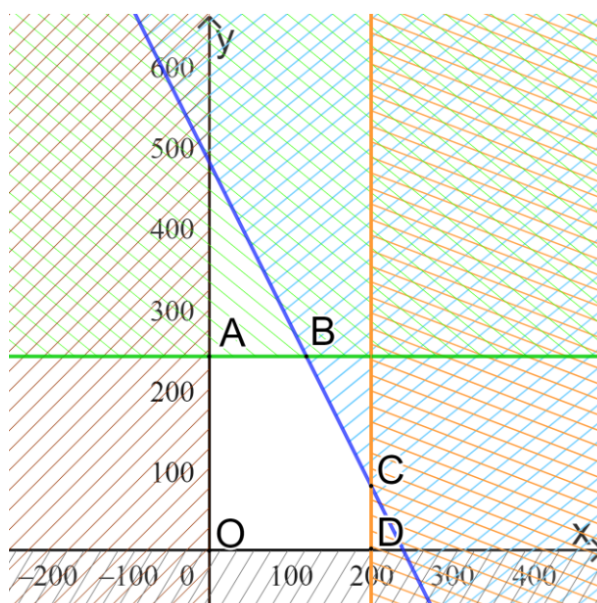
◇ Tổng thời gian làm một ngày không quá 8 giờ nên ta có: $\frac{x}{30} + \frac{y}{60} \leq 8$

Lập hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 200 \\ 0 \leq y \leq 240 \\ \frac{x}{30} + \frac{y}{60} \leq 8 \end{cases}.$$

Miền biểu diễn miền nghiệm là phần không bị gạch, đa giác $OABCD$ với

$O(0;0), A(0;240), B(120;240), C(200;80), D(200;0)$.



Ta có:

$$T(0;240) = 15 \cdot 240 = 3600 \text{ (nghìn đồng)}$$

$$T(120;240) = 24 \cdot 120 + 15 \cdot 240 = 6480 \text{ (nghìn đồng)}$$

$$T(200;80) = 24 \cdot 200 + 15 \cdot 80 = 6000 \text{ (nghìn đồng)}$$

$$T(200; 0) = 24 \cdot 200 = 4800 \text{ (nghìn đồng)}$$

Vậy để tiền lãi thu được nhiều nhất, mỗi ngày xưởng cần sản xuất số mũ kiểu 1 là 120 và mũ kiểu 2 là 240 cái.

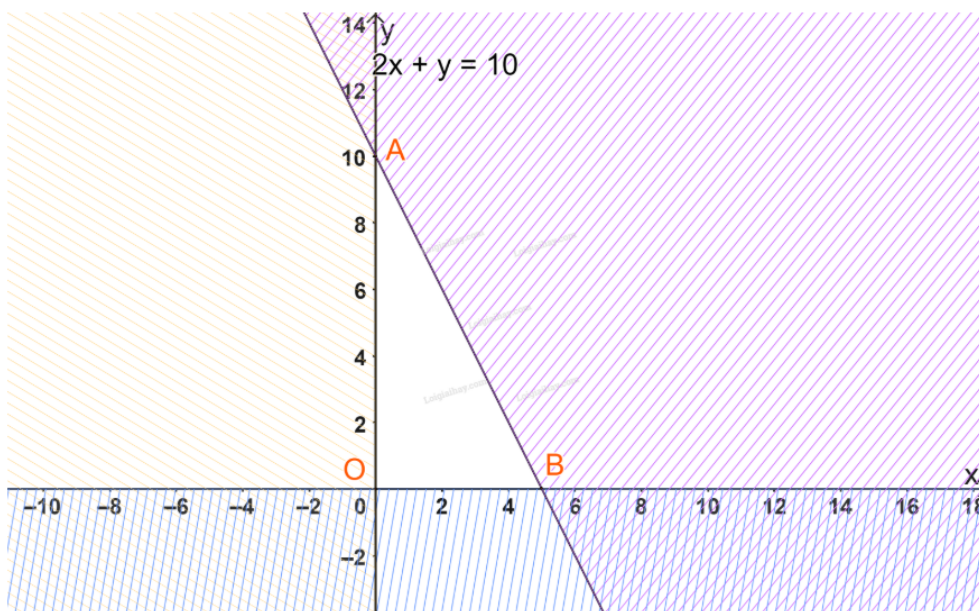
 **Bài 9.** Ta có các điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau:

- ◇ Hiển nhiên: $x \geq 0, y \geq 0$.
- ◇ Tổng số giờ làm không quá 10 giờ nên: $2x + y \leq 10$.
- ◇ Vì x, y là số lượng sản phẩm nên $x, y \in \mathbb{N}$.

