

138

BÀI TOÁN CHỌN LỌC

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP

- Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x) + g(x)$.
- Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(u)$ với u là một hàm số đối với biến x .

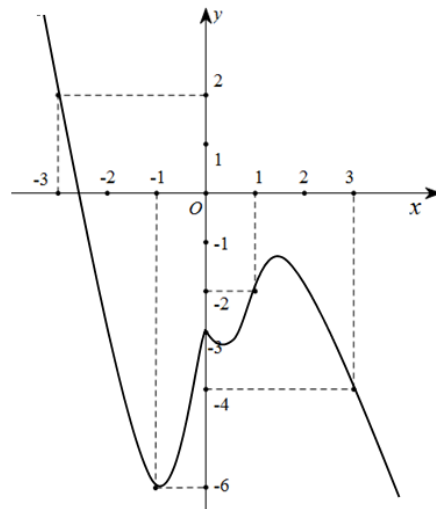
Phương pháp:

- Tính đạo hàm y' (nếu có)
- Giải các bất phương trình $y' > 0; y' < 0$ hoặc lập bảng xét dấu của y' .
- Đưa ra kết luận

Chú ý: Với hàm số hợp $y = f(u)$ có $y' = u' \cdot f'(u)$.

Với hàm hợp $y = (f(u))^n$ có $y' = n(f(u))^{n-1} \cdot [u' f'(u)]$.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-3; 1)$.B. $(1; 3)$.C. $(-\infty; 3)$.D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

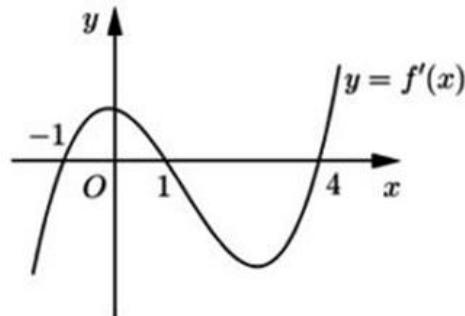
Ta có $y' = 2f'(x) + 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > -x - 1$.

Kẻ đường thẳng $y = -x - 1$ qua các điểm $(-3; 2), (-2; 1); (3; -4)$

Ta có $f'(x) > -x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$

Xét khoảng mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm bên trên đường thẳng $y = -x - 1$ suy ra hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



A. $(1; 3)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-2; 1)$.

D. $(-\infty; -2)$.

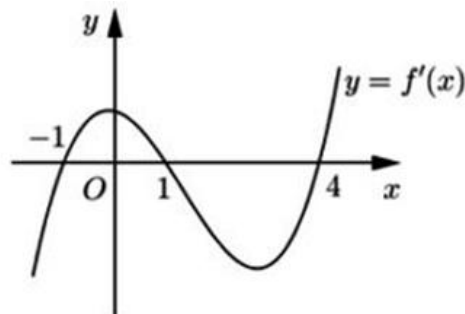
Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = -f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}.$$

Do đó, hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ đồng biến trên khoảng



A. $(0; \sqrt{6})$.

B. $(0; 1)$.

C. $(-\sqrt{3}; 0)$.

D. $(1; \sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = 2x \cdot f'(x^2 - 2) > 0$$

$$* \text{ Nếu } x > 0 \text{ thì } f'(x^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x^2 - 2 < 1 \\ x^2 - 2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x^2 < 3 \\ x^2 > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < \sqrt{3} \\ x > \sqrt{6} \end{cases}.$$

$$* \text{ Nếu } x < 0 \text{ thì } f'(x^2 - 2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x^2 - 2 < 4 \\ x^2 - 2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x^2 < 6 \\ x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ -\sqrt{6} < x < -\sqrt{3} \end{cases}.$$

Do đó, trong các đáp án đã cho thì hàm số $y = f(x^2 - 2)$ đồng biến trên khoảng $(1; \sqrt{3})$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2(x-1)(x^2-4)$. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(1; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = f'(2-x) = 2x \cdot f'(2-x) = 2x \cdot (2-x)^2(2-x-1)((2-x)^2-4)$

Do đó $y' = -(2-x)^2(1-x)(x^2-4x)$.

Suy ra $y' > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2(x^2-4x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 4 \end{cases}$

Vậy, từ các đáp án đã cho ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			3		3			
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

- A. $(-2; 0)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = f'(2-x) = 2x \cdot f'(x^2-2) = 2x \cdot f'(x^2-2) < 0$

* Nếu $x > 0$ thì $y' < 0 \Leftrightarrow f'(x^2-2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x^2-2 < 0 \\ x^2-2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 0 < x < \sqrt{2} \end{cases}$

* Nếu $x < 0$ thì $y' > 0 \Leftrightarrow f'(x^2-2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2 < -2 \\ 0 < x^2-2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < -\sqrt{2}$

Do đó, đáp án đúng trong các đáp án đã cho hàm khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$. Hỏi hàm số $y = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(0; 2)$. C. $(2; 4)$. D. $(-2; 1)$.



Lời giải

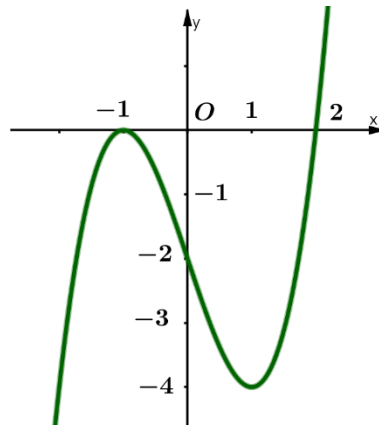
Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = \left(\frac{5x}{x^2+4} \right)' \cdot f' \left(\frac{5x}{x^2+4} \right) = \frac{5(4-x^2)}{(x^2+4)^2} \cdot \frac{5x}{x^2+4} \left(\frac{5x}{x^2+4} - 1 \right)^2 \left(\frac{5x}{x^2+4} - 2 \right).$$

$$\text{Do đó: } y' > 0 \Leftrightarrow (4-x^2)(5x-x^2-4)^2(5x-2x^2-8) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 2 < x < 4 \\ -2 < x < 0 \end{cases}.$$

Đối chiếu các phương án ta chọn C.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.**
- D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

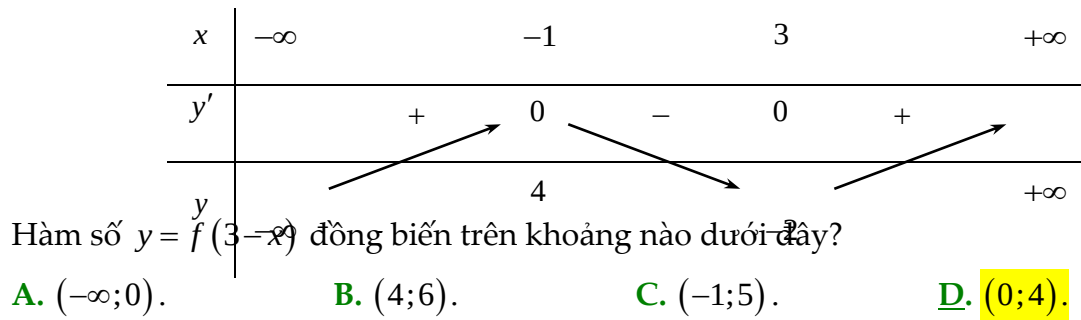
Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } g'(x) = 2xf'(x^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2 - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \\ x^2 - 2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2 < x < 0 \end{cases}.$$

Đối chiếu các phương án ta chọn C.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây



Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = -f'(3-x) > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow -1 < 3-x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 4$.

Vậy hàm số $y = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-4)g(x)$, trong đó $g(x) > 0, \forall x$.

Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -2)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-2; -1)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải

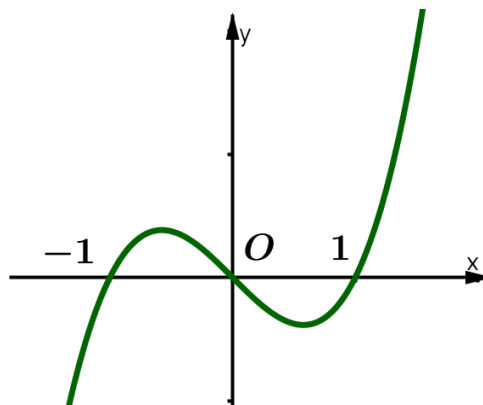
Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= 2xf'(x^2) = 2x(x^2)^2(x^2-1)(x^2-4)g(x^2) \\ &= 2x^5(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)g(x^2) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2 < x < -1 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-2; -1), (0; 1), (2; +\infty)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên



Hàm số $y = f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 f'(x^3)$.

Do $3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y' > 0 \Leftrightarrow f'(x^3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > 1 \\ -1 < x^3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$.

Suy ra hàm số $y = f(x^3)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x^2 - 1)(x - 4)$. Hàm số $y = f(3 - x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; 3)$.

B. $(-1; 3)$.

C. $(4; +\infty)$.

D. $(3; 4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = -f'(3 - x) = -(3 - x)[(3 - x)^2 - 1](3 - x - 4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \\ 3 < x < 4 \end{cases}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = xx^2(x - 1)(x^2 + mx + 5)$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. 4.

B. 5.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2xf'(x^2) = 2x(x^2)^2(x^2 - 1)(x^4 + mx^2 + 5) = 2x^5(x^2 - 1)(x^4 + mx^2 + 5)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x > 1 \Leftrightarrow 2x^5(x^2 - 1)(x^4 + mx^2 + 5)$,

$\forall x > 1 \Leftrightarrow x^4 + mx^2 + 5 \geq 0, \forall x > 1 \Leftrightarrow m \geq -\frac{x^4 + 5}{x^2}, \forall x > 1$. Đặt $g(x) = -\frac{x^4 + 5}{x^2} = -\left(x^2 + \frac{5}{x^2}\right)$

Ta có $x^2 + \frac{5}{x^2} \geq 2\sqrt{5} \Rightarrow g(x) \leq -2\sqrt{5}, \forall x > 1 \Rightarrow \max_{(1; +\infty)} g(x) = -2\sqrt{5}$ khi $x = \sqrt[4]{5}$.

$m \geq -\frac{x^4 + 5}{x^2} = g(x), \forall x > 1 \Rightarrow m \geq \max_{(1; +\infty)} g(x) = -2\sqrt{5} \approx -4,4$.

Vậy có 4 giá trị nguyên âm thỏa mãn bài toán.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x - 1)^2(3x^4 + mx^3 + 1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm m để hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.



Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = 2xf'(x^2) = 2x(x^2)(x^2 - 1)^2(3x^8 + mx^6 + 1).$$

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow 3x^8 + mx^6 + 1 \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{3x^8 + 1}{x^6} = g(x).$$

$$\text{Ta có } 3x^2 + \frac{1}{x^6} = x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^6} \geq 4 \Rightarrow g(x) \leq -4, \forall x > 0 \Rightarrow \max_{(0; +\infty)} g(x) = -4 \text{ khi } x = 1.$$

$$m \geq -\frac{3x^8 + 1}{x^6} = g(x), \forall x > 0 \Leftrightarrow m \geq \max_{(0; +\infty)} g(x) = -4.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên âm thỏa mãn bài toán.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2 + mx + 9)$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

A. 6.

B. 8.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } g(x) = f(3-x).$$

$$\text{Ta có } g'(x) = -f'(3-x) = -(3-x)(3-x-1)^2[(3-x)^2 + m(3-x) + 9] \geq 0$$

$$\text{Yêu cầu bài toán tương đương } g'(x) \geq 0, \forall x > 3 \Leftrightarrow (x-3)^2 - m(x-3) + 9 \geq 0,$$

$$\forall x > 3 \Leftrightarrow m \leq \frac{(x-3)^2 + 9}{x-3} = h(x), \forall x > 3$$

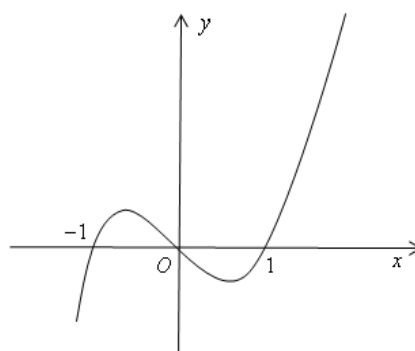
$$h(x) = \frac{(x-3)^2 + 9}{x-3} = x-3 + \frac{9}{x-3} \geq 6 \Rightarrow \min_{(3; +\infty)} h(x) = 6 \text{ khi } x = 6.$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{(x-3)^2 + 9}{x-3} = h(x), \forall x > 3 \Leftrightarrow m \leq \min_{(3; +\infty)} h(x) = 6.$$

Vậy có 6 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ





Hàm số $f(x^2)$ đồng biến khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = f(x^2)$.

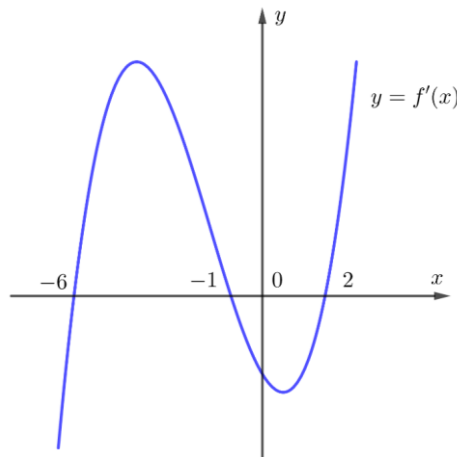
$$g'(x) = 2xf'(x^2) \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -1 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của $g(x)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên hàm số đồng biến trong khoảng $(-1; 0)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng



A. $(2;3)$.

B. $(-2;-1)$.

C. $(0;1)$.

D. $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

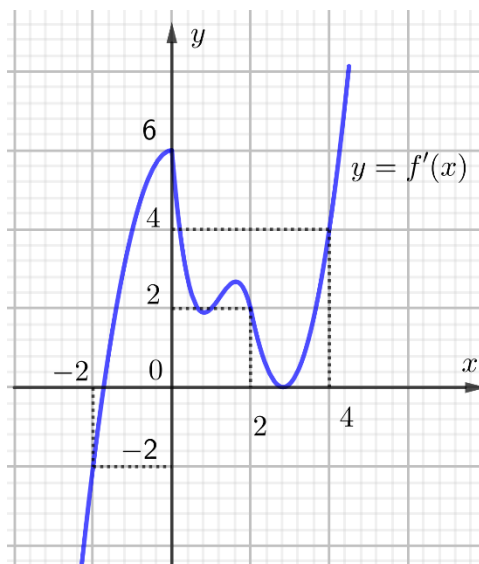
Ta có $y' = -2xf'(3-x^2) > 0 \Leftrightarrow xf'(3-x^2) < 0$.

$$\text{Với } x > 0 \Rightarrow f'(3-x^2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x^2 < -6 \\ -1 < 3-x^2 < 2 \end{cases} \xleftrightarrow{x>0} \begin{cases} x > 3 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } x < 0 \Rightarrow f'(3-x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < 3-x^2 < -1 \\ 3-x^2 > 2 \end{cases} \xleftrightarrow{x<0} \begin{cases} -1 < x < 0 \\ -3 < x < -2 \end{cases}$$

Đối chiếu **Chọn D**

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty; -2)$.

B. $(2;4)$.

C. $(-2;2)$.

D. $(2; +\infty)$.

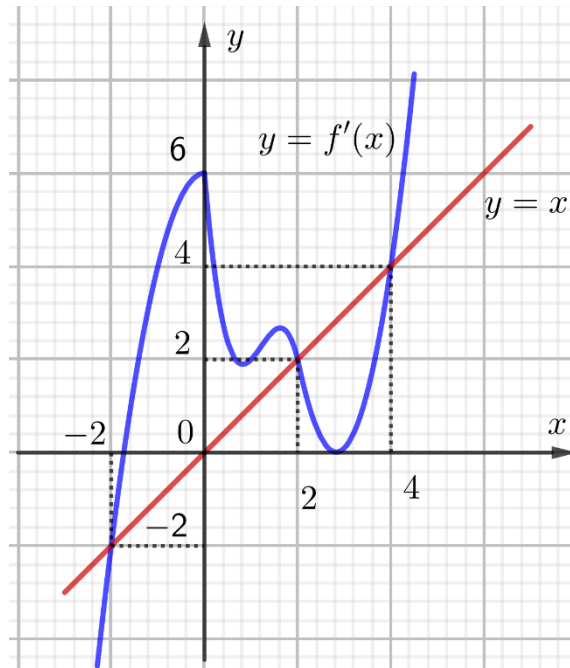
Lời giải

Chọn C



Ta có $h'(x) = 2f'(x) - 2x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > x$.

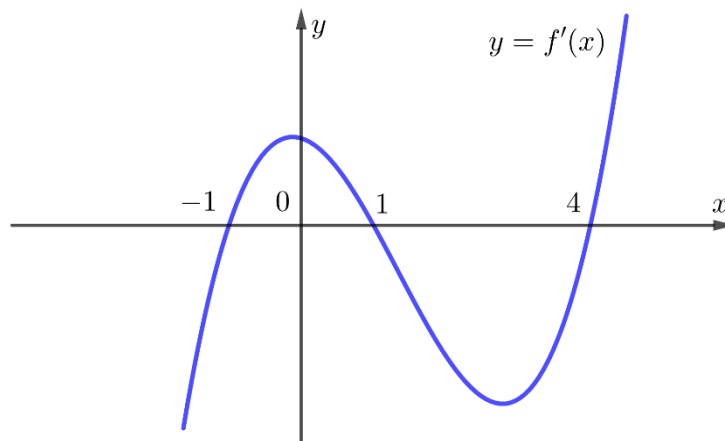
Kẻ đường thẳng $y = x$ đi qua các điểm $(-2; -2); (2; 2); (4; 4)$ ta thấy đường thẳng này cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại ba điểm có hoành độ $x = -2; x = 2, x = 4$.



Nhìn đồ thị ta có $f'(x) > x \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x > 4 \end{cases}$.

Đối chiếu đáp án **Chọn C**

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1; 0)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta đi giải bất phương trình

$$y' = 2xf'(x^2) > 0$$

$$\text{Với } x > 0 \Rightarrow f'(x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x^2 < 1 \\ x^2 > 4 \end{cases} \xrightarrow{x>0} \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 2 \end{cases}.$$

$$\text{Với } x < 0 \Rightarrow f'(x^2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < -1 \\ 1 < x^2 < 4 \end{cases} \xrightarrow{x<0} -2 < x < -1.$$

Đối chiếu với **Chọn D**

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 3 xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)f'''(x) = x(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = (f'(x))^2 - 2f(x)f''(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0;1)$.

B. $(-1;0)$.

C. $(4;+\infty)$.

D. $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f'(x)f''(x) - 2[f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)] \\ &= -2f(x)f'''(x) = -2x(x^2-1)(x-4). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x(x^2-1)(x-4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 1 < x < 4 \end{cases}.$$

Đối chiếu **Chọn B**

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = x(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x)f'(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0;2)$.

B. $(-\infty;0)$.

C. $(2;+\infty)$.

D. $(1;2)$.

Lời giải

Chọn C

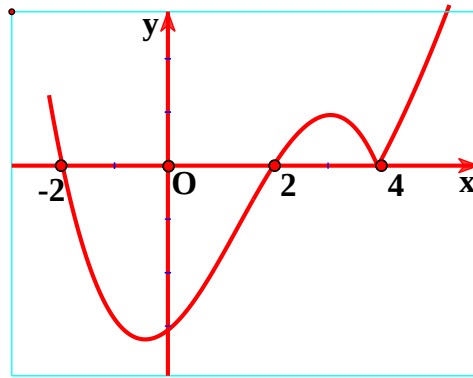
Ta có

$$g'(x) = (f'(x))^2 + f(x)f''(x) = x(x-1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}.$$



Đối chiếu đáp án **Chọn C**

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty; -2)$.

B. $(-\sqrt{2}; 0)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-2; \sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 2xf'(x^2) > 0 \Leftrightarrow 2x[x^2 - (-2)](x^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} < x < 0 \end{cases}$.

Đối chiếu các đáp án. **Chọn B**

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = f(x + \sqrt{x^2 + 1})$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow y' = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) f'(x + \sqrt{x^2 + 1}) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow f'(x + \sqrt{x^2 + 1}) \geq 0, \forall x(1).$$

Đặt $t = x + \sqrt{x^2 + 1} \in (0; +\infty), \forall x$ và $f'(x) = 3x^2 - 2mx + 6 - m$.

