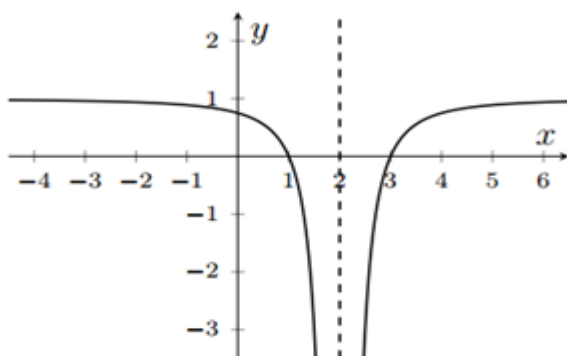


Họ, tên thí sinh:.....;

Số báo danh:

PHẦN I. Câu trả lời trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 2}$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) có $f(0) = 1$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Biết $\max_{[-4, -3]} f(x) = \frac{m}{n}$ (với $m, n \in \mathbb{Z}$: $n > 0$; $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Giá trị của $m + 2n$ bằng

- A. -24. B. 14. C. -14. D. 3.

Câu 2. Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có $|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$, $|\vec{v}| = \sqrt{5}$, $|\vec{u} - 2\vec{v}| = 2\sqrt{5}$. Tìm số đo góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $(\vec{u} - \vec{v})$.

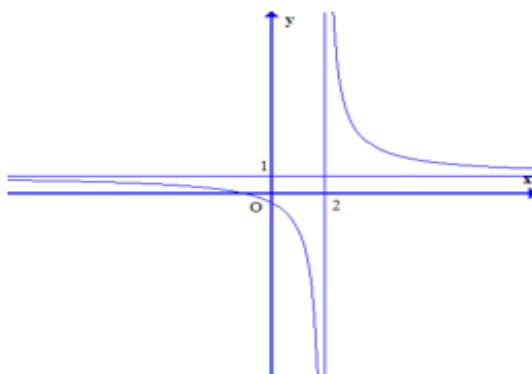
- A. 45° B. 60° C. 120° . D. 30°

Câu 3. Trên đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$, đồ thị hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 8.

Câu 4. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ với a, b, c, d là các số thực.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $y' < 0, \forall x \neq 2$. B. $y' < 0, \forall x \neq 1$. C. $y' > 0, \forall x \neq 2$. D. $y' > 0, \forall x \neq 1$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực a để hàm số $y = \frac{\cos x + a \sin x + 1}{\cos x + 2}$ có giá trị lớn nhất bằng 1.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 6. Gọi B và C lần lượt là các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$ sao tam giác OBC đều. Giả sử điểm B có hoành độ là a khi đó tỉ số $\frac{2^x}{a}$ bằng:

- A. $2 - \sqrt{3}$ B. $2 + \sqrt{3}$ C. $2 - \sqrt{2}$ D. $2 + \sqrt{2}$

Câu 7. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ với $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có hai cực trị $-1; 1$ và $f'(-2) = 2f'(0)$, $f''(2) = -9$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số

$$g(x) = f(2x-3) - \ln(1+x^2) - 2mx \text{ đồng biến trên } \left(\frac{1}{2}; 2\right)?$$

- A. - 45. B. - 44. C. - 36 D. 45.

Câu 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. B. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. D. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, biết $AB = SA = a$; $SA \perp (ABCD)$.

Điểm M trên cạnh BD , điểm N trên cạnh SC thỏa mãn $\frac{BM}{BD} = \frac{SN}{SC}$ và độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất.

Khi đó, nếu $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD} + p\overrightarrow{AS}$ thì $T = m + n + 2p$ bằng

- A. 1 B. 2 C. 6 D. -1

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{AO} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, điểm $B(3; -4; 1)$ $C(2; 0; -1)$ và điểm $D(a; b; c)$ sao cho B là trọng tâm tam giác ACD . Khi đó $P = a + b + c$ bằng

- A. 1. B. -3. C. -1. D. 3.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{u}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a} = (1; 1; 1)$ và $\vec{b} = (1; -1; 3)$; độ dài vectơ $\vec{u}$ bằng 3. Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ biết vectơ $\vec{u}$ có hoành độ dương.

- A. $\left(\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. B. $\left(\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. C. $\left(-\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. D. $\left(-\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2t; 2t; 0), B(0; 0; t)$ với $t > 0$.

Cho điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$. Biết rằng có giá trị $t = \frac{a}{b}$ với a, b nguyên dương

và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất là 3. Tính giá trị $Q = 2a + b$?

- A. 5. B. 13. C. 11. D. 9.

Câu 13. Thời gian truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau

Thời gian (phút)	[15; 18)	[18; 21)	[21; 24)	[24; 27)	[27; 30)
Số học sinh	3	12	15	22	9

Một của mẫu số liệu trên là

A. 24,35.

B. 28,05.

C. 27,35.

D. 25,05.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD . Số đo của góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng

A. 90° .

B. 45°

C. 60° .

D. 30°

Câu 15. Cho $f(1)=1$ và $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$, với mọi m, n thuộc $\mathbb{N}^*$. Giá trị biểu thức

$$T = \log \left| \frac{f(96) - f(69) - 24}{2} \right| \text{ bằng}$$

A. 3

B. 4

C. 6

D. 9

Câu 16. Cho cấp số cộng có tổng của n số hạng đầu tiên được tính bởi công thức $S_n = 4n - n^2$.

Gọi M là tổng của số hạng đầu tiên và công sai của cấp số cộng. Khi đó:

A. $M = 7$.

B. $M = 4$.

C. $M = -1$.

D. $M = 1$.

Câu 17. Một nhóm gồm 5 bạn nam, 4 bạn nữ và thầy giáo đứng thành 2 hàng, mỗi hàng 5 người để chụp ảnh kỉ niệm. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng để khi đứng, thầy giáo xen giữa hai bạn nam đồng thời các bạn nữ không đứng cạnh nhau trong cùng một hàng bằng

A. 68102.

B. 69119.

C. 68324.

D. 69120

Câu 18. Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 27}{x - 3} = 9$.

$$\text{Tính giới hạn } L = \lim_{x \rightarrow 3} \left[2f(x) - 19x + 3 \right] \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-3x} \right).$$

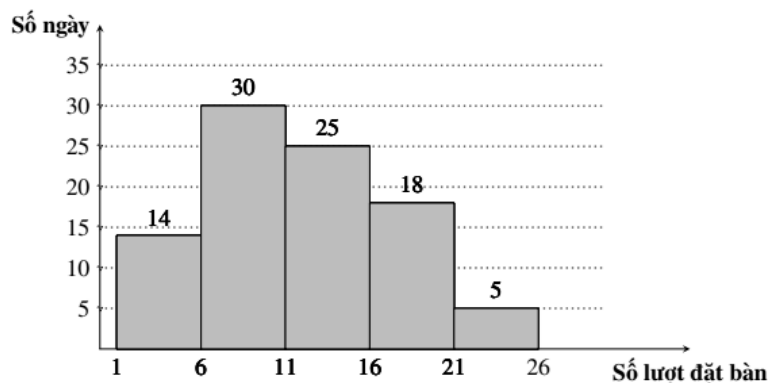
A. $L = \frac{1}{3}$.

B. $L = \frac{2}{3}$.

C. $L = -\frac{2}{3}$.

D. $L = -\frac{1}{3}$.

Câu 19. Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượng khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2026 của một nhà hàng.



Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi biểu đồ trên bằng:

A. 9,5.

B. 8,5.

C. 10,5.

D. 7,5.

Câu 20. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 7 chữ số được lập từ tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 6 và có đủ tất cả các chữ số của tập A .