Vậy hệ bất phương trình là:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{N})$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ trên mặt phẳng tọa độ Oxy, ta được miền nghiệm là tam giác OAB , bao gồm cả các cạnh, là phần giao của các miền nghiệm (miền không gạch chéo trong hình).



 **Bài 10.** Gọi x (tấm), y (tấm) lần lượt là số thiệp loại nhỏ và số thiệp loại lớn mà bạn học sinh đó vẽ.

Hiển nhiên $x \geq 0$ và $y \geq 0$.

Học sinh này phải vẽ ít nhất 12 tấm nên ta có bất phương trình: $x + y \geq 12$.

Số giờ cần để làm x tấm thiệp nhỏ là: $2x$ (giờ).

Số giờ cần để làm y tấm thiệp lớn là: $3y$ (giờ).

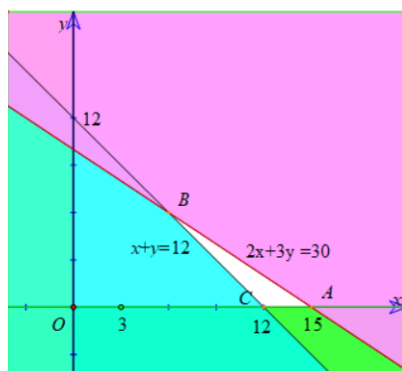
Tổng số giờ để vẽ x tấm thiệp nhỏ và y tấm thiệp lớn là: $2x + 3y$ (giờ).

Vì học sinh này chỉ có 30 giờ để vẽ nên ta có bất phương trình: $2x + 3y \leq 30$.

Vậy ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 12 \\ 2x + 3y \leq 30 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ trên mặt phẳng tọa độ Oxy ta được hình sau:



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tam giác ABC với $A(15;0); B(6;6); C(12;0)$.

Gọi F là số tiền (đơn vị: nghìn đồng) thu được từ việc bán x tấm thiệp nhỏ và y tấm thiệp lớn.

Số tiền thu được từ x tấm thiệp nhỏ là: $10x$ (nghìn đồng). Số tiền thu được từ y tấm thiệp lớn là: $20y$ (nghìn đồng).

Tổng số tiền thu được là: $10x + 20y$ (nghìn đồng).

Vậy $F = 10x + 20y$ (nghìn đồng).

Tính các giá trị của F tại các đỉnh của tam giác, ta có:

◇ Tại $A(15;0)$: $F = 10 \cdot 15 + 20 \cdot 0 = 150$

◇ Tại $B(6;6)$: $F = 10 \cdot 6 + 20 \cdot 6 = 180$

◇ Tại $C(12;0)$: $F = 10 \cdot 12 + 20 \cdot 0 = 120$

Vậy F đạt giá trị lớn nhất bằng 180 tại điểm $B(6;6)$.

Kết luận: Để có được nhiều tiền nhất, bạn ấy cần vẽ 6 tấm thiệp nhỏ và 6 tấm

thiệt lớn.

Bài 11. Gọi x (giờ) là số giờ bạn Mạnh đạp xe, y (giờ) là số giờ bạn Mạnh tập tạ trong một tuần, ta có $x \geq 0$ và $y \geq 0$.

Tổng số giờ bạn Mạnh tập thể dục trong một tuần là: $x + y$ (giờ).

Do một tuần bạn Mạnh thu xếp được tối đa 12 giờ để tập thể dục nên ta có bất phương trình: $x + y \leq 12$.

Do mỗi giờ đạp xe tiêu hao 350 calo nên với x giờ đạp xe sẽ tiêu hao $350x$ calo.

Mỗi giờ tập tạ tiêu hao 700 calo nên với y giờ tập tạ sẽ tiêu hao $700y$ calo.

