



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

- A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$. B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.
C. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$. D. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

Câu 2: Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$ và $F(0) = 5$. Khi đó, hàm số $F(x)$ là

- A. $F(x) = x^3 + 5$. B. $F(x) = x^3 - 5$. C. $F(x) = 3x^3 + 5$. D. $F(x) = 6x + 5$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$, $f(0) = 1$ và $\int_0^2 f'(x) dx = -3$. Tính $f(2)$?

- A. $f(2) = -4$. B. $f(2) = 4$. C. $f(2) = -2$. D. $f(2) = -3$

Câu 4: Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^2 [-4 + f(x)] dx$ bằng

- A. 0. B. -4. C. 12. D. 2.

Câu 5: Tính tích phân $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{3}(e^4 + e)$ B. $e^3 - e$ C. $\frac{1}{3}(e^4 - e)$ D. $e^4 - e$

Câu 6: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx$.

- A. $I = 7$ B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$ C. $I = 3$ D. $I = 2$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

- A. $S = \int_a^b |f(x)| dx$. B. $S = \int_a^b f(x) dx$. C. $S = -\int_a^b f(x) dx$. D. $S = \int_b^a |f(x)| dx$.

Câu 8: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y = -1$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

- A. $S = \pi \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$. B. $S = \int_0^1 (2x^2 - 1) dx$.
C. $S = \int_0^1 (2x^2 + 1)^2 dx$. D. $S = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_1 = (1; 3; -1)$. B. $\vec{n}_2 = (-2; 3; -1)$. C. $\vec{n}_3 = (1; -2; -1)$. D. $\vec{n}_4 = (1; -2; 3)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$?

A. $x - 2y + 3z - 12 = 0$.

B. $x - 2y - 3z + 6 = 0$.

C. $x - 2y + 3z + 12 = 0$.

D. $x - 2y - 3z - 6 = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

A. $\vec{u}_1 = (2; 1; -3)$.

B. $\vec{u}_2 = (-2; -1; 3)$.

C. $\vec{u}_3 = (-1; 2; 1)$.

D. $\vec{u}_4 = (-1; 2; -1)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-2; 6; 3)$, $B(1; 0; 6)$, $C(0; 2; -1)$, $D(1; 4; 0)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD ?

A. $-x + z + 5 = 0$.

B. $x - 2y + z + 11 = 0$.

C. $x - z + 5 = 0$.

D. $x - 2y + z - 7 = 0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m so với mặt đất (coi $t = 0$ giây là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của viên đạn được cho bởi công thức $v(t) = 60 - 10t$ (m/s)

a) Vận tốc của viên đạn tại thời điểm $t = 2$ giây bằng 40 (m/s).

b) Viên đạn đạt độ cao lớn nhất sau 6 giây.

c) Độ cao của viên đạn tại thời điểm t được xác định bởi công thức $h(t) = 60t - 5t^2$.

d) Độ cao lớn nhất của viên đạn so với mặt đất là 180 (m).

Câu 2: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 2$ và $g(x) = x + 2$.

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = g(x)$ các đường thẳng $x = -1; x = 1$, trục Ox bằng 4.

b) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là $x = 0; x = 3$.

c) Hình (H) có diện tích bằng $\frac{2}{3}$.

d) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox bằng $\frac{117}{5}$.

Câu 3: Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -5, x = 5$.

a) Đạo hàm của hàm số $f(x)$ bằng $\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$.

b) Diện tích hình phẳng (S) bằng 25π .

c) Thể tích của khối tròn xoay khi quay (S) quanh Ox là $\frac{500}{3}\pi$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 3$ bằng

$$K = 2 \int_0^4 \sqrt{25 - x^2} dx - 12.$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 0), B(-5; 1; 2)$. Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\vec{AB}(6; -4; -2)$.

b) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}(12; -8; -4)$.

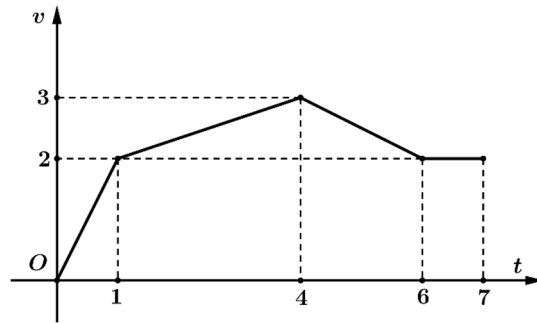
c) Phương trình mặt phẳng (P) là: $-3x + 2y + z - 3 = 0$.

d) Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $C(1;-3;9)$ và song song với (P) thì mặt phẳng (Q) đi qua gốc tọa độ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Nhằm tri ân người dân địa phương đã luôn tin tưởng, đồng hành với doanh nghiệp, tập đoàn X đã tổ chức ngày hội cảm ơn vào ngày 10/07/2024. Gọi $B(t)$ là hàm số biểu thị số lượng khách tham quan sau t giờ mở cửa. Khi đó tốc độ thay đổi lượng khách tham quan trong ngày được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 4t^3 - 3t^2 + 200$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 8$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 1200 người có mặt. Hỏi sau 6 giờ lượng khách tham quan là bao nhiêu người?

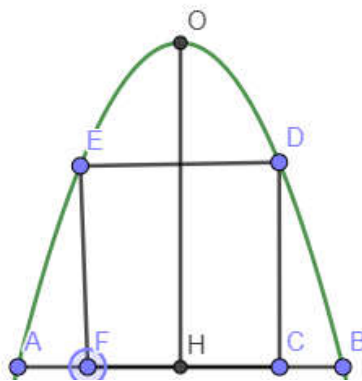
Câu 2: Một chiếc xe chuyển động với đồ thị vận tốc được biểu diễn theo đường gấp khúc được minh họa trên hệ trục Otv như hình vẽ (mỗi đơn vị trên Ot ứng với 1 phút và mỗi đơn vị trên Ov ứng với 0,4 km / phút).



Quãng đường mà xe đã di chuyển trong 7 phút là bao nhiêu km?

Câu 3: Một ô tô đang chạy với vận tốc 54(km/h) thì thay đổi vận tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = -6 + 2t$ (m/s²). Tính quãng đường xe ô tô đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc ô tô bắt đầu tăng tốc (đơn vị là m).

Câu 4: Người ta dự định làm cổng vào một khu tham quan du lịch có dạng parabol với chiều cao bằng $4m$ và đáy $AB = 4m$. Trong đó, phần cửa đi được thiết kế là hình chữ nhật $CDEF$ với C, F thuộc đoạn thẳng AB và D, E thuộc parabol (tham khảo hình vẽ bên dưới). Biết chi phí phần cửa đi là 2 triệu đồng/m² và phần còn lại là 3 triệu đồng/m². Hỏi cần ít nhất bao nhiêu triệu đồng để hoàn thành cổng (làm tròn đến hàng phần mười)?



Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;0)$, $B(3;1;0)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 5 = 0$. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và cách đều hai điểm A, B có dạng $x + by + cz + d = 0$. Tính $b + c + d$.

Câu 6: Một phần mềm mô phỏng vận động viên tập bắn bia mục tiêu có kích thước nhỏ ($42 \times 42cm$) bằng súng tiểu liên AK trong không gian $Oxyz$. Cho biết vận động viên đó sử dụng thước ngắm 3 và đứng cách xa bia mục tiêu là $100m$, trục d của nòng súng và cọc đỡ bia d' lần lượt có phương trình

$d : \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$. Để bắn trúng hồng tâm (điểm 10) thì vận động viên phải ngắm

bắn vào điểm $N(a;b;c) \in d'$ và cách giao điểm của d và d' một khoảng $6cm$. Khi $c < 0$, tính giá trị biểu thức $a - b + c$.

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$.

B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.

C. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.

D. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

Lời giải

Theo định nghĩa thì hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K$

Câu 2: Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$ và $F(0) = 5$. Khi đó, hàm số $F(x)$ là

A. $F(x) = x^3 + 5$.

B. $F(x) = x^3 - 5$.

C. $F(x) = 3x^3 + 5$.

D. $F(x) = 6x + 5$.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int 3x^2 dx = x^3 + C$.

Vì $F(0) = 5$ nên $C = 5$. Vậy $F(x) = x^3 + 5$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$, $f(0) = 1$ và $\int_0^2 f'(x) dx = -3$. Tính $f(2)$?

A. $f(2) = -4$.

B. $f(2) = 4$.

C. $f(2) = -2$.

D. $f(2) = -3$

Lời giải

Ta có $\int_0^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^2 = f(2) - f(0) = f(2) - 1 = -3 \Rightarrow f(2) = -2$.

Câu 4: Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^2 [-4 + f(x)] dx$ bằng

A. 0.

B. -4.

C. 12.

D. 2.

Lời giải

Ta có: $\int_0^2 [-4 + f(x)] dx = [-4x + F(x)] \Big|_0^2 = (-4x + x^3) \Big|_0^2 = 0$.

Câu 5: Tính tích phân $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4 + e)$

B. $e^3 - e$

C. $\frac{1}{3}(e^4 - e)$

D. $e^4 - e$

Lời giải

Ta có $\int_0^1 e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} e^{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^4 - e)$.

Câu 6: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx$.

A. $I = 7$

B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$

C. $I = 3$

D. $I = 2$

Lời giải

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2(0 - 1) = 2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int_a^b |f(x)| dx.$ **B.** $S = \int_a^b f(x) dx.$ **C.** $S = -\int_a^b f(x) dx.$ **D.** $S = \int_b^a |f(x)| dx.$

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng

$x = a, x = b$ được tính bởi công thức: $S = \int_a^b |f(x)| dx.$

Câu 8: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y = -1$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \pi \int_0^1 (2x^2 + 1) dx.$

B. $S = \int_0^1 (2x^2 - 1) dx.$

C. $S = \int_0^1 (2x^2 + 1)^2 dx.$

D. $S = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx.$

Lời giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^1 |2x^2 + 1| dx = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$ do $2x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in [0; 1]$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

A. $\vec{n}_1 = (1; 3; -1).$ **B.** $\vec{n}_2 = (-2; 3; -1).$ **C.** $\vec{n}_3 = (1; -2; -1).$ **D.** $\vec{n}_4 = (1; -2; 3).$

Lời giải

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_4 = (1; -2; 3).$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$?

A. $x - 2y + 3z - 12 = 0.$

B. $x - 2y - 3z + 6 = 0.$

C. $x - 2y + 3z + 12 = 0.$

D. $x - 2y - 3z - 6 = 0.$

Lời giải

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$ là $(x - 1) - 2(y - 2) + 3(z + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z + 12 = 0.$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

A. $\vec{u}_1 = (2; 1; -3).$ **B.** $\vec{u}_2 = (-2; -1; 3).$ **C.** $\vec{u}_3 = (-1; 2; 1).$ **D.** $\vec{u}_4 = (-1; 2; -1).$

Lời giải

Ta có một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_3 = (-1; 2; 1).$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-2; 6; 3)$, $B(1; 0; 6)$, $C(0; 2; -1)$, $D(1; 4; 0)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD ?

A. $-x + z + 5 = 0.$ **B.** $x - 2y + z + 11 = 0.$ **C.** $x - z + 5 = 0.$ **D.** $x - 2y + z - 7 = 0.$

Lời giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3; -6; 3) \\ \overrightarrow{CD} = (1; 2; 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (-12; 0; 12).$$

Mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD , chọn $\vec{n}_\alpha = (1; 0; -1)$ là vectơ pháp tuyến của (α) .

$$\text{PTTQ}(\alpha): 1(x-1) - (z-6) = 0 \Leftrightarrow x - z + 5 = 0.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m so với mặt đất (coi $t = 0$ giây là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của viên đạn được cho bởi công thức $v(t) = 60 - 10t$ (m/s)

a) Vận tốc của viên đạn tại thời điểm $t = 2$ giây bằng 40 (m/s).

b) Viên đạn đạt độ cao lớn nhất sau 6 giây.

c) Độ cao của viên đạn tại thời điểm t được xác định bởi công thức $h(t) = 60t - 5t^2$.

d) Độ cao lớn nhất của viên đạn so với mặt đất là 180 (m).

Lời giải

a) Đ Tại thời điểm $t = 2$ giây vận tốc của viên đạn bằng $v(2) = 60 - 20 = 40$ (m/s).

b) Đ + Độ cao của viên đạn tại thời điểm t được xác định bởi công thức

$$h(t) = \int v(t) dt = \int (60 - 10t) dt = 60t - 5t^2 + C.$$

$$h(0) = 2 \Rightarrow C = 2. \text{ Vậy } h(t) = 60t - 5t^2 + 2 = -5(t-6)^2 + 182.$$

+ Độ cao lớn nhất của viên đạn so với mặt đất là $h(6) = 182$ (m).

c) S Theo b)

d) S Theo b)

Câu 2: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 2$ và $g(x) = x + 2$.

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = g(x)$ các đường thẳng $x = -1; x = 1$, trục Ox bằng 4.

b) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là $x = 0; x = 3$.

c) Hình (H) có diện tích bằng $\frac{2}{3}$.

d) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox bằng $\frac{117}{5}$.

Lời giải

a) Đ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = g(x)$ các đường thẳng $x = -1; x = 1$,

$$\text{trục } Ox: S = \int_{-1}^1 |x+2| dx = 4.$$

b) Đ Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là nghiệm phương trình

$$x^2 - 2x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$\text{c) S } S_{(H)} = \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^3 |x^2 - 3x| dx = \frac{9}{2}$$

d) S Thể tích khối tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox bằng:

$$V = \pi \int_0^3 \left[(x+2)^2 - (x^2 - 2x + 2)^2 \right] dx = \frac{117\pi}{5}.$$

Câu 3: Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -5, x = 5$.

a) Đạo hàm của hàm số $f(x)$ bằng $\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$.

b) Diện tích hình phẳng (S) bằng 25π .

c) Thể tích của khối tròn xoay khi quay (S) quanh Ox là $\frac{500}{3}\pi$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 3$ bằng

$$K = 2 \int_0^4 \sqrt{25 - x^2} dx - 12.$$

Lời giải

a) S Ta có $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$.

b) S Diện tích hình phẳng (S) là $S = \int_{-5}^5 |f(x)| dx = \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx = \frac{25\pi}{2}$.

(Hoặc diện tích của nửa hình tròn tâm bán kính bằng 5)

c) Đ Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ là $D = [-5; 5]$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay (S) quanh Ox là

$$V = \pi \int_{-5}^5 [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-5}^5 [\sqrt{25 - x^2}]^2 dx = \pi \left(25x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-5}^5 = \frac{500}{3}\pi.$$

d) S Hoàn chỉnh giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 3$ là nghiệm của phương

$$\text{trình: } \sqrt{25 - x^2} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Suy ra diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đường thẳng $y = 3$ và hai đường thẳng $x = -4, x = 4$ được tính theo công thức là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^4 (\sqrt{25 - x^2} - 3) dx = \int_{-4}^4 \sqrt{25 - x^2} dx - \int_{-4}^4 3 dx \\ &= 2 \int_0^4 \sqrt{25 - x^2} dx - 3x \Big|_{-4}^4 = 2 \int_0^4 \sqrt{25 - x^2} dx - 24. \end{aligned}$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 0), B(-5; 1; 2)$. Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $\overrightarrow{AB}(6; -4; -2)$.

b) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}(12; -8; -4)$.

c) Phương trình mặt phẳng (P) là: $-3x + 2y + z - 3 = 0$.

d) Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $C(1; -3; 9)$ và song song với (P) thì mặt phẳng (Q) đi qua gốc tọa độ.

Lời giải

a) S $\overrightarrow{AB} = (-6; 4; 2)$

b) Đ Vì (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nên ta có $\overrightarrow{AB}$ là một VTPT của mp (P)
Suy ra một VTPT (P) là $\vec{n}(12; -8; -4)$.

c) S Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm $I(-2; -1; 1)$ của đoạn thẳng AB và có VTPT $\vec{n}(-3; 2; 1)$ có phương trình là $-3(x + 2) + 2(y + 1) + (z - 1) = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y + z - 5 = 0$.

d) Đ Gọi (Q) là mặt phẳng qua $C(1; -3; 9)$ và song song với (P) .

Suy ra phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $-3x + 2y + z + d = 0$.

Thay tọa độ điểm $C(1; -3; 9)$ vào phương trình mặt phẳng (Q) , ta được $-3.1 - 3.2 + 9 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$.

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là $-3x + 2y + z = 0$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Nhằm tri ân người dân địa phương đã luôn tin tưởng, đồng hành với doanh nghiệp, tập đoàn X đã tổ chức ngày hội cảm ơn vào ngày 10/07/2024. Gọi $B(t)$ là hàm số biểu thị số lượng khách tham quan sau t giờ mở cửa. Khi đó tốc độ thay đổi lượng khách tham quan trong ngày được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 4t^3 - 3t^2 + 200$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 8$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 1200 người có mặt. Hỏi sau 6 giờ lượng khách tham quan là bao nhiêu người?

Lời giải

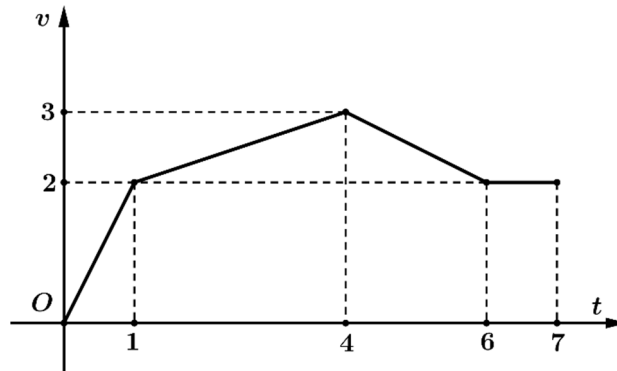
Đáp án: 3072

Ta có $B(t) = \int B'(t) dt = t^4 - t^3 + 200t + C, C \in \mathbb{R}$. $B(2) = 1200 \Rightarrow C = 792$.