A. $\frac{35}{3888}$

B. $\frac{485}{34992}$

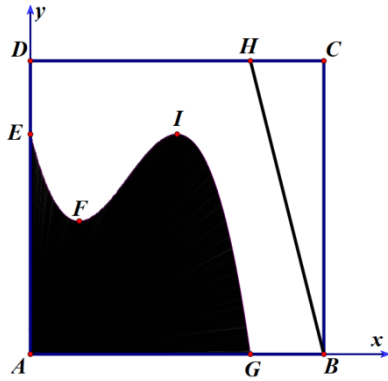
C. $\frac{55}{3888}$

D. $\frac{20}{2187}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Ông An có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = 12m$. Ông làm một hồ bơi dạng hình thang cong (phần tô đậm) và một lối đi là đoạn thẳng HB . Nếu đặt hệ trục tọa độ có gốc tại A như hình vẽ, độ dài đơn

vị là $1m$, thì đường cong $EFIG$ là một phần đồ thị của một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có F là điểm cực tiểu và I là điểm cực đại. Biết $CH = DE = GB = 3m$ và các điểm F, I cách cạnh AD lần lượt là $2m$ và $6m$.



- Phương trình của đường thẳng HB là $y = -4x + 48$.
- Tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f'(x) = a(x+2)(x+6)$
- Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 7 song song với đường thẳng HB .
- Ông An cần đặt một cái thang lên xuống hồ bơi tại một điểm trên đường cong $EFIG$ sao cho khoảng cách từ điểm đặt thang đến lối đi là ngắn nhất, khoảng cách đó bằng $2,56m$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 2. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(3; -1; 4), B(-2; 3; 3)$. Các điểm M, N thay đổi sao cho M luôn thuộc mặt phẳng (Oxy) và $\overline{MN} = (-2; -2; 1)$

- Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là $(-3; 1; 4)$.
- C là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) thỏa mãn $\overline{CA} + k\overline{CB} = \vec{0} (k \in \mathbb{R})$. Khi đó $k = -\frac{4}{3}$
- $D(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $\overline{BD} = \overline{NM}$. Khi đó $a + b + c = 1$.
- Giá trị nhỏ nhất của $AM + MN + NB$ là 12.

Câu 3. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu (A) và (B) trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	$[18; 20)$	$[20; 22)$	$[22; 24)$	$[24; 26)$	$[26; 28)$
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

- Xét mẫu số liệu của cổ phiếu (A) ta có số trung bình là $\overline{x_A} = 23,28$.
- Xét mẫu số liệu của cổ phiếu (A) ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_x^2 = 7,5216$.
- Xét mẫu số liệu của cổ phiếu (B) ta có số trung bình là $\overline{x_B} = 23,48$.
- Cổ phiếu (A) có mức độ biến động giá lớn hơn cổ phiếu (B).

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \log_5(x+2)$

- Đạo hàm của hàm số $y = (2x-8)f(x)$ là $y' = \log_5(x+2) + \frac{x-4}{(x+2)\ln 5}$
- Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(f(x)) > -1$ là $S = (-1; 23)$;
- Tập xác định của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}}(f^2(x) - 3f(x))$ chứa đúng 20 số nguyên âm;
- Có duy nhất một giá trị dương của tham số m để phương trình $f(x)\sqrt{5^x - m} = 0$ có nghiệm

duy nhất;

Câu 5. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 song song với nhau. Trên d_1 lấy 7 điểm phân biệt $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ sao cho $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_7 = 1\text{cm}$, trên d_2 lấy 6 điểm $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ sao cho $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = B_5B_6 = 1\text{cm}$. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ các điểm trên.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số phần tử không gian mẫu bằng C_{13}^3
- b) Xác suất để ba điểm được chọn tạo thành tam giác là $\frac{49}{286}$.
- c) Xác suất để 3 điểm được chọn có 1 điểm là trung điểm của đoạn thẳng có 2 đầu mút là hai điểm còn lại bằng $\frac{15}{286}$
- d) Biết khoảng cách giữa d_1, d_2 bằng 2 cm. Khi đó xác suất để chọn được 3 điểm tạo thành tam giác có diện tích bằng 1 cm^2 bằng $\frac{71}{286}$.

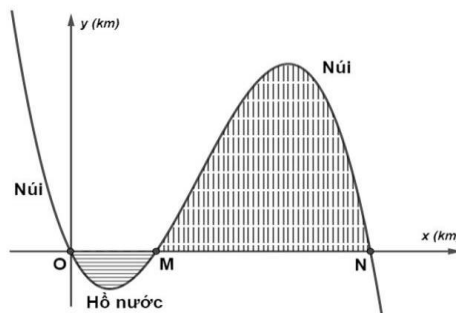
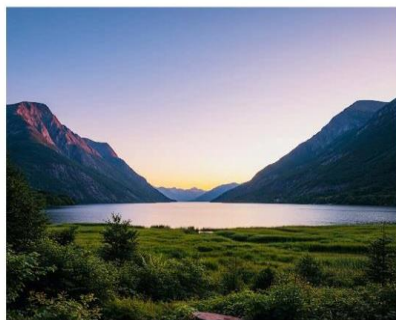
Câu 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AC = a$ và cạnh bên $AA_1 = a\sqrt{2}$

- a) Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.
- b) Góc giữa hai đường thẳng BC_1 và AC bằng 60° .
- c) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A_1BC_1) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.
- d) Gọi M, N lần lượt là hai điểm di động trên các đoạn thẳng A_1C_1 và BC_1 sao cho $MN = \frac{a}{2}$.

Thể tích của khối chóp $A.A_1BNM$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{7\sqrt{2}}{48}a^3$.

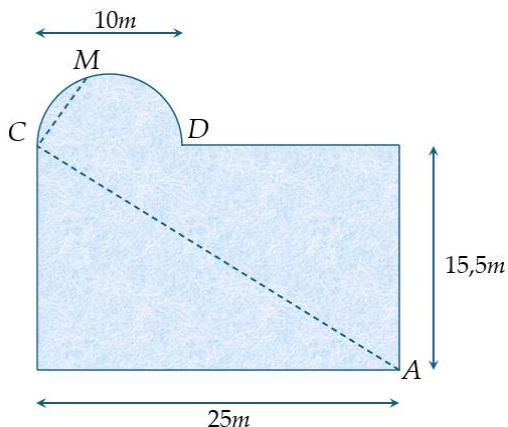
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6, đáp số là số nguyên hoặc số thập phân có không quá 4 ký tự kể cả dấu “-” và dấu “,”.

Câu 1. Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách $OM = 2\text{km}$; độ rộng của núi $MN = 3,5\text{km}$. Độ sâu của hồ nước là 450m. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 2. Bạn Hoa thường đi bơi ở hồ Sky Garden cạnh nhà, hồ bơi có thiết kế là một hình chữ nhật với chiều dài 25 m, chiều rộng 15,5 m và bên cạnh đó là một hình bán nguyệt đường kính 10 m. Trong một lần bể bơi vắng

người nên Hoa đã thực hiện một chu trình là bơi theo đoạn thẳng AC rồi bơi tiếp đoạn thẳng CM , với M là một vị trí bất kỳ trên hình bán nguyệt. Ngay sau đó bạn đi bộ theo một hướng qua điểm D dọc bờ của hồ bơi để quay lại vị trí A và kết thúc chu trình. (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng vận tốc bơi của Hoa là $2,4 \text{ km/h}$, vận tốc đi bộ là $4,8 \text{ km/h}$ và tốc độ bơi, vận tốc đi bộ không thay đổi trong một chu trình. Hỏi thời gian chậm nhất để Hoa thực hiện xong chu trình trên là bao nhiêu phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 3. Khi khắc phục hậu quả của thiên tai, bão lũ, một trong những giải pháp nhằm tiếp tế hàng cứu trợ đến những nơi khó tiếp cận là sử dụng flycam để xác định vị trí chính xác của người cần cứu trợ, sau đó sử dụng drone để vận chuyển các vật dụng thiết yếu thả xuống cho người này, giúp họ có thể cầm cự trong khi chờ đợi lực lượng cứu hộ đến nơi. Hai chiếc drone làm nhiệm vụ chuyển hàng cứu trợ bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất bay đến điểm cách điểm xuất phát $2,5 \text{ km}$ về phía nam và $1,5 \text{ km}$ về phía đông, đồng thời cách mặt đất 60 m . Chiếc thứ hai bay đến điểm cách điểm xuất phát 3 km về phía bắc và $2,5 \text{ km}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất 40 m . Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ với gốc tọa độ O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc drone, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là mặt phẳng). Giả sử trong trường hợp khẩn cấp cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu và các vật dụng cứu trợ cho hai drone sao cho tổng khoảng cách từ vị trí tiếp nhiên liệu tới hai drone nhỏ nhất. Vị trí cần tìm cách gốc tọa độ $a \text{ km}$ theo hướng bắc và $b \text{ km}$ theo hướng tây. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?