Do vậy: $(1) \Leftrightarrow f'(t) \geq 0, \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3t^2 - 2mt + 6 - m \geq 0, \forall t \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{3t^2 + 6}{2t + 1}, \forall t \in (0; +\infty) \quad m \leq \min_{[0; +\infty)} \left\{ y = \frac{3t^2 + 6}{2t + 1} \right\} = y(1) = 3 \Rightarrow m \in \{1, 2, 3\}.$$

Chọn B

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$. Có bao nhiêu số nguyên không âm m để hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

A. 6.

B. 3.

C. 5.

D. 4.



Lời giải

Chọn D

Ta có, yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow y' = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right) \cdot f'(\sqrt{x^2+1} - x) \leq 0, \forall x \Leftrightarrow f'(\sqrt{x^2+1} - 1) \geq 0, \forall x \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+1} - x; t \in (0; +\infty), \forall x \text{ và } f'(x) = 3x^2 - 2mx + 6 - m.$$

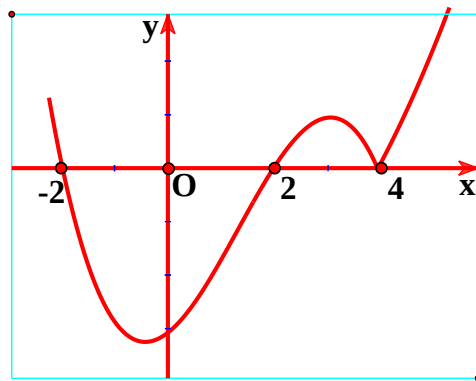
Do vậy

$$(1) \Leftrightarrow f'(t) \geq 0, \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3t^2 - 2mt + 6 - m \geq 0, \forall t \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{3t^2+6}{2t+1}, \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \frac{3t^2+6}{2t+1}, \forall t \in [0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{[0; +\infty)} \left\{ y = \frac{3t^2+6}{2t+1} \right\} = y(1) = 3 \Rightarrow m \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(5 - 2e^x)$ đồng biến trên khoảng (a, b) . Giá trị lớn nhất của $b - a$ bằng



A. $\ln \frac{10}{3}$.

B. $\ln \frac{7}{3}$.

C. $\ln \frac{5}{2}$.

D. $\ln \frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta

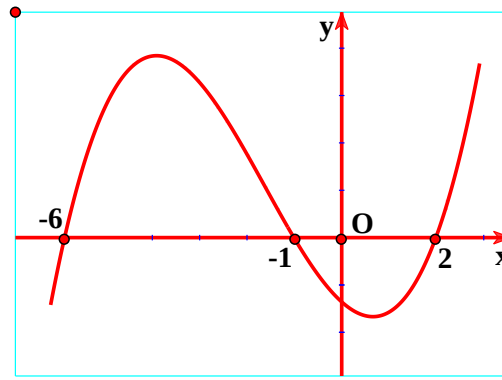
có:

$$y' = -2e^x f'(5 - 2e^x) > 0 \Leftrightarrow f'(5 - 2e^x) < 0 \Leftrightarrow -2 < 5 - 2e^x < 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < e^x < \frac{7}{2} \Leftrightarrow \ln \frac{3}{2} < x < \ln \frac{7}{2}$$

$$\text{Vậy } (b - a)_{\max} = \ln \frac{7}{2} - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{7}{3}$$

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?





A. (2;3).

B. (0;1).

C. (-2;-1).

D. (-1;0).

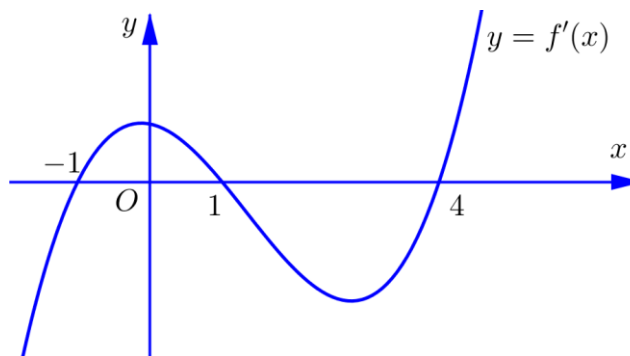
Lời giải

Chọn D

$$y' = -2xf'(3-x^2) > 0 \Leftrightarrow xf'(3-x^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow x(3-x^2-(-6))(3-x^2-(-1))(3-x^2-2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -3 < x < -2 \\ -1 < x < 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f\left(\frac{1-2\tan x}{3}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\frac{\pi}{2}; -\arctan \frac{11}{2}\right)$.

B. $\left(-\frac{\pi}{4}; \arctan 2\right)$.

C. $\left(-\arctan \frac{11}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$.

D. $\left(-\frac{\pi}{4}; \arctan \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có hàm số $y = f\left(\frac{1-2\tan x}{3}\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ nên ta chỉ cần xét trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ có

$$y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} f' \left(\frac{1-2 \tan x}{2} \right) > 0 \Leftrightarrow f' \left(\frac{1-2 \tan x}{3} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-2 \tan x}{3} < -1 \\ 1 < \frac{1-2 \tan x}{3} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x > 2 \\ -\frac{11}{2} < \tan x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arctan 2 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\arctan \frac{11}{2} < x < -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với a, b, c, d, e là các số nguyên không âm nhỏ hơn 6 và $f(6) = 2019$. Hàm số $y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{5}{4}; \frac{7}{4}\right)$. B. $\left(2; \frac{9}{4}\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{9}{4}\right)$. D. $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta

có

$$f(6) = 2019 \Leftrightarrow a \cdot 6^4 + b \cdot 6^3 + c \cdot 6^2 + d \cdot 6 + e = 2019$$

$$a \cdot 6^4 + b \cdot 6^3 + c \cdot 6^2 + d \cdot 6 + e = 6^4 + 3 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0$$

$$\Leftrightarrow \overline{abcde}_{(6)} = \overline{13203}_{(6)} \Leftrightarrow a = 1, b = 3, c = 2, d = 0, e = 3$$

$$\text{Suy ra } f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3.$$

Khi

đó

$$y' = -f'(1-x) + x - 1 = -\left(4(1-x)^3 + 9(1-x)^2 + 4(1-x)\right) + x - 1$$

$$\Leftrightarrow y' = (x-1)(x-2)(4x-9) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{9}{4} \text{ hoặc } 1 < x < 2.$$

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số nguyên không âm nhỏ hơn 9 và $f(9) = 2019$. Hàm số $y = f(x) - \frac{2}{3}(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-\infty; -\frac{6}{5}\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(-\frac{11}{9}; -1\right)$. D. $\left(-\frac{5}{6}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(9) = 2019 \Leftrightarrow a \cdot 9^3 + b \cdot 9^2 + c \cdot 9^1 + d = 2019 \quad a \cdot 9^3 + b \cdot 9^2 + c \cdot 9^1 + d = 2 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^1 + 1$$



$$\Leftrightarrow \overline{abcd}_{(9)} = \overline{2681}_{(9)} \Leftrightarrow a = 2, b = 6, c = 8, d = 1$$

Suy ra $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 1$.

Khi đó $y' = f'(x) - \frac{2}{3}(1-2x) = 6x^2 + 12x + 8 - \frac{2}{3}(1-2x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{11}{9} < x < -1$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới đây. Hàm số $y = [f(x)]^2 - 6f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			1		3				

Diagram showing arrows indicating the behavior of the function: from $-\infty$ to 1 (increasing), from 1 to 3 (decreasing), from 3 to $-\infty$ (increasing), and from $-\infty$ to $-\infty$ (decreasing).

- A. $(-1;1)$. B. $(6;+\infty)$. C. $(1;6)$. D. $(-\infty;-2)$.

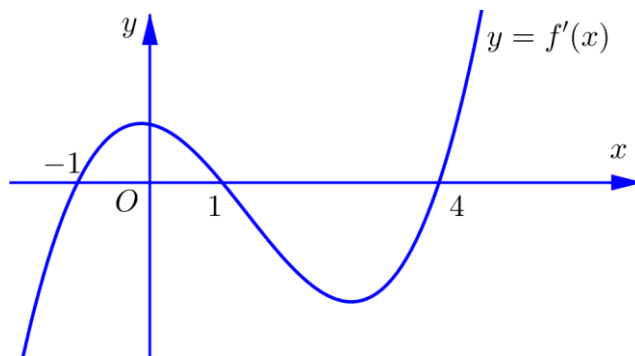
Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 2f(x)f'(x) - 6f'(x) = 2[f(x) - 3] \cdot f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$

Vì dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x) \leq 3, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) - 3 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'\left(3x - \frac{1}{2}\right)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2x-1)$ nghịch biến trên khoảng



- A. $\left(\frac{5}{4}; \frac{11}{4}\right)$. B. $\left(1; \frac{5}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left(\frac{9}{4}; \frac{15}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $y' = 2f'(2x-1) < 0 (*)$.

$$\text{Đặt } 2x-1=3t-\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$$

$$\text{Khi đó } (*) \text{ trở thành } f'\left(3t-\frac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ 1 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{1}{3} < -1 \\ 1 < \frac{2}{3}x-\frac{1}{3} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 2 < x < \frac{13}{2} \end{cases}$$

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Có bao nhiêu số nguyên không âm m để hàm số

$y = f(m-x) + (m-1)x$ đồng biến trên khoảng có độ dài không vượt quá 4.

A. 11.

B. 2.

C. 10.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$y' = -f'(m-x) + m-1 = -[3(m-x)^2 - 3] + m-1 = -3x^2 + 6mx - 3m^2 + m + 2$$

Ta có y' luôn có hai nghiệm phân biệt vì

$$x_1 < x_2 \quad \Delta' = 9m^2 + 3 - 3m^2 + m + 2 = 3(m+2) > 0, \forall m \geq 0$$

Do đó hàm đồng biến trên khoảng $x_1; x_2$ theo yêu cầu bài toán ta có

$$|x_2 - x_1| \leq 4 \Leftrightarrow x_2 - x_1^2 \leq 16 \Leftrightarrow x_1 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4\left(\frac{-3m^2 + m + 2}{-3}\right) - 16 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 10.$$

Vậy $m \in \{0; 2; \dots; 10\}$. Có 11 số nguyên không âm m thỏa mãn.

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số

$y = f(m-x) + (m-1)x$ đồng biến trên khoảng $8; 9$.

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$y' = -f'(m-x) + m-1 = -[3(m-x)^2 - 3] + m-1 = g(x) = -3x^2 + 6mx - 3m^2 + m + 2$$

$$\text{Với } \Delta' = 9m^2 + 3 - 3m^2 + m + 2 = 3(m+2)$$

$$\text{TH1: } \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2 \Rightarrow y' \leq 0, \forall x.$$



TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -2$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ và hàm số đồng biến trên $x_1; x_2$.

Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$(8;9) \subset x_1; x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq 8 < 9 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3g(8) \leq 0 \\ -3g(9) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 49m - 190 \geq 0 \\ -3m^2 + 55m - 241 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{55 - \sqrt{133}}{6} \leq m \leq 10$$

Vậy $m \in \{8, 9, 10\}$. Có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 33: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Số thực m nhỏ nhất để hàm số

$y = f(m - x) + (m - 1)x$ đồng biến trên khoảng $8;9$ là $\frac{a - \sqrt{b}}{c}$, với a, b, c là các số

nguyên dương và $\frac{a}{c}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng:

A. 194.

B. 72.

C. 193.

D. 75.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$y' = -f'(m - x) + m - 1 = -[3(m - x)^2 - 3] + m - 1 = g(x) = -3x^2 + 6mx - 3m^2 + m + 2$$

$$\text{Với } \Delta' = 9m^2 + 3 - 3m^2 + m + 2 = 3(m + 2)$$

TH1: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2 \Rightarrow y' \leq 0, \forall x$.

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -2$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ và hàm số đồng biến trên $x_1; x_2$.

Theo yêu cầu bài toán ta có:

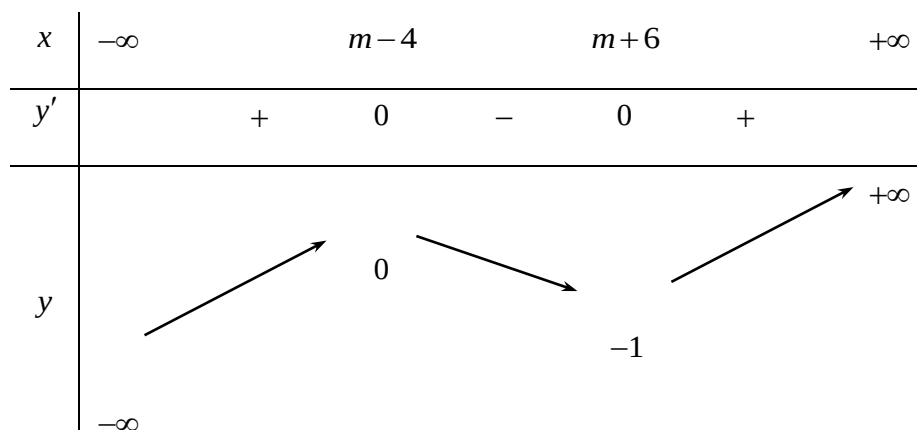
$$(8;9) \subset x_1; x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq 8 < 9 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3g(8) \leq 0 \\ -3g(9) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 49m - 190 \geq 0 \\ -3m^2 + 55m - 241 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{55 - \sqrt{133}}{6} \leq m \leq 10$$

$a=55, b=133, c=6$ và $a+b+c=194$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:





Có bao nhiêu số nguyên $m \in -40; 40$ để hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $2; +\infty$.

A. 37.

B. 39.

C. 36.

D. 76.

Lời giải

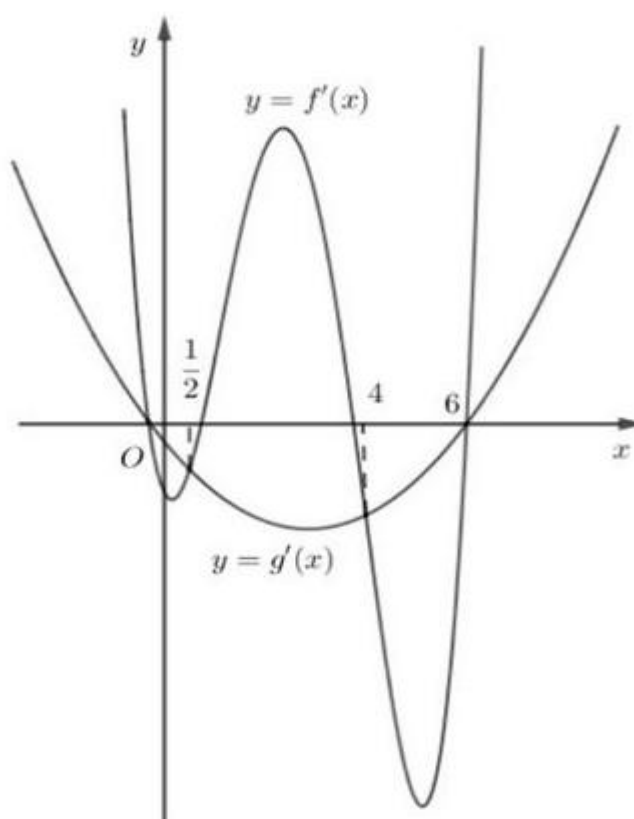
Chọn A

$$ycbt \Leftrightarrow y' = 2xf'(x^2) \geq 0, \forall x \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq m+6 \\ x^2 \leq m-4 \end{cases}, \forall x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq m+6, \forall x \geq 2 \Leftrightarrow 4 \geq m+6 \Leftrightarrow m \leq -2$$

Vì số nguyên $m \in -40; 40$ nên $m \in \{-39, -38, \dots, -2\}$. Có 38 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị $y = f'(x), y = g'(x)$ như hình vẽ dưới.



Hàm số $y = f(x) - g(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

- A. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(\frac{9}{2}; 6\right)$. C. $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$. D. $\left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = f'(x) - g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 4 \\ x > 6 \\ x < a \approx -0,25 \end{cases} \text{ . Đối chiếu Chọn C}$$

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 4x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(\cos x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$. B. $\left(\frac{2\pi}{3}; \pi\right)$. C. $\left(-\frac{\pi}{3}; 0\right)$. D. $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f(\cos x)$ tuần hoàn chu kỳ $T = 2\pi$. Do vậy ta chỉ xét trên đoạn $[-\pi; \pi]$.

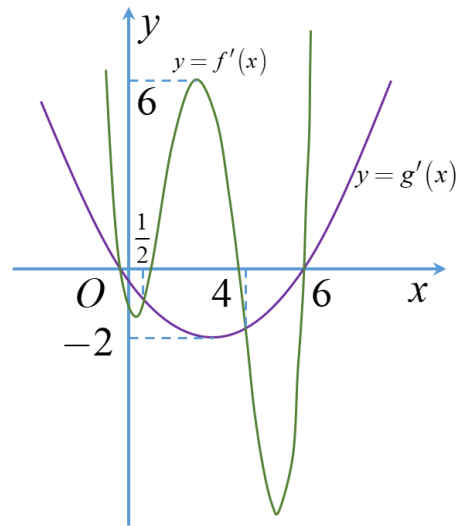
$$y' = -\sin x \cdot f'(\cos x) = -\sin x \cos^2 x - 4\cos^2 x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \sin^2 x - 4\sin^2 x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \leq \sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi \\ -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq -\pi \end{cases}.$$

Chú ý: Chúng ta có thể tính đạo hàm tại một điểm trong khoảng trong các đáp án để chọn được đáp án đúng.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, $y = g'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f\left(2x + \frac{1}{2}\right) - g(3x + 6) - 18x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?





- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$. B. $\left(\frac{11}{4}; +\infty\right)$. C. $\left(-2; \frac{5}{4}\right)$. **D. $\left(-\frac{1}{4}; \frac{11}{4}\right)$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } y' \leq 0 \Leftrightarrow 2f'\left(2x + \frac{1}{2}\right) - 3g' \quad 3x+6 \quad -18 \leq 0 \Leftrightarrow 2f'\left(2x + \frac{1}{2}\right) \leq 3g' \quad 3x+6 \quad +18$$

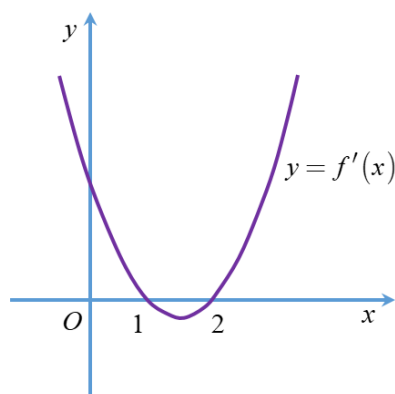
Quan sát đồ thị đã cho có $\max_{0;6} f' \quad x = 6$ và $\min_{\mathbb{R}} g' \quad x = -2$

Do vậy ta chỉ cần chọn $0 < 2x + \frac{1}{2} < 6 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{11}{4}$ thì

$$2f'\left(2x + \frac{1}{2}\right) \leq 12 \leq 3g' \quad 3x+6 \quad +18$$

Vậy hàm số $y = f\left(2x + \frac{1}{2}\right) - g \quad 3x+6 \quad -18x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{4}; \frac{11}{4}\right)$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f \quad x$ có đồ thị của hàm số $y = f' \quad x$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f \quad \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $-\infty; -1$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $-1; +\infty$.

Lời giải

Chọn A

Ta cần giải

$$y' > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \right) f' \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2} > 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 \sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2+2x+3} f' \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2} > 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 f' \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2} < 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2} - 1 \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2} - 2 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^4 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $f(1) = 100, f(2) = 200, f(3) = 300$.

Hàm số $f(x) = \frac{f(x) - 100x}{6x - d}$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn nhất bằng?