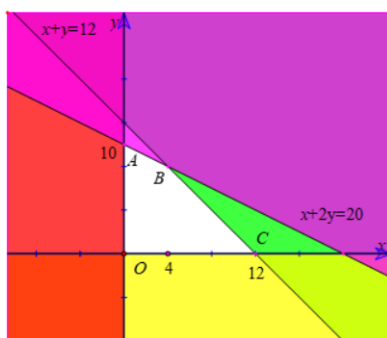
Tổng số calo tiêu hao là: $350x + 700y$ (calo).

Mặt khác, Mạnh muốn tiêu hao nhiều calo nhưng không vượt quá 7 000 calo một tuần. Vì vậy, ta có bất phương trình: $350x + 700y \leq 7000 \Leftrightarrow x + 2y \leq 20$.

Vậy hệ bất phương trình là:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 12 \\ x + 2y \leq 20 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ trên mặt phẳng tọa độ Oxy ta được:



Miền không tô màu (miền tứ giác $OABC$, bao gồm cả các cạnh) là phần giao miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.

Tọa độ các đỉnh của tứ giác đó là: $O(0;0)$, $A(0;10)$, $B(4;8)$, $C(12;0)$.

a) Gọi F là chi phí tập luyện.

Vì đạp xe không mất phí và tập tạ tốn chi phí 50 000 đồng/giờ nên với x giờ đạp xe

và y giờ tập tạ thì tổn số tiền là: $F = 0 \cdot x + 50\,000 \cdot y = 50\,000y$ (đồng).

Tính các giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác:

- ◇ Tại $O(0;0)$: $F = 50\,000 \cdot 0 = 0$
- ◇ Tại $A(0;10)$: $F = 50\,000 \cdot 10 = 500\,000$
- ◇ Tại $B(4;8)$: $F = 50\,000 \cdot 8 = 400\,000$
- ◇ Tại $C(12;0)$: $F = 50\,000 \cdot 0 = 0$

F đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $O(0;0)$ và $C(12;0)$.

Kết luận: Mạnh muốn chi phí tập luyện là ít nhất khi Mạnh không tập luyện cả hai môn thể thao hoặc chỉ đạp xe 12 giờ và không tập tạ.

b) Gọi F' là số calo tiêu hao.

Khi đó:

$$F' = 350x + 700y \text{ (calo)}.$$

Tính các giá trị của F' tại các đỉnh của tứ giác:

- ◇ Tại $O(0;0)$: $F' = 350 \cdot 0 + 700 \cdot 0 = 0$
- ◇ Tại $A(0;10)$: $F' = 350 \cdot 0 + 700 \cdot 10 = 7000$
- ◇ Tại $B(4;8)$: $F' = 350 \cdot 4 + 700 \cdot 8 = 1400 + 5600 = 7000$
- ◇ Tại $C(12;0)$: $F' = 350 \cdot 12 + 700 \cdot 0 = 4200$

F' đạt giá trị lớn nhất bằng 7000 tại $A(0;10)$ và $B(4;8)$.

Kết luận: Mạnh muốn tiêu hao nhiều calo nhất thì Mạnh sẽ:

- ◇ hoặc chỉ tập tạ trong 10 giờ;
- ◇ hoặc đạp xe 4 giờ và tập tạ 8 giờ.

 **Bài 12.** Gọi x và y lần lượt là số kilogram thịt bò và thịt heo có thể mua trong một ngày với $x \geq 0, y \geq 0$.

Vì gia đình chỉ có thể mua không quá 1 kg thịt bò và 1,5 kg thịt heo nên ta có:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,5 \tag{1}$$

Trong x kilogram thịt bò chứa khoảng $800x$ đơn vị protein và $100x$ đơn vị lipit.

Trong y kilogram thịt heo chứa khoảng $600y$ đơn vị protein và $200y$ đơn vị lipit.