Câu 4. Có 25 quả cầu gồm 2 loại đen và trắng được đặt vào hai thùng, thùng nào có quả cầu nhiều hơn thì số quả trắng cũng nhiều hơn. Lấy ngẫu nhiên mỗi thùng một quả, tính xác suất để được một quả đen và một quả trắng biết xác suất lấy được 2 quả trắng là $0,48$.

Câu 5. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a; b)$ thỏa mãn: $10(a^2 + b^2 - ab) - [\log_3(a + b - 1)]^2 \geq a^3 + b^3 - 4$

Câu 6. Có một mô hình kim tự tháp là một khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng 6 cm , cạnh đáy bằng 4 cm được đặt lên bàn trưng bày (đáy nằm trên mặt bàn). Một con kiến đang ở một đỉnh của đáy và có ý định đi một vòng qua tất cả các mặt xung quanh và trở về vị trí ban đầu. Tính quãng đường ngắn nhất mà con kiến có thể đi được. (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

.....**HẾT**.....

BẢNG ĐÁP ÁN MÔN TOÁN**ĐỀ GIAO LƯU HSG CỤM HOÀNG HÓA LẦN 2 - NĂM HỌC 2026 - 2027****PHẦN I: Trắc nghiệm nhiều lựa chọn**

- Mỗi câu đúng được 0,4 điểm.

Mã đề	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1001	D	D	C	A	C	B	A	D	A	A	A	C	D	B	A	D	D	C	B	A

PHẦN II: Trắc nghiệm đúng sai

- Điểm tối đa mỗi câu là 1,2 điểm.

- Đúng 1 ý được 0,12 điểm; đúng 2 ý được 0,3 điểm; đúng 3 ý được 0,6 điểm; đúng 4 ý được 1,2 điểm.

Mã đề	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
1001	a)Đ - b)S - c)S - d)Đ	a)S - b)Đ - c)S - d)S	a)Đ - b)Đ - c)Đ - d)S	a)S - b)Đ - c)S - d)S	a)Đ - b)S - c)Đ - d)Đ	a)Đ - b)Đ - c)S - d)Đ

PHẦN III: Trắc nghiệm trả lời ngắn - tự luận

- Mỗi câu đúng được 0,8 điểm.

Mã đề	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
1001	1191	1.4	1,7	0,44	45	11,7

ĐÁP ÁN CHI TIẾT**PHẦN I:**

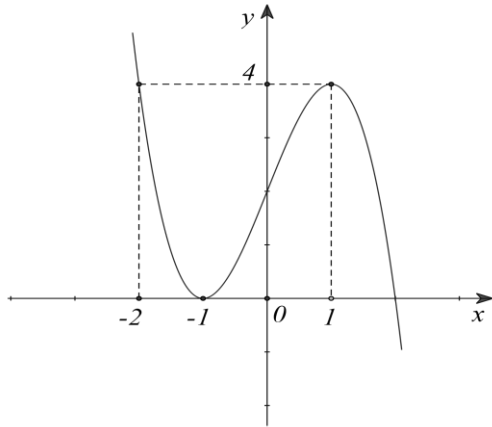
Câu 7: Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ với $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có hai cực trị -1 ; 1 và $f'(-2) = 2f'(0)$, $f''(2) = -9$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số

$$g(x) = f(2x-3) - \ln(1+x^2) - 2mx \text{ đồng biến trên } \left(\frac{1}{2}; 2\right)?$$

Lời giải

Đáp số: -45.

Từ giả thiết $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có hai cực trị -1 ; 1 thỏa mãn $f'(-2) = 2f'(0)$, $f''(2) = -9$, ta tìm được hàm số $f'(x) = -x^3 + 3x + 2$. Ta có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



+ Ta có $g'(x) = 2f'(2x-3) - \frac{2x}{1+x^2} - 2m$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ khi và chỉ khi

$$g'(x) \geq 0, \forall x \in (-1; 2) \Leftrightarrow m \leq f'(2x-3) - \frac{x}{1+x^2}, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} \left[f'(2x-3) - \frac{x}{1+x^2} \right] \quad (1)$$

+ Đặt $t = 2x-3$, khi đó $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Leftrightarrow t \in (-2; 1)$.

Từ đồ thị hàm $f'(x)$ suy ra $f'(t) \geq 0, \forall t \in (-2; 1)$ và $f'(t) = 0$ khi $t = -1$.

Tức là $f'(2x-3) \geq 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow \min_{x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} f'(2x-3) = 0$ khi $x = 1$. (2)

+ Xét hàm số $h(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Ta có $h'(x) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$ và

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ như sau:

x	$\frac{1}{2}$	1	2
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$			

$-\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra $h(x) \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \min_{x \in (\frac{1}{2}; 2)} h(x) = -\frac{1}{2}$ khi $x = 1$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $m \leq -\frac{1}{2}$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, $m \in (-10; 10)$ thì $m \in \{-9; -8; \dots; -2; -1\}$. Vậy tổng bằng -45.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, biết $AB = SA = a$; $SA \perp (ABCD)$. Điểm M trên cạnh BD , điểm N trên cạnh SC thỏa mãn $\frac{BM}{BD} = \frac{SN}{SC}$ và độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất. Khi đó, nếu $\overrightarrow{MN} = m.\overrightarrow{AB} + n.\overrightarrow{AD} + p.\overrightarrow{AS}$ thì $T = m + n + 2p$ bằng

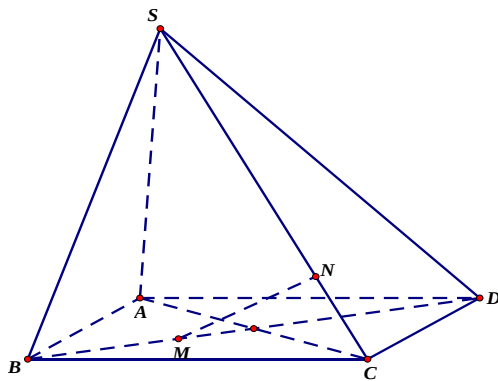
A. 1

B. 2

C. 6

D. -1

Lời giải



$$\text{Đặt } \frac{BM}{BD} = \frac{SN}{SC} = x \quad (x \in [0; 1])$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = x.\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{SN} = x.\overrightarrow{SC}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SN} = -x.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BS} + x.\overrightarrow{SC} \\ &= -x.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB} + x.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS}) \\ &= (2x-1)\overrightarrow{AB} + (1-x)\overrightarrow{AS}\end{aligned}$$

Vì $AB \perp AS$

$$\begin{aligned}\Rightarrow MN^2 &= (2x-1)^2 . AB^2 + (1-x)^2 . AS^2 \\ &= (5x^2 - 6x + 2) . a^2\end{aligned}$$

$$MN \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{5}.\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}.\overrightarrow{AS}$$

$$\text{Vậy } T = m + n + 2p = \frac{1}{5} + 0 + 2.\frac{2}{5} = 1$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2t; 2t; 0), B(0; 0; t)$ với $t > 0$. Cho điểm P di động thỏa mãn

$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP} = 3$. Biết rằng có giá trị $t = \frac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất là 3. Tính giá trị $Q = 2a + b$?