- A. 4. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. 2. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Có $g(x) = f(x) - 100x = x^4 + ax^3 + bx^2 + c - 100x + d$ và theo giả thiết ta có:

$$g(1) = g(2) = g(3) = 0 \text{ do đó}$$

$$g(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \Leftrightarrow f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 100x$$



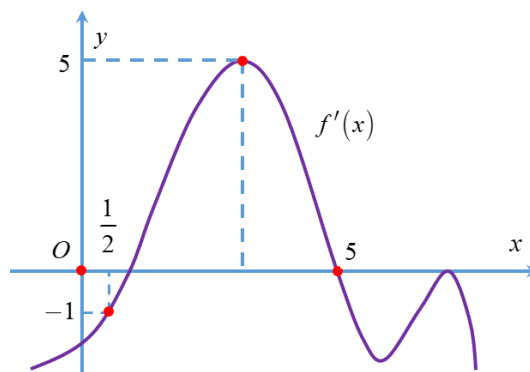
Đồng nhất hệ số tự do của $f(x)$ ta có

$$6m = d \Leftrightarrow m = \frac{d}{6} \Rightarrow f(x) = \left(x - \frac{d}{6}\right)(x-1)(x-2)(x-3) + 100x$$

$$\text{Vậy } y = \frac{f(x) - 100x}{6x - d} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow y' = \frac{1}{6}(3x^2 - 12x + 11) < 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} < x < 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(3x+2) - (x-1)^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

B. $\left(\frac{1}{2}; 5\right)$.

C. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } y' = 3f'(3x+2) - 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow f'(3x+2) > \frac{2(x-1)}{3}$$

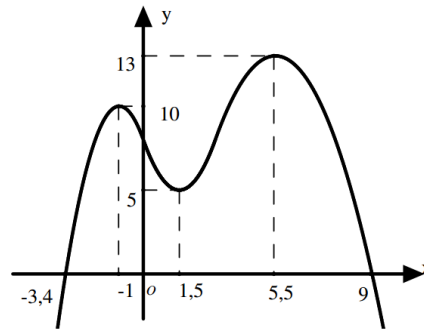
$$\text{Đặt } t = 3x+2 \Leftrightarrow x = \frac{t-2}{3}, \text{ bất phương trình trở thành } f'(t) > \frac{2}{9}t - 5$$

$$\text{Kẻ trên đồ thị đường thẳng } y = \frac{2}{9}x - 5 \text{ qua hai điểm } \left(\frac{1}{2}; -1\right) \text{ và } (5; 0).$$

$$\text{Suy ra } f'(t) > \frac{2}{9}t - 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < t < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 3x+2 < 5 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 1.$$

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên





Hàm số $y = 39f(x) - 8x^3 + 45x^2 - 276x + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-1; \frac{11}{2}\right)$

B. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$

D. $\left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$

Lời giải

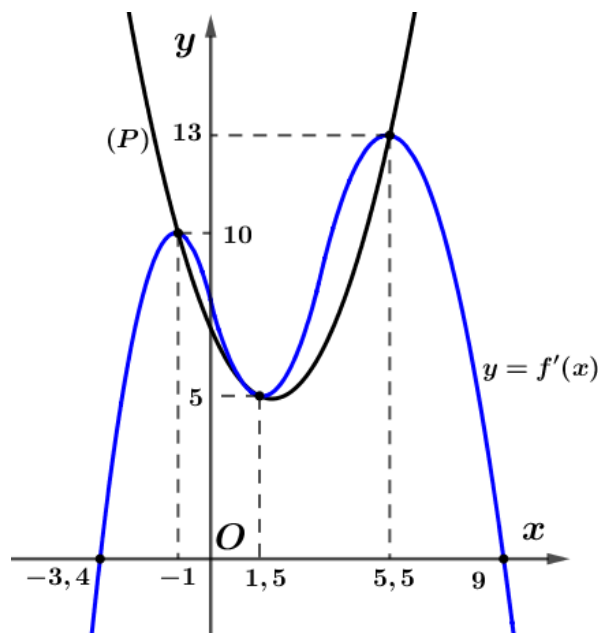
Chọn A

Ta có:

$$y' = 39f'(x) - 24x^2 + 90x - 276$$

$$\text{Hàm số đã cho đồng biến} \Leftrightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq \frac{24x^2 - 90x + 276}{39}$$

Gọi (P) là đồ thị hàm số $y = \frac{24x^2 - 90x + 276}{39}$. Ta có đồ thị hàm số $f'(x)$ và (P) được thể hiện trong hình sau:



Từ đồ thị trên ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên parabol (P) trên khoảng $\left(-1; \frac{11}{2}\right)$.

$$\text{Vậy } f'(x) \geq \frac{24x^2 - 90x + 276}{39} \Leftrightarrow x \in \left(-1; \frac{11}{2}\right)$$

Vậy **Chọn A**

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(1; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -1)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3f'(x+2) - 3x^2 + 3$

Đặt $t = x+2 \Rightarrow x = t-2$ khi đó ta có:

$$y' = 3f'(t) - 3(t-2)^2 + 3 = 3[f'(t) - (t^2 - 4t + 3)]$$

Ta có bảng xét dấu như sau:

t	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(t)$		- 0	+ 0	+ 0	- 0	+
$-(t^2 - 4t + 3)$		- 0	+ 1	+ 0	- -3	-
y'		-	+	+	-	Chưa rõ dấu

Vậy ta thấy $y' \geq 0 \Leftrightarrow t \in [1; 3] \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $(-1; 0)$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-4; -3)$. **B.** $(0; 1)$. **C.** $(-2; -1)$. **D.** $(-2; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = (f(x^2 + 2x))' = (2x+2)f'(x^2 + 2x)$.

Xét bất phương trình $y' \leq 0 \Leftrightarrow (2x+2)f'(x^2 + 2x) \leq 0$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ f'(x^2 + 2x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ -2 \leq x^2 + 2x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1$$



$$\text{TH2: } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ f'(x^2+2x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+2x \leq -2 \text{ (vn)} \\ x^2+2x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -3 \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-3; -1)$ và $(1; +\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(-2; -1)$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = 3f(-x+2) + e^{x^3+3x^2-9x+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-2; 1)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = (3f(-x+2) + e^{x^3+3x^2-9x+1})' = -3f'(-x+2) + (3x^2+6x-9)e^{x^3+3x^2-9x+1}$

Đặt $t = -x+2 \Rightarrow x = 2-t$

Khi đó $y' = -3f'(t) + 3(t^2-6t+5)e^{-t^3+9t^2-15t+3}$

Ta có bảng xét dấu:

t	$-\infty$	-1	1	2	5	$+\infty$		
$-3f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$3(t^2-6t+5)$		$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

Từ đó suy ra, với $t \in [1; 5]$ thì $y' \leq 0$.

Từ $t \in [1; 5] \Rightarrow 1 \leq -x+2 \leq 5 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow$ Trên $(-3; 1)$, hàm số $y = 3f(-x+2) + e^{x^3+3x^2-9x+1}$ nghịch biến.

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(-2; 1)$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			3		2	
	$-\infty$		1		0	$+\infty$

Hàm số $y = (f(x))^3 - 3(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. (2;3). B. (1;2). C. (3;4). D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3f(x)(f(x) - 2) \cdot f'(x)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có trên (2;3) thì $f(x) > 0$, $f(x) - 2 < 0$, $f'(x) > 0$.

Do đó $y' < 0$ hay hàm số nghịch biến trên (2;3).

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Xét hàm số $g(x) = f(1-x) + 3^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.
 B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng (0;2).
 C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
 D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng (0;1).

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = -f'(1-x) + 3^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x} (x^2 - 3x + 2) \ln 3$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến khi $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -f'(1-x) + 3^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x} (x^2 - 3x + 2) \ln 3 \geq 0$.

Ta có $-f'(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(1-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1-x \leq 1 \\ 1-x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$

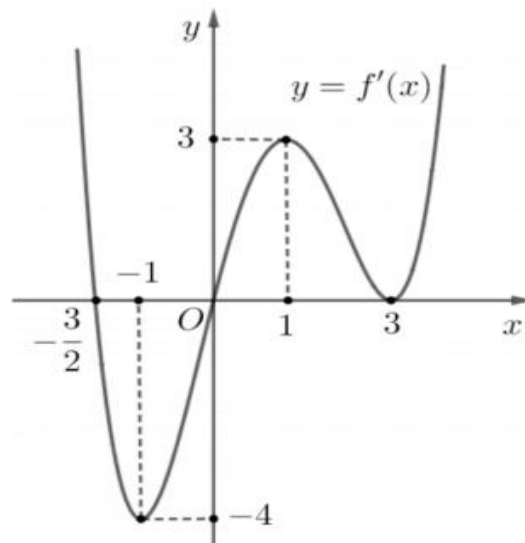
Và $3^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x} (x^2 - 3x + 2) \ln 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$.

Suy ra trên $(3; +\infty)$ thì $g'(x) > 0$.



Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = f(3x-1) + x^3 - 3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.

A. 8.

B. 6.

C. 10.

D. 13.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3f'(3x-1) + 3x^2 - 3m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$ thì $y' = 3f'(3x-1) + 3x^2 - 3m \geq 0 \quad \forall x \in (-2; 1)$

$$\Leftrightarrow f'(3x-1) + x^2 - m \geq 0 \quad \forall x \in (-2; 1) \Rightarrow m \leq g(x) = f'(3x-1) + x^2, \forall x \in (-2; 1) \quad (*)$$

Ta có: $f'(3x-1) \geq f'(-1) = -4, x^2 \geq 0 \Rightarrow f'(3x-1) + x^2 \geq -4$.

Suy ra điều kiện (*) tương đương: $m \leq \min_{(-2; 1)} g(x) = -4 \Rightarrow m = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4\}$

Vậy có 6 giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-6		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

hàm số $y = f(2x-2) - 2e^x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $y' = 2f'(2x-2) - 2e^x$

Để hàm số nghịch biến thì điều kiện cần là:

$$\begin{cases} f'(2x-2) < 0 \\ -2e^x < 0 \text{ (LD)} \end{cases} \Leftrightarrow f'(2x-2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 < -6 \\ -4 < 2x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

Suy ra **Chọn C**

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = 6f(x-1) - 2x^3 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(2; +\infty)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 6.f'(x-1) - 6x^2 + 6x$. $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x-1) = x^2 - x$

Đặt $t = x-1 \Rightarrow x = t+1$.

Khi đó ta có phương trình: $f'(t) = (t+1)^2 - (t+1) \Leftrightarrow f'(t) = t^2 + t (*)$.

Nhận thấy phương trình $(*)$ có nghiệm $t = 0; t = -1$.

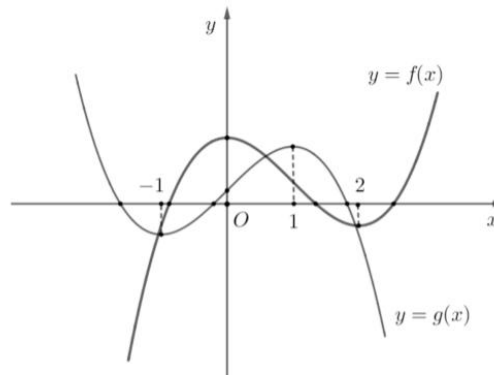
Trên khoảng $(-1; 0)$ thì $f'(t) > 0$ và $t^2 + t < 0$ nên $f'(t) - (t^2 + t) > 0$.

Nên hàm số $y(t)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Suy ra hàm số $y(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$

Câu 50: Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong **đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hai hàm số $y = f(-2x+1)$ và $y = g(ax+b), (a, b \in \mathbb{Q})$ có cùng khoảng đồng biến. Giá trị của $a+2b$ bằng:





A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

+) Xét hàm số: $y = f(-2x+1)$ có: $y' = -2 \cdot f'(-2x+1)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow -2 \cdot f'(-2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow f'(-2x+1) \leq 0$.

$$\Leftrightarrow 0 \leq -2x+1 \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

+) Xét hàm số: $y = g(ax+b), (a, b \in \mathbb{Q})$ có $y' = a \cdot g'(ax+b)$.

TH1: Nếu $a < 0$:

Hàm số $y = g(ax+b), (a, b \in \mathbb{Q})$ đồng biến $\Leftrightarrow y' \geq 0$

$$\Leftrightarrow a \cdot g'(ax+b) \geq 0 \Leftrightarrow g'(ax+b) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax+b \leq -1 \\ ax+b \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-1-b}{a} \\ x \leq \frac{1-b}{a} \end{cases}.$$

Không thỏa mãn giả thiết hàm số $y = f(-2x+1)$ và $y = g(ax+b), (a, b \in \mathbb{Q})$ có cùng khoảng đồng biến.

TH2: Nếu $a = 0$ thì $y = g(b)$ là hàm hằng.

Không thỏa mãn giả thiết hàm số $y = f(-2x+1)$ và $y = g(ax+b), (a, b \in \mathbb{Q})$ có cùng khoảng đồng biến.

TH3: Nếu $a > 0$: Hàm số $y = g(ax+b), (a, b \in \mathbb{Q})$ đồng biến $\Leftrightarrow y' \geq 0$

$$\Leftrightarrow a \cdot g'(ax+b) \geq 0 \Leftrightarrow g'(ax+b) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq ax+b \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1-b}{a} \leq x \leq \frac{1-b}{a}.$$

Hàm số $y = f(-2x+1)$ và $y = g(ax+b), (a, b \in \mathbb{Q})$ có cùng khoảng đồng biến

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1-b}{a} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1-b}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Vậy $a+2b=2$.

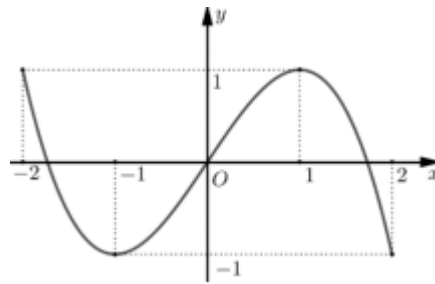
Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng:

A. $(1;2)$.

B. $(-1;0)$.

C. $(0;1)$.

D. $(-2;-1)$.



Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1$

+ Vì $\cos x \in [-1;1] \Rightarrow -\sin x \cdot f'(\cos x) \in [-1;1]$ mà $2x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

+ Suy ra $y' = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1 \geq 0, \forall x \geq 1$ hay hàm số tăng trên $[1; +\infty)$

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+

Hàm số $y = 2f(1-x) + \sqrt{x^2+1} - x$ nghịch biến trên khoảng nào:

A. $(-\infty;1)$.

B. $(-\infty;-2)$.

C. $(-3;-2)$.

D. $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = -2f'(1-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0.$$

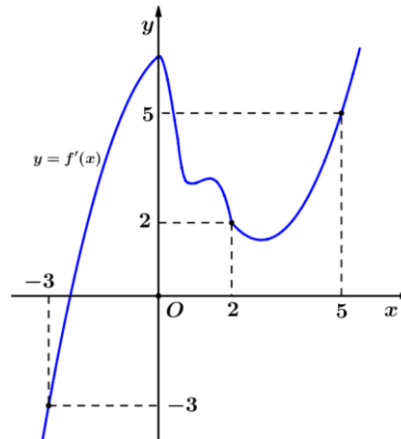


Ta có: $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi: $1 < 1-x < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 0$ thì $f'(1-x) > 0 \Rightarrow -2f'(1-x) < 0$.

Vậy $-2f'(1-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0, \forall x \in (-2; 0)$. Hàm số nghịch biến trên $(-2; 0)$.

Câu 53: [2D1-1.4-3] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.

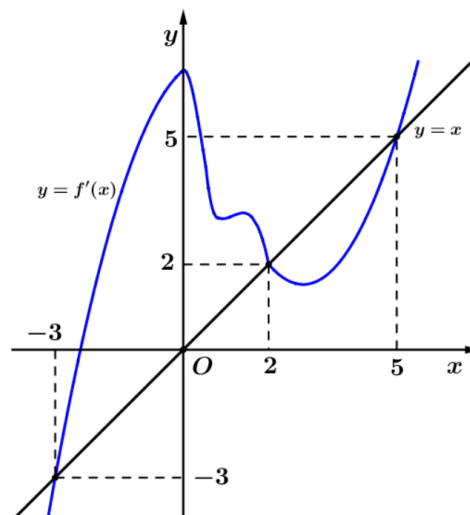
B. $(-\infty; 2)$.

C. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải

Chọn A



Xét hàm số $g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4)$

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = -2f'(-2x+1) - 4x + 2.$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f'(-2x+1) - 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow f'(-2x+1) < -2x+1 \text{ (hay } f'(t) < t, \text{ với } t = -2x+1)$$

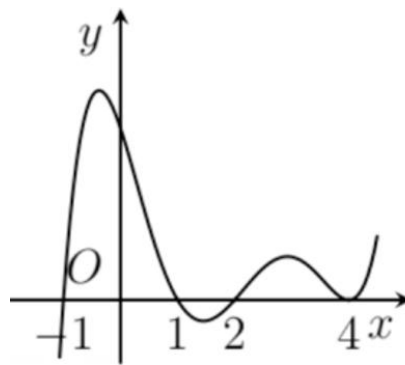
$$\text{Từ đồ thị ta thấy } f'(-2x+1) < -2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 < -3 \\ 2 < -2x+1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2 < x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Hay } g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2 < x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Như vậy trên mỗi khoảng $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $(2; +\infty)$ hàm số $y = g(x)$ đồng biến.

Soi các phương án ta thấy phương án A thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 54: [2D2-4.3-3] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

- A. $(0; 1)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-1; 0)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = (1-2x)' \cdot f'(1-2x) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = g'(x) = 2 \ln 2 \cdot f'(1-2x) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < 0.$$

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta thấy

$$f'(1-2x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x < -1 \\ 1 < 1-2x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases}$$

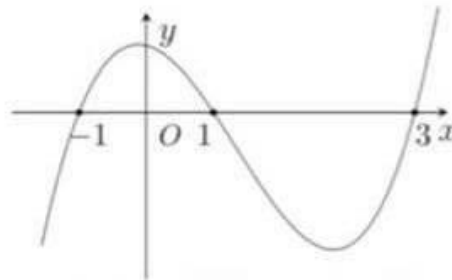
$$\text{Hay } g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases}.$$

Như vậy trên mỗi khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $(1; +\infty)$ hàm số $y = g(x)$ nghịch biến.

Soi các phương án ta thấy phương án D thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

- A. 4. B. 3. C. 6. **D. 5.**



Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = f(x+m)$. Ta có $g'(x) = f'(x+m)$.

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow f'(x+m) \leq 0, \forall x \in (1; 2)$$

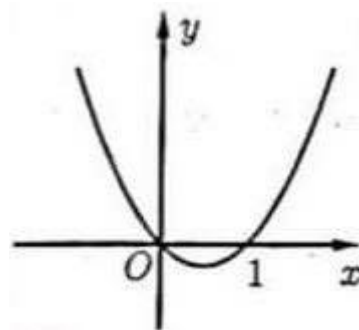
$$\Leftrightarrow f'(t) \leq 0, \forall t \in (1+m; 2+m) \text{ với } t = x+m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m \leq -1 \\ 1 \leq 1+m < 2+m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

Vì $m \in [-5; 5]$ nên $m \in \{-5; -4; -3; 0; 1\}$.

Câu 56: Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(-x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. B. $(-1; 0)$. C. $(-2; -1)$. **D. $(1; 2)$.**



Lời giải

Chọn D

$$g'(x) = (-1-2x)f'(-x-x^2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ -x-x^2 = 0 \\ -x-x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$		
$-1-2x$	+		+	0	-		-
$f'(-x-x^2)$	+	0	-		-	0	+
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	+
$g(x)$	</						

Vậy **Chọn D**

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Đặt $g(x) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 3$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.**
- C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-4; -1)$.
- D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(7; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{1}{2}f'\left(\frac{x-1}{2}\right) - x^2 + 3x - 2 = \frac{1}{2}\left[f'\left(\frac{x-1}{2}\right) - 2x^2 + 6x - 4\right].$$

Hàm số nghịch biến

$$\begin{aligned} \text{khi } g'(x) < 0 &\Rightarrow f'\left(\frac{x-1}{2}\right) - 2x^2 + 6x - 4 < 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x^2 + 6x - 4 < 0 \\ f'\left(\frac{x-1}{2}\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \\ -\frac{5}{2} < \frac{x-1}{2} < \frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{2} > 3 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \\ -4 < x < 2 \\ x > 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 < x < 1 \\ x > 7 \end{cases}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra B sai.

Câu 58: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Hàm số $g(x) = \log_2(f(2x))$ đồng biến trên khoảng

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$

A. $(1; 2)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(-1; 1)$.

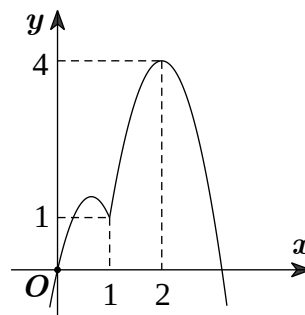
Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = \frac{2f'(2x)}{f(2x)\ln 2}$.

Hàm số đồng biến khi $g'(x) = \frac{2f'(2x)}{f(2x)\ln 2} > 0 \Rightarrow f'(2x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 < 2x < 1 \\ 2x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$.

Câu 59: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y = |3f(x) - x^3|$ đồng biến trên khoảng

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $(0; 2)$.

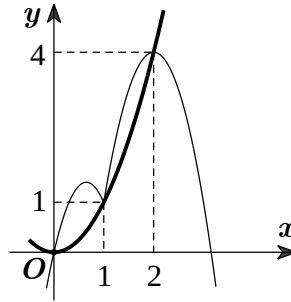
D. $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = 3f(x) - x^3$ có $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$ cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại 3 điểm $x = 0, x = 1, x = 2$ (như hình vẽ).



Từ đây ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$ (như hình trên).

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	
$g(x)$	$+\infty$	↘						$3f(2) - 8$	↘
			0						$-\infty$

Dùng phép đối xứng đồ thị, ta thu được hàm số $y = |g(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ và $(a; +\infty)$ với $a > 2$.

Câu 60: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	

Biết rằng $1 < f(x) < 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f[f(x)] + x^3 - 6x^2 - 1$ nghịch biến trên khoảng

A. $(3; 4)$.

B. $(-3; -2)$.

C. $(1; 3)$.

D. $(-2; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' < 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'[f(x)] + 3x^2 - 12x < 0$ (*)

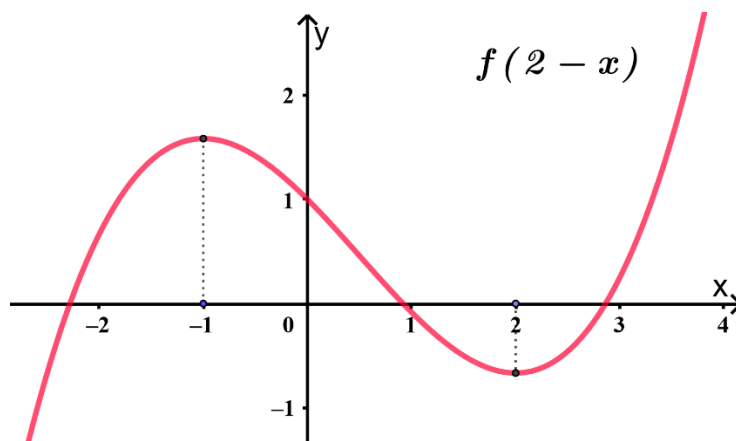
Theo đề bài $1 < f(x) < 3, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f'[f(x)] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy ta chỉ cần các điều kiện sau để thỏa (*) là



$$\begin{cases} f'(x) < 0 \\ 3x^2 - 12x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (3; 4) \\ x \in (0; 4) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (3; 4).$$

Câu 61: Cho đồ thị hàm số $y = f(2 - x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(x^2 - 3)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 1)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(-\infty; -1)$.