Suy ra $B(t) = t^4 - t^3 + 200t + 792$.

Sau 6 giờ lượng khách tham quan là $B(6) = 3072$ (người).

Câu 2: Một chiếc xe chuyển động với đồ thị vận tốc được biểu diễn theo đường gấp khúc được minh họa trên hệ trục Otv như hình vẽ (mỗi đơn vị trên Ot ứng với 1 phút và mỗi đơn vị trên Ov ứng với 0,4 km / phút).



Quãng đường mà xe đã di chuyển trong 7 phút là bao nhiêu km?

Lời giải

Đáp án: 6,2

Quãng đường mà xe đã di chuyển trong 7 phút là:

$$S = \left(\int_0^7 v(t) dt \right) \cdot 0,4 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} (2+3) \cdot 3 + \frac{1}{2} (2+3) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \right) \cdot 0,4 = 6,2 \text{ km}$$

Câu 3: Một ô tô đang chạy với vận tốc 54(km/h) thì thay đổi vận tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = -6 + 2t$ (m/s²). Tính quãng đường xe ô tô đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc ô tô bắt đầu tăng tốc (đơn vị là m).

Lời giải

Đáp án: 27

Đổi 54km/h = 15m/s.

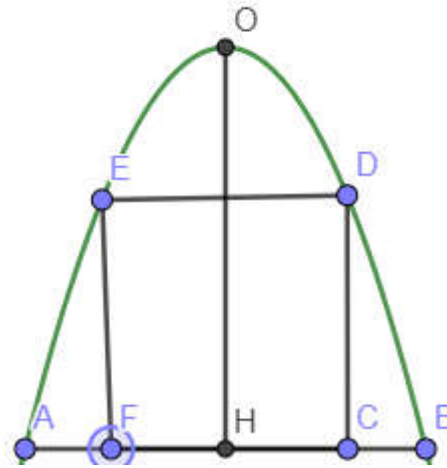
Ta có $v(t) = \int a(t) dt = t^2 - 6t + C$. Khi $t = 0$, ta có $v(0) = 15$ nên $C = 15$.

Ô tô bắt đầu tăng tốc khi $a(t) > 0 \Leftrightarrow -6 + 2t > 0 \Leftrightarrow t > 3$.

Quãng đường đi được là $S = \int_3^6 v(t) dt = \int_3^6 (t^2 - 6t + 15) dt = 27m$.

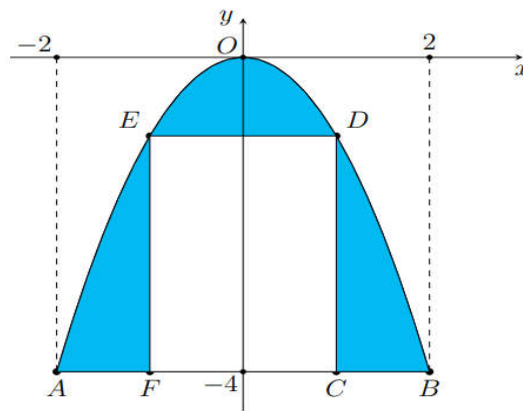
Câu 4: Người ta dự định làm cổng vào một khu tham quan du lịch có dạng parabol với chiều cao bằng 4m và đáy $AB = 4m$. Trong đó, phần cửa đi được thiết kế là hình chữ nhật $CDEF$ với C, F thuộc đoạn thẳng AB và D, E thuộc parabol (tham khảo hình vẽ bên dưới). Biết chi phí phần cửa đi là

2 triệu đồng/m² và phần còn lại là 3 triệu đồng/m². Hỏi cần ít nhất bao nhiêu triệu đồng để hoàn thành công (làm tròn đến hàng phần mười)?



Lời giải

Đáp án: 25,8



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

+) Phương trình đường parabol là $y = -x^2$.

Diện tích cả công là $S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3}$.

+) Gọi $D(a; -a^2)$ ($0 < a < 2$). Ta có $S_{CDEF} = 2a(4 - a^2)$.

+) Chi phí làm công là

$$f(a) = 2a(4 - a^2) \cdot 2 + 3 \left(\frac{32}{3} - 2a(4 - a^2) \right) = 32 - 2a(4 - a^2) = 2a^3 - 8a + 32.$$

Ta có $f'(a) = 6a^2 - 8$; $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Lập bảng biến thiên của $f(a)$, ta được

$$\min f(a) = 25,8.$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;0)$, $B(3;1;0)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 5 = 0$. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và cách đều hai điểm $A; B$ có dạng $x + by + cz + d = 0$. Tính $b + c + d$.

Lời giải

Đáp án: 0

Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) nên phương trình mặt phẳng (Q) có dạng:

$$x - y + z + d = 0, (d \neq 5).$$

$$\text{Mặt phẳng } (Q) \text{ cách đều hai điểm } A, B \text{ nên: } d(A; (Q)) = d(B; (Q)) \Leftrightarrow \frac{|1 - 3 + d|}{\sqrt{1 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|3 - 1 + d|}{\sqrt{1 + (-1)^2 + 1^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3 + d = 3 - 1 + d \\ 1 - 3 + d = -3 + 1 - d \end{cases} \Rightarrow d = 0.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là: $x - y + z = 0$; $b = -1$; $c = 1$; $d = 0 \Rightarrow b + c + d = 0$.

Câu 6: Một phần mềm mô phỏng vận động viên tập bắn bia mục tiêu có kích thước nhỏ $(42 \times 42 \text{ cm})$ bằng súng tiểu liên AK trong không gian $Oxyz$. Cho biết vận động viên đó sử dụng thước ngắm 3 và đứng cách xa bia mục tiêu là 100 m , trục d của nòng súng và cọc đỡ bia d' lần lượt có phương trình

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases} \text{ và } d' : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 + 3t' \end{cases}. \text{ Để bắn trúng hồng tâm (điểm 10) thì vận động viên phải ngắm}$$

bắn vào điểm $N(a; b; c) \in d'$ và cách giao điểm của d và d' một khoảng 6 cm . Khi $c < 0$, tính giá trị biểu thức $a - b + c$.

Lời giải

Đáp án: - 3

Gọi $M = d \cap d' \Rightarrow M(1; 2; 4)$.

Ta có $N \in d' \Rightarrow N(1; 2; 1 + 3t') \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0; 0; 3t' - 3)$. Theo giả thiết $MN = 6$

Suy ra $|3t' - 3| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 3 \\ t' = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(1; 2; 10) \\ N(1; 2; -2) \end{cases}. \text{ Vì } c < 0 \Rightarrow \text{nhận } N(1; 2; -2).$

Vậy $a = 1, b = 2, c = -2 \Rightarrow a - b + c = -3$.

-----**HẾT**-----



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $F(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là hàm số $f(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = F(x) + C.$

B. $\int f(x)dx = F'(x) + C.$

C. $\int F'(x)dx = f(x) + C.$

D. $\int F(x)dx = f(x) + C.$

Câu 2: Biết $\int f(x)dx = \frac{5^x}{\ln 5} + 3x + C$. Khi đó $f(x)$ bằng

A. $f(x) = \frac{5^x}{\ln 5} + 3.$ **B.** $f(x) = \frac{5^x}{\ln 5} + 3x.$ **C.** $f(x) = 5^x + 3x.$ **D.** $5^x + 3.$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2025]$, $f(1) = 1$ và $f(2025) = 2$. Tích phân

$I = \int_1^{2025} f'(x)dx$ bằng

A. 2025.

B. 1.

C. 2024.

D. 2.

Câu 4: Nếu $\int_3^4 f(x)dx = 3$ thì $\int_3^4 -4f(x)dx$ bằng

A. -12.

B. 4.

C. 12.

D. 3.

Câu 5: Biết $\int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 3)dx = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a + b$.

A. 34.

B. 53.

C. 45.

D. 35.

Câu 6: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3 - \cos x)dx$.

A. $\frac{\pi}{2} - 1.$

B. $\frac{\pi + 1}{2}.$

C. $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}.$

D. $\frac{\pi - 1}{2}.$

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1; x = 2$ là

A. $S = \int_{-1}^2 |x - x^2|dx.$ **B.** $S = \int_{-1}^2 (x - x^2)dx.$ **C.** $S = \int_{-1}^2 (x^2 - x)dx.$ **D.** $S = \left| \int_{-1}^2 (x - x^2)dx \right|.$

Câu 8: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0; x = 3$.

A. $S = \frac{9}{4}.$

B. $S = \frac{25}{4}.$

C. $S = \frac{41}{4}.$

D. $S = 11.$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{6} = 1$. Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n} = (2; 3; 6).$

B. $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right).$

C. $\vec{n} = (2; -3; 6).$

D. $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right).$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; 2)$, $B(0; 1; 4)$, mặt phẳng trung trực của đoạn AB có phương trình là

A. $(P): x + y - z = 0$.

B. $(P): x + y - z + 1 = 0$.

C. $(P): -2x - 2y + 2z + 1 = 0$.

D. $(P): -2x - 2y + 2z + 2 = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng (d) có phương trình tham số $(d): \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = 2 + 3t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$.

Một véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d) là

A. $\vec{u} = (-1; 1; 2)$.

B. $\vec{u} = (-1; 1; 3)$.

C. $\vec{u} = (-1; 0; 2)$.

D. $\vec{u} = (-1; 0; 3)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 1 = 0$ là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{3}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$.

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 5$ và hàm số $g(x) = \sin x$.

a) $\int f(x)dx = 5x + C$.

b) $\int [f(x) + g(x)]dx = 5x + \cos x + C_1$

c) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$. Biết $G(\pi) = 3$ thì $G(x) = -\cos x + 2$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 3$ Thì

$F(1) + F(2) + \dots + F(100) = 25560$.

Câu 2: Cho các hàm số $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

a) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

b) $\int_{2025}^{2025} f(x)dx = 2025$.

c) Nếu $F(0) = 2, F(1) = 8$. Khi đó: $\int_0^1 f(x)dx = -6$.

d) Cho $f(x) = 3^x$ và $\int_0^1 f(x)dx = \frac{a}{\ln 3}$. Khi đó $a = 8$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$.

a) Điểm $M(2; -1; 2)$ thuộc mặt phẳng (P) .

b) Tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2; -1; 2)$.

c) Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(3; 2; -1)$ và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là $2x - y + 2z - 2 = 0$.

d) Gọi (R) là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy) , đồng thời cách điểm $B(-3; 1; 5)$ một khoảng bằng $\sqrt{5}$. Giả sử (R) có phương trình

$ax + by + d = 0, (a > 0, d < 0), a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) = 1$. Giá trị của biểu thức $b + d = -4$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -1; 0), N(-2; 0; 4)$.

a) Tọa độ một vectơ chỉ phương của đường thẳng MN là $\vec{a} = (-3; 1; 4)$.

b) Phương trình chính tắc của đường thẳng MN là $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$.

c) Đường thẳng MN và đường thẳng $d : \begin{cases} x = -5 + 3t' \\ y = 1 - t' \\ z = 8 - 4t' \end{cases}$ song song với nhau.

d) Gọi α là góc giữa đường thẳng MN và trục Ox . Khi đó $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{26}}{26}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một chiếc cốc chứa nước ở $95^\circ C$ được đặt trong phòng có nhiệt độ $20^\circ C$. Theo định luật làm mát của Newton, nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút (xem $t = 0$ là thời điểm nước ở $95^\circ C$) là một hàm số $T(t)$. Tốc độ giảm nhiệt độ của nước trong cốc tại thời điểm t phút được xác định bởi

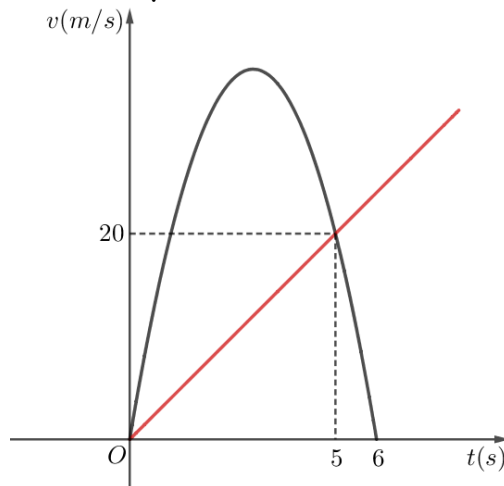
$T'(t) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{50}}$ ($^\circ C$ /phút). Nhiệt độ của nước tại thời điểm $t = 20$ phút bằng bao nhiêu độ C?

(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

(nguồn: https://amsi.org.au/ESA_Senior_Years/SeniorTopic3/3e/3e_4history_3.html).

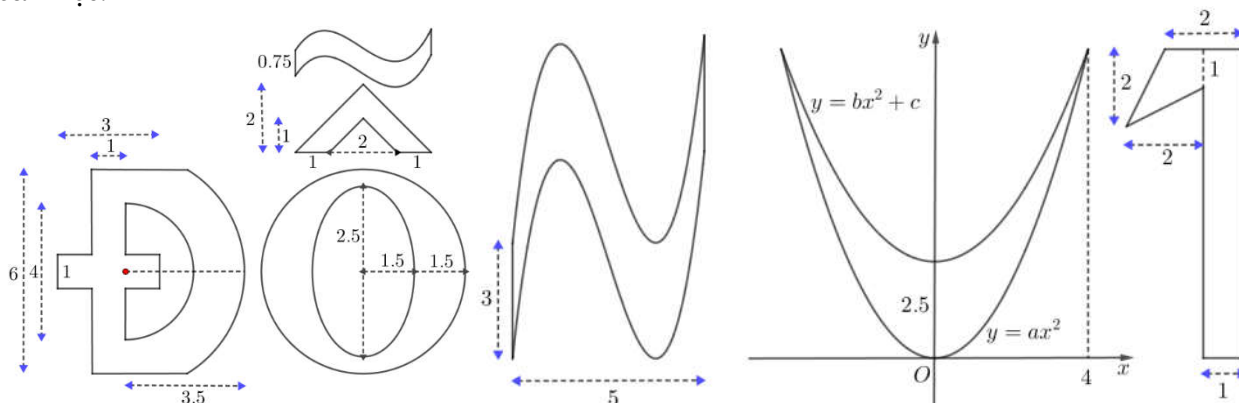
Câu 2: Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(0; 2)$ và tiếp tuyến của đồ thị này tại mỗi điểm $(x; f(x))$ có hệ số góc là $2x - 3$. Tìm $f(4)$.

Câu 3: Cho đồ thị biểu diễn vận tốc của 2 chất điểm A và B bắt đầu chuyển động cùng một lúc và cùng vạch xuất phát, cùng chiều trên một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của chất điểm A là một đường parabol và đồ thị biểu diễn vận tốc của chất điểm B là một đường thẳng như hình vẽ.

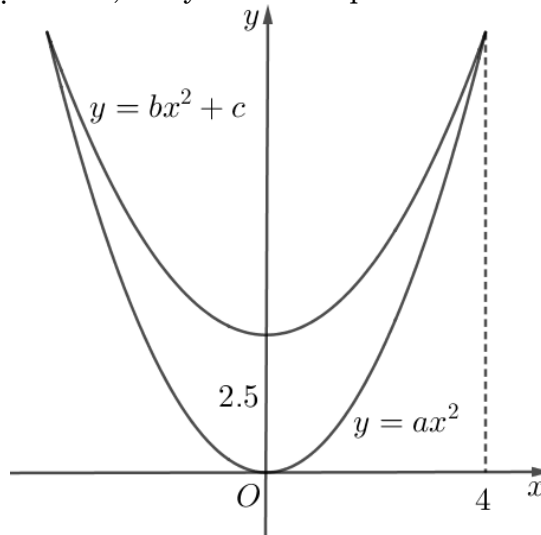


Hỏi sau 8 giây kể từ lúc xuất phát thì khoảng cách giữa hai chất điểm là bao nhiêu mét? (Biết rằng chất điểm A sẽ dừng lại khi vận tốc bằng 0).

Câu 4: Vào buổi học cuối cùng trước khi học sinh của mình bước vào kì thi Tốt nghiệp trung học phổ thông, Thầy Vinh đã trang trí bảng bằng một câu chúc thật ý nghĩa là “ĐỒ NV1” và đậm chất toán học.



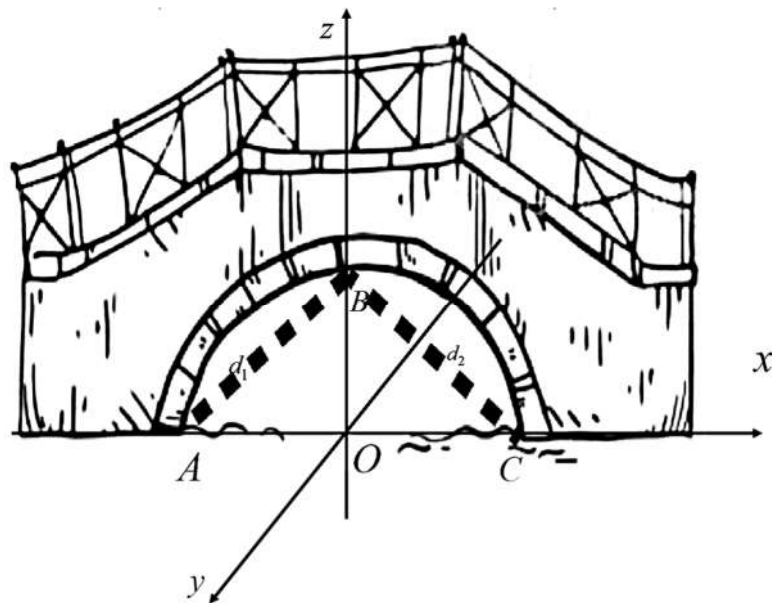
Sau đó để tạo không khí thật vui vẻ, Thầy đã đố cả lớp chữ V trên bảng có diện tích bao nhiêu.