A. 5.

B. 13.

C. 11.

D. 9.

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$ nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP} &= 3 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) = 3 \\ \Leftrightarrow 3OP^2 &= 3 + 2\overrightarrow{OP}[\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}](1).\end{aligned}$$

Giả sử $P(x; y; z)$ thì phương trình (1) trở thành

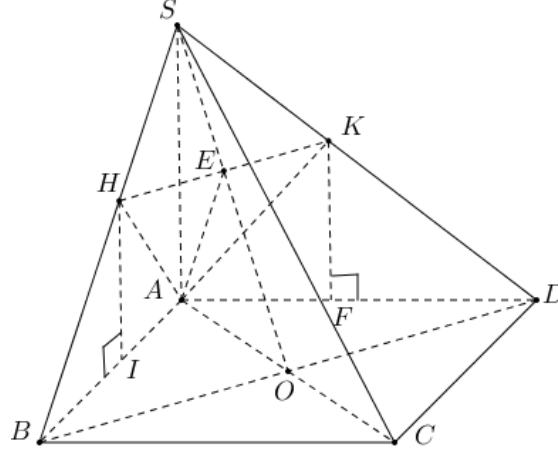
$$3(x^2 + y^2 + z^2) = 3 + 2t(2x + 2y + z) \leq 3 + 2t\sqrt{(4+4+1)(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\text{Hay } 3OP^2 \leq 3 + 6tOP \Leftrightarrow OP^2 - 2tOP - 1 \leq 0 \Rightarrow t - \sqrt{t^2 + 1} \leq OP \leq t + \sqrt{t^2 + 1}$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra } t + \sqrt{t^2 + 1} = 3 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}. \text{ Vậy } Q = 2a + b = 11.$$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD . Số đo của góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng

Chọn B



Ta có: $\Delta SAB = \Delta SAD$ ($c - g - c$)

Từ đó suy ra: $AH = AK \Rightarrow$ Tam giác AHK cân tại A . (1)

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SC} \Rightarrow HK \parallel BD, \text{ mà } BD \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AE. (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AE$ vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến.

Xét tam giác SAB vuông tại A có:

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}; AH \cdot SB = SA \cdot AB \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}, \text{ mà } HK \parallel BD \text{ nên } \frac{SH}{SB} = \frac{HE}{BO} = \frac{2}{3} \Rightarrow HE = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow AE = \sqrt{AH^2 - HE^2} = \frac{2}{3}a \Rightarrow S_{\Delta AHK} = \frac{1}{2}AE \cdot HK = \frac{1}{2}AE \cdot 2HE = \frac{2\sqrt{2}}{9}a^2.$$

Dựng $HI \parallel SA$ và $KF \parallel SA$, khi đó I, F lần lượt là hình chiếu của H, K trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow$ Tam giác AIF là hình chiếu vuông góc của tam giác AHK trên mặt phẳng đáy.

$$\text{Ta có: } AF = AI = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}a \Rightarrow S_{\Delta AIF} = \frac{1}{2}AI \cdot AF = \frac{2}{9}a^2.$$

$$\text{Khi đó: } \cos \alpha = \frac{S'}{S} = \frac{S_{\Delta AIF}}{S_{\Delta AHK}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Vậy góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng 45° .

Câu 15: Cho $f(1)=1$ và $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$, với mọi m,n thuộc N^* . Giá trị biểu thức $T = \log \left| \frac{f(96) - f(69) - 24}{2} \right|$ bằng

B. 3

B. 4

C.6

D. 9

Lời giải. Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1) + f(1) + 1.1 \\ f(3) &= f(2) + f(1) + 2.1 \\ f(4) &= f(3) + f(1) + 3.1 \\ &\dots\dots\dots \\ f(n+1) &= f(n) + f(1) + n.1 \end{aligned}$$

Suy ra $f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(n+1) = [f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)] + n.f(1) + \frac{n(n+1)}{2}$

$$\Leftrightarrow f(n+1) = n+1.f(1) + \frac{n(n+1)}{2} \longrightarrow \begin{cases} f(96) = 4656 \\ f(69) = 2415 \end{cases}$$

Vậy $T = \log \left| \frac{f(96) - f(69) - 241}{2} \right| = \log \frac{4656 - 2415 - 241}{2} = 3$. **Chọn A.**

Câu 17: Một nhóm gồm 5 bạn nam, 4 bạn nữ và thầy giáo đứng thành 2 hàng, mỗi hàng 5 người để chụp ảnh kỉ niệm. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng để khi đứng, thầy giáo xen giữa hai bạn nam đồng thời các bạn nữ không đứng cạnh nhau trong cùng một hàng bằng

A.68102 .

B. 69119.

C. 68120.

D. 69120

Lời giải

*) Chọn hàng cho thầy giáo, có 2 cách chọn.

*) Đối với hàng có thầy giáo, có 2 cách xếp như sau:

+) TH1: Trong hàng thầy giáo có 2 nam, 2 nữ.

Vì thầy giáo xen giữa hai bạn nam nên xếp 2 bạn nam đứng hai bên thầy giáo, có: A_5^2 cách.

Vì các bạn nữ không đứng cạnh nhau trong cùng một hàng nên ta xếp hai bạn nữ đứng ở hai đầu hàng, có A_4^2 cách xếp.

Hàng còn lại gồm 3 bạn nam và 2 bạn nữ còn lại.

Ta xếp 3 bạn nam, có 3! cách, tạo ra 4 vị trí giữa các bạn.

Xếp 2 bạn nữ vào 2 trong 4 vị trí đó, có: A_4^2 cách xếp.

Do đó, trường hợp này có: $A_5^2.A_4^2.3!.A_4^2$ cách xếp.

+) TH2: Trong hàng thầy giáo có 3 nam, 1 nữ.

Xếp 1 bạn nam, 1 bạn nữ và thầy giáo thành một hàng, có $C_5^1.C_4^1.3!$.

Xếp hai bạn nam trong 4 bạn nam còn lại đứng hai bên thầy giáo, có A_4^2 cách.

Hàng còn lại gồm 3 bạn nữ và 2 bạn nam còn lại.

Ta xếp 3 bạn nữ, có $3!$ cách, tạo ra 2 vị trí xen giữa các bạn.

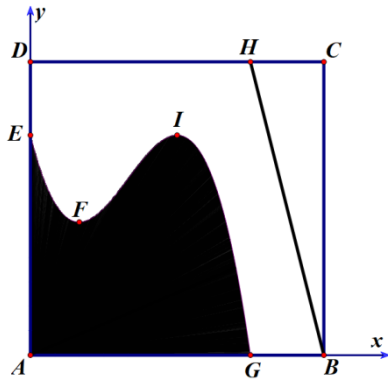
Xếp 2 bạn nam vào 2 vị trí đó, có: $2!$ cách xếp.

Do đó, trường hợp này có $C_5^1.C_4^1.3!.A_4^2.3!.2!$: cách xếp.