Gia đình cần ít nhất 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit trong khẩu phần thức ăn mỗi ngày nên ta có:

$$800x + 600y \geq 800 \quad \text{và} \quad 100x + 200y \geq 200$$

Rút gọn hai bất phương trình:

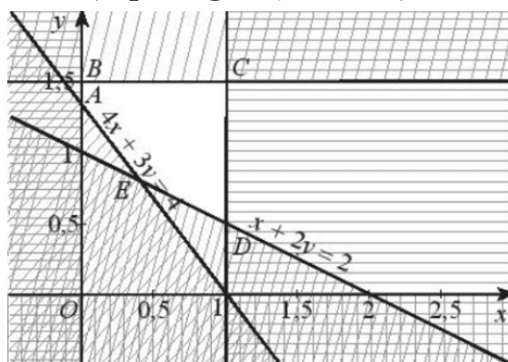
$$800x + 600y \geq 800 \Leftrightarrow 4x + 3y \geq 4 \quad (2)$$

$$100x + 200y \geq 200 \Leftrightarrow x + 2y \geq 2 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3), ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y \geq 4 \\ x + 2y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1,5 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm trên mặt phẳng Oxy , ta được:



Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên chính là miền ngũ giác $ABCDE$ (kể cả bờ) với tọa độ các đỉnh là: $A\left(0; \frac{4}{3}\right)$, $B(0; 1,5)$, $C(1; 1,5)$, $D(1; 0,5)$, $E(0,4; 0,8)$.

Số tiền gia đình cần bỏ ra để mua x kilôgam thịt bò (250 nghìn đồng/kg) và y kilôgam thịt heo (200 nghìn đồng/kg) là:

$$F = 250x + 200y \text{ (nghìn đồng)}$$

$$\diamond F\left(0; \frac{4}{3}\right) = 250 \cdot 0 + 200 \cdot \frac{4}{3} = \frac{800}{3} \approx 266,67$$

$$\diamond F(0; 1,5) = 250 \cdot 0 + 200 \cdot 1,5 = 300$$

$$\diamond F(1; 1,5) = 250 \cdot 1 + 200 \cdot 1,5 = 250 + 300 = 550$$

$$\diamond F(1; 0,5) = 250 \cdot 1 + 200 \cdot 0,5 = 250 + 100 = 350$$

$$\diamond F(0,4; 0,8) = 250 \cdot 0,4 + 200 \cdot 0,8 = 100 + 160 = 260$$

Kết luận: F đạt giá trị nhỏ nhất là **260 nghìn đồng** tại đỉnh $E(0,4;0,8)$.

Vậy, gia đình này chỉ cần mua **0,4 kg thịt bò** và **0,8 kg thịt heo** để đáp ứng đủ yêu cầu về dinh dưỡng mà tốn chi phí ít nhất.

Bài 13. Gọi số lượng áo vest và quần âu cần may lần lượt là x, y (cái), với $x, y \in \mathbb{N}$.

Số mét vải để may x áo và y quần là: $2x + 1,5y$ (mét).

Vì xí nghiệp được giao sử dụng không quá 900 mét vải nên ta có: $2x + 1,5y \leq 900$ (1)

Số giờ công để may x áo và y quần là: $20x + 5y$ (giờ).

Vì số giờ công không vượt quá 6 000 giờ nên: $20x + 5y \leq 6000 \Leftrightarrow 4x + y \leq 1200$ (2)

Theo khảo sát thị trường:

◇ Số lượng quần bán ra không nhỏ hơn số lượng áo: $y \geq x$ (3)

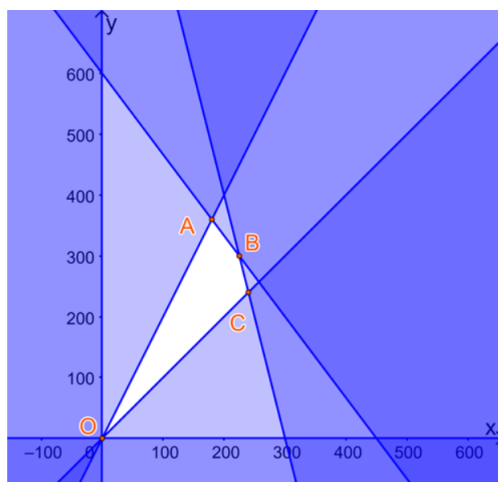
◇ Số lượng quần không vượt quá 2 lần số lượng áo: $y \leq 2x$ (4)

Hiển nhiên: $x \geq 0, y \geq 0$.