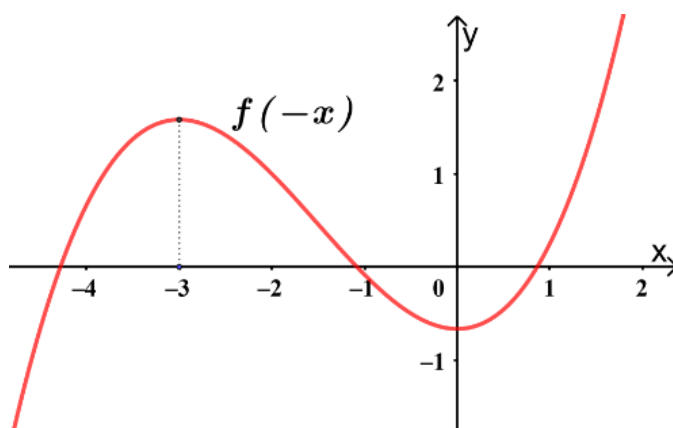
D. $(-1; 0)$.

Lời giải

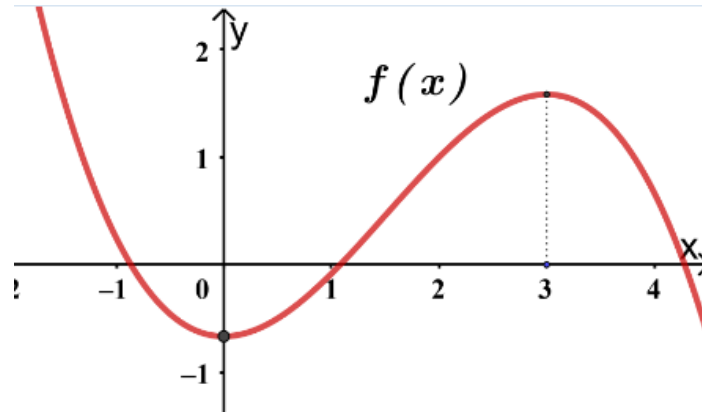
Chọn A

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = g(x) = f(2 - x)$.

Tịnh tiến (C) sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = g(x + 2) = f(-x)$.



Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = f(-x)$ qua Oy ta được đồ thị hàm số $y = f(x)$.



Ta có $y = f(x^2 - 3) \Rightarrow y' = 2x \cdot f'(x^2 - 3)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \\ x^2 - 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+	0	-

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 3)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 62: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2;1)$. B. $(-4;-3)$. C. $(0;1)$. D. $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $y = g(x) = f(x^2 + 2x)$; $g'(x) = (f(x^2 + 2x))' = (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ f'(x^2 + 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -2 \text{ (vô nghiệm)} \\ x^2 + 2x = 1 \\ x^2 + 2x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{2} \\ x = -1 + \sqrt{2} \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \quad (x = -1 \pm \sqrt{2} \text{ là các nghiệm bội chẵn của phương trình: } x^2 + 2x = 1).$$

Ta có bảng biến thiên:

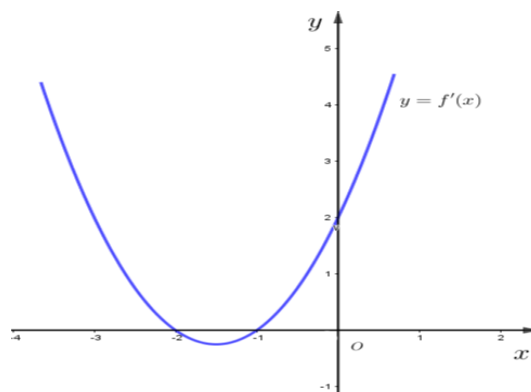
x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	0	+	0	-	
$g(x)$													

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; -1)$.

Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$:

Chọn giá trị $x = 0 \in (-1; -1 + \sqrt{2}) \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow g'(0) = f'(0) > 0$ (dựa theo bảng xét dấu của hàm $f'(x)$). Suy ra $g'(x) > 0, \forall x \in (-1; -1 + \sqrt{2})$. Sử dụng quy tắc xét dấu đa thức “lẻ đổi, chẵn không” suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại.

Câu 63: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(1 + 2x - x^2) + 2020$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(2; 3)$. D. $(3; 5)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (2-2x) \cdot f'(1+2x-x^2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2x=0 \\ f'(1+2x-x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1+2x-x^2=-2 \\ 1+2x-x^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$						$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1-\sqrt{3}; 1)$ và $(1+\sqrt{3}; 3)$.

Mà $(0; 1) \subset (1-\sqrt{3}; 1)$ nên hàm số $y = g(x) = f(1+2x-x^2) + 2020$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Câu 64: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2(x-5)^3$. Hàm số $g(x) = f(10-5x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (10-5x)' \cdot f'(10-5x) = -5 \cdot f'(10-5x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(10-5x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 10-5x=0 \\ 10-5x=-2 \\ 10-5x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{12}{5} \\ x=1 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		1		2		$\frac{12}{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	-	

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$ với mọi giá trị thực của x . Xét hàm số $g(x) = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;4)$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$. **D.** Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$.

Lời giải

Sưu tầm:Phạm Hải Dương; Fb: Duongpham

Chọn C

$$\text{Ta có: } g'(x) = \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)' f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right) = \frac{20-5x^2}{(x^2+4)^2} \left(\frac{5x}{x^2+4}\right) \left(\frac{5x}{x^2+4}-1\right)^2 \left(\frac{5x}{x^2+4}-2\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{20-5x^2}{(x^2+4)^2} = 0 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 0 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 1 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

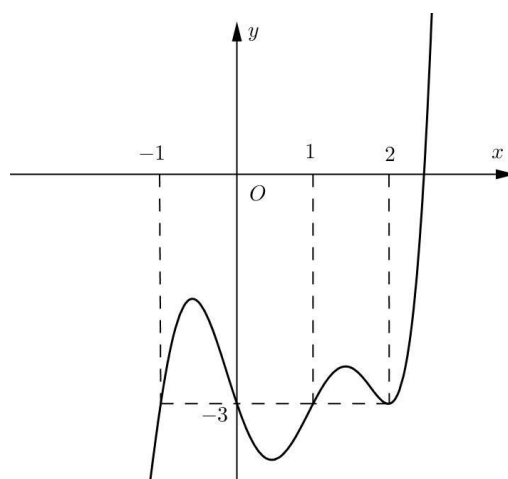
Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$:



x	$-\infty$	-2	0	1	2	4	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	CT CĐ CT								

Vậy hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x) = f(2x^2 - x) + 6x^2 - 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$.

B. $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g(x) = f(2x^2 - x) + 6x^2 - 3x$

$$\Rightarrow g'(x) = (4x - 1)f'(2x^2 - x) + 12x - 3 = (4x - 1)[f'(2x^2 - x) + 3].$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 1 = 0 \\ f'(2x^2 - x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ 2x^2 - x = -1 \text{ (vô nghiệm)} \\ 2x^2 - x = 1 \\ 2x^2 - x = 0 \\ 2x^2 - x = 2 \text{ (ng nghiệm kép)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \text{ (ng nghiệm kép)} \\ x = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \text{ (ng nghiệm kép)} \end{cases}.$$

Ta có : $g'(-2) = -9(f'(10)+3)$ dựa vào đồ thì $f'(x)$ ta thấy $f'(10) > -3 \Rightarrow f'(10)+3 > 0$
 $\Rightarrow g'(-2) < 0$.

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{17}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1+\sqrt{17}}{4}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-	0	+	0	-	0	+

Xét dấu $g'(x)$ ta được $g'(x) > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$.

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$ và $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$.

Mà $\left(-\frac{1}{4}; 0\right) \subset \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ nên hàm số $g(x) = f(2x^2 - x) + 6x^2 - 3x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$.

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(10-3x)^2(x-2)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3-x) + \frac{1}{6}(x^2-1)^3$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = -f'(3-x) + x(x^2-1)^2$.

Theo giả thiết $f'(x) = (3-x)(10-3x)^2(x-2)^2$ nên $f'(3-x) = x(3x+1)^2(1-x)^2$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} g'(x) &= -x(3x+1)^2(1-x)^2 + x(x^2-1)^2 = x(x-1)^2[-(3x+1)^2 + (x+1)^2] = x(x-1)^2(-8x^2-4x) \\ &= x^2(x-1)^2(-8x-4) \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (\text{nghiệm kép}) \\ x = 1 (\text{nghiệm kép}) \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

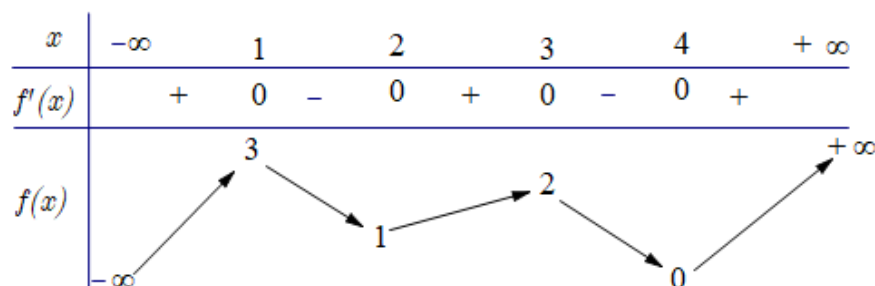
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
g'	+	0	-	0	-
g					

Khi đó hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau





Hàm số $y = (f(x))^3 - 3(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2;3)$. B. $(1;2)$. C. $(3;4)$. D. $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3(f(x))^2 \cdot f'(x) - 6f(x) \cdot f'(x)$.

$$y' = 3f'(x) \cdot f(x)[f(x) - 2].$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}; f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < 1 \\ x = 4 \end{cases}; f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \in (x_1; 1) \\ x = x_3 \in (1; 2) \\ x = x_4 > 4 \\ x = 3 \end{cases}.$$

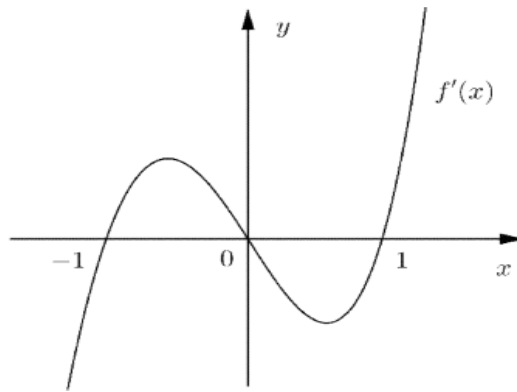
+ Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$	x_1	x_2	1	x_3	2	3	4	x_4	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	0	+	0	-
$f(x)$	-	0	+	+	+	+	+	+	0	+
$f(x)-2$	-	-	0	+	+	0	-	-	-	0
	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $y = (f(x))^3 - 3(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 69: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ





Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Vì các điểm $(-1; 0), (0; 0), (1; 0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -1 + a - b + c = 0 \\ c = 0 \\ 1 + a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^3 - x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 1$$

Ta có: $g(x) = f(f'(x)) \Rightarrow g'(x) = f'(f'(x)) \cdot f''(x)$

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = f'(f'(x)) \cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 - x)(3x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x = 0 \\ x^3 - x = 1 \\ x^3 - x = -1 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

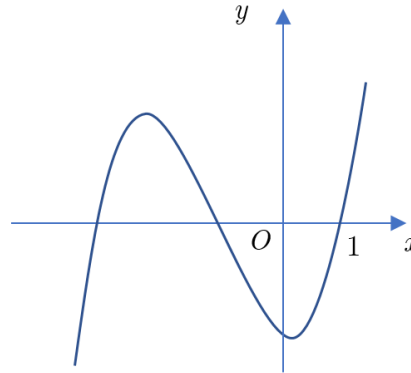
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \\ x = x_1 (x_1 \approx 1,325) \\ x = x_2 (x_2 \approx -1,325) \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-1,325$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$1,325$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$

Câu 70: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị cho như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(2019^x) - mx + 2$ đồng biến trên $[0; 1]$



A. 2028.

B. 2019.

C. 2011.

D. 2020

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = 2019^x \ln 2019 \cdot f'(2019^x) - m$.

Ta lại có hàm số $y = 2019^x$ đồng biến trên $[0; 1]$.

Với $x \in [0; 1]$ thì $2019^x \in [1; 2019]$ mà hàm $y = f'(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ nên hàm $y = f'(2019^x)$ đồng biến trên $[0; 1]$

Mà $2019^x \geq 1; f'(2019^x) > 0 \forall x \in [0; 1]$ nên hàm $h(x) = 2019^x \ln 2019 \cdot f'(2019^x)$ đồng biến trên $[0; 1]$

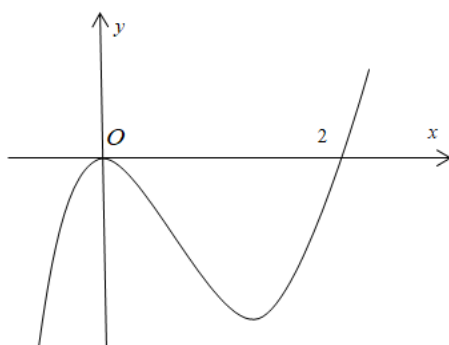
Hay $h(x) \geq h(0) = 0, \forall x \in [0; 1]$

Do vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[0; 1] \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in [0; 1]$

$\Leftrightarrow m \leq 2019^x \ln 2019 \cdot f'(2019^x), \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in [0; 1]} h(x) = h(0) = 0$

Vì m nguyên và $m \in [-2019; 2019] \Rightarrow$ có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $g(x) = f(x^2 - x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

B. $(1; 2)$.

C. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Sưu tầm: Nguyễn Thị Thu; Fb: Nguyễn Thu

Chọn C

$$g(x) = f(x^2 - x) \Rightarrow g'(x) = (2x - 1)f'(x^2 - x).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ f'(x^2 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - x = 0 \\ x^2 - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đồ thị } f'(x) \text{ ta có } f'(x^2 - x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -1 \end{cases}'$$

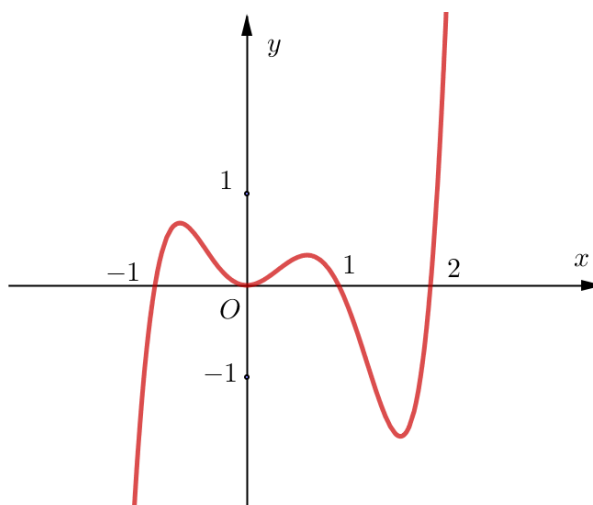
Xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x - 1$		$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	
$f'(x^2 - x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	$ $	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.



Câu 72: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(\sqrt{x^2+1})$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty; -\sqrt{3}), (0; \sqrt{3})$. B. $(-\infty; -\sqrt{3}), (\sqrt{3}; +\infty)$.

C. $(-\sqrt{3}; 0), (\sqrt{3}; +\infty)$. D. $(-\infty; -\sqrt{3}), (0; +\infty)$.

Lời giải

Sưu tầm: Nguyễn Thị Thu; Fb: Nguyễn Thu

Chọn C

Xét hàm số $y = f(\sqrt{x^2+1}) \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} f'(\sqrt{x^2+1})$.

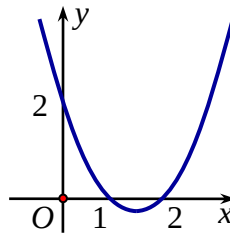
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(\sqrt{x^2+1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^2+1} = -1 \\ \sqrt{x^2+1} = 0 \\ \sqrt{x^2+1} = 1 \\ \sqrt{x^2+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^2+1} = 1 \\ \sqrt{x^2+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2+1 = 1 \\ x^2+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(\sqrt{x^2+1})$ đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{3}; 0), (\sqrt{3}; +\infty)$.

Câu 73: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây.



A. $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.

B. $(-\frac{3}{2}; +\infty)$.

C. $(-\infty; \frac{3}{2})$.

D. $(\frac{1}{2}; +\infty)$.

Lời giải

Sưu tầm: Chu Minh; Fb: Minhchu

Chọn D

$$\text{Đặt } y = g(x) = f(x - x^2) \Rightarrow g'(x) = f'(x - x^2) \cdot (x - x^2)' = (1 - 2x) f'(x - x^2)$$

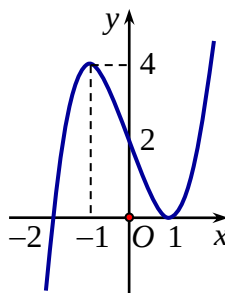
$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ f'(x - x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ x - x^2 = 1 \text{ (ptvn)} \\ x - x^2 = 2 \text{ (ptvn)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow f(x - x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - x^2 < 1 \\ x - x^2 > 2 \end{cases} \text{ (Luôn đúng với mọi } x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Vậy } g'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Hay hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng $(\frac{1}{2}; +\infty)$.

Câu 74: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?



- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$. B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
 C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1; 2)$. D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Lời giải

Sưu tầm: Chu Minh; Fb: Minhchu

Chọn C

$$g'(x) = (f(x^2 - 3))' = (x^2 - 3)' f'(x^2 - 3) = 2xf'(x^2 - 3)$$

Ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$ nên $f'(x^2 - 3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 < -2 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
2x	-		-		+		+
$f'(x^2 - 3)$	+	0	+	0	-	0	+
$g'(x)$	-	0	-	0	+	0	+

Từ bảng xét dấu ta thấy Chọn C đúng

Câu 75: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$	-2	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

Hàm số $y = g(x) = \frac{f(x^2 - 2x)}{f(x^2 - 2x) + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$. B. $\left(-2; \frac{5}{2}\right)$. C. $(1; 3)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = \frac{(x^2 - 2x)' \cdot f'(x^2 - 2x)}{(f(x^2 - 2x) + 1)^2} = \frac{(2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)}{(f(x^2 - 2x) + 1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$



Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; 3)$.

Câu 76: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	3		1		2		0		$+\infty$

Hàm số $y = (f(x))^3 - 3.(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 2)$. B. $(3; 4)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(2; 3)$.

Lời giải

Sưu tầm: Lê Liên; Fb: Lien Le

Chọn D

Ta có $y' = 3.(f(x))^2 . f'(x) - 6.f(x) . f'(x)$

$$= 3f(x) . f'(x) . [f(x) - 2]$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, 4 \mid x_1 < 1\} \\ f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \{x_2, x_3, 3, x_4 \mid x_1 < x_2 < 1 < x_3 < 2; 4 < x_4\} \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

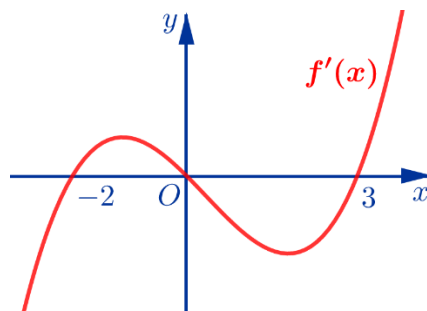
Lập bảng xét dấu ta có



x	$-\infty$	x_1	x_2	1	x_3	2	3	4	x_4	$+\infty$			
f(x)	-	0	+	+	+	+	+	0	+	+			
f(x) - 2	-	-	0	+	+	0	-	-	0	-	+		
f'(x)	+	+	+	0	-	-	0	+	0	-	0	+	
y'	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Do đó ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x)$ đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 0)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(1; 3)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Có $y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$.

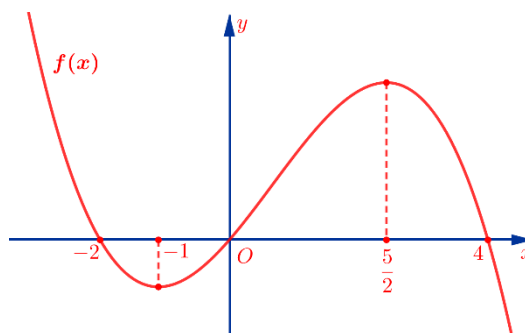
$$\text{Do đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$				
$x^2 - 2x$	$+$	3	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	3	$+$
$f'(x^2 - 2x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$2x - 2$			$-$		0			$+$			
$(2x - 2)f'(x^2 - 2x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm, hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 0), (1; 2), (3; +\infty)$.