Vậy có tất cả 69120 cách xếp

PHẦN II:

Câu 1: Ông An có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = 12m$. Ông làm một hồ bơi dạng hình thang cong (*phần tô đậm*) và một lối đi là đoạn thẳng HB . Nếu đặt hệ trục tọa độ có gốc tại A như hình vẽ, độ dài đơn vị là $1m$, thì đường cong $EFIG$ là một phần đồ thị của một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có F là điểm cực tiểu và I là điểm cực đại. Biết $CH = DE = GB = 3m$ và các điểm F, I cách cạnh AD lần lượt là $2m$ và $6m$.



a) Phương trình của đường thẳng HB là $y = -4x + 48$.

b) Tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f'(x) = a(x+2)(x+6)$

c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 7 song song với đường thẳng HB .

d) Ông An cần đặt một cái thang lên xuống hồ bơi tại một điểm trên đường cong $EFIG$ sao cho khoảng cách từ điểm đặt thang đến lối đi là ngắn nhất, khoảng cách đó bằng $2,56m$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Đúng.

a) Đúng

Gọi phương trình đường thẳng HB là $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Đường thẳng HB đi qua hai điểm $B(12;0)$ và $H(9;12)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 0 = 12a + b \\ 12 = 9a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 48 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đường thẳng HB là $y = -4x + 48$.

b) Sai

Các điểm F, I cách cạnh AD lần lượt là $2m$ và $6m$ nên $x_F = 2, x_I = 6$.

Mặt khác F là điểm cực tiểu và I là điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f'(x) = a(x-2)(x-6)$.

c) Sai

Ta có: $f'(x) = a(x-2)(x-6) = a(x^2 - 8x + 12) \Rightarrow f(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x\right) + C$.

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} f(0) = 9 \\ f(9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(\frac{0^3}{3} - 4 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0\right) + C = 9 \\ a\left(\frac{9^3}{3} - 4 \cdot 9^2 + 12 \cdot 9\right) + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ C = 9 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 4x + 9$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 4$$

Do $k = f'(7) = -\frac{5}{3} \neq -4$ nên tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 7 không song song với đường thẳng HB .

d) Đúng

Gọi Δ là tiếp tuyến của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$.

Để $d(M, HB)$ ngắn nhất thì Δ song song HB .

$$\text{Suy ra } k_{\Delta} = f'(x_0) = -4 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_0^2 + \frac{8}{3}x_0 - 4 = -4 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_0^2 + \frac{8}{3}x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 (L) \\ x_0 = 8 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } M\left(8; \frac{49}{9}\right), HB: 4x + y - 48 = 0$$

$$\text{Vậy } d(M, HB) = \frac{\left| 4.8 + \frac{49}{9} - 48 \right|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} \approx 2,56.$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \log_5(x+2)$

a) Đạo hàm của hàm số $y = (2x-8)f(x)$ là $y' = \log_5(x+2) + \frac{x-4}{(x+2)\ln 5}$

b) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(f(x)) > -1$ là $S = (-1; 23)$;

c) Tập xác định của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}}(f^2(x) - 3f(x))$ chứa đúng 20 số nguyên âm;

d) Có duy nhất một giá trị dương của m tham số để phương trình $f(x)\sqrt{5^x - m} = 0$ có nghiệm duy nhất;

Lời giải

Chọn a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Sai.

a) **Mệnh đề sai vì**

Ta có

$$y' = (2x-8)' \cdot f(x) + (2x-8) \cdot f'(x) = 2\log_5(x+2) + \frac{2x-8}{(x+2)\ln 5}$$

b) **Mệnh đề đúng vì**

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(f(x)) > -1 \Leftrightarrow 0 < f(x) < 2 \Leftrightarrow 0 < \log_5(x+2) < 2 \Leftrightarrow 1 < x+2 < 25 \Leftrightarrow -1 < x < 23$. Suy ra $S = (-1; 23)$.

c) **Mệnh đề sai vì**

$$\text{Ta có } f^2(x) - 3f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > 3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \log_5(x+2) < 0 \\ \log_5(x+2) > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 < 1 \\ x+2 > 5^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 123 \end{cases}$$

Do đó tập xác định của hàm số là $D = (-2; -) \cup (123; +\infty)$

Tập D chứa đúng vô số số nguyên âm.

d) **Mệnh đề sai vì**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > -2 \\ 5^x - m \geq 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{Ta có } f(x)\sqrt{5^x - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(x+2) = 0 \\ 5^x - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 5^x - m = 0 \end{cases} (2)$$

TH1: Nếu $m \leq 0$, phương trình (2) vô nghiệm, suy ra $x = -1$ thỏa mãn hệ điều kiện (*), do đó $x = -1$ là một nghiệm của phương trình (1).

TH2: Nếu $m > 0$,

$$f(x)\sqrt{5^x - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(x+2) = 0 \\ 5^x - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \log_5 m \end{cases}$$

Để phương trình (1) có một nghiệm duy nhất, khi đó

$$\begin{cases} \log_5 m = -1 \\ \log_5 m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5^{-1} \\ 0 < m < 5^{-2} \end{cases}$$

Vậy với $m \leq 0$, $m = \frac{1}{5}$, $0 < m < \frac{1}{25}$ thì phương trình (1) có một nghiệm duy nhất.

Câu 5: Cho hai đường thẳng d_1, d_2 song song với nhau. Trên d_1 lấy 7 điểm phân biệt $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ sao cho $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_7 = 1\text{cm}$, trên d_2 lấy 6 điểm $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ sao cho $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = B_5B_6 = 1\text{cm}$. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ các điểm trên.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số phần tử không gian mẫu bằng C_{13}^3

b) Xác suất để ba điểm được chọn tạo thành tam giác là $\frac{49}{286}$.

c) Xác suất để 3 điểm được chọn có 1 điểm là trung điểm của đoạn thẳng có 2 đầu mút là hai điểm còn lại bằng $\frac{15}{286}$

d) Biết khoảng cách giữa d_1, d_2 bằng 2 cm. Khi đó xác suất để chọn được 3 điểm tạo thành tam giác có diện tích bằng 1 cm^2 bằng $\frac{71}{286}$.

a) Chọn 3 điểm từ 13 điểm có C_{13}^3

Số phần tử không gian mẫu bằng C_{13}^3 . **Đúng**

b) Chọn 3 điểm tạo thành tam giác có: $C_7^2.C_6^1 + C_7^1.C_6^2$

Xác suất để ba điểm được chọn tạo thành tam giác là $\frac{21}{26}$. **Sai.**

c) Để chọn được 3 điểm có một điểm là trung điểm của đoạn thẳng có 2 đầu mút là hai điểm còn lại thì đoạn thẳng cần chọn có số đo độ dài là một số chẵn. Xảy ra các trường hợp:

TH1: Đoạn thẳng có độ dài bằng 2 cm có: $5 + 4 = 9$ đoạn

TH 2: Đoạn thẳng có độ dài bằng 4 cm có: $3 + 2 = 5$ đoạn

TH 3: Đoạn thẳng có độ dài bằng 6 cm có: 1 đoạn

Vậy xác suất để 3 điểm được chọn có 1 điểm là trung điểm của đoạn thẳng có 2 đầu mút là hai điểm còn lại bằng $\frac{15}{286}$.

Đúng

d) Để ba điểm được chọn tạo thành tam giác có diện tích bằng 1 cm^2 thì cạnh đáy phải có độ dài bằng 1 cm. Xảy ra các trường hợp:

TH 1: Chọn cạnh đáy có độ dài bằng 1 cm trên d_1 có 6 cách.

Chọn đỉnh thứ 3 của tam giác trên d_2 có 6 cách

Suy ra có $6.6 = 36$ tam giác

TH 2: Chọn cạnh đáy có độ dài bằng 1 cm trên d_2 có 5 cách.

Chọn đỉnh thứ 3 của tam giác trên d_1 có 7 cách

Suy ra có $5.7 = 35$ tam giác

Suy ra có $36 + 35 = 71$ tam giác có diện tích bằng 1 cm^2 .