Từ (1), (2), (3), (4), ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 1,5y \leq 900 \\ 4x + y \leq 1200 \\ y \geq x \\ y \leq 2x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1,5y \leq 900 \\ 4x + y \leq 1200 \\ x - y \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên mặt phẳng Oxy , ta được



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ với các đỉnh:

$$O(0;0), \quad A(180;360), \quad B(225;300), \quad C(240;240)$$

Tiền lãi khi bán x cái áo và y cái quần là:

$$T = 350x + 100y \text{ (nghìn đồng)}$$

Tính giá trị T tại các đỉnh:

◇ Tại $O(0;0)$: $T = 350 \cdot 0 + 100 \cdot 0 = 0$

◇ Tại $A(180;360)$: $T = 350 \cdot 180 + 100 \cdot 360 = 63\,000 + 36\,000 = 99\,000$

◇ Tại $B(225;300)$: $T = 350 \cdot 225 + 100 \cdot 300 = 78\,750 + 30\,000 = 108\,750$

◇ Tại $C(240;240)$: $T = 350 \cdot 240 + 100 \cdot 240 = 84\,000 + 24\,000 = 108\,000$

Vậy T đạt giá trị lớn nhất bằng 108 750 (nghìn đồng) tại điểm $B(225;300)$.

Kết luận: Để thu được tiền lãi cao nhất, phân xưởng cần may 225 cái áo vest và 300 cái quần âu.

Câu hỏi trắc nghiệm

Bảng đáp án

1	B	2	C	3	D	4	A	5	B	6	D	7	C	8	A
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Bài 3. Ôn tập chương 2

Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Bảng đáp án

1	A	2	A	3	C	4	B	5	A	6	C	7	D	8	A	9	D	10	B
11	B	12	B	13	C	14	A	15	D	16	B	17	D	18	C	19	C	20	D
21	B	22	A	23	B	24	A	25	A										

Trắc nghiệm đúng sai

Bảng đáp án

Câu 1					Câu 2					Câu 3				
Câu 4					Câu 5					Câu 6				
Câu 7					Câu 8					Câu 10				
Câu 11														

Tự luận

Bài 1. Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $ABCD$ với

$$A(-5; -1), B(5; -1), C(3; 1), D(-3; 1).$$

Tính giá trị của F tại các đỉnh ta được giá trị lớn nhất là $F(3; 1) = 9$ và giá trị nhỏ nhất là $F(-5; -1) = -13$.

Bài 2.

Gọi x, y lần lượt là số kilogram sản phẩm loại A và loại B mà công ty sản xuất.

- ◇ Hiển nhiên: $x \geq 0, y \geq 0$.
- ◇ Nguyên liệu loại I có số kilogram dự trữ là 8 kg, nên: $2x + y \leq 8$
- ◇ Nguyên liệu loại II có số kilogram dự trữ là 24 kg, nên: $4x + 4y \leq 24$
- ◇ Nguyên liệu loại III có số kilogram dự trữ là 8 kg, nên: $x + 2y \leq 8$

Từ đó ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ 4x + 4y \leq 24 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của từng bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy , ta được miền nghiệm hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ (kể cả bờ) với

$$O(0;0), \quad A(0;4), \quad B\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right), \quad C(4;0).$$

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác:

◇ Tại $O(0;0)$:

$$F = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0.$$

◇ Tại $A(0;4)$:

$$F = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 4 = 200.$$

◇ Tại $B\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$:

$$F = 30 \cdot \frac{8}{3} + 50 \cdot \frac{8}{3} = \frac{640}{3}.$$

◇ Tại $C(4;0)$:

$$F = 30 \cdot 4 + 50 \cdot 0 = 120.$$

Giá trị lớn nhất của F là $\frac{640}{3}$ (triệu đồng) tại điểm $B\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Vậy công ty nên sản xuất $\frac{8}{3}$ kg sản phẩm mỗi loại để thu về số tiền lãi lớn nhất.

 **Bài 3. a)** Gọi x, y lần lượt là số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai cần tìm.

Lượng calo trong cả 2 đồ uống là: $60x + 60y$

Lượng vitamin A trong 2 đồ uống là: $12x + 6y$

Lượng vitamin C trong 2 đồ uống là: $10x + 30y$

Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 60x + 60y \geq 300 \\ 12x + 6y \geq 36 \\ 10x + 30y \geq 90 \end{cases}$$

b) Hai phương án bác Ngọc có thể chọn là:

◇ Phương án 1: 2 cốc loại 1 và 4 cốc loại 2.