Câu 78: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(0; \frac{5}{2})$. C. $(\frac{5}{2}; 4)$. D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } y' = 2f'(x)f(x). \text{ Do đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = \frac{5}{2} \\ x = 4 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	-1	0	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$2f'(x)f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm, hàm số $y = [f(x)]^2$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2), (-1; 0), (\frac{5}{2}; 4)$.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$			

Có bao nhiêu số nguyên $m < 2019$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + m)$ đồng biến trên khoảng $1; +\infty$?

A. 2016.

B. 2015.

C. 2017.

D. 2018.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = (x^2 - 2x + m)' f'(x^2 - 2x + m) = (2x - 1) f'(x^2 - 2x + m)$.

Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $1; +\infty$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in 1; +\infty$ và

$g'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm $\Leftrightarrow (2x - 1) f'(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in 1; +\infty$

$$\Leftrightarrow f'(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in 1; +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m \geq 2, \forall x \in 1; +\infty \\ x^2 - 2x + m \leq 0, \forall x \in 1; +\infty \end{cases}$$

Xét hàm số $y = x^2 - 2x + m$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	$m-1$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

TH1: $x^2 - 2x + m \geq 2, \forall x \in 1; +\infty \Leftrightarrow m - 1 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 3$.

TH2: $x^2 - 2x + m \leq 0, \forall x \in 1; +\infty$: Không có giá trị m thỏa mãn.

Vậy có 2016 số nguyên $m < 2019$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 80: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\searrow$	$y(1)$	$\nearrow 0$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(-2;5)$. B. $(1;2)$. C. $(2;5)$. D. $(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

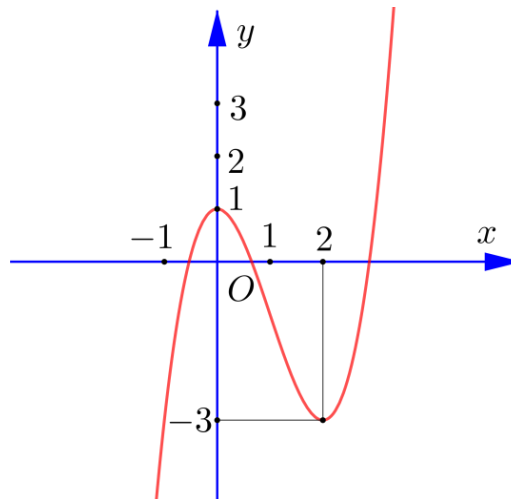
Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(3-x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = -2f'(3-x) \cdot f(3-x)$.

$$\text{Xét } g'(x) < 0 \Leftrightarrow -2f'(3-x) \cdot f(3-x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-x < 1 \\ 3-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ x < 1 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;5)$

Câu 81: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = |f(|x|)|$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

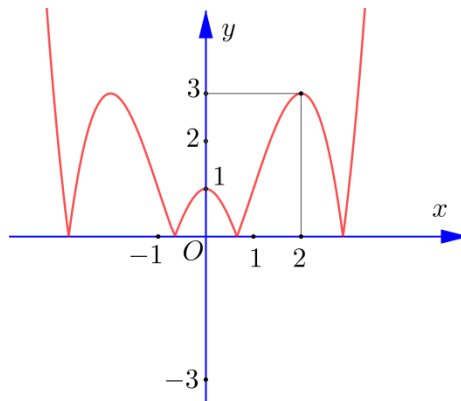


- A. $(0;1)$. B. $(-1;1)$. C. $(0;2)$. D. $(1;2)$.

Lời giải

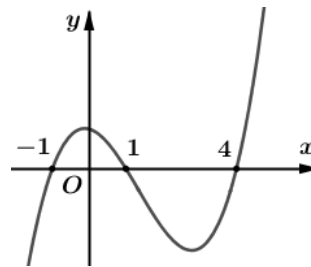
Chọn D

Thực hiện liên hoàn biến đổi đồ thị $y = f(x)$ thành đồ thị $y = |f(x)|$, sau đó biến đổi đồ thị $y = |f(x)|$ thành đồ thị $y = |f(|x|)|$.



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ ta suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 2)$. C. $(2; 3)$. D. $(4; 7)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 4 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$.

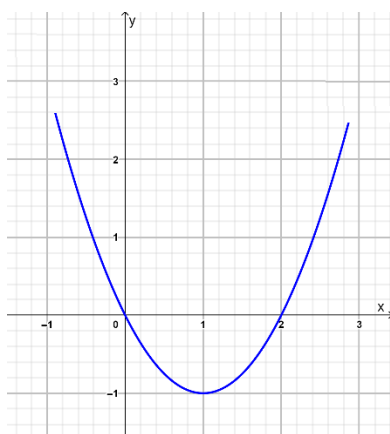
- Với $x > 3$ khi đó $g(x) = f(x-3) \rightarrow g'(x) = f'(x-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x-3 < 1 \\ x-3 > 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x > 7 \end{cases}$. Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(3; 4)$, $(7; +\infty)$.

- Với $x < 3$ khi đó $g(x) = f(3-x) \rightarrow g'(x) = -f'(3-x) > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x < -1 \\ 1 < 3-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \text{ (loại)} \\ -1 < x < 2 \end{cases}$. Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.

Câu 83: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(|x|+1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(1, +\infty)$.

B. $(-1, 0)$.

C. $(-1, 2)$.

D. $(-\infty, 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = \frac{x}{|x|} f'(|x|+1)$.

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{|x|} f'(|x|+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{|x|} = 0 \\ f'(|x|+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |x|+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |x| = 1 \end{cases} \quad (L).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$					

Từ bảng biến thiên thì ta có $g(x) = f(|x|+1)$ nghịch biến trên khoảng $(-1, 1)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Câu 84: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $-\infty; -1$?

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

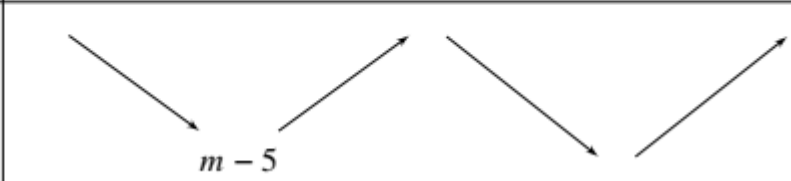


Chọn D

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

BBT:

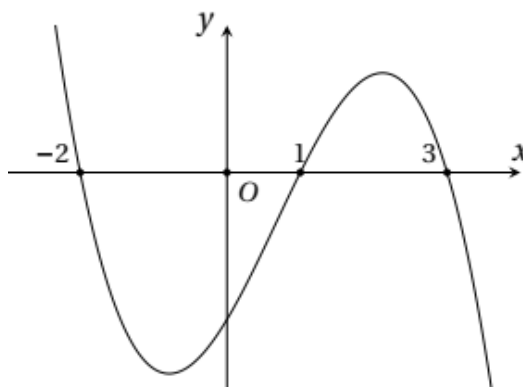
x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$								

Để hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $-\infty; -1 \Leftrightarrow m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$

Do yêu cầu m là số nguyên nhỏ hơn 10 nên ta có $m \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$

Vậy có 5 giá trị m thỏa yêu cầu.

Câu 85: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hàm số $g(x) = f(|4 - 2x|)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $\left(\frac{5}{2}; 7\right)$.

D. $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: $x \leq 2$. Khi đó $g(x) = f(4 - 2x)$.



$$\text{Ta có } g'(x) = -2f'(4-2x), g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(4-2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2x < -2 \\ 1 < 4-2x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

So điều kiện $x \leq 2$ ta được $g(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Trường hợp 2: $x > 2$. Khi đó $g(x) = f(2x-4)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = 2f'(2x-4), g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(2x-4) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 2x-4 < 1 \\ 2x-4 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < \frac{5}{2} \\ x > \frac{7}{2} \end{cases}$$

So điều kiện $x > 2$ ta được $g(x)$ nghịch biến trên $\left(2; \frac{5}{2}\right); \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3-3x^2+m)$ có 8 điểm cực trị là

- A. 2. B. 3. **C. 1.** D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = (3x^2-6x) \cdot f'(x^3-3x^2+m)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x=0 \\ x^3-3x^2+m=1 \\ x^3-3x^2+m=0 \\ x^3-3x^2+m=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x^3-3x^2+m=1 \\ x^3-3x^2+m=0 \\ x^3-3x^2+m=2 \end{cases}$$

Vì khi đi qua các nghiệm của phương trình $x^3-3x^2+m=1$ (nếu có) dấu của $f'(x^3-3x^2+m)$ không đổi nên dấu của $g'(x)$ chỉ phụ thuộc các nghiệm của hai phương trình còn lại.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 8 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $x^3-3x^2+m=0$ và $x^3-3x^2+m=2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2).

Xét hàm số $h(x) = -x^3+3x^2$, ta có $h'(x) = -3x^2+6x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$



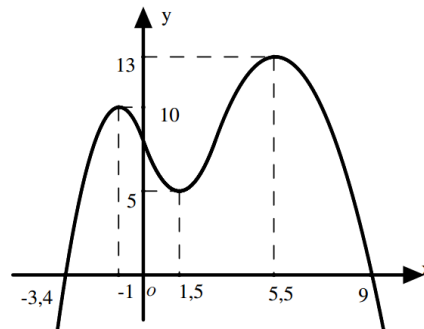
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				4		

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều kiện để mỗi phương trình $-x^3 + 3x^2 = m$ và $-x^3 + 3x^2 = m - 2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2) là

$$0 < m - 2 < m < 4 \Leftrightarrow 2 < m < 4.$$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m = 3$.

Câu 87: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Đặt $g(x) = f(x) - mx + 5$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** hai điểm cực trị?



A. 4.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x) - m$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - m = 0 \Leftrightarrow f'(x) = m$. Để hàm số $y = g(x)$ có đúng hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ 10 \leq m < 13 \end{cases}$. Khi đó $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12\}$. Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 88: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$, biết hàm số có ba điểm cực trị $x = -3, x = 3, x = 5$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $g(x) = f(e^{x^3+3x^2} - m)$ có đúng 7 điểm cực trị

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

Lời giải



Chọn D

Ta có: $g'(x) = (3x^2 + 6x)e^{x^3+3x^2} \cdot f'(e^{x^3+3x^2} - m)$

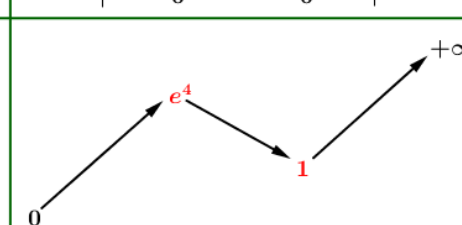
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 6x)e^{x^3+3x^2} \cdot f'(e^{x^3+3x^2} - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ e^{x^3+3x^2} - m = -3 \\ e^{x^3+3x^2} - m = 3 \\ e^{x^3+3x^2} - m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ e^{x^3+3x^2} = m - 3 \\ e^{x^3+3x^2} = m + 3 \\ e^{x^3+3x^2} = m + 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi tổng số nghiệm đơn và bội lẻ, khác 0 và -2 của các phương trình (1), (2), (3) là 5.

Xét hàm số $h(x) = e^{x^3+3x^2}$ có $h'(x) = (3x^2 + 6x)e^{x^3+3x^2}$.

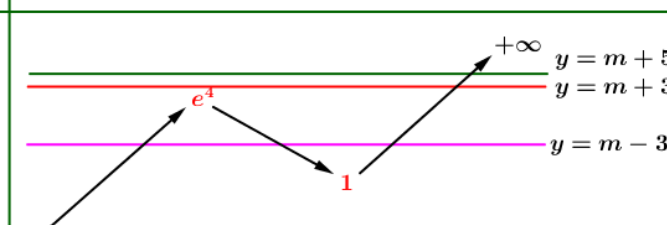
Ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
h'	$+$	0	$-$	0	$+$
h					

Khi đó có 3 trường hợp sau:

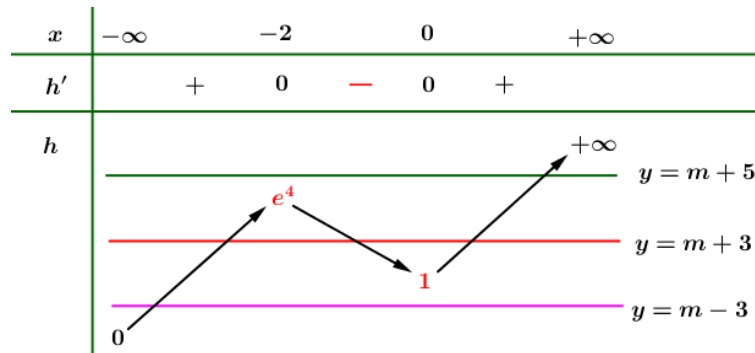
Trường hợp 1:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
h'	$+$	0	$-$	0	$+$
h					

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} m+3 \geq e^4 \\ 1 < m-3 < e^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq e^4 - 3 \approx 51,6 \\ 4 < m < e^4 + 3 \approx 57,6 \end{cases}$$

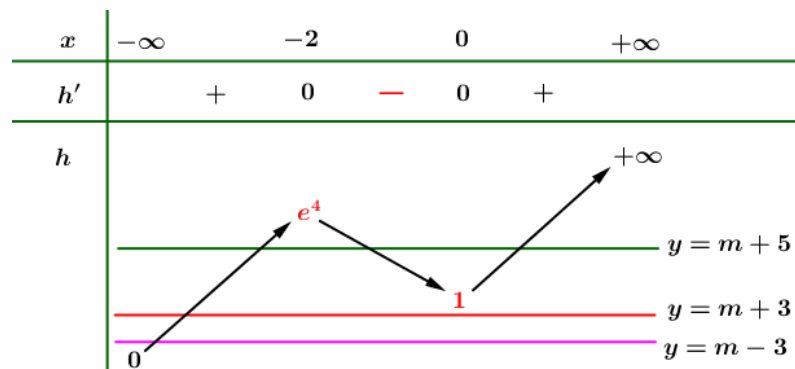
Do m nguyên nên $m \in \{52; 53; 54; 55; 56; 57\}$.

Trường hợp 2:



Khi đó:
$$\begin{cases} m+5 \geq e^4 \\ 1 < m+3 < e^4 \\ 0 < m-3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > e^4 - 5 \approx 49,6 \\ -2 < m < e^4 - 3 \\ 3 < m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Trường hợp 3:



Khi đó:
$$\begin{cases} 1 < m+5 < e^4 \\ m+3 \leq 1 \\ m-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < e^4 - 5 \approx 49,6 \\ m \leq -2 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 + m)$ có 3 cực trị.

A. 0.

B. 6.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = x(x-1)^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$



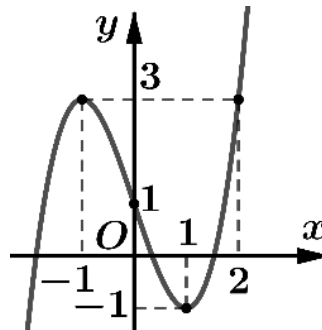
$$\text{Lại có } g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \quad (1) \\ x^2 = 1 - m \quad (2) \\ x^2 = 3 - m \quad (3) \end{cases}$$

Do (2) có nghiệm luôn là nghiệm bội chẵn; các phương trình (1), (3) có nghiệm không chung nhau và $-m < 3 - m$ nên:

$$\text{Hàm số } g(x) \text{ có 3 cực trị} \Leftrightarrow g'(x) = 0 \text{ có 3 nghiệm bội lẻ} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m > 0 \\ -m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 3$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên bằng 3.

Câu 90: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

- A. $m = 3$. B. $m = -12$. C. $m = -13$. D. $m = 6$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t(x) = 2x^3 + x - 1$ với $x \in [0; 1]$. Ta có $t'(x) = 6x^2 + 1 > 0, \forall x \in [0; 1]$.

Suy ra hàm số $t(x)$ đồng biến nên $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [-1; 2]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max_{[-1; 2]} f(t) = 3 \Rightarrow \max_{[-1; 2]} [f(t) + m] = 3 + m$.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $3 + m = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 91: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

- A. 18. B. 17. C. 16. D. 20.

Lời giải

Chọn A



Ta có $y' = f'(x^2 + 3x - m) = (2x + 3)f'(x^2 + 3x - m)$.

Theo đề bài ta có: $f'(x) = (x - 1)(x + 3)$

suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)f'(x^2 + 3x - m) \geq 0, \forall x \in (0; 2).$$

Do $x \in (0; 2)$ nên $2x + 3 > 0, \forall x \in (0; 2)$. Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} y' \geq 0, \forall x \in (0; 2) &\Leftrightarrow f'(x^2 + 3x - m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - m \leq -3 \\ x^2 + 3x - m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq x^2 + 3x + 3 \\ m \leq x^2 + 3x - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[0; 2]}(x^2 + 3x + 3) \\ m \leq \min_{[0; 2]}(x^2 + 3x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Do $m \in [-10; 20]$, $m \in \mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 92: Cho các hàm số $f(x) = x^3 + 4x + m$ và $g(x) = (x^2 + 2018)(x^2 + 2019)^2(x^2 + 2020)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020; 2020]$ để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(2; +\infty)$?

A. 2005.

B. 2037.

C. 4016.

D. 4041.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = x^3 + 4x + m$,

$$g(x) = (x^2 + 2018)(x^2 + 2019)^2(x^2 + 2020)^3 = a_{12}x^{12} + a_{10}x^{10} + \dots + a_2x^2 + a_0.$$

Suy ra $f'(x) = 3x^2 + 4$, $g'(x) = 12a_{12}x^{11} + 10a_{10}x^9 + \dots + 2a_2x$.

$$\text{Và } [g(f(x))]' = f'(x)[12a_{12}(f(x))^{11} + 10a_{10}(f(x))^9 + \dots + 2a_2f(x)]$$

$$= f(x)f'(x)(12a_{12}(f(x))^{10} + 10a_{10}(f(x))^8 + \dots + 2a_2).$$

Để thấy $a_{12}; a_{10}; \dots; a_2; a_0 > 0$ và $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0, \forall x > 2$.



Do đó $f'(x)(12a_{12}(f(x))^{10} + 10a_{10}(f(x))^8 + \dots + 2a_2) > 0, \forall x > 2$.

Hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi $[g(f(x))]' \geq 0, \forall x > 2 \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x > 2$.

$$\Leftrightarrow x^3 + 4x + m \geq 0, \forall x > 3 \Leftrightarrow m \geq -x^3 - 4x, \forall x > 2 \Rightarrow m \geq \max_{[2; +\infty)}(-x^3 - 4x) = -16.$$

Vì $m \in [-2020; 2020]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2037 giá trị thỏa mãn m .

Câu 93: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 + 2mx + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $3; 5$?

A. 3

B. 2

C. 4

D. 6

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = 2f'(2x+1) = 2(2x+1)^2[(2x+1)^2 + 2m(2x+1) + 1]$

Đặt $t = 2x+1$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $3; 5$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in 3; 5$

$$\Leftrightarrow t(t^2 + 2mt + 1) \geq 0, \forall t \in 7; 11 \Leftrightarrow t^2 + 2mt + 1 \geq 0, \forall t \in 7; 11 \Leftrightarrow 2m \geq \frac{-t^2 - 1}{t}, \forall t \in 7; 11$$

Xét hàm số $h(t) = \frac{-t^2 - 1}{t}$ trên $[7; 11]$, có $h'(t) = \frac{-t^2 + 1}{t^2}$

BBT:

t	$-\infty$	7	11	$+\infty$
$h'(t)$				

Diagram showing the sign of $h'(t)$ and the values of $h(t)$ at the boundaries of the interval $[7; 11]$. The sign of $h'(t)$ is negative on $(7; 11)$. The values of $h(t)$ at the boundaries are $-\frac{50}{7}$ at $t=7$ and $-\frac{122}{11}$ at $t=11$. An arrow points from $-\frac{50}{7}$ to $-\frac{122}{11}$, indicating that the function is decreasing on $[7; 11]$.

$$\text{Dựa vào BBT ta có } 2m \geq \frac{-t^2 - 1}{t}, \forall t \in 7; 11 \Leftrightarrow 2m \geq \max_{7; 11} h(t) \Leftrightarrow m \geq -\frac{50}{14}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}$.