Vậy xác suất để chọn được 3 điểm tạo thành tam giác có diện tích bằng 1 cm^2 bằng $\frac{71}{286}$. **Đúng**

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AC = a$ và cạnh bên $AA_1 = a\sqrt{2}$.

a) Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

b) Góc giữa hai đường thẳng BC_1 và AC bằng 60° .

c) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A_1BC_1) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

d) Gọi M , N lần lượt là hai điểm di động trên các đoạn thẳng A_1C_1 và BC_1 sao cho $MN = \frac{a}{2}$. Thể tích của

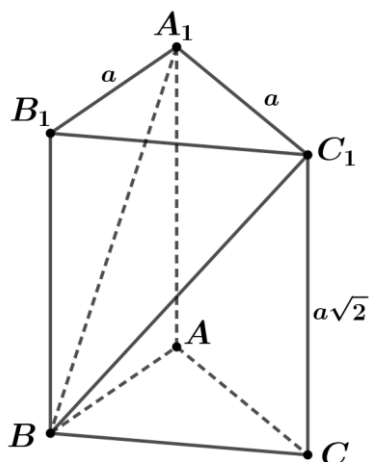
khối chóp $A.A_1BNM$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{7\sqrt{2}}{48}a^3$.

Lời giải

(a) Đúng.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ bằng $V = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

(b) Đúng.



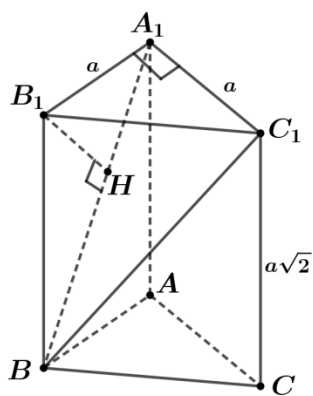
Vì $AC \parallel A_1C_1$ nên $(BC_1, AC) = (BC_1, A_1C_1) = BC_1A_1$.

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$; $BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a$;

$$BA_1 = \sqrt{AB^2 + AA_1^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}. \text{ Ta thấy } BC_1^2 = A_1C_1^2 + A_1B^2 \Rightarrow \Delta A_1C_1B \text{ vuông tại } A_1.$$
$$\text{Ta có } \sin BC_1A_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC_1A_1 = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng BC_1 và AC bằng 60° .

(c) Sai.



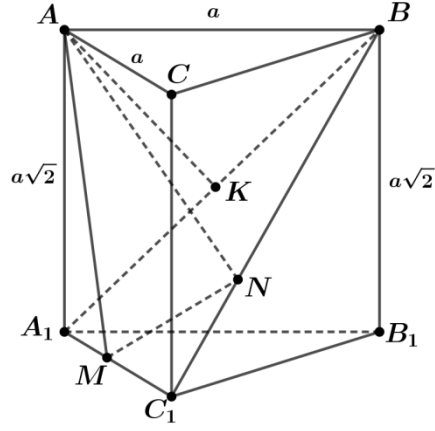
Ке $B_1H \perp AB$.

Ta có $d\left(A, \left(A_1BC_1\right)\right)=d\left(B_1, \left(A_1BC_1\right)\right)=B_1H$.

Xét tam giác vuông A_1B_1B , ta có $B_1H = \frac{B_1A_1 \cdot B_1B}{AB} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A_1BC_1) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

(d) Đúng.



Kẻ $AK \perp A_1B \Rightarrow AK \perp (BA_1MN)$. Ta có $AK = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Thể tích khối chóp $A.A_1BNM$ là $V = \frac{1}{3} AK \cdot S_{BA_1MN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot S_{BA_1MN}$.

Thể tích khối chóp $A.A_1BNM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow S_{BA_1MN}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow S_{\Delta C_1MN}$ lớn nhất.

Ta có $S_{\Delta C_1MN} = \frac{1}{2} C_1M \cdot C_1N \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} C_1M \cdot C_1N \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{C_1M^2 + C_1N^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} (C_1M^2 + C_1N^2)$.

Theo định lý cô sin ta có

$$MN^2 = C_1M^2 + C_1N^2 - 2C_1M \cdot C_1N \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow C_1M^2 + C_1N^2 = \frac{a^2}{4} + C_1M \cdot C_1N.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta C_1MN} = \frac{\sqrt{3}}{4} C_1M \cdot C_1N \leq \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{a^2}{4} + C_1M \cdot C_1N \right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{8} C_1M \cdot C_1N \leq \frac{a^2\sqrt{3}}{32}.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta C_1MN} = \frac{\sqrt{3}}{4} C_1M \cdot C_1N \leq \frac{a^2\sqrt{3}}{16}. \text{ Do đó diện tích } S_{\Delta C_1MN} \text{ lớn nhất bằng } \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

$$\Rightarrow S_{BA_1MN} \text{ nhỏ nhất bằng } S_{\Delta BA_1C_1} - S_{\Delta C_1MN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}.$$

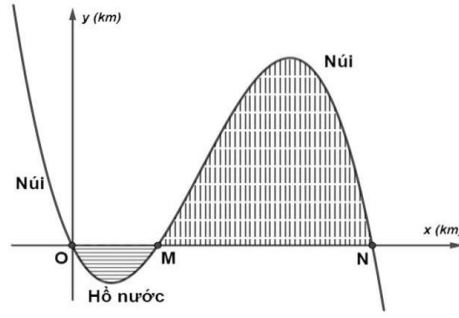
Khi đó thể tích khối chóp $A.A_1BNM$ nhỏ nhất bằng $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{7a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{7\sqrt{2}}{48} a^3$.

PHẦN III:

Câu 1: Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách $OM = 2km$; độ rộng của núi $MN = 3,5km$. Độ sâu của hồ nước là 450m. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp số: 1191



Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$)

Ta có: $ON = OM + MN = 2 + 3,5 = 5,5(km)$

Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại các điểm: $O(0;0)$, $M(2;0)$ và $N(5,5;0)$

Khi đó, phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là $x = 0$; $x = 2$; $x = 5,5$.

$\Rightarrow f(x) = k.x(x-2)(x-5,5) = k(x^3 - 7,5x^2 + 11x)$ với đồ thị hàm số $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$ nên $k < 0$

Ta có: $f'(x) = k(3x^2 - 15x + 11)$

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow k(3x^2 - 15x + 11) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 15x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{93}}{6}$.

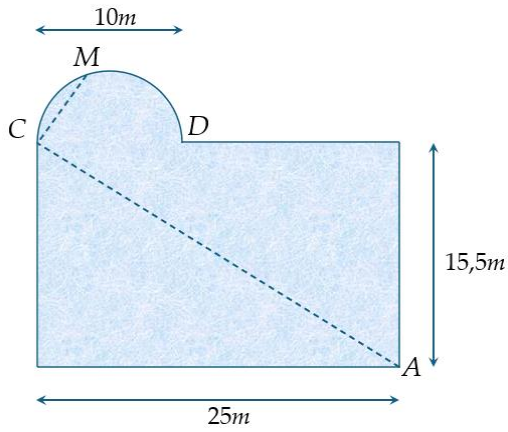
Độ sâu của hồ nước là $450m = 0,45km$ nên ta có giá trị cực tiểu của đồ thị hàm số trên là $y_{CT} = -0,45$.

Suy ra, $f\left(\frac{15 - \sqrt{93}}{6}\right) = -0,45 \Leftrightarrow k \cdot \frac{-135 + 31\sqrt{93}}{36} = -0,45 \Leftrightarrow k = \frac{-16,2}{-135 + 31\sqrt{93}}$.

Chiều cao của ngọn núi tương ứng với $y_{CD} = f\left(\frac{15 + \sqrt{93}}{6}\right) \approx 1,19106(km) \approx 1191(m)$.

Vậy ngọn núi cao khoảng $1191m$.