◇ Phương án 2: 1 cốc loại 1 và 5 cốc loại 2.

 **Bài 4.** Gọi x, y lần lượt là số tủ loại A và loại B mà công ty cần mua.

Các điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau:

- ◇ Hiển nhiên: $x \geq 0, y \geq 0$.
- ◇ Mặt bằng nhiều nhất là 60 m^2 , nên: $3x + 6y \leq 60$
- ◇ Ngân sách mua tủ không quá 60 triệu đồng, nên: $7.5x + 5y \leq 60$

Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 6y \leq 60 \\ 7.5x + 5y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác $OABC$, bao gồm cả các cạnh) với $O(0;0)$, $A(0;10)$, $B(2;9)$, $C(8;0)$.

Gọi F là thể tích đựng hồ sơ (đơn vị m^3). Ta có: $F = 12x + 18y$, với x tủ loại A sức chứa 12 m^3 và y tủ loại B sức chứa 18 m^3 .

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác:

- ◇ Tại $O(0;0)$:

$$F = 12 \cdot 0 + 18 \cdot 0 = 0.$$

- ◇ Tại $A(0;10)$:

$$F = 12 \cdot 0 + 18 \cdot 10 = 180.$$

- ◇ Tại $B(2;9)$:

$$F = 12 \cdot 2 + 18 \cdot 9 = 186.$$

- ◇ Tại $C(8;0)$:

$$F = 12 \cdot 8 + 18 \cdot 0 = 96.$$

Giá trị lớn nhất của F là 186 tại điểm $B(2;9)$.

Vậy công ty nên mua 2 tủ loại A và 9 tủ loại B để thể tích đựng hồ sơ là lớn nhất.

 **Bài 5.** Gọi x, y lần lượt là số hũ tương cà loại A và loại B mà chủ nông trại cần làm.

- ◇ Hiển nhiên $x \geq 0, y \geq 0$.

- ◇ Có 180 kg cà chua nên $10x + 5y \leq 180$.
- ◇ Có 15 kg hành tây nên $x + 0.25y \leq 15$.
- ◇ Số hũ tương loại A ít nhất gấp 3,5 lần số hũ tương loại B nên $x \geq 3.5y$.

Từ đó ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 10x + 5y \leq 180 \\ x + 0.25y \leq 15 \\ x \geq 3.5y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ BPT là miền tam giác OAB , bao gồm cả các cạnh với:

$$O(0;0), \quad A(14;4), \quad B(15;0).$$

Gọi F là số tiền lãi (đơn vị: nghìn đồng) thu được, ta có:

$$F = 200x + 150y.$$

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tam giác:

- ◇ Tại $O(0;0)$:

$$F = 200 \cdot 0 + 150 \cdot 0 = 0.$$

- ◇ Tại $A(14;4)$:

$$F = 200 \cdot 14 + 150 \cdot 4 = 2800 + 600 = 3400.$$

- ◇ Tại $B(15;0)$:

$$F = 200 \cdot 15 + 150 \cdot 0 = 3000.$$

Giá trị lớn nhất của F là 3400 nghìn đồng tại điểm $A(14;4)$.

Kết luận: Chủ nông trại nên làm 14 hũ loại A và 4 hũ loại B để tiền lãi thu được là lớn nhất.

 **Bài 6.** Gọi x, y lần lượt là số tấn sản phẩm loại A và loại B mà phân xưởng sản xuất được.

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$.

Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$

Số tiền lãi phân xưởng này thu được trong một ngày là:

$$F(x, y) = 2x + 1.6y \rightarrow \max.$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ với các đỉnh:

$$O(0;0), \quad A(2;0), \quad B(1;3), \quad C(0;4).$$

Tính giá trị của F tại các đỉnh:

$$F(2;0) = 2 \cdot 2 + 1.6 \cdot 0 = 4, \quad F(0;0) = 0, \quad F(1;3) = 2 \cdot 1 + 1.6 \cdot 3 = 2 + 4.8 = 6,8, \quad F(0;4) = 2 \cdot 0 + 1.6 \cdot 4 = 6,4.$$

Vậy số tiền lãi lớn nhất phân xưởng thu được trong một ngày là 6,8 triệu đồng.