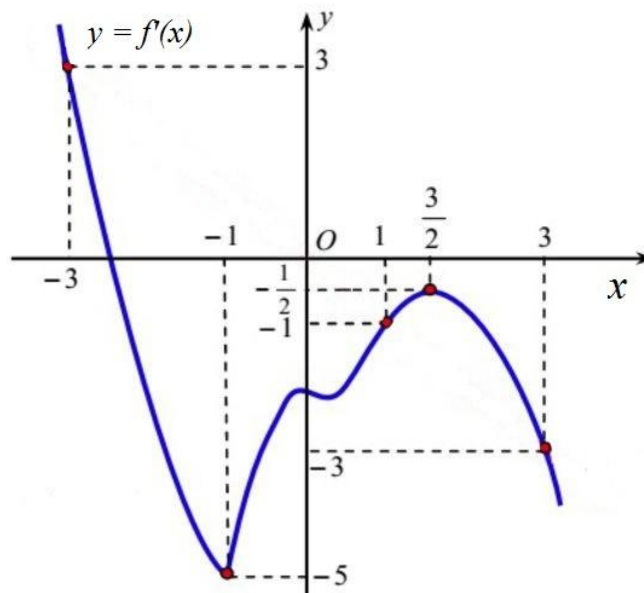
Câu 94: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giáo viên: Nguyễn Hoàng Việt

Website: <http://luyenthitracnghiem.vn>

0905493688



Xét hàm số $g(x) = f(x-2m) + \frac{1}{2}(2m-x)^2 + 2020$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$. Hỏi số phần tử của S bằng bao nhiêu?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

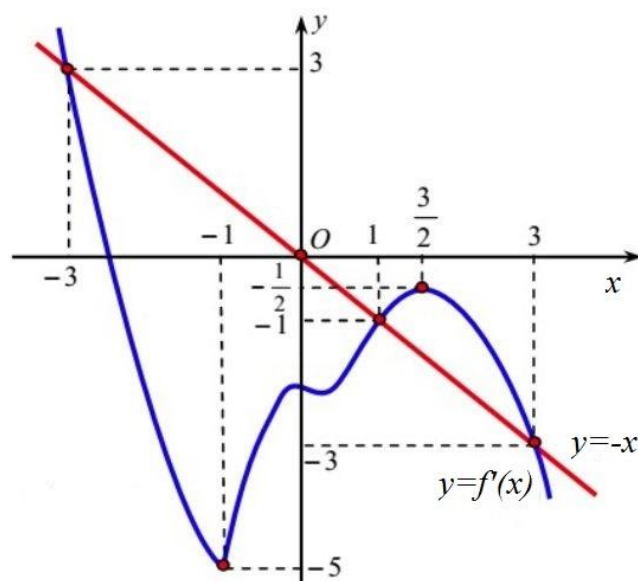
Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = f'(x-2m) - (2m-x)$.

Đặt $h(x) = f'(x) - (-x)$. Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = -x$ trên hình

vẽ suy ra: $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq -x \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$.



$$\text{Ta có } g'(x) = h(x-2m) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-2m \leq 1 \\ x-2m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq x \leq 2m+1 \\ x \geq 2m+3 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(2m-3; 2m+1)$ và $(2m+3; +\infty)$.

$$\text{Do đó hàm số } y = g(x) \text{ nghịch biến trên khoảng } (3; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq 3 \\ 2m+1 \geq 4 \\ 2m+3 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq m \leq 3 \\ m \leq 0 \end{cases}.$$

Mặt khác, do m nguyên dương nên $m \in \{2; 3\} \Rightarrow S = \{2; 3\}$. Vậy số phần tử của S bằng 2.

Từ đó **Chọn B**

Câu 95: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 2016.

B. 2014.

C. 2012.

D. 2010.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } g'(x) = f'(1-x) = -(1-x)^2(-x-1)[(1-x)^2-6(1-x)+m]$$

$$= (x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5)$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x < -1 \quad *, \text{ (dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm).}$$

$$\text{Với } x < -1 \text{ thì } (x-1)^2 > 0 \text{ và } x+1 < 0 \text{ nên } * \Leftrightarrow x^2+4x+m-5 \geq 0, \forall x < -1$$

$$\Leftrightarrow m \geq -x^2-4x+5, \forall x < -1.$$

Xét hàm số $y = -x^2-4x+5$ trên khoảng $(-\infty; -1)$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1
y	$-\infty$	9	8

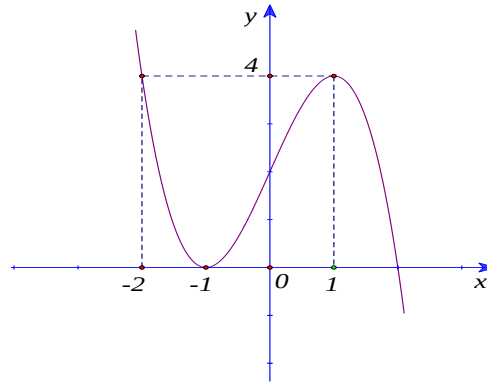
Từ bảng biến thiên suy ra $m \geq 9$.



Kết hợp với m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ và m nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; \dots; 2020\}$.

Vậy có 2012 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 96: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-2020; 2020)$ để hàm số $g(x) = f(2x-3) - \ln(1+x^2) - 2mx$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$?



A. 2020.

B. 2019.

C. 2021.

D. 2018.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có $g'(x) = 2f'(2x-3) - \frac{2x}{1+x^2} - 2m$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ khi và chỉ khi

$$g'(x) \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right) \Leftrightarrow m \leq f'(2x-3) - \frac{x}{1+x^2}, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} \left[f'(2x-3) - \frac{x}{1+x^2} \right] \quad (1)$$

+ Đặt $t = 2x-3$, khi đó $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Leftrightarrow t \in (-2; 1)$.

Từ đồ thị hàm $f'(x)$ suy ra $f'(t) \geq 0, \forall t \in (-2; 1)$ và $f'(t) = 0$ khi $t = -1$.

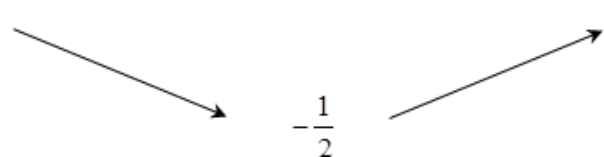
Tức là $f'(2x-3) \geq 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow \min_{x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} f'(2x-3) = 0$ khi $x = 1$. (2)

+ Xét hàm số $h(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Ta có $h'(x) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$ và

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$



Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ như sau:

x	$\frac{1}{2}$	1	2
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$			

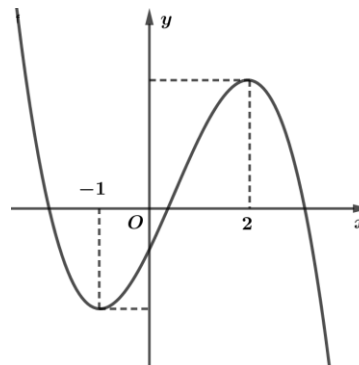
Từ bảng biến thiên suy ra $h(x) \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \min_{x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} h(x) = -\frac{1}{2}$ khi $x=1$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $m \leq -\frac{1}{2}$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, $m \in (-2020; 2020)$ thì $m \in \{-2019; -2018; \dots; -2; -1\}$.

Vậy có tất cả 2019 giá trị m cần tìm.

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x^2 + x) - 4x^3 + 3x^2 + 6x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. B. $(-2; 0)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = (2x+1)f'(x^2+x) - 12x^2 + 6x + 6$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$. Do đó

$$f'(x^2+x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x > -1 \\ x^2+x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1 > 0; \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2+x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 1.$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$		
$2x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$f'(x^2+x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
$(2x+1)f'(x^2+x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$-12x^2+6x+6$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	chưa biết dấu						
			$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 98: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Biết $f(x) > 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = f(3-2f(x)) - x^3 + 3x^2 - 2020$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
- B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; 4)$.
- D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x) = -2f'(x)f'(3-2f(x)) - 3x^2 + 6x$.

Vì $f(x) > 2, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $3-2f(x) < -1 \forall x \in \mathbb{R}$

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ suy ra $f'(3-2f(x)) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Từ đó ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	4	$+\infty$				
$-f'(x)f'(3-2f(x))$	-	0	+		+	0	-		-	0	+
$-3x^2+6x$	-	-	0	+		+	0	-	-	0	-

Từ bảng xét dấu trên, loại trừ đáp án suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 99: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = g(x) = f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một parabol với tọa độ đỉnh $I(2;-1)$ và đi qua điểm $A(1;2)$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(5;9)$.

B. $(1;2)$.

C. $(-\infty;9)$.

D. $(1;3)$.

Lời giải

Chọn A

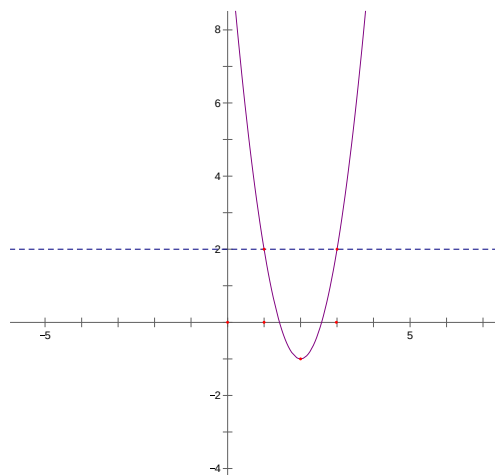
Xét hàm số $g(x) = f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một Parabol nên có phương trình dạng:
 $y = g(x) = ax^2 + bx + c \quad (P)$

$$\text{Vì } (P) \text{ có đỉnh } I(2;-1) \text{ nên } \begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ g(2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b = 4a \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

(P) đi qua điểm $A(1;2)$ nên $g(1) = 2 \Leftrightarrow a + b + c = 2$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -12 \\ c = 11 \end{cases} \text{ nên } g(x) = 3x^2 - 12x + 11.$$

Đồ thị của hàm $y = g(x)$ là



Theo đồ thị ta thấy $f'(2x+3) \leq 0 \Leftrightarrow f'(2x+3)+2 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Đặt $t = 2x+3 \Leftrightarrow x = \frac{t-3}{2}$ khi đó $f'(t) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{t-3}{2} \leq 3 \Leftrightarrow 5 \leq t \leq 9$.

Vậy $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(5;9)$.



Câu 100: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) \cdot f'''(x) = x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = [f'(x)]^2 - 2f(x) \cdot f''(x)$. Hàm số $h(x) = g(x^2 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = 2f''(x)f'(x) - 2f'(x) \cdot f''(x) - 2f(x) \cdot f'''(x) = -2f(x) \cdot f'''(x)$;

Khi đó $(h(x))' = (2x-2)g'(x^2-2x) = -2(2x-2)(x^2-2x)(x^2-2x-1)^2(x^2-2x+4)^3$

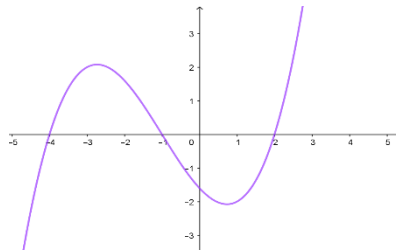
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu của $h'(x)$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		0		1		2		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	+	0	-	0	+	0	-	0	-	

Suy ra hàm số $h(x) = g(x^2 - 2x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 101: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 - 5)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



- A. $(-1; 0)$. B. $(1; 2)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; 1)$

Lời giải

Chọn D

+ Đặt $g(x) = f(x^2 - 5) = f(u), u = x^2 - 5$

+ $g'(x) = (x^2 - 5)' f'(u) = 2x f'(x^2 - 5)$

+ Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến khi $g'(x) \leq 0$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm

$$\Leftrightarrow 2xf'(x^2-5) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ f'(x^2-5) \geq 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ f'(x^2-5) \leq 0 \end{cases} \quad (II)$$

Giải (I): Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 5 \geq 2 \\ \Leftrightarrow -4 \leq x^2 - 5 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 \geq \sqrt{7} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{7} \\ x^2 \geq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1 \\ x^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{7} \\ -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

Xét (II): Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có

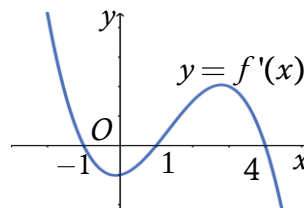
$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 5 \leq -4 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq x^2 - 5 \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x^2 \leq 7 \Leftrightarrow -\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{7} \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -\sqrt{7} \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \sqrt{7}$$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng: $(-\infty; -\sqrt{7})$; $(-2; -1)$; $(0; 1)$; $(2; \sqrt{7})$. **Chọn D**

Câu 102: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

B. $0; 2$

C. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

D. $-2; -1$

Lời giải

Chọn C

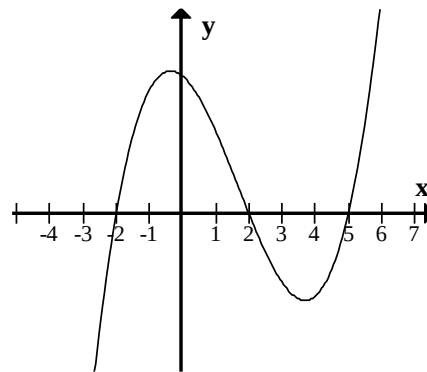
Xét hàm $f'(x) = -(x+1)(x-1)(x-4)$. Đặt $g(x) = f'(x)^2$

Có $g'(x) = 2xf'(x) = -2x(x^2+1)(x^2-1)(x^2-4)$. Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Câu 103: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-1; +\infty)$

B. $(0; 2)$

C. $(-\infty; -1)$

D. $(1; 3)$

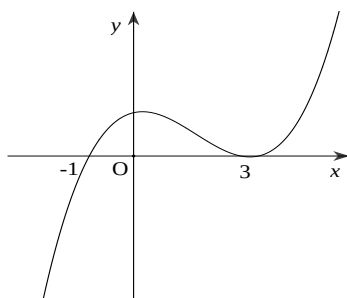
Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -2 \cdot f'(3-2x)$; $y' < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-2x < 2 \\ 3-2x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \\ x < -1 \end{cases}$

Vậy hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$.

Câu 104: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Xét hàm số $g(x) = f(3-x^2)$.



Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$.
- B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; 3)$.
- C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.
- D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = -2xf'(3-x^2)$

$$f'(3-x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x^2 = -1 \\ 3-x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$-x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$		
$f(3-x^2)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Câu 105: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(2+e^x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

• • • •

•

- A. $(0; +\infty)$.
- B. $(-\infty; 0)$.
- C. $(-1; 3)$.
- D. $(-2; 1)$.



Lời giải

Phân tích

Dựa vào đồ thị hàm $y = f'(x)$, suy ra nghiệm $f'(x) = 0$ và dấu của $f'(x)$.

Dùng tính chất hàm hợp xét dấu $f'(2+e^x)$, suy ra dấu của $e^x \cdot f'(2+e^x)$. Từ đó chọn đáp án.

Chọn B

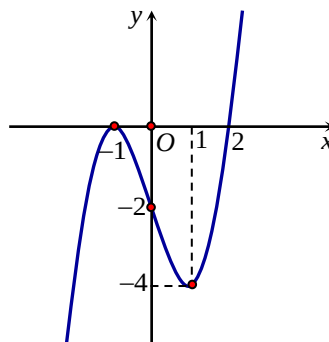
$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Xét } y = f(2+e^x), \text{ có } y' = e^x \cdot f'(2+e^x); y' = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot f'(2+e^x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2+e^x = 0 \\ 2+e^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Mặt khác, } y' > 0 \Leftrightarrow e^x \cdot f'(2+e^x) > 0 \Leftrightarrow 2+e^x > 3 \Leftrightarrow x > 0.$$

Do đó hàm số $y = f(2+e^x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Câu 106: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?



- A.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$. **B.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.
C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$. **D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ và } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Xét $g(x) = f(x^2 - 2)$ có tập xác định $\mathbb{R}$

$$g'(x) = 2x \cdot f'(t) \text{ với } t = x^2 - 2$$



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t = x^2 - 2 = -1 \\ t = x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

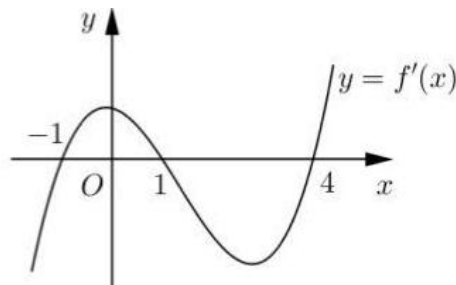
$$\text{Lại có } f'(t) > 0 \Leftrightarrow t = x^2 - 2 > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$$

Do đó, ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-2		-1		0	1		2		$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta chọn phát biểu sai là **C**

Câu 107: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng:



A. $(1;3)$.

B. $(2;+\infty)$.

C. $(-2;1)$.

D. $(-\infty;2)$.

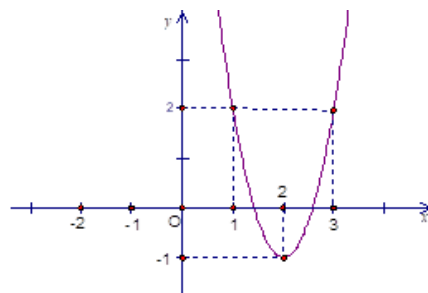
Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } (f(2-x))' = (2-x)' \cdot f'(2-x) = -f'(2-x)$$

$$\text{Hàm số đồng biến khi } (f(2-x))' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

Câu 108: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

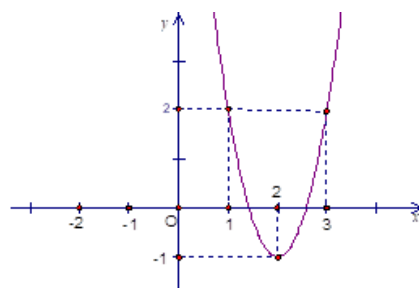


- A. $(-\infty; 2)$. B. $(-1; 1)$. C. $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f'(x-2) + 2$ có đồ thị (C) như sau:



Dựa vào đồ thị (C) ta có: $f'(x-2) + 2 < 2, \forall x \in (1; 3) \Leftrightarrow f'(x-2) < 0, \forall x \in (1; 3)$.

Đặt $x^* = x - 2$ thì $f'(x^*) < 0, \forall x^* \in (-1; 1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

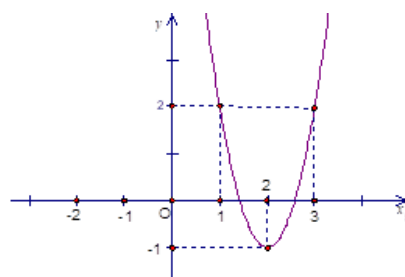
Cách khác:

Tịnh tiến sang trái hai đơn vị và xuống dưới 2 đơn vị thì từ đồ thị (C) sẽ thành đồ thị của hàm $y = f'(x)$. Khi đó: $f'(x) < 0, \forall x \in (-1; 1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Phân tích: Cho biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ sau khi đã tịnh tiến và dựa vào đó để xét sự đồng biến của hàm số $f(x)$.

Câu 109: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x-2) + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

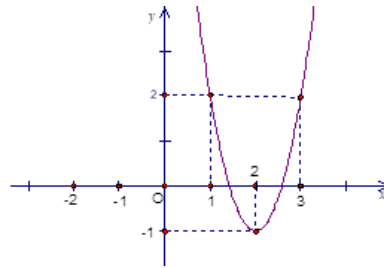


- A. $(-\infty; 3), (5; +\infty)$. B. $(-\infty; -1), (1; +\infty)$. C. $(-1; 1)$. D. $(3; 5)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f'(x-2)+2$ có đồ thị (C) như sau:



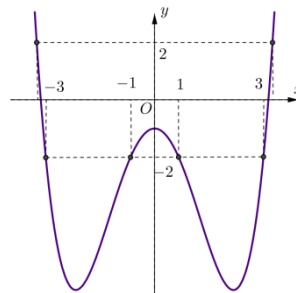
Dựa vào đồ thị (C) ta có:

$$f'(x-2)+2 > 2, \forall x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \Leftrightarrow f'(x-2) > 0, \forall x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty).$$

Đặt $x^* = x-2$ suy ra: $f'(x^*) > 0, \forall x^* \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1), (1; +\infty)$.

Câu 110: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

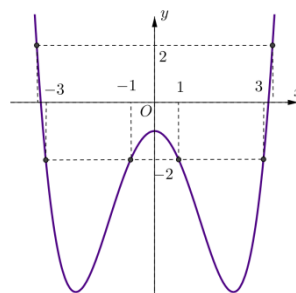


- A.** $(-3; -1), (1; 3)$. **B.** $(-1; 1), (3; 5)$. **C.** $(-\infty; -2), (0; 2)$. **D.** $(-5; -3), (-1; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f'(x+2)-2$ có đồ thị (C) như sau:



Dựa vào đồ thị (C) ta có:

$$f'(x+2)-2 < -2, \forall x \in (-3; -1) \cup (1; 3) \Leftrightarrow f'(x+2) < 0, \forall x \in (-3; -1) \cup (1; 3).$$

Đặt $x^* = x+2$ suy ra: $f'(x^*) < 0, \forall x^* \in (-1; 1) \cup (3; 5).$

Vậy: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1), (3; 5).$

Câu 111: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp một là $f'(x) = x(x-1)(x-2)$. Khi đó hàm số $f(2x+1)$ **không** đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(0; 1)$. **B.** $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$. **C.** $(1; 3)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = f(2x+1)$ ta có $y' = 2f'(2x+1) = 2(2x+1).2x.(2x-1) = 4x(2x+1)(2x-1)$.

Hàm số $f(2x+1)$ đồng biến $\Leftrightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Do đó trên các khoảng $\left(-\frac{1}{3}; 0\right), (1; 3), (2; +\infty)$ hàm số đồng biến. Trên khoảng $(0; 1)$ hàm số vừa đồng biến vừa nghịch biến.