Ai đoán đúng sẽ nhận được phần thưởng là diện tích chữ V nhân với 10.000 đồng. Hỏi tiền thưởng là bao nhiêu ngàn đồng (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(0, 0, 3); B(1, 1, 3); C(0, 1, 1)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) bằng?

Câu 6: Trong giai đoạn sửa chữa cầu, nhà thầu thi công gia cố thêm hệ thống chịu tải là 2 thanh sắt có độ dài bằng nhau (được vẽ nét đứt trong hình)



Biết phần cong của dây cầu là nửa đường cong bán kính 2m. Với hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có phương trình đường thẳng của những thanh chịu tải là $d_1 \begin{cases} x = mt \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases}$ và $d_2 \begin{cases} x = nt \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases}$ (với

$m, n \in \mathbb{R}$). Xác định $m + n$.

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $F(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là hàm số $f(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = F(x) + C.$

B. $\int f(x)dx = F'(x) + C.$

C. $\int F'(x)dx = f(x) + C.$

D. $\int F(x)dx = f(x) + C.$

Lời giải

Dùng định nghĩa nguyên hàm.

Câu 2: Biết $\int f(x)dx = \frac{5^x}{\ln 5} + 3x + C$. Khi đó $f(x)$ bằng

A. $f(x) = \frac{5^x}{\ln 5} + 3.$

B. $f(x) = \frac{5^x}{\ln 5} + 3x.$

C. $f(x) = 5^x + 3x.$

D. $5^x + 3.$

Lời giải

Có $\int f(x)dx = \frac{5^x}{\ln 5} + 3x + C \Rightarrow f(x) = \left(\frac{5^x}{\ln 5} + 3x + C \right)' = 5^x + 3.$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2025]$, $f(1) = 1$ và $f(2025) = 2$. Tích phân

$I = \int_1^{2025} f'(x)dx$ bằng

A. 2025.

B. 1.

C. 2024.

D. 2.

Lời giải

Ta có $I = \int_1^{2025} f'(x)dx = f(x)|_1^{2025} = f(2025) - f(1) = 1.$

Câu 4: Nếu $\int_3^4 f(x)dx = 3$ thì $\int_3^4 -4f(x)dx$ bằng

A. -12.

B. 4.

C. 12.

D. 3.

Lời giải

Ta có $\int_3^4 -4f(x)dx = -4 \int_3^4 f(x)dx = -4.3 = -12.$

Câu 5: Biết $\int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 3)dx = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a + b$.

A. 34.

B. 53.

C. 45.

D. 35.

Lời giải

Ta có $\int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 3)dx = \int_0^1 x^4 dx - \int_0^1 2x^2 dx + \int_0^1 3dx = \frac{1}{5}x^5 \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 + 3x \Big|_0^1 = \frac{38}{15}.$

Suy ra $a = 38; b = 15 \Rightarrow T = 38 + 15 = 53.$

Câu 6: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3 - \cos x)dx$.

A. $\frac{\pi}{2} - 1.$

B. $\frac{\pi + 1}{2}.$

C. $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}.$

D. $\frac{\pi - 1}{2}.$

Lời giải

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3 - \cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 3dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi - 1}{2}.$

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 2$ là

A. $S = \int_{-1}^2 |x - x^2| dx$. **B.** $S = \int_{-1}^2 (x - x^2) dx$. **C.** $S = \int_{-1}^2 (x^2 - x) dx$. **D.** $S = \left| \int_{-1}^2 (x - x^2) dx \right|$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^2 |x - x^2| dx$.

Câu 8: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$.

A. $S = \frac{9}{4}$. **B.** $S = \frac{25}{4}$. **C.** $S = \frac{41}{4}$. **D.** $S = 11$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^3 |x^3 - 4x| dx$.

Ta có $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$ hoặc $x = 2$.

Phương trình chỉ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$ là $x = 0$ và $x = 2$.

Suy ra $S = \int_0^3 |x^3 - 4x| dx = \int_0^2 |x^3 - 4x| dx + \int_2^3 |x^3 - 4x| dx$
 $= \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_2^3 (x^3 - 4x) dx \right| = \left| \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right) \Big|_0^2 \right| + \left| \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right) \Big|_2^3 \right| = |-4| + \left| \frac{25}{4} \right| = \frac{41}{4}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{6} = 1$. Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n} = (2; 3; 6)$. **B.** $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6} \right)$. **C.** $\vec{n} = (2; -3; 6)$. **D.** $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{6} \right)$.

Lời giải

Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{6} \right)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; 2)$, $B(0; 1; 4)$, mặt phẳng trung trực của đoạn AB có phương trình là

A. $(P): x + y - z = 0$. **B.** $(P): x + y - z + 1 = 0$.
C. $(P): -2x - 2y + 2z + 1 = 0$. **D.** $(P): -2x - 2y + 2z + 2 = 0$.

Lời giải

Gọi $I(1; 2; 3)$ là trung điểm của AB .

$\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 2) = -2(1; 1; -1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB .

(P) đi qua I , nhận $\vec{n} = (1; 1; -1)$ là một véc tơ pháp tuyến, phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$(P): x + y - z + m = 0$.

Vì $I(1; 2; 3) \in (P) \Rightarrow m = 0$.

Vậy $(P): x + y - z = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng (d) có phương trình tham số $(d) : \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = 2 + 3t \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$

Một véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d) là

- A. $\vec{u} = (-1; 1; 2)$. B. $\vec{u} = (-1; 1; 3)$. C. $\vec{u} = (-1; 0; 2)$. **D. $\vec{u} = (-1; 0; 3)$.**

Lời giải

Một véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\vec{u} = (-1; 0; 3)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P) : x - 2y + 3z - 1 = 0$ là

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{3}$. **B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$.**
C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{3}$.

Lời giải

Mặt phẳng $(P) : x - 2y + 3z - 1 = 0$ có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

Đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P) nên (d) nhận $\vec{n} = (1; -2; 3)$ là một véc tơ chỉ phương.

Đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1; -2; 3)$, có $\vec{n} = (1; -2; 3)$ là một véc tơ chỉ phương, phương trình chính tắc của (d) : $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 5$ và hàm số $g(x) = \sin x$.

a) $\int f(x) dx = 5x + C$.

b) $\int [f(x) + g(x)] dx = 5x + \cos x + C_1$

c) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$. Biết $G(\pi) = 3$ thì $G(x) = -\cos x + 2$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 3$ Thì

$F(1) + F(2) + \dots + F(100) = 25560$.

Lời giải

a) Ta có: $\int 5 dx = 5x + C$. Chọn ĐÚNG.

b) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int (5 + \sin x) dx = 5x - \cos x + C_1$. Chọn SAI.

c) Ta có: $G(x) = -\cos x + C_1$.

$G(\pi) = 3 \Leftrightarrow -\cos \pi + C_1 = 3 \Leftrightarrow C_1 = 2$ vậy $G(x) = -\cos x + 2$. Chọn ĐÚNG.

d) Ta có: $F(x) = \int 5 dx = 5x + C$ mà $F(1) = 3 \Leftrightarrow 5 + C = 3 \Leftrightarrow C = -2 \Rightarrow F(x) = 5x - 2$

Ta có $F(1) = 3; F(2) = 8; F(3) = 13; \dots; F(100) = 498$ là 100 số hạng của cấp số cộng với $u_1 = 3; d = 5$.

Khi đó: $F(1) + F(2) + \dots + F(100) = \frac{(3 + 498) \cdot 100}{2} = 25050$. Chọn SAI.

Câu 2: Cho các hàm số $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{a)} \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

$$\text{b)} \int_{2025}^{2025} f(x) dx = 2025.$$

$$\text{c)} \text{ Nếu } F(0) = 2, F(1) = 8. \text{ Khi đó: } \int_0^1 f(x) dx = -6.$$

$$\text{d)} \text{ Cho } f(x) = 3^x \text{ và } \int_0^1 f(x) dx = \frac{a}{\ln 3}. \text{ Khi đó } a = 8.$$

Lời giải

a) Theo định nghĩa tích phân. Chọn ĐÚNG.

$$\text{b)} \text{ Ta có: } \int_{2025}^{2025} f(x) dx = 0. \text{ Chọn SAI.}$$

$$\text{c)} \text{ Ta có: } \int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = 8 - 2 = 6. \text{ Chọn SAI.}$$

$$\text{d)} \text{ Ta có: } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3^x dx = \left. \frac{3^x}{\ln 3} \right|_0^1 = \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} \Rightarrow a = 2. \text{ Chọn SAI.}$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$.

a) Điểm $M(2; -1; 2)$ thuộc mặt phẳng (P) .

b) Tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2; -1; 2)$.

c) Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(3; 2; -1)$ và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là $2x - y + 2z - 2 = 0$.

d) Gọi (R) là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy) , đồng thời cách điểm $B(-3; 1; 5)$ một khoảng bằng $\sqrt{5}$. Giả sử (R) có phương trình $ax + by + d = 0, (a > 0, d < 0), a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) = 1$. Giá trị của biểu thức $b + d = -4$.

Lời giải

a) Thay tọa độ điểm $M(2; -1; 2)$ vào phương trình mặt phẳng (P) , ta được $2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 - 8 = 1 \neq 0$. Do đó điểm $M(2; -1; 2)$ không thuộc mặt phẳng (P) .

b) Từ phương trình mặt phẳng (P) đã cho ta có tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2; -1; 2)$.

c) Vì mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (Q) nhận vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) làm vectơ pháp tuyến. Mà mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(3; 2; -1)$ nên ta có phương trình của mặt phẳng (Q) là: $2(x - 3) - (y - 2) + 2(z + 1) = 0$ hay $2x - y + 2z - 2 = 0$.

d) Vì (R) là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy) nên mặt phẳng (R) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = [\vec{n}, \vec{k}]$, với $\vec{n} = (2; -1; 2), \vec{k} = (0; 0; 1)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy) .

Ta có $\vec{n}_1 = (-1; -2; 0)$.

Giả sử phương trình mặt phẳng (R) có dạng $x + 2y + d = 0, (d \in \mathbb{R})$.

Khoảng cách từ điểm $B(-3; 1; 5)$ đến mặt phẳng (R) bằng $\sqrt{5}$.

$$\text{Suy ra } \frac{|1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + d|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |d - 1| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6 \\ d = -4 \end{cases}.$$

Từ đó ta có hai mặt phẳng (R) thỏa mãn là $x + 2y + 6 = 0$ và $x + 2y - 4 = 0$.

Kết hợp với điều kiện của mặt phẳng (R) : $ax + by + d = 0$, $(a > 0, d < 0)$, $a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) = 1$ ta có $a = 1, b = 2, d = -4 \Rightarrow b + d = -2$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -1; 0), N(-2; 0; 4)$.

a) Tọa độ một vectơ chỉ phương của đường thẳng MN là $\vec{a} = (-3; 1; 4)$.

b) Phương trình chính tắc của đường thẳng MN là $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-4}$.

c) Đường thẳng MN và đường thẳng $d : \begin{cases} x = -5 + 3t' \\ y = 1 - t' \\ z = 8 - 4t' \end{cases}$ song song với nhau.

d) Gọi α là góc giữa đường thẳng MN và trục Ox . Khi đó $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{26}}{26}$.

Lời giải

a) Đường thẳng MN có một vectơ chỉ phương là $\vec{a} = \overrightarrow{MN} = (-3; 1; 4)$.

b) Đường thẳng MN đi qua điểm $M(1; -1; 0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (-3; 1; 4) \Rightarrow \vec{b} = (3; -1; -4)$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng MN .

Khi đó phương trình chính tắc của đường thẳng MN là $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-4}$.

c) Đường thẳng $d : \begin{cases} x = -5 + 3t' \\ y = 1 - t' \\ z = 8 - 4t' \end{cases}$ và đường thẳng MN có cùng vectơ chỉ phương là $\vec{b} = (3; -1; -4)$.

Thay tọa độ điểm $M(1; -1; 0)$ vào phương trình đường thẳng d , ta được:

$$\begin{cases} 1 = -5 + 3t' \\ -1 = 1 - t' \\ 0 = 8 - 4t' \end{cases} \Leftrightarrow t' = 2 \Rightarrow M \in d.$$

Vậy hai đường thẳng MN và d trùng nhau.

d) Trục Ox có một vectơ chỉ phương là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{i}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{|-3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{3\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{442}}{26}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một chiếc cốc chứa nước ở $95^\circ C$ được đặt trong phòng có nhiệt độ $20^\circ C$. Theo định luật làm mát của Newton, nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút (xem $t = 0$ là thời điểm nước ở $95^\circ C$) là một hàm số $T(t)$. Tốc độ giảm nhiệt độ của nước trong cốc tại thời điểm t phút được xác định bởi

$$T'(t) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{50}} \text{ (}^\circ C/\text{phút)}. \text{ Nhiệt độ của nước tại thời điểm } t = 20 \text{ phút bằng bao nhiêu độ C?}$$

(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

(nguồn: https://amsi.org.au/ESA_Senior_Years/SeniorTopic3/3e/3e_4history_3.html).

Lời giải

Đáp án: 70,3

Ta có nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút là

$$T(t) = \int T'(t) dt = \int -\frac{3}{2} e^{-\frac{t}{50}} dt = -\frac{3}{2} \cdot (-50) \cdot e^{-\frac{t}{50}} + C = 75 \cdot e^{-\frac{t}{50}} + C.$$

Theo giả thiết, tại thời điểm $t = 0$ nhiệt độ của nước là $95^\circ C$

$$T(0) = 95 \Rightarrow 75 + C = 95 \Leftrightarrow C = 20.$$

$$\text{Suy ra } T(t) = 75 \cdot e^{-\frac{t}{50}} + 20.$$

$$\Rightarrow T(20) = 75 \cdot e^{-\frac{20}{50}} + 20 \approx 70,3$$

Vậy nhiệt độ của nước tại thời điểm $t = 20$ là $70,3^\circ C$.

Câu 2: Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(0; 2)$ và tiếp tuyến của đồ thị này tại mỗi điểm $(x; f(x))$ có hệ số góc là $2x - 3$. Tìm $f(4)$.

Lời giải

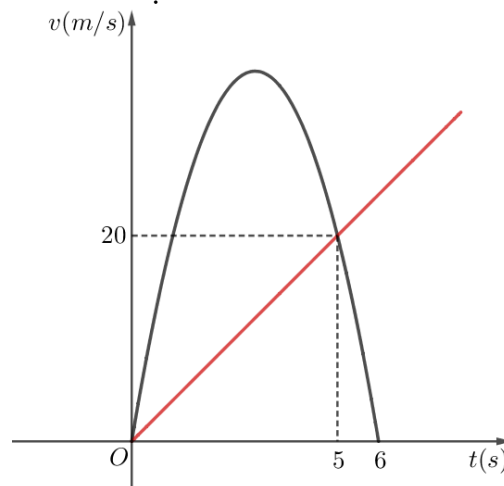
Đáp án: 6

Theo giả thiết, ta có $f(0) = 2$ và $f'(x) = 2x - 3$.

$$\text{Từ đó, } f(4) - f(0) = \int_0^4 f'(x) dx \Leftrightarrow f(4) = f(0) + \int_0^4 f'(x) dx \Leftrightarrow f(4) = 2 + \int_0^4 (2x - 3) dx$$

$$\Leftrightarrow f(4) = 2 + 4 = 6.$$

Câu 3: Cho đồ thị biểu diễn vận tốc của 2 chất điểm A và B bắt đầu chuyển động cùng một lúc và cùng vạch xuất phát, cùng chiều trên một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của chất điểm A là một đường parabol và đồ thị biểu diễn vận tốc của chất điểm B là một đường thẳng như hình vẽ.



Hỏi sau 8 giây kể từ lúc xuất phát thì khoảng cách giữa hai chất điểm là bao nhiêu mét? (Biết rằng chất điểm A sẽ dừng lại khi vận tốc bằng 0).

Lời giải

Đáp án: 16

Dựa vào đồ thị ta có:

Biểu thức vận tốc của chất điểm B là: $v_B(t) = pt + q (m/s)$.

$$\text{Mà: } \begin{cases} v_B(0) = 0 \\ v_B(5) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 4 \\ q = 0 \end{cases}.$$

Suy ra: $v_B(t) = 4t (m/s)$.

Biểu thức vận tốc của chất điểm A là $v_A(t) = at^2 + bt + c (m/s)$.

Mặt khác:

$$\begin{cases} v_A(0) = 0 \\ v_A(5) = 5 \\ v_A(6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 24 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra: $v_A(t) = -4t^2 + 24t \text{ (m/s)}$.

Ta có $v_A(t) = -4t^2 + 24t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 6 \end{cases}$ nên chất điểm A dừng lại sau 6 giây.