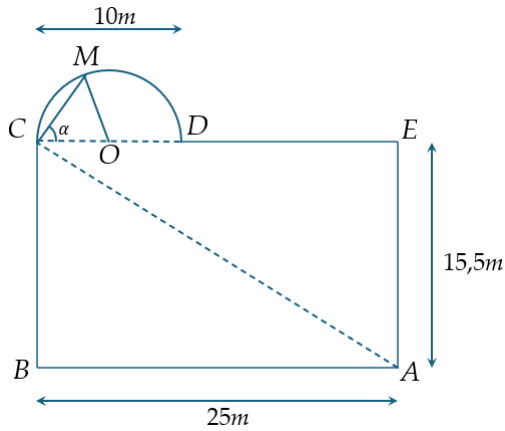
Câu 2: Bạn Hoa thường đi bơi ở hồ Sky Garden cạnh nhà, hồ bơi có thiết kế là một hình chữ nhật với chiều dài 25 m, chiều rộng 15,5 m và bên cạnh đó là một hình bán nguyệt đường kính 10 m. Trong một lần bể bơi vắng người nên Hoa đã thực hiện một chu trình là bơi theo đoạn thẳng AC rồi bơi tiếp đoạn thẳng CM , với M là một vị trí bất kỳ trên hình bán nguyệt. Ngay sau đó bạn đi bộ theo một hướng qua điểm D dọc bờ của hồ bơi để quay lại vị trí A và kết thúc chu trình. (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng vận tốc bơi của Hoa là 2,4 km/h, vận tốc đi bộ là 4,8 km/h và tốc độ bơi, vận tốc đi bộ không thay đổi trong một chu trình. Hỏi thời gian chậm nhất để Hoa thực hiện xong chu trình trên là bao nhiêu phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp số: 1,4 phút.



$$\text{Đổi } 2,4 \text{ km/h} = \frac{2}{3} \text{ m/s}; 4,8 \text{ km/h} = \frac{4}{3} \text{ m/s}.$$

Quãng đường Hoa đi hết một chu trình là $AC + CM + MD + DE + EA$.

$$\text{Tổng thời gian Hoa thực hiện một chu trình là } T = \frac{AC + CM}{\frac{2}{3}} + \frac{MD + DE + EA}{\frac{4}{3}}.$$

Do AC, DE, EA không đổi nên $T_{\max}$ khi $\frac{CM}{\frac{2}{3}} + \frac{MD}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}CM + \frac{3}{4}MD$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Đặt } MCD = \alpha, \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow MOD = 2\alpha.$$

$$\text{Suy ra } CM = 10 \cos \alpha, MD = 10 \alpha \Rightarrow \frac{3}{2}CM + \frac{3}{4}MD = 15 \cos \alpha + \frac{15}{2} \alpha.$$

Xét hàm số $f(\alpha) = 15\cos\alpha + \frac{15}{2}\alpha, \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f'(\alpha) = -15\sin\alpha + \frac{15}{2}, f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -15\sin\alpha + \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $\max_{\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)} f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Vậy $T_{\max} = \frac{3\sqrt{25^2 + 15,5^2}}{2} + \frac{15}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3(15+15,5)}{4} \approx 83,9$ giây $\approx 1,4$ phút.

Câu 3: Khi khắc phục hậu quả của thiên tai, bão lũ, một trong những giải pháp nhằm tiếp tế hàng cứu trợ đến những nơi khó tiếp cận là sử dụng flycam để xác định vị trí chính xác của người cần cứu trợ, sau đó sử dụng drone để vận chuyển các vật dụng thiết yếu thả xuống cho người này, giúp họ có thể cầm cự trong khi chờ đợi lực lượng cứu hộ đến nơi. Hai chiếc drone làm nhiệm vụ chuyển hàng cứu trợ bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất bay đến điểm cách điểm xuất phát $2,5km$ về phía nam và $1,5km$ về phía đông, đồng thời cách mặt đất $60m$. Chiếc thứ hai bay đến điểm cách điểm xuất phát $3km$ về phía bắc và $2,5km$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $40m$. Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ với gốc tọa độ O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc drone, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là mặt phẳng). Giả sử trong trường hợp khẩn cấp cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu và các vật dụng cứu trợ cho hai drone sao cho tổng khoảng cách từ vị trí tiếp nhiên liệu tới hai drone nhỏ nhất. Vị trí cần tìm cách gốc tọa độ a km theo hướng bắc và b km theo hướng tây. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 1,7.

Ta có: $60m = 0,06km; \quad 40m = 0,04km$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai drone, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo km .

Chiếc drone thứ nhất bay đến điểm $A(2,5; 1,5; 0,06)$, chiếc drone thứ hai bay đến điểm $B(-3; -2,5; 0,04)$

Gọi $C(x; y; 0)$ là vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu và các vật dụng.

Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) là $A'(2,5; 1,5; -0,06)$. Khi đó: $AC + CB = A'C + CB$

Vì A', C, B khác phía so với (Oxy) nên $A'C + CB$ nhỏ nhất khi A', C, B thẳng hàng.

$$\Rightarrow C = A'B \cap (Oxy)$$

$$\Rightarrow C\left(-\frac{4}{5}; -\frac{9}{10}; 0\right)$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{4}{5}; b = \frac{9}{10} \Rightarrow a + b = \frac{17}{10} = 1,7.$$

Câu 4: Gọi m_1, m_2 lần lượt là số quả cầu ở thùng 1, thùng 2

t_1, t_2 lần lượt là số quả cầu trắng ở thùng 1, thùng 2

Giả sử $m_1 > m_2 \Rightarrow t_1 > t_2$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{t_1}{m_1} \cdot \frac{t_2}{m_2} = 0.48 \\ m_1 + m_2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 m_2 = \frac{25}{12} t_1 t_2 \\ m_1 + m_2 = 25 \end{cases}$$

$\Rightarrow m_1, m_2$ là bội của 5

Xét các trường hợp xảy ra ta được $P = 0,44$

Câu 5: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a; b)$ thỏa mãn: $10(a^2 + b^2 - ab) - [\log_3(a + b - 1)]^2 \geq a^3 + b^3 - 4$

Lời giải

Trả lời: 45

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = a + b \\ v = a^2 + b^2 - ab = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + a^2 + b^2] \end{cases} \text{ Suy ra: } a^3 + b^3 = uv.$$

$$\text{Vì } a, b \in \mathbb{N}^* \text{ nên } \begin{cases} u, v \in \mathbb{N}^* \\ u \geq 2 \\ v \geq 1 \end{cases} \text{ . Khi đó, giả thiết trở thành: } 10v - uv \geq [\log_3(u - 1)]^2 - 4 \quad (*)$$

Ta thấy rằng nếu $u > 10$ thì $\begin{cases} uv > 10v \\ [\log_3(u - 1)]^2 > 4 \end{cases}$. Do đó, bất phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Như vậy, ta suy ra $2 \leq u \leq 10$.

TH1: Nếu $u = 2$ thì $a = b = 1 \Rightarrow v = 1$. Thay vào $(*)$ ta được $8 \geq -4$ (đúng).

$$\text{TH2: Nếu } u = 3 \text{ thì } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow v = 3. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 21 \geq \log_3^2 2 - 4 \text{ (đúng).}$$

TH3: Nếu $u = 4$ thì:

$$\square \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow v = 7. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 42 \geq -3 \text{ (đúng).}$$

$$\square a = b = 2 \Rightarrow v = 4. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 24 \geq -3 \text{ (đúng).}$$

TH4: Nếu $u = 5$ thì:

$$\begin{aligned}
& \square \left[\begin{array}{l} a=3 \\ b=2 \end{array} \right] \Rightarrow v=7. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 35 \geq \log_3^2 4 - 4 \text{ (đúng).} \\
& \square \left[\begin{array}{l} a=2 \\ b=3 \end{array} \right] \\
& \square \left[\begin{array}{l} a=4 \\ b=1 \end{array} \right] \Rightarrow v=13. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 65 \geq \log_3^2 4 - 4 \text{ (đúng).} \\
& \square \left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=4 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