Câu 112: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ và các hàm số $f(ax+b), f(x^3-bx+2a)$ đều đồng biến trên $\mathbb{R}$, với a là tham số thực khác 0 và b là tham số thực. Kết luận **đúng và đủ nhất** về các tham số thực a, b là:

- A.** $a > 0; b \leq 0$. **B.** $a > 0; b > 0$. **C.** $a < 0; b \leq 0$. **D.** $a < 0; b < 0$.

Lời giải

Chọn A

Có $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

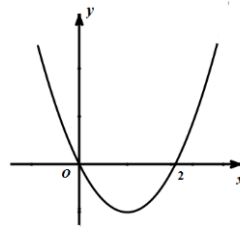
$$[f(ax+b)]' = a.f'(ax+b) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$[f(x^3-bx+2a)]' = (3x^2-b)f'(x^3-bx+2a) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a > 0 \\ 3x^2 - b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \leq 0 \end{cases}.$$

Câu 113: [2D1-4] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(-x^2 + 2x)$ đồng biến trên khoảng nào?





- A. $(1; 2)$. B. $(3; +\infty)$. C. $\left(3; \frac{9}{2}\right)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$ $+\infty$	

Ta có $g(x) = f(-x^2 + 2x) \Rightarrow g'(x) = (-2x + 2)f'(-x^2 + 2x)$

$$\begin{aligned}
 \text{ycbt} \Leftrightarrow g'(x) > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2 > 0 \\ f'(-x^2 + 2x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2 > 0 \\ \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2 < 0 \\ f'(-x^2 + 2x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2 < 0 \\ \begin{cases} -x^2 + 2x > 0 \\ -x^2 + 2x < 2 \end{cases} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 1 \\ \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ 0 < x < 2 \\ -x^2 + 2x - 2 < 0 \text{ (luôn đúng) } \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 1 \\ \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nhận xét: Chọn A thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 114: [2D1-4] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. Với tham số thực m thuộc khoảng nào sau đây thì hàm số $g(x) = f(x^3 + m)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

- A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $(1; 4)$. C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $g'(x) = 3x^2 \cdot f'(x^3 + m) = 3x^2 \cdot (x^3 + 1 + m)(x^3 + m)(x^3 + m - 2)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến khi $g'(x) \geq 0$

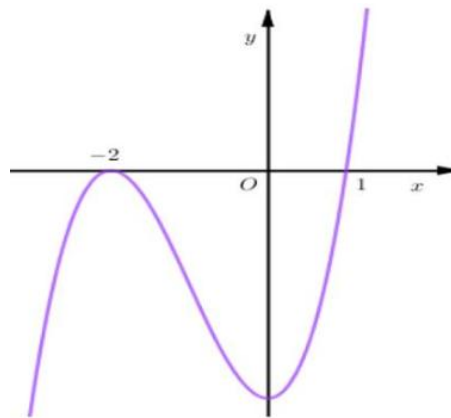
$$\Leftrightarrow 3x^2(x^3 + 1 + m)(x^3 + m)(x^3 + m - 2) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt[3]{1+m}; -\sqrt[3]{m}] \cup [\sqrt[3]{2-m}; +\infty).$$

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi $\sqrt[3]{2-m} \leq 1 \Leftrightarrow m \geq 1$ hay $m \in [1; +\infty)$.

Nhận xét: $(1; 4)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 115: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-2; 3)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$g'(x) = 2f'(2x-1).$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2f'(2x-1) > 0 \Leftrightarrow 2x-1 > 1 \Leftrightarrow x > 1.$$

Hàm số $g(x) = f(2x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 116: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(m-x-3)$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn.

$$y' = 2xf'(x^2) = 2x \cdot x^4 \cdot (x^2 - 1)(m - x^2 - 3).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x^2 = 3 - m \end{cases}.$$

Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$

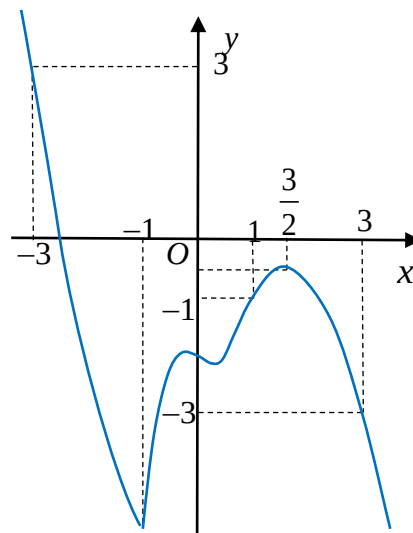
$$\Leftrightarrow 2x^5 \cdot (x^2 - 1)(m - x^2 - 3) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow m - x^2 - 3 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m - 3 \geq \max_{x \in (1; +\infty)} x^2 \Rightarrow \text{không có giá trị } m \text{ thỏa mãn}$$

Câu này bị sai ko có đáp án mong th cô xem xét cẩn thận giúp

Câu này thầy giải chính xác rồi. Không có đáp án đúng.

Câu 117: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-3; 1)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

D. $(1; 3)$.

Lời giải

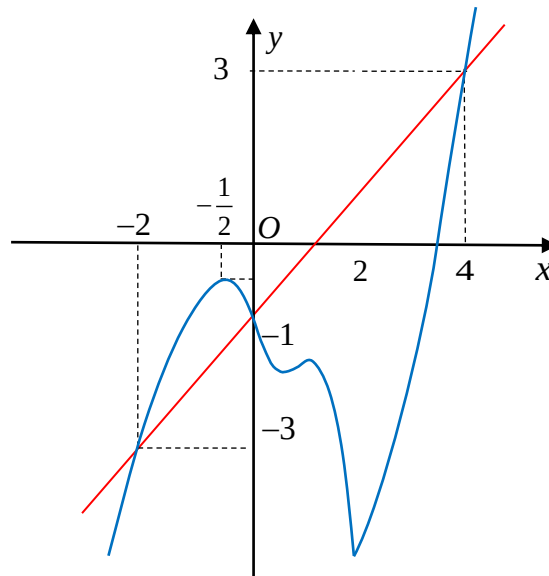
Chọn B

Ta có $g'(x) = -f'(1-x) + x - 1$.

Vậy $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-x) > x - 1$.

Ta có đồ thị $y = f'(1-x)$ màu xanh là ảnh của đồ thị $(C): y = f'(x)$ qua phép lấy đối xứng qua Oy và tịnh tiến qua phải 1 đơn vị.

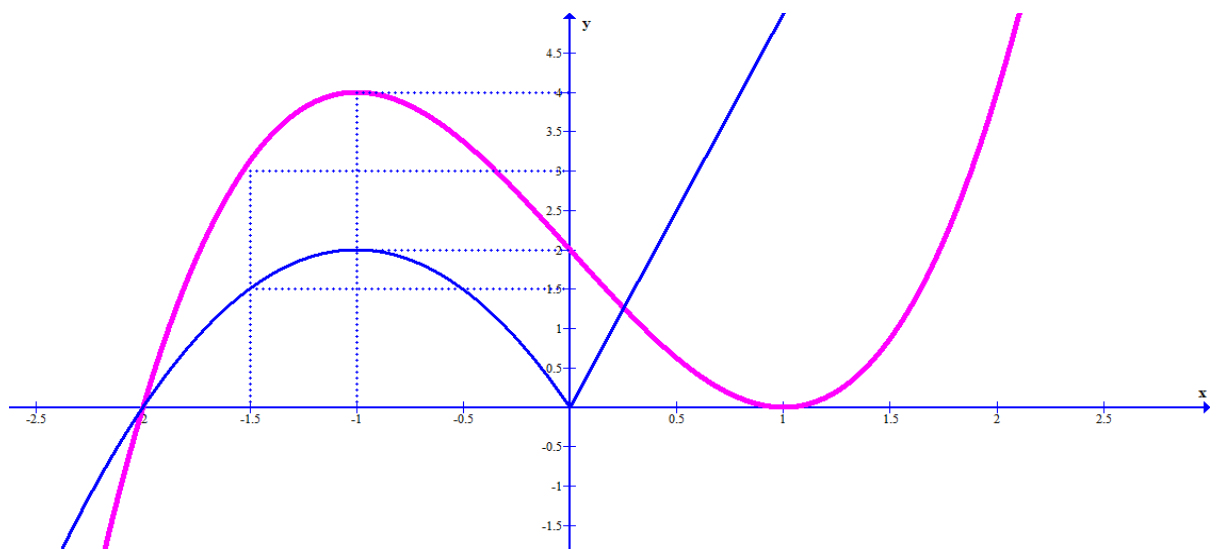
Đồ thị $y = x - 1$ là đường thẳng màu đỏ đi qua hai điểm $(4; 3)$; $(-2; -3)$ và $(0; -1)$.



Hàm số $g(x)$ nghịch biến hay $g'(x) < 0$.

Căn cứ vào đồ thị ta được đáp án là **B**.

Câu 118: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị các đạo hàm cho như hình vẽ với $f'(x)$ (màu hồng) và $g'(x)$ (màu xanh) có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x) = f(x-1) - g(2x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1; 0)$.

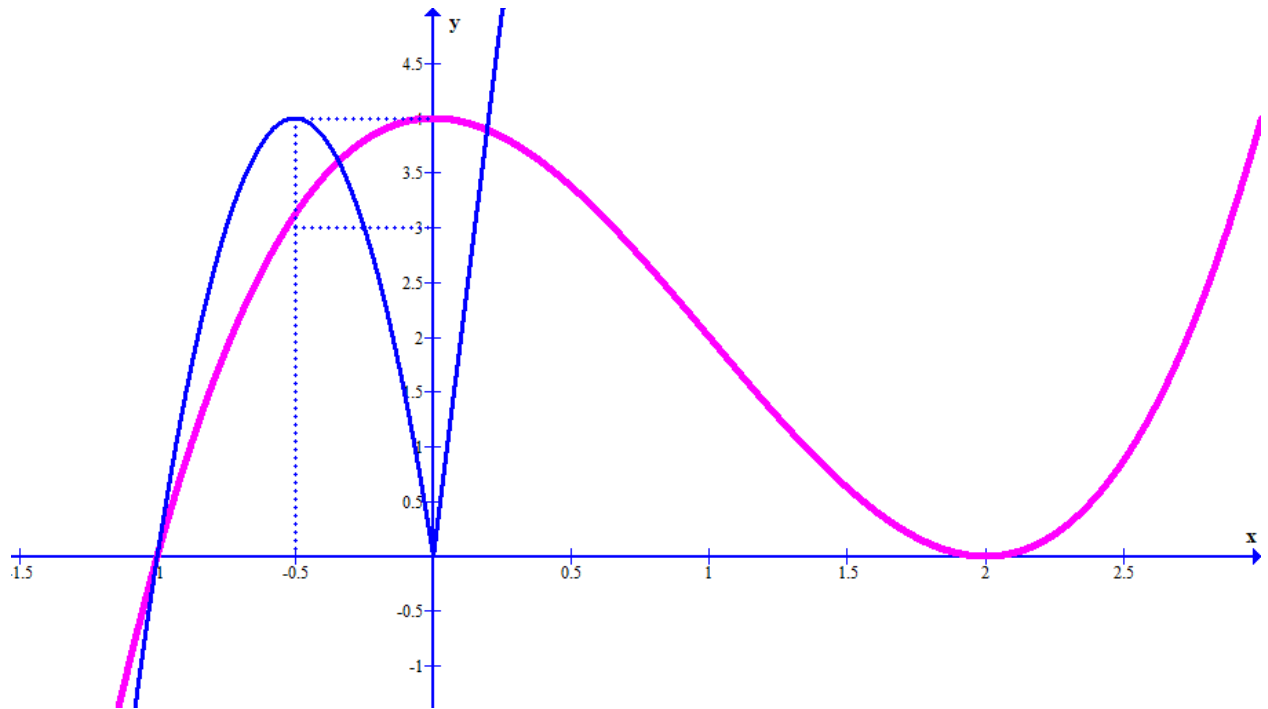
B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B



$$h'(x) = f'(x-1) - 2g'(2x)$$

Đồ thị hàm $y = f'(x-1)$ là sự tịnh tiến sang phải 1 đơn vị của đồ thị hàm $y = f'(x)$.

Đồ thị hàm $y = g'(2x)$ sự co lại 2 đơn vị theo trục Ox của đồ thị hàm $y = g'(x)$.

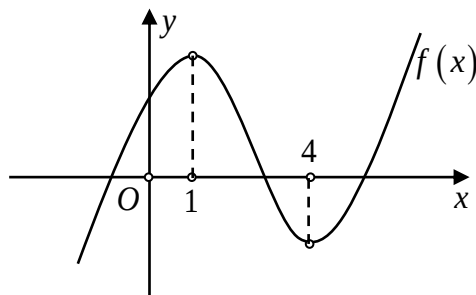
Đồ thị hàm $y = 2g'(2x)$ sự lớn lên 2 đơn vị theo trục Oy của đồ thị hàm $y = g'(2x)$.

Ta có $h'\left(\frac{-1}{2}\right) = f'\left(\frac{-3}{2}\right) - 2g'(-1) = 3 - 4 = -1 < 0$ loại **A**.

Loại ngay C, D vì hình vẽ.

Ta **Chọn B**

Câu 119: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $f(3x-2)$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha; \beta)$. Khi đó giá trị lớn nhất của $\beta - \alpha$ là:



A. 9.

B. 3.

C. 6.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

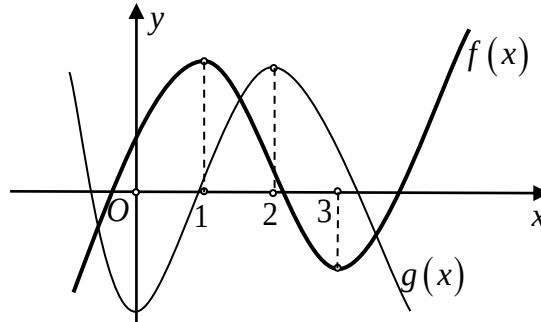
Ta có: $y = f(3x-2) \Rightarrow y' = 3 \cdot f'(3x-2)$.

Hàm số $y = f(3x-2)$ nghịch biến $\Leftrightarrow y' \leq 0 \Leftrightarrow 3.f'(3x-2) \leq 0 \Leftrightarrow f'(3x-2) \leq 0$.

$$\Leftrightarrow 1 \leq 3x-2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Vậy khoảng $(\alpha; \beta)$ lớn nhất là $(1; 2)$.

Câu 120: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng hai hàm số $f(2x-1)$ và $g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng:



A. 0.

B. -2.

C. -4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

+) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

Hàm số $y = f(2x-1)$ có $y' = 2f'(2x-1)$

Với $y' < 0 \Leftrightarrow 2.f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow 1 < 2x-1 < 3 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Vậy hàm số $y = f(2x-1)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

+) Hàm số $y = g(ax+b)$ có đạo hàm $y' = a.g'(ax+b)$.

$$y' = a.g'(ax+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax+b=0 \\ ax+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{a} \\ x = \frac{2-b}{a} \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } a > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < \frac{2-b}{a}.$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right); \left(\frac{2-b}{a}; +\infty\right)$ (không thỏa mãn).

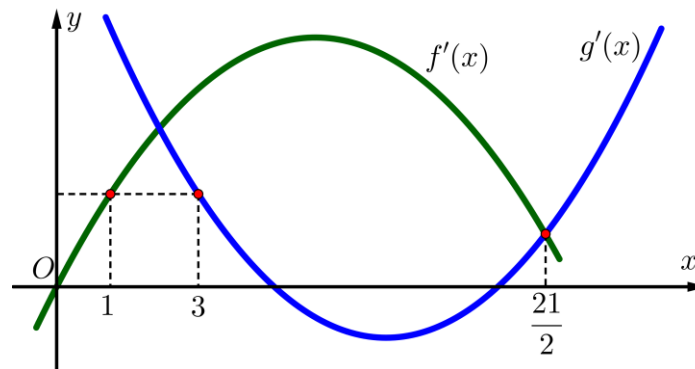
$$+ \text{ Nếu } a < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > \frac{2-b}{a}.$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{2-b}{a}; -\frac{b}{a}\right)$.

Do hàm số có cùng khoảng nghịch biến là $(1; 2)$ nên $\begin{cases} \frac{2-b}{a} = 1 \\ -\frac{b}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} = -1 \\ \frac{b}{a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$.

Vậy $4a + b = -4$.

Câu 121: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị biểu diễn đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng hàm số $y = f(x) - g(x+2)$ đồng biến trong khoảng $(\alpha; \beta)$ thỏa giá trị lớn nhất của $\beta - \alpha = 8$; phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ $x_1 = 11$ là $y = 3x + 2$ và phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_2 = 9$ là $y = ax + 1$. Giá trị của $f(9)$ bằng

A. 13

B. 28.

C. -26.

D. 22.

Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x) = f(x) - g(x+2)$.

Ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x+2)$.

Cách 1

Theo hình vẽ ta có $f'(1) = g'(3)$ nên $h'(1) = f'(1) - g'(3) = 0$.

Do hàm số $h(x)$ đồng biến trong khoảng $(\alpha; \beta)$ và giá trị lớn nhất của biểu thức $\beta - \alpha$ bằng 8 nên $h'(9) = 0 \Leftrightarrow f'(9) - g'(11) = 0 \Leftrightarrow a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3$.

Mặt khác điểm $M(9;9a+1)$ là tiếp điểm giữa tiếp tuyến $y=ax+1$ với đồ thị của hàm $f(x)$ nên $f(9)=9a+1=27+1=28$.

Cách 2

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=g'(x+2) \quad (*)$$

Để hàm số $h(x)$ tồn tại khoảng đồng biến $(\alpha;\beta)$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x=\alpha$ và $x=\beta$.

Lại có đồ thị hàm số $g'(x+2)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $g'(x)$ qua trái 2 đơn vị. Từ hình vẽ, ta suy ra phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là $x=1$ và $x=\beta \left(1 < \beta < \frac{21}{2}\right)$.

Theo đề bài $\beta-1=8 \Leftrightarrow \beta=9$, hay $f'(9)=g'(9+2) \Leftrightarrow a=3$.

Từ đó tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=9$ là $y=3x+1$ nên $f(9)=1+9a=28$.

Câu 122: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Khi đó hàm số $f(x^2-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	4	1	$+\infty$

A. $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

B. $(-1;2)$.

C. $(1;1+\sqrt{3})$.

D. $(-\sqrt{2};2)$.

Lời giải

Chọn C

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

$$\text{Ta có: } \left[f(x^2-2x) \right]' < 0 \Leftrightarrow (2x-2)f'(x^2-2x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 < 0 \\ f'(x^2-2x) > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2x-2 > 0 \\ f'(x^2-2x) < 0 \end{cases}$$

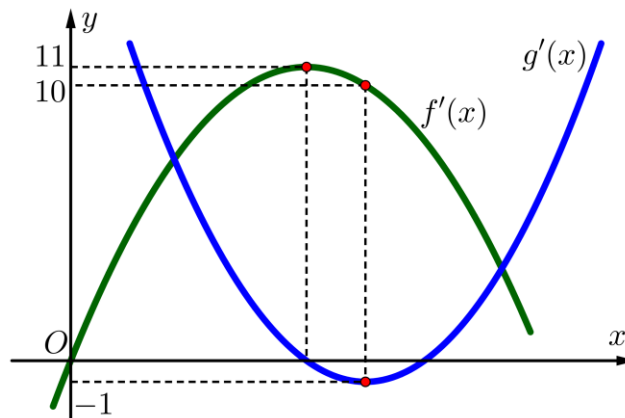


$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x^2 - 2x < -1 \text{ (Vn)} \\ x^2 - 2x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 1 + \sqrt{3} \\ x < 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 - \sqrt{3} \\ 1 < x < 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ -1 < x^2 - 2x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Do đó: hàm số $f(x^2 - 2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1 - \sqrt{3})$ và $(1; 1 + \sqrt{3})$.

Câu 123: (4) Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có một phần đồ thị biểu diễn đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số a để hàm số $y = f(x) - g(x) - a^2x + 2019$ tồn tại một khoảng đồng biến $(\alpha; \beta)$?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $h(x) = f(x) - g(x) - a^2x + 2019 \Rightarrow h'(x) = f'(x) - g'(x) - a^2$.

Xét $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) + a^2$ (*).

Trong đó đồ thị $g'(x) + a^2$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị $g'(x)$ lên trên a^2 đơn vị.

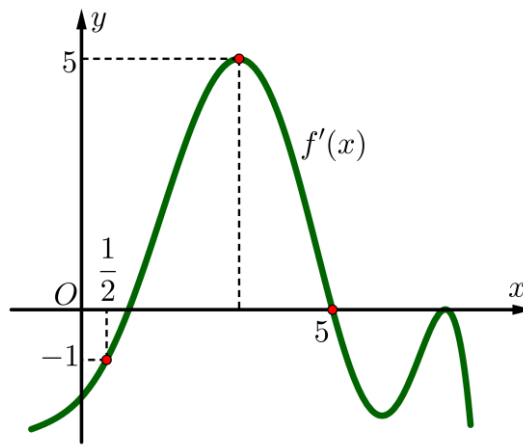
Từ đồ thị, để tồn tại một khoảng đồng biến $(\alpha; \beta)$ thì phương trình (*) cần có hai nghiệm phân biệt $x = \alpha, x = \beta$.