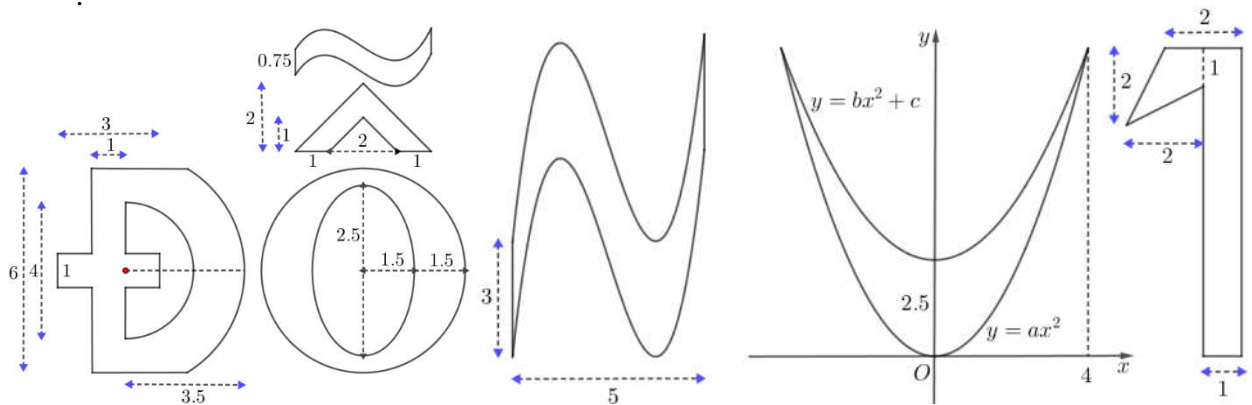
Do đó quãng đường chất điểm A di chuyển được trong 6 giây là

$$S_A = \int_0^6 (-4t^2 + 24t) dt = 144 \text{ m}.$$

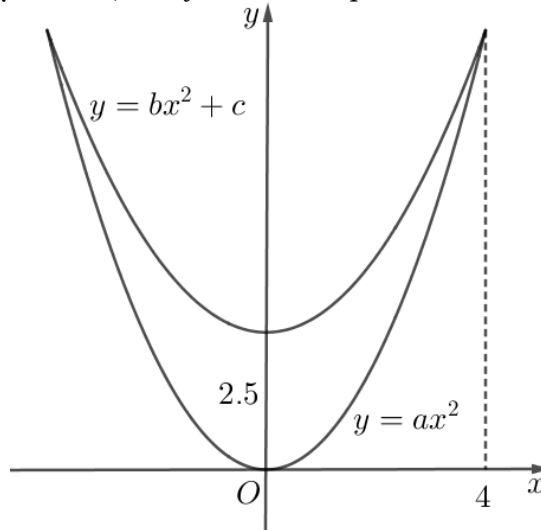
Quãng đường chất điểm B di chuyển được trong 8 giây đầu là $S_B = \int_0^8 (4t) dt = 128 \text{ m}$.

Khoảng cách giữa hai chất điểm sau 8 giây kể từ lúc xuất phát là $|S_A - S_B| = 16 \text{ m}$.

Câu 4: Vào buổi học cuối cùng trước khi học sinh của mình bước vào kì thi Tốt nghiệp trung học phổ thông, Thầy Vinh đã trang trí bảng bằng một câu chúc thật ý nghĩa là “ĐỒ NV1” và đậm chất toán học.



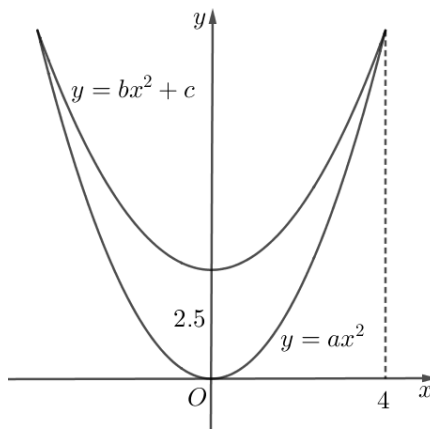
Sau đó để tạo không khí thật vui vẻ, Thầy đã đổ cả lớp chữ V trên bảng có diện tích bao nhiêu.



Ai đoán đúng sẽ nhận được phần thưởng là diện tích chữ V nhân với 10.000 đồng. Hỏi tiền thưởng là bao nhiêu ngàn đồng (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Đáp án: 133



Cách 1:

Ta có: $y = f(x) = ax^2$; $y = g(x) = bx^2 + c$.

$$\text{Mà } g(0) = \frac{5}{2} \Rightarrow g(x) = bx^2 + \frac{5}{2}.$$

$$\text{Dựa vào hình vẽ thấy: } f(4) = g(4) \Leftrightarrow 16a = 16b + \frac{5}{2} \Leftrightarrow b - a = -\frac{5}{32}.$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^4 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-4}^4 \left(bx^2 + \frac{5}{2} - ax^2 \right) dx = \int_{-4}^4 \left((b-a)x^2 + \frac{5}{2} \right) dx \\ &= \int_{-4}^4 \left(-\frac{5}{32}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx = \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Vậy số tiền thưởng mà học sinh làm đúng nhận được là: $\frac{40}{3} \cdot 10000 = \frac{400000}{3} \approx 133$ ngàn đồng.

Cách 2:

Áp dụng công thức tính diện tích Parabol với hai Parabol $y = ax^2$; $y = bx^2 + c$ ta được:

$$S_1 = \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot h_1; S_2 = \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot h_2$$

$$\text{Suy ra: } S = S_1 - S_2 = \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot (h_1 - h_2) = \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} = \frac{40}{3}.$$

Vậy số tiền thưởng mà học sinh làm đúng nhận được là: $\frac{40}{3} \cdot 10000 = \frac{400000}{3} \approx 133$ ngàn đồng.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(0, 0, 3); B(1, 1, 3); C(0, 1, 1)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) bằng?

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có: $A(0, 0, 3); B(1, 1, 3); C(0, 1, 1)$

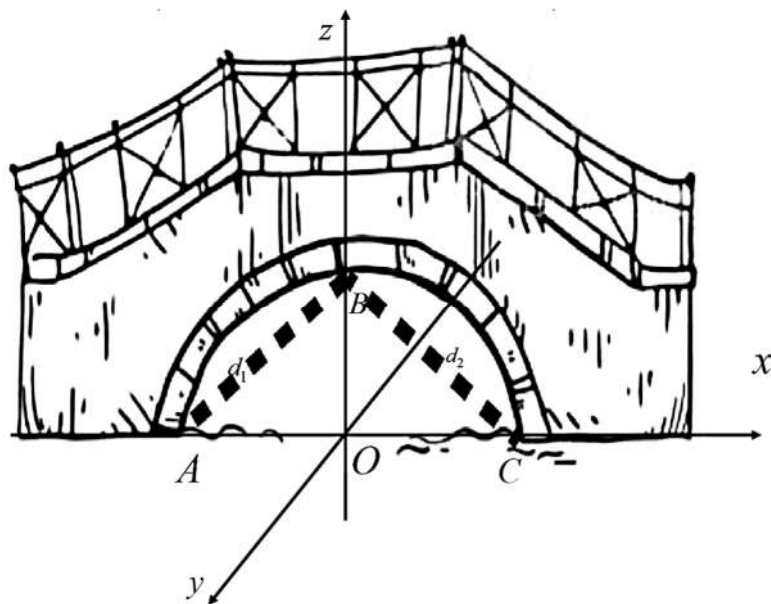
$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-2, 2, 1)$$

Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua A nhận $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-2, 2, 1)$ là 1 VTPT là:

$$-2x + 2y + z - 3 = 0$$

$$\text{Vậy } d_{(O, (ABC))} = \frac{|-3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 1$$

Câu 6: Trong giai đoạn sửa chữa cầu, nhà thầu thi công gia cố thêm hệ thống chịu tải là 2 thanh sắt có độ dài bằng nhau (được vẽ nét đứt trong hình)



Biết phần cong của dây cầu là nửa đường cong bán kính 2m. Với hệ trục tọa độ như hình vẽ ta

có phương trình đường thẳng của những thanh chịu tải là d_1 $\begin{cases} x = mt \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases}$ và d_2 $\begin{cases} x = nt \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases}$ (với

$m, n \in \mathbb{R}$). Xác định $m + n$.

Lời giải

Đáp án: 0

Dựng lại hình vẽ dưới hệ trục tọa độ $Oxyz$.

Gọi d_1 và d_2 là hai đường thẳng đi qua 2 thanh chịu tải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy:

+) d_1 qua $A(-2,0,0); B(0,0,2)$ nên d_1 có VTCP là $\vec{u} = (1,0,1)$

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của d_1 : $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases}$.

d_2 qua $C(2,0,0); B(0,0,2)$ nên d_2 VTCP là $\vec{u} = (-1,0,1)$

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của d_2 : $\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Vậy $m + n = 0$.

-----HẾT-----



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K . Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$.

B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.

C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

D. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.

Câu 2: Họ tất cả các nguyên hàm của $f(x) = \cos x + \sin x$ là

A. $\sin x + \cos x + C$.

B. $\sin x - \cos x$.

C. $\sin x - \cos x + C$.

D. $-\sin x + \cos x + C$.

Câu 3: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$ được kí hiệu là

A. $\int_a^b F(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(a) - f(b)$.

B. $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(a) - F(b)$.

C. $\int_a^b F(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$.

D. $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k là hằng số).

B. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

C. $\int_a^b [f(x).g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx . \int_a^b g(x) dx$.

D. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ ($a < c < b$).

Câu 5: Tích phân $\int_1^3 x^3 dx$ bằng

A. 15.

B. 20.

C. 30.

D. 28.

Câu 6: Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ bằng

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Gọi D là miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a, x = b, (a < b)$. Diện tích của D được cho bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

B. $S = \int_a^b f(x) dx$.

C. $S = \int_b^a f(x) dx$.

D. $S = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 6x$ và $y = x^2$ bằng

A. $\frac{125}{12}$. B. $\frac{253}{12}$. C. $\frac{63}{4}$. D. $\frac{16}{3}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 1 = 0$ và $(Q): x + 2y + 3z + 6 = 0$ là

A. $\frac{7}{\sqrt{14}}$. B. $\frac{8}{\sqrt{14}}$. C. 14. D. $\frac{5}{\sqrt{14}}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2;3;5)$, $B(3;2;4)$ và $C(4;1;2)$ có phương trình là

A. $3x - y + 2z - 4 = 0$. B. $x + y - 5 = 0$. C. $y - z + 2 = 0$. D. $2x + y - 7 = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là:

A. $\vec{u}_1 = (2; -1; 3)$. B. $\vec{u}_2 = (-1; 2; 3)$. C. $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$. D. $\vec{u}_4 = (1; 2; 3)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(2;1;0)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một ô tô đang chạy với tốc độ 72 km/h thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 30 \text{ (m/s)}$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong $t \text{ (s)}$ kể từ lúc đạp phanh.

a) Công thức biểu diễn hàm số $s(t) = -5t^2 + 30t + 72 \text{ (m)}$.

b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 3 giây.

c) Sau 3 giây kể từ lúc đạp phanh, quãng đường xe ô tô di chuyển được là 45 (m) .

d) Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là 120 (m) .

Câu 2: Giả sử lợi nhuận biên của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0008x + 10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức

$P(x) = -0,0008x^2 + 10,4x$.

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là 49,79 triệu đồng.

d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$, $B(2;-3;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 5 = 0$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2; -1; 2)$.

b) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 2.

c) Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$2x - y + 2z + 6 = 0.$$

d) Giả sử điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA + MB$ ngắn nhất. Khi đó tổng

$$a - b + 2c = \frac{7}{2}.$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$, đường thẳng $d : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 3t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$ và mặt phẳng

(P): $x + y - z + 3 = 0$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\vec{u} = (1; 3; 2)$.

b) Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình chính tắc là

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

c) Giả sử $M(a; b; c)$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó $a + b + c = 21$.

d) Đường thẳng (Δ) đi qua A , cắt d tại điểm B và song song với mặt phẳng (P). Độ dài đoạn thẳng $AB = \sqrt{6}$.

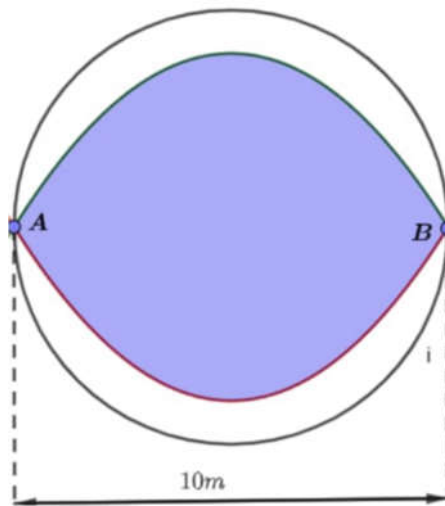
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x < 1 \\ 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ và $F(2) = 3$. Giá trị $F(-1)$ bằng bao nhiêu?

Câu 2: Biết $\int_0^1 \frac{e^{-x} + 2}{e^{x-1}} dx = ae + b + \frac{c}{e}$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của $P = a + b + c$ bằng bao nhiêu?

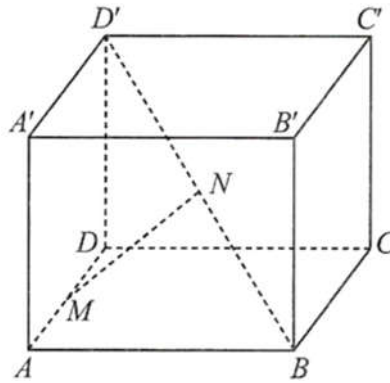
Câu 3: Chấp hành theo “Luật trật tự an toàn giao thông đường bộ”, Chị Nga đang lái xe với vận tốc $5m/s$ thì nhận thấy phía trước đèn giao thông đang chuyển sang đèn đỏ nên cần giảm tốc độ của xe để đợi đèn đỏ. Sau khi đạp phanh, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -0,7t + 5(m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn, xe di chuyển quãng đường bao nhiêu mét? (Làm tròn đến phần mười).

Câu 4: Trong khu vực trung tâm của một công viên lớn, có một miếng đất có dạng hình tròn đường kính $AB = 10(m)$. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường Parabol đối xứng nhau qua AB , nằm trong hình tròn, đi qua các điểm $A; B$ và có đỉnh cách mép hình tròn $1m$. Phần giới hạn bởi hai Parabol được trồng hoa với chi phí 300 nghìn đồng $1m^2$, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 700 nghìn đồng $1m^2$. Tính tổng chi phí để hoàn thành khu vực này? (Đơn vị triệu đồng và làm tròn đến phần mười).



Câu 5: Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau $2m$, người ta thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài $4m; 4,4m; 4,8m$. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? Viết kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

Câu 6: Có một chiếc lồng bằng sắt dạng hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = 2m, AD = 3m, AA' = 1m$. Người thợ hàn muốn hàn một thanh sắt MN nối hai đoạn AD và BD' . Tính chiều dài ngắn nhất của đoạn thanh sắt MN . (Làm tròn đến phần trăm).



-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K . Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$.

B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.

C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

D. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.

Lời giải

Theo định nghĩa thì hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

Câu 2: Họ tất cả các nguyên hàm của $f(x) = \cos x + \sin x$ là

A. $\sin x + \cos x + C$.

B. $\sin x - \cos x$.

C. $\sin x - \cos x + C$.

D. $-\sin x + \cos x + C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x) dx = \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C$.

Câu 3: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$ được kí hiệu là

A. $\int_a^b F(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(a) - f(b)$.

B. $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(a) - F(b)$.

C. $\int_a^b F(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$.

D. $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Lời giải

Theo định nghĩa ta có $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k là hằng số).

B. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

C. $\int_a^b [f(x).g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx . \int_a^b g(x) dx$.

D. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ ($a < c < b$).

Lời giải

Dựa vào tính chất của tích phân, ta có: $\int_a^b [f(x).g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx . \int_a^b g(x) dx$ sai.

Câu 5: Tích phân $\int_1^3 x^3 dx$ bằng

A. 15.

B. 20.

C. 30.

D. 28.

Lời giải

Ta có: $\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = 20$.

Câu 6: Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ bằng

A. -1 .

B. 0 .

C. 1 .

D. 2 .

Lời giải

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Gọi D là miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a$, $x = b$, ($a < b$). Diện tích của D được cho bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

B. $S = \int_a^b f(x) dx$.

C. $S = \int_b^a f(x) dx$.

D. $S = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Lời giải

Theo định nghĩa, ta có $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 6x$ và $y = x^2$ bằng

A. $\frac{125}{12}$.

B. $\frac{253}{12}$.

C. $\frac{63}{4}$.

D. $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Đặt $f_1(x) = x^3 - 6x$ và $f_2(x) = x^2$. Ta có $f_1(x) - f_2(x) = x^3 - x^2 - 6x$.

Phương trình $f_1(x) - f_2(x) = 0$ có ba nghiệm là $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 3$.