TH4: Nếu $u=6$ thì:

$$\begin{aligned}
& \square \left[\begin{array}{l} a=5 \\ b=1 \end{array} \right] \Rightarrow v=21. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 84 \geq \log_3^2 5 - 4 \text{ (đúng).} \\
& \square \left[\begin{array}{l} a=5 \\ b=1 \end{array} \right] \\
& \square \left[\begin{array}{l} a=4 \\ b=2 \end{array} \right] \Rightarrow v=12. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 48 \geq \log_3^2 5 - 4 \text{ (đúng).} \\
& \square \left[\begin{array}{l} a=2 \\ b=4 \end{array} \right] \\
& \square \quad a=b=3 \Rightarrow v=9. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 36 \geq \log_3^2 5 - 4 \text{ (đúng).}
\end{aligned}$$

TH5: Nếu $u=7$ thì:

$$\begin{aligned}
& \square \left[\begin{array}{l} a=6 \\ b=1 \end{array} \right] \Rightarrow v=31. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 93 \geq \log_3^2 6 - 4 \text{ (đúng).} \\
& \square \left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=6 \end{array} \right] \\
& \square \left[\begin{array}{l} a=5 \\ b=2 \end{array} \right] \Rightarrow v=19. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 57 \geq \log_3^2 6 - 4 \text{ (đúng).} \\
& \square \left[\begin{array}{l} a=2 \\ b=5 \end{array} \right] \\
& \square \left[\begin{array}{l} a=4 \\ b=3 \end{array} \right] \Rightarrow v=13. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 39 \geq \log_3^2 6 - 4 \text{ (đúng).} \\
& \square \left[\begin{array}{l} a=3 \\ b=4 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

TH6: Nếu $u=8$ thì:

$$\begin{aligned}
& \square \left[\begin{array}{l} a=7 \\ b=1 \end{array} \right] \Rightarrow v=43. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 86 \geq \log_3^2 7 - 4 \text{ (đúng).} \\
& \square \left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=7 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\square \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ b = 2 \end{array} \right] \Rightarrow v = 28. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 56 \geq \log_3^2 7 - 4 \text{ (đúng).}$$

$$\square \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ b = 3 \end{array} \right] \Rightarrow v = 19. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 38 \geq \log_3^2 7 - 4 \text{ (đúng).}$$

$$\square \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 5 \end{array} \right] \Rightarrow v = 16. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 32 \geq \log_3^2 7 - 4 \text{ (đúng).}$$

TH7: Nếu $u = 9$ thì:

$$\square \left[\begin{array}{l} a = 8 \\ b = 1 \end{array} \right] \Rightarrow v = 57. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 57 \geq \log_3^2 8 - 4 \text{ (đúng).}$$

$$\square \left[\begin{array}{l} a = 7 \\ b = 2 \end{array} \right] \Rightarrow v = 39. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 39 \geq \log_3^2 8 - 4 \text{ (đúng).}$$

$$\square \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ b = 3 \end{array} \right] \Rightarrow v = 27. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 27 \geq \log_3^2 8 - 4 \text{ (đúng).}$$

$$\square \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ b = 4 \end{array} \right] \Rightarrow v = 21. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 21 \geq \log_3^2 8 - 4 \text{ (đúng).}$$

TH8: Nếu $u = 10$ thì:

$$\square \left[\begin{array}{l} a = 9 \\ b = 1 \end{array} \right] \Rightarrow v = 73. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 0 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

$$\square \left[\begin{array}{l} a = 8 \\ b = 2 \end{array} \right] \Rightarrow v = 52. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 0 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

$$\square \begin{cases} a = 7 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow v = 37. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 0 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

$$\square \begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow v = 37. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 0 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

$$\square \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow v = 28. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 0 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

$$\square \begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow v = 28. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 0 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

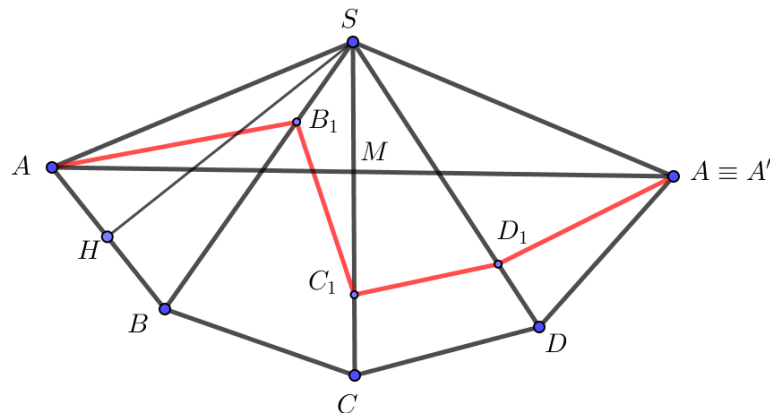
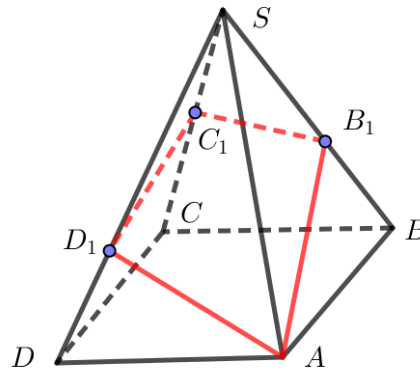
$$\square a = b = 5 \Rightarrow v = 25. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } 0 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Vậy có tất cả 45 cặp số nguyên dương $(a; b)$.

Câu 6: Có một mô hình kim tự tháp là một khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng 6 cm, cạnh đáy bằng 4 cm được đặt lên bàn trung bày (đáy nằm trên mặt bàn). Một con kiến đang ở một đỉnh của đáy và có ý định đi một vòng qua tất cả các mặt xung quanh và trở về vị trí ban đầu. Tính quãng đường ngắn nhất mà con kiến có thể đi được. (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

Lời giải

Trả lời: 11,7



Gọi hình chóp đều trong bài là $S.ABCD$. Không giảm tổng quát, giả sử con kiến đang ở đỉnh

A của đáy và sẽ đi một vòng qua tất cả các mặt xung quanh và trở về vị trí ban đầu. Để đi như vậy, con kiến buộc phải đi qua một điểm trên mỗi cạnh bên của hình chóp giả sử là B_1, C_1, D_1 lần lượt thuộc các cạnh SB, SC, SD .

Đường đi ngắn nhất từ A đến B_1 là đường thẳng.

Đường đi ngắn nhất từ B_1 đến C_1 là đường thẳng.

Đường đi ngắn nhất từ C_1 đến D_1 là đường thẳng.

Đường đi ngắn nhất từ D_1 đến A là đường thẳng.

Cắt mặt xung quanh của hình chóp $S.ABCD$ theo cạnh bên SA và đem trải phẳng. Ký hiệu điểm A' như hình vẽ.

Ta có $AB_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A' \geq AA'$ (không đổi).

Dấu bằng xảy ra khi A, B_1, C_1, D_1, A' thẳng hàng.

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau.

Gọi H là trung điểm của AB , $M = AA' \cap SC \Rightarrow M$ là trung điểm của AA' .

Theo giả thiết $SA = 6$, $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}.4 = 2$. Đặt $HSA = \varphi$.

$$\sin \varphi = \frac{AH}{SA} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ mà } \varphi \text{ nhọn} \Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9} \text{ mà } 2\varphi \text{ nhọn} \Rightarrow \cos 2\varphi = \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi} = \frac{7}{9}.$$

$$\sin 4\varphi = 2 \sin 2\varphi \cdot \cos 2\varphi = \frac{56\sqrt{2}}{81} \Rightarrow AA' = 2AM = 2.SA \cdot \sin 4\varphi = 2.6. \frac{56\sqrt{2}}{81} \approx 11,7 \text{ cm}.$$

Vậy, quãng đường ngắn nhất mà con kiến có thể đi được là 11,7 cm.

.....**HẾT**.....