Bài 7. Gọi x, y lần lượt là số tấn sản phẩm X, Y mà xưởng cần sản xuất mỗi ngày, với $x \geq 0, y \geq 0$.

Theo đề bài ta có hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 6x + 2y \leq 12 \\ 2x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 . Miền nghiệm của hệ BPT là

miền tứ giác $OABC$, (bao gồm cả các cạnh) với

$$O(0;0), \quad A(0;4), \quad B(1;3), \quad C(2;0).$$

Tính giá trị của F tại các đỉnh của tứ giác:

◇ Tại $O(0;0)$: $F = 10 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0$;

◇ Tại $A(0;4)$: $F = 10 \cdot 0 + 8 \cdot 4 = 32$;

◇ Tại $B(1;3)$: $F = 10 \cdot 1 + 8 \cdot 3 = 34$;

◇ Tại $C(2;0)$: $F = 10 \cdot 2 + 8 \cdot 0 = 20$.

Vậy xưởng đó nên sản xuất 1 tấn sản phẩm loại X và 3 tấn sản phẩm loại Y để tổng số tiền lãi là lớn nhất.

 Bài 8.

Gọi x, y lần lượt là số nhân viên ca I và ca II ($x > 0, y > 0$).

Theo giả thiết ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x \geq 6 \\ x + y \geq 24 \\ (x + y) - x \leq 20 \\ y \geq 2x \end{cases}$$

Tập nghiệm của bất phương trình giới hạn bởi tứ giác $ABCD$ với các đỉnh:

$$A(6;20), \quad B(10;20), \quad C(8;16), \quad D(6;18).$$

Tiền lương mỗi ngày của các nhân viên được tính theo công thức:

$$T = 20.8x + 22.8y = 160x + 176y \quad (\text{nghìn đồng})$$

Tính giá trị của T tại các đỉnh:

- ◇ $T(6;20) = 160 \cdot 6 + 176 \cdot 20 = 4480$ (nghìn đồng),
- ◇ $T(10;20) = 160 \cdot 10 + 176 \cdot 20 = 5120$ (nghìn đồng),
- ◇ $T(8;16) = 160 \cdot 8 + 176 \cdot 16 = 4096$ (nghìn đồng),
- ◇ $T(6;18) = 160 \cdot 6 + 176 \cdot 18 = 4128$ (nghìn đồng).

Vậy để tiền lương mỗi ngày là ít nhất thì ca I có 8 nhân viên, ca II có 16 nhân viên.

 Bài 9. Gọi x là số tiền mua trái phiếu chính phủ và y là số tiền mua trái phiếu ngân hàng (đơn vị triệu đồng), với $x, y \leq 1200$.

Số tiền mua trái phiếu doanh nghiệp là $1200 - x - y$ (triệu đồng).

Vì số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng nên $x \geq 3y$.

Vì bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp nên

$$1200 - x - y \leq 200 \quad \Longleftrightarrow \quad x + y \geq 1000.$$

Từ điều kiện của bài toán ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1200, \\ 0 \leq y \leq 1200, \\ x + y \geq 1000, \\ x - 3y \geq 0. \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ trong mặt phẳng tọa độ ta được miền tứ giác $ABCD$ với: $A(750;250)$, $B(1000;0)$, $C(1200;0)$, $D(1200;400)$.

Lợi nhuận thu được sau một năm là

$$F(x, y) = x \cdot 7\% + y \cdot 8\% + (1200 - x - y) \cdot 12\% = 144 - 0,05x - 0,04y.$$

Thay tọa độ các điểm A, B, C, D vào biểu thức $F(x, y)$, ta có:

$$\diamond F(750;250) = 144 - 0,05 \times 750 - 0,04 \times 250 = 96,5;$$

$$\diamond F(1000;0) = 144 - 0,05 \times 1000 - 0,04 \times 0 = 94;$$

$$\diamond F(1200;0) = 144 - 0,05 \times 1200 - 0,04 \times 0 = 84;$$

$$\diamond F(1200;400) = 144 - 0,05 \times 1200 - 0,04 \times 400 = 68.$$

Vậy F đạt giá trị lớn nhất là 96,5 khi $x = 750$ và $y = 250$.