Diện tích của hình phẳng đã cho là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^3 |x^3 - x^2 - 6x| dx = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx \right| + \left| \int_0^3 (x^3 - x^2 - 6x) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right) \Big|_{-2}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right) \Big|_0^3 \right| = \frac{253}{12}. \end{aligned}$$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 1 = 0$ và $(Q): x + 2y + 3z + 6 = 0$ là

A. $\frac{7}{\sqrt{14}}$.

B. $\frac{8}{\sqrt{14}}$.

C. 14 .

D. $\frac{5}{\sqrt{14}}$.

Lời giải

$(P): x + 2y + 3z - 1 = 0$, $(Q): x + 2y + 3z + 6 = 0$. Ta có: $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} \neq \frac{-1}{6}$ suy ra

$(P) \parallel (Q)$. Vì $(1; 0; 0) \in (P)$. Vì $(P) \parallel (Q)$ nên $d((P), (Q)) = d(A, (Q)) = \frac{|1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2; 3; 5)$, $B(3; 2; 4)$ và $C(4; 1; 2)$ có phương trình là

A. $3x - y + 2z - 4 = 0$.

B. $x + y - 5 = 0$.

C. $y - z + 2 = 0$.

D. $2x + y - 7 = 0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2; -3)$ suy ra $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 1; 0)$.

Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \subset (ABC)$ nên (ABC) sẽ nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ làm một vectơ pháp tuyến.

Hiển nhiên (ABC) đi qua $A(2; 3; 5)$ nên ta có phương trình của (ABC) là

$$1(x - 2) + 1(y - 3) + 0(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0.$$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là:

- A. $\vec{u}_1 = (2; -1; 3)$. B. $\vec{u}_2 = (-1; 2; 3)$. C. $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$. D. $\vec{u}_4 = (1; 2; 3)$.

Lời giải

Đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (-1; 2; 3)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 0; 1)$ và $N(2; 1; 0)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

- A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Lời giải

Đường thẳng MN có vectơ chỉ phương là $\vec{MN} = (1; 1; -1)$ và đi qua $M(1; 0; 1)$ nên có phương trình

tham số là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một ô tô đang chạy với tốc độ 72 km/h thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 30 \text{ (m/s)}$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong $t \text{ (s)}$ kể từ lúc đạp phanh.

a) Công thức biểu diễn hàm số $s(t) = -5t^2 + 30t + 72 \text{ (m)}$.

b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 3 giây.

c) Sau 3 giây kể từ lúc đạp phanh, quãng đường xe ô tô đi chuyển được là 45 (m) .

d) Quãng đường xe ô tô đã đi chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là 120 (m) .

Lời giải

a) Ta có $s(t) = \int v(t) dt = \int (-10t + 30) dt = -5t^2 + 30t + C$.

Do $s(0) = 0$ nên $C = 0$.

Vậy công thức biểu diễn hàm số $s(t) = -5t^2 + 30t \text{ (m)}$.

b) Xe ô tô dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow -10t + 30 = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 3 giây.

c) Sau 3 giây kể từ lúc đạp phanh, quãng đường xe ô tô đi chuyển được là

$$s(3) = -5 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 = 45 \text{ (m)}.$$

Sau 3 giây kể từ lúc đạp phanh, quãng đường xe ô tô đi chuyển được là 45 (m) .

d) Ta có $72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$.

Vậy quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là $20 + 45 = 65$ (m).

Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là 65 (m).

Câu 2: Giả sử lợi nhuận biên của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0008x + 10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức

$$P(x) = -0,0008x^2 + 10,4x.$$

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là 49,79 triệu đồng.

d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.

Lời giải

a) Ta có: $P(x) = \int P'(x)dx = \int (-0,0008x + 10,4)dx = -0,0004x^2 + 10,4x + C$.

Dễ thấy, khi chưa bán được sản phẩm nào thì lợi nhuận bằng 0. Do đó $P(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$.

Vậy lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức

$$P(x) = -0,0004x^2 + 10,4x. \text{ Suy ra a) Sai.}$$

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là: $P(50) = -0,0004 \cdot 50^2 + 10,4 \cdot 50 = 519$. Suy ra b) Đúng.

c) Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là

$$P(55) - P(50) = \int_{50}^{55} P'(x)dx = \int_{50}^{55} (-0,0008x + 10,4)dx = 51,79.$$

Suy ra c) Sai.

d) Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm là

$$\begin{aligned} P(a) - P(50) &= \int_{50}^a P'(x)dx = \int_{50}^a (-0,0008x + 10,4)dx = (-0,0004x^2 + 10,4x) \Big|_{50}^a \\ &= -0,0004a^2 + 10,4a - 519. \end{aligned}$$

Theo bài ra ta có:

$$-0,0004a^2 + 10,4a - 519 > 517 \Leftrightarrow 0,0004a^2 - 10,4a + 1036 < 0 \Leftrightarrow 100 < a < 25900.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của a là 101. Suy ra d) Sai.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3), B(2;-3;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 5 = 0$.

Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2; -1; 2)$.

b) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 2.

c) Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là: $2x - y + 2z + 6 = 0$.

d) Giả sử điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA + MB$ ngắn nhất. Khi đó tổng $a - b + 2c = \frac{7}{2}$.

Lời giải

a) Từ phương trình của mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 5 = 0$ suy ra một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (2; -1; 2)$. Suy ra a) Đúng.

b) $d(A, (P)) = \frac{|2.1 - 2 + 2.3 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{11}{3}$. Suy ra b) Sai.

c) Do $(Q) // (P)$ suy ra phương trình mặt phẳng (Q) có dạng: $2x - y + 2z + m = 0$, với $m \neq 5$. Do (Q) đi qua A nên ta có: $2.1 - 2 + 2.3 + m = 0 \Leftrightarrow m = -6$.

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là $2x - y + 2z - 6 = 0$. Suy ra c) Sai.

d) * Nhận xét: Do hai điểm A, B đều có cao độ dương nên A, B nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) .

+) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (Oxy) . Suy ra $A'(1; 2; -3)$.

+) Khi đó với mọi điểm $M \in (Oxy)$, ta có: $MA = MA' \Rightarrow MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Suy ra $\min(MA + MB) = A'B$ đạt được khi A', M, B thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thẳng $(A'B)$ với mặt phẳng (Oxy) .

+) Phương trình đường thẳng $(A'B)$ đi qua A' và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{A'B} = (1; -5; 4)$ là

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 5t \\ z = -3 + 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

+) $M \in (A'B) \Rightarrow M(1 + t; 2 - 5t; -3 + 4t)$. Mặt khác $M \in (Oxy) \Rightarrow -3 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$.

+) Với $t = \frac{3}{4} \Rightarrow M\left(\frac{7}{4}; -\frac{7}{4}; 0\right)$. Suy ra $a - b + 2c = \frac{7}{2}$. Suy ra d) Đúng.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 3t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): x + y - z + 3 = 0$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\vec{u} = (1; 3; 2)$.

b) Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình chính tắc là

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

c) Giả sử $M(a; b; c)$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Khi đó $a + b + c = 21$.

d) Đường thẳng (Δ) đi qua A , cắt d tại điểm B và song song với mặt phẳng (P) . Độ dài đoạn thẳng $AB = \sqrt{6}$.

Lời giải

a) Từ phương trình tham số của đường thẳng (d) suy ra (d) có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 3; 2)$.

Vậy a) Đúng.

b) Ta thấy $\frac{2}{1} \neq \frac{4}{1}$ nên điểm $A(1; 2; -1)$ không thuộc đường thẳng $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Suy ra b) Sai.

c) Do $M \in (d) \Rightarrow M(3 + t; 3 + 3t; 2t)$. Mặt khác do $M \in (P)$ suy ra

$$3 + t + 3 + 3t - 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{9}{2}.$$

Với $t = -\frac{9}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{21}{2}; -9\right)$. Suy ra $a + b + c = -21$. Suy ra c) Sai.

d) Do $B \in (d) \Rightarrow B(3+t; 3+3t; 2t)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (2+t; 1+3t; 1+2t)$.

Gọi $\overrightarrow{n_p} = (1; 1; -1)$ là một vectơ pháp tuyến của (P) .

Vì $\Delta // (P)$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{n_p} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_p} = 0 \Leftrightarrow 2+t+1+3t-1-2t=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Với $t=-1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1; -2; -1)$. Suy ra $AB = \sqrt{6}$. Suy ra d) Đúng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x < 1 \\ 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ và $F(2) = 3$. Giá trị $F(-1)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: -2

+) Gọi $F_1(x)$ là một nguyên hàm của của hàm số $y = 2x+1$ trên khoảng $(-\infty; 1)$

$$\Rightarrow F_1(x) = x^2 + x + C_1.$$

Gọi $F_2(x)$ là một nguyên hàm của của hàm số $y = 3$ trên nửa khoảng $[1; +\infty)$

$$\Rightarrow F_2(x) = 3x + C_2.$$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x < 1 \\ 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ suy ra

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{khi } x < 1 \\ F_2(x) & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

+) Do $F(2) = 3 \Rightarrow F_2(2) = 3 \Rightarrow 3 \cdot 2 + C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = -3$.

+) $F(x)$ phải là một hàm số liên tục nên

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Leftrightarrow F_2(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F_1(x) \Leftrightarrow 3 + C_2 = 2 + C_1 \Rightarrow C_1 = 1 + C_2 = -2.$$

$$\text{Vậy } F(-1) = F_1(-1) = -2.$$

Câu 2: Biết $\int_0^1 \frac{e^{-x} + 2}{e^{x-1}} dx = ae + b + \frac{c}{e}$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của $P = a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 0

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{-x} + 2}{e^{x-1}} dx &= \int_0^1 (e^{-2x+1} + 2e^{-x+1}) dx = e \cdot \int_0^1 ((e^{-2})^x + 2(e^{-1})^x) dx = e \cdot \left(\frac{e^{-2x}}{-2} + 2 \cdot \frac{e^{-x}}{-1} \right) \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{5}{2}e - 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} = 0 \end{aligned}$$

Câu 3: Chấp hành theo “Luật trật tự an toàn giao thông đường bộ”, Chị Nga đang lái xe với vận tốc $5m/s$ thì nhận thấy phía trước đèn giao thông đang chuyển sang đèn đỏ nên cần giảm tốc độ của xe để đợi đèn đỏ. Sau khi đạp phanh, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -0,7t + 5(m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn, xe di chuyển quãng đường bao nhiêu mét?

Lời giải

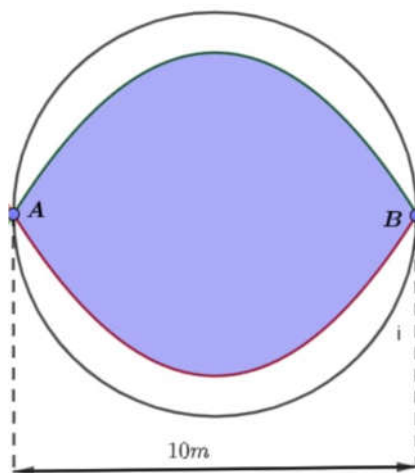
Đáp án: 17,9

Khi xe dừng hẳn, ta có: $v(t) = 0 \Leftrightarrow -0,7t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{50}{7}(s)$.

Vậy quãng đường xe di chuyển được từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn là:

$$\int_0^{\frac{50}{7}} (-0,7t + 5) dt = \left(-0,7 \cdot \frac{t^2}{2} + 5t \right) \Bigg|_0^{\frac{50}{7}} = \frac{125}{7} = 17,9(m).$$

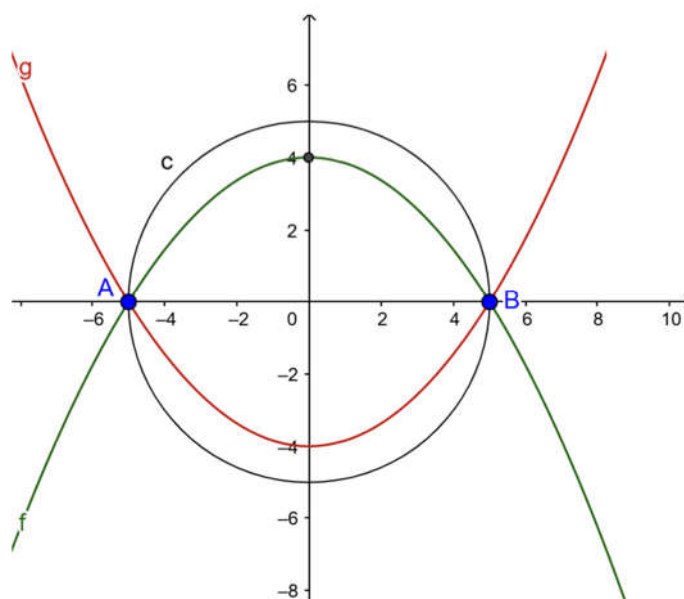
Câu 4: Trong khu vực trung tâm của một công viên lớn, có một miếng đất có dạng hình tròn đường kính $AB = 10(m)$. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường Parabol đối xứng nhau qua AB , nằm trong hình tròn, đi qua các điểm $A; B$ và có đỉnh cách mép hình tròn $1m$. Phần giới hạn bởi hai Parabol được trồng hoa với chi phí 300 nghìn đồng $1m^2$, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 700 nghìn đồng $1m^2$. Tính tổng chi phí để hoàn thành khu vực này?



Lời giải

Đáp án: 33,6

Ta chọn hệ trục Oxy , sao cho tâm của hình tròn trùng với gốc tọa độ, đơn vị trên hệ trục tọa độ là mét. Khi đó $A(-5;0); B(5;0)$, đỉnh của Parabol thứ nhất là $C(0;4)$, đỉnh của Parabol thứ hai là $D(0;-4)$.



Ta lập được phương trình hai Parabol có hai đỉnh lần lượt là hai điểm $C; D$ và đi qua hai điểm $A; B$ là $(P_1): f(x) = -\frac{4}{25}x^2 + 4$ và $(P_2): g(x) = \frac{4}{25}x^2 - 4$

Diện tích phần trồng hoa là: $S_1 = 4 \int_0^5 \left(-\frac{4}{25}x^2 + 4 \right) dx = \frac{160}{3} (m^2)$.

Diện tích phần lát gốm sứ là: $S_2 = \pi \cdot 5^2 - S_1 = \pi \cdot 5^2 - \frac{160}{3} \approx 25,2 (m^2)$.

Tổng chi phí để hoàn thành là:

$$300 \cdot S_1 + 700 \cdot S_2 = 300 \cdot \frac{160}{3} + 700 \cdot \left(25\pi - \frac{160}{3} \right) \approx 33\,644,5 \approx 33,6$$

Câu 5: Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau $2m$, người ta thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài $4m; 4,4m; 4,8m$. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? Viết kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

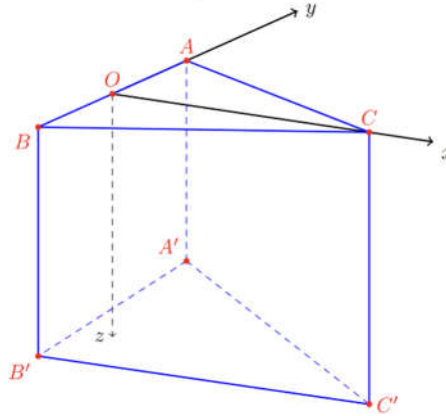
Lời giải

Đáp án: 21,8

Gọi 3 điểm cách nhau $2m$ trên mặt nước là A, B, C .

Vị trí thả rơi xuống đáy bể lần lượt là A', B', C' sao cho $AA' = 4m, BB' = 4,4m, CC' = 4,8m$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, với gốc tọa độ O là trung điểm AB



Khi đó, $A(0;1;0); B(0;-1;0); C(\sqrt{3};0;0); A'(0;1;4); B'(0;-1;4,4); C'(\sqrt{3};0;4,8)$. Ta có:

$$\overrightarrow{A'B'} = (0; -2; -0,4); \overrightarrow{B'C'} = (\sqrt{3}; 1; 0,4).$$

Mặt phẳng $(A'B'C')$ nhận $[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'C'}]$ làm một vectơ pháp tuyến.

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'C'}] = \left(\frac{-6}{5}; \frac{2\sqrt{3}}{5}; 2\sqrt{3} \right).$$

Mặt phẳng đáy bể là $(A'B'C')$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left(\frac{-6}{5}; \frac{2\sqrt{3}}{5}; 2\sqrt{3} \right)$.

Mặt phẳng ngang là mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$.

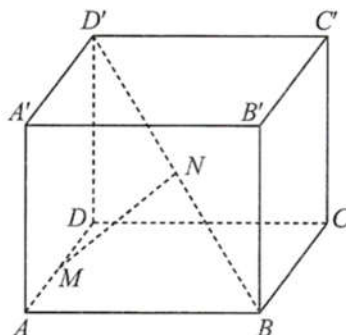
Nên góc giữa hai mặt phẳng đáy bể và mặt phẳng ngang là: $\cos((A'B'C'); (Oxy))$

$$= \frac{\left| \frac{-6}{5} \cdot 0 + \frac{2\sqrt{3}}{5} \cdot 0 + 2\sqrt{3} \cdot 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{-6}{5} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{5} \right)^2 + (2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$$

Suy ra $((A'B'C'); (Oxy)) \approx 21,8^\circ$.

Vậy đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc khoảng 21,8 độ.

Câu 6: Có một chiếc lồng bằng sắt dạng hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = 2m, AD = 3m, AA' = 1m$. Người thợ hàn muốn hàn một thanh sắt MN nối hai đoạn AD và BD' . Tính chiều dài ngắn nhất của đoạn thanh sắt MN .