Do đó $0 < a^2 \leq 11 \Leftrightarrow 0 < a \leq \sqrt{11}$ (do $a > 0$)

Vì a nguyên dương nên $a \in \{1; 2; 3\}$.

Câu 124: (4) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.

Hàm số $y = f(3x + 2) - x^2 + 2x - 2019$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

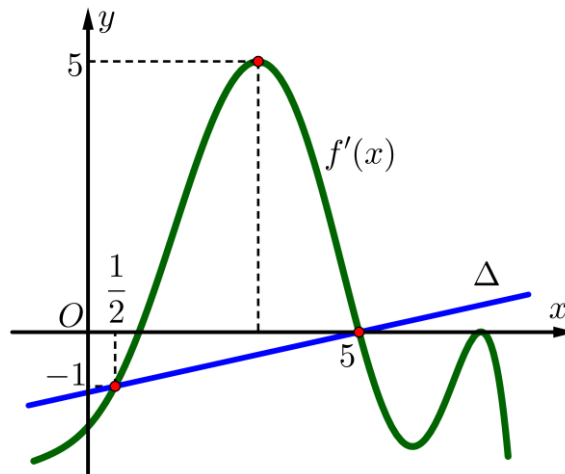
B. $(0; 1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $g(x) = f(3x+2) - x^2 + 2x - 2019$

$$\Rightarrow g'(x) = 3f'(3x+2) - 2x + 2 = 3f'(3x+2) - \frac{2}{3}(3x+2) + \frac{10}{3}.$$

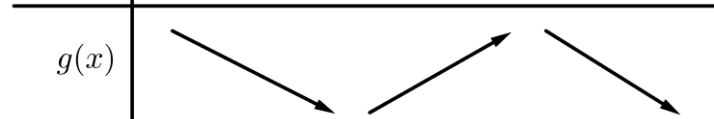
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3x+2) = \frac{2}{9}(3x+2) - \frac{10}{9} \quad (*).$$

Xét đường thẳng $\Delta: y = \frac{2}{9}x - \frac{10}{9}$, dễ thấy Δ đi qua các điểm có tọa độ $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ và $(5; 0)$

hay phương trình $f'(x) = \frac{2}{9}x - \frac{10}{9}$ có hai nghiệm phân biệt là $x = \frac{1}{2}$ và $x = 5$.

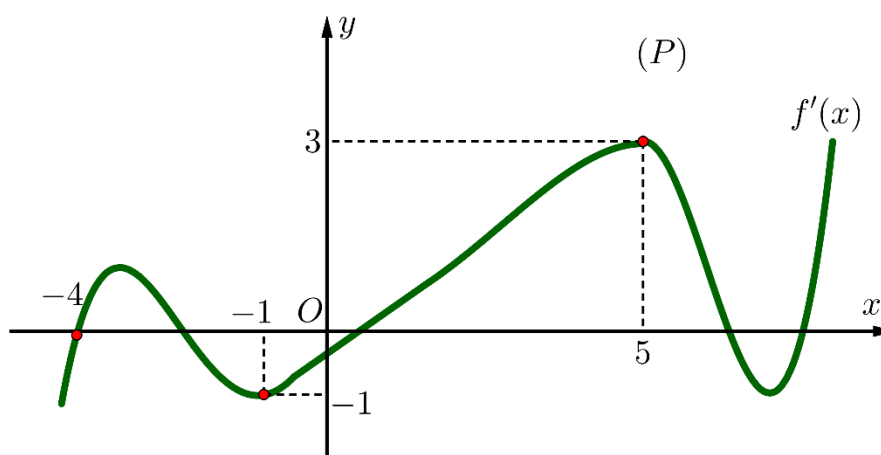
$$\text{Từ đó phương trình } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 = \frac{1}{2} \\ 3x+2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$					

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ nên **Chọn B**

Câu 125: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(3x-1) - x^3 + 3x + 2020$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$. Giá trị lớn nhất của $b-a$ bằng



A. 1.

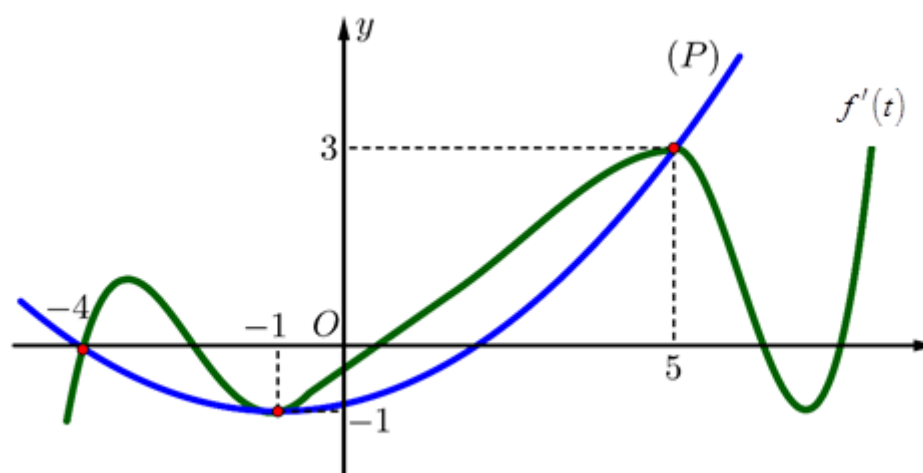
B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C



Ta có $y' = 3f'(3x-1) - (3x^2-3) = 3[f'(3x-1) - (x^2-1)](1)$.

$$\text{Đặt } t = 3x-1 \Leftrightarrow x = \frac{t+1}{3} \Rightarrow x^2-1 = \frac{(t+1)^2}{9} - 1 \Rightarrow y' = 3 \left[f'(t) - \frac{(t+1)^2}{9} + 1 \right]$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{(t+1)^2}{9} - 1$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị của hàm số $f'(t)$.

Dựa vào đồ thị ta có: $t \in [-4; 5]$ thì đồ thị hàm số $f'(t)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = \frac{(t+1)^2}{9} - 1$ nên $y' \geq 0$ hay $y' = 3 \left[f'(t) - \frac{(t+1)^2}{9} + 1 \right]$ đồng biến trên khoảng $(-4; 5)$, tức là hàm số $y = f(3x-1) - x^3 + 3x + 2020$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$ do đó $a = -1; b = 2 \Rightarrow b - a = 3$.

Câu 126: Cho hàm số $y = f(x)$ có biểu thức đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)(x-2)$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y = f(x^2-1) - 2x + 2018$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-1; 2)$.

C. $(-1; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

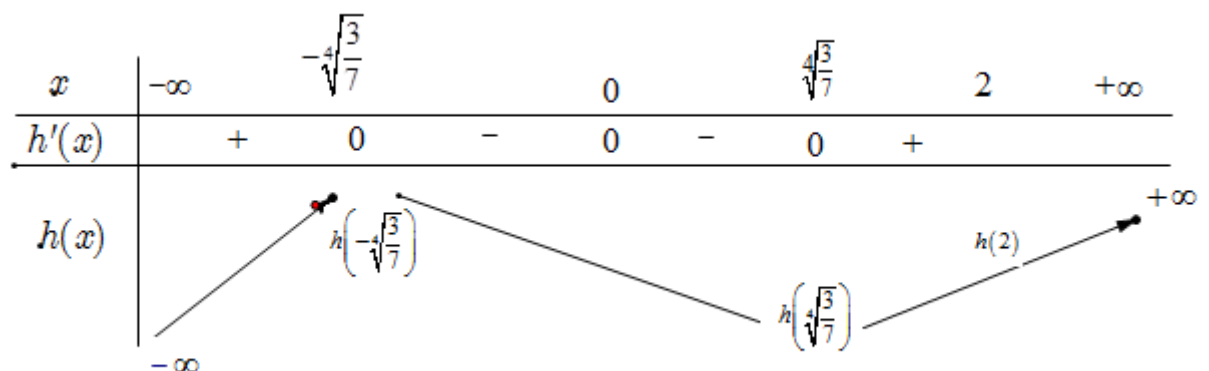
Chọn A

Ta có $y' = 2xf'(x^2+1) - 2 = 2x \cdot (x^2+1) \cdot x^2 \cdot (x^2-1) - 2$.

Đặt $h(x) = 2x \cdot (x^2+1) \cdot x^2 \cdot (x^2-1) - 2 = 2x^7 - 2x^3 - 2$

$$h'(x) = 14x^6 - 6x^2, h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt[4]{\frac{3}{7}} \end{cases}$$

Bảng biến thiên



Vì $h\left(-\sqrt[4]{\frac{3}{7}}\right) < 0$, $h\left(\sqrt[4]{\frac{3}{7}}\right) < 0$ nên loại các Chọn B, C, **D**.

Mặt khác $h(2) > 0$ và $h(x) > 0 \quad \forall x > 2$ do đó $y' > 0 \quad \forall x > 2$, Chọn A thỏa mãn.

Câu 127: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)(x-1)g(x) - 2018$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $h(x) = f(x-1) + 2018x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 2)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$h(x) = f(x-1) + 2018x \Rightarrow h'(x) = f'(x-1) + 2018 = (x-1)(x+1)(x-2)g(x-1)$$

Do $g(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $g(x-1) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ nên ta có bảng biến thiên của hàm số } h(x) \text{ như sau:}$$

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$								

Vậy hàm số $h(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$. **Chọn B**

Câu 128: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2 + mx + 9)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

Đặt $t = 3-x$, ta thấy $x > 3$ khi và chỉ khi $t < 0$.



Suy ra hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty) \Leftrightarrow$ hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

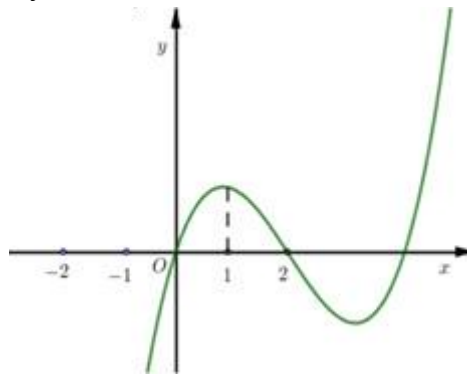
Vì $f'(x) = x(x-1)^2(x^2+mx+9)$, mà $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow x^2+mx+9 \geq 0, \forall x$ hoặc $x^2+mx+9=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

TH1: $x^2+mx+9 \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 36 \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-6; 6]$, mà m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

TH2: $x^2+mx+9=0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 36 > 0 \\ -m > 0 \\ 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -6$, mà m

nguyên dương nên $m \in \emptyset$.

Câu 129: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(|x+1|)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-2; -1)$.

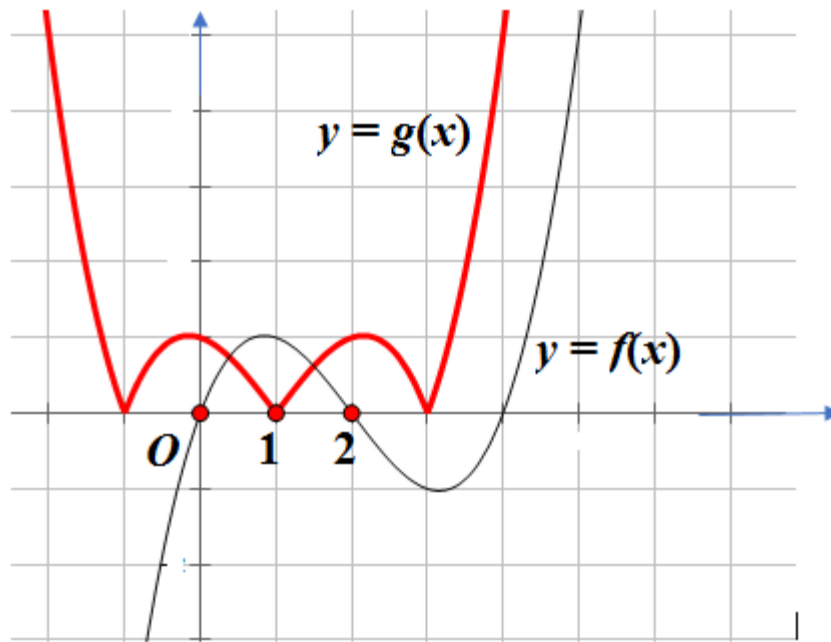
C. $(-1; 0)$.

D. $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị của hàm số $g(x) = f(|x+1|)$ có hình dạng như sau:



Dựa vào đồ thị ta **Chọn C**

Câu 130: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(3x^4 + mx^3 + 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2) = 2x^3(x^2-1)^2(3x^8 + mx^6 + 1)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Hay $3x^8 + mx^6 + 1 \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq -3x^2 - \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty)$.

Xét hàm số $h(x) = -3x^2 - \frac{1}{x^6}, x \in (0; +\infty)$ ta có:

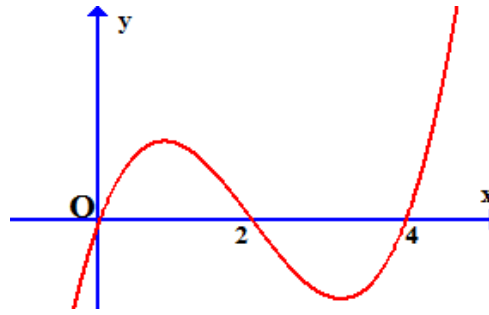
$$h'(x) = -6x + \frac{6}{x^7} = \frac{6(1-x^8)}{x^7}, x \in (0; +\infty), h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		+	0
$h(x)$	$-\infty$	-4	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được: $m \geq -3x^2 - \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq -4$.

Vì $m \in \mathbb{Z}^-$ nên $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Câu 131: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g(x) = 2^{f(2x+2)}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



- A. $(-\infty; 2)$. B. $(-1; 3)$. C. $(1; 4)$. D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = [2^{f(2x+2)}]' = 2f'(2x+2) \cdot 2^{f(2x+2)} \cdot \ln 2$. Hàm số $g(x)$ đồng biến khi $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(2x+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 > 4 \\ 0 < 2x+2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$.

Câu 132: Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)(x+1)$. Khi đó hàm số $f(\sin x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(\frac{3}{2}; 2)$. B. $(-\infty; -10)$. C. $(2; 4)$. D. $(\frac{8}{5}; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(\sin x)$

Ta có: $y' = [f(\sin x)]' = (\sin x)' \cdot f'(\sin x) = \cos x \cdot \sin x \cdot (\sin x - 1)(\sin x + 1)$

$$= -\frac{1}{2} \sin 2x \cdot (1 - \sin^2 x) = -\frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos^2 x.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow -\sin 2x \cdot \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta thấy:



♦ $\forall x \in \left(\frac{8}{5}; 3\right) \subset \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \sin 2x < 0 \Rightarrow$ hàm số $y = f(\sin x)$ đồng biến trên $\left(\frac{8}{5}; 3\right)$.

Câu 133: Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm là $f'(x) = x^2 + ax + 2$. Biết rằng hàm số $f(\sin^2 x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của $a \in [-2019; 2019]$ thỏa mãn bài toán?

A. 2022.

B. 2023.

C. 2021.

D. 2020.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = \sin^2 x$; $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow u \in (0; 1)$.

Ta có $u'_x = 2 \sin x \cdot \cos x < 0$, $\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ và $f'(\sin^2 x) = f'_x(u) = u'_x \cdot f'_u(u)$.

Để hàm số $y = f(\sin^2 x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $f'(\sin^2 x) < 0$, $\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

$\Leftrightarrow u'_x \cdot f'_u(u) < 0$, $\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Leftrightarrow f'_u(u) > 0$, $\forall u \in (0; 1)$.

$\Leftrightarrow u^2 + au + 2 > 0$, $\forall u \in (0; 1) \Leftrightarrow a > -u - \frac{2}{u}$, $\forall u \in (0; 1) \Leftrightarrow a \geq \max_{[0;1]} g(u) \Leftrightarrow a \geq -3$.

Kết hợp $a \in [-2019; 2019]$ suy ra $-3 \leq a \leq 2019$. Vậy có 2023 số nguyên thỏa mãn ycbt.

Câu 134: Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm là $f'(x) = x^2 - x + \frac{b}{200}$. Biết rằng hàm số $f(\cos^2 x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right)$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên $b \in [-2019; 2019]$ thỏa mãn bài toán?

A. 1969.

B. 1968.

C. 1970.

D. 1971.

Lời giải

Chọn C

Xét $y = f(\cos^2 x)$.



Ta có: $y' = -2 \sin x \cdot \cos x \cdot f'(\cos^2 x) \geq 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right)$ với
 $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow \cos x < 0, \sin x > 0.$

Suy ra $f'(\cos^2 x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos^4 x - \cos^2 x + \frac{b}{200} \geq 0 \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right)$, đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow 0 < t < \frac{3}{4}.$

Suy ra $\frac{b}{200} > t - t^2, \forall t \in \left(0; \frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{b}{200} \geq \max(t - t^2) \Leftrightarrow \frac{b}{200} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow b \geq 50.$

Nên $b \in \{50, 51, \dots, 2019\}$ có 1970 số nguyên.

Câu 135: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x) - f(-x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0).$ B. $(-1; 1).$ C. $(0; +\infty).$ D. $\mathbb{R}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(-x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow y' = (f(x) - f(-x))' = f'(x) + f'(-x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}.$

Câu 136: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$? Biết rằng hàm số $y = f(x) - f(-x)$ đồng biến trên khoảng $(2; 5)$. Hỏi hàm số $y = f(x) - f(-x)$ luôn đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 4).$ B. $(-\infty; -5).$ C. $\mathbb{R}.$ D. $(-4; -3).$

Lời giải

Chọn D

Ta có: hàm số $y = f(x) - f(-x)$ đồng biến trên khoảng $(2; 5)$

$\Rightarrow y' = f'(x) + f'(-x) > 0, \forall x \in (2; 5).$

Đặt $g(x) = f'(-x) + f'(x)$

Ta thấy $g(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ nên $g(x) = f'(-x) + f'(x) > 0, \forall x \in (-5; -2).$

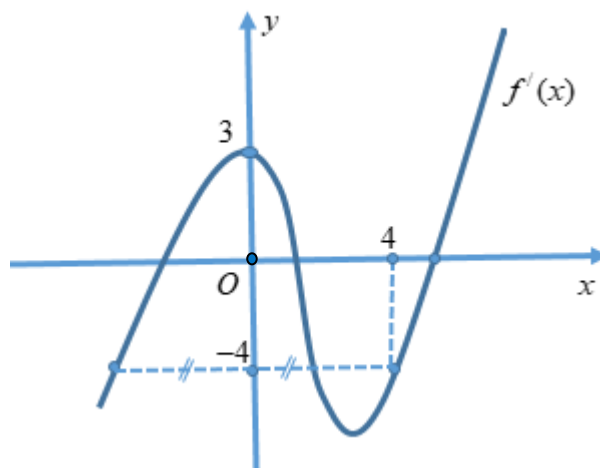
$\Rightarrow y' > 0, \forall x \in (-5; -2)$



$$\Rightarrow y' > 0, \forall x \in (-4; -3)$$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn đồng biến trên $(-4; -3)$. **Chọn D**

Câu 137: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị biểu diễn đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Khi đó hàm số $y = f(x) + f(-x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(0; +\infty)$.

B. $(-3; 0)$.

C. $(1; 4)$

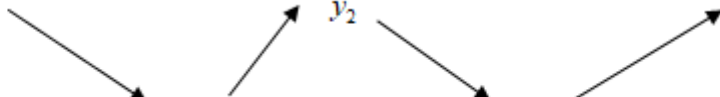
D. $(-5; -2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = f'(x) - f'(-x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y							

Hàm số đồng biến trên $(-4; 0)$. **Chọn B**

Câu 138: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên R , có biểu thức đạo hàm $f'(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$. Biết rằng hàm số $y = -f\left(\frac{1-x}{2019}\right) + f\left(\frac{2+x}{2019}\right) - f\left(\frac{3-x}{2019}\right) \dots + f\left(\frac{2018+x}{2019}\right) - \frac{a^2 x}{2019}$ luôn đồng biến trên R và a là tham số nguyên. Hỏi có tất cả bao nhiêu số chính phương a thỏa yêu cầu bài toán?

A. 6.

B. 5.

C. 11.

D. 63.

Lời giải

Chọn B

$$y' = \frac{1}{2019} \left[f'\left(\frac{1-x}{2019}\right) + f'\left(\frac{2+x}{2019}\right) + f'\left(\frac{3-x}{2019}\right) \dots + f'\left(\frac{2018+x}{2019}\right) - a^2 \right] \geq 0, \forall x \in R$$

$$f'(1-a) = \frac{9^{1-a}}{9^{1-a} + 3} = \frac{9}{9 + 3 \cdot 9^a} = \frac{3}{3 + 9^a}$$

$$f'(1-a) + f(a) = 1$$

$$\text{Do đó: } (*) \Leftrightarrow 1009 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq 1009 \Leftrightarrow |a| = \sqrt{1009} \approx 31,765$$

Do a là số chính phương nên $a \in \{1; 4; 9; 16; 25\}$. **Chọn B**