Do đó, bác An nên đầu tư 750 triệu đồng vào trái phiếu chính phủ, 250 triệu đồng vào trái phiếu ngân hàng và 200 triệu đồng vào trái phiếu doanh nghiệp.

 **Bài 10.** Gọi x, y lần lượt là số lượng sản phẩm X và Y (đơn vị: tấn). Ta có hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau:

$$\begin{cases} 6x + 2y \leq 12, \\ 2x + 2y \leq 8, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền nghiệm tứ giác $ABCD$ với

$$A(0;4), \quad B(1;3), \quad C(2;0), \quad D(0;0).$$

Gọi F là tổng tiền lãi thu được (đơn vị: triệu đồng), ta có $F = 10x + 8y$.

Tính giá trị của F tại các đỉnh:

$$\diamond \text{Tại } A(0;4): F = 10 \times 0 + 8 \times 4 = 32,$$

$$\diamond \text{Tại } B(1;3): F = 10 \times 1 + 8 \times 3 = 34,$$

$$\diamond \text{Tại } C(2;0): F = 10 \times 2 + 8 \times 0 = 20,$$

$$\diamond \text{Tại } D(0;0): F = 10 \times 0 + 8 \times 0 = 0.$$

Ta thấy F đạt giá trị lớn nhất bằng 34 tại điểm $B(1;3)$. Vậy xưởng nên lập kế hoạch sản xuất 1 sản phẩm X và 3 sản phẩm Y để thu về lãi cao nhất.

🔗 **Bài 11.** Gọi x, y lần lượt là số bánh đậu xanh và số bánh dẻo cần tìm, $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Số tiền lãi thu được là $F(x; y) = 2x + 1,8y$ nghìn đồng.

Theo đề bài, ta có hệ ràng buộc:

$$\begin{cases} 0,06x + 0,07y \leq 300 \\ 0,08x + 0,04y \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $ABCO$ với:

$$A\left(0; \frac{30000}{7}\right), \quad B(625; 3750), \quad C(2500; 0); O(0; 0)$$

Ta có:

$$F(A) = \frac{54000}{7}, \quad F(B) = 8000, \quad F(C) = 5000$$

$$\Rightarrow \max F(x, y) = F(B) = 8000 \iff x = 625; \quad y = 3750$$

Vậy để tiền lãi lớn nhất thì cần làm 625 bánh đậu xanh và 3750 bánh dẻo.

🔗 **Bài 12.**

	Đài phát thanh	Truyền hình
Chi phí nhận quảng cáo	80 nghìn đồng/giây	400 nghìn đồng/giây
Hiệu quả quảng cáo	1 (đơn vị)	8 (đơn vị)

Gọi x, y lần lượt là số giây quảng cáo trên đài phát thanh và truyền hình.

Từ bài toán cho ở trên, ta có hệ bất phương trình biểu diễn các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 5y \leq 2000 \\ x \leq 900 \\ y \leq 360 \end{cases}$$

Xác định miền nghiệm là miền ngũ giác $OABCD$ với các đỉnh: $A(900; 0)$, $B(900; 220)$, $C(200; 360)$, $D(0; 360)$, $O(0; 0)$.

Biết hiệu quả quảng cáo được tính theo công thức: $F(x; y) = x + 8y$.

Tính hiệu quả quảng cáo tại các đỉnh của miền nghiệm $OABCD$ đã cho:

$$F(0;0) = 0 + 8 \cdot 0 = 0$$

$$F(900;0) = 900 + 8 \cdot 0 = 900$$

$$F(900;220) = 900 + 8 \cdot 220 = 2660$$

$$F(200;360) = 200 + 8 \cdot 360 = 3080$$

$$F(0;360) = 0 + 8 \cdot 360 = 2880$$

Vậy giá trị lớn nhất của hiệu quả quảng cáo là $F = 3080$ đạt được khi quảng cáo 200 giây trên đài phát thanh và 360 giây trên truyền hình.