Lời giải

Đáp án: 0,89

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O trùng với D và $A(3;0;0), C(0;2;0), D'(0;0;1), B(3;2;0)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } AD : \begin{cases} x = t \\ y = 0 (t \in \mathbb{R}). \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } BD' : \begin{cases} x = 3t' \\ y = 2t' \\ z = 1 - t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$$

$$M \in AD \Rightarrow M(t;0;0); N \in BD' \Rightarrow N(3t';2t';1-t'); \overrightarrow{MN} = (3t' - t; 2t'; 1 - t').$$

$$MN \text{ ngắn nhất khi và chỉ khi } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t' - t = 0 \\ 14t' - 3t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{5} \\ t' = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } MN = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,89(m).$$

-----HẾT-----



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai.

A. $\int f(x)dx = F(x) + C$. **B.** $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

C. $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x)$. **D.** $\left(\int f(x)dx\right)' = F'(x)$.

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

A. $3e^x + C$. **B.** $\frac{1}{3}e^{3x} + C$. **C.** $\frac{1}{3}e^x + C$. **D.** $3e^{3x} + C$.

Câu 3: Tính tích phân $I = \int_0^1 (2x + 2025)dx$

A. $I = 2024$. **B.** $I = 2025$. **C.** $I = 2020$. **D.** $I = 2026$.

Câu 4: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_{-1}^0 f(x)dx = 3$; $\int_{-1}^1 f(x)dx = -8$. Khi đó giá trị

$\int_0^1 \frac{f(x)}{2}dx$ bằng

A. $-\frac{5}{2}$. **B.** -11 . **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $-\frac{11}{2}$.

Câu 5: Cho tích phân $\int_0^1 \frac{8^x + 1}{2^x + 1}dx = \frac{1}{\ln 2}.a + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị $4a + b$ bằng

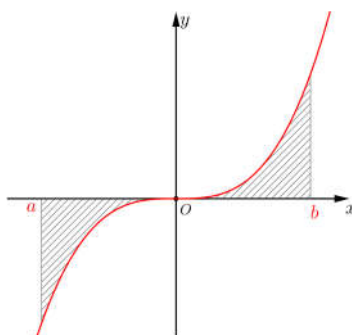
A. 3 . **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 4 . **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int_0^\pi [f(x) + \sin x]dx = 10$. Tính

$I = \int_0^\pi f(x)dx$.

A. $I = 4$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 12$. **D.** $I = 6$.

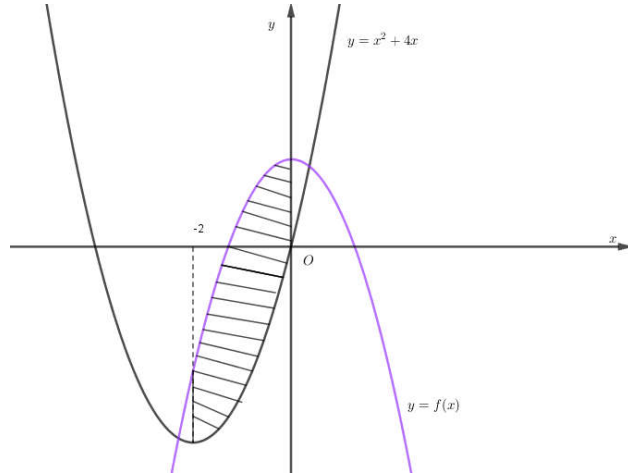
Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $S_D = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$. **B.** $S_D = -\int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$.
C. $S_D = \int_a^0 f(x)dx - \int_0^b f(x)dx$. **D.** $S_D = -\int_a^0 f(x)dx - \int_0^b f(x)dx$.

Câu 8: Phần hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = x^2 + 4x$ và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 0$.



Biết $\int_{-2}^0 f(x)dx = \frac{4}{3}$. Diện tích hình (H) bằng

- A.** $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{20}{3}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(5;1;0)$ và $C(0;2;4)$. Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

- A.** $\vec{n} = (2; -26; 9)$. **B.** $\vec{n} = (6; -6; 9)$. **C.** $\vec{n} = (10; -22; 9)$. **D.** $\vec{n} = (10; -22; -9)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -1; 5)$ và $N(0; 0; 1)$. Mặt phẳng (α) chứa M , N và song song với trục Oy có phương trình

- A.** $(\alpha): 4x - z + 1 = 0$. **B.** $(\alpha): x - 4z + 2 = 0$.
C. $(\alpha): 2x + z - 3 = 0$. **D.** $(\alpha): x + 4z - 1 = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x + 2z + 3 = 0$. Một vectơ chỉ phương của Δ là

- A.** $\vec{a} = (1; 2; 0)$. **B.** $\vec{b} = (1; 2; 3)$. **C.** $\vec{c} = (1; 0; 2)$. **D.** $\vec{d} = (2; 0; -1)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$, $(Q): x - y + z - 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q) ?

- A.** $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = -3 - t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một quả cầu lông được đánh lên từ độ cao $2,5m$ với vận tốc được tính bởi công thức $v(t) = -0,8t + 4,16$ (m/s). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Công thức tính độ cao của quả cầu theo t là $h(t) = -0,4t^2 + 4,16t + 2,5(m)$.
- b) Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t = 5,4(s)$.
- c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $13,316(m)$.
- d) Thời điểm quả cầu chạm đất là $t = 10,5(s)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x)dx = -2$ và

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{13}{2}.$$

a) $\int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{2}.$

b) $2\int_0^1 f(x)dx - 3\int_1^3 f(x)dx = 23.$

c) Giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + 6c$ bằng -21 .

d) Giá trị của biểu thức $P = a + b + 3c$ bằng 12 .

Câu 3: Cho parabol $(P): f(x) = -x^2 + 5x$ và đường thẳng $d: y = 2x$.

a) Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $O(0;0)$ và $A(3;6)$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và trục hoành là $\frac{27}{2}$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng (d) là $\frac{9}{2}$.

d) Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng (d) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay khi quay D quanh Ox là $\frac{104}{3}\pi$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; -1)$ và $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$

a) Một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}(2; -1; 2)$.

b) Khoảng cách từ điểm A đến (P) bằng $\frac{1}{3}$.

c) Mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P) là $(Q): 2x - y + 2z + 1 = 0$.

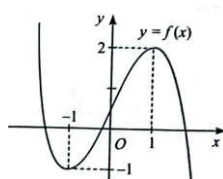
d) Mặt phẳng (P) cắt Ox, Oy, Oz tương ứng tại M, N, K . Thể tích khối tứ diện $OMNK$ bằng $\frac{1}{24}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [3\cos x + f'(x)]dx = -5$ và

$$f(0) = 1. \text{ Tính } f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

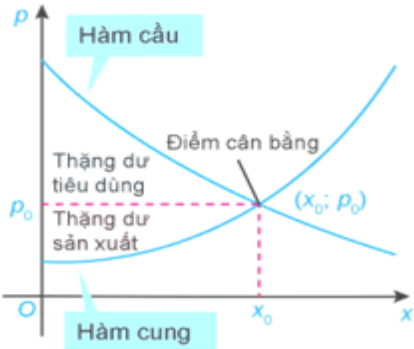
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tính: $I = \int_{-1}^1 f'(x)dx$.

Câu 3: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 12m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 12 - 3t(m/s)$. Hỏi để hai ô tô đạt khoảng cách an toàn thì khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

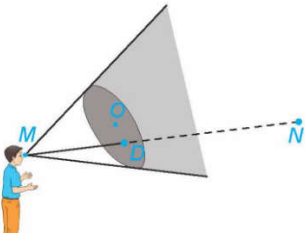
Câu 4: Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $(x_0; p_0)$ của đồ thị hàm cầu $p = D(x)$ và đồ thị hàm cung $p = S(x)$ được gọi là điểm cân bằng. Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ là thặng dư tiêu dùng. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ được gọi là thặng dư sản xuất, như trong hình bên dưới.



Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hóa bởi:
Hàm cầu: $p = -0,36x + 9$ và hàm cung: $p = 0,14x + 2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm hiệu giữa thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.

Câu 5: Góc quan sát ngang của một camera là 115° . Trong không gian $Oxyz$, camera đặt tại điểm $C(1;2;4)$ và chiếu thẳng về mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 3 = 0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có bán kính bằng nhiêu?(Làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, mắt người đặt quan sát ở điểm $M(2;3;-4)$ và vật cần quan sát đặt tại điểm $N(-1;0;8)$. Một tấm bìa chắn đường truyền ánh sáng có dạng hình tròn với tâm $O(0;0;0)$, bán kính bằng 3 và đặt trong mặt phẳng Oxy . Hỏi tầm nhìn của người quan sát đối với vật đặt ở điểm N bị che khuất bởi điểm D có hoành độ bằng?



-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai.

A. $\int f(x)dx = F(x) + C$.

B. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

C. $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x)$.

D. $\left(\int f(x)dx\right)' = F'(x)$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ nên phương án A, B, D đúng.

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

A. $3e^x + C$.

B. $\frac{1}{3}e^{3x} + C$.

C. $\frac{1}{3}e^x + C$.

D. $3e^{3x} + C$.

Lời giải

Ta có: $\int e^{3x}dx = \int (e^3)^x dx = \frac{(e^3)^x}{\ln e^3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C$.

Câu 3: Tính tích phân $I = \int_0^1 (2x + 2025)dx$

A. $I = 2024$.

B. $I = 2025$.

C. $I = 2020$.

D. $I = 2026$.

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^1 (2x + 2025)dx = (x^2 + 2025x)_0^1 = 2026$.

Câu 4: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_{-1}^0 f(x)dx = 3; \int_{-1}^1 f(x)dx = -8$. Khi đó giá trị

$\int_0^1 \frac{f(x)}{2}dx$ bằng

A. $-\frac{5}{2}$.

B. -11 .

C. $\frac{11}{2}$.

D. $-\frac{11}{2}$.

Lời giải

Ta có $\int_{-1}^1 f(x)dx = -8 \Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = -8 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = -11$

$\int_0^1 \frac{f(x)}{2}dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx = -\frac{11}{2}$.

Câu 5: Cho tích phân $\int_0^1 \frac{8^x + 1}{2^x + 1}dx = \frac{1}{\ln 2}.a + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị $4a + b$ bằng

A. 3 .

B. $\frac{2}{3}$.

C. 4 .

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có:

$\int_0^1 \frac{8^x + 1}{2^x + 1}dx = \int_0^1 \frac{(2^x + 1)(2^{2x} - 2^x + 1)}{2^x + 1}dx = \int_0^1 (2^{2x} - 2^x + 1)dx = \left(\frac{2^{2x}}{2\ln 2} - \frac{2^x}{\ln 2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2} + 1$

Theo giả thiết $\int_0^1 \frac{8^x + 1}{2^x + 1}dx = \frac{1}{\ln 2}.a + b \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = 1 \Rightarrow 4a + b = 3$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int_0^{\pi} [f(x) + \sin x] dx = 10$. Tính

$$I = \int_0^{\pi} f(x) dx.$$

A. $I = 4$.

B. $I = 8$.

C. $I = 12$.

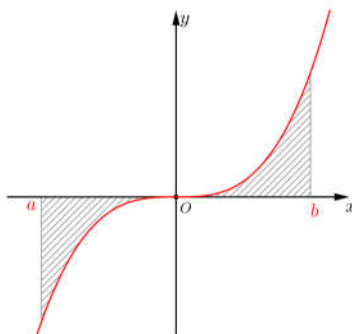
D. $I = 6$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^{\pi} [f(x) + \sin x] dx = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi} f(x) dx - \cos x \Big|_0^{\pi} = 10$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) dx = 10 + (\cos \pi - \cos 0) = 8.$$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$.



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

B. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

C. $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

D. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

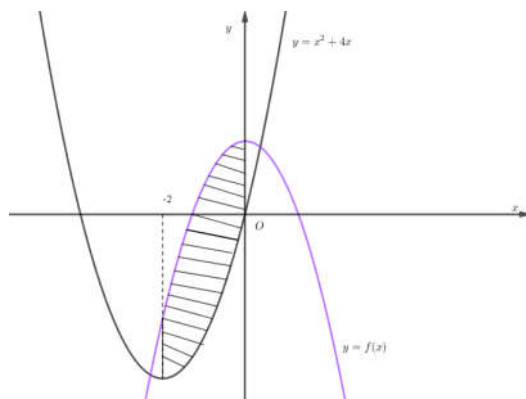
Lời giải

+ Nhìn đồ thị ta thấy:

- Đồ thị (C) cắt trục hoành tại $O(0;0)$
- Trên đoạn $[a;0]$, đồ thị (C) ở dưới trục hoành nên $|f(x)| = -f(x)$
- Trên đoạn $[0;b]$, đồ thị (C) ở trên trục hoành nên $|f(x)| = f(x)$

$$+ \text{Do đó: } S_D = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^0 |f(x)| dx + \int_0^b |f(x)| dx = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$$

Câu 8: Phần hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = x^2 + 4x$ và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 0$.



Biết $\int_{-2}^0 f(x)dx = \frac{4}{3}$. Diện tích hình (H) bằng

A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{20}{3}$.

Lời giải

Diện tích hình (H) là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 [f(x) - (x^2 + 4x)]dx = \int_{-2}^0 f(x)dx - \int_{-2}^0 (x^2 + 4x)dx \\ &= \frac{4}{3} - \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_{-2}^0 = \frac{4}{3} + \frac{(-2)^3}{3} + 2(-2)^2 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

Vậy diện tích hình (H) là $S = \frac{20}{3}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(5;1;0)$ và $C(0;2;4)$. Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

A. $\vec{n} = (2; -26; 9)$.

B. $\vec{n} = (6; -6; 9)$.

C. $\vec{n} = (10; -22; 9)$.

D. $\vec{n} = (10; -22; -9)$.

Lời giải

Mặt phẳng (ABC) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (4;1;2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1;2;6)$ nên có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (2; -26; 9)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -1; 5)$ và $N(0; 0; 1)$. Mặt phẳng (α) chứa M , N và song song với trục Oy có phương trình

A. $(\alpha): 4x - z + 1 = 0$.

B. $(\alpha): x - 4z + 2 = 0$.

C. $(\alpha): 2x + z - 3 = 0$.

D. $(\alpha): x + 4z - 1 = 0$.

Lời giải

Trục Oy có một vectơ đơn vị $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; -1; 5)$ và có một VTPT là $\vec{n} = [\overrightarrow{MN}, \vec{j}] = (4; 0; -1)$ nên có phương trình $(\alpha): 4x - z + 1 = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x + 2z + 3 = 0$. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{a} = (1; 2; 0)$.

B. $\vec{b} = (1; 2; 3)$.

C. $\vec{c} = (1; 0; 2)$.

D. $\vec{d} = (2; 0; -1)$.

Lời giải

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (1; 0; 2)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) nên nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (1; 0; 2)$ của (α) làm một vectơ chỉ phương.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$, $(Q): x - y + z - 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q) ?

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = -3 - t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Lời giải

VTPT của (P) , (Q) lần lượt là $\vec{n}_P = (1; 1; 1)$ và $\vec{n}_Q = (1; -1; 1)$.

$$\Rightarrow \vec{u} = [\vec{n}_p, \vec{n}_Q] = (2; 0; -2) = 2(1; 0; -1) \text{ là VTCP của } \Delta$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ đi qua } A(1; -2; 3) \text{ và có một VTCP là } \vec{u}_1 = (1; 0; -1) \Rightarrow \Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một quả cầu lông được đánh lên từ độ cao $2,5m$ với vận tốc được tính bởi công thức $v(t) = -0,8t + 4,16$ (m/s). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Công thức tính độ cao của quả cầu theo t là $h(t) = -0,4t^2 + 4,16t + 2,5$ (m).

b) Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t = 5,4$ (s).

c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $13,316$ (m).

d) Thời điểm quả cầu chạm đất là $t = 10,5$ (s).

Lời giải

a) Đúng:

$$\text{Ta có } h(t) = \int v(t) dt = \int (-0,8t + 4,16) dt = -0,4t^2 + 4,16t + C.$$

Tại thời điểm ban đầu, độ cao của quả cầu là $2,5m$ nên ta có $h(0) = 2,5$ nên $C = 2,5$.

Vậy nên $h(t) = -0,4t^2 + 4,16t + 2,5$ (m).

b) Sai:

$$\text{Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm } t = -\frac{4,16}{2 \cdot (-0,4)} = 5,2$$
 (s).

c) Đúng: Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $h(5,2) = 13,316$ (m).

$$\text{d) Sai: Quả cầu chạm đất khi } h(t) = 0 \Leftrightarrow -0,4t^2 + 4,16t + 2,5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 10,97 \\ t \approx -0,57 \end{cases}.$$

Vì $t > 0$ nên chọn $t \approx 10,97$ (s).

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x) dx = -2$ và

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2}.$$

$$\text{a) } \int_1^2 f(x) dx = \frac{3}{2}.$$

$$\text{b) } 2 \int_0^1 f(x) dx - 3 \int_1^3 f(x) dx = 23.$$

c) Giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + 6c$ bằng -21 .

d) Giá trị của biểu thức $P = a + b + 3c$ bằng 12 .

Lời giải

a) Đúng.

$$\text{Vì } \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx \text{ nên}$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = -2 - \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

b) Sai.

Vì $\int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx$ nên

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = \frac{13}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) = 10$$

Vậy $2\int_0^1 f(x)dx - 3\int_1^3 f(x)dx = 2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) - 3 \cdot 10 = -37$.

c) **Đúng**

$$\int_0^1 f(x)dx = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)\Big|_0^1 = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{7}{2} \Rightarrow 2a + 3b + 6c = -21.$$

d) **Sai**

Ta có $K = AB, AC$.

$$\int_0^1 f(x)dx = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)\Big|_0^1 = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{7}{2}. \quad (1)$$

$$\int_0^2 f(x)dx = -2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)\Big|_0^2 = -2 \Leftrightarrow \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2. \quad (2)$$

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)\Big|_0^3 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2}. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{7}{2} \\ \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \\ 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -\frac{16}{3} \end{cases}.$$

Vậy $P = a + b + 3c = 1 + 3 - 16 = -12$.

Câu 3: Cho parabol $(P): f(x) = -x^2 + 5x$ và đường thẳng $d: y = 2x$.

a) Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $O(0;0)$ và $A(3;6)$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và trục hoành là $\frac{27}{2}$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng (d) là $\frac{9}{2}$.

d) Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng (d) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay khi quay D quanh Ox là $\frac{104}{3}\pi$.

Lời giải

a) **Đúng.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$-x^2 + 5x = 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 3 \Rightarrow y = 6 \end{cases}.$$

Vậy độ giao điểm của (P) và (d) là $O(0;0)$ và $A(3;6)$.

b) **Sai.**

Ta có $-x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng (d) là $S = \int_0^5 |-x^2 + 5x| dx = \frac{125}{6}$.

c) **Đúng**

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và trục hoành là $S = \int_0^3 |-x^2 + 3x| dx = \frac{9}{2}$.

d) **Đúng**

Thể tích của khối tròn xoay khi quay D quanh Ox là: $V = \pi \int_1^3 (2x)^2 dx = \frac{104}{3} \pi$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; -1)$ và $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$

a) Một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}(2; -1; 2)$.

b) Khoảng cách từ điểm A đến (P) bằng $\frac{1}{3}$.

c) Mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P) là $(Q): 2x - y + 2z + 1 = 0$.

d) Mặt phẳng (P) cắt Ox, Oy, Oz tương ứng tại M, N, K . Thể tích khối tứ diện $OMNK$ bằng $\frac{1}{24}$

Lời giải

a) **Đúng.**

Vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}(2; -1; 2)$.

b) **Sai.**

Khoảng cách từ điểm A đến (P) bằng $\frac{|2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 1$.

c) **Sai**

Mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P) là

$$(Q): 2(x-1) - (y-2) + 2(z+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2z + 2 = 0$$

d) **Đúng**

$$\text{Ta có } (P) \cap Ox = M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right) \Rightarrow OM = \frac{1}{2}.$$

$$(P) \cap Oy = N(0; -1; 0) \Rightarrow ON = 1.$$

$$(P) \cap Oz = K\left(0; 0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow OK = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{OMNK} = \frac{1}{6} OM \cdot ON \cdot OK = \frac{1}{24}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [3 \cos x + f'(x)] dx = -5$ và

$$f(0) = 1. \text{ Tính } f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

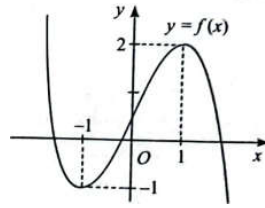
Lời giải

Đáp án: -7

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = -8$$

$$\text{Vậy } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = 1 - 8 = -7$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



$$\text{Tính: } I = \int_{-1}^1 f'(x) dx.$$

Lời giải

Đáp án: 3

$$\text{Ta có } I = \int_{-1}^1 f'(x) dx = f(1) - f(-1) = 2 + 1 = 3.$$

Câu 3: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 12m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 12 - 3t (m/s)$. Hỏi để hai ô tô đạt khoảng cách an toàn thì khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 25

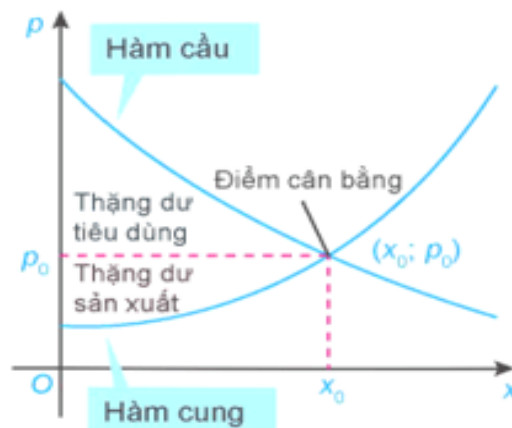
Khi đã dừng lại thì vận tốc ô tô A bằng 0 nên: $12 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Như vậy phải mất 4s kể từ khi bắt đầu hãm phanh thì xe mới dừng hẳn.

$$\text{Trong khoảng 4s này, quãng đường xe đi được là } s = \int_0^4 (12 - 3t) dt = 24 \text{ m}$$

Vậy để hai ô tô đạt khoảng cách an toàn thì khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $24 + 1 = 25\text{m}$

Câu 4: Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $(x_0; p_0)$ của đồ thị hàm cầu $p = D(x)$ và đồ thị hàm cung $p = S(x)$ được gọi là điểm cân bằng. Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ là thặng dư tiêu dùng. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ được gọi là thặng dư sản xuất, như trong Hình 4.19.



Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hóa bởi:

Hàm cầu: $p = -0,36x + 9$ và hàm cung: $p = 0,14x + 2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm hiệu giữa thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.

Lời giải

Đáp án: 21,56

Hoành độ điểm cân bằng là nghiệm của phương trình: $-0,36x + 9 = 0,14x + 2 \Leftrightarrow x = 14$.

Tọa độ điểm cân bằng là $(14; 3,96)$.

Thặng dư tiêu dùng là:

$$S_1 = \int_0^{14} |-0,36x + 9 - 3,96| dx = \int_0^{14} |-0,36x + 5,04| dx = \int_0^{14} (-0,36x + 5,04) dx$$

$$= (-0,18x^2 + 5,04x) \Big|_0^{14} = 35,28.$$

Thặng dư sản xuất là:

$$S_2 = \int_0^{14} |3,96 - 0,14x - 2| dx = \int_0^{14} |1,96 - 0,14x| dx = \int_0^{14} (1,96 - 0,14x) dx$$

$$= (1,96x - 0,07x^2) \Big|_0^{14} = 13,72.$$

Vậy hiệu giữa thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này là:

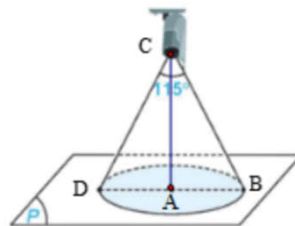
$$35,28 - 13,72 = 21,56.$$

Câu 5: Góc quan sát ngang của một camera là 115° . Trong không gian $Oxyz$, camera đặt tại điểm $C(1; 2; 4)$ và chiếu thẳng về mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 3 = 0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có bán kính bằng nhiêu? (Làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Đáp án: 8,4

Chọn các điểm như hình vẽ.



Gọi A là hình chiếu của C trên mặt phẳng (P) .

Vì tam giác CBD là tam giác cân nên CA là đường cao, phân giác, trung tuyến của tam giác CBD .

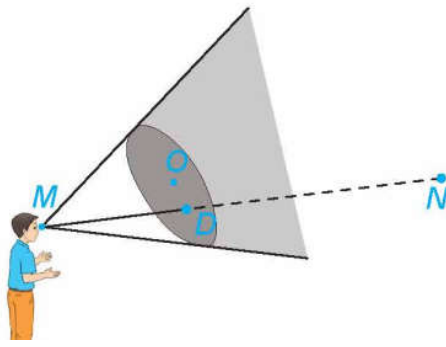
$$\text{Ta có } CA = d_{(C;(P))} = \frac{|1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{16}{3}$$

Vì tam giác CAB vuông tại A , ta có:

$$\tan 57,5^\circ = \frac{AB}{CA} \Rightarrow AB = CA \cdot \tan 57,5^\circ = \frac{16}{3} \tan 57,5^\circ \approx 8,4$$

Vậy vùng quan sát được trên mặt phẳng của camera là hình tròn có bán kính bằng 8,4.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, mắt người đặt quan sát ở điểm $M(2; 3; -4)$ và vật cần quan sát đặt tại điểm $N(-1; 0; 8)$. Một tấm bìa chắn đường truyền ánh sáng có dạng hình tròn với tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính bằng 3 và đặt trong mặt phẳng Oxy . Hỏi tầm nhìn của người quan sát đối với vật đặt ở điểm N bị che khuất bởi điểm D có hoành độ bằng?



Lời giải

Đáp án: 1

Ta có $MN \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{MN} = (-3; -3; 12) = -3(1; 1; -4) \\ M(2; 3; -4) \end{cases}$

Phương trình tham số MN là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -4 - 4t \end{cases}$

Gọi D là giao điểm của MN và mặt phẳng tấm bìa, nên D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -4 - 4t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow D(1; 2; 0)$$

Ta có

$$\overrightarrow{MD} = (-1; -1; 4) \Rightarrow MD = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18}$$

$$\overrightarrow{MN} = (-3; -3; 12) \Rightarrow MN = \sqrt{9 + 9 + 144} = \sqrt{162}$$

Vì $MN > MD$, nên tại N sẽ bị che bởi điểm $D(1; 2; 0)$.

-----**HẾT**-----



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int f'(x) dx = f(x) + C.$

B. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

C. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \forall \alpha \neq -1.$

D. $\int a^x dx = a^x \ln a + C (0 < a \neq 1).$

Câu 2: $\int 6x^5 dx$ bằng

A. $6x^6 + C.$

B. $x^6 + C.$

C. $\frac{1}{6}x^6 + C.$

D. $30x^6 + C.$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[m; n]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm khẳng định **sai**

A. $\int_m^n f(x) dx = -\int_n^m f(x) dx.$

B. $\int_m^n f(x) dx = F(m) - F(n).$

C. $\int_m^m f(x) dx = 0.$

D. $\int_m^n f(x) dx = F(n) - F(m).$

Câu 4: Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a; b] \subset \mathbb{R}$ và các số thực $k \in \mathbb{R}, c \in [a; b]$. Khi đó biểu thức nào **sai**?

A. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx.$

B. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

C. $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$

D. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$

Câu 5: Tính $\int_3^5 (x^2 + 2x) dx$

A. $\frac{146}{3}.$

B. 146.

C. 3.

D. $\frac{143}{6}.$

Câu 6: Tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. 2.

Câu 7: Cho hai hàm số $y = f(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a; b]$ và $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a; x = b$ được tính bởi công thức:

A. $S = \int_a^b f(x)dx$. **B.** $S = \pi \int_a^b f(x)dx$. **C.** $S = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. **D.** $S = \int_a^b f^2(x)dx$.

Câu 8: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = x^2 - 1$ và trục hoành.

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 3 = 0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)

A. $\vec{n}_1 = (2; 1; 1)$. **B.** $\vec{n}_2 = (2; 0; 0)$. **C.** $\vec{n}_3 = (0; 0; 3)$. **D.** $\vec{n}_4 = (2; 1; -1)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB biết $A(2; -1; 0)$, $B(-4; 3; 2)$ là:

A. $-3x + y + z - 5 = 0$. **B.** $-3x + 2y + z - 6 = 0$.
C. $-x + y + z - 5 = 0$. **D.** $-x + y + z - 6 = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, Cho điểm $A(-1; 5; 3)$, $B(0; 2; 3)$. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB ?

A. $\vec{u} = (-1; 7; 6)$. **B.** $\vec{u} = (-1; 7; 5)$. **C.** $\vec{u} = (1; -3; 0)$. **D.** $\vec{u} = (-1; 3; 1)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2; 4; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$.

A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+3}{6}$. **B.** $\frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-6}{3}$.
C. $\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{6}$. **D.** $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-6}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $F(x) = x^2 - x - 5$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a)** $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 5x + C$.
b) $f(1) - f(2) = \frac{25}{6}$.
c) Gọi hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $G(2) = -2$ thì $G(-2) = 2$.
d) Biết $\int G(3x-1)dx = ax^3 + bx^2 + dx + C$ với b là phân số tối giản và $a, d \in \mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức $T = a + 2b + d = -8$.

Câu 2: Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

- a)** $\int_a^b f'(x)dx = f(a) - f(b)$.
b) Biết rằng $\int_1^2 f(x)dx = 9$, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[1; 2]$, $F(1) = 3$ thì $F(2) = 12$.
c) Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 3$; $\int_{-1}^4 f(x)dx = 7$. Khi đó $\int_2^4 f(x)dx = 4$.
d) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$. Thỏa $f(1) = 3, x(4 - f'(x)) = f(x) - 1, \forall x > 0$. Khi đó $f(2) = 5$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, điểm $H(2;1;2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) .

a) Mặt phẳng (P) qua O nhận $\overrightarrow{OH}$ làm một véc tơ pháp tuyến.

b) Mặt phẳng (P) có phương trình $2x + y + 2z - 9 = 0$.

c) Tồn tại một giá trị của tham số m nguyên dương để mặt phẳng $(Q): x - my - m = 0$ tạo với (P) một góc 45° .

d) Có duy nhất một mặt phẳng (α) song song với (P) , cách $M(3;2;1)$ một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ biết rằng trên tồn tại một điểm $E(a;b;c)$ thỏa $2a + b + 2c < 4$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$ và $d': \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ x = -2-t \end{cases}$

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;0;2)$

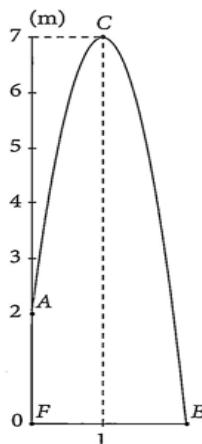
b) Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương có tọa độ $(1;0;-2)$

c) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau

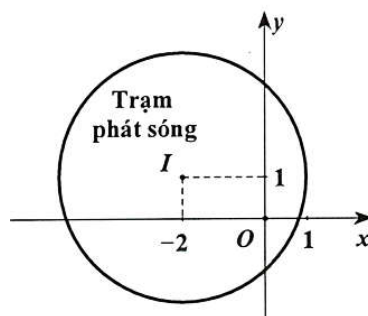
d) Đường thẳng đi qua điểm M và song song với đường thẳng d' có phương trình chính tắc là $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một viên bi được ném xiên từ vị trí A cách mặt đất $2m$ theo quỹ đạo dạng parabol. Khoảng cách từ vị trí E đến vị trí F là bao nhiêu mét? Biết rằng vị trí E là nơi viên bi rơi xuống chạm mặt đất. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

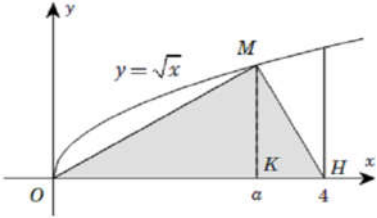


Câu 2: Hình vẽ bên dưới mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có tọa độ $(-2;1)$ trong mặt phẳng tọa độ. Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét. Biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng $3km$. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai.



Câu 3: Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a$ (m/s), ($t \geq 6$) cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì ô tô đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0 .

Câu 4: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M . Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Tìm a .



Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, gọi $(P): ax + by + cz + 5 = 0$ là mặt phẳng đi qua $A(-1;-2;2), B(-5;2;2)$ và không đi qua điểm $H(0;0;3)$. Biết rằng khoảng cách H đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tính $T = 2a + b - 3c$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, đơn vị đo lấy km, Rada ở vị trí điểm $I(800;500;200)$ phát hiện ra một chiếc máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(500;200;150)$ đến điểm $B(600;250;100)$. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc, khi cách Rada một khoảng nhỏ nhất thì máy bay đi được quãng đường là bao nhiêu km kể từ khi Rada phát hiện ra chiếc máy bay từ điểm A ? *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

B. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

C. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \forall \alpha \neq -1.$

D. $\int a^x dx = a^x \ln a + C (0 < a \neq 1).$

Lời giải

Ta có $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$ nên phương án **D** sai.

Câu 2: $\int 6x^5 dx$ bằng

A. $6x^6 + C.$

B. $x^6 + C.$

C. $\frac{1}{6}x^6 + C.$

D. $30x^6 + C.$

Lời giải

Ta có $\int 6x^5 dx = 6 \cdot \frac{x^6}{6} + C = x^6 + C.$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[m; n]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm khẳng định **sai**

A. $\int_m^n f(x) dx = -\int_n^m f(x) dx.$

B. $\int_m^n f(x) dx = F(m) - F(n).$

C. $\int_m^m f(x) dx = 0.$

D. $\int_m^n f(x) dx = F(n) - F(m).$

Lời giải

Theo định nghĩa tích phân $\int_m^n f(x) dx = F(n) - F(m).$

Câu 4: Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a; b] \subset \mathbb{R}$ và các số thực $k \in \mathbb{R}, c \in [a; b]$. Khi đó biểu thức nào **sai**?

A. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx.$

B. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

C. $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$

D. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$

Lời giải

Ta có: $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$ là sai.

Câu 5: Tính $\int_3^5 (x^2 + 2x) dx$

A. $\frac{146}{3}.$

B. 146.

C. 3.

D. $\frac{143}{6}.$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}\int_3^5 (x^2 + 2x) dx &= \int_3^5 x^2 dx + 2 \int_3^5 x dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_3^5 + 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_3^5 \\ &= \frac{1}{3} x^3 \Big|_3^5 + x^2 \Big|_3^5 = \frac{1}{3} (5^3 - 3^3) + (5^2 - 3^2) = \frac{146}{3}.\end{aligned}$$

Câu 6: Tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Câu 7: Cho hai hàm số $y = f(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a; b]$ và $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a; x = b$ được tính bởi công thức:

A. $S = \int_a^b f(x) dx$. **B.** $S = \pi \int_a^b f(x) dx$. **C.** $S = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **D.** $S = \int_a^b f^2(x) dx$.

Lời giải

$$\text{Theo định nghĩa ta có: } S = \int_a^b f(x) dx.$$

Câu 8: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = x^2 - 1$ và trục hoành.

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. 1.

D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có phương trình hoành độ giao điểm của } y = x^2 - 1 \text{ và trục hoành là } 0 = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Diện tích là

$$\int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx = \int_{-1}^1 1 - x^2 dx = \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}.$$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 3 = 0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)

A. $\vec{n}_1 = (2; 1; 1)$.

B. $\vec{n}_2 = (2; 0; 0)$.

C. $\vec{n}_3 = (0; 0; 3)$.

D. $\vec{n}_4 = (2; 1; -1)$.

Lời giải

Một vectơ pháp tuyến của $(P): 2x + y - z + 3 = 0$ là $\vec{n}_2 = (2; 1; -1)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB biết $A(2; -1; 0)$, $B(-4; 3; 2)$ là:

A. $-3x + y + z - 5 = 0$.

B. $-3x + 2y + z - 6 = 0$.

C. $-x + y + z - 5 = 0$.

D. $-x + y + z - 6 = 0$.

Lời giải

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của AB .

Khi đó (α) đi qua trung điểm $I(-1; 1; 1)$ của đoạn AB và (α) có véc tơ pháp tuyến

$\vec{n} = \vec{AI} = (-3; 2; 1)$. Do đó (α) có phương trình:

$$-3(x+1) + 2(y-1) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y + z - 6 = 0.$$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 5; 3)$, $B(0; 2; 3)$. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB ?

A. $\vec{u} = (-1; 7; 6)$.

B. $\vec{u} = (-1; 7; 5)$.

C. $\vec{u} = (1; -3; 0)$.

D. $\vec{u} = (-1; 3; 1)$.

Lời giải

Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1; -3; 0)$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2; 4; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$.

A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+3}{6}$.

B. $\frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-6}{3}$.

C. $\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{6}$.

D. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-6}{3}$.

Lời giải

Mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$ có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}_\alpha = (2; -3; 6)$.

Vì đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) nên đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là: $\vec{u}_\Delta = \vec{n}_\alpha = (2; -3; 6)$.

Phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{6}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $F(x) = x^2 - x - 5$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 5x + C$.

b) $f(1) - f(2) = \frac{25}{6}$.

c) Gọi hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $G(2) = -2$ thì $G(-2) = 2$.

d) Biết $\int G(3x-1)dx = ax^3 + bx^2 + dx + C$ với b là phân số tối giản và $a, d \in \mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức $T = a + 2b + d = -8$.

Lời giải

a) Theo định nghĩa nguyên hàm ta có $f(x) = F'(x) = (x^2 - x - 5)' = 2x - 1$ nên a) sai.

b) Ta có $f(1) - f(2) = (2 \cdot 1 - 1) - (2 \cdot 2 - 1) = -2$ nên b) sai.

c) Ta có $G(x) = x^2 - x + C$. Vì $G(2) = -2$ nên $2^2 - 2 + C = -2 \Leftrightarrow C = -4$.

Suy ra $G(x) = x^2 - x - 4$. Do đó, $G(-2) = (-2)^2 + 2 - 4 = 2$. Vậy c) đúng.

d) Ta có $\int G(3x-1)dx = \int [(3x-1)^2 - (3x-1) - 4]dx = \frac{(3x-1)^3}{9} - \frac{(3x-1)^2}{6} - 4x + C$
 $= 3x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 2x + C$

Do đó $a = 3; b = -\frac{9}{2}; d = -2$. Suy ra $T = a + 2b + d = 3 + 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) - 2 = -8$. Vậy d) đúng.

Câu 2: Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

a) $\int_a^b f'(x)dx = f(a) - f(b)$.

- b)** Biết rằng $\int_1^2 f(x)dx = 9$, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[1;2]$, $F(1) = 3$ thì $F(2) = 12$.
- c)** Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 3$; $\int_{-1}^4 f(x)dx = 7$. Khi đó $\int_2^4 f(x)dx = 4$.
- d)** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$. Thỏa $f(1) = 3, x(4 - f'(x)) = f(x) - 1, \forall x > 0$. Khi đó $f(2) = 5$.

Lời giải

- a) Sai.** Vì $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.
- b) Đúng.** Vì $\int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1) = 9 \Rightarrow F(2) = F(1) + 9 = 12$.
- c) Đúng.** Vì $\int_{-1}^4 f(x)dx = \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx \Rightarrow \int_2^4 f(x)dx = 7 - 3 = 4$.
- d) Đúng.** Vì $x(4 - f'(x)) = f(x) - 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = 4x + 1 \Leftrightarrow [xf(x)]' = 4x + 1$
 $\Rightarrow \int_1^2 (xf(x))' dx = \int_1^2 (4x + 1)dx = 7 \Leftrightarrow 2f(2) - f(1) = 7 \Leftrightarrow f(2) = \frac{7 + f(1)}{2} = 5$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, điểm $H(2;1;2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) .

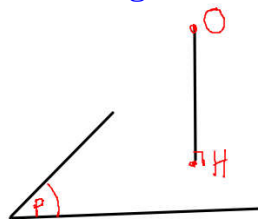
a) Mặt phẳng (P) qua O nhận $\overrightarrow{OH}$ làm một véc tơ pháp tuyến.

b) Mặt phẳng (P) có phương trình $2x + y + 2z - 9 = 0$.

c) Tồn tại một giá trị của tham số m nguyên dương để mặt phẳng $(Q): x - my - m = 0$ tạo với (P) một góc 45° .

d) Có duy nhất một mặt phẳng (α) song song với (P) , cách $M(3;2;1)$ một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ biết rằng trên tồn tại một điểm $E(a;b;c)$ thỏa $2a + b + 2c < 4$.

Lời giải



a) Sai Mặt phẳng (P) qua H nhận $\overrightarrow{OH}$ làm một véc tơ pháp tuyến.

b) Đúng Mặt phẳng (P) qua H và nhận $\overrightarrow{OH} = (2;1;2)$ làm VTPT nên có phương trình $2(x - 2) + 1(y - 1) + 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 2z - 9 = 0$

c) Sai $(Q): x - my - m = 0$ có VTPT $\vec{n}_{(Q)} = (1; -m; 0)$; $\vec{n}_{(P)} = (2; 1; 2)$

$$\text{Góc giữa } (P) \text{ và } (Q) \text{ là } 45^\circ \text{ suy ra } \cos 45^\circ = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Q)}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|2 - m + 0|}{\sqrt{1 + m^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{4 - 4m + m^2}{(1 + m^2) \cdot 9} \Leftrightarrow 9m^2 + 9 = 8 - 8m + 2m^2$$

$$\Leftrightarrow 7m^2 + 8m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{1}{7} \end{cases} \text{ . Không có số nguyên dương } m.$$

d) **Sai** Do (α) song song với (P) , suy ra: $2x + y + 2z + D = 0 (D \neq -9)$.

$$d(M, (\alpha)) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 3 + 2 + 2 \cdot 1 + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow |10 + D| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -8 \\ D = -12 \end{cases}$$

Với $D = -8$ suy ra: $2x + y + 2z - 8 = 0$

Xét điểm $E(a; b; c) \in \alpha \Rightarrow 2a + b + 2c - 8 = 0 \Rightarrow 2a + b + 2c = 8 < 4$ nên $D = -8$ loại

Với $D = -12$ suy ra: $2x + y + 2z - 12 = 0$

Xét điểm $E(a; b; c) \in \alpha \Rightarrow 2a + b + 2c - 12 = 0 \Rightarrow 2a + b + 2c = 12 < 4$ nên $D = -12$ loại

Vậy không có mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$ và $d': \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ x = -2-t \end{cases}$

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1; 0; 2)$.

b) Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương có tọa độ $(1; 0; -2)$.

c) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau

d) Đường thẳng đi qua điểm M và song song với đường thẳng d' có phương trình chính tắc là

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

Lời giải

a) Vì $\frac{-1-1}{2} = \frac{0}{1} = \frac{2+2}{3}$ sai nên a) **sai**

b) Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{u}'(1; 1; -1)$, vectơ có tọa độ $(1; 0; -2)$ không cùng phương với $\vec{u}'$ nên b) **sai**

c) Thay $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ x = -2-t \end{cases}$ vào phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$ ta được

$$\frac{1+t-1}{2} = \frac{t}{1} = \frac{-2-t+2}{3} \Leftrightarrow t = 0$$

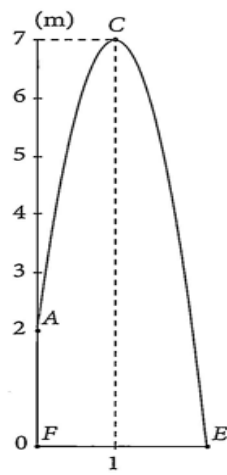
Do vậy, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm $N(-1; 0; 2)$ nên c) **đúng**

d) Đường thẳng đi qua điểm M và song song với đường thẳng d' nên có vectơ chỉ phương $\vec{u}'(1; 1; -1)$.

Do vậy đường thẳng này có phương trình chính tắc là $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ nên d) **đúng**

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một viên bi được ném xiên từ vị trí A cách mặt đất $2m$ theo quỹ đạo dạng parabol. Khoảng cách từ vị trí E đến vị trí F là bao nhiêu mét? Biết rằng vị trí E là nơi viên bi rơi xuống chạm mặt đất. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.



Lời giải

Đáp án: 2,2

Giả sử gốc toạ độ tại điểm F .

Hàm số của đồ thị biểu diễn đường đi của viên bi có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Đồ thị có đỉnh là $C(1; 7)$ và đi qua điểm $A(0; 2)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 7 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b + 2 = 7 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 10 \\ c = 2 \end{cases}$$

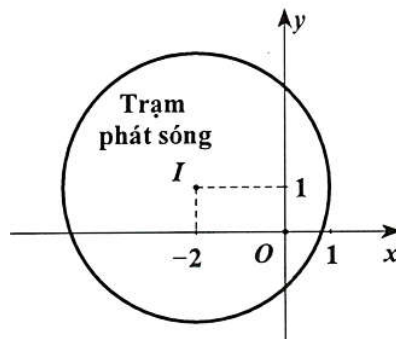
Do đó, đồ thị hàm số biểu diễn đường đi của viên bi là $y = -5x^2 + 10x + 2$.

Điểm E là giao điểm của đồ thị với trục hoành nên hoành độ của điểm E là nghiệm của phương trình $-5x^2 + 10x + 2 = 0$ phương trình này và kết hợp với điều kiện $x_E > 0$ ta nhận

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{35}}{5}.$$

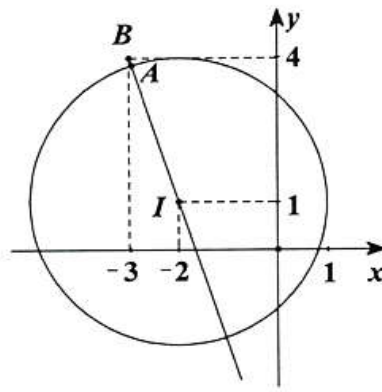
Vậy khoảng cách từ vị trí E đến vị trí F là $\frac{5 + \sqrt{35}}{5} \approx 2,2$ mét.

Câu 2: Hình vẽ bên dưới mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có toạ độ $(-2; 1)$ trong mặt phẳng toạ độ. Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $(-3; 4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét. Biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km . *Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai.*



Lời giải

Đáp án: 0,16



Đường tròn màu đỏ mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng có tâm $I(-2; 1)$ và bán kính phủ sóng 3km nên phương trình đường tròn đó là: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

Giả sử vị trí đứng của người đó là $B(-3; 4)$.

Gọi A là giao điểm thứ nhất của đường tròn tâm I và BI

$\Rightarrow$ Khoảng cách ngắn nhất để người đó di chuyển được từ vị trí $B(-3; 4)$ tới vùng phủ sóng là BA

Ta có: $IB = \sqrt{(-3 + 2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{10}$, suy ra $AB = IB - IA = \sqrt{10} - 3 \approx 0,16$.

Câu 3: Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a$ (m/s), ($t \geq 6$) cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì ô tô đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0 .

Lời giải

Đáp án: 10

- Tại thời điểm $t = 6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có $v(6) = v_0$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \cdot 6 + a = v_0 \Leftrightarrow a = v_0 + 15, \text{ suy ra } v(t) = -\frac{5}{2}t + v_0 + 15.$$

- Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, vậy ta có $v(k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5} \cdot (v_0 + 15) \Leftrightarrow k = \frac{2v_0}{5} + 6$.

$$\text{- Tổng quãng đường vật đi được là } 80 = 6.v_0 + \int_6^k \left(-\frac{5}{2}t + v_0 + 15 \right) dt$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6.v_0 + \left(-\frac{5}{4}t^2 + v_0.t + 15t \right) \Big|_6^k$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6.v_0 - \frac{5}{4}(k^2 - 6^2) + v_0.(k - 6) + 15(k - 6)$$

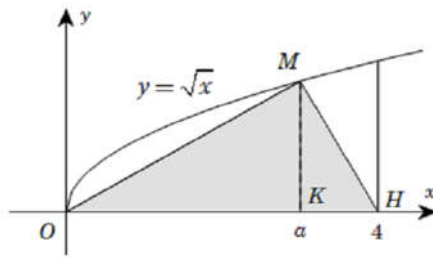
$$\Leftrightarrow 80 = 6.v_0 - \frac{5}{4} \left(\frac{4(v_0)^2}{25} + \frac{24v_0}{5} \right) + v_0 \cdot \frac{2v_0}{5} + 15 \cdot \frac{2v_0}{5}$$

$$\Leftrightarrow (v_0)^2 + 36.v_0 - 400 = 0$$

$$\Leftrightarrow v_0 = 10$$

Vậy vận tốc ban đầu là $v_0 = 10$.

Câu 4: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M . Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Tìm a .



Lời giải

Đáp án: 3

Ta có: $V = \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi$. Mà $V = 2V_1 \Rightarrow V_1 = 4\pi$.

Gọi K là hình chiếu của M trên $Ox \Rightarrow OK = a, KH = 4 - a, MK = \sqrt{a}$.

Khi xoay tam giác OMH quanh Ox ta được khối tròn xoay là sự lắp ghép của hai khối nón sinh bởi các tam giác OMK, MHK , hai khối nón đó có cùng mặt đáy và có tổng chiều cao là $OH = 4$

nên thể tích của khối tròn xoay đó là $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (\sqrt{a})^2 = \frac{4\pi a}{3}$, từ đó suy ra $a = 3$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, gọi $(P): ax + by + cz + 5 = 0$ là mặt phẳng đi qua $A(-1; -2; 2), B(-5; 2; 2)$ và không đi qua điểm $H(0; 0; 3)$. Biết rằng khoảng cách H đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tính $T = 2a + b - 3c$.

Lời giải

Đáp án: 3

Gọi K là hình chiếu của H trên mặt phẳng (P) , E là hình chiếu của H trên AB .

Ta có: $d(H, (P)) = HK, d(H, AB) = HE, HK \leq HE$.

Vậy khoảng cách H đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất bằng HE khi $K \equiv E$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-4; 4; 0)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $A(-1; -2; 2)$ và có VTCP $\vec{u}(1; -1; 0)$ là:
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 - t \\ z = 2 \end{cases}$$

Gọi $E(-1 + t; -2 - t; 2) \in AB$. Ta có: $\overrightarrow{EH}(1 - t; 2 + t; 1)$.

$\overrightarrow{HE} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1 - t - 2 - t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{EH}\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(-1; -2; 2)$ có VTPT $\vec{n}(3; 3; 2)$ là

$3(x + 1) + 3(y + 2) + 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 3y + 2z + 5 = 0$.

Vậy $a = 3; b = 3, c = 2 \Rightarrow T = 2a + b - 3c = 3$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, đơn vị đo lấy km, Rada ở vị trí điểm $I(800; 500; 200)$ phát hiện ra một chiếc máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(500; 200; 150)$ đến điểm $B(600; 250; 100)$. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc, khi cách Rada một khoảng nhỏ nhất thì máy bay đi được quãng đường là bao nhiêu km kể từ khi Rada phát hiện ra chiếc máy bay từ điểm A? *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*

Lời giải

Đáp án: 102

Ta có: $\overrightarrow{AB}(100; 50; -50)$, suy ra đường thẳng AB có VTCP $\vec{u}(2; 1; -1)$.

Phương trình đường thẳng AB là:
$$\begin{cases} x = 500 + 2t \\ y = 200 + t \\ z = 150 - t \end{cases}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB , khi đó khoảng cách từ Rada đến máy bay ngắn nhất là IH . Khi đó: $H(500 + 2t; 200 + t; 150 - t) \in AB \Rightarrow \overrightarrow{IH}(2t - 300; t - 300; -t - 50)$.

Ta có: $\overrightarrow{IH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 300) + 1(t - 300) - 1(-t - 50) = 0$

$$\Leftrightarrow 4t - 600 + t - 300 + t + 50 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{125}{3} \Rightarrow H\left(\frac{1750}{3}; \frac{725}{3}; \frac{325}{3}\right).$$

$$\text{Vậy } AH = \sqrt{\left(500 - \frac{1750}{3}\right)^2 + \left(200 - \frac{725}{3}\right)^2 + \left(150 - \frac{325}{3}\right)^2} \approx 102 \text{ km.}$$

-----**HẾT**-----